ECUACIONES DIFERENCIALES EN ESCALAS DE TIEMPO

CARMEN MÁRQUEZ MARTÍN

GRADO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Trabajo Fin de Grado

Tutor:

Tomás Caraballo

Índice general

Índice I

1. Introducción y motivación 1

2. Definiciones básicas 4

3. Derivación 8

4. Integración 18

5. Otros resultados 27

6. Ecuaciones de primer orden 32
- 6.1. El plano complejo de Hilger 32
- 6.2. La función exponencial 41
- 6.3. Problemas de Valor Inicial 53

7. Resolución de la ecuación de Beverton-Holt 59

8. Conclusiones 61

Bibliografía 62

Capítulo 1

Introducción y motivación

La teoría de escalas de tiempo, la cual ha recibido gran atención recientemente, fue introducida por Stefan Hilger en su tesis doctoral [4] en 1988, con intención de unificar el análisis discreto y el continuo.

En este trabajo vamos a introducir un breve estudio de las ecuaciones diferenciales en escalas de tiempo. Podremos observar que muchos de los resultados que obtendremos mantienen una gran relación con las ecuaciones diferenciales que ya conocemos, sin embargo, muchos otros resultados serán completamente nuevos. La idea principal es probar los resultados de las ecuaciones dinámicas cuando el dominio de una función sea lo que llamamos una escala de tiempo, que es un subconjunto cerrado no vacío de números reales. En el caso en el que usemos el conjunto de los números reales, el resultado será la ecuación diferencial ordinaria que ya conocemos. Por otro lado, si escogemos el conjunto de los números enteros, el resultado será las ecuaciones en diferencia. Sin embargo, existen muchos otros conjuntos de números reales que nos proporcionan muchos otros resultados. Podemos resumir todo esto diciendo que la intención del cálculo en escalas de tiempo es unificar y extender.

El cálculo en escalas de tiempo tiene multitud de aplicaciones. Consideremos la ecuación en diferencia

$$x_{n+1} = \frac{\nu K_n x_n}{K_n + (\nu - 1)x_n}, n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.1}$$

Donde $\nu > 1, K_n > 0$ y $x_0 > 0$, conocida como la ecuación en diferencia de *Beverton–Holt*. Esta tiene amplias aplicaciones en dinámica de poblaciones. La sucesión K_n mide la capacidad de carga, mientras que ν mide la tasa de crecimiento natural de la población. En este trabajo vamos a estudiar una forma diferente de ver (1.1).

¿Cómo sería la forma continua de la ecuación de Beverton–Holt? Para responder a esta pregunta debemos estudiar en primer lugar la forma de escribir la ecuación (1.1) en escalas de tiempo.

Una escala de tiempo $\mathbb{T}$ es un subconjunto cerrado del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. La teoría de escalas de tiempo $\mathbb{T}$ pretende unificar modelos continuos ($\mathbb{T} = \mathbb{R}$) y discretos ($\mathbb{T} = \mathbb{Z}$) con el fin de extender la teoría a los casos en los que $\mathbb{T}$ es otro conjunto distinto. De esta forma, una vez dada la ecuación en diferencia de Beverton–Holt, podríamos estudiar el caso $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, obteniendo la ecuación diferencial de Beverton–Holt. Este paso, de discreto a continuo, nos muestra el poder de los modelos en escalas de tiempo, proporcionando una idea de la estructura de la ecuación discreta (1.1). Veamos como es la estructura de la ecuación de Beverton–Holt. Para ello definimos α de la siguiente forma:

$$\alpha = \frac{\nu - 1}{\nu},$$

y despejaremos obteniendo

$$\nu = \frac{1}{1-\alpha},$$

donde $\nu > 1$ si y solo si $0 < \alpha < 1$.

Supongamos que x es solución de (1.1). Tenemos que

$$x_{n+1} = \frac{K_n x_n}{(1-\alpha)K_n + \alpha x_n},$$

y, por tanto,

$$x_n(K_n - \alpha x_{n+1}) = (1-\alpha)K_n x_{n+1}.$$

Tenemos entonces

$$x_n = \frac{(1-\alpha)K_n x_{n+1}}{K_n - \alpha x_{n+1}} = \frac{\alpha x_{n+1}(x_{n+1} - K_n)}{K_n - \alpha x_{n+1}} + x_{n+1},$$

luego

$$\triangle x_n = \frac{\alpha x_{n+1}(K_n - x_{n+1})}{K_n - \alpha x_{n+1}}.$$

Por tanto,

$$K_n \triangle x_n - \alpha x_{n+1}(x_{n+1} - x_n) = \alpha x_{n+1}(K_n - x_{n+1}),$$

y así,

$$K_n \triangle x_n = \alpha x_{n+1}(K_n - x_n).$$

Llegando a la forma alternativa de la ecuación (1.1)

$$\triangle x_n = \alpha x_{n+1}(1 - \frac{x_n}{K_n}). \tag{1.2}$$

La forma análoga de escribir (1.2) para un modelo continuo la conseguimos si reemplazamos $\triangle x_n$ por x', x_{n+1} y x_n por x, y K_n por $K(t)$ obteniendo la ecuación diferencial

$$x' = \alpha x(1 - \frac{x}{K(t)}).$$

Para dar una forma análoga de escribir (1.2) para un modelo en escalas de tiempo debemos introducir unos conceptos previos, que son la derivada con respecto a una escala de tiempo, $x^{\triangle}$, y la función x^{σ}. Estos conceptos serán definidos en el siguiente capítulo, de momento los usaremos formalmente. Ahora bien, si reemplazamos en (1.2) x_n por $x(t)$, x_{n+1} por $x^{\sigma}(t)$ y $\triangle x_n$ por $x^{\triangle}(t)$, obtendremos la ecuación dinámica

$$x^{\triangle}(t) = \alpha x^{\sigma}(1 - \frac{x}{K(t)}). \tag{1.3}$$

Y finalmente, tendríamos como ver la ecuación dinámica de *Beverton-Holt* en escalas de tiempo.

La intención de este trabajo será llegar a resolver ecuaciones en un subconjunto $\mathbb{T}$ como acabamos de ver, para ello dividiremos el trabajo en varios capítulos.

En el Capítulo 2 introduciremos el cálculo en escalas de tiempo desarrollado por Stefan Hilger [5]. Definiremos los conceptos básicos del cálculo en escalas de tiempo, así como ejemplos para la completa comprensión de estos.

En el Capítulo 3 introduciremos la derivada para funciones $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. Resultados fundamentales como la regla del producto y del cociente estarán presentes en este capítulo, así como otros resultados relacionados con la diferenciabilidad. Daremos ejemplos para la correcta comprensión.

En el Capítulo 4 introduciremos la integral para funciones en escalas de tiempo, dando resultados fundamentales y otros resultados relativos a la integrabilidad. Daremos ejemplos para la correcta comprensión.

En el Capítulo 5 veremos algunos resultados como la regla de la cadena y el método de sustitución, los cuales nos serán de utilidad. Pondremos ejemplos de como aplicar estas técnicas.

En el Capítulo 6 introduciremos el plano complejo de Hilger, guiados por el artículo de Hilger [3]. Usaremos la llamada transformación cilindro para introducir las funciones exponenciales en escalas de tiempo. Probaremos que estas funciones exponenciales satisfacen el problema de valor inicial que involucra la función dinámica lineal de primer orden. Usaremos las propiedades de las funciones exponenciales para resolver todos los problemas de valor inicial que involucran ecuaciones dinámicas lineales de primer orden. Para casos no homogéneos, utilizaremos la técnica de la variación de constantes.

Por último, en el Capítulo 7, probaremos toda la teoría estudiada en los capítulos anteriores, dando una solución para la ecuación dinámica en escalas de tiempo de *Beverton-Holt* que hemos visto antes.

Capítulo 2

Definiciones básicas

Para estudiar las ecuaciones diferenciales de primer orden en escala de tiempo $\mathbb{T}$, primero debemos definir ciertos conceptos.

Denotamos como $f^{\triangle}$ a la función delta derivada o función derivada con respecto a una escala de tiempo de una función f definida en $\mathbb{T}$. Se tiene que $f^{\triangle} = f'$ es la función derivada cuando $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. Por otra parte, $f^{\triangle} = \triangle f$ es la función diferencia cuando $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$.

Sea $\mathbb{T}$ una escala de tiempo. Para $t \in \mathbb{T}$ definimos el operador de salto hacia adelante (*forward jump operator*) $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ como

$$\sigma(t) := \text{ínf}\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$$

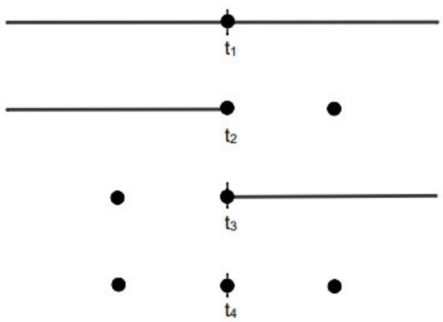
Por otro lado, podemos definir el operador de salto hacia atrás (*backward jump operator*) $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ como

$$\rho(t) := \text{ínf}\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$$

Tenemos que si $\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \emptyset$, entonces $\sigma(t) = \sup \mathbb{T}$, y si $\{s \in \mathbb{T} : s < t\} = \emptyset$ entonces $\rho(t) = \text{ínf}\, \mathbb{T}$, donde $\emptyset$ denota el conjunto vacío. Si $\sigma(t) > t$ decimos que t es dispersa por la derecha, mientras que si $\rho(t) < t$ entonces decimos que t es dispersa por la izquierda. Un punto t que es disperso por la izquierda y por la derecha al mismo tiempo, se le denomina aislado.

Por otra parte, si $t < \sup \mathbb{T}$ y $\sigma(t) = t$, entonces t se denomina densa por la derecha, y si $t > \text{ínf}\, \mathbb{T}$ y $\sigma(t) = t$ entonces t es densa por la izquierda. Un punto t que es denso por la izquierda y por la derecha se denomina denso.

t disperso por la derecha	$t < \sigma(t)$
t denso por la derecha	$t = \sigma(t)$
t disperso por la izquierda	$\rho(t) < t$
t denso por la derecha	$\rho(t) = t$
t aislado	$\rho(t) < t < \sigma(t)$
t denso por	$\rho(t) = t = \sigma(t)$



t_1 es denso.

t_2 es denso por la izquierda y disperso por la derecha.

t_3 es disperso por la izquierda y denso por la derecha.

t_4 es aislado.

Finalmente, podemos definir la función $\mu : \mathbb{T} \to [0, \infty]$ denominada *graininess function* (función de granulosidad) como

$$\mu(t) := \sigma(t) - t$$

Tenemos que $\sigma(t)$ y $\rho(t)$ pertenecen a $\mathbb{T}$ cuando $t \in \mathbb{T}$. Esto se debe a que asumimos que $\mathbb{T}$ es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}$.

Definimos el conjunto $\mathbb{T}^k$ como el subconjunto de $\mathbb{T}$ tal que si $\mathbb{T}$ tiene un punto máximo m disperso por la izquierda, entonces $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{m\}$. Es decir,

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} \backslash (\rho(sup\mathbb{T}), \sup \mathbb{T}] & \text{si} \quad \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & \text{si} \quad \sup \mathbb{T} = \infty \end{cases}$$

Sea $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ definimos la función $f^\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ como

$$f^\sigma(t) = f(\sigma(t)) \text{ para } t \in \mathbb{T}$$

Es decir, $f^\sigma = f \circ \sigma$.

Veamos algunos ejemplos,

1. Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, entonces tenemos que para $t \in \mathbb{R}$

$$\sigma(t) = \text{ínf}\{s \in \mathbb{R} : s > t\} = \text{ínf}(t, \infty) = t$$

y análogamente, $\rho(t) = t$. Por tanto, todo punto $t \in \mathbb{R}$ es denso y la función de granulosidad μ viene dada por

$$\mu(t) \equiv 0 \text{ para todo } t \in \mathbb{T}$$

2. Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, entonces tenemos que para $t \in \mathbb{Z}$

$$\sigma(t) = \text{ínf}\{s \in \mathbb{Z} : s > t\} = \text{ínf}\{t+1, t+2, t+3, ...\} = t+1$$

y análogamente, $\rho(t) = t - 1$. Por tanto, todo punto $t \in \mathbb{Z}$ es aislado y la función de granulosidad μ viene dada por

$$\mu(t) \equiv 1 \text{ para todo } t \in \mathbb{T}$$

3. Si $\mathbb{T} = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$, entonces tenemos que para $t \in \mathbb{T}$, t es de la forma $t = 2^z$ para $z \in \mathbb{Z}$

$$\sigma(t) = \text{ínf}\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \text{ínf}\{2^{z+1}, 2^{z+2}, 2^{z+3}, ...\} = 2^{z+1} = 2t$$

y análogamente, $\rho(t) = 2^{z-1} = \frac{t}{2}$. Por tanto, todo punto $t \in \mathbb{T}$ es aislado y la función de granulosidad μ viene dada por

$$\mu(t) = 2^{z+1} - 2^z = 2^z = t \text{ para todo } t \in \mathbb{T}$$

4. Si $\mathbb{T} = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$, entonces tenemos que para $t \in \mathbb{T}$, t es de la forma $t = \frac{1}{z}$ para todo $z \in \mathbb{Z}$

$$\sigma(t) = \text{ínf}\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \text{ínf}\{\tfrac{1}{z-1}, \tfrac{1}{z-2}, \tfrac{1}{z-3}, ...,\} = \tfrac{1}{z-1} = \tfrac{t}{1-t}$$

y análogamente, $\rho(t) = \frac{1}{z+1} = \frac{t}{1+t}$. Por tanto, todo punto $t \in \mathbb{T}$ es aislado y la función de granulosidad μ viene dada por

$$\mu(t) = \tfrac{1}{z+1} - \tfrac{1}{z} = \tfrac{-t^2}{1+t} \text{ para todo } t \in \mathbb{T}$$

Introduzcamos el siguiente teorema:

Teorema 2.0.1 (Principio de inducción)**.** *Sea $t_0 \in \mathbb{T}$ suponemos que*

$$\{S(t) : t \in [t_0, \infty)\}$$

es una familia de proposiciones que verifica:

1. *La proposición $S(t_0)$ es cierta.*

2. *Si $t \in [t_0, \infty)$ es disperso por la derecha y $S(t)$ es cierta, entonces $S(\sigma(t))$ también es cierta.*

3. *Si $t \in [t_0, \infty)$ es denso por la derecha y $S(t)$ es cierta, entonces existe un entorno U de t tal que $S(s)$ es cierta para todo $s \in U \cap (t, \infty)$.*

4. *Si (t, ∞) es densa por la izquierda y $S(s)$ es cierta para todo $s \in [t_0, t)$, entonces $S(t)$ es cierta.*

Entonces $S(t)$ es cierta para todo $t \in [t_0, \infty)$

Demostración. Sea

$$S^* := \{t \in [t_0, \infty) : S(t) \text{ no es cierta } \}.$$

Queremos probar que $S^* = 0$. Para llegar a una contradicción asumiremos que $S^* \neq 0$. Como S^* es no vacío y $\mathbb{T}$ es cerrado, tenemos que

$$\inf S^* =: t^* \in \mathbb{T}.$$

Suponemos que $S(t^*)$ es cierta. Si $t^* = t_0$, entonces $S(t^*)$ es cierta por (1). Si $t^* \neq t_0$ y $\rho(t^*) = t^*$, entonces $S(t^*)$ es cierta por (4). Finalmente, si $\rho(t^*) < t^*$, entonces $S(t^*)$ es cierta por (2). Por tanto, en cualquier caso,

$$t^* \notin S^*.$$

Así, t^* no puede ser disperso por la derecha, y además $t^* \neq \max \mathbb{T}$. Luego t^* es denso por la derecha y por (3) hemos llegado a una contradicción. □

Capítulo 3

Derivación

Introduzcamos el concepto de función *delta* (o *Hilger*) *derivada* o derivada con respecto a una escala de tiempo $\mathbb{T}$.

