



Asepelt
España

Comunicaciones XIV Reunión

ANÁLISIS DINÁMICO DE LA POBREZA

Domingo Martín Martín - domartin@cica.es

M. Rosario González Rodríguez - rosaglez@cica.es

Ana Domínguez Quintero - anadq@cica.es

Universidad de Sevilla

Anales de Economía Aplicada

Oviedo 2³
Junio 2000 4



Reservados todos los derechos.

Este documento ha sido extraído del CD Rom “Anales de Economía Aplicada. XIV Reunión ASEPELT-España. Oviedo, 22 y 23 de Junio de 2000”.

ISBN: 84-699-2357-9

Análisis Dinámico de la Pobreza

Autores: **Martín Martín, Domingo**
E-mail: domartin@cica.es
González Rodríguez, M. Rosario
E-mail: rosaglez@cica.es
Domínguez Quintero, Ana
E-mail: anadq@cica.es

Departamento de Economía Aplicada I.

Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Sevilla

Desde los años 70 se ha venido observando en la literatura una gran cantidad de trabajos empíricos que cuantifican la pobreza y la desigualdad del ingreso a corto plazo, utilizando para ello Encuestas de Presupuestos Familiares, básicamente anuales. Sin embargo, se ha estudiado poco la perspectiva longitudinal de estos fenómenos. Recientemente la disponibilidad de datos de Panel, ha facilitado la aparición de estudios de carácter longitudinal. En esta línea, el objetivo que persigue nuestro trabajo es realizar un análisis dinámico de la pobreza y conocer qué factores inciden en la duración del tiempo que un individuo pobre tarda en salir de la pobreza. Los datos que utilizaremos proceden de la base de datos PACO Panel Comparability, datos elaborados por the Human Capital and Mobility Programme.

Palabras Claves: Pobreza, Análisis Longitudinal, Métodos no paramétricos

Introducción

Las bases de datos de corte transversal se han utilizado durante mucho tiempo en los estudios de pobreza permitiendo, entre otras cosas, cuantificar la proporción de hogares que son pobres e identificar aquellas características socioeconómicas de dicha población en un momento específico del tiempo. No obstante, el desarrollo reciente de otro tipo de bases de datos, datos de panel, hacen viable el análisis del fenómeno de la pobreza en el tiempo de una forma más detallada. En este sentido, dichas encuestas permiten determinar si la pobreza es una situación a corto plazo, debido por ejemplo a factores negativos como depresión en el ciclo económico, o si por el contrario es una situación a largo plazo, es decir, si constituye una condición permanente que se transmite de generación en generación. La distinción entre “pobreza transitoria” y “pobreza permanente” es de vital importancia hoy día, sobre todo en los países industrializados, en los que un gran número de hogares experimentan períodos cortos de pobreza a lo largo de sus vidas. Además esta distinción es crucial en lo que se refiere a la formulación de políticas públicas, puesto que si bien la pobreza transitoria aparece como un fenómeno que tiende a solventarse por sí mismo, la pobreza permanente por el contrario, constituye un problema más grave que requiere la acción de políticas públicas específicas para la reducción de la misma.

El objetivo del trabajo se centra en un análisis de la dinámica de la pobreza en Alemania en el período 1985-1996, utilizando para ello un análisis no paramétrico. El trabajo consta de tres partes y dos apéndices. En la primera describimos la base de datos y aspectos metodológicos para la cuantificación de la pobreza. En la segunda parte tras introducir los conceptos básicos de duración realizamos un análisis no paramétrico. En la tercera presentamos algunas conclusiones y futuras líneas de trabajo. Y por último hemos introducido dos apéndices que explican el proceso seguido hasta obtener las duraciones en pobreza y un breve desarrollo sobre el estimador de Kaplan-Meier.

1. Aspectos metodológicos en la medición de la pobreza y la base de datos PACO

Base de datos

En el trabajo utilizamos la base de datos PACO (Panel comparability project). Esta es una base de datos de corte transversal y longitudinal; contiene variables comparables para varios países (Alemania, Reino Unido, Francia, Luxemburgo, Estados Unidos, Hungría, Polonia), las cuales, fueron creadas partiendo de los datos de panel originales de cada país (PSELL/Luxemburgo, BHPS/UK, ESEML/Lorraine, SOEP/Alemania, y PSID/USA) utilizando un plan de trabajo común, así como clasificaciones internacionales estandarizadas en aquellos casos donde fueran posibles. A pesar de que esta base de datos nos permitiría realizar comparaciones entre los países anteriormente citados, nuestro interés se centra en un análisis de la pobreza, su duración, así como de los factores que influyen en

ella, para el caso de Alemania. La elección de este país obedece a necesidades prácticas puesto que era el panel de datos que abarcaba un periodo de observación más amplio.

Unidad de análisis

Las unidades de observación que aparecen en la base de datos PACO para Alemania son el individuo y el hogar. El hogar se define como un conjunto de personas que viven bajo un mismo techo (casa, apartamento, grupo de habitaciones o una sola habitación) compartiendo la totalidad de ingresos y gastos del hogar. Se incluyen las parejas no casadas, si conviven de una forma casi permanente. Se excluyen los huéspedes, los compañeros de cuarto convencionales, o los empleados que comparten alojamiento. La unidad elegida para el estudio ha sido el hogar.

Indicador

Mucho se ha escrito sobre la cuestión de si la pobreza debe expresarse en términos de ingreso o de gasto. Los argumentos en este debate son mas bien de naturaleza filosófica que económica. Así, por ejemplo, a la pregunta ¿es la pobreza consecuencia de la desigualdad en las oportunidades de partida o por el contrario es la consecuencia de la desigualdad en los resultados?, se podría responder diciendo que en el primer caso el ingreso constituye el indicador más adecuado para medir el bienestar, mientras que en el segundo caso el gasto en consumo sería el mejor indicador a utilizar. Preferimos la variable ingreso disponible en la medida en que éstos permiten medir las oportunidades del hogar y por tanto la de sus miembros a acceder a una vida digna, es decir, estamos interesados en aquella concepción de la pobreza relativa al derecho a unos recursos mínimos. Además, en la base de datos PACO la información sobre el consumo de los hogares no está disponible.

Medición de la pobreza

Desde una perspectiva general se puede considerar que la medición de la pobreza consiste en dos operaciones distintas Sen(1976, 1978, 1979):

- 1.-Identificación de la población pobre (¿quiénes son los pobres?)
- 2.-Agregación (¿Cómo combinar las características de pobreza de los diferentes hogares en una medida agregada?)

El proceso de identificación comprende el uso de escalas de equivalencia y construcción de líneas de pobreza, no existiendo un acuerdo generalizado entre los investigadores sobre lo que constituye una escala de equivalencia y línea de pobreza adecuada.

Escalas de Equivalencia

Los hogares difieren en tamaño, composición, edad de los miembros, lugar de residencia etc., de modo que las necesidades del hogar varían de acuerdo con estas características. Es necesario pues, la consideración de estas diferencias en todo análisis de pobreza. Para el propósito de nuestro trabajo elegimos la escala de equivalencia más sencilla, aunque al mismo tiempo más ruda, aquella que sólo tiene en cuenta el tamaño del hogar, dando lugar al ingreso del hogar per cápita. No obstante, si se define la línea de pobreza como porcentaje de la mediana los resultados de pobreza son muy parecidos para las distintas escalas de equivalencia utilizadas, tal y como se comprobó empíricamente en el trabajo Domínguez, A., González, R., Martín, D.(1999)

Línea de Pobreza

En cuanto a la línea de pobreza utilizaremos una línea de pobreza relativa, concretamente definimos el umbral de pobreza como el 50 por ciento del ingreso disponible per cápita mediano/medio para cada año. Las líneas de pobreza relativas constituyen herramientas ampliamente aceptadas para el análisis de la pobreza en los países desarrollados y en particular la línea del 50 por ciento se presenta como la línea de pobreza estándar de la Unión Europea.

Calculada la línea de pobreza, surge el problema de agregación, esto es, ¿cómo combinar las características de pobreza de los diferentes hogares en una medida agregada?. Para medir el grado de pobreza de una comunidad dos índices han sido ampliamente utilizados:

1) El índice de “incidencia de la pobreza”, H , que recoge la proporción de la población que se encuentra por debajo de la línea de pobreza. $H=q/N$, donde q es el número de pobres y N es la población total.

2) El índice de insuficiencia de renta I , $I = \sum_{i=1}^q (z - y_i/z)$, siendo z la línea de pobreza dada exógenamente, e y_i el ingreso disponible per capita del hogar i -ésimo. Este índice se puede interpretar como el porcentaje de renta media que sería necesario para colocar al hogar pobre en el umbral de pobreza z , esto es, al nivel de subsistencia.

