



Universidad de Sevilla

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

UNA INTRODUCCIÓN AL
CÁLCULO DE VARIACIONES.
CONEXIONES CON
PROBLEMAS DIFERENCIALES

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

Autor: José Carlos Pérez Garrido

Tutora: María Ángeles Rodríguez Bellido

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Resumen | 5 |
| Abstract | 7 |
| Introducción | 9 |
| 1. La ecuación de Euler-Lagrange | 13 |
| 1.1. Introducción | 13 |
| 1.2. Primera formulación de la ecuación de Euler-Lagrange | 15 |
| 1.2.1. Caso $f(x, u, \xi) = f(\xi)$ | 21 |
| 1.2.2. Caso $f(x, u, \xi) = f(x, \xi)$ | 23 |
| 1.2.3. Caso $f(x, u, \xi) = f(u, \xi)$ | 25 |
| 1.2.4. Caso $f(x, u, \xi)$ dependiendo de todas las variables | 29 |
| 1.3. Segunda formulación de la ecuación de Euler-Lagrange | 30 |
| 2. Formulación Hamiltoniana | 35 |
| 2.1. Introducción | 35 |
| 2.2. Hamiltoniano. Resultados previos | 35 |
| 2.3. Formulación Hamiltoniana. Algunos ejemplos | 40 |
| 3. La ecuación de Hamilton-Jacobi | 45 |
| 3.1. Introducción | 45 |
| 3.2. Formulación de la ecuación de Hamilton-Jacobi | 45 |
| 4. Teoría de campos | 51 |
| 4.1. Introducción | 51 |
| 4.2. Estudio local de la teoría de campos | 52 |

| | |
|---|-----------|
| 5. Introducción a los métodos directos | 55 |
| 5.1. Introducción | 55 |
| 5.2. El caso modelo: la integral de Dirichlet | 57 |
| 5.3. Un teorema general de existencia | 62 |
| 5.4. Ecuaciones de Euler-Lagrange | 73 |
| 6. Aplicaciones del Cálculo de Variaciones | 83 |
| 6.1. Principio de Mínima Acción | 83 |
| 6.2. Ecuaciones de Maxwell | 86 |
| A. Espacios de funciones | 93 |
| B. Cálculo diferencial | 95 |
| C. Resultados de Análisis Funcional | 99 |

Resumen

El Cálculo de Variaciones es el campo de las Matemáticas que engloba conocimientos teóricos y técnicas que se usan con la idea fundamental de buscar máximos y mínimos (o más generalmente extremos relativos) de funcionales definidos sobre algún espacio funcional. Constituyen una generalización del cálculo elemental de máximos y mínimos de funciones reales de una variable.

En este trabajo se pretende desarrollar una introducción al Cálculo de Variaciones, intentando exponer los principales resultados que conforman esta teoría, así como mostrar algunas de sus aplicaciones, especialmente en el campo de la Física, y su conexión con problemas diferenciales.

El objetivo será ver bajo qué condiciones se puede resolver algunos problemas. Para ello, presentaremos varias condiciones necesarias y suficientes para la existencia y unicidad de solución de algunos problemas usando diferentes ecuaciones conocidas asociadas a dichos problemas (como puede ser la ecuación de Euler-Lagrange y la ecuación de Hamilton-Jacobi).

Abstract

Calculus of Variations is the field of Mathematics that encompasses theoretical knowledge and techniques that are used with the fundamental idea of searching for maximums and minimums (or more generally relative extremes) of functionals defined on some functional space. They constitute a generalization of the elementary calculus of maximums and minimums of real functions of a variable.

This assignment aims to develop an introduction to the Calculus of Variations, trying to expose the main results that make up this theory, as well as show some of its applications, especially in the field of Physics, and its connection with differential problems.

The objective will be to see under what conditions some problems can be solved. To do this, we will present several necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of some problems using different known equations associated with said problems (such as the Euler-Lagrange equation and the Hamilton-Jacobi equation).

Introducción

El Cálculo de Variaciones es el campo de las Matemáticas que engloba conocimientos teóricos y técnicas que se usan con la idea fundamental de buscar máximos y mínimos (o más generalmente extremos relativos) de funcionales definidos sobre algún espacio funcional. Constituyen una generalización del cálculo elemental de máximos y mínimos de funciones reales de una variable.

Esta teoría surgió a partir del problema de la curva braquistócrona o curva del descenso más rápido, planteado inicialmente por Johann Bernouilli (1696) aunque fue Leonhard Euler el primero que elaboró una teoría del Cálculo Variacional (1733). El objetivo de dicho problema es encontrar la curva entre dos puntos que es recorrida en menor tiempo por un cuerpo que comienza en el punto inicial con velocidad cero, y que debe desplazarse a lo largo de la curva hasta llegar al segundo punto, bajo acción de una fuerza de gravedad constante y suponiendo que no existe fricción (para más detalles, véase Ejemplo 1.2.14).

Adentrándonos en el cálculo diferencial, uno de los problemas típicos es el de encontrar el valor de x para el cual la función $f(x)$ alcanza un valor extremo (máximo o mínimo). En el Cálculo de Variaciones, el problema es encontrar una función $u(x)$ para la cual un funcional $J(u)$ alcance un valor extremo en un determinado conjunto.

El funcional $J(u)$ está compuesto por una integral que depende de x , de la función $u(x)$ y algunas de sus derivadas:

$$\underset{u}{\text{máx}} / \underset{u}{\text{mín}} \left\{ J(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)) dx \right\}$$

donde la función $u(x)$ pertenece a algún espacio de funciones (por ejemplo, un espacio de Banach o un espacio de Hilbert). En ocasiones, esta fórmula integral puede ser más complicada permitiendo a x ser un vector y por lo tanto, incluyendo derivadas parciales para u .

Para poder abordar este problema, empezaremos recordando algunos resultados vistos en la asignatura de Modelización Matemática (3^{er} curso del Grado en Matemáticas). Para ello, véase Introducción del Capítulo 1: dedicado a la ecuación de Euler-Lagrange. En la gran mayoría de resultados que probaremos, nos basaremos en conocimientos adquiridos tanto en la asignatura de Análisis Funcional y Ecuaciones en Derivadas Parciales como en la asignatura de Complementos de Modelización y Optimización Numérica (ambas del 4^o curso del Grado en Matemáticas). Más aún, tendremos que recurrir a resultados de Teoría de la Medida (vistos en la asignatura de Series de Funciones e Integral de Lebesgue del 2^o curso del Grado en Matemáticas) y a resultados de Análisis Funcional (vistos en la asignatura de Análisis Funcional del 3^{er} curso del Grado en Matemáticas).

Así, una vez introducido el tema de estudio, esta memoria se estructurará de la siguiente manera:

- El Capítulo 1 se basará en el estudio de dos formulaciones de la ecuación de Euler-Lagrange y su aplicación a diferentes problemas diferenciales: ejemplo de Weierstrass, desigualdad de Poincaré-Wirtinger, problema de la curva braquistócrona, problema de las superficies mínimas de revolución y derivación de la ley de reflexión en un espejo estacionario. Este capítulo es fundamental y juega un papel importante en el desarrollo que sigue para el estudio de problemas relacionados con la mecánica clásica, en el que destaca, el Principio de Mínima Acción que se verá en el Capítulo 6.
- El Capítulo 2 se centrará en el estudio del Hamiltoniano. Daremos un resultado de gran interés que nos llevará a la Formulación Hamiltoniana. Además, aplicaremos lo visto a un ejemplo relacionado con la mecánica clásica.
- El Capítulo 3 consistirá en la formulación de la ecuación de Hamilton-Jacobi que nos conducirá al estudio de la Teoría de Campos. Mostraremos

una condición necesaria y suficiente de existencia de mínimo, conocida como Teorema de Jacobi, que relaciona la ecuación de Hamilton-Jacobi con el sistema Hamiltoniano definido en el Capítulo 2.

- El Capítulo 4 desarrollará lo que se conoce como Teoría de Campos (que es el conjunto de principios y técnicas matemáticas que permiten estudiar la dinámica y distribución espacial de los campos físicos a través de la variación en el espacio y la evolución temporal de formas de materia modelizables que vendrán descritas por una densidad lagrangiana). Haremos un estudio local de la Teoría de Campos y la usaremos para el estudio de la desigualdad de Poincaré-Wirtinger desde otro punto de vista distinto al visto en el Capítulo 1.
- El Capítulo 5 se basará en el estudio del Cálculo de Variaciones pero a través de los métodos directos (que consisten en probar la existencia de un mínimo de un determinado funcional pero bajo condiciones de poca regularidad sobre los datos). El procedimiento habitual que seguiremos en este capítulo será el método conocido como compacidad-unicidad (basado en dos pasos: compacidad y semicontinuidad inferior). Estudiaremos el problema de la integral de Dirichlet, el ejemplo de Weierstrass, el ejemplo de Bolza y el problema de las superficies mínimas de revolución a partir de un resultado general de existencia que daremos. Finalizaremos el capítulo, volviendo al estudio de las ecuaciones de Euler-Lagrange pero desde el punto de vista de los métodos directos.
- El Capítulo 6 se centrará en la deducción del Principio de Mínima Acción y las ecuaciones de Maxwell basándonos en el Cálculo de Variaciones.

Podemos decir que los capítulos 1, 2 y 3 están bastante relacionados pues las ecuaciones de Euler-Lagrange o la ecuación de Hamilton-Jacobi aparecen sobre todo en el contexto de la mecánica clásica en relación con el principio de mínima acción, también aparecen en teoría clásica de campos (electromagnetismo y teoría general de la relatividad) y sirven de base para la formulación de integrales de camino para la teoría cuántica de campos y su uso dependerá exclusivamente de los datos que tengamos.

Por otro lado, la Formulación Hamiltoniana que se desarrolla a lo largo del capítulo 2 da lugar a la ecuación de Hamilton-Jacobi que permite una formulación alternativa a la Formulación Lagrangiana (el empleo de esta ecuación resulta ventajoso cuando se conoce alguna integral de movimiento).

A partir de estos tres capítulos, damos un salto hacia la teoría de campos que es una generalización de todo lo anterior (en el que tratamos de rebajar la regularidad de la función que forma parte del funcional). A continuación, en el capítulo 5, nos damos cuenta que podemos rebajar la regularidad y condiciones de convexidad exigida en capítulos anteriores y se describen condiciones menos regulares que permiten obtener resultados similares a los de los capítulos anteriores. Finalmente, acabamos con un capítulo de aplicaciones en el que se tratarán dos ejemplos relacionados con la mecánica clásica.

Por último, cabe mencionar que existen tres apéndices al final de esta memoria dedicados a la notación que usaremos, a conceptos y resultados del Cálculo Diferencial y a diferentes resultados de Análisis Funcional vistos en otras asignaturas del Grado e incluso en asignaturas de la extinguida Licenciatura en Matemáticas, que se usan en esta memoria o ayudan a su mejor comprensión. Además, también se puede encontrar una extensa bibliografía en la que nos hemos basado para el desarrollo de esta memoria.

Capítulo 1

La ecuación de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son las condiciones bajo las cuales cierto tipo de funcional asociado a un problema variacional alcanza un extremo. Aparecen sobre todo en el contexto de la mecánica clásica en relación con el principio de mínima acción. También aparecen en teoría clásica de campos (electromagnetismo y teoría general de la relatividad) y sirven de base para la formulación de integrales de camino para la teoría cuántica de campos.

1.1. Introducción

En este capítulo, vamos a considerar el siguiente problema:

$$\inf\{J(u) : u \in \mathcal{C}^1([a, b]), u(a) = \alpha, u(b) = \beta\} \quad (1.1)$$

donde el funcional J viene dado por:

$$J(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx$$

con $f \in \mathcal{C}^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Antes de desarrollar resultados relacionados con los métodos clásicos, podríamos fijarnos en la analogía que existe con las minimizaciones en \mathbb{R}^n , que pueden ser representadas como sigue

$$\inf\{F(x) : x \in X \subset \mathbb{R}^n\} \quad (1.2)$$

El objetivo de los métodos clásicos consiste en encontrar $\bar{x} \in X$ cumpliendo que $F'(\bar{x}) = 0$ y posteriormente, mediante el estudio de las derivadas sucesivas de F , determinar el punto crítico \bar{x} que puede ser un máximo o mínimo absoluto, un máximo o mínimo local o un punto de silla.

A continuación, enunciamos y demostramos una herramienta de gran utilidad para el desarrollo de los métodos clásicos:

Teorema 1.1.1 (Teorema Fundamental del Cálculo Variacional) *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto no vacío y sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_{\Omega} u(x)\psi(x) dx = 0 \tag{1.3}$$

para todo $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Entonces, $u(x) = 0$ para casi todo $x \in \Omega$.

Demostración: Vamos a hacer la prueba en un caso más regular para $u \in L^2(\Omega)$. La demostración del Teorema 1.1.1 cuando $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ puede ser consultada en [4].

Sea $u \in L^2(\Omega)$ tal que podemos encontrar $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ de forma que

$$\|u - \psi\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$$

Usando (1.3) se deduce que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} u^2 dx = \int_{\Omega} u(u - \psi) dx$$

Combinando la igualdad anterior con la desigualdad de Hölder, se tiene que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|u - \psi\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

Tomamos $\varepsilon > 0$ arbitrario y deducimos que $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 0$ y de este modo concluimos la demostración. \square

Para terminar esta sección, veamos un resultado de gran utilidad para funciones de clase \mathcal{C}^1 (visto en la asignatura de Modelización Matemática). Esto es una especie de Corolario del Teorema 1.1.1 ya que casi es un caso particular para $\Omega = [a, b]$ y funciones de $\mathcal{C}^0(\Omega)$ en lugar de $L^1_{loc}(\Omega)$:

Lema 1.1.2 (Lema de Du Bois-Reymond) Sea $g \in C^0([a, b])$ y supongamos que

$$\int_a^b g(t)h(t) dt = 0$$

para toda $h \in C^1([a, b])$ con $h(a) = h(b) = 0$.

Entonces, $g \equiv 0$ en $[a, b]$.

Demostración: Razonamos por reducción al absurdo. Si el resultado no es cierto, debe existir $t_0 \in [a, b]$ tal que $g(t_0) \neq 0$. Por continuidad, tendremos entonces que existe un intervalo $[c, d] \subset [a, b]$ con $c < d$ tal que $g \neq 0$ en (c, d) . Cambiando g por $-g$ si fuera necesario, podemos de hecho suponer que $g(t) > 0$ para todo $t \in (c, d)$. Definimos entonces $h \in C^1([a, b])$ como sigue:

$$h(t) = \begin{cases} (t-c)^2(d-t)^2 & \text{si } t \in [c, d] \\ 0 & \text{si } t \in [a, b] \setminus [c, d] \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que h y g son estrictamente positivas en (c, d) y que, fuera de este intervalo, h vale cero, se tiene

$$\int_a^b g(t)h(t) dt = \int_c^d g(t)h(t) dt > 0$$

Pero $h \in C^1([a, b])$ y se anula en a y en b , por lo que la integral anterior debería ser nula. Esta contradicción prueba el resultado. \square

1.2. Primera formulación de la ecuación de Euler-Lagrange

Para comenzar con esta sección, vamos a enunciar un resultado de carácter general que nos hará falta en la demostración del principal resultado de este apartado (consultar Apéndice B para entender la notación):

Lema 1.2.1 Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $f \in C^1(\Omega)$.

(a) La función f es convexa si y sólo si

$$f(x) \geq f(y) + \delta f(y, x - y) \tag{1.4}$$

para todo $x, y \in \Omega$.

(b) Si $f \in C^2(\Omega)$, entonces la función f es convexa si y sólo si $\delta^2 f$ es semidefinida positiva.

Demostración:

a) Antes de comenzar, si $\Omega = \mathbb{R}^N$, cambiamos la notación $\delta f = \nabla f$ y $\delta^2 f = Hf$ donde H denota el Hessiano. Fijemos $x, y \in \Omega$. Si f es convexa en Ω , entonces, dado $\varepsilon \in (0, 1)$, se tiene

$$\frac{f(y + \varepsilon(x - y)) - f(y)}{\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon f(x) + (1 - \varepsilon)f(y) - f(y)}{\varepsilon} = f(x) - f(y)$$

Tomando límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ obtenemos la desigualdad (1.4).

Recíprocamente, supongamos que (1.4) es cierta. Veamos que f es convexa en Ω . Sean $x, y \in \Omega$ y $\alpha \in [0, 1]$, entonces, se tiene:

$$\begin{cases} f(x) \geq f(y + \alpha(x - y)) + \delta f(y + \alpha(x - y), (1 - \alpha)(x - y)) \\ f(y) \geq f(y + \alpha(x - y)) + \delta f(y + \alpha(x - y), -\alpha(x - y)) \end{cases}$$

Multiplicando las desigualdades anteriores respectivamente por α y $1 - \alpha$ y usando la linealidad de la derivada G-diferencial, se llega a que

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

y por tanto, f es convexa en Ω .

b) Supongamos que f satisface

$$\delta^2 f(x, y - x, y - x) \geq 0 \tag{1.5}$$

para todo $x, y \in \Omega$, es decir, $\delta^2 f$ es semidefinida positiva. Veamos que f es convexa usando la Proposición B.6. Sean $x, y \in \Omega$. Si aplicamos el Teorema B.4 obtenemos la existencia de $\xi \in (x, y)$ tal que se tiene

$$f(y) - f(x) - \delta f(x, y - x) = \frac{1}{2} \delta^2 f(\xi, y - x, y - x)$$

Obsérvese que $\xi = x + \beta(y - x)$, con $\beta \in (0, 1)$. Así, usando la linealidad de $\delta^2 f$ respecto de la segunda y de la tercera componente, obtenemos que

$$\delta^2 f(\xi, y - x, y - x) = \delta^2 f(\xi, -\frac{1}{\beta}(x - \xi), -\frac{1}{\beta}(x - \xi)) = \frac{1}{\beta^2} \delta^2 f(\xi, x - \xi, x - \xi)$$

que junto al apartado a), demuestra que f es convexa en Ω .

Veamos ahora que si f es convexa en Ω , usando la Proposición B.6, entonces se tiene (1.5). Sean $x, y \in \Omega$ y así,

$$\delta^2 f(x, y - x, y - x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta f(x + \varepsilon(y - x), y - x) - \delta f(x, y - x)}{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta f(x + \varepsilon(y - x), \varepsilon(y - x)) - \delta f(x, \varepsilon(y - x))}{\varepsilon^2} \geq 0$$

Esta última desigualdad prueba el resultado. \square

El principal resultado de este capítulo y en el que nos basaremos para los posteriores desarrollos de formulaciones es el siguiente:

Teorema 1.2.2 (Primera formulación de la ecuación de Euler-Lagrange)

Consideramos $f \in \mathcal{C}^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $f = f(x, u, \xi)$ y el problema de minimización:

$$\inf_{u \in X} \left\{ J(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx \right\} = m \quad (1.6)$$

donde $X = \{u \in \mathcal{C}^1([a, b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$.

Entonces, se tiene que:

(a) Si (1.6) admite como solución $\bar{u} \in X \cap \mathcal{C}^2([a, b])$, se cumple que:

$$\frac{d}{dx} [f_\xi(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))] = f_u(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x)), x \in (a, b) \quad (1.7)$$

o dicho de otro modo,

$$f_{\xi\xi}(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))\bar{u}''(x) + f_{u\xi}(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))\bar{u}'(x) + f_{x\xi}(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x)) = f_u(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))$$

donde denotamos $f_\xi = \frac{\partial f}{\partial \xi}$, $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}$, $f_{\xi\xi} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$, $f_{x\xi} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \xi}$ y $f_{u\xi} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \xi}$.

(b) Por otra parte, si \bar{u} satisface (1.7) y si la función $(u, \xi) \rightarrow f(x, u, \xi)$ es convexa para todo $x \in [a, b]$, entonces \bar{u} es solución de (1.6).

(c) Más aún, si la función $(u, \xi) \rightarrow f(x, u, \xi)$ es estrictamente convexa para todo $x \in [a, b]$ entonces si existe \bar{u} solución de (1.6), se tiene que \bar{u} es única.

Demostración:

(a) Sea \bar{u} la solución de (1.6) para todo $x \in X$, entonces tenemos que

$$J(\bar{u}) \leq J(\bar{u} + hv)$$

para todo $h \in \mathbb{R}$ y para todo $v \in \mathcal{C}^1([a, b])$ tal que $v(a) = v(b) = 0$. A continuación, denotamos $F(h) = J(\bar{u} + hv) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ de forma que $F(0) \leq F(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$. De aquí se deduce que

$$F'(0) = 0$$

Ahora, aplicando que $F'(0) = 0$ se llega a que

$$\int_a^b [f_\xi(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))v'(x) + f_u(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))v(x)] dx = 0 \quad (1.8)$$

Integrando por partes (1.8), obtenemos la siguiente igualdad:

$$\int_a^b \left[-\frac{d}{dx} [f_\xi(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))] + f_u(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x)) \right] v(x) dx = 0$$

Finalmente, aplicando el Lema 1.1.2 se tiene (1.7).

(b) Sea $\bar{u} \in X$. Como la función $(u, \xi) \rightarrow f(x, u, \xi)$ es convexa para todo $x \in [a, b]$. Entonces, se tiene del Lema 1.2.1 que

$$f(x, u, u') \geq f(x, \bar{u}, \bar{u}') + f_u(x, \bar{u}, \bar{u}')(u - \bar{u}) + f_\xi(x, \bar{u}, \bar{u}')(u' - \bar{u}')$$

para todo $x \in X$. Integrando la expresión anterior, obtenemos que

$$J(u) \geq J(\bar{u}) + \int_a^b [f_u(x, \bar{u}, \bar{u}')(u - \bar{u}) + f_\xi(x, \bar{u}, \bar{u}')(u' - \bar{u}')] dx$$

Integrando por partes el segundo miembro de la integral y teniendo en cuenta que, $u(a) - \bar{u}(a) = u(b) - \bar{u}(b) = 0$, se llega a que

$$J(u) \geq J(\bar{u}) + \int_a^b \left[f_u(x, \bar{u}, \bar{u}') - \frac{d}{dx} f_\xi(x, \bar{u}, \bar{u}') \right] (u - \bar{u}) dx$$

Finalmente, usando (1.7), obtenemos que $J(u) \geq J(\bar{u})$, que es lo que queríamos probar.