Definición 3.0.1. Sea la función $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ y consideremos $t \in \mathbb{T}^k$. Podemos definir $f^{\triangle}(t)$ como el número (si existe) tal que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un entorno U de t, es decir, $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ para cierto $\delta > 0$, que cumple

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\triangle}(t)\,[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon|\sigma(t) - s| \text{ para todo } s \in U.$$

Llamaremos $f^{\triangle}(t)$ a la función *delta (o Hilger) derivada* de f en un punto $t \in \mathbb{T}^k$.

Además, decimos que f es *delta* (o *Hilger*) *diferenciable* en $\mathbb{T}^k$ (o diferenciable) si $f^{\triangle}(t)$ existe para todo $t \in \mathbb{T}^k$. La función $f^{\triangle} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ es la función delta derivada de f en $\mathbb{T}^k$.

Ejemplo 3.0.1.

1. Si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ está definida por $f(t) = \alpha$ para todo $t \in \mathbb{T}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es una constante, entonces $f^{\triangle}(t) \equiv 0$. Esto es claro, pues dado $\epsilon > 0$,

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 0\,[\sigma(t) - s]| = |\alpha - \alpha| = 0 \leq \epsilon|\sigma(t) - s|$$

   se cumple para todo $s \in \mathbb{T}$.

2. Si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ está definida por $f(t) = t$ para todo $t \in \mathbb{T}$, entonces $f^{\triangle}(t) \equiv 1$. Esto es claro, pues dado $\epsilon > 0$,

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 1\,[\sigma(t) - s]| = |\sigma(t) - s - (\sigma(t) - s)| = 0 \leq \epsilon|\sigma(t) - s|$$

   se cumple para todo $s \in \mathbb{T}$.

Teorema 3.0.1. *Consideremos la función $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ y sea $t \in \mathbb{T}^k$. Tenemos que se cumple:*

a) Si f es diferenciable en t, entonces f es continua en t.

b) Si f es continua en t y t es dispersa por la derecha, entonces f es diferenciable en t donde

$$f^{\triangle}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$

c) Si t es densa por la derecha, entonces f es diferenciable en t si y solo si el límite

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

existe y es un número finito. En ese caso,

$$f^{\triangle}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

d) Si f es diferenciable en t, entonces

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\triangle}(t).$$

Demostración.

a) Sea f diferenciable en t. Sea $\epsilon \in (0, 1)$. Definimos

$$\epsilon^* = \epsilon \left[1 + |f^{\triangle}(t)| + 2\mu(t)\right]^{-1}.$$

Entonces $\epsilon^* \in (0, 1)$. Por la definición (3.0.1) existe un entorno U de t tal que

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - [\sigma(t) - s]\, f^{\triangle}(t)| \leq \epsilon^* |\sigma(t) - s| \text{ para todo } s \in U.$$

De esta forma, tenemos que para todo $s \in U \cap (t - \epsilon^*, t + \epsilon^*)$

$$\begin{aligned}
&|f(t) - f(s)| = \\
&\qquad = |\{f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\triangle}(t)\,[\sigma(t) - s]\} - \{f(\sigma(t)) - f(t) - \mu(t) f^{\triangle}(t)\} + (t - s) f^{\triangle}(t)| \\
&\qquad \leq \epsilon^* |\sigma(t) - s| + \epsilon^* \mu(t) + |t - s||f^{\triangle}(t)| \\
&\qquad \leq \epsilon^* \left[\mu(t) + |t - s| \ + \mu(t) + |f^{\triangle}(t)|\right] \\
&\qquad < \epsilon \left[1 + |f^{\triangle}(t)| + 2\mu(t)\right] \\
&\qquad = \epsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto, f es continua en t.

b) Sea f continúa en t y sea t dispersa por la derecha. Por ser continua

$$\lim_{s\to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\mu(t)}.$$

Por tanto, siendo $\epsilon > 0$, existe un entorno U de t tal que

$$\left| \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} \right| \leq \epsilon$$

para todo $s \in U$. Luego tenemos que

$$\left| [f(\sigma(t)) - f(s)] - \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\mu(t)} [\sigma(t) - s] \right| \leq \epsilon |\sigma(t) - s|$$

para todo $s \in U$. De esta forma, tenemos como resultado

$$f^{\triangle}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$

c) Supongamos que f es diferenciable en t y t es denso por la derecha. Sea $\epsilon > 0$ dado. Como f es diferenciable en t, existe un entorno U de t tal que

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\triangle}(t) [\sigma(t) - s]| \leq \epsilon |\sigma(t) - s|$$

para todo $s \in U$. Como $\sigma(t) = t$, tenemos que

$$|[f(t) - f(s)] - f^{\triangle}(t)(t - s)| \leq \epsilon |t - s|$$

para todo $s \in U$. Luego

$$\left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} - f^{\triangle}(t) \right| \leq \epsilon$$

para todo $s \in U, s \neq t$. De esta forma, obtenemos

$$f^{\triangle}(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

Análogamente, si

$$\lim_{s\to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

existe y es finito, veamos que f es diferenciable. Sea

$$f^{\triangle}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

tenemos que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} - f^{\triangle}(t) \right| \leq \epsilon,$$

y si multiplicamos cada factor por $(t - s)$ llegamos a

$$|[f(t) - f(s)] - f^{\triangle}(t)(t - s)| \leq \epsilon |t - s|.$$

Por ultimo, sea $t = \sigma(t)$ tenemos que

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\triangle}(t)\,[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon |\sigma(t) - s| \text{ para todo } s \in U.$$

Y por tanto, f es diferenciable

d) Sea $\sigma(t) = t$, entonces $\mu(t) = 0$ y tenemos que

$$f(\sigma(t)) = f(t) = f(t) + \mu(t) f^{\triangle}(t).$$

Por otra parte, si $\sigma(t) > t$, tenemos por (2) que

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = f(t) + \mu(t) f^{\triangle}(t),$$

y quedaría demostrado.

$\square$

Ejemplo 3.0.2. Vamos a considerar de nuevo los casos $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$.

a) Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, entonces por el Teorema (3.0.1) (c), $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es delta diferenciable en $t \in \mathbb{R}$ si y solo si

$$f'(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

existe, es decir, si y solo si f es diferenciable en t. En este caso tenemos que

$$f^{\triangle}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t),$$

por el Teorema (3.0.1) (c).

b) Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, entonces por el Teorema (3.0.1) (b), $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ es delta diferenciable en $t \in \mathbb{Z}$ con

$$f^{\triangle}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \triangle f(t),$$

donde $\triangle$ es el operador diferencial hacia delante definido por la ecuación de arriba.

Ahora, debemos conocer la derivada de las sumas, productos y cocientes de las diferentes funciones y esto es posible gracias al siguiente teorema.

Teorema 3.0.2. *Sean las funciones $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ diferenciables en $t \in \mathbb{T}^k$. Entonces*

a) La suma $f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en t, donde

$$(f+g)^{\triangle}(t) = f^{\triangle}(t) + g^{\triangle}(t).$$

b) Para cualquier constante α, $\alpha f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en t, donde

$$(\alpha f)^{\triangle}(t) = \alpha f^{\triangle}(t).$$

c) El producto $f \cdot g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en t, donde

$$(f \cdot g)^{\triangle}(t) = f^{\triangle}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\triangle}(t) = f(t)g^{\triangle}(t) + f^{\triangle}(t)g(\sigma(t)).$$

d) Si $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$, entonces $\dfrac{1}{f}$ es diferenciable en t, donde

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\triangle}(t) = -\frac{f^{\triangle}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}.$$

e) Si $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es diferenciable en t, donde

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\triangle}(t) = \frac{f^{\triangle}(t)g(t) - f(t)g^{\triangle}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

Demostración. Supongamos que f y g son dos funciones delta diferenciables en $t \in \mathbb{T}^k$.

a) Sea $\epsilon > 0$. Existen dos entornos U_1 y U_2 de t donde

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\triangle}(t)(\sigma(t) - s)| \leq \frac{\epsilon}{2}|\sigma(t) - s| \text{ para todo } s \in U_1,$$

y

$$|g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\triangle}(t)(\sigma(t) - s)| \leq \frac{\epsilon}{2}|\sigma(t) - s| \text{ para todo } s \in U_2.$$

Sea $U = U_1 \cap U_2$. Para todo $s \in U$

$$\begin{aligned}
&|(f+g)(\sigma(t)) - (f+g)(s) - \left[f^{\triangle}(t) + g^{\triangle}(t)\right](\sigma(t) - s)| \\
&= |f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\triangle}(t)(\sigma(t) - s) + g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\triangle}(t)(\sigma(t) - s)| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}|\sigma(t) - s| + \frac{\epsilon}{2}|\sigma(t) - s| \\
&= \epsilon|\sigma(t) - s|.
\end{aligned}$$

Por tanto $f + g$ es diferenciable en t y se define $(f+g)^{\triangle} = f^{\triangle} + g^{\triangle}$ en t.

b) Tenemos que para $\epsilon > 0$ existe un entorno U de t donde

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\triangle}(t)(\sigma(t) - s)| \leq \epsilon|\sigma(t) - s| \text{ para todo } s \in U.$$

Sea α una constante, entonces

$$\begin{aligned}
|\alpha f(\sigma(t)) - \alpha f(s) - \alpha f^{\triangle}(t)(\sigma(t) - s)| &= \alpha \cdot |f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\triangle}(t)(\sigma(t) - s)| \\
&\leq \alpha\epsilon|\sigma(t) - s|
\end{aligned}$$

y llegamos a que $(\alpha f)^{\triangle} = \alpha f^{\triangle}$.

c) Sea $\epsilon \in (0,1)$. Definimos $\epsilon^* = \epsilon\left[1 + |f(t)| + |g(\sigma(t))| + |g^{\triangle}(t)|\right]^{-1}$. Entonces $\epsilon^* \in (0,1)$ y, por tanto, existen los entornos U_1, U_2 y U_3 de t, tal que

$$\begin{aligned}
|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\triangle}(t)(\sigma(t) - s)| &\leq \epsilon^*|\sigma(t) - s| \text{ para todo } s \in U_1, \\
|g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\triangle}(t)(\sigma(t) - s)| &\leq \epsilon^*|\sigma(t) - s| \text{ para todo } s \in U_2,
\end{aligned}$$

y (por el Teorema (3.0.1) (a))

$$|f(t) - f(s)| \leq \epsilon^* \text{ para todo } s \in U_3.$$

Sea $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$ y sea $s \in U$. Tenemos

$$
\begin{aligned}
&|(fg)(\sigma(t)) - (fg)(s) - \left[f^{\triangle}(t)g(\sigma(t)) + f(t)g\triangle(t)\right](\sigma(t)-s)| \\
&= |\left[f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\triangle}(t)(\sigma(t)-s)\right] g(\sigma(t)) + \left[g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\triangle}(t)(\sigma(t)-s)\right] f(t) \\
&+ \left[g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\triangle}(t)(\sigma(t)-s)\right][f(s)-f(t)] + (\sigma(t)-s)g^{\triangle}(t)\,[f(s)-f(t)] \\
&\leq \epsilon^*|\sigma(t)-s||g(\sigma(t))| + \epsilon^*|\sigma(t)-s||f(t)| + \epsilon^*\epsilon^*|\sigma(t)-s| + \epsilon^*|\sigma(t)-s||g^{\triangle}(t)| \\
&= \epsilon^*|\sigma(t)-s|\left[|g(\sigma(t))| + |f(t)| + \epsilon^* + |g^{\triangle}(t)|\right] \\
&\leq \epsilon^*|\sigma(t)-s|\left[1 + |f(t)| + |g(\sigma(t))| + |g^{\triangle}(t)|\right] \\
&= \epsilon|\sigma(t)-s|
\end{aligned}
$$

Por tanto se define $(fg)^{\triangle} = f^{\triangle}g^{\sigma} + fg^{\triangle}$ en t. Intercambiando f y g, llegamos a la otra forma de escribir el producto definida en apartado (c) del teorema.

d) Tenemos por el apartado (c)

$$(f \cdot g)^{\triangle}(t) = f^{\triangle}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\triangle}(t).$$

Sea $g = \dfrac{1}{f}$ tenemos que

$$\left(f \cdot \frac{1}{f}\right)^{\triangle}(t) = f^{\triangle}(t)\left(\frac{1}{f}\right)(t) + f(\sigma(t))\left(\frac{1}{f}\right)^{\triangle}(t).$$

Como $\left(f \cdot \dfrac{1}{f}\right)^{\triangle} = (1)^{\triangle} = 0$, tenemos que

$$f(\sigma(t))\left(\frac{1}{f}\right)^{\triangle}(t) = -f^{\triangle}(t)\left(\frac{1}{f}\right)(t),$$

y, por tanto

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\triangle}(t) = -f^{\triangle}(t)\left(\frac{1}{f}\right)(t) \cdot \left(\frac{1}{f}\right)(\sigma(t)).$$

Y de esta forma concluimos con la fórmula final

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\triangle}(t) = -\frac{f^{\triangle}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}.$$

e) Para llegar a la fórmula del apartado (e) del teorema, usaremos el apartado (b) y (d), y calculamos

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)^{\triangle}(t) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)^{\triangle}(t) \\
&= f(t)\left(\frac{1}{g}\right)^{\triangle}(t) + f^{\triangle}(t)\frac{1}{g(\sigma(t))} \\
&= -f(t)\frac{g^{\triangle}(t)}{g(t)g(\sigma(t))} + f^{\triangle}(t)\frac{1}{g(\sigma(t))} \\
&= \frac{f^{\triangle}(t)g(t) - f(t)g^{\triangle}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.
\end{aligned}
$$

□

Teorema 3.0.3. *Sea α una constante y $m \in \mathbb{N}$.*

a) Para f definida por $f(t) = (t-\alpha)^m$ tenemos

$$
f^{\triangle}(t) = \sum_{\nu=0}^{m-1} (\sigma(t)-\alpha)^{\nu}(t-\alpha)^{m-1-\nu}.
$$

b) Para g definida por $g(t) = \frac{1}{(t-\alpha)^m}$ tenemos

$$
g^{\triangle}(t) = -\sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{1}{(\sigma(t)-\alpha)^{m-\nu}(t-\alpha)^{\nu+1}},
$$

con $(t-\alpha)(\sigma(t)-\alpha) \neq 0$.

