



# **Tableaux, representaciones y la dualidad de Schur-Weyl**

**Aarón Ocampo Amaya**





# **Tableaux, representaciones y la dualidad de Schur-Weyl**

Aarón Ocampo Amaya

Memoria presentada como parte de los requisitos  
para la obtención del título de Grado en Matemáticas  
por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por

Prof<sup>a</sup>. Mercedes Helena Rosas Celis



# Índice general

<b>English Abstract</b>	<b>1</b>
<b>1. Teoría de representaciones</b>	<b>3</b>
1.1. Nociones elementales . . . . .	3
1.2. Submódulos e irreducibilidad . . . . .	6
1.3. $G$ -homomorfismos . . . . .	9
1.4. Caracteres de representaciones . . . . .	10
1.5. La representación regular $\mathbb{C}G$ . . . . .	14
1.6. Inducción y restricción . . . . .	15
<b>2. Representaciones irreducibles de <math>\mathbb{S}_n</math></b>	<b>17</b>
2.1. Tableaux y representaciones . . . . .	18
2.2. Los módulos de permutaciones, $\mathcal{H}^\lambda$ . . . . .	21
2.3. Las representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_n$ . . . . .	24
2.4. La descomposición de $\mathcal{H}^\lambda$ a través del anillo de representaciones . . . . .	28
2.5. La base de $\mathcal{S}^\lambda$ . . . . .	33
2.6. Homomorfismos explícitos hacia $\mathcal{H}^{(1^n)}$ . . . . .	35
2.7. Discusión del caso general . . . . .	43

<b>3. Representaciones del grupo lineal general</b>	<b>45</b>
3.1. Productos tensoriales . . . . .	45
3.2. Módulos de Weyl . . . . .	47
3.3. La dualidad de Schur-Weyl. Las representaciones irreducibles . . . . .	48
<b>Conclusiones</b>	<b>55</b>
<b>A. Apéndice</b>	<b>57</b>
A.1. El anillo de funciones simétricas . . . . .	57
A.2. Los polinomios simétricos . . . . .	61
A.3. El algoritmo RSK . . . . .	62

# English Abstract

The main objective of this work is to study the relation between representations of the symmetric group and those of the general linear group. This relation is known as the Schur-Weyl duality.

We introduce the basic concepts of representation theory in the first chapter. In the second, we use tableaux to construct all the irreducible representations of the symmetric group, and provide explicit homomorphisms to decompose the regular representation. Finally, in the third chapter, we use these representations to obtain polynomial representations for the general linear group, establishing the Schur-Weyl duality.





# 1 | Teoría de representaciones

La dualidad de Schur-Weyl es un resultado en la teoría de representaciones que relaciona las representaciones del grupo simétrico con las representaciones polinomiales del grupo lineal general. En este capítulo introduciremos los resultados y conceptos básicos de la teoría de representaciones sobre el cuerpo de los números complejos  $\mathbb{C}$ .

Hemos decidido no introducir numerosas demostraciones de los resultados de este capítulo debido a que han sido estudiados parcialmente en la asignatura Álgebra, Combinatoria y Computación. Aún así, las demostraciones de este capítulo se pueden encontrar en los libros de James-Liebeck [6], Sagan [7] y Fulton-Harris [4].

## 1.1 Nociones elementales

A lo largo del documento, a menos que se indique lo contrario, trabajaremos con los elementos de  $\mathbb{C}^n$  vistos como vectores columna.

**| Definición 1.1.1.** Sean  $G$  un grupo y  $GL(d)$  el grupo lineal de matrices complejas de tamaño  $d$ . Una **representación (matricial)** de  $G$  es un homomorfismo de grupos:

$$X : G \rightarrow GL(d)$$

A  $d$  se le llama **grado** de la representación. En el caso en que  $G = GL(n)$ , diremos que  $X$  es **polinomial** si las entradas de  $X(A)$  son polinomios en las entradas de  $A \in GL(n)$ .

**| Definición 1.1.2.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$  y  $G$  un grupo. Diremos que  $V$  es un  **$G$ -módulo** si  $G$  actúa sobre  $V$  de forma lineal, es decir:

1.  $gv \in V$
2.  $\epsilon v = v$
3.  $(gh)v = g(hv)$
4.  $g(cv + dw) = c(gv) + d(gw)$

para todo  $g, h \in G, v, w \in V$  y  $c, d \in \mathbb{C}$

**Ejemplo 1.1.3.** Para el grupo de simetrías del triángulo,  $\mathbb{S}_3$ , podemos dotar a  $\mathbb{C}^3$  de estructura de  $\mathbb{S}_3$ -módulo bajo la acción:

$$\sigma e_i = e_{\sigma(i)}, \quad \text{extendida por linealidad}$$

para cada  $\sigma \in \mathbb{S}_3$ , y  $e_1, e_2, e_3$  los vectores de la base canónica de  $\mathbb{C}^3$ . Equivalentemente, estamos diciendo que:

$$\sigma(a_1, a_2, a_3) = (a_{\sigma^{-1}(1)}, a_{\sigma^{-1}(2)}, a_{\sigma^{-1}(3)})$$

en coordenadas. Notemos que la acción de  $\mathbb{S}_3$  sobre este espacio vectorial consiste en permutar coordenadas.

**Proposición 1.1.4.** Sea  $V$  un  $G$ -módulo, sea su dimensión,  $d$  y sea  $\mathcal{B}$  una base de  $V$ . Cada  $g \in G$  define un automorfismo lineal  $\theta_g$  en  $V$ . Más aún, la aplicación:

$$\begin{aligned} X : G &\rightarrow GL(d) \\ g &\mapsto M_g \end{aligned}$$

donde  $M_g$  es la matriz de  $\theta_g$  respecto de  $\mathcal{B}$ , es una representación de  $G$ . Esta representación es la representación **estándar** de  $G$ .

**Ejemplo 1.1.5.** Para el  $\mathbb{S}_3$ -módulo definido en el ejemplo 1.1.3, podemos obtener estas matrices de forma sencilla:

$$X(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X(132) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

Observemos que las matrices que obtenemos son matrices de permutaciones, como era de esperar según la acción de  $\mathbb{S}_3$ . Esta representación se llama la representación **definición** de  $\mathbb{S}_3$ .

Hemos obtenido una representación matricial de  $G$  a partir de un  $G$ -módulo. Podemos hacer el proceso inverso también.

**Proposición 1.1.6.** Dada una representación  $X$  de grado  $d$  de  $G$ ,  $\mathbb{C}^d$  es un  $G$ -módulo con la multiplicación:

$$g \cdot v = X(g)v,$$

donde  $X(g)v$  es la multiplicación habitual de matrices.

Ahora es claro que tener una representación de  $G$  es equivalente a tener un  $G$ -módulo. A menudo utilizaremos el término representación para referirnos también a  $G$ -módulos.

**Definición 1.1.7.** Sea  $G$  un grupo y  $S$  un conjunto finito sobre el que actúa  $G$ . Definimos la **vectorización** de  $S$  como el espacio vectorial:

$$\mathbb{C}[S] := \left\{ \sum_{s \in S} c_s s \mid c_s \in \mathbb{C} \right\}$$

con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar. Tomaremos el conjunto  $S$  como una base de  $\mathbb{C}[S]$ .

**Ejemplo 1.1.8.** Para  $S = \{1, 2, \dots, n\}$ , tenemos que  $\mathbb{S}_n$  actúa sobre  $S$  de la forma habitual si vemos los elementos de  $\mathbb{S}_n$  como permutaciones. La forma de operar con  $\mathbb{C}[S]$  es tratar los elementos de  $S$  como símbolos formales sobre los que actúa  $\mathbb{S}_n$ . Con esto nos referimos a que, en este ejemplo, no operamos:  $c \cdot 1 \neq c$  para  $c \in \mathbb{C}$ , y no lo haremos nunca en ningún otro  $\mathbb{C}[S]$ . Esta representación es nuevamente la representación **definición** de  $\mathbb{S}_n$ .

**Lema 1.1.9.**  $\mathbb{C}[S]$  es un  $G$ -módulo bajo la acción de  $G$  extendida por linealidad:

$$g \left( \sum_{s \in S} c_s s \right) := \sum_{s \in S} c_s (gs)$$

A la representación asociada este módulo la llamaremos **representación de permutaciones** asociada a  $S$ .

**Definición 1.1.10.** Dado  $G$  un grupo finito, denotamos  $\mathbb{C}G := \mathbb{C}[G]$  al **álgebra de grupo** de  $G$ , donde tomamos como acción de  $G$ , la multiplicación por la izquierda:

$$h \left( \sum_{g \in G} c_g g \right) := \sum_{g \in G} c_g (hg)$$

Esta multiplicación se extiende de forma natural a un producto interno en  $\mathbb{C}G$ , dándole sentido al nombre de álgebra:

$$\left( \sum_{h \in G} c_h h \right) \left( \sum_{g \in G} d_g g \right) := \sum_{g \in G, h \in G} c_h d_g (hg)$$

La representación asociada a  $\mathbb{C}G$  se denomina **representación regular** de  $G$ .

Esta álgebra juega un papel importante en la teoría de representaciones de grupos

finitos. También permite demostrar un resultado clásico sobre grupos finitos.

**Corolario 1.1.11 (Teorema de Cayley).** Todo grupo finito es isomorfo a un subgrupo de permutaciones.

## 1.2 Submódulos e irreducibilidad

**Definición 1.2.1.** Sea  $V$  un  $G$ -módulo. Decimos que  $W \subset V$  es un  **$G$ -submódulo** o que es  **$G$ -invariante**, si es cerrado bajo la acción de  $G$ . Equivalentemente,  $W$  es un  $G$ -submódulo si  $W \subset V$  es un subespacio vectorial que es  $G$ -módulo.

**Ejemplo 1.2.2 (Representación trivial).** Tomemos  $G$  un grupo finito y consideremos el  $G$ -módulo  $V = \mathbb{C}G$ . Si  $G = g_1, \dots, g_n$ , podemos tomar  $W = \langle g_1 + g_2 + \dots + g_n \rangle \subset V$ . Como, para todo  $g \in G$ , se tiene  $g(g_1 + g_2 + \dots + g_n) = (g_1 + g_2 + \dots + g_n)$ , pues la suma incluye todos los elementos de  $G$ , tenemos que  $W$  es un  $G$ -submódulo de  $V$ .

Tenemos que  $gv = v$  para todo  $v \in W$  y que  $\dim(W) = 1$ . Entonces la representación matricial asociada a  $W$  es  $X(g) = 1$  para todo  $g \in G$ . Toda representación que cumpla esto se denomina **representación trivial**.

A nivel de  $G$ -módulos la palabra trivial tiene un significado distinto.

**Definición 1.2.3.** Un  $G$ -submódulo  $W \subset V$  se dice **trivial** si  $W = V$  o  $W = \{0\}$ .

Un  $G$ -módulo  $V$  se dice que es **irreducible** si los únicos  $G$ -submódulos que contiene son los triviales. En caso contrario, decimos que es **reducible**.

Una representación se dice **reducible** si su  $G$ -módulo asociado lo es. En caso contrario, se dice **irreducible**,

**Ejemplo 1.2.4 (Representación alternada o signo).** Todo  $G$ -módulo de dimensión 1 es claramente irreducible. La representación trivial, es por tanto, irreducible. Para  $G = \mathbb{S}_n$ , otra representación de grado 1 es la representación **alternada** o **signo**:

$$\begin{aligned} Y : \mathbb{S}_n &\rightarrow GL(1, \mathbb{C}) \\ \sigma &\mapsto \text{sgn}(\sigma) \end{aligned}$$

Siendo un posible  $\mathbb{S}_n$ -módulo asociado  $\mathbb{C}$  con la acción  $\sigma \cdot z = \text{sgn}(\sigma)z$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

El hecho de que un  $G$ -módulo sea reducible también se refleja en su representación asociada.

**Proposición 1.2.5.** Un  $G$ -módulo  $V$  es reducible si y solo si existe una base  $\mathcal{B}$  de  $V$  tal que la representación asociada es de la forma:

$$X(g) = \left( \begin{array}{c|c} A(g) & B(g) \\ \hline 0 & C(g) \end{array} \right), \quad \forall g \in G$$

para  $A(g), C(g)$  matrices cuadradas no vacías.

*Observación 1.2.6.* Notemos que si  $V = W_1 \oplus W_2$  es una descomposición en suma directa de  $G$ -submódulos disjuntos, las matrices anteriores se pueden encontrar, tomando una base adecuada, de la forma:

$$X(g) = \left( \begin{array}{c|c} A(g) & 0 \\ \hline 0 & C(g) \end{array} \right)$$

**Definición 1.2.7.** Sea  $V$  un  $G$ -módulo y sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un producto escalar sobre  $V$ . Decimos que es **invariante por  $G$**  si:

$$\langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle, \quad \forall v, w \in V, g \in G$$

**Proposición 1.2.8.** Sea  $W \subset V$  un  $G$ -submódulo y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un producto escalar invariante por  $G$ . Entonces el complemento ortogonal  $W^\perp$ , es un  $G$ -submódulo de  $V$

*Demostración.* Sabemos que  $W^\perp$  es un subespacio vectorial de  $V$ , luego basta ver que  $W^\perp$  es cerrado bajo la acción de  $G$ . Sean  $v \in W^\perp, w \in W$ , tenemos:

$$\langle gv, w \rangle = \langle v, g^{-1}w \rangle = 0$$

donde hemos usado que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es invariante por  $G$  y que  $g^{-1}w \in W$  por ser  $G$ -submódulo. Así,  $gv \in W^\perp$  para todo  $v \in W^\perp$  y  $g \in G$  y hemos terminado. ■

*Observación 1.2.9.* No siempre existe un producto escalar invariante para  $G$ , en el caso de  $G$  infinito. Por ejemplo, para  $G = \mathbb{R}^*$ , el grupo de las unidades reales, y  $\mathbb{C}$  visto como la representación tautológica de  $G$ :  $r \cdot z = rz$  para  $r \in G, z \in \mathbb{C}$ , todo producto escalar debe cumplir:

$$\langle rz_1, rz_2 \rangle = r^2 \langle z_1, z_2 \rangle, \quad \text{para todo } g \in G$$

Y ningún producto escalar puede ser  $G$ -invariante. Sin embargo, si  $G$  es finito, siempre existe un producto escalar invariante, como demostramos a continuación.

**| Teorema 1.2.10 (Teorema de Maschke).** *Sea  $G$  un grupo finito y  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial no nulo que sea un  $G$ -módulo. Entonces,  $V$  se descompone como suma directa de  $G$ -submódulos irreducibles:*

$$V = W^{(1)} \oplus W^{(2)} \oplus \dots \oplus W^{(k)}$$

*Demostración.* Sea  $\dim(V) = n$ . Probaremos el resultado por inducción en  $n$ . Por ser  $V$  un espacio vectorial no nulo, tenemos  $n \geq 1$ .

Para  $n = 1$ , tenemos que  $V$  no puede contener subespacios vectoriales no triviales y por ello, no tiene  $G$ -submódulos no triviales. Luego  $V$  es irreducible y hemos terminado.

Supongamos el resultado cierto para dimensiones  $1, \dots, n-1$ . Si  $V$  es irreducible, hemos terminado. En caso contrario, tomemos  $W$  un  $G$ -submódulo no trivial de  $V$ .

Si  $V$  ya viene dotado de un producto escalar, digamos  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , podemos encontrar  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V$  tal que  $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$ . En caso contrario, tomamos  $\mathcal{B}$  una base de  $V$  y definimos el producto escalar tal que  $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$ .

Usaremos este producto escalar para construir uno que sea invariante bajo  $G$ , para poder usar la proposición 1.2.8 y terminar la prueba por inducción.

Definimos entonces el producto escalar:

$$\langle v, w \rangle_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle gv, gw \rangle \text{ para } v, w \in V$$

Notemos que este producto escalar es invariante bajo  $G$ :

$$\begin{aligned} \langle hv, hw \rangle_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle g(hv), g(hw) \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle (gh)v, (gh)w \rangle \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} \langle fv, fw \rangle = \langle v, w \rangle_G \end{aligned}$$

para todo  $h \in G$ , pues  $(gh)$  recorre todo  $G$  al variar  $g$ . Tomando ahora  $W$  y su complemento ortogonal según  $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ ,  $W^\perp$  y por la proposición 1.2.8, tenemos la suma directa de  $G$ -submódulos:

$$V = W \oplus W^\perp$$

y  $W, W^\perp$  se descomponen a su vez como suma directa de  $G$ -submódulos irreducibles gracias a la hipótesis de inducción, terminando la prueba. ■

### 1.3 $G$ -homomorfismos

Como toda categoría en matemáticas, el estudio de los  $G$ -módulos y representaciones no está completo sin el estudio de los homomorfismos que respetan sus estructuras.

**Definición 1.3.1.** Un  **$G$ -homomorfismo** es una aplicación lineal entre  $G$ -módulos,  $\theta : V \rightarrow W$  que preserva la acción de  $G$ . Es decir:

$$\theta(gv) = g\theta(v) \quad \forall v \in V, g \in G$$

Normalmente, omitiremos el prefijo  $G$ - o lo indicaremos diciendo que  $\theta$  es un homomorfismo de  $G$ -módulos.

**Definición 1.3.2.** Un homomorfismo de  $G$ -módulos se dice **isomorfismo**, si es biyectivo. Además, si existe un isomorfismo entre  $V$  y  $W$ , decimos que son isomorfos, denotado por  $V \cong W$ .

**Observación 1.3.3.** Matricialmente, para un  $G$ -homomorfismo  $\theta : V \rightarrow W$ , tomando bases  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  y representaciones asociadas  $X$  e  $Y$ , de  $V$  y  $W$ , respectivamente; se cumple que:

$$TX(g) = Y(g)T, \quad \forall g \in G$$

donde la matriz  $T$  es la matriz de  $\theta$  como aplicación lineal respecto de las dos bases tomadas. Si ahora  $\theta$  es un isomorfismo, tiene una matriz  $T$  invertible, luego tenemos:

$$Y(g) = TX(g)T^{-1}, \quad \forall g \in G$$

Volveremos a esta observación más adelante.

**Lema 1.3.4.** Dado un homomorfismo de  $G$ -módulos  $\theta : V \rightarrow W$ , tenemos que  $\ker(\theta)$  e  $\text{im}(\theta)$  son  $G$ -submódulos de  $V$  y  $W$ , respectivamente

**Demostración.** Sabemos que ambos conjuntos son subespacios vectoriales de  $V$  y  $W$ , respectivamente, luego falta probar que son cerrados bajo la acción de  $G$ :

$$\begin{aligned} \theta(gv) &= g\theta(v) = g \cdot 0 = 0 & \forall g \in G, v \in \ker(\theta) \\ gw &= g\theta(v) = \theta(gv) & \forall g \in G, \text{ para } \theta(v) = w \end{aligned}$$

Luego ambos son cerrados bajo  $G$ , y por tanto,  $G$ -submódulos. ■

Esto facilita probar un sorprendente teorema sobre  $G$ -homomorfismos:

**| Teorema 1.3.5 (Lema de Schur).** Sean  $V$  y  $W$  dos  $G$ -módulos irreducibles. Entonces todo  $\theta : V \rightarrow W$  homomorfismo cumple exactamente uno de los siguientes:

1.  $\theta$  es un isomorfismo
2.  $\theta$  es la aplicación nula

*Demostración.* Tenemos que tanto  $\ker(\theta)$  como  $\text{im}(\theta)$  son  $G$ -submódulos de  $V$  y  $W$ , pero por irreducibilidad, deben ser triviales. Si  $\ker(\theta) = V$ , tenemos que  $\theta$  es la aplicación nula. Si  $\text{im}(\theta) = \{0\}$  tenemos la misma conclusión.

Si no ocurre ninguno de ellos, tenemos que  $\ker(\theta) = \{0\}$  e  $\text{im}(\theta) = W$ , luego  $\theta$  es isomorfismo. ■

El lema de Schur es cierto en cuerpos arbitrarios e incluso en grupos infinitos puesto que la demostración dada es válida en dichos supuestos. Sin embargo, restringiéndonos a  $\mathbb{C}$ , podemos extraer más información aún:

*Corolario 1.3.6.* Todo endomorfismo no nulo de un  $G$ -módulo irreducible sobre  $\mathbb{C}$  es un múltiplo de la identidad.

*Demostración.* Supongamos que  $\theta : V \rightarrow V$  es un homomorfismo de  $G$ -módulos y tomemos una base  $\mathcal{B}$  de  $V$ . Sea  $T$  la matriz de  $\theta$  respecto de  $\mathcal{B}$ . Entonces que para todo  $g \in G$ :

$$\begin{aligned} TX(g) &= X(g)T \\ (T - cI)X(g) &= X(g)(T - cI) \end{aligned}$$

para todo  $c \in \mathbb{C}$ .

Dado que  $\mathbb{C}$  es algebraicamente cerrado, el polinomio característico de  $T$  tiene al menos una raíz compleja. Tomando entonces  $c$  como un autovalor de  $T$ , obtenemos que  $T - cI$  es no invertible.

Esta matriz corresponde al endomorfismo  $\theta - c \cdot Id$ , luego tenemos que  $\theta - c \cdot Id$  no es un isomorfismo y, por el teorema 1.3.5, tenemos que es la aplicación nula. Es decir  $\theta = c \cdot Id$  como queríamos. ■

## 1.4 Caracteres de representaciones

Recordemos que la traza de una matriz cuadrada  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$  de tamaño  $d$  es:  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^d a_{i,i}$ . Esta aplicación juega un papel muy importante en la teoría de representaciones.