Sen(1976,1978,1979) criticó estas dos medidas utilizando los siguientes argumentos:

1) El índice H es insensible al grado de pobreza de lo pobres, no captando la distancia a la que cada pobre se encuentra respecto de la línea de pobreza. Una deficiencia importante de este índice se refiere al hecho de que es insensible ante cualquier transferencia de ingresos cuando el número de pobres no quede alterado ante tal transferencia.

2) Por otra parte el índice I es insensible al número de pobres involucrados en el proceso de agregación. También es insensible a cualquier transferencia entre pobres, siempre y cuando el número de pobres no se vea modificado.

No obstante, dada la sencillez de cálculo y su fácil interpretación, son índices muy empleados cuando se trata de dar una primera visión de la situación de pobreza en una sociedad.

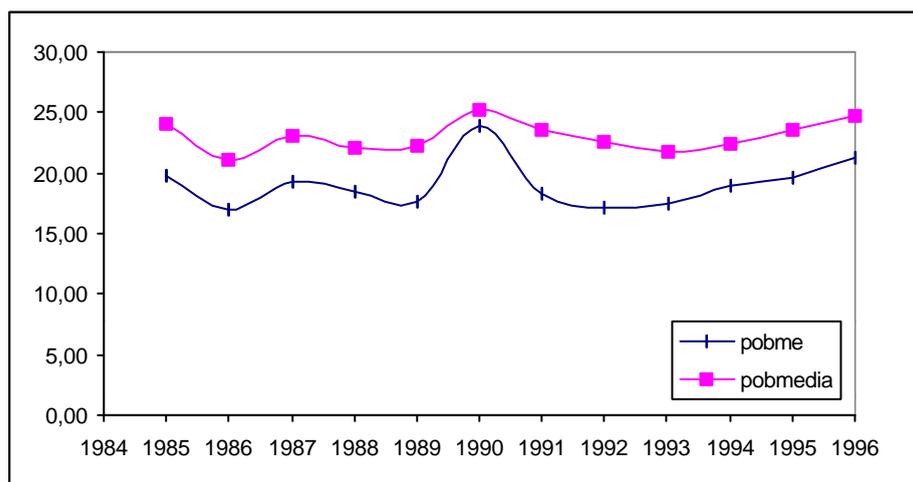
Una buena alternativa a estos índices la constituyen los índices de la familia Foster, Greer y Thobercke que ponderan la importancia relativa del desnivel de pobreza respecto del umbral:

$$FGT_a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^q \left(\frac{z - y_i}{z} \right)^{a-1} \quad a > 0$$

A medida que α aumenta crece la importancia relativa que el índice concede a los desniveles de pobreza más fuertes, por lo que α se interpreta como el parámetro de aversión a la pobreza. Se puede observar como para $\alpha=1$ el índice FGT coincide con el índice H y como para $\alpha=2$ el índice de FGT coincide con el producto HI. El índice de Foster-Greer-Thobercke satisface el axioma de transferencia para $\alpha > 3$, por lo que el índice FGT_4 es muy utilizado cuando se pretende prestar atención a los más pobres.

Para el propósito del trabajo emplearemos los índices, H, FGT_2 y FGT_4 y así tener una primera idea sobre la trayectoria de la pobreza relativa en Alemania en el periodo 1985-1996.

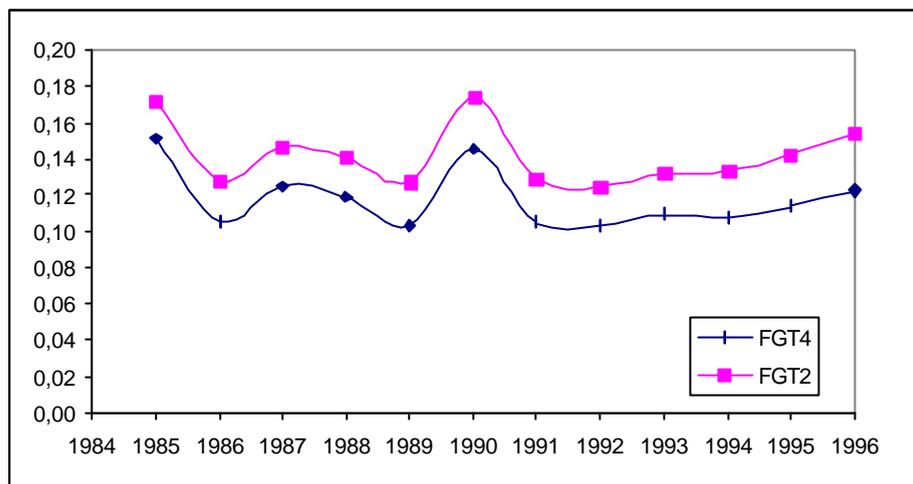
Figura 1: Trayectoria del índice "Incidencia de la Pobreza", $H=FGT_1$, Alemania 1985-1996



En la figura 1 puede observarse la trayectoria seguida por el índice “incidencia de la pobreza” calculado utilizando dos líneas de pobreza: i) línea de pobreza definida como el 50% de la renta per capita disponible media (pobmedia) y ii) aquella definida como el 50% de la mediana del ingreso disponible per capita (pobme). Utilizando la segunda línea de pobreza vemos que desde 1987 hasta

1989 la proporción de hogares pobres disminuye, aumenta bruscamente en 1990 y desde el 1992-1996 crece paulatinamente hasta alcanzar en 1996 un valor aproximado al de 1985. Como cabría esperar, dada las propiedades estadísticas de la media y mediana, la proporción de pobres obtenida con la media es mayor que aquella calculada con la mediana.

Figura 2: Trayectoria de los índices FGT₂ y FGT₄ Alemania 1980-1996



Como se puede observar en la figura 2, la trayectoria seguida por FGT₂ y FGT₄ en el periodo 1985-1996 es análoga a la seguida por el índice FGT₁. En el año 1985 y 1990 nos encontramos con las mayores proporciones de hogares pobres y además estos hogares son más intensamente pobres. Además la intensidad de la pobreza crece suavemente en el periodo 1991-1996.

2. Análisis Estadístico de las duraciones en el estado de Pobreza

Conceptos básicos de duración

El análisis estadístico de los modelos de duración llamados también modelos de tiempo de vida o de supervivencia, han sido aplicados en distintas ramas de la ciencia, adquiriendo un gran auge en la ingeniería y la medicina. Su aplicación a las ciencias sociales empezó hacia finales de los años 70 y durante los últimos 15 años han proliferado los trabajos en los que se analizan, cuestiones como, el tiempo que un individuo permanece en desempleo, duración de una patente, duración del matrimonio, etc.

Con los modelos de duración se intenta analizar las transiciones que sufre un individuo entre dos estados, inicial y final. En estos modelos la variable de interés es la duración, que se puede definir como el tiempo de permanencia de un individuo en un estado inicial y que finaliza cuando el individuo pasa al estado final. En nuestro caso, el estado inicial es la situación de pobreza y el estado final se corresponde con la salida de la pobreza. A la duración en pobreza de un hogar, que es una variable aleatoria, la denotaremos por T. Esta es una variable absolutamente continua que toma valores en el

intervalo $[0, +\infty)$, tomando el valor cero en el momento en que el hogar entra en el estado de pobreza y además, se supone por simplicidad que $P(T=\infty)=0$.

Nuestro análisis abarca el periodo 1985-1996, como consecuencia de ello aparece una característica común a los datos de duración, la censura. Posibles esquemas de censura son "censura a la derecha" y "censura a la izquierda". La censura a la derecha tiene lugar en el caso en que nos ocupa, cuando el hogar todavía permanece en pobreza cuando el periodo de estudio ha terminado. La censura a la izquierda aparece cuando los hogares ya se encontraban en el estado inicial, pobreza, durante el transcurso del tiempo de estudio.

En el contexto de los modelos de duración adquieren relevancia además de la función de densidad, $f(t)$ y la función de distribución, $F(t)$, la función de supervivencia o permanencia, y la función riesgo o de salida de la variable T , tiempo de permanencia en pobreza.

La función de supervivencia o de permanencia de la variable T , denotada por S , se define como:

$$S(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$$

Esta función nos da la probabilidad de que la duración en el estado de pobreza sea mayor que un tiempo t . Se caracteriza porque es una función no creciente, que toma el valor uno en $T=0$ y el valor cero en $T=\infty$.