Demostración. Empecemos probando (a) por inducción. Si $m = 1$, entonces $f(t) = t - \alpha$, y, por tanto, $f^{\triangle}(t) = 1$ (usando el ejemplo (3.0.1) (a), (b) y el Teorema (3.0.2) (a). Suponemos que

$$
f^{\triangle}(t) = \sum_{\nu=0}^{m-1} (\sigma(t)-\alpha)^{\nu}(t-\alpha)^{m-1-\nu}
$$

se cumple para $f(t) = (t-\alpha)^m$ y definimos $F(t) = (t-\alpha)^{m+1} = (t-\alpha)f(t)$. Usando la regla del producto (dada por el Teorema (3.0.2) (c)) obtenemos

$$
\begin{aligned}
F^{\triangle}(t) &= f(\sigma(t)) + (t-\alpha)f^{\triangle}(t) \\
&= (\sigma(t)-\alpha)^m + (t-\alpha)\sum_{\nu=0}^{m-1}(\sigma(t)-\alpha)^{\nu}(t-\alpha)^{m-1-\nu} \\
&= (\sigma(t)-\alpha)^m + \sum_{\nu=0}^{m-1}(\sigma(t)-\alpha)^{\nu}(t-\alpha)^{m-\nu} \\
&= \sum_{\nu=0}^{m}(\sigma(t)-\alpha)^{\nu}(t-\alpha)^{m-\nu}.
\end{aligned}
$$

Por tanto, por inducción matemática, (a) se cumple. Ahora veamos si se cumple (b). Sea $g(t) = \dfrac{1}{(t-\alpha)^m} = \dfrac{1}{f(t)}$, si aplicamos el Teorema (3.0.1) (d) obtenemos

$$
\begin{aligned}
g^{\triangle}(t) &= -\frac{f^{\triangle}(t)}{f(t)f^{\sigma}(t)} \\
&= -\frac{\sum_{\nu=0}^{m-1}(\sigma(t)-\alpha)^{\nu}(t-\alpha)^{m-1-\nu}}{(t-\alpha)^m(\sigma(t)-\alpha)^m} \\
&= -\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{1}{(t-\alpha)^{\nu+1}(\sigma(t)-\alpha)^{m-\nu}},
\end{aligned}
$$

con $(t-\alpha)(\sigma(t)-\alpha) \neq 0$. □

Ejemplo 3.0.3. La derivada de t^2 es

$$t + \sigma(t).$$

La derivada de $\dfrac{1}{t}$ es

$$-\frac{1}{t\sigma(t)}.$$

Definición 3.0.2. Sea la función $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ hablaremos de la segunda derivada $f^{\triangle\triangle}$ siendo $f^{\triangle}$ diferenciable en $\mathbb{T}^{k^2} = (\mathbb{T}^k)^k$ cuya derivada $f^{\triangle\triangle} = (f^{\triangle})^{\triangle} : \mathbb{T}^{k^2} \to \mathbb{R}$. De igual forma podemos definir derivadas de otros órdenes $f^{\triangle^n} : \mathbb{T}^{k^n} \to \mathbb{R}$. Por último, para $t \in \mathbb{T}$, denotamos $\sigma^2(t) = \sigma(\sigma(t))$ y $\rho^2(t) = \rho(\rho(t))$, y, por tanto, $\sigma^n(t)$ y $\rho^n(t)$ para $n \in \mathbb{N}$ también están definidas. Por conveniencia usaremos

$$\rho^0(t) = \sigma^0(t) = t \ , \ f^{\triangle^0} = f, \text{ y } \mathbb{T}^{k^0} = \mathbb{T}.$$

Teorema 3.0.4 (Fórmula de Leibniz). *Sea $S_K^{(n)}$ el conjunto que contiene todas las posibles series de longitud n, conteniendo exactamente k veces σ y $n-k$ veces $\triangle$. Si*

$$f^{\Lambda} \text{ existe para todo } \Lambda \in S_k^{(n)},$$

entonces

$$(fg)^{\triangle^n} = \sum_{k=0}^{n} \Big(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{\Lambda} \Big) g^{\triangle^k},$$

definida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 3.0.4. Consideremos la escala de tiempo

$$\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^2 = \{n^2 : n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Tenemos que $\sigma(n^2) = (n+1)^2$ para $n \in \mathbb{N}_0$ y

$$\mu(n^2) = \sigma(n^2) - n^2 = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1.$$

Así,

$$\sigma(t) = (\sqrt{t} + 1)^2 \text{ y } \mu(t) = 1 + 2\sqrt{t} \text{ para } t \in \mathbb{T}.$$

Existen resultados análogos del cálculo diferencial respecto a una escala de tiempo, como la fórmula de Taylor, los cuales pueden consultarse en la referencia [7]. En este trabajo prescindimos de incluirlos, puesto que no serán necesarios para el desarrollo que vamos a realizar. No obstante, incluiremos en el Capítulo 5 algunos resultados de interés para la resolución de ecuaciones dinámicas en escalas de tiempo.

Capítulo 4

Integración

Para poder describir las clases de funciones integrables, debemos introducir previamente ciertos conceptos.

Definición 4.0.1. Una función $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ la llamamos *regulada* si existe el límite por la derecha (y es finito) en todos los puntos densos por la derecha de $\mathbb{T}$, y existe el límite por la izquierda (y es finito) de todos los puntos densos por la izquierda de $\mathbb{T}$

Definición 4.0.2. Una función $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ se llama *rd-continua* si es continua en los puntos densos por la derecha en $\mathbb{T}$ y existe (y es finito) el límite por la izquierda de los puntos densos por la izquierda de $\mathbb{T}$. El conjunto de las funciones rd-continuas $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ se denota como

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

El conjunto de las funciones $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ que son diferenciables y cuya derivada es rd-continua se denota como

$$C_{rd}^1 = C_{rd}^1(\mathbb{T}) = C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Teorema 4.0.1. *Supongamos* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$

a) Si f es continua, entonces f es rd-continua.

b) Si f es rd-continua, entonces f es regulada.

c) El operador de salto σ es rd-continuo.

d) Si f es regulada o rd-continua, entonces es f^σ.

e) Supongamos f es continua. Si $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es regulada o rd-continua, entonces $f \circ g$ también tendrá la propiedad.

Definición 4.0.3. Una función continua $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ se llama *prediferenciable* en D, donde $D \subset \mathbb{T}^k$, $\mathbb{T}^k \backslash D$ es numerable y no contiene elementos dispersos por la derecha de $\mathbb{T}$, y f es diferenciable en cualquier $t \in D$.

El siguiente teorema del valor medio vamos a usarlo más tarde para probar en teoremas la existencia de primitivas.

Teorema 4.0.2 (Teorema del Valor Medio)**.** *Sean f y g dos funciones reales definidas en $\mathbb{T}$, ambas prediferenciables en D. Entonces*

$$|f^{\triangle}(t)| \leq g^{\triangle}(t) \text{ para todo } t \in D$$

implica

$$|f(s) - f(r)| \leq g(s) - g(r) \text{ para todo } r, s \in \mathbb{T},\ r \leq s.$$

Corolario 4.0.1. Supongamos que f y g son funciones prediferenciables en D.

a) Si U es un intervalo compacto con extremos $r, s \in \mathbb{T}$, entonces

$$|f(s) - f(r)| \leq \left\{ \sup_{t \in U^k \cap D} |f^{\triangle}(t)| \right\} |s - r|.$$

b) Si $f^{\triangle}(t) = 0$ para todo $t \in D$, entonces f es una función constante.

c) Si $f^{\triangle}(t) = g^{\triangle}(t)$ para todo $t \in D$, entonces

$$g(t) = f(t) + C \text{ para todo } t \in \mathbb{T},$$

donde C es una constante.

Demostración. Supongamos que f es una función prediferenciable en D y sean $r, s \in \mathbb{T}$ con $r \leq s$. Si definimos

$$g(t) := \left\{ \sup_{\tau \in [r,s]^k \cap D} |f^{\triangle}(\tau)| \right\} (t - r) \text{ para } t \in \mathbb{T},$$

entonces

$$g^{\triangle}(t) = \sup_{\tau \in [r,s]^k \cap D} |f^{\triangle}(\tau)| \geq |f^{\triangle}(t)| \text{ para todo } t \in D \cap [r, s]^k.$$

Por el Teorema (4.0.2),

$$g(t) - g(r) \geq |f(t) - f(r)| \text{ para todo } t \in [r, s].$$

Así,

$$|f(s) - f(r)| \leq g(s) - g(r) = g(s) = \left\{ \sup_{\tau \in [r,s]^k \cap D} |f^{\triangle}(\tau)| \right\} (s - r).$$

Esto completa la prueba de (a). La prueba de (b) se obtiene inmediatamente de (a), y (c) se obtiene de (b). $\square$

Teorema 4.0.3 (Existencia de preprimitivas)**.** *Sea f una función regulada. Entonces existe una función F que es prediferenciable en D tal que*

$$F^{\triangle}(t) = f(t) \text{ se cumple para todo } t \in D.$$

Definición 4.0.4. Supongamos $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es una función regulada. Sea F una función preprimitiva de f. Definimos la *integral indefinida* de f como

$$\int f(t) \triangle t = F(t) + C,$$

donde C es una constante arbitraria y F es la preprimitiva de f. Definimos la *integral de Cauchy* como

$$\int_r^s f(t) \triangle t = F(s) - F(r) \text{ para todo } r, s \in \mathbb{T}.$$

Una función $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ se llama primitiva de $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ si

$$F^{\triangle}(t) = f(t) \text{ se cumple para todo } t \in \mathbb{T}^k.$$

Ejemplo 4.0.1. Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, vamos a calcular la integral indefinida

$$\int a^t \triangle t,$$

donde $a \neq 1$ es una constante. Como

$$\left(\frac{a^t}{a-1}\right)^{\triangle} = \triangle\left(\frac{a^t}{a-1}\right) = \frac{a^{t+1} - a^t}{a-1} = a^t,$$

tenemos que

$$\int a^t \triangle t = \frac{a^t}{a-1} + C,$$

donde C es una constante arbitraria.

Teorema 4.0.4 (Existencia de primitivas)**.** *Toda función rd-continua tiene una primitiva. En particular, si $t_0 \in \mathbb{T}$, entonces F definida por*

$$F(t) := \int_{t_0}^t f(\tau) \triangle \tau \text{ para } t \in \mathbb{T},$$

es una primitiva de f

Demostración. Supongamos que f es una función rd-continua. Por el Teorema (4.0.1) (b), f es regulada. Sea F una función garantizando la existencia del Teorema (4.0.3), junto con D, satisfaciendo

$$F^{\triangle}(t) = f(t) \text{ para todo } t \in D.$$

Entonces F es prediferenciable en D. Tenemos que probar que $F^{\triangle}(t) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{T}^k$. Sea $t \in \mathbb{T}^K \backslash D$. Entonces t es densa por la derecha, pues $\mathbb{T}^k \backslash D$ no puede contener ningún punto disperso por la derecha, de acuerdo con la definición (4.0.3). Como f es rd-continua, es continua en t. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe un entorno U de t tal que

$$|f(S) - f(t)| \leq \epsilon \text{ para todo } s \in U.$$

Definimos

$$h^{\triangle}(\tau) := F(\tau) - f(t)(\tau - t_0) \text{ para todo } \tau \in \mathbb{T}.$$

Luego h es prediferenciable en D y tenemos que

$$h^{\triangle}(\tau) = F^{\triangle}(\tau) - f(t) = f(\tau) - f(t) \text{ para todo } \tau \in D,$$

y, por tanto,

$$|h^{\triangle}(s)| = |f(s) - f(t)| \leq \epsilon \text{ para todo } s \in D \cap U.$$

Así

$$\sup_{s \in D \cap U} |h^{\triangle}(s)| \leq \epsilon.$$

Luego, por el corolario (4.0.1), tenemos que para $r \in U$

$$\begin{aligned} |F(t) - F(r) - f(t)(t-r)| &= |h(t) + f(t)(t - t_0) - [h(r) + f(t)(r - t_0)] - f(t)(t-r)| \\ &= |h(t) - h(r)| \\ &\leq \left\{ \sup_{s \in D \cap U} |h^{\triangle}(s)| \right\} |t - s| \\ &\leq \epsilon |t - r|. \end{aligned}$$

Pero esto prueba que F es diferenciable en t con $F^{\triangle}(t) = f(t)$. □

Vamos a comparar ahora los dos ejemplos más relevantes.

Escala de tiempo $\mathbb{T}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$
Operador de salto hacia atrás $\rho(t)$	t	$t-1$
Operador de salto hacia delante $\sigma(t)$	t	$t+1$
Función de granulosidad $\mu(t)$	0	1
Derivada $f^{\triangle}(t)$	$f'(t)$	$\triangle f(t)$
Integral $\int_a^b f(t) \triangle t$	$\int_a^b f(t)\, dt$	$\sum_{t=a}^{b-1} f(t)$ (si $a < b$
f rd-continua	f continua	f cualquiera

Teorema 4.0.5. *Si $f \in C_{rd}$ y $t \in \mathbb{T}^k$, entonces*

$$\int_{t}^{\sigma(t)} f(\tau)\triangle\tau = \mu(t)f(t).$$

Demostración. Por el Teorema (4.0.4), existe una primitiva F de f, y

$$\int_{t}^{\sigma(t)} f(\tau)\,\triangle\tau = F(\sigma(t)) - F(t) = \mu(t)F^{\triangle}(t) = \mu(t)f(t),$$

donde la tercera igualdad se da debido al Teorema (3.0.1)(d). $\square$

Teorema 4.0.6. *Si $f^{\triangle} \geq 0$, entonces f no es decreciente.*

Demostración. Sea $f^{\triangle} \geq 0$ en $[a,b]$ y sean $s,t \in \mathbb{T}$ con $a \leq s \leq t \leq b$. Entonces

$$f(t) = f(s) + \int_{s}^{t} f^{\triangle}(\tau)\,\triangle\tau \geq f(s).$$

$\square$

Teorema 4.0.7. *Si $a,b,c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, y $f,g \in C_{rd}$, entonces*

a) $\displaystyle\int_{a}^{b} [f(t)+g(t)]\,\triangle t = \int_{a}^{b} f(t)\,\triangle t + \int_{a}^{b} g(t)\,\triangle t$;

b) $\displaystyle\int_{a}^{b} (\alpha f)(t)\,\triangle t = \alpha\int_{a}^{b} f(t)\,\triangle t$;

c) $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\,\triangle t = -\int_{b}^{a} f(t)\,\triangle t$;

d) $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\,\triangle t = \int_{a}^{c} f(t)\,\triangle + \int_{c}^{b} f(t)\,\triangle t$;

e) $\displaystyle\int_{a}^{b} f(\sigma(t))g^{\triangle}(t)\,\triangle t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_{a}^{b} f^{\triangle}(t)g(t)\,\triangle t$;

f) $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)g^{\triangle}(t)\,\triangle t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_{a}^{b} f^{\triangle}(t)g(\sigma(t))\,\triangle t$;

g) $\displaystyle\int_{a}^{a} f(t)\,\triangle t = 0$;

h) Si $|f(t)| \leq g(t)$ *en* $[a,b)$, *entonces*

$$\left|\int_{a}^{b} f(t)\,\triangle t\right| \leq \int_{a}^{b} g(t)\,\triangle t \text{ ;}$$

i) Si $f(t) \geq 0$ *para todo* $a \leq t < b$, *entonces* $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\,\triangle t \geq 0.$