**Definición 1.4.1.** Sea  $V$  un  $G$ -módulo y  $X$  una representación matricial asociada a una base de  $V$ . Definimos el **carácter** de  $V$ ,  $\chi$ , como la traza de  $X$ , es decir:

$$\begin{aligned}\chi : G &\rightarrow \mathbb{C} \\ \chi(g) &= \text{tr}(X(g))\end{aligned}$$

Se cumplen las siguientes propiedades:

**Proposición 1.4.2.** Sean  $V, W$  dos  $G$ -módulos.

1. Si  $X$  e  $Y$  son dos representaciones matriciales asociadas a dos bases distintas  $B, C$  de  $V$ , entonces,  $\text{tr}(X(g)) = \text{tr}(Y(g))$  para todo  $g \in G$ . En concreto, el carácter es independiente de la base escogida para su cálculo y, por ello, está bien definido.
2. Si  $V \cong W$  entonces tienen mismo carácter.
3. El carácter de  $V$  es constante en clases de conjugación de  $G$ .

**Demostración.** Recordemos que la traza es un invariante cíclico, es decir,  $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB) = \text{tr}(BCA)$ . En concreto, si  $T$  es una matriz invertible,  $\text{tr}(A) = \text{tr}(TAT^{-1})$ . Esto demuestra los tres resultados, pues sus caracterizaciones son justamente, la existencia de matrices conjugadas en cierta manera:

1.  $Y(g) = TX(g)T^{-1}$  para  $T$  matriz de cambio de base
2.  $Y(g) = TX(g)T^{-1}$  para  $T$  como en la observación 1.3.3
3.  $X(h)X(g)X(h^{-1})$  para  $hgh^{-1}$  en la clase de conjugación de  $g$

■

**Ejemplo 1.4.3 (Grupo lineal general).** Supongamos que  $G = GL(n)$ , y  $V$  sea un  $G$ -módulo con representación polinomial  $\rho : GL(n) \rightarrow GL(d)$  (según la definición 1.1.1). Definamos las matrices:

$$\text{diag}(x) := \text{diag}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

Entonces  $\chi(\text{diag}(x)) = \text{tr}(\rho(\text{diag}(x))) = p(x)$  para  $p$  un cierto polinomio simétrico; es decir,  $p$  es invariante ante cualquier permutación de sus variables (para más información ver apéndice A).

Para cada  $(i, i+1) \in S_n$  trasposición simple, tenemos una matriz de permutaciones asociada  $T$ , donde  $T$  es la matriz identidad, salvo que tiene las columnas  $i$  y  $i+1$

intercambiadas. Si denotamos  $(i, j)x = (x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n)$ , entonces:

$$\begin{aligned} p(x) &= \chi(\text{diag}(x)) = \text{tr}(\rho(\text{diag}(x))) = \text{tr}(\rho(T \text{diag}(x) T^{-1})) \\ &= \text{tr}(\rho(\text{diag}((i, j)x))) = \chi(\text{diag}((i, j)x)) = p((i, j)x) \end{aligned}$$

Como toda permutación se puede descomponer como producto de trasposiciones, y  $p$  es invariante ante éstas,  $p$  es simétrico.

Ahora terminamos la prueba con un argumento de densidad:

Los autovalores de  $A$  vienen dados por las soluciones al polinomio fundamental  $\det(A - xI)$ , cuyos coeficientes son polinomios en las entradas de  $A$ . Podemos asegurar que  $A$  es diagonalizable si todos los autovalores son diferentes entre sí, es decir que  $\det(A - xI)$  tiene discriminante no nulo. Como el discriminante es un polinomio en los coeficientes de  $\det(A - xI)$ , lo es en los de  $A$ . Esto permite concluir que las matrices no diagonalizables se encuentran en el hiperplano  $\{\text{disc}(\det(A - xI)) = 0\}$ , dentro de  $GL(n)$ .

Es la topología de Zariski en  $GL(n)$  la que permite concluir que, al ser  $\chi(A)$  un polinomio que coincide con  $p(x)$  en el abierto de  $GL(n)$ :  $\{\text{disc}(\det(A - xI)) \neq 0\}$ ; y al ser todo abierto denso, obtenemos que  $\chi(A) = p(x)$  en todo  $GL(n)$ . ■

Los caracteres son constantes en clases de conjugación, y aunque no son las únicas funciones con esta propiedad, sí son particularmente importantes.

**Definición 1.4.4.** Sea  $G$  un grupo. Denotemos  $C_G$  al  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial:

$$C_G = \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es constante en clases de conjugación de } G\}$$

Este espacio es el espacio de **funciones de clase de  $G$** .

Una base de este espacio es el conjunto de **funciones indicatrices de clase de  $G$** . Para cada clase de conjugación  $G_\alpha$  de  $G$ , se definen:

$$C_\alpha(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \in G_\alpha \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Todo carácter de una representación es una función de clase, gracias a la parte 3 de la proposición 1.4.2.

**| Definición 1.4.5.** Sean  $G$  un grupo finito y  $\chi, \psi \in C_G$ . Definimos el producto escalar:

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1})$$

Si bien las funciones indicatrices no son ortonormales respecto a este producto escalar, los caracteres irreducibles sí lo son.

**| Teorema 1.4.6 (Relaciones de ortonormalidad).** Sean  $\chi, \psi$  caracteres de representaciones irreducibles de un grupo finito  $G$ . Entonces:

$$\langle \chi, \psi \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } \chi \neq \psi \\ 1, & \text{si } \chi = \psi \end{cases}$$

Los caracteres irreducibles forman una base ortonormal del espacio de funciones de clase.

**Proposición 1.4.7.** Sea  $X$  una representación matricial de un grupo finito  $G$ . Supongamos que:

$$X \cong m_1 X^{(1)} \oplus m_2 X^{(2)} \oplus \dots \oplus m_k X^{(k)}$$

es su descomposición en representaciones irreducibles; donde hemos agrupado representaciones irreducibles isomorfas entre sí. Entonces:

1.  $\chi = m_1 \chi^{(1)} + m_2 \chi^{(2)} + \dots + m_k \chi^{(k)}$
2.  $\langle \chi, \chi^{(i)} \rangle = m_i$
3.  $X$  es irreducible si y sólo si  $\langle \chi, \chi \rangle = 1$
4. Si es  $Y$  otra representación matricial con carácter  $\chi$ , entonces  $X \cong Y$

**Demostración.** La mayor parte del resultado se extrae del teorema 1.4.6. Para el último, podemos asumir que ambos  $X$  e  $Y$  se descomponen según:

$$\begin{aligned} X &\cong m_1 X^{(1)} \oplus m_2 X^{(2)} \oplus \dots \oplus m_r X^{(r)} \\ Y &\cong n_1 X^{(1)} \oplus n_2 X^{(2)} \oplus \dots \oplus n_r X^{(r)} \end{aligned}$$

donde hemos podido añadir factores en ambas descomposiciones para que tengan los mismos. No tenemos problema en hacerlo pues podemos poner  $m_i = 0$  o  $n_j = 0$ , si el factor no aparece en la descomposición. Pero, entonces, por 2. de este lema:

$$m_i = \langle \chi, \chi^{(i)} \rangle = n_i$$

Luego las descomposiciones son iguales y  $X \cong Y$ . ■

## 1.5 La representación regular $\mathbb{C}G$

Hemos mencionado la importancia de la representación regular,  $\mathbb{C}G$ , en el caso de grupos finitos. Veamos explícitamente a qué nos referimos.

**| Teorema 1.5.1.** *Sea  $G$  un grupo finito y tomemos  $V = \mathbb{C}G$ . Sea  $N$  el número de clases de equivalencia de  $G$ -módulos irreducibles bajo isomorfismo. Entonces:*

1.  $N$  es finito y toda clase de  $G$ -módulo irreducible aparece en la descomposición de  $V$ . Es decir, si:

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^N m_i V^{(i)}$$

entonces, todo  $G$ -módulo irreducible es isomorfo a algún  $V^{(i)}$  y  $m_i \neq 0, \forall i$ .

2. Cada una de estas multiplicidades cumple  $m_i = \dim V^{(i)}$
3. Se cumple  $|G| = \sum_{i=1}^N m_i^2$
4. La cantidad de  $G$ -módulos irreducibles no isomorfos entre sí es igual al número de clases de equivalencia de  $G$ .

**Demostración.** Sea  $W$  un  $G$ -módulo irreducible y sea  $\psi$  su carácter. Sea también  $\chi$  el carácter de  $V$ . Por el lema 1.4.7, el producto  $\langle \chi, \psi \rangle$  es la multiplicidad (bajo isomorfismo) de  $W$  en la descomposición de  $V$ .

Un simple estudio del carácter de  $V = \mathbb{C}G$  permite concluir que:

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1}) = \psi(\epsilon) = \dim W$$

La última igualdad es clara por el hecho de que toda representación matricial cumple  $Y(\epsilon) = Id$ .

Se concluye que todo  $G$ -módulo irreducible aparece en la descomposición de  $V$  con multiplicidad igual a su dimensión. En concreto, deben aparecer todos los  $G$ -módulos irreducibles no vacíos, pero como la dimensión de  $V$  es finita, debe haber una cantidad finita de  $G$ -módulos irreducibles no isomorfos entre sí.

■

La prueba de 4. involucra el estudio del centro de  $\text{End } \mathbb{C}G$ ,  $Z_{\text{End } \mathbb{C}G}$ , para concluir que el número de  $V^{(i)}$  que aparecen en la descomposición es igual a  $\dim Z_{\text{End } \mathbb{C}G}$  (ver Sagan [7])

## 1.6 Inducción y restricción

En esta sección estudiamos la relación entre representaciones de un grupo y de sus subgrupos.

**Definición 1.6.1.** Sea  $H \leq G$  un subgrupo de  $G$  y  $V$  un  $H$ -módulo. Definimos la **inducción** de  $V$  a  $G$ ,  $V \uparrow_H^G$  como el  $G$ -módulo:

$$V \uparrow_H^G := \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} V = \frac{\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}} V}{\mathcal{R}}$$

para  $\mathcal{R}$  el subespacio generado por los elementos de la forma  $(hg) \otimes v - g \otimes (h^{-1}v)$  para  $g \in G$ ,  $v \in V$ ,  $h \in H$ . Para simplificar la notación, normalmente escribiremos  $\mathbb{C}G \otimes_H V$ .

La acción de  $G$  sobre  $V \uparrow_H^G$  se toma como  $g(x \otimes_H v) = (gx) \otimes_H v$ .

**Ejemplo 1.6.2.** Sean  $G = \mathbb{S}_3$  y  $H = \{\epsilon, (123), (132)\}$ . La idea de la inducción es obtener una representación de  $G$ , a partir de una de  $H$ , que mantenga su acción al restringirnos a  $H$ .

Tomemos  $V = \langle v \rangle$  la representación trivial de  $H$ , es decir  $hv = v$  para todo  $h \in H$ . En la inducción se cumple:

$$h(x \otimes_H v) = (hx) \otimes_H v = x \otimes_H (h^{-1}v) = (x \otimes_H v)$$

Es decir,  $H$  sigue actuando de forma trivial sobre  $V \uparrow_H^G$ . Un mayor estudio de este ejemplo permite demostrar que  $V \uparrow_H^G$  es un  $G$ -módulo de dimensión 2.

Podemos realizar también un proceso contrario, restringiendo la acción de  $G$  a la de un subgrupo  $H$ :

**Definición 1.6.3.** Sea  $G$  un grupo y  $H$  un subgrupo de  $G$ . Dado un  $G$ -módulo,  $V$ , definimos la **restricción** de  $V$  a  $H$  como  $V \downarrow_H^G$ , donde simplemente consideramos la acción de cada  $h \in H$ , como la acción de  $h \in G$  sobre  $V$ .

Si bien, en esencia, son procesos contrarios, en general, se tiene que  $V \uparrow_H^G \downarrow_H^G \not\cong V$

**Ejemplo 1.6.4.** Tomando  $G$ ,  $H$  y  $V$  como en el ejemplo anterior,  $V \uparrow_H^G$  era de dimensión 2. Al restringir de nuevo a  $H$ , obtenemos que  $H$  actúa de forma trivial sobre un  $H$ -módulo de dimensión 2, luego  $V$  es claramente isomorfa a la suma directa de dos representaciones triviales.

$$V \uparrow_H^G \downarrow_H^G \cong 2V \not\cong V$$

**Definición 1.6.5.** Sea  $V \uparrow_H^G$  un  $G$ -módulo inducido. Si  $\chi$  es el carácter de  $V$ , denotamos el **carácter inducido** de  $V \uparrow_H^G$  por  $\chi \uparrow_H^G$ . Igualmente, si  $V \downarrow_H^G$  es un  $H$ -módulo restringido, si  $\chi$  es el carácter de  $V$ , denotamos el **carácter restringido** de  $V \downarrow_H^G$  por  $\chi \downarrow_H^G$ .

A partir de ahora, si  $G$  o  $H$  se sobreentienden por el contexto, denotaremos a los anteriores  $V \uparrow$ ,  $V \downarrow$ ,  $\chi \uparrow$  y  $\chi \downarrow$ .

Podemos extender estas nociones a funciones de clase a partir de la ortonormalidad de los caracteres.

**Definición 1.6.6.** Del teorema 1.4.6, tenemos que los caracteres de las representaciones irreducibles de  $G$  son una base ortonormal de  $C_G$ .

Si  $f \in C_G$  se escribe en esta base ortonormal como  $f = \sum_k a_k \chi_k$ , donde cada  $\chi_k$  es el carácter de una representación irreducible de  $G$ , se definen la función de clase **inducida** y **restringida** como:

$$f \uparrow_G = \sum_k a_k (\chi_k \uparrow_G)$$

$$f \downarrow^G = \sum_k a_k (\chi_k \downarrow^G)$$

donde estamos induciendo cada carácter a un supgrupo o restringiendo a un subgrupo de  $G$ .

Si bien es cierto que inducción y restricción no son procesos contrarios, se pueden entender como tal bajo el siguiente resultado.

**Proposición 1.6.7 (Reciprocidad de Frobenius).** Sea  $H \leq G$  y sean  $f \in C_H$ ,  $g \in C_G$ . Entonces, para el producto escalar en cada espacio se da la igualdad:

$$\langle f \uparrow^G, g \rangle_G = \langle f, g \downarrow_H \rangle_H$$

La demostración se realiza primero para los caracteres irreducibles, y luego se extiende por linealidad a funciones de clase.

## 2 | Representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_n$

En virtud del teorema 1.5.1, para hallar todas las representaciones irreducibles del grupo simétrico,  $\mathbb{S}_n$ , basta hallar una por cada clase de conjugación en  $\mathbb{S}_n$ .

Es bien conocido que cada partición de  $n$  determina una clase de conjugación de  $\mathbb{S}_n$ . Éstas surgen al descomponer  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  en ciclos disjuntos. Como la conjugación en  $\mathbb{S}_n$  no cambia el tamaño de estos ciclos, cada clase de conjugación de  $\mathbb{S}_n$  está definida por la forma de esos ciclos, que se pueden representar mediante una partición, es decir, mediante una tupla ordenada de enteros positivos decreciente.

Por ejemplo, para  $\mathbb{S}_3$ , tenemos las clases de conjugación:

$$\{\epsilon = (1)(2)(3)\} \quad \{(12)(3), (13)(2), (23)(1)\} \quad \{(123), (132)\}$$

Asociadas a las particiones  $(1, 1, 1)$ ,  $(2, 1)$  y  $(3)$  respectivamente.

Notación. Usaremos la siguiente notación para particiones:

- Si  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ , denotamos  $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_r$ .
- Si  $\lambda$  es una partición de  $n$ , escribimos  $\lambda \vdash n$ . Se cumple  $\lambda \vdash |\lambda|$ .
- Denotamos el orden de dominancia en particiones por  $\succeq$ . Es decir que  $\lambda \succeq \mu$  si:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\geq \mu_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &\geq \mu_1 + \mu_2 \\ &\vdots \\ |\lambda| &\geq |\mu| \end{aligned}$$

La teoría general de este capítulo se encuentra desarrollada en los libros de Sagan [7], Fulton [3] y Fulton-Harris [4]. También utilizamos las ideas de Bergeron [1], sobre las cuales trabajaremos en la sección 2.6 y 2.7.





**Definición 2.1.5.** Dado  $t$  un tableau inyectivo de forma  $\lambda \vdash n$ , definimos el **subgrupo fila de Young** de  $t$ ,  $R_t$ , como el subgrupo de  $\mathbb{S}_n$  tal que  $\sigma t$  tiene las mismas entradas por filas que  $t$ , para todo  $\sigma \in R_t$ . De igual forma, definimos  $C_t$ , el **subgrupo columna de Young** de  $t$ , como el subgrupo de  $\mathbb{S}_n$  tal que  $\sigma t$  tiene las mismas entradas por columnas que  $t$ , para todo  $\sigma \in C_t$ .

**Observación 2.1.6.** Los subgrupos  $R_t$ ,  $C_t$  permutan elementos en la misma fila o misma columna de  $t$ , respectivamente. Son, por tanto, los productos cartesianos de los grupos simétricos en los elementos de  $t$  por filas o columnas, respectivamente.

Como ejemplo, para el tableau anterior:

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 5 & & \\ \hline 2 & 3 & 4 & \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{cases} R_t = \mathbb{S}_{\{2,3,4\}} \times \mathbb{S}_{\{1,5\}} \\ C_t = \mathbb{S}_{\{1,2\}} \times \mathbb{S}_{\{3,5\}} \end{cases}$$

**Lema 2.1.7.** Para todo tableau inyectivo  $t$  de forma  $\lambda \vdash n$  y  $\sigma \in \mathbb{S}_n$ , se cumplen las siguientes propiedades:

1.  $R_{\sigma t} = \sigma R_t \sigma^{-1}$
2.  $C_{\sigma t} = \sigma C_t \sigma^{-1}$
3. Si  $\sigma \in R_t$ , entonces  $R_{\sigma t} = R_t$ .
4. Si  $\sigma \in C_t$ , entonces  $C_{\sigma t} = C_t$ .

**Demostración.** El resultado se desprende del siguiente hecho básico en  $\mathbb{S}_n$ : si  $\tau \in \mathbb{S}_n$ , con  $\tau = (k_1 k_2 \dots k_r)$ , entonces  $\sigma \tau \sigma^{-1} = (\sigma(k_1) \sigma(k_2) \dots \sigma(k_r))$ . Luego si  $\tau \in R_t$  permuta entradas en las mismas filas en  $t$ ,  $\sigma \tau \sigma^{-1}$  lo hará en  $\sigma t$ . Del mismo razonamiento se sigue la igualdad en  $C_t$ . Las dos últimas propiedades se siguen de las anteriores. ■

**Definición 2.1.8.** Dado  $t \in \text{Iny}(\lambda)$ , definimos en  $\mathbb{C}\mathbb{S}_n$  las siguientes combinaciones lineales:

$$R_t^+ = \sum_{\sigma \in R_t} \sigma$$

$$C_t^- = \sum_{\sigma \in C_t} \text{sgn}(\sigma) \sigma$$

llamados **simetrizador de filas de  $t$**  y **antisimetrizador de columnas de  $t$** , respectivamente.

**Definición 2.1.9.** Dado un  $t$  tableau inyectivo de forma  $\lambda$ , definimos su **tabloide asociado**,  $[t]$ , como:

$$[t] = (R_t^+)t \in \mathbb{C}[\text{Iny}(\lambda)]$$

Denotemos por  $\text{Tab}(\lambda)$  al conjunto de los distintos tabloides de forma  $\lambda$ .

**Lema 2.1.10.** La acción de  $\mathbb{S}_n$  sobre  $\text{Iny}(\lambda)$  induce una acción natural en  $\text{Tab}(\lambda)$ . Concretamente:  $\sigma[t] = [\sigma t]$  para todo  $\sigma \in \mathbb{S}_n$ .

**Demostración.** Basta ver que la definición es correcta:

$$\sigma[t] = \sigma(R_t^+)t = \sigma(R_t^+)\sigma^{-1}\sigma t = (R_{\sigma t}^+)(\sigma t) = [\sigma t]$$

El resto de la prueba se sigue del hecho de que  $\sigma t$  es una acción sobre  $\text{Iny}(\lambda)$ . ■

Los tabloides se suelen pensar como tableaux con la propiedad de que el orden de los elementos en sus filas es irrelevante. Podemos representar esta propiedad omitiendo las líneas verticales en su representación con diagramas de Young:

$$t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 5 & \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \Rightarrow [t] = \frac{1 \ 5}{2 \ 3 \ 4}$$

En un tabloide, la única información relevante es la fila en la que se encuentra cada elemento dentro del tabloide. Es por eso que surge una idea alternativa al uso de diagramas de Young para representar tabloides. Seguimos la notación dada en [1].

**Definición 2.1.11.** Sea  $t$  un tableau inyectivo de forma  $\lambda \vdash n$ . Pongamos que  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ . Definimos su **peso por filas**,  $x^t$  como el monomio en variables  $x_1, \dots, x_n$  tal que:

$$x_i \text{ aparece con exponente } r - 1 \text{ si } i \text{ está en la fila } r$$

Notemos que el exponente de  $x_i$  queda definido por la fila en la que aparece  $i$ , pero no por su posición dentro de la fila. En otras palabras, si  $[t] = [s]$ , entonces  $x^t = x^s$ . Podemos hablar entonces de **peso** en tabloides, donde  $x^{[t]} = x^t$ .

