Facultad de Matemáticas

Departamento de Análisis Matemático

Propiedad del punto fijo para aplicaciones no expansivas en espacios de Banach y superreflexividad

Trabajo Fin de Grado realizado por Francisco Javier Larcada Sánchez

Dirigido por Rafael Espínola García

12 de junio de 2023

Agradecimientos

Esta memoria ha sido posible gracias a una gran cantidad de personas, a las que a través de este escueto texto les expreso mi más sincero agradecimiento.

A mi tutor, Rafael, que ha sufrido mis innumerables visitas al despacho y ha despejado todas las dudas que me han surgido. Su magnífica dirección y dedicación han hecho posible la elaboración de este trabajo.

A mis amigos, que tanto en clases como fuera de ellas, han hecho de la época universitaria una de las mejores de mi vida. Pasar el tiempo con ellos ha sido siempre un oasis en mitad del estrés de los estudios.

A mis abuelos, Manolo y Gloria. Visitarlos y disfrutar su compañía supone siempre un momento de paz.

A mi hermana, Marta, que soporta mis tonterías día a día. No hay nadie que me aguante más que ella.

Y en especial a mis padres, Javier y Mónica, que siempre me han apoyado y han cuidado de mí, aunque a veces no supiera verlo. Desde pequeño me han inculcado esta pasión por el conocimiento y, en particular, por las matemáticas, por lo cual les estaré eternamente agradecido.

A todos vosotros, gracias.

Resumen

En este trabajo se hace un breve recorrido por la Teoría Métrica del Punto Fijo para aplicaciones no expansivas, con el objetivo de dar algunos espacios de Banach que verifiquen la Propiedad del Punto Fijo. En particular, se desarrollan los conceptos necesarios para enunciar y probar los teoremas de punto fijo de Kirk y de Wiśnicki, entre los que se encuentran las topologías débiles, la convexidad uniforme, la estructura normal, los ultrafiltros, la ultrapotencia y la superreflexividad.

Abstract

In this work, a brief overview of the Metric Fixed Point Theory for non-expansive mappings is presented, with the aim of providing some Banach spaces that satisfy the Fixed Point Property. In particular, the necessary concepts are developed to state and prove Kirk and Wiśnicki fixed point theorems, which include weak topologies, uniform convexity, normal structure, ultrafilters, ultrapower, and superreflexivity.

Índice general

Introducción

La Teoría del Punto Fijo tiene como objetivo dar condiciones sobre un conjunto X y una aplicación $f : X \to X$ de forma que se pueda asegurar la existencia de un punto fijo para f. Es decir, buscar qué deben verificar estos dos objetos para que exista $x \in X$ tal que $f(x) = x$. Podríamos decir que la teoría surge en 1910 cuando L. E. J. Brouwer da una primera demostración del ahora conocido como Teorema del Punto Fijo de Brouwer, aunque H. Poincaré dio un resultado equivalente ya en 1886. Este resultado se mueve en la Teoría Topológica del Punto Fijo, pues las condiciones que se exigen para la existencia de punto fijo son puramente topológicas: el dominio ha de ser un convexo compacto euclídeo y la aplicación continua. Este resultado fue posteriormente generalizado en 1930 por J. Schauder para espacios de Banach y en 1934 por A. N. Tychonoff a espacios vectoriales topológicos localmente convexos de dimensión arbitraria, dándose así a conocer como Teorema del Punto Fijo de Schauder-Tychonoff.

En cuanto a la Teoría Métrica del Punto Fijo, uno de los resultados más notable es el Principio de Contracción de Banach, que aparece por primera vez en la tesis defendida por S. Banach en 1922 y es considerado el comienzo de la teoría. En él se hace uso de la completitud del espacio métrico ambiente para asegurar la existencia de punto fijo para contracciones, es decir, para aplicaciones $T : X \to X$ tales que $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \forall x, y \in X$, con $k \in (0, 1)$. Este teorema ha demostrado ser extremadamente útil para pruebas de existencia en análisis matemático, teoría de ecuaciones diferenciales e incluso en disciplinas ajenas a la matemática teórica como la biología. Es más, el Principio de Contracción de Banach resulta ser de gran ayuda en la propia Teoría del Punto Fijo. Por ejemplo, en nuestro caso nos permitirá probar la existencia de sucesiones de casi puntos fijos para aplicaciones no expansivas, concepto fundamental para el desarollo del último capítulo de esta memoria.

Centraremos nuestra atención en la Teoría Métrica del Punto Fijo para aplicaciones no expansivas, aplicaciones $T : X \to X$ verificando $d(Tx, Ty) \leq d(x, y), \forall x, y \in X$. A pesar de que la diferencia entre las aplicaciones no expansivas y las contracciones (para las que tenemos el Principio de Contracción de Banach) parece ser pequeña, las técnicas usadas para el estudio de sus puntos fijos son sustancialmente diferentes, como veremos en el Capítulo 5.

La Teoría de Punto Fijo para aplicaciones no expansivas tiene su origen en 1965 cuando son publicados, independientemente, los teoremas de existencia de D. Göhde, F. Browder y W. A. Kirk. El primero exigía que el espacio ambiente fuera de Hilbert, el segundo que fuera uniformemente convexo y, el tercero, que tuviera estructura normal. Posteriormente se descubrió que los dos primeros son casos particulares del resultado de Kirk. Más tarde, llegó la introducción de técnicas de análisis no estándar a la teoría, como la de ultrapotencia de un espacio de Banach, a manos de B. Maurey, lo cual remarcó la notable diferencia entre esta teoría y la de contracciones.

Nuestro objetivo es hacer un breve recorrido por la Teoría Métrica del Punto Fijo para aplicaciones no expansivas en espacios de Banach y conocer el papel que desempeñan la ultrapotencia y la superreflexividad en esta teoría. Para ello, este trabajo se divide en cinco capítulos:

- En el Capítulo 1 se da un breve recordatorio sobre algunos resultados fundamentales del Análisis Funcional y se presentan las topologías débiles, de las que se da una lista de propiedades y se estudia su relación con la reflexividad.

- El Capítulo 2 trata la convexidad en espacios de Banach e introduce los conceptos de espacios estricta y uniformemente convexos, de los cuales se da un listado de propiedades. También se abordan el módulo y la característica de convexidad, dos herramientas de suma importancia para el estudio de los espacios mencionados.

- En el Capítulo 3 se desarrollan las nociones geométricas necesarias para poder dar el resultado de existencia de punto fijo de Kirk. Entre ellas, se encuentra la estructura normal de un espacio de Banach, propiedad que explotó Kirk para llegar a su conclusión. También aparecen por primera vez la sucesiones de casi puntos fijos y se estudia la estructura del conjunto de puntos fijos de una aplicación no expansiva.

- El Capítulo 4 tiene una primera parte de índole técnica, en el que se presentan y estudian los ultrafiltros, así como la noción de convergencia que inducen en un espacio topológico. Posteriormente, se procede a llevar a cabo la construcción del ultraproducto de un espacio de Banach. Por último, se trata la superreflexividad. Se dan ejemplos y propiedades de espacios superreflexivos y su relación con la ultrapotencia.

- La ultrapotencia y la superreflexividad adquieren una gran importancia en el Capítulo 5, pues permiten encontrar algunos espacios que poseen la Propiedad del Punto Fijo, gracias al teorema de existencia de punto fijo publicado por A. Wiśnicki. En este capítulo se hará uso de muchos de los conceptos desarrollados a lo largo del trabajo.

Capítulo 1

Topologías débiles

Para la búsqueda de puntos fijos de aplicaciones no expansivas surgen de forma natural argumentos de compacidad. Sin embargo, los conjuntos compactos que nos ofrece la topología generada por la norma de un espacio resultan ser demasiado restrictivos. Necesitamos entonces debilitar estos conjuntos. Es por ello que este primer capítulo se dedica a introducir las topologías débiles. Estas son topologías menos finas que la inducida por la norma que nos permiten tener más compactos en el espacio ambiente, sin alterar la continuidad de los elementos del espacio dual. Por ejemplo, veremos que en un espacio reflexivo los débilmente compactos convexos son exactamente los convexos, cerrados y acotados.

1.1. Repaso de Análisis Funcional

Antes de tratar las topologías débiles, con objeto de hacer esta memoria lo más autocontenida posible, vamos a citar algunos de los resultados más destacados del Análisis Funcional que serán de utilidad a lo largo del texto. Estos pueden ser encontrados en [2] y [17], junto con su demostración.

Lema 1.1 (de Zorn). *Sea $\mathcal{M}$ un conjunto parcialmente ordenado, mediante la relación de orden $\leq$. Si cada cadena $\mathcal{C}$ (subconjunto totalmente ordenado) de $\mathcal{M}$ tiene una cota superior en $\mathcal{M}$ entonces existe un elemento maximal en $\mathcal{M}$.*

Nota 1.2. *Se tiene un resultado análogo para elementos minimales. Es decir, si toda cadena de un conjunto parcialmente ordenado tiene una cota inferior en el conjunto entonces existe un elemento minimal.*

Teorema 1.3 (de Tychonoff). *Sea $\{X_i\}_{i\in X}$ una familia de espacios topológicos. Entonces, $\prod_{i\in I} X_i$ es compacto si y solo si cada X_i lo es, $\forall i \in I$.*

Nota 1.4. *Tanto el Lema de Zorn como el Teorema de Tychonoff son equivalentes al Axioma de Elección.*

Teorema 1.5 (de Hahn-Banach). *Sean X un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y M un subespacio suyo. Sean $p : X \to \mathbb{R}$ un funcional sublineal en X y $f : M \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal tal que $f(x) \leq p(x), \forall x \in M$. Entonces existe una aplicación lineal $g : E \to \mathbb{R}$ tal que $g|_M = f$ y $g(x) \leq p(x), \forall x \in X$.*

Corolario 1.6. *Sean X un espacio normado, M un subespacio de X y $f : M \to X$ una aplicación lineal y continua. Entonces existe $g \in X^*$ tal que $g|_M = f$ y $\|g\| = \|f\|$.*

Teorema 1.7. *Sean X un espacio normado y $x_0 \in X \setminus \{0\}$. Entonces, existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Corolario 1.8. *Para todo $x \in X$ se tiene que*

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)| = \max_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)|$$

Demostración. Como para todo $x \in X$ se tiene que

$$|f(x)| \leq \|f\| \, \|x\|$$

entonces

$$\sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \leq 1}} \|f\| \, \|x\| \leq \|x\| \, .$$

Ahora, por el Teorema 1.7 existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(x) = \|x\|$. Luego, el supremo anterior se alcanza y vale $\|x\|$.

□

Teorema 1.9 (de Separación de Hahn-Banach)**.** *Sea X un $\mathbb{R}$-espacio vectorial topológico localmente convexo. Sean $A, B \subset X$ no vacíos, disjuntos y convexos. Si A es cerrado y B es compacto entonces existen $f \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que*

$$f(x) < \alpha < f(y),$$

para todos $x \in A$ e $y \in B$.

Teorema 1.10 (de Banach-Steinhaus)**.** *Sean X e Y dos espacios normados y $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X, Y)$, donde $\mathcal{L}(X, Y)$ es el conjunto de aplicaciones lineales y continuas de X en Y. Consideramos los siguientes enunciados:*

1. *La familia $\mathcal{A}$ es puntualmente acotada. Esto es,*

   $$\sup_{f \in \mathcal{A}} \|f(x)\| < \infty,$$

   para todo $x \in X$.

2. *El conjunto $B = \{x \in X : \sup_{f \in \mathcal{A}} \|f(x)\| < \infty\}$ es de segunda categoría.*

3. *La familia $\mathcal{A}$ está uniformemente acotada. Es decir,*

   $$\sup_{f \in \mathcal{A}} \|f\| < \infty.$$

Entonces, 2 implica 3 y 3 implica 1. Además, si X es un espacio de Banach entonces los tres enunciados son equivalentes.

Teorema 1.11 (de la Aplicación Abierta)**.** *Sean X e Y dos espacios de Banach y $T : X \to Y$ lineal, continua y sobreyectiva. Entonces T es abierta.*

Corolario 1.12. *Sean X e Y dos espacios de Banach y $T : X \to Y$ lineal, continua y biyectiva. Entonces T es un isomorfismo.*

1.2. Topología débil

A lo largo de todo el trabajo X denotará un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$ con norma $\|\cdot\|$ y X^* su espacio dual.

Definición 1.13. *Se define la topología débil de X como aquella que tiene como subbase a la familia de conjuntos de la forma*

$$U(x_0; f; \varepsilon) = \{x \in X : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\},$$

con $x_0 \in X, f \in X^*$ y $\varepsilon > 0$.

Así definida la topología débil es la menos fina conteniendo a esta familia de conjuntos. Además, por ser subbase, un abierto cualquiera U de la topología será de la forma

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} \bigcap_{i=1}^{n} U(x_{i,\alpha}; f_{i,\alpha}; \varepsilon_{i,\alpha}),$$

donde A es un conjunto de cardinal arbitrario.

Proposición 1.14. *La topología débil hace continuo a todo $f \in X^*$.*

Demostración. Basta ver que

$$U(x_0; f; \varepsilon) = f^{-1}((f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)),$$

donde $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ es abierto en $\mathbb{R}$.

$\square$

Proposición 1.15. *La topología débil de un espacio de Banach es Hausdorff.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ distintos. Por el Teorema de Separación de Hahn-Banach, Teorema 1.9, existen $f \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) < \alpha < f(y)$. Consideramos entonces los conjuntos

$$U = \{z \in X : f(z) < \alpha\}$$
$$V = \{z \in X : f(z) > \alpha\}$$

Estos dos conjuntos son abiertos en la topología débil pues $U = f^{-1}((-\infty, \alpha))$ y $V = f^{-1}((\alpha, +\infty))$. Además, $x \in U, y \in V$ y $U \cap V = \varnothing$. Luego la topología débil es Hausdorff.

$\square$

Definición 1.16. *Sea $\{x_n\}_n \subset X$. Se dice que $\{x_n\}_n$ converge débilmente a $x \in X$, y se denota por $x_n \rightharpoonup x$, si $\{x_n\}_n$ converge a x en la topología débil de X.*

Observación 1.17. *De la Proposición 1.15 se deduce la unicidad del límite en la convergencia débil.*

Veamos cómo se relaciona la convergencia débil con la convergencia en norma.

Proposición 1.18. *Sea $\{x_n\}_n \subset X$. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *$x_n \rightharpoonup x$ si y solo si $f(x_n) \to f(x), \forall f \in X^*$.*
2. *Si $x_n \to x$ entonces $x_n \rightharpoonup x$.*

Demostración.

1. Supongamos que $x_n \rightharpoonup x$. Entonces, como la topología débil es por definición la menos fina que hace continua a todo $f \in X^*$, tenemos que $f(x_n) \to f(x), \forall f \in X^*$.

Recíprocamente, supongamos que para todo $f \in X^*$, $f(x_n) \to f(x)$. Sea U entorno débil de x. Entonces, este es de la forma $U = U(x; f_1, \dots, f_k; \varepsilon)$. En particular, se tiene que $f_i(x_n) \to f_i(x), \forall 1 \leq i \leq k$. Luego, para cada $1 \leq i \leq k$, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $|f_i(x_n) - f_i(x)| < \varepsilon, \forall n \geq n_i$. Tomando $n_0 = \max_{1 \leq i \leq k} n_i$, tenemos que $x_n \in U(x; f_1, \dots, f_k; \varepsilon), \forall n \geq n_0$. Luego, $x_n \rightharpoonup x$.

2. Si $x_n \to x$, entonces por continuidad, para todo $f \in X^*$, se tiene que $f(x_n) \to f(x)$. De 1 se deduce el resultado.

□

El siguiente resultado busca estudiar los conjuntos débilmente cerrados y ver cómo se relacionan con los cerrados en la topología inducida por la norma, donde la convexidad juega un papel muy importante.

Proposición 1.19. *Sea $K \subseteq X$ convexo. Entonces K es cerrado si y sólo si K es débilmente cerrado.*

Demostración. Para $\varnothing$ y X se tiene trivialmente.

Sea K no vacío, propio, convexo y cerrado. Sea $x_0 \in X \setminus K$. Por el Teorema de Separación de Hahn-Banach, Teorema 1.9, existen $f \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_0) < \alpha < f(x),$$

para todo $x \in K$. Sea $S = \{x \in X : f(x) < \alpha\}$. Observamos que $x_0 \in S$. Además, tenemos que $S = f^{-1}((-\infty, \alpha))$, luego S es débilmente abierto. Por último, tenemos que $S \subset X \setminus K$.

Así que, como tenemos que $x_0 \in S \subset X \setminus K$, concluimos que $X \setminus K$ es débilmente abierto y, por tanto, K es débilmente cerrado.

Sea ahora K no vacío, convexo y débilmente cerrado. Como la topología débil es menos fina que la inducida por la norma de X, se tiene que K es cerrado.

□

Sabemos que, como en todo espacio topológico, un conjunto secuencialmente débilmente cerrado será débilmente cerrado. Sin embargo, a diferencia que con los cerrados generados por la norma, no se tiene el recíproco. Nuevamente, la convexidad nos permitirá decir algo más.

Corolario 1.20. *Sea $K \subset X$ convexo. Entonces K es débilmente cerrado si y solo si K es secuencialmente débilmente cerrado.*

Demostración. Supongamos que K es secuencialmente débilmente cerrado. Queremos ver que es cerrado. Como K es convexo, por la Proposición 1.19, esto es equivalente a ver que K es cerrado, que a su vez es equivalente a probar que K es secuencialmente cerrado.

Sea $\{x_n\}_n \subset K$ tal que $x_n \to x$. Entonces, por la Proposición 1.18, tenemos que $x_n \rightharpoonup x$. Como K es secuencialmente débilmente cerrado, concluimos que $x \in K$, lo que finaliza la prueba.

□

En un espacio de Banach, sabemos que la compacidad y la compacidad secuencial son conceptos equivalentes. El Teorema de Eberlein-Smulian nos da un resultado similar en la topología débil. Su demostración puede ser consultada en [6].

Teorema 1.21 (de Eberlein-Smulian)**.** *Para todo $A \subset X$ los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *Toda sucesión $\{x_n\}_n \subset A$ tiene una subsucesión débilmente convergente en X.*
2. *Toda sucesión $\{x_n\}_n \subset A$ tiene un punto de acumulación débil en X.*
3. *La clausura débil de A es débilmente compacta.*

1.3. Topología débil*

Al igual que se ha definido la topología débil sobre un espacio normado, se puede definir de forma similar otra sobre el dual de dicho espacio. Esta es la conocida como topología débil*.

Definición 1.22. *Se define sobre X^* la topología débil* como aquella generada por la subbase formada por conjuntos de la forma*

$$U(f_0; x; \varepsilon) = \{f \in X^* : |(f - f_0)(x)| < \varepsilon\},$$

con $f_0 \in X^*, x \in X$ y $\varepsilon > 0$.

Así, de forma análoga a la topología débil, un abierto arbitrario U de la topología débil* tendrá la forma

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} \bigcap_{i=1}^{n} U(f_{i,\alpha}; x_{i,\alpha}; \varepsilon_{i,\alpha}),$$

con A un conjunto de cardinal cualquiera.

Proposición 1.23. *En la topología débil* las aplicaciones $\{J_x\}_{x \in X}$ son continuas, donde $J_x : X^* \to \mathbb{R}$ actúa como $J_x(f) = f(x)$.*

Demostración. Basta observar que

$$\begin{aligned} U(f_0; x; \varepsilon) &= \{f \in X^* : f(x) \in (f_0(x) - \varepsilon, f_0(x) + \varepsilon)\} = \\ &= \{f \in X^* : J_x(f) \in (f_0(x) - \varepsilon, f_0(x) + \varepsilon)\} = \\ &= J_x^{-1}((f_0(x) - \varepsilon, f_0(x) + \varepsilon)), \end{aligned}$$

donde $(f_0(x)-\varepsilon, f_0(x)+\varepsilon) \subset \mathbb{R}$ es abierto.

$\square$

Proposición 1.24. *La topología débil* es Hausdorff.*

Demostración. Sean $f_1, f_2 \in X^*$ distintos. Entonces existe $x \in X$ tal que $f_1(x) \neq f_2(x)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $f_1(x) < f_2(x)$. Podemos entonces encontrar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f_1(x) < \alpha < f_2(x)$. Consideramos entonces los conjuntos

$$U = \{f \in X^* : f(x) < \alpha\}$$
$$V = \{f \in X^* : f(x) > \alpha\}$$

Tenemos que $U = J_x^{-1}((-\infty, \alpha))$ y $V = J_x^{-1}((\alpha, +\infty))$, abiertos en la topología débil*. Además, $f_1 \in U, f_2 \in V$ y $U \cap V = \varnothing$, lo que concluye la prueba.

$\square$

Definición 1.25. *Se define la convergencia débil* de $\{f_n\}_n$ a $f \in X^*$, que se denota como $f_n \rightharpoonup^* f$, como la convergencia en la topología débil*.*

Observación 1.26. *La unicidad del límite en esta topología se deduce de la Proposición 1.24.*

Proposición 1.27. *Sea $\{f_n\}_n \subset X^*$. Se verifican las siguiente propiedades:*

1. *$f_n \rightharpoonup^* f$ si y solo si $f_n(x) \to f(x), \forall x \in X$.*
2. *$f_n \to f \implies f_n \rightharpoonup f \implies f_n \rightharpoonup^* f$.*

Demostración.

1. Supongamos que $f_n \rightharpoonup^* f$. Entonces como J_x es continua para todo $x \in X$ por la definición de topología débil*, tenemos que $J_x(f_n) \to J_x(f), \forall x \in X$. Esto es, $f_n(x) \to f(x), \forall x \in X$.

Recíprocamente, supongamos que $f_n(x) \to f(x), \forall x \in X$. Sea U un entorno de f en la topología débil*. Entonces $U = U(f; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$. Por hipótesis, $f_n(x_i) \to f(x_i), \forall 1 \leq i \leq k$. Esto es, para cada i, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon, \forall n \geq n_i$. Tomando $n_0 = \text{máx}_{1\leq i \leq k} n_i$, tenemos que $f_n \in U(f; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon), \forall n \geq n_0$. Por tanto, $f_n \rightharpoonup^* f$.

2. Si $f_n \to f$, por la Proposición 1.18, se tiene que $f_n \rightharpoonup f$.

Ahora bien, si $f_n \rightharpoonup f$ entonces, por la Proposición 1.18, para todo $x \in X$ se verifica $J_x(f_n) \to J_x(f)$. Esto es, $f_n(x) \to f(x), \forall x \in X$. Luego, por 1, $f_n \rightharpoonup^* f$.

$\square$

El siguiente teorema fue demostrado por S. Banach en 1932 para espacios de Banach separables y por L. Alaoglu para espacios generales en 1940. A pesar de que Banach presentó una demostración constructiva del resultado, Alaoglu hizo uso del Teorema de Tychonoff, tirando abajo la constructividad de la prueba. Este teorema contrasta enormemente con el hecho de que, en la topología inducida por la norma, la bola unidad de un espacio de Banach sólo es compacta cuando el espacio es de dimensión finita. Nuestra prueba está basada en la que aparece en [2].

Teorema 1.28 (de Banach-Alaoglu). *La bola unidad cerrada de X^* es siempre compacta en la topología débil*.*

Demostración. Para cada $x \in X$ definimos $I_x = \{t \in \mathbb{R} : |t| \leq \|x\|\}$. Sea $\Omega = \prod_{x \in X} I_x$. Podemos identificar Ω con $\Lambda = \{f : X \to \mathbb{R} : f(x) \in I_x, \forall x \in X\}$ de la siguiente forma.

Si $f \in \Lambda$, entonces $|f(x)| \leq \|x\|, \forall x \in X$. Luego, $\{f(x)\}_{x \in X} \in \Omega$. Por tanto, podemos asociarle a f el elemento $\{f(x)\}_{x \in X}$.

Recíprocamente, si $\{t_x\}_{x \in X} \in \Omega$, entonces $|t_x| \leq \|x\|, \forall x \in X$. Definimos entonces $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = t_x$. Así, $f \in \Lambda$ y podemos asignarle f a $\{t_x\}_{x \in X}$.

Con esto podemos dotar a Ω de la topología producto, la menos fina tal que las proyecciones sobre cada componente del producto sean continuas. Es decir, la topología menos fina tal que para todo $x \in X$, las aplicaciones $J_x : \Omega \to I_x$ dada por $J_x(f) = f(x)$ son continuas. Como cada I_x es compacto (cerrado y acotado en $\mathbb{R}$), por el Teorema de Tychonoff, Teorema 1.3, se tiene que Ω es compacto.

Ahora, con la identificación anterior tenemos que $B_{X^*}(0,1) \subset \Omega$. Nótese que J_x es la aplicación sobre x de la inyección canónica de X en X^{**}. Entonces la topología inducida por Ω sobre $B_{X^*}(0,1)$ no es más que la topología débil*.