Demostración. Los siguientes resultados se obtienen fácilmente al aplicar la definición (4.0.4), y el Teorema (3.0.2) y (4.0.2).

a) Como f y g son funciones rd-continuas, existen las primitivas F y G por el Teorema (4.0.4). Por el Teorema (3.0.2) (a), $F+G$ es una primitiva de $f+g$, por tanto,

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)(t)\,\triangle t &= (F+G)(b)-(F+G)(a)\\ &= F(b)-F(a)+G(b)-G(a)\\ &= \int_a^b f(t)\,\triangle t+\int_a^b g(t)\,\triangle t.\end{aligned}$$

b) Por el Teorema (3.0.2) (b) sabemos que $\alpha\cdot F$ es una primitiva de $\alpha\cdot f$, por tanto,

$$\begin{aligned}\int_a^b \alpha f(t)\,\triangle t &= \alpha F(b)-\alpha F(a)\\ &= \alpha(F(b)-F(a))\\ &= \alpha\int_a^b f(t)\,\triangle t.\end{aligned}$$

c) Tenemos que

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\triangle t &= F(b)-F(a)\\ &= -(F(a)-F(b))\\ &= -\int_b^a f(t)\,\triangle t.\end{aligned}$$

d) Tenemos que

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\triangle t &= (F)(b)-(F)(a)\\ &= F(c)-F(a)+F(b)-F(c)\\ &= \int_a^c f(t)\,\triangle t+\int_c^b g(t)\,\triangle t.\end{aligned}$$

e) Como $f\cdot g$ es una primitiva de $f^\sigma g^\triangle+f^\triangle g$,

$$\textstyle\int_a^b(f^\sigma g^\triangle+f^\triangle g)(t)\,\triangle t=(fg)(b)-(fg)(a),$$

y usando (a), quedaría demostrado.

f) Como $f \cdot g$ es una primitiva de $fg^{\triangle} + f^{\triangle}g^{\sigma}$,

$$\textstyle\int_a^b (fg^{\triangle} + f^{\triangle}g)(t) \triangle t = (fg)(b) - (fg)(a),$$

y usando (a), quedaría demostrado.

g) Es obvio, pues como F es primitiva de f,

$$\int_a^a f(t) \triangle t = F(a) - F(a) = 0.$$

h) Si $|f(t)| \leq g(t)$ en $[a, b)$, entonces por el Teorema (4.0.2)

$$\begin{aligned} |\int_a^b f(t) \triangle t| &= |F(b) - F(a)| \\ &\leq G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b g(t) \triangle t. \end{aligned}$$

i) Si $f(t) \geq 0$ para todo $a \leq t < b$, entonces por (h) tenemos que

$$\int_a^b f(t) \triangle t \geq |\int_a^b 0 \triangle t| = 0.$$

□

Teorema 4.0.8. *Sean $a, b \in \mathbb{T}$ y $f \in C_{rd}$.*

1. Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, entonces

$$\int_a^b f(t) \triangle t = \int_a^b f(t)\, dt,$$

donde la integral de la derecha se corresponde con la integral de Riemann del cálculo.

2. Si $[a, b]$ solo contiene puntos aislados, entonces

$$\int_a^b f(t) \triangle t = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h & si \quad a < b \\ 0 & si \quad a = b \\ \displaystyle -\sum_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh)h & si \quad a > b \end{cases}$$

3. *Si* $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$, *donde* $h > 0$, *entonces*

$$\int_a^b f(t)\,\triangle t = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h & si \quad a < b \\ 0 & si \quad a = b \\ \displaystyle -\sum_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh)h & si \quad a > b \end{cases}$$

4. *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{Z} =$, *entonces*

$$\int_a^b f(t)\,\triangle t = \begin{cases} \displaystyle\sum_{t=a}^{b-1} f(t) & si \quad a < b \\ 0 & si \quad a = b \\ \displaystyle -\sum_{t=b}^{a-1} f(t) & si \quad a > b \end{cases}$$

Demostración. 1. Usando el ejemplo (3.0.2) (a) y el Teorema fundamental del cálculo quedaría demostrado.

2. Notemos que $[a, b]$ contiene una cantidad finita de puntos tal que cada punto es aislado. Supongamos que $a < b$ y sea $[a, b] = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$, donde

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b.$$

Por el Teorema (4.0.7) (d),

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\,\triangle t &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)\,\triangle t \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{\sigma(t_i)} f(t)\,\triangle t \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mu(t_i) f(t_i) \\ &= \sum_{t\in[a,b)} \mu(t) f(t), \end{aligned}$$

donde la tercera ecuación proviene de usar el Teorema (4.0.5). Si $b < a$, entonces el resultado proviene de usar lo que acabamos de probar y el Teorema (4.0.7) (c). Si $a = b$, entonces $\int_a^b f(t)\,\triangle t = 0$ por el Teorema (4.0.7) (g).

3. Usando (2).

4. Usando (2).

$\square$

Definición 4.0.5. Si $a \in \mathbb{T}$, $\sup \mathbb{T} = \infty$, y f es rd-continua en $[a, \infty)$, entonces podemos definir la *integral impropia* como

$$\int_a^\infty f(t) \triangle t := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t) \triangle t,$$

y si este límite existe, decimos que esta integral impropia converge. Si el límite no existe, entonces decimos que la integral impropia diverge.

Capítulo 5

Otros resultados

Un resultado interesante en la teoría del cálculo en escalas de tiempo es la regla de la cadena. Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la regla de la cadena del cálculo nos dice que si f y g son diferenciables en t y f es diferenciable en $g(t)$, entonces

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t))g'(t).$$

El siguiente ejemplo nos muestra que la regla de la cadena tal y como la conocemos no funciona cuando usamos escalas de tiempo.

Ejemplo 5.0.1. Supongamos $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ están definidas por $f(t) = t^2$, $g(t) = 2t$ y la escala de tiempo es $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$. Es fácil ver que

$$(f \circ g)^{\triangle}(t) = 8t + 4 \neq 8t + 2 = f^{\triangle}(g(t))g^{\triangle}(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, la regla de la cadena tal y como la conocemos no es válida en este caso. Veamos el teorema que nos proporciona como usar la regla de la cadena en escalas de tiempo.

Teorema 5.0.1 (Regla de la cadena)**.** *Supongamos que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es delta diferenciable en $\mathbb{T}^k$, y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable. Entonces existe $c \in [t, \sigma(t)]$ donde*

$$(f \circ g)^{\triangle}(t) = f'(g(c))g^{\triangle}(t).$$

Ejemplo 5.0.2. Sea $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $f(t) = t^2$, $g(t) = 2t$, podemos encontrar el valor de c garantizado por el teorema (5.0.1)

$$(f \circ g)^{\triangle}(3) = f'(g(c))g^{\triangle}(3),$$

y realizando los mismos cálculos que en el ejemplo (5.0.1),

$$28 = (4c)2.$$

Resolviendo obtenemos que $c = \frac{7}{2}$ y se verifica que pertenece al intervalo $[3, \sigma(3)] = [3, 4]$ como garantizaba el Teorema (5.0.1).

Teorema 5.0.2 (La regla de la cadena)**.** *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable y supongamos $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es delta diferenciable. Entonces $f \circ g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es delta diferenciable y verifica*

$$(f \circ g)^{\triangle}(t) = \left\{ \int_0^1 f'(g(t) + h\mu(t)g^{\triangle}(t))\, dh \right\} g^{\triangle}(t).$$

Ejemplo 5.0.3. Definimos $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$g(t) = t^2 \text{ y } f(x) = exp(x).$$

Entonces

$$g^{\triangle}(t) = (t+1)^2 - t^2 = 2t + 1 \text{ y } f'(t) = exp(x).$$

Por tanto, tenemos por el Teorema (5.0.2)

$$\begin{aligned}
(f \circ g)^{\triangle}(t) &= \left\{ \int_0^1 f'(g(t) + h\mu(t)g^{\triangle}(t))\, dh \right\} g^{\triangle}(t) \\
&= (2t+1) \int_0^1 exp(t^2 + h(2t+1))\, dh \\
&= (2t+1) exp(t^2) \int_0^1 exp(h(2t+1))\, dh \\
&= (2t+1) exp(t^2) \frac{1}{2t+1} \left[exp(h(2t+1)) \right]_{h=0}^{h=1} \\
&= (2t+1) exp(t^2) \frac{1}{2t+1} (exp(2t+1) - 1) \\
&= exp(t^2)(exp(2t+1) - 1).
\end{aligned}$$

Por otra parte, es fácil probar que estamos en lo cierto

$$\begin{aligned}
\triangle f(g(t)) &= f(g(t+1)) - f(g(t)) \\
&= exp((t+1)^2) - exp(t^2) \\
&= exp(t^2 + 2t + 1) - exp(t^2) \\
&= exp(t^2)(exp(2t+1) - 1).
\end{aligned}$$

Sea $\mathbb{T}$ una escala de tiempo y $\nu : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente tal que $\tilde{\mathbb{T}} = \nu(\mathbb{T})$ es también una escala de tiempo. Si $\tilde{\sigma}$ denota la función de salto en $\tilde{\mathbb{T}}$ y $\tilde{\triangle}$ denota la derivada en $\tilde{\mathbb{T}}$. Entonces $\nu \circ \sigma = \tilde{\sigma} \circ \nu$.

Teorema 5.0.3 (Regla de la cadena)**.** *Supongamos que* $\nu : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *es estrictamente creciente y* $\tilde{\mathbb{T}} := \nu(\mathbb{T})$ *es una escala de tiempo. Sea* $w : \tilde{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$. *Si* $\nu^{\triangle}(t)$ *y* $w^{\tilde{\triangle}}(\nu(t))$ *existe para* $t \in \mathbb{T}^k$, *entonces*

$$(w \circ \nu)^{\triangle} = (w^{\tilde{\triangle}} \circ \nu)\nu^{\triangle}.$$

Ejemplo 5.0.4. Sea $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$ y $\nu(t) = 4t + 1$. Entonces

$$\tilde{\mathbb{T}} = \nu(\mathbb{T}) = \{4n = 1 : n \in \mathbb{N}_0\} = \{1, 5, 9, 13, ...\}.$$

Además, sea $w : \tilde{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ definida por $w(t) = t^2$. Entonces

$$(w \circ \nu)(t) = w(\nu(t)) = w(4t + 1) = (4t + 1)^2$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}(w \circ \nu)^{\triangle}(t) &= [4(t+1)+1]^2 - (4t+1)^2 \\ &= (4t+5)^2 - (4t+1)^2 \\ &= 16t^2 + 40t + 25 - 16t^2 - 8t - 1 \\ &= 32t + 24.\end{aligned} \tag{5.1}$$

Ahora, aplicando el Teorema (5.0.3), obtenemos la derivada de esta composición de funciones. Calculamos $\nu^{\triangle}(t) \equiv 4$ y entonces

$$w^{\tilde{\triangle}}(t) = \frac{w(\tilde{\sigma}(t)) - w(t)}{\tilde{\sigma}(t) - t} = \frac{(t+4)^2 - t^2}{t + 4 - t} = \frac{8t + 16}{4} = 2t + 4.$$

Y así

$$(w^{\tilde{\triangle}} \circ \nu)(t) = w^{\tilde{\triangle}}(\nu(t)) = w^{\tilde{\triangle}}(4t + 1) = 2(4t + 1) + 4 = 8t + 6.$$

De esta forma, obtenemos

$$\left[(w^{\tilde{\triangle}} \circ \nu)\nu^{\triangle}\right](t) = (8t + 6)4 = 32t + 24 = (w \circ \nu)^{\triangle}(t).$$

Una consecuencia del Teorema (5.0.3) es la fórmula de la derivada de la función inversa.

Teorema 5.0.4 (Derivada de la inversa)**.** *Supongamos* $\nu : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *es estrictamente creciente y* $\tilde{\mathbb{T}} := \nu(\mathbb{T})$ *es una escala de tiempo. Entonces*

$$\frac{1}{\nu^{\triangle}} = (\nu^{-1})^{\tilde{\triangle}} \circ \nu$$

en los puntos donde $\nu^{\triangle}$ *es distinto de cero.*

Otra consecuencia del Teorema (5.0.3) es la regla de sustitución para integrales.

Teorema 5.0.5 (Sustitución)**.** *Supongamos $\nu : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente y $\tilde{\mathbb{T}} := \nu(\mathbb{T})$ es una escala de tiempo. Si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es una función rd-continua y μ es diferenciable con derivada rd-continua, entonces para $a, b \in \mathbb{T}$,*

$$\int_a^b f(t)\nu^{\triangle}(t)\,\triangle t = \int_{\nu(a)}^{\nu(b)} (f \circ \nu^{-1})(s)\,\tilde{\triangle} s.$$

Demostración. Como $f\nu^{\triangle}$ es una función rd-continua, esta posee una primitiva F por el Teorema (4.0.4), es decir, $F^{\triangle} = f\nu^{\triangle}$, y

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\nu^{\triangle}(t)\,\triangle t &= \int_a^b F^{\triangle}(t)\,\triangle t \\
&= F(b) - F(a) \\
&= (F \circ \nu^{-1})(\nu(b)) - (F \circ \nu^{-1})(\nu(a)) \\
&= \int_{\nu(a)}^{\nu(b)} (F \circ \nu^{-1})^{\tilde{\triangle}}(s)\,\tilde{\triangle} s \\
&= \int_{\nu(a)}^{\nu(b)} (F^{\triangle} \circ \nu^{-1})(s)(\nu^{-1})^{\tilde{\triangle}}(s)\,\tilde{\triangle} s \\
&= \int_{\nu(a)}^{\nu(b)} ((f\nu^{\triangle}) \circ \nu^{-1})(s)(\nu^{-1})^{\tilde{\triangle}}(s)\,\tilde{\triangle} s \\
&= \int_{\nu(a)}^{\nu(b)} ((f \circ \nu^{-1})(s)\left[(\nu^{\triangle} \circ \nu^{-1})(\nu^{-1})^{\tilde{\triangle}}\right](s)\,\tilde{\triangle} s \\
&= \int_{\nu(a)}^{\nu(b)} (f \circ \nu^{-1})(s)\,\tilde{\triangle} s.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.0.5. Vamos a usar el método de sustitución para evaluar la integral

$$\int_0^t (\sqrt{\tau^2+1} + \tau)3^{\tau^2}\,\triangle \tau$$

para $t \in \mathbb{T} := \mathbb{N}_0^{\frac{1}{2}} = \{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}_0\}$. Tenemos que

$$\nu(t) = t^2$$

para $t \in \mathbb{N}_0^{\frac{1}{2}}$. Entonces $\nu : \mathbb{N}_0^{\frac{1}{2}} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente y $\nu(\mathbb{N}_0^{\frac{1}{2}}) = \mathbb{N}_0$ es una escala de tiempo. Tenemos que

$$\nu^{\triangle}(t) = \sqrt{t^2+1} + t.$$

Por tanto, si $f(t) := 3^{t^2}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^t (\sqrt{\tau^2+1}+\tau)3^{\tau^2}\,\triangle\tau &= \int_0^t f(\tau)\nu^{\triangle}(\tau)\,\triangle\tau \\
&= \int_0^{t^2} f(\sqrt{s})\,\tilde{\triangle}s \\
&= \int_0^{t^2} 3^s\,\tilde{\triangle}s \\
&= \left[\frac{1}{2}3^s\right]_{s=0}^{s=t^2} \\
&= \frac{1}{2}(3^{t^2}-1).
\end{aligned}$$

Existen otros muchos resultados de gran interés que, aunque no los incluiremos en este trabajo, pueden ser consultados en la referencia [7].