Por ejemplo:

$$t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & & \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \text{ tiene peso: } x^t = x_4 x_5 x_6^2$$

**Lema 2.1.12.** El grupo simétrico  $\mathbb{S}_n$  actúa sobre el conjunto de pesos  $\{x^t \mid t \in \text{Iny}(\lambda)\}$  permutando las variables. Es decir, es la acción:  $\sigma x_i = x_{\sigma(i)}$  extendida multiplicativamente a monomios. Además, la aplicación:

$$x^t \rightarrow [t] \in \text{Tab}(\lambda)$$

está bien definida, es biyectiva y respeta la acción de  $\mathbb{S}_n$ .

**Demostración.** La demostración es sencilla a partir de las definiciones y el lema 2.1.10. También hemos de notar que, dado un peso,  $x^t$  y conocido  $n = |\lambda|$ , es sencillo recuperar el tabloide del que es peso  $x^t$ . Basta colocar el índice de cada variable una fila por encima de la que indica el exponente. ■

Por ejemplo, para  $\sigma = (163)(24) \in \mathbb{S}_6$  tenemos:

$$\begin{aligned} \text{A nivel de tableaux:} \quad [t] = \begin{array}{c} \overline{6} \\ 4 \ 5 \\ \hline 1 \ 2 \ 3 \end{array} &\Rightarrow \sigma[t] = \begin{array}{c} \overline{3} \\ 2 \ 5 \\ \hline 6 \ 4 \ 1 \end{array} \\ \text{A nivel de pesos:} \quad x^{[t]} = x_4 x_5 x_6^2 &\Rightarrow \sigma x^{[t]} = x_2 x_5 x_3^2 \end{aligned}$$

Tenemos así, dos formas diferentes de representar tabloides que preservan la acción de  $\mathbb{S}_n$ :

- Como los propios tabloides,  $[t] = (R_t^+)t$ .
- Como monomios, mediante su peso por filas,  $x^t$ .

## 2.2 Los módulos de permutaciones, $\mathcal{H}^\lambda$

Hemos visto que el grupo simétrico actúa sobre el conjunto de tabloides  $\text{Tab}(\lambda)$ . Los  $\mathbb{S}_n$ -módulos que define esta acción son los que nos interesan estudiar.

**Definición 2.2.1.** *Sea  $\lambda$  una partición de  $n$ . Definimos el **módulo de permutaciones asociado a  $\lambda$** ,  $\mathcal{H}^\lambda$ , como  $\mathbb{C}[\text{Tab}(\lambda)]$ . Se trata de un  $\mathbb{S}_n$ -módulo por el lema 1.1.9 ya que hemos visto en el lema 2.1.10 que  $\mathbb{S}_n$  actúa sobre  $\text{Tab}(\lambda)$ .*

*Podemos definir también  $\mathcal{H}^\lambda$  a partir de los pesos de tabloides directamente. El lema 2.1.12 permite demostrar que ambas definiciones resultan en  $\mathbb{S}_n$ -módulos isomorfos. Es por eso que utilizaremos la notación con pesos a lo largo de los ejemplos.*

**Ejemplo 2.2.2.** *Sea  $n$  un entero no negativo y sea  $\lambda = (n-1, 1) \vdash n$ . Los diferentes tabloides que existen de forma  $\lambda$  son:*

$$\begin{array}{c} \overline{1} \\ 2 \ 3 \ \dots \ n \end{array}, \quad \begin{array}{c} \overline{2} \\ 1 \ 3 \ \dots \ n \end{array}, \quad \dots, \quad \begin{array}{c} \overline{n} \\ 1 \ 2 \ \dots \ n-1 \end{array}$$

Cuyos pesos asociados son:

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

Es fácil encontrar una copia de la representación trivial dentro de  $\mathcal{H}^\lambda$ ; es la generada por  $L = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ . Más aún, en virtud de la demostración del teorema de Maschke (teorema 1.2.10), podemos ver que los elementos  $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_n - x_1$ , son ortogonales a  $L$  según el producto escalar que se define en el teorema. Como, además, son linealmente independientes, generan  $\langle L \rangle^\perp$ . Entonces  $\mathcal{H}^\lambda$  se descompone como:

$$\mathcal{H}^\lambda = \langle L \rangle \oplus \langle x_2 - x_1, \dots, x_n - x_1 \rangle$$

Veremos próximamente que ésta es la descomposición en  $\mathbb{S}_n$ -submódulos irreducibles de  $\mathcal{H}^\lambda$ . Por ahora, la siguiente proposición nos da una relación entre el hecho de que  $R_t$  actúe de forma trivial sobre  $[t]$  y el propio  $\mathcal{H}^\lambda$ . Esto nos será de utilidad más adelante.

**Proposición 2.2.3.** Sea  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \vdash n$  y denotemos por  $\mathbb{1} = \mathbb{1}_H$  la representación trivial de  $H = \mathbb{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathbb{S}_{\lambda_r}$ . Entonces  $\mathbb{1} \uparrow_H^{\mathbb{S}_n}$  tiene como base  $\mathcal{B} = \{\sigma_k \otimes_H \mathbb{1}\}_k$  con  $\{\sigma_k\}_k$  un conjunto de representantes de las clases laterales derechas  $\mathbb{S}_n/H$ .

Más aún,  $\mathcal{H}^\lambda \cong \mathbb{1} \uparrow_H^{\mathbb{S}_n}$  como  $\mathbb{S}_n$ -módulos.

*Demostración.* Entendemos a  $H$  como subgrupo de  $\mathbb{S}_n$  viéndolo como el producto de los grupos simétricos de  $\mathbb{S}_{\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}}$ ,  $\mathbb{S}_{\{\lambda_1+1, \dots, \lambda_1+\lambda_2\}}$ ,  $\dots$ ,  $\mathbb{S}_{\{\lambda_1+\dots+\lambda_{r-1}+1, \dots, |\lambda|\}}$ .

Por definición, tenemos que  $\mathbb{1} \uparrow_H^{\mathbb{S}_n} = \mathbb{C}\mathbb{S}_n \otimes_H \mathbb{1}$ . Luego el conjunto  $\{\sigma \otimes_H \mathbb{1} \mid \sigma \in \mathbb{S}_n\}$  es conjunto generador de  $\mathbb{1} \uparrow_H^{\mathbb{S}_n}$ .

Sean ahora  $\sigma, \tau$  tal que estén en la misma clase lateral en  $\mathbb{S}_n/H$ , es decir que  $\sigma H = \tau H$ . En concreto, existe  $h \in H$  tal que  $\sigma = \tau h$ . Así:

$$\sigma \otimes_H \mathbb{1} = (\tau h) \otimes_H \mathbb{1} = \tau(h \otimes_H \mathbb{1}) = \tau(\epsilon \otimes_H (h^{-1}\mathbb{1})) = \tau \otimes_H \mathbb{1}$$

Luego este conjunto generador es, de hecho,  $\mathcal{B}$ .

La independencia lineal es más trabajosa. Tengamos:

$$\begin{aligned} \sum_k a_k (\sigma_k \otimes_H \mathbb{1}) &= 0 && \text{en } \mathbb{1} \uparrow, \text{ entonces,} \\ \sum_k a_k (\sigma_k \otimes \mathbb{1}) &= \sum_{\tau \in \mathbb{S}_n, h \in H} \gamma_{\tau, h} (h\tau \otimes \mathbb{1} - \tau \otimes \mathbb{1}) && \text{en } \mathbb{C}\mathbb{S}_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{1} \end{aligned}$$

Centrámonos en los coeficientes de los elementos  $x \otimes \mathbb{1}$  para  $x \in \epsilon H = H$ . Denotando  $\epsilon = \sigma_1$ :

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{h \in H, \tau = h^{-1}\epsilon} \gamma_{\tau, h} - \sum_{h \in H} \gamma_{\epsilon, h} && \text{para } x = \epsilon \\ 0 &= \sum_{h \in H, \tau = h^{-1}x} \gamma_{\tau, h} - \sum_{h \in H} \gamma_{x, h} && \text{para } x \neq \epsilon \end{aligned}$$

Fijado  $h \in H$ ,  $h^{-1}x$ , recorre  $H$  variando  $x \in H$ . Esto justifica que, al sumar estas igualdades, obtengamos:

$$a_1 = \sum_{h \in H, \tau \in H} \gamma_{\tau, h} - \sum_{h \in H, \tau \in H} \gamma_{\tau, h} = 0$$

Ahora que  $a_1 = 0$ , para ver que  $a_k = 0$ , basta multiplicar por  $\sigma_k^{-1}$  en la combinación lineal original:

$$\sum_k a_k (\sigma_k \otimes_H \mathbb{1}) = 0$$

y podemos repetir el proceso, ya que el coeficiente de  $\epsilon \otimes_H \mathbb{1}$  ahora es  $a_k$ .

De esta forma,  $\mathcal{B}$  es linealmente independiente y, por ello, base de  $\mathbb{1} \uparrow$ .

Para la segunda parte de la demostración, tomemos la aplicación lineal dada por:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{1} \uparrow &\rightarrow \mathcal{H}^\lambda \\ \phi(\sigma_k \otimes_H \mathbb{1}) &= \sigma_k[t] \end{aligned}$$

Donde  $t$  es el tableau inyectivo cuyas entradas por filas son  $\{1, \dots, \lambda_1\}, \dots, \{\lambda_1 + \dots + \lambda_{r-1} + 1, \dots, |\lambda|\}$ . Notemos que, por definición de  $t$ ,  $R_t = H$ . Con ello, podemos ver que:

- $\phi$  está bien definida. Sea  $\sigma_k = \tau_k h$  para  $h \in H$ . Entonces  $\sigma_k[t] = \tau_k h[t] = \tau_k[ht] = \tau_k[t]$ . Luego la definición es independiente de la clase lateral utilicemos.
- $\phi$  es un isomorfismo de  $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales.  
Primero notemos que, dado  $s$  tableau inyectivo, existe  $\mu \in \mathbb{S}_n$  tal que  $\mu t = s$ . Debido a la forma de actuar de  $\mathbb{S}_n$ , esto mismo es cierto para tabloides,  $[s] = \mu[t]$ . Sean  $\phi(\mu_1 \otimes_H \mathbb{1}) = \phi(\mu_2 \otimes_H \mathbb{1})$ . Es decir, que:

$$\mu_1[t] = \mu_2[t], \quad \text{entonces:} \quad \mu_2^{-1} \mu_1[t] = [t]$$

Y por definición,  $\mu_2^{-1} \mu_1 \in H$ . Luego  $\mu_1 = \mu_2 h$  para cierto  $h \in H$  y, por ello,  $\mu_1, \mu_2$  están en la misma clase lateral de  $\mathbb{S}_n/H$ . Esto prueba que  $\phi$  es inyectiva. La base de  $\mathcal{H}^\lambda$  es el conjunto de tabloides  $\text{Tab}(\lambda)$ . Como, para cada tableau  $s$ , existe  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  tal que  $s = \sigma t$ , esta misma igualdad se da en tabloides  $[s] = \sigma[t]$ . Entonces  $\phi(\sigma \otimes_H \mathbb{1}) = [s]$ , luego  $\phi$  es sobreyectiva.

- $\phi$  es un  $G$ -isomorfismo. Basta comprobar que respeta la acción de  $\mathbb{S}_n$  en la base de  $\mathbb{1} \uparrow_H^{\mathbb{S}_n}$ . Si  $\tau \in \mathbb{S}_n$ , entonces, para  $\mu_k = \tau \sigma_k$ :

$$\phi(\tau(\sigma_k \otimes_H \mathbb{1})) = \phi(\mu_k \otimes_H \mathbb{1}) = \mu_k[t] = \tau \sigma_k[t] = \tau(\phi(\sigma_k \otimes_H \mathbb{1}))$$

Con ello, hemos terminado, dando un isomorfismo explícito entre  $\mathbb{1} \uparrow$  y  $\mathcal{H}^\lambda$ . ■

**| Definición 2.2.4.** Dado un  $G$ -módulo  $V$ , decimos que es **cíclico**, si existe  $v \in V$  tal que  $V$  está generado por  $\{gv \mid g \in G\}$  como espacio vectorial.

En el lema anterior hemos utilizado la propiedad de que  $\mathcal{H}^\lambda$  es cíclico generado por cualquier tabloide  $[t]$ . Esto es pues para todo tabloide  $[s]$ , se da  $[s] = \sigma[t]$  para cierto  $\sigma \in \mathbb{S}_n$ .

### 2.3 Las representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_n$

Hemos utilizado los simetrizadores de filas,  $R_t^+$ , para definir unos ciertos módulos de permutaciones,  $\mathcal{H}^\lambda$ . En esta sección, los antisimetrizadores de columnas,  $C_t^-$ , tomarán protagonismo.

**Definición 2.3.1.** Sea  $t$  un tableau inyectivo de forma  $\lambda \vdash n$ . Definimos en  $\mathcal{H}^\lambda$  el elemento  $\Delta_t = (C_t^-)[t]$ .

Para la definición con pesos de  $\mathcal{H}^\lambda$ , denotaremos estos elementos indicando las variables:  $\Delta_t(x) = (C_t^-)x^t$ .

**Observación 2.3.2.** Hemos definido un elemento de este tipo para cada tableau inyectivo. Si bien es cierto que, si  $[t] = [s]$ , entonces  $\Delta_t = C_t^-[t] = C_t^-[s]$ ; el factor que define  $\Delta_t$  es el uso de  $C_t^-$ , y no el antisimetrizador de columna de otro tableau inyectivo.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & & & \\ \hline 1 & 3 & 4 & \\ \hline \end{array} & \Rightarrow & \Delta_t(x) = x_2 - x_1 \\ s = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & & & \\ \hline 3 & 1 & 4 & \\ \hline \end{array} & \Rightarrow & \Delta_s(x) = x_2 - x_3 \\ r = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & & & \\ \hline 3 & 4 & 1 & \\ \hline \end{array} & \Rightarrow & \Delta_r(x) = x_2 - x_3 \end{aligned}$$

Vemos que  $[t] = [s] = [r]$ , pero esto no implica que  $\Delta_t = \Delta_s = \Delta_r$ . No tendría sentido definir  $\Delta_{[t]}$ .

**Definición 2.3.3.** Definimos el **módulo de Specht** de  $\lambda$  como el  $\mathbb{S}_n$ -submódulo  $S^\lambda \subseteq \mathcal{H}^\lambda$  dado por:

$$S^\lambda = \langle \Delta_t \mid t \in \text{Iny}(\lambda) \rangle$$

Del ejemplo anterior, vemos que estamos dando un conjunto generador de  $S^\lambda$ ; no una base, ya que se repiten elementos:  $[r] = [s]$  y  $\Delta_r = \Delta_s$ . También muestra que no es suficiente dar un elemento representante de cada tabloide, pues  $[t] = [s]$  pero  $\Delta_t \neq \Delta_s$ .

**Lema 2.3.4.**  $\mathcal{S}^\lambda$  es, de hecho, un  $\mathbb{S}_n$ -módulo. Además, es un  $\mathbb{S}_n$ -módulo cíclico (definición 2.2.4), generado como  $\mathbb{S}_n$ -módulo a partir de  $\Delta_t$ , para cualquier  $t$  tableau inyectivo de forma  $\lambda$ .

**Demostración.** Veamos que la acción de  $\mathbb{S}_n$  sobre  $\mathcal{S}^\lambda$  es coherente. Dado  $\tau \in \mathbb{S}_n$ :

$$\begin{aligned} \Delta_{\tau t} &= \sum_{\sigma' \in C_{\tau t}^-} \text{sgn}(\sigma') \sigma'[\tau t] = \sum_{\sigma \in C_t^-} \text{sgn}(\tau \sigma \tau^{-1}) \tau \sigma \tau^{-1}[\tau t] = \\ &= \sum_{\sigma \in C_t^-} \text{sgn}(\sigma) \tau \sigma[t] = \tau \sum_{\sigma \in C_t^-} \text{sgn}(\sigma) \sigma[t] = \tau \Delta_t \end{aligned}$$

Luego  $\mathcal{S}^\lambda$  es cerrado bajo la acción de  $\mathbb{S}_n$  y por ello es un  $\mathbb{S}_n$ -submódulo de  $\mathcal{H}^\lambda$ .

Ahora también es fácil ver que, para cualquier tableau inyectivo  $t$ ,  $\Delta_t$  genera a  $\mathcal{S}^\lambda$  como  $\mathbb{S}_n$ -módulo; pues  $\{\Delta_t \mid t \text{ es tableau inyectivo}\}$  es un conjunto generador y para todo  $s$  tableau inyectivo, siempre existe  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  tal que  $s = \sigma t$ . ■

**Ejemplo 2.3.5.** Recordemos que para  $\lambda = (n-1, 1)$ , habíamos descompuesto  $\mathcal{H}^\lambda$  en el ejemplo 2.2.2 como:

$$\mathcal{H}^\lambda = \langle x_1 + x_2 + \dots + x_n \rangle \oplus \langle x_2 - x_1, \dots, x_n - x_1 \rangle$$

Los distintos  $\Delta_t$  para  $t$  un tableau inyectivo de forma  $\lambda$  son de la forma:

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline i & & & \\ \hline j & * & * & \dots * \\ \hline \end{array} \Rightarrow \Delta_t(x) = x_i - x_j$$

donde solo son relevantes los elementos de la primera columna, pues son los únicos elementos no fijos por  $C_t$ .

Claramente,  $\mathcal{S}^\lambda = \langle x_i - x_j \rangle = \langle x_2 - x_1, \dots, x_n - x_1 \rangle$ . Para comprobarlo basta restar  $x_i - x_1$  y  $x_j - x_1$ . Hemos identificado uno de los factores de  $\mathcal{H}^\lambda$ .

Más aún, para la partición  $\mu = (n)$ , todo  $\Delta_s = [s]$  para  $s$  tableau inyectivo de forma  $\mu$ . Esto es pues  $C_s = \{\epsilon\}$ . Más aún,  $\sigma[s] = [s]$ , ya que  $R_s = \mathbb{S}_n$ . Así  $[t] = [s]$  para todos  $t, s \in \text{Iny}((n))$ . En otras palabras,  $\mathcal{S}^{(n)} \cong \mathbb{1} \cong \langle x_1 + \dots + x_n \rangle$  son la representación trivial.

Hemos obtenido que  $\mathcal{H}^{(n-1,1)} \cong \mathcal{S}^{(n)} \oplus \mathcal{S}^{(n-1,1)}$ .

Demostremos que los módulos de Specht,  $\mathcal{S}^\lambda$ , son las representaciones irreducibles de  $\mathbb{S}_n$ . Para ello, necesitaremos introducirnos algo más en el aspecto combinatorio de los tableaux. Utilizaremos los siguientes lemas de Fulton [3].

**Lema 2.3.6.** Sean  $\lambda, \mu \vdash n$ , y sean  $t$  y  $s$  tableaux inyectivos de formas  $\lambda$  y  $\mu$ , respectivamente. Supongamos que no se cumple  $\lambda \triangleright \mu$ . Entonces exactamente uno de los dos ocurre:

1. Existen  $i \neq j$  que están en una misma fila de  $s$  y en una misma columna de  $t$ .
2.  $\lambda = \mu$  y existen  $\sigma \in C_t$  y  $\tau \in R_s$  tales que  $\sigma t = \tau s$

**Demostración.** Si no ocurre 1, consideremos los elementos de la primera fila de  $s$ . Todos esos elementos deben estar en distintas columnas de  $t$ . Tomemos entonces  $\sigma_1 \in C_t$  tal que esos elementos estén en la primera fila de  $\sigma_1 t$ .

Ahora repetimos el proceso: para los elementos de la segunda fila de  $s$ , existe  $\sigma_2 \in C_t$ , de forma que no modifique los elementos de la primera fila de  $\sigma_1 t$ , tal que  $\sigma_2 \sigma_1 t$  tenga en su segunda fila los mismos elementos que  $s$ . Podemos repetir el proceso para todas las filas de  $s$ , obteniendo  $\sigma_l \sigma_{l-1} \dots \sigma_1 t := \sigma t$  y  $s$  con los mismos elementos en las mismas filas.

Notemos que todo el proceso ha sido posible, lo cual significa que  $\lambda_1 \geq \mu_1, \lambda_2 \geq \mu_2, \dots$  y por ello,  $\lambda \trianglerighteq \mu$ . Pero por hipótesis solo puede darse la igualdad, es decir,  $\lambda = \mu$ . Además, como  $[\sigma t] = [s]$  por construcción, tenemos que existe  $\tau \in R_s$  con  $\sigma t = \tau s$ . ■

**Lema 2.3.7.** Sean  $t$  y  $s$  tableaux inyectivos de formas  $\lambda$  y  $\mu$ . Si  $C_t^-[s] \neq 0 \in \mathcal{H}^\mu$ , entonces  $\lambda \trianglerighteq \mu$ . Además, si  $\lambda = \mu$ , entonces  $C_t^-[s] = \pm \Delta_t$ .

**Demostración.** Sean  $i \neq j$  de una misma fila de  $s$ . Veamos que no pueden estar en una misma columna de  $t$ .