(c) Consideramos $u, v \in X$ dos soluciones de (1.6) y veamos que son iguales. Para ello, definimos

$$w = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v = \frac{1}{2}(u + v)$$

tal que $w \in X$. Aplicando la convexidad de $(u, \xi) \rightarrow f(x, u, \xi)$, obtenemos que

$$\frac{1}{2}f(x, u, u') + \frac{1}{2}f(x, v, v') \geq f\left(x, \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v, \frac{1}{2}u' + \frac{1}{2}v'\right) = f(x, w, w')$$

de forma que

$$m = \frac{1}{2}J(u) + \frac{1}{2}J(v) \geq J(w) \geq m$$

donde

$$m = \inf_{u \in X} \left\{ J(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx \right\}$$

Luego, se tiene que

$$\int_a^b \left[\frac{1}{2}f(x, u, u') + \frac{1}{2}f(x, v, v') - f\left(x, \frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(u'+v')\right) \right] dx = 0$$

Entonces, gracias a la convexidad estricta de f , el integrando es positivo a menos que $u = v$ y $u' = v'$. De aquí se deduce que $u \equiv v$, como queríamos probar. \square

Nota 1.2.3 (Sobre la demostración del Teorema para la ecuación de Euler-Lagrange)

- Una observación inmediata es el hecho de que este teorema **no proporciona un resultado de existencia** (consultar Ejemplo 1.2.6). Sin embargo, en determinados casos, si f es convexa entonces se puede dar un resultado de existencia e incluso calcular la solución explícita (véase por ejemplo Proposición 1.2.5).
- Hemos visto que no es razonable esperar que la solución de (1.6) pertenezca a $C^2([a, b])$ o incluso a $C^1([a, b])$ (consultar Ejemplo 1.2.7).
- Si $(u, \xi) \rightarrow f(x, u, \xi)$ no es convexa para cada $(x, u) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ entonces la solución de (1.7) no es necesariamente un máximo absoluto de (1.6). Puede ser un mínimo local, máximo local,... Incluso, en ocasiones, puede ser un punto estacionario. (consultar Ejemplo 1.2.13).
- El teorema se puede generalizar para los siguientes casos:
 - a) Si $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ para $N \geq 2$, entonces la ecuación de Euler-Lagrange da lugar a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

- b) Si $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ para $N \geq 2$, entonces la ecuación de Euler-Lagrange da lugar a una ecuación en derivadas parciales.
- c) Si $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ para $N \geq 2$ y $f = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(N)})$, entonces la ecuación de Euler-Lagrange da a lugar a un sistema de ecuaciones en derivadas parciales.
- d) Se pueden añadir otros tipos de condiciones de contorno, por ejemplo, $u'(a) = \alpha$ y $u'(b) = \beta$.

Antes de seguir con diferentes tipos de formulaciones, vamos a profundizar un poco más en el Teorema para la ecuación de Euler Lagrange [Teorema 1.2.2]. El objetivo será particularizar este teorema para distintas propiedades que pueda cumplir la función f que se considere. Para ello, desarrollemos antes un resultado fundamental de Análisis Matemático, como es la desigualdad de Jensen.

Teorema 1.2.4 (Desigualdad de Jensen) *Sea μ una medida positiva sobre una σ -álgebra \mathcal{M} en un conjunto Ω , tal que $\mu(\Omega) = 1$. Si f es una función real en $L^1(\mu)$, si $a < f(x) < b$ para todo $x \in \Omega$, y si φ es convexa en (a, b) , entonces*

$$\varphi \left(\int_{\Omega} f d\mu \right) \leq \int_{\Omega} (\varphi \circ f) d\mu \quad (1.9)$$

Demostración: Pongamos $t = \int_{\Omega} f d\mu$. Entonces, $a < t < b$. Por ser φ convexa se cumple

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t} \quad (1.10)$$

si $a < s < t < u < b$. Si β es el supremo de los cociente del primer miembro a la izquierda de (1.10), con $a < s < t$, entonces, β no es más grande que ninguno de los cocientes del segundo miembro de (1.10), para cualquier $u \in (t, b)$. Se deduce que

$$\varphi(u) \geq \varphi(t) + \beta(u - t) \quad (a < t < u < b)$$

Por tanto,

$$\varphi(f(x)) - \varphi(t) - \beta(f(x) - t) \geq 0 \quad (1.11)$$

para todo $x \in \Omega$. Como φ es continua, $\varphi \circ f$ es medible. Si integramos ambos miembros de (1.11) con respecto a μ , se obtiene (1.9) por nuestra elección de t y la hipótesis $\mu(\Omega) = 1$. \square

Ahora, empezamos a particularizar la ecuación de Euler-Lagrange para diferentes casos dependiendo de las variables que intervienen en la función f a considerar.

1.2.1. Caso $f(x, u, \xi) = f(\xi)$

Un caso especial de una formulación diferente de la ecuación de Euler-Lagrange es el de la siguiente proposición:

Proposición 1.2.5 *Bajo las hipótesis del Teorema 1.2.2, supongamos que $f(x, u, \xi) = f(\xi)$ entonces la ecuación de Euler-Lagrange se reduce a*

$$\frac{d}{dx}[f'(u')] = 0, \quad \text{es decir, } f'(u') = \text{cte} \quad (1.12)$$

Además, si f es convexa

$$\bar{u}(x) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}(x - a) + \alpha \quad (1.13)$$

es solución de (1.12) satisfaciendo $\bar{u}(a) = \alpha$ y $\bar{u}(b) = \beta$.

Demostración: La primera parte es evidente a partir de (1.7). Veamos la segunda parte. Como f es convexa entonces \bar{u} es un minimizador. De la desigualdad de Jensen [Teorema 1.2.4] se tiene que para $u \in C^1([a, b])$ verificando $u(a) = \alpha$ y $u(b) = \beta$ que

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u'(x)) dx &\geq f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b u'(x) dx\right) = f\left(\frac{u(b) - u(a)}{b-a}\right) = \\ &= f\left(\frac{\beta - \alpha}{b-a}\right) = f(\bar{u}'(x)) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(\bar{u}'(x)) dx \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. \square

A continuación, suponemos bajo las hipótesis de la Proposición 1.2.5, que f no es convexa. Entonces, el problema (1.6) no tiene, en general, solución por lo que \bar{u} no es necesariamente un minimizador. Vamos a ver que en este caso particular, se trata de un maximizador de una integral. Para ello, estudiemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.2.6 *Consideremos $f(\xi) = e^{-\xi^2}$ (que no es convexa) y el problema*

$$\inf_{u \in X} \left\{ J(u) = \int_0^1 f(u'(x)) dx \right\} = m \quad (1.14)$$

donde $X = \{u \in C^1([0, 1]) : u(0) = u(1) = 0\}$. Tenemos por (1.13) que $\bar{u} \equiv 0$ de forma que (1.14) no tendrá como solución un minimizador como veremos. Supongamos, por el momento, que $m = 0$, entonces, no existe $u \in X$ tal que

$$\int_0^1 e^{-(u'(x))^2} dx = 0$$

Esto nos lleva a que (1.14) no tiene solución. Si probamos que $m = 0$, obtenemos lo que queremos. Tomamos $n \in \mathbb{N}$ y definimos

$$u_n(x) = n \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{n}{4}$$

tal que $u_n \in X$ y

$$J(u_n) = \int_0^1 e^{-4n^2(x-1/2)^2} dx = \frac{1}{2n} \int_{-n}^n e^{-y^2} dy \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Por tanto, $m = 0$ como queríamos probar. \square

En este ejemplo, bajo las hipótesis de la Proposición 1.2.5, vamos a ver que el problema (1.14) tiene una solución que no es de clase C^1 .

Ejemplo 1.2.7 Consideremos la función $f(\xi) = (\xi^2 - 1)^2$, el problema

$$\inf_{u \in X} \left\{ J(u) = \int_0^1 f(u'(x)) dx \right\} = m \quad (1.15)$$

donde $X = \{u \in C^1([0, 1]) : u(0) = u(1) = 0\}$. Relacionamos el problema (1.15) con el siguiente problema

$$\inf_{u \in X_{a \text{ trozos}}} \left\{ J(u) = \int_0^1 f(u'(x)) dx \right\} = m_{a \text{ trozos}} \quad (1.16)$$

donde $X_{a \text{ trozos}} = \{u \in C^1_{a \text{ trozos}} : u(0) = u(1) = 0\}$. Este problema tiene como solución

$$v(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ 1 - x & \text{si } x \in (1/2, 1] \end{cases}$$

tal que v es de clase C^1 satisfaciendo que $v(0) = v(1) = 0$, lo cual nos lleva a que $J(v) = 0$ que implica que $m_{a \text{ trozos}} = 0$.

Supongamos por un momento que no solamente hemos probado que $m_{a \text{ trozos}} = 0$, supongamos que hemos probado también que $m = 0$. Esto implicaría inmediatamente que el problema (1.15) no tiene solución. Esto nos lleva a que $|u'| = 1$ pero no puede existir ninguna función $u \in X$ que satisfaga que $|u'| = 1$ por la continuidad de la derivada. Veamos realmente que $m = 0$. Consideramos la siguiente sucesión de funciones:

$$u_n(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1/2 - 1/n] \\ -2n^2 \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 - 4n \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - x + 1 & \text{si } x \in (1/2 - 1/n, 1/2] \\ 1 - x & \text{si } x \in (1/2, 1] \end{cases}$$

Obsérvese que $u_n \in X$ y

$$J(u_n) = \int_0^1 f(u'_n(x)) dx = \int_{1/2-1/n}^{1/2} f(u'_n(x)) dx \leq \frac{4}{n} \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Esto implica que $m = 0$. □

A partir de este ejemplo, podemos concluir con la siguiente observación:

Observación 1.2.8 *Se tiene que la ecuación de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dx} [u'((u')^2 - 1)] = 0$$

tiene como solución $\bar{u} \equiv 0$ pero que no es un mínimo ya que $J(0) = 1$.

1.2.2. Caso $f(x, u, \xi) = f(x, \xi)$

Ahora, seguimos con la ecuación de Euler-Lagrange, en un caso diferente al de la Proposición 1.2.5:

Proposición 1.2.9 *Bajo las hipótesis del Teorema 1.2.2, supongamos que $f(x, u, \xi) = f(x, \xi)$ entonces la ecuación de Euler-Lagrange se reduce a*

$$\frac{d}{dx} [f_\xi(x, u')] = 0, \quad \text{es decir, } f_\xi(x, u') = \text{cte} \quad (1.17)$$

Demostración: Inmediata a partir de (1.7). □

Nota 1.2.10 La ecuación (1.17) es más difícil de resolver que las anteriores, en general, no tiene una solución tan simple como la solución (1.13) de la ecuación (1.12).

El siguiente ejemplo que vamos a estudiar, bajo las hipótesis de la Proposición 1.2.9 es conocido como ejemplo de Weierstrass:

Ejemplo 1.2.11 (Ejemplo de Weierstrass) Considérese $f(x, \xi) = x\xi^2$ (notemos que $\xi \rightarrow f(x, \xi)$ es convexa para cada $x \in [0, 1]$ y estrictamente convexa si $x \in (0, 1]$) y el problema

$$\inf_{u \in X} \left\{ J(u) = \int_0^1 f(x, u'(x)) dx \right\} = m \quad (1.18)$$

donde $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0, 1] : u(0) = 1, u(1) = 0\}$. Veamos que el problema (1.18) no tiene solución de clase \mathcal{C}^1 o $\mathcal{C}_{a \text{ trozos}}^1$. En este caso, la ecuación de Euler-Lagrange sería

$$(xu')' = 0 \Rightarrow u' = \frac{c}{x} \Rightarrow u(x) = c \log(x) + d, x \in (0, 1)$$

donde c y d son constantes. Observemos, en primer lugar, que u no puede satisfacer que $u(0) = 1$ y $u(1) = 0$. Asociamos al problema (1.18) el problema

$$\inf_{u \in X_{a \text{ trozos}}} \left\{ J(u) = \int_0^1 f(x, u'(x)) dx \right\} = m_{a \text{ trozos}} \quad (1.19)$$

donde $X_{a \text{ trozos}} = \{u \in \mathcal{C}_{a \text{ trozos}}^1 : u(0) = 1, u(1) = 0\}$. Vamos a probar que ni (1.18) ni (1.19) tienen minimizador. Para ambos casos, basta demostrar que $m = m_{a \text{ trozos}} = 0$. Si ya supiésemos que $m = m_{a \text{ trozos}} = 0$, entonces existiría $v \in \mathcal{C}_{a \text{ trozos}}^1$ satisfaciendo que $J(v) = 0$ y esto implicaría que $v' = 0$ para casi todo $x \in (0, 1)$. Como $v \in X_{a \text{ trozos}}$, debe ser continua y $v(1) = 0$ entonces deducimos que $v \equiv 0$ pero esto da lugar a contradicción con la otra condición de contorno ($v(0) = 1$).

En primer lugar, veamos que $m_{a \text{ trozos}} = 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos la siguiente sucesión de funciones:

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ \frac{-\log x}{\log n} & \text{si } (1/n, 1] \end{cases}$$

Obsérvese que $u_n \in \mathcal{C}_{a\text{ trozos}}^1$, $u_n(0) = 1, u_n(1) = 0$ y

$$J(u_n) = \frac{1}{\log n} \longrightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Esto implica que $m_{a\text{ trozos}} = 0$ y así, podemos concluir el ejemplo.

Finalmente, probemos que $m = 0$. Consideremos la siguiente sucesión de funciones:

$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{-n^2}{\log n}x^2 + \frac{n}{\log n}x + 1 & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ \frac{-\log x}{\log n} & \text{si } (1/n, 1] \end{cases}$$

Obsérvese que $u_n \in X$ y

$$u'_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{\log n}(1 - 2nx) & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ \frac{-1}{x \log n} & \text{si } (1/n, 1] \end{cases}$$

De aquí, deducimos que

$$0 \leq J(u_n) \leq \frac{n^2}{\log^2 n} \int_0^{1/n} x(1 - 2nx)^2 dx + \frac{1}{\log^2 n} \int_{1/n}^1 \frac{dx}{x} \longrightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Esto implica que $m = 0$, como queríamos probar. \square

1.2.3. Caso $f(x, u, \xi) = f(u, \xi)$

Finalmente, estudiaremos un último caso particular de la ecuación de Euler-Lagrange, centrándonos, en tres problemas clásicos: la desigualdad de Poincaré-Wirtinger, el problema de la curva braquistócona y las superficies mínimas de revolución. Este caso es más difícil de tratar que todos los casos precedentes. Sin embargo, posee una propiedad importante que no se presenta en el caso general visto en el Teorema 1.2.2. Dicha propiedad viene dada por la Proposición 1.2.12:

Proposición 1.2.12 *Bajo las hipótesis del Teorema 1.2.2, supogamos que $f(x, u, \xi) = f(u, \xi)$ entonces la ecuación de Euler-Lagrange se reduce a*

$$\frac{d}{dx}[f_\xi(u, u')] = f_u(u, u') \quad (1.20)$$

Además, de acuerdo con el Teorema 1.2.2, podemos reescribirlo como

$$f(u, u') - u' f_\xi(u, u') = cte \quad (1.21)$$

Demostración: La prueba es relativamente fácil. Empezamos derivando:

$$\frac{d}{dx}[f(u, u')] = f_u(u, u')u + f_\xi(u, u')u''$$

Ahora, reescribimos y desarrollamos la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f(u, u') - u' f_\xi(u, u')] &= \frac{d}{dx}[f(u, u')] - \frac{d}{dx}[u' f_\xi(u, u')] = \\ &= f_u(u, u')u' + f_\xi(u, u')u'' - u'' f_\xi(u, u') - u' \frac{d}{dx}[f_\xi(u, u')] \end{aligned}$$

Finalmente, teniendo en cuenta (1.20), se llega a que:

$$\frac{d}{dx}[f(u, u') - u' f_\xi(u, u')] = 0$$

lo que implica que

$$f(u, u') - u' f_\xi(u, u') = cte$$

como queríamos demostrar. \square

Ahora, empezamos a profundizar en cada ejemplo, comencemos estudiando la desigualdad de Poincaré-Wirtinger:

Ejemplo 1.2.13 (Desigualdad de Poincaré-Wirtinger) *Veamos que*

$$\int_a^b u'^2 dx \geq \left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2 \int_a^b u^2 dx$$

para cada u verificando que $u(a) = u(b) = 0$. Mediante un cambio de variable, se reduce el estudio al caso $a = 0$ y $b = 1$. Vamos a reescribir el problema. Para ello, tomamos $\lambda \geq 0$, $f_\lambda(u, \xi) = (\xi^2 - \lambda^2 u^2)/2$ de forma que el problema sería

$$\inf_{u \in X} \left\{ J_\lambda(u) = \int_0^1 f_\lambda(u(x), u'(x)) dx \right\} = m_\lambda \quad (1.22)$$

donde $X = \{u \in C^1([0, 1]) : u(0) = u(1) = 0\}$. Observemos que $\xi \rightarrow f_\lambda(u, \xi)$ es convexa mientras que $(u, \xi) \rightarrow f_\lambda(u, \xi)$ no lo es. Entonces, la ecuación de Euler-Lagrange usando (1.20) se reduce a

$$u'' + \lambda^2 u = 0$$

y de acuerdo con (1.21) se puede escribir como

$$u'^2 + \lambda^2 u^2 = cte$$

Para concluir el ejemplo, basta resolver el problema de autovalores anterior. Distinguiamos varios casos:

- Si $\lambda \leq \pi$ entonces $m_\lambda = 0$, lo que implica, en particular, que

$$\int_0^1 u'^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 u^2 dx$$

- Si $\lambda < \pi$ entonces $u_0 \equiv 0$ es el único minimizador de (1.22).
- Si $\lambda = \pi$, entonces (1.22) tiene infinitos minimizadores que son de la forma $u_\alpha(x) = \alpha \cdot \sin(\pi x)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Si $\lambda > \pi$ entonces $m_\lambda = -\infty$, lo que implica que (1.22) no tiene solución. Para ver este hecho, es necesario elegir u_α como antes y observar que si $\lambda > \pi$ entonces se tiene que

$$J_\lambda(u_\alpha) = \alpha^2 \int_0^1 [\pi^2 \cos^2(\pi x) - \lambda^2 \sin^2(\pi x)] dx \longrightarrow -\infty$$

cuando $\alpha \rightarrow \infty$.

De este modo, tras resolver el problema de autovalores, concluimos la demostración de la desigualdad de Poincaré-Wirtinger. \square

A continuación, estudiemos en profundidad el ejemplo de la curva braquistócrona:

Ejemplo 1.2.14 (Curva braquistócrona) La función a considerar es la siguiente

$$f(u, \xi) = \frac{\sqrt{1 + \xi^2}}{\sqrt{u}}$$

(que es convexa) junto con el problema

$$\inf_{u \in X} \left\{ J(u) = \int_0^b f(u(x), u'(x)) dx \right\} = m \quad (1.23)$$

donde $X = \{u \in C^1([0, b]) : u(0) = 0, u(b) = \beta \text{ y } u(x) > 0, \forall x \in (0, b]\}$. La ecuación de Euler-Lagrange y su escritura de acuerdo con la Proposición 1.2.12 nos da

$$\left[\frac{u'}{\sqrt{u}\sqrt{1+u'^2}} \right]' = -\frac{\sqrt{1+u'^2}}{2\sqrt{u^3}}$$

De nuevo, gracias a la Proposición 1.2.12, se tiene que:

$$\frac{\sqrt{1+u'^2}}{\sqrt{u}} - u' \left[\frac{u'}{\sqrt{u}\sqrt{1+u'^2}} \right] = cte$$

Esto nos lleva a que

$$u(1+u'^2) = 2\mu$$

donde μ es una cierta constante positiva. La solución es una "cicloide" y viene dada de forma implícita por

$$u(x) = \mu(1 - \cos(\theta^{-1}(x)))$$

donde

$$\theta(t) = \mu(t - \sin(t))$$

Notemos que $u(0) = 0$. Esto nos obliga a elegir μ satisfaciendo que $u(b) = \beta$. Finalmente, hemos encontrado expresión de la solución de la curva braquistócrona. \square

Finalmente, estudiamos brevemente un ejemplo sobre las superficies mínimas de revolución:

Ejemplo 1.2.15 (Superficies mínimas de revolución) La función a considerar es la siguiente

$$f(u, \xi) = 2\pi u \sqrt{1 + \xi^2}$$

(que es convexa) y el problema de minimización (que corresponde a la minimización del área de una superficie de revolución) es

$$\inf_{u \in X} \left\{ J(u) = \int_a^b f(u(x), u'(x)) dx \right\} = m \quad (1.24)$$

donde $X = \{u \in C^1([a, b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta, u > 0\}$ tales que $\alpha, \beta > 0$. De nuevo, como en los ejemplos anteriores, la ecuación de Euler-Lagrange y su escritura de acuerdo con el Teorema 1.2.2 nos da

$$\left[\frac{u'u}{\sqrt{1+u'^2}} \right]' = \sqrt{1+u'^2} \iff u''u = 1 + u'^2$$

$$u\sqrt{1+u'^2} - u' \frac{u'u}{\sqrt{1+u'^2}} = \lambda = cte$$

Esto nos lleva a que

$$u'^2 = \frac{u^2}{\lambda^2} - 1$$

Las soluciones, si existen (dependen de a, b, α, β) y son de la forma

$$u(x) = \lambda \cosh \left(\frac{x}{\lambda} + \mu \right)$$

donde μ es una cierta constante positiva.