Capítulo 6

Ecuaciones de primer orden

6.1. El plano complejo de Hilger

En este capítulo vamos a estudiar las ecuaciones dinámicas lineales de primer orden, así como los problemas de valor inicial. Comencemos definiendo estos conceptos en escalas de tiempo.

Definición 6.1.1. Supongamos $f : \mathbb{T} \text{ x } \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Entonces la ecuación

$$y^{\triangle} = f(t, y, y^{\sigma}) \tag{6.1}$$

se llama ecuación dinámica, o ecuación diferencial, de primer orden. Si

$$f(t, y, y^{\sigma}) = f_1(t)y + f_2(t) \text{ o } f(t, y, y^{\sigma}) = f_1(t)y^{\sigma} + f_2(t)$$

para f_1 y f_2 funciones, entonces (6.1) se conoce como ecuación lineal. La función $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es la función solución de (6.1) si

$$y^{\sigma}(t) = f(t, y(t), y(\sigma(t))) \text{ se obtiene para todo } t \in \mathbb{T}^k.$$

La solución general del problema (6.1) es el conjunto de todas las soluciones de (6.1). Dado $t_0 \in \mathbb{T}$ y $y_0 \in \mathbb{R}$, el problema

$$y^{\triangle} = f(t, y, y^{\sigma}) \text{ , } y(t_0) = y_0$$

se denomina problema de valor inicial (PVI), y una solución y de (6.1) tal que $y(t_0) = y_0$ se denomina solución de este PVI.

Nuestro objetivo es construir una solución explícita del problema de valor inicial

$$y^{\triangle} = p(t)y, \, y(t_0) = 1.$$

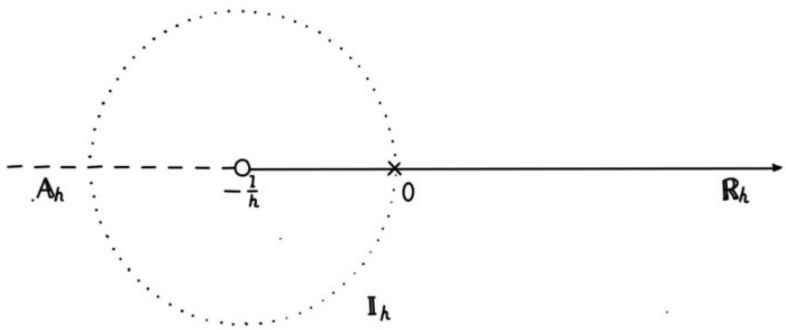
A esta solución le llamaremos *función exponencial asociada* a escala de tiempo dada. Introduzcamos el concepto de *plano complejo de Hilger*.

Definición 6.1.2. Para $h > 0$ definimos los *números complejos de Hilger*, el *eje real de Hilger*, el *eje alternativo de Hilger* y el *círculo imaginario de Hilger* como

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_h &:= \{z \in \mathbb{C} : z \neq -\tfrac{1}{h}\},\\ \mathbb{R}_h &:= \{z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R} \text{ y } z > -\tfrac{1}{h}\},\\ \mathbb{A}_h &:= \{z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R} \text{ y } z < -\tfrac{1}{h}\},\\ \mathbb{I}_h &:= \{z \in \mathbb{C}_h : |z + \tfrac{1}{h}| = \tfrac{1}{h}\},\end{aligned}$$

respectivamente. Para $h = 0$, entonces $\mathbb{C}_0 := \mathbb{C}$, $\mathbb{R}_0 := \mathbb{R}$, $\mathbb{I}_0 := i\mathbb{R}$ y $\mathbb{A}_0 := \varnothing$.

Los conjuntos definidos anteriormente los podemos representar de la siguiente forma



Definición 6.1.3. Sea $h > 0$ y $z \in \mathbb{C}_h$. Definimos la *parte real de Hilger* de z como

$$Re_h(z) := \frac{|zh + 1| - 1}{h}$$

y la *parte imaginaria de Hilger* de z como

$$Im_h(z) := \frac{Arg(zh + 1)}{h},$$

donde $Arg(z)$ denota el argumento de z $(-\pi < Arg(z) \leq \pi)$. Además, $Re_h(z)$ y $Im_h(z)$ satisfacen

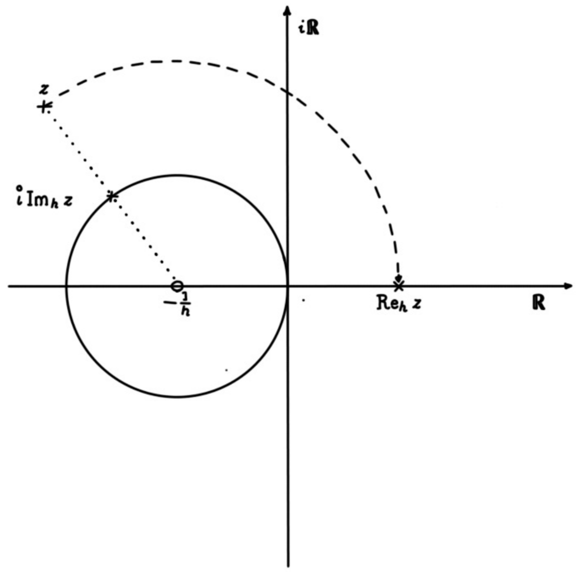
$$-\tfrac{1}{h} < Re_h(z) < \infty \text{ y } -\tfrac{\pi}{h} < Im_h(z) \leq \tfrac{\pi}{h},$$

respectivamente. En particular, $Re_h(z) \in \mathbb{R}_h$

Definición 6.1.4. Sea $-\frac{\pi}{h} < w \leq \frac{\pi}{h}$. Definimos los *números puramente imaginarios de Hilger* iw como

$$iw = \frac{e^{iwh} - 1}{h}. \tag{6.2}$$

Para $z \in \mathbb{C}_h$, tenemos que $iIm_h(z) \in \mathbb{I}_h$ (como podemos ver en la siguiente figura).



Hilger llamó a la fórmula (6.3) del siguiente teorema la formula *arc-chord* (arco de cuerda) porque esta proporciona la longitud de la cuerda del círculo imaginario de Hilger $\mathbb{I}_h$ desde el origen hasta iw.

Teorema 6.1.1. *Si* $-\frac{\pi}{h} < w \leq \frac{\pi}{h}$, *entonces*

$$|iw|^2 = \frac{4}{h^2}\sin^2(\frac{wh}{2}). \tag{6.3}$$

Demostración. Usando (6.2) tenemos que

$$\begin{aligned}
|iw|^2 &= (iw)(\bar{iw}) \\
&= \Big(\frac{e^{iwh}-1}{h}\Big)\Big(\frac{e^{-iwh}-1}{h}\Big) \\
&= \frac{2-e^{iwh}-e^{-iwh}}{h^2} \\
&= \frac{2}{h^2}(1-\cos(wh)) \\
&= \frac{4}{h^2}\sin^2(\frac{wh}{2})
\end{aligned}$$

□

Teorema 6.1.2. *Definimos la suma* "circle plus" $\oplus$ *en* $\mathbb{C}_h$ *como*

$$z \oplus w := z + w + zwh,$$

así, $(\mathbb{C}_h, \oplus)$ *es un grupo Abeliano.*

Demostración. Para probar que existe la clausura de la suma $\oplus$, tenemos que para $z, w \in \mathbb{C}_h$, $z \oplus w$ es un número complejo. Solo quedaría probar que $z \oplus w \neq -\frac{1}{h}$, pero esto lo obtenemos de

$$\begin{aligned}
1 + h(z \oplus w) &= 1 + h(z + w + wzh) \\
&= 1 + hz + hw + hzwh \\
&= (1 + hz)(1 + hw) \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathbb{C}_h$ es cerrado bajo la suma $\oplus$. Como

$$z \oplus 0 = 0 \oplus z = z,$$

entonces 0 es la identidad aditiva de $\oplus$. Para $z \in \mathbb{C}_h$, para encontrar el inverso aditivo de z bajo el operador $\oplus$, tenemos que resolver

$$z \oplus w = 0$$

para w. Luego tenemos que

$$z + w + zwh = 0$$

para w. Así

$$w = -\frac{z}{1 + zh}$$

es el inverso aditivo de z bajo la suma $\oplus$. Veamos ahora si se cumple la propiedad asociativa. Tenemos que

$$\begin{aligned}
(z \oplus w) \oplus v &= (z + w + zwh) \oplus v \\
&= z + w + zwh + v + (z + w + zwh)vh \\
&= z + w + v + zwh + zvh + wvh + zwhvh \\
&= z + w + v + (w + v + wvh)zh \\
&= z \oplus (w + v + wvh) \\
&= z \oplus (w \oplus v)
\end{aligned}$$

Por tanto, hemos probado que cumple la propiedad asociativa. Como $(\mathbb{C}_h, \oplus)$ es un grupo. Tenemos que

$$\begin{aligned} z \oplus w &= z + w + zwh \\ &= w + z + wzh \\ &= w \oplus z \end{aligned}$$

Luego se cumple la propiedad conmutativa, y, por tanto, $(\mathbb{C}_h, \oplus)$ es un grupo Abeliano. $\square$

Teorema 6.1.3. *Para $z \in \mathbb{C}_h$ tenemos que*

$$z = Re_h z \oplus iIm_h z$$

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C}_h$. Entonces

$$\begin{aligned} Re_h z \oplus iIm_h z &= \frac{|zh+1|-1}{h} \oplus i\frac{Arg(zh+1)}{h} \\ &= \frac{|zh+1|-1}{h} \oplus \frac{\exp(iArg(zh+1))-1}{h} \\ &= \frac{|zh+1|-1}{h} + \frac{\exp(iArg(zh+1))-1}{h} + \frac{|zh+1|-1}{h}\frac{\exp(iArg(zh+1))-1}{h}h \\ &= \frac{1}{h}\{|zh+1|-1+\exp(iArg(zh+1))-1+[|zh+1|-1][\exp(iArg(zh+1))-1]\} \\ &= \frac{1}{h}\{|zh+1|\exp(iArg(zh+1))-1\} \\ &= \frac{(zh+1)-1}{h} = z \end{aligned}$$

$\square$

En la prueba del Teorema (6.1.2) hemos visto que si $z \in \mathbb{C}_h$, entonces el inverso aditivo de z bajo el operador $\oplus$ es

$$\ominus z := \frac{-z}{1+zh} \tag{6.4}$$

Definición 6.1.5. Definimos la diferencia *"circle minus"* en $\mathbb{C}_h$ como

$$z \ominus w := z \oplus (\ominus w) \tag{6.5}$$

Teorema 6.1.4. *Si $z, w \in \mathbb{C}_h$ con $h \geq 0$, entonces tenemos*

1. $\ominus(\ominus z) = z$
2. $z \ominus z = 0$
3. $z \ominus w = \frac{z-w}{1+wh}$
4. $z \ominus w = z - w$ *si* $h = 0$

Demostración. $\square$

1. Sea $z \in \mathbb{C}_h$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\ominus(\ominus z) &= \frac{-(\ominus z)}{1+(\ominus z)h} \\
&= \frac{\dfrac{z}{1+zh}}{1+\dfrac{-zh}{1+zh}} \\
&= \frac{\dfrac{z}{1+zh}}{\dfrac{1}{1+zh}} = z
\end{aligned}$$

2. Veamos que

$$\begin{aligned}
z \ominus z &= z \oplus (\ominus z) \\
&= z \oplus \frac{-z}{1+zh} \\
&= z + \frac{-z}{1+zh} + \frac{-z^2h}{1+zh} \\
&= \frac{z + z^2h - z - z^2h}{1+zh} = 0
\end{aligned}$$

3. Sean $z, w \in \mathbb{C}_h$ tenemos

$$
\begin{aligned}
z \ominus w &= z \oplus (\ominus w) \\
&= z \oplus \frac{-w}{1+wh} \\
&= z + \frac{-w}{1+wh} + \frac{-zwh}{1+wh} \\
&= \frac{z + zwh - w - zwh}{1+wh} \\
&= \frac{z-w}{1+wh}
\end{aligned}
$$

4. Si $h = 0$ tenemos por (3) que $z \ominus w = z - w$

Definición 6.1.6. Si $z \in \mathbb{C}_h$, entonces definimos el cuadrado generalizado de z como

$$z^{②} := (-z)(\ominus z) = \tfrac{z^2}{1+zh}$$

Teorema 6.1.5. *a)* $(\ominus z)^{②} = z^{②}$

b) $1 + zh = \frac{z^2}{z^{②}}$

c) $z + (\ominus z) = z^{②} h$

d) $z \oplus z^{②} = z + z^2$

e) $z^{②} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_h \cup \mathbb{A}_h \cup \mathbb{I}_h$

f) Si $-\frac{\pi}{h} < w \leq \frac{\pi}{h}$, *entonces*

$$-(iw)^{②} = \frac{4}{h^2} \sin^2(\frac{wh}{2})$$

Demostración. Vamos a suponer para las siguientes demostraciones que $z \in \mathbb{C}_h$.

1. Consideremos

$$
\begin{aligned}
(\ominus z)^{②} &= \frac{(\ominus z)^{②}}{1+(\ominus z)h} \\
&= \frac{\dfrac{z^2}{(1+zh)^2}}{1+\dfrac{-zh}{1+zh}} \\
&= \frac{z^2}{(1+zh)^2}\cdot\frac{1+zh}{1+zh-zh} \\
&= \frac{z^2}{1+zh} \\
&= z^{②}
\end{aligned}
$$

2. La demostración se obtiene directamente de la definición de $z^{②}$

3. Notemos que

$$
\begin{aligned}
z+(\ominus z) &= z+\frac{-z}{1+zh} \\
&= \frac{z+z^2h-z}{1+zh} \\
&= \frac{z^2}{1+zh}\cdot h \\
&= z^{②}\cdot h
\end{aligned}
$$

4. Veamos que

$$
\begin{aligned}
z\oplus z^{②} &= z+z^{②}+zz^{②}h \\
&= z+\frac{z^2}{1+zh}+\frac{z^3h}{1+zh} \\
&= \frac{z+z^2h+z^2+z^3h}{1+zh} \\
&= \frac{z(1+zh)+z^2(1+zh)}{1+zh} \\
&= z+z^2
\end{aligned}
$$

5. Sea $z = u + iv$ notemos que

$$\begin{aligned}
z^{②} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{(u+iv)^2}{(1+uh)+ivh} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow (u^2 + 2iuv - v^2)(1 + uh - ivh) \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow 2uv(1+uh) - vh(u^2 - v^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow u^2vh + 2uv + v^3h = 0 \\
&\Leftrightarrow v = 0 \text{ ó } u^2h + 2u + v^2h = 0 \\
&\Leftrightarrow v = 0 \text{ ó } (u + \frac{1}{h})^2 + v^2 = \frac{1}{h^2} \\
&\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_h \cup \mathbb{A}_h \text{ ó } z \in \mathbb{I}_h \\
&\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_h \cup \mathbb{A}_h \cup \mathbb{I}_h
\end{aligned}$$

6. Observemos que

$$\begin{aligned}
-(iw)^{②} &= (iw) \cdot [\ominus(iw)] \\
&= (iw) \cdot \overline{iw} \\
&= |iw|^2 \\
&= \frac{4}{h^2} \sin^2(\frac{wh}{2})
\end{aligned}$$

□

Veamos que si $z \in \mathbb{C}$, entonces

$$z^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \cup \mathbb{I}_0$$

donde $\mathbb{I}_0$ es el conjunto de los números puramente imaginarios. Por lo tanto, (6.1.5) (e) es el enunciado correspondiente a los números complejos de Hilger.

