



Una prueba combinatoria de la fórmula Graham-Pollak

Adrián Lillo Pinto

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por

Prof. Mercedes Helena Rosas Celis

ÍNDICE GENERAL

English Abstract	1
1. Introducción	3
1.1. Conceptos Fundamentales	3
1.1.1. El Grupo Simétrico	4
1.1.2. Grafos y digrafos	4
1.2. Involuciones	7
1.3. El lema Lindström-Gessel-Viennot	11
2. La fórmula de Graham y Pollak	15
2.1. Pares T -compatibles	15
2.2. Diagramas de flechas	17
2.3. Árboles enraizados planos	20
2.3.1. Dotando a T de estructura plana	21
3. Conteo signado sobre diagramas conexos	23
3.1. El digrafo $G(T, \Omega)$	23

II UNA PRUEBA COMBINATORIA DE LA FÓRMULA GRAHAM-POLLAK

3.1.1.	El digrafo inicial	24
3.1.2.	El digrafo final	29
3.1.3.	El digrafo $G(T, \Omega)$	31
3.1.4.	Descomposición de n -caminos en G	33
3.2.	Pares compatibles como n -caminos	34
3.2.1.	El levantamiento de un par compatible	35
3.3.	Los n -caminos sin intersecciones de G	38
3.4.	Describiendo la permutación subyacente	44

ENGLISH ABSTRACT

In this senior thesis we present the first combinatorial proof for the renowned Graham and Pollak's formula for the determinant of the distance matrix of a tree, based on the Lindström-Gessel-Viennot method.

1 | INTRODUCCIÓN

En 1971, Ronald Graham y Henry Pollak [GP71] hallaron una bella fórmula para el determinante de la matriz de distancias de un árbol, probándolo independiente de la estructura de éste. Concretamente, demostraron que si T es un árbol de orden n , el determinante de su matriz de distancias está dado por

$$\det(M(T)) = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

Existen múltiples pruebas de este resultado en la literatura [GL78, YY06, DY20], todas ellas con base en argumentos provenientes del álgebra lineal. La elegancia y la innegable naturaleza combinatoria de este resultado claman por una demostración combinatoria que, sin embargo, aún no ha sido encontrada. En este trabajo presentamos la primera demostración de este tipo.

Los resultados que aquí se presentan son producto del trabajo conjunto de los profesores Emmanuel Briand y Mercedes Rosas del grupo de Combinatoria Algebraica de la Universidad de Sevilla, los estudiantes Luis Esquivias (Universidad de Sevilla), Álvaro Gutiérrez (Universidad de Bonn) y el autor de este escrito.

Nuestro trabajo principal [BEGLR] (aún en proceso de redacción) aborda también la demostración de múltiples generalizaciones de la fórmula de Graham y Pollak que se derivan de nuestra prueba combinatoria. Estas generalizaciones han sido ya presentadas en el Trabajo de Fin de Grado de Luis Esquivias [Esq23] y aquí no redundaremos en ellas.

1.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

En esta sección introducimos algunos términos y notaciones básicos de Teoría de Grupos y Teoría de Grafos. Utilizamos, respectivamente, [Sag20] y [Sag13] como referencias

principales. Los conjuntos, grupos y grafos que aparecen a lo largo de nuestra disertación se supondrán finitos salvo mención contraria expresa.

1.1.1 EL GRUPO SIMÉTRICO

Denotamos por $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ al conjunto de los números naturales y por $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ al conjunto de los números enteros no negativos. Utilizamos $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ para designar el conjunto canónico de n elementos.

Dado un conjunto A , decimos que σ es una *permutación* de A si es una biyección de A en sí mismo. El *grupo simétrico* sobre A se define como el conjunto de permutaciones de A y se denota \mathbb{S}_A .

Después de fijar un orden sobre $[n]$ (usualmente el orden natural), cada permutación de $[n]$ puede ser identificada con un orden sobre dicho conjunto. Sin embargo, no se puede hacer tal identificación sin considerar primero un orden fijo (como especies, las permutaciones y los órdenes totales sobre $[n]$ son no isomorfas).

Al conjunto $\mathbb{S}_{[n]}$ se le llama grupo simétrico en n elementos, tradicionalmente denotado por \mathbb{S}_n . Decimos que $\sigma \in \mathbb{S}_n$ es un *desarreglo* si no tiene puntos fijos (es decir, $\sigma(i) \neq i$ para cada $i \in [n]$). Denotamos por \mathcal{D}_n al subconjunto de desarreglos de \mathbb{S}_n .

1.1.2 GRAFOS Y DIGRAFOS

Un *grafo* (no dirigido) es un par $G = (V, E)$ donde V es un conjunto no vacío (a cuyos elementos llamamos *vértices*) y E es un conjunto de pares no ordenados de vértices (que denominamos *aristas*). Dos vértices $u, v \in V$ son *vecinos* si $\{u, v\} \in E$. En tal caso, decimos que cada uno de estos vértices es un *extremo* de la arista $\{u, v\}$. Para simplificar la notación, escribimos $\{u, v\} = uv$. Los extremos de una arista $\{u, v\}$ de G se pueden ordenar de dos formas: (u, v) y (v, u) . Decimos que cada uno de estos pares ordenados es una *orientación* de la arista $\{u, v\}$, y a su vez que son *aristas orientadas* de G . Denotamos al conjunto de aristas orientadas por \vec{E} .

Representamos los vértices del grafo $G = (V, E)$ como nodos en el plano (o en el espacio) y sus aristas como líneas que los unen. Concretamente, $u, v \in V$ aparecen unidos por un arco si $uv \in E$.

Ejemplo 1.1. El grafo *completo* K_n es un grafo de orden n donde cada par de vértices está unido por una arista. Concretamente, tiene $\binom{n}{2}$ aristas. El grafo *bipartito completo* $K_{r,s}$ es un grafo de orden $r+s$ cuyo conjunto de vértices admite una partición en dos subconjuntos (de tamaño r y s) de modo que dos vértices están unidos por una arista si y solo si están en distintos subconjuntos.

Un *paseo* de longitud l en G es una sucesión (finita) de vértices $W : v_0, v_1, \dots, v_l$ donde dos vértices consecutivos cualesquiera son vecinos. Esto es, $v_{i-1}v_i \in E$ para todo $i \in [l]$. Decimos entonces que W es un paseo entre v_0 y v_l , o que v_0 y v_l son los *extremos* de W , o que W *conecta* v_0 con v_l . Como con las aristas, utilizamos la notación multiplicativa $W = v_0v_1 \cdots v_l$. Decimos que $\bar{W} := v_lv_{l-1} \cdots v_0$ es el *paseo inverso* de W .

Decimos que un paseo P es un *camino* si ningún vértice aparece repetido. Si $a = v_1v_2$ es una arista de un camino P y v_1 aparece antes que v_2 en P , decimos que el par ordenado (v_1, v_2) es la *orientación inducida* de a por P . Un *ciclo* de longitud l es un paseo $C = v_0v_1 \cdots v_l$ donde $v_0 = v_l$ y las vértices $\{v_i\}_{i=1}^{l-1}$ son distintos dos a dos.

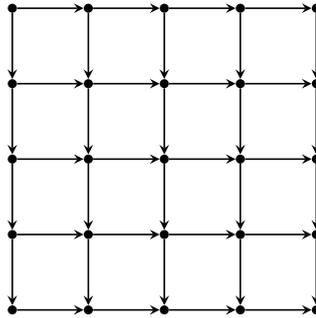
Un grafo G se dice *conexo* si existe al menos un camino entre dos vértices cualesquiera. En caso contrario se dice *disconexo*. Decimos que un grafo H es un *subgrafo* de G (y escribimos $H \subseteq G$) si tanto su conjunto de vértices como su conjunto de aristas están contenidos en los de G .

En ocasiones resulta útil considerar direcciones específicas sobre las aristas de un grafo. Un *grafo dirigido* (o *digrafo*) es un par $G = (V, A)$, donde V es un conjunto de vértices y A es un conjunto de pares ordenados de vértices, que llamamos *arcos*. Los conceptos de *paseo*, *camino* y *ciclo* se definen como en su variante no dirigida, esta vez bajo la condición $v_{i-1}v_i := (v_{i-1}, v_i) \in A$ para cada $i \in [l]$. El *grafo subyacente* de un digrafo G es el grafo dirigido con mismo conjunto de vértices que G , y cuyas aristas son las variantes no ordenadas de los arcos de G . Un digrafo se dice *conexo* si es conexo su grafo subyacente, y se dice *disconexo* en caso contrario.

Dados dos digrafos $G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2)$, decimos que una aplicación $f : V_1 \rightarrow V_2$ es un *isomorfismo* si es una biyección y $f(a)f(b) \in A_2$ para cualquier $ab \in A_1$. Similarmente, decimos que f es un *antiisomorfismo* si es una biyección y $f(b)f(a) \in A_2$ para cualquier $ab \in A_1$.

Ejemplo 1.2. El *digrafo reticular* $n \times n$ con *pasos unitarios este y sur* es un digrafo que tiene como conjunto de vértices a $\{0, \dots, n\}^2$ (entendido como conjunto de puntos del plano euclídeo) y cuyos arcos unen cada vértice (i, j) con los vértices $(i+1, j)$ e $(i, j-1)$,

siempre que existan.



Este digrafo es acíclico y conexo.

Los multiconjuntos son una generalización de los conjuntos que admiten repeticiones en sus elementos. Denotamos a los multiconjuntos utilizando doble llave $\{\{\cdot\}\}$, en contraste con la llave simple habitual de los conjuntos $\{\cdot\}$. La *multiplicidad* de un elemento del multiconjunto es el número de veces que aparece.

Un *multigrafo dirigido* es un par $G = (V, M)$ donde V es un conjunto de vértices y M es un multiconjunto de pares ordenados de vértices (que de nuevo, llamamos *arcos*). El grafo subyacente de un multigrafo se define igual que para un grafo dirigido: ignorando la orientación de los arcos. También como antes, un multigrafo es *conexo* (o *disconexo*) si lo es su grafo subyacente.

De especial interés es la clase de los *árboles*, grafos no dirigidos $T = (V, E)$ para los que existe un único camino entre cada par de vértices distintos. Alternativamente, un árbol es un grafo conexo y sin ciclos de longitud $l > 2$. Definimos el *orden* de T como la cardinalidad de su conjunto de vértices, y el *grado* de un vértice $v \in V$ como la cardinalidad de su conjunto de vecinos. Decimos que un vértice $h \in V$ es una *hoja* si tiene grado 1.

La unicidad de caminos entre los vértices de un árbol induce naturalmente una métrica sobre los mismos. Para formalizar esta idea damos la siguiente definición:

Definición 1.1. Definimos la *distancia* entre dos vértices v, w de un árbol T como la longitud (esto es, el número de aristas) del único camino que los conecta, y la denotamos por $d(v, w)$.

La distancia entre vértices de un árbol es una función simétrica $d : V \times V \rightarrow \mathbb{N}_0$ que se anula en los pares $(v, v) \in V^2$ y es positiva en el resto de pares. Es a partir de esta noción que se construye el objeto principal de nuestro estudio.

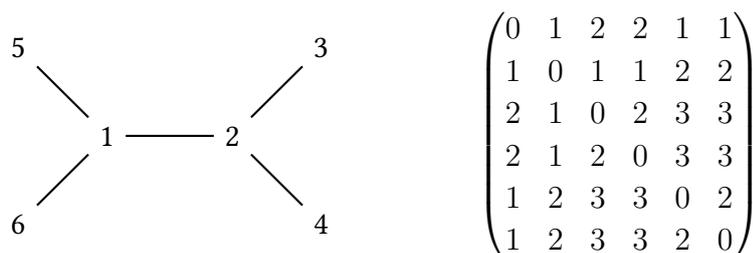


FIGURA 1.1: Un árbol T y su matriz de distancias $M(T)$.

Definición 1.2 (Matriz de distancias). Consideremos fijada una enumeración de los vértices $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y denotemos $d_{ij} = d(v_i, v_j)$. La *matriz de distancias* de T es la matriz $M(T) = (d_{ij})_{i,j=1}^n$. Esta matriz es simétrica y tiene diagonal principal nula.

La matriz de distancias de un árbol T contiene toda la información sobre el propio árbol. Los vértices se pueden identificar con las etiquetas de las filas de $M(T)$, usualmente el conjunto $[n]$. Para las aristas, nótese que los vértices i y j están conectados por una arista si y sólo si la entrada $M_{i,j}$ es igual a uno, por lo que también el conjunto de aristas de T se puede recuperar a partir de $M(T)$.

Cabe mencionar que no es posible reconstruir un árbol a partir de su matriz de distancias cuando sus aristas tienen pesos. En ese caso, la distancia entre vértices adyacentes no es necesariamente unitaria y el argumento anterior deja de ser válido. Este problema resulta de especial interés en biología, donde se puede calcular una distancia entre especies (que toma valores reales) y se desea reconstruir su árbol filogenético. Este campo de estudio se conoce como *filogenética computacional*.

1.2 INVOLUCIONES

Una *involución* sobre un conjunto A es una aplicación $i : A \rightarrow A$ tal que i^2 es la identidad sobre A . Toda involución es una biyección; de hecho, es su propia inversa.

Cualquier involución i sobre A induce una partición de A en dos subconjuntos: el conjunto de puntos fijos de i (que denotamos por $\text{Fij}(i)$) y el conjunto formado por los elementos s de A cuya órbita por i forma un 2-ciclo (esto es, $i^2(s) = s$ pero $i(s) \neq s$).

Decimos que un conjunto S es *signado* si tiene asociada una función $\text{sign} : S \rightarrow$

$\{-1, 1\}$. Utilizamos la expresión *conteo con signo* de S para referirnos a la suma

$$\sum_{s \in S} \text{sign}(s). \quad (1.1)$$

Utilizando esta noción, introducimos una clase de involuciones de particular interés en Combinatoria:

Definición 1.3. Sea S un conjunto signado. Decimos que una involución i sobre S *intercambia los signos* si

$$\text{sgn}(i(s)) = -\text{sgn}(s)$$

para todo $s \in S$ que no sea un punto fijo.

La relevancia y utilidad de las involuciones que intercambian los signos reside en la elegante propiedad que satisfacen:

$$\sum_{s \in S} \text{sgn}(s) = \sum_{s \in \text{Fij}(i)} \text{sgn}(s). \quad (1.2)$$

En efecto, si $s \in S$ está en un 2-ciclo $(s, i(s))$, entonces $\text{sgn}(i(s)) + \text{sgn}(s) = 0$. Por ende, los elementos contenidos en 2-ciclos de S se cancelan en la suma (1.1), persistiendo únicamente aquellos en $\text{Fij}(i)$. Se sigue por tanto (1.2). La existencia de una involución que intercambia los signos permite simplificar el conteo con signo de S , siempre y cuando se conozca su conjunto de puntos fijos.

Escolio 1.1. Cuando un subconjunto $M \subseteq S$ es cerrado para una involución que intercambia los signos i sobre S (esto es, verifica $i(M) \subseteq M$), la restricción $i|_M$ es una involución que intercambia los signos sobre M . La prueba de esta afirmación es inmediata utilizando que $i(M) = M$ (pues i es una biyección). Para $i|_M$, la propiedad (1.2) se puede reescribir como

$$\sum_{s \in M} \text{sgn}(s) = \sum_{s \in \text{Fij}(i) \cap M} \text{sgn}(s)$$

sin más que tener en cuenta que $\text{Fix}(i|_M) = \text{Fix}(i) \cap M$.

Ejemplo 1.3. Utilizamos un involución que intercambia los signos para probar, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, la identidad

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \delta_{n,0}. \quad (1.3)$$

El caso $n = 0$ es directo. Para $n \in \mathbb{N}$, tomamos $S = \mathcal{P}([n])$ y definimos $\text{sign}(A) = (-1)^{|A|}$ para $A \in S$. Para cada $k \in \{0, \dots, n\}$ existen exactamente $\binom{n}{k}$ subconjuntos de $A \subseteq [n]$ con k elementos, y por tanto

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{A \in S} \text{sign}(A)$$

(esto es, el miembro izquierdo de (1.3) coincide con el conteo con signo de S). Definimos ahora la aplicación $i : S \rightarrow S$ como

$$i(A) = \begin{cases} A \cup \{1\}, & \text{si } 1 \notin A; \\ A - \{1\}, & \text{si } 1 \in A. \end{cases} \quad (1.4)$$

Es inmediato de (1.4) que $i^2(A) = A$ para cualquier $A \in S$, por lo que i es involución. Como los cardinales de A y de $i(A)$ difieren en una unidad, ambos conjuntos son distintos y $\text{Fij}(i) = \emptyset$. Además,

$$\text{sign}(i(A)) = (-1)^{|A| \pm 1} = -(-1)^{|A|} = -\text{sign}(A)$$

y por tanto i intercambia los signos. Finalmente, por la propiedad (1.2) se tiene

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{A \in \emptyset} \text{sign}(A) = 0$$

y esto se verifica para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Llegamos así a (1.3).

