SOBRE LAS PARTICIONES DE NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS

Realizado por :
Laura Mahedero Velarde

Dirigido por :
D. Guillermo Curbera Costello

FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

Dedicado a mi familia, que siempre ha estado ahí para apoyarme.

Resumen

En este trabajo se presenta una introducción a la teoría de particiones. En el primer capítulo veremos la definición de partición, algunos ejemplos relevantes y por último una representación geométrica. En el segundo y tercer capítulo veremos algunas de las aportaciones de Euler a la teoría de particiones y haremos un estudio de $p(n)$, es decir, veremos una fórmula recursiva y una cota superior para $p(n)$ que posteriormente J. H. van Lint refinó. A continuación, el cuarto capítulo describe una renombrada identidad de Jacobi, de la que surgen muchas otras identidades sobre particiones como el Teorema del número pentagonal de Euler. También veremos que hay otras formas de obtener fórmulas recursivas, que serán mediante derivación logarítmica, un método que explicaremos en el quinto capítulo. El sexto capítulo lo dedicaremos exclusivamente a las sorprendentes identidades de Ramanujan, veremos cuáles son y su prueba, y además veremos las identidades de Rogers-Ramanujan. Finalmente, en el penúltimo capítulo veremos otro de los sorprendentes resultados de Ramanujan que está relacionado con las fracciones continuas, y en el último capítulo veremos la fórmula asintótica dada por Hardy-Ramanujan en 1918 y la fórmula "exacta" que posteriormente dió Rademacher en 1937.

Abstract

In this work we will present an introduction to partition theory. In the first chapter we will see the definition of partition, some relevant examples and finally a geometric representation. In the second and third chapters we will see some of Euler's contributions to partition theory and we will examine $p(n)$, that is, we will see a recursive formula and an upper bound for $p(n)$ that later J. H. van Lint refined. Then, the fourth chapter describes a renowned Jacobi identity, from which many other identities of partitions arise, such as Euler's pentagonal Theorem. We will also see that there are other ways to obtain recursive formulas, which will be through logarithmic derivation, a method that we will explain in the fifth chapter. The sixth chapter will be dedicated exclusively to the surprising Ramanujan identities, we will see what they are and their proof, and we will also see the Rogers-Ramanujan identities. Finally, in the penultimate chapter we will see another of Ramanujan's surprising results that is related to continued fractions, and in the last chapter we will see the asymptotic formula given by Hardy-Ramanujan in 1918 and the "exact" formula given later by Rademacher in 1937.

Índice general

Introducción

Este trabajo tiene como propósito presentar una introducción a la teoría de particiones, un área fascinante de las matemáticas que ha sido objeto de investigación durante siglos, en la que el principal protagonista es Ramanujan, un joven autodidacta indio que escribió al matemático inglés Hardy, generando mucho interés en algunas de las fórmulas que le envió. Si nos vamos a los inicios de la teoría de particiones no serían éstos los protagonistas, pues la primera persona que se planteó la existencia de las particiones fue Leibniz. Todo empezó en una carta que Leibniz escribió a Johann Bernoulli en la que le preguntaba si había investigado el número de formas en las que un cierto n se puede separar en 2, 3 o más partes y observó que aunque fuera difícil era una cuestión lo suficientemente importante como para ahondar en el tema, y así fue.

Varios matemáticos fueron parte del grupo de personas que intentaron resolver el problema planteado por Leibniz, proporcionando varias herramientas para ello, pero sólo fueron cuatro los que consiguieron llegar a profundizar más, estos fueron Hardy-Ramanujan, Euler y Rademacher, por lo que vamos a hacer un breve paso por la historia del estudio de $p(n)$ situando en el tiempo a cada uno de ellos.

Comencemos por Euler, uno de los matemáticos más importantes de todos los tiempos. Leonhard Euler (1707-1783) fue un matemático suizo que hizo importantes contribuciones a la teoría de números, el cálculo, la geometría, la mecánica, la óptica y la astronomía. Dió lugar a que se produjera el primer avance en el estudio de $p(n)$ ya que consiguió escribir $p(n)$ por medio de una función generatriz.

Sigamos con Ramanujan. Srinivasa Ramanujan (1887-1920) fue un matemático autodidacta indio que, con una mínima educación académica, hizo contribuciones extraordinarias a la teoría de números, entre otros campos. Tras unos años de trabajo individual, en 1913 Ramanujan escribió una carta que contenía algunos resultados que había obtenido a Hardy, un matemático brillante que posteriormente pasará a ser su mentor. Estos resultados hicieron que Hardy instantáneamente reconociera la brillantez de Ramanujan, y años más tarde consiguió llevarlo a Cambridge, donde colaboraron durante cinco años. Godfrey Harold Hardy (1877-1947) fue un matemático británico muy reconocido gracias a sus importantes descubrimientos en el área de la teoría de números por lo que sus grandes capacidades y las de Ramanujan hicieron que el trabajo conjunto diera sus frutos, llegando a publicar varios artículos con sus aportaciones y en los cuales finalmente consiguieron dar una fórmula asintótica para $p(n)$ en un unos de ellos en 1918. Posteriormente la fórmula a la que llegaron Hardy-Ramanujan fue mejorada por Rademacher, que dió en 1937 una representación de $p(n)$ por medio de una serie convergente que veremos a lo largo de este trabajo. Hans Rademacher (1892-1969) fue un matemático alemán conocido por sus importantes contribuciones en la teoría analítica de los números y la teoría de las funciones, y hoy en día su trabajo sigue siendo influyente para muchos matemáticos.

El objetivo de este trabajo es presentar diferentes aspectos de las particiones, como su definición, propiedades y fórmulas relacionadas. De hecho, uno de los aspectos más fascinantes de la teoría de las particiones es que no existe una fórmula cerrada para el número de particiones de un número entero n, en lugar de ello, se han desarrollado métodos y aproximaciones para estimar este número y estudiar las propiedades de las particiones que es a lo que llegaremos en el capítulo final. Además de su interés teórico, las particiones tienen aplicaciones prácticas en áreas como la estadística y la física estadística. Por ejemplo, las particiones se utilizan para calcular la entropía de un sistema termodinámico, que es una medida de su desorden o incertidumbre.

La estructura que seguirá este trabajo será un capítulo inicial en el que veremos la definición, ejemplos e información más básica sobre la teoría de particiones. Los siguientes seis capítulos nos servirán como herramienta, ya que veremos información de interés y sobre todo teoremas y pruebas que utilizaremos en el capítulo final, en el que veremos las fórmulas que dieron Hardy-Ramanujan y posteriormente Rademacher para $p(n)$.

Ya que Godfrey Harold Hardy fue el que guió a Ramanujan y es uno de los principales protagonistas de la teoría de particiones, me gustaría terminar esta introducción con una de sus citas más memorables:

> *"Un matemático, como un pintor o un poeta, es un fabricante de patrones. Si sus patrones son más que permanentes que los del poeta, es porque están hechos de ideas."*

Esta cita destaca la relevancia de la creatividad en las matemáticas, y sugiere que el verdadero valor de las ideas matemáticas radica en su durabilidad y trascendencia. Es una muestra del pensamiento innovador que Hardy inculcó a Ramanujan, que hizo que llegara a hacer importantes contribuciones a la teoría de números a pesar de su corta vida y su falta de formación académica.

Srinivasa Ramanujan.

Capítulo 1

Teoría elemental de particiones

En este primer capítulo se presenta una introducción a la teoría de particiones. Antes de ahondar en el tema, aunque luego se verá una definición más completa, vamos a dar una definión de partición: expresar un número entero n como suma de números enteros. A continuación veremos algunos ejemplos relevantes, y por último en la sección de "Representación geométrica" se mostrará una forma visual de escribir las particiones de un número n. Para elaborar este capítulo nos hemos basado principalmente en las secciones 1 y 2 del capítulo 14 del libro de Apostol "Introduction to Analytic Number Theory".

1.1. Definición de partición

Sea A un conjunto de números enteros,

$$A := \{a_1, a_2, a_3, \cdots\},$$

donde los elementos a_i pueden ser números particulares como primos, cuadrados, cubos, etc. Cada representación de n como suma de los elementos de A se llama partición de n. Estamos interesados en la función aritmética de $A(n)$ que cuenta el número de particiones de n cogiendo sumandos de A.

Vamos a ilustrarlo con algunos ejemplos.

1.2. Ejemplos

Ejemplo 1.2.1. La conjetura de Goldbach afirma que todo número entero par $n > 4$ es la suma de dos primos impares. En este ejemplo $A(n)$ es el número de soluciones de la ecuación

$$n = p_1 + p_2, \tag{1.1}$$

siendo p_i números primos impares. La afirmación de Goldbach es que $A(n) \geq 1$ para los $n > 4$ pares. Esta conjetura se remonta a 1742 y está sin resolver a esta fecha. En 1937 el matemático ruso Vinogradov probó que todo número impar, que sea suficientemente grande, es la suma de 3 números primos impares. En 1966 el matemático chino Chen Jing-run probó que todo número par, que sea suficientemente grande, es la suma de un primo y un número con no más de 2 factores primos.

Ejemplo 1.2.2. (Representación por cuadrados). Para un entero dado $k \geq 2$ consideramos la función partición $r_k(n)$ que cuenta el número de soluciones de la ecuación

$$n = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2, \tag{1.2}$$

donde las x_i pueden ser positivas, negativas o cero, y el orden de los sumandos se tiene en cuenta.

Para $k = 2$, 4, 6 y 8, Jacobi expresó $r_k(n)$ en términos de las funciones divisor. Por ejemplo, probó que

$$r_2(n) = 4d_1(n) - d_3(n),$$

donde $d_1(n)$ y $d_3(n)$ son el número de divisores de n que son congruentes con 1 y 3 módulo 4, respectivamente. Entonces, $r_2(5) = 8$, porque ambos divisores, 1 y 5, son congruentes con 1 módulo 4. De hecho hay 4 representaciones dadas por

$$5 = 2^2 + 1 = (-2)^2 + 1 = (-2)^2 + (-1)^2 = 2^2 + (-1)^2,$$

y habría 4 formas más con el orden de los sumandos cambiados.

Para $k = 4$ Jacobi probó que

$$r_4(n) = \sum_{d|n} d = 8\sigma(n), \text{ si } n \text{ es impar,}$$

y

$$r_4(n) = 24 \sum_{\substack{d|n \\ \text{d impar}}} d, \text{ si } n \text{ es par.}$$

Las fórmulas para $r_6(n)$ y $r_8(n)$ son más complicadas pero del mismo tipo. Las fórmulas exactas para $r_k(n)$ se han hallado para $k = 3$, 5 y 7, utilizan la extensión de Jacobi del símbolo de Legendre para los residuos cuadráticos, siendo el símbolo de Legendre:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 \; \textit{si} \text{ p es divisor de a,} \\ 1 \; \textit{si} \text{ a es residuo cuadrático módulo p,} \\ -1 \; \textit{si} \text{ a no es residuo cuadrático módulo p.} \end{cases}$$

Por ejemplo, si n es impar se tiene

$$r_3(n) = 24 \sum_{m \leq n/4} \left(\frac{m}{n}\right), \text{ si } n \equiv 1 (\text{mod } 4)$$

y

$$r_3(n) = 8 \sum_{m \leq n/2} \left(\frac{m}{n}\right), \text{ si } n \equiv 3(\text{mod } 3),$$

donde ahora los números x_1, x_2, x_3 en la expresión (1.2) deben ser primos relativos. Para valores más grandes de k, el análisis de $r_k(n)$ es considerablemente más complicado. Existe una amplia literatura sobre el tema con contribuciones de Mordell, Hardy, Littlewood, Ramanujan y muchos otros. Para $k > 5$ se sabe que $r_k(n)$ puede expresarse mediante una fórmula asintótica de la forma

$$r_k(n) = \rho_k(n) + R_k(n), \tag{1.3}$$

donde $\rho_k(n)$ es el término principal, dado por la serie infinita

$$\rho_k(n) := \frac{\pi^{k/2} n^{k/2-1}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{h=1 \\ (h,q)=1}}^{\infty} \left(\frac{G(h;q)}{q}\right)^k e^{-2\pi i n h/q},$$

y $R_k(n)$ es un término residual de menor orden. La serie para $\rho_k(n)$ se llama serie singular y los números $G(h;q)$ son sumas cuadráticas de Gauss,

$$G(h;q) := \sum_{r=1}^{q} e^{-2\pi i h r^2/q}.$$

En 1917, Mordell observó que $r_k(n)$ es el coeficiente de x^n en la expansión en serie de potencias de la k-ésima potencia de la serie

$$\theta(x) := 1 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} x^{n^2}.$$

La función θ está relacionada con las funciones elípticas modulares que juegan un papel importante en la prueba de la expresión (1.3).

Ejemplo 1.2.3. El problema de Waring es determinar si, para un entero positivo dado k, existe un entero s (dependiendo sólo de k) tal que la ecuación

$$n = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_s^k, \tag{1.4}$$

tiene soluciones para cada $n \geq 1$. El problema lleva el nombre del matemático inglés E. Waring quien afirmó en 1770 (sin demostración y con evidencia numérica limitada) que todo n es la suma de 4 cuadrados, de 9 cubos, de 19 cuartas potencias, etc.

En este ejemplo la función partición $A(n)$ es el número de soluciones de (1.4), y el problema es decidir si existe un s tal que $A(n) \geq 1$ para todo n. Si s existe para un k dado, entonces hay un valor mínimo de s y esto se denota por $g(k)$. Lagrange demostró la existencia de $g(2)$ en 1770 y, durante los siguientes 139 años, se demostró la existencia de $g(k)$ para $k = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ y 10. En 1909 Hilbert demostró la existencia de $g(k)$ para todo k mediante un argumento inductivo, pero no determinó su valor numérico. Actualmente se conoce el valor exacto de $g(k)$ para todo k excepto $k = 4$. Hardy y Littlewood dieron una fórmula asintótica para el número de soluciones de (1.4) en términos de una serie singular análoga a la de (1.3).

Ejemplo 1.2.4. (Partición sin restricciones). Uno de los problemas fundamentales en la teoría aditiva de números es el de las particiones sin restricciones. El conjunto de sumandos consta de todos los números enteros positivos, y la función de partición a estudiar es el número de formas en las que n se puede escribir como una suma de enteros positivos $\leq n$, es decir, el número de soluciones de

$$n = a_{i1} + a_{i2} + \cdots . \tag{1.5}$$

El número de sumandos es ilimitado, se permite la repetición y no se tiene en cuenta el orden de los sumandos. La función partición correspondiente se denota por $p(n)$ y se denomina función partición sin restricciones, o simplemente función partición. Los sumandos se llaman partes. Por ejemplo, hay exactamente cinco particiones de 4, dadas por

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1,$$

entonces $p(4) = 5$. Análogamente, $p(5) = 7$, siendo las particiones de 5

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

1.3. Representación geométrica de las particiones

Existe una forma sencilla de representar geométricamente las particiones mediante el uso de una visualización de puntos de un retículo, que llamamos grafo de la partición. Por ejemplo, la partición de 15 dada por

$$6 + 3 + 3 + 2 + 1$$

se representan con 15 puntos dispuestos en cinco filas de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llllll}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & & \\
\bullet & \bullet & & & & \\
\bullet & & & & &
\end{array}$$

Si leemos este gráfico verticalmente obtenemos otra partición de 15,

$$5 + 4 + 3 + 1 + 1 + 1.$$

Se dice que dos de esas particiones son conjugadas. Obsérvese que la parte más grande en cualquiera de estas particiones es igual al número de partes en la otra. Así tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.3.1. *El número de particiones de n en partes desiguales es igual al número de sus particiones en partes impares.*

Demostración. Es interesante probar esto sin el uso de funciones generatrices, las cuales veremos más adelante junto con la prueba de este mismo resultado haciendo uso de ellas. La idea principal es que todo número puede expresarse de forma única como una potencia de 2 multiplicada por un número impar.