La función riesgo o de salida de la variable T y denotada por h se define como:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[t \leq T < t + \Delta t / T \geq t]}{\Delta t},$$

$h \cdot Dt$ se interpreta como la probabilidad de que un hogar en pobreza en el momento t salga de la pobreza en el instante inmediatamente posterior.

La especificación de las funciones de riesgo y de supervivencia determinan de forma única el modelo, al igual que lo hacen la función de densidad y de distribución. Las principales relaciones entre ambas son:

$$h(t) = - \frac{\partial \log(S(t))}{\partial t}$$

$$S(t) = \exp\left(- \int_0^t h(x) dx\right)$$

$$f(t) = h(t) \exp\left(- \int_0^t h(x) dx\right)$$

Análisis empírico

Una vez visto los principales conceptos para analizar las duraciones vamos a aplicarlos a nuestra base de datos¹. En general, los métodos que se pueden aplicar a las duraciones se clasifican en no paramétricos y paramétricos. En el primero de los casos no es necesario especificar la forma de la distribución que se supone genera los datos, mientras que en el segundo si lo es. Como nuestro objetivo es un primer análisis, vamos a realizar únicamente un análisis no paramétrico, dejando para trabajos posteriores un análisis paramétrico.

El cuadro número 1 ofrece una descripción de la estructura de la variable duración o permanencia en la pobreza expresada en años para la muestra.

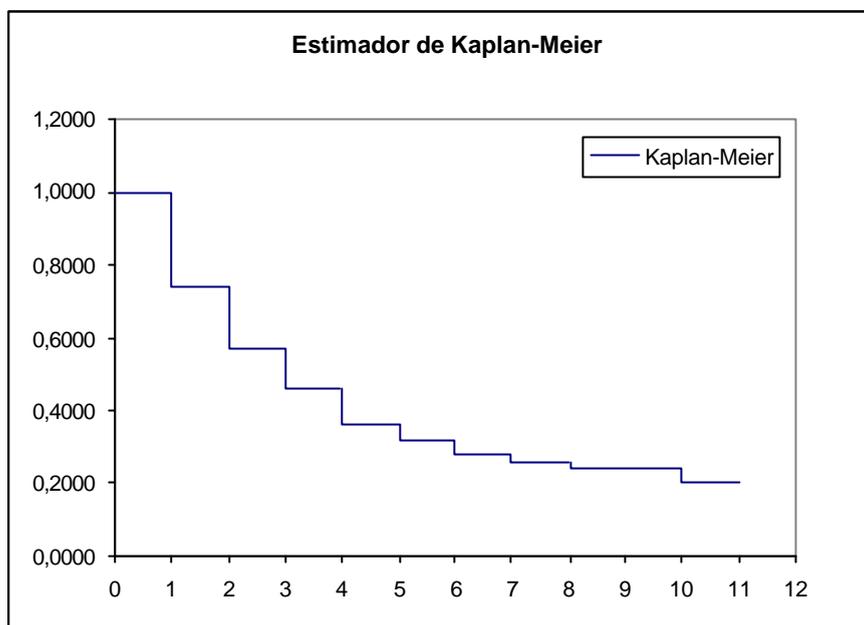
Cuadro 1: Estimador de Kaplan Meier										
	T. pobreza	dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	L. inferior	L. superior	qj=dj/nj	ES(qj)
	0	0	0	5884	1,0000					
	1	1536	3033	5884	0,7390	0,0077	0,7503	0,7278	0,2610	0,0057
	2	305	417	1315	0,5676	0,0170	0,5868	0,5489	0,2319	0,0116
	3	113	170	593	0,4594	0,0262	0,4836	0,4364	0,1906	0,0161
	4	64	73	310	0,3646	0,0391	0,3936	0,3377	0,2065	0,0230
	5	21	53	173	0,3203	0,0482	0,3521	0,2914	0,1214	0,0248
	6	11	36	99	0,2847	0,0599	0,3202	0,2532	0,1111	0,0316
	7	4	14	52	0,2628	0,0720	0,3027	0,2282	0,0769	0,0370
	8	3	9	34	0,2396	0,0896	0,2857	0,2010	0,0882	0,0486
	9	0	9	22	0,2396	0,0896	0,2857	0,2010	0,0000	0,0000
	10	2	6	13	0,2028	0,1484	0,2712	0,1516	0,1538	0,1001
	11	0	5	5	0,2028	0,1484	0,2712	0,1516	0,0000	0,0000
Media	4,68					0,12	4,44	4,92		
Mediana	3,00					0,12	2,77	3,23		

En esta tabla n_j es el número de hogares en riesgo en T_j (es decir el número de hogares cuyo periodo de pobreza es mayor o igual que T_j); d_j es el número de hogares que abandonan la pobreza en T_j ; w_j se corresponde con el número de censurados a la derecha en T_j (es decir número de hogares del cual no se sabe con exactitud su duración debido a que o bien, ha terminado el estudio sin que hayan salido de la pobreza o bien se han perdido para la muestra). La única información de la que se dispone para estos últimos es que su periodo de permanencia en la pobreza es mayor que T_j . Con estos tres estadísticos se puede realizar la estimación de la función de supervivencia o permanencia en la pobreza y la tasa de salida o riesgo. Para estimar la función de supervivencia se utiliza el estimador de Kaplan-Meier. Además, se proporciona el error estándar y un intervalo asintótico del 95% de confianza, utilizando la fórmula de Greenwood. Asimismo, se proporciona una estimación de la función riesgo subyacente en el estimador de Kaplan-Meier y su error estándar. En las últimas filas se proporcionan las estimaciones de la media (limitada a un periodo de 11 años) y de la mediana, así como sus respectivos errores estándar y un intervalo asintótico del 95% de confianza. Una breve explicación de cada uno de ellos se presenta en el apéndice II.

¹ Ver apéndice I

En la figura 3 se ofrece la representación gráfica del estimador de Kaplan-Meier.

Figura 3



Como se puede observar aproximadamente el 26,10% de los periodos de la muestra tienen una duración de un año. Si consideramos como periodo de pobreza persistente aquellos cuya duración es superior a 5 años podemos ver que el 32,03% de los periodos corresponden a periodos de pobreza persistentes. En cuanto a la tasa de salida de la pobreza vemos que para el primer periodo es de 0,2610, es decir que el 26,10% de los hogares que son pobres al principio del primer periodo ya no lo son en el segundo. Esta tasa es decreciente, lo que significa que tenemos lo que se denomina dependencia de duración negativa a partir del primer periodo, es decir a medida que transcurre el tiempo disminuye la probabilidad de salir de la pobreza.

A continuación vamos a intentar ver como afectan ciertas características del hogar al proceso de salida de la pobreza. La forma de analizar este efecto consiste en comparar la función de supervivencia y de riesgo de las unidades de análisis con distintas características. Estas variables las podemos agrupar en dos grupos: i) En primer lugar veremos como afectan ciertas variables relacionadas con el sustentador principal como pueden ser el sexo, el nivel de estudios y la situación laboral. Como estas dos últimas variables varían a lo largo de un periodo se ha optado por elegir la modalidad que presentaba en la fecha de entrada a la pobreza, es decir al principio del periodo. ii) El otro grupo de variables que se va a analizar tienen que ver con las características del hogar. En concreto veremos los efectos que tienen sobre la duración el número de perceptores y el tamaño del hogar. Al igual que ocurre en el caso anterior se ha optado por medir esas variables en el momento de la entrada en la pobreza.

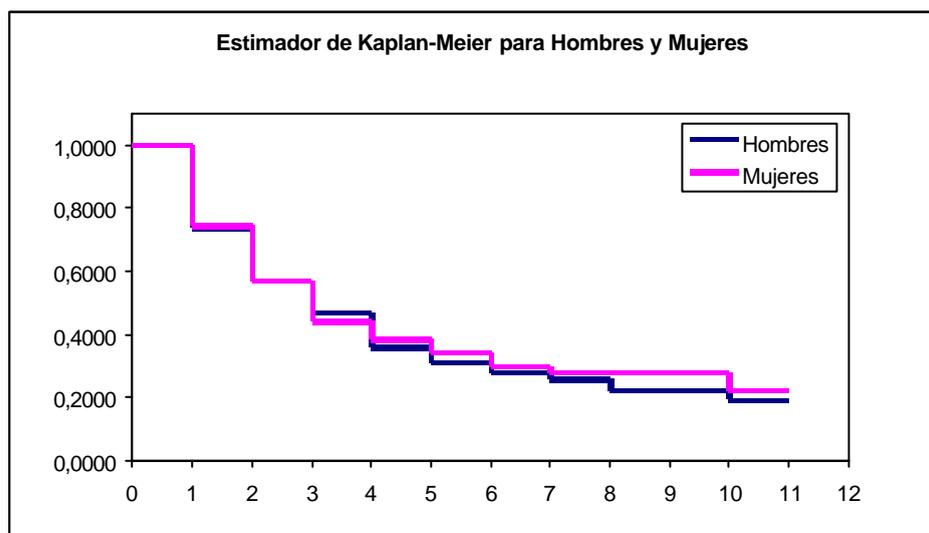
En el Cuadro N° 2 se analiza el efecto del sexo sobre las duraciones de la pobreza.