Por tanto, de este modo se concluye una idea de la obtención de un minimizador para el cálculo de áreas de superficies de revolución. \square

1.2.4. Caso $f(x, u, \xi)$ dependiendo de todas las variables

Para concluir con esta sección, antes de ver la segunda formulación de la ecuación de Euler-Lagrange, veamos la generalización de un ejemplo clásico, como es el “Principio de Fermat”.

El principio de Fermat establece que el trayecto seguido por la luz al propagarse de un punto a otro es tal que el tiempo empleado en recorrerlo es mínimo. Un ejemplo clásico de la aplicación del principio de Fermat es la derivación de la ley de reflexión de un espejo estacionario. En este caso, la restricción de que la luz se refleja desde un punto A perteneciente a la superficie del espejo antes de

que se alcance el otro punto B ha de ser tenida en cuenta. Además, la luz se refleja en un punto C cuya coordenada ξ minimiza el tiempo u requerido para que la luz recorra el camino desde A hasta B a una velocidad x .

Veamos esto reflejado en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.2.16 (Derivación de la ley de reflexión de un espejo estacionario)

Teniendo en cuenta lo establecido anteriormente, consideramos la función

$$f(x, u, \xi) = g(x, u)\sqrt{1 + \xi^2}$$

(que es convexa) y el problema

$$\inf_{u \in X} \left\{ J(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx \right\} = m \quad (1.25)$$

donde $X = \{u \in C^1([a, b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$. Entonces, la ecuación de Euler-Lagrange sería:

$$\frac{d}{dx} \left[g(x, u) \frac{u'}{\sqrt{1 + u'^2}} \right] = g_u(x, u)\sqrt{1 + u'^2}$$

Observando que

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{u'}{\sqrt{1 + u'^2}} \right] = \frac{u''}{(1 + u'^2)^{3/2}}$$

se tiene que

$$g(x, u)u'' + [g_x(x, u)u' - g_u(x, u)](1 + u'^2) = 0 \quad (1.26)$$

Por lo tanto, resolviendo la ecuación (1.26), se obtendría la solución del problema (1.25), lo cual nos llevaría a obtener el tiempo mínimo en el cual la luz se refleja desde un punto A hasta otro punto B, como queríamos comprobar. \square

1.3. Segunda formulación de la ecuación de Euler-Lagrange

En esta sección, veremos otra manera diferente de expresar la ecuación de Euler-Lagrange vista en el Teorema 1.2.2. Esta nueva ecuación es conocida como

“ecuación de DuBois-Reymond”.

A continuación, enunciamos y demostramos el teorema que nos da la segunda formulación de la ecuación de Euler-Lagrange:

Teorema 1.3.1 *Considérese la función $f \in \mathcal{C}^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tal que $f = f(x, u, \xi)$ y el problema*

$$\inf_{u \in X} \left\{ J(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx \right\} = m \quad (1.27)$$

donde $X = \{u \in \mathcal{C}^1([a, b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$.

Entonces, dado $u \in X \cap \mathcal{C}^2([a, b])$ minimizador de (1.27) se tiene para cada $x \in [a, b]$ la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dx} [f(x, u(x), u'(x)) - u'(x) f_\xi(x, u(x), u'(x))] = f_x(x, u(x), u'(x)) \quad (1.28)$$

Demostración:

Observemos que para cada $u \in \mathcal{C}^2([a, b])$, tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} [f(x, u, u') - u' f_\xi(x, u, u')] \\ &= f_x(x, u, u') + u' \left[f_u(x, u, u') - \frac{d}{dx} [f_\xi(x, u, u')] \right] \end{aligned} \quad (1.29)$$

Luego, por el Teorema 1.2.2, tenemos que cada solución del problema (1.27) satisface la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dx} [f_\xi(x, u(x), u'(x))] = f_u(x, u(x), u'(x))$$

es decir, (1.7).

Por lo tanto, combinando las igualdades (1.29) y (1.7), se tiene el resultado. \square

Observación 1.3.2 *La demostración anterior es elemental y hace uso de la ecuación de Euler-Lagrange. En la siguiente nota, para concluir con este capítulo, daremos una demostración alternativa del teorema algo más complicada pero que tiene ciertas ventajas en algunos casos.*

Nota 1.3.3 (Demostración alternativa al Teorema 1.3.1) Usaremos una técnica conocida como “variaciones de las variables independientes”.

Consideramos $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$, $\lambda = (2\|\varphi'\|_{L^\infty(a,b)})^{-1}$ y

$$\xi(x, \varepsilon) = x + \varepsilon\lambda\varphi(x) = y.$$

Observemos que para cada $|\varepsilon| \leq 1$, entonces $\xi(\cdot, \varepsilon) : [a, b] \rightarrow [a, b]$ es un difeomorfismo tal que $\xi(a, \varepsilon) = a$, $\xi(b, \varepsilon) = b$ y $\xi_x(x, \varepsilon) > 0$.

Tomamos $\eta(\cdot, \varepsilon) : [a, b] \rightarrow [a, b]$ la inversa de ξ , es decir, $\xi(\eta(y, \varepsilon), \varepsilon) = y$.

Como $\xi_x(\eta(y, \varepsilon), \varepsilon)\eta_y(y, \varepsilon) = 1$ y $\xi_x(\eta(y, \varepsilon), \varepsilon)\eta_\varepsilon(y, \varepsilon) + \xi_\varepsilon(\eta(y, \varepsilon), \varepsilon) = 0$, buscamos

$$\eta_y(y, \varepsilon) = 1 - \varepsilon\lambda\varphi'(y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$\eta_\varepsilon(y, \varepsilon) = -\lambda\varphi(y) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

donde $\mathcal{O}(t)$ representa para cada función f tal que $|f(t)/t|$ está acotada en un entorno de $t = 0$.

Fijamos un minimizador u del problema (1.27):

$$u^\varepsilon(x) = u(\xi(x, \varepsilon))$$

Haciendo el cambio de variable $y = \xi(x, \varepsilon)$, llegamos a que:

$$\begin{aligned} J(u^\varepsilon) &= \int_a^b f(x, u^\varepsilon(x), (u^\varepsilon)'(x)) dx = \\ &= \int_a^b f\left(\eta(y, \varepsilon), u(y), \frac{u'(y)}{\eta_y(y, \varepsilon)}\right) \eta_y(y, \varepsilon) dy \end{aligned}$$

Definimos $g(\varepsilon) := \int_a^b f\left(\eta(y, \varepsilon), u(y), \frac{u'(y)}{\eta_y(y, \varepsilon)}\right) \eta_y(y, \varepsilon) dy$ tal que

$$g'(\varepsilon) = \eta_{y\varepsilon}f + \left[f_x\eta_\varepsilon - u'(y) \frac{\eta_{y\varepsilon}}{\eta_y^2} f_\xi \right] \eta_y$$

lo cual nos lleva a que

$$g'(0) = \lambda[-f_x\varphi + (u'f_\xi - f)\varphi']$$

Por la hipótesis de que u es un minimizador de (1.27) y que $u^\varepsilon \in X$ entonces se tiene que $J(u^\varepsilon) \geq J(u)$ de forma que

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} J(u^\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = \lambda \int_a^b \{-f_x(x, u(x), u'(x))\varphi(x) + \\ &+ [u'(x)f_\xi(x, u(x), u'(x)) - f(x, u(x), u'(x))]\varphi'(x)\} dx = \\ &= \lambda \int_a^b \{-f_x(x, u(x), u'(x)) + \\ &+ \frac{d}{dx}[-u'(x)f_\xi(x, u(x), u'(x)) + f(x, u(x), u'(x))]\}\varphi(x) dx \end{aligned}$$

De nuevo, gracias al Teorema Fundamental del Cálculo Variacional (Teorema 1.1.1), tenemos lo queríamos probar. \square

Capítulo 2

Formulación Hamiltoniana

2.1. Introducción

En este capítulo, consideraremos una función $f : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = f(x, u, \xi)$ y un funcional

$$J(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx$$

Además, consideraremos la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dx}[f_\xi(x, u, u')] = f_u(x, u, u'), x \in [a, b] \quad (2.1)$$

Hemos visto en el capítulo anterior que un minimizador de J , si es lo suficientemente regular, es una solución de (2.1). El propósito de este capítulo es mostrar que, en ciertos casos, resolver (2.1) es equivalente a encontrar puntos estacionarios de otro funcional distinto como el que sigue

$$J(u, v) = \int_a^b [u'(x)v(x) - H(x, u(x), v(x))] dx$$

2.2. Hamiltoniano. Resultados previos

A lo largo de esta sección y de este capítulo, consideraremos el siguiente funcional:

$$J(u, v) = \int_a^b [u'(x)v(x) - H(x, u(x), v(x))] dx$$

cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\begin{cases} u'(x) = H_v(x, u(x), v(x)) \\ v'(x) = -H_u(x, u(x), v(x)) \end{cases} \quad (2.2)$$

En efecto, se pueden deducir fácilmente teniendo en cuenta que podemos escribir $\mathbf{u} = (u, v)$ y

$$J(\mathbf{u}) = \int_a^b f(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}') dx$$

donde $f(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}') = u'v - H(x, u, v)$. Finalmente, usando (2.1), podemos obtener componente a componente cada una de las expresiones que forman el sistema (2.2).

A continuación, damos una definición importante:

Definición 2.2.1 (Hamiltoniano) *La función H que aparece en el sistema (2.2) es conocida como el “Hamiltoniano” y se define como una transformación de Legendre (véase Definición B.10) de una función $f : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que viene dada por*

$$H(x, u, v) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \{v\xi - f(x, u, \xi)\}$$

En ocasiones, al sistema (2.2) se le llama forma canónica de la ecuación de Euler-Lagrange.

Ahora, enunciemos y demos un lema de gran utilidad para el desarrollo de este capítulo:

Lema 2.2.2 *Sea $f \in \mathcal{C}^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tal que $f = f(x, u, \xi)$ verificando que*

$$f_{\xi\xi}(x, u, \xi) > 0, \text{ para cada } (x, u, \xi) \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (2.3)$$

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u, \xi)}{|\xi|} = +\infty, \text{ para cada } (x, u) \in [a, b] \times \mathbb{R} \quad (2.4)$$

Además, dada

$$H(x, u, v) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \{v\xi - f(x, u, \xi)\} \quad (2.5)$$

se tiene que $H \in \mathcal{C}^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ y

$$H_x(x, u, v) = -f_x(x, u, H_v(x, u, v)) \quad (2.6)$$

$$H_u(x, u, v) = -f_u(x, u, H_v(x, u, v)) \quad (2.7)$$

$$H(x, u, v) = vH_v(x, u, v) - f(x, u, H_v(x, u, v)) \quad (2.8)$$

$$v = f_\xi(x, u, \xi) \text{ si y solo si } \xi = H_v(x, u, v) \quad (2.9)$$

Demostración: Vamos a dividir la prueba del lema en varios pasos.

- *Paso 1:* Fijamos $(x, u) \in [a, b] \times \mathbb{R}$. Por la Definición 2.2.1 y a partir de (2.3) deducimos que existe $\xi = \xi(x, u, v)$ de manera que

$$\begin{cases} H(x, u, v) = v\xi - f(x, u, \xi) \\ v = f_\xi(x, u, \xi) \end{cases} \quad (2.10)$$

- *Paso 2:* Veamos que la función H es continua. Esto es relativamente fácil.

Dados $(x, u, v), (x', u', v') \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, usando (2.10), podemos encontrar $\xi = \xi(x, u, v)$ tal que

$$H(x, u, v) = v\xi - f(x, u, \xi) \quad (2.11)$$

Volviendo a la Definición 2.2.1, tenemos además que

$$H(x', u', v') \geq v'\xi - f(x', u', \xi) \quad (2.12)$$

Combinando (2.11) y (2.12), se llega a que

$$H(x, u, v) - H(x', u', v') \leq (v - v')\xi + f(x', u', \xi) - f(x, u, \xi)$$

De forma similar, razonando para $\xi = \xi(x', u', v')$, obtenemos la desigualdad contraria y así, podemos deducir la continuidad de H a partir de la continuidad de f .

- *Paso 3:* Por el Teorema de la Función Inversa (Teorema B.8), del hecho

de que $f \in \mathcal{C}^2$ y de la desigualdad (2.3) se tiene que $\xi = \xi(x, u, v) \in \mathcal{C}^1$. En primer lugar, probemos que ξ es continua. Realmente, vamos a probar, que f es localmente Lipschitziana. Fijamos $R > 0$. Por (2.3), gracias al Teorema de la Función Implícita (Teorema B.9), podemos encontrar $R_1 > 0$ tal que

$$|\xi(x, u, v)| \leq R_1$$

para todo $x \in [a, b]$, $|u|, |v| \leq R$.

Como f_ξ es de clase \mathcal{C}^1 , podemos encontrar $\gamma_1 > 0$

$$|f_\xi(x, u, \xi) - f_\xi(x', u', \xi')| \leq \gamma_1(|x - x'| + |u - u'| + |\xi - \xi'|) \quad (2.13)$$

para todo $x, x' \in [a, b]$, $|u|, |u'| \leq R$, $|\xi|, |\xi'| \leq R_1$.

Ahora, por (2.3), podemos encontrar $\gamma_2 > 0$ de manera que

$$f_{\xi\xi}(x, u, \xi) \geq \gamma_2$$

para todo $x \in [a, b]$, $|u| \leq R$, $|\xi| \leq R_1$.

Finalmente, para todo $x \in [a, b]$, $|u| \leq R$, $|\xi|, |\xi'| \leq R_1$ se tiene que

$$|f_\xi(x, u, \xi) - f_\xi(x, u, \xi')| \geq \gamma_2|\xi - \xi'| \quad (2.14)$$

Tomamos $x, x' \in [a, b]$, $|u|, |u'| \leq R$, $|v|, |v'| \leq R$. Por la definición de ξ , tenemos

$$f_\xi(x, u, \xi(x, u, v)) = v$$

$$f_\xi(x', u', \xi(x', u', v')) = v'$$

lo cual nos lleva a que

$$\begin{aligned} & f_\xi(x, u, \xi(x', u', v')) - f_\xi(x, u, \xi(x, u, v)) = \\ & = f_\xi(x, u, \xi(x', u', v')) - f_\xi(x', u', \xi(x', u', v')) + v' - v \end{aligned}$$

Combinando la igualdad anterior con (2.13) y (2.14), obtenemos

$$\gamma_2|\xi(x, u, v) - \xi(x', u', v')| \leq \max\{1, \gamma_1\}(|x - x'| + |u - u'| + |v - v'|)$$

que nos da la continuidad de ξ .

Para concluir con este paso, veamos que ξ es de clase \mathcal{C}^1 . Gracias la ecuación $v = f_\xi(x, u, \xi)$, que obtuvimos en el *Paso 1*, se deduce que

$$\begin{cases} f_{x\xi}(x, u, \xi) + f_{\xi\xi}(x, u, \xi)\xi_x = 0 \\ f_{u\xi}(x, u, \xi) + f_{\xi\xi}(x, u, \xi)\xi_u = 0 \\ f_{\xi\xi}(x, u, \xi)\xi_v = 1 \end{cases}$$

Entonces, de (2.3) y teniendo en cuenta que f es de clase \mathcal{C}^2 , se tiene que ξ es de clase \mathcal{C}^1 en $[a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

- Paso 4: Considérese las siguientes funciones de clase \mathcal{C}^1

$$(x, u, v) \longrightarrow \xi(x, u, v), f_x(x, u, \xi(x, u, v)), f_u(x, u, \xi(x, u, v))$$

De aquí se obtiene inmediatamente que H es de clase \mathcal{C}^2 . Además, se tiene, derivando (2.10),

$$\begin{cases} H_x = v\xi_x - f_x - f_\xi\xi_x = (v - f_\xi)\xi_x - f_x = -f_x \\ H_u = v\xi_u - f_u - f_\xi\xi_u = (v - f_\xi)\xi_u - f_u = -f_u \\ H_v = \xi + v\xi_v - f_\xi\xi_v = (v - f_\xi)\xi_v + \xi = \xi \end{cases}$$

lo cual nos lleva a deducir inmediatamente las igualdades (2.6) y (2.7). Más aún, se deduce (2.8) teniendo en cuenta la Definición 2.2.1 y que $H_v = \xi$.

En particular, $\xi = H_v(x, u, v)$ por lo anterior.

Por tanto, de este modo concluimos la demostración del lema. \square

Para concluir con esta sección, hacemos algunos comentarios sobre el Lema 2.2.2 y su demostración:

Nota 2.2.3 (Sobre la demostración del Lema 2.2.2)

- El Lema 2.2.2 sigue siendo parcialmente cierto si reemplazamos la hipótesis (2.3) por la siguiente condición más débil

$$\xi \longrightarrow f(x, u, \xi)$$

es estrictamente convexa (este caso es el del Ejemplo 2.3.4).

En general, el hamiltoniano H es de clase \mathcal{C}^0 . Por ejemplo, si tomamos

$$f(x, u, \xi) = \frac{1}{4}|\xi|^4$$

su hamiltoniano H viene dado por

$$H(x, u, v) = \frac{3}{4}|v|^{4/3}$$

donde $H \in \mathcal{C}^0$, como se preveía.

- El Lema 2.2.2 sigue siendo válido si la hipótesis (2.4) no se cumple. En general, el funcional H no es finito en todas partes como se puede ver en el siguiente ejemplo. Basta considerar la siguiente función estrictamente convexa

$$f(x, u, \xi) = f(\xi) = \sqrt{1 + \xi^2}$$

y observar que

$$H(v) = \begin{cases} -\sqrt{1 - v^2} & \text{si } |v| \leq 1 \\ +\infty & \text{si } |v| > 1 \end{cases}$$

- La misma demostración que hacemos del Lema 2.2.2 nos sirve para probar que si $f \in C^k$ para $k \geq 2$ entonces $H \in C^k$.

2.3. Formulación Hamiltoniana. Algunos ejemplos

En esta sección, trataremos el resultado principal de este capítulo y veremos su aplicación a diferentes ejemplos clásicos de interés. A continuación, enunciaremos y demostramos el teorema que nos da la formulación hamiltoniana:

Teorema 2.3.1 Consideramos f y H como en el Lema 2.2.2. Supongamos que $(u, v) \in C^2([a, b]) \times C^2([a, b])$, satisface para todo $x \in [a, b]$ que

$$\begin{cases} u'(x) = H_v(x, u(x), v(x)) \\ v'(x) = -H_u(x, u(x), v(x)) \end{cases} \quad (2.15)$$

Entonces, $u \in C^2([a, b])$ satisface que

$$\frac{d}{dx}[f_\xi(x, u(x), u'(x))] = f_u(x, u(x), u'(x)), \forall x \in [a, b] \quad (2.16)$$

Recíprocamente, si $u \in C^2([a, b])$ satisface (2.16) entonces $(u, v) \in C^2([a, b]) \times C^2([a, b])$ son soluciones de (2.15) donde

$$v(x) = f_\xi(x, u(x), u'(x)), \forall x \in [a, b]$$

Demostración: Dividimos la prueba en dos partes.

- Parte I: Fijamos $(u, v) \in C^2([a, b]) \times C^2([a, b])$ satisfaciendo (2.15).

Usando (2.9) y (2.7), obtenemos que

$$\begin{aligned} u' &= H_v(x, u, v) \quad \text{si y solo si} \quad v = f_\xi(x, u, u') \\ v' &= -H_u(x, u, v) = f_u(x, u, u') \end{aligned}$$

Entonces $u \in \mathcal{C}^2([a, b])$ satisface (2.16), como queríamos probar.

■ Parte 2: Recíprocamente, teniendo en cuenta (2.9) y que $v = f_\xi(x, u, u')$, se obtiene inmediatamente la primera ecuación de (2.15):

$$u' = H_v(x, u, v)$$

Además, como $v = f_\xi(x, u, u')$ tal que u satisface (2.16), entonces tenemos que

$$v' = \frac{d}{dx}[v] = \frac{d}{dx}[f_\xi(x, u, u')] = f_u(x, u, u') \quad (2.17)$$

Combinando las igualdades (2.17) y (2.7), llegamos a la segunda ecuación de (2.15):

$$v' = -H_u(x, u, v)$$

De este modo, concluimos la segunda parte del teorema y por tanto, la demostración del mismo. \square

Observación 2.3.2 *Las mismas observaciones hechas en la Nota 2.2.3 sobre el Lema 2.2.2 son válidas para el Teorema 2.3.1.*

A continuación, se presentan cinco ejemplos de interés para mostrar la aplicación de la formulación hamiltoniana en diferentes casos. Comencemos con un ejemplo cuya motivación viene de la mecánica clásica.

Ejemplo 2.3.3 (Relacionado con la mecánica clásica)

Consideramos $m > 0$, $g \in \mathcal{C}^1([a, b])$ y $f(x, u, \xi) = \frac{m}{2}\xi^2 - g(x)u$.

El funcional a considerar es

$$J(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx$$

y la ecuación de Euler-Lagrange asociada al funcional teniendo en cuenta (2.16) nos da la siguiente expresión

$$mu''(x) = -g(x), x \in (a, b)$$

Además, el Hamiltoniano usando la Definición 2.2.1 lo podemos expresar como

$$H(x, u, v) = \frac{v^2}{2m} + g(x)u$$

tal que el sistema asociado al Hamiltoniano (usando (2.15)) viene dado por

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{v(x)}{m} \\ v'(x) = -g(x) \end{cases}$$

□

Ahora, presentamos una generalización del Ejemplo 2.3.3:

Ejemplo 2.3.4 (Generalización del Ejemplo 2.3.3)

Este ejemplo es una generalización del Lema 2.2.2 al caso en que la condición (2.3) se sustituye porque la función es estrictamente convexa.