En efecto, si estuvieran, tendríamos que  $(i, j) \in C_t$ . Denotemos  $K = \{\epsilon, (i, j)\} \subseteq C_t$  como subgrupo. Tomando las clases laterales derechas,  $\{g_1 K, \dots, g_l K\}$ , tenemos que todo elemento de  $C_t$  se escribe de forma única como  $g_r x$  para  $x \in K$ . Así:

$$\begin{aligned} \Delta_t &= (C_t^-)[s] = \sum_{\sigma \in C_t} \text{sgn}(\sigma) \sigma[s] = \sum_{r=1}^l \sum_{x \in K} \text{sgn}(g_r x) (g_r x)[s] = \\ &= \sum_{r=1}^l \text{sgn}(g_r) g_r[s] - \text{sgn}(g_r) g_r(i, j)[s] = \sum_{r=1}^l \text{sgn}(g_r) g_r[s] - \text{sgn}(g_r) g_r[s] = 0 \end{aligned}$$

Donde hemos usado que  $\text{sgn}(g_r(i, j)) = -\text{sgn}(g_r)$  y que  $(i, j) \in R_s$ .

Esto contradice nuestra hipótesis, luego  $i, j$  aparecen en diferentes columnas de  $t$ . Notemos que el mismo proceso de la demostración del lema anterior permite concluir que  $\lambda \trianglerighteq \mu$ .



Si ahora  $\lambda = \mu$ , estamos en las condiciones del apartado 2 del lema anterior y sabemos que  $\sigma t = \tau s$ , para  $\sigma \in C_t$  y  $\tau \in R_s$ . Con ello,  $[s] = [\tau s] = [\sigma t] = \sigma[t]$  y:

$$\begin{aligned} C_t^- [s] &= \sum_{\mu \in C_t} \text{sgn}(\mu) \mu[s] = \sum_{\mu \in C_t} \text{sgn}(\mu) (\mu\sigma)[t] = \text{sgn}(\sigma) \sum_{\mu \in C_t} \text{sgn}(\mu\sigma) (\mu\sigma)[t] = \\ &= \text{sgn}(\sigma) \sum_{x \in C_t} \text{sgn}(x) x[t] = \text{sgn}(\sigma) \Delta_t \end{aligned}$$

Como queríamos. ■

**| Teorema 2.3.8 (Irreducibilidad).** *Sea  $\lambda$  una partición de  $n$ . Entonces el módulo de Specht,  $S^\lambda$ , es un  $\mathbb{S}_n$ -módulo irreducible.*

*Demostración.* Sea  $t$  un tableau inyectivo cualquiera. Claramente tenemos que  $(C_t^-) \mathcal{H}^\lambda \supseteq (C_t^-) S^\lambda \supseteq \mathbb{C}[\Delta_t]$ . Aquí estamos denotando  $(C_t^-) \mathcal{H}^\lambda = \{(C_t^-)x \mid x \in \mathcal{H}^\lambda\}$ , y de misma manera con  $S^\lambda$ .

Por el lema 2.3.7, tenemos que dado un tabloide  $[s]$  de forma  $\lambda$ , se da  $(C_t^-)[s] = \pm \Delta_t$ . Como los tabloides forman una base de  $\mathcal{H}^\lambda$  como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial, se da la igualdad  $(C_t^-) \mathcal{H}^\lambda = \mathbb{C}[\Delta_t] = (C_t^-) S^\lambda$ .

Ahora bien, supongamos que  $S^\lambda = V \oplus W$  para  $V, W$  dos  $\mathbb{S}_n$ -módulos no triviales. Entonces:

$$\mathbb{C}[\Delta_t] = (C_t^-) S^\lambda = (C_t^-) V \oplus (C_t^-) W$$

Luego, o bien  $\Delta_t \in (C_t^-) V \subseteq V$  o bien  $\Delta_t \in (C_t^-) W \subseteq W$ . Pero  $\Delta_t$  es un generador de  $S^\lambda$  como  $\mathbb{S}_n$ -módulo cíclico. Luego  $S^\lambda \subseteq V$  o  $W$ . Esto contradice que ninguno de ellos sea trivial. ■

**Lema 2.3.9.** Sean particiones  $\lambda, \mu \vdash n$ . Supongamos que exista un homomorfismo  $f : S^\lambda \rightarrow \mathcal{H}^\mu$  de  $\mathbb{S}_n$ -módulos no nulo. Entonces, debe darse  $\lambda \supseteq \mu$ . Más aún, si  $\lambda = \mu$ ,  $f$  es un múltiplo de la inclusión  $S^\lambda \hookrightarrow \mathcal{H}^\lambda$ .

*Demostración.* Como los  $\Delta_t$  son un sistema generador de  $S^\lambda$  como espacio vectorial, debe existir un tableau inyectivo  $t$ , tal que  $f(\Delta_t) \neq 0$ . Luego tenemos que:

$$0 \neq f(\Delta_t) = f((C_t^-)[t]) = (C_t^-) f([t])$$

Como  $f([t]) \in \mathcal{H}^\mu$ , es combinación lineal de tabloides de forma  $\mu$ , debe existir  $[s] \in \mathcal{H}^\mu$  tal que  $(C_t^-)[s] \neq 0$ . Por el lema 2.3.7, tenemos que  $\lambda \supseteq \mu$ .

Para la otra parte de la demostración, tenemos que existe  $c \in \mathbb{C}$  no nulo tal que:

$$f(\Delta_t) = (C_t^-)f([t]) = c\Delta_t$$

Esto es consecuencia del lema 2.3.7, pues podemos expresar  $f([t]) = \sum_{[s]} a_{[s]}[s]$ , y  $(C_t^-)[s] = 0, \pm\Delta_t$ ; luego dicho  $c$  existe. Es no nulo pues  $f(\Delta_t) \neq 0$  por hipótesis.

Además, para  $\sigma \in \mathbb{S}_n$ :

$$f(\Delta_{\sigma t}) = \sigma f(\Delta_t) = c\sigma\Delta_t = c\Delta_{\sigma t}$$

Como  $f$  es un múltiplo de la inclusión en un sistema generador de  $\mathcal{S}^\lambda$ , lo es también en todo  $\mathcal{S}^\lambda$ . ■

**| Teorema 2.3.10.** Sean  $\lambda, \mu$  dos particiones de  $n$ . Los módulos de Specht  $\mathcal{S}^\lambda$  y  $\mathcal{S}^\mu$  son isomorfos como  $\mathbb{S}_n$ -módulos si y sólo si  $\lambda = \mu$ . Además, el conjunto  $\{\mathcal{S}^\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ , es un conjunto completo de clases de isomorfía de  $\mathbb{S}_n$ -módulos irreducibles.

*Demostración.* Sea  $\phi : \mathcal{S}^\lambda \rightarrow \mathcal{S}^\mu$  un isomorfismo. Podemos ver  $\phi$  como un homomorfismo:  $\mathcal{S}^\lambda \rightarrow \mathcal{H}^\mu$ . Estamos entonces en las condiciones del lema 2.3.9, luego  $\lambda \succeq \mu$ . El mismo razonamiento con  $\phi^{-1}$ , concluye que  $\mu \succeq \lambda$ . Luego  $\lambda = \mu$ .

Hemos obtenido una representación irreducible por cada clase de conjugación de  $\mathbb{S}_n$ . Además, dos distintas entre sí no son isomorfas. En virtud del teorema 1.5.1, todo  $\mathbb{S}_n$ -módulo irreducible es isomorfo a uno de los módulos de Specht. Por tanto, hemos encontrado todas las clases de isomorfía de  $\mathbb{S}_n$ -módulos irreducibles. ■

## 2.4 La descomposición de $\mathcal{H}^\lambda$ a través del anillo de representaciones

Hemos encontrado los módulos de Specht como submódulos de los  $\mathcal{H}^\lambda$ . El objetivo de esta sección es obtener la multiplicidad de cada módulo de Specht dentro de  $\mathcal{H}^\lambda$ .

Podemos dar un resultado básico acerca de nuestro objetivo.

**Lema 2.4.1.** Si  $\lambda$  es una partición de  $n$ , en la descomposición de  $\mathcal{H}^\lambda$  en submódulos irreducibles:

$$\mathcal{H}^\lambda = \bigoplus_{\mu \vdash n} a_{\lambda, \mu} \mathcal{S}^\mu,$$

los coeficientes  $a_{\lambda, \mu}$  son nulos salvo que  $\mu \succeq \lambda$ . Además,  $a_{\lambda, \lambda} = 1$ .

**Demostración.** Supongamos que  $S^\mu$  aparece en la descomposición de  $\mathcal{H}^\lambda$ . Entonces la inclusión  $S^\mu \hookrightarrow \mathcal{H}^\lambda$  es un homomorfismo no nulo de  $\mathbb{S}_n$ -módulos. Por el lema 2.3.9, debe darse  $\mu \succeq \lambda$ .

Durante la demostración del teorema 2.3.8 habíamos obtenido la igualdad:  $(C_t^-)\mathcal{H}^\lambda = (C_t^-)S^\lambda = \mathbb{C}[\Delta_t]$ , para cualquier tableau inyectivo  $t$ .

El lema 2.3.7 permite concluir que una identidad similar para  $\mu \succ \lambda$ . Si  $t$  es un tableau inyectivo de forma  $\lambda$ , entonces  $0 \subseteq (C_t^-)S^\mu \subseteq (C_t^-)\mathcal{H}^\mu = 0$ . En caso contrario, entraríamos en contradicción con 2.3.7. Entonces, si:

$$\mathcal{H}^\lambda = \bigoplus_{\mu \vdash n} a_{\lambda, \mu} S^\mu, \quad \text{multiplicando por } C_t^- :$$

$$\mathbb{C}[\Delta_t] = a_{\lambda, \lambda} \mathbb{C}[\Delta_t]$$

Y por dimensiones,  $a_{\lambda, \lambda} = 1$ . ■

Para hallar el resto de los coeficientes  $a_{\lambda, \mu}$ , introducimos el anillo de representaciones de  $\mathbb{S}_n$ .

**Definición 2.4.2.** Definamos  $R_n$  como el conjunto de combinaciones formales de clases de isomorfía de representaciones irreducibles de  $\mathbb{S}_n$  sobre  $\mathbb{Z}$ . Como  $\{[S^\lambda]\}$  es un conjunto completo de representaciones irreducibles de  $\mathbb{S}_n$ , se da:

$$R_n = \left\{ \sum_{\lambda \vdash n} a_\lambda [S^\lambda] \mid a_\lambda \in \mathbb{Z} \right\} \quad R_n \text{ tiene estructura de grupo abeliano.}$$

Los  $R_n$  son grupos abelianos aditivos con la operación usual de suma y resta. Como toda representación de  $\mathbb{S}_n$  se descompone como una suma directa de los  $S^\lambda$ , si  $V = \bigoplus_\lambda a_\lambda S^\lambda$ , podemos definir un elemento en  $R_n$  de la forma natural:  $[V] = \sum_\lambda a_\lambda [S^\lambda]$ . Equivalentemente, si  $V, W$  son representaciones de  $\mathbb{S}_n$ , tenemos que  $[V \oplus W] = [V] + [W]$ .

**Definición 2.4.3.** Definimos el **anillo de representaciones**,  $R$ , como:

$$R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n, \quad \text{donde } R_0 = \mathbb{Z}$$

cuyo producto podemos definir para representaciones y extender por linealidad:

$$\circ : R_n \times R_k \rightarrow R_{n+k}$$

$$[V] \circ [W] = [(V \otimes W) \uparrow_{\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_k}^{\mathbb{S}_{n+k}}]$$

Aquí, estamos tomando  $V \otimes W$  como representación de  $\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_k$  de la manera natural:

$$(\sigma, \tau)(v \otimes w) = (\sigma v) \otimes (\tau w) \quad \text{para } \sigma \in \mathbb{S}_n, \tau \in \mathbb{S}_k$$

Este producto convierte a  $R$  en un anillo graduado conmutativo con unidad.

Dado que  $\{[S^\lambda]\}_{\lambda \vdash n}$  son una base de  $R$ , podemos definir un producto escalar sobre  $R$ :

$$\langle [S^\lambda], [S^\mu] \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = \mu \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Nuestro siguiente objetivo es relacionar este anillo graduado  $R$  con el anillo de funciones simétricas  $\Lambda$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}$ . Durante el resto de esta sección daremos por conocidos resultados básicos sobre las funciones simétricas, expuestos en el apéndice A.

**| Definición 2.4.4.** Para cada  $n$ , definimos los homomorfismos de grupos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n &: R_n \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \Lambda_n \otimes \mathbb{Q} \\ \mathcal{F}_n([V]) &= \sum_{\mu \vdash n} \chi(\mu) \frac{p_\mu}{z_\mu} \end{aligned}$$

donde  $V$  es una representación de  $\mathbb{S}_n$  y  $\chi(\mu)$  es el carácter de  $V$  evaluado en la clase de conjugación asociada a  $\mu$ . La definición de  $\mathcal{F}_n$  para el resto de elementos se toma por extensión lineal. La **característica de Frobenius** se define como la suma directa de estos homomorfismos:  $\mathcal{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n$ .

$$\mathcal{F} : R \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \Lambda \otimes \mathbb{Q}$$

Las definiciones de  $\Lambda_n$  y  $\Lambda$  vienen en A.1.2, A.1.3. Las funciones  $p_\mu$  son las series de potencias definidas en A.1.4. A continuación probaremos que la característica de Frobenius es un isomorfismo de anillos graduados.

**Lema 2.4.5.** Dadas  $V, W$ , representaciones de  $\mathbb{S}_n$  y  $\mathbb{S}_m$  se cumple:

$$\mathcal{F}([V] \circ [W]) = \mathcal{F}([V])\mathcal{F}([W])$$

Es decir,  $\mathcal{F}$  es un homomorfismo de anillos.

**| Teorema 2.4.6.** La característica de Frobenius es un isomorfismo isométrico entre anillos graduados. Más aún,  $\mathcal{F}([H^\lambda]) = h_\lambda$  y  $\mathcal{F}([S^\lambda]) = s_\lambda$  (Ver A.1.4, A.1.9).

*Demostración.* Por el lema anterior,  $\mathcal{F}$  es un homomorfismo de anillos, y es sencillo ver que, efectivamente, respeta grados.

Tomemos primero  $k \geq 1$ . Hemos mencionado ya que  $\mathcal{H}^{(k)}$  es isomorfo a la representación trivial de  $\mathbb{S}_k$ . Esto es, pues todo tableau  $t$  de forma  $(k)$  cumple  $R_t = \mathbb{S}_k$  y por ello,  $\mathcal{H}^{(k)} = \mathbb{C}[t]$  para cualquier  $t$  de forma  $(k)$ . Además,  $\mathbb{S}_k$  actúa de forma trivial sobre  $[t]$ , luego  $\mathcal{H}^{(k)} \cong \mathbb{1}$ .

Como  $\mathcal{H}^{(k)} \cong \mathbb{1}$ , se da que  $\chi_{\mathcal{H}^{(k)}}(\mu) = 1$  para toda  $\mu \in \mathbb{S}_n$ . Luego:

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}^{(k)}) = \sum_{\mu \vdash k} 1 \frac{p_\mu}{z_\mu} = h_k, \quad \text{por la proposición A.1.8}$$

Sea ahora  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$ . Como el producto tensorial de representaciones triviales cumple:

$$\mathbb{1}_{\mathbb{S}_{\lambda_1}} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{S}_{\lambda_k}} = \mathbb{1}_{\mathbb{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathbb{S}_{\lambda_k}}$$

Obtenemos:

$$[\mathcal{H}^\lambda] = [\mathcal{H}^{\lambda_1}] \circ \dots \circ [\mathcal{H}^{\lambda_k}]$$

gracias a la proposición 2.2.3. Ahora simplemente aplicamos el lema 2.4.5 y obtenemos que:

$$\mathcal{F}([\mathcal{H}^\lambda]) = h_{\lambda_1} \cdot \dots \cdot h_{\lambda_k} = h_\lambda \quad (\text{ver definición A.1.4})$$

Del lema 2.4.1, sabemos que  $\mathcal{H}^\lambda = \mathcal{S}^\lambda \oplus_{\mu \triangleright \lambda} a_{\lambda, \mu} \mathcal{S}^\mu$ , luego:

$$[\mathcal{S}^\lambda] = [\mathcal{H}^\lambda] - \sum_{\mu \triangleright \lambda} a_{\lambda, \mu} [\mathcal{S}^\mu]$$

Luego, por recursión, existen coeficientes  $c_{\lambda, \mu}$  tales que  $[\mathcal{S}^\lambda] = [\mathcal{H}^\lambda] + \sum_{\mu \triangleright \lambda} c_{\lambda, \mu} [\mathcal{H}^\mu]$ . Esto demuestra que los  $[\mathcal{H}^\lambda]$  son también una base de  $R \otimes \mathbb{Q}$ . Entonces la imagen por  $\mathcal{F}$  de una base de  $R \otimes \mathbb{Q}$  es una base de  $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$ . Luego  $\mathcal{F}$  es isomorfismo.

Para demostrar la isometría, sean  $V = \bigoplus_\lambda a_\lambda \mathcal{S}^\lambda$  y  $W = \bigoplus_\mu b_\mu \mathcal{S}^\mu$ . Tenemos:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}([V]), \mathcal{F}([W]) \rangle &= \left\langle \sum_{\lambda \vdash n} \chi_V(\lambda) \frac{p_\lambda}{z_\lambda}, \sum_{\mu \vdash n} \chi_W(\mu) \frac{p_\mu}{z_\mu} \right\rangle = \\ &= \sum_{\lambda, \mu \vdash n} \chi_V(\lambda) \chi_W(\mu) \frac{1}{z_\lambda z_\mu} \langle p_\lambda, p_\mu \rangle = \sum_{\lambda \vdash n} \chi_V(\lambda) \chi_W(\lambda) \frac{1}{z_\lambda} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \chi_V(\sigma) \chi_W(\sigma^{-1}) = \\ &= \langle \chi_V, \chi_W \rangle = \left\langle \sum_\lambda a_\lambda \chi_{\mathcal{S}^\lambda}, \sum_\mu b_\mu \chi_{\mathcal{S}^\mu} \right\rangle = \sum_{\lambda, \mu \vdash n} a_\lambda b_\lambda = \left\langle \sum_\lambda a_\lambda [\mathcal{S}^\lambda], \sum_\mu b_\mu [\mathcal{S}^\mu] \right\rangle = \\ &= \langle [V], [W] \rangle \end{aligned}$$

Donde hemos utilizado las definiciones de los productos escalares pertinentes, la proposición A.1.12 y el hecho de que los caracteres de representaciones irreducibles son ortogonales.

Por último, veamos que  $\mathcal{F}(S^\lambda) = s_\lambda$  (ver definición A.1.9). Volvamos a la expresión:

$$[S^\lambda] = [H^\lambda] + \sum_{\mu \triangleright \lambda} c_{\lambda, \mu} [H^\mu]$$

Tomando característica de Frobenius:

$$\mathcal{F}([S^\lambda]) = h_\lambda + \sum_{\mu \triangleright \lambda} c_{\lambda, \mu} h_\mu$$

y, por la proposición A.1.11, sustituyendo los  $h_\mu$ , existen coeficientes  $d_{\lambda, \mu}$  enteros tales que:

$$\mathcal{F}([S^\lambda]) = s_\lambda + \sum_{\mu \triangleright \lambda} d_{\lambda, \mu} s_\mu$$

Usando que  $\mathcal{F}$  es una isometría y que la proposición A.1.12 asegura que las  $s_\lambda$  son ortogonales:

$$1 = \langle S^\lambda, S^\lambda \rangle = \langle \mathcal{F}(S^\lambda), \mathcal{F}(S^\lambda) \rangle = 1 + \sum_{\mu \triangleright \lambda} d_{\lambda, \mu}^2$$

Como los  $d_{\lambda, \mu}$  son enteros, solo puede darse  $d_{\lambda, \mu} = 0$ . Luego  $\mathcal{F}([S^\lambda]) = s_\lambda$ . ■

**Corolario 2.4.7.** Para cada partición  $\lambda$ , la descomposición de  $\mathcal{H}^\lambda$  en representaciones irreducibles, es:

$$\mathcal{H}^\lambda = \bigoplus_{\mu \geq \lambda} K_{\lambda, \mu} S^\mu$$

donde los  $K_{\lambda, \mu}$  son los coeficientes de Kostka (A.1.10).

**Demostración.** Basta tomar  $\mathcal{F}$  en la descomposición  $\mathcal{H}^\lambda = \bigoplus_{\mu \geq \lambda} a_{\lambda, \mu} S^\mu$  para obtener  $h_\lambda = \sum_{\mu \geq \lambda} a_{\lambda, \mu} s_\mu$ . Por la proposición A.1.11, debemos tener  $a_{\lambda, \mu} = K_{\lambda, \mu}$ . ■

**Corolario 2.4.8.** Los caracteres de  $\mathcal{H}^\lambda$  y  $S^\lambda$  cumplen:

$$h_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} \frac{\chi_{\mathcal{H}^\lambda}(\mu)}{z_\mu} p_\mu \quad s_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} \frac{\chi_{S^\lambda}(\mu)}{z_\mu} p_\mu$$

Es decir, son los coeficientes de las expresiones de  $h_\lambda$  y  $s_\lambda$  en función de los  $\frac{p_\mu}{z_\mu}$ .

**Demostración.** Basta fijarse en  $\mathcal{F}([H^\lambda]) = h_\lambda$  y  $\mathcal{F}([S^\lambda]) = s_\lambda$ . ■

## 2.5 La base de $\mathcal{S}^\lambda$

Por construcción, una base de  $\mathcal{H}^\lambda$  es el conjunto de distintos tabloides de forma  $\lambda$ ,  $\text{Tab}(\lambda)$ . Hallar una base de  $\mathcal{S}^\lambda$  permitiría trabajar de forma explícita con sus elementos, además, sabiendo su dimensión, obtendremos las multiplicidades en la descomposición de  $\mathbb{C}\mathbb{S}_n$  en  $\mathbb{S}_n$ -submódulos irreducibles.