Cuadro 2: Duraciones de la muestra según el Sexo del sustentador principal

	Hombres								Mujeres							
	T. pobreza	dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	qj	ES(qj)	dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	qj	ES(qj)	
	0	0	0	3846	1,0000				0	0	2038	1,0000				
	1	1010	1972	3846	0,7374	0,0096	0,2626	0,0071	526	1061	2038	0,7419	0,0131	0,2581	0,0097	
	2	199	270	864	0,5676	0,0210	0,2303	0,0143	106	147	451	0,5675	0,0292	0,2350	0,0200	
	3	69	107	395	0,4684	0,0312	0,1747	0,0191	44	63	198	0,4414	0,0479	0,2222	0,0295	
	4	52	51	219	0,3572	0,0490	0,2374	0,0288	12	22	91	0,3832	0,0630	0,1319	0,0355	
	5	15	32	116	0,3110	0,0606	0,1293	0,0312	6	21	57	0,3429	0,0776	0,1053	0,0406	
	6	7	26	69	0,2794	0,0729	0,1014	0,0363	4	10	30	0,2972	0,1056	0,1333	0,0621	
	7	3	11	36	0,2562	0,0885	0,0833	0,0461	1	3	16	0,2786	0,1238	0,0625	0,0605	
	8	3	5	22	0,2212	0,1225	0,1364	0,0732	0	4	12	0,2786	0,1238	0,0000	0,0000	
	9	0	6	14	0,2212	0,1225	0,0000	0,0000	0	3	8	0,2786	0,1238	0,0000	0,0000	
	10	1	3	8	0,1936	0,1813	0,1250	0,1169	1	3	5	0,2229	0,2556	0,2000	0,1789	
	11	0	4	4	0,1936	0,1813	0,0000	0,0000	0	1	1	0,2229	0,2556	0,0000	0,0000	
Media	4,61					0,15			4,8				0,22			
Mediana	3					0,14			3				0,17			

La comparación entre las funciones de supervivencia de hogares según el sexo del sustentador principal se ofrece en la Figura número 4.

Figura 4

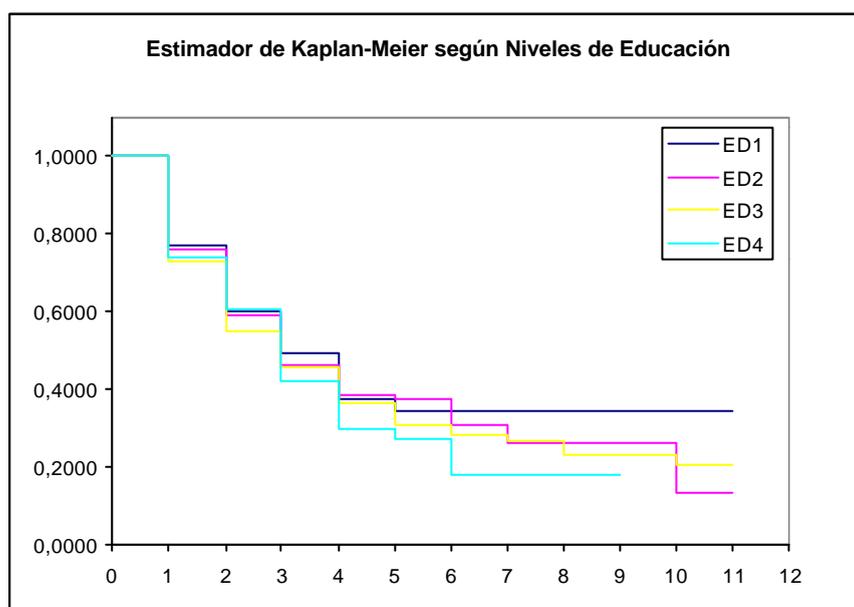


En principio, a raíz de los datos de la tabla se podría concluir que no hay diferencias en la duración de la pobreza entre aquellos hogares cuyo sustentador principal es hombre de aquellos en los que es una mujer. Por tanto, no se observa que el fenómeno de la feminización de la pobreza que se obtiene en los estudios de corte transversal se traslade a los estudios longitudinales. Este resultado, sin embargo, habría que matizarlo, puesto que el hecho de que no haya diferencias significativas puede ser debido al efecto de otras variables. Efectivamente, se está asumiendo que las dos sub-muestras son homogéneas con respecto a otras variables que pueden afectar a la duración, sin embargo no parece que sea así como se ha podido comprobar con algunos contrastes de homogeneidad. Tendremos pues que recurrir

a métodos paramétricos o semiparamétricos para un análisis riguroso de cómo afecta el sexo del sustentador principal a la duración de la pobreza.

En el cuadro N° 3 se encuentran los resultados de la comparación de las sub-muestras según el nivel de estudio del sustentador principal en el momento en que empezaba el periodo de pobreza. La representación gráfica de la función de supervivencia la encontramos en la figura número 5. El nivel educativo lo forman las siguientes modalidades: i) ED1, Primer nivel (primaria). En Alemania comprende desde el primer hasta el sexto grado; ii) ED2, Segundo nivel que corresponde a la educación obligatoria; iii) ED3, Segundo nivel, que incluye la preparación para la Universidad u otro tercer nivel educativo que no conduce directamente a una profesión, educación técnica u ocupacional que conduce a una ocupación o grupo de ocupaciones y el aprendizaje; iv) ED4, Tercer nivel que incluye, la Universidad así como Colegios o Institutos técnicos.

Figura 5



Se puede afirmar que las duraciones en la pobreza son más cortas cuanto más elevado es el nivel de estudios. Así por ejemplo, mientras que el 37,46% de hogares cuyo sustentador principal tiene educación obligatoria tienen periodos de pobreza persistentes, este porcentaje se reduce al 30,81% en el caso de los que ostentan un tercer ciclo de educación y a un 27,06% para universitarios y diplomados.

Cuadro 3: Duraciones de la muestra según el nivel educativo del sustentador principal																
	Con estudios de primer nivel								Con estudios de segundo nivel							
	T. pobreza	dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	qj	ES(qj)	dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	qj	ES(qj)	
	0	0	0	309	1,0000				0	0	1113	1,0000				
	1	70	145	309	0,7735	0,0308	0,2265	0,0238	266	557	1113	0,7610	0,0168	0,2390	0,0128	
	2	21	28	94	0,6007	0,0633	0,2234	0,0430	65	83	290	0,5904	0,0358	0,2241	0,0245	
	3	8	16	45	0,4939	0,0939	0,1778	0,0570	30	43	142	0,4657	0,0563	0,2113	0,0343	
	4	5	5	21	0,3763	0,1539	0,2381	0,0929	12	19	69	0,3847	0,0788	0,1739	0,0456	
	5	1	4	11	0,3421	0,1811	0,0909	0,0867	1	13	38	0,3746	0,0832	0,0263	0,0260	
	6	0	2	6	0,3421	0,1811	0,0000	0,0000	4	7	24	0,3122	0,1235	0,1667	0,0761	
	7	0	1	4	0,3421	0,1811	0,0000	0,0000	2	4	13	0,2641	0,1710	0,1538	0,1001	
	8	0	1	3	0,3421	0,1811	0,0000	0,0000	0	2	7	0,2641	0,1710	0,0000	0,0000	
	9	0	1	2	0,3421	0,1811	0,0000	0,0000	0	3	5	0,2641	0,1710	0,0000	0,0000	
	10	0	0	1	0,3421	0,1811	0,0000	0,0000	1	0	2	0,1321	0,7275	0,5000	0,3536	
	11	0	1	1					0	1	1	0,1321	0,7275	0,0000	0,0000	
Media	5,3					0,47			4,81				0,27			
Mediana	3,00					0,41			3				0,25			
	Con estudios de tercer nivel								Con estudios de cuarto nivel							
	T. pobreza	dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	qj	ES(qj)	dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	qj	ES(qj)	
	0	0	0	3600	1,0000				0	0	862	1,0000				
	1	978	1823	3600	0,7283	0,0102	0,2717	0,0074	222	508	862	0,7425	0,0201	0,2575	0,0149	
	2	195	254	799	0,5506	0,0225	0,2441	0,0152	24	52	132	0,6075	0,0457	0,1818	0,0336	
	3	58	99	350	0,4593	0,0328	0,1657	0,0199	17	12	56	0,4231	0,0993	0,3036	0,0614	
	4	39	41	193	0,3665	0,0489	0,2021	0,0289	8	8	27	0,2977	0,1596	0,2963	0,0879	
	5	18	32	113	0,3081	0,0638	0,1593	0,0344	1	4	11	0,2706	0,1859	0,0909	0,0867	
	6	5	25	63	0,2837	0,0737	0,0794	0,0341	2	2	6	0,1804	0,3433	0,3333	0,1925	
	7	2	8	33	0,2665	0,0860	0,0606	0,0415	0	1	2	0,1804	0,3433	0,0000	0,0000	
	8	3	6	23	0,2317	0,1179	0,1304	0,0702	0	0	1	0,1804	0,3433	0,0000	0,0000	
	9	0	5	14	0,2317	0,1179	0,0000	0,0000	0	0	1					
	10	1	5	9	0,2060	0,1667	0,1111	0,1048	0	1	1					
	11	0	3	3	0,2060	0,1667	0,0000	0,0000	0	0	0					
Media	4,63					0,15			4,06				0,34	Limitada a 10		
Mediana	3,00					0,16			3,00				0,23			