Consideramos $p > 1$ y $p' = \frac{p}{p-1}$ (el exponente conjugado de p) tales que

$$f(x, u, \xi) = \frac{1}{p}|\xi|^p - g(x, u) \quad \text{y} \quad H(x, u, v) = \frac{1}{p'}|v|^{p'} + g(x, u)$$

La ecuación de Euler-Lagrange y el sistema Hamiltoniano asociado teniendo en cuenta (2.16) y (2.15), respectivamente, viene dado por

$$\frac{d}{dx} [|u'|^{p-2}u'] = -g_u(x, u)$$

y

$$\begin{cases} u' = |v|^{p'-2}v \\ v' = -g_u(x, u) \end{cases}$$

□

A continuación, presentamos un caso más simple, el caso en el cual la función f a considerar solo depende de ξ :

Ejemplo 2.3.5 (Caso $f(x, u, \xi) = f(\xi)$)

Consideramos una función $f(x, u, \xi) = f(\xi)$ tal que $f'' > 0$ de forma que

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{f(\xi)}{\xi} = +\infty$$

La ecuación de Euler-Lagrange teniendo en cuenta (2.16) viene dada por

$$\frac{d}{dx}[f'(u')] = 0$$

Integrando, se llega a que

$$f'(u') = \lambda = cte$$

El Hamiltoniano haciendo uso de (2.15) lo podemos expresar como

$$H(v) = f^*(v) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \{v\xi - f(\xi)\}$$

cuyo sistema asociado es

$$\begin{cases} u' = (f^*)'(v) \\ v' = 0 \end{cases}$$

De aquí, se obtiene inmediatamente que $v = \lambda = cte$ y que

$$u(x) = f^*(\lambda)x + \mu$$

donde μ es una cierta constante. □

Ahora, presentamos el caso en el cual la función f que se considera depende exclusivamente de x y de ξ :

Ejemplo 2.3.6 (Caso $f(x, u, \xi) = f(x, \xi)$)

Consideramos una función $f(x, u, \xi) = f(x, \xi)$ tal que su ecuación de Euler-Lagrange usando (2.16) viene expresada por

$$\frac{d}{dx}[f_\xi(x, u')] = 0$$

Integrando, se llega a que

$$f_\xi(x, u') = \lambda = cte$$

El Hamiltoniano de f lo podemos expresar a partir de la Definición 2.2.1 como

$$H(x, v) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \{v\xi - f(x, \xi)\}$$

de forma que su sistema asociado teniendo en cuenta (2.15) viene dado por

$$\begin{cases} u'(x) = H_v(x, v(x)) \\ v'(x) = 0 \end{cases}$$

La solución de este sistema es $v(x) = \lambda = cte$ y $u'(x) = H_v(x, \lambda)$. □

Para finalizar este capítulo, y en particular, esta sección, daremos un último ejemplo que es el caso más difícil de tratar, cuando la función f a considerar solo depende de u y de ξ :

Ejemplo 2.3.7 (Caso $f(x, u, \xi) = f(u, \xi)$)

Consideramos una función $f(x, u, \xi) = f(u, \xi)$ con las hipótesis del Teorema 2.3.1. La ecuación de Euler-Lagrange asociada teniendo en cuenta (2.16) es

$$\frac{d}{dx}[f_\xi(u, u')] = f_u(u, u')$$

Integrando, haciendo el mismo desarrollo que en la demostración de la Proposición 1.2.12, llegamos a que:

$$f(u, u') - u' f_\xi(u, u') = \lambda = cte$$

El Hamiltoniano de f lo podemos expresar a partir de la Definición 2.2.1 como

$$H(u, v) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \{v\xi - f(u, \xi)\}$$

siendo $v = f_\xi(u, \xi)$ de forma que su sistema asociado teniendo en cuenta (2.15) viene dado por

$$\begin{cases} u'(x) = H_v(u(x), v(x)) \\ v'(x) = -H_u(u(x), v(x)) \end{cases}$$

A partir de este sistema hamiltoniano, integrando, podemos obtener la siguiente ecuación

$$\frac{d}{dx}[H(u(x), v(x))] = H_u(u, v)u' + H_v(u, v)v' \equiv 0$$

□

Observación 2.3.8 (Sobre el Ejemplo 2.3.7) En términos físicos, se dice que si el Lagrangiano de f es independiente de la variable x (que representa el tiempo), entonces el Hamiltoniano H es constante a lo largo de las trayectorias.

Capítulo 3

La ecuación de Hamilton-Jacobi

3.1. Introducción

En este capítulo, se tratará de estudiar la relación de la búsqueda de extremos (mínimos) de los funcionales

$$I(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx$$

y

$$J(u, v) = \int_a^b [u'(x)v(x) - H(x, u(x), v(x))] dx$$

vistos en los anteriores capítulos donde H el Hamiltoniano de f .

El estudio consistirá en la resolución de una ecuación en derivadas parciales conocida como “ecuación de Hamilton-Jacobi”. Esta ecuación jugará un papel importante en la teoría de campos [Ver Capítulo 4: Teoría de campos].

3.2. Formulación de la ecuación de Hamilton-Jacobi

Para comenzar esta sección, enunciamos y demostramos el resultado principal de este capítulo para la formulación de la ecuación de Hamilton-Jacobi:

Teorema 3.2.1 *Consideramos $H \in C^1([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tal que $H = H(x, u, v)$. Supongamos que existe $S \in C^2([a, b] \times \mathbb{R})$ con $S = S(x, u)$ una solución de la*

ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$S_x + H(x, u, S_u) = 0 \quad (3.1)$$

para todo $(x, u) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ donde $S_x = \frac{\partial S}{\partial x}$ y $S_u = \frac{\partial S}{\partial u}$. Supongamos, además, que existe $u \in \mathcal{C}^1([a, b])$ una solución de

$$u'(x) = H_v(x, u(x), S_u(x, u(x))) \quad (3.2)$$

para todo $x \in [a, b]$.

Fijado

$$v(x) = S_u(x, u(x)) \quad (3.3)$$

entonces se tiene que $(u, v) \in \mathcal{C}^1([a, b]) \times \mathcal{C}^1([a, b])$ es una solución de

$$\begin{cases} u'(x) = H_v(x, u(x), v(x)) \\ v'(x) = -H_u(x, u(x), v(x)) \end{cases} \quad (3.4)$$

Más aún, si existe una familia paramétrica $S = S(x, u, \alpha)$ tal que $S \in \mathcal{C}^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ solución de (3.1) para todo $(x, u, \alpha) \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, entonces toda solución de (3.2) satisface que

$$\frac{d}{dx}[S_\alpha(x, u(x), \alpha)] = 0 \quad (3.5)$$

para todo $(x, \alpha) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ donde $S_\alpha = \frac{\partial S}{\partial \alpha}$.

Demostración: Dividimos la prueba en dos pasos.

- Paso 1: La obtención de la primera ecuación de (3.4) es inmediata a partir de (3.2) y (3.3). Veamos como obtener la segunda ecuación.

Comencemos, derivando (3.3) y obtenemos

$$v'(x) = S_{xu}(x, u(x)) + u'(x)S_{uu}(x, u(x)) \quad (3.6)$$

para todo $x \in [a, b]$.

Ahora, derivamos (3.1) respecto de u y tenemos para todo $(x, u) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ que

$$S_{xu}(x, u(x)) + H_u(x, u(x), S_u(x, u(x))) +$$

$$+H_v(x, u(x), S_u(x, u(x)))S_{uu}(x, u(x)) = 0 \quad (3.7)$$

Restando (3.6) con (3.7) y usando (3.2) se llega a que

$$v'(x) = -H_u(x, u(x), S_u(x, u(x))) = -H_u(x, u(x), v(x))$$

que es la segunda ecuación de (3.4) como queríamos probar.

▪ **Paso 2:** Como S es una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi, tenemos para todo $(x, u, \alpha) \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha}[S_x(x, u, \alpha) + H(x, u, S_u(x, u, \alpha))] &= \\ = S_{x\alpha}(x, u, \alpha) + H_v(x, u, S_u(x, u, \alpha))S_{u\alpha}(x, u, \alpha) &= 0 \end{aligned}$$

Sabemos que esta igualdad es válida para todo $u \in C^1([a, b])$, en realidad, es válida para $u = u(x)$ satisfaciendo (3.2) de forma que

$$S_{x\alpha}(x, u(x), \alpha) + u'(x)S_{u\alpha}(x, u(x), \alpha) = 0 \quad (3.8)$$

La igualdad (3.8) puede ser reescrita como sigue

$$\frac{d}{dx}[S_\alpha(x, u(x), \alpha)] = 0$$

que es lo que queríamos probar.

Así, de este modo concluimos la demostración del segundo paso del teorema y por tanto, la demostración del mismo. \square

Ahora, hacemos unas observaciones sobre el Teorema 3.2.1 en la siguiente nota:

Nota 3.2.2 (Sobre el Teorema 3.2.1)

- Si el Hamiltoniano no depende explícitamente de x entonces toda solución $S^*(u, \alpha)$ de

$$H(u, S_u^*) = \alpha \quad (3.9)$$

para todo $(u, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nos lleva a una solución de (3.1) de la forma

$$S(x, u, \alpha) = S^*(u, \alpha) - \alpha x \quad (3.10)$$

- En general, es difícil de resolver la ecuación (3.1) y podemos encontrar una bibliografía extensa dedicada a este tema. (Ver P.L. Lions [10]).

A continuación, damos un teorema conocido como “Teorema de Jacobi” que es un recíproco del Teorema 3.2.1:

Teorema 3.2.3 (Teorema de Jacobi) Consideramos $H \in \mathcal{C}^1([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ y $S = S(x, u, \alpha) \in \mathcal{C}^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ satisfaciendo la ecuación de Hamilton-Jacobi (3.1) tal que

$$S_{u\alpha}(x, u, \alpha) \neq 0 \quad (3.11)$$

para todo $(x, u, \alpha) \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Si $u = u(x)$ satisface

$$\frac{d}{dx}[S_\alpha(x, u(x), \alpha)] = 0 \quad (3.12)$$

para todo $(x, \alpha) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ entonces $u \in \mathcal{C}^1([a, b])$ verifica necesariamente

$$u'(x) = H_v(x, u(x), S_u(x, u(x), \alpha)) \quad (3.13)$$

para todo $(x, \alpha) \in [a, b] \times \mathbb{R}$.

Además, si se verifica la condición (3.2), es decir, $v(x) = S_u(x, u(x), \alpha)$, entonces $(u, v) \in \mathcal{C}^1([a, b]) \times \mathcal{C}^1([a, b])$ es una solución de (3.4).

Demostración: Comenzamos desarrollando (3.12):

$$0 = \frac{d}{dx}[S_\alpha(x, u(x), \alpha)] = S_{x\alpha}(x, u(x), \alpha) + S_{u\alpha}(x, u(x), \alpha)u'(x) \quad (3.14)$$

para todo $(x, \alpha) \in [a, b] \times \mathbb{R}$.

Ahora, derivando (3.1) respecto de α y desarrollando la expresión, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\alpha}[S_x(x, u(x), \alpha) + H(x, u(x), S_u(x, u(x), \alpha))] = \\ &= S_{x\alpha}(x, u(x), \alpha) + H_v(x, u(x), S_u(x, u(x), \alpha))S_{u\alpha}(x, u(x), \alpha) \end{aligned} \quad (3.15)$$

para todo $(x, u, \alpha) \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

A continuación, restamos (3.14) con (3.15) y haciendo uso de la hipótesis (3.11), es decir, $S_{u\alpha}(x, u, \alpha) \neq 0$ se llega a que

$$u'(x) = H_v(x, u(x), S_u(x, u(x), \alpha)) = H_v(x, u(x), v(x))$$

para todo $(x, \alpha) \in [a, b] \times \mathbb{R}$, como queríamos gracias a (3.3). Falta probar que $v'(x) = -H_u(x, u(x), v(x))$ para todo $(x, \alpha) \in [a, b] \times \mathbb{R}$.

Gracias a (3.3), tenemos que $v(x) = S_u(x, u(x))$, si derivamos se tiene que

$$\begin{aligned} v'(x) &= S_{xu}(x, u(x), \alpha) + u'(x)S_{uu}(x, u(x), \alpha) = \\ &= S_{xu}(x, u(x), \alpha) + H_v(x, u(x), S_u(x, u(x), \alpha))S_{uu}(x, u(x), \alpha) \end{aligned} \quad (3.16)$$

para todo $(x, \alpha) \in [a, b] \times \mathbb{R}$.

Una vez más, haciendo uso de (3.1), derivando respecto de u , resulta que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{du}[S_x(x, u(x), \alpha) + H(x, u(x), S_u(x, u(x), \alpha))] = \\ &= S_{xu}(x, u(x), \alpha) + H_u(x, u(x), S_u(x, u(x), \alpha)) + \\ &\quad + H_v(x, u(x), S_u(x, u(x), \alpha))S_{uu}(x, u(x), \alpha) \end{aligned} \quad (3.17)$$

para todo $(x, u, \alpha) \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Restando (3.16) y (3.17), se obtiene inmediatamente que

$$v'(x) = -H_u(x, u(x), S_u(x, u(x), \alpha)) = -H_u(x, u(x), v(x))$$

para todo $(x, \alpha) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ gracias también a (3.3).

De este modo obtenemos la segunda igualdad que buscábamos y así, concluye la demostración del teorema. \square

Para finalizar este tercer capítulo, damos un ejemplo de aplicación de formulación de la ecuación de Hamilton-Jacobi:

Ejemplo 3.2.4 (Aplicación de la formulación de la ecuación de Hamilton-Jacobi)

Consideramos $g \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $g(u) \geq g_0 > 0$ y sea $f(u, \xi) = \frac{1}{2}\xi^2 + g(u)$. Luego, usando la Definición 2.2.1, tenemos que el Hamiltoniano asociado a f puede ser expresado como

$$H(u, v) = \frac{1}{2}v^2 - g(u)$$

tal que la ecuación de Hamilton-Jacobi, teniendo en cuenta (3.1), viene dada por

$$S_x + \frac{1}{2}(S_u)^2 - g(u) = 0$$

de forma que su forma reducida, aplicando la Nota 3.2.2 (ya que f no depende explícitamente de x) resulta ser

$$\frac{1}{2}(S_u^*)^2 = g(u) \tag{3.18}$$

Entonces, una solución de la ecuación (3.18) teniendo en cuenta que $S_u = S_u^*$ y haciendo uso de la Nota 3.2.2 viene dada por

$$S^* = S = S(x, u) = S(u) = \int_0^u \sqrt{2g(s)} ds$$

Ahora, resolvemos la siguiente ecuación, haciendo uso de (3.13) y teniendo en cuenta que H no depende explícitamente de x

$$u'(x) = H_v(u(x), S_u(u(x))) = S_u(u(x)) = \sqrt{2g(u(x))} \tag{3.19}$$

Además, tenemos que la ecuación (3.19) tiene una solución implícita que puede ser expresada como

$$\int_{u(0)}^{u(x)} \frac{ds}{\sqrt{2g(s)}} = x$$

Finalmente, poniendo $v(x) = S_u(u(x))$, hemos encontrado una solución del sistema Hamiltoniano (usando (3.4) y teniendo en cuenta todo lo anterior)

$$\begin{cases} u'(x) = H_v(u(x), v(x)) = v(x) \\ v'(x) = -H_u(u(x), v(x)) = g'(u(x)) \end{cases} \tag{3.20}$$

Derivando la primera ecuación de (3.20) y teniendo en cuenta la segunda ecuación de (3.20), se llega a que

$$u''(x) = g'(u(x))$$

que es la ecuación de Euler-Lagrange (vista en el Capítulo 1) asociada al Lagrangiano de f . □

Capítulo 4

Teoría de campos

4.1. Introducción

En este capítulo, trataremos de forma breve la teoría de campos. Esta teoría es conceptualmente importante pero difícil de tratar para ejemplos concretos. En primer lugar, recordemos el problema sobre el que venimos trabajando:

$$\inf_{u \in X} \left\{ J(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx \right\} = m \quad (4.1)$$

donde $X = \{u \in C^1([a, b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$ de forma que la ecuación de Euler-Lagrange asociada viene dada por

$$\frac{d}{dx}[f_\xi(x, u, u')] = f_u(x, u, u') \quad (4.2)$$

para $x \in (a, b)$.

En la siguiente sección, intentaremos explicar el origen de esta teoría, comenzando con un caso particular simple. Hemos visto en el Capítulo 1, en concreto, en el Ejemplo 1.2.6 que una solución de (4.2) no es, en general, un minimizador de (4.1). Sin embargo, gracias al Teorema 1.2.2, sabemos que si la función $(u, \xi) \rightarrow f(x, u, \xi)$ es convexa para todo $x \in [a, b]$ entonces toda solución de (4.2) es necesariamente un mínimo de (4.1).

4.2. Estudio local de la teoría de campos

Para comenzar esta sección, veamos un resultado local de la teoría de campos con la hipótesis de que la función $\xi \rightarrow f(x, u, \xi)$ es convexa para todo $(x, u) \in [a, b] \times \mathbb{R}$:

Teorema 4.2.1 *Consideramos $f \in \mathcal{C}^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Si existe $\Phi \in \mathcal{C}^3([a, b] \times \mathbb{R})$ con $\Phi(a, \alpha) = \Phi(b, \beta)$ satisfaciendo que*

$$(u, \xi) \rightarrow \tilde{f}(x, u, \xi) \quad \text{es convexa para todo } x \in [a, b]$$

donde $\tilde{f}(x, u, \xi) = f(x, u, \xi) + \Phi_u(x, u)\xi + \Phi_x(x, u)$, entonces toda solución \bar{u} de (4.2) es un mínimo de (4.1) (considerando \tilde{f} en lugar de f en las expresiones anteriores).

Demostración: Definimos

$$\varphi(x, u, \xi) = \Phi_u(x, u)\xi + \Phi_x(x, u)$$

En primer lugar, haciendo uso de la hipótesis de que $\Phi(a, \alpha) = \Phi(b, \beta)$, obtenemos que

$$\int_a^b \frac{d}{dx} [\Phi(x, u(x))] dx = \Phi(b, \beta) - \Phi(a, \alpha) = 0 \quad (4.3)$$

y además, derivando directamente se llega a que

$$\frac{d}{dx} [\varphi_\xi(x, u, u')] = \varphi_u(x, u, u') \quad (4.4)$$

para todo $x \in [a, b]$ y para todo $u \in X = \{u \in \mathcal{C}^1([a, b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$.

La expresión dada por (4.3) nos dice que la integral es invariante mientras que la expresión dada por (4.4) nos quiere decir que $\varphi(x, u, u')$ satisface la ecuación de Euler-Lagrange idénticamente cero.

Si tuviéramos que f es convexa para todo $x \in [a, b]$, habríamos acabado la prueba, tomando $\Phi \equiv 0$ y aplicando el Teorema 1.2.2 a f . En nuestro caso, tenemos que $(u, \xi) \rightarrow \tilde{f}(x, u, \xi)$ es convexa, si tomamos $\Phi \in \mathcal{C}^3([a, b] \times \mathbb{R})$, teniendo en cuenta

que $\varphi(x, u, u') = \frac{d}{dx}[\Phi(x, u)]$ y usando (4.3), tenemos que $f \equiv \tilde{f}$ lo que quiere decir que

$$J(u) = \int_a^b \tilde{f}(x, u(x), u'(x)) dx = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx$$

para todo $u \in X$ y para toda solución \bar{u} de (4.2) que satisface que

$$\frac{d}{dx}[\tilde{f}_\xi(x, \bar{u}, \bar{u}')] = \tilde{f}_u(x, \bar{u}, \bar{u}')$$

para todo $x \in (a, b)$, que es lo que queríamos probar. De este modo, se concluye la prueba. \square

Ahora, damos una nota de gran interés que ha sido la idea fundamental para la demostración del Teorema 4.2.1:

Nota 4.2.2 (Sobre la demostración del Teorema 4.2.1)

- Para probar el teorema anterior, hemos usado que $(u, \xi) \rightarrow \tilde{f}(x, u, \xi)$ es convexa para todo $x \in [a, b]$.
- La idea de la demostración del teorema anterior se basa en que si tenemos que $(u, \xi) \rightarrow f(x, u, \xi)$ es convexa entonces basta tomar $\Phi \equiv 0$, tener en cuenta que $f \equiv \tilde{f}$ y aplicar el Teorema 2.2.1 a \tilde{f} .

A continuación, para terminar esta sección y este capítulo, teniendo en cuenta el Teorema 4.2.1 y la Nota 4.2.2, vamos a volver a estudiar la desigualdad de Poincaré-Wirtinger (vista en el Capítulo 1, Ejemplo 1.2.13) haciendo uso de lo que llevamos de teoría de campos:

Ejemplo 4.2.3 (Desigualdad de Poincaré-Wirtinger)

Consideramos $\lambda \geq 0$, $f_\lambda(u, \xi) = \frac{\xi^2 - \lambda^2 u^2}{2}$ y el problema

$$\inf_{u \in X} \left\{ J_\lambda(u) = \int_0^1 f_\lambda(u(x), u'(x)) dx \right\} = m_\lambda \quad (4.5)$$

donde $X = \{u \in C^1([0, 1]) : u(0) = u(1) = 0\}$. Observemos que la función $\xi \rightarrow f_\lambda(u, \xi)$ es convexa mientras que la función $(u, \xi) \rightarrow f_\lambda(u, \xi)$ no es convexa.

Además, la ecuación de Euler-Lagrange asociada al problema (4.5) viene dada por

$$u''(x) + \lambda^2 u(x) = 0 \quad (4.6)$$

para todo $x \in (0, 1)$.