Supongamos que nos dan una partición de n en partes impares. Contamos el número de veces que aparece cada número impar, supongamos que 1 se produce l_1 veces, de manera similar, 3 se produce l_3 veces, etc. Por lo que

$$n = l_1 1 + l_3 3 + l_5 5 + \cdots .$$

Ahora escribimos cada l_i en forma binaria, es decir, como una suma de potencias distintas de dos. Por lo que tenemos

$$\begin{aligned} n &= l_1 \cdot 1 + l_3 \cdot 3 + l_5 \cdot 5 + \cdots \\ &= (2^{a_1} + 2^{b_1} + \cdots) \cdot 1 + (2^{a_3} + 2^{b_3} + \cdots) \cdot 3 + (2^{a_5} + 2^{b_5} + \cdots) \cdot 5 + \cdots . \end{aligned}$$

Ahora sólo hay que eliminar los paréntesis y observar que todos los términos son distintos entre sí.

Ahora supongamos dada una partición en partes distintas. Podemos escribir cada parte como una potencia de 2 multiplicada por un número impar, como nuestro interés es obtener partes impares, agrupamos los coeficientes de cada número impar y los reescribimos de manera que obtengamos el número impar tantas veces como el número que lo multiplica indique y de esta manera obtendríamos una partición en partes impares. □

Teorema 1.3.2. *El número de particiones de n en m partes es igual al número de particiones de n en partes, la mayor de las cuales es m.*

Demostración. Podemos establecer una correspondencia biunívoca entre las dos clases de particiones que se están considerando simplemente asignando cada partición a su conjugada. La asignación es claramente uno a uno, y al considerar la representación gráfica vemos que bajo la conjugación la condición "como máximo m partes" se transforma en "ninguna parte es mayor que m" y viceversa. □

Este teorema es muy útil ya que muestra cómo la representación gráfica puede ser utilizada para obtener información relevante. Muchos teoremas se pueden demostrar mediante argumentos de combinatoria simple que involucran gráficos, y volveremos más tarde para ver una ilustración de este método. Sin embargo, los resultados más profundos de la teoría de las particiones requieren un tratamiento más analítico al que nos dirigimos ahora.

Capítulo 2

Aportaciones de Euler

En este segundo capítulo se verá la relevancia de las aportaciones de Euler, ya que el primer avance importante en el estudio del número de particiones vino de su mano, pues consiguió escribir las funciones $p(n)$ por medio de una función generatriz. Entre estas aportaciones estará, como hemos dicho, la función generatriz de particiones que se verá en la primera sección, en la segunda veremos un teorema importante en la teoría de particiones que será el "Teorema del número pentagonal de Euler" con su respectiva demostración, en la tercera sección veremos una demostración combinatoria de este último teorema dada por F. Franklin. y por último haremos un repaso por algunas identidades de Euler que utilizaremos más adelante. Para elaborar este capítulo nos hemos basado principalmente en las secciones 1 y 3 del capítulo 14 del libro de Apostol "Introduction to Analytic Number Theory".

2.1. La función generatriz de particiones

Una función $F(s)$ definida por una serie de Dirichlet $F(s) = \sum f(n)n^{-s}$ se llama función generatriz de los coeficientes de $f(n)$. Las series de Dirichlet son funciones generatrices útiles en la teoría multiplicativa de números debido a la relación

$$n^{-s}m^{-s} = (nm)^{-s}.$$

En la teoría aditiva de números es más conveniente usar funciones generatrices representadas por series de potencias,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)x^n,$$

porque $x^n x^m = x^{n+m}$. El siguiente teorema muestra una función generatriz para la función de partición $p(n)$.

Teorema 2.1.1 (Euler)**.** *Para* $|x| < 1$ *tenemos*

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^m} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n,$$

donde $p(0) = 1$*.*

Demostración. Primero daremos una idea de la demostración de esta identidad sin precisar las cuestiones de convergencia. Si cada factor en el producto se expande en una serie de potencias (una serie geométrica) obtenemos

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^m} = (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 \cdots)(1 + x^3 + x^6 \cdots) \cdots .$$

Ahora multiplicamos la expresión de la derecha, tratándolas como si fueran polinomios, y las agrupamos por potencias de x para obtener una serie de potencias de la forma

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} a(k)x^k.$$

Queremos ver que $a(k) = p(k)$. Supongamos que tomamos el término x^{k_1} de la primera serie, el término x^{2k_2} de la segunda, que tiene el exponente multiplicado por 2 ya que esta serie está al cuadrado, este mismo argumento lo utilizaríamos para los demás términos, el término x^{3k_3} de la tercera, ... , y el término x^{mk_m} de la m-ésima, donde cada $k_i \geq 0$. Su producto es

$$x^{k_1}x^{2k_2}x^{3k_3} \cdots x^{mk_m} = x^k,$$

donde

$$k = k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \cdots + mk_m.$$

Esto también se puede escribir de la siguiente manera:

$$k = (1 + 1 + \cdots + 1) + (2 + 2 + \cdots + 2) + \cdots + (m + m + \cdots + m),$$

donde el primer paréntesis contiene k_1 unos, el segundo k_2 doses, y así sucesivamente. Esta es una partición de k en sumandos positivos. Así, cada partición de k producirá uno de esos términos x^k y, a la inversa, cada término x^k proviene de una partición correspondiente de k. Por lo tanto $a(k)$, el coeficiente de x^k, es igual a $p(k)$, el número de particiones de k.

El argumento anterior no es una prueba rigurosa porque hemos ignorado cuestiones de convergencia y también hemos multiplicado infinitas series geométricas, tratándolas como si fueran polinomios. Sin embargo, no es difícil transformar las ideas anteriores en una prueba rigurosa. Para este propósito, restringimos x para que se encuentre en el intervalo $0 \leq x < 1$ e introducimos dos funciones,

$$F_m(x) = \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-x^k},$$
$$F(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k},$$

de forma que se tiene

$$F(x) = \lim_{m\to\infty} F_m(x), \quad 0 \leq x < 1.$$

El producto que define $F(x)$ converge absolutamente si $0 \leq x < 1$ porque la expresión recíproca $\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)$ converge absolutamente (dado que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ converge absolutamente). Nótese también que para cada x fija la sucesión $\{F_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ es creciente porque

$$F_{m+1}(x) = \frac{1}{1-x^{m+1}} F_m(x) \geq F_m(x).$$

Así $F_m(x) \leq F(x)$ para cada x fija, $0 \leq x < 1$, y cada m. Ahora $F_m(x)$ es el producto de un número finito de series absolutamente convergentes. Por lo tanto, también es una serie absolutamente convergente que podemos escribir como

$$F_m(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_m(k) x^k.$$

Aquí $p_m(k)$ es el número de soluciones de la ecuación

$$k = k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \cdots + mk_m.$$

En otras palabras, $p_m(k)$ es el número de particiones de k en partes que no excedan m. Si $m \geq k$, entonces $p_m(k) = p(k)$. Por lo tanto siempre tenemos $p_m(k) \leq p(k)$ con igualdad cuando $m \geq k$. En otras palabras, tenemos

$$\lim_{m\to\infty} p_m(k) = p(k).$$

Ahora dividimos la serie de $F_m(x)$ en dos partes,

$$F_m(x) = \sum_{k=0}^{m} p_m(k) x^k + \sum_{k=m+1}^{\infty} p_m(k) x^k = \sum_{k=0}^{m} p(k) x^k + \sum_{k=m+1}^{\infty} p_m(k) x^k.$$

Como $x \geq 0$ tenemos que

$$\sum_{k=0}^{m} p(k) x^k \leq F_m(x) \leq F(x).$$

Esto demuestra que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k$ converge. Además, como $p_m(k) \leq p(k)$, tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_m(k)x^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k \leq F(x).$$

Por eso, para cada x fija las series $\sum_{k=0}^{\infty} p_m(k)x^k$ convergen uniformemente en m. Haciendo que $m \to \infty$ tendríamos que

$$\begin{aligned} F(x) &= \lim_{m\to\infty} F_m(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_m(k)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{m\to\infty} p_m(k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k, \end{aligned}$$

donde hemos podido intercambiar el límite y el sumatorio gracias a la convergencia uniforme. Esto prueba la identidad de Euler para $0 \leq x < 1$. Y lo extendemos por continuación analítica al disco unidad $|x| < 1$. □

Con argumentos similares podemos encontrar fácilmente las funciones generatrices de muchas otras funciones de partición.

Lema 2.1.2. *Sea $|x| < 1$, se tiene que la función generatriz que enumera las particiones en partes impares es*

$$P_I(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^{2k-1}} = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}.$$

Demostración. Ya hemos visto anteriormente cual es la función generatriz de particiones, por lo que a partir de esta vamos a obtener la función generatriz de las partes impares. Sabemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^m} &= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots} \\ &= (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)\cdots . \end{aligned}$$

Los factores de la primera serie corresponden al número de veces que vamos a tomar la parte 1, los factores de la segunda serie corresponden al número de veces que vamos a tomar la parte 2, etc. Como nos interesa que sólo haya partes impares, eliminamos las series cuyo primer exponente sea múltiplo de 2, es decir, eliminamos $(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^4 + x^8 + \cdots)\cdots$, obteniendo como resultado la función generatriz $P_I(x)$, siendo esta

$$P_I(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^{2k-1}}.$$

□

Lema 2.1.3. *Sea* $|x| < 1$, *se tiene que la función generatriz que enumera las particiones en partes pares es*

$$P_P(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^{2k}} = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\cdots}.$$

Demostración. Al igual que antes, vamos a partir de la función generatriz de particiones, y eliminando los factores que corresponden a las partes impares, vamos a obtener la función generatriz de las partes pares.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n &= \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^m} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots} \\ &= (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)\cdots .\end{aligned}$$

Haciendo el mismo procedimiento anterior eliminamos las series cuyo primer exponente sea de la forma 2^{2k+1} para $k \geq 0$, de manera que obtendríamos

$$P_P(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^{2k}}.$$

□

Lema 2.1.4. *Sea* $|x| < 1$, *se tiene que la función generatriz que enumera las particiones en partes desiguales es*

$$P_D(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^k) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)\cdots .$$

Demostración. En este caso partimos de la función generatriz de particiones, pero vamos a probarlo con otro razonamiento. Sabemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)\cdots .$$

En este caso, al ser partes desiguales no podemos escoger más de una vez una parte, de manera que sólo nos quedaríamos con los dos primeros términos de cada serie, es decir, $(1 + x^k)$ que equivale a no escoger esa parte o escoger 1 vez la parte k, lo que sería $(1 + x)(1 + x^2)\cdots$, por lo que de manera general obtenemos

$$P_D(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^k).$$

□

Una vez vistas las distintas funciones generatrices, podemos volver a la prueba del teorema visto en el capítulo anterior (Teorema 1.3.1) pero haciendo uso de funciones generatrices.

Teorema 2.1.5. *El número de particiones de n en partes desiguales es igual al número de sus particiones en partes impares.*

Demostración. Vamos a empezar viendo las funciones generatrices que generan las partes impares y las partes diferentes. Por el Lema 2.1.2, la función generatriz de las partes impares es

$$P_I(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k-1}}, \quad |x| < 1,$$

y en el caso de las partes diferentes es

$$P_D = \prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k), \quad |x| < 1.$$

Ahora partiendo de la función generatriz P_D, multiplicando por $\frac{1-x}{1-x} \cdot \frac{1-x^2}{1-x^2} \cdots$, obtendríamos

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k) &= \prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k) \cdot \frac{1-x}{1-x} \cdot \frac{1-x^2}{1-x^2} \cdots \\
&= \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} \cdot \frac{(1-x^2)(1+x^2)}{1-x^2} \cdots \\
&= \frac{(1-x^2)(1-x^4)\cdots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots} \\
&= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdots \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k-1}}.
\end{aligned}$$

De esta manera hemos demostrado que $P_D(x) = P_I(x)$ y concluiría la prueba. □

2.2. Relación con los números pentagonales

El siguiente paso para encontrar una fórmula para $p(n)$ requiere, de manera sorprendente, hablar de los números pentagonales. Por definición, el n-ésimo número pentagonal p_n es el número de puntos que hay en la superposición de n pentágonos regulares según el patrón que se muestra a continuación.

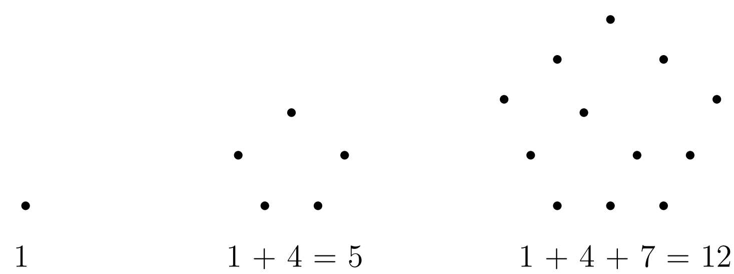


Figura 14.1

Ahora procederemos a enunciar el Teorema del número pentagonal de Euler y seguidamente veremos su demostración.

Consideramos a continuación la función de partición generada por el producto $\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)$, el recíproco de la función generatriz de $p(n)$. Escribimos

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a(n)x^n.$$

Para expresar $a(n)$ como una función de partición observamos que toda partición de n en partes desiguales produce un término x^n a la derecha con un coeficiente +1 o -1. El coeficiente es + 1 si x^n es el producto de un número par de términos y —1 en caso contrario. Por lo tanto,

$$a(n) = p_e(n) - p_o(n),$$

donde $p_e(n)$ es el número de particiones de n en un número par de partes desiguales, y $p_o(n)$ es el número de particiones en un número impar de partes desiguales. Euler demostró que $p_e(n) = p_o(n)$ para todos los n excepto los que pertenecen a un conjunto especial llamado números pentagonales.

Los números pentagonales 1, 5, 12, 22, $\cdots$ son sumas parciales de los términos de la progresión aritmética

$$1, 4, 7, 10, 13, \cdots, 3n+1, \cdots.$$

Si $\omega(n)$ denota la suma de los primeros n términos en esta progresión entonces

$$\omega(n) := \sum_{k=0}^{n-1}(3k+1) = \frac{3n(n-1)}{2} + n = \frac{3n^2-n}{2}.$$

Los números $\omega(n)$ y $\omega(-n) = (3n^2+n)/2$ se llaman números pentagonales.