Definición 6.1.7. Para $h > 0$, definimos la transformación cilindro (cylinder transformation) $\xi_h : \mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h$ como

$$\xi_h(z) = \tfrac{1}{h} \log(1 + zh),$$

donde log es la función logaritmo. Para $h = 0$, definimos $\xi_0(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Llamamos a ξ_h la transformación cilindro porque cuando $h > 0$ podemos ver $\mathbb{Z}_h$ como un cilindro si pegamos las lineas adyacentes de $Im(z) = -\frac{\pi}{h}$ y $Im(z) = \frac{\pi}{h}$ de $\mathbb{Z}_h$ formando un cilindro. Definimos la suma en $\mathbb{Z}_h$ como

$$z + w := z + w \ (\text{mod}\frac{2\pi i}{h}) \text{ para } z, w \in \mathbb{Z}_h \tag{6.6}$$

Definición 6.1.8. La inversa de la transformación cilindro ξ_h cuando $h > 0$ viene dada por

$$\xi_h^{-1}(z) = \tfrac{1}{h}(e^{zh} - 1)$$

para $z \in \mathbb{Z}_h$.

Teorema 6.1.6. *La transformación cilindro ξ_h es un grupo de homomorfismos de $(\mathbb{C}_h, \oplus)$ en $(\mathbb{Z}_h, +)$, donde la suma $+$ en $\mathbb{Z}_h$ está definida por (6.6).*

Demostración. Sea $h > 0$ y $z, w \in \mathbb{C}_h$ y consideramos

$$\begin{aligned}
\xi_h(z \oplus w) &= \frac{1}{h}\log(1 + (z \oplus w)h) \\
&= \frac{1}{h}\log(1 + zh + wh + zwh^2) \\
&= \frac{1}{h}\log[(1 + zh)(1 + wh)] \\
&= \frac{1}{h}\log(1 + zh) + \frac{1}{h}\log(1 + wh) \\
&= \xi_h(z) + \xi_h(w)
\end{aligned}$$

Esto probaría nuestro resultado para $h > 0$. El caso $h = 0$ es trivial. □

6.2. La función exponencial

En esta sección vamos a usar la transformación cilindro que hemos definido en la sección anterior, para definir una funcion exponencial generalizada a una escala de tiempo $\mathbb{T}$. Empecemos definiendo unas definiciones previas.

Definición 6.2.1. Decimos que una función $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es regresiva siempre que

$$1 + \mu(t)p(t) \neq 0 \text{ para todo } t \in \mathbb{T}^k \tag{6.7}$$

se cumple. El conjunto de todos las funciones regresivas y rd-continuas $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ las podemos denotar como

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T}) = \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

Lema 6.2.1. Si $p, q \in \mathcal{R}$, entonces la función $p \oplus q$ y la función $\ominus p$ definida por

$$(\ominus p)(t) := -\frac{p(t)}{1+\mu(t)p(t)} \text{ para todo } t \in \mathbb{T}^k$$

también pertenecen a $\mathcal{R}$.

Definición 6.2.2. Si $p \in \mathcal{R}$, entonces definimos la función exponencial como

$$e_p(t,s) = \exp\Big(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \triangle\tau\Big) \text{ para } s,t \in \mathbb{T} \tag{6.8}$$

donde la transformación cilindro $\xi_h(z)$ es la definida en (6.1.7).

Lema 6.2.2. Si $p \in \mathcal{R}$, entonces la propiedad de semigrupo

$$e_p(t,r)e_p(r,s) = e_p(t,s) \text{ para todo } r,s,t \in \mathbb{T}$$

se satisface.

Demostración. Supongamos que $p \in \mathcal{R}$. Sea $r,s,t \in \mathbb{T}$. Entonces tenemos por la definición (6.2.2)

$$\begin{aligned}
e_p(t,r)e_p(r,s) &= \exp\Big(\int_r^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \triangle\tau\Big)\exp\Big(\int_s^r \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \triangle\tau\Big) \\
&= \exp\Big(\int_r^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \triangle\tau + \int_s^r \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \triangle\tau\Big) \\
&= \exp\Big(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \triangle\tau\Big) \\
&= e_p(t,s)
\end{aligned}$$

donde hemos usado el Teorema (4.0.7) (d). $\square$

Definición 6.2.3. Si $p \in \mathcal{R}$, entonces la ecuación lineal dinámica de primer orden

$$y^{\triangle} = p(t)y \tag{6.9}$$

la llamamos *regresiva*.

Teorema 6.2.1. *Supongamos que (6.9) es regresiva y sea $t_0 \in \mathbb{T}$ fijo. Entonces $e_p(\cdot,t_0)$ es una solución del problema de valor inicial*

$$y^{\triangle} = p(t)y,\ y(t_0) = 1 \tag{6.10}$$

en $\mathbb{T}$.

Demostración. Fijamos $t_0 \in \mathbb{T}^k$ y suponemos que (6.9) es regresiva. Primero veamos que

$$e_p(t_0,t_0) = 1$$

Solo quedaría probar que $e_p(t,t_0)$ satisface la ecuación dinámica $y^{\triangle} = p(t)y$. Fijamos $t \in \mathbb{T}$. Se dan dos posibles casos.

- Caso 1. Supongamos que $\sigma(t) > t$. Por la definición (6.1.8) y el lema (6.2.1) tenemos que

$$\begin{aligned}
e_p^{\triangle}(t,t_0) &= \frac{\exp\Big(\int_{t_0}^{\sigma(t)} \xi_{\mu(r)}(p(r))\,\triangle r\Big) - \exp\Big(\int_{t_0}^{t} \xi_{\mu(r)}(p(r))\,\triangle r\Big)}{\mu(t)} \\
&= \frac{\exp\Big(\int_{t}^{\sigma(t)} \xi_{\mu(r)}(p(r))\,\triangle r\Big) - 1}{\mu(t)} e_p(t,t_0) \\
&= \frac{e^{\xi_{\mu(t)}(p(t))} - 1}{\mu(t)} e_p(t,t_0) \\
&= \xi^{-1}_{\mu(t)}(\xi_{\mu(t)}(p(t))) \cdot e_p(t,t_0) \\
&= p(t) \cdot e_p(t,t_0)
\end{aligned}$$

- Caso 2. Supongamos que $\sigma(t) = t$. Si $y(t) := e_p(t,t_0)$, entonces queremos probar que $y^{\triangle}(t) = p(t)y(t)$. Usando el lema (6.2.1) obtenemos

$$\begin{aligned}
&|y(t) - y(s) - p(t)y(t)(t-s)| = |e_p(t,t_0) - e_p(s,t_0) - p(t)e_p(t,t_0)(t-s)| \\
&= |e_p(t,t_0)| \cdot |1 - e_p(s,t) - p(t)(t-s)| \\
&= |e_p(t,t_0)| \cdot \left| 1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\triangle\tau - e_p(s,t) + \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\triangle\tau - p(t)(t-s) \right| \\
&\le |e_p(t,t_0)| \cdot \left| 1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\triangle\tau - e_p(s,t) \right| + |e_p(t,t_0)| \cdot \left| \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\triangle\tau - p(t)(t-s) \right| \\
&\le |e_p(t,t_0)| \cdot \left| 1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\triangle\tau - e_p(s,t) \right| + |e_p(t,t_0)| \cdot \left| \int_s^t [\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))]\,\triangle\tau \right|
\end{aligned}$$

  Sea $\epsilon > 0$ dado. Debemos probar que existe un conjunto vecino U de t tal que la parte derecha de esta inecuación es menor o igual que $\epsilon|t-s|$, y la prueba quedaría completa. Sea $\sigma(t) = t$ y $p \in \mathbb{C}_{rd}$, entonces tenemos que

$$\lim_{r \to t} \xi_{\mu(r)}(p(r)) = \xi_0(p(t)) \tag{6.11}$$

Esto implica que existe un conjunto vecino U_1 de t talque

$$|\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))| < \frac{\epsilon}{3|e_p(t,t_0)|} \text{ para todo } \tau \in U_1.$$

Sea $s \in U_1$. Entonces

$$|e_p(t,t_0)| \cdot \left| \int_s^t [\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))] \triangle\tau \right| \leq \frac{\epsilon}{3}|t-s| \tag{6.12}$$

Y usando la regla de L'Hôpital's

$$\lim_{z \to 0} \frac{1 - z - e^{-z}}{z} = 0,$$

por tanto, existe un conjunto vecino U_2 de t, luego si $s \in U_2$ con $s \leq t$, entonces

$$\left| \frac{1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \triangle\tau - e_p(s,t)}{\int_s^t [\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \triangle\tau} \right| < \epsilon^*$$

donde

$$\epsilon^* = min\left\{1, \frac{\epsilon}{1 + 3|p(t)e_p(t,t_0)|}\right\}.$$

Sea $s \in U := U_1 \cap U_2$. Entonces

$$\begin{aligned}
&|e_p(t,t_0)| \cdot \left|1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \triangle\tau - e_p(s,t)\right| \leq |e_p(t,t_0)|\epsilon^* \left|\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \triangle\tau\right| \\
&\leq |e_p(t,t_0)| \cdot \epsilon^* \left\{ \left| \int_s^t [\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))] \triangle\tau \right| + |p(t)||t-s| \right\} \\
&\leq |e_p(t,t_0)| \cdot \left| \int_s^t [\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))] \triangle\tau \right| + |e_p(t,t_0)|\epsilon^*|p(t)||t-s| \\
&\leq \frac{\epsilon}{3}|t-s| + |e_p(t,t_0)|\epsilon^*|p(t)||t-s| \\
&\leq \frac{\epsilon}{3}|t-s| + \frac{\epsilon}{3}|t-s| \\
&= \frac{2\epsilon}{3}|t-s|
\end{aligned}$$

□

Teorema 6.2.2. *Si* (6.9) *es regresiva, entonces la única solución de* (6.10) *viene dada por* $e_p(\cdot, t_0)$.

Demostración. Supongamos que y es la solución de (6.10) y consideremos que el cociente $\frac{y}{e_p(\cdot, t_0)}$ (por la definición (6.2.2) sabemos que $e_p(t, s) \neq 0$ para todo $t, s \in \mathbb{T}$). Por el Teorema (3.0.2) (e) tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{y}{e_p(\cdot, t_0)}\right)^{\triangle}(t) &= \frac{y^{\triangle}(t)e_p(t, t_0) - y(t)e_p^{\triangle}(t, t_0)}{e_p(t, t_0)e_p(\sigma(t), t_0)} \\
&= \frac{p(t)y(t)e_p(t, t_0) - y(t)p(t)e_p(t, t_0)}{e_p(t, t_0)e_p(\sigma(t), t_0)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por tanto, $\frac{y}{e_p(\cdot, t_0)}$ es una constante, de acuerdo con el corolario (4.0.1) (b). Luego

$$\frac{y(t)}{e_p(t, t_0)} \equiv \frac{y(t_0)}{e_p(t_0, t_0)} = \frac{1}{1} = 1$$

y de esta forma hemos llegado a que $y = e_p(\cdot, t_0)$. □

Vamos a ver ahora algunas de las propiedades más importantes de la función exponencial.

Teorema 6.2.3. *Si* $p, q \in \mathcal{R}$, *entonces*

a) $e_0(t, s) \equiv 1$ *y* $e_p(t, t) \equiv 1$;

b) $e_p(\sigma(t), s) = (1 + \mu(t)p(t))e_p(t, s)$;

c) $\frac{1}{e_p(t, s)} = e_{\ominus p}(t, s)$;

d) $e_p(t, s) = \frac{1}{e_p(s, t)} = e_{\ominus p}(s, t)$;

e) $e_p(t, s)e_p(s, r) = e_p(t, r)$;

f) $e_p(t, s)e_q(t, s) = e_{p \oplus q}(t, s)$;

g) $\frac{e_p(t, s)}{e_q(t, s)} = e_{p \ominus q}(t, s)$;

h) $(\dfrac{1}{e_p(\cdot,s)})^{\triangle} = -\dfrac{p(t)}{e_p^{\sigma}(\cdot,s)}$.

Demostración. a) La función $y(t) \equiv 1$ es una solución del problema de valor inicial $y^{\triangle} = 0y$, $y(s) = 1$, y como este problema solo tiene una solución, tal y como hemos visto en el Teorema (6.2.2), la cual llamamos $e_0(t,s)$ por el Teorema (6.2.1), tenemos que $e_0(t,s) \equiv y(t) \equiv 1$.

b) Por el Teorema (3.0.1) (c) tenemos que

$$\begin{aligned} e_p(\sigma(t),s) &= e_p^{\sigma}(t,s) \\ &= e_p(t,s) + \mu(t)e_p^{\triangle}(t,s) \\ &= e_p(t,s) + \mu(t)p(t)e_p(t,s) \\ &= (1+\mu(t)p(t))e_p(t,s) \end{aligned}$$

donde hemos usado el Teorema (6.2.1).

c) Consideremos el problema de valor inicial

$$y^{\triangle} = (\ominus p)(t)y \;,\; y(s) = 1 \tag{6.13}$$

Por el lema (6.2.1) la ecuación dinámica (6.13) es regresiva. Tenemos que para cualquier s fijo, $y(t) = \dfrac{1}{e_p(t,s)}$ satisface (6.13), a lo que llegamos usando el Teorema (6.2.1) y (6.2.2). Es claro que $y(s) = 1$. Usando la regla del cociente obtenemos

$$\begin{aligned} y^{\triangle}(t) &= (\frac{1}{e_p(\cdot,s)})^{\triangle}(t) \\ &= -\frac{e_p^{\triangle}(t,s)}{e_p(t,s)e_p(\sigma(t),s)} \\ &= -\frac{p(t)e_p(t,s)}{e_p(t,s)e_p(\sigma(t),s)} \\ &= -\frac{p(t)}{e_p(\sigma(t),s)} \\ &= -\frac{p(t)}{(1+\mu(t)p(t))e_p(t,s)} \\ &= (\ominus p)(t)y(t) \end{aligned}$$

donde hemos usado (b) para llegar del paso segundo al tercero.

d) Por la ecuación (6.8) tenemos que

$$e_p(t,s) = \tfrac{1}{e_p(s,t)},$$

y esto es equivalente a $e_{\ominus p}(s,t)$ de acuerdo con (c).