Tengamos en cuenta que $u_0 \equiv 0$ es una solución de (4.6). Definimos

$$\Phi(x, u) = \frac{\lambda}{2} \tan \left[\lambda \left(x - \frac{1}{2} \right) \right] u^2$$

para todo $(x, u) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ siempre que $\lambda < \pi$.

Observamos que Φ está bajo las hipótesis del Teorema 4.2.1 donde \tilde{f} viene dada por

$$\tilde{f}(x, u, \xi) = \frac{1}{2} \xi^2 + \lambda \tan \left[\lambda \left(x - \frac{1}{2} \right) \right] u \xi + \frac{\lambda^2}{2} \tan^2 \left[\lambda \left(x - \frac{1}{2} \right) \right] u^2$$

de forma que la función $(u, \xi) \rightarrow \tilde{f}(x, u, \xi)$ es convexa pues podemos escribirla como

$$\tilde{f}(x, u, \xi) = \frac{(\xi + Au)^2}{2}$$

con $A = \lambda \tan \left[\lambda \left(x - \frac{1}{2} \right) \right]$ que es claramente convexa. Luego, aplicando el Teorema 4.2.1, obtenemos que

$$J_\lambda(u) \geq J_\lambda(0)$$

para todo $0 \leq \lambda < \pi$ y para todo $u \in X$.

Tomando límite cuando $x \rightarrow \pi^+$, la desigualdad de Poincaré-Wirtinger queda como sigue

$$\int_0^1 u'^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 u^2 dx$$

para todo $u \in X$. Así, concluimos este ejemplo. \square

Capítulo 5

Introducción a los métodos directos

5.1. Introducción

En este último capítulo, vamos a estudiar el siguiente problema

$$\inf \left\{ J(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx : u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega) \right\} = m \quad (5.1)$$

donde:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado no vacío.
- $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = f(x, u, \xi)$.
- $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u, u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ y $u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ (esto quiere decir que $u \sim u_0$ sobre $\partial\Omega$).

El problema formulado que viene dado por (5.1) es el problema fundamental de estudio del Cálculo de Variaciones. A lo largo de este capítulo, veremos que el problema (5.1) tiene una solución $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ que debe satisfacer las siguientes hipótesis:

$$\text{Convexidad: } \xi \rightarrow f(x, u, \xi) \text{ es convexa para todo } (x, u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \quad (5.2)$$

$$\text{Coercitividad: existen } p > q \geq 1 \text{ y } \alpha_1 > 0, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \text{ tales que} \\ f(x, u, \xi) \geq \alpha_1 |\xi|^p + \alpha_2 |u|^q + \alpha_3, \text{ para todo } (x, u, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad (5.3)$$

El ejemplo clásico de estudio en el Cálculo de Variaciones a partir de la teoría de Métodos Directos es el **problema de la integral de Dirichlet**. Este problema se basa en el estudio del problema (5.1) tomando

$$f = f(x, u, \xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2$$

de forma que la función f satisface las hipótesis (5.2) y (5.3).

Otro problema de gran interés que no vamos a estudiar porque requiere un tratamiento especial es el **problema de la superficie mínima** que se basa en el estudio del problema (5.1) tomando

$$f = f(x, u, \xi) = \sqrt{1 + |\xi|^2}$$

de forma que la función f satisface las hipótesis (5.2) y (5.3) para $p = 1$. Notemos que $p = 1$ no está incluido en (5.3).

A lo largo de este capítulo, intentaremos ver el interés de comparar la generalidad de los resultados que vamos a ir obteniendo con los otros resultados vistos anteriormente. El principal objetivo de este análisis es probar la existencia de mínimos en espacios de Sobolev. Ahora, describamos brevemente lo que queremos presentar en este capítulo. En la Sección 5.2, vamos a considerar el caso modelo, conocido como el **problema de la integral de Dirichlet**. De hecho, este es un ejemplo del teorema general que probaremos en la Sección 5.3.

Como bien sabemos este capítulo lleva por nombre **Introducción a los métodos directos**, cuyo origen proviene de Hilbert y su trabajo relacionado con la integral de Dirichlet y también de Lebesgue y Tonelli. En la demostración de los resultados que aparecen en la Sección 5.2 serán muy importantes dos aspectos: la compacidad (que permite deducir la convergencia de una sucesión a partir de que dicha sucesión esté acotada) y la semicontinuidad inferior (que relaciona el límite de la imagen de una sucesión con la imagen del límite de la sucesión).

En la Sección 5.4, obtendremos las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al problema (5.1). Como las soluciones que vamos buscando del problema (5.1)

son solamente para espacios de Sobolev, veremos que podemos escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange en un sentido débil.

Para finalizar esta sección de introducción, damos un resultado importante que es la desigualdad de Poincaré que usaremos más adelante en la prueba del teorema de la Sección 5.3:

Teorema 5.1.1 (Desigualdad de Poincaré)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un abierto conexo acotado no vacío. Entonces, existe $\gamma = \gamma(p, \Omega) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \gamma \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Demostración: Consultar en [4] (caso: $p = 2$). La demostración se puede hacer de un modo similar para $p \in (1, +\infty) \setminus \{2\}$. □

5.2. El caso modelo: la integral de Dirichlet

Para comenzar con esta sección, damos el principal resultado asociado al **problema de la integral de Dirichlet**:

Teorema 5.2.1 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un abierto conexo acotado no vacío con frontera Lipschitz acotada y $u_0 \in H^1(\Omega)$. Entonces, el problema

$$\inf \left\{ J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx : u \in u_0 + H_0^1(\Omega) \right\} = m \quad (5.4)$$

tiene una única solución $\bar{u} \in u_0 + H_0^1(\Omega)$.

Además, \bar{u} satisface la forma débil de la ecuación de Laplace que viene dada por

$$\int_{\Omega} (\nabla \bar{u}(x), \nabla \varphi(x)) dx = 0 \quad (5.5)$$

para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ donde (\cdot, \cdot) denota el producto escalar en \mathbb{R}^N .

Recíprocamente, si $\bar{u} \in u_0 + H_0^1(\Omega)$ verifica (5.5) entonces \bar{u} es un mínimo de (5.4).

Demostración: Dividimos la prueba en cuatro partes.

■ Parte 1 (Existencia): Sea $u_\nu \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ una sucesión minimizante de (5.1), esto quiere decir que

$$J(u_\nu) = \int_{\Omega} f(x, u_\nu, \nabla u_\nu) dx \geq \alpha_1 \int_{\Omega} |\nabla u_\nu|^p dx + \alpha_2 \int_{\Omega} |u_\nu|^q dx + \alpha_3$$

y cuando $\nu \rightarrow \infty$ se tiene que

$$J(u) \geq \alpha_1 \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \alpha_2 \int_{\Omega} |u|^q dx + \alpha_3$$

Luego, se deduce que

$$J(u_\nu) \longrightarrow \inf\{J(u)\} = m$$

cuando $\nu \rightarrow \infty$.

Obsérvese que por la desigualdad de Poincaré (Teorema 5.1.1), podemos encontrar constantes $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ tales que

$$\sqrt{2J(u_\nu)} = \|\nabla u_\nu\|_{L^2(\Omega)} \geq \gamma_1 \|u_\nu\|_{H^1(\Omega)} - \gamma_2 \|u_0\|_{H^1(\Omega)}$$

Como u_ν es una sucesión minimizante y $m \rightarrow \infty$, podemos deducir que existe $\gamma_3 > 0$ tal que

$$\|u_\nu\|_{H^1(\Omega)} \leq \gamma_3$$

Entonces, existe $\bar{u} \in u_0 + H_0^1(\Omega)$ y una subsucesión (que volveremos a denotar u_ν), gracias al Teorema C.6, cumpliendo que

$$u_\nu \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{en } H^1(\Omega) \quad (\clubsuit)$$

cuando $\nu \rightarrow \infty$.

Ahora, seguimos la demostración mediante un argumento de **semicontinuidad inferior**. Para ello, usamos la semicontinuidad inferior asociada al funcional J . Esto quiere decir que si $u_\nu \rightharpoonup \bar{u}$ en $H^1(\Omega)$ entonces

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} J(u_\nu) \geq J(\bar{u})$$

gracias al Lema 5.3.2. Además, tenemos también que

$$\begin{aligned} |\nabla u_\nu|^2 &= |\nabla \bar{u}|^2 + 2(\nabla \bar{u}, \nabla u_\nu - \nabla \bar{u}) + |\nabla u_\nu - \nabla \bar{u}|^2 \geq \\ &\geq |\nabla \bar{u}|^2 + 2(\nabla \bar{u}, \nabla u_\nu - \nabla \bar{u}) \end{aligned}$$

Integrando esta expresión, tendríamos que

$$J(u_\nu) \geq J(\bar{u}) + \int_{\Omega} (\nabla \bar{u}, \nabla u_\nu - \nabla \bar{u}) dx \quad (5.6)$$

Para finalizar, veamos que el segundo término del lado derecho de la desigualdad anterior (5.6) tiende a 0 cuando $\nu \rightarrow \infty$. Recordemos que $\nabla \bar{u} \in L^2(\Omega)$ y que $\nabla u_\nu - \nabla \bar{u} \rightarrow 0$ en $L^2(\Omega)$ (notemos que esta convergencia es débil, gracias a (♣)) lo que implica que (usando la definición de convergencia débil en $L^2(\Omega)$)

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\nabla \bar{u}, \nabla u_\nu - \nabla \bar{u}) dx = 0 \quad (5.7)$$

como queríamos. Volviendo a (5.6) y teniendo en cuenta lo obtenido en (5.7), podemos concluir que

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} J(u_\nu) \geq J(\bar{u})$$

y de este modo, concluimos el argumento de **semicontinuidad inferior**.

Para finalizar con la *Parte 1*, combinamos los argumentos de **compacidad** y **semicontinuidad inferior**. Como $\{u_\nu\}$ es una sucesión minimizante (es decir, $J(u_\nu) \rightarrow \inf\{J(u)\} = m$ cuando $\nu \rightarrow \infty$) y como la sucesión es semicontinua inferiormente (es decir, $\liminf_{\nu \rightarrow \infty} J(u_\nu) \geq J(\bar{u})$) entonces se puede deducir, teniendo en cuenta la unicidad del límite, que $J(\bar{u}) = m$, o lo que es lo mismo, \bar{u} es un mínimo de (5.4).

- Parte 2 (Unicidad): Supongamos que existen $\bar{u}, \bar{v} \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$

tales que

$$J(\bar{u}) = J(\bar{v}) = m$$

y probemos que esto nos lleva a que $\bar{u} = \bar{v}$. Denotamos $\bar{w} = \frac{\bar{u} + \bar{v}}{2}$ tal que $\bar{w} \in u_0 + H_0^1(\Omega)$. Ahora, usamos el hecho de que la función $\xi \rightarrow |\xi|^2$ es convexa y que \bar{w} es un mínimo. Así, obtenemos que

$$m \leq J(\bar{w}) \leq \frac{1}{2}J(\bar{u}) + \frac{1}{2}J(\bar{v}) = m$$

lo que implica que

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla \bar{u}|^2 + \frac{1}{2} |\nabla \bar{v}|^2 - \left| \frac{\nabla \bar{u} + \nabla \bar{v}}{2} \right|^2 \right] dx = 0 \quad (5.8)$$

Volviendo a usar la convexidad de la función $\xi \rightarrow |\xi|^2$, deducimos que el integrando de (5.8) es no negativo, por lo que el integrando es 0. Esto es posible si y solo si

$$\frac{1}{2} |\nabla \bar{u}|^2 + \frac{1}{2} |\nabla \bar{v}|^2 - \left| \frac{\nabla \bar{u} + \nabla \bar{v}}{2} \right|^2 = 0$$

c.p.d. en Ω .

Ahora, usamos, la convexidad estricta de la función $\xi \rightarrow |\xi|^2$ para obtener que $\nabla \bar{u} = \nabla \bar{v}$ c.p.d. en Ω , que combinando con el hecho de que \bar{u}, \bar{v} coinciden sobre la frontera de Ω (ya que $\bar{u}, \bar{v} \in u_0 + H_0^1(\Omega)$) nos lleva a que $\bar{u} = \bar{v}$ c.p.d. en Ω , como queríamos. Esto prueba la unicidad.

■ Parte 3 (Ecuación de Euler-Lagrange): A continuación, probemos (5.5).

Sean $\varepsilon \in \mathbb{R}$ y $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ arbitrarios. Tengamos en cuenta que $\bar{u} + \varepsilon\varphi \in u_0 + H_0^1(\Omega)$ y que \bar{u} es un mínimo de (5.4) lo cual nos lleva a que

$$\begin{aligned} J(\bar{u}) &\leq J(\bar{u} + \varepsilon\varphi) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla \bar{u} + \varepsilon \nabla \varphi|^2 dx = \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla \bar{u}|^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla \varphi|^2 + \varepsilon (\nabla \bar{u}, \nabla \varphi) \right) dx = \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla \bar{u}|^2 dx + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega} (\nabla \bar{u}, \nabla \varphi) dx = \\ &= J(\bar{u}) + \varepsilon^2 J(\varphi) + \varepsilon \int_{\Omega} (\nabla \bar{u}, \nabla \varphi) dx \end{aligned}$$

Entonces, obtenemos que:

$$J(\bar{u} + \varepsilon\varphi) = J(\bar{u}) + \varepsilon^2 J(\varphi) + \varepsilon \int_{\Omega} (\nabla \bar{u}, \nabla \varphi) dx \quad (5.9)$$

Ahora, como ε es arbitrario y \bar{u} es un mínimo del problema (5.4), derivando la expresión (5.9) y sustituyendo en $\varepsilon = 0$, se llega a que

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} J(\bar{u} + \varepsilon\varphi) \right|_{\varepsilon=0} = \int_{\Omega} (\nabla \bar{u}, \nabla \varphi) dx = 0$$

Por tanto,

$$\int_{\Omega} (\nabla \bar{u}, \nabla \varphi) \, dx = 0$$

y así, queda demostrado (5.5).

■ Parte 4 (Recíproco): Finalmente, probemos que si $\bar{u} \in u_0 + H_0^1(\Omega)$ verifica (5.5) entonces \bar{u} es necesariamente un mínimo de (5.4).

Sea $u \in u_0 + H_0^1(\Omega)$ arbitrario y escribimos $\varphi = u - \bar{u}$ con $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Entonces,

$$\begin{aligned} J(u) &= J(\bar{u} + \varphi) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla \bar{u} + \nabla \varphi|^2 \, dx = \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla \bar{u}|^2 \, dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 \, dx + \int_{\Omega} (\nabla \bar{u}, \nabla \varphi) \, dx = \\ &= J(\bar{u}) + J(\varphi) + \int_{\Omega} (\nabla \bar{u}, \nabla \varphi) \, dx \end{aligned}$$

Ahora, tengamos en cuenta $J(\varphi) \geq 0$ y (5.5). Para concluir, basta volver a la expresión anterior y tener en cuenta estos dos hechos previos para obtener que

$$J(u) = J(\bar{u}) + J(\varphi) + \int_{\Omega} (\nabla \bar{u}, \nabla \varphi) \, dx \geq J(\bar{u})$$

Esto prueba que \bar{u} es un mínimo de (5.4).

De este modo, queda demostrada la última parte del teorema y así, concluimos la demostración del mismo. □

Para acabar con esta sección y antes de dar un resultado general de existencia, damos unas notas de interés sobre el Teorema 5.2.1 y sobre su demostración:

Nota 5.2.2 (Sobre el Teorema 5.2.1)

- *Volvemos a insistir en que la hipótesis débil que imponemos sobre u_0 , sobre Ω y del hecho de que $u \in u_0 + H_0^1(\Omega)$ nos quiere decir que $u = u_0$ sobre $\partial\Omega$ (en el sentido de los espacios de Sobolev).*

- Si la solución \bar{u} encontrada fuera más regular, es decir, $\bar{u} \in H^2(\Omega)$ entonces integrando por partes (5.5), llegaríamos a que

$$\int_{\Omega} \Delta \bar{u}(x) \varphi(x) dx = 0$$

para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Ahora, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo Variacional (Teorema 1.1.1), obtendríamos que $\Delta \bar{u} = 0$ c.p.d. en Ω .

- Como dijimos en la introducción de este capítulo, el teorema anterior (Teorema 5.2.1) fue probado por Hilbert, Lebesgue y Tonelli (a finales del siglo XIX y principios del siglo XX), pero fue expresado en otro sentido ya que los espacios de Sobolev aún no existían. A lo largo del siglo XIX, hubo varios intentos de probar un teorema similar al anterior, especialmente por Dirichlet y Riemann.

5.3. Un teorema general de existencia

El principal resultado de este capítulo dedicado a los métodos directos es el siguiente:

Teorema 5.3.1 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un abierto conexo acotado no vacío con frontera Lipschitz continua. Consideramos $f \in C^0(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ con $f = f(x, u, \xi)$ verificando

$$\xi \rightarrow f(x, u, \xi) \text{ es convexa para todo } (x, u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \quad (5.10)$$

Existen $p > q \geq 1$ y $\alpha_1 > 0, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x, u, \xi) \geq \alpha_1 |\xi|^p + \alpha_2 |u|^q + \alpha_3 \quad (5.11)$$

para todo $(x, u, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

Considérese el problema (5.1) donde $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ con $J(u_0) < \infty$. Entonces, existe un mínimo $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ de (5.1).

Más aún, si $(u, \xi) \rightarrow f(x, u, \xi)$ es estrictamente convexa para todo $x \in \bar{\Omega}$, entonces el mínimo es único.

Demostración: Una demostración de este resultado puede ser consultada en [5]. Lo probaremos en un caso más general (véase Teorema 5.3.3). □

Para probar el Teorema 5.3.1 en una versión más general, necesitaremos ayudarnos del siguiente resultado:

Lema 5.3.2 *Sea $p \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto conexo acotado no vacío con frontera Lipschitz continua y*

$$f : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N \times n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

tal que $f = f(x, u, \xi)$ es una función de Carathéodory verificando que

$$f(x, u, \xi) \geq (a(x), \xi) + b(x) + c|u|^r$$

para todo $x \in \Omega$, para todo $(u, \xi) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N \times n}$, para algún $a \in L^{p'}(\Omega)$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, para algún $b \in L^1(\Omega)$ y para algún $c \in \mathbb{R}$ con $1 \leq r < \frac{np}{n-p}$ si $p < n$ y $1 \leq r < \infty$ si $p \geq n$ de forma que (\cdot, \cdot) denota el producto escalar en $\mathbb{R}^{N \times n}$.

Supongamos que $\xi \rightarrow f(x, u, \xi)$ es convexa y que

$$u_\nu \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{en } W^{1,p}(\Omega)$$

Entonces,

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} J(u_\nu) \geq J(\bar{u})$$

Demostración: Una demostración de este resultado puede ser consultada en [6]. La idea principal está en aplicar el Teorema de Rellich-Kondrachov (véase Teorema C.9). □

Seguimos con el resultado de existencia más general que podemos dar y que vamos a demostrar:

Teorema 5.3.3 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto conexo acotado no vacío con frontera Lipschitz continua. Consideramos $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N \times n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función de Carathéodory cumpliendo la siguiente condición de coercitividad*

$$f(x, u, \xi) \geq \alpha_1 |\xi|^p + \alpha_2 |u|^q + \alpha_3(x)$$

para casi todo $x \in \Omega$, para todo $(u, \xi) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N \times n}$, para algún $\alpha_3 \in L^1(\Omega)$, para algún $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, para algún $\alpha_1 > 0$ y para algún $p > q \geq 1$. Supongamos que $\xi \rightarrow f(x, u, \xi)$ es convexa y consideramos el funcional

$$J(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

tal que $J(u_0) < +\infty$.

Entonces el problema (5.1) alcanza un mínimo. Más aún, si $(u, \xi) \rightarrow f(x, u, \xi)$ es estrictamente convexa para casi todo $x \in \Omega$, entonces el mínimo es único.