Utilizaremos un orden total sobre tableaux inyectivos introducido por Fulton [3].

**Definición 2.5.1.** Dado un tableau inyectivo,  $t$ , definimos su **palabra por columnas**,  $p_t$ , como la palabra obtenida a partir de la lectura de sus entradas, por columnas, de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo.

Por ejemplo, las palabras por columna de los tableau siguientes serían:

$$t = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline & 3 \\ \hline \end{array} \Rightarrow p_t = (1, 2, 4, 5, 3)$$

$$s = \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 3 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline & 2 \\ \hline \end{array} \Rightarrow p_s = (5, 1, 3, 4, 2)$$

**Lema 2.5.2.** Sea  $\lambda$  una partición de  $n$ . Definimos un orden total sobre los tableaux inyectivos:  $t > s$  si la entrada más grande que está en diferentes casillas en  $t$  y  $s$  aparece antes en  $p_t$  que en  $p_s$ .

Entonces, si  $t$  es un tableau estándar, se cumple:

1.  $\sigma t \geq t$  para  $\sigma \in R_t$ .
2.  $t \geq \tau t$  para  $\tau \in C_t$ .

**Demostración.** Es sencillo ver que efectivamente se trata de un orden total sobre  $\text{Iny}(\lambda)$ . Para ver que verifica las dos propiedades enunciadas, basta darse cuenta de que, si  $\sigma \in R_t$ , la mayor entrada que se mueva por  $\sigma$ , se moverá hacia la izquierda, ya que a su derecha solo hay entradas mayores. Luego aparecerá antes en la palabra por columnas. Análogamente, la mayor entrada que se mueva por  $\tau \in C_t$ , lo hará hacia abajo, pues encima solo hay entradas mayores. Aparecerá, entonces, después en la palabra por columnas. ■

El siguiente corolario nos será de utilidad en esta sección y en la siguiente.

**Corolario 2.5.3.** Sea  $T$  un conjunto de tableaux estándar de forma  $\lambda$ . Tomemos  $t = \min\{s \in T\}$  utilizando el orden del lema 2.5.2 sobre  $\text{Iny}(\lambda)$ .

Entonces en la combinación lineal  $(C_t^-)(R_t^+)t$  no aparece ningún otro elemento de  $T$  que no sea  $t$ .

**Demostración.** Supongamos que apareciera otro  $s \in T$ . Entonces  $s = \sigma\tau t$  para  $\tau \in R_t$  y  $\sigma \in C_t$ . Por propiedades de los subgrupos de Young, se cumple  $R_s = R_{\sigma t} = \sigma R_t \sigma^{-1}$ . Además:

$$\sigma^{-1}s = \tau t \quad \Rightarrow \quad (\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1})s = \sigma t$$

Luego tenemos que  $\beta = \sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} \in R_s$ . Pero dado el lema 2.5.2, y, como  $s > t$ , tendríamos  $\beta s \geq s > t \geq \sigma t$ . Luego  $\beta s \neq \sigma t$ . Luego ningún otro tableau estándar mayor que  $t$  puede aparecer en  $(C_t^-)(R_t^+)t$ . ■

Deduciremos una base de  $S^\lambda$  a partir de este corolario y de la combinatoria de tableaux.

**| Teorema 2.5.4.** *Para cada partición  $\lambda$ , el conjunto  $\{\Delta_t \mid t \text{ es un tableau estándar}\}$  es una base de  $S^\lambda$ .*

**Demostración.** Primero veamos que es un conjunto linealmente independiente. Supongamos que tenemos una combinación lineal:

$$\sum_t a_t \Delta_t = 0$$

Tomando  $s = \min\{t \mid t \text{ es un tableau estándar}\}$ , por el corolario anterior, el único sumando que contiene a  $s$  es  $\Delta_s$ . Vista la ecuación en  $\mathcal{H}^\lambda$ , en el lado derecho el coeficiente de  $s$  es 0, luego  $a_s = 0$ . Podemos entonces reiterar nuestro argumento, eliminando a  $s$  de la lista de tableaux a comprobar, concluyendo con que  $a_t = 0$  para todo tableau estándar  $t$ .

Hemos demostrado que  $\{\Delta_t \mid t \text{ es estándar de forma } \lambda\}$  son linealmente independientes en  $S^\lambda$ . Luego  $\dim S^\lambda \geq f^\lambda$ , donde  $f^\lambda$  es el número de tableaux estándar de forma  $\lambda$ . Tomando dimensiones en la descomposición de  $\mathbb{S}_n$  en submódulos irreducibles obtenemos:

$$n! = |\mathbb{S}_n| = \sum_{\lambda \vdash n} (\dim S^\lambda)^2 \geq \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2$$

Llegados a este punto, hacemos de nuevo referencia al apéndice. La correspondencia RSK (ver A.3.6) demuestra que  $\sum_\lambda (f^\lambda)^2 = n!$ , con lo que  $\dim S^\lambda = f^\lambda$  para todo  $\lambda$  y  $\{\Delta_t \mid t \text{ estándar}\}$  son una base de  $S^\lambda$ . ■

**Corolario 2.5.5.** *Tenemos que  $\mathcal{H}^{(1^n)} \cong \mathbb{C}\mathbb{S}_n$ .*

**Demostración.** Denotemos  $\mu = (1^n)$ . Por definición  $K_{\lambda,\mu}$  (ver A.1.10) es el número de tableaux semi-estándar sin repeticiones. Todo tableau de esta forma es un tableau



estándar, luego  $K_{\lambda,\mu} = f^\lambda = \dim S^\lambda$ . Con ello, según el teorema 1.5.1 tenemos:

$$\mathcal{H}^\mu = \bigoplus_{\lambda} (\dim S^\lambda) S^\lambda \cong \mathbb{C}\mathbb{S}_n$$

■

**Ejemplo 2.5.6.** Consideremos  $\lambda = (1^{(n)})$ . Para  $n = 3$ , el único tableau estándar  $t$  de forma  $\lambda$ , nos proporciona una base de  $S^\lambda$ :

$$t = \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \Delta_t(x) = x_3^2 x_2 - x_3^2 x_1 - x_2^2 x_3 - x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1$$

Para estos  $\lambda$ , como  $C_t = \mathbb{S}_n$  para todo tableau  $t \text{ Iny}(\lambda)$ , tenemos que cada  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  actúa mediante la multiplicación por  $\text{sgn}(\sigma)$ , es decir,  $S^\lambda$  es la representación alternada (ejemplo 1.2.4).

Hemos desarrollado bases explícitas para la representación trivial  $S^{(n)} = \mathcal{H}^{(n)}$  y para la representación alternada  $S^{(1^{(n)})}$ , dentro de la representación regular  $\mathcal{H}^{(1^{(n)})}$ . La representación  $S^{(n)}$  aparece en el ejemplo 2.2.2 para  $\mathcal{H}^{(n-1,1)}$ , aunque su construcción se generaliza a cualquier  $\mathcal{H}^\lambda$ . Sin embargo, para el resto de módulos de Specht, no es directo encontrar las copias de  $S^\lambda$  dentro de  $\mathcal{H}^{(1^{(n)})}$ . Dedicaremos la sección siguiente a ello.

## 2.6 Homomorfismos explícitos hacia $\mathcal{H}^{(1^{(n)})}$

Esta sección está dedicada a construir de forma explícita los homomorfismos de  $\mathbb{S}_n$ -módulos,  $S^\lambda \hookrightarrow \mathcal{H}^{(1^{(n)})}$  utilizando la base de polinomios  $\Delta_t(x)$  de Bergeron [1]. Hemos desarrollado nuestras construcciones de forma independiente, salvo por una referencia a Sagan [7] en la sección 2.7 y el orden total del lema 2.5.2. A lo largo de la sección, denotemos  $\mu = (1^{(n)})$ .

Antes de comenzar, necesitaremos las definiciones del apéndice que aparecen en A.1.9:

**Definición 2.6.1.** Dada una  $r$ -tupla de enteros no negativos,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ , los **determinantes de Vandermonde generalizados**,  $a_\lambda$ , la **partición escalera indexada** por  $n$ ,  $\delta_n$  y el **polinomio de Schur indexado** por  $\lambda$ :

$$a_\lambda(x_1, \dots, x_r) = \det \begin{pmatrix} x_1^{\lambda_1} & x_2^{\lambda_1} & \dots & x_r^{\lambda_1} \\ x_1^{\lambda_2} & x_2^{\lambda_2} & \dots & x_r^{\lambda_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{\lambda_r} & x_2^{\lambda_r} & \dots & x_r^{\lambda_r} \end{pmatrix} \quad \delta_n = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$$

$$s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta_n}}{a_{\delta_n}}$$

**Lema 2.6.2.** Sean  $\{x_1, \dots, x_r\}$  un conjunto de  $r$  variables y tengamos un monomio  $f = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_r^{i_r}$  con todos los exponentes distintos. Entonces se cumple:

$$(\mathbb{S}_r^-)f = a_{(i_1, \dots, i_r)}(x_1, \dots, x_r)$$

En concreto, para  $s$  un tableau estándar con  $N$  columnas, si  $C_k = (i_1, \dots, i_r)$  son los elementos de la  $k$ -ésima columna de  $s$ , ordenados de forma decreciente, entonces:

$$\Delta_s(x) = \prod_{k=1}^N a_{\delta_r}(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$$

**Demostración.** La demostración es sencilla a partir de la definición del determinante a través de permutaciones. Para  $\Delta_s(x)$ , notemos que la factorización por columnas se tiene, a partir del hecho de que  $C_s$  es el producto de grupos simétricos de los elementos de cada columna. ■

**Definición 2.6.3.** Sean  $t, s$  dos tableaux inyectivos de forma  $\lambda$ . Construimos un tableau inyectivo de forma  $\mu$ ,  $s'$ , que llamaremos el **elevado de  $s$**  según  $t$ , de la siguiente manera: para cada  $1 \leq i \leq n$ , fijémonos en la casilla en la que está  $i$  dentro de  $t$ ; entonces, ponemos el elemento que está en esa casilla dentro de  $s$  en la  $i$ -ésima fila de  $s'$ .

Llamaremos al proceso de construir  $s'$ , **elevantar** a  $s$ , y nos referiremos a  $t$  como la **guía** para la elevación.

Ejemplo. Si tenemos como guía a  $t$  y queremos subir  $s$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \\ s = \begin{array}{|c|c|} \hline x & w \\ \hline y & z \\ \hline \end{array} \end{array} \right. \Rightarrow s' = \begin{array}{|c|} \hline w \\ \hline z \\ \hline x \\ \hline y \\ \hline \end{array}$$

Hemos utilizado variables en vez de números para no dar lugar a confusión en la construcción del tableau elevado.

Veamos que la operación de elevar un tableau es compatible con la acción de  $\mathbb{S}_n$ .

**Lema 2.6.4.** Dada  $t$  una guía, la aplicación:

$$\begin{aligned} \theta_t : \text{Iny}(\lambda) &\rightarrow \text{Iny}(\mu) \\ \theta_t(s) &= s' \qquad \qquad \qquad (\text{elevantar } s \text{ según } t) \end{aligned}$$

respeto la acción de  $\mathbb{S}_n$  sobre los tableaux. Esto es,  $\theta_t(\sigma s) = \sigma \theta_t(s)$  para todo  $\sigma \in \mathbb{S}_n$ .

**Demostración.** Como todo elemento de  $\mathbb{S}_n$  se puede descomponer como producto de elementos de la forma  $(i, j)$ , lo probaremos para éstos.

Queremos ver que  $(i, j)(s') = ((i, j)s)'$ . Sea  $t(i)$  el elemento de  $t$  en la misma posición que  $i$  en  $s$ . Tenemos que  $s'$  tiene a  $i$  en la fila  $t(i)$  y  $j$  en la fila  $t(j)$ . Luego  $(i, j)(s')$  tiene a  $j$  en la fila  $t(i)$  y a  $i$  en la fila  $t(j)$ . Por otro lado,  $((i, j)s)'$  deja al elemento  $i$  en la fila  $t(j)$  y al  $j$  en la fila  $t(i)$ . El resto de elementos no cambian por  $(i, j)$ , luego  $(i, j)(s') = ((i, j)s)'$ . ■

Esta es nuestra construcción básica para establecer homomorfismos entre  $S^\lambda$  y  $\mathcal{H}^\mu$ . Comenzaremos primero por estudiar la relación entre  $\Delta_s(x)$  y  $(C_s^-)(x^{s'})$ .

**Definición 2.6.5.** Sea  $t$  una guía de forma  $\lambda$ . Denotemos por  $C_k$  a la  $k$ -ésima columna del diagrama de Young de  $\lambda$ . Si  $C_k$  tiene altura  $r$ , definimos los elementos:

- La **altura de base** de la columna  $k$ ,  $b_k$ , como el menor elemento de  $t$  en  $C_k$ .
- Sean  $(n_1, \dots, n_r)$  los elementos de  $t$  en  $C_k$ , ordenados de forma decreciente. Notemos que bajo esta ordenación,  $b_k = n_r$ . Definimos el **espaciado en la columna**  $k$  como la  $n$ -tupla  $e_k = (n_1 - n_r, n_2 - n_r, \dots, n_{r-1} - n_r, 0) - \delta_r$ .
- Definimos la **colocación en la columna**  $k$  como  $d_k = e_k + (b_k - 1, \dots, b_k - 1)$ . Visto como diagramas de Young, la colocación se consigue a partir del espaciado, añadiendo  $b_k - 1$  columnas de altura  $|C_k|$  al comienzo del diagrama.
- Sean  $(m_1, \dots, m_r)$  los elementos de  $t$  en  $C_k$ , ordenados según aparecen en la columna, desde abajo hacia arriba. Consideremos la permutación:

$$\pi_k = \begin{pmatrix} n_r & n_{r-1} & \dots & n_1 \\ m_1 & m_2 & \dots & m_r \end{pmatrix}$$

Definimos el **signo de reordenación** de  $t$  como  $u_k = \text{sgn}(\pi_k)$ .

Por ejemplo, sea  $t = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array}$  nuestra guía.

- Los menores elementos de  $t$  en cada columna nos dan  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 2$ .
- Ya ordenados, los elementos de la primera columna de  $t$  son  $(3, 1)$  y los de la segunda,  $(4, 2)$ . Tenemos entonces:

$$e_1 = e_2 = (2, 0) - (1, 0) = (1, 0)$$

- La colocación en cada columna es:

$$d_1 = e_1 = (1, 0), \quad d_2 = e_2 + (1, 1) = (2, 1)$$

- Los signos de reordenación por columnas se calculan mediante:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = -1$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = 1$$

Todos estos datos pueden extraerse a partir de la comparación un tableau y su elevado por  $t$ . Si, por ejemplo, elevamos  $p = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  según  $t$ , obtenemos  $p' = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ .

Las alturas de base  $b_k$ , indican la menor fila donde hay un elemento de la columna  $C_k$  de  $p$ . Notemos que la menor fila de  $p'$  donde aparecen elementos de la columna  $k$ -ésima de  $p$  es  $b_k - 1$ .

El signo de reordenación,  $u_k$  hace referencia al cambio de orden que han sufrido los elementos de cada columna en el proceso de elevación. El signo  $u_k$ , está asociado a un elemento de  $C_p$ , y puede calcularse simplemente viendo la reordenación de los elementos de  $C_k$  en  $p_k$ .

La construcción de los espaciados,  $e_k$ , puede resumirse en lo siguiente: si  $y$  es el elemento que queda a menor altura en  $p'$  de entre los elementos de  $C_k$  en  $p$ , por cada otro  $x \neq y$  elemento de esa columna de  $p$ ; se añade a  $e_k$  el número de elementos que quedan entre  $x$  e  $y$  en  $p'$ ; y que no sean elementos de  $C_k$  en  $p$ .

El hecho de completar  $e_k$  con un cero puede entenderse como resultado de realizar la comparación anterior con  $x = y$ . Normalmente consideraremos a  $e_k$  como una partición y por ello, ignoraremos el cero. Sin embargo, sí que es conveniente mantenerlo a la hora de construir la colocación,  $d_k$ .

**| Teorema 2.6.6.** *Sea  $p$  un tableau inyectivo y  $t$  una guía para elevar  $p$ . Sea  $p' = \theta_t(p)$ . Recordemos que  $\lambda_1$ , el tamaño de la primera fila de  $\lambda$ , es el número de columnas de  $\lambda$ . Si  $p_k$  denota el conjunto de elementos de  $p$  en la columna  $C_k$ , se cumple:*

$$(C_p^-)(x^{p'}) = \Delta_p(x) \cdot \prod_{k=1}^{\lambda_1} (u_k)(s_{e_k}[p_k])(s_{(1^{(|C_k|)})}[p_k])^{b_k-1}$$

O, equivalentemente:

$$(C_p^-)(x^{p'}) = \Delta_p(x) \cdot \prod_{k=1}^{\lambda_1} (u_k)(s_{d_k}[p_k])$$

Aquí,  $s_\lambda[X]$  denota la sustitución *pletística*, es decir, evaluar  $s_\lambda$  en las variables cuyos subíndices son los elementos de  $X$ .

**Demostración.** Sea  $r = |C_k| = |p_k|$ . Por la definición 2.6.1, sabemos que  $s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta_n}}{a_{\delta_n}}$ , para todo  $\lambda \vdash n$ . De forma similar al lema 2.6.2, solo hace falta probar que, al multiplicar, los exponentes de las variables de cada columna, tienen el exponente adecuado. Nos centraremos en el factor de  $\Delta_p(x)$  asociado a  $C_k$ :  $a_{\delta_r}(x)$ .

Como  $a_{\delta_r}(x) \cdot s_{e_k}(x) = a_{\delta_r}(x) \frac{a_{e_k+\delta_r}(x)}{a_{\delta_r}(x)} = a_{e_k+\delta_r}(x)$ , el lema 2.6.2, nos indica que este producto es el resultante de antisimetrizar  $x$  con exponentes  $e_k + \delta_r = (n_1 - n_r, \dots, n_{r-1} - n_r, 0)$ . Notemos que estos exponentes indican la diferencia de altura en  $p'$ , entre los elementos de  $p_k$  y el elemento de  $p_k$  que está a menor altura en  $p'$ .

Si consideramos que  $p_k = \{1, \dots, r\}$ , multiplicar por  $(s_{(1^r)}(x))^{b_k-1} = x_1^{b_1-1} \dots x_r^{b_1-1}$  tiene el siguiente efecto sobre el determinante de Vandermonde generalizado:  $a_{e_k+\delta_r}(x) \cdot (x_1^{b_1-1} \dots x_r^{b_1-1}) = a_{e_k+\delta_r+(b_k-1, \dots, b_k-1)}(x)$ , pues basta introducir  $x_i^{b_k-1}$  en la  $i$ -ésima columna del determinante. La propia definición de  $b_k$  indica que ahora el elemento de  $p_k$  que estaba en la primera fila en  $p$ , tiene ahora exponente  $b_k - 1$ , justo el exponente que tendrá el elemento de  $p_k$  que quede a menor altura en  $p'$ . Como la diferencia entre los exponentes de  $p_k$  en  $p'$  respecto del elemento con menor exponente era la adecuada, y ahora el menor exponente de  $p_k$  en  $p'$  es correcto, los elementos de  $p_k$  están en alturas adecuadas.

Hemos visto que el resultado de multiplicar  $a_{\delta_r}(x)s_{e_k}(x)(s_{(1^r)})^{b_k-1}(x)$  es el antisimetrizado de  $x$  con los exponentes adecuados. Sin embargo, esta multiplicación aún mantiene el orden que tenían los elementos de  $p_k$  en  $p$ . Como permutar el orden de las variables resulta en un cambio de signo de  $a_\lambda$ , según el signo de la permutación, basta multiplicar por  $u_k$  para obtener el signo adecuado en el nuevo orden de los elementos en  $p'$ . ■

Podemos ejemplificar esta demostración, ilustrando qué papel tiene multiplicar por cada elemento a la hora de elevar tableaux:

$$t = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array}, \quad p = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{s_{e_1} s_{e_2}} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{(s_{1(2)})^0 (s_{1(2)})^1} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{(-1)} \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} = p'$$

Puede parecer que hayamos terminado. Sin embargo, esto no es del todo cierto. El lema 2.6.4 prueba que elevar tableau respeta la acción de  $\mathbb{S}_n$  sobre éstos. Pero esto no es cierto sobre sus pesos.

Esto se puede ver a simple vista, pues si  $\lambda \neq \mu$ , se tiene que  $x^p$  es invariante respecto de  $R_p \neq \{\epsilon\}$ ; mientras que  $x^{p'}$  no es invariante respecto a ninguna permutación que no sea la identidad, pues  $R_{p'} = \{\epsilon\}$ , dado que  $\mu = (1^{(n)})$ .

De forma equivalente, podemos decir que elevar un peso,  $x^p \mapsto x^{p'}$  no está bien definido, pues distintos  $p$  con mismo peso se elevan a distintos  $p'$  con pesos diferentes. Sin embargo, este problema se soluciona al recuperar la noción de tabloides.