Sean $x, y \in X$ y $c \in \mathbb{R}$. Definimos $F_{x,y}, G_{x,c} : \Omega \to \mathbb{R}$ como

$$F_{x,y}(f) = f(x) + f(y) - f(x+y)$$
$$G_{x,c}(f) = f(cx) - cf(x)$$

Entonces $F_{x,y} = J_x + J_y - J_{x+y}$ y $G_{x,c} = J_{cx} - cJ_x$. Luego, $F_{x,y}$ y $G_{x,c}$ son continuas por ser combinación algebraica de aplicaciones continuas en la topología producto. Ahora bien, por linealidad, tenemos que $F_{x,y}(f) = G_{x,c}(f) = 0, \forall f \in B_{X^*}(0,1)$. Luego,

$$B_{X^*}(0,1) = \bigcap_{x,y \in X} F_{x,y}^{-1}(0) \cap \bigcap_{x \in X, c \in \mathbb{R}} G_{x,c}^{-1}(0)$$

Así, por continuidad y puesto que la intersección arbitraria de cerrados es cerrado, tenemos que $B_{X^*}(0,1) \subset \Omega$ es cerrado. De que Ω sea compacto se deduce la compacidad de $B_{X^*}(0,1)$ en la topología débil*.

$\square$

1.4. Reflexividad y topologías débiles

Recordamos que un espacio de Banach X es reflexivo si la inyección canónica $J : X \to X^{**}$ es sobreyectiva, es decir, si $J(X) = X^{**}$.

El siguiente lema nos permitirá probar que en un espacio reflexivo la bola unidad es siempre débilmente compacta. Ambos resultados pueden ser consultados en [2].

Lema 1.29. *Sea $\varphi : Y \to X$, donde X está dotado de su topología débil. Entonces φ es continua si y solo si $f \circ \varphi : Y \to \mathbb{R}$ es continua para todo $f \in X^*$.*

Demostración. Si φ es continua entonces $f \circ \varphi$ también lo es por ser composición de continuas.

Ahora, supongamos que $f \circ \varphi$ es continua para todo $f \in X^*$. Sea $U \subseteq X$ abierto débil. Entonces U se puede expresar como

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} \bigcap_{i=1}^{n} f_{i,\alpha}^{-1}(U_{i,\alpha}),$$

donde los $U_{i,\alpha} \subseteq \mathbb{R}$ son abiertos y $f_{i,\alpha} \in X^*$. Entonces

$$\varphi^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} \bigcap_{i=1}^{n} \varphi^{-1}(f_{i,\alpha}^{-1}(U_{i,\alpha})) = \bigcup_{\alpha \in A} \bigcap_{i=1}^{n} (f_{i,\alpha} \circ \varphi)^{-1}(U_{i,\alpha}).$$

Como $f_{i,\alpha} \circ \varphi$ es continua, $(f_{i,\alpha} \circ \varphi)^{-1}(U_{i,\alpha})$ es abierto, luego $\varphi^{-1}(U)$ también. Por tanto, φ es continua.

□

Proposición 1.30. *Si X es reflexivo entonces la bola unidad en X es débilmente compacta.*

Demostración. Como X es reflexivo, $J(X) = X^{**}$. Luego, para todo $x \in X$, existe un único $T \in X^{**}$ tal que $J_x = T$.

Por el Teorema de Banach-Alaoglu, Teorema 1.28, tenemos que $B_{X^{**}}(0,1)$ es compacta en la topología débil* de X^{**}. Veamos entonces que $J^{-1} : X^{**} \to X$ es continua, donde X^{**} está dotado de su topología débil* y X de su topología débil. Por el Lema 1.29 esto es equivalente a ver que $f \circ J^{-1} : X^{**} \to \mathbb{R}$ es continua, $\forall f \in X^*$.

Ahora bien, dados $T \in X^{**}$ y $x \in X$ su elemento asociado en X, tenemos que

$$(f \circ J^{-1})(T) = f(x) = J_x(f) = T(f).$$

Así, $f \circ J^{-1}$ coincide con $E_f : X^{**} \to \mathbb{R}$, dada por $E_f(T) = T(f)$. Por definición de la topología débil* en X^{**}, esta E_f es continua con lo que concluimos que la aplicación $f \circ J^{-1}$ es continua. Por lo observado anteriormente, tenemos entonces que J^{-1} es continua.

Luego, como X es reflexivo, $J^{-1}(B_{X^{**}}(0,1)) = B_X(0,1)$ y, como $B_{X^{**}}(0,1)$ es compacta en la topología débil* de X^{**}, entonces $B_X(0,1)$ lo es también en la topología débil de X.

□

Observación 1.31. *Se puede probar también el recíproco de este resultado. De esta forma, tenemos un resultado de caracterización de espacios reflexivos. Un espacio es reflexivo si y solo si su bola unidad es débilmente compacta. Una prueba de la otra implicación puede ser encontrada en [2].*

Al igual que hicimos con los conjuntos débilmente cerrados, estamos interesados en ver qué conjuntos son los débilmente compactos de X. Para dar una descripción simple de estos conjuntos nos tendremos que restringir a los espacios reflexivos. Veamos primero un lema que nos servirá para dar el resultado deseado, que al igual que el anterior puede ser encontrado en [2].

Lema 1.32. *Sea $K \subset X$. Si $f(K)$ es acotado para todo $f \in X^*$ entonces K es acotado.*

Demostración. Consideramos la inyección canónica $J : X \to X^{**}$. Por hipótesis,

$$\sup_{x \in K} |J_x(f)| = \sup_{x \in K} |f(x)| < \infty,$$

para todo $f \in X^*$. Por tanto, por el Teorema de Banach-Steinhaus, Teorema 1.10, $\sup_{x \in K} \|J_x\| < \infty$. Entonces, existe $c > 0$ tal que $\|J_x\| \leq c, \forall x \in K$. Luego

$$|f(x)| = |J_x(f)| \leq \|J_x\| \, \|f\| \leq c \, \|f\|$$

para todo $x \in K$. Por el Corolario 1.8, tomando supremo en $\|f\| \leq 1$, tenemos que $\|x\| \leq c, \forall x \in K$, por lo que K es acotado.

□

Teorema 1.33. *Sean X reflexivo y $K \subset X$ no vacío y convexo. Entonces K es cerrado y acotado si y solo si K es débilmente compacto.*

Demostración. Supongamos que K es cerrado y acotado. Como además, K es convexo, por la Proposición 1.19, K es débilmente cerrado. Como K es acotado, existe $M > 0$ tal que $K \subset B_X(0, M) = MB_X(0, 1)$, bola débilmente compacta por la Proposición 1.30. Por tanto, K es débilmente compacto.

Recíprocamente, si K es débilmente compacto, K es débilmente cerrado, pues la topología débil es Hausdorff. Luego, por la Proposición 1.19, K es cerrado. Veamos que es acotado.

Como K es débilmente compacto y f es continua, $f(K) \subset \mathbb{R}$ es compacto y, por ello, acotado, para todo $f \in X^*$. Luego, por el Lema 1.32, K es acotado.

□

Este teorema es de gran ayuda pues nos permite usar argumentos de compacidad para conjuntos convexos, cerrados y acotados en espacios reflexivos, conjuntos que en principio no tienen por qué ser compactos en la topología inducida por la norma.

Finalizamos la sección dando una lista de propiedades que caracterizan la reflexividad, de formas muy diversas.

Teorema 1.34. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *X es reflexivo.*
2. *X^* es reflexivo.*
3. *$B_X(0, 1)$ es débilmente compacta en X.*
4. *Toda sucesión acotada en X tiene una subsucesión débilmente convergente.*
5. *Para todo $f \in X^*$ existe $x \in B_X(0, 1)$ tal que $f(x) = \|f\|$.*
6. *Para todos $K \subset X$ acotado, cerrado y convexo y $f \in X^*$, existe $x \in K$ tal que $f(x) = \sup_{y \in K} f(y)$.*

7. *Para toda sucesión decreciente* $\{K_n\}_n$ *de subconjuntos no vacíos, acotados, cerrados y convexos de* X*, se tiene que* $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \varnothing$.

Las equivalencias $1 \iff 2$, $1 \iff 3$ y $1 \iff 4$ son consecuencia de la definición de espacio reflexivo, la Observación 1.31 y el Teorema de Eberlein-Smulian, Teorema 1.21, respectivamente. R. C. James probó $1 \iff 5$ en [11] y $1 \iff 6$ en [12]. La caracterización $1 \iff 7$ puede ser encontrada en [15].

Capítulo 2

Convexidad en espacios de Banach

El concepto de espacio de Banach uniformemente convexo fue introducido en 1936 por J. A. Clarkson en su artículo “Uniformly Convex Spaces”, [3]. Geométricamente, una norma es uniformemente convexa si cuando el punto medio de cualquier segmento sobre la esfera unidad se aproxima a la misma entonces la longitud de dicho segmento tiende a 0. Una clase de espacios más débiles y que trataremos antes que los uniformemente convexos son los estrictamente convexos. En estos espacios sabemos que si consideramos dos puntos sobre la esfera unidad entonces el punto medio del segmento que generan queda en el interior de la bola unidad.

2.1. Espacios de Banach estrictamente convexos

Definición 2.1. *Un espacio de Banach X se dirá estrictamente convexo si para todos $x, y \in X$ tales que $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ y $\|x-y\| > 0$ se tiene que*

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1$$

Equivalentemente, podemos decir que X es estrictamente convexo si para todos $x, y \in X$ tales que $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ y $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1$ se tiene que $x = y$.

Así, en un espacio estrictamente convexo, la esfera unidad no contiene ningún segmento y su punto medio queda en el interior de la bola abierta.

La siguiente caracterización de los espacios estrictamente convexos será crucial a la hora de probar la convexidad del conjunto de puntos fijos.

Lema 2.2. *Sea $u, v \in X$ distintos. Entonces X estrictamente convexo si y solo si $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$ implica que existe $r > 0$ tal que $u = rv$.*

Demostración. Sea X es estrictamente convexo. Si $u = v = 0$, el resultado se tiene trivialmente. Supongamos entonces que $u \neq 0 \neq v$. Observamos primero lo siguiente. Sean

$\alpha, \beta \geq 0$. Entonces

$$\begin{aligned}\alpha \|u\| + \beta \|v\| &= \alpha(\|u\| + \|v\|) - (\alpha - \beta) \|v\| = \\ &= \alpha \|u + v\| - (\alpha - \beta) \|v\| = \\ &= \|\alpha(u + v)\| - \|(\alpha - \beta)v\| \leq \\ &\leq \|\alpha(u + v) - (\alpha - \beta)v\| = \\ &= \|\alpha u + \beta v\| \leq \\ &\leq \alpha \|u\| + \beta \|v\| .\end{aligned}$$

Así, las desigualdades son igualdades y tenemos que $\|\alpha u + \beta v\| = \alpha \|u\| + \beta \|v\|$. De esta forma, si tomamos $\alpha = \frac{1}{2\|u\|}$ y $\beta = \frac{1}{2\|v\|}$, tenemos que

$$\left\| \frac{\frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|v\|}}{2} \right\| = \left\| \frac{1}{2\|u\|} u + \frac{1}{2\|v\|} v \right\| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Luego, por la convexidad estricta de X se tiene que $\frac{u}{\|u\|} = \frac{v}{\|v\|}$. Esto es, $u = \frac{\|u\|}{\|v\|} v$.

Veamos el recíproco. Supongamos que existiesen $u, v \in B_X(0,1)$ tales que $\left\| \frac{u+v}{2} \right\| = 1$. Entonces

$$1 = \left\| \frac{u + v}{2} \right\| \leq \frac{1}{2} \|u\| + \frac{1}{2} \|v\| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

De esta forma, tenemos que $\frac{1}{2} \|u\| + \frac{1}{2} \|v\| = 1$, con $\|u\|, \|v\| \leq 1$. Esto es, $\|u\| = \|v\| = 1$. Además,

$$\|u + v\| = 2 = \|u\| + \|v\| .$$

Entonces, por hipótesis, existe $r > 0$ tal que $u = rv$. Tomando norma, concluimos que $r = 1$, por lo que $u = v$. Por ello, X es estrictamente convexo.

$\square$

Ahora bien, sean $x, y, z \in X$, con X estrictamente convexo. Entonces, si en el lema anterior tomamos $u = x - z$ y $v = z - y$ verificando $\|x - z\| + \|z - y\| = \|x - z + z - y\| = \|x - y\|$, podemos encontrar $r > 0$ tal que $x - z = r(z - y)$. Además, por la construcción de r en dicho lema, este viene dado por $r = \frac{r_1}{r_2}$, donde $r_1 = \|x - z\|$ y $r_2 = \|z - y\|$. Luego,

$$\begin{aligned}x - z = r(z - y) &\implies x - z = \frac{r_1}{r_2}(z - y) \implies \\ &\implies r_2(x - z) = r_1(z - y) \implies \\ &\implies (r_1 + r_2)z = r_2 x + r_1 y \implies \\ &\implies z = \frac{r_2}{r_1 + r_2} x + \frac{r_1}{r_1 + r_2} y\end{aligned}$$

Así, en los espacios estrictamente convexos todo z que verifique $\|x - z\| + \|z - y\| = \|x - y\|$ estará en el segmento que une x con y.

Es más, se tiene el recíproco. Si z está en el segmento que une x con y, es decir, si $z = \lambda x + (1 - \lambda) y$, con $\lambda \in (0, 1)$, entonces

$$x - z = (1 - \lambda)x - (1 - \lambda)y = (1 - \lambda)(x - y),$$

$$z - y = \lambda x + (1-\lambda)y - y = \lambda(x-y).$$

De esto se deduce que $\|x-z\| + \|z-y\| = \|x-y\|$.

Tenemos también una condición necesaria para que un espacio sea estrictamente convexo en función de los elementos de su dual.

Teorema 2.3. *Si X es estrictamente convexo sus funcionales alcanzan su norma a lo sumo en un punto.*

Demostración. Sea $f \in X^*$ que alcanza su norma y supongamos que la alcanza en $x, y \in S_X(0,1)$, distintos. Esto es, $f(x) = \|f\| = f(y)$. Como X es estrictamente convexo, tenemos que $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1$. Ahora bien,

$$\left|f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \leq \|f\| \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < \|f\|$$

pero

$$\left|f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}|f(x)+f(y)| = \frac{1}{2}(\|f\|+\|f\|) = \|f\|,$$

lo que supone contradicción.

□

2.2. Espacios de Banach uniformemente convexos

Definición 2.4. *Un espacio de Banach X se dice uniformemente convexo si para todo $\varepsilon \in (0,2]$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ y $\|x-y\| \geq \varepsilon$ entonces*

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1-\delta. \tag{2.1}$$

En vista de la definición, observamos que a diferencia de los espacios estrictamente convexos, en los que sólo podíamos asegurar que el punto medio estaba en el interior de la bola unidad, en los uniformemente convexos podemos saber además cuán "profundo" en la bola está dicho punto. Es por ello que de forma inmediata se desprende el siguiente resultado.

Proposición 2.5. *Si X es uniformemente convexo entonces es estrictamente convexo.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ tales que $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ y $\|x-y\| > 0$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|x-y\| \geq \varepsilon$. Como X es uniformemente convexo, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1-\delta < 1.$$

Luego, X es estrictamente convexo.

□

De esta forma, podemos trasladar a los espacios uniformemente convexos todas las propiedades de los espacios estrictamente convexos probadas en la sección anterior.

Veamos un primer ejemplo de espacio uniformemente convexo.

Ejemplo 2.6. *Los espacios de Hilbert son uniformemente convexos. Otros espacios uniformemente convexos son los ℓ^p y L^p, con $p \in (1, \infty)$, como puede comprobarse en [3].*

Sean H un espacio de Hilbert y $x, y \in H$ tales que $\|x\|, \|y\| \leq 1$ y $\|x - y\| \geq \varepsilon$. Por la identidad del paralelogramo tenemos que

$$\|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x - y\|^2.$$

Entonces

$$\left\|\frac{x + y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{4}\|x - y\|^2 \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}$$

Por tanto, $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$. Tomando $\delta = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$ tenemos la convexidad uniforme de H.

Ahora definiremos un concepto de suma importancia para estudiar la convexidad de espacios de Banach: el módulo de convexidad. Esta función nos dirá "cómo de convexo" es un espacio de Banach.

Definición 2.7. *Dado un espacio de Banach X, se define su módulo de convexidad como la función $\delta_X : [0, 2] \to [0, 1]$ dada por*

$$\delta_X(\varepsilon) = \text{ínf}\left\{1 - \left\|\frac{x + y}{2}\right\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \varepsilon\right\}.$$

Con esta función, podemos cuantificar la convexidad y comparar espacios de Banach en términos de esta. Es decir, si X e Y son dos espacios de Banach tales que $\delta_X(\varepsilon) \geq \delta_Y(\varepsilon), \forall \varepsilon \in [0, 2]$ entonces podemos decir que X es "más convexo" que Y.

Ejemplo 2.8. *Continuando el ejemplo anterior tenemos que el módulo de convexidad de cualquier espacio de Hilbert H es*

$$\delta_H(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}.$$

Una propiedad importante (mencionada en [7]) que verifica el módulo de convexidad es que para hallarlo, basta restringirse a los subespacios de dimensión 2. Es decir,

$$\delta_X(\varepsilon) = \text{ínf}\, \delta_E(\varepsilon), \tag{2.2}$$

donde el ínfimo está tomado en los subespacios $E \subset X$ de dimensión 2.

Con el módulo de convexidad, podemos extraer un primer resultado de caracterización para espacios uniformemente convexos.

Teorema 2.9. *Un espacio de Banach X es uniformemente convexo si y solo si $\delta_X(\varepsilon) > 0, \forall \varepsilon > 0$.*

Demostración. Si $\delta_X(\varepsilon) > 0$ entonces tenemos que para todos $x, y \in X$ tales que $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ y $\|x - y\| \geq \varepsilon$ se verifica

$$1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \geq \delta_X(\varepsilon).$$

Luego,

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta_X(\varepsilon),$$

por lo que X es uniformemente convexo.

Ahora, supongamos que X es uniformemente convexo. Sean $x, y \in X$ tales que $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ y $\|x - y\| \geq \varepsilon$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que

$$1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \geq \delta.$$

Tomando ínfimo, tenemos que

$$\delta_X(\varepsilon) \geq \delta > 0, \tag{2.3}$$

con lo que se concluye la prueba.

□

Observación 2.10. *De (2.3) se deduce también que el módulo de convexidad es el mayor δ que verifica*

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta_X(\varepsilon), \tag{2.4}$$

para $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ y $\|x - y\| \geq \varepsilon$.

Proposición 2.11. *La condición (2.4) es equivalente a que para todos $x, y, p \in X$, $R > 0$ y $r \in [0, 2R]$ tales que $\|x - p\| \leq R$, $\|y - p\| \leq R$ y $\|x - y\| \geq r$ se tenga que*

$$\left\| p - \frac{x+y}{2} \right\| \leq \left(1 - \delta_X\left(\frac{r}{R}\right)\right) R. \tag{2.5}$$

Demostración. Si se da (2.5) entonces tomando $p = 0$, $R = 1$ y $r = \varepsilon$ tenemos (2.4).

Veamos la otra implicación. De las hipótesis tenemos que

$$\left\| \frac{x-p}{R} \right\| \leq 1$$

$$\left\| \frac{y-p}{R} \right\| \leq 1$$

Por otra parte,

$$r \leq \|x - y\| = \|(x - p) - (y - p)\|,$$

y por tanto

$$\frac{r}{R} \leq \left\| \frac{x-p}{R} - \frac{y-p}{R} \right\|,$$

con $\frac{r}{R} \in [0,2]$. Así, por (2.4), tenemos que

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{x-p}{R}+\frac{y-p}{R}\right\| \leq 1-\delta_X\left(\frac{r}{R}\right)$$

Equivalentemente,

$$\left\|p-\frac{x+y}{2}\right\| \leq \left(1-\delta_X\left(\frac{r}{R}\right)\right) R.$$

□

Esta versión alternativa nos facilitará probar la siguiente caracterización para espacios estrictamente convexos.

Teorema 2.12. *Un espacio de Banach es estrictamente convexo si y solo si $\delta_X(2) = 1$*

Demostración. Sea $\delta_X(2) = 1$. Supongamos que $x, y \in X$ son tales que $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ y $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1$. Entonces, por la Proposición 2.11, tenemos que

$$\left\|\frac{x-y}{2}\right\| = \left\|\frac{x+(-y)}{2}\right\| \leq 1-\delta_X(\|x-(-y)\|) = 1-\delta_X(\|x+y\|) = 1-\delta_X(2) = 0.$$

Luego, $x = y$ por lo que X es estrictamente convexo.

Recíprocamente, supongamos que X es estrictamente convexo. Sean $x, y \in X$ tales que $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ y $\|x-y\| = 2$. Entonces se tiene que $x = -y$.

Supongamos que no. Por la convexidad estricta de X tenemos que

$$1 = \left\|\frac{x-y}{2}\right\| = \left\|\frac{x+(-y)}{2}\right\| < 1,$$

lo que supone contradicción. Por tanto,

$$1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1-\left\|\frac{x-x}{2}\right\| = 1$$

Luego, $\delta_X(2) = 1$.

□

Este teorema se puede interpretar como que, en los espacios estrictamente convexos, sólo los puntos antipodales están a distancia 2.

Resulta natural preguntarse si dos espacios isométricamente isomorfos son "igual" de convexos. Como cabía esperar, la proposición que sigue nos da una respuesta afirmativa a esta pregunta.

Proposición 2.13. *El módulo de convexidad es invariante bajo isomorfismos isométricos.*

Demostración. Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un isomorfismo isométrico entre ellos. Sean $x_1, x_2 \in X$ e $y_1, y_2 \in Y$ tales que $Tx_1 = y_1$ y $Tx_2 = y_2$. Como T es isometría, $\|x_1\| = \|y_1\|$ y $\|x_2\| = \|y_2\|$. Entonces $\|x_1\|, \|x_2\| \leq 1$ y $\|x_1 - x_2\| \geq \varepsilon$ si y solo si $\|y_1\|, \|y_2\| \leq 1$ y $\|y_1 - y_2\| \geq \varepsilon$.

De esta forma,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{y_1+y_2}{2}\right\| = \left\|\frac{Tx_1+Tx_2}{2}\right\| = \left\|T\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right\| \leq \\ \leq \|T\| \left\|\frac{x_1+x_2}{2}\right\| = \left\|\frac{x_1+x_2}{2}\right\| \leq 1-\delta_X(\varepsilon),\end{aligned}$$

pues al ser T isometría se verifica que $\|T\| = 1$.

Así, $\left\|\frac{y_1+y_2}{2}\right\| \leq 1 - \delta_X(\varepsilon)$ y como en Y el mayor número que verifica esta condición es $\delta_Y(\varepsilon)$, tenemos que $\delta_X(\varepsilon) \leq \delta_Y(\varepsilon)$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{x_1+x_2}{2}\right\| = \left\|\frac{T^{-1}y_1+T^{-1}y_2}{2}\right\| = \left\|T^{-1}\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)\right\| \leq \\ \leq \|T^{-1}\| \left\|\frac{y_1+y_2}{2}\right\| = \left\|\frac{y_1+y_2}{2}\right\| \leq 1-\delta_Y(\varepsilon).\end{aligned}$$

Por el mismo argumento, $\delta_Y(\varepsilon) \leq \delta_X(\varepsilon)$, lo que concluye la prueba.

□

Definición 2.14. *La característica o coeficiente de convexidad de un espacio de Banach X es*

$$\varepsilon_0(X) = \sup\{\varepsilon > 0 : \delta_X(\varepsilon) = 0\}.$$

Geométricamente, la característica de convexidad de un espacio de Banach acota la longitud de los segmentos que están sobre la esfera unidad.

La característica de convexidad también nos permite caracterizar los espacios uniformemente convexos como consecuencia del Teorema 2.9.

Teorema 2.15. *Un espacios de Banach X es uniformemente convexo si y solo si $\varepsilon_0(X) = 0$.*

Ejemplo 2.16. *En un espacio de Hilbert H se tiene que $\varepsilon_0(H) = 0$. Por el teorema anterior, todo espacio de Hilbert es uniformemente convexo.*

Un hecho a destacar es que en virtud de la Proposición 2.13, si $T : X \to Y$ es un isomorfismo isométrico

$$\varepsilon_0(Y) = \sup\{\varepsilon > 0 : \delta_Y(\varepsilon) = 0\} = \sup\{\varepsilon > 0 : \delta_X(\varepsilon) = 0\} = \varepsilon_0(X),$$

por lo que la característica de convexidad es también invariante bajo isomorfismos isométricos.