Demostración:

■ Paso 1 (Existencia):

Consideramos el problema (5.1) y observamos que como $J(u_0) < +\infty$, se tiene que $m < +\infty$. Además, $m > -\infty$ debido a la cota inferior de f . Sea $\{u_\nu\}$ una sucesión minimizante, es decir, $J(u_\nu) \rightarrow m$ cuando $\nu \rightarrow \infty$. Por la condición de coercitividad para f , se tiene para ν suficientemente grande que

$$m + 1 \geq J(u_\nu) \geq \alpha_1 \|\nabla u_\nu\|_{L^p(\Omega)}^p - |\alpha_2| \|u_\nu\|_{L^q(\Omega)}^q - \int_{\Omega} |\alpha_3(x)| dx$$

A partir de ahora, denotaremos por $\gamma_k > 0$ varias constantes que son independientes de ν . Luego, por la Desigualdad de Hölder (Teorema C.10), tenemos para $p > q$ que

$$\|u_\nu\|_{L^q(\Omega)}^q = \int_{\Omega} |u_\nu|^q dx \leq \left(\int_{\Omega} |u_\nu|^p dx \right)^{q/p} \left(\int_{\Omega} dx \right)^{(p-q)/p} = \mu(\Omega)^{(p-q)/p} \|u_\nu\|_{L^p(\Omega)}^q$$

y podemos deducir que existen constantes γ_1 y γ_2 tales que

$$\begin{aligned} m + 1 &\geq \alpha_1 \|\nabla u_\nu\|_{L^p(\Omega)}^p - \gamma_1 \|u_\nu\|_{L^p(\Omega)}^q - \gamma_2 \geq \\ &\geq \alpha_1 \|\nabla u_\nu\|_{L^p(\Omega)}^p - \gamma_1 \|u_\nu\|_{W^{1,p}(\Omega)}^q - \gamma_2 \end{aligned}$$

Haciendo uso de la Desigualdad de Poincaré (Teorema 5.1.1), podemos encontrar γ_3, γ_4 y γ_5 tales que

$$m + 1 \geq \gamma_3 \|u_\nu\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p - \gamma_4 \|u_0\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p - \gamma_1 \|u_\nu\|_{W^{1,p}(\Omega)}^q - \gamma_5$$

y por tanto, γ_6 será una constante verificando

$$m + 1 \geq \gamma_3 \|u_\nu\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p - \gamma_1 \|u_\nu\|_{W^{1,p}(\Omega)}^q - \gamma_6$$

Como

$$\gamma_1 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^q \leq \frac{q}{p} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p \varepsilon^{p/q} + \frac{p-q}{p} \gamma_1^{p/(p-q)} \frac{1}{\varepsilon^{p/(p-q)}}$$

Eligiendo

$$\frac{q}{p} \varepsilon^{p/q} = \frac{\gamma_3}{2}$$

se tiene que

$$\varepsilon^{p/q} = \frac{p\gamma_3}{2q} \quad \text{si y solo si} \quad \varepsilon = \left(\frac{p\gamma_3}{2q} \right)^{q/p}$$

Así,

$$\gamma_1 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^q \leq \frac{\gamma_3}{2} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p + C(p, q, \gamma_1, \gamma_3)$$

De ese modo,

$$\begin{aligned} m + 1 &\geq \gamma_3 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p - \gamma_1 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^q - \gamma_6 \geq \\ &\geq \gamma_3 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p - \frac{\gamma_3}{2} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p - C(p, q, \gamma_1, \gamma_3) - \gamma_6 = \\ &= \frac{\gamma_3}{2} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p - [C(p, q, \gamma_1, \gamma_3) + \gamma_6] \end{aligned}$$

Poniendo

$$\gamma_7 = \frac{\gamma_3}{2} \quad \text{y} \quad \gamma_8 = C(p, q, \gamma_1, \gamma_3) + \gamma_6$$

se llega a que

$$m + 1 \geq \gamma_7 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p - \gamma_8$$

A continuación, usando el Teorema C.6, existe una subsucesión (que seguiremos denotando $\{u_\nu\}$) tal que $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ de forma que

$$u_\nu \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{en} \quad W^{1,p}(\Omega)$$

gracias a la Definición C.1. Además, haciendo uso del Lema 5.3.2 (queda pendiente demostrar que las hipótesis se verifican), obtenemos

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} J(u_\nu) \geq J(\bar{u})$$

Por tanto, \bar{u} es un mínimo del problema (5.1), como queríamos demostrar.

Antes de concluir con este paso, veamos que la función f del Teorema 5.3.3 implica la función f del Lema 5.3.2 y de este modo, comprobando las hipótesis del Lema 5.3.2, podemos justificar lo probado anteriormente.

Tenemos que demostrar que

$$f(x, u, \xi) \geq (a(x), \xi) + b(x) + c|u|^r$$

partiendo de

$$f(x, u, \xi) \geq \alpha_1|\xi|^p + \alpha_2|u|^q + \alpha_3(x)$$

Elegimos $a(x) = |\alpha_3(x)|^{1/p'}$, de manera que

$$(a(x), \xi) \leq |a(x)||\xi| \leq \frac{1}{p}\varepsilon^p|\xi|^p + \frac{1}{p'}\frac{1}{\varepsilon^{p'}}|a(x)|^{p'} = \frac{1}{p}\varepsilon^p|\xi|^p + \frac{1}{p'}\frac{1}{\varepsilon^{p'}}|\alpha_3(x)|$$

Ahora, tomamos

$$\frac{1}{p}\varepsilon^p = \alpha_1 \quad \text{si y solo si} \quad \varepsilon = (\alpha_1 p)^{1/p}$$

y llegamos a que

$$(a(x), \xi) \leq \alpha_1|\xi|^p + \frac{1}{p'}\varepsilon^{-p'/p}|\alpha_3(x)|$$

Luego,

$$\begin{aligned} f(x, u, \xi) &\geq \alpha_1|\xi|^p + \alpha_2|u|^q + \alpha_3(x) \geq (a(x), \xi) - \frac{1}{p'}(\alpha_1 p)^{-p'/p}|\alpha_3(x)| + \alpha_2|u|^q + \alpha_3(x) = \\ &= (|\alpha_3(x)|^{1/p'}, \xi) + \alpha_2|u|^q + \alpha_3(x) - \frac{1}{\alpha_1^{p'/p}} \frac{p-1}{pp'}|\alpha_3(x)| \end{aligned}$$

y esto implica la hipótesis de coertividad sobre f del Lema 5.3.2 para $r = q < p$.

Así, concluye el primer paso pues si tomamos $r = q < p$, vemos que se verifican las restricciones para r que aparecen en el Lema 5.3.2 y por tanto, quedaría justificado el argumento desarrollado anteriormente para probar la existencia de mínimo del problema (5.1).

▪ Paso 2 (Unicidad):

Supongamos que existen $\bar{u}, \bar{v} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ tales que

$$J(\bar{u}) = J(\bar{v}) = m$$

y vamos a probar que $\bar{u} = \bar{v}$. Denotamos $\bar{w} = \frac{\bar{u} + \bar{v}}{2}$ tal que $\bar{w} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$. Como la función $(u, \xi) \rightarrow f(x, u, \xi)$ es convexa, podemos deducir que \bar{w} es un mínimo de forma que

$$m \leq J(\bar{w}) \leq \frac{1}{2}J(\bar{u}) + \frac{1}{2}J(\bar{v}) = m$$

lo que implica que

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{2}f(x, \bar{u}, \nabla\bar{u}) + \frac{1}{2}f(x, \bar{v}, \nabla\bar{v}) - f\left(x, \frac{\bar{u} + \bar{v}}{2}, \frac{\nabla\bar{u} + \nabla\bar{v}}{2}\right) \right] dx = 0$$

De nuevo, por la convexidad de la función $(u, \xi) \rightarrow f(x, u, \xi)$, se llega a que el integrando es no negativo mientras que la integral es nula. Luego, esto es posible si y sólo si

$$\frac{1}{2}f(x, \bar{u}, \nabla\bar{u}) + \frac{1}{2}f(x, \bar{v}, \nabla\bar{v}) - f\left(x, \frac{\bar{u} + \bar{v}}{2}, \frac{\nabla\bar{u} + \nabla\bar{v}}{2}\right) = 0$$

c.p.d. en Ω .

Finalmente, haciendo uso de la convexidad estricta de la función $(u, \xi) \rightarrow f(x, u, \xi)$ se llega a que $\bar{u} = \bar{v}$ y $\nabla\bar{u} = \nabla\bar{v}$ c.p.d. en Ω , lo que nos da la unicidad. Así, se concluye el paso 2 del teorema y la demostración del mismo. \square

Ahora, damos algunas notas de interés sobre el Teorema 5.3.1:

Nota 5.3.4 (Sobre el Teorema 5.3.1)

- *Las hipótesis del teorema son casi todas necesarias, en el sentido de que si elimináramos alguna de ellas, podríamos encontrar un contraejemplo para la no existencia de mínimos. La única hipótesis que se puede poner en un sentido más débil, es la continuidad de f .*

- *La parte final de la demostración nos da a entender que la unicidad se da gracias a una condición débil de convexidad teniendo que $(u, \xi) \rightarrow f(x, u, \xi)$ es convexa. Solo bastaría exigir que $u \rightarrow f(x, u, \xi)$ fuera estrictamente convexa ó bien que $\xi \rightarrow f(x, u, \xi)$ fuera estrictamente convexa:*
 - *Si $u \rightarrow f(x, u, \xi)$ es estrictamente convexa entonces $\bar{u} = \bar{v}$ y se tendría la unicidad.*
 - *Si $\xi \rightarrow f(x, u, \xi)$ es estrictamente convexa entonces $\nabla \bar{u} = \nabla \bar{v}$ de forma que $\bar{u} = \bar{v} + C$. Pero $\bar{u} - \bar{v} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ por lo que $(\bar{u} - \bar{v})|_{\partial\Omega} = 0$. Por tanto, $C = 0$. Esto nos lleva a que $\bar{u} = \bar{v}$ y así, se tendría también la unicidad.*
- *El teorema sigue siendo válido para el caso vectorial, donde $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ para $N, M > 1$ (véase [5]).*
- *Este teorema es un resultado con una larga historia debido a Tonelli, en el que destaca la importancia de la convexidad de f .*

A continuación, seguimos estudiando algunos ejemplos desde el punto de visto de los métodos directos que han sido vistos en capítulos anteriores donde usamos métodos clásicos para su estudio. Comencemos con el ejemplo de la integral de Dirichlet:

Ejemplo 5.3.5 (Integral de Dirichlet)

- *La integral de Dirichlet considerada en la Sección 5.2 donde el integrando venía dado por*

$$f(x, u, \xi) = f(\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2$$

cumple todas las hipótesis en el marco del Teorema 5.3.1 y por tanto, como ya vimos, tiene una única solución que es un mínimo.

- *Una generalización natural del ejemplo anterior es el siguiente, tomando*

$$f(x, u, \xi) = \frac{1}{p}|\xi|^p + g(x, u)$$

donde g es continua y no negativa y $p > 1$. □

Seguimos con un par de ejemplos sobre el problema de las superficies mínimas de revolución:

Ejemplo 5.3.6 (Superficies mínimas de revolución 1) *El problema de las superficies mínimas de revolución cuyo integrando viene dado por*

$$f(x, u, \xi) = f(\xi) = \sqrt{1 + |\xi|^2}$$

satisface todas las hipótesis del Teorema 5.3.1 pero solo verifica la hipótesis (5.11) en el caso $p = 1$. La razón de que $p = 1$ que corresponde a que el espacio de Sobolev $W^{1,1}$ no es reflexivo (consultar Definición C.5), que es un hecho necesario que ha sido de gran importancia en la demostración del Teorema 5.3.3. Como conclusión, podemos decir, que en estas condiciones, no se puede garantizar la existencia de solución de este problema (al menos usando los argumentos de la demostración). \square

Ejemplo 5.3.7 (Superficies mínimas de revolución 2) *En este ejemplo, vamos a mostrar que se verifican todas las hipótesis del Teorema 5.3.1 excepto (5.11) que solo es válida para $p = 1$.*

Para ello, consideraremos $N = 1$, $f(x, u, \xi) = \sqrt{u^2 + \xi^2}$ y el problema

$$\inf \left\{ J(u) = \int_0^1 f(u(x), u'(x)) dx : u \in X \right\} = m \quad (5.12)$$

donde $X = \{u \in W^{1,1}(0, 1) : u(0) = 0, u(1) = 1\}$. Vamos a probar que (5.12) no tiene solución. En primer lugar, veamos que $m = 1$ pero empezemos observando que $m \geq 1$:

$$J(u) \geq \int_0^1 |u'(x)| dx \geq \int_0^1 u'(x) dx = u(1) - u(0) = 1 - 0 = 1$$

Para probar que $m = 1$, construimos una sucesión minimizante $u_\nu \in X$ como sigue

$$u_\nu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1 - \frac{1}{\nu}] \\ 1 + \nu(x - 1) & \text{si } x \in (1 - \frac{1}{\nu}, 1] \end{cases}$$

Luego, para $m = 1$ se tiene que

$$1 \leq J(u_\nu) = \int_{1-\frac{1}{\nu}}^1 \sqrt{(1 + \nu(x - 1))^2 + \nu^2} dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{\nu} \sqrt{1 + \nu^2} \rightarrow 1$$

cuando $\nu \rightarrow \infty$.

Ahora, suponemos para llegar a contradicción que, existe $\bar{u} \in X$ mínimo de (5.12). Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} 1 = J(\bar{u}) &= \int_0^1 \sqrt{\bar{u}(x)^2 + \bar{u}'(x)^2} dx \geq \int_0^1 |\bar{u}'(x)| dx \geq \\ &\geq \int_0^1 \bar{u}'(x) dx = \bar{u}(1) - \bar{u}(0) = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

Esto implica que $\bar{u} = 0$ c.p.d. en $(0, 1)$. Gracias a la continuidad de los elementos de X (consultar [3]), llegamos a que $\bar{u} \equiv 0$ pero esto es imposible pues es incompatible con las condiciones de contorno.

Por tanto, el problema (5.12) no tiene solución, como queríamos probar. □

Ahora, vamos a tratar el problema de Weierstrass (visto en el Ejemplo 1.2.11 en la Sección 2 del Capítulo 1):

Ejemplo 5.3.8 (Ejemplo de Weierstrass) Consideramos $f(x, \xi) = x\xi^2$ y el problema

$$\inf \left\{ J(u) = \int_0^1 f(x, u'(x)) dx : u \in X \right\} = m \quad (5.13)$$

donde $X = \{u \in H^1(0, 1) : u(0) = 1, u(1) = 0\}$. Teniendo en cuenta esta función, vemos que se verifican todas las hipótesis del Teorema 5.3.1 excepto la hipótesis (5.11) que solo es válida cuando $\alpha_1 = 0$.

Esto es suficiente para ver que el problema (5.13) no tiene un mínimo en X . Sabemos que el problema no tiene solución en $Y = X \cap C^1$ por el Ejemplo 1.2.11 de forma que el valor del ínfimo que denotaremos m_Y es 0. Además, tenemos que $0 \leq m_X \leq m_Y$ por lo que $m_X = 0$ (es conveniente consultar (1.18) y (1.19) para recordar las definiciones de m_X y m_Y).

Ahora, suponemos para llegar a contradicción que, el problema (5.13) tiene una solución $\bar{u} \in X$ tal que $J(\bar{u}) = 0$. Entonces, teniendo en cuenta que el integrando es no negativo, se deduce que $\bar{u}' = 0$ c.p.d. en $(0, 1)$.

A continuación, usamos que los elementos de X son continuos ya que $H^1((0, 1))$ se inyecta en $C^0(0, 1)$ de donde se llega a que \bar{u} es constante y esto es imposible por las condiciones de contorno por lo que se llega a contradicción. Por tanto, el problema (5.13) no tiene solución. □

Seguimos con una observación sobre el Ejemplo 5.3.8:

Observación 5.3.9 (Sobre el Ejemplo 5.3.8) :

El ejemplo de la desigualdad de Poincaré-Wirtinger (visto en otras ocasiones) muestra que, en general, no se puede tener que $q = p$ en la hipótesis (5.11). Basta considerar $\lambda > \pi$ y la función

$$f(x, u, \xi) = f(u, \xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 - \lambda^2 u^2)$$

y recordar el Ejemplo 1.2.13, donde teníamos el problema

$$\inf \left\{ J(u) = \int_0^1 f(u(x), u'(x)) dx : u \in H_0^1(0, 1) \right\} = m \quad (5.14)$$

tal que $m = -\infty$, y esto nos llevaba a que (5.14) no tenía solución. □

Para concluir esta sección, terminamos con otro ejemplo de gran interés que es el ejemplo de Bolza:

Ejemplo 5.3.10 (Ejemplo de Bolza) *Veamos que, en general, no se puede debilitar la hipótesis (5.10). Ya vimos un ejemplo en el Capítulo 1, en concreto, el Ejemplo 1.2.6 donde teníamos que $f(x, u, \xi) = e^{-\xi^2}$ que no satisfacía ni la hipótesis (5.10) ni la hipótesis (5.11).*

En este ejemplo, vamos a considerar la función

$$f(x, u, \xi) = f(u, \xi) = (\xi^2 - 1)^2 + u^4$$

y el problema

$$\inf \left\{ J(u) = \int_0^1 f(u(x), u'(x)) dx : u \in W_0^{1,4}(0, 1) \right\} = m \quad (5.15)$$

Por un momento, supongamos que hemos probado que $m = 0$, entonces veamos que el problema (5.15) no tiene solución.

Por reducción al absurdo, supongamos que existe $\bar{u} \in W_0^{1,4}(0, 1)$ un mínimo de (5.15), es decir, $J(\bar{u}) = 0$. Esto implica que $\bar{u} = 0$ y que $|\bar{u}'| = 1$ c.p.d. en $(0, 1)$. De nuevo, como en el Ejemplo 5.3.7 por la continuidad de los elementos de $W^{1,4}$ se tiene que $\bar{u} = 0$ de forma que $\bar{u}' = 0$, lo cual es absurdo y llegamos a contradicción.

Para concluir, veamos que $m = 0$. Para ello, construimos una sucesión minimizante adecuada. Sea $u_N \in W_0^{1,4}$ definida, en cada intervalo $\left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]$ para $0 \leq k \leq N - 1$, como sigue

$$u_N(x) = \begin{cases} x - \frac{k}{N} & \text{si } x \in \left[\frac{2k}{2N}, \frac{2k+1}{2N}\right] \\ -x + \frac{k+1}{N} & \text{si } x \in \left(\frac{2k+1}{2N}, \frac{2k+2}{2N}\right] \end{cases}$$

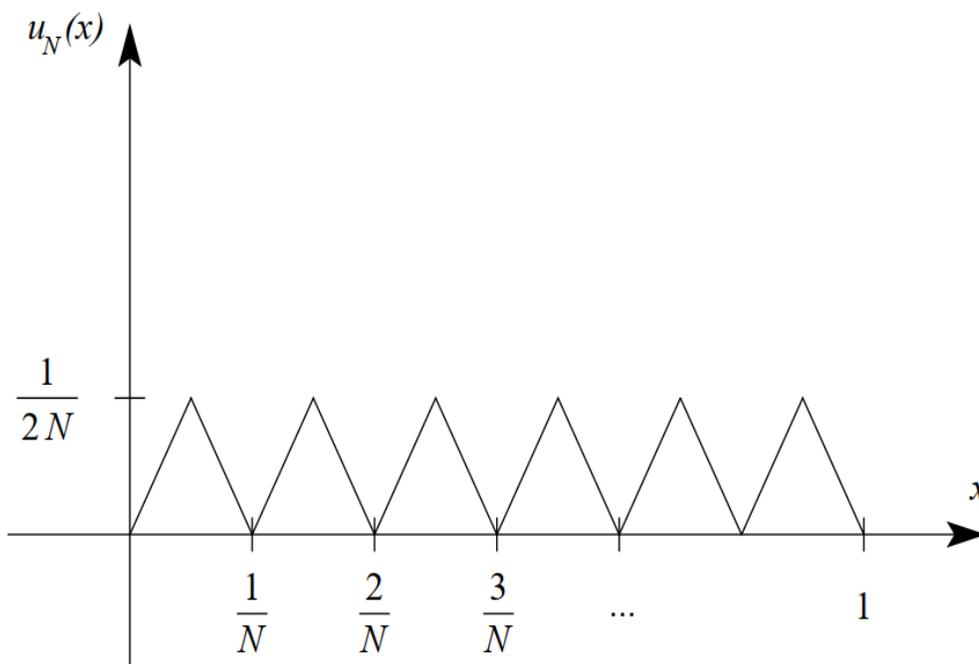
que está representada en la figura (★) de la siguiente página.

Finalmente, teniendo en cuenta la sucesión minimizante definida antes y el gráfico posterior, observamos que $|u_N'| = 1$ c.p.d. y $|u_N| \leq \frac{1}{2N}$, y llegamos a que

$$0 \leq J(u_N) \leq \frac{1}{(2N)^4}$$

cuando $N \rightarrow \infty$. Esto implica que $m = 0$.

Por tanto, hemos probado que el problema (5.15) no tiene solución, como queríamos demostrar. □



Ejemplo: Sucesión minimizante $\{u_N\}$ (figura obtenida de [5]) (★)

5.4. Ecuaciones de Euler-Lagrange

El objetivo de esta sección será deducir las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al problema que sigue:

$$\inf \left\{ J(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx : u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega) \right\} = m$$

con el que venimos trabajando desde el principio de este capítulo, es decir, el problema (5.1). La forma de proceder será idéntica a la que seguimos en la Sección 2 del Capítulo 1 pero teniendo algo más de cuidado. En aquella ocasión, teníamos como hipótesis que el mínimo \bar{u} que obteníamos era de clase C^2 . Ahora, solo le vamos a exigir que pertenezca al espacio de Sobolev $W^{1,p}$.

A continuación, damos el principal teorema de esta sección que nos sirve para deducir las ecuaciones de Euler-Lagrange en un sentido más débil:

Teorema 5.4.1 (Ecuaciones de Euler-Lagrange) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto conexo acotado no vacío con frontera Lipschitz continua. Sea $p \geq 1$ y $f \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ tal que $f = f(x, u, \xi)$ verificando que

existe $\beta \geq 0$ tal que para todo $(x, u, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ se tiene que

$$|f_u(x, u, \xi)|, |f_\xi(x, u, \xi)| \leq \beta(1 + |u|^{p-1} + |\xi|^{p-1}) \quad (5.16)$$

donde $f_\xi = (f_{\xi_1}, \dots, f_{\xi_n})$, $f_{\xi_i} = \frac{\partial f}{\partial \xi_i}$ y $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}$.

Sea $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ un mínimo del problema (5.1) donde $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces, $\bar{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ satisface la forma débil de la ecuación de Euler-Lagrange que viene dada por

$$\int_{\Omega} [f_u(x, \bar{u}, \nabla \bar{u})\varphi + (f_\xi(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}), \nabla \varphi)] dx = 0 \quad (5.17)$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ donde (\cdot, \cdot) denota el producto escalar usual en \mathbb{R}^N .

Más aún, si $f \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ y $\bar{u} \in C^2$ entonces \bar{u} satisface la ecuación de Euler-Lagrange que viene dada por

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} [f_{\xi_i}(x, \bar{u}, \nabla \bar{u})] = f_u(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) \quad (5.18)$$

para todo $x \in \bar{\Omega}$.

Recíprocamente, si $(u, \xi) \rightarrow f(x, u, \xi)$ es convexa para todo $x \in \bar{\Omega}$ y si \bar{u} es una solución de (5.17) o bien de (5.18) entonces \bar{u} es un mínimo del problema (5.1).

Demostración: Dividimos la prueba en cuatro pasos.