**| Teorema 2.6.7.** *Para cada  $t$  guía de forma  $\lambda$ , tenemos los siguientes homomorfismos de  $\mathbb{S}_n$ -módulos:*

$$\begin{aligned} \psi_t : \mathcal{H}^\lambda &\rightarrow \mathcal{H}^\mu \\ (R_s^+)s &\mapsto (R_s^+)\theta_t(s) \end{aligned}$$

Donde  $\theta_t$  es como en el lema 2.6.4. Tomemos  $\tilde{\psi}_t$  como la restricción de  $\psi_t$  a  $S^\lambda$ :

$$\tilde{\psi}_t : S^\lambda \rightarrow \mathcal{H}^\mu$$

Entonces,  $\{\tilde{\psi}_t \mid t \text{ es un tableau estándar}\}$  es una base de  $\text{Hom}_{\mathbb{S}_n}(S^\lambda, \mathcal{H}^\mu)$ .

**Demostración.** Como sabemos que  $\theta_t$  respeta la acción de  $\mathbb{S}_n$ , cada  $\psi_t$  es un homomorfismo de  $\mathbb{S}_n$ -módulos. Notemos que, en  $\mathcal{H}^\mu$ , un tableau y su tabloide coinciden, luego la aplicación está bien definida.

Como  $\mathcal{H}^\mu \cong \mathbb{C}\mathbb{S}_n$  es la representación regular de  $\mathbb{S}_n$ , tenemos  $\mathcal{H}^\mu = \bigoplus_\lambda f^\lambda S^\lambda$ . Una sencilla aplicación del lema de Schur (teorema 1.3.5) demuestra que  $\dim \text{Hom}_{\mathbb{S}_n}(S^\lambda, \mathcal{H}^\mu) = f^\lambda$ . Basta probar entonces que  $\{\tilde{\psi}_t\}$  para  $t$  estándar son linealmente independientes.

Definamos por  $T$  al único tableau estándar de forma  $\mu = (1^{(n)})$ ; es decir, que sus entradas son, desde arriba hacia abajo,  $(n, \dots, 1)$ , y en ese orden. Notemos que, dada  $t$  una guía, el único tableau cuyo elevado es  $T$  es el propio  $t$ . Nos apoyaremos en este hecho para obtener la independencia lineal.

Sean  $\{t_i \in \text{Iny}(\lambda)\}$  los tableaux estándar y tengamos una combinación lineal:

$$a_{t_1} \tilde{\psi}_{t_1} + \dots + a_{t_r} \tilde{\psi}_{t_r} = 0 \quad \text{en } \text{Hom}_{\mathbb{S}_n}(S^\lambda, \mathcal{H}^\mu) \quad (*)$$

Tomemos  $t$  el tableau estándar tal que  $t = \min\{s \text{ tableaux estándar de forma } \lambda\}$ . Por el corolario 2.5.3, tenemos que  $t$  es el único tableau estándar que aparece en  $\Delta_t = (C_t^-)(R_t^+)t$ . Luego al evaluar  $(*)$  en  $\Delta_t$ , obtenemos:

$$a_{t_1} \tilde{\psi}_{t_1}(\Delta_t) + \dots + a_t \tilde{\psi}_t(\Delta_t) + \dots + a_{t_r} \tilde{\psi}_{t_r}(\Delta_t) = 0$$

Y como hemos visto,  $T$  solo aparece en el factor  $a_t \tilde{\psi}_t(\Delta_t)$ , ya que en  $\Delta_t = (C_t^-)(R_t^+)t$  no puede aparecer ningún otro tableau estándar que no sea  $t$ . El coeficiente de  $T$  es nulo en el lado derecho, luego  $a_t = 0$ .

Podemos repetir el argumento, eliminando  $t$  y obteniendo el menor tableau estándar de los que quedan para obtener que  $a_{t_i} = 0$  para todo  $i$ . ■

**Observación 2.6.8.** El teorema 2.6.7 nos dice cómo debemos subir los tabloides, a partir de los cuales sabemos obtener los pesos y, por el teorema 2.6.6, también sabemos los factores por los que hay que multiplicar para obtener los nuevos pesos. Esto es casi cierto.

Una vez calculado  $\tilde{\psi}([p])$ , basta multiplicar por  $C_p^-$  para obtener  $\tilde{\psi}(\Delta_p)$ . Pero el teorema 2.6.6 solo relaciona  $(C_p^-)x^{p'}$  con  $\Delta_p(x)$  cuando  $p'$  es el elevado de  $p$  según una guía  $t$ . Como al elevar  $[p]$ , hay otros sumandos que no son  $p$ , que estamos elevando según  $t$ , no podemos aplicarlo directamente.

Por suerte este problema tiene fácil solución.

**Definición 2.6.9.** Supongamos que hemos numerado las posiciones del diagrama de Young de  $\lambda$  con los elementos  $\{1, \dots, n\}$ . Es decir, una **numeración** es simplemente un tableau inyectivo.

Sea  $\mu$  una numeración,  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  y  $t \in \text{Iny}(\lambda)$ . Sea  $t(i)$  el elemento de  $t$  que está en la misma posición que  $i$  dentro de  $\mu$ .

Definimos entonces la acción derecha de  $\mathbb{S}_n$  sobre  $\text{Iny}(\lambda)$  como la permutación de posiciones sobre los tableaux inyectivos:  $t \cdot \sigma$  permuta sus elementos como lo hace  $\sigma$  actuando por la izquierda sobre  $\mu$ . Más concretamente:

$$t \cdot \sigma = r, \quad \text{donde } r \text{ es el tableau con } r(i) = t(\sigma^{-1}(i))$$

Por ejemplo, si  $\mu = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$ , tenemos que:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline z & w \\ \hline x & y \\ \hline \end{array} (123) = \begin{array}{|c|c|} \hline y & w \\ \hline z & x \\ \hline \end{array}$$

Es claro que para cualquier numeración del diagrama de Young de  $\lambda$ , la acción de  $\mathbb{S}_n$  por permutación de posiciones se puede entender como permutación de entradas y viceversa. No entraremos en detalle, pero esta relación soluciona nuestro problema.

**Lema 2.6.10.** Sea  $\psi_t$  como en el teorema 2.6.7. Entonces:

$$\begin{aligned} \psi_t : \mathcal{H}^\lambda &\rightarrow \mathcal{H}^\mu \\ (R_s^+)s &\mapsto \sum_{\sigma \in R_t} \theta_{\sigma t}(s) \end{aligned}$$

**Demostración.** Si  $\sigma \in R_s$ , sea  $\tau \in \mathbb{S}_n$  con  $\sigma s = s\tau$ . Es fácil comprobar por la definición que elevar  $s\tau$  según  $t$  es lo mismo que elevar  $s$  según  $t\tau$ . Como  $\tau$  permuta filas de  $s$ , al actuar mediante permutación de posiciones, también permuta las de  $t$ . Luego existe  $\alpha \in R_t$  con  $t\tau = \alpha t$  y hemos terminado. ■

Ahora sí, con esta nueva forma de calcular  $\psi_t$ , tenemos expresiones explícitas de los homomorfismos  $S^\lambda \rightarrow \mathcal{H}^\mu$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_t(\Delta_p(x)) &= \psi_t(C_p^- x^p) = (C_p^-) \psi_t(x^p) \cong (C_p^-) \psi_t(R_p^+ p) = \\ &= (C_p^-) \sum_{\sigma \in R_t} \theta_{\sigma t}(p) \cong (C_p^-) \sum_{\sigma \in R_t} x^{\theta_{\sigma t}(p)} = \sum_{\sigma \in R_t} (C_p^-) x^{\theta_{\sigma t}(p)} \end{aligned}$$

Concluyendo con el teorema 2.6.6 y denotando  $b'_k, u'_k, e^t_k$  y  $d^t_k$  para los elementos de la definición 2.6.5 utilizando la guía  $t$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_t(\Delta_p(x)) &= \Delta_p(x) \sum_{\sigma \in R_t} \left[ \prod_{k=1}^{\lambda_1} (u_k^{\sigma t})(s_{e_k^{\sigma t}}[p_k])(s_{(1^{(C_k)})}[p_k])^{b_k^{\sigma t}-1} \right] \\ \tilde{\psi}_t(\Delta_p(x)) &= \Delta_p(x) \sum_{\sigma \in R_t} \left[ \prod_{k=1}^{\lambda_1} (u_k^{\sigma t})(s_{d_k^{\sigma t}}[p_k]) \right] \end{aligned}$$

**Corolario 2.6.11.** Sean  $p$  y  $t$  tableaux estándar de forma  $\lambda$ . Entonces  $\tilde{\psi}_t(\Delta_p(x)) = \Delta_p(x)f(x)$ , donde:

$$f(x) = \sum_{\sigma \in R_t} \left[ \prod_{k=1}^{\lambda_1} (u_k^{\sigma t})(s_{d_k^{\sigma t}}[p_k]) \right]$$

Concluimos la sección con un ejemplo, para ilustrar la construcción que hemos conseguido.



Si tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 6 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \text{ como guía} \\ p = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array} \text{ del que elevamos } \Delta_p \end{array} \right. \Rightarrow \psi_t([p]) = \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 3 \\ \hline 3 & 6 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 3 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 4 & 2 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 3 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 3 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Entonces:

$$\tilde{\psi}_t(\Delta_p(x)) = \Delta_p(x) \cdot f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

donde los colores indican las variables en las que se evalúan las funciones de Schur en el polinomio:

$$f = s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 3 \\ \hline 3 & 6 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array}} s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array}} s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 3 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 4 & 2 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 3 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array}} s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 3 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 4 & 2 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}} s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 3 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}} s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 3 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array}} s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}}$$

$$f = s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 3 \\ \hline 3 & 6 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array}} s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array}} s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 3 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 4 & 2 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 3 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array}} s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 3 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 4 & 2 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}} s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 3 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}} s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 3 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array}} s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}}$$

## 2.7 Discusión del caso general

En un marco más general, los homomorfismos de  $S^\lambda$  a  $\mathcal{H}^\mu$ , para cualquier  $\mu \leq \lambda$ , vienen dados de forma similar, salvo que las guías son ahora tableaux semi-estándar de forma  $\lambda$  y contenido  $\mu$ . Véase el capítulo 2.9 de [7]. Comentaremos los cambios que esto implica en nuestros cálculos.

En primer lugar, la aplicación  $\theta_t$ , debe simplemente redefinirse para que  $\theta_t(p)$  sea un tabloide. Esto era de esperar, puesto que una guía semi-estándar solo indica la fila en la que va un elemento de  $p$  y no la posición exacta dentro de la fila.

La expresión de  $\psi_t$  que aparece en el lema 2.6.10 es válida, pero hay que realizar una pequeña modificación. Por un lado,  $R_t$  no está bien definido para  $t$  no inyectivo. Además, ahora no todas las permutaciones de elementos en las filas de  $t$  cambian la guía. Por ejemplo, los siguientes tableaux serían las distintas guías que aparecen al elevar un mismo tabloide en  $\psi_t$  según el lema 2.6.10:

$$t = t_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \quad t_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}, \quad t_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$t_4 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \quad t_5 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}, \quad t_6 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Hay 6 guías diferentes, en lugar de  $3! \cdot 2! = 12$ , como pasaría si la guía fuera estándar.

Otra diferencia es que, en ningún momento un sumando de nuestros  $\tilde{\psi}_t(\Delta_s(x))$  se anula, sin embargo, sí es posible que esto suceda en el caso general. Esto ocurre cuando dos elementos de  $s$  en la misma columna aparecen en la misma fila en  $\theta_t(p)$ . Este fenómeno se refleja en las guías, si una guía tiene dos elementos iguales en la misma columna,  $\theta_t(\Delta_p(x))$  es nulo. Para las guías anteriores, esto ocurriría para  $t_3$  y  $t_5$ .

Por último; a la hora del cálculo explícito, el mismo teorema 2.6.6 sigue siendo cierto. A la hora de relacionar  $\Delta_p(x)$  y  $(C_p^-)x^{\theta_t(p)}$ , la única información que nos interesa es los exponentes de las variables y la reordenación de éstas. El hecho de que la guía sea semi-estándar no afecta al análisis que hemos hecho.

Para la obtención de  $e_k$  mediante comparación de  $p$  y  $\theta_t(p)$ , basta cambiar "elementos que no sean de la  $k$ -ésima columna de  $p$ " por "filas donde no haya elementos de la  $k$ -ésima columna de  $p$ ". Si en algún momento obtuviéramos un espaciado que no podamos considerar como partición, esto indica que, el sumando de  $\tilde{\psi}_t(\Delta_s)$  correspondiente a esa guía es nulo. La obtención del resto de elementos mediante comparación es fácil de adaptar al hecho de tener guías semi-estándar.

Pongamos un último ejemplo para ilustrar el caso general.

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \text{ como guía} \\ p = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 5 & \\ \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} \text{ para elevar } \Delta_p \end{array} \right. \Rightarrow \psi_t([p]) = \frac{\overline{5}}{\overline{3} \overline{4}} + \frac{\overline{5}}{\overline{1} \overline{4}} + \frac{\overline{5}}{\overline{2} \overline{4}} + \frac{\overline{3}}{\overline{1} \overline{2}} + \frac{\overline{3}}{\overline{1} \overline{4}} + \frac{\overline{3}}{\overline{2} \overline{4}}$$

Luego:

$$\tilde{\psi}_t(\Delta_s(x)) = \Delta_p(x) f(x_1, x_3, x_2, x_5, x_4)$$

para:

$$f = s_{\square} s_{\square} + s_{\square} + 0 + s_{\square} s_{\square} + 0 + s_{\square}$$

$$f = s_{\square} s_{\square} + s_{\square} + s_{\square} s_{\square} + s_{\square}$$

## 3 | Representaciones del grupo lineal general

En este capítulo, nos introducimos en la teoría de las representaciones de  $GL(n)$  a través del punto de vista combinatorio, es decir, a través de las representaciones de  $S_n$ , gracias a los módulos de Weyl. Referencias para este capítulo son Bump [2], Fulton [3] y especialmente Fulton-Harris [4].

Calcularemos las representaciones polinomiales irreducibles del grupo lineal general de un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de dimensión finita. La definición de representación polinomial está dada en la definición 1.1.1. A lo largo de esta sección, dado  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$ , trabajaremos con la identificación  $Aut(V) = GL(n)$ , obtenida al fijar una base de  $V$ .

### 3.1 Productos tensoriales

Para comenzar nuestro estudio, introduciremos unas variantes del producto tensorial de espacios vectoriales habitual. Más adelante veremos una fuerte conexión con representaciones del grupo simétrico.

**| Definición 3.1.1.** Sea  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial y denotemos por  $\otimes^k V$  el producto tensorial  $V \otimes \cdots \otimes V$ ,  $k$  veces.

Se define la  $k$ -ésima **potencia simétrica** de  $V$  como el cociente:

$$\vee^k V = \otimes^k V / \mathcal{R}_{sim}$$

donde  $\mathcal{R}_{sim}$  es el subespacio generado por todos los elementos de la forma  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k - v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}$ , donde  $\sigma$  recorre  $S_k$  y  $v_1, \dots, v_k \in V$ .

Sus elementos se denotan  $v_1 \vee \cdots \vee v_k$ . Además, dada una base  $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  de  $V$ ,

es bien conocido que una base de  $\vee^k V$  es  $\{\xi_{i_1} \vee \cdots \vee \xi_{i_k} \mid 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n\}$ . Su dimensión es, por tanto,  $\binom{n+k-1}{k}$ .

Asimismo, se define la  $k$ -ésima **potencia exterior** de  $V$  como el cociente:

$$\wedge^k V = \otimes^k V / \mathcal{R}_{alt}$$

donde  $\mathcal{R}_{alt}$  es el subespacio generado por todos los elementos de la forma  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k - \text{sgn}(\sigma)(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)})$ , donde  $\sigma$  recorre  $S_k$  y  $v_1, \dots, v_k \in V$ .

Sus elementos se denotan  $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ . Además, dada una base  $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  de  $V$ , es fácil comprobar que una base de  $\wedge^k V$  es  $\{\xi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$ . Su dimensión es, por tanto,  $\binom{n}{k}$ .

**Proposición 3.1.2.** Los diferentes productos tensoriales  $\otimes^k V$ ,  $\vee^k V$  y  $\wedge^k V$  tienen estructura de  $GL(n)$ -módulo, bajo la acción  $A(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = (Av_1) \otimes \cdots \otimes (Av_k)$  de  $GL(n)$  sobre  $\otimes^k V$  y la acción inducida por ésta sobre los cocientes  $\vee^k V$  y  $\wedge^k V$ . Dicha acción define una representación polinomial de  $GL(n)$ . Además, los caracteres de  $\vee^k V$  y  $\wedge^k V$  son los polinomios simétricos  $h_k$  y  $e_k$  (ver definición A.2.1).

**Demostración.** La representación  $GL(n) \rightarrow GL(n)$  tautológica es la representación  $\text{Aut}(V) \rightarrow GL(n)$ , tras la elección de una base de  $V$ . Es claro entonces que  $V$  es una representación polinomial de  $GL(n)$ . La representación matricial dada  $\otimes^k V$ , envía  $A \in GL(n)$  al producto tensorial  $\otimes^k A$ , y por tanto es polinomial.

La prueba de que  $\vee^k V$  y  $\wedge^k V$  son, de hecho,  $GL(n)$ -módulos la conforman las proposiciones 3.2.3 y 3.2.2.

Los caracteres se pueden calcular de forma explícita. Tomemos bases  $\{v_{i_1} \vee \cdots \vee v_{i_k}\}$  y  $\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k}\}$  y tomemos  $A = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$ , la matriz diagonal respecto de  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de un automorfismo de  $V$ . Entonces, como:

$$A(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_k}) = (Av_{i_1}) \otimes \cdots \otimes (Av_{i_k}) = x_{i_1} \cdots x_{i_k} (v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_k})$$

Lo mismo ocurre sobre las bases de  $\vee^k V$  y  $\wedge^k V$ , luego obtenemos:

$$\begin{aligned} \chi_{\vee^k V}(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k} = h_k(x_1, \dots, x_n) \\ \chi_{\wedge^k V}(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k} = e_k(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

■

## 3.2 Módulos de Weyl

Hemos visto dos formas de relacionar productos tensoriales con el grupo simétrico para obtener representaciones de  $GL(n)$ . Los módulos de Weyl generalizan los dos casos particulares anteriores.

A partir de esta sección adaptamos la notación de Fulton [3]; cambiamos nuestros espacios vectoriales  $V$  por  $E$ , pues reservaremos  $V$  para representaciones de  $\mathbb{S}_n$ .

**Definición 3.2.1.** Sea  $E$  un espacio vectorial de dimensión  $n$ . Notemos que podemos tomar una acción derecha de  $\mathbb{S}_k$  sobre  $\otimes^k E$ , que consiste en permutar los factores:

$$(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k)\sigma = (e_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma^{-1}(k)})$$

Sea ahora  $V$  un  $\mathbb{S}_k$ -módulo. Definimos el **módulo de Weyl** asociado a  $V$  como:

$$V(E) := (\otimes^k E) \otimes_{\mathbb{C}\mathbb{S}_k} V = \frac{(\otimes^k E) \otimes_{\mathbb{C}} V}{\mathcal{R}_w}$$

donde  $\mathcal{R}_w$  es el subespacio generado por los elementos  $(x\sigma) \otimes v - x \otimes (\sigma v)$ , con  $x \in \otimes^k E$  y  $v \in V$ .

**Proposición 3.2.2.** Los módulos de Weyl  $V(E)$  tienen estructura de  $GL(n)$ -módulo con la acción inducida por la acción en  $\otimes^k E$ :

$$A(x \otimes_{\mathbb{S}_k} v) = (Ax) \otimes_{\mathbb{S}_k} v$$

para  $A \in GL(n)$ ,  $x \in \otimes^k E$  y  $v \in V$ .

**Demostración.** Tenemos que ver que la acción de  $GL(n)$  es compatible está bien definida tras cocientar por  $\mathcal{R}_w$ .

En efecto, esta acción de  $GL(n)$  sobre  $\otimes^k E$  conmuta con la acción derecha de  $\mathbb{S}_k$ :

$$\begin{aligned} (A(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k))\sigma &= ((Ae_1) \otimes \cdots \otimes (Ae_k))\sigma = A(e_{\sigma^{-1}(1)}) \otimes \cdots \otimes A(e_{\sigma^{-1}(k)}) \\ A((e_1 \otimes \cdots \otimes e_k)\sigma) &= A(e_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma^{-1}(k)}) = A(e_{\sigma^{-1}(1)}) \otimes \cdots \otimes A(e_{\sigma^{-1}(k)}) \end{aligned}$$

Con lo que, efectivamente:

$$A(x\sigma) \otimes v - (Ax) \otimes (\sigma v) = ((Ax)\sigma) \otimes v - (Ax) \otimes (\sigma v) \in \mathcal{R}_w$$

■

**Proposición 3.2.3.** Sean  $\mathbb{1}$  la representación trivial de  $\mathbb{S}_k$  y  $\mathcal{A}$  la representación alternada de  $\mathbb{S}_k$ . Entonces, las representaciones  $\vee^k E$  y  $\wedge^k E$ , dadas en la sección anterior

cumplen:

$$\begin{aligned}\vee^k E &\cong \mathbb{1}(E) = (\otimes^k E) \otimes_{\mathbb{S}_k} \mathbb{1} \\ \wedge^k E &\cong \mathcal{A}(E) = (\otimes^k E) \otimes_{\mathbb{S}_k} \mathcal{A}\end{aligned}$$

*Demostración.* Denotemos  $\mathcal{A} = \langle a \rangle$ , con  $a$  el generador de la representación alternada.  $\mathbb{S}_k$  actúa de la forma:  $\sigma a = \text{sgn}(\sigma)a$  para todo  $\sigma \in \mathbb{S}_k$  (ejemplo 1.2.4).