Lema 2.17. *El módulo de convexidad de un espacio de Banach es creciente en $[0, 2]$.*

Demostración. Sean $u, v \in X$ vectores linealmente independientes con $\|u\| = \|v\| = 1$. Definimos el módulo de convexidad direccional (en las direcciones u y v) como

$$\delta_{u,v}(\varepsilon) = \operatorname{ínf}\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x-y\| \geq \varepsilon, x-y = \lambda u, x+y = \mu v\right\}$$

Veamos que es creciente. Sean $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in [0,2)$, con $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$. Dado $\varepsilon > 0$, sea

$$A^{\varepsilon}_{u,v} = \{(x,y) \in X \times X : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x-y\| \geq \varepsilon, x-y = \lambda u, x+y = \mu v\}.$$

Sea $(x,y) \in A^{\varepsilon_2}_{u,v}$. Entonces $\|x\|, \|y\| \leq 1$, $\|x-y\| \geq \varepsilon_2$ y $x-y = \lambda u, x+y = \mu v$. En particular, como $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ se tiene que $\|x-y\| \geq \varepsilon_1$. Junto con todo lo demás concluimos que $(x,y) \in A^{\varepsilon_1}_{u,v}$. Por tanto, $A^{\varepsilon_2}_{u,v} \subset A^{\varepsilon_2}_{u,v}$ y, tomando ínfimo llegamos a que

$$\delta_{u,v}(\varepsilon_1) \leq \delta_{u,v}(\varepsilon_2). \tag{2.6}$$

Como u y v son linealmente independientes, tenemos que $E = \operatorname{span}\{u,v\}$ recorre todos los subespacios de dimensión 2 de X. Por ello, tomando ínfimo en (2.6) y gracias a (2.2) concluimos que

$$\delta_X(\varepsilon_1) \leq \delta_X(\varepsilon_2).$$

□

Observación 2.18. *En el desarrollo de la demostración hemos visto también que el módulo de convexidad direccional es también creciente.*

Cerramos la sección probando la continuidad del módulo de convexidad. La idea de esta prueba se puede encontrar en [7], que hemos desarrollado con todo detalle.

Proposición 2.19. *El módulo de convexidad de un espacio de Banach es continuo en* $[0,2)$.

Demostración. Sean $u, v \in X$ vectores linealmente independientes con $\|u\| = \|v\| = 1$. Consideramos entonces el módulo de convexidad direccional

$$\delta_{u,v}(\varepsilon) = \operatorname{ínf}\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x-y\| \geq \varepsilon, x-y = \lambda u, x+y = \mu v\right\}$$

Veamos que es convexa. Dado $\varepsilon > 0$, sea

$$A^{\varepsilon}_{u,v} = \{(x,y) \in X \times X : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x-y\| \geq \varepsilon, x-y = \lambda u, x+y = \mu v\}$$

Sean $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in [0,2], (x_1,y_1) \in A^{\varepsilon_1}_{u,v}$ y $(x_2,y_2) \in A^{\varepsilon_2}_{u,v}$. Entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} x_1 - y_1 = \lambda_1 u \\ x_1 + y_1 = \mu_1 v \\ x_2 - y_2 = \lambda_2 u \\ x_2 + y_2 = \mu_2 v \end{cases}.$$

Sea $t \in (0,1)$. Tomamos $x_3 = tx_1 + (1-t)x_2$, $y_3 = ty_1 + (1-t)y_2$ y $\varepsilon_3 = t\varepsilon_3 + (1-t)\varepsilon_2$. Claramente, $\|x_3\| \leq 1$ y $\|y_3\| \leq 1$. Además,

$$x_3 - y_3 = t(x_1 - y_1) + (1-t)(x_2 - y_2) = t\lambda_1 u + (1-t)\lambda_2 u = [t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2]u$$

Análogamente

$$x_3 + y_3 = [t\mu_1 + (1-t)\mu_2]v.$$

Por otra parte,

$$\|x_3 - y_3\| = \|t(x_1 - y_1) + (1-t)(x_2 - y_2)\|.$$

Ahora bien, se verifica

$$t(x_1 - y_1) = t\lambda_1 u = t\lambda_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_2} u = t\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(x_2 - y_2) = \frac{t}{1-t}\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(1-t)(x_2 - y_2), \tag{2.7}$$

luego $t(x_1 - y_1)$ y $(1-t)(x_2 - y_2)$ son linealmente dependientes, por lo que la desiguadaldad triangular alcanza la igualdad. Esto es,

$$\|x_3 - y_3\| = t\,\|x_1 - y_1\| + (1-t)\,\|x_2 - y_2\| \geq t\varepsilon_1 + (1-t)\varepsilon_2.$$

Con todo esto concluimos que

$$tA^{\varepsilon_1}_{u,v} + (1-t)A^{\varepsilon_2}_{u,v} \subset A^{t\varepsilon_1 + (1-t)\varepsilon_2}_{u,v}.$$

Así, tomando ínfimo tenemos que

$$\inf_{(x,y)\in A^{t\varepsilon_1+(1-t)\varepsilon_2}_{u,v}} \left(1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|\right) \leq \inf_{(x,y)\in tA^{\varepsilon_1}_{u,v}+(1-t)A^{\varepsilon_2}_{u,v}} \left(1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|\right) \tag{2.8}$$

Sean $(z_1, w_1) \in A^{\varepsilon_1}_{u,v}$ y $(z_2, w_2) \in A^{\varepsilon_2}_{u,v}$ tales que $x = tz_1 + (1-t)w_1$ e $y = tz_2 + (1-t)w_2$. Entonces

$$1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1 - \left\|\frac{tz_1 + (1-t)z_2 + tw_1 + (1-t)w_2}{2}\right\| = 1 - \left\|\frac{t(z_1 + w_1) + (1-t)(z_2 + w_2)}{2}\right\|$$

Ahora bien, al igual que en (2.7) tenemos que $t(z_1 + w_1)$ y $(1-t)(z_2 + w_2)$ son linealmente dependientes. Por ello, la desigualdad triangular es igualdad y se tiene que

$$\begin{aligned} 1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| &= 1 - t\left\|\frac{z_1 + w_1}{2}\right\| - (1-t)\left\|\frac{z_2 + w_2}{2}\right\| = \\ &= t\left(1 - \left\|\frac{z_1 + w_1}{2}\right\|\right) + (1-t)\left(1 - \left\|\frac{z_2 + w_2}{2}\right\|\right). \end{aligned}$$

Luego, volviendo a (2.8), concluimos que

$$\begin{aligned} \inf_{(x,y)\in A^{t\varepsilon_1+(1-t)\varepsilon_2}_{u,v}} \left(1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|\right) &\leq \inf_{\substack{(z_1,w_1)\in A^{\varepsilon_1}_{u,v} \\ (z_2,w_2)\in A^{\varepsilon_2}_{u,v}}} \left[t\left(1 - \left\|\frac{z_1 + w_1}{2}\right\|\right) + \right. \\ &\qquad \left. + (1-t)\left(1 - \left\|\frac{z_2 + w_2}{2}\right\|\right)\right] = \\ &= \inf_{(z_2,w_2)\in A^{\varepsilon_2}_{u,v}} \left[t\delta_{u,v}(\varepsilon_1) + (1-t)\left(1 - \left\|\frac{z_2 + w_2}{2}\right\|\right)\right] = \\ &= t\delta_{u,v}(\varepsilon_1) + (1-t)\varepsilon_{u,v}(\varepsilon_2). \end{aligned}$$

Por tanto, $\delta_{u,v}(t\varepsilon_1 + (1-t)\varepsilon_2) \leq t\delta_{u,v}(\varepsilon_1) + (1-t)\delta_{u,v}(\varepsilon_2)$. Luego $\delta_{u,v}$ es convexa.

Ahora, el hecho de que u y v tengan norma 1 y sean linealmente independientes nos dice que $u \neq \pm v$. Entonces $E = \operatorname{span}\{u,v\}$ recorre los subespacios de dimensión 2 de X. Luego, por (2.2)

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\{\delta_{u,v}(\varepsilon) : \|u\| = \|v\| = 1, u \neq \pm v\}.$$

Veamos la continuidad de δ_X. Fijamos $a \in (0,2)$. Sean $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in [0,a]$, con $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. De la demostración del Lema 2.6 sabemos que $\delta_{u,v}(\varepsilon_1) \leq \delta_{u,v}(\varepsilon_2)$. Por la convexidad de $\delta_{u,v}$ sabemos que la función

$$\frac{\delta_{u,v}(\varepsilon_2) - \delta_{u,v}(\varepsilon_1)}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}$$

es no decreciente, tanto si fijamos ε_1 como si fijamos ε_2. Por tanto,

$$\frac{\delta_{u,v}(\varepsilon_2) - \delta_{u,v}(\varepsilon_1)}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \leq \frac{\delta_{u,v}(2) - \delta_{u,v}(a)}{2-a} \leq \frac{1}{2-a},$$

pues $\delta_{u,v}(2), \delta_{u,v}(a) \leq 1$. Luego,

$$\delta_{u,v}(\varepsilon_2) - \delta_{u,v}(\varepsilon_1) \leq \frac{1}{2-a}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$$

De esta forma, si $\rho > 0$ es tal que $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 < \rho$ tendremos que

$$\delta_{u,v}(\varepsilon_2) - \delta_{u,v}(\varepsilon_1) \leq \frac{\rho}{2-a},$$

para todos u, v. Por ello, $\{\delta_{u,v} : \|u\| = \|v\| = 1, u \neq \pm v\}$ es una familia equicontinua en $[0,a]$. Por último, tenemos que

$$\delta_{u,v}(\varepsilon_2) \leq \frac{\rho}{2-a} + \delta_{u,v}(\varepsilon_1),$$

por lo que tomando ínfimo concluimos que

$$\delta_X(\varepsilon_2) \leq \frac{\rho}{2-a} + \delta_X(\varepsilon_1).$$

Luego, si $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 < \rho$ tenemos que $\delta_X(\varepsilon_2) - \delta_X(\varepsilon_1) \leq \frac{\rho}{2-a}$, por lo que δ_X es continua en $[0,a]$. Por la arbitrariedad de $a \in (0,2)$ se tiene la continuidad en $[0,2)$.

$\square$

Capítulo 3

Teorema de Kirk para aplicaciones no expansivas

Una vez establecidos los conceptos de topologías débiles y convexidad necesarios, podemos pasar al estudio de los puntos fijos de una aplicación no expansiva. Como vimos en el Capítulo 1, la caracterización de los conjuntos débilmente compactos convexos nos permitirá usar resultados de compacidad a conjuntos convexos, cerrados y acotados en espacios reflexivos.

Comenzamos definiendo los dos conceptos que pretendemos estudiar: los puntos fijos y las aplicaciones no expansivas.

Definición 3.1. *Sea $T : X \to X$. Un punto fijo de T es un $x \in X$ tal que $Tx = x$.*

Definición 3.2. *Sean (X, d) un espacio métrico y $K \subset X$. Se dice que $T : K \to K$ es*

1. *una contracción si existe $k \in (0, 1)$ tal que $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \forall x, y \in K$. A k se le denominará como constante de contracción de T.*

2. *contractiva si $d(Tx, Ty) < d(x, y), \forall x, y \in K$.*

3. *no expansiva si $d(Tx, Ty) \leq d(x, y), \forall x, y \in K$.*

Observación 3.3. *Se prueba inmediatamente por inducción que la constante de contracción de T^n es k^n, con k la constante de contracción de T.*

Para $n = 1$ se tiene por definición. Supongamos que se tiene para $n - 1$. Entonces, si $x, y \in X$

$$d(T^n x, T^n y) = d((T^{n-1} \circ T)x, (T^{n-1} \circ T)y) \leq k^{n-1} d(Tx, Ty) \leq k^n d(x, y),$$

lo que finaliza la inducción.

También es fácil ver que cualquiera de estas aplicaciones es continua.

3.1. Principio de Contracción de Banach

Como indica el título del capítulo, nos centraremos el estudio de la existencia de puntos fijos en las aplicaciones no expansivas. A pesar de ello, antes presentaremos el conocido como Principio de Contracción de Banach, resultado fundamental en Teoría de Punto Fijo. En este, se da la existencia y unicidad de punto fijo para contracciones bajo la condición de que el espacio ambiente sea completo y un método para obtener dicho punto fijo. Es más, ofrece también una cota para la velocidad de convergencia de dicho método.

Teorema 3.4 (Principio de Contracción de Banach)**.** *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \to X$ una contracción. Entonces, T tiene un único punto fijo $x \in X$ y, para cada $x_0 \in X$, la sucesión $\{T^n x_0\}_n$ converge a dicho punto. Además, se tiene que*

$$d(T^n x_0, x) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, Tx_0),$$

donde $k \in (0, 1)$ es la constante de contracción de T.

Demostración. Sea $x_0 \in X$. Definimos la sucesión $\{x_n\}_n$ dada por $x_n = T^n x_0, n \geq 0$. Entonces, $x_{n+1} = T^{n+1} x_0 = (T \circ T^n) x_0 = Tx_n$. Veamos que la sucesión es de Cauchy.

Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Se tiene que

$$d(x_n, x_{n+m}) = d(T^n x_0, T^{n+m} x_0) = d(T^n x_0, T^n \circ T^m x_0) \leq k(T^n) d(x_0, T^m x_0).$$

Reiterando la desigualdad triangular y, puesto que $k(T^n) = k^n$, llegamos a que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\leq k^n [d(x_0, Tx_0) + d(Tx_0, T^2 x_0) + \cdots + d(T^{m-1} x_0, T^m(x_0))] \leq \\ &\leq k^n [d(x_0, Tx_0) + kd(x_0, Tx_0) + \cdots + k^{m-1} d(x_0, Tx_0)] \leq \\ &\leq k^n (1 + k + \cdots + k^{m-1}) d(x_0, Tx_0) = \\ &= k^n \left(\frac{1-k^m}{1-k} \right) d(x_0, Tx_0). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Como T es una contracción, $0 < k < 1$. Por tanto, $k^n \left(\frac{1-k^m}{1-k} \right) \to 0$. Luego, $\{x_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy. Puesto que X es completo, existe $x \in X$ tal que $x_n = T^n(x_0) \to x$. Además, este x es punto fijo de T pues, por continuidad de T, se tiene que $Tx_n \to Tx$ y, tomando límite en $x_{n+1} = Tx_n$, se deduce que $x = Tx$.

Además, es único. Supongamos que existiese $y \in X$ distinto de x tal que $Ty = y$. Entonces

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq kd(x, y).$$

Así, $(1 - k) d(x, y) \leq 0$ y como $1 - k > 0$, tenemos que $d(x, y) = 0$. Luego $x = y$.

Por último, tomando $m \to \infty$ en (3.1), tenemos que

$$d(x_n, x) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, Tx_0),$$

lo que concluye la prueba.

□

La condición de que T sea contractiva es más fuerte de lo necesario. Basta con que exista un $n \in \mathbb{N}$ tal que T^n lo sea.

Corolario 3.5. *Sean* (X, d) *un espacio métrico completo y* $T : X \to X$ *una aplicación tal que* T^n *es una contracción para algún* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces* T *tiene un único punto fijo* $x \in X$.

Demostración. Como T^n es una contracción, por el Principio de Contracción de Banach existe un único $x \in X$ tal que $T^n x = x$. Entonces $T^{n+1}x = Tx$. Así, tenemos que $T^n(Tx) = Tx$. Luego Tx es también punto fijo de T^n. De la unicidad deducimos que $Tx = x$.

$\square$

3.2. Sucesiones de casi puntos fijos

Mientras que para las contracciones tenemos el Principio del Punto Fijo de Banach, podemos encontrar aplicaciones no expansivas en espacios métricos completos que carecen de puntos fijos. Veamos algunas.

Sea $\mathbb{C}$ visto como $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 2, con la métrica inducida por el módulo. Sea $T_\alpha : S^1 \to S^1$ dada por $T_\alpha z = \alpha z$, con $|\alpha| = 1$, donde S^1 es la circunferencia unidad. Si $z_1, z_2 \in S^1$, tenemos que

$$|T_\alpha z_1 - T_\alpha z_2| = |\alpha z_1 - \alpha z_2| = |\alpha||z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|.$$

Luego, T_α es no expansiva. Es más, es una isometría. Supongamos que T_α tiene un punto fijo. Sea este $z \in S^1$. Entonces, $\alpha z = z$ y esto es si y solo si $\alpha = 1$, donde T_1 es la identidad en S^1. Así, si consideramos $\alpha \neq 1$, T_α no tiene puntos fijo, y sin embargo S^1 es completo por ser subconjunto cerrado de $\mathbb{C}$.

Nuevamente en $\mathbb{C}$, consideremos $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$. Sea $a \geq 0$. Definimos $T_a : H \to H$ como $T_a z = z + a$. Entonces se cumple que $|T_a z_1 - T_a z_2| = |z_1 - z_2|, \forall z_1, z_2 \in H$. Así, T_a es no expansiva y, en particular, una isometría. En cambio, si $a \neq 0$, T_a no tiene puntos fijos.

Por último, consideramos en $\mathbb{R}$ el intervalo abierto $(0, 1)$ y $T : (0, 1) \to (0, 1)$ dada por $Tx = \frac{1}{2}x$. Entonces, $|Tx - Ty| \leq |x - y|$, pero no tiene puntos fijos pues el único es 0, que no pertenece a $(0, 1)$.

De esta forma hemos visto que, incluso en casos sencillos, la existencia de puntos fijos puede fallar cuando el conjunto sobre el que está definida la aplicación no es cerrado, convexo o acotado. Estas son condiciones que surgen de forma natural para asegurar la existencia de puntos fijos de una aplicación no expansiva, al tratar de usar la compacidad débil. Es por ello que definiremos la Propiedad de Punto Fijo como sigue.

Definición 3.6. *Diremos que un espacio de Banach* X *tiene la Propiedad del Punto Fijo si toda aplicación no expansiva* $T : K \to K$ *tiene al menos un punto fijo, con* $K \subset X$ *no vacío, acotado, cerrado y convexo.*

Un primer resultado que nos sugiere que debemos restringirnos a los conjuntos cerrados, convexos y acotados es el siguiente lema. Es más, es uno de los más centrales del trabajo. Será de gran utilidad en el Capítulo 5, pues nos permitirá caracterizar los puntos fijos de una aplicación en ultrapotencias. La prueba de este lema se encuentra en [7].

Lema 3.7. *Sean $K \subset X$ no vacío, cerrado, convexo y acotado y $T : K \to K$ no expansiva. Entonces* $\inf_{x\in K} \|x - Tx\| = 0$.

Demostración. Sean $z \in K$ y $0 < \varepsilon < 1$. Definimos $T_\varepsilon : K \to K$ como $T_\varepsilon x = \varepsilon z + (1-\varepsilon)Tx$. Esta aplicación está bien definida pues, por la convexidad de K, si $x \in K$ entonces $T_\varepsilon x \in K$.

Ahora bien, observamos que

$$\|T_\varepsilon x - T_\varepsilon y\| = \|(1-\varepsilon)(Tx - Ty)\| \leq (1-\varepsilon)\|x - y\|,$$

para todos $x, y \in K$, donde se ha usado la no expansividad de T. Así, T_ε es una contracción. Como además K es completo, por ser un subconjunto cerrado de un espacio completo, por el Principio de Contracción de Banach, existe $x_\varepsilon \in K$ punto fijo de T_ε.

Así, tenemos que

$$\|x_\varepsilon - Tx_\varepsilon\| = \|T_\varepsilon x_\varepsilon - Tx_\varepsilon\| = \|\varepsilon z + (1-\varepsilon)Tx_\varepsilon - Tx_\varepsilon\| = \varepsilon\|z - Tx_\varepsilon\| \leq \varepsilon \operatorname{diam} K.$$

Como K es acotado, $\operatorname{diam} K < \infty$ y tomando $\varepsilon \to 0^+$, se tiene lo que se quería probar.

□

De esta forma, nos encontramos con los *casi puntos fijos* de T. Es decir, en las condiciones del lema, podemos encontrar $x \in K$ tan cerca de Tx como queramos. Luego, en virtud de este resultado, en un conjunto no vacío, cerrado, convexo y acotado, podemos encontrar para toda T no expansiva una sucesión $\{x_n\}_n \subset K$ de forma que $\|x_n - Tx_n\| \to 0$. A esta sucesión la llamaremos sucesión de casi puntos fijos de T.

Además, de este lema se desprende un primer resultado de existencia de punto fijo para aplicaciones no expansivas.

Teorema 3.8. *Si $K \subset X$ es no vacío, compacto y convexo entonces toda $T : K \to K$ no expansiva posee al menos un punto fijo.*

Con este teorema ya podemos deducir que los espacios de Banach de dimensión finita poseen la Propiedad del Punto Fijo. Sin embargo, lo volveremos a probar haciendo uso de la ultrapotencia.

3.3. Estructura del conjunto de puntos fijos de una aplicación no expansiva

Denotamos por $\operatorname{Fix} T$ al conjunto de puntos fijos de la aplicación no expansiva T. Observamos los siguiente:

$$\operatorname{Fix} T = \{x \in X : Tx = x\} = \{x \in X : (T - Id)x = 0\} = (T - Id)^{-1}(0),$$

con $Id : X \to X$ la identidad. Como T e Id son continuas y $\{0\}$ es cerrado, podemos concluir que el conjunto de puntos fijos de una aplicación no expansiva es siempre cerrado.

La introducción del concepto de espacio de Banach estrictamente convexo nos permitirá dotar a $\operatorname{Fix} T$ de convexidad. Esta prueba se puede hallar en [7].

Proposición 3.9. *Sean X estrictamente convexo y $K \subset X$ cerrado y convexo. Si $T : K \to K$ es no expansiva entonces* $\operatorname{Fix} T$ *es cerrado y convexo.*

Demostración. El hecho de que $\operatorname{Fix} T$ sea cerrado ya se dedujo al principio de la presente sección como consecuencia de la continuidad de T.

Sean $x, y \in \operatorname{Fix} T$ y $z = \lambda x + (1 - \lambda)y \in K$, con $\lambda \in (0, 1)$. Entonces como $Tx = x$ y $Ty = y$, tenemos que

$$\|x - Tz\| + \|Tz - y\| = \|Tx - Tz\| + \|Tz - Ty\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$$

Como x, y y z están en el mismo segmento, $\|x - z\| + \|z - y\| = \|x - y\|$. Por tanto,

$$\|x - Tz\| + \|Tz - y\| \leq \|x - y\| = \|x - Tz + Tz - y\| \leq \|x - Tz\| + \|Tz - y\| .$$

De esta forma, las desigualdades pasan a ser igualdades y $\|x - Tz\| + \|Tz - y\| = \|x - y\|$. Luego, como X es estrictamente convexo, Tz está en el segmento que une a x e y, al igual que z. Ahora bien,

$$\|x - Tz\| = \|Tx - Tz\| \leq \|x - z\|$$
$$\|Tz - y\| = \|Tz - Ty\| \leq \|z - y\|$$

Por ende, Tz está tanto en el segmento que une x con z como en el que une z con y. Puesto que la intersección de ambos segmentos es únicamente z, concluimos que $Tz = z$, por lo que $z \in \operatorname{Fix} T$ y este conjunto es convexo.

□

Supongamos además que K es acotado. Entonces, como $\operatorname{Fix} T \subset K$, el conjunto de puntos fijos de T será también acotado. Al ser los espacios uniformemente convexos reflexivos (como consecuencia del Teorema 4.32, aunque fue probado de forma directa por B. J. Pettis en [16]), podemos dar la siguiente proposición.

Proposición 3.10. *Sean X uniformemente convexo y $K \subset X$ convexo, cerrado y acotado. Si $T : K \to K$ es no expansiva entonces* $\operatorname{Fix} T$ *es débilmente compacto.*

Demostración. Se deduce de la reflexividad de los espacios uniformemente convexos y la aplicación de la Proposición 3.9 y del Teorema 1.33.

□

3.4. Teorema del Punto Fijo de Kirk

En 1965, W.A. Kirk dio su resultado de punto fijo, en el que relacionaba la existencia de puntos fijos con la estructura normal de K. Esta conclusión a la que llegó Kirk abarcó los teoremas de punto fijo de Browder y Göhde, que pasaron a ser casos particulares del primero. Es por ello que a menudo se hace referencia a este teorema como Teorema de Brouwer-Göhde-Kirk. A pesar de que en los Capítulos 4 y 5 se desarrollará toda la teoría de ultrafiltros y superreflexividad para estudiar la existencia de puntos fijos, la mayoría de los resultados que obtendremos pueden ser vistos como consecuencias de este teorema.

Para poder probar este hecho, vamos a hacer primero un recorrido por algunas definiciones y resultados de geometría de espacios de Banach.

Definición 3.11. *Dados $K, L \subset X$, se definen:*

1. *El radio de Chebyshev de K respecto de $y \in X$, denotado por $r_y(K)$, como*
$$r_y(K) = \sup_{x \in K} \|y - x\|$$
2. *El radio de Chebyshev de K respecto de L, denotado como $r_L(K)$, como*
$$r_L(K) = \inf_{y \in L} r_y(K)$$
3. *El centro de Chebyshev de K respecto de L, que denotaremos como $C_L(k)$, como*
$$C_L(K) = \{y \in L : r_y(K) = r_L(K)\}$$

Cuando $L = K$, el radio y el centro de Chebyshev de K se denotarán por $r(K)$ y $C(K)$, respectivamente.