- Paso 1 (Cálculos previos): Escribimos

$$f(x, u, \xi) = f(x, 0, 0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} [f(x, tu, t\xi)] dt$$

para todo $(x, u, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

Luego, teniendo en cuenta la hipótesis (5.16), podemos deducir que existe $\gamma_1 > 0$ de manera que

$$|f(x, u, \xi)| \leq \gamma_1(1 + |u|^p + |\xi|^p) \quad (5.19)$$

para todo $(x, u, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

En particular, se tiene que

$$|J(u)| < \infty$$

para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

■ Paso 2 (Derivada del funcional J): Probaremos ahora que para todo

$u, \varphi \in W^{1,p}(\Omega)$ y para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(u + \varepsilon\varphi) - J(u)}{\varepsilon} = \int_{\Omega} [f_u(x, u, \nabla u)\varphi + (f_{\xi}(x, u, \nabla u), \nabla\varphi)] dx \quad (5.20)$$

Consideramos

$$g(x, \varepsilon) = f(x, u(x) + \varepsilon\varphi(x), \nabla u(x) + \varepsilon\nabla\varphi(x))$$

de forma que

$$J(u + \varepsilon\varphi) = \int_{\Omega} g(x, \varepsilon) dx$$

Como $f \in C^1(\Omega)$ tenemos, para casi todo $x \in \Omega$, que $\varepsilon \rightarrow g(x, \varepsilon)$ es de clase $C^1(\Omega)$ y por tanto, existe $\theta \in [-|\varepsilon|, |\varepsilon|]$ tal que $\theta = \theta(x)$ de forma que

$$g(x, \varepsilon) - g(x, 0) = g_{\varepsilon}(x, \theta)\varepsilon$$

donde

$$g_{\varepsilon}(x, \theta) = f_u(x, u + \theta\varphi, \nabla u + \theta\nabla\varphi)\varphi + (f_{\xi}(x, u + \theta\varphi, \nabla u + \theta\nabla\varphi), \nabla\varphi)$$

La hipótesis (5.16) implica que podemos encontrar $\gamma_2 > 0$ tal que, para todo $\theta \in [-1, 1]$, se llega a que

$$\left| \frac{g(x, \varepsilon) - g(x, 0)}{\varepsilon} \right| = |g_{\varepsilon}(x, \theta)| \leq \gamma_2(1 + |u|^p + |\varphi|^p + |\nabla u|^p + |\nabla\varphi|^p) \equiv G(x)$$

Tengamos en cuenta que como $u, \varphi \in W^{1,p}(\Omega)$, se deduce que $G \in L^1(\Omega)$.

Finalmente, teniendo de nuevo en cuenta que, $u, \varphi \in W^{1,p}(\Omega)$, haciendo uso de (5.19), se tiene que las funciones $x \rightarrow g(x, 0)$ y $x \rightarrow g(x, \varepsilon)$ están ambas en $L^1(\Omega)$.

En resumen, se tiene:

$$\frac{g(x, \varepsilon) - g(x, 0)}{\varepsilon} \in L^1(\Omega),$$

$$\left| \frac{g(x, \varepsilon) - g(x, 0)}{\varepsilon} \right| \leq G(x), \quad \text{con } G \in L^1(\Omega)$$

y

$$\frac{g(x, \varepsilon) - g(x, 0)}{\varepsilon} \longrightarrow g_\varepsilon(x, 0) \quad \text{c.p.d. en } \Omega$$

Para concluir este paso, basta aplicar el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue (Teorema C.11) y se deduce (5.20), como queríamos demostrar.

■ Paso 3 (Deducción de (5.17) y (5.18)): La conclusión del teorema se sigue del paso anterior. Como \bar{u} es un mínimo del problema (5.1) entonces

$$J(\bar{u} + \varepsilon\varphi) \geq J(\bar{u})$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y por tanto,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(\bar{u} + \varepsilon\varphi) - J(\bar{u})}{\varepsilon} = 0$$

que combinándolo con (5.20) implica el problema (5.17).

Para llegar al problema (5.18), basta integrar por partes en (5.17) y se llega a que

$$\int_{\Omega} [f_u(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) - \nabla \cdot f_\xi(x, \bar{u}, \nabla \bar{u})] \varphi \, dx = 0$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Finalmente, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo Variacional (Teorema 1.1.1), se deduce el problema (5.18), como se pretendía.

■ Paso 4 (Recíproco): Supongamos que \bar{u} es solución de (5.17).

Tengamos en cuenta que cualquier solución de (5.18) es solución de (5.17). Por la convexidad de f (gracias a la Proposición B.5), se deduce que para cada $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ se sigue que

$$f(x, u, \nabla u) \geq f(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) + f_u(x, \bar{u}, \nabla \bar{u})(u - \bar{u}) + (f_\xi(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}), (\nabla u - \nabla \bar{u}))$$

Ahora, integramos y hacemos uso de nuevo de (5.17) y del hecho de que $u - \bar{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para obtener inmediatamente que $J(u) \geq J(\bar{u})$ y así concluir que \bar{u} es un mínimo del problema (5.1).

Por tanto, se concluye la demostración de este último paso del teorema y la demostración del mismo. □

Ahora, mostramos algunas notas de interés sobre el Teorema 5.4.1:

Nota 5.4.2 (Sobre el Teorema 5.4.1) :

- Otra forma posible de escribir el problema (5.18) es la siguiente:

$$\nabla \cdot [f_\xi(x, \bar{u}, \nabla \bar{u})] = f_u(x, \bar{u}, \nabla \bar{u})$$

para todo $x \in \bar{\Omega}$.

- La hipótesis dada por (5.16) es necesaria para darle un sentido al problema (5.17). Más precisamente, para asegurar que $f_u \varphi, (f_\xi, \nabla \varphi) \in L^1(\Omega)$.
- Es evidente que cualquier solución de (5.18) es solución de (5.17). Sin embargo, el recíproco es cierto si \bar{u} es suficientemente regular (esto se tiene gracias al Teorema 1.2.2).
- En el enunciado del Teorema 5.4.1 no necesitamos las hipótesis (5.10) y (5.11) del Teorema 5.3.1 por lo que no hemos hecho uso de la convexidad de f para la demostración (para el recíproco la convexidad de f es necesaria). Sin embargo, necesitamos la existencia de un mínimo del problema (5.1).
- El Teorema 5.4.1 sigue siendo cierto en el caso vectorial, donde $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ para $N, M > 1$. De este modo, la ecuación de Euler-Lagrange se convierte en un sistema de ecuaciones en derivadas parciales como sigue

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} [f_{\xi_i}^j(x, \bar{u}, \nabla \bar{u})] = f_{u^j}(x, \bar{u}, \nabla \bar{u})$$

para todo $x \in \bar{\Omega}$ y para todo $j = 1, \dots, M$ donde $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{M \times N} \rightarrow \mathbb{R}$
 y $u = (u^1, \dots, u^M) \in \mathbb{R}^M$, $\xi = (\xi_i^j)_{\substack{1 \leq j \leq M \\ 1 \leq i \leq N}} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ y $\nabla u = \left(\frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right)_{\substack{1 \leq j \leq M \\ 1 \leq i \leq N}}$.

- En algunos casos, puede ser interesante la forma débil de la ecuación de Euler-Lagrange. Más precisamente, si tomamos funciones test φ en el problema (5.17) que estén en $\mathcal{D}(\Omega)$ en vez de en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces, la hipótesis (5.16) puede ser debilitada y reemplazada por

existe $p \geq 1$ y $\beta \geq 0$ tales que para todo $(x, u, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ se tiene que

$$|f_u(x, u, \xi)|, |f_\xi(x, u, \xi)| \leq \beta(1 + |u|^p + |\xi|^p)$$

En este caso, la prueba del Teorema 5.4.1 es idéntica.

Para terminar este capítulo, daremos algunos ejemplos bien conocidos. Empecemos con el ejemplo de la integral de Dirichlet:

Ejemplo 5.4.3 (Integral de Dirichlet) Recordemos que en el caso de la integral de Dirichlet teníamos que la función a considerar era

$$f(x, u, \xi) = f(\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2$$

que verifica la hipótesis (5.16) del Teorema 5.4.1. Entonces, la ecuación de Euler-Lagrange en su forma débil, teniendo en cuenta (5.17) viene dada por

$$\int_{\Omega} (\nabla \bar{u}(x), \nabla \varphi(x)) \, dx = 0$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mientras que teniendo en cuenta que $f \in \mathcal{C}^2$ la ecuación de Euler-Lagrange asociada a (5.18) sería

$$\Delta \bar{u} = 0$$

□

Ahora, generalizamos el ejemplo de la integral de Dirichlet [Ejemplo 5.4.3]:

Ejemplo 5.4.4 (Generalización del Ejemplo 5.4.3)

Vamos a generalizar el Ejemplo 5.4.3. Para ello, consideramos la función:

$$f(x, u, \xi) = f(\xi) = \frac{1}{p} |\xi|^p$$

Basta tener en cuenta la ecuación (5.18) ya que se verifica la hipótesis (5.16) del Teorema 5.4.1 para llegar a que

$$\nabla \cdot [|\nabla \bar{u}|^{p-2} \nabla \bar{u}] = 0 \quad \text{en } \Omega$$

que se conoce como la ecuación de Laplace cuando $p = 2$. □

Seguimos con otro ejemplo ya estudiado que es el de las superficies mínimas de revolución:

Ejemplo 5.4.5 (Superficies mínimas de revolución)

En este problema, considerábamos la siguiente función:

$$f(x, u, \xi) = f(\xi) = \sqrt{1 + |\xi|^2}$$

que satisface la hipótesis (5.16) del Teorema 5.4.1 cuando $p \geq 1$. Además, se tiene que

$$|f_\xi(\xi)| = \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\xi_i}{\sqrt{1 + |\xi|^2}} \right|^2 \right)^{1/2} \leq 1$$

gracias a la hipótesis (5.16) para $p \geq 1$.

Ahora, teniendo en cuenta la ecuación (5.18) llegamos a que

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \bar{u}}{\sqrt{1 + |\nabla \bar{u}|^2}} \right) = 0 \quad \text{en } \Omega$$

□

Continuamos con un ejemplo en el que no se verifica la hipótesis (5.16) del Teorema 5.4.1 y veremos que no se puede llegar a formular una ecuación de Euler-Lagrange asociada al problema debido a la función dada:

Ejemplo 5.4.6 (Falla la hipótesis (5.16) del Teorema 5.4.1)

Consideramos la función

$$f(x, u, \xi) = f(u, \xi) = g(u)|\xi|^2$$

con $0 \leq g(u), |g'(u)| \leq g_0$. Comprobemos si se satisface la hipótesis (5.16).

Tenemos que:

$$|f_u(u, \xi)| = |g'(u)||\xi|^2 \leq g_0|\xi|^2$$

$$|f_\xi(u, \xi)| = 2|g(u)||\xi| \leq 2g_0|\xi|$$

Observemos que si $g'(u) \neq 0$, entonces la función f no satisface la hipótesis (5.16) del Teorema 5.4.1. Sin embargo, la cumpliría poniendo p en lugar de $p - 1$ en esa hipótesis, de modo que solo podríamos escribir lo que sigue

$$\int_{\Omega} [f_u(\bar{u}, \nabla \bar{u})\varphi + (f_\xi(\bar{u}, \nabla \bar{u}), \nabla \varphi)] dx = 0$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ o para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. □

A continuación, vamos a dar dos ejemplos vistos en los Capítulos 1 y 4 para mostrar que si no tenemos la hipótesis de convexidad sobre la función f , entonces el recíproco del Teorema 5.4.1 es falso. Para ello, comencemos con el ejemplo de la desigualdad de Poincaré-Wirtinger:

Ejemplo 5.4.7 (Desigualdad de Poincaré-Wirtinger) Consideramos $\lambda > \pi$, la función

$$f(x, u, \xi) = f(u, \xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 - \lambda^2 u^2)$$

y el problema

$$\inf \left\{ J(u) = \int_0^1 f(u(x), u'(x)) dx : u \in H_0^1(0, 1) \right\} = m \quad (5.21)$$

Observemos que la función $\xi \rightarrow f(u, \xi)$ es convexa mientras que la función $(u, \xi) \rightarrow f(u, \xi)$ no lo es.

Esto nos lleva a que $m = -\infty$ y entonces el problema (5.21) tenía solución que no era un mínimo como ya vimos en el Ejemplo 1.2.13 y en el Ejemplo 4.2.3.

Sin embargo, podíamos formular la ecuación de Euler-Lagrange asociada a la ecuación (5.18) como sigue

$$u'' + \lambda^2 u = 0 \quad \text{en } [0, 1]$$

que tenía como solución $u \equiv 0$ que no es un mínimo del problema (5.21). □

Para finalizar este capítulo, veamos otro ejemplo en el que vamos a seguir insistiendo en la necesidad de que la función que consideramos sea convexa para poder garantizar que la solución del problema a estudiar se trate de un mínimo:

Ejemplo 5.4.8 Consideramos la función $f(x, u, \xi) = f(\xi) = (\xi^2 - 1)^2$, la cual no es convexa, y queremos estudiar el problema que sigue

$$\inf \left\{ J(u) = \int_0^1 f(u'(x)) dx : u \in W_0^{1,4}(\Omega) \right\} = m \quad (5.22)$$

Sabemos que $m = 0$ como ya vimos en el Ejemplo 1.2.7. Además, teníamos que la ecuación de Euler-Lagrange, teniendo en cuenta (5.18), venía dada por

$$\frac{d}{dx} [\bar{u}'(\bar{u}'^2 - 1)] = 0 \quad (5.23)$$

de forma que considerando (5.17), podemos dar la ecuación asociada en su forma débil (observemos que se verifica la hipótesis (5.16) del Teorema 5.4.1):

$$\int_0^1 \bar{u}'(\bar{u}'^2 - 1)\varphi' dx = 0 \quad (5.24)$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,4}(\Omega)$.

Es evidente que $\bar{u} \equiv 0$ es solución de (5.23) y (5.24) pero no es mínimo del problema (5.22) pues $m = 0$ pero $J(0) = 1 \neq 0$.

Más aún, este ejemplo es interesante por lo que sigue. Ahora, consideramos la función

$$v(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ 1 - x & \text{si } x \in (1/2, 1] \end{cases}$$

que es un mínimo del problema (5.22) que no es de clase C^1 .

Además, observemos que la función v verifica la ecuación (5.24) pero no verifica (5.23). Así, mostramos la necesidad de la convexidad de la función f para garantizar la existencia de mínimo del problema (5.22). □

Capítulo 6

Aplicaciones del Cálculo de Variaciones

En este capítulo se tratarán principalmente dos problemas relacionados con la mecánica clásica: el Principio de Mínima Acción y las ecuaciones de Maxwell.

El objetivo fundamental de este capítulo será usar la potencia de la teoría de Cálculo de Variaciones para deducir, por un lado, las ecuaciones de movimiento de un sistema de n partículas como mínimo de un cierto funcional y por otro, obtener las ecuaciones de Maxwell asociadas al campo electromagnético de un modo sencillo. De este modo pretendemos poner de manifiesto la importancia del Cálculo de Variaciones en otras ramas de las ciencias distintas de las Matemáticas y, por tanto, su aplicabilidad.

Para ello, serán de gran utilidad las herramientas desarrolladas en capítulos anteriores, especialmente en el Capítulo 1 (dedicado al estudio de las ecuaciones de Euler-Lagrange).

6.1. Principio de Mínima Acción

Consideraremos un sistema de n partículas (puntos de masa) donde no se impone ninguna restricción al sistema. Consideramos la i -ésima partícula de masa m_i y coordenadas $(x_1^i(t), x_2^i(t), x_3^i(t)) \in \mathbb{R}^3$ para $i = 1, \dots, n$.

La energía cinética del sistema viene dada por:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\left(\frac{dx_1^i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx_2^i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx_3^i}{dt} \right)^2 \right)$$

donde t denota el tiempo.

Además, supongamos que el sistema posee energía potencial, es decir, existe una función

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(t; x_1^1, x_2^1, x_3^1, \dots, x_1^n, x_2^n, x_3^n)$$

que representa la energía potencial del sistema de forma que la fuerza que actúa sobre la i -ésima partícula tiene componentes

$$X_1^i = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_1^i}, \quad X_2^i = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_2^i}, \quad X_3^i = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_3^i}$$

A continuación, introducimos el concepto de Lagrangiano:

Definición 6.1.1 (Lagrangiano) *Se define el Lagrangiano de un sistema de partículas como la diferencia entre su energía cinética E_c y su energía potencial E_p :*

$$\mathcal{L} = E_c - E_p = \mathcal{T} - \mathcal{U}$$

donde \mathcal{T} es la energía cinética y \mathcal{U} es la energía potencial asociada al sistema de partículas.

En nuestro caso, gracias a la Definición 6.1.1, definimos

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$$

que es la función Lagrangiana asociada al sistema de partículas.

Obviamente, \mathcal{L} es una función del tiempo t , de las posiciones (x_1^i, x_2^i, x_3^i) y de las velocidades $(\dot{x}_1^i, \dot{x}_2^i, \dot{x}_3^i)$ de las n partículas del sistema donde \dot{x}_j^i denota la velocidad de la componente j de la partícula i , es decir, $\dot{x}_j^i = \frac{dx_j^i}{dt}$ para $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, 2, 3$.

Ahora, suponemos que en el tiempo t_0 , el sistema está en alguna posición fija

CAPÍTULO 6. APLICACIONES DEL CÁLCULO DE VARIACIONES 85

$(x_{1,0}^i, x_{2,0}^i, x_{3,0}^i)$. Luego, la evolución del sistema a lo largo del tiempo se describe mediante una curva $\mathbf{x}^i = (x_1^i, x_2^i, x_3^i)$ tal que

$$x_1^i = x_1^i(t), \quad x_2^i = x_2^i(t), \quad x_3^i = x_3^i(t) \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$

en un espacio de dimensión $3n$.

Se puede demostrar que entre todas las curvas que pasan por el punto correspondiente a la posición inicial del sistema $(x_{1,0}^i, x_{2,0}^i, x_{3,0}^i)$, la curva que realmente describe el movimiento del sistema dado, bajo la influencia de las fuerzas que actúan sobre él, satisface la siguiente condición, conocida como el **Principio de Mínima Acción**:

Teorema 6.1.2 (Principio de Mínima Acción) *El movimiento de un sistema de n partículas durante el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ viene descrito por las funciones $x_1^i(t), x_2^i(t), x_3^i(t)$ para $i = 1, \dots, n$ para las que la integral*

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t; x_1^i, x_2^i, x_3^i; \dot{x}_1^i, \dot{x}_2^i, \dot{x}_3^i) dx \quad (6.1)$$

llamada acción, es un mínimo.

Demostración: Veamos que el Principio de Mínima Acción implica las ecuaciones de movimiento usuales para un sistema de n partículas. En efecto, si el funcional (6.1) tiene un mínimo, entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange vienen dadas por (usando el Teorema 1.2.2, con la regularidad necesaria para \mathcal{L}):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1^i} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2^i} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_3^i} = 0 \quad (6.2)$$

donde \dot{x}_j^i denota la velocidad de la partícula i en la componente j para $j = 1, 2, 3$ e $i = 1, \dots, n$.

Ahora, tengamos en cuenta que la energía potencial \mathcal{U} depende únicamente de t, x_1^i, x_2^i, x_3^i y no de $\dot{x}_1^i, \dot{x}_2^i, \dot{x}_3^i$, mientras que \mathcal{T} es una suma de cuadrados de las componentes de la velocidad $\dot{x}_1^i, \dot{x}_2^i, \dot{x}_3^i$ (con coeficientes $1/2m_i$).

Entonces, podemos reescribir las ecuaciones dadas por (6.2) como sigue

$$-\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_1^i} - \frac{d}{dt} m_i \dot{x}_1^i = 0; \quad -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_2^i} - \frac{d}{dt} m_i \dot{x}_2^i = 0; \quad -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_3^i} - \frac{d}{dt} m_i \dot{x}_3^i = 0 \quad (6.3)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que las derivadas

$$-\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_1^i}, -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_2^i}, -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_3^i}$$

son las componentes de la fuerza que actúa sobre la i -ésima partícula, el sistema de ecuaciones dado por (6.3) se reduce a

$$\begin{cases} m_i \ddot{x}_1^i = X_1^i \\ m_i \ddot{x}_2^i = X_2^i \\ m_i \ddot{x}_3^i = X_3^i \end{cases}$$

que son las ecuaciones de movimiento de Newton para un sistema de n partículas (sin restricciones) donde \ddot{x}_j^i denota la aceleración de la componente j de la partícula i para $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, 2, 3$. Así, se concluye la demostración. \square

Para terminar esta sección, damos una nota de interés sobre el Teorema 6.1.2:

Nota 6.1.3 (Sobre el Teorema 6.1.2) *El Principio de Mínima Acción sigue siendo válido en el caso en el que el sistema de partículas esté sujeto a restricciones, excepto que entonces las curvas posibles, para las cuales se considera el funcional (6.1), deben satisfacer las restricciones. En otras palabras, en este caso, la aplicación del Principio de Mínima Acción conduce a un problema de cálculo de variaciones con condiciones adicionales (restricciones).*

6.2. Ecuaciones de Maxwell

La idea de obtener las ecuaciones dinámicas de una teoría física mediante la obtención de un punto crítico a partir de un funcional de acción (como vimos en la Sección 6.1) ha tenido un gran éxito.

Casi cualquier teoría física (por ejemplo, la relatividad general, la electrodinámica cuántica y la dinámica de fluidos) se puede derivar de este formalismo y, por lo tanto, un estudio en profundidad de dichos funcionales nos permite tener mejores habilidades a la hora de trabajar con este tipo de teorías.