Ejemplo 1.4. Exponemos ahora una aplicación menos elemental. En su breve artículo de 2001, Chapman ([Cha01]) hace uso de una involución que intercambia los signos para aportar una prueba combinatoria de la siguiente igualdad, que cuenta con signo los desarreglos de n elementos:

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{D}_n} \text{sign}(\sigma) = (-1)^{n-1} (n-1). \quad (1.5)$$

Veamos la demostración que Chapman propuso. El conjunto \mathcal{D}_n admite una partición en los conjuntos $\Delta_j = \{\sigma \in \mathcal{D}_n : \sigma(n) = j\}$ con $j \in [n-1]$, que son conjugados para las potencias del ciclo $\rho = (1\ 2 \cdots n-1)$. Concretamente, para k en $[n-2]$ se tiene

$$\rho^k \Delta_{n-1} \rho^{-k} = \Delta_k.$$

Daremos la construcción de una involución f sobre Δ_{n-1} que intercambia los signos, y que tiene como único punto fijo al ciclo $(1\ 2 \cdots n-2, n, n-1)$, de signo $(-1)^{n-1}$. Veamos que

esto es suficiente. Por la igualdad anterior, para cada k en $[n-2]$, la aplicación $\rho^k \circ f \circ \rho^{-k}$ es una involución que intercambia los signos sobre Δ_{n-1} , con único punto fijo

$$\rho^k(1\ 2 \cdots n-2, n, n-1)\rho^{-k}.$$

El signo de esta permutación es, de nuevo, $(-1)^{n-1}$, ya que el signo es invariante bajo conjugación. Extendemos de este modo f a todo \mathcal{D}_n como

$$f(\sigma) = \rho^k f(\sigma)\rho^{-k}, \quad \sigma \in \Delta_k;$$

obteniendo una involución que intercambia los signos sobre \mathcal{D}_n con $n-1$ puntos fijos, todos ellos con signo $(-1)^{n-1}$. Se sigue entonces (1.5) por la propiedad (1.2).

Construyamos dicha aplicación f . Dado σ en Δ_{n-1} , sea a_σ el menor elemento a de $[n]$ que verifica $\sigma(a) < a$. Se tiene $a_\sigma < n-1$, con la única excepción de $\sigma = (1\ 2 \cdots n-2, n, n-1)$. Definimos $f(\sigma) = (a_\sigma\ n) \circ \sigma$ para cada σ de Δ_{n-1} menos para esta única permutación, donde tomamos f como la identidad.

Sea σ un elemento de Δ_{n-1} que no es un punto fijo de f , y denotemos $\tau = f(\sigma)$. Veamos primero que $\tau \in \Delta_{n-1}$. Es claro de la definición de f que σ y τ difieren sobre un elemento j si y sólo si se tiene $\{\sigma(j), \tau(j)\} = \{a_\sigma, n\}$. Como $\sigma(n) = n-1$ no está en $\{a_\sigma, n\}$, debe ser $\tau(n) = n-1$. Resta probar que τ es un desarreglo. Si j es un punto fijo de τ , entonces $\tau(j) \neq \sigma(j)$ (pues σ es un desarreglo), por lo que

$$\{\sigma(j), \tau(j)\} = \{\sigma(j), j\} = \{a_\sigma, n\}.$$

Como $\sigma(a_\sigma) < a_\sigma$, no puede tenerse $j = a_\sigma$ y $\sigma(j) = n$. Tampoco puede ser $j = n$ y $\sigma(j) = a_\sigma$, pues $\sigma(n) = n-1 > a_\sigma$. Concluimos que $\tau \in \Delta_{n-1}$.

Para ver que f es involución, es suficiente probar que $a_\tau = a_\sigma$. Nótese que

$$\tau(a_\sigma) = \sigma(a_\sigma) < a_\sigma, \tag{1.6}$$

ya que $\sigma(a_\sigma)$ no está en $\{a_\sigma, n\}$ (pues σ es desarreglo y $\sigma(n) = n-1 > a_\sigma$). Se tiene, por tanto, $a_\tau \leq a_\sigma$. Supongamos que la desigualdad anterior es estricta. Por la forma en que se ha escogido a_σ , debe ser $\sigma(a_\tau) > a_\tau$. Pero $\tau(a_\sigma)$ está entre los elementos $\sigma(a_\tau)$, a_σ y n , y todos ellos exceden a a_σ . Esto se contradice con (1.6), de donde se sigue $a_\tau = a_\sigma$.

Por último, es claro que f intercambia los signos, pues $f(\sigma)$ difiere de σ en una transposición cuando σ no es punto fijo de f . Esto termina la prueba.

1.3 EL LEMA LINDSTRÖM-GESSEL-VIENNOT

El lema de Lindström-Gessel-Viennot (usualmente abreviado como lema LGV) proporciona un método para el conteo de tuplas de caminos sin intersección en un grafo retículo (y en su versión más general, en un digrafo acíclico cualquiera). Fue establecido por Gessel y Viennot en su célebre artículo de 1985 ([GV85]) tomando como base los resultados previamente desarrollados por Lindström ([Lin73]) en el contexto de teoría de matroides.

Comencemos introduciendo las nociones requeridas para su correcta formulación. Para ello, consideremos un digrafo $G = (V, E)$ junto con dos subconjuntos de vértices $A, A' \subseteq V$, ambos de cardinal n . Nos referimos a los vértices de A y A' como las *fuentes* y los *sumideros* de G , respectivamente.

Definición 1.4. Un n -camino entre A y A' es un conjunto $\mathbf{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ formado por n caminos de G tal que cada $a \in A$ y cada $a' \in A'$ son, respectivamente, el vértice inicial y el vértice final de exactamente uno de los caminos de \mathbf{P} .

Decimos que un n -camino \mathbf{P} *se interseca* en un vértice $v \in V$ si v aparece en más de un camino de \mathbf{P} , y que es un n -camino *sin intersecciones* si no se interseca en ningún $v \in V$.

Un n -camino \mathbf{P} entre A y A' induce de forma natural una biyección entre estos dos conjuntos: aquella que envía cada vértice a en A en el único vértice a' en A' conectado con a por un camino de \mathbf{P} . El siguiente concepto surge al aplicar este razonamiento en el caso en que A y A' están ordenados:

Definición 1.5. Sea \mathbf{P} un n -camino entre $A = \{a_i\}_{i=1}^n$ y $A' = \{a'_i\}_{i=1}^n$. Se define la *permutación subyacente* de \mathbf{P} (y se denota $\sigma_{\mathbf{P}}$) como aquella para la que $a'_{\sigma_{\mathbf{P}}(i)}$ es el único vértice de A' conectado con a_i por un camino de \mathbf{P} .

Los n -caminos heredan de su permutación subyacente la noción de signo, y esto motiva su conteo signado. Por tradición, sin embargo, nos abstendremos de escribir $\text{sign}(\mathbf{P})$ y mantendremos $\text{sign}(\sigma_{\mathbf{P}})$ en su lugar.

Enunciamos y probamos a continuación el resultado principal de esta sección. Aunque fue originalmente formulado como lema, lo categorizamos como teorema por su relevancia.

Teorema 1.1 (Lema de Lindström-Gessel-Viennot [GV85, Lin73]). *Sea G un digrafo acíclico con n fuentes $\{a_1, \dots, a_n\}$ y n sumideros $\{a'_1, \dots, a'_n\}$. Sea S el conjunto de n -*

caminos \mathbf{P} entre las fuentes y los sumideros. Entonces

$$\sum_{\mathbf{P} \in S} \text{sign}(\sigma_{\mathbf{P}}) = \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{N}} \text{sign}(\sigma_{\mathbf{P}}) \tag{1.7}$$

donde $\mathcal{N} \subseteq S$ es el subconjunto de n -caminos sin intersecciones de S .

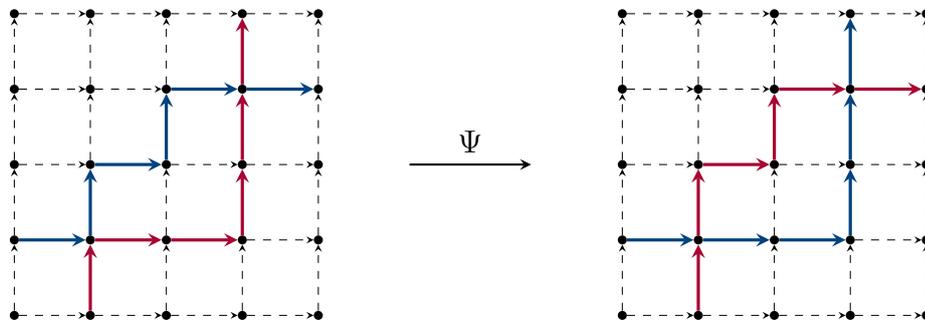
Demostración. Comenzamos construyendo una involución Ψ sobre $S - \mathcal{N}$ que intercambia los signos. Sea $\mathbf{P} = \{P_1, \dots, P_n\} \in S - \mathcal{N}$ y supongamos (sin pérdida de generalidad) que a_k es el vértice inicial de P_k para $k \in [n]$. Sea i el menor índice para el que P_i se interseca con otro camino de \mathbf{P} , y sea v el primer vértice de P_i en el que esto ocurre. Sea además j el menor índice distinto de i para el que P_j se interseca en v con P_i . Estos caminos son de la forma

$$P_i = a_i \cdots v \cdots a'_{\sigma_{\mathbf{P}}(i)}, \quad P_j = a_j \cdots v \cdots a'_{\sigma_{\mathbf{P}}(j)}.$$

Construimos dos nuevos caminos P'_i y P'_j a partir de P_i y P_j intercambiando sus subcaminos posteriores a v :

$$P'_i = a_i \cdots v \cdots a'_{\sigma_{\mathbf{P}}(j)}, \quad P'_j = a_j \cdots v \cdots a'_{\sigma_{\mathbf{P}}(i)};$$

y tomamos $P'_k = P_k$ para $k \in [n] - \{i, j\}$. Nótese que P'_i y P'_j son, en efecto, caminos, pues son paseos en un digrafo acíclico. Finalmente, definimos $\Psi(\mathbf{P}) = (P'_1, \dots, P'_n)$. Como $\Psi(\mathbf{P})$ se interseca en v , la aplicación Ψ está bien definida.



Es sencillo ver que Ψ cambia el signo: la permutación $\sigma_{\Psi(\mathbf{P})}$ se obtiene a partir de $\sigma_{\mathbf{P}}$ intercambiando las imágenes de i y j , y esto se corresponde con multiplicar por $(i \ j)$ a la derecha de $\sigma_{\mathbf{P}}$. Como las permutaciones $\sigma_{\mathbf{P}}$ y $\sigma_{\Psi(\mathbf{P})}$ difieren en una transposición, tienen signos opuestos.

Resta ahora comprobar que Ψ es involución. Si se repite la construcción de Ψ para el n -camino $\Psi(\mathbf{P})$, el vértice v y los índices i y j involucrados coinciden con los utilizados

para \mathbf{P} . Por ello, aplicar Ψ por segunda vez corresponde a revertir el intercambio entre los subcaminos posteriores a v de P'_i y P'_j , recuperando así los P_i y P_j originales. Se sigue que $\Psi^2(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$, como buscábamos.

Extendiendo ahora Ψ a los $\mathbf{P} \in \mathcal{N}$ como la aplicación identidad, obtenemos una involución $\Psi : S \rightarrow S$ que intercambia los signos y cuyo conjunto de puntos fijos es, precisamente, \mathcal{N} . En efecto, para cada $\mathbf{P} \in S - \mathcal{N}$, las permutaciones subyacentes de \mathbf{P} y $\Psi(\mathbf{P})$ son distintas (pues tienen distinto signo) y por ello \mathbf{P} no es punto fijo. La igualdad (1.7) se sigue por tanto de la propiedad (1.2). \square

Ejemplo 1.5. Hagamos uso del Teorema 1.1 para demostrar la igualdad

$$\left| \binom{i+j}{i} \right|_{i,j=0}^n = 1. \tag{1.8}$$

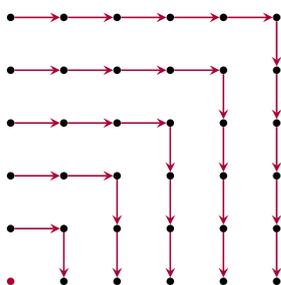
Sea G el digrafo reticular $n \times n$ descrito en el Ejemplo 1.2. Establecemos fuentes $a_i = (0, i)$ y sumideros $a'_j = (j, 0)$ para $i, j = 0, \dots, n$. Denotamos por S al conjunto de $(n+1)$ -caminos entre fuentes y sumideros de G . Para cualesquiera $i, j \in \{0, \dots, n\}$, existen exactamente $\binom{i+j}{j}$ caminos entre a_i y a'_j : tantos como formas de escoger j pasos verticales de entre los $i+j$ pasos que los separan. En consecuencia, para cada $\sigma \in \mathbb{S}_{\{0, \dots, n\}}$ se verifica

$$\sum_{P \in S_\sigma} \text{sign}(\sigma) = \text{sign}(\sigma) \prod_{i=0}^n \binom{i + \sigma(i)}{i},$$

donde $S_\sigma \subseteq S$ denota al conjunto de $(n+1)$ -caminos de G con permutación subyacente σ . Es al sumar la igualdad anterior para cada σ cuando aparece en escena el determinante buscado:

$$\sum_{P \in S} \text{sign}(\sigma_P) = \left| \binom{i+j}{i} \right|_{i,j=0}^n. \tag{1.9}$$

En virtud del Teorema 1.1, es suficiente calcular el sumatorio del miembro izquierdo de (1.9) sobre los $(n+1)$ -caminos libres de intersecciones. En este caso, sólo existe uno:



y tiene a ϵ como permutación subyacente. Se sigue así (1.8).

2 | LA FÓRMULA DE GRAHAM Y POLLAK

La fórmula de Graham y Pollak establece que el determinante de la matriz de distancias de un árbol depende exclusivamente de su orden. Concretamente, si T es un árbol de orden n y $M(T)$ es su matriz de distancias, se verifica

$$\det(M(T)) = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

En este capítulo introducimos las nociones requeridas para el planteamiento de la elegante y enigmática fórmula de Graham y Pollak desde una perspectiva combinatoria, sentando las bases para una prueba combinatoria de la misma.

2.1 PARES T -COMPATIBLES

Sea $T = (V, E)$ un árbol con conjunto de vértices $V = [n]$, y sea $M(T)$ su matriz de distancias. Para estudiar el determinante de esta matriz, partimos de su expresión como suma signada,

$$\det(M(T)) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n d(i, \sigma(i)). \quad (2.1)$$

Recordamos que la distancia entre dos vértices de un árbol coincide con el número de aristas del camino que los une. Fijada una permutación $\sigma \in \mathbb{S}_n$ y un vértice i en V , existen exactamente $d(i, \sigma(i))$ aristas en el camino de T entre i y $\sigma(i)$. Por tanto, el producto $\prod_{i=1}^n d(i, \sigma(i))$ cuenta las aplicaciones $f : V \rightarrow E$ tales que $f(i)$ es una arista de $C(i, \sigma(i))$ para cada vértice i en V . Esto motiva la siguiente definición:

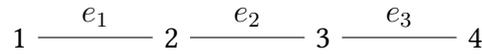
Definición 2.1. Dada una permutación $\sigma \in \mathbb{S}_n$ y una aplicación $f : V \rightarrow E$, decimos que el par (σ, f) es T -compatible si la arista $f(i)$ está en el camino $C(i, \sigma(i))$ para todo $i \in V$. Denotamos por \mathcal{P} al conjunto de pares T -compatibles.

Para facilitar su descripción, representamos las aplicaciones $f : V \rightarrow E$ mediante la sucesión de sus imágenes: $f = f(1)f(2) \cdots f(n)$. Dotamos a \mathcal{P} de estructura de conjunto signado, asociando a cada (σ, f) en \mathcal{P} el signo de σ . Cada una de estas permutaciones es un desarreglo, pues $C(i, \sigma(i))$ no contiene aristas si i es un punto fijo de σ . Por la observación previa a la Definición 2.1, podemos rescribir la igualdad (2.1) como

$$\det(M(T)) = \sum_{(\sigma, f) \in \mathcal{P}} \text{sign}(\sigma). \tag{2.2}$$

De este modo, el cálculo del determinante de la matriz de distancias de un árbol T se reduce al conteo signado de los pares T -compatibles.