Teorema 2.2.1 (Teorema del número pentagonal de Euler)**.** *Si* $|x| < 1$ *tenemos*

$$\begin{aligned}\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m) &= 1 - x - x^2 + x^5 - x^7 - x^{12} - x^{15} + \cdots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x^{\omega(n)} + x^{\omega(-n)}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{\omega(n)}.\end{aligned}$$

Demostración. Primero vamos a probar el resultado para $0 \leq x < 1$ y luego lo extendemos al disco unidad, $|x| < 1$, por prolongación analítica. Definimos $P_0(x) = S_0(x) = 1$ y, para $n \geq 1$, definimos

$$P_n(x) := \prod_{r=1}^{n}(1-x^r),$$

y

$$S_n(x) := 1 + \sum_{r=1}^{n}(-1)^r(x^{\omega(r)} + x^{\omega(-r)}).$$

El producto infinito $\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)$ converge, por eso $P_n(x)$ tiende a $\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)$ si $n \to \infty$. Vamos a probar que

$$|S_n(x) - P_n(x)| \leq nx^{n+1}. \tag{2.1}$$

Como $nx^{n+1} \to 0$, si $n \to \infty$, esto prueba la identidad de Euler para $0 \leq x < 1$. Para probar (2.1) definimos $g(r) := r(r+1)/2$, donde $r = 0, 1, .., n$ e introducimos las sumas

$$F_n(x) := \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \frac{P_n(x)}{P_r(x)} x^{rn+g(r)}.$$

Primero vamos a demostrar que $F_n(x)$ es otra forma de escribir $S_n(x)$. Es fácil ver que $F_1(x) = 1 - x - x^2 = S_1(x)$. De manera que si demostramos que

$$F_n(x) - F_{n-1}(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x),$$

esto probaría que $F_n(x) = S_n(x)$ para todo $n \geq 1$. Sabemos que

$$F_n(x) - F_{n-1}(x) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \frac{P_n(x)}{P_r(x)} x^{rn+g(r)} - \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \frac{P_{n-1}(x)}{P_r(x)} x^{r(n-1)+g(r)}.$$

En la primera suma podemos escribir $P_n(x) = (1-x^n)P_{n-1}(x)$ y separar el término con $r = n$. Luego distribuimos la diferencia $1 - x^n$ para obtener

$$\begin{aligned}F_n(x) - F_{n-1}(x) = (-1)^n x^{n^2+g(n)} &+ \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \frac{P_{n-1}(x)}{P_r(x)} x^{rn+g(r)} \\ &- \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \frac{P_{n-1}(x)}{P_r(x)} x^{(r+1)n+g(r)} - \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \frac{P_{n-1}(x)}{P_r(x)} x^{r(n-1)+g(r)}.\end{aligned}$$

Ahora combinamos la primera y tercera suma y vemos que el término con $r = 0$ se cancela. En la segunda suma cambiamos el índice y obtenemos

$$\begin{aligned} F_n(x) - F_{n-1}(x) &= (-1)^n x^{n^2+g(n)} \\ &+ \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r \frac{P_{n-1}(x)}{P_r(x)} x^{r(n-1)+g(r)}(x^r - 1) - \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{P_{n-1}(x)}{P_{r-1}(x)} x^{rn+g(r-1)}. \end{aligned}$$

Pero $(x^r - 1)/P_r(x) = -1/P_{r-1}(x)$ y $r(n-1) + g(r) = rn + g(r-1)$ por lo que las últimas dos sumas se cancelan término a término excepto cuando $r = n$ en la segunda suma. Entonces obtenemos

$$F_n(x) - F_{n-1}(x) = (-1)^n x^{n^2+g(n)} + (-1)^n x^{n^2+g(n-1)}.$$

Pero

$$n^2 + g(n) = n^2 + \frac{n(n+1)}{2} = \omega(-n),$$

y

$$= n^2 + g(n-1) = n^2 + \frac{(n-1)n}{2} = \omega(n).$$

Por eso

$$F_n(x) - F_{n-1}(x) = (-1)^n (x^{\omega(n)} + x^{\omega(-n)}) = S_n(x) - S_{n-1}(x),$$

por lo que $F_n(x) = S_n(x)$ para todo $n \geq 1$. En la suma en la que definimos $F_n(x)$ el primer término es $P_n(x)$ por eso

$$F_n(x) = P_n(x) + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \frac{P_n(x)}{P_r(x)} x^{rn+g(r)}. \tag{2.2}$$

Vemos que $0 < \frac{P_n(x)}{P_r(x)} \leq 1$ ya que $0 \leq x < 1$. También, cada factor $x^{rn+g(r)} \leq x^{n+1}$ por eso la suma de la derecha en (2.2) está acotada superiormente por nx^{n+1}. Entonces $|F_n(x) - P_n(x)| \leq nx^{n+1}$ y, como $F_n(x) = S_n(x)$, esto prueba (2.1) y completa la demostración de la identidad de Euler. □

2.3. Demostración combinatoria del teorema del número pentagonal de Euler

Euler demostró el teorema del número pentagonal por inducción en 1750. Legendre obtuvo demostraciones posteriores en 1830 y Jacobi en 1846. Esta sección describe una notable demostración combinatoria dada por F. Franklin en 1881. Ya hemos señalado que

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_e(n) - p_o(n)) x^n,$$

donde $p_e(n)$ es el número de particiones de n en un número par de partes desiguales, y $p_o(n)$ es el número de particiones en un número impar de partes desiguales. Franklin usó la representación gráfica de particiones por puntos reticulares para mostrar que existe una correspondencia biunívoca entre particiones de n en un número par de partes desiguales y en un número impar de partes desiguales, es decir, $p_e(n) = p_o(n)$, excepto cuando n es un número pentagonal.

Consideremos la gráfica de cualquier partición de n en partes desiguales. Decimos que el gráfico está en forma estándar si las partes están dispuestas en orden decreciente, como se ilustra en el ejemplo de la Figura 14.2. El segmento de línea más largo que conecta los puntos en la última fila se llama la base del grafo de la partición, y el número de puntos de este gráfico en la base se denota por b. Por tanto, $b \geq 1$.

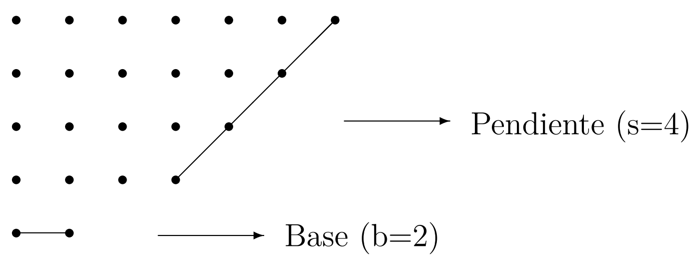
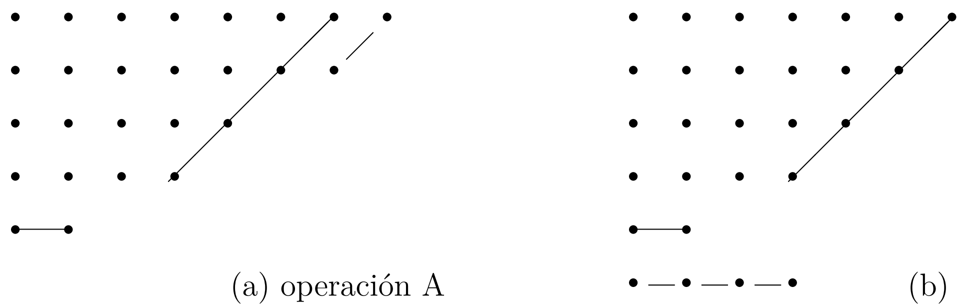


Figura 14.2

El segmento de recta de 45° más largo, que une el último punto de la primera fila con otros puntos del gráfico, se llama pendiente y el número de puntos de red en la pendiente lo denotamos por s. Entonces $s \geq 1$. En la Figura 14.2 tenemos $b = 2$ y $s = 4$. Ahora definimos dos operaciones A y B en este gráfico. La operación A convierte los puntos en la base de modo que queden en una línea paralela a la pendiente indicada en la Figura 14.3(a). La operación B mueve los puntos en la pendiente de manera que los inclina sobre una línea paralela a la base, como se muestra en la Figura 14.3(b). Decimos que una operación es permisible si conserva la forma estándar del gráfico, es decir, si el nuevo gráfico nuevamente tiene partes desiguales dispuestas en orden descendente.



(a) operación A (b) operación B

Figura 14.3

Si A es permisible, obtenemos una nueva partición de n en partes desiguales, pero el número de partes es uno menos que antes. Si B es permisible, obtenemos una nueva partición en partes desiguales, pero el número de partes es uno mayor que antes. Por lo tanto, si para cada partición de n es permisible exactamente una de las operaciones A o B, habrá una correspondencia biunivoca entre las particiones en partes pares e impares, y se tendrá que $p_e(n) = p_0(n)$ para ese n.

Para determinar si A o B es permisible, consideramos tres casos:

$$(1)\ b < s\ ; \qquad (2)\ b = s\ ; \qquad (3)\ b > s.$$

Caso 1: si $b < s$ entonces $b \leq s - 1$, por lo que la operación A está permitida, pero B no, ya que B destruye la forma estándar (consulte la Figura 14.3).

Caso 2: si $b = s$, la operación B no está permitida porque da como resultado un nuevo gráfico que no está en forma estándar. La operación A está permitida excepto cuando la base y la pendiente se intersecan, como se muestra en la Figura 14.4(a), en cuyo caso el nuevo gráfico no está en forma estándar.

Caso 3: si $b > s$, la operación A no es permisible, mientras que B es permisible excepto cuando $b = s + 1$ y la base y la pendiente se intersecan, como se muestra en la Figura 14.4(b). En este caso el nuevo gráfico contiene dos partes iguales. Por lo tanto, exactamente una de las operaciones A o B es permisible con las dos excepciones mencionadas anteriormente. Consideremos el primer caso excepcional, que se muestra en la Figura 14.4(a),

(a) b = s (b) b = s+1

Figura 14.4 Ni A ni B son permisibles

y supongamos que hay k filas en el gráfico. Entonces $b = k$ también por lo que el número n viene dado por

$$n = k + (k + 1) + \cdots + (2k - 1) = \frac{3k^2 - k}{2} = \omega(k).$$

Para esta partición de n tenemos una partición extra en partes pares si k es par, y una partición extra en partes impares si k es impar, entonces

$$p_e(n) - p_0(n) = (-1)^k.$$

En el otro caso excepcional, que se muestra en la Figura 14.4(b), hay un punto reticular adicional en cada fila, por lo que

$$n = \frac{3k^2 - k}{2} + k = \frac{3k^2 + k}{2} = \omega(-k),$$

y de nuevo $p_e(n) - p_0(n) = (-1)^k$. Esto completa la prueba de Franklin.

2.4. Identidades de Euler

Hay dos identidades que Euler probó que nos dan ilustraciones instructivas de diferentes métodos de prueba que son utilizados muy frecuentemente en la teoría sobre particiones.

Son las siguientes.

Teorema 2.4.1. *Sea $|x| < 1$, se tiene que*

$$(1+x)(1+x^3)(1+x^5)\cdots = 1+\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^4}{(1-x^2)(1-x^4)}+\frac{x^9}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)}+\cdots.$$

Teorema 2.4.2. *Sea $|x| < 1$, se tiene que*

$$(1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)\cdots = 1+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^6}{(1-x^2)(1-x^4)}+\frac{x^{12}}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)}+\cdots.$$

Demostración. Vamos a demostrar estos teoremas mediante el recurso de Euler de la introducción de un segundo parámetro a. Sea

$$K(a) := (1+ax)(1+ax^3)(1+ax^5)\cdots = 1+c_1a+c_2a^2+\cdots,$$

donde $K(a) = K(a,x)$ y $c_n = c_n(x)$ es independiente de a. Claramente

$$K(a) = (1+ax)K(ax^2),$$

es decir,

$$1+c_1a+c_2a^2+\cdots = (1+ax)(1+c_1ax^2+c_2a^2x^4+\cdots).$$

Por lo tanto, igualando los coeficientes, obtenemos

$$c_1 = x+c_1x^2, c_2 = c_1x^3+c_2x^4, ..., c_m = c_{m-1}x^{2m-1}+c_mx^{2m}, ...,$$

y por tanto

$$c_m = \frac{x^{2m-1}}{1-x^{2m}}c_{m-1} = \frac{x^{1+3+\cdots+(2m-1)}}{(1-x^2)(1-x^4)\cdots(1-x^{2m})} = $$
$$= \frac{x^{m^2}}{(1-x^2)(1-x^4)\cdots(1-x^{2m})}.$$

Resulta que

$$(1+ax)(1+ax^3)(1+ax^5)\cdots = 1+\frac{ax}{1-x^2}+\frac{a^2x^4}{(1-x^2)(1-x^4)}+\cdots,$$

y los Teoremas 2.4.1 y 2.4.2 son los casos especiales $a = 1$ y $a = x$ respectivamente. □

Capítulo 3

Estudio de $p(n)$

En este tercer capítulo haremos un estudio general de $p(n)$, primero veremos otra de las aportaciones de Euler, que fue dar una fórmula recursiva para $p(n)$ y después veremos una cota superior de $p(n)$. Para realizar este capítulo nos hemos basado en las secciones 6 y 7 del capítulo 14 del libro de Apostol "Introduction to Analytic Number Theory".

3.1. Fórmula recursiva de Euler para $p(n)$

Teorema 3.1.1. *Para $n \geq 1$ se tiene*

$$p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) + \cdots = 0, \tag{3.1}$$

o lo que es lo mismo

$$p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \Big[p(n - \omega(k)) + p(n - \omega(-k)) \Big],$$

donde definimos $p(0) = 1$ y $p(n) = 0$ si $n < 0$.

Demostración. Los Teoremas 2.1.1 y 2.2.1 dan la identidad

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k [x^{\omega(k)} + x^{\omega(-k)}] \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} p(m) x^m \right) = 1.$$

Si $n \geq 1$ el coeficiente de x^n de la derecha es 0 entonces inmediatamente obtenemos (3.1) igualando los coeficientes. $\square$

MacMahon usó esta fórmula recursiva para calcular $p(n)$ hasta $n = 200$. Aquí hay algunos valores de muestra de su tabla.

$$p(1) = 1$$

$$p(5) = 7$$
$$p(10) = 42$$
$$p(15) = 176$$
$$p(20) = 627$$
$$p(25) = 1.958$$
$$p(30) = 5.604$$
$$p(40) = 37.338$$
$$p(50) = 204.226$$
$$p(100) = 190.569.292$$
$$p(200) = 3.972.999.029.388$$

Estos ejemplos indican que $p(n)$ crece muy rápidamente con n. El mayor valor de $p(n)$ calculado hasta ahora es $p(14.031)$, que resulta ser un número con 127 dígitos. D.H. Lehmer calculó este número para verificar una conjetura de Ramanujan que afirmaba que $p(14.031) \equiv 0 (\text{mod } 11^4)$. La afirmación era correcta. Obviamente, la fórmula de recurrencia en (3.1) no se usó para calcular este valor de $p(n)$. En cambio, Lehmer usó una fórmula asintótica de Rademacher (que veremos en el Capítulo 8) que implica

$$p(n) \sim \frac{e^{K\sqrt{n}}}{4n\sqrt{3}},$$

donde $K = \pi(2/3)^{1/2}$. Para $n = 200$, la cantidad de la derecha es aproximadamente 4×10^{12}, que se acerca notablemente al valor real de $p(200)$ dado en la tabla de MacMahon.

La siguiente sección proporciona un límite superior poco afinado para $p(n)$ que involucra la exponencial $e^{K\sqrt{n}}$ y que se puede obtener con un esfuerzo relativamente pequeño.

3.2. Una cota superior para $p(n)$

Teorema 3.2.1. *Si $n \geq 1$ tenemos $p(n) < e^{K\sqrt{n}}$ donde $K = \pi(2/3)^{1/2}$.*

Demostración. Tenemos

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(k)x^k,$$

y restringimos x al intervalo $0 < x < 1$. Por lo que tenemos que $p(n)x^n < F(x)$, de donde obtenemos $\log p(n) + n \log x < \log F(x)$, o

$$\log p(n) < \log F(x) + n \log \frac{1}{x}. \tag{3.2}$$

Estimamos los términos $\log F(x)$ y $n \log \frac{1}{x}$ de forma separada. Primero escribimos

$$\begin{aligned}\log F(x) &= -\log \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = -\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-x^n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{mn}}{m}\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{\infty}(x^m)^n = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{x^m}{1-x^m},\end{aligned}$$

donde hemos podido intercambiar los sumatorios pues todos los términos son positivos. Como tenemos que

$$\frac{1-x^m}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1},$$

y como $0 < x < 1$, podemos escribir

$$mx^{m-1} < \frac{1-x^m}{1-x} < m,$$

por lo tanto,

$$\frac{m(1-x)}{x} < \frac{1-x^m}{x^m} < \frac{m(1-x)}{x^m}.$$

Invirtiendo y dividiendo por m obtenemos

$$\frac{1}{m^2}\frac{x^m}{1-x} < \frac{1}{m}\frac{x^m}{1-x^m} < \frac{1}{m^2}\frac{x}{1-x}.$$

Sumando en m obtenemos

$$\log F(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{x^m}{1-x^m} \leq \frac{x}{1-x}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}\frac{x}{1-x} = \frac{\pi^2}{6t},$$

donde

$$t = \frac{1-x}{x}.$$

Podemos ver que t varía de ∞ a 0 cuando los valores positivos de x varían de 0 a 1.