e) Esta propiedad de semigrupo ha sido anteriormente probada en el lema (6.2.2), basado en la definición de función exponencial. Sin embargo, vamos a probarlo usando tan solo que la funciones exponenciales son las únicas soluciones de los problemas de valor inicial (6.10). Consideremos el problema de valor inicial

$$y^{\triangle} = p(t)y \ , \ y(r) = 1 \tag{6.14}$$

Tenemos que $y(t) := e_p(t,s)e_p(s,r)$ satisface (6.14), lo cual probamos por el Teorema (6.2.1) y (6.2.2). Tenemos que $y^{\triangle}(t) = p(t)y(t)$, y usando (d) llegamos a

$$y(r) = e_p(r,s)e_p(s,r) = 1$$

f) Consideremos el problema de valor inicial

$$y^{\triangle} = (p \oplus q)(t)y \ , \ y(s) = 1 \tag{6.15}$$

Por el lema (6.2.1) la ecuación dinámica (6.15) es regresiva. Tenemos que $y(t) = e_p(t,s)e_q(t,s)$ satisface (6.15), lo cual probamos usando el Teorema (6.2.1) y (6.2.2). Tenemos que $y(s) = e_(s,s)e_q(s,s) = 1$, y usando la regla del producto y el enunciado (b) de este teorema, calculamos

$$\begin{aligned}
y^{\triangle}(t) &= (e_p(\cdot,s)e_q(\cdot,s))^{\triangle}(t)\\
&= p(t)e_p(t,s)e_q(\sigma(t),s) + e_p(t,s)q(t)e_q(t,s)\\
&= p(t)e_p(t,s)[1+\mu(t)q(t)]e_q(t,s) + e_p(t,s)q(t)e_q(t,s)\\
&= p(t)[1+\mu(t)q(t)] + q(t)e_p(t,s)e_q(t,s)\\
&= (p \oplus q)(t)e_p(t,s)e_q(t,s)\\
&= (p \oplus q)(t)y(t)
\end{aligned}$$

g) Usando el enunciado (c) y (d) de este teorema quedaría probado.

h) Usando el enunciado (b) y (c) de este teorema tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{e_p(\cdot,s)}\right)^{\triangle} &= (e_{\ominus p}(\cdot,s))^{\triangle}\\ &= (\ominus p)e_{\ominus p}(\cdot,s)\\ &= \frac{-p}{1+\mu p}\frac{1}{e_p(\cdot,s)}\\ &= \frac{-p}{e_p^{\sigma}(\cdot,s)}\end{aligned}$$

□

Teorema 6.2.4. *Si* $p,q\in\mathcal{R}$ *entonces se cumple*

$$e^{\triangle}_{p\ominus q}(\cdot,t_0) = (p-q)\frac{e_p(\cdot,t_0)}{e^{\sigma}_q(\cdot,t_0)}$$

Demostración. Usando el Teorema (6.2.3) (b) y (c) tenemos que

$$\begin{aligned}e^{\triangle}_{p\ominus q}(t,t_0) &= (p-q)(t)e_{p\ominus q}(t,t_0)\\ &= \frac{p(t)-q(t)}{1+\mu(t)q(t)}\frac{e_p(t,t_0)}{e_q(t,t_0)}\\ &= \frac{(p(t)-q(t))e_p(t,t_0)}{e_q(\sigma(t),t_0)}\end{aligned}$$

□

Teorema 6.2.5. *Si* $p\in\mathcal{R}$ *y* $a,b,c\in\mathbb{T}$, *entonces*

$$[e_p(c,\cdot)]^{\triangle} = -p[e_p(c,\cdot)]^{\sigma}$$

y

$$\int_a^b p(t)e_p(c,\sigma(t))\,\triangle t = e_p(c,a)-e_p(c,b).$$

Demostración. Usando las propiedades del Teorema (6.2.3) llegamos a

$$\begin{aligned}
p(t)e_{\ominus p}(\sigma(t),c) &= p(t)[1+\mu(t)(\ominus p)(t)]e_{\ominus p}(t,c)\\
&= p(t)\left[1-\frac{\mu(t)p(t)}{1+\mu(t)p(t)}\right]e_{\ominus p}(t,c)\\
&= p(t)\frac{1}{1+\mu(t)p(t)}e_{\ominus p}(t,c)\\
&= -(\ominus p)(t)e_{\ominus p}(t,c)\\
&= -e^{\triangle}_{\ominus p}(t,c)\\
&= -[e_p(c,t)]^{\triangle}
\end{aligned}$$

donde $^{\triangle}$ denota la derivada con respecto a t. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_a^b p(t)e_p(c,\sigma(t))\,\triangle t &= -\int_a^b [e_p(c,\cdot)]^{\triangle}(t)\,\triangle t\\
&= e_p(c,a)-e_p(c,b)
\end{aligned}$$

□

Lema 6.2.3. Sea $p\in\mathcal{R}$. Supongamos que existe una sucesión de puntos distintos $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{T}^k$ tal que

$$1+\mu(t_n)p(t_n)<0 \text{ para todo } n\in\mathbb{N}.$$

Entonces el límite $\lim_{n\to\infty}|t_n|=0$. En particular, si existe un intervalo cerrado $J\subset\mathbb{T}^k$ tal que $1+\mu(t)p(t)<0$ para todo $t\in J$, entonces $|J|<\infty$.

Teorema 6.2.6. *Supongamos $p\in\mathcal{R}$ y $t_0\in\mathbb{T}$.*

1. *Si $1+\mu p>0$ en $\mathbb{T}^k$, entonces $e_p(t,t_0)>0$ para todo $t\in\mathbb{T}$.*

2. *Si $1+\mu p<0$ en $\mathbb{T}^k$, entonces $e_p(t,t_0)=\alpha(t,t_0)(-1)^{n_t}$ para todo $t\in\mathbb{T}$, donde*

$$\alpha(t,t_0):=\exp\left(\int_{t_0}^{t}\frac{\log|1+\mu(\tau)p(\tau)|}{\mu(\tau)}\triangle\tau\right)>0$$

y

$$n_t=\begin{cases} |[(t_0,t)]| & si \quad t\geq t_0\\ |[(t,t_0)]| & si \quad t<t_0\end{cases}$$

Demostración. 1. Podemos probarlo usando la definición (6.2.2): Como $1+\mu(t)p(t) > 0$, entonces tenemos $\log[1+\mu(t)p(t)] \in \mathbb{R}$ para todo $t \in \mathbb{T}^k$ y, por tanto,

$$\xi_{\mu(t)}(p(t)) \in \mathbb{R} \text{ para todo } t \in \mathbb{T}^k.$$

Luego $e_p(t, t_0) > 0$ para todo $t \in \mathbb{T}$, por (6.8).

2. Como $1 + \mu(t)p(t) < 0$, tenemos que

$$\log[1+\mu(t)p(t)] = \log|1+\mu(t)p(t)| + i\pi \text{ para todo } t \in \mathbb{T}^k.$$

Veamos que $\mu(t)$ nunca desaparece en este caso y $n_t < \infty$ debido al lema (6.2.3), luego podemos calcular $e_p(t, t_0)$ como

$$\begin{aligned}
e_p(t,t_0) &= \exp\left(\int_{t_0}^{t} \xi_{\mu(t)}(p(\tau))\,\triangle\tau\right) \\
&= \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{\log(1+\mu(\tau)p(\tau))}{\mu(\tau)}\triangle\tau\right) \\
&= \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{\log|1+\mu(\tau)p(\tau)|+i\pi}{\mu(\tau)}\triangle\tau\right) \\
&= \exp\left(\int_{t_0}^{t} \left\{\frac{\log|1+\mu(\tau)p(\tau)|}{\mu(\tau)} + \frac{i\pi}{\mu(\tau)}\right\}\triangle\tau\right) \\
&= \alpha(t,t_0)\exp\left(i\pi\int_{t_0}^{t}\frac{\triangle\tau}{\mu(\tau)}\right)
\end{aligned}$$

Y por la fórmula de Euler, tenemos

$$\begin{aligned}
\exp\left(i\pi\int_{t_0}^{t}\frac{\triangle\tau}{\mu(\tau)}\right) &= \cos(\pi\int_{t_0}^{t}\frac{\triangle\tau}{\mu(\tau)}) \\
&= \cos(n_t\pi) \\
&= (-1)^{n_t}
\end{aligned}$$

donde la segunda ecuación es cierta, por el Teorema (4.0.8) y porque $n_t < \infty$.

□

Definición 6.2.4. Definimos el conjunto $\mathcal{R}^+$ de todos los elementos positivamente regresivos de $\mathcal{R}$ como

$$\mathcal{R}^+ = \mathcal{R}^+(\mathbb{T}, \mathbb{R}) = \{p \in \mathcal{R} : 1 + \mu(t)p(t) > 0 \text{ para todo } t \in \mathbb{T}\}$$

Lema 6.2.4. $\mathcal{R}^+$ es un subgrupo de $\mathcal{R}$

Teorema 6.2.7. *Sea $t \in \mathcal{R}$ y $t_0 \in \mathbb{T}$.*

1. *Si $p \in \mathcal{R}$, entonces $e_p(t, t_0) > 0$ para todo $t \in \mathbb{T}$.*

2. *Si $1 + \mu(t)p(t) < 0$ para algún $t \in \mathbb{T}^k$, entonces*

$$e_p(t, t_0)e_p(\sigma(t), t_0) < 0.$$

3. *Si $1 + \mu(t)p(t) < 0$ para todo $t \in \mathbb{T}^k$, entonces $e_p(t, t_0)$ cambia de signo en todos los puntos $t \in \mathbb{T}$*

4. *Supongamos que existe un conjunto $T = t_i : i \in \mathbb{N} \subset \mathbb{T}^k$ y $S = s_i : i \in \mathbb{N} \subset \mathbb{T}^k$ donde*

$$\cdots < s_2 < s_1 < t_0 \leq t_1 < t_2 < \cdots$$

tal que $1+\mu(t)p(t) < 0$ para todo $t \in S \cup T$ y $1+\mu(t)p(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{T}^k \backslash (S \cup T)$. Además si $|T| = \infty$, entonces $lim_{n\to\infty} t_n = \infty$, y si $|S| = \infty$, entonces $lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$. Si $T \neq \varnothing$ y $S \neq \varnothing$, entonces

$$e_p(\cdot, t_0) > 0 \text{ en } [\sigma(s_1), t_1].$$

Si $|T| = \infty$, entonces

$$(-1)^i e_p(\cdot, t_0) > 0 \text{ en } [\sigma(t_i), t_{i+1}] \text{ para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Si $|T| = N$, entonces

$$(-1)^i e_p(\cdot, t_0) > 0 \text{ en } [\sigma(t_i), t_{i+1}] \text{ para todo } 1 \leq i \leq N - 1$$

y

$$(-1)^N e_p(\cdot, t_0) > 0 \text{ en } [\sigma(t_N), \infty).$$

Si $T = \varnothing$ y $S \neq \varnothing$, entonces

$$e_p(\cdot, t_0) > 0 \text{ en } [\sigma(s_1), \infty).$$

Si $|S| = \infty$, *entonces*

$$(-1)^i e_p(\cdot, t_0) > 0 \text{ en } [\sigma(s_{i+1}), s_i] \text{ para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Si $|N| = M \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$(-1)^i e_p(\cdot, t_0) > 0 \text{ en } [\sigma(s_{i+1}), s_i] \text{ para todo } 1 \leq i \leq M - 1$$

y

$$(-1)^M e_p(t, t_0) > 0 \text{ en } (-\infty, s_M].$$

Si $S = \varnothing$ *y* $T \neq \varnothing$, *entonces*

$$e_p(\cdot, t_0) > 0 \text{ en } (\infty, t_1].$$

En particular, la función exponencial $e_p(\cdot, t_0)$ *es una función real que nunca es igual a cero, pero que puede ser negativa.*

Ejemplo 6.2.1. Sea $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ para $h > 0$. Sea $\alpha \in \mathcal{R}$ una constante, tal que $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \{-\frac{1}{h}\}$. Entonces

$$e_\alpha(t, 0) = (1 + \alpha h)^{\frac{t}{h}} \text{ para todo } t \in \mathbb{T} \tag{6.16}$$

Para probar esto veamos que y definida como la parte derecha de (6.16) satisface

$$y(0) = (1 + \alpha h)^0 = 1$$

y tenemos que

$$\begin{aligned} y^{\triangle}(t) &= \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \\ &= \frac{(1 + \alpha h)^{\frac{t+h}{h}} - (1 + \alpha h)^{\frac{t}{h}}}{h} \\ &= \frac{(1 + \alpha h)^{\frac{t}{h}} (1 + \alpha h - 1)}{h} \\ &= \alpha (1 + \alpha h)^{\frac{t}{h}} \\ &= \alpha y(t) \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{T}$

Ejemplo 6.2.2. Consideremos la escala de tiempo

$$\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^2 = \{n^2 : n \in \mathbb{N}_0\}$$

del ejemplo (3.0.4). Tenemos que

$$e_1(t, 0) = 2^{\sqrt{t}}(\sqrt{t})! \text{ para } t \in \mathbb{T} \tag{6.17}$$

Sea y definida como la parte derecha de (6.17). Tenemos así que $y(0) = 1$, y para $t \in \mathbb{T}$ tenemos

$$\begin{aligned} y(\sigma(t)) &= 2^{\sqrt{\sigma(t)}}(\sqrt{\sigma(t)})! \\ &= 2^{1+\sqrt{t}}(1 + \sqrt{t})! \\ &= 2 \cdot 2^{\sqrt{t}}(1 + \sqrt{t})(\sqrt{t})! \\ &= 2(1 + \sqrt{t})y(t) \\ &= (1 + \mu(t))y(t) \\ &= y(t) + \mu(t)y(t) \end{aligned}$$

así llegamos a $y^{\triangle}(t) = y(t)$

6.3. Problemas de Valor Inicial

En esta sección vamos a estudiar las ecuaciones lineales de primer orden no homogéneas

$$y^{\triangle} = p(t)y + f(t) \tag{6.18}$$

y su correspondiente ecuación homogénea

$$y^{\triangle} = p(t)y \tag{6.19}$$

en una escala de tiempo $\mathbb{T}$. Los resultados de esta sección son producto del siguiente teorema.

Teorema 6.3.1. *Supongamos que* (6.19) *es regresiva. Sea $t_0 \in \mathbb{T}$ y $y_0 \in \mathbb{R}$. La única solución del problema de valor inicial*

$$y^{\triangle} = p(t)y \ , \ y(t_0) = y_0 \tag{6.20}$$

viene dada por

$$y(t) = e_p(t, t_0)y_0.$$

Definición 6.3.1. Para $p \in \mathcal{R}$ definimos el operador $L_1 : C^1_{rd} \to C_{rd}$ como

$$L_1 y(t) = y^{\triangle}(t) - p(t)y(t)), \, t \in \mathbb{T}^k.$$

Además (6.19) puede ser escrita de la forma $L_1 y(t) = 0$ y (6.18) puede ser escrita como $L_1 y(t) = f(t)$. Como L_1 es un operador lineal, decimos que (6.18) es una ecuación lineal. Decimos que y es una solución de (6.18) en $\mathbb{T}$ tal que $y \in C^1_{rd}$ y $L_1 y(t) = f(t)$ para $t \in \mathbb{T}^k$.

Definición 6.3.2. El operador adjunto $L_1^* : C^1_{rd} \to C_{rd}$ es definida por

$$L_1^* x(t) = x^{\triangle}(t) + p(t)x^{\sigma}(t), \, t \in \mathbb{T}^k.$$

Ejemplo 6.3.1. La función

$$x(t) = (1 + \alpha h)^{\frac{-1}{h}}, \, t \in h\mathbb{Z}$$

es una solución de la ecuación adjunta

$$x^{\triangle} + \alpha x^{\sigma} = 0, \, t \in h\mathbb{Z},$$

donde α es una constante regresiva.