Observación 3.12. *Se tiene inmediatamente que $r(K) \leq r_y(K) \leq \operatorname{diam} K$, para cualquier $y \in K$.*

Proposición 3.13. *El radio de Chebyshev de K respecto de un punto es una función convexa.*

Demostración. Sean $x, y \in K$ y $\lambda \in [0, 1]$. Entonces, si $z \in K$,
$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1-\lambda)y - z\| = \|\lambda x + (1-\lambda)y - \lambda z + (1-\lambda)z\| \leq \\ \leq \lambda \|x - z\| + (1-\lambda)\|y - z\| . \end{aligned}$$

Tomando supremo en $z \in K$, obtenemos el resultado.

□

Veamos una primera propiedad del centro de Chebyshev, probada por W. A. Kirk en [14]

Proposición 3.14. *Si X es reflexivo entonces $C(K)$ es no vacío, cerrado y convexo, con K cerrado y convexo.*

Demostración. Sea $K(x, n) = \{y \in K : \|x - y\| \leq r(K) + \frac{1}{n}\}$. Estos son no vacíos pues $x \in K(x, n)$. Observamos que $K(x, n)$ es cerrado y convexo pues $K(x, n) = K \cap B\left(x, r(K) + \frac{1}{n}\right)$. Sea
$$C_n = \bigcap_{x \in K} K(x, n).$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $u_n \in K$ tal que $r_{u_n}(K) \leq r(K) + \frac{1}{n}$. Entonces $\|u_n - x\| \leq r(K) + \frac{1}{n}, \forall x \in K$. Por tanto, $u_n \in K(x, n), \forall x \in K$ y, por ende, $u_n \in C_n$. Luego, C_n es no vacío.

Además, $\{C_n\}_n$ es una sucesión decreciente ($C_n \supseteq C_{n+1}$) de cerrados convexos. Veámoslo.

Claramente son cerrados convexos por ser intersección de conjuntos de este tipo. Sea $y \in C_{n+1}$. Entonces, $y \in K(x,n), \forall x \in K$. Por tanto,

$$\|x-y\| \leq r(K) + \frac{1}{n+1} \leq r(K) + \frac{1}{n}, \forall x \in K.$$

Luego, $y \in C_n$.

Con esto, consideramos $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. Como X es reflexivo, y $\{C_n\}_n$ es una sucesión decreciente de conjuntos no vacíos, acotados, cerrados y convexos, por el Teorema 1.34, tenemos que esta intersección es no vacía. Además, es acotada, cerrada y convexa, por ser intersección de conjuntos de este tipo. Veamos que coincide con $C(K)$.

Sea $x \in C(K)$. Entonces $r_x(K) = r(K)$. Así, para todo $y \in K$ tenemos que

$$\|x-y\| \leq \sup_{y \in K} \|x-y\| = r_x(K) = r(K) \leq r(K) + \frac{1}{n}, \forall n \geq 1.$$

Con esto, $x \in K(y,n), \forall y \in K, \forall n \geq 1$. Esto es, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.

Ahora, sea $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. Entonces $\|x-y\| \leq r(K) + \frac{1}{n}, \forall y \in K, \forall n \geq 1$. Tomando límite en n, tenemos que $\|x-y\| \leq r(K), \forall y \in K$. Si tomamos ahora supremo en $y \in K$, obtenemos $r_x(K) \leq r(K)$. Como siempre se tiene que $r(K) \leq r_x(K)$, concluimos que $r_x(K) = r(K)$, con lo que $x \in C(K)$.

Por tanto, $C(K) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, luego este es no vacío, cerrado y convexo.

□

Definición 3.15. *Un punto $y \in K$ se dirá diametral si $r_y(K) = \operatorname{diam} K$. En caso contrario, se dirá no diametral. Un conjunto se dirá diametral si todos sus puntos lo son.*

La definición de estructura normal fue dada por primera vez por M. S. Brodskii y D. P. Milman en 1948 y fue el concepto que explotó Kirk para dar su teorema de punto fijo, que veremos al final del capítulo.

Definición 3.16. *Un subconjunto convexo $K \subset X$ se dice que tiene estructura normal si todo subconjunto acotado y convexo $S \subset K$, con $\operatorname{diam} S > 0$, contiene al menos un punto no diametral.*

Esto es, si K tiene estructura normal, sus únicos subconjuntos diametrales convexos son los unitarios. Es decir, si $S \subset K$ es convexo, acotado y $\operatorname{diam} S > 0$ entonces $r(S) < \operatorname{diam} S$.

A través del siguiente tipo de sucesiones, las sucesiones diametrales, somos capaces de caracterizar la estructura normal.

La introducción de los conjuntos T-invariantes nos facilita la tarea de la búsqueda de puntos fijos, como veremos a continuación.

Definición 3.17. *Una sucesión acotada $\{x_n\}_n \subset X$ se dice diametral si no es constante a partir de un término y si*

$$\lim_{n \to \infty} d(x_{n+1}, \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_n\}) = \operatorname{diam}\{x_1, x_2, \dots\}$$

Proposición 3.18. *Un conjunto convexo y acotado $K \subset X$ tiene estructura normal si y solo si no contiene ninguna sucesión diametral.*

A pesar de que esta equivalencia no es utilizada en este trabajo destacamos que su demostración se puede ver en [7].

Definición 3.19. *Dado $K \subset X$, un subconjunto $D \subset K$ no vacío, cerrado y convexo se dirá T-invariante si $T(D) \subset D$. Además, si D no contiene ningún otro subconjunto no vacío, cerrado, convexo y T-invariante, se dice que es T-invariante minimal.*

Una primera observación es que si $\{D_i\}_{i\in I} \subset K$ es una familia de conjuntos no vacíos, cerrados, convexos y T-invariantes, entonces su intersección es claramente cerrada y convexa. Además, como $T(D_i) \subset D_i, \forall i \in I$ se verifica

$$T\left(\bigcap_{i\in I} D_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} T(D_i) \subset \bigcap_{i\in I} D_i,$$

por lo que la intersección es también T-invariante. Sin embargo, no podemos asegurar que sea no vacía.

Los conjuntos T-invariantes resultan interesantes pues podemos centrar el estudio de la existencia de puntos fijos de $T : K \to K$ en ellos pues, si T posee algún punto fijo en K, forzosamente ha de estar en algún subconjunto T-invariante de K. Es más, en caso de existir, podríamos reducir el estudio a los conjuntos T-invariantes minimales. El lema de Zorn nos asegura la existencia de estos en los conjuntos débilmente compactos de un espacio de Banach.

Teorema 3.20. *Sea $K \subset X$ no vacío y débilmente compacto. Entonces para toda aplicación no expansiva $T : K \to K$ existe un subconjunto débilmente compacto de K que es T-invariante minimal.*

Demostración. Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de subconjuntos débilmente compactos y T-invariantes de K. Claramente esta familia es no vacía pues $K \in \mathcal{M}$. Consideramos en $\mathcal{M}$ el orden dado por

$$K_1 \leq K_2 \iff K_1 \subset K_2,$$

con $K_1, K_2 \in \mathcal{M}$. Sean $\mathcal{C}$ una cadena en $\mathcal{M}$ y $C_\infty = \bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$.

Veamos que C_∞ es no vacío. Como $\mathcal{C}$ está totalmente ordenado por $\leq$, los conjuntos de la intersección están encajados. Esto es, si $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ entonces $C_\alpha \subset C_\beta$, con $\alpha \leq \beta$. Sea $\{C_{\alpha_1}, \dots, C_{\alpha_n}\} \subset \mathcal{C}$. Como están encajados, sin pérdida de generalidad, podemos ordenarlos como $C_{\alpha_1} \subset \cdots \subset C_{\alpha_n}$. Ahora bien, $C_{\alpha_1} \in \mathcal{M}$ y por ello es no vacío. Entonces existe $x \in C_{\alpha_1}$ y por ende $x \in C_{\alpha_i}, 1 \leq i \leq n$. Por tanto, $\bigcap_{i=1}^n C_{\alpha_i} \neq \varnothing$. Así, $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de intersección finita y, puesto que K es débilmente compacto, concluimos que $C_\infty = \bigcap_{C\in\mathcal{C}} C \neq \varnothing$.

Veamos ahora que C_∞ es débilmente compacto. Como cada $C \in \mathcal{C}$ es débilmente compacto y la topología débil es Hausdorff, tenemos que son débilmente cerrados. Entonces C_∞ es debilmente cerrado. Ahora bien, $C_\infty \subset C, \forall C \in \mathcal{C}$. Luego C_∞ es un conjunto débilmente cerrado contenido en conjuntos débilmente compactos. Nuevamente, como la topología débil es Hausdorff, se concluye que C_∞ es débilmente compacto.

Por último, como sabemos que la intersección arbitraria de conjunto T-invariantes es T-invariante, C_∞ es T-invariante.

Con esto, $C_\infty \in \mathcal{M}$. Además, con el orden de $\mathcal{M}$ tenemos que $C_\infty \leq C, \forall C \in \mathcal{C}$. Esto es, C_∞ es cota inferior de la cadena. Por el Lema de Zorn, Lema 1.1, tenemos que existe un elemento minimal de $\mathcal{M}$, lo que concluye la prueba.

□

Los conjuntos T-invariantes minimales que tratamos se pueden expresar de una forma muy particular, que nos resultará útil a la hora de probar el Teorema de Kirk.

Lema 3.21. *Si K es no vacío, cerrado, convexo y T-invariante minimal, entonces*

$$K = \overline{\operatorname{conv}}(T(K))$$

Demostración. Por definición, $\overline{\operatorname{conv}}(T(K))$ es cerrado y convexo. Observamos que como K es T-invariante

$$T(K) \subset K \implies \overline{\operatorname{conv}}(T(K)) \subset \overline{\operatorname{conv}}(K) \implies \overline{\operatorname{conv}}(T(K)) \subset K$$

Además, $\overline{\operatorname{conv}}(T(K))$ es T-invariante, pues

$$\overline{\operatorname{conv}}(T(K)) \subset K \implies T(\overline{\operatorname{conv}}(T(K))) \subset T(K) \subset \overline{\operatorname{conv}}(T(K))$$

Así, $\overline{\operatorname{conv}}(T(K)) \subset K$ con $\overline{\operatorname{conv}}(T(K))$ cerrado, convexo y T-invariante. De la minimalidad de K se deduce el resultado.

□

Estas dos últimas pruebas pueden ser consultadas en [7].

El siguiente lema puede ser consultado en [1]. Este no sólo nos ayudará a probar que un conjunto T-invariante minimal es diametral sino que también será usado posteriormente en el Capítulo 5 para probar el Lema de Goebel-Karlovitz.

Lema 3.22. *Sean K no vacío, cerrado, convexo y T-invariante minimal y $\alpha : K \to [0, +\infty]$ semicontinua inferiormente y convexa. Si α es tal que*

$$\alpha(Tx) \leq \alpha(x),$$

para todo $x \in K$ entonces α es constante.

Demostración. Fijamos $x_0 \in K$. Definimos $K_0 = \{x \in K : \alpha(x) \leq \alpha(x_0)\}$. Como α es semicontinua inferiormente y convexa, tenemos que K_0 es cerrado y convexo. Además, si $x \in K_0$

$$\alpha(Tx) \leq \alpha(x) \leq \alpha(x_0).$$

Luego, $Tx \in K_0$, por lo que K_0 es T-invariante. Así, $K_0 \subset K$ es cerrado, convexo y T-invariante. Por la minimalidad de K, tenemos que $K = K_0$. Esto es, $\alpha(x) \leq \alpha(x_0), \forall x \in K$. Ahora bien, $x_0 \in K$ era arbitrario, por lo que $\alpha(x) \leq \alpha(y), \forall x, y \in K$. Entonces

$$\alpha(y) \leq \alpha(x) \leq \alpha(y),$$

por lo que $\alpha(x) = \alpha(y), \forall x, y \in K$ y, por tanto, α es constante.

□

La siguiente proposición es consecuencia del Lema 3.21 y la idea de la demostración puede ser vista en [8].

Proposición 3.23. *Si K es T-invariante minimal entonces K es diametral.*

Demostración. Sea $x \in K$. Entonces por la definición de $r_x(K)$, tenemos que $K \subset B(x, r_x(K))$. Es más, si $z \in T(K)$, existe $y \in K$ tal que $z = Ty$. Así, por la no expansividad de T, tenemos que

$$\|z - Tx\| = \|Ty - Tx\| \leq \|y - x\| \leq r_x(K).$$

Luego, $T(K) \subset B(Tx, r_x(K))$. Ahora, por el Lema 3.21, $K = \overline{\mathrm{conv}} T(K)$. Como, $\overline{\mathrm{conv}} T(K) \subset B(Tx, r_x(K))$, concluimos que $K \subset B(Tx, r_x(K))$. Entonces, $\|Tx - y\| \leq r_x(K)$, con lo que se concluye que $r_{Tx}(K) \leq r_x(K)$.

Ahora, si consideramos la familia de funciones de x, $\{\|x - y\|\}_{y \in K}$, tenemos que $r_x(K) = \sup_{y \in K} \|x - y\|$ es semicontinua inferiormente. Por la Proposición 3.13, es convexo. Además, acabamos de ver que $r_{Tx}(K) \leq r_x(K), \forall x \in K$. Así, por el Lema 3.22 tenemos que $r_x(K)$ es constante. Sea $r_x(K) = r, \forall x \in K$.

Por tanto,

$$\operatorname{diam} K = \sup_{x.y \in K} \|x - y\| = \sup_{y \in K} r_x(K) = \sup_{y \in K} r = r.$$

Luego, $r_x(K) = \operatorname{diam} K, \forall x \in K$, con lo que todos los puntos de K son diametrales.

□

El siguiente lema fue también probado por Kirk en [14]. Es en este lema donde la estructura normal desempeña un papel fundamental para establecer el resultado de Kirk.

Lema 3.24. *Sea $K \subset X$ cerrado y convexo tal que* $\operatorname{diam} K > 0$. *Si K tiene estructura normal entonces* $\operatorname{diam} C(K) < \operatorname{diam} K$.

Demostración. Como $\operatorname{diam} K > 0$, K tiene más de un punto y, como tiene estructura normal, al menos uno de ellos es no diametral. Sea este x. Entonces este verifica que $r_x(K) < \operatorname{diam}(K)$.

Observamos que

$$\|z - y\| \leq \sup_{y \in K} \|z - y\| = r_z(K) = r(K),$$

para todos $y, z \in C(K)$.

Con esto,

$$\operatorname{diam} C(K) = \sup_{y,z \in C(K)} \|z - y\| \leq r(K) \leq r_x(K) < \operatorname{diam} K.$$

□

Luego, este resultado nos permite asegurar que si K tiene estructura normal entonces su centro de Chebyshev es siempre un subconjunto propio suyo. Este último hecho nos da ya todo lo necesario para ver la prueba de Kirk de su resultado de existencia de puntos fijo.

Teorema 3.25 (de Kirk)**.** *Sean X reflexivo y $K \subset X$ no vacío, cerrado, convexo, acotado y con estructura normal. Entonces toda aplicación no expansiva $T : K \to K$ tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Como X es reflexivo y K es no vacío, cerrado, convexo y acotado, por el Teorema 1.33, K es débilmente compacto. Entonces por el Teorema 3.20 tiene un subconjunto débilmente compacto T-invariante minimal. Supongamos entonces, sin pérdida de generalidad, que K es en sí un conjunto T-invariante minimal. Entonces por el Lema 3.21, tenemos que $K = \overline{\text{conv}}(T(K))$.

Sea $x \in C(K)$. Esto es, $r_x(K) = r(K)$. Como

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \leq r_x(K) = r(K), \forall y \in K,$$

tenemos que $T(K) \subset B(Tx, r(K))$. Luego,

$$K = \overline{\text{conv}}(T(K)) \subset \overline{\text{conv}} B(Tx, r(K)) = B(Tx, r(K)),$$

pues $B(Tx, r(K))$ es cerrado y convexo. Entonces $\|y - Tx\| \leq r(K), \forall y \in K$. Si tomamos supremo en $y \in K$, tenemos que $r_{Tx}(K) \leq r(K)$. Luego, $r_{Tx}(K) = r(K)$. Por tanto, $Tx \in C(K)$. De esta forma, $T(C(K)) \subset C(K)$ y, por ende, $C(K)$ es T-invariante. Además, por la Proposición 3.14, también es no vacío, cerrado y convexo. Pero si $\text{diam}(K) > 0$, por el Lema 3.24, $C(K)$ es un subconjunto propio de K, lo que contradice la minimalidad de K. Entonces $\text{diam}(K) = 0$. Así, $K = \{x\}$ y $Tx = x$.

□

Esta demostración, que en esencia es la que dio Kirk en [14], es no constructiva en el sentido de que usa el Lema de Zorn para asegurar la existencia de un subconjunto T-invariante minimal, paso fundamental en la prueba. Sin embargo, se han encontrado demostraciones constructivas de este resultado. Dos de ellas pueden ser encontradas en [7].

Para dar un resultado en términos de la Propiedad del Punto Fijo, damos la definición de espacio de Banach con estructura normal.

Definición 3.26. *Un espacio de Banach se dice que tiene estructura normal si todo subconjunto convexo y acotado suyo tiene estructura normal.*

Así, el Teorema de Kirk nos dice que todo espacio de Banach reflexivo con estructura normal posee la Propiedad del Punto Fijo.

Capítulo 4

Ultraproducto y ultrapotencia. Superreflexividad

4.1. Ultrafiltros

Como bien indica su nombre, un filtro sobre un conjunto diferencia los subconjuntos que este considera "grandes" de los que no. Es decir, filtra los subconjuntos de un conjunto dado. En esta sección nos centraremos en el estudio de los filtros maximales, los ultrafiltros.

Definición 4.1. *Sea S un conjunto no vacío. Un filtro $\mathcal{F}$ en S es una colección de subconjuntos no vacíos de S tales que*

1. *si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.*
2. *si $A \in \mathcal{F}$ y $B \supset A$ entonces $B \in \mathcal{F}$.*

Como hemos dicho, nos interesa estudiar los filtros maximales. Lo primero que cabe preguntarse entonces es si para cualquier conjunto podemos siempre encontrar un filtro maximal. El Lema de Zorn da una respuesta afirmativa a esta pregunta aunque, como es habitual al usar este resultado, no nos da una forma de construir estos filtros maximales.

Teorema 4.2. *Para todo conjunto no vacío existe un filtro maximal.*

Demostración. Sea $\mathcal{M}$ la familia formada por todos los filtros de S, ordenada por la inclusión. Sea $\mathcal{C}$ una cadena en $\mathcal{M}$. Definimos

$$E = \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{C}} \mathcal{F}.$$

Veamos que $E \in \mathcal{M}$. Esto es, que E es un filtro de S. Como cada $\mathcal{F}$ es un filtro, $\varnothing \notin \mathcal{F}, \forall \mathcal{F} \in \mathcal{C}$. Por ello, $\varnothing \notin E$. Por otra parte:

1. Sean $A, B \in E$. Entonces existen $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{C}$ tales que $A \in \mathcal{F}_1$ y $B \in \mathcal{F}_2$. Como $\mathcal{C}$ es cadena, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$. Luego, $A, B \in \mathcal{F}_2$. Como $\mathcal{F}_2$ es filtro, tenemos que $A \cap B \in \mathcal{F}_2$. Y, por tanto, $A \cap B \in E$.

2. Sean $A \in E$ y $B \supset A$. Entonces existe $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ tal que $A \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es filtro y $B \supset A$, se tiene que $B \in \mathcal{F}$. Luego, $B \in E$.

Por tanto, $E \in \mathcal{M}$. Además, $\mathcal{F} \subset E, \forall \mathcal{F} \in \mathcal{C}$. Así, E es una cota superior de $\mathcal{C}$. Por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal en $\mathcal{M}$. Es decir, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}, \forall \mathcal{F} \in \mathcal{M}$.

□

Definición 4.3. *A un filtro maximal de un conjunto no vacío S se le denominará ultrafiltro.*

Como ya hemos mencionado, el uso del Lema de Zorn no nos permite dar una forma explícita de los ultrafiltros en un conjunto S, salvo en un caso específico. Estos son los ultrafiltros llamados triviales o principales, que son aquellos generados por un elemento $s_0 \in S$, es decir, formados por los subconjuntos de S que contienen a s_0. Denominaremos libres o no principales a los ultrafiltros no triviales.

Proposición 4.4. *Los ultrafiltros triviales son efectivamente filtros maximales.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U \subset S : s_0 \in U\}$. Obviamente, $\varnothing \notin \mathcal{U}$. Además,

1. si $A, B \in \mathcal{U}$, entonces $s_0 \in A$ y $s_0 \in B$. Luego, $s_0 \in A \cap B$ y, por tanto, $A \cap B \in \mathcal{U}$.
2. si $A \in \mathcal{U}$ y $B \supset A$ entonces $s_0 \in A \subset B$, por lo que $B \in \mathcal{U}$.

Ahora, supongamos que existe $\mathcal{V}$ filtro en S tal que $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. Sea $V \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$. Entonces, $s_0 \notin V$. Así, $s_0 \in S \setminus V$, con lo que $S \setminus V \in \mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. De esta forma, $V, S \setminus V \in \mathcal{V}$ por lo que $\varnothing \in \mathcal{V}$, que supone una contradicción. Por tanto, $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ y el filtro es maximal.

□

Vamos ahora a dar una propiedad fundamental de los ultrafiltros, que puede ser encontrada en [7].

Proposición 4.5. *Si $\mathcal{U}$ es ultrafiltro de S y $A \subset S$ entonces o bien $A \in \mathcal{U}$ o bien $S \setminus A \in \mathcal{U}$.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que ni A ni $S \setminus A$ están en $\mathcal{U}$. Observamos que entonces $A \neq \varnothing$, pues en caso contrario $S \setminus A = S \in \mathcal{U}$.

Sea $U \in \mathcal{U}$. Entonces $A \cap U \neq \varnothing$, pues si fuera vacío, $U \subseteq S \setminus A$ y, por ser $\mathcal{U}$ ultrafiltro, $S \setminus A \in \mathcal{U}$, lo que supone contradicción con lo que habíamos supuesto. Además es un subconjunto propio de U. Supongamos que $A \cap U = U$. Entonces $U \subset A$, lo que implicaría que $A \in \mathcal{U}$, contradicción.

Por último, $A \cap U \notin \mathcal{U}$ pues si lo estuviera, como $A \cap U \subset A$, tendríamos que $A \in \mathcal{U}$.

De esta forma tenemos que $A \cap U$ es un subconjunto propio de U no vacío que no pertenece al ultrafiltro. Consideramos entonces $\mathcal{V} = \{C \subset S : \exists U \in \mathcal{U}, A \cap U \subset C\}$.

Tenemos que si $U \in \mathcal{U}$, como $A \cap U \subset U$ entonces $U \in \mathcal{V}$. Luego, $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. Además, la contención es estricta pues $A \in \mathcal{V}$ pero $A \notin \mathcal{U}$.

Veamos por último que $\mathcal{V}$ es filtro de S. Como hemos visto que $A \cap U \neq \varnothing, \forall U \in \mathcal{U}$, tenemos que $\varnothing \notin \mathcal{V}$.

1. Sean $B, C \in \mathcal{V}$. Entonces existen $U, V \in \mathcal{U}$ tales que $A \cap U \subset B$ y $A \cap V \subset C$. Luego,

$$A \cap (U \cap V) = (A \cap U) \cap (A \cap V) \subset B \cap C,$$

   donde $U \cap V \in \mathcal{U}$ por ser este ultrafiltro. Por tanto, $B \cap C \in \mathcal{V}$.

2. Sean $B \in \mathcal{V}$ y $C \supset B$. Entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $A \cap U \subset B \subset C$. Luego, $C \in \mathcal{V}$.

Así, $\mathcal{V}$ es un filtro que contiene estrictamente a $\mathcal{U}$, lo que resulta una contradicción con la maximalidad de $\mathcal{U}$.

Entonces, o $A \in \mathcal{U}$ o $S \setminus A \in \mathcal{U}$. Además, no pueden estar los dos a la vez, pues si lo estuvieran $\varnothing = A \cap (S \setminus A) \in \mathcal{U}$.

□

Destacamos un tipo especial de ultrafiltros, los numerablemente incompletos.

Definición 4.6. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre S. Diremos que $\mathcal{U}$ es numerablemente incompleto si existen elementos de $\mathcal{U}$, $U_1 \supset U_2 \supset \dots$, tales que $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = \varnothing$.*

Evidentemente, cualquier ultrafiltro numerablemente incompleto es libre. En el caso en el que el conjunto sobre el que está definido el ultrafiltro sea $\mathbb{N}$, se da también el recíproco.

Teorema 4.7. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$. Entonces $\mathcal{U}$ es libre si y solo si es numerablemente incompleto.*

Demostración. Si $\mathcal{U}$ es numerablemente incompleto, claramente es libre. En caso contrario, cualquier intersección numerable de conjuntos de $\mathcal{U}$ contendría al menos al elemento generador del ultrafiltro, por lo que no sería numerablemente incompleto.