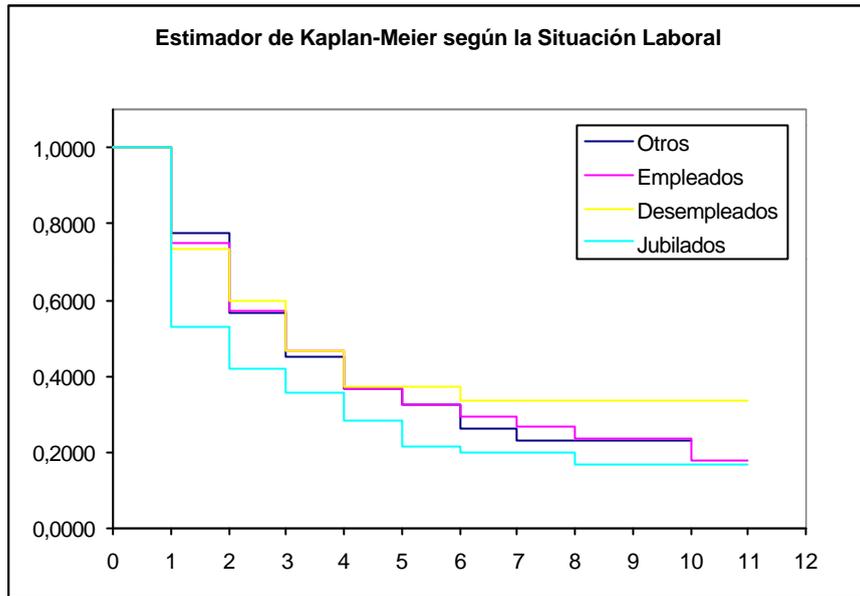
En el caso en el que la duración se defina como el tiempo de permanencia en pobreza, al comparar dos curvas de supervivencia, aquella que se sitúa por debajo significa que el grupo representado por dicha curva permanecerá menos tiempo en pobreza que el grupo definido por la curva de arriba. En otras palabras, en cualquier momento la proporción de individuos estimados que siguen siendo pobres es menor para el grupo representado por la curva de abajo que el representado por el grupo de la curva situada por encima. Cuando analizamos las sub-muestras correspondientes a los diferentes niveles educativos, observamos que en general, la curva de supervivencia para los hogares cuyo sustentador principal tiene educación superior está por debajo de las otras tres curvas. También vemos que las estimaciones de la función riesgo para aquellos hogares donde ED4 es 1 suelen ser mayores que en las otras tres sub-muestras, pudiéndose incluso hablar de otro comportamiento. Parece que la función riesgo sería creciente por lo que podría haber dependencia de duración positiva.

Los resultados de la comparación de las sub-muestras según la situación laboral del sustentador principal se ofrecen en el cuadro 4 y la representación gráfica del estimador de Kaplan-Meier en la figura 6.

Cuadro 4: Duraciones de la muestra según la situación laboral del sustentador principal																
	Situación Laboral Otros								Situación Laboral Empleado							
	T. pobreza	dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	qj	ES(qj)	dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	qj	ES(qj)	
	0	0	0	1630	1,0000				0	0	3171	1,0000				
	1	362	1010	1630	0,7779	0,0132	0,2221	0,0103	788	1699	3171	0,7515	0,0102	0,2485	0,0077	
	2	70	74	258	0,5669	0,0402	0,2713	0,0277	162	222	684	0,5735	0,0236	0,2368	0,0163	
	3	23	33	114	0,4525	0,0619	0,2018	0,0376	57	78	300	0,4645	0,0366	0,1900	0,0226	
	4	11	14	58	0,3667	0,0887	0,1897	0,0515	35	37	165	0,3660	0,0545	0,2121	0,0318	
	5	4	13	33	0,3222	0,1098	0,1212	0,0568	10	25	93	0,3266	0,0653	0,1075	0,0321	
	6	3	5	16	0,2618	0,1627	0,1875	0,0976	6	21	58	0,2929	0,0791	0,1034	0,0400	
	7	1	1	8	0,2291	0,2105	0,1250	0,1169	3	9	31	0,2645	0,0986	0,0968	0,0531	
	8	0	2	6	0,2291	0,2105	0,0000	0,0000	2	4	19	0,2367	0,1261	0,1053	0,0704	
	9	0	3	4	0,2291	0,2105	0,0000	0,0000	0	5	13	0,2367	0,1261	0,0000	0,0000	
	10	0	1	1	0,2291	0,2105	0,0000	0,0000	2	4	8	0,1775	0,2399	0,2500	0,1531	
	11	0	0	0					0	2	2	0,1775	0,2399	0,0000	0,0000	
Media	4,44	Limitada a 10				0,25			4,69				0,17			
Mediana	3,00					0,28			3				0,16			
	Situación Laboral Desempleado								Situación Laboral Jubilado							
	T. pobreza	dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	qj	ES(qj)	dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	qj	ES(qj)	
	0	0	0	610	1,0000				0	0	473	1,0000				
	1	162	250	610	0,7344	0,0243	0,2656	0,0179	224	74	473	0,5264	0,0436	0,4736	0,0230	
	2	37	70	198	0,5972	0,0419	0,1869	0,0277	36	51	175	0,4181	0,0582	0,2057	0,0306	
	3	20	32	91	0,4659	0,0696	0,2198	0,0434	13	27	88	0,3564	0,0732	0,1477	0,0378	
	4	8	13	39	0,3704	0,1071	0,2051	0,0647	10	9	48	0,2821	0,1041	0,2083	0,0586	
	5	0	8	18	0,3704	0,1071	0,0000	0,0000	7	7	29	0,2140	0,1477	0,2414	0,0795	
	6	1	3	10	0,3333	0,1503	0,1000	0,0949	1	7	15	0,1998	0,1630	0,0667	0,0644	
	7	0	3	6	0,3333	0,1503	0,0000	0,0000	0	1	7	0,1998	0,1630	0,0000	0,0000	
	8	0	1	3	0,3333	0,1503	0,0000	0,0000	1	2	6	0,1665	0,2447	0,1667	0,1521	
	9	0	1	2	0,3333	0,1503	0,0000	0,0000	0	0	3	0,1665		0,0000	0,0000	
	10	0	0	1	0,3333		0,0000	0,0000	0	1	3	0,1665	0,2447	0,0000	0,0000	
	11	0	1	1	0,3333	0,1503	0,0000	0,0000	0	2	2	0,1665	0,2447	0,0000	0,0000	
Media	5,2					0,35			3,7				0,25			
Mediana	3,00					0,29			2							