Teorema 6.3.2. *Identidad de Lagrange Si $x, y \in C^1_{rd}$, entonces*

$$x^{\sigma} L_1 y + y L_1^* x = (xy)^{\triangle} \text{ en } \mathbb{T}^k.$$

Demostración. Supongamos que $x, y \in C^1_{rd}$ y consideremos

$$\begin{aligned}
(xy)^{\triangle} &= x^{\sigma} y^{\triangle} + x^{\triangle} y \\
&= x^{\sigma}(y^{\triangle} - py) + y(x^{\triangle} + px^{\sigma}) \\
&= x^{\sigma} L_1 y + y L_1^* x
\end{aligned}$$

en $\mathbb{T}^k$

□

El siguiente resultado es un resultado inmediato de la identidad de Lagrange.

Corolario 6.3.1. Si x e y son soluciones de $L_1 y = 0$ y $L_1^* x = 0$, respectivamente, entonces

$$x(t)y(t) = C \text{ para } t \in \mathbb{T},$$

donde C es una constante.

A partir de este corolario sabemos que si y es no trivial y satisface $L_1 y = 0$, entonces $x := \frac{1}{y}$ satisface la ecuación adjunta $L_1^* = 0$.

Teorema 6.3.3. *Supongamos $p \in \mathcal{R}$. Sea $t_0 \in \mathbb{T}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. La única solución del problema de valor inicial*

$$x^{\triangle} = -p(t)x^{\sigma} \ , \ x(t_0) = x_0$$

viene dada por

$$x(t) = e_{\ominus p}(t, t_0)x_0.$$

Veamos ahora el caso de los problemas no homogéneos

$$x^{\triangle} = -p(t)x^{\sigma} + f(t), x(t_0) = x_0 \tag{6.21}$$

Supongamos que x es solución de (6.21). Multiplicamos ambos lados de la ecuación dinámica en (6.21) por el factor de integración $e_p(t, t_0)$ y obtenemos

$$\begin{aligned}
[e_p(\cdot, t_0)x]^{\triangle}(t) &= e_p(t, t_0)x^{\triangle}(t) + p(t)e_p(t, t_0)x^{\sigma}(t) \\
&= e_p(t, t_0)[x^{\triangle}(t) + p(t)x^{\sigma}(t)] \\
&= e_p(t, t_0)f(t)
\end{aligned}$$

y ahora integramos ambos lados desde t_0 hasta t, concluyendo

$$e_p(t, t_0)x(t) - e_p(t_0, t_0)x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e_p(\tau, t_0)f(\tau) \triangle\tau \tag{6.22}$$

Esta integración es posible gracias al Teorema (4.0.4) para $f \in C_{rd}$.

Definición 6.3.3. La ecuación (6.18) es regresiva si (6.19) es regresiva y $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es rd-continua.

Ahora vamos a ver la fórmula de variación de constantes para la ecuación adjunta $L_1^* x = f$.

Teorema 6.3.4 (Variación de Constantes)**.** *Supongamos que* (6.18) *es regresiva. Sea $t_0 \in \mathbb{T}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. La única solución del problema de valor inicial*

$$x^{\triangle} = -p(t)x^{\sigma} + f(t) \ , \ x(t_0) = x_0 \tag{6.23}$$

viene dada por

$$x(t) = e_{\ominus p}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t, \tau)f(\tau)\,\triangle\tau$$

Demostración. Primero, es fácil verificar que x es solución del problema de valor inicial (6.23). Después, si x es solución de (6.23), entonces tenemos que (6.22) se cumple. Por tanto, obtenemos que

$$e_p(t, t_0)x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} e_p(\tau, t_0)f(\tau)\,\triangle\tau$$

Resolvemos para x y aplicamos el Teorema (6.2.3) (c) y llegamos a

$$x(t) = e_{\ominus p}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{e_p(\tau, t_0)}{e_p(t, t_0)} f(\tau)\,\triangle\tau$$

Pero como $e_p(t, \tau)e_p(\tau, t_0) = e_p(t, t_0)$ por el Teorema (6.2.3) (e), y usando de nuevo el teorema (6.2.3) (c), llegamos la fórmula final dada en el teorema. □

Nota 6.3.1. Por el Teorema (6.2.3) (e), una alternativa de la solución del problema de valor inicial (6.23) es

$$x(t) = e_{\ominus p}(t, t_0) \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t_0, \tau)f(\tau)\,\triangle\tau$$

Teorema 6.3.5 (Variación de Constantes)**.** *Supongamos* (6.18) *es regresiva. Sea* $t_0 \in \mathbb{T}$ *y* $y_0 \in \mathbb{R}$*. La única solución al problema de valor inicial*

$$y^{\triangle} = p(t)y + f(t) \ , \ y(t_0) = y_0 \tag{6.24}$$

viene dada por

$$y(t) = e_p(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} e_p(t, \sigma(\tau))f(\tau)\,\triangle\tau. \tag{6.25}$$

Demostración. Podemos reescribir $y^{\triangle} = p(t)y + f(t)$ como

$$y^{\triangle} = p(t)[y^{\sigma} - \mu(t)y^{\triangle}] + f(t),$$

e idénticamente,

$$(1 + \mu(t)p(t))y^{\triangle} = p(t)y^{\sigma} + f(t),$$

y usando $p \in \mathcal{R}$ tenemos

$$y\triangle = -(\ominus p)(t)y^{\sigma} + \frac{f(t)}{1 + \mu(t)p(t)}$$

Aplicamos el Teorema (6.3.4) y usamos que $(\ominus(\ominus p))(t) = p(t)$ para llegar a la solución (6.24)

$$y(t) = y_0 e_p(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} e_p(t, \tau) \frac{f(\tau)}{1 + \mu(\tau)p(\tau)} \triangle\tau$$

Finalmente, usando el Teorema (6.2.3) (b) y (e) calculamos

$$\frac{e_p(t, \tau)}{1 + \mu(\tau)p(\tau)} = \frac{e_p(t, \tau)}{e_p(\sigma(\tau), \tau)} = e_p(t, \sigma(\tau)),$$

□

Nota 6.3.2. Por el Teorema (6.2.3) (e), una forma alternativa del problema de valor inicial (6.24) viene dada por

$$y(t) = e_p(t, t_0)[y_0 + \int_{t_0}^{t} e_p(t_0, \sigma(\tau)))f(\tau) \triangle\tau].$$

Veamos que si consideramos $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ obtendremos para el Teorema (6.3.5) la solución al problema de valor inicial que ya conocemos.

Sea $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ tenemos que $\mu(t) = 0$ y, por tanto, por la definición (6.1.7), $\xi_0(p(\tau)) = p(\tau)$. Así obtenemos por la definicion (6.2.2)

$$e_p(t, t_0) = exp\left(\int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau\right).$$

Sustituyendo en (6.25), y aplicando que $\sigma(\tau) = \tau$, tenemos

$$y(t) = exp\left(\int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau\right) \cdot y_0 + \int_{t_0}^{t} exp\left(\int_{\tau}^{t} p(\tau)\, d\tau\right) \cdot f(\tau)\, d\tau.$$

Obteniendo finalmente la solución del problema de valor inicial para $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ que ya conocíamos

$$y(t) = exp\left(\int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau\right) \cdot \left[y_0 + \int_{t_0}^{t} exp\left(\int_{\tau}^{t_0} p(\tau)\, d\tau\right) \cdot f(\tau)\, d\tau\right].$$

Vamos a probar ahora que si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ obtendremos la solución al problema de valor inicial conocida. Para ello vamos a usar el problema de valor inicial con coeficientes constantes

$$y^{\triangle} = py + f,\ y(t_0) = y_0.$$

Por el ejemplo (3.0.2)(b) tenemos que

$$y^{\triangle} = \triangle y = y_{t+1} - y_t$$

Por tanto, debemos resolver el problema de valor inicial

$$y_{t+1} = (1+p)y_t + f,\ y(t_0) = y_0.$$

Sabemos por el Teorema (4.0.8) (4) que la integral en $\mathbb{T}$, la podemos ver en $\mathbb{Z}$ como

$$\int_a^b f(t)\,\triangle t = \sum_{t=a}^{b-1} f(t),$$

Veamos entonces que $\mu(t) = 1$ y por la definición (6.1.7), $\xi_1(p) = log(1+p)$. Entonces por la definición (6.2.2), tenemos que

$$\begin{aligned} e_p(t,t_0) &= exp\left(\int_{t_0}^{t} log(1+p)\,\triangle\tau\right) \\ &= exp(\sum_{t_0}^{t-1} log(1+p)) \\ &= \prod_{t_0}^{t-1} exp(log(1+p)) \\ &= \prod_{t_0}^{t-1}(1+p) \\ &= (1+p)^{t-t_0}. \end{aligned}$$

y, por tanto, aplicando que $\sigma(t) = t+1$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} f\cdot e_p(t,\sigma(s))\,ds &= \sum_{i=t_0}^{t-1} f\cdot exp\left(\sum_{s=i+1}^{t-1} log(1+p)\right) \\ &= \sum_{i=t_0}^{t-1} f\cdot(1+p)^{t-i+-1} \\ &= f\cdot\frac{(1+p)^{t-t_0}-1}{p} \end{aligned}$$

Sustituyendo en (6.25) tenemos

$$y(t) = (1+p)^{t-t_0}\cdot y_0 + f\cdot\frac{(1+p)^{t-t_0}-1}{p}. \tag{6.26}$$

La solución (6.26) es la que ya conocemos de las ecuaciones en diferencias para coeficientes constantes [1].

Capítulo 7

Resolución de la ecuación de Beverton-Holt

Como vimos en la introducción, la ecuación en diferencia de Beverton-Holt es un modelo de población clásico discreto que proporciona el número esperado de individuos x_{n+1} de una población en la generación $n+1$ en función del número de individuos de la generación anterior. Este modelo viene dado por la ecuación en diferencia

$$x_{n+1} = \frac{\nu K_n x_n}{K_n + (\nu+1)x_n} \qquad \text{para } n \in \mathbb{N}_0,$$

donde $x_0 > 0$, $\nu > 1$ mide la tasa de crecimiento de la población, y $K_n > 0$ mide la capacidad de carga. También vimos, como tras realizar ciertos cálculos, llegamos a la ecuación análoga en escalas de tiempo

$$x^{\triangle} = \alpha x^{\sigma}\left(1 - \frac{x}{K(t)}\right). \tag{7.1}$$

donde $x^{\triangle}$ es la derivada con respecto a una escala de tiempo $\mathbb{T}$, $\alpha = \dfrac{\nu-1}{\nu}$ y x^{σ} es la función $x \circ \sigma$.

En este capítulo vamos a tratar de resolver esta ecuación usando la teoría del cálculo en escalas de tiempo.

Consideremos la ecuación (7.1) sujeta a $K : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $K \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^+)$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $\alpha > 0$. Realizando la sustitución $u = \dfrac{1}{x}$, y usando el Teorema (3.0.2) (d), tenemos que

$$u^{\triangle} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\triangle} = \frac{-\,x^{\triangle}}{x \cdot x^{\sigma}}.$$

Usando la ecuación (7.1) tenemos que

$$
\begin{aligned}
u^{\triangle} = \frac{-\,x^{\triangle}}{x \cdot x^{\sigma}} &= \frac{\alpha x^{\sigma}\left(1 - \dfrac{x}{K(t)}\right)}{x \cdot x^{\sigma}} \\
&= -\alpha \cdot \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x}{K(t)}\right) \\
&= -\alpha u + \frac{\alpha}{K(t)}.
\end{aligned}
$$

Por tanto, tenemos el problema de valor inicial

$$u^{\triangle} = -\alpha u + \frac{\alpha}{K(t)}\ ,\ u(t_0) = u_0.$$

Por el Teorema de variación de constantes (6.3.5), tenemos que

$$u = e_{-\alpha}(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} e_{-\alpha}(t, \sigma(\tau))\frac{\alpha}{K(\tau)}\triangle\tau.$$

Finalmente, deshaciendo el cambio, llegamos a la solución de la ecuación de Beverton-Holt

$$x = \frac{1}{e_{-\alpha}(t, t_0)\dfrac{1}{y_0} + \displaystyle\int_{t_0}^{t} e_{-\alpha}(t, \sigma(\tau))\frac{\alpha}{K(\tau)}\triangle\tau}. \tag{7.2}$$

Capítulo 8

Conclusiones

La teoría del cálculo en escalas de tiempo nos permite unificar el cálculo de las ecuaciones dinámicas, así como extender la teoría que conocemos a otros conjuntos, las escalas de tiempo.

En este trabajo hemos visto, en primer lugar, las definiciones básicas y las notaciones necesarias para entender el desarrollo de la teoría. Posteriormente, vimos como se desarrolla el cálculo de derivadas e integrales en escalas de tiempo, dando resultados fundamentales y ejemplos para su completa comprensión. Vimos después algunos resultados, como la regla de la cadena o el método de sustitución, los cuales nos serán de utilidad. Por último, hemos visto como se solucionan las ecuaciones dinámicas en escalas de tiempo y los problemas de valor inicial, llegando a demostrar que para cuando se trate del conjunto de los números reales obtendremos la ecuación diferencial, y cuando se trate del conjunto de los números enteros, obtendremos la ecuación en diferencias. Para finalizar el trabajo, hemos dado solución a la ecuación de Beverton-Holt que vimos al principio, llegando así a demostrar las numerosas aplicaciones que puede tener la teoría del cálculo en escalas de tiempo.

Nos queda mucho que aprender sobre las ecuaciones diferenciales en escalas de tiempo, y sus numerosas aplicaciones en biología, ingeniería, economía, física, medicina, etc. Gran parte de esta teoría y aplicaciones que no hemos desarrollado en este proyecto se encuentran en el libro [7], pero se escapan del objetivo de este trabajo.

Hemos dado problemas sencillos, puesto que la finalidad era dar una idea inicial sobre el cálculo de ecuaciones diferenciales en escalas de tiempo para finalmente desarrollar esta teoría en un problema.

Bibliografía

[1] Apuntes de ecuaciones en diferencias. *https://personal.us.es/pnadal/Informacion/leccion5ecdiferencias.pdf*.

[2] El modelo de Beverton-Holt. *https://es.wikipedia.org/wiki/Modelo_Beverton%E2%80%93Holt*.

[3] Martin Bohner and Howard Warth. The Beverton–Holt dynamic equation. *Applicable Analysis*, 86(8):1007–1015, August 2007.

[4] S. Hilger. Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten. Ph. D. thesis, Universität Würzburg, 1988, 1988.

[5] Stefan Hilger. Analysis on measure chains—a unified approach to continuous and discrete calculus. *Results in Mathematics*, 18(1-2):18–56, 1990. Publisher: Springer.

[6] Stefan Hilger. Special functions, Laplace and Fourier transform on measure chains. *Dynamic Systems and Applications*, 8:471–488, 1999. Publisher: DYNAMIC PUBLISHERS ATLANTA.

[7] Martin Bohner and Allan Peterson. *Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications*. Springer, 2001.