Ejemplo 2.1. Sea $T = (V, E)$ el siguiente árbol camino:



Fijemos la permutación $\sigma = (1243)$ de \mathbb{S}_4 . Existen 4 aplicaciones $f : V \rightarrow E$ tales que el par (σ, f) es T -compatible:

$$e_1 e_2 e_1 e_3, \quad e_1 e_3 e_1 e_3, \quad e_1 e_2 e_2 e_3, \quad e_1 e_3 e_2 e_3.$$

Como la permutación σ es impar, el conteo signado de los pares anteriores es -4. La siguiente tabla muestra el conteo signado de pares T -compatibles con permutación σ para el resto de desarreglos σ de \mathbb{S}_4 :

Desarreglo	Conteo signado de pares T -compatibles	Desarreglo	Conteo signado de pares T -compatibles
(1234)	-3	(1324)	-12
(1342)	-4	(1423)	-12
(1432)	-3	(12)(34)	1
(13)(24)	16	(14)(23)	9

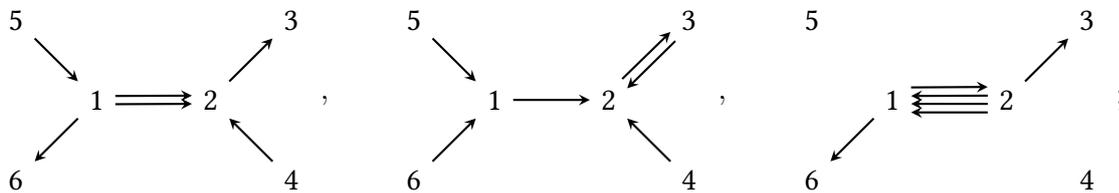
Como era de esperar, el conteo signado de los pares T -compatibles obedece la fórmula Graham-Pollak:

$$\sum_{(\sigma, f) \in \mathcal{P}} \text{sign}(\sigma) = -4 - 3 - 12 - 4 - 12 - 3 + 1 + 16 + 9 = -12 = (-1)^{4-1} (4 - 2) 2^{4-2}$$

2.2 DIAGRAMAS DE FLECHAS

Para calcular el conteo signado de los pares T -compatibles, dividimos el conjunto \mathcal{P} en subconjuntos disjuntos más simples. Nos valemos para ello de cierta familia de multigrafos.

Un *diagrama de flechas* sobre un árbol T (o simplemente, un *diagrama* sobre T) es un multigrafo dirigido con los mismos vértices que T y cuyo multiconjunto de arcos lo conforman n aristas orientadas de T . Decimos que una arista $\{i, j\}$ de T aparece k veces en D si existen k arcos de D entre i y j . Por ejemplo, los multigrafos



son diagramas sobre el árbol T de la Figura 1.1. De entre ellos, sólo el tercero es desconexo, siendo los dos primeros conexos. Siguiendo este criterio, dividimos a los diagramas en dos clases: los *diagramas conexos* y los *diagramas desconexos*. Utilizamos el siguiente lema para dividir los diagramas conexos, a su vez, en dos familias disjuntas.

Lema 2.1. *Sea D un diagrama de flechas conexo sobre un árbol T . Existe una única arista de T que aparece dos veces en D .*

Demostración. El grafo obtenido a partir de T eliminando cualquiera de sus aristas es desconexo. Como el diagrama D es conexo, todas las aristas de T aparecen al menos una vez en D . Como T tiene $n - 1$ aristas y el diagrama D tiene n arcos, una única arista de T debe aparecer dos veces en D . \square

Nos referimos a la arista garantizada por el lema anterior como la *arista doble* de D . Decimos que un diagrama conexo D es *estándar* si su arista doble aparece una vez con cada orientación, y decimos que es *no estándar* si aparece dos veces con la misma orientación. De esta forma, los diagramas sobre T se dividen en tres familias mutuamente excluyentes: desconexos, no estándar y estándar.

Asociamos a cada par T -compatible (σ, f) una función $\vec{f}_\sigma : V \rightarrow \vec{E}$, donde $\vec{f}_\sigma(i)$ es la arista $f(i)$ con la orientación inducida por el camino $C(i, \sigma(i))$. La relación que guardan

los diagramas sobre T con los pares T -compatibles se pone de manifiesto con la siguiente definición:

Definición 2.2. Definimos el *diagrama de flechas* de un par T -compatible (σ, f) como el diagrama sobre T con multiconjunto de arcos $\{\{\vec{f}_\sigma(i)\}_{i=1}^n\}$. Dado un diagrama D sobre T , denotamos por $\mathcal{P}(D)$ al conjunto de pares T -compatibles con diagrama D .

Ejemplo 2.2. Describimos el diagrama de flechas asociado a cada uno de los pares (σ, f) discutidos en el Ejemplo 2.1.

- El diagrama asociado al par $((1243), e_1e_2e_1e_3)$ es conexo y tiene arista doble e_1 . Además, es estándar, ya que su arista doble aparece una vez con cada orientación.

$$1 \rightleftarrows 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4$$

- El diagrama asociado al par $((1243), e_1e_3e_1e_3)$ es desconexo, pues la arista e_2 no aparece en él.

$$1 \rightleftarrows 2 \qquad 3 \rightleftarrows 4$$

- El diagrama asociado al par $((1243), e_1e_2e_2e_3)$ es, al igual que en el primer caso, estándar.

$$1 \longrightarrow 2 \rightleftarrows 3 \longleftarrow 4$$

Ejemplo 2.3. No todo diagrama de flechas sobre un árbol T está asociado a un par T -compatible. Esto resulta particularmente sencillo de verificar cuando el árbol T tiene únicamente 2 vértices:

$$1 \xrightarrow{e_1} 2.$$

En este caso, existen 3 diagramas sobre T :

$$1 \longrightarrow 2, \quad 1 \rightleftarrows 2, \quad 1 \longleftarrow 2.$$

Sin embargo, sólo existe un par (σ, f) que es T -compatible, dado por

$$\sigma = (12), \quad f = e_1e_1;$$

y su diagrama es, de entre los anteriores, el segundo. En consecuencia, los dos diagramas restantes no están asociados a ningún par T -compatible.

Los subconjuntos $\mathcal{P}(D)$ no vacíos conforman una partición del conjunto \mathcal{P} . Por tanto, podemos reescribir la igualdad (2.2) como

$$\det(M(T)) = \sum_D \sum_{(\sigma, f) \in \mathcal{P}(D)} \text{sign}(\sigma), \quad (2.3)$$

donde el primer sumatorio recorre todos los diagramas D sobre T para los que $\mathcal{P}(D)$ es no vacío. Estamos en condiciones de enunciar el resultado principal del documento.

Teorema 2.1. *Sea D un diagrama sobre un árbol T de orden n . Se verifica*

$$\sum_{(\sigma, f) \in \mathcal{P}(D)} \text{sign}(\sigma) = \begin{cases} (-1)^{n-1}, & \text{si } D \text{ es estándar;} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Existen $(n-1)2^{n-2}$ diagramas estándar sobre T : el factor $(n-1)$ cuenta las formas de distinguir una arista como arista doble, y el factor 2^{n-2} cuenta las formas de escoger una orientación para cada una de las aristas restantes. Tomando esto en consideración, la fórmula de Graham y Pollak se sigue del teorema anterior sin más que sustituir en (2.3). Llegamos así a una elegante y simple interpretación de la fórmula: el determinante de $M(T)$ cuenta los diagramas estándar sobre T , salvo por un signo que depende del orden de T .

Veamos la prueba del Teorema 2.1 en el caso en que D es desconexo, ya que es, con diferencia, la parte más sencilla del argumento. Tras escoger un orden para las aristas de T , tomamos $\{i, j\}$ como la menor arista de T que no aparece en D (que siempre existe, pues el diagrama D es desconexo). Para cada par (σ, f) que tiene a D como diagrama, definimos $g(\sigma, f) = (\sigma', f')$ intercambiando las imágenes de i y j tanto en la permutación σ como en la aplicación f . Es decir,

$$\sigma' = \sigma(i j), \quad f'(x) = \begin{cases} f(j) & \text{si } x = i; \\ f(i) & \text{si } x = j; \\ f(x) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Se puede probar que, así definida, la aplicación g es una involución que intercambia los signos sobre $\mathcal{P}(D)$, y que no tiene ningún punto fijo. Esto garantiza que el conteo signado de $\mathcal{P}(D)$ es nulo, de donde se sigue el resultado. Los detalles de la prueba pueden encontrarse tanto en el Trabajo de Fin de Grado de Luís Esquivias [Esq23] como en nuestro trabajo principal [BGLR].

En este escrito, nos enfocamos en demostrar el resultado más importante y delicado: el caso en que D es estándar. En el proceso, una prueba para el caso conexo no estándar emergerá de forma natural.

2.3 ÁRBOLES ENRAIZADOS PLANOS

Un árbol T se dice *enraizado* si uno de sus vértices ha sido distinguido del resto, al que llamamos la *raíz* de T . Dado un vértice v de T distinto de la raíz, sólo un vecino de v está en el camino que une a v con la raíz de T . Nos referimos a este vecino como el *padre* de v , y a todos los demás vecinos de v como sus *hijos*. Todos los vértices excepto la raíz tienen padre, y todos los vértices excepto las hojas tienen hijos. Además, v es padre de w si y sólo si w es hijo de v .

Cuando representamos un árbol enraizado T , situamos cada vértice por encima de sus hijos. En concordancia, decimos que una arista orientada (v_1, v_2) de T es *ascendente* si v_1 es hijo de v_2 , y *descendente* si v_1 es el padre de v_2 .

Un *árbol enraizado plano* (o simplemente *árbol plano*) es un árbol enraizado donde cada vértice i tiene asociado un orden lineal $<_i$ sobre sus hijos, que llamamos *orden local de i* . Al representar un árbol de este tipo, situamos a los hijos de cada vértice ordenados *de izquierda a derecha*. El nombre de la estructura responde precisamente a este fenómeno: una vez hecho un convenio para la dirección creciente (bien sea izquierda-derecha o derecha-izquierda) cualquier representación en el plano de un árbol enraizado tiene asociada una estructura plana (donde los hijos de cada vértice están ordenados por su coordenada horizontal).

Dado un árbol plano T , definimos el *árbol simétrico especular* de T como el árbol plano obtenido a partir de T invirtiendo todos sus órdenes locales. Denotamos a este árbol plano por T^E . Geométricamente, el árbol T^E se obtiene a partir de T realizando una simetría especular respecto de un eje vertical (y de ahí que escojamos esta nomenclatura).

Para nuestros propósitos, resultará útil extender el orden local de un vértice i a todos sus vecinos (es decir, extender $<_i$ también al padre de i). Lo hacemos conviniendo que el padre de i es siempre mayor (para el orden $<_i$) que todos los hijos de i . Nótese que, tras esta modificación, los órdenes locales del árbol plano T y de su simétrico especular T^E dejan de ser mutuamente inversos (lo son cuando sólo consideramos los hijos, pero no al incluir al padre). Explícitamente: si $j_1 <_i \dots <_i j_r$ son los vecinos de i y denotamos por $<_i^E$ al orden local de i en T^E , se verifica

$$j_{r-1} <_i^E \dots <_i^E j_1 <_i^E j_r.$$

Una *orientación* Ω de un árbol enraizado T es un conjunto de n aristas orientadas de T ,

donde cada arista (no orientada) de T aparece con una única orientación. Si T tiene orden n , existen 2^{n-1} orientaciones de T . Una orientación Ω de T permite clasificar los hijos de cada vértice de T en dos conjuntos disjuntos: dado un vértice x de T , decimos que un hijo y de x es *ascendente* si $(y, x) \in \Omega$; en caso contrario decimos que y es *descendente*. La *orientación inversa* Ω^* se define como la orientación formada por todas las aristas orientadas de T que no están en Ω . Equivalentemente, $\Omega^* = \{(y, x) \mid (x, y) \in \Omega\}$.

Decimos que una estructura plana sobre T es *compatible* con Ω si para cada vértice i de T , todo hijo ascendente de i es menor que todo hijo descendente i para el orden local $<_i$. Si al menos un vértice de T tiene tres hijos o más, existen múltiples estructuras planas sobre T que son compatibles con Ω .

2.3.1 DOTANDO A T DE ESTRUCTURA PLANA

Retomando nuestro contexto original, consideremos un árbol $T = (V, E)$ (no enraizado) de orden n , junto con un diagrama estándar D sobre el mismo, y denotemos por $\{a, b\}$ a su arista doble. Buscamos construir un árbol plano T_D y una orientación Ω_D que posean toda la información del árbol T y el diagrama D , respectivamente. La estructura adicional que proporcionan tanto la inclusión de una raíz como la existencia de órdenes locales será, junto al Teorema LGV, la herramienta principal de la que se servirán nuestros argumentos.

Definición 2.3. Sea D un diagrama estándar sobre un árbol T . Definimos el par (T_D, Ω_D) en tres pasos:

1. Construimos el árbol enraizado T_D a partir de T añadiendo un vértice r (que designamos como raíz) y subdividiendo la arista doble $\{a, b\}$ en dos aristas $\{a, r\}$ y $\{b, r\}$.
2. Construimos una orientación Ω_D sobre T_D a partir de las flechas de D , sustituyendo las flechas (a, b) y (b, a) por (r, b) y (r, a) , respectivamente. Utilizando que D es estándar se comprueba sin dificultad que Ω_D es una orientación de T_D .
3. Finalmente, dotamos a T_D de una estructura plana compatible con Ω_D , donde los hijos ascendentes preceden a los descendentes en los órdenes locales. Esto supone hacer una elección arbitraria, ya que pueden existir múltiples estructuras planas sobre T_D que sean compatibles con Ω_D . De entre todas ellas, fijamos una cualquiera.

En adelante cometemos un pequeño abuso de notación e identificamos a cada diagrama estándar D con su conjunto de flechas. Consideramos la aplicación $\pi_D : D \rightarrow \Omega_D$ definida como la identidad en todo elemento de D distinto de (a, b) y (b, a) . Para estas dos flechas,

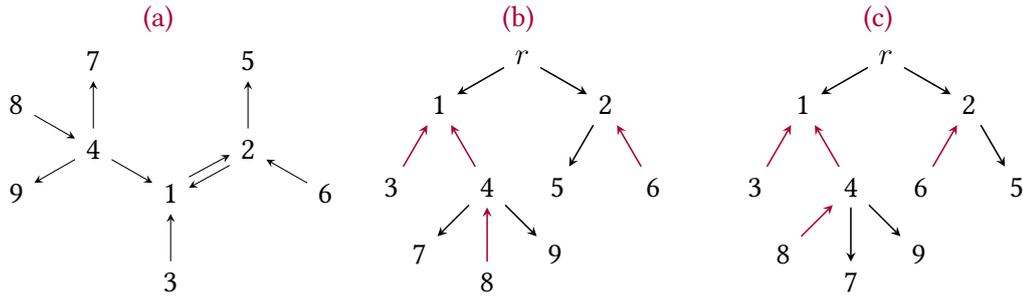


FIGURA 2.1: (a) un diagrama estándar D con arista doble $\{1, 2\}$; (b) el par (T_D, Ω_D) , a falta de determinar la estructura plana de T_D ; (c) el par (T_D, Ω_D) tras escoger para T_D una estructura plana compatible con Ω_D (una para la cual los hijos ascendentes de cada vértice preceden a sus hijos descendentes).

definimos

$$\pi_D(a, b) = (r, b); \quad \pi_D(b, a) = (r, a).$$

Es inmediato que π_D es una biyección: simplemente hemos orientado las dos aristas obtenidas al subdividir la arista doble.

Escolio 2.1. Dados dos vértices x_1 y x_2 de T y una arista orientada (y_1, y_2) de T , se puede comprobar que las siguientes dos condiciones son equivalentes:

- (a) La arista orientada (y_1, y_2) está en el camino de T desde x_1 hasta x_2 .
- (b) La arista orientada $\pi_D(y_1, y_2)$ está en el camino de T_D desde x_1 hasta x_2 .

Esta propiedad jugará posteriormente un papel fundamental, permitiendo trasladar la noción de T -compatibilidad al árbol plano T_D .

3 | CONTEO SIGNADO SOBRE DIAGRAMAS CONEXOS

Dado un diagrama estándar D sobre un árbol T , construimos un digrafo acíclico $G(D)$ con n fuentes y n sumideros, de forma que el conteo signado de n -caminos entre sus fuentes y sumideros coincide con el conteo signado de pares T -compatibles con diagrama D . Probamos que existe un único n -camino sin intersecciones en $G(D)$, y que su permutación subyacente es un ciclo completo. Por el Teorema LGV, deducimos que

$$\sum_{x \in P(D)} \text{sign}(x) = (-1)^{n-1}.$$

Esto finaliza la prueba del Teorema 2.1 en el caso en que D es estándar. La prueba para el caso en que D es conexo no estándar se derivará de la prueba anterior de forma inmediata. Finalmente, la prueba para el caso desconexo se ha expuesto en el Capítulo 2. Concluye así la prueba del Teorema 2.1, y con ello la prueba combinatoria de la fórmula de Graham y Pollak. Su interpretación combinatoria es ahora evidente: el factor $(n-1)2^{n-2}$ cuenta los diagramas estándar sobre T y $(-1)^{n-1}$ es el signo de un ciclo completo sobre $\{1, 2, \dots, n\}$.

Hemos desarrollado un programa en *Sagemath* [Lil23] que permite verificar las construcciones y resultados del capítulo, y que incluimos como archivo adjunto.

3.1 EL DIGRAFO $G(T, \Omega)$

En esta primera parte se describe el digrafo sobre el que se razona durante el resto de la prueba. Aunque eventualmente se asocia un digrafo acíclico a cada diagrama estándar, presentamos una construcción más general: para cada árbol T y cada orientación Ω de T ,

se construye un digrafo $G(T, \Omega)$. Posteriormente, se asocia a cada diagrama estándar D el digrafo $G(D) := G(T_D, \Omega_D)$ para el árbol T_D y la orientación Ω_D definidos al final del Capítulo 2. Esto permite aprovechar las propiedades estructurales los árboles enraizados planos sin tener que lidiar con las las decisiones arbitrarias que han sido necesarias para construir T_D .