Por el hecho de ser un cociente, si  $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  es una base de  $E$ , entonces el conjunto  $\{(\xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_k}) \otimes_{\mathbb{S}_k} \mathbb{1}\}$  genera  $\mathbb{1}(E)$  y  $\{(\xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_k}) \otimes_{\mathbb{S}_k} a\}$  genera  $\mathcal{A}(E)$ .

Como se dan las relaciones:

$$\begin{aligned}(\xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_k}) \otimes_{\mathbb{S}_k} \mathbb{1} &= (\xi_{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes \xi_{\sigma(i_k)}) \otimes_{\mathbb{S}_k} \mathbb{1} && \text{en } \mathbb{1}(E) \\ (\xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_k}) \otimes_{\mathbb{S}_k} a &= \text{sgn}(\sigma)(\xi_{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes \xi_{\sigma(i_k)}) \otimes_{\mathbb{S}_k} a && \text{en } \mathcal{A}(E)\end{aligned}$$

se deduce que el conjunto  $\mathcal{B}_1 = \{(\xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_k}) \otimes_{\mathbb{S}_k} \mathbb{1}\}_{i_1 \leq \dots \leq i_k}$  genera  $\mathbb{1}(E)$  y que  $\mathcal{B}_2 = \{(\xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_k}) \otimes_{\mathbb{S}_k} a\}_{i_1 < \dots < i_k}$  genera  $\mathcal{A}(E)$ . La diferencia en el caso de  $\mathcal{A}(E)$  viene del hecho de que si hay alguna repetición de índices, digamos  $i_r = i_s$ , el elemento es nulo, pues tomando la permutación  $(rs) \in \mathbb{S}_k$ , el elemento es igual a su opuesto.

Un proceso similar al realizado en la demostración de la proposición 2.2.3 permite demostrar que ambos  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_2$  son linealmente independientes, luego son una base de sus respectivos espacios.

Es claro ahora que los homomorfismos:

$$\begin{aligned}\vee^k E &\rightarrow \mathbb{1}(E) && \wedge^k E &\rightarrow \mathcal{A}(E) \\ \xi_{i_1} \vee \dots \vee \xi_{i_k} &\mapsto (\xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_k}) \otimes_{\mathbb{S}_k} \mathbb{1} && \xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k} &\mapsto (\xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_k}) \otimes_{\mathbb{S}_k} a\end{aligned}$$

extendidos por linealidad, son isomorfismos de espacios vectoriales que respetan la acción de  $GL(n)$ . Luego  $\vee^k(E) \cong \mathbb{1}(E)$  y  $\wedge^k(E) \cong \mathcal{A}(E)$  son isomorfismos de  $GL(n)$ -módulos. ■

### 3.3 La dualidad de Schur-Weyl. Las representaciones irreducibles

Nuestro objetivo es demostrar que los módulos de Weyl conforman todas las representaciones polinomiales de  $GL(n)$ . Para ello, probaremos que  $S^\lambda(E)$  son representaciones polinomiales irreducibles. Esto es suficiente pues se cumple:

**Lema 3.3.1.** Sea  $V$  un  $\mathbb{S}_k$ -módulo. Si  $V \cong \bigoplus_{\lambda \vdash k} d_\lambda S^\lambda$ , entonces:

$$V(E) \cong \bigoplus_{\lambda} d_\lambda (S^\lambda(E))$$

**Demostración.** La demostración es sencilla, dada la distributividad del producto tensorial respecto de la suma directa:

$$(\otimes^k E) \otimes V = (\otimes^k E) \otimes (\bigoplus_{\lambda} d_\lambda S^\lambda) \cong \bigoplus_{\lambda} d_\lambda ((\otimes^k E) \otimes S^\lambda)$$

La isomorfía se da también en sus subespacios y por tanto al tomar cociente, dando el resultado que queremos. ■

También utilizaremos el siguiente lema elemental:

**Lema 3.3.2.** Sean  $R, S$  anillos cualesquiera y  $V$  un  $R$ -módulo derecho. Entonces  $V \otimes_R R \cong V$  como  $R$ -módulos derechos. Además, si  $V$  es un  $S$ -módulo cuya multiplicación conmuta con la de  $R$ , el isomorfismo lo es de  $S$ -módulos también.

**Demostración.** Estamos definiendo  $V \otimes_R R$  como  $R$ -módulo derecho mediante  $(v \otimes_R r)t = (vt) \otimes_R r$ , para  $t \in R$ , y que estamos utilizando  $R$  como  $R$ -módulo izquierdo.

Basta tomar los homomorfismos:

$$\begin{aligned} \phi : V \otimes_R R &\rightarrow V & \psi : V &\rightarrow V \otimes_R R \\ v \otimes_R r &\mapsto vr & v &\mapsto v \otimes_R 1 \end{aligned}$$

donde  $\phi$  está bien definida ya que  $\phi$  viene inducida por la aplicación  $v \otimes r \rightarrow vr$ , que también cumple  $(vr) \otimes 1 \rightarrow vr$ .

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \psi(\phi(v \otimes_R r)) &= \psi(vr) = (vr) \otimes_R 1 = v \otimes_R r \\ \phi(\psi(v)) &= \phi(v \otimes_R 1) = v \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que respetan la multiplicación por la derecha de  $R$ , luego son isomorfismos de  $R$ -módulos derechos. Si la multiplicación por  $S$  conmuta con la de  $R$  obtenemos:

$$\phi(s(v \otimes_R r)) = \phi((sv) \otimes_R r) = (sv)r = s(vr) = s(\phi(v \otimes_R r))$$

y  $\phi$  es también isomorfismo de  $S$ -módulos. ■

**Lema 3.3.3.** Sea  $t$  un tableau inyectivo cualquiera de forma  $\lambda \vdash n$ . El módulo de permutaciones  $\mathcal{H}^\lambda \cong \mathbb{C}\mathbb{S}_n(R_t^+)$  y el módulo de Specht  $S^\lambda \cong \mathbb{C}\mathbb{S}_n(C_t^-)(R_t^+)$  como  $\mathbb{S}_n$ -módulos.

*Demostración.* Basta tomar los homomorfismos:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}\mathbb{S}_n(R_t^+) &\rightarrow \mathcal{H}^\lambda & \psi : \mathbb{C}\mathbb{S}_n(C_t^-)(R_t^+) &\rightarrow \mathcal{S}^\lambda \\ \sigma(R_t^+) &\mapsto \sigma[t] & \sigma(C_t^-)(R_t^+) &\mapsto \sigma\Delta_t \end{aligned}$$

Extendidos por linealidad. Son claramente isomorfismos de  $\mathbb{S}_n$ -módulos, pues recordemos que  $[t] = (R_t^+)t$  y  $\Delta_t = (C_t^-)(R_t^+)t$ , y, fijado  $t$ , es obvio ver que se respeta la acción de  $\mathbb{S}_n$ . ■

El resultado clave es la siguiente proposición de Fulton-Harris [4], la cual demostramos en detalle.

**Proposición 3.3.4.** Sea  $A = \mathbb{C}G$ , para  $G$  un grupo finito y  $U$  un  $G$ -módulo derecho. Sea  $B = \text{Hom}_G(U, U)$ . Es decir:

$$B = \{ \varphi : U \rightarrow U \mid \varphi(vg) = \varphi(v)g, \forall v \in U, g \in G \}$$

$B$  es un anillo y  $U$  es un  $B$ -módulo izquierdo. Se cumplen:

1. Para todo  $c \in A$ , el homomorfismo

$$\begin{aligned} U \otimes_G (Ac) &\rightarrow Uc \\ (u \otimes_G (ac)) &\mapsto (ua)c \end{aligned}$$

es un isomorfismo de  $B$ -módulos.

2. Si  $W = Ac$  un  $\mathbb{S}_k$ -módulo irreducible, entonces  $U \otimes_A W$  es un  $B$ -módulo irreducible.

*Demostración.* Tomando  $\phi$  como el isomorfismo de la prueba del lema 3.3.2, tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} U \otimes_G A & \xrightarrow{\cdot c} \twoheadrightarrow & U \otimes_G (Ac) & \hookrightarrow & U \otimes_G A \\ \downarrow \phi & & \downarrow & & \downarrow \phi \\ U & \xrightarrow{\cdot c} \twoheadrightarrow & Uc & \hookrightarrow & U \end{array}$$

con los homomorfismos horizontales siendo la multiplicación por  $c$ , que es sobreyectiva, y la inclusión.

Es simple ver que la mitad derecha del diagrama implica que nuestra aplicación es inyectiva, mientras que la mitad izquierda, que es sobreyectiva.

Por otro lado, este homomorfismo respeta la acción izquierda de  $B$  pues todo elemento de  $B$  conmuta con la acción derecha de  $G$ . Esto prueba 1.



Para 2, empecemos estudiando  $B$ . Sea  $U = \bigoplus_i n_i U_i$  la descomposición de  $U$  en  $G$ -módulos derechos irreducibles. Notemos que por el lema de Schur (1.3.5), todo  $G$ -endomorfismo de  $U_i$  es un múltiplo de la identidad. Si tenemos entonces  $\varphi \in \text{End}(n_i U_i)$ :

$$\varphi : U_i^{(1)} \oplus \dots \oplus U_i^{(n_i)} \rightarrow U_i^{(1)} \oplus \dots \oplus U_i^{(n_i)}$$

restringiendo  $\varphi$  en la salida y la llegada, obtenemos homomorfismos  $\varphi_{j,k} : U_i^{(j)} \rightarrow U_i^{(k)}$ , los cuales se pueden caracterizar por una constante  $c_{j,k} \in \mathbb{C}$ . A través de la identificación  $\varphi = (c_{j,k})$ , es fácil ver que  $\text{End}(n_i U_i) \cong M_{n_i}(\mathbb{C})$  como anillos, con la composición de endomorfismos y la multiplicación de matrices cuadradas. Entonces:

$$B = \text{Hom}_G(U, U) = \text{End}_G(\bigoplus_i n_i U_i) = \bigoplus_i \text{End}_G(n_i U_i) \cong \bigoplus_i M_{n_i}(\mathbb{C})$$

Por otro lado,  $A = \mathbb{C}G$  tiene una caracterización similar. Recordemos que  $A$  es la representación estándar de  $G$  y que  $A = \bigoplus_i m_i U_i$  por el teorema 1.5.1, con  $m_i = \dim U_i$ . Como cada  $U_i$  es una representación de  $G$ , por definición (o la proposición 1.1.4), tenemos un homomorfismo de grupos:

$$x_i : G \rightarrow \text{Aut}(U_i)$$

los cuales se pueden extender por linealidad, primero en la salida y luego en la llegada a los  $X_i$  y a  $X = \bigoplus_i X_i$ :

$$\begin{aligned} X_i &: \mathbb{C}G \rightarrow \text{End}(U_i) \\ X &: A \rightarrow \bigoplus_i \text{End}(U_i) \end{aligned}$$

Notemos que la llegada de  $X$  no es  $\text{End}(A)$ . Además,  $X$  es inyectivo; si existe  $v \in \mathbb{C}G$  con  $X(v) = 0$ , entonces cada  $X_i(v) = 0$ . Luego  $v(\mathbb{C}G) = v(\bigoplus_i m_i U_i) = \bigoplus_i m_i 0 = 0$ . Pero esto implica que  $vg = 0$ , para todo  $g \in G$ , y siendo  $g$  una unidad de  $A$ , debe darse que  $v = 0$ .

Por último, tomando dimensiones en la descomposición de  $A$  (teorema 1.5.1),  $\dim(A) = \sum_i m_i^2$ . E identificando,  $\bigoplus_i \text{End}(U_i) \cong \bigoplus_i M_{m_i}(\mathbb{C})$ ,  $\dim(\bigoplus_i \text{End}(U_i)) = \sum_i m_i^2$ . Luego  $X$  es un isomorfismo de álgebras. Tomaremos  $A \cong \bigoplus_i M_{m_i}(\mathbb{C})$

Probemos 2 ahora. Empecemos con el caso en que  $U$  es un  $G$ -módulo derecho irreducible. Tenemos  $B \cong \mathbb{C}$ , luego basta probar que  $\dim(U \otimes_G W) \leq 1$ . Tenemos que  $W \subset A$ , pues toda representación irreducible aparece en la descomposición de  $A$  (teorema 1.5.1). Entonces podemos ver  $W$  como un ideal izquierdo y minimal (al ser  $W$  irreducible) de  $\mathbb{C}G \cong \bigoplus_i M_{m_i}(\mathbb{C})$ . De igual forma ocurre con  $U$ , salvo que  $U$  es un

ideal minimal derecho.

Ahora bien, todo ideal minimal izquierdo de  $\bigoplus_i M_{m_i}(\mathbb{C})$  es isomorfo a uno de la forma  $\{0 \oplus \cdots \oplus I \oplus \cdots \oplus 0\}$ , donde  $I$  ocupa la posición  $k$  y sus elementos tienen entradas nulas salvo en una columna. De igual forma ocurre para los ideales minimales derechos:  $\{0 \oplus \cdots \oplus J \oplus \cdots \oplus 0\}$  para  $J$  en la posición  $r$  y sus elementos tienen entradas nulas salvo en una fila.

Como  $W = A \cdot c$  para  $c \in A$ , tras la identificación,  $\bigoplus_i M_{m_i}(\mathbb{C}) \cdot c$  es un ideal de la forma mencionada, luego, como  $U \otimes_G W \cong Uc$ , éste, será nulo salvo que  $k = r$ . En caso contrario, sus elementos serán nulos salvo en una entrada, determinada por la forma de  $U$  y  $W$  como ideales. Este ideal claramente tiene dimensión 1 (o es nulo), y hemos terminado.

Si  $U$  no es irreducible, tenemos  $U = \bigoplus_i n_i U_i$  su descomposición en irreducibles y  $U \otimes_G W = \bigoplus_i n_i (U_i \otimes_G W) = \bigoplus_i n_i U_i \cdot c$ , de los cuales, como hemos visto antes, a lo sumo uno es no nulo para un cierto  $k$ , dependiendo de  $W = Ac$ . Además, para el  $i$  en el que  $U_i \cdot c$  no sea nulo, éstos se corresponden con matrices con un único elemento no nulo.

Si  $\varphi \in \text{End}(n_i U_i)$ , hemos visto que  $\varphi = \bigoplus_j (\varphi_j : U_i^{(j)} \rightarrow n_i U_i)$  donde cada  $\varphi_j$  es un vector, en el sentido de que  $\varphi_j(u^{(j)}) = (c_{j,1} u^{(1)}, \dots, c_{j,n_i} u^{(n_i)})$ . Tras la identificación de cada  $U_i c$  como un ideal de matrices, tenemos que la forma de  $\varphi_j$  es:

$$\varphi_j : U_i^{(j)} c \rightarrow U_i^{(1)} c \oplus \cdots \oplus U_i^{(n_i)} c$$

$$\varphi_j : \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & u_i^{(j)} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c_{j,1} u_i^{(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c_{j,n_i} u_i^{(n_i)} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Esto justifica que al identificar cada  $U_i c \cong \mathbb{C}$  (lo cual es natural dada la forma de  $U_i$  como ideal), y que, tras identificar  $\varphi$  con una matriz,  $\varphi_j$  sea la fila  $j$ -ésima de esa matriz.

De esta forma, la acción de  $\text{End}(n_i U_i)$  sobre  $n_i U_i c$  es isomorfa a la de  $M_{n_i}(\mathbb{C})$  sobre  $\mathbb{C}^{n_i}$ . Por tanto,  $B$  actúa sobre  $U \otimes_G W = Uc$  como  $\bigoplus_i M_{n_i}(\mathbb{C})$  actúa sobre  $\{0\}^{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}^{n_i} \oplus \cdots \oplus \{0\}^{n_l}$ . Como  $\mathbb{C}^{n_i}$  es claramente irreducible respecto de  $M_{n_i}(\mathbb{C})$ , se concluye que  $Uc$  lo es sobre  $B$ . ■

Notemos que podemos aplicar la proposición 3.3.4 para  $G = \mathbb{S}_k$ , y  $U = \otimes^k E$ , junto con el lema 3.3.3 con  $W = S^\lambda$  para obtener que los  $S^\lambda(E)$  son irreducibles bajo  $B = \text{End}_G(\otimes^k E)$ . Sin embargo, esto no es lo que buscamos. La acción de  $GL(n) = \text{Aut}(E)$  sobre  $U$  define elementos en  $B$ , pero en general  $B$  contiene más elementos. Tampoco

podemos asegurar que la restricción  $S^\lambda(E) \downarrow_{GL(n)}^B$  sea irreducible, ya que la irreducibilidad no es invariante bajo restricción o inducción. El siguiente lema soluciona este problema. La demostración se encuentra en Fulton-Harris [4].

**Lema 3.3.5.**  $B = \text{End}_G(\otimes^k E)$  está generado como un subespacio vectorial de  $\text{End}(\otimes^k E)$  por  $\text{End}(E)$ . Todo subespacio de  $\otimes^k E$  es un  $B$ -submódulo si y sólo si es invariante por  $\text{Aut}(E)$ .

Estamos listos para probar un fuerte teorema de descomposición:

**| Teorema 3.3.6 (Teorema de descomposición).** *Los  $GL(n)$ -módulos  $S^\lambda(E)$  son representaciones polinomiales irreducibles. Además, se tiene una descomposición de  $GL(n)$ -módulos:*

$$\otimes^k E \cong \bigoplus_{\lambda \vdash k} m_\lambda S^\lambda(E)$$

con  $m_\lambda = \dim S^\lambda$ . Más aún, el carácter de  $S^\lambda(E)$  es el polinomio de Schur  $s_\lambda$ .

**Demostración.** La descomposición es un corolario de los lemas 3.3.1 y 3.3.2, además de la descomposición de  $\mathbb{C}\mathbb{S}_n$  en  $\mathbb{S}_n$ -submódulos irreducibles:

$$\otimes^k E = (\otimes^k E) \otimes_G (\mathbb{C}G) = \bigoplus_\lambda m_\lambda (S^\lambda(E))$$

Notemos que la propia descomposición implica que cada  $S^\lambda(E)$  es un subespacio de  $\otimes^k E$ . Por la proposición 3.3.4, sabemos que  $S^\lambda(E)$  es un  $B = \text{End}_G(\otimes^k E)$ -módulo irreducible.

Por la última parte del lema 3.3.5, si  $V \subset S^\lambda$  fuera un  $GL(n)$ -submódulo, también sería un  $B$ -submódulo. Pero esto no es posible pues  $S^\lambda(E)$  era irreducible como  $B$ -submódulo. Esto prueba que  $S^\lambda(E)$  es un  $GL(n)$ -módulo irreducible. Además, como cada  $S^\lambda(E)$  es un  $GL(n)$ -submódulo de  $\otimes^k E$ , se tiene que son también representaciones polinomiales de  $GL(n)$ .

Para calcular el carácter de  $S^\lambda(E)$ , usaremos la descomposición de  $\mathcal{H}^\lambda$  y el lema 3.3.3:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\mathbb{S}_k(R_t^+) \cong \mathcal{H}^\lambda &\cong \bigoplus_{\mu \geq \lambda} K_{\lambda, \mu} S^\mu && \text{para cualquier } t \in \text{Iny}(\lambda), \text{ luego:} \\ (\otimes^k E)(R_t^+) \cong \mathcal{H}^\lambda(E) &\cong \bigoplus_{\mu \geq \lambda} K_{\lambda, \mu} S^\mu(E) \end{aligned}$$

Tomando  $t$  como en la prueba de la proposición 2.2.3, es decir,  $R_t = \mathbb{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathbb{S}_{\lambda_l}$ .

Denotemos  $\mathbb{S}_r^+ = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_r} \sigma$ . Como se tiene que  $R_r^+ = \prod_{j=1}^r \mathbb{S}_j^+$  obtenemos:

$$(\otimes^k E)(R_r^+) \cong (\otimes^{\lambda_1} E) \otimes \cdots \otimes (\otimes^{\lambda_l} E) (\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{\lambda_1}} \sigma) \cdots (\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{\lambda_l}} \sigma) \cong \bigotimes_{j=1}^l (\otimes^{\lambda_j} E)(\mathbb{S}_{\lambda_j+})$$

Tomando  $s_j$  el tableau inyectivo de forma  $(\lambda_j)$  con entradas  $1, \dots, \lambda_j$ , tenemos que  $R_{s_j}^+ = \mathbb{S}_{\lambda_j+}$ . Luego cada factor  $(\otimes^{\lambda_j} E)(\mathbb{S}_{\lambda_j+}) \cong \mathcal{H}^{\lambda_j}(E) \cong \vee^{\lambda_j} E$ , esto último por la proposición 3.2.3 y por el hecho de que  $\mathcal{H}^r$  es la representación trivial de  $\mathbb{S}_r$ .

Luego:

$$\bigotimes_{j=1}^l (\vee^{\lambda_j} E) \cong \bigoplus_{\mu \geq \lambda} K_{\lambda, \mu} S^\mu(E)$$

Tomando caracteres, y habiendo calculado el carácter de  $\vee^r E$  en la proposición 3.1.2, obtenemos:

$$h_\lambda(x) = \sum_{\mu \geq \lambda} K_{\lambda, \mu} \chi_{S^\mu(E)}(x)$$

Como esto es cierto para todo  $\lambda$  y, junto con la expresión dada en la proposición A.1.11, y dado que  $\chi_{S^\mu(E)}$  son polinomios simétricos, debe darse que  $\chi_{S^\mu(E)} = s_\mu$ . Como queríamos. ■

**Corolario 3.3.7.** Los módulos de Weyl,  $S^\lambda(E)$ , para  $\lambda$  particiones con longitud menor o igual que  $n$ , constituyen representaciones polinomiales no nulas y no isomorfas entre sí.