Recíprocamente, sea $\mathcal{U}$ libre en $\mathbb{N}$. Sean $T_i = \mathbb{N} \setminus \{i\}, i \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 4.5, o bien $\{i\} \in \mathcal{U}$ o bien $T_i \in \mathcal{U}$. Si $\{i\} \in \mathcal{U}$ entonces $\mathcal{U}$ sería trivial, pues si existiese $U \in \mathcal{U}$ tal que $i \notin U$ entonces $\{i\} \cap U = \varnothing \in \mathcal{U}$, lo que resulta absurdo. Por ello $T_i \in \mathcal{U}, \forall i \in \mathbb{N}$.

Sea $\{S_n\}_n \subset \mathcal{U}$ dada por $S_n = \bigcap_{i=1}^{n} T_i$. Así definida, es una sucesión decreciente, es decir, $S_n \supset S_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Veamos que su intersección es vacía, con lo que obtendremos el resultado deseado.

Supongamos que existe $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$. Entonces $x \in S_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Esto es, $x \in \bigcap_{i=1}^{n} T_i, \forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $x \in T_i, \forall i \in \mathbb{N}$. Así, $x \neq i, \forall i \in \mathbb{N}$, lo que contradice el hecho de que $x \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \varnothing$.

□

La gran utilidad de los ultrafiltros en el Análisis Funcional (y en Topología en general) reside en la siguiente definición, que nos permite generalizar el concepto de convergencia en espacios topológicos.

Definición 4.8. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en un conjunto S. Sea $\{x_i\}_{i \in S} \subset X$. Diremos que $\{x_i\}_{i \in S}$ converge a $x \in X$ respecto de $\mathcal{U}$ si para todo entorno V de x se tiene que $\{i \in S : x_i \in V\} \in \mathcal{U}$. En tal caso, lo denotaremos como*

$$\lim_{\mathcal{U}} x_i = x$$

La utilidad de este nuevo concepto de convergencia se pondrá en manifiesto cuando usemos ultrafiltros libres. En el caso de los ultrafiltros triviales se sabe inmediatamente quién es el límite.

Sean $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro trivial en S, generado por $i_0 \in S$, $\{x_i\}_{i\in S} \subset X$ y $V \subset X$ entorno de x_{i_0}. Como $x_{i_0} \in V$, tenemos que $i_0 \in \{i \in S : x_i \in V\}$. Por tanto, $\{i \in S : x_i \in V\} \in \mathcal{U}$, para cualquier entorno V de x_{i_0}. Entonces $\lim_{\mathcal{U}} x_i = x_{i_0}$.

El siguiente teorema es fundamental y nos muestra que realmente esta nueva noción de límite es menos exigente que la de límite topológico habitual. Nos asegura que en un espacio compacto y Hausdorff cualquier sucesión tiene un único límite respecto a un ultrafiltro, hecho que está lejos de cumplirse para los límites habituales. Para ello, basta considerar el intervalo compacto y Hausdorff $[0,1]$ (en la topología relativa de $\mathbb{R}$), la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset [0,1]$, dada por $x_{2n-1} = 1$ y $x_{2n} = 0$, y cualquier ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$. Su prueba puede hallarse en [7].

Teorema 4.9. *Sean X un espacio de Hausdorff compacto, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en S y $\{x_i\}_{i\in S} \subset X$. Entonces existe un único $x \in X$ tal que $\lim_{\mathcal{U}} x_i = x$.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que no existe $x \in X$ tal que $\lim_{\mathcal{U}} x_i = x$. Entonces para todo $x \in X$, existe un entorno suyo, $V(x)$, tal que $S(x) = \{i \in S : x_i \in V(x)\} \notin \mathcal{U}$. Ahora bien, $\{V(x)\}_{x\in X}$ es un recubrimiento por abiertos de X. Luego, por compacidad, existen $x^1, \ldots, x^n \in X$ tales que $X = \bigcup_{k=1}^n V(x^k)$. Tomando complementario, tenemos entonces que $\bigcap_{k=1}^n (X \setminus V(x^k)) = \varnothing$. Como además

$$X \setminus V(x^k) = \{x \in X : x \notin V(x^k)\} \supset \{x_i : x_i \notin V(x^k)\},$$

tenemos que $\bigcap_{k=1}^n \{x_i : x_i \notin V(x^k)\} = \varnothing$. Esto es,

$$\bigcap_{k=1}^{n} \{i \in S : x_i \notin V(x^k)\} = \bigcap_{k=1}^{k} (S \setminus S(x^k)) = \varnothing. \tag{4.1}$$

Ahora, como $S(x) \notin \mathcal{U}, \forall x \in X$, por la Proposición 4.5 tenemos $S \setminus S(x) \in \mathcal{U}, \forall x \in X$. En particular, esto se tendría para los $x^k, 1 \leq k \leq n$, luego su intersección estaría en $\mathcal{U}$, lo cual supone una clara contradicción con (4.1).

Veamos ahora la unicidad. Sean $x, y \in X$ distintos tales que $x = \lim_{\mathcal{U}} x_i = y$. Como X es Hausdorff, existen $V(x)$ y $V(y)$ entorno abiertos de x e y, respectivamente, tales que $x \in V(x), y \in V(y)$ y $V(x) \cap V(y) = \varnothing$.

Ahora, como $\lim_{\mathcal{U}} x_i = x$, para todo entorno U de x se tiene que

$$S(U) = \{i \in S : x_i \in U\} \in \mathcal{U}.$$

Por la misma razón, para todo entorno V de y se tiene que

$$S(V) = \{i \in S : x_i \in V\} \in \mathcal{U}.$$

En particular, se tiene que $S(V(x)), S(V(y)) \in \mathcal{U}$. Luego, $S(V(x)) \cap S(V(y)) \in \mathcal{U}$. Pero

$$S(V(x)) \cap S(V(y)) = \{i \in S : x_i \in V(x), x_i \in V(y)\} = \{i \in S : x_i \in V(x) \cap V(y)\} = \varnothing,$$

y llegamos a contradicción. Luego, el límite es único.

□

Seguimos estudiando este nuevo límite. Antes de continuar, veamos un resultado auxiliar, que nos da una forma de caracterizar los ultrafiltros triviales y, por ende, los libres.

Lema 4.10. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre S. Entonces $\mathcal{U}$ es trivial si y solo si existe $A \subset S$ finito tal que $A \in \mathcal{U}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U}$ es trivial. Entonces existe $i_0 \in S$ tal que

$$\mathcal{U} = \{B \subset S : i_0 \in B\},$$

con lo que basta tomar $A = \{i_0\}$.

Ahora, supongamos que existe $A \in \mathcal{U}$ finito. Entonces $\mathcal{P}(A)$ es también finito. Consideramos la familia de conjuntos finita

$$\mathcal{M} = \{B \subset A : B \in \mathcal{U}\},$$

ordenada con la inclusión. Se tiene que $\mathcal{M}$ es no vacío pues $A \in \mathcal{M}$. Por tanto, podemos construir el elemento

$$C = \bigcap_{B \in \mathcal{M}} B,$$

que pertenece a $\mathcal{U}$ por ser intersección de elementos de $\mathcal{U}$ que están contenidos en A. Este C es no vacío pues está definido a partir de una intersección finita de elementos del ultrafiltro $\mathcal{U}$. Además, $C \in \mathcal{U}$. Así, C es un elemento minimal en $\mathcal{M}$, pues por construcción $C \subset B, \forall B \in \mathcal{M}$.

Veamos que $\mathcal{U} = \{U \subset S : C \subset U\}$. Una de las inclusiones es trivial. Como $C \in \mathcal{U}$ entonces todo $U \subset S$ tal que $C \subset U$ estará también en $\mathcal{U}$.

Ahora, sea $U \in \mathcal{U}$. Entonces $U \cap C \in \mathcal{U}$ y $U \cap C \subset C \subset A$. Luego $U \cap C \in \mathcal{M}$. Pero C era un elemento minimal de $\mathcal{M}$. Por ello, $U \cap C = C$ y, por tanto, $C \subset U$.

Por último, veamos que C es unitario. Supongamos que no, que existen $E, F \subset S$ tales que $C = E \sqcup F$, con $E \neq \varnothing \neq F$. Ahora, como C es minimal en $\mathcal{M}$ tenemos que $E, F \notin \mathcal{M}$. Pero $E, F \subset C \subset A$. Por ello, $E, F \notin \mathcal{U}$. Por la Proposición 4.5 entonces $S \setminus E, S \setminus F \in \mathcal{U}$. Por tanto, $C \cap (S \setminus E) \in \mathcal{U}$. Pero $C \cap (S \setminus E) = F$, que habíamos dicho que no estaba en $\mathcal{U}$. Así, tenemos contradicción y C es unitario.

Luego, con todo esto, tenemos que existe $s_0 \in S$ tal que $\mathcal{U} = \{U \subset S : s_0 \in U\}$. Por tanto, $\mathcal{U}$ es trivial.

□

Observación 4.11. *Equivalentemente, este resultado nos dice que $\mathcal{U}$ es libre si y solo si todos sus elementos son conjuntos infinitos.*

Teorema 4.12. *Sean $\mathcal{U}$ un ultrafiltro libre en $\mathbb{N}$, X un espacio topológico y $\{x_n\}_n \subset X$. Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ entonces $\lim_{\mathcal{U}} x_n = x$.*

Demostración. Sea $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Entonces para todo entorno $V \subset X$ de x existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V, \forall n \geq n_0$.

Sea $A_V = \{i \in \mathbb{N} : x_n \in V\}$. Por lo mencionado antes, tenemos entonces que $\mathbb{N} \setminus A_V$ es finito y, como además $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro libre, tenemos que por el Lema 4.10, $\mathbb{N} \setminus A_V \notin \mathcal{U}$. Así, por la Proposición 4.5, tenemos que $A_V \in \mathcal{U}$. Por ello, $\lim_{\mathcal{U}} x_n = x$.

$\square$

Así, tenemos que la noción de límite con respecto a un ultrafiltro es compatible con la de convergencia topológica y que, efectivamente, la generaliza. En general, el recíproco no es cierto. Para verlo, podemos considerar nuevamente $[0,1]$ y la sucesión $\{x_n\}_{n\leq 1} \subset [0,1]$, con $x_{2n-1} = 1$ y $x_{2n} = 0$, que sabemos por el Teorema 4.9 que tiene un único límite respecto a un ultrafiltro y, sin embargo, no existe $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Los tres resultados que se muestran a continuación hacen referencia a propiedades que resulta natural que posea un concepto de convergencia. Estas son buen comportamiento con respecto a las funciones continuas, en el sentido que se precisa después, y monotonía. Como consecuencia de la primera veremos que la convergencia respecto de un ultrafiltro respeta la estructura lineal de un espacio vectorial topológico.

Proposición 4.13. *Sean X e Y dos espacios topológicos Hausdorff y $f : X \to Y$ continua. Sea $\mathcal{U}$ ultrafiltro en S. Si $\{x_i\}_i \subset X$ es tal que $\lim_{\mathcal{U}} x_i$ existe y es igual a $x \in X$ entonces $\lim_{\mathcal{U}} f(x_i)$ existe y es $f(x) \in Y$.*

Demostración. Sean V entorno de $f(x)$ y $A_V = \{i \in S : f(x_i) \in V\}$. Tenemos que

$$A_V = \{i \in S : x_i \in f^{-1}(V)\}.$$

Como V es entorno de $f(x)$ y f es continua, tenemos que $f^{-1}(V)$ es entorno de x. Entonces como $\lim_{\mathcal{U}} x_i = x$, tenemos que $A_V \in \mathcal{U}$, que era lo que queríamos ver.

$\square$

Corolario 4.14. *Sean X un $\mathbb{R}$-espacio vectorial topológico, $\{x_i\}_i, \{y_i\}_i \subset X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Siempre que exista el límite respecto a un ultrafiltro libre $\mathcal{U}$ en un conjunto S, se verifican las siguientes propiedades:*

1. $\lim_{\mathcal{U}} \alpha x_i = \alpha \lim_{\mathcal{U}} x_i$.
2. $\lim_{\mathcal{U}}(x_i + y_i) = \lim_{\mathcal{U}} x_i + \lim_{\mathcal{U}} y_i$.

Demostración. 1. Para probar el primer enunciado simplemente basta notar que $m_\alpha : X \to X, \alpha \in \mathbb{R}$, dada por

$$m_\alpha(x) = \alpha x$$

es continua, por ser X espacio vectorial topológico, y usar la Proposición 4.13.

2. Sea $\{(x_i, y_i)\}_i \subset X \times X$ tal que $\lim_{\mathcal{U}}(x_i, y_i) = (x, y) \in X \times X$. Veamos que entonces $\lim_{\mathcal{U}} x_i = x$ y $\lim_{\mathcal{U}} y_i = y$.

Sean $V, W \subset X$ entornos de x e y, respectivamente. Sean

$$B_V = \{i \in S : x_i \in V\}$$

$$C_W = \{i \in S : y_i \in W\}.$$

Tenemos entonces que

$$B_V \cap C_W = \{i \in S : x_i \in V, y_i \in W\} = \{i \in S : (x_i, y_i) \in V \times W\}$$

Como V es entorno de x y W lo es de y, tenemos que $V \times W$ es entorno de (x, y) en la topología producto. Así, puesto que $\lim_{\mathcal{U}}(x_i, y_i) = (x, y)$, concluimos que $B_V \cap C_W \in \mathcal{U}$. Por último, como $B_V \cap C_W \subset B_V, C_W$, concluimos que $B_V, C_W \in \mathcal{U}$. Por ello, $\lim_{\mathcal{U}} x_i = x$ y $\lim_{\mathcal{U}} y_i = y$.

Por otra parte, como X es espacio vectorial topológico, tenemos que la aplicación $\sigma : X \times X \to X$, dada por $\sigma(x, y) = x + y$, es continua. Así, por la Proposición 4.13, como $\lim_{\mathcal{U}}(x_i, y_i) = (x, y)$,

$$\lim_{\mathcal{U}}(x_i + y_i) = x + y.$$

Con esto, y lo probado anteriormente, deducimos el resultado.

□

Proposición 4.15. *Sean $\mathcal{U}$ ultrafiltro libre en S y $\{x_i\}_i \subset \mathbb{R}$. Si $x_i \geq 0, \forall i \in S$ y existe $\lim_{\mathcal{U}} x_i \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{\mathcal{U}} x_i \geq 0$.*

Demostración. Sea $x = \lim_{\mathcal{U}} x_i$. Por reducción al absurdo, supongamos que $x < 0$. Sea $\varepsilon > 0$ de forma que $x \in (-\varepsilon, 0)$. Como $x_i \geq 0$, tenemos que

$$\{i \in S : x_i \in (-\varepsilon, 0)\} = \varnothing \notin \mathcal{U},$$

lo cual contradice que $\lim_{\mathcal{U}} x_i = x$.

□

Observación 4.16. *De esta proposición se deduce que si $\{x_i\}_i, \{y_i\}_i \subset \mathbb{R}$ son tales que $x_i \leq y_i, \forall i \in S$ entonces $\lim_{\mathcal{U}} x_i \leq \lim_{\mathcal{U}} y_i$.*

Nota 4.17. *Esta proposición se puede generalizar a retículos de Banach, pero para nuestros propósitos nos basta con saber que se tiene en $\mathbb{R}$. La versión general se puede encontrar en [1].*

4.2. Ultrapoducto de espacios de Banach

La idea del ultraproducto de una familia de espacios de Banach fue desarrollada por B. Maurey y supuso la introducción de técnicas de análisis no estándar a la Teoría Métrica del Punto Fijo para aplicaciones no expansivas, lo que marcó la gran diferencia entre esta teoría y la de contracciones. En esta sección veremos una construcción detallada del ultraproducto.

Sean S un conjunto no vacío, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en S y $\{X_i\}_{i \in S}$ una familia de espacios de Banach. Así, podemos construir el espacio normado

$$\ell_\infty(S; X_i) = \left\{ \{x_i\}_{i \in S} : x_i \in X_i, \sup_{i \in S} \|x_i\| < \infty \right\}$$

equipado con la norma

$$\|\{x_i\}_{i\in S}\|_\infty = \sup_{i\in S} \|x_i\|\,,$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma de cada X_i, según corresponda.

A partir de ahora, cuando no haya confusión en cuanto al conjunto de índices, denotaremos a los elementos de $\ell_\infty(S;X_i)$ simplemente por $\{x_i\}_i$.

Proposición 4.18. *En las condiciones anteriores, $\ell_\infty(S;X_i)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $\{x^n\}_n \subset \ell_\infty(S;X_i)$ una sucesión de Cauchy, con $x^n = \{x_i^n\}_i$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x^n - x^m\|_\infty < \varepsilon,$$

para todos $m, n \geq n_0$. Esto es

$$\varepsilon > \|x^n - x^m\|_\infty = \sup_{i\in S} \|x_i^n - x_i^m\| \geq \|x_i^n - x_i^m\|\,,$$

para todo $m, n \geq n_0$ y para todo $i \in S$. Luego, cada $\{x_i^n\}_n \subset X_i$ es una sucesión de Cauchy. Como cada X_i es de Banach, tenemos que cada $\{x_i^n\}_n$ es convergente. Sea su límite $x_i \in X_i$. Consideramos entonces $x = \{x_i\}_i$. Observamos que

$$\begin{aligned}\sup_{i\in S} \|x_i\| &= \sup_{i\in S} \|x_i - x_i^n + x_i^n\| \leq \\ &\leq \sup_{i\in S} \|x_i - x_i^n\| + \sup_{i\in S} \|x_i^n\|\end{aligned}$$

Como $x_i^n \to x_i$, tenemos que $\sup_{i\in S} \|x_i - x_i^n\|$ estará acotado y, como $\{x_i^n\}_i \in \ell_\infty(S;X_i)$, $\sup_{i\in S} \|x_i^n\|$ también lo estará. Por ello, $x \in \ell_\infty(S;X_i)$. Además, fijando $n \geq n_0$ y tomando $m \to \infty$ en $\|x_i^n - x_i^m\| < \varepsilon$, tenemos que

$$\|x_i^n - x_i\| < \varepsilon,$$

para todo $i \in S$. Por tanto $\|x^n - x\|_\infty = \sup_{i\in S} \|x_i^n - x_i\| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$. Luego, $x^n \to x \in \ell_\infty(S;X_i)$.

$\square$

Antes de continuar, hacemos la siguiente observación. Sea $\{x_i\}_i \in \ell_\infty(S;X_i)$. Entonces existe $M > 0$ tal que $\sup_{i\in S} \|x_i\| \leq M$. Esto es, $\|x_i\| \in [0, M] \subset \mathbb{R}, \forall i \in S$, donde $[0, M]$ es un intervalo compacto y Hausdorff. Por el Teorema 4.9, existe $\lim_\mathcal{U} \|x_i\|$ y es único. Con esto podemos entonces considerar sin problemas el siguiente subconjunto de $\ell_\infty(S;X_i)$:

$$\mathcal{N}(\mathcal{U}) = \left\{\{x_i\}_i \in \ell_\infty(S;X_i) : \lim_\mathcal{U} \|x_i\| = 0\right\}.$$

Proposición 4.19. *El subconjunto $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ es un subespacio vectorial cerrado de $\ell_\infty(S;X_i)$.*

Demostración. Veamos primero que es un subespacio vectorial. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $x, y \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$, con $x = \{x_i\}_i$ e $y = \{y_i\}_i$. Entonces $\lim_\mathcal{U} \|x_i\| = \lim_\mathcal{U} \|y_i\| = 0$. Por el Corolario 4.14 se verifica que

$$0 \leq \lim_\mathcal{U} \|\alpha x_i + \beta y_i\| \leq \lim_\mathcal{U} \alpha \|x_i\| + \lim_\mathcal{U} \beta \|y_i\| = \alpha \lim_\mathcal{U} \|x_i\| + \beta \lim_\mathcal{U} \|y_i\| = 0.$$

Luego, $\lim_{\mathcal{U}} \|\alpha x_i + \beta y_i\| = 0$. Por tanto, $\alpha x + \beta y \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$ y este es subespacio vectorial.

Veamos ahora que $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ es cerrado. Sea $\{x^n\}_n \subset \mathcal{N}(\mathcal{U})$, con $x^n = \{x_i^n\}_i$, tal que $x^n \to x = \{x_i\}_i$. Queremos ver que $x \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$, es decir, que $\lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| = 0$.

Como $\{x_i^n\}_i \in \mathcal{N}(\mathcal{U}), \forall n \geq 1$, se tiene que $\lim_{\mathcal{U}} \|x_i^n\| = 0$. Esto es, para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$A_\varepsilon^n = \left\{ i \in S : \|x_i^n\| \in \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2} \right) \right\} \in \mathcal{U},$$

para todo $n \geq 1$.

Por otra parte, como $x^n \to x$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x^n - x\|_\infty < \varepsilon/2, \forall n \geq n_0$. Luego,

$$\|x_i^n - x_i\| < \varepsilon/2,$$

para todo $i \in S$ y para todo $n \geq n_0$.

Ahora, sea $i \in A_\varepsilon^n$. Si fijamos $n \geq n_0$

$$\|x_i\| = \|x_i - x_i^n + x_i^n\| \leq \|x_i - x_i^n\| + \|x_i^n\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Luego, $A_\varepsilon^n \subset A_\varepsilon = \{i \in S : \|x_i\| \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}, \forall n \geq n_0$. Como $A_\varepsilon^n \in \mathcal{U}, \forall n \geq 1, \forall \varepsilon > 0$, y $\mathcal{U}$ es ultrafiltro, $A_\varepsilon \in \mathcal{U}, \forall \varepsilon > 0$. Por ello, $\lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| = 0$, lo que prueba que $x \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$.

□

De esta forma, podemos construir el espacio cociente $\ell_\infty(S; X_i)/\mathcal{N}(\mathcal{U})$, equipado con la norma $\|[x]\| = \inf_{y \in \mathcal{N}(\mathcal{U})} \|x - y\|_\infty$. Así, como $\ell_\infty(S; X_i)$ es de Banach y $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ es un subespacio cerrado suyo, el cociente será también un espacio de Banach.

Definición 4.20. *En la notación anterior, se define el ultraproducto de $\{X_i\}_{i \in S}$ respecto de $\mathcal{U}$, denotado por $\{X_i\}_{\mathcal{U}}$, como el espacio de Banach $(\ell_\infty(S; X_i)/\mathcal{N}(\mathcal{U}), \|\cdot\|_{\mathcal{U}})$, donde*

$$\|\{x_i\}_{\mathcal{U}}\|_{\mathcal{U}} = \inf_{\{y_i\}_i \in \mathcal{N}(\mathcal{U})} \|\{x_i\}_i + \{y_i\}_i\|_\infty,$$

con $\{x_i\}_{\mathcal{U}}$ la clase de equivalencia de $\{x_i\}_i$ en $\{X_i\}_{\mathcal{U}}$. En el caso de que $X_i = X, \forall i \in S$, al ultraproducto se le denominará ultrapotencia de X.

Vamos a ver ahora una forma más sencilla de hallar la norma de un punto de este cociente, que facilitará enormemente trabajar en el ultraproducto. El siguiente desarrollo se encuentra en [1].

Proposición 4.21. *Sean $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en S y $x = \{x_i\}_i \in \ell_\infty(S; X_i)$. Entonces*

$$\|\{x_i\}_{\mathcal{U}}\|_{\mathcal{U}} = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\|$$

Demostración. Sea $\tilde{x} = \{x_i\}_{\mathcal{U}} \in \{X_i\}_{\mathcal{U}}$. Si $\{y_i\}_i \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$, sabemos que $\{x_i + y_i\}_i$ también representa a $\tilde{x}$ en el cociente. Luego,

$$\lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i + y_i\|.$$

Con esto

$$\lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i + y_i\| \leq \sup_{i \in S} \|x_i + y_i\| = \|\{x_i + y_i\}_i\|_\infty,$$

para todo $\{y_i\}_i \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$. Tomando ínfimo en $\{y_i\}_i \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$ obtenemos que $\lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| \leq \|\tilde{x}\|_{\mathcal{U}}$.

Veamos ahora la otra desigualdad. Dado $\varepsilon > 0$, definimos

$$I_\varepsilon = \{i \in S : \|x_i\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| + \varepsilon\}.$$

Por definición de límite respecto de $\mathcal{U}$, tenemos que $I_\varepsilon \in \mathcal{U}$. Definimos $\{y_i\}_i \in \ell_\infty(S; X_i)$ como

$$y_i = \begin{cases} -x_i\,, & i \notin I_\varepsilon \\ 0\,, & i \in I_\varepsilon \end{cases}$$

Observamos lo siguiente. Sean $\rho > 0$ y $A_\rho = \{i \in S : \|y_i\| \leq \rho\}$. Si $i \in I_\varepsilon$ entonces $y_i = 0$. Luego, $\|y_i\| = 0 \leq \rho, \forall \rho > 0$. Por tanto, $i \in A_\rho$. De esta forma, $I_\varepsilon \subset A_\rho, \forall \rho > 0$. Como $I_\varepsilon \in \mathcal{U}$, concluimos que $A_\rho \in \mathcal{U}, \forall \rho > 0$, por lo que $\lim_{\mathcal{U}} \|y_i\| = 0$. Así, $\{x_i + y_i\}_i$ es también un representante de $\tilde{x}$.