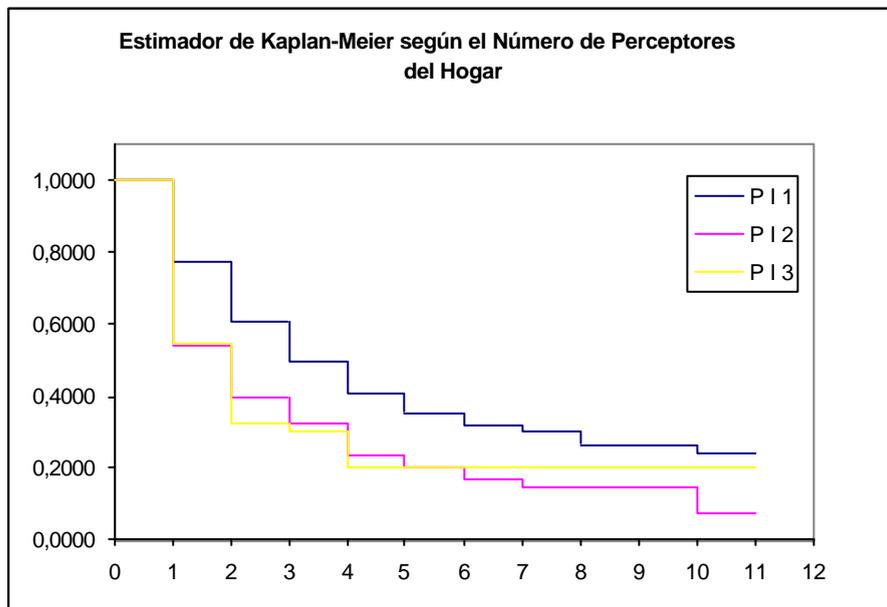
Como se puede apreciar la curva de supervivencia del grupo de jubilados está por debajo de las demás, lo que pone de manifiesto que en Alemania los jubilados gozan de un buen sistema de protección social que acorta la duración en situación de pobreza. También se observan diferencias entre las sub-muestras de empleados y desempleados, sobre todo para periodos superiores a cinco años. Así, mientras que la probabilidad de permanecer en la pobreza cinco o más años para la sub-muestra de desempleados es de 0,3704 para los empleados es de 0,3266. Sin embargo, para periodos cortos no parece que haya muchas diferencias en cuanto a comportamiento. Es para esta característica donde el análisis no paramétrico se muestra como inadecuado debido a que la situación laboral varía a lo largo del periodo. De nuevo sería más adecuado efectuar un análisis paramétrico o semiparamétrico que permitan la introducción de covariables variantes en el tiempo.

Figura 6



Los resultados de la comparación de las sub-muestras según el número de perceptores se ofrecen en el cuadro 5 y la representación gráfica de la función de supervivencia según el número de perceptores del hogar en la figura 7.

Figura 7



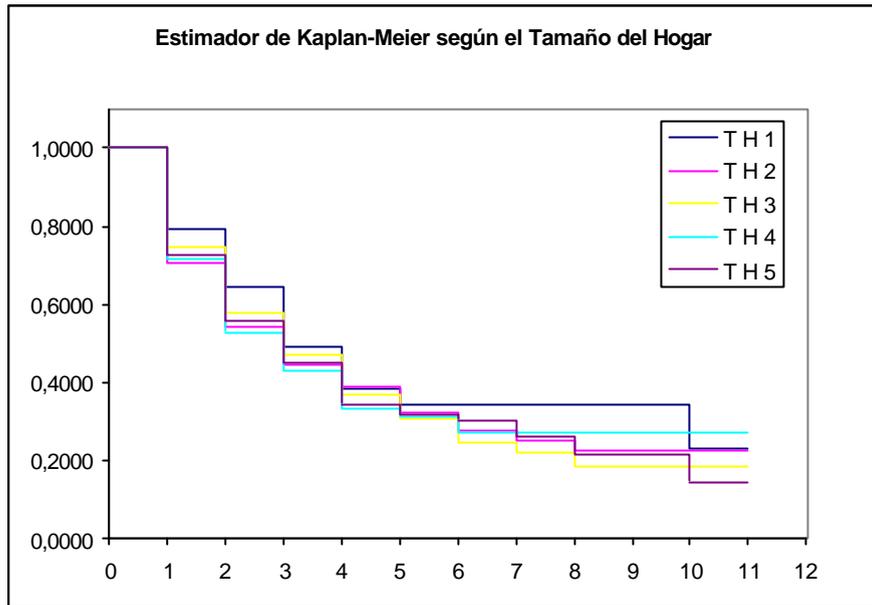
Como se puede deducir, el número de perceptores del hogar es una variable que incide en el tiempo de permanencia en la pobreza. Se puede observar que a medida que aumenta el número de perceptores en el hogar la curva de supervivencia se desplaza hacia abajo, por lo que a mayor número de perceptores

en el hogar, menor será el tiempo de permanencia en la pobreza. Así por ejemplo, el porcentaje de hogares con periodos de pobreza persistentes era para la sub-muestra de un solo perceptor de ingresos de 35,31%, mientras que para las sub-muestras de dos perceptores y tres y más son de 20,16% y 19,85% respectivamente. También se puede ver que las tasas de riesgos son mayores para los hogares donde el número de perceptores es mayor y dentro de las sub-muestras se observa dependencia de duración negativa.

Cuadro 5: Duraciones de la pobreza según el número de perceptores del hogar															
	Un Perceptor de Ingresos								Dos Perceptores de Ingresos						
	T. pobreza	Dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	qj	ES(qj)	dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	qj	ES(qj)
	0	0	0	4963	1,0000				0	0	766	1,0000			
	1	1115	2849	4963	0,7753	0,0076	0,2247	0,0059	351	154	766	0,5418	0,0332	0,4582	0,0180
	2	213	333	999	0,6100	0,0182	0,2132	0,0130	69	67	261	0,3985	0,0498	0,2644	0,0273
	3	88	128	453	0,4915	0,0294	0,1943	0,0186	24	37	125	0,3220	0,0662	0,1920	0,0352
	4	43	55	237	0,4023	0,0424	0,1814	0,0250	18	15	64	0,2315	0,1025	0,2813	0,0562
	5	17	43	139	0,3531	0,0529	0,1223	0,0278	4	10	31	0,2016	0,1236	0,1290	0,0602
	6	8	27	79	0,3174	0,0650	0,1013	0,0339	3	7	17	0,1660	0,1670	0,1765	0,0925
	7	3	12	44	0,2957	0,0767	0,0682	0,0380	1	2	7	0,1423	0,2274	0,1429	0,1323
	8	3	8	29	0,2651	0,0993	0,1034	0,0566	0	1	4	0,1423	0,2274	0,0000	0,0000
	9	0	8	18	0,2651	0,0993	0,0000	0,0000	0	1	3	0,1423	0,2274	0,0000	0,0000
	10	1	5	10	0,2386	0,1448	0,1000	0,0949	1	1	2	0,0711	0,7428	0,5000	0,3536
	11	0	4	4	0,2386	0,1448	0,0000	0,0000	0	0	0				
Media	5,01					0,15			3,94	Limitado a 10			0,15		
Mediana	3,00					0,14			2				0,11		
Tres o más Perceptores de Ingresos															
	T. pobreza	Dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	qj	ES(qj)							
	0	0	0	155	1,0000										
	1	70	30	155	0,5484	0,0729	0,4516	0,0400							
	2	23	17	55	0,3191	0,1356	0,4182	0,0665							
	3	1	5	15	0,2978	0,1521	0,0667	0,0644							
	4	3	3	9	0,1985	0,2805	0,3333	0,1571							
	5	0	0	3	0,1985										
	6	0	2	3	0,1985	0,2805	0,0000	0,0000							
	7	0	0	1	0,1985										
	8	0	0	1	0,1985										
	9	0	0	1	0,1985										
	10	0	0	1	0,1985	0,2805	0,0000	0,0000							
	11	0	1	1											
Media	3,55					0,46									
Mediana	2,00														

Hemos realizado también el análisis para las sub-muestras según el número de miembros del hogar. Los resultados aparecen en el cuadro número 6 y la representación del Kaplan-Meier para las distintas sub-muestras en la figura 8.

Figura 8



A raíz de los datos, no se puede deducir con claridad que el número de miembros del hogar influya sobre el tiempo de permanencia en la pobreza. Así, no se observa un comportamiento sistemático para las distintas curvas de supervivencia, es decir, van intercambiando sus posiciones para las distintas sub-muestras según las duraciones. Quizás esto sea debido a que la variable tamaño del hogar interacciona con el número de perceptores y es muy posible que las diferentes sub-muestras no sean homogéneas con respecto al número de perceptores, y de ahí la confusa incidencia del tamaño de hogar sobre la duración de la pobreza. Habría que recurrir a un análisis paramétrico o semiparamétrico con covariables que controlen la heterogeneidad para poder comprender como incide el tamaño del hogar sobre la permanencia en pobreza.