Lo siguiente que estimaremos será el término $n \log \frac{1}{x}$. Para $t > 0$ tenemos que $\log(1+t) < t$. Pero

$$1 + t = 1 + \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x}, \text{ entonces, } \log\frac{1}{x} < t.$$

Ahora,

$$\log p(n) < \log F(x) + n\log\frac{1}{x} < \frac{\pi^2}{6t} + nt. \tag{3.3}$$

El mínimo de $\frac{\pi^2}{6t} + nt$ se tiene cuando los dos términos son iguales (pues una función es decreciente y la otra creciente), esto es, cuando $\frac{\pi^2}{6t} = nt$, o $t = \pi/\sqrt{6n}$. Para este valor de t tenemos

$$\log p(n) < 2nt = 2n\pi/\sqrt{6n} = K\sqrt{n},$$

por eso $p(n) < e^{K\sqrt{n}}$ para $K := \pi(2/3)^{1/2}$, como afirmamos. $\square$

Nota 3.2.2. J. H. van Lint ha demostrado que con un poco más de esfuerzo podemos obtener la desigualdad mejorada

$$p(n) < \frac{\pi e^{K\sqrt{n}}}{\sqrt{6(n-1)}} \text{ para } n > 1. \tag{3.4}$$

Veámoslo. Como $p(k) \geq p(n)$ si $k \geq n$, tenemos, para $n > 1$,

$$F(x) > \sum_{k=n}^{\infty} p(k)x^k \geq p(n) \sum_{k=n}^{\infty} x^k = \frac{p(n)x^n}{1-x}.$$

Tomando logaritmos obtenemos, en lugar de (3.2), la desigualdad

$$\log p(n) < \log F(x) + n \log \frac{1}{x} + \log(1-x).$$

Como $1-x = tx$, tenemos $\log(1-x) = \log t - \log \frac{1}{x}$, por lo que (3.3) se puede reemplazar por

$$\log p(n) < \frac{\pi^2}{6t} + (n-1)t + \log t. \tag{3.5}$$

Un cálculo fácil con derivadas muestra que la función

$$f(t) = \frac{\pi^2}{6t} + (n-1)t + \log t,$$

tiene un mínimo en

$$t = \frac{-1 + \sqrt{1 + [4(n-1)\pi^2/6]}}{2(n-1)}.$$

Usando este valor de t en (3.5) y quitando términos que no son significantes obtenemos (3.4).

Capítulo 4

Identidad del triple producto de Jacobi

Este cuarto capítulo describe una renombrada identidad de Jacobi en la teoría de las funciones theta. El teorema del número pentagonal de Euler y muchas otras identidades sobre particiones surgen como casos especiales de la fórmula de Jacobi, además veremos las consecuencias de esta identidad en la segunda sección y por último, en la tercera sección veremos casos especiales de esta identidad. Para elaborar este capítulo nos hemos basado principalmente en la sección 8 del capítulo 14 del libro de Apostol "Introduction to Analytic Number Theory".

4.1. Identidad de Jacobi

Teorema 4.1.1 (Identidad del triple producto de Jacobi)**.** *Para x, z números complejos que cumplen que $|x| < 1$ y $z \neq 0$ tenemos*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})(1-x^{2n-1}z^{2})(1-x^{2n-1}z^{-2}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{m^2} z^{2m}. \tag{4.1}$$

Demostración. La restricción $|x| < 1$ asegura la convergencia absoluta de cada uno de los productos $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})$, $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n-1}z^{2})$, $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n-1}z^{-2})$ y de la serie en (4.1), aunque pueda ser $|z| > 1$. Además, para cada x fijo con $|x| < 1$ las series y los productos convergen uniformemente en subconjuntos compactos del plano z que no contienen a $z = 0$, por lo que cada miembro de (4.1) es una función analítica de z para $z \neq 0$. Para $z \neq 0$ fijo, las series y los productos también convergen uniformemente para $|x| \leq r < 1$ por lo tanto representan funciones analíticas de x en el disco $|x| < 1$.

Para probar (4.1) mantenemos x fijo y definimos $F(z)$ para $z \neq 0$ por la ecuación

$$F(z) := \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n-1}z^{2})(1-x^{2n-1}z^{-2}). \tag{4.2}$$

Primero vamos a demostrar que $F(z)$ satisface la ecuación funcional

$$xz^2F(xz) = F(z). \tag{4.3}$$

De (4.2) podemos ver que

$$\begin{aligned} F(xz) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1 + x^{2n+1}z^2)(1 + x^{2n-3}z^{-2}) \\ &= \prod_{m=2}^{\infty}(1 + x^{2m-1}z^2)\prod_{r=0}^{\infty}(1 + x^{2r-1}z^{-2}). \end{aligned}$$

Dado que $xz^2 = (1 + xz^2)/(1 + x^{-1}z^{-2})$, la multiplicación de la última ecuación por xz^2 da (4.3).

Ahora sea $G(z)$ el miembro izquierdo de (4.1) de modo que

$$G(z) := F(z)\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^{2n}). \tag{4.4}$$

Entonces $G(z)$ también satisface la ecuación funcional (4.3). Además, $G(z)$ es una función par de z que es analítica para todo $z \neq 0$, por lo que tiene una expansión de Laurent de la forma

$$G(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m z^{2m}, \tag{4.5}$$

donde $a_{-m} = a_m$ ya que $G(z) = G(z^{-1})$ (los coeficientes a_m dependen de x).

Usando la ecuación funcional (4.3) aplicada a $G(z)$ en (4.5),

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m z^{2m} = xz^2\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(xz)^{2m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m x^{2m+1}z^{2m+2},$$

donde sustituimos m por $m-1$, obteniendo

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m z^{2m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m-1}x^{2(m-1)+1}z^{2(m-1)+2} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m-1}x^{2m-1}z^{2m}.$$

Vemos entonces que los coeficientes satisfacen la fórmula de recurrencia

$$a_m = x^{2m-1}a_{m-1},$$

la cual, al hacerlo iteradamente da

$$a_m = a_0x^{m^2} \text{ para todo } m \geq 0\ ,$$

ya que $1 + 3 + \cdots + (2m-1) = m^2$. Es fácil ver que la expresión anterior también es válida para $m < 0$. Por lo que (4.5) pasa a ser

$$G_x(z) = a_0(x)\sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{m^2}z^{2m}, \tag{4.6}$$

donde hemos escrito $G_x(z)$ para $G(z)$ y $a_0(x)$ para a_0, para indicar la dependencia de x. Podemos ver que (4.6) implica $a_0(x) \to 1$ cuando $x \to 0$. Para completar la prueba debemos mostrar que $a_0(x) = 1$ para todo x.

Tomando $z = e^{i\pi/4}$ en (4.6) vemos que

$$\frac{G_x(e^{i\pi/4})}{a_0(x)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{m^2} i^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x^{(2n)^2}, \tag{4.7}$$

ya que $i^m = {}^{-}i^{-m}$ si m es impar. De (4.6) vemos que la serie a la derecha de (4.7) es $G_{x^4}(i)/a_0(x^4)$, por lo que tenemos la identidad

$$\frac{G_x(e^{i\pi/4})}{a_0(x)} = \frac{G_{x^4}(i)}{a_0(x^4)}. \tag{4.8}$$

Vamos a ver a continuación que $G_x(e^{i\pi/4}) = G_{x^4}(i)$. De hecho, (4.2) y (4.4) nos dan

$$G_x(e^{i\pi/4}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2n})(1 + x^{4n-2}).$$

Como cada número par es de la forma $4n$ o $4n$-2 tenemos

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2n}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{4n})(1 - x^{4n-2}),$$

por eso, reiterando lo anterior tenemos

$$\begin{aligned} G_x(e^{i\pi/4}) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{4n})(1 - x^{4n-2})(1 + x^{4n-2}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{4n})(1 - x^{8n-4}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{8n})(1 - x^{8n-4})(1 - x^{8n-4}) = G_{x^4}(i) \end{aligned}$$

Por lo que (4.8) implica que $a_0(x) = a_0(x^4)$. Sustituyendo x por $x^4, x^{4^2}, \cdots$, vemos que

$$a_0(x) = a_0(x^{4k}) \text{ para } k = 1,\, 2,\, ...$$

Pero $x^{4k} \to 0$ ya que $k \to \infty$ y $a_0(x) \to 1$ cuando $x \to 0$, por eso $a_0(x) = 1$ para todo x, lo que completaría la prueba. □

4.2. Consecuencias de la identidad de Jacobi

Se puede ver que si reemplazamos x por x^a y z^2 por x^b en la identidad de Jacobi tenemos que

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2na})(1 + x^{2na-a+b})(1 + x^{2na-a-b}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{am^2+bm}.$$

De manera similar, si $z^2 = -x^b$ vemos que

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2na})(1-x^{2na-a+b})(1-x^{2na-a-b}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{am^2+bm}.$$

Para obtener el teorema del número pentagonal de Euler simplemente hay que tomar $a = 3/2$ y $b = 1/2$ en esta última identidad. Recordemos que el teorema pentagonal de Euler establecía que

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}(1-x^m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{w(n)} \text{ donde } w(n) = \frac{3n^2-n}{2},$$

La fórmula de Jacobi conduce a otra fórmula importante para el cubo del producto de Euler.

Teorema 4.2.1. *Sea* $|x| < 1$, *tenemos que*

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^3 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m m x^{m^2+m/2} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)x^{m^2+m/2}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Demostración. Reemplazando z^2 por $-xz$ en la identidad de Jacobi obtenemos

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})(1-x^{2n}z)(1-x^{2n-2}z^{-1}) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m x^{m^2+m}(z^m - z^{-m-1}).$$

Ahora reajustamos los términos en ambos lados de la igualdad usando las relaciones

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n-2}z^{-1}) = (1-z^{-1})\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n}z^{-1}),$$

y

$$z^m - z^{-m-1} = (1-z^{-1})(1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots+z^{-2m})z^m.$$

Haciendo estos cambios obtenemos

$$\begin{aligned}&\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})(1-x^{2n}z)(1-z^{-1})(1-x^{2n}z^{-1}) \\ &\qquad = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})(1-x^{2n}z)(1-x^{2n-2}z^{-1}) \\ &\qquad = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m x^{m^2+m}(z^m - z^{-m-1}) \\ &\qquad = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m x^{m^2+m}(1-z^{-1})(1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots+z^{-2m})z^m.\end{aligned}$$

Cancelando el factor $(1 - z^{-1})$ obtenemos

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^{2n})(1 - x^{2n}z)(1 - x^{2n}z^{-1})$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m x^{m^2+m} z^m (1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-2m}).$$

Tomando $z = 1$ y sustituyendo x por $x^{1/2}$ obtenemos (4.9). □

4.3. Casos especiales de la identidad de Jacobi

En esta sección vamos a enunciar dos teoremas de interés que nos servirán como herramienta en el sexto capítulo.

Teorema 4.3.1. *Sea $|x| < 1$, se tiene que*

$$\prod_{n=0}^{\infty}[(1 - x^{5n+1})(1 - x^{5n+4})(1 - x^{5n+5})] = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{1}{2}n(5n+3)}.$$

Teorema 4.3.2. *Sea $|x| < 1$, se tiene que*

$$\prod_{n=0}^{\infty}[(1 - x^{5n+2})(1 - x^{5n+3})(1 - x^{5n+5})] = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{1}{2}n(5n+1)}.$$

Demostración. La prueba de ambos teoremas se obtiene a partir de otro caso especial de Jacobi, que es la expresión

$$\prod_{n=0}^{\infty}[(1 - x^{2kn+k-l})(1 - x^{2kn+k+l})(1 - x^{2kn+2k})] = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{kn^2+ln}.$$

Esta expresión a su vez se obtiene de una identidad de Jacobi, escribiendo x^k en lugar de x, x^l en lugar de z y $n+1$ en vez de n, la identidad de la que hablamos es la siguiente

$$\prod_{n=1}^{\infty}[(1 - x^{2n})(1 + x^{2n-1}z)(1 + x^{2n-1})z^{-1}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{n^2} z^n.$$

Ahora para obtener las expresiones que queremos tenemos que imponer que $k = 5/2$ y $l = 3/2$, obteniendo el Teorema 4.3.1 y por otro lado, imponiendo que $k = 5/2$ y $l = 1/2$ obtenemos el Teorema 4.3.2. □

Capítulo 5

Derivación logarítmica de funciones generatrices

En este quinto capítulo veremos que hay otras formas de obtener fórmulas recursivas, que serán mediante derivación logarítmica. Para elaborar este capítulo nos hemos basado principalmente en la sección 10 del capítulo 14 del libro de Apostol "Introduction to Analytic Number Theory".

El Teorema 3.1.1 da una fórmula recursiva para $p(n)$. Hay otro tipo de fórmulas recursivas para funciones aritméticas que se pueden derivar por diferenciación logarítmica de funciones generatrices. Vamos a describir el método a través de un teorema y su prueba.

Teorema 5.1.1. *Para un conjunto A de enteros positivos dado y una función aritmética f dada, los números $p_{A,f}(n)$ definidos por la ecuación*

$$\prod_{n\in A}(1-x^n)^{-f(n)/n} = 1+\sum_{n=1}^{\infty} p_{A,f}(n)x^n, \tag{5.1}$$

satisfacen la fórmula de recurrencia

$$np_{A,f}(n) = \sum_{k=1}^{\infty} f_A(k)p_{A,f}(n-k), \tag{5.2}$$

donde $p_{A,f}(0) = 1$ y

$$f_A(k) = \sum_{\substack{d|k \\ d\in A}} f(d).$$

Demostración. Sea A un conjunto dado de enteros positivos, y sea $f(n)$ una función aritmética dada. Supongamos que el producto

$$F_A(x) := \prod_{n\in A}(1-x^n)^{-f(n)/n},$$

y la serie

$$G_A(x) := \sum_{n\in A} \frac{f(n)}{n} x^n,$$

convergen absolutamente para $|x| < 1$ y representan funciones analíticas en el disco unidad $|x| < 1$. El logaritmo del producto está dado por

$$\log F_A(x) = -\sum_{n\in A} \frac{f(n)}{n} \log(1-x^n) = \sum_{n\in A} \frac{f(n)}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{nm}}{m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} G_A(x^m).$$

Derivando y multiplicando por x obtenemos

$$x\frac{F_A'(x)}{F_A(x)} = \sum_{m=1}^{\infty} G_A'(x^m)x^m = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n\in A} f(n)x^{mn} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_A(n) f(n) x^{mn},$$

donde χ_A es la función característica del conjunto A,

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 1 \; si \; n \in A, \\ 0 \; si \; n \notin A. \end{cases}$$

Agrupando los términos con $mn = k$ vemos que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_A(n) f(n) x^{mn} = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_A\left(\frac{k}{m}\right) f\left(\frac{k}{m}\right) x^k = \sum_{k=1}^{\infty} f_A(k) x^k,$$

donde

$$f_A(k) := \sum_{d|k} \chi_A(d) f(d) = \sum_{\substack{d|k \\ d\in A}} f(d).$$

Por lo que tenemos la siguiente identidad,

$$xF_A'(x) = F_A(x) \sum_{k=1}^{\infty} f_A(k) x^k. \tag{5.3}$$

Ahora escribimos el producto $F_A(x)$ como una serie de potencias

$$F_A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{A,f}(n) x^n,$$

donde $p_{A,f}(0) = 1$, e igualamos los coeficientes de x^n en (5.3) para obtener la fórmula de recurrencia (5.2).

□

Capítulo 6

Identidades relevantes

En este sexto capítulo veremos uno de los objetivos de este trabajo, es decir, veremos las identidades de Ramanujan y las identidades de Rogers-Ramanujan, que nos darán información acerca de cuántas particiones puede llegar a tener un cierto n, siendo este n un número grande. Para realizar este capítulo nos hemos basado en el capítulo 19 del libro "An Introduction to the Theory of Numbers" de Hardy y Wright.

6.1. Las identidades de partición de Ramanujan

Al examinar la tabla de MacMahon de la función de partición, Ramanujan descubrió algunas sorprendentes propiedades de divisibilidad de $p(n)$. Por ejemplo, demostró que

Teorema 6.1.1. $p(5m+4) \equiv 0(\mathit{mod}\ 5)$,

Teorema 6.1.2. $p(7m+5) \equiv 0(\mathit{mod}\ 7)$,

Teorema 6.1.3. $p(11m+6) \equiv 0(\mathit{mod}\ 11)$.

En esta sección veremos la prueba de los Teoremas 6.1.1 y 6.1.2, pero la prueba del Teorema 6.1.3 no la veremos, ya que se trata de una prueba con muchos detalles técnicos.

Para hacer la demostración vamos a utilizar el siguiente Teorema de Jacobi

Teorema 6.1.4. *Sea* $|x| < 1$, *se tiene que*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^3 = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)x^{\frac{1}{2}m(m+1)}.$$

Y también necesitaremos utilizar este Teorema de Euler

Teorema 6.1.5. *Sea* $|x| < 1$, *se tiene que*

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{1}{2}n(3n+1)}.$$

Estos dos teoremas tienen pruebas muy largas y técnicas por lo que no las veremos aquí, pero la segunda prueba aparece en la página 284 del libro "An Introduction to the Theory of Numbers" de Hardy y Wright, haciendo los cambios correspondientes en los casos especiales de Jacobi que se definen anteriormente.