Por último

$$\|\{x_i + y_i\}_i\|_\infty = \sup_{i \in S} \|x_i + y_i\| = \sup_{i \in I_\varepsilon} \|x_i\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| + \varepsilon,$$

de lo que se deduce que $\|\tilde{x}\|_{\mathcal{U}} \leq \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| + \varepsilon$. La arbitrariedad de ε finaliza la demostración. $\square$

Esto finaliza la construcción del ultraproducto. Ahora estamos interesados en ver como se relaciona la ultrapotencia de un espacio de Banach $\{X\}_{\mathcal{U}}$ con el propio X.

Un hecho que podemos destacar es que siempre podemos encontrar una copia de X en su ultrapotencia $\{X\}_{\mathcal{U}}$. Es decir, X es isométricamente isomorfo a algún subespacio de su ultrapotencia, mediante la aplicación $P : X \to \{X\}_{\mathcal{U}}$ dada por $Px = \{x\}_{\mathcal{U}}$. Esto nos permite identificar X con el subespacio de $\{X\}_{\mathcal{U}}$

$$\{\{x\}_{\mathcal{U}} \in \{X\}_{\mathcal{U}} : x \in X\}$$

En particular, si X es de dimensión finita, se tiene que X y $\{X\}_{\mathcal{U}}$ son isométricamente isomorfos y pueden ser considerados el mismo espacio.

Proposición 4.22. *Sea X espacio de Banach de dimensión finita. Entonces X y $\{X\}_{\mathcal{U}}$ son isométricamente isomorfos. Como consecuencia,* $\dim\{X\}_{\mathcal{U}} = \dim X < +\infty$ *por lo que la clase de espacios de dimensión finita es cerrada bajo el paso a ultrapotencia.*

Demostración. Consideramos la aplicación $P : X \to \{X\}_{\mathcal{U}}$ dada por $Px = \{x\}_{\mathcal{U}}$. Esta aplicación es claramente lineal. Además, es una isometría, pues

$$\|\{x\}_{\mathcal{U}}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x\| = \|x\|\,.$$

De esta forma, P es lineal, continua, inyectiva e isometría. Veamos que es sobreyectiva. Sea $\{x_i\}_{\mathcal{U}} \in \{X\}_{\mathcal{U}}$. Entonces, $\{x_i\}_i \in \ell_\infty(S; X)$. Por ello, existe $M > 0$ tal que $\|x_i\| \leq M, \forall i \in S$. Es decir, $\{x_i\}_i \subset B(0, M)$. Como X es de dimensión finita, $B(0, M)$ es compacta, además de Hausdorff. Así, por el Teorema 4.9 tenemos que existe un único $x \in X$ tal que $\lim_{\mathcal{U}} x_i = x$.

Luego, tenemos que $\lim_{\mathcal{U}}(x_i - x) = 0$ y, como $\|\cdot\|$ es continua, $\lim_{\mathcal{U}} \|x_i - x\| = 0$. Luego, $\{x_i\}_{\mathcal{U}} = \{x\}_{\mathcal{U}}$, por lo que $Px = \{x_i\}_{\mathcal{U}}$.

Recapitulando, P es lineal, continua, biyectiva y una isometría. Así, por el Teorema de la Aplicación Abierta, como X y $\{X\}_{\mathcal{U}}$ son espacios de Banach, concluimos que P es un isomorfismo isométrico.

$\square$

Observación 4.23. *Se puede comprobar fácilmente que $P^{-1} : \{X\}_{\mathcal{U}} \to X$ viene dada por*

$$P^{-1}(\{x_i\}_{\mathcal{U}}) = \lim_{\mathcal{U}} x_i$$

Al igual que hemos definido el ultraproducto de una colección de espacios de Banach, podemos hacer lo propio para una familia de operadores lineales uniformemente acotada. Surge así el concepto de ultraproducto de una familia de operadores.

Definición 4.24. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en S. Sean $\{X_i\}_{i\in S}$ y $\{Y_i\}_{i\in S}$ dos familias de espacio de Banach $\{T_i\}_{i\in S}$ una familia de aplicaciones lineales $T_i : X_i \to Y_i$ uniformemente acotada, es decir,*

$$\sup_{i\in S} \|T_i\| < \infty.$$

Definimos el ultraproducto de la familia $\{T_i\}_{i\in S}$ como la aplicación $\{T_i\}_{\mathcal{U}} : \{X_i\}_{\mathcal{U}} \to \{Y_i\}_{\mathcal{U}}$ dada por

$$\{T_i\}_{\mathcal{U}}\{x_i\}_{\mathcal{U}} = \{T_i x_i\}_{\mathcal{U}}.$$

Este ultraproducto de aplicaciones está bien definido. Sean $\{x_i\}_i, \{y_i\}_i \in \ell_\infty(S; X_i)$ tales que $\{x_i\}_{\mathcal{U}} = \{y_i\}_{\mathcal{U}}$, esto es, $\{x_i - y_i\}_i \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$. Queremos ver que $\{T_i x_i\}_{\mathcal{U}} = \{T_i y_i\}_{\mathcal{U}}$ que por la linealidad de la familia $\{T_i\}_i$ es equivalente a ver que $\{T_i(x_i - y_i)\}_i \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$.

Como $\lim_{\mathcal{U}} \|x_i - y_i\| = 0$, para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$A_\varepsilon = \{i \in S : \|x_i - y_i\| \in (-\varepsilon, \varepsilon)\} \in \mathcal{U}.$$

Sea $M = \sup_{i\in S} \|T_i\| < \infty$. Sea $i \in A_\varepsilon$. Como cada T_i es lineal y acotada,

$$\|T_i(x_i - y_i)\| \leq \|T_i\| \, \|x_i - y_i\| \leq M \, \|x_i - y_i\| \in (-M\varepsilon, M\varepsilon).$$

Luego, $i \in B_\varepsilon = \{i \in S : \|T_i(x_i - y_i)\| \in (-M\varepsilon, M\varepsilon)\}, \forall \varepsilon > 0$. Así, $A_\varepsilon \subset B_\varepsilon$ por lo que $B_\varepsilon \in \mathcal{U}$. Luego, $\lim_{\mathcal{U}} \|T_i(x_i - y_i)\| = 0$, que es lo que queríamos probar.

4.3. Superreflexividad

Para definir la superreflexividad tenemos que pasa primero por definir la representabilidad finita. De manera informal, un espacio de Banach se dirá que es finitamente representable en otro si los espacios de dimensión finita del primero son "muy parecidos" a subespacios del segundo.

Definición 4.25. *Se dice que un espacio de Banach Y es finitamente representable en otro espacio de Banach X si para todo subespacio de dimensión finita de Y, M, y para todo $\varepsilon > 0$ existen N subespacio de X y un isomorfismo $T : M \to N$ tal que*

$$(1-\varepsilon)\|y\| \leq \|Ty\| \leq (1+\varepsilon)\|y\|,$$

para todo $y \in M$. A un tal T se le denominará ε-isometría.

Definición 4.26. *Un espacio de Banach se dice superreflexivo si todo espacio de Banach finitamente representable en él es reflexivo.*

Presentamos ahora dos ejemplos de espacios superreflexivos con el objetivo de ver cómo funciona la representabilidad finita. Más adelante veremos otra forma de deducir la superreflexividad de estos espacios.

Ejemplo 4.27. *Se tienen los siguientes ejemplos de espacios superreflexivos:*

1. Los espacios de dimensión finita.

Sean M de dimensión finita, con $\dim M = n$, y X finitamente representable en M. Entonces, para todo subespacio $Y \subset X$ de dimensión finita y para todo $\varepsilon > 0$ existen subespacio $N \subset M$ y una ε-isometría $T : Y \to N$.

Así, X debe de ser de dimensión finita y $\dim(X) \leq n$, pues si no lo fuera tomando $x_1, \ldots, x_{n+1} \in X$ linealmente independientes, tendríamos que $S = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_{n+1}\} \subset X$ sería un subespacio de X de dimensión $n+1$. Entonces existirían $N \subset M$ subespacio de M e isomorfismo $T : S \to N$, lo que resulta contradictorio pues $\dim(S) = n+1$ pero $\dim(N) \leq n$. Por tanto, X es reflexivo al ser de dimensión finita y, efectivamente, M es superreflexivo.

2. El espacio de sucesiones de cuadrado sumable, denotado por ℓ^2.

Sea X finitamente representable en ℓ^2. Entonces, para todo subespacio $Y \subset X$ de dimensión finita y para todo $\varepsilon > 0$ existen subespacio $E \subset \ell^2$ y una ε-isometría $T : Y \to E$.

Sean $x, y \in Y$. Entonces

$$(1-\varepsilon)^2\|x+y\|^2 \leq \|Tx+Ty\|^2 \leq (1+\varepsilon)^2\|x+y\|^2$$

$$(1-\varepsilon)^2\|x-y\|^2 \leq \|Tx-Ty\|^2 \leq (1+\varepsilon)^2\|x-y\|^2$$

$$2(1-\varepsilon)^2\|x\|^2 + 2(1-\varepsilon)^2\|y\|^2 \leq 2\|Tx\|^2 + 2\|Ty\|^2 \leq 2(1+\varepsilon)^2\|x\|^2 + 2(1+\varepsilon)^2\|y\|^2.$$

Entonces tomando $\varepsilon \to 0$, concluimos que

$$\|Tx+Ty\|^2 + \|Tx-Ty\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$$

$$2\|Tx\|^2 + 2\|Ty\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Como $Tx, Ty \in E \subset \ell^2$, tenemos que

$$\|Tx+Ty\|^2 + \|Tx-Ty\|^2 = 2\|Tx\|^2 + 2\|Ty\|^2$$

por lo que

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,$$

para todos $x, y \in Y$. Luego, se verifica la desigualdad del paralelogramo para todos los subespacios de dimensión finita de X. Por ello, X es de Hilbert y, por ende, reflexivo.

Obsérvese que en ningún momento se ha usado ninguna característica propia de ℓ^2 mas que la identidad del paralelogramo. Por ello, esta misma prueba es válida para cualquier espacio de Hilbert. Luego, todo espacio de Hilbert es superreflexivo.

Proposición 4.28. *Todo espacio superreflexivo es reflexivo.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach superreflexivo. Entonces todo espacio finitamente representable en él es reflexivo. Como X es finitamente representable en sí mismo, tenemos que es reflexivo.

□

Nota 4.29. *En general, no se tiene el recíproco. Para verlo se puede recurrir al artículo [4] y al Teorema 4.32.*

Retomando la línea de estudiar cómo se relacionan la ultrapotencia de un espacio de Banach y el propio espacio, vamos a ver que la ultrapotencia siempre se puede representar finitamente en el original. Para ello hará falta un lema previo. Las dos pruebas que siguen se pueden encontrar en [13].

Lema 4.30. *Sean X e Y espacios de Banach, con X de dimensión finita. Si $T : X \to Y$ es lineal entonces es continua.*

Demostración. Sea $\dim X = n$ y $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ una base suya. Sea $\ell_1^{(n)} = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, donde consideramos la base canónica $\{e_j\}_{j=1}^n$. Como es de dimensión finita su esfera unidad es compacta. Sea $\varphi : S_{\ell_1^{(n)}}(0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right\|,$$

que es claramente continua y estrictamente positiva pues los vectores $e_1, \dots, e_n$ son linealmente independientes. Por ello y, puesto que $\varphi(S_{\ell_1^{(n)}}(0,1)) \subset \mathbb{R}$ es compacto, tenemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right\| \geq \delta, \tag{4.2}$$

para todo $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S_{\ell_1^{(n)}}(0,1)$.

Ahora, sea $a = (a_1, \dots, a_n) \in \ell_1^{(n)}$ no nulo. Entonces

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j e_j \right\| = \|a\|_1 \left\| \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{\|a\|_1} e_j \right\|$$

Observamos que $\frac{a}{\|a\|_1} = \left(\frac{a_1}{\|a\|_1}, \dots, \frac{a_n}{\|a\|_1} \right) \in S_{\ell_1^{(n)}}(0,1)$. Luego, por (4.2) tenemos que

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j e_j \right\| \geq \|a\|_1 \delta = \delta \sum_{j=1}^n |a_j|.$$

Para $a = 0$ esta misma desigualdad se tiene trivialmente.

Con esto

$$\|T\| = \sup_{(a_1,\dots,a_j)\in\ell_1^{(n)}} \frac{\left\|T\left(\sum_{j=1}^n a_j e_j\right)\right\|}{\left\|\sum_{j=1}^n a_j e_j\right\|} = \sup_{(a_1,\dots,a_j)\in\ell_1^{(n)}} \frac{\left\|\sum_{j=1}^n a_j T e_j\right\|}{\left\|\sum_{j=1}^n a_j e_j\right\|} \leq$$
$$\leq \sup_{(a_1,\dots,a_j)\in\ell_1^{(n)}} \frac{\sum_{j=1}^n |a_j| \, \|Te_j\|}{\delta \sum_{j=1}^n |a_j|} \leq \sup_{1\leq j\leq n} \frac{\|Te_j\|}{\delta},$$

que es finito por ser el supremo de una cantidad finita de escalares. Así, T es acotada y, al ser también lineal, concluimos que es continua.

$\square$

Teorema 4.31. *La ultrapotencia $\{X\}_{\mathcal{U}}$ de un espacio de Banach X es finitamente representable en X.*

Demostración. Sea $M \subset \{X\}_{\mathcal{U}}$ de dimensión finita. Sea $\{x^j\}_{j=1}^n$ una base de M tal que $x^j = \{x_i^j\}_{\mathcal{U}}, 1 \leq j \leq n$, con $x_i^j \in X$, de forma que $\|x^j\|_{\mathcal{U}} = 1, \forall 1 \leq j \leq n$. Sea $M_i \subset X$ dado por

$$M_i = \operatorname{span}\{x_i^j\}_{j=1}^n.$$

Ahora, sea $T_i : M \to M_i$ la proyección dada por la extensión lineal de $T_i x^j = x_i^j$. Observamos que, por el Lema 4.30, T_i es continua, para todo $i \in S$.

Sea $\tilde{x} \in M$. Entonces existen $\{\alpha_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{x} = \sum_{j=1}^n \alpha_j x^j.$$

Luego,

$$T_i\tilde{x} = \sum_{j=1}^n \alpha_j T_i x^j = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_i^j,$$

por lo que

$$\lim_{\mathcal{U}} \|T_i\tilde{x}\| = \lim_{\mathcal{U}} \left\|\sum_{j=1}^n \alpha_j x_i^j\right\| = \left\|\left\{\sum_{j=1}^n \alpha_j x_i^j\right\}_{\mathcal{U}}\right\|_{\mathcal{U}} = \left\|\sum_{j=1}^n \alpha_j \{x_i^j\}_{\mathcal{U}}\right\|_{\mathcal{U}} = \left\|\sum_{j=1}^n \alpha_j x^j\right\|_{\mathcal{U}} = \|\tilde{x}\|_{\mathcal{U}}.$$

Entonces para todo $\varepsilon > 0$, se tiene que

$$A_\varepsilon^{\tilde{x}} = \left\{i \in S : \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \|\tilde{x}\|_{\mathcal{U}} \leq \|T_i\tilde{x}\| \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \|\tilde{x}\|_{\mathcal{U}}\right\} \in \mathcal{U}$$

Como T_i es continua, existe un entorno de $\tilde{x}$, denotado por $V_{\tilde{x}}$, tal que si $\tilde{y} \in V_{\tilde{x}}$ e $i \in A_\varepsilon^{\tilde{x}}$ entonces

$$(1 - \varepsilon) \|\tilde{y}\|_{\mathcal{U}} \leq \|T_i\tilde{y}\| \leq (1 + \varepsilon) \|\tilde{y}\|_{\mathcal{U}}. \tag{4.3}$$

En particular, consideremos la bola unidad cerrada de M. Como M es de dimensión finita, $B_M(0,1)$ es compacta. Entonces existen $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n \in B_M(0,1)$ tales que $B_M(0,1) \subset \bigcup_{k=1}^n V_{\tilde{x}_k}$. De esta forma, si $i \in \bigcap_{k=1}^n A_\varepsilon^{\tilde{x}_k} \in \mathcal{U}$ (y por ello es no vacío) tenemos (4.3), para todo $\tilde{y} \in B_M(0,1)$. Se ve fácilmente que también se tiene (4.3) para todo $\tilde{y} \in M$. Luego, T_i es una ε-isometría de M en M_i, para todo $i \in \bigcap_{k=1}^n A_\varepsilon^{\tilde{x}_k}$, lo que prueba el resultado.

□

Tenemos las dos siguientes caracterizaciones de superreflexividad, una en términos de convexidad y otra haciendo uso de la ultrapotencia. Se puede encontrar una demostración del Teorema de James-Enflo en [5].

Teorema 4.32 (de James-Enflo)**.** *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *X es superreflexivo.*

2. *X admite una norma uniformemente convexa equivalente.*

3. *X admite una norma uniformemente no cuadrada equivalente, es decir, existe una norma equivalente de forma que con esta nueva norma $\varepsilon_0(X) < 2$.*

En particular, este teorema nos permite deducir que, al ser todos los espacios ℓ^p y L^p, con $p \in (1,\infty)$, uniformemente convexos (ver [3]), estos son superreflexivos.

También se tiene que todo espacio de Hilbert es uniformemente convexo (ver Ejemplo 2.6) y, por ello, todo espacio de Hilbert es superreflexivo, aunque ya lo habíamos visto directamente en el Ejemplo 4.27.

Esta otra caracterización de la superreflexividad, dada por C. W. Henson y L. C. Moore Jr., se puede ver en [10] y [9].

Teorema 4.33 (de Henson-Moore)**.** *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro numerablemente incompleto en S. Son equivalentes:*

1. *X es superreflexivo.*

2. *$\{X\}_\mathcal{U}$ es reflexivo.*

3. *$\{X\}_\mathcal{U}$ es superreflexivo.*

4. *$\{X^*\}_\mathcal{U}$ es isométrico a $(\{X\}_\mathcal{U})^*$ mediante el isomorfismo isométrico canónico*

$$(Jf)(x) = \lim_{\mathcal{U}} f_n(x_n),$$

donde $f = \{f_n\}_\mathcal{U} \in \{X^*\}_\mathcal{U}$ y $x = \{x\}_\mathcal{U} \in \{X\}_\mathcal{U}$.

Observación 4.34. *En virtud de este resultado, si X es superreflexivo, podemos identificar $\{X^*\}_\mathcal{U}$ con $(\{X\}_\mathcal{U})^*$. Luego, todo $F \in (\{X\}_\mathcal{U})^*$ puede ser representado por un elemento $\{f_i\}_\mathcal{U} \in \{X^*\}_\mathcal{U}$, y viceversa.*

Antes de finalizar este capítulo, veamos una aplicación de este último teorema, que nos permitirá probar que la suma directa de espacios superreflexivos es superreflexiva.

Recordemos primero el concepto de suma directa de espacios de Banach.

Sean $X_1, \ldots, X_n$ espacio de Banach. La suma directa de $X_1, \ldots, X_n$ es el espacio normado

$$(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\infty = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i, \|\cdot\|_\infty \right),$$

donde $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \text{máx}_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|$.

El siguiente lema nos da una forma alternativa de ver la ultrapotencia de una suma directa de espacios de Banach que resultará de gran utilidad más adelante. Gracias a él, podemos expresar la ultrapotencia de la suma como la suma de ultrapotencias, en el caso particular en el que el ultrafiltro $\mathcal{U}$ esté definido sobre los números naturales.

Lema 4.35. *Sean $X_1, \ldots, X_n$ espacios de Banach y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro libre sobre $\mathbb{N}$. Entonces*

$$\{(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\infty\}_\mathcal{U} = (\{X_1\}_\mathcal{U} \oplus \cdots \oplus \{X_n\}_\mathcal{U})_\infty$$

Demostración. Consideramos el espacio de sucesiones acotadas en $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\infty$ equipado con la norma del supremo, denotado por Π_∞. Una sucesión $\{x_k\}_k$ de este espacio será de la forma $x_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n), \forall k \geq 1$. Si $x \in \Pi_\infty$ definimos

$$\|x\|' = \lim_{\mathcal{U}} \left(\max_{1 \leq i \leq n} \|x_k^i\| \right)$$

y

$$\|x\|'' = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\lim_{\mathcal{U}} \|x_k^i\| \right).$$

Sea $\alpha^i = \lim_\mathcal{U} \|x_k^i\|$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$A_\varepsilon^i = \left\{ k \in \mathbb{N} : \left| \|x_k^i\| - \alpha^i \right| < \varepsilon \right\} \in \mathcal{U},$$

por lo que

$$A_\varepsilon = \bigcap_{i=1}^{n} A_\varepsilon^i \in \mathcal{U}.$$

Ahora, sea $k \in A_\varepsilon$. Entonces

$$\alpha^i - \varepsilon < \|x_k^i\| < \alpha^i + \varepsilon,$$

para todo $1 \leq i \leq n$. Tomando máximo en i

$$\max_{1 \leq i \leq n} \alpha^i - \varepsilon \leq \max_{1 \leq i \leq n} \|x_k^i\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \alpha^i + \varepsilon.$$

Por tanto, $A_\varepsilon \subset B_\varepsilon = \{k \in \mathbb{N} : \text{máx}_{1 \leq i \leq n} \alpha^i - \varepsilon \leq \text{máx}_{1 \leq i \leq n} \|x_k^i\| \leq \text{máx}_{1 \leq i \leq n} \alpha^i + \varepsilon\}$. Por ello, $B_\varepsilon \in \mathcal{U}, \forall \varepsilon > 0$. Entonces

$$\lim_{\mathcal{U}} \left(\max_{1 \leq i \leq n} \|x_k^i\| \right) = \max_{1 \leq i \leq n} \alpha^i = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\lim_{\mathcal{U}} \|x_k^i\| \right).$$

Así, concluimos que $\|\cdot\|' = \|\cdot\|''$ en Π_∞. Observamos entonces lo siguiente. Sea $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ el cociente de la ultrapotencia de $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\infty$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\mathcal{U}) &= \left\{\{x_k\}_k \in \Pi_\infty : \lim_{\mathcal{U}} \|x_k\|_\infty = 0\right\} = \\ &= \left\{\{x_k\}_k \in \Pi_\infty : \lim_{\mathcal{U}} \max_{1\le i\le n} \left\|x_k^i\right\| = 0\right\} = \\ &= \left\{x \in \Pi_\infty : \|x\|' = 0\right\} = \mathcal{N}'(\mathcal{U}).\end{aligned}$$

Luego,

$$\{(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\infty\}_{\mathcal{U}} = \frac{\Pi_\infty}{\mathcal{N}(\mathcal{U})} = \frac{\Pi_\infty}{\mathcal{N}'(\mathcal{U})}. \tag{4.4}$$

Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{N}''(\mathcal{U}) &= \left\{x \in \Pi_\infty : \|x\|'' = 0\right\} = \\ &= \left\{\{x_k\}_k \in \Pi_\infty : \max_{1\le i\le n} \lim_{\mathcal{U}} \left\|x_k^i\right\| = 0\right\} = \\ &= \left\{\{x_k\}_k \in \Pi_\infty : \lim_{\mathcal{U}} \left\|x_k^i\right\| = 0, 1 \le i \le n\right\} = \\ &= \prod_{i=1}^n \mathcal{N}_i''(\mathcal{U}),\end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{N}_i''(\mathcal{U}) = \left\{\{x_k^i\}_k \in \ell_\infty(\mathbb{N}; X_i) : \lim_{\mathcal{U}} \left\|x_k^i\right\| = 0\right\}.$$

Con esto tenemos que

$$(\{X_1\}_{\mathcal{U}} \oplus \cdots \oplus \{X_n\}_{\mathcal{U}})_\infty = \prod_{i=1}^n \{X_i\}_{\mathcal{U}} = \prod_{i=1}^n \frac{\ell_\infty(\mathbb{N}; X_i)}{\mathcal{N}_i''(\mathcal{U})} = \frac{\Pi_\infty}{\mathcal{N}''(\mathcal{U})} \tag{4.5}$$

Ahora bien, como vimos que $\|\cdot\|' = \|\cdot\|''$, se tiene que $\mathcal{N}'(\mathcal{U}) = \mathcal{N}''(\mathcal{U})$. Por tanto, podemos igualar (4.4) y (4.5) y concluir el resultado.

□

En la prueba del siguiente teorema se pondrá en evidencia la potencia del Teorema de Henson-Moore, pues nos permitirá reducir la siguiente demostración a probar que la suma directa de espacios reflexivos es reflexiva.

Teorema 4.36. *Si $X_1, \ldots, X_n$ son espacios de Banach superreflexivos entonces $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\infty$ es superreflexivo.*

Demostración. Por el Teorema de Henson-Moore, Teorema 4.33, tenemos que $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\infty$ es superreflexivo si y solo si $\{(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\infty\}_{\mathcal{U}}$ es reflexivo. Ahora bien, por el Lema 4.35, basta ver que $(\{X_1\}_{\mathcal{U}} \oplus \cdots \oplus \{X_n\}_{\mathcal{U}})_\infty$ es reflexivo. Como cada X_i, $1 \le i \le n$, es superreflexivo tenemos que $\{X_i\}_{\mathcal{U}}, 1 \le i \le n$, es reflexivo, nuevamente por el Teorema de Henson-Moore. Con estos hechos, podemos simplificar la demostración y simplemente probar que la suma directa de espacios reflexivos es reflexiva.