Cuadro 6: Duraciones de la pobreza según el tamaño del hogar

Hogar de un solo miembro															Hogar de dos miembros					
T. pobreza	dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	qj	ES(qj)	Dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	qj	ES(qj)						
0	0	0	1375	1,0000				0	0	1625	1,0000									
1	283	904	1375	0,7942	0,0137	0,2058	0,0109	479	851	1625	0,7052	0,0160	0,2948	0,0113						
2	35	83	188	0,6463	0,0375	0,1862	0,0284	69	97	295	0,5403	0,0359	0,2339	0,0246						
3	17	21	70	0,4894	0,0774	0,2429	0,0513	23	37	129	0,4439	0,0545	0,1783	0,0337						
4	7	6	32	0,3823	0,1214	0,2188	0,0731	9	18	69	0,3860	0,0718	0,1304	0,0405						
5	2	5	19	0,3421	0,1447	0,1053	0,0704	7	14	42	0,3217	0,0995	0,1667	0,0575						
6	0	4	12	0,3421	0,1447	0,0000	0,0000	3	7	21	0,2757	0,1336	0,1429	0,0764						
7	0	2	8	0,3421	0,1447	0,0000	0,0000	1	0	11	0,2507	0,1641	0,0909	0,0867						
8	0	2	6	0,3421	0,1447	0,0000	0,0000	1	2	10	0,2256	0,1951	0,1000	0,0949						
9	0	1	4	0,3421	0,1447	0,0000	0,0000	0	4	7	0,2256	0,1951	0,0000	0,0000						
10	1	1	3	0,2280	0,4331	0,3333	0,2722	0	2	3	0,2256	0,1951	0,0000	0,0000						
11	0	1	1	0,2280	0,4331	0,0000	0,0000	0	1	1	0,2256	0,1951	0,0000	0,0000						
Media	5,25				0,36			4,6				0,25								
Mediana	3,00				0,29			3				0,19								
Hogar de tres miembros								Hogar de cuatro miembros												
T. pobreza	dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	qj	ES(qj)	Dj	wj	nj	S(t+)	E.S.	qj	ES(qj)						
0	0	0	1199	1,0000				0	0	1057	1,0000									
1	302	575	1199	0,7481	0,0168	0,2519	0,0125	299	481	1057	0,7171	0,0193	0,2829	0,0139						
2	74	104	322	0,5762	0,0347	0,2298	0,0234	73	82	277	0,5281	0,0408	0,2635	0,0265						
3	26	45	144	0,4722	0,0523	0,1806	0,0321	23	38	122	0,4286	0,0597	0,1885	0,0354						
4	16	15	73	0,3687	0,0811	0,2192	0,0484	14	15	61	0,3302	0,0919	0,2295	0,0538						
5	7	11	42	0,3072	0,1065	0,1667	0,0575	2	13	32	0,3096	0,1026	0,0625	0,0428						
6	5	9	24	0,2432	0,1494	0,2083	0,0829	2	6	17	0,2732	0,1356	0,1176	0,0781						
7	1	3	10	0,2189	0,1828	0,1000	0,0949	0	3	9	0,2732	0,1356	0,0000	0,0000						
8	1	2	6	0,1824	0,2584	0,1667	0,1521	0	2	6	0,2732	0,1356	0,0000	0,0000						
9	0	1	3	0,1824	0,2584	0,0000	0,0000	0	2	4	0,2732	0,1356	0,0000	0,0000						
10	0	1	2	0,1824	0,2584	0,0000	0,0000	0	1	2	0,2732	0,1356	0,0000	0,0000						
11	0	1	1	0,1824	0,2584	0,0000	0,0000	0	1	1	0,2732	0,1356	0,0000	0,0000						
Media	4,48				0,25			4,68				0,26								
Mediana	3,00				0,24			3				0,18								
Hogar de cinco o más miembros																				
T. pobreza	dj	Wj	nj	S(t+)	E.S.	qj	ES(qj)													
0	0	0	628	1,0000																
1	173	222	628	0,7245	0,0246	0,2755	0,0178													
2	54	51	233	0,5566	0,0436	0,2318	0,0276													
3	24	29	128	0,4522	0,0609	0,1875	0,0345													
4	18	19	75	0,3437	0,0890	0,2400	0,0493													
5	3	10	38	0,3166	0,1008	0,0789	0,0437													
6	1	10	25	0,3039	0,1088	0,0400	0,0392													
7	2	6	14	0,2605	0,1541	0,1429	0,0935													
8	1	1	6	0,2171	0,2389	0,1667	0,1521													
9	0	1	4	0,2171	0,2389	0,0000	0,0000													
10	1	1	3	0,1447	0,4730	0,3333	0,2722													
11	0	1	1	0,1447	0,4730	0,0000	0,0000													
Media	4,54				0,27															
Mediana	3,00				0,26															

3. Conclusiones

Nuestro objetivo al realizar el trabajo ha sido introducirnos en cómo se podría aplicar un análisis longitudinal para el estudio de la dinámica de la pobreza. Centrándonos en la base de datos para Alemania, hemos comprobado como un análisis no paramétrico es bastante ilustrativo sobre la experiencia en pobreza de un grupo de hogares. Así, se ha podido determinar la probabilidad de que la permanencia de un hogar en pobreza sea mayor que un determinado número de años y por tanto, ver la proporción de hogares de la muestra que se encontraban en pobreza permanente y transitoria. Asimismo, observamos como hay variables claramente relacionadas con el hogar y con el sustentador principal, relevantes para explicar la permanencia en pobreza, tales como el nivel educativo, situación laboral del sustentador principal y el número de perceptores de ingreso del hogar. Sin embargo, este tipo de análisis es insuficiente ya que como mencionamos a lo largo del trabajo, el hecho de que haya diferencias significativas o no entre las curvas de supervivencia puede ser debido a que las submuestras elegidas no sean homogéneas para cada una de las modalidades de la variable de interés. Además, algunas de estas variables no tienen por qué mantenerse fijas a lo largo de una duración. Por todo ello, nos gustaría continuar el estudio utilizando un análisis paramétrico o semi-paramétrico que permita introducir covariables que varíen en el tiempo. Por último, sería interesante aplicar esta metodología al caso de España y realizar comparaciones.

APÉNDICE I: Obtención de los Periodos de Pobreza

Para el desarrollo del trabajo ha sido de vital importancia el cálculo de los períodos de pobreza, para lo cual se han seguido los siguientes pasos:

1.- Cálculo de Línea de pobreza y Clasificación de hogares en pobres y no pobres

La definición de ingreso disponible que ha sido utilizada para calcular la línea de pobreza y clasificar a los hogares en pobres y no pobres ha sido:

Ingreso total neto = ingreso total del hogar bruto² -(contribuciones totales a la seguridad social + impuestos de ingreso)

En el siguiente cuadro se ofrece el número de hogares para los que existía información disponible sobre la variable ingreso para cada año; así como el valor de la media y mediana del ingreso disponible per capita que se han utilizado para la definición del umbral de pobreza. En particular para el cálculo de las duraciones en pobreza se ha elegido como umbral de pobreza el 50% del ingreso disponible per capita mediano.

Cuadro 7: Datos muestrales

	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
obs	5053	4831	4771	4571	4445	6472	6358	6326	6298	6442	6605	6525
Media	1453,77	1576,54	1586,35	1687,72	1800,30	1474,82	1670,31	1716,75	1912,70	1961,04	2006,40	2005,43
Mediana	1200,00	1325,00	1350,00	1430,06	1531,63	1195,00	1359,04	1487,18	1591,67	1654,21	1700,00	1702,08

2.-Enlace de hogares y cálculo de los períodos

Como consecuencia de la rotación de hogares en la muestra en el período contemplado fue preciso enlazar los hogares para ver sus cambios de estado, pobre/no pobres, y así poder calcular los períodos en pobreza. En función de las transiciones que experimentaron los hogares, hemos clasificado los hogares en cuatro tipos: i) hogares que nunca fueron pobres en la totalidad del período, es decir, son aquellos que no tienen períodos en pobreza; ii) hogares que fueron pobres al menos un año en el periodo 1985-1996; iii) hogares que siempre fueron pobres en dicho periodo y que por tanto sufrieron un periodo de pobreza de duración 12 censurado a la izquierda y a la derecha; iv) y hogares para los que no existía información disponible sobre la variable ingreso considerada. El número de hogares de

²Para un análisis detallado sobre los componentes del ingreso total bruto remitimos al manual del usuario(versión 30-9-97).

cada tipo aparece en el cuadro 8. Para nuestro análisis se eliminó de la muestra aquellos hogares del tipo i), iii) y iv).