1. Prueba de que $p(5n+4) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 5)$

El número $p(5n+4)$ es el coeficiente de x^{5n+4} en $\sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k$, luego es el coeficiente de x^{5n+5} en $F(x) := x\sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k$.

Se tiene

$$\begin{aligned} F(x) = x\sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k = x\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^m} &= x\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^m}\frac{\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^{5m})}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^{5m})} \\ &= x\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1-x^{5m}}{1-x^m}\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{5m}} \\ &= x\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1-x^{5m}}{1-x^m}\prod_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}x^{5mj}\Big) \\ &= x\left(\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)\right)^4\frac{\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^{5m})}{\left(\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)\right)^5}\prod_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}x^{5mj}\Big) \\ &= x\left(\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)\right)^4\prod_{m=1}^{\infty}\frac{(1-x^{5m})}{(1-x^m)^5}\prod_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}x^{5mj}\Big) \\ &= F_1(x)F_2(x)F_3(x). \end{aligned}$$

Examinamos cada uno de los tres términos.

a) Usando las fórmulas de Jacobi y de Euler

$$\begin{aligned} F_1(x) = x\left(\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)\right)^4 &= x\Big(\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)\Big)\Big(\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)\Big)^3 \\ &= x\Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j(x^{\frac{1}{2}j(3j+1)})\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)x^{\frac{1}{2}m(m+1)}\Big) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{j+m}(2m+1)x^{1+\frac{1}{2}m(m+1)+\frac{1}{2}j(3j+1)}. \end{aligned}$$

Veamos cuando el exponente de x^k es una potencia de 5:

$$\begin{aligned} 8k &= 8+4m(m+1)+4j(3j+1) = 12j^2+4j+4m^2+4m+8 \\ &= 2(j+1)^2+(2m+1)^2+10j+5, \end{aligned}$$

luego
$$2(j+1)^2+(2m+1)^2=8k-10j-5=8k\equiv(\text{mod }5).$$
Entonces, si el exponente de x^k es una potencia de 5, se tiene $k\equiv 0(\text{mod }5)$, luego
$$2(j+1)^2+(2m+1)^2\equiv 0(\text{mod }5).$$
Veamos cada término de la suma
$$2(j+1)^2\equiv 0,2,3(\text{mod }5)$$
y
$$(2m+1)^2\equiv 0,1,4(\text{mod }5),$$
luego la única forma en que la suma sea múltiplo de 5 es que lo sean cada término, luego debe ocurrir que
$$(2m+1)^2\equiv 0(\text{mod }5)\iff(2m+1)\equiv 0(\text{mod }5)$$
Por lo tanto el coeficiente en $F_1(x)$ de x^{5m+5} es multiplo de 5.

b) Como se cumple
$$(1-x)^5-(1-x^5)=\sum_{k=1}^{4}\binom{5}{k}x^k\equiv 0(\text{mod }5),$$
en el sentido de que los coeficientes del polinomio son múltiplos de 5. Se tiene entonces
$$\frac{1}{(1-x)^5}-\frac{1}{(1-x^5)}=\frac{1}{(1-x)^5(1-x^5)}\Big((1-x)^5-(1-x^5)\Big)\equiv 0(\text{mod }5),$$
pues $\frac{1}{(1-x)^5}$ y $\frac{1}{(1-x^5)}$ tienen coeficientes enteros (Hardy & Wright, §6.2). Se sigue que
$$\frac{1}{(1-x)^5}\equiv\frac{1}{(1-x^5)}(\text{mod }5)$$
lo que significa que ambas expresiones tienen coeficientes congruentes módulo 5. Multiplicando por $(1-x^5)$ obtenemos
$$\frac{(1-x^5)}{(1-x)^5}\equiv 1(\text{mod }5)$$
y aplicando lo anterior a x^m
$$\frac{(1-x^{5m})}{(1-x^m)^5}\equiv 1(\text{mod }5).$$

Por lo tanto
$$F_2(x) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1-x^{5m})}{(1-x^m)^5} \equiv 1(\text{mod } 5),$$
es decir los coeficientes de $F_2(x)$ son congruentes módulo 5 con los del polinomio 1, en particular, salvo el término independiente, son múltiplos de 5.

Por lo tanto, el coeficiente de x^{5m+5} en $F_1(x)F_2(x)$ es múltiplo de 5.

Queda multiplicar por $F_3(x)$, pero como
$$F_3(x) = \prod_{m=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} x^{5mj} \Big) = (1 + x^5 + x^{10} + \cdots)(1 + x^{10} + x^{20} + \cdots) \cdots ,$$
se sigue cumpliendo que el coeficiente de x^{5m+5} en $F_1(x)F_2(x)F_3(x)$ es múltiplo de 5. Así, $p(5n+4)$ es múltiplo de 5.

2. Prueba de que $p(7n+5) \equiv 0(\text{mod } 7)$.

El número $p(7n+5)$ es el coeficiente de x^{7n+5} en $\sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k$, luego es el coeficiente de x^{7n+5} en $F(x) := x^2 \sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k$.

Se tiene
$$\begin{aligned}
F(x) = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k = x \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^m} &= x^2 \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^m} \frac{\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^{7m})}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^{7m})} \\
&= x^2 \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1-x^{7m}}{1-x^m} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{7m}} \\
&= x^2 \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1-x^{7m}}{1-x^m} \prod_{m=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} x^{7mj} \Big) \\
&= x^2 \left(\prod_{m=1}^{\infty} (1-x^m) \right)^6 \frac{\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^{7m})}{\left(\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m) \right)^7} \prod_{m=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} x^{7mj} \Big) \\
&= x^2 \left(\prod_{m=1}^{\infty} (1-x^m) \right)^6 \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1-x^{7m})}{(1-x^m)^7} \prod_{m=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} x^{7mj} \Big) \\
&= F_1(x)F_2(x)F_3(x).
\end{aligned}$$

Examinamos cada uno de los tres términos.

a) Usando la fórmula de Jacobi

$$
\begin{aligned}
F_1(x) = x^2\left(\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)\right)^6 &= x^2\left(\left(\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)\right)^3\right)^2 \\
&= x^2\left(\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)x^{\frac{1}{2}m(m+1)}\right)^2 \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{j+m}(2m+1)(2j+1)x^{2+\frac{1}{2}m(m+1)+\frac{1}{2}j(j+1)}.
\end{aligned}
$$

Veamos cuando el exponente de x^k es una potencia de 7:

$$
\begin{aligned}
8k &= 16+4m(m+1)+4j(j+1) = 4j^2+4j+4m^2+4m+8 \\
&= (2j+1)^2+(2m+1)^2+14,
\end{aligned}
$$

luego

$$(2j+1)^2+(2m+1)^2 = 8k-14 = 8k \equiv (\mathrm{mod}\ 7).$$

Entonces, si el exponente de x^k es una potencia de 7, se tiene $k \equiv 0(\mathrm{mod}\ 7)$, luego

$$(2j+1)^2+(2m+1)^2 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 7).$$

Veamos cada término de la suma

$$(2j+1)^2 \equiv 0,1,2,4(\mathrm{mod}\ 7)$$

y

$$(2m+1)^2 \equiv 0,1,2,4(\mathrm{mod}\ 7),$$

luego la única forma en que la suma sea múltiplo de 7 es que lo sean cada término, luego debe ocurrir que

$$(2j+1)^2,(2m+1)^2 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 7) \iff (2j+1),(2m+1) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 7)$$

Por lo tanto el coeficiente en $F_1(x)$ de x^{7m+7} es multiplo de 7.

b) Como se cumple

$$(1-x)^7-(1-x^7) = \sum_{k=1}^{6}\binom{7}{k}x^k \equiv 0(\mathrm{mod}\ 7),$$

en el sentido de que los coeficientes del polinomio son múltiplos de 7. Se tiene entonces

$$\frac{1}{(1-x)^7}-\frac{1}{(1-x^7)} = \frac{1}{(1-x)^7(1-x^7)}\Big((1-x)^7-(1-x^7)\Big) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 7),$$

pues $\frac{1}{(1-x)^7}$ y $\frac{1}{(1-x^7)}$ tienen coeficientes enteros (Hardy & Wright, §6.2). Se sigue que

$$\frac{1}{(1-x)^7} \equiv \frac{1}{(1-x^7)} (\text{mod } 7)$$

lo que significa que ambas expresiones tienen coeficientes congruentes módulo 7. Multiplicando por $(1-x^7)$ obtenemos

$$\frac{(1-x^7)}{(1-x)^7} \equiv 1 (\text{mod } 7)$$

y aplicando lo anterior a x^m

$$\frac{(1-x^{7m})}{(1-x^m)^7} \equiv 1 (\text{mod } 7).$$

Por lo tanto

$$F_2(x) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1-x^{7m})}{(1-x^m)^7} \equiv 1 (\text{mod } 7),$$

es decir los coeficientes de $F_2(x)$ son congruentes módulo 7 con los del polinomio 1, en particular, salvo el término independiente, son múltiplos de 7.

Por lo tanto, el coeficiente de x^{7m+7} en $F_1(x)F_2(x)$ es múltiplo de 7.

Queda multiplicar por $F_3(x)$, pero como

$$F_3(x) = \prod_{m=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} x^{7mj} \Big) = (1 + x^7 + x^{14} + \cdots)(1 + x^{14} + x^{28} + \cdots) \cdots,$$

se sigue cumpliendo que el coeficiente de x^{7m+7} en $F_1(x)F_2(x)F_3(x)$ es múltiplo de 7. Así, $p(7n+5)$ es múltiplo de 7.

Desarrollos posteriores

A parte de estas tres congruencias anteriores también hay con los módulos $5^2, 7^2$ y 11^2, como

$$p(25m + 24) \equiv 0 (\text{mod } 5^2).$$

Ramanujan hizo la conjetura general de que si

$$\delta = 5^a 7^b 11^c \text{ y } 24n \equiv 1 (\text{mod } \delta),$$

entonces

$$p(n) \equiv 0 (\text{mod } \delta).$$

Solo hay que considerar los casos $\delta = 5^a, 7^b$ y 11^c, ya que todos los demás seguirían como corolarios. Ramanujan probó las congruencias para $5^2, 7^2$ y 11^2, Krecmar para 5^3

y Watson que para el caso general 5^a. Pero Gupta, al extender la tabla de Macmahon hasta 300, encontró que

$$p(243) = 133978259344888$$

no es divisible por $7^3 = 343$; y, dado que $24.243 \equiv 1(\text{mod } 343)$, esto contradice la conjetura de 7^3. Por lo tanto, la conjetura de 7^b tuvo que ser modificada, y Watson encontró y probó la modificación apropiada. Es decir, que $p(n) \equiv 0(\text{mod } 7^b)$ si $b > 1$ y $24n \equiv 1(\text{mod } 7^{2b-2})$. D. H. Lehmer usó un método bastante diferente basado en la teoría analítica de Hardy y Ramanujan y de Rademacher para calcular $p(n)$ para un n particular. Por este medio comprobó la validez de la conjetura para los primeros valores de n asociados a los módulos 11^3 y 11^4. Finalmente, Lehner probó la conjetura de 11^3.

Dyson conjeturó y Atkin y Swinnerton-Dyer demostraron resultados notables de los cuales los teoremas 6.1.1 y 6.1.2, pero no el 6.1.3, son corolarios inmediatos. Así, definamos el rango de una partición como la mayor parte, de modo que, por ejemplo, el rango de una partición y la de la partición conjugada sólo difieren en el signo. A continuación ordenamos las particiones de un número en cinco clases, cada clase que contiene las particiones cuyo rango tiene el mismo residuo (mod 5). Entonces, si $n \equiv 4(\text{mod } 5)$, el número de particiones en cada una de las cinco clases es la misma y el Teorema 6.1.1 es un corolario inmediato. Hay un resultado similar que conduce al Teorema 6.1.2.

En relación con estos descubrimientos Ramanujan también conjeturó sin pruebas dos identidades importantes, como

$$\sum_{m=0}^{\infty} p(5m+4)x^m = 5\frac{\varphi(x^5)^5}{\varphi(x)^6}, \tag{6.1}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} p(7m+5)x^m = 7\frac{\varphi(x^7)^3}{\varphi(x)^4} + 49\frac{\varphi(x^7)^7}{\varphi(x)^8}, \tag{6.2}$$

$$\text{donde } \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-x^n).$$

Dado que las funciones a la derecha de (6.1) y (6.2) tienen expansiones en serie de potencias con coeficientes enteros, las identidades de Ramanujan implican inmediatamente las congruencias de los Teoremas 6.1.1 y 6.1.2. Darling, Mordell, Rademacher, Zuckerman y otros encontraron pruebas de (6.1) y (6.2), basadas en la teoría de funciones modulares. Otras pruebas, independientes de la teoría de funciones modulares, fueron dadas por Kruyswijk y más tarde por Kolberg.

6.2. Las identidades de Rogers-Ramanujan

Teorema 6.2.1. *Sea $|x| < 1$, entonces se tiene que*

$$1 + \frac{x}{1-x} + \frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x^9}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \cdots$$
$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^6)\cdots(1-x^4)(1-x^9)\cdots},$$

es decir,

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{m^2}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)} = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{5m+1})(1-x^{5m+4})}.$$

Teorema 6.2.2. *Sea $|x| < 1$, entonces se tiene que*

$$1 + \frac{x^2}{1-x} + \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x^{12}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \cdots$$
$$= \frac{1}{(1-x^2)(1-x^7)\cdots(1-x^3)(1-x^8)\cdots},$$

es decir,

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{m(m+1)}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)} = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{5m+2})(1-x^{5m+3})}.$$

El interés de las fórmulas radica en el papel inesperado que juega el número 5. Observamos primero que las identidades de Euler que aparecen en los Teoremas 2.4.1 y 2.4.2 tienen una interpretación combinatoria. Consideremos el Teorema 6.2.1, por ejemplo. Podemos expresar cualquier cuadrado m^2 como

$$m^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2m-1)$$

o como muestran los puntos negros en el gráfico M, en el que $m = 4$. Si tomamos ahora cualquier partición de $n - m^2$ en m partes como máximo, con las partes en orden descendente, y añadiéndola al gráfico, como lo muestran los círculos de M, donde $m = 4$ y $n = 4^2 + 11 = 27$, obtenemos una partición de n (aquí $27 = 11+8+6+2$) en partes sin repeticiones ni secuencias, o partes cuya diferencia mínima es 2. El lado izquierdo en el Teorema 6.2.1 enumera este tipo de partición de n.

• • • • • • • O O O O
• • • • • O O O
• • • O O O
• O M

Por otro lado, el lado derecho enumera las particiones en números de las formas $5m+1$ y $5m+4$. Por lo tanto, el Teorema 6.2.1 puede reformularse como un teorema puramente “combinatorio”.

Teorema 6.2.3. *El número de particiones de n con diferencia mínima 2 es igual al número de particiones en partes de las formas $5m+1$ y $5m+4$.*

Así, cuando $n=9$, hay 5 particiones de cada tipo,

$$9, 8+1, 7+2, 6+3, 5+3+1$$

de la primera forma, y

$$9, 6+1+1+1, 4+4+1, 4+1+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1+1+1+1$$

de la segunda forma. De manera similar, el equivalente combinatorio del Teorema 6.2.2 es el siguiente teorema.

Teorema 6.2.4. *El número de particiones de n en partes no menores que 2 y con diferencia mínima 2, es igual al número de particiones de n en partes de las formas $5m+2$ y $5m+3$.*

Podemos probar esta equivalencia de la misma forma, partiendo de la identidad

$$m(m+1) = 2+4+6+\cdots+2m.$$

La demostración que damos de estos teoremas fue hallada de manera independiente por Rogers y Ramanujan. Lo enunciamos en la forma dada por Rogers. Es bastante sencillo, pero poco esclarecedor, ya que depende de escribir una función auxiliar cuya génesis permanece oscura.