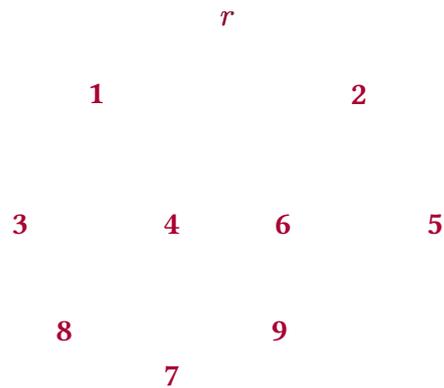
El digrafo $G(T, \Omega)$ se define como la unión de dos digrafos disjuntos (que dependen únicamente de T) y cierto conjunto de arcos entre ambos (determinado por la orientación Ω). Todas las fuentes están en uno de estos dos digrafos (al que nos referimos como el *digrafo inicial* de T) y todos los sumideros están en el otro (que llamamos *digrafo final* de T). Además, todos los arcos determinados por Ω tienen origen en el digrafo inicial y término en el digrafo final.

3.1.1 EL DIGRAFO INICIAL

Sea T un árbol plano y sea Ω una orientación de T . Comenzamos estableciendo la definición del *digrafo inicial* de T , que denotamos por $G_0(T)$.

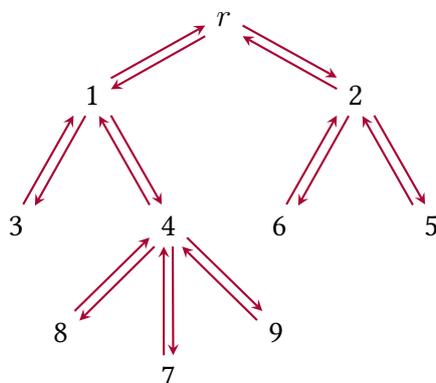
Definición 3.1. El conjunto de nodos de $G_0(T)$ está formado por:

- (a) Un nodo $v(i)$ por cada vértice i de T distinto de la raíz. Llamamos a los nodos de este tipo *nodos principales* (o *v-nodos*) y los representamos mediante la etiqueta i correspondiente, respetando la disposición espacial de los vértices de T . Incluimos también la etiqueta asociada a la raíz, pero esta cumple una labor meramente estética y no representa ningún nodo.

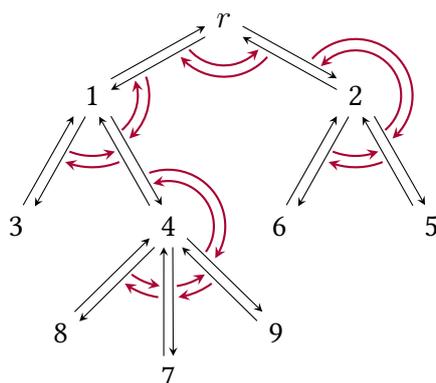


- (b) Un nodo $e(i, j)$ por cada arista orientada (i, j) de T . Categorizamos a los nodos de este tipo como *nodos arista* (o *e-nodos*) *ascendentes* o *descendentes*, en función de la

orientación de la arista (i, j) . Los representamos como flechas (rectas) entre las etiquetas i y j :



- (c) Dos nodos $s_i(j_{k-1}, j_k)$ y $s_i(j_k, j_{k-1})$ por cada vértice i de T y cada par de vecinos consecutivos j_{k-1} y j_k de i . Nos referimos a éstos como *nodos sector* (o *s-nodos*) *crecientes* y *decrecientes*, respectivamente; y los representamos como flechas curvas en la región angular de centro i delimitada por j_k y j_{k+1} :



Conviene reiterar que los nodos anteriores son tales, pese a que su representación gráfica (en los dos últimos casos) coincide con la usual para los arcos de un digrafo.

Como es claro de la definición, los v-nodos y e-nodos son representantes de los vértices y aristas orientadas de T , respectivamente. Los s-nodos, por su parte, guardan toda la información sobre la estructura plana de T .

Definición 3.2. Listamos a continuación los arcos de $G_0(T)$. Por cada vértice i de T con vecinos $j_1 <_i \dots <_i j_r$:

- (a) Dos arcos entre s-nodos por cada tres vecinos consecutivos j_{k-1}, j_k y j_{k+1} :

- $s_i(j_{k-1}, j_k) s_i(j_k, j_{k+1})$
 - $s_i(j_{k+1}, j_k) s_i(j_k, j_{k-1})$
- (b) Cuatro arcos entre s-nodos y e-nodos por cada dos vecinos consecutivos j_k y j_{k+1} :
- $e(j_k, i) s_i(j_k, j_{k+1})$
 - $e(j_{k+1}, i) s_i(j_{k+1}, j_k)$
 - $s_i(j_k, j_{k+1}) e(i, j_{k+1})$
 - $s_i(j_{k+1}, j_k) e(i, j_k)$
- (c) Un único arco $v(i) s_i(j_1, j_2)$ si i tiene al menos dos vecinos (esto es, si i no es una hoja).
- (d) Un único arco $v(i) e(i, j_1)$.

Los arcos, a diferencia de los nodos, se omitirán en la representación del digrafo inicial para facilitar su visualización.

Todos los arcos entre s-nodos de $G_0(T)$ recaen en el apartado (a) de la definición anterior. Por ende, si W es un paseo en $G_0(T)$ formado únicamente por s-nodos, todos ellos son de la misma clase (ascendentes o descendentes), tienen el mismo subíndice i y sus coordenadas recorren ordenadamente los vecinos de i . En particular, todos los nodos de W son distintos (y por ende W es un camino). Denotamos a estos caminos por

$$S_i(j_p, j_q) = \begin{cases} s_i(j_p, j_{p+1})s_i(j_{p+1}, j_{p+2}) \cdots s_i(j_{q-1}, j_q) & \text{si } p < q; \\ s_i(j_p, j_{p-1})s_i(j_{p-1}, j_{p-2}) \cdots s_i(j_{q+1}, j_q) & \text{si } p > q. \end{cases}$$

Adicionalmente, hacemos el convenio de que $S_i(j, j)$ es el camino vacío de $G_0(T)$ para cualquier vecino j de i .

Los siguientes dos lemas describen los caminos de $G_0(T)$ que no contienen e-nodos más que, a lo sumo, en sus extremos. Para ello, consideremos fijado un vértice $i \in T$ con vecinos $j_1 <_i \dots <_i j_r$.

Lema 3.1. *Sea W un paseo en G_0 entre $e_1 = e(j_p, i)$ y otro e-nodo e_2 que no involucra e-nodos adicionales. Entonces $e_2 = e(i, j_q)$ para cierto $q \neq p$ y*

$$e(j_p, i)S_i(j_p, j_q)e(i, j_q).$$

Demostración. Como los v-nodos no tienen arcos salientes, todo nodo de W excepto sus extremos debe ser un s-nodo. Además, los únicos vecinos salientes de $e(i, j_p)$ son, si existen,

$s_i(j_p, j_{p+1})$ y $s_i(j_p, j_{p-1})$. Necesariamente, debe ser

$$W = e(j_p, i)S_i(j_p, j_q)e_2$$

para cierto $q \in [r]$. Al menos un s-nodo aparece en W , pues no hay arcos entre e-nodos, por lo que q es distinto de p . Finalmente, $e(i, j_q)$ es el único vecino arista saliente tanto de $s_i(j_{q+1}, j_q)$ como de $s_i(j_q, j_{q+1})$. Concluimos que $e_1 = e(i, j_q)$ para cierto $q \neq p$. \square

Lema 3.2. *Sea W un paseo en G_0 entre $v(i)$ y un e-nodo e que no involucra e-nodos adicionales. Entonces $e = e(i, j_q)$ para cierto q y*

$$W = v(i)S_i(j_1, j_q)e(i, j_q).$$

Demostración. Prácticamente análoga a la demostración del Lema 3.1. Todos los vértices de W excepto sus extremos son s-nodos. Los vecinos salientes de $v(i)$ son $e(i, j_1)$, y si existe, $s_i(j_1, j_2)$. Teniendo en cuenta que $S_i(j_1, j_1)$ es el camino vacío, debe ser

$$W = v(i)S_i(j_1, j_q)e,$$

para cierto $q \in [r]$. Si $q = 1$, el único vecino arista saliente de $v(i)$ es $e(i, j_1)$, y por tanto $e = e(i, j_1)$. Finalmente, para $q > 1$, el único vecino arista saliente de $s_i(j_1, j_q)$ es $e(i, j_q)$, y por tanto $e = e(i, j_q)$. \square

Recordamos que un camino es un paseo que no visita dos veces a ningún vértice. Decimos que un camino de T es *no trivial* si contiene al menos una arista. Adicionalmente, decimos que un paseo de $G_0(T)$ es *no trivial* si contiene al menos un e-nodo.

Lema 3.3. *Sea W un paseo no trivial de $G_0(T)$. La subsucesión de e-nodos de W es de la forma*

$$e(i_1, i_2), e(i_2, i_3), \dots, e(i_l, i_{l+1}),$$

donde $i_1 \cdots i_{l+1}$ es un camino no trivial de T .

Demostración. Sea e_1, \dots, e_l la subsucesión de e-nodos de W , y sean i_1 y i_2 los vértices de T para los que $e_1 = e(i_1, i_2)$. Podemos aplicar el Lema 3.1 a cada par de e-nodos consecutivos e_k y e_{k+1} para deducir $e_2 = e(i_2, i_3), e_3 = e(i_3, i_4), \dots, e_l = e(i_l, i_{l+1})$; donde i_{k+1} es un vecino de i_k distinto de i_{k-1} para cada k . En particular, la sucesión de vértices de T dada por i_1, \dots, i_{l+1} es un paseo de T que no contiene ningún 2-ciclo (esto es, no contiene ningún subpaseo de la forma aba), y en un árbol, todo paseo de esta índole es un camino. \square

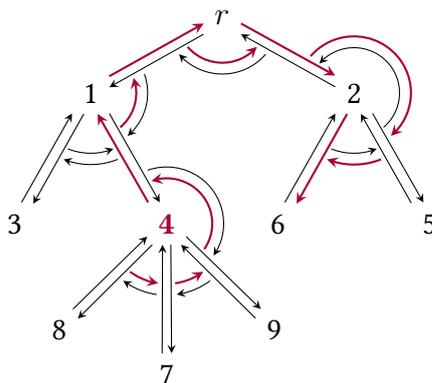


FIGURA 3.1: El único camino de $G_0(T_D, \Omega_D)$ desde $v(4)$ hasta $e(2, 6)$.

El lema anterior permite asociar a cada paseo no trivial de $G_0(T)$ un camino no trivial de T . Nos referimos a este camino como el *camino subyacente* de W .

Lema 3.4. *Sea P un camino no trivial de T que no empieza en la raíz. Existe un único camino entre v-nodos y e-nodos de $G_0(T)$ que tiene a P como camino subyacente.*

Demostración. Denotemos $P = i_1 \cdots i_{l+1}$ y sea P_0 un camino entre un v-nodo y un e-nodo de $G_0(T)$ que tiene a P como camino subyacente. Como el primer e-nodo de P_0 es $e(i_1, i_2)$, por el Lema 3.2 el nodo inicial es $v(i_1)$, y el camino P_0 está determinado de forma única hasta $e(i_1, i_2)$. Para $2 \leq k \leq l$, el subcamino de P_0 entre $e(i_{k-1}, i_k)$ y $e(i_k, i_{k+1})$ está determinado de forma única por el Lema 3.1. Como P_0 termina en un e-nodo, este debe ser $e(i_l, i_{l+1})$. Se sigue así la unicidad de P_0 . □

Los lemas presentados hasta el momento caracterizan los paseos entre v-nodos y e-nodos de $G_0(T)$ en su totalidad. Utilizamos esta caracterización para comprobar que $G_0(T)$ no tiene ciclos, y que por tanto satisface las condiciones del Teorema LGV.

Proposición 3.1. *El digrafo $G_0(T)$ es acíclico.*

Demostración. Supongamos que C es un ciclo en $G_0(T)$. Como los v-nodos no tienen arcos salientes, no pueden formar parte de un ciclo. Como los paseos con sólo s-nodos son caminos, C debe ser un paseo no trivial. Sea $i_1 \cdots i_{l+1}$ el camino subyacente de C , y supongamos sin pérdida de generalidad que $e_1 = e(i_1, i_2)$ es el primer (y último) nodo de C . Entonces existen al menos dos e-nodos en C (no necesariamente distintos) y por tanto $l > 1$. Como el último e-nodo coincide con el primero, $i_l = i_1$ y $i_{l+1} = i_2$. Esto se contradice con que $i_1 \cdots i_{l+1}$ sea un camino de T ($i_{l+1} = i_2$ pero $l + 1 > 2$). □

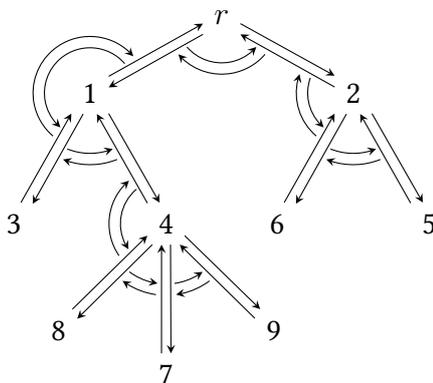
3.1.2 EL DIGRAFO FINAL

Definimos un segundo digrafo asociado a un árbol plano T , similar en su naturaleza al digrafo inicial, que llamamos *digrafo final* de T y denotamos por $G_F(T)$. El digrafo final tiene los mismos nodos que el digrafo inicial del simétrico especular de T , y sólo difiere de éste en cierto subconjunto de sus arcos. Probaremos que ambos digrafos son antiisomorfos, lo que permitirá extender al digrafo final los resultados de la sección anterior sin dificultad alguna.

Definición 3.3. El digrafo $G_F(T)$ es una copia de $G_0(T^E)$ con las siguientes modificaciones en sus arcos. Para cada vértice x de T^E con vecinos $y_1 <_x y_2 <_x \dots <_x y_r$ (respecto del orden local de T^E):

- El arco $v(x)e(x, y_1)$ es sustituido por el arco $e(y_1, x)v(x)$.
- Si x no es una hoja, el arco $v(x)s_x(y_1, y_2)$ es sustituido por el arco $s_x(y_2, y_1)v(x)$.

Los nodos del digrafo final se priman para facilitar su distinción: $v'(x), e'(y_1, y_2), s'_x(y_1, y_2)$. Cuando representemos el digrafo final de T , la posición de los v-nodos se escogerá de acuerdo a la estructura plana de T , no de su simétrico especular:



Todos los arcos entrantes a v-nodos del digrafo inicial han sido sustituidos por arcos entrantes al construir el digrafo final. Cuando definamos $G(T)$ (que tendrá a $G_0(T)$ y a $G_F(T)$ como subgrafos disjuntos), los caminos que estudiaremos serán precisamente aquellos con origen en v-nodos del digrafo inicial y término en v-nodos del digrafo final. El siguiente resultado muestra, como ya hemos anticipado, la estrecha relación que guardan ambos objetos.

Proposición 3.2. Los digrafos $G_F(T)$ y $G_0(T^E)$ son antiisomorfos.

Demostración. Consideremos la aplicación $\psi : V(G_0(T^E)) \rightarrow V(G_F(T))$ que invierte el orden en las coordenadas de los nodos. Esto es:

- El v-nodo $v(i)$ se envía a $\psi(v(i)) = v'(i)$.
- El e-nodo $e(i, j)$ se envía a $\psi(e(i, j)) = e'(j, i)$.
- El s-nodo $s(i, j)$ se envía a $\psi(s(i, j)) = s'(j, i)$.

Es claro que así definida, ψ es biyección. Se puede comprobar usando las Definiciones 3.2 y 3.3 que, si ab es un arco de $G_0(T^E)$, entonces $\psi(b)\psi(a)$ es un arco de $G_F(T)$. Para la implicación contraria, basta notar que por construcción $G_0(T^E)$ y $G_F(T)$ tienen el mismo número de arcos. Se sigue que ψ es antiisomorfismo. \square

Como todo antiisomorfismo, la aplicación ψ induce una biyección entre los paseos de los digrafos que relaciona:

$$W = x_1x_2 \cdots x_k \subseteq G_0(T^E) \quad \longleftrightarrow \quad \psi(W) = \psi(x_k) \cdots \psi(x_2)\psi(x_1) \subseteq G_F(T).$$

Gracias al antiisomorfismo ψ , los resultados del digrafo inicial se trasladan al digrafo final de forma inmediata.

Corolario 3.1. *Sea W un paseo no trivial de $G_F(T)$. La subsucesión de e-nodos de W es de la forma*

$$e'(i_1, i_2), e'(i_2, i_3), \dots, e'(i_l, i_{l+1}),$$

donde $i_1 \cdots i_{l+1}$ es un camino en T .