Sea $\{(x_m^1, \dots, x_m^n)\}_m \subset (X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\infty$ acotada. Entonces cada $\{x_m^i\}_m \subset X_i$ es acotada. Como X_1 es reflexivo, por el Teorema 1.34, existen una subsucesión $\{x_{m_k^1}^1\}_k$ de $\{x_m^1\}_m$ y $x^1 \in X_1$ tales que $x_{m_k^1}^1 \rightharpoonup x^1$. Consideramos ahora la subsucesión de $\{x_m^2\}_m$ dada por los índices de la subsucesión anterior, esto es, $\{x_{m_k^1}^2\}_k$. Como esta subsucesión es acotada y X_2 es reflexivo, existen una subsucesión $\{x_{m_k^2}^2\}_k$ de $\{x_{m_k^1}^2\}_k$ y $x^2 \in X_2$ tales que $x_{m_k^2}^2 \rightharpoonup x^2$. Repitiendo el proceso, obtenemos para cada $1 \leq i \leq n$ una subsucesión $\{x_{m_k^i}^i\}_k$ y un $x^i \in X_n$ tal que $x_{m_k^i}^i \rightharpoonup x^i$. Así, consideramos las subsucesiones $\{x_{m_k^n}^i\}_k, 1 \leq i \leq n$. Por construcción cada una de estas será subsucesión de $\{x_{m_k^i}^i\}_k$ y, por ello, $x_{m_k^n}^i \rightharpoonup x^i$.

Podemos tomar entonces la subsucesión $\{(x_{m_k^n}^1, \dots, x_{m_k^n}^n)\}_k$ de $\{(x_m^1, \dots, x_m^n)\}_m$ verificando $(x_{m_k^n}^1, \dots, x_{m_k^n}^n) \rightharpoonup (x^1, \dots, x^n)$. Por tanto, por el Teorema 1.34, concluimos que $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\infty$ es reflexivo, lo que finaliza la prueba.

$\square$

Capítulo 5

Propiedad del Punto Fijo en espacios superreflexivos

En este capítulo vamos a poner en práctica lo desarrollado a lo largo del trabajo con el objetivo de obtener espacios de Banach que posean la Propiedad del Punto Fijo. La piedra angular para lograr este objetivo será el Teorema del Punto Fijo de Wiśnicki. Para usar este resultado, nos vamos a tener que restingir a espacios superreflexivos cuya ultrapotencia posea cierta propiedad de separación de puntos en la esfera unidad, en el sentido que se precisará más adelante. A pesar de que estas condiciones parecen ser muy restrictivas, finalmente obtenedremos una buena cantidad de espacios de Banach con esta propiedad, algunos bien conocidos.

A lo largo del capítulo, a no ser que se indique lo contrario, $\mathcal{U}$ denotará un ultrafiltro libre en $\mathbb{N}$, que resulta equivalente a que sea numerablemente incompleto.

5.1. Teorema del Punto Fijo de Wiśnicki

A partir de ahora vamos a trabajar en el siguiente contexto.

Sean $C \subset X$ un subconjunto no vacío, convexo y débilmente compacto y $T : C \to C$ no expansiva sin puntos fijos. Entonces por el Teorema 3.20, existe $K \subset C$ no vacío, convexo, débilmente compacto y T-invariante minimal. Ya sabemos que entonces, por el Lema 3.21, $\overline{\text{conv}}T(K) = K$. Es más, por la Proposición 3.23, sabemos que K es diametral.

Veamos ahora el siguiente lema, probado en [8].

Lema 5.1 (de Goebel-Karlovitz)**.** *Sea $T : K \to K$ una aplicación no expansiva sin puntos fijos, con K un conjunto no vacío, convexo, débilmente compacto y T-invariante minimal. Si $\{y_n\}_n \subset K$ es una sucesión de casi puntos fijos de T entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \operatorname{diam} K,$$

para todo $x \in K$.

Demostración. Definimos la función

$$r(x) = \limsup_{n\to\infty} \|x - y_n\| .$$

Veamos que es convexa. Sean $x_1, x_2 \in K$ y $\lambda \in [0,1]$. Entonces

$$\begin{aligned} r(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &= \limsup_{n\to\infty} \|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - y_n\| \\ &= \limsup_{n\to\infty} \|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - \lambda y_n + (1-\lambda)y_n\| \leq \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \|\lambda x_1 + \lambda y_n\| + \limsup_{n\to\infty} \|(1-\lambda)x_2 + (1-\lambda)y_n\| = \\ &= \lambda r(x_1) + (1-\lambda)r(x_2). \end{aligned}$$

Ahora, fijamos $a > 0$. Consideramos entonces $K_a = \{x \in K : r(x) \leq a\}$. Tenemos que K_a es no vacío, pues $\{y_n\}_n \subset K_a$, y convexo, por la convexidad de r. Veamos que es cerrado. Para ello, veamos que r es inferiormente semicontinua.

Sea $x_0 \in K$. Entonces

$$r(x_0) = \limsup_{n\to\infty} \|x_0 - y_n\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|x_0 - x\| + \limsup_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \|x - x_0\| + r(x)$$

Luego, tomando límite inferior cuando $x \to x_0$, concluimos que

$$r(x_0) \leq \liminf_{x\to x_0} r(x),$$

por lo que r es inferiomente semicontinua. Por ello, K_a es cerrado.

Además, como T es no expansiva

$$\|Tx - y_n\| = \|Tx - Ty_n + Ty_n - y_n\| \leq \|Tx - Ty_n\| + \|Ty_n - y_n\| \leq \|x - y_n\| + \|Ty_n - y_n\|$$

Entonces como $\lim_{n\to\infty} \|Ty_n - y_n\| = 0$, tomando límite superior llegamos a que

$$r(Tx) \leq r(x) \leq a,$$

para todo $x \in K_a$. Por ello, $T(K_a) \subset K_a$, por lo que K_a es T-invariante. Estamos entonces en las condiciones del Lema 3.22, por lo que r es constante.

Así, sea $r(x) = r \in \mathbb{R}, \forall x \in K$. Supongamos que $r \neq \operatorname{diam} K$. Entonces $r < \operatorname{diam} K$. Sea $\operatorname{diam} K = d$. Sean $x_1, \ldots, x_k \in K$ y consideremos las bolas $B(x_i, r')$, $1 \leq i \leq k$, con $r' = \frac{1}{2}(r+d)$. Ahora, como $r(x_i) = r, \forall 1 \leq i \leq k$, si tomamos $\varepsilon > 0$ existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\sup_{m\geq n} \|x_i - y_m\| - r\right| \leq \varepsilon, \forall n \geq n_i$. Esto es

$$0 \leq \sup_{m\geq n} \|x_i - y_m\| \leq \varepsilon + r,$$

para todo $n \geq n_i$. Luego, si tomamos $\varepsilon = \frac{1}{2}(d-r) > 0$, concluimos que

$$\|x_i - y_m\| \leq \frac{1}{2}(r+d) = r',$$

para todo $m \geq n_i$. Tomando $n_0 = \max_{1\leq i\leq k} n_i$, concluimos que $y_m \in B(x_i, r')$, para todo $m \geq n_0$ y $1 \leq i \leq k$.

Luego, a partir de cierto término $y_n \in B(x_i, r'), \forall 1 \leq i \leq k$. Por ello, $\{B(x, r')\}_{x \in K}$ tiene la propiedad de intersección finita. Como K es débilmente compacto tenemos que

$$\bigcap_{x \in K} B(x, r') \neq \varnothing$$

Sea entonces $z \in \bigcap_{x \in K} B(x, r')$. Este verifica que

$$\|x - z\| \leq r' = \frac{1}{2}(r + d) < d,$$

para todo $x \in K$.

Luego, $r_z(K) = \sup_{x \in K} \|x - z\| < d = \operatorname{diam} K$, por lo que z es un punto no diametral de K, lo que contradice el hecho de que K es diametral.

Por tanto, $r(x) = \operatorname{diam} K, \forall x \in K$. Además, el límite superior se convierte en un límite pues todas las subsucesiones de una sucesión de casi puntos fijos son también de casi puntos fijos.

□

Existe también la siguiente generalización del Lema de Goebel-Karlovitz para límites respecto a $\mathcal{U}$.

Lema 5.2 (generalizado de Goebel-Karlovitz)**.** *Sea $T : K \to K$ una aplicación no expansiva sin puntos fijos, con K un conjunto no vacío, convexo, débilmente compacto y T-invariante minimal. Si $\{y_n\}_n \subset K$ es tal que $\lim_{\mathcal{U}} \|Ty_n - y_n\| = 0$ entonces*

$$\lim_{\mathcal{U}} \|x - y_n\| = \operatorname{diam} K,$$

para todo $x \in K$.

Demostración. Sea $r(x) = \lim_{\mathcal{U}} \|x - y_n\|$. Razonando de forma completamente análoga a la demostración del Lema de Goebel-Karlovitz, Lema 5.1, obtenemos que $r(x) = r \in \mathbb{R}, \forall x \in K$. Supongamos que $r < \operatorname{diam} K$.

Como $r(x) = r \in \mathbb{R}, \forall x \in K$, para todo $x \in K$ y para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |\,\|x - y_n\| - r| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}.$$

Sean $x_1, \ldots, x_k \in K$. Por tanto, $A_\varepsilon^i = \{n \in \mathbb{N} : |\,\|x_i - y_n\| - r| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}, \forall 1 \leq i \leq k$. Por ello

$$I_\varepsilon = \bigcap_{i=1}^{k} A_\varepsilon^i \in \mathcal{U},$$

de lo que se desprende que $I_\varepsilon \neq \varnothing$. Con esto, existe $n \in I_\varepsilon$ tal que $\|x_i - y_n\| < r + \varepsilon, \forall 1 \leq i \leq k$. En particular, tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}(d - r) > 0$ tenemos que $\|x_i - y_n\| < r', \forall 1 \leq i \leq k$, donde $r' = \frac{1}{2}(r + d)$. Por ello, $y_n \in \bigcap_{i=1}^{k} B(x_i, r')$. Así, $\{B(x, r')\}_{x \in K}$ tiene la propiedad de intersección finita y, como K es débilmente compacto, se tiene que

$$\bigcap_{x \in K} B(x, r') \neq \varnothing.$$

Sea entonces $z \in \bigcap_{x\in K} B(x, r')$. Entonces $\|x - z\| \leq r' < d, \forall x \in K$. Luego, tomando supremo $r_z(K) < \operatorname{diam} K$, por lo que $z \in K$ sería no diametral, lo que contradice la diametralidad de K.

□

Ahora, sea

$$\tilde{K} = \{K\}_{\mathcal{U}} = \{\{x_n\}_{\mathcal{U}} \in \{X\}_{\mathcal{U}} : x_n \in K, \forall n \in \mathbb{N}\} \subset \{X\}_{\mathcal{U}},$$

que se observa que es no vacío, convexo, cerrado y acotado, por serlo K. Consideramos también la aplicación $\tilde{T} : \tilde{K} \to \tilde{K}$ dada por

$$\tilde{T}(\{x_n\}_{\mathcal{U}}) = \{Tx_n\}_{\mathcal{U}}.$$

Se ve fácilmente que esta aplicación está bien definida (gracias a la no expansividad de T) y es no expansiva.

Por el Lema 3.7 existe $\{x_n\}_n \subset K$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$. Por el Teorema 4.12 tenemos que

$$\lim_{\mathcal{U}} \|Tx_n - x_n\| = 0$$

Esto es, $\{Tx_n - x_n\}_n \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$. Luego, $\{Tx_n\}_{\mathcal{U}} = \{x_n\}_{\mathcal{U}}$, de lo que se concluye que $\tilde{T}(\{x_n\}_{\mathcal{U}}) = \{x_n\}_{\mathcal{U}}$. Por tanto, $\operatorname{Fix} \tilde{T}$ es no vacío.

Además, podemos caracterizar $\operatorname{Fix} \tilde{T}$ como

$$\operatorname{Fix} \tilde{T} = \left\{ \{x_n\}_{\mathcal{U}} \in \tilde{K} : \lim_{\mathcal{U}} \|Tx_n - x_n\| = 0 \right\}.$$

Por último, antes de dar algunas propiedades que verifican $K, \tilde{K}$ y $\operatorname{Fix} \tilde{T}$, introducimos el concepto de convexidad métrica, más débil que el de convexidad.

Definición 5.3. *Sea $A \subset X$ cerrado. Se dice que A es métricamente convexo si para todo $x, y \in A$ existe $z \in A$ tal que*

$$\|x - z\| = \frac{1}{2} \|x - y\|$$

$$\|y - z\| = \frac{1}{2} \|x - y\|$$

Observación 5.4. *Por la observación tras el Lema 2.2 se tiene que en espacios estrictamente convexos los conceptos de convexidad métrica y convexidad son equivalentes.*

En estas condiciones podemos dar una serie de propiedades de $\tilde{K}$ y $\tilde{T}$. La prueba del cuarto enunciado de la siguiente proposición se puede encontrar en [13].

Proposición 5.5. *En las condiciones anteriores se verifican:*

1. $\operatorname{diam} K = \operatorname{diam} \tilde{K} = \operatorname{diam} \operatorname{Fix} \tilde{T}$.

2. $K, \tilde{K}, \operatorname{Fix} \tilde{T}$ *son diametrales.*

3. Si $\tilde{y} \in \operatorname{Fix} \tilde{T}$ *entonces* $\|\{x\}_{\mathcal{U}} - \tilde{y}\|_{\mathcal{U}} = \operatorname{diam} K, \forall x \in K$.

4. $\operatorname{Fix} \tilde{T}$ *es métricamente convexo.*

Demostración.

1. Sea $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{K}$, con $\tilde{x} = \{x_n\}_{\mathcal{U}}$ y $\tilde{y} = \{y_n\}_{\mathcal{U}}$. Entonces

$$\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_{\mathcal{U}} = \lim_{\mathcal{U}} \|x_n - y_n\| \leq \operatorname{diam} K$$

Luego, $\operatorname{diam} \tilde{K} \leq \operatorname{diam} K$. Ahora bien, sabemos que existe $\{z_n\}_n \subset K$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|Tz_n - z_n\| = 0.$$

Así, por el Teorema 4.12, tenemos que $\lim_{\mathcal{U}} \|Tz_n - z_n\| = 0$. Entonces por el Lema generalizado de Goebel-Karlovitz, Lema 5.2, tenemos que

$$\lim_{\mathcal{U}} \|z_n - z\| = \operatorname{diam} K,$$

para todo $z \in K$. Esto es, $\|\{z_n\}_{\mathcal{U}} - \{z\}_{\mathcal{U}}\|_{\mathcal{U}} = \operatorname{diam} K$, con $\{z_n\}_{\mathcal{U}}, \{z\}_{\mathcal{U}} \in \tilde{K}$. Por tanto, concluimos que $\operatorname{diam} \tilde{K} = \operatorname{diam} K$.

Ahora, como $\operatorname{Fix} \tilde{T} \subset \tilde{K}$, tenemos que $\operatorname{diam} \operatorname{Fix} \tilde{T} \leq \operatorname{diam} \tilde{K} = \operatorname{diam} K$.

Sea $\{x_n\}_n \subset K$ una sucesión de casi puntos fijos de T. Entonces $\tilde{x} = \{x_n\}_{\mathcal{U}} \in \operatorname{Fix} \tilde{T}$. Luego, $\lim_{\mathcal{U}} \|Tx_n - x_n\| = 0$. Por el Lema generalizado de Goebel-Karlovitz, Lema 5.2, $\lim_{\mathcal{U}} \|x - x_n\| = \operatorname{diam} K, \forall x \in K$. En particular se tiene para $x = x_1$. Entonces, si $0 < \varepsilon < \operatorname{diam} K$ tenemos que

$$A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : \|x_1 - x_n\| \in (\operatorname{diam} K - \varepsilon, \operatorname{diam} K)\} \in \mathcal{U},$$

y por ende este conjunto es no vacío. Por ello, existe $n_1 \in A_\varepsilon$ tal que $\|x_1 - x_{n_1}\| > \operatorname{diam} K - \varepsilon$. Ahora, consideramos $\frac{\varepsilon}{2}$ y $x = x_2$. Entonces

$$A_{\frac{\varepsilon}{2}} = \left\{n \in \mathbb{N} : \|x_2 - x_n\| \in \left(\operatorname{diam} K - \frac{\varepsilon}{2}, \operatorname{diam} K\right)\right\} \in \mathcal{U}.$$

Luego, existe $n_2 \in A_{\frac{\varepsilon}{2}}$ tal que $\|x_2 - x_{n_2}\| > \operatorname{diam} K - \frac{\varepsilon}{2}$. De esta forma, podemos construir una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$ de $\{x_n\}_n$ tal que $\|x_k - x_{n_k}\| > \operatorname{diam} K - \frac{\varepsilon}{k}$. Además, como $\{x_n\}_n$ es una sucesión de casi punto fijos de T y $\{x_{n_k}\}_k$ es una subsucesión suya, esta última es también una sucesión de casi puntos fijos de T. Por ello, $\{x_{n_k}\}_{\mathcal{U}} \in \operatorname{Fix} \tilde{T}$.

De esta forma, $\lim_{k\to\infty} \|x_k - x_{n_k}\| \geq \operatorname{diam} K$, por lo que $\lim_{\mathcal{U}} \|x_k - x_{n_k}\| \geq \operatorname{diam} K$. Pero $\|x_k - x_{n_k}\| \leq \operatorname{diam} K$. Por tanto,

$$\|\tilde{x} - \{x_{n_k}\}_{\mathcal{U}}\|_{\mathcal{U}} = \lim_{\mathcal{U}} \|x_k - x_{n_k}\| = \operatorname{diam} K,$$

lo que concluye el resultado.

2. Que K es diametral se tiene de la Proposición 3.23.

Sea ahora $\tilde{x} = \{x_n\}_{\mathcal{U}} \in \tilde{K}$, y consideremos $\{y_n\}_n \subset K$ una sucesión de casi puntos fijos de T. Entonces $\lim_{\mathcal{U}} \|Ty_n - y_n\| = 0$ y, por el Lema generalizado de Goebel-Karlovitz, Lema 5.2, tenemos que $\lim_{\mathcal{U}} \|x - y_n\| = \operatorname{diam} K, \forall x \in K$. Razonando como en 1 podemos construir una subsucesión $\{y_{n_k}\}_k$ de $\{y_n\}_n$ de forma que $\lim_{\mathcal{U}} \|x_k - y_{n_k}\| = \operatorname{diam} K$. Luego, $\|\tilde{x} - \{y_{n_k}\}_{\mathcal{U}}\|_{\mathcal{U}} = \operatorname{diam} K = \operatorname{diam} \tilde{K}$. Por tanto, $r_{\tilde{x}}(\tilde{K}) = \operatorname{diam} \tilde{K}$ y $\tilde{x}$ es un punto diametral. La arbitrariedad de $\tilde{x}$ nos da el resultado.

Para $\operatorname{Fix} \tilde{T}$ se argumenta exactamente igual y se llega a la conclusión pues además la subsucesión construida será también de casi puntos fijos y, por ello, su clase en la ultrapotencia será un punto fijo de $\tilde{T}$.

3. Si $\tilde{y} \in \operatorname{Fix} \tilde{T}$ entonces existe $\{y_n\}_n \subset K$ tal que $\tilde{y} = \{y_n\}_{\mathcal{U}}$ y

$$\lim_{\mathcal{U}} \|Ty_n - y_n\| = 0.$$

Así, por el Lema de Goebel-Karlovitz generalizado, Lema 5.2, tenemos que

$$\lim_{\mathcal{U}} \|x - y_n\| = \operatorname{diam} K,$$

para todo $x \in K$. Esto es, $\|\{x\}_{\mathcal{U}} - \tilde{y}\|_{\mathcal{U}} = \operatorname{diam} K$.

4. Sea $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{K}$, con $\tilde{x} = \{x_n\}_{\mathcal{U}}$ y $\tilde{y} = \{y_n\}_{\mathcal{U}}$. Sean

$$\delta_n = \max\{\|x_n - Tx_n\|, \|y_n - Ty_n\|\},$$
$$d_n = \frac{1}{2}\|x_n - y_n\|,$$

y

$$\eta_n = \frac{1 - \varepsilon_n}{\varepsilon_n}\delta_n,$$

donde $\{\varepsilon_n\}_n \subset (0, 1)$ es tal que

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\delta_n}{\varepsilon_n} = 0.$$

Ahora, consideramos el conjunto

$$K_n = \{z \in K : \|x_n - z\| \leq d_n + \eta_n, \|y_n - z\| \leq d_n + \eta_n\}.$$

Observamos que $K_n = B(x_n, d_n + \eta_n) \cap B(y_n, d_n + \eta_n) \cap K$, por lo que obviamente K_n es cerrado y convexo.

Claramente, $\frac{x_n+y_n}{2} \in K_n$, pues

$$\left\|x_n - \frac{x_n + y_n}{2}\right\| = \left\|y_n - \frac{x_n + y_n}{2}\right\| = d_n \leq d_n + \eta_n,$$

pues $\eta_n \geq 0$. Así, K_n es no vacío.

Ahora, definimos $T_n : K \to K$, dada por

$$T_n z = (1 - \varepsilon_n)Tz + \varepsilon_n \frac{x_n + y_n}{2},$$

bien definida por la convexidad y T-invarianza de K. Veamos que K_n es T_n-invariante. Sea $z \in K_n$. Entonces

$$x_n - T_n z = (1-\varepsilon_n)(x_n - Tz) + \varepsilon_n \frac{x_n - y_n}{2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\|x_n - T_n z\| &= \left\|(1-\varepsilon_n)(x_n - Tz) + \varepsilon_n \frac{x_n - y_n}{2}\right\| \le \\
&\le (1-\varepsilon_n)\|x_n - Tz\| + \frac{\varepsilon_n}{2}\|x_n - y_n\| \le \\
&\le (1-\varepsilon_n)(\|x_n - Tx_n\| + \|Tx_n - Tz\|) + \frac{\varepsilon_n}{2}\|x_n - y_n\| \le \\
&\le (1-\varepsilon_n)(\delta_n + \|x_n - z\|) + \varepsilon_n d_n \le \\
&\le (1-\varepsilon_n)(\delta_n + d_n + \eta_n) + \varepsilon_n d_n = \\
&= d_n + (1-\varepsilon_n)\delta_n + (1-\varepsilon_n)\eta_n.
\end{aligned}$$

Como $\delta_n = \frac{\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n}\eta_n$, concluimos que $\|x_n - T_n z\| \le d_n + \eta_n$. De una forma completamente análoga se prueba que $\|y_n - T_n z\| \le d_n + \eta_n$, lo que prueba que $T_n(K) \subset K_n$.

Ahora bien, si $z_1, z_2 \in K_n$ tenemos que

$$T_n z_1 - T_n z_2 = (1-\varepsilon_n)(Tz_1 - Tz_2),$$

por lo que

$$\|T_n z_1 - T_n z_2\| = (1-\varepsilon_n)\|Tz_1 - Tz_2\| \le (1-\varepsilon_n)\|z_1 - z_2\|.$$

Así, T_n es un contracción, pues $0 < \varepsilon_n < 1$.

Entonces como K_n es completo por ser un subconjunto cerrado de un espacio de Banach, por el Principio de Contracción de Banach, Teorema 3.4, existe un único $z_n \in K_n$ que es punto fijo de T_n. Por estar en K_n este verifica que

$$\max\{\|x_n - z_n\|, \|y_n - z_n\|\} \le d_n + \eta_n$$

Además,

$$\begin{aligned}
\|z_n - Tz_n\| = \|z_n - T_n z_n + T_n z_n - Tz_n\| &= \|T_n z_n - Tz_n\| = \\
&= \left\|(1-\varepsilon_n)Tz_n - Tz_n + \varepsilon_n \frac{x_n + y_n}{2}\right\| = \\
&= \varepsilon_n \left\|Tz_n - \frac{x_n + y_n}{2}\right\| \le \varepsilon_n \operatorname{diam} K,
\end{aligned}$$

pues tanto Tz_n como $\frac{x_n+y_n}{2}$ están en K.