Demostración. Vamos a hacer la prueba de ambos teoremas vistos anteriormente. Escribimos

$$P_0 = 1, P_r(x) = \prod_{s=1}^{r} \frac{1}{1-x^s}, \text{ con } 1 \leq r \leq \infty$$

$$Q_r(x) = Q_r(a) = \prod_{s=r}^{\infty} \frac{1}{1-ax^s}, \text{ con } 1 \leq r \leq \infty$$

$$\lambda(r) = \frac{r}{2}(5r+1),$$

y definimos el operador η por

$$\eta f(a) = f(ax).$$

Para simplificar la escritura establecemos que $P_r = P_r(x)$, $Q_r = Q_r(x)$ y $H_m = H_m(x)$, e introducimos la función auxiliar

$$H_m = H_m(a) := \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r a^{2r} x^{\lambda(r)-mr}(1 - a^m x^{2mr}) P_r Q_r, \tag{6.3}$$

donde $m = 0, 1$ o 2. Nuestro propósito es expandir H_1 y H_2 en potencias de a. Vamos a probar primero que

$$H_m - H_{m-1} = a^{m-1}\eta H_{3-m}. \qquad (m = 1, 2) \tag{6.4}$$

Tenemos

$$H_m - H_{m-1} = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r a^{2r} x^{\lambda(r)} C_{mr} P_r Q_r,$$

donde

$$\begin{aligned} C_{mr} &= x^{-mr} - a^m x^{mr} - x^{(1-m)r} + a^{m-1}x^{r(m-1)} \\ &= a^{m-1}x^{r(m-1)}(1 - ax^r) + x^{-mr}(1 - x^r). \end{aligned}$$

Ahora

$$(1 - ax^r)Q_r = Q_{r+1}, \qquad (1 - x^r)P_r = P_{r-1}, \qquad 1 - x^0 = 0,$$

y por eso

$$H_m - H_{m-1} = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r a^{2r+m-1} x^{\lambda(r)+r(m-1)} P_r Q_{r+1} + \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r a^{2r} x^{\lambda(r)-mr} P_{r-1} Q_r.$$

En el segundo sumatorio en el lado derecho de esta identidad cambiamos r por $r+1$. Entonces

$$H_m - H_{m-1} = \sum_{r=0}^{\infty} D_{mr} P_r Q_{r+1},$$

donde

$$\begin{aligned} D_{mr} &= a^{2r+m-1}x^{\lambda(r)+r(m-1)} - a^{2(r+1)}x^{\lambda(r+1)-mr(r+1)} \\ &= a^{m-1+2r}x^{\lambda(r)+r(m-1)}(1 - a^{3-m}x^{(2r+1)(3-m)}) \\ &= a^{m-1}\eta[a^{2r}x^{\lambda(r)-r(3-m)}(1 - a^{3-m}x^{2r(3-m)})], \end{aligned}$$

como $\lambda(r+1) - \lambda(r) = 5r + 3$. También $Q_{r+1} = \eta Q_r$ y por eso

$$H_m - H_{m-1} = a^{m-1}\eta \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r a^{2r} x^{\lambda(r)+r(3-m)}(1 - a^{3-m})x^{2r(3-m)} P_r Q_{r+1}$$

$$= a^{m-1}\eta H_{3-m},$$

que es (6.4).

Si ponemos que $m = 1$ y $m = 2$ en (6.4) y recordamos que $H_0 = 1$, tenemos

$$H_1 = \eta H_2, \tag{6.5}$$

$$H_2 - H_1 = a\eta H_1,$$

por lo que

$$H_2 = \eta H_2 + a\eta^2 H_2. \tag{6.6}$$

Usamos esto para expandir H_2 en potencias de a. Si

$$H_2 = c_0 + c_1 a + \cdots = \sum_{s=0}^{\infty} c_s a^s,$$

donde los c_s son independientes de a, entonces $c_0 = 1$ y (6.6) da

$$\sum_{s=0}^{\infty} c_s a^s = \sum_{s=0}^{\infty} c_s x^s a^s + \sum_{s=0}^{\infty} c_s x^{2s} a^{s+1}.$$

Igualando los coeficientes de a^s, tenemos

$$c_1 = \frac{1}{1-x},$$

$$c_s = \frac{x^{2s-2}}{1-x^s} c_{s-1} = \frac{x^{2+4+\cdots+2(s-1)}}{(1-x)\cdots(1-x^s)} = x^{s(s-1)} P_s.$$

Por lo que

$$H_2(a) = \sum_{s=0}^{\infty} a^s x^{s(s-1)} P_s.$$

Si ponemos que $a = x$, el lado derecho de esta expresión son las series en el Teorema 6.2.1.

También $P_r Q_r = P_\infty$ y por eso, por (6.3),

$$H_2 = P_\infty \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r x^{\lambda(r)} (1 - x^{2(2r+1)})$$

$$= P_\infty \left[\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r x^{\lambda(r)} + \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r x^{\lambda(r-1)+2(2r11)} \right]$$

$$= P_\infty \left[1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r (x^{\frac{r}{2}(5r+1)+\frac{r}{2}(5r-1)}) \right].$$

De manera que, por el Teorema 4.3.2,

$$H_2(x) = P_\infty \prod_{n=0}^{\infty} [(1 - x^{5n+2})(1 - x^{5n+3})(1 - x^{5n+5})]$$

$$= \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - x^{5n+1})(1 - x^{5n+4})},$$

lo que completaría la prueba del Teorema 6.2.1.

De nuevo por (6.5),

$$H_1(a) = \eta H_2(a) = H_2(ax) = \sum_{s=0}^{\infty} a^s x s 2 P_s,$$

y para $a = x$, el lado derecho pasa a ser las series en el Teorema 6.2.2.

Utilizando (6.3) y el Teorema 4.3.1, completaríamos la prueba del Teorema 6.2.2 de la misma manera que hicimos con el Teorema 6.2.1. $\square$

Capítulo 7

Fracción contínua de Ramanujan

Otro de los sorprendentes resultados de Ramanujan está relacionado con las fracciones continuas, por lo que antes de ahondar en este tema vamos a dar una definición de estas. Para este capítulo nos hemos basado en el libro “An Introduction to the Theory of Numbers” de Hardy y Wright, también nos hemos basado en “Continued fractions” de A. Ya. Khinchin.

7.1. Definición de fracción contínua

Una fracción continua es una expresión de la forma

$$\lim_{n\to\infty}\left(b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\dots\cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1}+\frac{a_n}{b_n}}}}\right)=b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\frac{a_3}{b_3+\dots}}}$$

y de manera más compacta se suele escribir esta expresión anterior como

$$b_0+\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\frac{a_3}{b_3+}\cdots,$$

donde $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ son, en general, sucesiones de números complejos.

Podemos decir que las fracciones continuas son una forma de representar números, de manera que en el caso de números racionales tendríamos una fracción finita y en el caso de números irracionales una fracción infinita. Por este motivo el principal interés de éstas reside en la Teoría de la aproximación, las fracciones continuas de Ramanujan son una herramienta importante en la teoría de la aproximación, que se encarga de estudiar cómo aproximar números irracionales mediante las fracciones racionales. Las fracciones continuas de Ramanujan permiten obtener aproximaciones rápidas y precisas de números irracionales mediante los convergentes y son fundamentales para entender la Teoría de la aproximación en general.

Volviendo al tema de los convergentes, podemos decir que un convergente es la aproximación racional truncada que se obtiene al cortar la expresión después de un cierto número de términos, es decir,

$$\frac{p_n}{q_n} := b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n}}}}.$$

Se cumple que si tomamos un convergente de la fracción continua de un número real y tomamos todas las fracciones con denominador menor o igual que él, entonces este convergente da mejor aproximación racional que cualquiera de las demás.

Las fracciones continuas tienen una conexión interesante con la teoría de particiones a través de la función generatriz de las particiones, que se puede expresar como una fracción continua. La expansión de la fracción continua de la función generatriz de las particiones se puede utilizar para obtener información sobre las propiedades de la función de particiones y las particiones de números naturales en general. Por ejemplo, la fracción continua de la función generatriz de las particiones se relaciona con la distribución de los tamaños de las particiones de un número natural.

Además, las fracciones continuas también se han utilizado en la teoría de particiones para estudiar otros problemas relacionados, como la relación entre las particiones y las funciones modulares.

7.2. Resultado dado por Ramanujan

Las identidades de Rogers-Ramanujan vistas en el capítulo 6 son uno de los episodios más fascinantes en la historia de las particiones. La historia comienza con el descubrimiento de un genio matemático indio, Ramanujan. En su primera carta a Hardy, Ramanujan escribió varios teoremas de fracciones contínuas.

A continuación vamos a ver cómo llegó a uno de ellos. Partiendo de (6.6), definida en el capítulo anterior,

$$H_2 = \eta H_2 + a\eta^2 H_2,$$

la podemos escribir como

$$H_2(a, x) = H_2(ax, x) + aH_2(ax^2, x),$$

de esto se sigue que

$$H_2(ax, x) = H_2(ax^2, x) + axH_2(ax^3, x).$$

$$\begin{aligned} F(u) = F(a, x) = H_1(a, x) = \eta H_2(a, x) &= H_2(ax, x) \\ &= 1 + \frac{ax}{1-x} + \frac{a^2x^4}{(1-x)(1-x^2)} + \cdots , \end{aligned}$$

entonces $F(u)$ satisface

$$F(ax^n) = F(ax^{n+1}) + ax^{n+1}F(ax^{n+2}).$$

De manera que, si

$$u_n := \frac{F(ax^n)}{F(ax^{n+1})},$$

tenemos

$$u_n = 1 + \frac{ax^{n+1}}{F(u_{n+1})};$$

por lo que $u_0 := \frac{F(a)}{F(ax)}$ puede ser desarrollado formalmente como

$$\frac{F(a)}{F(ax)} = 1 + \frac{ax}{1+} \cdot \frac{ax^{,2}}{1+} \cdots \ , \tag{7.1}$$

Cuando $|x| < 1$,

$$\frac{ax}{1+} \cdot \frac{ax^{,2}}{1+} \cdots$$

tiende a un límite mediante el cual podemos definir el lado derecho de (7.1). Si tomamos esto como algo garantizado, obtenemos en particular,

$$\frac{F(1)}{F(x)} = 1 + \frac{x}{1+} \cdot \frac{x^2}{1+} \cdot \frac{x^3}{1+} \cdots \ ,$$

y por eso,

$$1 + \frac{x}{1+} \cdot \frac{x^2}{1+} = \frac{1 - x^2 - x^3 + x^9 + ...}{1 - x - x^4 + x^7 + ...} = \frac{(1-x^2)(1-x^7)...(1-x^3)(1-x^8)...}{(1-x)(1-x^6)...(1-x^4)(1-x^9)...}.$$

Es algo conocido de la teoría de las funciones elípticas que estos productos y series pueden ser calculados para ciertos valores de x, y en particular cuando

$$x = e^{-2\pi\sqrt{h}},$$

siendo h un racional.

De esta manera Ramanujan probó que, por ejemplo,

$$1 + \frac{e^{-2\pi}}{1+} \cdot \frac{e^{-4\pi}}{1+} \cdot \frac{e^{-6\pi}}{1+} \cdots = \left(\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) e^{\frac{2}{5}\pi}.$$

Capítulo 8

Fórmula “exacta” de Rademacher

Este octavo y último capítulo lo dedicaremos única y exclusivamente a la fórmula que probaron Hardy-Ramanujan en 1918 y a la que posteriormente refinó Rademacher en 1937 sobre particiones. En la primera sección veremos un esquema de la demostración de la fórmula de Rademacher y en la siguiente sección veremos que a partir de esta fórmula se llega a la fórmula de Hardy-Ramanujan. Para realizar este capítulo nos hemos basado en los libros “The Theory of Partitions” y “Modular Functions and Dirichlet Series” cuyos autores son George E. Andrews y T. M. Apostol respectivamente.

8.1. Fórmula de Rademacher

Teorema 8.1.1. *Si $n \geq 1$ la función partición $p(n)$ queda representada por*

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}(x-\frac{1}{24})}\right)}{\sqrt{x-\frac{1}{24}}}\right)_{x=n},$$

siendo α una constante positiva arbitraria y siendo

$$A_k(n) := \sum_{\substack{0\leq h<k \\ (h,k)=1}} w_{h,k} \exp\left(-2\pi i\frac{h}{k}n\right),$$

donde

$$w_{h,k} := \exp\left(\pi i \sum_{\mu=1}^{k-1}\left(\frac{\mu}{k} - \left[\frac{\mu}{k}\right] - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{h\mu}{k} - \left[\frac{h\mu}{k}\right] - \frac{1}{2}\right)\right).$$

Lema 8.1.2. *Sea*

$$P(x) := \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-1}, \tag{8.1}$$

Podemos escribir

$$P(\exp(2\pi i(h+iz)/k)) = w_{h,k}^{\frac{1}{2}} \exp[\pi(z^{-1}-z)/12k]$$
$$\cdot P(\exp[2\pi i(h'+iz^{-1})/k]), \tag{8.2}$$

donde $Re(z) > 0$ y h' es solución de la congruencia

$$hh' \equiv -1(mod\ k). \tag{8.3}$$

No veremos la prueba de este lema pero se encuentra en el libro "The Theory of Partitions" de George E. Andrews.

Demostración. Procedemos a hacer la demostración del Teorema 8.1.1.

Ahora llegamos al enfoque verdaderamente notable para la evaluación de $p(n)$ que fue desarrollado por Hardy y Ramanujan. El teorema integral de Cauchy implica que

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P(x)}{x^{n+1}} dx, \tag{8.4}$$

donde C es un círculo con centro en el origen y dentro del círculo unitario $|x| = 1$.

¿Cómo podemos evaluar esta integral? Examinando la función generatriz $P(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-1}$ vemos que cada producto parcial $\prod_{n=1}^{N}(1-x^n)^{-1}$ tiene un polo de orden N en $x = 1$, un polo de orden $[N/2]$ en $x = -1$, polos de orden $[N/3]$ en $x = \exp(2\pi i/3)$ y $\exp(4\pi i/3)$, y así sucesivamente. Además, observamos que (8.2) da información sobre el comportamiento de $P(x)$ cerca de $\exp(2\pi ih/k)$, es decir, cuando $z \to 0$ ($Re\ z > 0$):

$$P\left[\exp\left(\frac{2\pi ih}{k} - \frac{2\pi z}{k}\right)\right] \sim w_{h,k}^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{\pi(z^{-1}-z)}{12k}\right]. \tag{8.5}$$

Entonces deberíamos dividir el círculo de integración en segmentos para que nuestra información sobre (8.5) pueda aplicarse con mayor precisión, dependiendo de qué "punto racional" $\exp(2\pi ih/k)$ estemos cerca. Desafortunadamente, los puntos racionales son densos en el círculo unitario, por lo que no sería útil. Para tener una idea de cómo hacer efectivo este enfoque, tengamos en cuenta que los puntos $\exp(2\pi ih/k)$ donde k es pequeño parecen ser las más importantes de las singularidades; por tanto, en lugar de preocuparnos por el conjunto denso de todos los puntos racionales, restringimos nuestra atención al conjunto discreto de esos puntos racionales $\exp(2\pi ih/k)$ con $0 < k \leq N$, un entero positivo fijo. Para desarrollar la idea anterior nos interesa F_N: el conjunto de fracciones de Farey de orden N. Por ejemplo, cuando $N = 5$,

$$F_5 = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\right\}.$$

Conjeturamos que deberíamos dividir el círculo C de radio ρ en segmentos de modo que cada segmento esté en algún sentido "centrado" en los puntos racionales sucesivos

$\rho e^{2\pi ih/k}$ donde $h/k \in F_N$. Ahora debemos confiar en las propiedades elementales de F_N para sugerir la elección óptima de intervalos. Se cumple que si h/k y h_1/k_1, son términos sucesivos en F_N, entonces el número racional con menor denominador que está estrictamente entre h/k y h_1/k_1 es $(h+h_1)/(k+k_1)$ y este número se llama la mediante de h/k y h_1/k_1. Por lo tanto, usar las mediantes como punto final para nuestros intervalos parece una partición natural de C. Ahora bien, si h_0/k_0, h/k y h_1/k_1 son tres términos sucesivos en F_N, escribamos

$$\begin{aligned}
\theta'_{0,1} &= \frac{1}{N+1}, \\
\theta'_{h,k} &= \frac{h}{k} - \frac{h_0+h}{k_0+h} \text{ para } h > 0, \\
\theta''_{h,k} &= \frac{h_1+h}{k_1+h} - \frac{h}{k}.
\end{aligned} \tag{8.6}$$