Demostración. Por el Lema 3.3, la subsucesión de e-nodos de $\psi^{-1}(W)$ es de la forma

$$e(j_1, j_2), e(j_2, j_3), \dots, e(j_m, j_{m+1})$$

donde $j_1 \cdots j_{m+1}$ es un camino de T^E (y por tanto también un camino de T). Por tanto, la subsucesión de e-nodos de $W = \psi(\psi^{-1}(W))$ es

$$\psi(e'(j_m, j_{m+1})), \dots, \psi(e'(j_2, j_3)), \psi(e(j_2, j_1)).$$

Por definición de ψ , esta sucesión coincide con

$$e(j_{m+1}, j_m), \dots, e(j_3, j_2), e(j_2, j_1),$$

y $j_{m+1}j_m \cdots j_2j_1$ es un camino en T . Esto termina la prueba. \square

El *camino subyacente* de un camino de $G_F(T)$ se define del mismo modo que para el digrafo inicial. De la prueba anterior se sigue que el camino subyacente de $\psi(P)$ es el inverso del camino subyacente de P , para cualquier camino P de $G_0(T^E)$.

Corolario 3.2. *Sea P un camino de T que no termina en la raíz y tiene al menos una arista. Existe un único camino desde un e -nodo hasta un v -nodo $G_0(T)$ que tiene a P como camino subyacente.*

Demostración. Utilizamos que ψ invierte los caminos subyacentes. Si dos caminos distintos P_1 y P_2 de $G_F(T)$ tienen el mismo camino subyacente, entonces $\psi^{-1}(Q_1)$ y $\psi^{-1}(Q_2)$ son dos caminos de $G_0(T^E)$ con el mismo camino subyacente. Pero esto se contradice con el Lema 3.4. \square

Corolario 3.3. *El digrafo $G_F(T)$ es acíclico.*

Demostración. Un paseo W de $G_F(T)$ es un ciclo si y sólo si el paseo $\psi(W)$ de $G_0(T^E)$ es un ciclo. Como el segundo digrafo es acíclico (Proposición 3.1), también lo es el primero. \square

3.1.3 EL DIGRAFO $G(T, \Omega)$

Llegamos así al último paso de la construcción. Describimos ahora un digrafo que, a diferencia de los anteriores (inicial y final), no depende exclusivamente de un árbol plano; también de una orientación sobre el mismo.

Definición 3.4. El digrafo $G(T, \Omega)$ se obtiene de la unión disjunta de los digrafos inicial y final de T , añadiendo un arco $e(i, j)e'(i, j)$ por cada arista orientada (i, j) de Ω . Nos referimos a estos arcos como los *puentes* de $G(T, \Omega)$.

Designamos como *fuentes* y *sumideros* de $G(T, \Omega)$ a los v -nodos del digrafo inicial y del digrafo final de T , respectivamente. Para representar el digrafo $G(T, \Omega)$, situamos a $G_F(T)$ a la derecha de $G_0(T)$.

Todo camino con origen el digrafo inicial y término en el digrafo final contiene exactamente un puente. Para verificar esto, nótese que todos los arcos desde el primero hasta el segundo son puentes, y que no existen arcos desde el segundo hasta el primero. Dado un camino P en las condiciones anteriores, denotamos por $\beta(P)$ a la arista orientada de

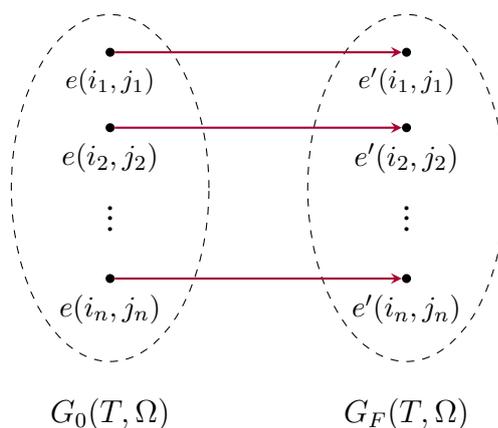


FIGURA 3.2: Los puentes de $G(T, \Omega)$

Ω asociada al único puente de P . Comenzamos comprobando que nuestro nuevo digrafo satisface la única condición exigida por el Teorema LGV.

Proposición 3.3. *El digrafo $G(T, \Omega)$ es acíclico.*

Demostración. Todo ciclo del digrafo está contenido en uno de los dos subgrafos $G_0(T)$ o $G_F(T)$ (pues no hay arcos desde el segundo subgrafo hasta el primero). Pero ambos subgrafos son acíclicos (por la Proposición 3.1 y el Corolario 3.3, respectivamente). \square

Escolio 3.1. Consideremos un camino P de $G(T, \Omega)$ entre una fuente $v(x_1)$ y un sumidero $v'(x_2)$ que pasa por el puente asociado a cierto $(y_1, y_2) \in \Omega$. Claramente, P admite una descomposición de la forma $P = P^0 P^F$ donde:

- P^0 es un camino de $G_0(T)$ desde $v(x_1)$ hasta $e(y_1, y_2)$.
- P^F es un camino de $G_F(T)$ desde $e'(y_1, y_2)$ hasta $v(x_2)$.

Además, este proceso es reversible: dados dos caminos P^0 y P^F cumpliendo los dos puntos anteriores, podemos concatenarlos para construir el único camino $P = P^0 P^F$ desde $v(x_1)$ hasta $v(x_2)$ que pasa por el puente asociado a (y_1, y_2) . En adelante, nos referimos al par (P^0, P^F) como la *descomposición* de P .

Proposición 3.4. *Sean x_1 y x_2 dos vértices de T distintos de la raíz, y sea (y_1, y_2) una arista orientada de Ω . Son equivalentes:*

- (a) *La arista orientada (y_1, y_2) está en el camino de T entre x_1 y x_2 .*
- (b) *Existe un único camino en $G(T, \Omega)$ desde la fuente $v(x_1)$ hasta el sumidero $v'(x_2)$ que pasa por el puente $e(y_1, y_2)e'(y_1, y_2)$.*

(c) Existe un camino en $G(T, \Omega)$ desde la fuente $v(x_1)$ hasta el sumidero $v'(x_2)$ que pasa por el puente $e(y_1, y_2)e'(y_1, y_2)$.

Demostración. Veamos que (a) implica (b). Si la arista (y_1, y_2) está en el camino de T entre x_1 y x_2 , entonces hay dos caminos en T de la forma

$$P_1 = x_1 \cdots y_1 y_2, \quad P_2 = y_1 y_2 \cdots x_2.$$

Aplicando el Lema 3.4 al camino P_1 deducimos que existe un único camino Q_1 de $G_0(T)$ desde $v(x_1)$ hasta $e(y_1, y_2)$. Del mismo modo, aplicando el Corolario 3.2 al camino P_2 deducimos que existe un único camino Q_2 de $G_F(T)$ desde $e'(y_1, y_2)$ hasta $v'(x_2)$. El camino $Q_1 Q_2$ es, por tanto, el único camino de $G(T, \Omega)$ desde $v(x_1)$ hasta $v'(x_2)$ que pasa por el puente $e(y_1, y_2)e'(y_1, y_2)$. Se sigue así (b).

Que (b) implica (c) es inmediato. Para ver que (c) implica (a), consideremos un camino P en las condiciones de (c), y sea (P^0, P^F) su descomposición. Los caminos subyacentes de P^0 y P^F son, respectivamente, de la forma

$$x_1 \cdots y_1 y_2, \quad y_1 y_2 \cdots x_2.$$

Concatenando sendos caminos (tras retirar de cualquiera de ellos la arista que tienen en común) obtenemos un camino de T de la forma $x_1 \cdots y_1 y_2 \cdots x_2$, de donde se sigue (a). Esto termina la prueba. \square

3.1.4 DESCOMPOSICIÓN DE n -CAMINOS EN G

Cerramos la sección exhibiendo ciertas propiedades de los n -caminos de G , y aprovechamos para introducir algunas notaciones que se utilizarán en secciones posteriores.

Dado un árbol plano T y una orientación Ω de T , se denota por $\mathcal{M}(T, \Omega)$ al conjunto de n -caminos entre fuentes y sumideros de $G(T, \Omega)$, y por $\mathcal{N}(T, \Omega) \subseteq \mathcal{M}(T, \Omega)$ a su subconjunto de n -caminos sin intersecciones. Además, se denota por $\mathcal{N}_0(T, \Omega)$ al conjunto de n -caminos sin intersecciones de $G_0(T)$ entre los v -nodos y los e -nodos del conjunto $e(\Omega) := \{e(i, j) \mid (i, j) \in \Omega\}$. Los conjuntos $\mathcal{N}_F(T, \Omega)$ y $e'(\Omega)$ se definen de forma análoga.

Escolio 3.2. Se puede comprobar que $\psi(\mathcal{N}_0(T^E, \Omega^*)) = \mathcal{N}_F(T, \Omega)$. Basta tener en cuenta que ψ invierte las coordenadas de los nodos y por tanto $\psi(e(\Omega^*)) = e'(\Omega)$.

Si $\mathbf{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ es un n -camino de $\mathcal{M}(T, \Omega)$, no se puede garantizar que el conjunto de caminos $\mathbf{P}^0 := \{P_1^0, \dots, P_n^0\}$ sea un n -camino, pues cabe la posibilidad de que dos de sus caminos tengan el mismo extremo final. Esto no supone un problema cuando \mathbf{P} no tiene intersecciones. En tal caso, tanto \mathbf{P}^0 como $\mathbf{P}^F := \{P_1^F, \dots, P_n^F\}$ son elementos de $\mathcal{N}_0(T, \Omega)$ y $\mathcal{N}_F(T, \Omega)$, respectivamente. Decimos que el par $(\mathbf{P}^0, \mathbf{P}^F)$ es la *descomposición* del n -camino \mathbf{P} .

A continuación se demuestra que, al igual que con los caminos, se puede reconstruir cualquier n -camino de $\mathcal{N}(T, \Omega)$ a partir de su descomposición.

Lema 3.5. *La aplicación $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}^0\mathbf{P}^F$ es una biyección entre los n -caminos de $\mathcal{N}(T, \Omega)$ y los pares de n -caminos de $\mathcal{N}_0(T, \Omega) \times \mathcal{N}_F(T, \Omega)$.*

Demostración. La inyectividad es inmediata, por lo que sólo probamos la sobreyectividad. Consideremos para ello un par de n -caminos

$$(\mathbf{P}^0, \mathbf{P}^F) \in \mathcal{N}_0(T, \Omega) \times \mathcal{N}_F(T, \Omega).$$

Como $e(\Omega)$ tiene cardinal n y \mathbf{P}^0 no tiene intersecciones, cada elemento de $e(\Omega)$ es el extremo final de exactamente un camino de \mathbf{P}^0 . Por el mismo motivo, cada elemento de $e'(\Omega)$ es el extremo inicial de exactamente un camino de \mathbf{P}^F . Construimos el n -camino $\mathbf{P}^0\mathbf{P}^F$ concatenando, para cada $(i, j) \in \Omega$, el camino de \mathbf{P}^0 que termina en $e(i, j)$ con el camino de \mathbf{P}^F que comienza en $e'(i, j)$. Es inmediato que $\mathbf{P}^0\mathbf{P}^F$ está en $\mathcal{N}(T, \Omega)$, y que su descomposición es $(\mathbf{P}^0, \mathbf{P}^F)$. \square

3.2 PARES COMPATIBLES COMO n -CAMINOS

La construcción del digrafo G se ha efectuado en términos de un árbol plano y una orientación arbitrarios. Especializamos los resultados al árbol T_D y a la orientación Ω_D descritos en la sección 2.3.1. Será en este punto cuando saldrá a relucir la utilidad de nuestro método: el conteo signado de n -caminos sin intersecciones entre fuentes y sumideros del digrafo $G(T_D, \Omega_D)$ se probará idéntico al conteo signado de los pares compatibles con diagrama D (cuyo cálculo es, cabe recordar, nuestro principal objetivo).

3.2.1 EL LEVANTAMIENTO DE UN PAR COMPATIBLE

A lo largo de esta sección se considera fijado un árbol no enraizado T de orden n y un diagrama estándar D sobre el mismo. Como ya se ha anticipado, se trabajará sobre el par (T_D, Ω_D) construido al final del Capítulo 2. Recordamos que al proporcionar a T_D una estructura plana compatible con Ω_D se ha hecho una elección arbitraria, pero que consideramos fija.

Por simplicidad, denotamos $G(D) := G(T_D, \Omega_D)$ (cumpliendo así con la notación prometida en la introducción). Los conjuntos $\mathcal{M}(D)$, $\mathcal{N}(D)$, $\mathcal{N}_0(D)$ y $\mathcal{N}_F(D)$ se definen del mismo modo.

Decimos que un diagrama D_0 sobre T es *subdiagrama* de D (y denotamos $D_0 \preceq D$) si todos sus arcos son arcos de D . Esto es, si el conjunto (simple) de arcos de D_0 está contenido en el de conjunto de arcos de D . Claramente, D es subdiagrama de si mismo.

Definición 3.5. Sea D_0 un subdiagrama de D , y sea $(\sigma, f) \in \mathcal{P}(D_0)$. El *levantamiento* del par (σ, f) es el n -camino $\Lambda(\sigma, f) = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\} \in \mathcal{M}(D)$, donde Λ_i es el único camino desde la fuente $v(i)$ hasta el sumidero $v'(\sigma(i))$ que pasa por el puente asociado a $\pi_D(\vec{f}_\sigma(i))$.

En las condiciones de la definición anterior, la arista $\pi_D(\vec{f}_\sigma(i)) \in \Omega_D$ está en el camino de T_D que une i con $\sigma(i)$ por el Escolio 2.1. Por la Proposición 3.4, el levantamiento de (σ, f) está bien definido. El levantamiento Λ define una aplicación

$$\Lambda : \bigcup_{D_0 \preceq D} \mathcal{P}(D_0) \rightarrow \mathcal{M}(D)$$

que preserva el signo, pues la permutación subyacente de $\Lambda(\sigma, f)$ es σ por construcción. Como se demuestra a continuación, esta aplicación es una biyección. Recordamos que, dado un camino P entre una fuente y un sumidero de $G(D)$, $\beta(P)$ denota a la arista orientada asociada al único puente de P .

Proposición 3.5. Λ es una biyección que preserva el signo.

Demostración. Ya hemos visto que Λ preserva el signo, y su inyectividad es consecuencia inmediata de la de π_D . Para la sobreyectividad, sea $\mathbf{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ un n -camino de $\mathcal{M}(D)$, y sea σ su permutación subyacente. Consideremos la aplicación $g : [n] \rightarrow D$ definida por $g(i) = \pi_D^{-1}(\beta(P_i))$ para cada $i \in [n]$, y sea f la aplicación obtenida a partir de g ignorando la orientación de las aristas en la imagen (esto es, si $g(i) = (x, y)$, entonces $f(i) = \{x, y\}$). Veamos que el n -camino $\Lambda(\sigma, f)$ está definido y coincide con \mathbf{P} .

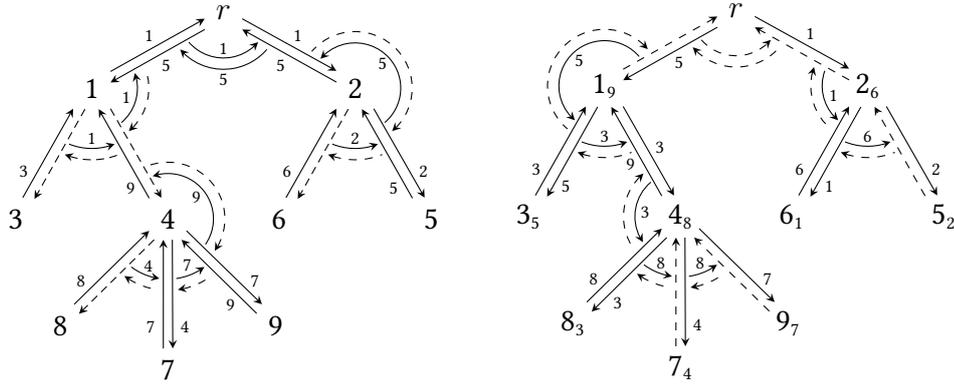


FIGURA 3.3: El levantamiento del par (σ, f) descrito en el Ejemplo 3.1.

Comenzamos notando que, para cada i , el camino P_i une $v(i)$ con $v'(\sigma(i))$ y pasa por el puente asociado a $\pi_D(g(i)) = \beta(P_i)$. Por tanto, es suficiente probar que (σ, f) está en el dominio de Λ y que $\vec{f}_\sigma = g$. Fijemos $i \in [n]$. Por la proposición 3.4, el camino de T_D entre $v(i)$ y $v'(\sigma(i))$ es de la forma $i \cdots \pi_D(g(i)) \cdots \sigma(i)$. Por el Escolio 2.1, la arista $f(i)$ aparece en el camino de T entre i y $\sigma(i)$ con la orientación $g(i)$. Como esto se verifica para todo i , el par (σ, f) es T -compatible y $g = \vec{f}_\sigma$. Para comprobar que el diagrama de (σ, f) es subdiagrama de D , basta notar que el conjunto de llegada de la aplicación $\vec{f}_\sigma = g$ es D . Esto termina la prueba. \square

Ejemplo 3.1. Retomemos el árbol plano T_D y la orientación Ω_D de la Figura 2.1. Consideremos el par $(\sigma, f) \in \mathcal{P}(D)$ dado por

$$\sigma = (162538479), \quad f = 12, 25, 13, 47, 12, 26, 49, 48, 14.$$

En la Figura 3.3 representamos el levantamiento $\Lambda(\sigma, f)$, marcando los nodos de Λ_i con la etiqueta i (a excepción del nodo de origen $v(i)$, donde es redundante). Recordamos que el subgrafo final se representa a la derecha del subgrafo inicial. Se puede observar que el levantamiento del par (σ, f) no tiene intersecciones. De hecho, probaremos que $\Lambda(\sigma, f)$ es el único n -camino sin intersecciones entre las fuentes y los sumideros de $G(D)$.