Cuadro 8: Distribución hogares 1985-1996 (N=11.148)

Nunca Pobres	Pobres algún año		No disponibles
	Salen algún año de la pobreza	Siempre Pobres	
3273	5282	1400	1193

3.- Cálculo de los Periodos

Con la sub-muestra de los hogares tipo ii) se procedió a calcular la duración de cada uno de los periodos y el tipo de censura. De algunos hogares se obtuvieron varios periodos en pobreza. El tipo de periodos y el número de los mismos se presentan en el cuadro siguiente. Para el análisis empírico se utilizaron los periodos no censurados y aquellos censurados a la derecha.

Cuadro 9. Distribución de los periodos de pobreza y censura

No Censurados	Censurados Izquierda	Censurados Derecha	Censurados Izquierda-Derecha
2059	1404	3825	1702

Apéndice II: Estimador Producto Límite (PL) de la función de supervivencia

Supongamos inicialmente que tenemos una muestra de N periodos sin censurar y hay $K \leq N$ tiempos de permanencias ordenados según su magnitud como $t_{(1)}, t_{(2)}, \dots, t_{(M)}$. Sea d_j el número de individuos que abandonan la pobreza en $t_{(j)}$, donde $d_1 + d_2 + \dots + d_M = N$. Definiendo la función de supervivencia $S(t) = P(T \geq t)$, $t \geq 0$, podemos utilizar como estimador de ésta la función de supervivencia empírica, $\hat{S}(t)$ que se define como la proporción de los N individuos que se observan que abandonan en o después de t. Haciendo algunas operaciones y reordenando los términos tenemos que la función de supervivencia empírica se puede poner como

$$\hat{S}(t) = \prod_{t_{(j)} < t} (1 - \hat{q}_j),$$

$$\text{donde } \hat{q}_j = \frac{d_j}{N - d_1 - d_2 - \dots - d_{j-1}} = \frac{d_j}{d_j + d_{j+1} + \dots + d_M}$$

que nos daría la proporción de individuo que abandonan en $t_{(j)}$ del total que la podría abandonar. Por tanto estima la probabilidad de abandonar en $t_{(j)}$ dado que ha sobrevivido hasta esa fecha, es decir estima el riesgo de abandono en ese momento, θ_j . Si dividimos $[0,t]$ en $k+1$ intervalos de la forma $[0,t_{(1)})$, $[t_{(1)},t_{(2)})$,..., $[t_{(k)},t_{(k+1)})$, donde $t \in [t_{(k)},t_{(k+1)})$, observamos que esta última expresión se basa en la idea de que la probabilidad de sobrevivir hasta t se puede poner como el producto de las probabilidades de sobrevivir a cada uno de los intervalos anteriores a t , dado que sobrevivía al principio de cada uno.

Definamos el conjunto riesgo N_j como el conjunto de individuos que no han salido en el instante justamente anterior a $t_{(j)}$ y notemos el número de elementos de ese conjunto como n_j . Entonces como podremos comprobar el denominador del cociente de \hat{q}_j , es decir $N - d_1 - d_2 - \dots - d_{j-1}$, es precisamente igual a n_j . Por tanto tendremos que

$$\hat{S}(t) = \prod_{t_{(j)} < t} (1 - \hat{q}_j) \quad \text{donde } \hat{q}_j = \frac{d_j}{n_j}$$

Supongamos ahora que la muestra está sometida a censura a la derecha y que el número de censurados en el intervalo $[t_{(j)},t_{(j+1)})$ es w_j . En este caso es necesario hacer algunas modificaciones pues el número de individuos que abandonan el estado inicial no es exactamente conocido. En este caso, seguimos manteniendo la misma expresión tanto para la estimación de la función riesgo como de la función supervivencia. Lo único que cambia es la composición del conjunto riesgo. Ahora el conjunto riesgo en $t_{(j)}$ estaría formado por el número de individuos que sobreviven y no están censurados justamente antes de t_j . Las estimaciones de la función de supervivencia no cambiaría en los tiempos de censura, pues en esos tiempos no habría salidas de individuos hacia el estado destino. Lo que si habría sería cambios en el conjunto riesgo y por tanto cambio en el tamaño de los saltos de $\hat{S}(t)$.

En el caso de que un tiempo de censura sea registrado igual que un tiempo de vida $t_{(j)}$, se adopta la convención de ajustar a la derecha el tiempo censurado en una cantidad infinitesimal mayor que $t_{(j)}$. De esta forma un individuo con tiempo de censura igual a $t_{(j)}$ se incluye en el conjunto de los n_j individuos que están en riesgo en $t_{(j)}$. Por tanto en el caso de censura a la derecha n_j sería:

$$n_j = \sum_{i=j}^M (d_i + w_i) = N - \sum_{i=1}^{j-1} (d_i + w_i)$$

Otra cuestión que es preciso aclarar es que ocurre en aquellas situaciones en el que el mayor tiempo observado es un tiempo de censura en lugar de un tiempo de salida. En este caso el estimador P.L. estaría definido hasta el último tiempo de salida observado. Como consecuencia de ello, en este último caso la función de supervivencia no alcanzaría el valor cero.

De esta forma, el estimador para la función de supervivencia quedaría

$$\hat{S}(t) = \prod_{t_{(j)} < t} \left(1 - \frac{d_j}{n_j} \right) = \prod_{t_{(j)} < t} \left(\frac{n_j - d_j}{n_j} \right)$$

Este estimador de la función de supervivencia es conocido en la literatura como estimador producto-límite o estimador Kaplan-Meier.

Podemos derivar un estimador para la varianza del estimador P.L., mediante el método delta. Para calcularla suponemos que los $\hat{\mathbf{q}}_j$ son aproximadamente independientes con varianza dada por la expresión binomial $Var(\hat{\mathbf{q}}_j) = \mathbf{q}_j(1-\mathbf{q}_j)/n_j$ cuando n_j es grande. Entonces tenemos que un estimador de la varianza de la función supervivencia en t es

$$Var(\hat{S}(t)) = (\hat{S}(t))^2 \sum_{t_{(j)} < t} \frac{\hat{\mathbf{q}}_j}{(1-\hat{\mathbf{q}}_j)n_j}$$

Esta expresión es conocida como fórmula de Greenwood y primero fue derivada como la varianza asintótica del estimador tabla de vida estándar.

Tal como indican Kalbfleisch y Prentice (1980), con T continuo y condiciones de censura suave, se puede demostrar que el estimador PL es asintóticamente un proceso Gaussiano, por lo que, por ejemplo, se puede calcular un intervalo de confianza del 95% para la función de supervivencia en algún t dado como $\hat{S}(t) \pm 1.96 \cdot (\hat{V}(\hat{S}(t)))^{1/2}$. Sin embargo estos intervalos de confianza pueden a veces contener valores imposibles, fuera del rango $[0,1]$. Para evitarlo estos autores proponen aplicar la distribución normal asintótica a alguna transformación de $S(t)$ para el que el rango no esté restringido. Nosotros nos hemos basado sobre la función

$$\hat{v}(t) = Ln(-Ln\hat{S}(t))$$

Bibliografía

Bane, M. And Ellwood, D. (1986): Slipping into and out of poverty: The dynamics of spells, *Journal of Human Resources*, vol.21, no.1, pp.1-23.

Buhmann, B., Rainwater, L. Schmaus, G. Y Smeeding, T. (1988): "Equivalence scales, well-being, inequality and poverty", *Review of Income and Wealth*, 34, 115-142.

Citro, C. and Michel, R. (1995). *Measuring Poverty: A new approach*, National Academy Press, Washington D.C.

Domínguez, A., González, R. Y Martín, D. (1999): *La pobreza y las prestaciones sociales en la Comunidad Autónoma de Andalucía*, Asepelt 1999.

Foster, J., Greer, J. And Thobercke, E. (1984): A Class of descomposable poverty measures, *Econometría*, vol,52, pp.761-766.

Kalbfleisch, J.D. and Prentice, R. L. (1980): *The statistical analysis of failure time data*, John Wiley and Sons Inc., New York.

Hosmer, D.W. and Lemeshow S. (1999): *Applied survival analysis: Regression modeling of time to event data*, John Wiley & Sons Inc., New York.

Lawless, J. F. (1982): *Statistical models methods for lifetime data*, John Wiley & Sons, New York.

Paco Panel Comparability, User Manual, versión 30-9-97.

Sen, A.K.(1976): Poverty: An ordinal approach to measurement, *Econometría*, vol.44, n.2, pp.219-231.

Sen, A.K.(1978): Three notes on the concept of poverty, International Labour Office, Geneva (WEP 2-23/WP 65).

Sen, A.K. (1979): Issues in the measurement of poverty, *Scandinavian Journal of Economics*, vol.81, pp.285-307.