Parametrizando y normalizando $x = \rho \cdot \exp(2\pi i\phi)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
p(n) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{P(x)}{x^{n+1}}dx \\
&= \rho^{-n}\int_0^1 P\left[\rho \cdot \exp\left(2\pi i\phi\right)\right]\exp\left(-2\pi in\phi\right)d\phi \\
&= \rho^{-n}\sum_{\substack{k=1\\(h,k)=1\\0\le h<k}}^{N}\int_{-\theta'_{h,k}}^{\theta''_{h,k}} P\left[\rho\cdot\exp\left(\frac{2\pi ih}{k}+2\pi i\phi\right)\right]\exp\left(-\frac{2\pi inh}{k}-2\pi in\phi\right)d\phi.
\end{aligned} \tag{8.7}$$

Lo que necesitamos antes de la aplicación de (8.2) es una elección apropiada de ρ, podríamos elegir ρ lo mejor posible cuando nos veamos obligados a hacerlo. Sin embargo, para simplificar, haremos la elección "correcta" inmediatamente:

$$\rho = \exp(-\frac{2\pi}{N^2}), \tag{8.8}$$

y haremos observaciones posteriormente sobre lo adecuado de esta elección. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
p(n) = \exp\left(\frac{2\pi n}{N^2}\right) &\sum_{\substack{k=1\\(h,k)=1\\0\le h<k}}^{N}\exp\left(-\frac{2\pi inh}{k}\right) \\
&\cdot\int_{-\theta'_{h,k}}^{\theta''_{h,k}} P\left[\exp\left[\frac{2\pi ih}{k}-\frac{2\pi}{k}\left(\frac{k}{N^2}-ik\phi\right)\right]\right]\exp\left(-2\pi in\phi\right)d\phi,
\end{aligned} \tag{8.9}$$

entonces para aplicar (8.2) debemos definir

$$z := k(N^{-2} - i\phi). \tag{8.10}$$

Como consecuencia, aplicando (8.2) al integrando en (8.9), vemos que

$$p(n) = \exp\left(\frac{2\pi n}{N^2}\right) \sum_{\substack{k=1 \\ (h,k)=1 \\ 0\leq h<k}}^{N} \exp\left(\frac{2\pi ihn}{k}\right) w_{h,k}$$

$$\cdot \int_{-\theta'_{h,k}}^{\theta''_{h,k}} z^{\frac{1}{2}} \exp\left[\pi\frac{(z^{-1}-z)}{12k}\right] P\left[\exp\left[2\pi i\frac{(h'+iz^{-1})}{k}\right]\right] \exp\left(-2\pi in\phi\right) d\phi. \quad (8.11)$$

Como z $\to 0$ con $Re\ z > 0$, vemos que $\exp\frac{(h'+iz^{-1})}{k} \to 0$ de manera rápida. Por lo que la forma de evaluar (8.11) es reemplazar el integrando $P(x)$ por $1+(P(x)-1)$. Entonces

$$\begin{aligned} p(n) &= \exp\left(\frac{2\pi n}{N^2}\right) \sum_{\substack{k=1 \\ (h,k)=1 \\ 0\leq h<k}}^{N} \exp\left(-\frac{2\pi ihn}{k}\right) w_{h,k} \int_{-\theta'_{h,k}}^{\theta''_{h,k}} z^{\frac{1}{2}} \exp\left[\pi\frac{(z^{-1}-z)}{12k} - 2\pi in\phi\right] d\phi \\ &+ \exp\left(\frac{2\pi n}{N^2}\right) \sum_{\substack{k=1 \\ (h,k)=1 \\ 0\leq h<k}}^{N} \exp\left(\frac{-2\pi ihn}{k}\right) w_{h,k} \int_{-\theta'_{h,k}}^{\theta''_{h,k}} z^{\frac{1}{2}} \exp\left[\pi\frac{(z^{-1}-z)}{12k}\right] \\ &\cdot \left(P\left[\exp\left[2\pi i\frac{(h'+iz^{-1})}{k}\right]\right] - 1\right) \exp\left(-2\pi in\phi\right) d\phi \\ &= \sum_1 + \sum_2. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Nuestra expectativa es que $\sum_1$ contribuya a la estimación principal para $p(n)$ y que la contribución de $\sum_2$ sea insignificante.

Ahora procederemos a hacer el estudio de (8.12), demostrando que $\sum_2$ es de hecho despreciable. Primero (recordando que $z = k(N^{-2} - i\phi)$),

$$\begin{aligned} & z^{\frac{1}{2}} \exp\left[\pi\frac{(z^{-1}-z)}{12k}\right] \left(P\left[\exp\left[2\pi i\frac{(h'+iz^{-1})}{k}\right]\right] - 1\right) \\ &\leq |z^{\frac{1}{2}}| \left(-\frac{\pi}{12N^2}\right) \sum_{m=1}^{\infty} p(m) \exp\left[-2\pi Re(z^{-1})\frac{(m-1/24)}{k}\right]. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Ahora

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{k(N^{-2}-i\phi)} = \frac{N^{-2}-i\phi}{k(N^{-4}+\phi^2)}.$$

De (8.6) es inmediato que cada uno $\theta'_{h,k}$ y $\theta''_{h,k}$ satisface que $1/2kN \leq \theta_{h,k} < 1/kN$, y como - $\theta'_{h,k} \leq \phi \leq \theta''_{h,k}$, vemos que

$$\frac{1}{k}Re(z^{-1}) = \frac{N^{-2}}{k^2(N^{-4}+\phi^2)} > \frac{N^{-2}}{k^2N^{-4}+N^{-2}} = \frac{1}{1+k^2N^{-2}} \geq \frac{1}{2}. \quad (8.14)$$

También

$$|z^{\frac{1}{2}}| = (k^2N^{-4} + k^2\phi^2)^{\frac{1}{4}} < (k^2N^{-4} + N^{-2})^{\frac{1}{4}} \leq 2^{\frac{1}{4}}N^{-\frac{1}{2}}. \tag{8.15}$$

Por lo que por (8.13), (8.14) y (8.15) tenemos la siguiente estimación para $\sum_2$:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_2\right| &\leq \exp\left(\frac{2\pi n}{N^2}\right) \sum_{\substack{k=1\\(h,k)=1\\0\leq h<k}}^{N} 2^{\frac{1}{4}}N^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\pi}{12N^2}\right) \\
&\cdot \sum_{m=1}^{\infty} p(m) \exp\left[-\pi\left(m - \frac{1}{24}\right)\right] \int_{-\theta'_{h,k}}^{\theta''_{h,k}} d\phi \\
&\leq \exp\left(\frac{2\pi n}{N^2} - \frac{\pi}{12N^2}\right) 2^{\frac{1}{4}}N^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} p(m) \exp\left[-\pi\left(m - \frac{1}{24}\right)\right] \sum_{\substack{k=1\\(h,k)=1\\0\leq h<k}}^{N} \int_{-\theta'_{h,k}}^{\theta'_{h,k}} d\phi \\
&= \exp\left(\frac{2\pi n}{N^2} - \frac{\pi}{12N^2}\right) 2^{\frac{1}{4}}N^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} p(m) \exp\left[-\pi\left(m - \frac{1}{24}\right)\right] \\
&\leq CN^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{2\pi n}{N^2}\right).
\end{aligned} \tag{8.16}$$

Esta estimación es suficiente para nuestros propósitos, ya que $N^{-\frac{1}{2}} \exp(\frac{2\pi n}{N^2}) \to 0$ cuando $N \to \infty$ para n fijo.

Ahora vamos a manipular $\sum_1$, el término principal en la ecuación (8.12). Aquí mostraremos que la integral es la porción más significativa de una “loop integral” de tipo Hankel. Una vez que establezcamos este hecho (ecuación (8.23)), entonces será sencillo completar nuestra evaluación de $p(n)$.

En la integral para $\sum_1$ (ver (8.12)) establecemos $w = N^{-2} - i\phi$, y así la integral se convierte en

$$\begin{aligned}
I_{h,k} &= \int_{N^{-2}+i\theta'_{h,k}}^{N^{-2}-i\theta''_{h,k}} (kw)^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{\pi}{12k}\left(\frac{1}{kw} - kw\right) + 2\pi n(w - N^2)\right] i dw \\
&= \exp\left(-2\pi n N^{-2}\right) k^{\frac{1}{2}} i^{-1} \int_{N^{-2}-i\theta''_{h,k}}^{N^{-2}+i\theta'_{h,k}} w^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{\pi}{12k^2w}\right] \exp\left[2\pi(n - \frac{1}{24})w\right] dw \\
&= \exp(-2\pi n N^{-2}) k^{\frac{1}{2}} i^{-1} \int_{N^{-2}+i\theta'_{h,k}}^{N^{-2}-i\theta''_{h,k}} g(w) dw,
\end{aligned} \tag{8.17}$$

donde

$$g(w) := w^{\frac{1}{2}} \exp\left[2\pi\left(n - \frac{1}{24}\right)w + \frac{\pi}{12k^2w}\right].$$

El integrando de esta última integral es univaluado y es analítico en el plano w complejo cortado a lo largo de todo el eje real negativo. Por tanto, podemos escribir (invocando el teorema de Cauchy):

$$\exp(-2\pi n N^{-2}) I_{h,k} = \frac{k^{\frac{1}{2}}}{i} \left(\int_{-\infty}^{0+} - \int_{-\infty}^{-\epsilon} - \int_{-\epsilon}^{-\epsilon - i\theta''_{h,k}} - \int_{-\epsilon - i\theta''_{h,k}}^{-N^{-2} - i\theta''_{h,k}} \right.$$
$$\left. - \int_{-N^{-2} + i\theta'_{h,k}}^{-\epsilon + i\theta'_{h,k}} - \int_{-\epsilon + i\theta'_{h,k}}^{-\epsilon} - \int_{-\epsilon}^{-\infty} \right) g(w) dw, \tag{8.18}$$

donde la integral $\int_{-\infty}^{0+}$ es la "loop integral" a lo largo del contorno en la Figura 5.1. Suponemos $0 < \epsilon < N^{-2}$ y nos interesará principalmente lo que ocurre cuando $\epsilon \to 0$. Por brevedad, escribimos (8.18) como

$$\exp(-2\pi n N^{-2}) I_{h,k} = k^{\frac{1}{2}} i^{-1} [L_k - I_1 - I_2 - I_3 - I_4 - I_5 - I_6], \tag{8.19}$$

y nuestra siguiente tarea es mostrar que cada una de las cuatro integrales I_2, I_3, I_4 y I_5 es despreciable. Para ello vamos a tener en cuenta que $w = -\epsilon + iv$

$$|I_2| \leq \int_0^{-\theta''_{h,k}} \left(\epsilon^2 + v^2\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[\frac{\pi}{12k^2} Re\left(\frac{1}{-\epsilon + iv}\right)\right] \exp\left[-2\pi\left(n - \frac{1}{24}\right)\epsilon\right] |dv|.$$

Pero $Re[(-\epsilon + iv)^{-1}] = -\epsilon/(\epsilon^2 + v^2) < 0$, y por eso

$$|I_2| < (\epsilon^2 + \theta''^2_{h,k})^{\frac{1}{4}} \theta''_{h,k} < \left(\epsilon^2 + \frac{1}{k^2 N^2}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{kN} \to k^{-3/2} N^{-3/2} \text{ ya que } \epsilon \to 0. \tag{8.20}$$

La integral I_5 se trata de la misma manera y (8.20) es también válida con I_2 siendo reemplazado por I_5. Para I_3,

$$|I_3| \leq \int_{-\epsilon}^{N^{-2}} (u^2 + \theta''^2_{h,k})^{\frac{1}{4}} \exp\left[\frac{\pi}{12k^2} Re\left(\frac{1}{u - i\theta''_{h,k}}\right)\right] \exp\left[2\pi\left(n - \frac{1}{24}\right) u\right] du.$$

Ahora

$$\frac{1}{k^2} Re[(u - i\theta''_{h,k})^{-1}] = \frac{u}{k^2(u^2 + \theta''^2_{h,k})} \leq \frac{N^{-2}}{k^2\ \theta''^2_{h,k}} \leq 4.$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
|I_3| &< (N^{-4} + \theta''^2_{h,k})^{\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{\pi}{3}\right) \exp\left(\frac{2\pi n}{N^2}\right) (\epsilon + N^{-2}) \\
&< (N^{-4} + k^{-2} N^{-2})^{\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{N^2}\right) (\epsilon + N^{-2}) \\
&\leq (\epsilon + N^{-2}) 2^{\frac{1}{4}} k^{\frac{-1}{2}} N^{\frac{-1}{2}} \exp\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{N^2}\right) \\
&\to 2^{\frac{1}{4}} k^{\frac{-1}{2}} N^{\frac{-5}{2}} \exp\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{N^2}\right) \text{ ya que } \epsilon \to 0,
\end{aligned} \tag{8.21}$$

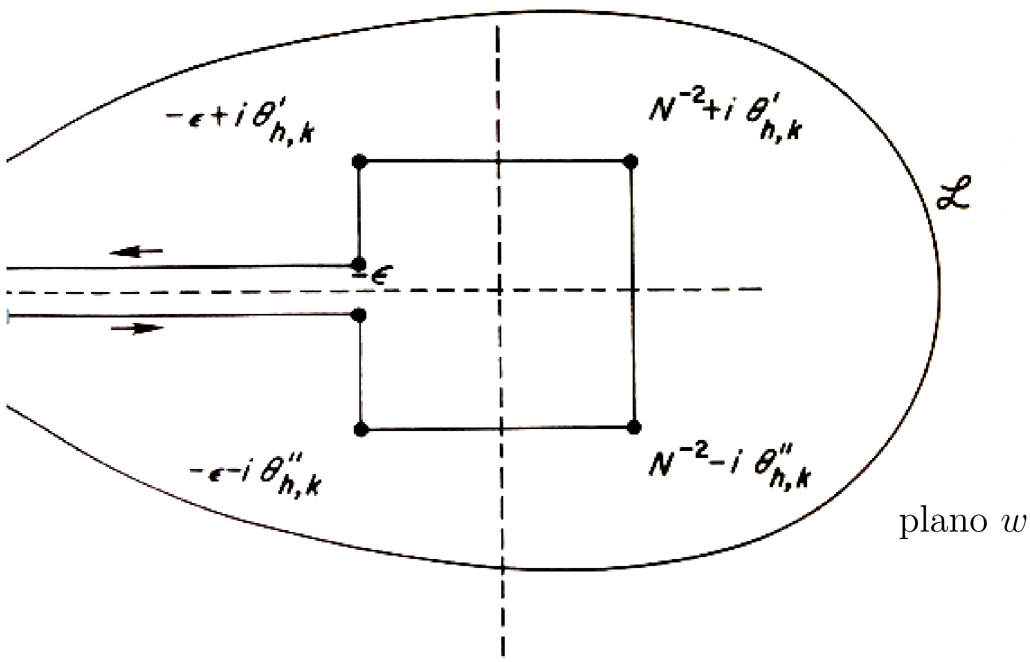


Figura 5.1

y la desigualdad final de (8.21) se puede utilizar reemplazando I_3 por I_5.