Cuando una biyección preserva el signo, el conteo signado de su dominio coincide con el de su imagen. En el caso particular de Λ , esto se traduce en

$$\sum_{D_0 \preceq D} \sum_{(\sigma, f) \in \mathcal{P}(D_0)} \text{sign}(\sigma) = \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{M}(D)} \text{sign}(\sigma_{\mathbf{P}}). \quad (3.1)$$

Podemos invocar el Teorema LGV para calcular el segundo miembro de la igualdad (y con él, también el primero). No obstante, en (3.1) están considerados todos los subdiagramas de

D , pese a que nosotros buscamos calcular dicha suma sólo para el propio D . Como pronto será aparente, esto no supone un problema: la contribución del resto de subdiagramas al miembro izquierdo de (3.1) es nula. En lo que sigue denotamos $\Lambda(D_0) := \Lambda(\mathcal{P}(D_0))$ por simplicidad.

Lema 3.6. *Sea D_0 un subdiagrama de D . Se tiene*

$$\Psi(\Lambda(D_0)) = \Lambda(D_0).$$

Demostración. El diagrama asociado a un n -camino de $\mathcal{M}(D)$ depende del multiconjunto de puentes de sus caminos (pero no de qué camino contiene a cada puente). La involución LGV preserva el multiconjunto de arcos del n -camino al que se aplica, pues únicamente intercambia ciertos arcos entre, a lo sumo, dos de sus caminos. Por ende, el multiconjunto de puentes es el mismo tras la involución y el diagrama asociado permanece invariante. \square

El resultado anterior afirma que, para cada subdiagrama D_0 de D , el conjunto $\Lambda(D_0)$ es cerrado para la involución LGV. Recordando el Escolio 1.1 y teniendo en cuenta que Λ preserva el signo, podemos asegurar que

$$\sum_{(\sigma, f) \in \mathcal{P}(D_0)} \text{sign}(\sigma) = \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{N}(D) \cap \Lambda(D_0)} \text{sign}(\sigma_{\mathbf{P}}). \quad (3.2)$$

Lema 3.7. *Se tiene $\mathcal{N}(D) \subseteq \Lambda(D)$. Es decir, todo n -camino sin intersecciones de $\mathcal{M}(D)$ tiene diagrama D .*

Demostración. Sea D_0 un subdiagrama estricto de D . El diagrama D consta de n arcos distintos, todos con multiplicidad uno. Como D_0 tiene n arcos y es subdiagrama estricto de D , debe tener al menos un arco (i, j) con multiplicidad $m > 2$. Sea $(\sigma, f) \in \mathcal{P}(D_0)$. Por lo anterior, el levantamiento $\Lambda(\sigma, f)$ tiene m caminos que pasan por el puente asociado a (i, j) , y que por ende se intersecan. Se sigue que todos los n -caminos sin intersecciones de $\mathcal{M}(D)$ son elementos de $\Lambda(\mathcal{P}(D))$, como buscábamos. \square

Hemos probado que $\mathcal{N}(D) \cap \Lambda(D) = \Lambda(D)$. Utilizando esto en la igualdad (3.2), llegamos al resultado principal de la sección:

Teorema 3.1. *El conteo signado de $\mathcal{P}(D)$ coincide con el conteo signado de $\mathcal{N}(D)$. Esto es,*

$$\sum_{(\sigma, f) \in \mathcal{P}(D)} \text{sign}(\sigma) = \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{N}(D)} \text{sign}(\sigma_{\mathbf{P}}).$$

Consideremos ahora un subdiagrama D_0 de D distinto del propio D . El Lema 3.7 asegura que $\mathcal{N}(D) \cap \Lambda(D_0) = \emptyset$. Por la igualdad (3.2),

$$\sum_{(\sigma, f) \in \mathcal{P}(D_0)} \text{sign}(\sigma) = 0.$$

Utilizamos esta identidad para demostrar el Teorema 2.1 en el caso conexo no estándar.

Teorema 3.2. *Sea D un diagrama conexo no estándar sobre un árbol T . Se verifica*

$$\sum_{(\sigma, f) \in \mathcal{P}(D)} \text{sign}(\sigma) = 0.$$

Demostración. Por lo anterior, es suficiente comprobar que D es subdiagrama de D' para algún diagrama estándar D' . Como D es conexo, tiene una arista doble que aparece dos veces con la misma orientación. Basta tomar D' como el diagrama obtenido a partir de D invirtiendo la orientación de uno de los dos arcos asociados a su arista doble. Así definido, se comprueba sin dificultad que D' es estándar y que D es subdiagrama de D' . \square

3.3 LOS n -CAMINOS SIN INTERSECCIONES DE G

En este punto, únicamente necesitamos caracterizar los caminos de $\mathcal{N}(D)$. Aún así, por motivos que quedarán claros más adelante, damos un paso atrás en la especialización y volvemos a considerar condiciones algo más generales. En vez de centrarnos en T_D y Ω_D , consideramos un árbol plano T compatible con una orientación Ω de T que satisfagan la siguiente condición:

$$\begin{aligned} & \text{La raíz } r \text{ de } T \text{ tiene exactamente dos hijos } a <_r b, \\ & \text{ambos ascendentes (o ambos descendentes) para } \Omega. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Designamos como *fuentes* a los v -nodos de $G_0(T)$ y como *sumideros* a los e -nodos del conjunto $e(\Omega)$.

No sólo el par (T_D, Ω_D) verifica la condición anterior (pues ambos extremos de la arista doble $\{a, b\}$ son descendentes para Ω_D por construcción), sino que también la verifica (T_D^E, Ω_D^*) (ya que en este caso tanto a como b son ascendentes para Ω^*). Así, cualquier resultado para $\mathcal{N}_0(T, \Omega)$ cuando (T, Ω) satisface la condición (3.3) puede ser especializado tanto a $\mathcal{N}_0(T_D, \Omega_D)$ como a $\mathcal{N}_0(T_D^E, \Omega_D^*)$. A su vez, el resultado en el segundo caso se

puede trasladar a $\mathcal{N}_F(T_D, \Omega_D)$ mediante el antiisomorfismo ψ . Gracias al Lema 3.5, esto es suficiente para caracterizar el conjunto $\mathcal{N}(T_D, \Omega_D)$.

El objetivo de esta sección es probar el siguiente resultado:

Teorema 3.3. *Supongamos que (T, Ω) satisface (3.3). Entonces*

$$|\mathcal{N}_0(T, \Omega)| = 1.$$

Supongamos que \mathbf{N} es un n -camino de $\mathcal{N}_0(\Omega, T)$. Diremos que un nodo o arco de $G_0(T)$ está *saturado* si forma parte de algún camino de \mathbf{N} . Probar que los arcos saturados de \mathbf{N} están determinados de forma única es suficiente para probar su unicidad, como discutimos en el siguiente escolio.

Escolio 3.3. En un digrafo acíclico, un n -camino sin intersecciones \mathbf{P} está totalmente determinado por su conjunto de arcos. Basta considerar el subgrafo formado por dichos arcos y sus extremos: cada una de sus componentes conexas se corresponde con uno de los caminos de \mathbf{P} (que une la única fuente de la componente conexa con su único sumidero, pasando por todos los nodos en el único orden posible). En particular, cada conjunto de arcos es el conjunto de arcos saturados de, a lo sumo, un n -camino sin intersecciones del digrafo.

Para cada vértice x de T distinto de la raíz, sea $\Sigma(x)$ el subgrafo de $G_0(T)$ generado por todos los nodos de la forma

$$s_y(a, b), \quad e(y, a), \quad e(a, y), \quad v(y);$$

para cada y en el subárbol de T con raíz x , y para cada vértices a, b de T . Abordamos la prueba de la unicidad de \mathbf{N} desde una perspectiva local: dado un vértice x , buscamos caracterizar los arcos saturados de $G_0(T)$ en $\Sigma(x)$ que no están en $\Sigma(y)$ para ningún hijo y de x . Para ello, consideramos el grafo $L(x)$ obtenido a partir de $\Sigma(x)$ identificando todos los nodos de $\Sigma(y)$ con un único nodo (que denotamos también por $\Sigma(y)$) para cada hijo y de x , y retirando posteriormente los bucles (esto es, los arcos de la forma (a, a)).

Lema 3.8. *Sea x un vértice de T distinto de la raíz, y sea p su padre. Entonces:*

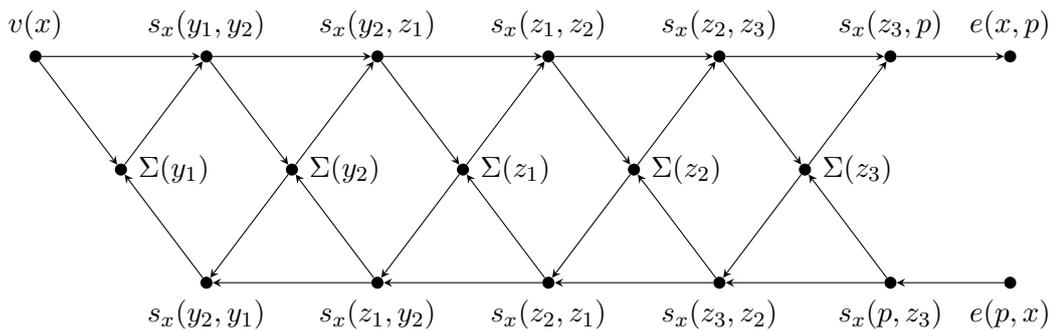
- (a) *Si (p, x) está en Ω , entonces tanto $e(x, p)$ como $e(p, x)$ están saturados. En este caso, un camino de \mathbf{N} sale de $\Sigma(x)$ y un camino de \mathbf{N} entra en $\Sigma(x)$.*
- (b) *Si (x, p) está en Ω , entonces $e(x, p)$ está saturado y $e(p, x)$ no está saturado. En este caso, ningún camino de \mathbf{N} entra ni sale de $\Sigma(x)$.*

Demostración. En $\Sigma(x)$ hay tantas fuentes como sumideros de $G_0(T, \Omega)$ (pongamos, k). Un camino sale de $\Sigma(x)$ (resp. entra a $\Sigma(x)$) si y sólo si pasa por el nodo $e(x, p)$ (resp. por el nodo $e(p, x)$). Ningún camino P de $G_0(T, \Omega)$ entra y sale de $\Sigma(x)$, ya que esto entraría en contradicción con que el camino subyacente de P es un camino. Teniendo esto presente, veamos ambos puntos.

- (a) Si (p, x) está en Ω , un camino de \mathbb{N} termina en $e(p, x)$ (y en particular $e(p, x)$ está saturado). Este camino tiene origen fuera de $\Sigma(x)$, pues $e(p, x)$ no es alcanzable desde las fuentes de $\Sigma(x)$. Sin contar a $e(p, x)$, hay $k - 1$ sumideros en $\Sigma(x)$. Por tanto, de entre los k caminos con origen $\Sigma(x)$, al menos uno sale de $\Sigma(x)$ y $e(x, p)$ también está saturado. No pueden salir de $\Sigma(x)$ dos o más caminos de \mathbb{N} , ya que se intersectarían en $e(x, p)$.
- (b) Si (x, p) está en Ω , un camino de \mathbb{N} termina en $e(x, p)$ (y por ende $e(x, p)$ está saturado). Este camino tiene origen en $\Sigma(x)$, pues $e(x, p)$ es sólo alcanzable por las fuentes de $\Sigma(x)$. Como \mathbb{N} no tiene intersecciones, ninguno de sus caminos sale de $\Sigma(x)$ (en caso contrario, se intersectaría con el camino que termina en $e(x, p)$). Es decir, los caminos con término en los k sumideros de $\Sigma(x)$ tienen origen en las k fuentes de $\Sigma(x)$. Se sigue que ningún camino entra en $\Sigma(x)$ y por tanto $e(p, x)$ no está saturado. \square

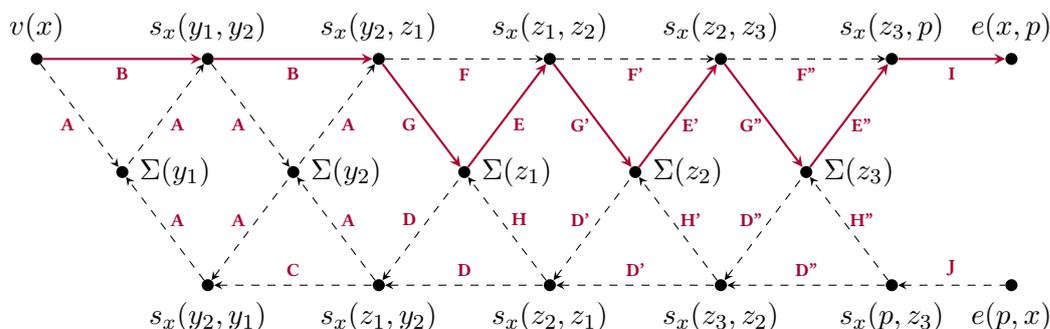
Los arcos de $L(x)$ están en biyección con los arcos de $\Sigma(x)$ que no están en $\Sigma(y)$ para ningún hijo y de x . En efecto, los segundos se obtienen de los primeros sin más que intercambiar $\Sigma(y)$ por $e(y, x)$ en los arcos salientes de $\Sigma(y)$, y $\Sigma(y)$ por $e(x, y)$ en los arcos entrantes de $\Sigma(y)$, para cada hijo y de x .

A continuación se muestra el grafo $L(x)$ para un vértice x distinto de la raíz con dos hijos ascendentes $y_1 <_x y_2$, tres hijos descendentes $z_1 <_x z_2 <_x z_3$, y un padre p .



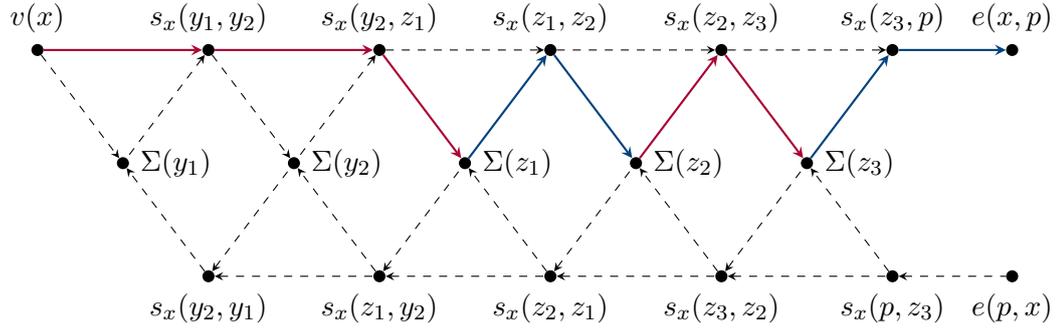
A partir de este diagrama, utilizamos el Lema 3.8 para determinar de forma única los arcos saturados de $L(x)$ (y mediante la biyección previamente expuesta, los arcos saturados

de $\Sigma(x)$ que no están en $\Sigma(y)$ para ningún hijo y de x). Utilizamos trazado discontinuo para representar los arcos no saturados. Los distintos pasos del razonamiento aparecen denotados mediante letras latinas mayúsculas (A, B, ...) y se exponen a continuación.



- **A.** Ningún camino entra o sale de $\Sigma(y)$ cuando y es ascendente.
- **B.** Un camino de \mathbb{N} tiene origen en $v(x)$, y no tiene más opción que pasar por $s_x(y_1, y_2)$ y continuar hasta $s_x(y_2, z_1)$.
- **C.** Como ningún camino sale de $s_x(y_2, y_1)$ (y no es un sumidero), ningún camino entra en $s_x(y_2, y_1)$.
- **D.** Como ningún camino sale de $s_x(z_1, y_2)$ (y no es un sumidero), ningún camino entra en $s_x(z_1, y_2)$.
- **E.** Un camino de \mathbb{N} sale de $\Sigma(z_1)$, y no tiene más opción que pasar por $s_x(z_1, z_2)$.
- **F.** Sólo un camino de \mathbb{N} puede pasar por $s_x(z_1, z_2)$ (pues \mathbb{N} no tiene intersecciones), y ya hemos visto que el camino que sale de $\Sigma(z_1)$ pasa por él.
- **G.** El camino de \mathbb{N} que pasa por $s_x(y_1, z_1)$ debe continuar, y para el siguiente nodo la única opción es $\Sigma(z_1)$.
- **H.** Ya existe un camino de \mathbb{N} que pasa por $\Sigma(z_1)$, y ningún otro camino entra en este nodo.
- **D', E', F', G', H'.** Análogos a D, E, F, G, H; pero razonando sobre z_1, z_2, z_3 en lugar de sobre y_2, z_1, z_2 .
- **D'', E'', F'', G'', H''.** Análogos a D, E, F, G, H; pero razonando sobre z_1, z_2, z_3 en lugar de sobre y_2, z_1, z_2 .
- **I.** El camino que pasa por $s_x(z_3, p)$ no tiene más opción que continuar por $e(x, p)$.
- **J.** Ningún camino sale de $s_x(p, z_3)$, por lo que ningún camino entra en $s_x(p, z_3)$.