**Demostración.** A diferencia de la transformada de Frobenius de las representaciones de  $\mathbb{S}_n$ , los caracteres de representaciones de  $GL(n)$  están evaluadas en  $x_1, \dots, x_n$ , es decir, son polinomios simétricos, con un número finito de variables. Como el carácter de  $S^\lambda(E)$  es  $s_\lambda(x)$  y los polinomios de Schur son nulos si  $\lambda$  tiene longitud mayor que  $n$  (ver A.2.6), junto con que  $s_\lambda \neq s_\mu$  si  $\lambda \neq \mu$ , tenemos el resultado. ■

**| Teorema 3.3.8 (Dualidad de Schur-Weyl).** Las distintas representaciones polinomiales irreducibles de  $GL(n)$  son los módulos de Weyl,  $S^\lambda(E)$ , donde  $\lambda \vdash k$ , para  $k \geq 0$  y longitud de  $\lambda$  sea menor o igual que  $n$ . Toda representación irreducible de  $\mathbb{S}_k$  se corresponde con una representación polinomial irreducible de  $GL(n)$  y viceversa.

Si bien ya hemos demostrado gran parte del teorema, no podemos concluir que hayamos encontrado todas las representaciones polinomiales. La demostración utiliza la estructura de grupo de Lie de  $GL(n)$ , sobre la cual no hemos desarrollado la teoría. La demostración, tras un estudio de la teoría de grupos de Lie, se puede encontrar en Fulton-Harris [4].

# Conclusiones

Hemos construido las representaciones irreducibles del grupo simétrico  $\mathbb{S}_n$ , a partir de las cuales hemos establecido la dualidad de Schur-Weyl, construyendo a su vez representaciones polinomiales irreducibles del grupo lineal general  $GL(n)$ .

$$S^\lambda \text{ en } \mathbb{S}_n \quad \rightarrow \quad S^\lambda(E) \text{ en } GL(n)$$

Gracias a los  $\mathcal{H}^\lambda$ , podemos observar el efecto de la dualidad:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\lambda &= \uparrow_{\mathbb{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathbb{S}_{\lambda_k}}^{\mathbb{S}_n} && \text{por la proposición 2.2.3} \\ \mathcal{H}^\lambda(E) &= \bigotimes_{r=1}^k \mathbb{1}_{\mathbb{S}_{\lambda_r}}(E) && \text{por 3.2.3 y la prueba de 3.3.6} \end{aligned}$$

Es decir, la dualidad convierte la inducción en el grupo simétrico en productos tensoriales en el grupo lineal general.

Hemos dedicado buena parte del trabajo a establecer homomorfismos  $S^\lambda \hookrightarrow \mathcal{H}^{1^{(n)}}$  explícitos en la base de los  $\Delta_t(x)$  y también hemos expuesto las modificaciones necesarias para los homomorfismos del caso general  $S^\lambda \hookrightarrow \mathcal{H}^\mu$ :

$$\Delta_p(x) \text{ en } S^\lambda \quad \rightarrow \quad \Delta_p(x)f(x) \quad \text{en } \mathcal{H}^\mu \text{ para } f(x) \text{ según 2.6.11 y alguna guía } t$$

Dada nuestra construcción de módulos de Weyl, estos mismos homomorfismos pueden adaptarse para conseguir homomorfismos de  $GL(n)$ -módulos. Para  $f(x)$  como antes y  $e \in \otimes^k E$ :

$$e \otimes_{\mathbb{S}_k} \Delta_p(x) \text{ en } S^\lambda(E) \quad \rightarrow \quad e \otimes_{\mathbb{S}_k} (\Delta_p(x)f(x)) \quad \text{en } \mathcal{H}^\mu(E)$$



# A | Apéndice

Este apéndice está dedicado a dar resultados combinatorios ya estudiados en la asignatura Álgebra, Combinatoria y Computación. No probaremos ningún resultado del apéndice, aunque las funciones y polinomios simétricos pueden encontrarse ampliamente estudiados en Stanley [8] y el RSK en Fulton[3].

## A.1 El anillo de funciones simétricas

**Definición A.1.1.** Consideremos el anillo de series formales  $\mathbb{Z}[[X]]$  con coeficientes enteros. Sea  $m \in \mathbb{Z}[[X]]$  un monomio en el que aparecen un número finito de variables:

$$m(x) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r x_r^{b_r}$$

donde solo un número finito de  $a_r \in \mathbb{Z}$  son iguales a 1 y el resto son iguales a cero. Si  $n$  es el mayor índice en el que  $a_r \neq 0$ , denotemos  $m(x) = x^\lambda$ , donde  $\lambda = (b_1, \dots, b_n)$ ; indicando los exponentes (posiblemente nulos) de las variables que aparecen en  $m$ .

Diremos que  $k = \sum_{r=1}^n b_r$  es el **grado de  $m$** .

**Definición A.1.2.** Un elemento  $p(x) \in \mathbb{Z}[[X]]$  se dice que es una **función simétrica de grado  $k$**  si:

1.  $p$  es suma de monomios de grado  $k$  según hemos descrito en la definición anterior.
2.  $p$  es invariante ante la permutación de cualquier número finito de variables.

Esta última condición quiere decir que para todo  $n$  entero no negativo y  $\sigma \in \mathbb{S}_n$ , tenemos la siguiente propiedad:

$$\sigma p(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) = p(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, x_{n+1}, \dots)$$

El conjunto de las funciones simétricas de grado  $k$  constituye un anillo conmutativo, que denotaremos por  $\Lambda_k$ .

Por ejemplo, de las siguientes,  $r$  es la única función simétrica, y es de grado 2:

$$p(x) = \sum_{i_1 < i_2 < i_3 < \dots} (x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \dots) \quad (\text{incumple 1.})$$

$$q(x) = \sum_{i_1 < i_2} (i_1 x_{i_1} x_{i_2}) \quad (\text{incumple 2.})$$

$$r(x) = \sum_{i_1 < i_2} x_{i_1} x_{i_2}$$

**Definición A.1.3.** Un elemento  $p(x) \in \mathbb{Z}[[X]]$  se dice que es una **función simétrica** si es la suma **finita** de funciones simétricas de cualquier grado.

El conjunto de funciones simétricas constituye un anillo conmutativo que denotaremos  $\Lambda$ . Notemos que  $\Lambda$  es un anillo graduado de forma natural:  $\Lambda = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda_k$ , donde  $\Lambda_0 = \mathbb{Z}$ .

Nos interesan unas funciones simétricas muy específicas.

**Definición A.1.4.** Para cada  $k$  entero no negativo, definimos las siguientes funciones simétricas (de grado  $k$ ):

1. Las **funciones elementales**,  $e_k$ , como:

$$e_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \quad (\text{Combinaciones de } k \text{ variables con exponente 1})$$

2. Las **funciones homogéneas completas**,  $h_k$ , como:

$$h_k = \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \quad (\text{Suma de todos los posibles monomios de grado } k)$$

3. Para  $k \geq 1$ , las **funciones de series de potencias de Newton**,  $p_k$ , como:

$$p_k = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k \quad (\text{Suma de potencias } k\text{-ésimas de una variable})$$

A partir de los cuales podemos definir, de forma multiplicativa, variantes de estas funciones simétricas, indexadas por particiones. Si  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ , tenemos:

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} \dots e_{\lambda_r} \quad h_\lambda = h_{\lambda_1} \dots h_{\lambda_r} \quad p_\lambda = p_{\lambda_1} \dots p_{\lambda_r}$$



Por ejemplo, para  $\lambda = (2, 1)$ , en tres variables, tenemos:

$$\begin{aligned} e_\lambda(x) &= e_2(x)e_1(x) = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \dots)(x_1 + x_2 + x_3 + \dots) \\ h_\lambda(x) &= h_2(x)h_1(x) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \dots)(x_1 + x_2 + \dots) \\ p_\lambda(x) &= p_2(x)p_1(x) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots)(x_1 + x_2 + x_3 + \dots) \end{aligned}$$

**| Teorema A.1.5 (Gauss).** *Las funciones elementales  $\{e_\lambda\}_{\lambda \vdash k}$  y las funciones homogéneas  $\{h_\lambda\}_{\lambda \vdash k}$  son una base del anillo de funciones simétricas de grado  $k$ ,  $\Lambda_k$ .*

*Las funciones de series de potencias  $\{p_\lambda\}_{\lambda \vdash k}$  son linealmente independientes en  $\Lambda_k$ , pero no son una base. Sí lo son cuando admitimos coeficientes racionales:  $\Lambda_k \otimes \mathbb{Q}$ .*

*El anillo de funciones simétricas está generado como anillo de las siguientes maneras:*

$$\Lambda = \mathbb{Z}[e_1, \dots, e_n, \dots] \quad \Lambda = \mathbb{Z}[h_1, \dots, h_n, \dots] \quad \Lambda \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[p_1, \dots, p_n, \dots]$$

*donde no hay relaciones algebraicas entre los generadores.*

A las series de potencias  $p_k$  se les suelen asociar unos coeficientes enteros, responsables de la necesidad de utilizar números racionales.

**| Definición A.1.6.** *Dada una partición  $\lambda = (1^{(k_1)}, 2^{(k_2)}, \dots, n^{(k_n)})$ , escrita indicando la multiplicidad con la que aparecen sus partes, definamos los coeficientes:*

$$z_\lambda = 1^{k_1} k_1! \cdot 2^{k_2} k_2! \cdot \dots \cdot n^{k_n} k_n!$$

Estos coeficientes nos interesan por varios motivos:

**Lema A.1.7.** *Sea  $\lambda$  una partición de  $n$ . Entonces el número de elementos en la clase de conjugación de  $\mathbb{S}_n$  asociada a  $\lambda$  es  $\frac{n!}{z_\lambda}$ .*

**Proposición A.1.8 (Base con coeficientes racionales).** *Para todo  $n$ , se cumple:*

$$h_n = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{p_\lambda}{z_\lambda}$$

Lo cual permite demostrar que las  $p_\lambda$  son base de  $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$ .

Es cierto que estas bases son cómodas en el sentido de ser sencillas de manejar. Sin embargo, en combinatoria, y como vemos a lo largo del trabajo, ciertas bases más complejas tienen mayor relevancia.

**| Definición A.1.9.** Sea  $t$  un tableau de forma  $\lambda$  y entradas en  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Decimos que su **peso según contenido** es:

$$x^t = x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$$

donde cada  $r_i$  es el número de veces que aparece  $i$  como una entrada en  $t$ .

Se definen las **funciones de Schur** como:

$$s_\lambda = \sum_t x^t$$

donde  $t$  varía en los tableaux semi-estándar de forma  $\lambda$  y entradas en  $\{1, 2, \dots\}$ .

Las funciones de Schur son funciones simétricas, aunque esto no sea obvio a partir de la definición. Existen muchas formas diferentes pero equivalentes de definir las funciones de Schur según el punto de vista en el que queramos enfocarnos. En la siguiente sección daremos una definición equivalente cuando tratamos una cantidad finita de variables.

Damos unas últimas propiedades importantes sobre las funciones de Schur.

**| Definición A.1.10.** Sea  $t$  un tableau de forma  $\lambda \vdash n$ . Decimos que el **contenido de  $t$**  es  $\mu$  si  $x^t = x^\mu$ , como monomios, según hemos definido en A.1.1.

Definimos los **coeficientes de Kostka**,  $K_{\lambda, \mu}$  como el número de tableaux semi-estándar de forma  $\lambda$  y contenido  $\mu$ .

**Proposición A.1.11.** Para toda partición  $\mu$ , se cumple que:

$$h_\mu = \sum_{\lambda \geq \mu} K_{\lambda, \mu} s_\lambda = s_\mu + \sum_{\lambda \triangleright \mu} K_{\lambda, \mu} s_\lambda$$

Como consecuencia, las funciones de Schur son base del anillo de funciones simétricas.

**Proposición A.1.12.** Definamos un producto escalar en  $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$ , dado por:

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = \begin{cases} z_\lambda & \text{si } \lambda = \mu \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Las funciones de Schur  $s_\lambda$  son **ortonormales** respecto a este producto escalar.

## A.2 Los polinomios simétricos

Esta sección es una simplificación al caso de tratar funciones simétricas con un número finito de variables.

**Definición A.2.1.** Dada una función simétrica,  $p(x)$ , podemos definir un **polinomio simétrico**,  $\tilde{p}$ , en  $n$  variables, como la especialización:

$$\tilde{p}(x_1, \dots, x_n) = p(x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$$

El anillo de polinomios simétricos en  $n$  variables,  $\Lambda(n)$ , es un anillo graduado  $\Lambda(n) = \bigoplus_k \Lambda_k(n)$ . En polinomios simétricos la noción de grado se hereda de la de grado en funciones simétricas y coincide con la noción usual de grado en polinomios.

**Definición A.2.2.** Se definen de manera análoga a funciones simétricas, los polinomios **elementales**, **homogéneos** y los de **series de potencias de Newton** de grado  $k$ :

$$e_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \quad h_k = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \quad p_k = \sum_{i=1}^n x_i^k$$

Estas expresiones se pueden conseguir fácilmente a partir de la especialización anterior.

**Observación A.2.3.** Si bien en el caso de funciones simétricas, ninguna de estas funciones se anula, en el caso de polinomios hay un cambio para las funciones elementales. Como en ninguno de sus sumandos pueden repetirse variables, en el caso de que  $k > n$ , se da  $e_k = 0$ .

Podemos introducir de igual manera a los polinomios de Schur, mediante la especialización consistente en sustituir  $x_i = 0$  para  $i \geq n$ . Sin embargo, daremos una definición equivalente, a partir de la cual es simple observar que los polinomios de Schur son simétricos.

**Definición A.2.4.** Dada una  $r$ -tupla de enteros no negativos,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ , denotaremos por  $a_\lambda$  a los **determinantes de Vandermonde generalizados**:

$$a_\lambda(x_1, \dots, x_r) = \det \begin{pmatrix} x_1^{\lambda_1} & x_2^{\lambda_1} & \dots & x_r^{\lambda_1} \\ x_1^{\lambda_2} & x_2^{\lambda_2} & \dots & x_r^{\lambda_2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{\lambda_r} & x_2^{\lambda_r} & \dots & x_r^{\lambda_r} \end{pmatrix}$$

Definamos también la **partición escalera** indexada por  $n$ ,  $\delta_n$ , como la partición

$$\delta_n = (n - 1, n - 2, \dots, 0).$$

Para cada  $\lambda$  partición de  $n$ , definamos el **polinomio de Schur** indexado por  $\lambda$  como:

$$s_\lambda(x) = \frac{a_{\lambda+\delta_n}(x)}{a_{\delta_n}(x)}$$

**Lema A.2.5.** Los polinomios de Schur son polinomios simétricos. Los polinomios de Schur obtenidos por la definición anterior coinciden con los obtenidos a partir de la especialización de las funciones de Schur.

Es sencillo ver que los polinomios de Schur son simétricos, puesto que la definición dada es el cociente de dos polinomios alternantes:

$$\sigma s_\lambda(x) = \frac{\sigma a_{\lambda+\delta_n}(x)}{\sigma a_{\delta_n}(x)} = \frac{\text{sgn}(\sigma) a_{\lambda+\delta_n}(x)}{\text{sgn}(\sigma) a_{\delta_n}(x)} = \frac{a_{\lambda+\delta_n}(x)}{a_{\delta_n}(x)} = s_\lambda(x)$$

Al tratarse de un determinante, la permutación de variables en un determinante de Vandermonde generalizado consiste en la multiplicación por un signo.

**Observación A.2.6.** Dado el lema A.2.5, los polinomios de Schur siguen siendo las funciones generatrices de los pesos de los tableaux semi-estándar, pero esta vez, para aquellos tableaux con entradas en  $\{1, \dots, n\}$ . Entonces, si  $\lambda$  tiene longitud mayor que  $n$ , como no existe ningún tableau semi-estándar de forma  $\lambda$  con entradas en  $\{1, \dots, n\}$ , se da que  $s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = 0$ .

### A.3 El algoritmo RSK

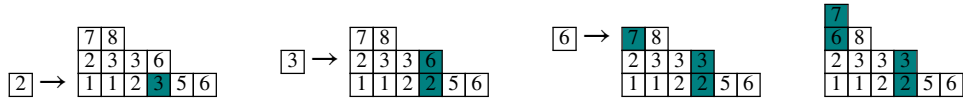
Esta sección está dedicada a presentar el algoritmo de Robinson-Schensted-Knuth (RSK para abreviar) sobre tableaux.

**Definición A.3.1.** Sea  $t$  un tableau semi-estándar (definición 2.1.2). Definimos el proceso de inserción de una entrada  $k$  en  $t$  de forma iterativa por filas. Por cada fila, empezando por la primera, y recorriéndola de izquierda a derecha, hacemos:

1. Comprobamos si  $k$  es mayor que cualquier elemento de la fila. En cuyo caso, añadimos una casilla al final de la fila y colocamos a  $k$  en esa casilla.
2. En caso contrario, sustituimos  $k$  por el primer elemento que sea mayor que  $k$  en esa fila.

3. El elemento que ha quedado sustituido se introduce en la siguiente fila, volviendo a empezar en 1. En caso de no haber siguiente fila, se crea una nueva fila y se coloca  $k$  en la nueva fila. Hemos terminado

**Ejemplo A.3.2.** Para insertar 2 en el tableau  $t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & 8 & & \\ \hline 2 & 3 & 3 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 6 & & \\ \hline \end{array}$ :



Obteniendo un nuevo tableau semi-estándar.

El proceso de inserción por filas es el que da origen al algoritmo y la correspondencia RSK.

**Observación A.3.3.** Recordemos que podemos entender toda permutación  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  como una matriz o arreglo de dos líneas. En la primera aparecen  $1, \dots, n$  ordenados de forma creciente, y en la segunda, aparecen las imágenes por  $\sigma$  de los elementos que hay encima en esa columna.

$$\sigma = (124)(36) \longleftrightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

**Definición A.3.4.** El algoritmo RSK aplicado a una permutación  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  consiste en insertar reiteradamente las entradas de la segunda fila de  $\sigma$  en el tableau vacío; a la vez que se genera otro tableau, cuyas entradas indican el orden de creación de nuevas casillas en el primer tableau.

El primer tableau se llama **tableau de inserción** y el segundo se llama **tableau de registro**.

**Ejemplo A.3.5.** Con la permutación del ejemplo anterior, conseguimos un par de tableaux, tras seis pasos de inserción:

$$\begin{array}{l} [2] \rightarrow \emptyset, \emptyset \quad [4] \rightarrow [2], [1] \quad [6] \rightarrow [24], [12] \quad [1] \rightarrow [246], [123] \\ [5] \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & & \\ \hline 1 & 4 & 6 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \end{array} \quad [3] \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 6 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline 5 & \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \end{array} \quad P = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & & \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline \end{array}, Q = \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & \\ \hline 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \end{array} \end{array}$$

**Teorema A.3.6 (Correspondencia RSK).** Tras aplicar el algoritmo RSK para una permutación de  $\mathbb{S}_n$ , obtenemos un par de tableaux estándar de misma forma. El conjunto de permutaciones  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  se encuentra en biyección el conjunto  $\{(P, Q)\}$  de pares de tableaux estándar de misma  $\lambda$ , variando  $\lambda$  entre las particiones de  $n$ .

Entonces, si  $f^\lambda$  es el número de tableaux estándar de forma  $\lambda$ , se tiene  $n! = \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2$ .

Ambos tableaux, de inserción y registro son fundamentales para la biyección de la correspondencia RSK. Un simple cálculo del algoritmo RSK para cada permutación de  $\mathbb{S}_3$  muestra que uno solo de los tableaux no determinan la partición  $\sigma$  de partida. Sin embargo, utilizando el par, sí es posible recuperar la partición inicial.

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} &\Rightarrow P_1 = \boxed{123} & Q_1 = \boxed{123} \\
 \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} &\Rightarrow P_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} & Q_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \\
 \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} &\Rightarrow P_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} & Q_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \\
 \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} &\Rightarrow P_4 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} & Q_4 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \\
 \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} &\Rightarrow P_5 = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} & Q_5 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \\
 \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} &\Rightarrow P_6 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} & Q_6 = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}
 \end{aligned}$$

# Bibliografía

- [1] François Bergeron, *Combinatoire algebrique*, LaCIM, Universite de Quebec à Montreal. versión de 8 avril, 2001.
- [2] Daniel Bump. *Lie groups*, volume 225 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.
- [3] William Fulton. *Young tableaux*, volume 35 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With applications to representation theory and geometry.
- [4] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.
- [5] Roe Goodman and Nolan R. Wallach. *Symmetry, representations, and invariants*, volume 255 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Dordrecht, 2009.
- [6] Gordon James and Martin Liebeck. *Representations and characters of groups*. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [7] Bruce E. Sagan. *The symmetric group*. The Wadsworth Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books Software, Pacific Grove, CA, 1991. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions.
- [8] Richard P. Stanley. *Enumerative combinatorics*. Vol. 2, volume 62 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. With a foreword by Gian-Carlo Rota and appendix 1 by Sergey Fomin.