Sin embargo, las integrales I_1 y I_6 no son despreciables,

$$\begin{aligned} I_1 + I_6 &= \int_{-\infty}^{-\epsilon} \sqrt{|u|} \exp\left(\frac{-\pi i}{2}\right) \exp\left[\frac{\pi}{12k^2 u} + 2\pi\left(n - \frac{1}{24}\right) u\right] du \\ &\quad + \int_{-\epsilon}^{-\infty} \sqrt{|u|} \exp\left(\frac{\pi i}{2}\right) \exp\left[\frac{\pi}{12k^2 u} + 2\pi\left(n - \frac{1}{24}\right) u\right] du \\ &= -2i \int_{\epsilon}^{\infty} t^{\frac{1}{2}} \exp\left[-2\pi\left(n - \frac{1}{24}\right) t - \frac{\pi}{12k^2 t}\right] dt \\ &= -2iH_k. \end{aligned} \tag{8.22}$$

Por lo que si $\epsilon \to 0$ en (8.19), simplificamos la ecuación quedando

$$\exp(-2\pi n N^{-2}) I_{h,k} = \frac{k^{\frac{1}{2}}}{i} L_k + 2k^{\frac{1}{2}} H_k + O(k^{-1} N^{\frac{-3}{2}}) + O\left[\exp\left(\frac{2\pi n}{N^2}\right) N^{\frac{-5}{2}}\right], \tag{8.23}$$

donde las constantes implicadas en el término de residuo son absolutas. Consecuentemente, escribiendo

$$\psi_k(n) := \frac{k^{\frac{1}{2}}}{i} L_k + 2k^{\frac{1}{2}} H_k, \tag{8.24}$$

vemos de (8.12), (8.16) y (8.23) que

$$p(n) = \sum_{\substack{k=1\\(h,k)=1\\0\le h<k}}^{N} \left[w_{h,k} \exp\left(-\frac{2\pi i h n}{k}\right)\psi_k(n)\right] + O\left[\exp\left(\frac{2\pi n}{N^2}\right)N^{\frac{-1}{2}}\right]$$

$$+O\left(\sum_{\substack{k=1\\(h,k)=1\\0\le h<k}}^{N} k^{-1}N^{\frac{-3}{2}}\right) + O\left[\sum_{\substack{k=1\\(h,k)=1\\0\le h<k}}^{N} \exp\left(\frac{2\pi n}{N^2}\right)N^{\frac{-5}{2}}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{N} A_k(n)\psi_k(n) + O\left[N^{\frac{-1}{2}}\exp\left(\frac{2\pi n}{N^2}\right)\right] + O(N^{\frac{-1}{2}}). \tag{8.25}$$

Ahora $A_k(n)$ es precisamente como aparece en (8.1.1) y los términos de error aquí todos tienden a cero cuando $N \to \infty$.

Por lo tanto, el problema final para nosotros es demostrar que

$$\psi_k(n) = \frac{\sqrt{k}}{\pi\sqrt{2}}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\sinh\left[\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}(x-\frac{1}{24})}\right]}{\sqrt{x-\frac{1}{24}}}\right)\right]_{x=n}. \tag{8.26}$$

Podemos hacer esto suponiendo ciertos resultados clásicos sobre la integral de Hankel. Primero

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i}L_k &= \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{(0+)} w^{\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{\pi}{12k^2w} + 2\pi\left(n-\frac{1}{24}\right)w\right]dw \\
&= \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{(0+)} w^{\frac{1}{2}}\exp\left[2\pi\left(n-\frac{1}{24}\right)w\right]\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(\pi/12k^2w)^s}{s!}dw \\
&= \frac{1}{i}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(\pi/12k^2w)^s}{s!}\int_{-\infty}^{(0+)} w^{\frac{1}{2}-s}\exp\left[2\pi\left(n-\frac{1}{24}\right)w\right]dw \\
&= 2\pi\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(\pi/12k^2w)^s}{s!}\left[2\pi\left(n-\frac{1}{24}\right)\right]^{s-3/2}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} e^z z^{-s+1/2}dz \\
&= (2\pi)^{-1/2}\left(n-\frac{1}{24}\right)^{-3/2}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{[\pi^2(n-1/24)/6k^2]^s}{s!\Gamma(s-1/2)},
\end{aligned}$$

donde la ecuación final se deduce de la fórmula integral de Hankel para el recíproco de la función gamma (ver §12.22 de Whitakker Watson):

$$\frac{1}{\Gamma(s-\frac{1}{2})} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} e^z z^{-s+1/2}dz.$$

Ahora

$$\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)=(s-3/2)(s-5/2)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=2^{-s+1}\pi^{\frac{1}{2}}(2s-3)(2s-5)\cdots 3\cdot 1.$$

Por lo que

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{4}Y^2)^s}{s!\Gamma(s-1/2)}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[-1+Y^2\left(\frac{1}{2!}+\frac{3Y^2}{4!}+\frac{5Y^4}{6!}+\cdots\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[-1+Y^2\frac{d}{dY}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Y^{2n+1}}{(2n+2)!}\right]$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[-1+Y^2\frac{d}{dY}\left(\frac{\cosh Y-1}{Y}\right)\right];$$

y sustituyendo $Y=(\pi/k)(2/3(x-1/24))^{\frac{1}{2}}$, vemos que

$$\frac{1}{i}L_k=(2\pi)^{-1/2}\left(n-\frac{1}{24}\right)^{-3/2}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[-1+Y^2\frac{d}{dY}\left(\frac{\cosh Y-1}{Y}\right)\right]_{x=n}$$
$$=2^{-3/2}\pi^{-1}\left(n-\frac{1}{24}\right)^{-3/2}\left[Y^2\frac{d}{dY}\left(\frac{\cosh Y}{Y}\right)\right]_{x=n}$$
$$=2^{-3/2}\pi^{-1}\left(n-\frac{1}{24}\right)^{-3/2}\left[Y^2\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\cosh Y}{Y}\right)/\frac{dY}{dx}\right]\right]_{x=n}$$
$$=2^{-3/2}\pi^{-1}\left(n-\frac{1}{24}\right)^{-3/2}\left[\frac{3k^2Y^3}{\pi^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\cosh Y}{Y}\right)\right]_{x=n}$$
$$=3^{-1/2}k^{-1}\left[\frac{d}{dx}\frac{\cosh\left((\pi/k)[\frac{2}{3}(x-1/24)]^{1/2}\right)}{(\pi/k)[\frac{2}{3}(x-1/24)]^{1/2}}\right]_{x=n}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\frac{d}{dx}\frac{\cosh\left((\pi/k)[\frac{2}{3}(x-1/24)]^{1/2}\right)}{(x-1/24)^{1/2}}\right]_{x=n}. \tag{8.27}$$

Ahora finalmente tratamos el término H_k en (8.24) de la misma manera. Empezamos con una evaluación clasica de una integral definida:

$$\int_0^{\infty}\exp(-c^2t-a^2t^{-1})t^{\frac{-1}{2}}dt=2\int_0^{\infty}\exp(-c^2u^2-a^2u^{-2})du=\frac{\sqrt{\pi}}{c}\exp(-2ac).$$

De manera que

$$\int_0^{\infty}\exp(-c^2t-a^2t^{-1})t^{\frac{1}{2}}dt=-\frac{\sqrt{\pi}}{2c}\frac{d}{dc}\left[\frac{\exp(-2ac)}{c}\right], \tag{8.28}$$

Y aplicando (8.28) a H_k obtenemos

$$H_k = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}(n-1/24)}\left(\frac{d}{dc}\frac{\exp[-\pi(2/3)^{\frac{1}{2}}c/k]}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}c}\right)_{c=(n-1/24)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\left[\frac{d}{dx}\frac{\exp[-\pi(2/3)^{\frac{1}{2}}](x-1/24)^{\frac{1}{2}}/k}{\sqrt{x-1/24}}\right]_{x=n}. \tag{8.29}$$

De manera que, de (8.24), (8.27) y (8.29), obtenemos que

$$\psi_k(n) = \frac{k^{\frac{1}{2}}}{\pi\sqrt{2}}\left[\frac{d}{dx}\frac{\cosh\left((\pi/k)[\frac{2}{3}(x-1/24)]^{\frac{1}{2}}\right)}{\sqrt{x-1/24}}\right]_{x=n}$$

$$-\frac{k^{\frac{1}{2}}}{\pi\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx}\frac{\exp[-(\pi/k)[\frac{2}{3}(x-1/24)]^{\frac{1}{2}}]}{\sqrt{x-1/24}}\right)_{x=n}$$

$$= \frac{k^{\frac{1}{2}}}{\pi\sqrt{2}}\left[\frac{d}{dx}\frac{\sinh\left((\pi/k)[\frac{2}{3}(x-1/24)]^{\frac{1}{2}}\right)}{\sqrt{x-1/24}}\right]_{x=n}, \tag{8.30}$$

y como (8.30) es simplemente (8.26), quedaría demostrada la fórmula de Rademacher. □

8.2. Fórmula asintótica de Hardy-Ramanujan

Una vez vista esta fórmula anterior procedemos a ver la fórmula que originalmente dieron Hardy y Ramanujan para $p(n)$.

Teorema 8.2.1. *Si $n \geq 1$ la función partición $p(n)$ queda representada por*

$$p(n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\sum_{k\leq\alpha\sqrt{n}} A_k(n)\sqrt{k}\frac{d}{dx}\left(\frac{\exp\left(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}(x-\frac{1}{24})}\right)}{\sqrt{x-\frac{1}{24}}}\right)_{x=n} + O(n^{-1/4}),$$

siendo α una constante positiva arbitraria y donde $A_k(n)$ y $w_{h,k}$ son los dados en el Teorema 8.1.1.

Esta definición de $w_{h,k}$ no es la que dieron Hardy-Ramanujan ya que ésta era más complicada, por lo que hemos puesto una equivalente que proporcionó Rademacher en 1932. En el artículo que publicaron Hardy-Ramanujan en 1918 hacen una comparación con los valores de $p(n)$ calculados por MacMahon y los proporcionados por su fórmula, en concreto lo hacen para $n = 100$ y $n = 200$, los cuales tienen un error de 0.004 ambos, lo que nos lleva a darnos cuenta de que el error es mucho menor que ese $O(n^{-1/4})$ que aparece en su fórmula. De hecho, antes de empezar con la prueba del teorema anterior, vamos a enunciar un lema que nos servirá a la hora de acotar.

Lema 8.2.2. *Se tiene*

$$A_k(n) \leq n.$$

Este lema tiene una demostración muy técnica, por lo tanto no se verá en este trabajo.

Pasamos a demostrar el Teorema 8.2.1.

Demostración. En esta sección vamos a dar las indicaciones de los pasos que habría que seguir para demostrar la fórmula que propusieron Hardy-Ramanujan, la cual según Rademacher es un corolario inmediato de la suya. Teniendo en cuenta que $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$, sustituyendo en la fórmula de Rademacher obtenemos

$$\begin{aligned} p(n) &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k} \frac{d}{dx} \left(\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{24}\right)}\right)}{\sqrt{x - \frac{1}{24}}} \right)_{x=n} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k} \frac{d}{dx} \left(\frac{\exp\left(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{24}\right)}\right)}{\sqrt{x - \frac{1}{24}}} \right)_{x=n} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k} \frac{d}{dx} \left(\frac{\exp\left(\frac{-\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{24}\right)}\right)}{\sqrt{x - \frac{1}{24}}} \right)_{x=n}. \end{aligned}$$

Derivando respecto de x el segundo sumando obtendríamos

$$\begin{aligned} p(n) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k} \frac{d}{dx} \left(\frac{\exp\left(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{24}\right)}\right)}{\sqrt{x - \frac{1}{24}}} \right)_{x=n} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k} \left[\frac{\pi \exp\left(\frac{\pi\sqrt{2}\sqrt{n-\frac{1}{24}}}{\sqrt{3}k}\right)}{\sqrt{2}\sqrt{3}k(n - \frac{1}{24})} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k} \left[\frac{\exp\left(\frac{\pi\sqrt{2}\sqrt{n-\frac{1}{24}}}{\sqrt{3}k}\right)}{2(n - \frac{1}{24})^{\frac{3}{2}}} \right]. \end{aligned}$$

Y por último, tendríamos que ver que el segundo y tercer sumando lo podemos acotar por $n^{-1/4}$. Primero vamos a acotar k por $k \leq \alpha\sqrt{n}$ y aplicando esto obtenemos

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\sum_{k\leq\alpha\sqrt{n}} A_k(n)\sqrt{k}\left[\frac{\pi\exp\left(\frac{\pi\sqrt{2}\sqrt{n-\frac{1}{24}}}{\sqrt{3}k}\right)}{\sqrt{2}\sqrt{3}k(n-\frac{1}{24})}\right]+\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\sum_{k\leq\alpha\sqrt{n}} A_k(n)\sqrt{k}\left[\frac{\exp\left(\frac{\pi\sqrt{2}\sqrt{n-\frac{1}{24}}}{\sqrt{3}k}\right)}{2(n-\frac{1}{24})^{\frac{3}{2}}}\right]=$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\sum_{k\leq\alpha\sqrt{n}} A_k(n)\sqrt{k}\exp\left(\frac{\pi\sqrt{2}\sqrt{n-\frac{1}{24}}}{k\sqrt{3}}\right)\left[\frac{\pi}{\sqrt{2}\sqrt{3}k(n-\frac{1}{24})}-\frac{1}{2(n-\frac{1}{24})^{3/2}}\right]\leq$$

$$\sum_{k\leq\alpha\sqrt{n}} A_k(n)\sqrt{k}\exp\left(\frac{\pi\sqrt{2}\sqrt{n-\frac{1}{24}}}{k\sqrt{3}}\right)\left[\frac{\pi}{\sqrt{2}\sqrt{3}k(n-\frac{1}{24})}\right]\leq$$

$$\sum_{k\leq\alpha\sqrt{n}} A_k(n)\sqrt{\alpha\sqrt{n}}\exp\left(\frac{\pi\sqrt{2}\sqrt{n-\frac{1}{24}}}{k\sqrt{3}}\right)\left[\frac{\pi}{\alpha\sqrt{n}(n-\frac{1}{24})}\right]\leq$$

$$\sum_{k\leq\alpha\sqrt{n}} A_k(n)\sqrt{\alpha\sqrt{n}}\exp\left(\frac{\pi\sqrt{2}\sqrt{n}}{\alpha\sqrt{n}}\right)\left[\frac{\pi}{\alpha\sqrt{n}(n-\frac{1}{24})}\right]\leq$$

$$\sum_{k\leq\alpha\sqrt{n}} A_k(n)\sqrt{\alpha\sqrt{n}}\exp\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{\alpha}\right)\left[\frac{\pi}{\alpha\sqrt{n}(n-\frac{1}{24})}\right]\leq$$

como $\exp(\pi\sqrt{2}/\alpha)$ es una constante, vamos a llamarla C, de manera que sustituyendo en la expresión obtenemos

$$C\sqrt{\alpha}\sum_{k\leq\alpha\sqrt{n}} A_k(n)n^{1/4}\left[\frac{\pi}{\alpha\sqrt{n}(n-\frac{1}{24})}\right]\leq\frac{C\pi\sqrt{\alpha}}{\alpha}\sum_{k\leq\alpha\sqrt{n}} A_k(n)n^{1/4}\left[\frac{1}{\sqrt{n}(n-\frac{1}{24})}\right]\leq$$

como $n > 0$, podemos aplicar que $n - 1/24 > n/2$, de manera que

$$\sqrt{n}(n-1/24) > n\sqrt{n}/2 = n^{3/2}/2, \text{ por lo que } \frac{1}{\sqrt{n}(n-1/24)} < \frac{2}{n^{3/2}}$$

sustituyendo esto obtenemos

$$\frac{C\pi\sqrt{\alpha}}{\alpha}\sum_{k\leq\alpha\sqrt{n}} A_k(n)n^{1/4}\left[\frac{2}{n^{3/2}}\right]=\frac{2C\pi}{\sqrt{\alpha}}\sum_{k\leq\alpha\sqrt{n}} A_k(n)n^{-5/4}\leq$$

ahora aplicando el Lema 8.2.2, visto al principio de este capítulo, obtenemos

$$\frac{2C\pi}{\sqrt{\alpha}}nn^{-5/4} = O(n^{-1/4}).$$

Por lo que volviendo al principio de la acotación obtendríamos la expresión a la que queríamos llegar

$$p(n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sum_{k \leq \alpha\sqrt{n}} A_k(n)\sqrt{k}\frac{d}{dx}\left(\frac{\exp\left(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{24}\right)}\right)}{\sqrt{x - \frac{1}{24}}}\right)_{x=n} + O(n^{-1/4}).$$

$\square$

Bibliografía

[1] Andrews, G. E., *The Theory of Partitions*, Cambridge Mathematical Library, 1984.

[2] Apostol, T. M., *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, 1984.

[3] Apostol, T. M., *Modular functions and Dirichlet Series*, Springer-Verlag, 1976.

[4] Dickson, L. E., *History of the Theory of Numbers*, Carnegie Institution of Washington, 1920.

[5] Hardy, G. H., Wright, E. M., *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, 1938.

[6] Hardy, G. H., *Ramanujan*, Cambridge University Press, 1936.

[7] Khinchin, A. Ya., *Continued Fractions*, The University of Chicago Press, 1964.

[8] Macho, M., *Un número que desaparece*, Cuaderno de cultura científica, 2023.

[9] Varona, J. L., *Ramanujan y las particiones*, Blog del IMUS, 2020.

[10] Whittaker, E. T., Watson G. N., *A Course in Modern Analysis*, Cambridge University Press, 1927.