Un camino de $L(x)$ que entra en $\Sigma(z_i)$ ($i = 1, 2, 3$) no puede salir de $\Sigma(z_i)$. Obtenemos así cuatro (segmentos de) caminos de \mathbb{N} , que no se intersecan por construcción:



Recordamos que, para cada hijo y de x , todo camino que entra en $\Sigma(y)$ lo hace pasando por el nodo $e(x, y)$, y todo camino que sale de $\Sigma(y)$ lo hace pasando por el nodo $e(y, x)$. Deducimos que, en este caso, los arcos saturados de $\Sigma(x)$ que no están en $\Sigma(y)$ para ningún hijo y de x son:

- Los arcos del camino que une $v(x)$ con $e(x, z_1)$.
- Los arcos del camino que une $e(z_1, x)$ con $e(x, z_2)$.
- Los arcos del camino que une $e(z_2, x)$ con $e(x, z_3)$.
- Los arcos del camino que une $e(z_3, x)$ con $e(x, p)$.

Para generalizar el razonamiento del ejemplo anterior a un vértice x cualquiera, utilizamos la siguiente notación:

- Dado un vértice x distinto de la raíz, denotamos por $\delta_0(x)$ al primer hijo descendente de x (si existe) o al padre de x (si x no tiene hijos descendentes).
- Dado un hijo z de un vértice x , denotamos por $\delta(z)$ al hijo de x posterior a z (si existe) o al padre de x (si z es el mayor hijo de x). Finalmente, si x es la raíz y $z = b$, denotamos $\delta(z) = a$.

En estos términos, nuestro ejemplo satisface

$$\delta_0(x) = z_1, \quad \delta(z_1) = z_2, \quad \delta(z_2) = z_3, \quad \delta(z_3) = p.$$

En general, afirmamos lo siguiente:

Aserción 3.1. *Sea x un vértice de T distinto de la raíz. Los arcos saturados de $\Sigma(x)$ que no están en $\Sigma(y)$ para ningún hijo y de x son:*

- (a) *los arcos del camino que une $v(x)$ con $e(x, \delta_0(x))$.*
- (b) *por cada hijo descendente z de x , los arcos del camino que une $e(z, x)$ con $e(x, \delta(z))$.*

Si x es la raíz, los arcos saturados de $T = \Sigma(r)$ que no están en $\Sigma(a)$ ni en $\Sigma(b)$ son únicamente los dados por (b).

Demostración (boceto). La prueba consiste en replicar los argumentos expuestos en el ejemplo anterior, razonando por inducción finita sobre cierta partición de los arcos de $L(x)$. Los pasos A, B y C se corresponden con el caso base, los pasos D, E, F, G y H (y sus análogos primados) con el paso de inducción, y los pasos I y J con el caso terminal. En pos de una apropiada longitud del documento, no damos la prueba completa de esta aserción. En su lugar, remitimos al lector a [BEGLR]. \square

Por el Escolio 3.3, la aserción anterior garantiza la unicidad de \mathbf{N} , pero no su existencia. Es decir, asegura que

$$|\mathcal{N}_0(T, \Omega)| \leq 1.$$

Pasamos a dar la demostración del Teorema 3.3, donde sólo falta por comprobar la existencia de \mathbf{N} .

Demostración del Teorema 3.3. Consideremos el digrafo H inducido por \mathbf{N} . Esto es, el subgrafo de $G_0(T, \Omega)$ formado por los arcos y nodos saturados (por el presunto n -camino \mathbf{N}). Basta notar que:

- cada fuente de $G_0(T, \Omega)$ está saturada, tiene un único vecino saliente y no tiene vecinos entrantes en H .
- cada sumidero de $G_0(T, \Omega)$ están saturado, tiene un único vecino entrante y no tiene vecinos salientes en H .
- el resto de nodos saturados tienen exactamente un vecino entrante y un vecino saliente en H .

A partir de la Aserción 3.1, la verificación de los puntos anteriores es una mera comprobación. Estas condiciones son suficientes para garantizar que H tiene n componentes conexas, y que cada una de ellas es isomorfa a un digrafo camino entre una fuente y un sumidero del digrafo inicial. Es decir, H es el subgrafo inducido por un n -camino de $\mathcal{N}_0(T, \Omega)$, como queríamos probar. \square

Corolario 3.4. *Existe un único n -camino sin intersecciones entre las fuentes y los sumideros de $G(T, \Omega)$.*

Demostración. Como ya se ha visto, tanto (T_D, Ω_D) como (T_D^E, Ω_D^*) verifican la condición (3.3). Por el Teorema 3.3, existe:

- un único n -camino \mathbf{N} en $\mathcal{N}_0(T, \Omega)$.
- un único n -camino \mathbf{N}' en $\mathcal{N}_0(T^E, \Omega^*)$.

Por el Escolio 3.2, $\psi(\mathbf{N}')$ es el único elemento de $\mathcal{N}_F(T, \Omega)$. Finalmente, por el Lema 3.5 concluimos que $\mathbf{N}\psi(\mathbf{N}')$ es el único elemento de $\mathcal{N}(T, \Omega)$. \square

Habida cuenta de la importancia que tiene el resultado anterior en nuestra prueba, categorizarlo como corolario puede parecer demeritarlo. Esto es sólo temporal: lo enunciaremos como teorema cuando estemos en condiciones de identificar la permutación subyacente del n -camino que determina, al final de la siguiente sección.

Denotamos por $\mathbf{N}_0(T, \Omega) = \{N_1^0, \dots, N_F^0\}$ al único elemento de $\mathcal{N}_0(T, \Omega)$, siendo N_i^0 el camino que empieza en $v(i)$ para cada i . Con la información de la que disponemos, podemos dar una descripción recursiva de este n -camino. Lo hacemos concatenando iterativamente los segmentos de caminos proporcionados por la Aserción 3.1.

Proposición 3.6. *Sea $i \in [n]$, y sea $x_1x_2 \dots x_{l+1}$ el camino subyacente de N_i^0 . Los vértices x_k obedecen la siguiente relación recursiva:*

$$x_1 = i; \quad x_2 = \delta_0(i); \quad x_k = \delta(x_{k-2}), \quad 3 \leq k \leq l + 1.$$

Demostración. Tras abandonar $v(i)$, el camino N_i^0 no tiene más opción que avanzar hasta $e(i, \delta_0(i))$ mediante los arcos descritos en la Aserción 3.1 (a) para $x = i$. Esto prueba tanto que $x_1 = i$ como que $x_2 = \delta_0(i)$.

Sea ahora $3 \leq k \leq l + 1$. Por el Lema 3.8, x_{k-2} es hijo descendente de x_{k-1} (pues $e(x_{k-2}, x_{k-1})$ está saturado y no es un sumidero). Tras abandonar $e(x_{k-2}, x_{k-1})$, el camino N_i^0 no tiene más opción que avanzar hasta $e(x_{k-1}, \delta(x_{k-2}))$ por los arcos descritos en la Aserción 3.1 (b) para $x = x_{k-1}$ y $z = x_{k-2}$. Se sigue así $x_k = \delta(x_{k-2})$. \square

3.4 DESCRIBIENDO LA PERMUTACIÓN SUBYACENTE

Para finalizar la prueba de la Fórmula de Graham y Pollak, necesitamos identificar la permutación subyacente del único n -camino sin intersecciones entre fuentes y sumideros de G . Esta tarea se ve entorpecida por la naturaleza recursiva del n -camino, para el que carecemos de una expresión cerrada. Aunque no podremos deshacernos de la recursión (inherente como es al objeto de estudio), sí encontraremos una descripción más satisfactoria. Para ello, habrá de entrar en escena un agente inesperado, usualmente relegado a labores menos teóricas: la *búsqueda en profundidad* de un árbol plano.

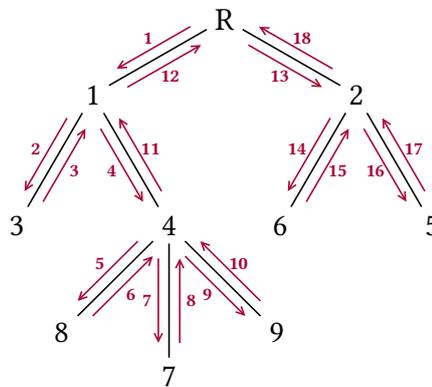
Definición 3.6. Sea T un árbol plano con raíz r . Para cada vertice x de T con hijos

$y_1 <_x \dots <_x y_p$ consideramos la sucesión de vértices $R(x)$ definida recursivamente por

$$R(x) = \begin{cases} x & \text{si } p = 0; \\ xR(y_1)xR(y_2)x \cdots xR(y_p)x & \text{si } p > 0. \end{cases}$$

Con esta notación, decimos que $w_T := R(r)$ es el *paseo en profundidad* de T . Denotamos por $w_T(k)$ al k -ésimo vértice del paseo w_T . Cuando el árbol T sea evidente por el contexto, se omitirá el subíndice.

Ejemplo 3.2. Retomemos el árbol T_D de los ejemplos anteriores. En la siguiente figura cada arista orientada $(w(k), w(k + 1))$ aparece señalada con la etiqueta k .



En este caso, el paseo en profundidad es

$$w \equiv r \ 1 \ 3 \ 1 \ 4 \ 8 \ 4 \ 7 \ 4 \ 9 \ 4 \ 1 \ r \ 2 \ 6 \ 2 \ 5 \ 2 \ r.$$

Tras comparar el paseo anterior con la Figura 3.3, la relación entre w y el n -camino que ahí se describe resulta aparente: si denotamos por $(\Lambda_i^0, \Lambda_i^F)$ a la descomposición de Λ_i para cierto i , el camino subyacente tanto de Λ_i^0 como de Λ_i^F es subcamino de w . Por ejemplo, los caminos subyacentes de Λ_1^0 y Λ_1^F son, respectivamente,

$$1 \ r \ 2, \quad r \ 2 \ 6;$$

y ambos son subcaminos de w . Existe una única excepción, y es Λ_5^0 . Nótese que también este camino es subcamino de w si extendemos w en un vértice y definimos $w(2n + 2) = w(20) = 1$.

En lo que queda de sección volvemos a considerar fijado un árbol plano T compatible con una orientación Ω verificando la condición (3.3). Dado un vértice x de T con hijos $y_1 <_x \dots <_x y_p$, el paseo $R(x)$ tiene la forma

$$xy_1 \cdots y_1xy_2 \cdots y_2xy_3 \cdots y_px. \quad (3.4)$$

Cada vértice x que no es una hoja aparece varias veces en w (una más que su número de hijos). Es decir, existen múltiples índices k para los que $w(k) = x$, a los que llamamos *visitas* de x .

Los pares de términos consecutivos $(w(k), w(k+1))$ son precisamente las aristas orientadas de T , así que, en efecto, w es un paseo. Cada arista $\{x, y\}$ de T aparece en w dos veces: una como (x, y) y otra como (y, x) . En particular, el paseo w tiene longitud $2n$. Para simplificar los enunciados de los resultados que siguen, denotamos $w(2n+2) = a$.

Lema 3.9. *Si $w(k)$ es hijo de $w(k+1)$ para cierto $k \in [2n]$, entonces $w(k+2) = \delta(w(k))$.*

Demostración. Consideremos un vértice x distinto de la raíz hijos $y_1 <_x \dots <_x y_q$ y padre p . Nótese que todas las aristas orientadas de w_T que involucran a x aparecen en el subcamino $pR(x)p$. Podemos utilizar (3.4) y la definición de δ para reescribir $pR(x)p$ como

$$pxy_1 \cdots y_1x\delta(y_1)x \cdots \delta(y_1)x\delta(y_2)x \cdots \delta(y_{q-1})x\delta(y_q).$$

Tomando $x = w(k+1)$ el resultado es inmediato. Si $x = w(k+1)$ es la raíz, $w(k)$ debe ser uno de entre a y b . Si $w(k) = a$, se comprueba como en el caso anterior que $\delta(w(k)) = b = w(k+2)$. Si por el contrario $w(k) = b$, entonces $k = 2n$ y por tanto $\delta(w(2n)) = \delta(b) = a = w(2n+2)$. \square

Es natural preguntarse si, al igual que ocurre con δ , la aplicación δ_0 guarda algún tipo de relación con el paseo en profundidad. Antes de abordar esta cuestión, debemos hacer algunos preparativos. La compatibilidad de T con Ω tiene una consecuencia inmediata sobre el paseo en profundidad de T : dado un vértice x , las visitas de los hijos ascendentes de x preceden a las visitas de sus hijos descendentes. Con esto presente, damos la siguiente definición.

Definición 3.7. Dado un vértice x de T distinto de la raíz, definimos el *índice intermedio* de x como el menor $1 \leq k \leq 2n$ con $w(k) = x$ para el que si $w(j)$ es un hijo ascendente de x , entonces $j < k$. Es decir, la primera visita de x tras visitar todos sus hijos ascendentes. Denotamos por $\theta_1 < \dots < \theta_n$ a los órdenes de entrada de los vértices de T , exceptuando la raíz. Remarcamos que θ_i no es el índice intermedio del vértice i , sino el i -ésimo índice

intermedio, tras ordenarlos crecientemente. Finalmente, definimos el *orden intermedio* del par (T, Ω) como la palabra $w(\theta_1)w(\theta_2) \cdots w(\theta_n)$.

Escolio 3.4. Escogiendo apropiadamente la orientación, se pueden recuperar los órdenes clásicos sobre los vértices de un árbol plano como casos particulares del orden intermedio (con la diferencia de que nosotros, por la naturaleza del problema que buscamos resolver, no estamos tomando en consideración la raíz).

- (a) Si Ω es la *arborescencia* de T (esto es, la orientación para la que todas las aristas son descendentes), el índice intermedio de un vértice es el índice de su primera aparición en el paseo en profundidad. El orden intermedio asociado se conoce como el *pre-orden* de T .
- (b) Si Ω es la *antiarborescencia* de T (la orientación inversa de la arborescencia de T), el índice intermedio de un vértice es el índice de su última aparición en el paseo en profundidad. En este caso, el orden intermedio asociado recibe el nombre de *post-orden* de T .
- (c) Si T es un árbol *binario* (donde cada vértice tiene a lo sumo dos hijos) y Ω es la orientación para la que cada primer hijo es ascendente y cada segundo hijo es descendente, el orden intermedio asociado a Ω es el conocido como *in-orden* de T .

En cada uno de los casos anteriores se comprueba sin dificultad que el árbol T es compatible con la orientación Ω considerada.

Utilizando la compatibilidad de T con Ω y la definición de δ_0 , la prueba del siguiente lema es inmediata.

Lema 3.10. Si θ es el índice intermedio de un vértice x , entonces $w(\theta + 1) = \delta_0(\theta)$.

Retomando la notación de la sección anterior, denotamos por $\mathbf{N}^0(T, \Omega) = \{N_1^0, \dots, N_F^0\}$ al único elemento de $\mathcal{N}_0(T, \Omega)$, de modo que el camino N_i^0 empieza en $v(i)$ para cada i . La descripción recursiva del n -camino $\mathbf{N}^0(T, \Omega)$ establecida en la Proposición 3.6 se puede simplificar gracias a la relación que el paseo en profundidad guarda con las aplicaciones δ y δ_0 . Como establece el siguiente resultado, los caminos subyacentes de $\mathbf{N}_0(T, \Omega)$ resultan ser subcaminos de w .

Proposición 3.7. Para cada i , el camino subyacente de $N_{w(\theta_i)}$ está dado por

$$w(\theta_i)w(\theta_i + 1) \cdots w(\kappa)w(\kappa + 1),$$

donde κ es el menor índice $\theta_i \leq \kappa \leq 2n + 1$ para el que $(w(\kappa), w(\kappa + 1))$ está en Ω .