Como $\tilde{x}, \tilde{y} \in \operatorname{Fix}\tilde{T}$, tenemos que $\lim_{\mathcal{U}} \delta_n = 0$. Por ello, $\lim_{\mathcal{U}} \eta_n = 0$, ya que además $\lim_{\mathcal{U}} \varepsilon_n = 0$. Con esto, si $\tilde{z} = \{z_n\}_{\mathcal{U}}$, tenemos que

$$\|\tilde{x} - \tilde{z}\|_{\mathcal{U}} = \lim_{\mathcal{U}} \|x_n - z_n\| \le \lim_{\mathcal{U}} (d_n + \eta_n) = \lim_{\mathcal{U}} d_n = \lim_{\mathcal{U}} \frac{1}{2}\|x_n - y_n\| = \frac{1}{2}\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_{\mathcal{U}}.$$

Análogamente, se obtiene que $\|\tilde{y}-\tilde{z}\|_{\mathcal{U}} \leq \frac{1}{2}\|\tilde{x}-\tilde{y}\|_{\mathcal{U}} \leq \|\tilde{x}-\tilde{y}\|_{\mathcal{U}}$. Con esto, tenemos que

$$\begin{aligned}\|\tilde{x}-\tilde{z}\|_{\mathcal{U}} &= \|\tilde{x}-\tilde{y}+\tilde{y}-\tilde{z}\|_{\mathcal{U}} \geq \\ &\geq \left|\, \|\tilde{x}-\tilde{y}\|_{\mathcal{U}} - \|\tilde{y}-\tilde{z}\|_{\mathcal{U}} \,\right| = \\ &= \|\tilde{x}-\tilde{y}\|_{\mathcal{U}} - \|\tilde{y}-\tilde{z}\|_{\mathcal{U}} \geq \\ &\geq \|\tilde{x}-\tilde{y}\|_{\mathcal{U}} - \frac{1}{2}\|\tilde{x}-\tilde{y}\|_{\mathcal{U}} = \\ &= \frac{1}{2}\|\tilde{x}-\tilde{y}\|_{\mathcal{U}}.\end{aligned}$$

Luego, $\|\tilde{x}-\tilde{z}\|_{\mathcal{U}} = \frac{1}{2}\|\tilde{x}-\tilde{y}\|_{\mathcal{U}}$. Razonando de la misma forma concluimos que $\|\tilde{y}-\tilde{z}\|_{\mathcal{U}} = \frac{1}{2}\|\tilde{x}-\tilde{y}\|_{\mathcal{U}}$.

Además,

$$\left\|\tilde{z}-\tilde{T}\tilde{z}\right\|_{\mathcal{U}} = \lim_{\mathcal{U}} \|z_n - Tz_n\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \varepsilon_n \operatorname{diam} K = 0.$$

Por ende, $\tilde{z} \in \operatorname{Fix}\tilde{T}$, lo que finaliza la prueba.

□

Introducimos ahora aquella propiedad de separación de puntos que mencionabamos al principio del presente capítulo.

Definición 5.6. *Se dice que un espacio de Banach X tiene la propiedad (S) si para todo $A \subset S_X(0,1)$, con $\operatorname{diam} A \leq 1$, existe $f \in X^*$ tal que $f(x) > 0, \forall x \in A$.*

Definición 5.7. *Se dice que un espacio de Banach X tiene la propiedad (S_m) si para todo conjunto métricamente convexo $A \subset S_X(0,1)$, con $\operatorname{diam} A \leq 1$, existe $f \in X^*$ tal que $f(x) > 0, \forall x \in A$.*

Observación 5.8. *Obviamente, si un espacio de Banach tiene la propiedad (S) entonces tiene también la propiedad (S_m).*

Ahora, podemos dar el resultado fundamental que nos permitirá encontrar algunos espacios superreflexivos con la Propiedad del Punto Fijo. Este fue publicado en 2001 por A. Wiśnicki en [18].

Teorema 5.9 (de Wiśnicki)**.** *Sea X un espacio de Banach superreflexivo de forma que existe $\mathcal{U}$ un ultrafiltro libre en $\mathbb{N}$ tal que $\{X\}_{\mathcal{U}}$ tiene la propiedad (S_m). Entonces X tiene la Propiedad de Punto Fijo.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que existen $K \subset X$ acotado, cerrado, convexo y minimalmente T-invariante y una aplicación no expansiva $T : K \to K$ sin puntos fijos. Entonces por el Lema 3.7 existe $\{x_n\}_n \subset K$ sucesión de casi puntos fijos de T. Además, mediante una traslación y una homotecia podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_n \rightharpoonup 0 \in K$ y $\operatorname{diam} K = 1$. Entonces por el primer y cuarto enunciado de la Proposición 5.5 tenemos que $\operatorname{Fix}\tilde{T}$ es métricamente convexo y $\operatorname{diam}(\operatorname{Fix}(\tilde{T})) = 1$.

Como $\{X\}_{\mathcal{U}}$ tiene (S_m), existe $F \in (\{X\}_{\mathcal{U}})^*$ tal que $F(x) > 0$, para todo $x \in \operatorname{Fix}\tilde{T}$. Por el Teorema de Henson-Moore, Teorema 4.33, podemos representar F como $\{f_n\}_{\mathcal{U}} \in \{X^*\}_{\mathcal{U}}$, al ser X superreflexivo. Como $x_n \rightharpoonup 0$, tenemos que $f(x_n) \to f(0) = 0, \forall f \in X^*$. Por ello, podemos encontrar una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$ de $\{x_n\}_n$ tal que $|f_k(x_{n_k})| < \frac{1}{k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Además, como $\{x_n\}_n$ era una sucesión de casi puntos fijos de T, se tiene que $\{x_{n_k}\}_k$ también lo es. Por tanto,

$$\lim_{k\to\infty} \|Tx_{n_k} - x_{n_k}\| = 0.$$

Así, $\lim_{\mathcal{U}} \|Tx_{n_k} - x_{n_k}\| = 0$, por lo que $\{x_{n_k}\}_{\mathcal{U}} \in \operatorname{Fix} \tilde{T}$. Por ello, $F(\{x_{n_k}\}_{\mathcal{U}}) > 0$. Sin embargo, por el isomorfismo isométrico que da el Teorema de Henson-Moore, Teorema 4.33, sabemos que

$$F(\{x_{n_k}\}_{\mathcal{U}}) = \lim_{\mathcal{U}} f_k(x_{n_k}) = 0,$$

con lo que tenemos contradicción.

□

5.2. Aplicaciones del Teorema de Wiśnicki

El objetivo de esta sección es usar el Teorema de Wiśnicki para encontrar espacios de Banach que tengan la Propiedad del Punto Fijo. Este resultado nos permitirá encontrar tres clases de espacios que poseen esta propiedad. Estos son los espacios de dimensión finita, los espacios con característica de convexidad estrictamente menor que 1 y cualquier suma directa finita de ellos. A partir de estas tres clases deduciremos después otras que también poseen la Propiedad del Punto Fijo.

La siguiente proposición, que resulta crucial para lograr este objetivo, la dio A. Wiśnicki en [18].

Proposición 5.10. *Los siguientes espacios tienen la propiedad (S):*

1. *los espacios de Banach separables.*
2. *los espacios estrictamente convexos.*
3. *los espacios de dimensión finita.*
4. *los espacios de Banach X con $\varepsilon_0(X) < 1$.*

Demostración.

1. Sea $A \subset S_X(0,1)$ con $\operatorname{diam} A \leq 1$. Supongamos primero que A es numerable y que viene dado por $A = \{x_i\}_i$. Por el Teorema de Hahn-Banach, podemos encontrar $\{f_i\}_i \subset S_{X^*}(0,1)$ tal que $f_i(x_i) = 1$. Observamos que entonces, puesto que $\operatorname{diam} A \leq 1$, se verifica

$$|f_i(x_i - x_j)| \leq \|x_i - x_j\| \leq 1$$

Por otra parte, $1 \geq |f_i(x_i - x_j)| = |1 - f_i(x_j)|$, luego $f_i(x_j) \geq 0$, para cada $i, j \in \mathbb{N}$. De esta forma, podemos construir el funcional

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x),$$

que verifica que $F(x_i) > 0, \forall i \in \mathbb{N}$.

Ahora, supongamos que $A \subset S_X(0{,}1)$, con $\operatorname{diam} A = 1$, tiene cardinal arbitrario. Como X es separable, tenemos que A también lo es. Entonces existe $B \subset A$ denso y numerable. Sea $B = \{x_i\}_i$ Repitiendo el proceso anterior, podemos construir $F \in X^*$ de la misma forma que en la primera parte de la prueba de forma que $F(x) > 0, \forall x \in B$. Como B es denso en A, si $x \in A$, existe $\{x_{i_k}\}_k \subset B$ tal que $x_{i_k} \to x$. De esta forma, $F(x_{i_k}) \to F(x)$. Además, como $F(x_{i_k}) > 0, \forall k \geq 1$, tenemos que $F(x) \geq 0$.

Supongamos que existiese $x \in A$ tal que $F(x) = 0$. Sea $\{x_{i_k}\}_k \subset B$ tal que $x_{i_k} \to x$. Entonces $F(x_{i_k}) \to F(x) = 0$.

Observamos lo siguiente. Fijados $k, l \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$|1 - f_{i_l}(x_{i_k})| = |f_{i_l}(x_{i_l}) - f_{i_l}(x_{i_k})| \leq \|f_{i_l}\| \, \|x_{i_l} - x_{i_k}\| = \|x_{i_l} - x_{i_k}\| \tag{5.1}$$

Ahora bien, como $\{x_{i_k}\}$ es convergente, es de Cauchy. Por ello, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_{i_l} - x_{i_k}\| < \frac{1}{2}$, si $k > l \geq k_0$. Tomando $l = k_0$, esta desigualdad junto con (5.1) nos dice que $f_{i_{k_0}}(x_{i_k}) > \frac{1}{2}$.

Luego, como la serie que define a F es de términos positivos, concluimos que

$$F(x_{i_k}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x_{i_k}) \geq \frac{1}{2^{i_{k_0}}} f_{i_{k_0}}(x_{i_k}) > \frac{1}{2^{i_{k_0}}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{i_{k_0}+1}} > 0,$$

que contradice el hecho de que $F(x_{i_k}) \to 0$.

2. Sea $A \subset S_X(0,1)$ con $\operatorname{diam} A \leq 1$. Sea $x \in A$. Por el Teorema de Hahn-Banach, podemos encontrar $f \in S_{X^*}(0,1)$ tal que $f(x) = 1$. Ahora, supongamos que $f(y) < 0$, para algún $y \in A$. Entonces

$$1 < f(x - y) \leq \|f\| \, \|x - y\| \leq 1,$$

lo cual es una contradicción.

Supogamos entonces que $f(y) = 0$. Tenemos que

$$1 = f(x - y) \leq \|f\| \, \|x - y\| = \|x - y\| \leq 1,$$

Por ello, $x - y \in S_X(0,1)$. Luego, $f(x) = 1 = \|f\|$ y $f(x - y) = 1 = \|f\|$. Por el Teorema 2.3, f alcanza su norma en un solo punto. Luego, $x = x - y$, lo cual supone una contradicción pues $y = 0 \notin A$.

3. Basta notar que los espacios de dimensión finita son separables y aplicar 1.

4. Ahora, supongamos que $\varepsilon_0(X) < 1$ y sea $A \subset S_X(0,1)$ con $\operatorname{diam} A \leq 1$. Fijamos $x \in A$. Por el Teorema de Hahn-Banach, Teorema 1.5, existe $f \in S_{X^*}(0,1)$ tal que $f(x) = 1$. Supongamos ahora que existe $y \in A$ tal que $f(y) < 0$. Entonces, al igual que en 2,

$$1 < f(x - y) \leq \|f\| \, \|x - y\| \leq 1,$$

y llegamos a contradicción.

Supongamos entonces que $f(y) = 0$. Entonces

$$1 = f(x - y) \leq \|f\| \, \|x - y\| = \|x - y\| \leq 1.$$

Por tanto, $\|x-y\|=1$. Entonces $x-y\in S_X(0,1)$. Además, si $\lambda\in[0,1]$,

$$1=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(x-y)\leq\|\lambda x+(1-\lambda)(x-y)\|\leq\lambda\|x\|+(1-\lambda)\|x-y\|=1.$$

Por ello, el segmento que forman x y $x-y$ está completamente contenido en la esfera. Pero este segmento tiene longitud

$$\|x-(x-y)\|=\|y\|=1,$$

lo cual contradice que $\varepsilon_0(X)<1$.

$\square$

A pesar de que estas cuatro clases poseen la propiedad (S), las dos primeras no son cerradas bajo el paso a ultrapotencia. En cambio, para la tercera y cuarta clase de espacios, con esta proposición y del Teorema de Wiśnicki, Teorema 5.9, obtenemos varios resultados de punto fijo.

El primero es para espacios de dimensión finita que hemos separado como resultado aparte, aunque puede deducirse de los siguientes.

Corolario 5.11. *Sea X un espacio de Banach de dimensión finita. Entonces X tiene la Propiedad de Punto Fijo.*

Demostración. Sabemos que un espacio de dimensión finita es superreflexivo. Además, por la Proposición 4.22 tenemos que $\{X\}_\mathcal{U}$ es también de dimensión finita. Así, por la Proposición 5.10, $\{X\}_\mathcal{U}$ tiene la propiedad (S) y, por ello, la propiedad (S_m). Entonces por el Teorema de Wiśnicki, Teorema 5.9, se tiene el resultado.

$\square$

Para ver que los espacios con $\varepsilon_0<1$ tienen la Propiedad de Punto Fijo es indispensable probar primero que el módulo de convexidad, y por ende la característica de convexidad, son estables bajo el paso a la ultrapotencia. Este hecho puede encontrarse en [1].

Lema 5.12. *Sea X un espacio de Banach. Entonces para todo $\varepsilon\in[0,2)$ se verifica*

$$\delta_X(\varepsilon)=\delta_{\{X\}_\mathcal{U}}(\varepsilon)$$

Demostración. Sabemos que $\{X\}_\mathcal{U}$ contiene una copia de X como subespacio. Entonces, por la Proposición 2.13 y puesto que el módulo de convexidad está definido a partir de un ínfimo, concluimos que $\delta_{\{X\}_\mathcal{U}}(\varepsilon)\leq\delta_X(\varepsilon)$.

Ahora, sean $\tilde{x},\tilde{y}\in\{X\}_\mathcal{U}$ tales que $\|\tilde{x}\|_\mathcal{U}\leq 1$, $\|\tilde{y}\|_\mathcal{U}\leq 1$ y $\|\tilde{x}-\tilde{y}\|_\mathcal{U}\geq\varepsilon$. Entonces, podemos encontrar representantes $\{x_n\}_n$ y $\{y_n\}_n$ de $\tilde{x}$ y $\tilde{y}$, respectivamente, y $A\in\mathcal{U}$ de forma que si $n\in A$, entonces $\|x_n\|\leq 1$, $\|y_n\|\leq 1$ y $\|x_n-y_n\|\geq t\varepsilon, \forall n\in A$, con $0<t<1$. Veámoslo.

Sea $\alpha=\|\tilde{x}-\tilde{y}\|_\mathcal{U}\leq\varepsilon$. Entonces $A_\rho=\{n\in\mathbb{N}:\|x_n-y_n\|\in(\alpha-\rho,\alpha+\rho)\}\in\mathcal{U}$, para todo $\rho>0$. Por ello, son no vacíos. Sea $n\in A_\rho$. Entonces este verifica que

$$\|x_n-y_n\|>\alpha-\rho\geq\varepsilon-\rho.$$

Fijado $t\in(0,1)$, tomamos $\rho\leq(1-t)\varepsilon>0$. De esta forma, $\varepsilon-\rho\geq t\varepsilon$. Así, $A_\rho\subset B_{\rho,t}=\{n\in\mathbb{N}:\|x_n-y_n\|\geq t\varepsilon\}$, luego $B_{\rho,t}\in\mathcal{U}$.

Por otra parte, sea $\beta=\|\tilde{x}\|_\mathcal{U}\leq 1$. Distingimos dos casos:

1. Si $\beta < 1$ entonces es fácil ver que podemos tomar un $C \in \mathcal{U}$ de forma que si $n \in C$ entonces $\|x_n\| \leq 1$.

2. Si $\beta = 1$ entonces observamos lo siguiente
$$\lim_{\mathcal{U}} \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - x_n \right\| = \lim_{\mathcal{U}} (\|x_n\| \, \|x_n - \|x_n\| \, x_n\|) = \lim_{\mathcal{U}} \left(|1 - \|x_n\|| \, \|x_n\|^2\right) = 0,$$
pues $\lim_{\mathcal{U}} \|x_n\| = 1$. Por ello, $\tilde{x} = \{x_n\}_{\mathcal{U}} = \left\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\}_{\mathcal{U}}$ y cambiando a este representante tenemos lo que queríamos.

El mismo razonamiento nos da un representante $\{y_n\}_n$ de $\tilde{y}$ tal que $\|y_n\| \leq 1$.

Entonces
$$\left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\| \leq 1 - \delta_X(t\varepsilon)$$

Tomando límite respecto a $\mathcal{U}$ e ínfimo obtenemos entonces que $\delta_X(t\varepsilon) \leq \delta_{\{X\}_{\mathcal{U}}}(\varepsilon)$. Tomando $t \to 1$ y teniendo en cuenta que δ_X es continuo, concluimos que $\delta_X(\varepsilon) \leq \delta_{\{X\}_{\mathcal{U}}}(\varepsilon)$, que junto con lo anterior nos da el resultado deseado.

$\square$

Observación 5.13. *Con esto, tenemos que el módulo de convexidad se conserva bajo el paso a ultrapotencias. Es más, se tiene que*
$$\varepsilon_0(\{X\}_{\mathcal{U}}) = \sup\{\varepsilon > 0 : \delta_{\{X\}_{\mathcal{U}}}(\varepsilon) = 0\} = \sup\{\varepsilon > 0 : \delta_X(\varepsilon) = 0\} = \varepsilon_0(X).$$
Por tanto, la característica de convexidad es también invariante bajo el paso a ultrapotencia.

Corolario 5.14. *Sea X un espacio de Banach tal que $\varepsilon_0(X) < 1$. Entonces X tiene la Propiedad de Punto Fijo.*

Demostración. Tenemos que $\varepsilon_0(X) = \varepsilon_0(\{X\}_{\mathcal{U}})$, luego $\varepsilon_0(\{X\}_{\mathcal{U}}) < 1$ y por la Proposición 5.10, este tiene la propiedad (S). Por ende, también tiene la propiedad (S_m). Si X verifica que $\varepsilon_0(X) < 1$, por el Teorema de James-Enflo, Teorema 4.32, sabemos que X es superreflexivo. De esta forma, podemos concluir que los espacios de Banach con $\varepsilon_0(X) < 1$ tienen la Propiedad del Punto Fijo.

$\square$

En particular, como los espacios uniformemente convexos están caracterizados por tener característica de convexidad nula, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.15. *Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo. Entonces X tiene la Propiedad del Punto Fijo.*

Este resultado es de sumo interés pues nos da la Propiedad del Punto Fijo en espacios muy conocidos, como los de Hilbert, los ℓ^p y los L^p, con $p \in (1, \infty)$.

Por último, estudiemos la suma directa de espacios de Banach. Por supuesto, si cada X_i es de dimensión finita, la suma directa también lo será y podremos entonces asegurar que posee la Propiedad de Punto Fijo. Veamos que además, si cada X_i tiene característica de convexidad estrictamente menor que 1, la suma directa posee la propiedad (S). Esta prueba pueder verse [18].

Proposición 5.16. *Sean $X_1, \dots, X_n$ espacios de Banach tales que $\varepsilon(X_i) < 1, 1 \leq i \leq n$, y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro libre sobre $\mathbb{N}$. Entonces $\{(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\infty\}_\mathcal{U}$ tiene la propiedad (S).*

Demostración. En virtud del Lema 4.35 tenemos que

$$\{(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\infty\}_\mathcal{U} = (\{X_1\}_\mathcal{U} \oplus \cdots \oplus \{X_n\}_\mathcal{U})_\infty$$

Con esto, y puesto que hemos visto que la característica de convexidad se preserva bajo el paso a ultrapotencias, basta probar que $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\infty$ tiene la propiedad (S).

Sean $X = (X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\infty$ y $A \subset S_X(0,1)$ tal que $\operatorname{diam} A \leq 1$. Sea $A_i = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in A : \|x_i\| = 1\}$. Si consideramos $I = \{i \in \{1, \dots, n\} : A_i \neq \varnothing\}$. Se tiene entonces que $A = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Ahora, para cada $A_i, i \in I$, fijamos $y^i = (y_1^i, \dots, y_n^i) \in A_i$. Por el Teorema de Hahn-Banach, Teorema 1.5, podemos encontrar $f_i \in S_{X_i^*}(0,1)$ de forma que $f_i(y_i^i) = 1$. Entonces si $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$, tenemos que

$$|f_i(x_i) - f_i(y_i^i)| \leq \left\|x_i - y_i^i\right\| \leq \left\|x - y^i\right\|_\infty \leq 1,$$

pues $\operatorname{diam} A \leq 1$. Por tanto,

$$|f_i(x_i) - 1| = |f_i(x_i) - f_i(y_i^i)| \leq 1,$$

de lo que se deduce que $f_i(x_i) \geq 0, i \in I, x \in A$. Es más, con un razonamiento completamente análogo al que se hizo en la prueba del enunciado 4 de la Proposición 5.10, se tiene que $f_i(x_i) > 0$ si $x \in A_i$. De esta forma, podemos construir $F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \in I} f_i(x_i)$, que nos da el resultado deseado.

$\square$

Corolario 5.17. *Sean $X_1, \dots, X_n$ espacios de Banach tales que $\varepsilon_0(X_i) < 1$, $1 \leq i \leq n$. Entonces $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\infty$ tiene la Propiedad del Punto Fijo.*

Demostración. Por la Proposición 5.16, $\{(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\infty\}_\mathcal{U}$ tiene la propiedad (S) y, por ende, la propiedad (S_m). Además, por el Teorema de James-Enflo, Teorema 4.32, cada X_i, $1 \leq i \leq n$ es superreflexivo. Luego, por el Teorema 4.36 el espacio $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\infty$ es superreflexivo. Entonces, por el Teorema de Wiśnicki, Teorema 5.9, $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\infty$ tiene la Propiedad del Punto Fijo.

$\square$

Resumiendo, gracias al Teorema de Wiśnicki, hemos concluido que los espacios de Banach

- de dimensión finita y
- con característica de convexidad estrictamente menor que 1

tienen la Propiedad del Punto Fijo. Como consecuencia, hemos visto que

- los espacios de Hilbert,

- los espacios ℓ^p, $p \in (1, \infty)$,
- los espacios L^p, $p \in (1, \infty)$ y
- los espacios de Banach uniformemente convexos

tienen también esta propiedad. Por otra parte, el Teorema de Kirk, Teorema 3.25, nos dice que los espacios reflexivos con estructura normal también la verifican. Este último engloba todos los casos anteriores pues, si $\varepsilon_0(X) < 1$, por el Teorema 4.32, X es superreflexivo y, por tanto, reflexivo, y en [7] puede comprobarse que X tiene estructura normal.

Por último, cualquier suma directa finita de espacios con característica de convexidad estrictamente menor que 1 poseerá la Propiedad del Punto Fijo.

Bibliografía

[1] Aksoy, A. G., Khamsi, M. A. *Nonstandard methods in fixed point theory.* Springer-Verlag, 1990.

[2] Brézis, H. *Análisis funcional: teoría y aplicaciones.* Alianza, 1984.

[3] Clarkson, J. A. "Uniformly Convex Spaces". *Transactions of the American Mathematical Society* 40.3 (1936), 396–414.

[4] Day, M. M. "Reflexive Banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces". *Bulletin of the American Mathematical Society* 47.4 (1941), 313–318.

[5] Dulst, D. Van. *Reflexive and superreflexive Banach spaces.* Mathematisch Centrum, 1978.

[6] Dunford, N., Schwartz, J. *Linear Operators, Part I: General Theory.* Wiley Interscience, 1957.

[7] Goebel, Kazimierz, Kirk, W. A. *Topics in metric fixed point theory.* Cambridge University Press, 1990.

[8] Goebel, Kazimierz, Sims, B. "More on minimal invariant sets for nonexpansive mappings". *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* 47.4 (2001), 2667–2681.

[9] Henson, C. W., Moore Jr., L. C. "Subspaces of the Nonstandard Hull of a Normed Space". *Transactions of the American Mathematical Society* 197 (1974), 131–143.

[10] Henson, C. W., Moore Jr., L. C. "The Nonstandard Theory of Topological Vector Spaces". *Transactions of the American Mathematical Society* 172 (1972), 405–435.

[11] James, R. C. "Reflexivity and the Supremum of Linear Functionals". *Annals of Mathematics* 66.1 (1957), 159–169.

[12] James, R. C. "Weak compactness and reflexivity". *Israel Journal of Mathematics* 2 (1964), 101–119.

[13] Khamsi, M. A., Kirk, W. A. *An introduction to metric spaces and fixed point theory.* John Wiley, 2001.

[14] Kirk, W. A. "A fixed point theorem for mappings which do not increase distances". *The American Mathematical Monthly* 72.9 (1965), 1004–1006.

[15] Mil'man, V. D. "Geometric theory of Banach spaces. Part I. The theory of basis and minimal systems". *Russian Mathematical Surveys* 25.3 (1970), 111–170.

[16] Pettis, B. J. "A proof that every uniformly convex space is reflexive". *Duke Mathematical Journal* 5.2 (1939), 249–253.

[17] Rudin, W. *Functional analysis*. McGraw-Hill Book Co., 1973.

[18] Wiśnicki, A. "Towards the fixed point property for superreflexive spaces". *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 64.3 (2001), 435–444.