Demostración. De la condición (3.3) se sigue que exactamente una de las aristas

$$(b, r) = (w(2n), w(2n + 1)), \quad (r, a) = (w(2n + 1), w(2n + 2))$$

está en Ω . Como los índices intermedios θ_i nunca exceden a $2n$, siempre existe el índice κ descrito en el enunciado. Sea $i \in [n]$, y sea x_1, \dots, x_{l+1} el camino subyacente de $N_{w(\theta_i)}$. Utilizamos las relaciones recursivas establecidas en la Proposición 3.6 para probar por inducción que

$$x_k = w(\theta_i + k - 1) \tag{3.5}$$

para cada $1 \leq k \leq l + 1$. Como el camino $N_{w(\theta_i)}$ tiene origen en $v(w(\theta_i))$, el primer vértice del camino subyacente debe ser $x_1 = w(\theta_i)$. Por otro lado, por la Proposición 3.6 sabemos que $x_2 = \delta_0(w(\theta_i))$. Aplicando el Lema 3.10 se sigue que $x_2 = w(\theta_i + 1)$. Sea ahora $3 \leq k \leq l + 1$ y supongamos probado (3.5) para todo $k_0 < k$. Por el Lema 3.8, el vértice x_{k-2} es hijo descendente de x_{k-1} (ya que $e(x_{k-2}, x_{k-1})$ está saturado y no es un sumidero). Además, por hipótesis de inducción,

$$x_{k-2} = w(\theta_i + k - 3), \quad x_{k-1} = w(\theta_i + k - 2).$$

Utilizando el Lema 3.9 deducimos que $x_k = w(\theta_i + k - 1)$ y por tanto (3.5) es también cierto para k . Para ver que $\kappa := \theta_i + l - 1$ satisface la condición del enunciado, basta notar que $e(x_l, x_{l+1})$ es el primer y último sumidero del camino, por lo que $(w(m), w(m + 1))$ no está en Ω para ningún $\theta_i \leq m < \theta_i + l - 1$. \square

Denotamos por $\mathbf{N}_F(T, \Omega) = \{N_1^F, \dots, N_n^F\}$ al único elemento de $\mathcal{N}_F(T, \Omega)$, de forma que N_k^F es el camino que termina en $v'(k)$ para cada k . La proposición anterior proporciona la expresión de $\mathbf{N}_0(T, \Omega)$ y $\mathbf{N}_F(T, \Omega) = \psi(\mathbf{N}_0(T^E, \Omega^*))$ en términos de los paseos w_T y w_{T^E} , respectivamente. Dedicamos un momento a estudiar la relación entre ambos paseos, que resulta ser particularmente simple: aplicar la simetría especular a un árbol plano invierte el sentido en que se recorre su paseo en profundidad.

Lema 3.11. *Sea T un árbol plano. Se verifica $w_T = \overline{w_{T^E}}$.*

Demostración. Sean N y N^E las funciones que aparecen en la definición recursiva de w_T y w_{T^E} , respectivamente. Si x es una hoja, entonces es evidente que $R(x) = \overline{R^E(x)} = x$. Sea ahora un vértice x que no es una hoja y supongamos probado que $R(y) = \overline{R^E(y)}$ para todo hijo y de x . Sean $y_1 <_x \dots <_x y_p$ los hijos de x (respecto del orden local de T). Como los órdenes locales de T y T^E son inversos sobre los hijos se sigue que

$$R^E(x) = xR^E(y_r)x \cdots xR^E(y_1)x.$$

Invirtiendo ambos lados de la igualdad anterior y aplicando la hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned}
 \overline{R^E(x)} &= \overline{xR^E(y_r)x \cdots xR^E(y_1)x} \\
 &= \overline{xR^E(y_1)x \cdots xR^E(y_r)x} \\
 &= xR(y_1)x \cdots xR(y_r)x \\
 &= R(x)
 \end{aligned}$$

Tomando $x = r$ se sigue el resultado. □

Como w es un paseo de longitud $2n$, de la proposición anterior se sigue

$$w(k) = w^E(2n - k + 2)$$

para cualquier índice $k \in [2n + 1]$. Para que la notación $w(2n + 2) = w(2) = a$ sea consistente con esta propiedad, denotaremos $w(0) = b$. Como la simetría especular intercambia los papeles de a y b (pues b pasa de ser el mayor hijo a ser el menor hijo de la raíz), esto garantiza que también se tiene $w(k) = w^E(2n - k + 2)$ para $k \in \{0, 2n + 2\}$. Denotamos por $\theta_1^E < \dots < \theta_n^E$ a los índices intermedios asociados al par (T^E, Ω^*) . Se puede comprobar sin dificultad que se tiene $\theta_i^E = 2n - \theta_{n-i+1} + 2$ para cualquier $i \in [n]$.

Utilizando el antiisomorfismo ψ y la relación de w^E con w que acabamos de exponer, podemos manipular la expresión de $\mathbf{N}^0(T^E, \Omega^*)$ para obtener un resultado similar a la Proposición 3.7 para el n -camino $\mathbf{N}^F(T, \Omega)$.

Proposición 3.8. *Para cada $i \in [n]$, el camino subyacente de $N_{w(\theta_i)}^F$ está dado por*

$$w(\kappa)w(\kappa + 1) \cdots w(\theta_i - 1)w(\theta_i),$$

donde κ es el mayor índice $0 \leq \kappa \leq \theta_i - 1$ para el que $(w(k), w(k + 1))$ está en Ω .

Demostración. Sea $i \in [n]$, y sea κ como en el enunciado. Su existencia se prueba de forma análoga a como se ha hecho en la Proposición 3.7. Sabemos que

$$\mathbf{N}_F(T, \Omega) = \psi(\mathbf{N}_0(T^E, \Omega^*)), \quad w(\theta_i) = w^E(\theta_{n-i+1}^E).$$

Teniendo en cuenta que ψ invierte los caminos subyacentes y utilizando la Proposición 3.7, deducimos que el camino subyacente de $N_{w(\theta_i)}^F = N_{w^E(\theta_{n-i+1}^E)}^F$ es de la forma

$$w^E(\kappa' + 1)w^E(\kappa') \cdots w^E(\theta_{n-i+1}^E + 1)w^E(\theta_{n-i+1}^E), \quad (3.6)$$

donde κ' es el menor índice $\kappa \geq \theta_{n-i+1}^E$ tal que $(w^E(k), w^E(k+1))$ está en Ω^* . Utilizando que $w^E(k) = w(2n - k + 2)$ para cualquier índice k , podemos reescribir el camino (3.6) como

$$w(2n - \kappa' + 2)w(2n - \kappa' + 1) \cdots w(2n - \theta_i^E + 3)w(2n - \theta_i^E + 2).$$

Como $2n - \theta_i^E + 2 = \theta_i$, para terminar la prueba es suficiente comprobar que $2n - \kappa' + 1 = \kappa$. Se satisface la siguiente cadena de igualdades, que explicamos más abajo.

$$\begin{aligned} 2n - \kappa' + 1 &= 2n - \min\{k \mid k \geq \theta_{n-i+1}^E, (w^E(k), w^E(k+1)) \in \Omega^*\} + 1 \\ &= \max\{2n - k + 1 \mid k \geq \theta_{n-i+1}^E, (w^E(k), w^E(k+1)) \in \Omega^*\} & (1) \\ &= \max\{2n - k + 1 \mid k \geq \theta_{n-i+1}^E, (w(2n - k + 2), w(2n - k + 1)) \in \Omega^*\} & (2) \\ &= \max\{k' \mid k' \leq 2n - \theta_{n-i+1}^E + 1, (w(k' + 1), w(k')) \in \Omega^*\} & (3) \\ &= \max\{k' \mid k' \leq \theta_i - 1, (w(k' + 1), w(k')) \in \Omega^*\} & (4) \\ &= \max\{k' \mid k' \leq \theta_i - 1, (w(k'), w(k' + 1)) \in \Omega\} & (5) \\ &= \kappa. \end{aligned}$$

- (1) La función $g(k) = 2n - k + 1$ es estrictamente decreciente.
- (2) Para cualquier índice $0 \leq k \leq 2n + 2$ se tiene $w^E(k) = w(2n - k + 2)$.
- (3) Hacemos el cambio de variable $k' = 2n - k + 1$. Es inmediato que $\theta_{n-i+1}^E \leq k \leq 2n + 1$ implica $0 \leq k' \leq 2n - \theta_{n-i+1}^E + 1$.
- (4) Se tiene $\theta_i = 2n - \theta_{n-i+1}^E + 2$ para cualquier i en $[n]$.
- (5) Si (x, y) está en Ω^* , entonces (y, x) está en Ω por definición.

Esto termina la prueba. □

Para poder dar paso al resultado principal, sólo resta probar un lema. En la siguiente prueba utilizamos que los caminos

$$w(\theta_i)w(\theta_i + 1) \cdots w(\theta_{i+1}), \quad i \in [n - 1];$$

junto con el camino

$$w(\theta_n)w(\theta_n + 1) \cdots w(2n)w(1)w(2) \cdots w(\theta_1)$$

forman una *partición* del paseo w . Esto es, cada arista dirigida de w aparece en exactamente uno de los n caminos anteriores.

Lema 3.12. *Sea $i \in [n - 1]$. Existe un único índice κ que verifica*

$$\theta_i \leq \kappa < \theta_{i+1}, \quad (w(\kappa), w(\kappa + 1)) \in \Omega.$$

Demostración. Comencemos suponiendo que no existe ningún k en las condiciones del enunciado para cierto $i \in [n - 1]$. Entonces se tiene

$$\text{mín}\{k | k \geq \theta_i, (w(k), w(k + 1)) \in \Omega\} = \text{mín}\{k | k \geq \theta_{i+1}, (w(k), w(k + 1)) \in \Omega\}.$$

Pero por la Proposición 3.7, esto implica que los caminos de $\mathbf{N}_0(T, \Omega)$ con origen en $v(w(\theta_i))$ y $v(w(\theta_{i+1}))$ tienen el mismo extremo final (y por ende se intersecan), lo cual es absurdo. Supongamos ahora que existen dos índices distintos κ_1 y κ_2 que satisfacen las condiciones del enunciado para cierto $i_0 \in [n - 1]$. Se verifica:

- Ω tiene cardinal n .
- Dos aristas dirigidas de Ω están en el subcamino de w entre $w(\theta_{i_0})$ y $w(\theta_{i_0+1})$.
- Una arista dirigida de Ω está en el subcamino de w entre $w(\theta_n)$ y $w(\theta_1)$. En efecto, tanto (b, r) como (r, a) son aristas dirigidas de este subcamino, y siempre una de ellas está en Ω por la condición (3.3).

Por un simple argumento de conteo, debe existir un $i \in [n - 1]$ para el que no existe ningún $\theta_i \leq k < \theta_{i-1}$ tal que $(w(k), w(k + 1)) \in \Omega$. Pero ya hemos probado que esto lleva a un absurdo, de donde se sigue el resultado. \square

Finalmente, estamos en condiciones de demostrar el resultado hacia el que toda nuestra disertación ha estado encaminada.

Teorema 3.4. *Sea (T, Ω) un par en las condiciones (3.3). Existe un único n -camino en $\mathcal{N}(T, \Omega)$, y su permutación subyacente es el ciclo $(w(\theta_1) \cdots w(\theta_n))$. Por tanto,*

$$\sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{N}(T, \Omega)} \text{sign}(\sigma_{\mathbf{P}}) = (-1)^{n-1}.$$

Demostración. La existencia y unicidad ya se han probado (Corolario 3.4). Sea σ la permutación subyacente de $\mathbf{N}(T, \Omega) = \mathbf{N}^0(T, \Omega)\mathbf{N}^F(T, \Omega)$. Sabemos que σ es la única permutación tal que el nodo final de N_i^0 y el e-nodo inicial de $N_{\sigma(i)}^F$ están conectados por un puente (es decir, son representantes de la misma arista orientada de Ω). Fijemos $i \in [n - 1]$ y veamos que $\sigma(w(\theta_i)) = w(\theta_{i+1})$. Por la Proposición 3.7, el e-nodo final de $N_{w(\theta_i)}^0$ es $e(w(\kappa), w(\kappa + 1))$, donde

$$\kappa = \text{mín}\{k | k \geq \theta_i, (w(k), w(k + 1)) \in \Omega\}.$$

Además, por la Proposición 3.8, el e-nodo inicial de $N_{w(\theta_{i+1})}^F$ es $e'(w(\kappa'), w(\kappa' + 1))$ donde

$$\kappa' = \text{máx}\{k | k \leq \theta_{i+1} - 1, (w(k), w(k + 1)) \in \Omega\}.$$

Por el Lema 3.12, sólo existe un índice k con $\theta_i \leq k \leq \theta_{i+1} - 1$ para el que $(w(k), w(k+1))$ está en Ω . Debe ser, por tanto, $\kappa = \kappa'$. Esto prueba que $\sigma(w(\theta_i)) = w(\theta_{i+1})$ para cada $i \in [n - 1]$. Por último, debe tenerse $\sigma(w(\theta_n)) = w(\theta_1)$, pues la imagen y preimagen por σ de todos los demás elementos de $[n]$ ya ha sido determinada (y σ es una biyección). Esto termina la prueba. \square

CONCLUSIONES

1. El objetivo de este trabajo es dar una demostración combinatoria de la fórmula de Graham-Pollak para el determinante de la matriz de distancias de un árbol T ,

$$\det(M(T)) = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$$

donde n es el orden de T .

2. Partimos del desarrollo del determinante de una matriz como una suma signada. Demostramos que sus sumandos cuentan con signo una colección de objetos relacionados con el árbol T , que llamamos pares T -compatibles.
3. Introducimos los diagramas de flechas sobre un árbol T de orden n , y asociamos a cada par T -compatible un diagrama. Particionamos los diagramas de flechas sobre T en tres familias disjuntas: desconexos, conexos no estándar y conexos estándar.
4. Existen $(n-1)2^{n-2}$ diagramas estándar sobre T : tantos como formas de escoger una arista de T y una orientación para cada una de las $n-2$ aristas restantes. Nuestro resultado principal es el siguiente: el conteo signado del conjunto $\mathcal{P}(D)$ de pares T -compatibles con diagrama asociado D verifica

$$\sum_{(\sigma, f) \in \mathcal{P}(D)} \text{sign}(\sigma) = \begin{cases} (-1)^{n-1}, & \text{si } D \text{ es estándar;} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Este resultado concluye la prueba combinatoria de la Fórmula Graham-Pollak y provee una clara interpretación combinatoria de la misma: el determinante de $M(T)$ cuenta con signo el número de diagramas estándar.

5. En este documento nos centramos en la prueba para los diagramas conexos (en los que hay una única arista doble) y más concretamente para los diagramas estándar (donde la arista doble aparece una vez con cada orientación). Este es el caso crucial de nuestra demostración; y, ciertamente, el más técnico y delicado.

6. En la Sección 3.1 asociamos a cada diagrama estándar D un digrafo acíclico $G(D)$ con n fuentes y n sumideros y estudiamos sus propiedades básicas. Construimos este digrafo con objeto de identificar los pares T -compatibles con diagrama D con cierta familia de n -caminos de $G(D)$.
7. En la Sección 3.2 demostramos que el conteo signado de n -caminos entre fuentes y sumideros de $G(D)$ coincide con el de pares T -compatibles con diagrama D . Gracias al Lema de Lindström-Gessel-Viennot, podemos limitar nuestro estudio a los n -caminos sin intersecciones de la familia anterior. En el proceso, una prueba de nuestro resultado principal para el caso conexo no estándar aparece de forma natural.
8. En la Sección 3.3 demostramos que sólo existe un n -camino sin intersecciones \mathbf{N} entre las fuentes y los sumideros de $G(D)$ y obtenemos una descripción recursiva del n -camino. Esta descripción resulta ser insuficiente para la identificación de su permutación subyacente.
9. Finalmente, en la Sección 3.4 obtenemos una expresión cerrada para \mathbf{N} a partir de su descripción recursiva. Esta expresión guarda una estrecha e inesperada relación con el clásico algoritmo de búsqueda en profundidad (en inglés, *Depth-First Search*) de un árbol enraizado plano. Utilizamos esta nueva descripción de \mathbf{N} para probar que su permutación subyacente es un ciclo completo sobre $\{1, \dots, n\}$. Se sigue así que el conteo signado de los n -caminos sin intersecciones de $G(D)$ es $(-1)^{n-1}$, y con ello la prueba del resultado principal.

BIBLIOGRAFÍA

- [BEGLR] E. Briand, L. Esquivias, Á. Gutiérrez, A. Lillo, and M. Rosas. A combinatorial proof of the Graham-Pollak formula and its generalizations. En preparación, 2023.
- [Cha01] R. Chapman. An involution on derangements. *Discrete Mathematics*, 231(1):121–122, 2001.
- [DY20] Z. Du and J. Yeh. Another simple proof of Graham and Pollak’s theorem. *Discrete Mathematics*, 343(10):111994, 2020.
- [Esq23] L. Esquivias. Generalizaciones de la fórmula de Graham-Pollak. Una prueba combinatoria. Trabajo fin de grado, 2023.
- [GL78] R. L. Graham and L. Lovasz. Distance matrix polynomials of trees. *Advances in Mathematics*, 29(1):60–88, 1978.
- [GP71] R. L. Graham and H. O. Pollak. On the addressing problem for loop switching. *Bell System Tech. J.*, 50:2495–2519, 1971. doi:10.1002/j.1538-7305.1971.tb02618.x.
- [GV85] I. Gessel and G. Viennot. Binomial determinants, paths, and hook length formulae. *Adv. in Math.*, 58(3):300–321, 1985. doi:10.1016/0001-8708(85)90121-5.
- [Lil23] A. Lillo. Some constructions regarding the Graham-Pollak theorem, 2023. Jupyter Notebook.
- [Lin73] B. Lindström. On the vector representations of induced matroids. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 5(1):85–90, 1973.
- [Sag13] B. E. Sagan. *The symmetric group: representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*, volume 203. Springer Science & Business Media, 2013.

- [Sag20] B. E. Sagan. *Combinatorics: The art of counting*, volume 210. American Mathematical Soc., 2020.
- [YY06] W. Yan and Y.-N. Yeh. A simple proof of Graham and Pollak's theorem. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 113(5):892–893, 2006.