CAPÍTULO 6. APLICACIONES DEL CÁLCULO DE VARIACIONES 87

Para ilustrar esto, obtendremos las ecuaciones de Maxwell que describen la propagación de ondas electromagnéticas en el vacío que vienen dadas por:

$$\begin{cases} \nabla_x \cdot \mathbf{E} = \rho \\ \nabla_x \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \partial_t \mathbf{E} = \nabla_x \times \mathbf{B} - \mathbf{J} \\ \partial_t \mathbf{B} = -\nabla_x \times \mathbf{E} \end{cases}$$

donde \mathbf{E} es el campo eléctrico, \mathbf{B} es el campo magnético, \mathbf{J} es la densidad de corriente y ρ es la densidad de carga.

Todo comienza con una elección adecuada de un Lagrangiano (con el cual se pretende minimizar una energía que contiene la diferencia en módulo del campo eléctrico y del campo magnético):

$$\begin{aligned} I(t, \mathbf{A}, \phi, \alpha, \varphi) &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{L}(t, \mathbf{A}(x), \phi(x), \alpha(x), \varphi(x)) d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{2} |-\alpha(x) - \nabla_x \phi(x)|^2 - \frac{1}{2} |\nabla_x \times \mathbf{A}(x)|^2 + \mathbf{J}(t, x) \cdot \mathbf{A}(x) - \rho(t, x) \phi(x) \right) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

donde \mathbf{A} es un potencial vectorial, ϕ un potencial escalar, \mathbf{J} la densidad de corriente y ρ la densidad de carga. Debido a la ecuación de la conservación de la carga

$$\nabla_x \cdot \mathbf{J} + \partial_t \rho = 0 \quad (6.4)$$

la densidad de corriente \mathbf{J} y la densidad de carga ρ están vinculadas. Además, los potenciales están relacionados con el campo electromagnético a través de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{A} - \nabla_x \phi \\ \mathbf{B} &= \nabla_x \times \mathbf{A} \end{aligned}$$

donde \mathbf{E} es el campo eléctrico y \mathbf{B} es el campo magnético.

Dado que I está definido en términos de un polinomio cuadrático en función de los campos, podemos deducir fácilmente las ecuaciones del movimiento a partir de un funcional llamado acción:

$$S(\mathbf{A}, \phi) = \int_0^T \mathcal{L}(\mathbf{A}(t), \phi(t), \partial_t \mathbf{A}(t), \partial_t \phi(t)) dt \quad (6.5)$$

donde (\mathbf{A}, ϕ) es un camino en el espacio de los potenciales.

A continuación, para el desarrollo que sigue introducimos el concepto de espacio de caminos y su funcional de acción correspondiente:

Definición 6.2.1 *Se define el espacio de caminos que une dos puntos x_0 y x_1 en un espacio de Banach \mathcal{X} como:*

$$\mathcal{D}(x_0, x_1) := \{\mathbf{q} : [0, T] \rightarrow \mathcal{X} : \mathbf{q} \in \mathcal{C}^2([0, T], \mathcal{X}), \mathbf{q}(0) = x_0, \mathbf{q}(T) = x_1\}$$

Además, se define el funcional de acción asociado al espacio \mathcal{D} para la deducción de las ecuaciones de movimiento como:

$$S(\mathbf{q}) := \int_0^T \mathcal{L}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt \quad (6.6)$$

donde $\mathcal{L} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ es el Lagrangiano y $\dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{d\mathbf{q}}{dt}$ de forma que $\mathcal{L}(x, v)$ depende la posición x y de la velocidad v .

Ahora, damos las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al espacio de caminos \mathcal{D} dado en la Definición 6.2.1 que nos servirán para dar las ecuaciones de movimiento de un sistema:

Proposición 6.2.2 *Bajo las condiciones de la Definición 6.2.1, se tiene que las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al funcional (6.6) vienen dadas por*

$$\nabla_x \mathcal{L}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) - \frac{d}{dt} \nabla_v \mathcal{L}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = 0 \quad (6.7)$$

Demostración: Por la definición del funcional S dado en la Definición 6.2.1, se tiene que

$$dS(\mathbf{q}) = 0$$

que quiere decir que

$$dS(\mathbf{q})\mathbf{h} = 0$$

para toda $\mathbf{h} \in \mathcal{D}(0, 0)$.

Ahora, haciendo uso de la G-diferencial (Definición B.2), se deduce que

$$dS(\mathbf{q})\mathbf{h} = \left. \frac{d}{ds} S(\mathbf{q} + s\mathbf{h}) \right|_{s=0} = \int_0^T \left. \frac{d}{ds} \mathcal{L}(\mathbf{q}(t) + s\mathbf{h}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) + s\dot{\mathbf{h}}(t)) \right|_{s=0} dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^T (\nabla_x \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \cdot \mathbf{h}(t) + \nabla_v \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \cdot \dot{\mathbf{h}}(t)) dt \\
 &= \int_0^T \left(\nabla_x \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) - \frac{d}{dt} \nabla_v \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \right) \cdot \mathbf{h}(t) dt
 \end{aligned}$$

Tengamos en cuenta que cuando integramos por partes, los términos de frontera desaparecen, pues $\mathbf{h}(0) = \mathbf{h}(T) = 0$.

Por tanto, las ecuaciones de Euler-Lagrange vienen dadas como en (6.7), como queríamos probar. \square

Después de la Definición 6.2.1 y de la Proposición 6.2.2, podemos seguir con el desarrollo que estábamos haciendo para la deducción de las ecuaciones de Maxwell.

Volviendo a (6.5), podemos expresar las ecuaciones de movimiento del siguiente modo (gracias a la expresión de las ecuaciones de Euler-Lagrange dadas en (6.7)):

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\phi}} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} = 0 \quad (6.8)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\mathbf{A}}} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \mathbf{A}} = 0 \quad (6.9)$$

donde δ es la notación física de “derivación funcional”.

Para trabajar con las expresiones dadas por (6.8) y (6.9), basta tener en cuenta que el integrando es simplemente un polinomio en \mathbf{A} , $\partial_t \mathbf{A} = \dot{\mathbf{A}}$, ϕ y $\partial_t \phi = \dot{\phi}$.

Antes de hacer la deducción de las ecuaciones de Maxwell, realizaremos algunos comentarios sobre las ecuaciones (6.8) y (6.9).

La densidad de Lagrange \mathcal{L} es independiente de $\dot{\phi}$ por lo que la integración por partes da lugar a la ley de Gauss que puede ser expresada como sigue:

$$\nabla_x \cdot (-\partial_t \mathbf{A} - \nabla_x \phi) = \nabla_x \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (6.10)$$

Esta ecuación actúa como una restricción y no es una ecuación dinámica del movimiento. Ahora, tengamos en cuenta que $\mathbf{B} = \nabla_x \times \mathbf{A}$ es el rotacional de un

campo vectorial por lo que su divergencia es nula, es decir, $\nabla_x \cdot \mathbf{B} = 0$.

Para obtener las ecuaciones de Maxwell, necesitamos ayudarnos del siguiente lema que nos sirve para hacer integración cuando estamos trabajando con el rotacional:

Lema 6.2.3 *Se tiene la siguiente expresión integral para el rotacional:*

$$\int_{\Omega} (\nabla_x \times \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (\nabla_x \times \boldsymbol{\varphi}) \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\varphi} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \, d\mathbf{x}$$

para toda $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ donde \mathbf{n} denota el vector normal exterior unitario a Ω .

Ahora, sí podemos empezar con la deducción de las ecuaciones de Maxwell:

La primera ecuación dinámica del movimiento de Maxwell (asociada al campo eléctrico $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla_x \phi$), se obtiene a partir de (6.9) (haciendo uso del Lema 6.2.3 y teniendo en cuenta que el término de frontera se anula al imponer sobre el problema de las ecuaciones de Maxwell, las condiciones de contorno que sean necesarias) de forma que

$$\partial_t \mathbf{E} = -\partial_{tt}^2 \mathbf{A} - \nabla_x \partial_t \phi = \nabla_x \times \nabla_x \times \mathbf{A} - \mathbf{J} = \nabla_x \times \mathbf{B} - \mathbf{J} \quad (6.11)$$

Para obtener la segunda ecuación dinámica del movimiento de Maxwell, derivamos el campo magnético $\mathbf{B} = \nabla_x \times \mathbf{A}$ con respecto al tiempo y usamos que $\nabla_x \times \nabla_x \phi = \mathbf{0}$:

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla_x \times (\partial_t \mathbf{A}) = -\nabla_x \times (-\partial_t \mathbf{A} - \nabla_x \phi) = -\nabla_x \times \mathbf{E}$$

En conclusión, hemos obtenido las ecuaciones habituales de Maxwell después de introducir un par de nuevas variables, el campo eléctrico \mathbf{E} y el campo magnético \mathbf{B} .

Ahora, veamos el “recíproco”. Tenemos que las soluciones a las ecuaciones de Maxwell son puntos estacionarios del funcional llamado acción.

Luego, haciendo una derivación adecuada podemos llegar a calcular la derivada del funcional de acción $S(\mathbf{A}, \phi)$ para llegar a las ecuaciones de Euler-Lagrange

CAPÍTULO 6. APLICACIONES DEL CÁLCULO DE VARIACIONES 91

dadas anteriormente. Para ello, nos basamos en la idea que usamos para la demostración de la Proposición 6.2.2:

$$\begin{aligned}
 (dS(\mathbf{A}, \phi))(\mathbf{a}, \varphi) &= \left. \frac{d}{ds} S(\mathbf{A} + s\mathbf{a}, \phi + s\varphi) \right|_{s=0} = \\
 &= \int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2} |-\partial_t \mathbf{A} - \nabla_x \phi - s\partial_t \mathbf{a} - s\nabla_x \varphi|^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} |\nabla_x \times \mathbf{A} + s\nabla_x \times \mathbf{a}|^2 + \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} - \rho\phi + s\mathbf{J} \cdot \mathbf{a} - s\rho\varphi \right) \Big|_{s=0} = \\
 &= \int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} ((-\partial_t \mathbf{A} - \nabla_x \phi) \cdot (-\partial_t \mathbf{a} - \nabla_x \varphi) - \\
 &\quad - (\nabla_x \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla_x \times \mathbf{a}) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{a} - \rho\varphi) = \\
 &= \int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} ((-\partial_{tt}^2 \mathbf{A} - \nabla_x \partial_t \phi - \nabla_x \times \nabla_x \times \mathbf{A} + \mathbf{J}) \cdot \mathbf{a} + \\
 &\quad + (\nabla_x \cdot (-\partial_t \mathbf{A} - \nabla_x \phi) - \rho) \varphi)
 \end{aligned}$$

Haciendo $dS(\mathbf{A}, \phi) = 0$ y aplicando el Lema de Du Bois-Reymond (Lema 1.1.2), se llega a las ecuaciones (6.10) y (6.11), como queríamos demostrar.

Apéndice A

Espacios de funciones

Sea Ω un conjunto abierto no vacío de \mathbb{R}^N . Usaremos la siguiente notación:

- $C^1(\Omega)$: Espacio de funciones continuamente diferenciables en Ω .
- $C^2(\Omega)$: Espacio de funciones dos veces continuamente diferenciables en Ω .
- $L^1(\Omega)$: Espacio de funciones integrables en Ω .
- $L^2(\Omega)$: Espacio de funciones de cuadrado integrable en Ω .
- $L^1_{loc}(\Omega)$: Espacio de funciones localmente integrables en compactos de Ω .
- $C^\infty(\Omega)$: Espacio de funciones infinitamente diferenciables en Ω .
- $\mathcal{D}(\Omega)$: Espacio de funciones de clase infinito con soporte compacto contenido en Ω .
- $W^{m,p}(\Omega)$: Espacio de funciones de $L^p(\Omega)$ tales que sus derivadas hasta orden m pertenecen también a $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$ y $m \in \mathbb{N}$ en Ω .
- $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}}$ para $1 \leq p \leq \infty$ y para $m \in \mathbb{N}$.
- $H^1(\Omega)$: Espacio de funciones de $L^2(\Omega)$ tales que sus derivadas hasta orden 1 pertenecen también a $L^2(\Omega)$.
- $H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}$.
- $H^2(\Omega)$: Espacio de funciones de $L^2(\Omega)$ tales que sus derivadas hasta orden 2 pertenecen también a $L^2(\Omega)$.

Apéndice B

Cálculo diferencial

Introducimos algunas definiciones y resultados sobre el cálculo diferencial que serán de utilidad para el desarrollo de algunas de las demostraciones:

Definición B.1 Sean X un espacio vectorial, $\mathcal{U} \subseteq X$ un subconjunto convexo y $f : \mathcal{U} \rightarrow X$ una función. Se dice que f es convexa en \mathcal{U} si

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y)$$

para todo $x, y \in X$ y para todo $\theta \in [0, 1]$.

Además, se dice que f es estrictamente convexa en \mathcal{U} si

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) < \theta f(x) + (1 - \theta)f(y)$$

para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$ y para todo $\theta \in (0, 1)$.

Definición B.2 Sean X e Y dos espacios normados, $\mathcal{U} \subseteq X$ un subconjunto abierto, $F : \mathcal{U} \rightarrow Y$ un operador, $x_0 \in \mathcal{U}$ y $h \in X$. Se dice que F es diferenciable en el sentido de Gâteaux (o G -diferenciable) en x_0 y en la dirección h si existe el límite en Y

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \varepsilon h) - F(x_0)}{\varepsilon} = \delta F(x_0; h) \in Y$$

Al elemento $\delta F(x_0; h) \in Y$ definido por el anterior límite se le denomina G -diferencial de F en el punto x_0 y en la dirección h .

Si existe $\delta F(x_0; h)$ para toda $h \in X$, diremos que F es G -diferenciable en x_0 , y a la aplicación $\delta F(x_0)$ definida por

$$\delta F(x_0) : h \in X \rightarrow \delta F(x_0; h) \in Y$$

la denominaremos la G -diferencial (o diferencial Gâteaux) de F en el punto x_0 .

Definición B.3 Sean X e Y dos espacios normados, $\mathcal{U} \subseteq X$ un abierto y $F : \mathcal{U} \rightarrow Y$ un operador. Dados $x_0 \in \mathcal{U}$ y $h \in X$, se dice que F es dos veces G -diferenciable en x_0 en la dirección h , si existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que F es G -diferenciable en el intervalo abierto $(x_0 - \varepsilon_0 h, x_0 + \varepsilon_0 h) \subset \mathcal{U}$ y en la dirección h , y existe el límite

$$\delta^2 F(x_0, h, h) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta F(x_0 + \varepsilon h, h) - \delta F(x_0, h)}{\varepsilon}$$

Al elemento $\delta^2 F(x_0, h, h) \in Y$ así definido lo denominaremos la G -diferencial segunda de F en el punto x_0 en la dirección h .

Teorema B.4 Sean X e Y dos espacios normados, $\mathcal{U} \subseteq X$ un abierto y $F : \mathcal{U} \rightarrow Y$ un operador. Dados $x_1, x_2 \in \mathcal{U}$ tales que $[x_1, x_2] \subset \mathcal{U}$, supongamos que F es dos veces G -diferenciable en todo punto de $[x_1, x_2]$ en la dirección $x_2 - x_1$. Entonces, si $Y = \mathbb{R}$, existe $\xi \in (x_1, x_2)$ tal que

$$F(x_2) = F(x_1) + \delta F(x_1, x_2 - x_1) + \frac{1}{2} \delta^2 F(\xi, x_2 - x_1, x_2 - x_1) \quad (\text{B.1})$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathcal{U}$.

Proposición B.5 Sean X un espacio normado, $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto, convexo y $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que para todo par de puntos x_1 y x_2 del abierto \mathcal{U} existe la G -diferencial $\delta F(x_1, x_2 - x_1)$. Entonces, se dice que F es convexa si

$$F(x_2) - F(x_1) \geq \delta F(x_1, x_2 - x_1)$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathcal{U}$.

Proposición B.6 Sean X un espacio normado, $\Omega \subseteq X$ un abierto, $\mathcal{U} \subseteq \Omega$ un subconjunto convexo no vacío y $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional. Supongamos que F es G -diferenciable en Ω . Entonces, F es convexa en \mathcal{U} si y sólo si

$$\delta F(x_2, x_2 - x_1) - \delta F(x_1, x_2 - x_1) \geq 0 \quad (\text{B.2})$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathcal{U}$.

Demostración: Supongamos que F es convexa en \mathcal{U} y sean $x_1, x_2 \in \mathcal{U}$. Aplicando sucesivamente a (x_1, x_2) y a (x_2, x_1) que

$$F(x_2) - F(x_1) \geq \delta F(x_1, x_2 - x_1)$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathcal{U}$, se tiene

$$\begin{cases} F(x_2) - F(x_1) \geq \delta F(x_1, x_2 - x_1) \\ F(x_1) - F(x_2) \geq \delta F(x_2, x_1 - x_2) \end{cases}$$

Sumando estas desigualdades y teniendo en cuenta la linealidad de la G-diferencial respecto de la dirección, se obtiene (B.2).

Supongamos ahora que se tiene (B.2) y sean $x_1, x_2 \in \mathcal{U}$ y $\alpha \in [0, 1]$. Consideremos la función real de variable real $\varphi : t \in [0, 1] \mapsto \varphi(t) = F(x_1 + t(x_2 - x_1))$ tal que $\varphi \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ de forma que $\varphi'(t) = \delta F(x_1 + t(x_2 - x_1), x_2 - x_1)$ para cada $t \in [0, 1]$. Usando (B.2), se tiene que la función φ' es creciente en $[0, 1]$ (es decir, si $0 \leq s < t \leq 1$, entonces $\varphi'(s) \leq \varphi'(t)$). Deducimos por tanto que φ es convexa en el intervalo $[0, 1]$ y así, $\varphi(\alpha) \leq \alpha\varphi(1) + (1 - \alpha)\varphi(0)$, es decir, $F((1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2) \leq (1 - \alpha)F(x_1) + \alpha F(x_2)$. De este modo, se concluye la prueba. \square

Proposición B.7 Sean X un espacio normado, $\mathcal{U} \subset X$ abierto, convexo y $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que existe la G-diferencial segunda $\delta^2 F(x_1, x_2 - x_1, x_2 - x_1)$ para todo par de puntos x_1, x_2 de \mathcal{U} . Entonces F es convexa en \mathcal{U} si y sólo si

$$\delta^2 F(x_1, x_2 - x_1, x_2 - x_1) \geq 0 \quad (\text{B.3})$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathcal{U}$.

Demostración: Gracias al Teorema B.4 y a

$$\begin{aligned} \delta^2 F(\xi, x_2 - x_1, x_2 - x_1) &= \delta^2 F\left(\xi, -\frac{\|x_2 - x_1\|_X}{\|\xi - x_1\|_X}(x_1 - \xi), -\frac{\|x_2 - x_1\|_X}{\|\xi - x_1\|_X}(x_1 - \xi)\right) = \\ &= \frac{\|x_2 - x_1\|_X^2}{\|\xi - x_1\|_X^2} \delta^2 F(\xi, x_1 - \xi, x_1 - \xi) \end{aligned}$$

usando la Proposición B.5, tendríamos la convexidad de F .

Para terminar la demostración, basta probar que si F es convexa entonces se verifica (B.3). Para ello, sean $x_1, x_2 \in \mathcal{U}$. Si $x_1 = x_2$, ya habríamos terminado. Supongamos que $x_1 \neq x_2$. Como F es convexa entonces se verifica (B.2). Luego, reemplazamos x_2 por $x_1 + t(x_2 - x_1)$ para cada $t \in (0, 1)$, y se tiene

$$\delta F(x_1 + t(x_2 - x_1), t(x_2 - x_1)) - \delta F(x_1, t(x_2 - x_1)) \geq 0$$

Dividiendo por t^2 , teniendo en cuenta la linealidad de la G-diferencial en la dirección, y haciendo tender t a cero, se obtiene (B.3), como queríamos probar. Así, concluimos la demostración de la proposición. \square

Teorema B.8 (Teorema de la función inversa) Sean X, Y dos espacios de Banach, $\mathcal{U} \subset X$ abierto, $x_0 \in \mathcal{U}$ y $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, Y)$ tal que $F'(x_0)$ sea biyectiva. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x_0, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$, el conjunto $V = F(B(x_0, \varepsilon))$ es un entorno abierto de $F(x_0)$, y se tiene

- F es biyectiva de $B(x_0, \varepsilon)$ en V .
- La aplicación $F^{-1} : V \rightarrow B(x_0, \varepsilon)$ es de clase \mathcal{C}^1 y verifica

$$(F^{-1})'(y) = (F'(F^{-1}(y)))^{-1}$$

para todo $y \in V$.

Demostración: Se puede consultar en [1].

Teorema B.9 (Teorema de la función implícita) Sean X, Y, Z tres espacios de Banach, con $\mathcal{U} \subset X \times Y$ abierto, $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$. Supongamos que $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, Z)$ tal que la derivada de la aplicación $F(x_0, \cdot) : Y \rightarrow Z$ (derivada parcial) en y_0 sea biyectiva de Y sobre Z , y sea $z_0 = F(x_0, y_0)$. Entonces, existen $r_0 > 0$, $r_1 > 0$ y $\varphi \in \mathcal{C}^1(B(x_0, r_0), B(y_0, r_1))$ tales que

- $\varphi(x_0) = y_0$.
- $F(x, \varphi(x)) = z_0$, para todo $x \in B(x_0, r_0)$.
- Si $(x, y) \in B(x_0, r_0) \times B(y_0, r_1)$ y $F(x, y) = z_0$ entonces $y = \varphi(x)$.

Demostración: Se puede consultar en [1].

Definición B.10 (Transformada de Legendre) Sean f y g dos funciones diferenciables. Se dice que f y g son una transformada de Legendre si cada una de sus derivadas primeras son función inversa de la otra, es decir,

$$Df = (Dg)^{-1}$$

En dicho caso, se dice que f y g están relacionadas por una transformación de Legendre.

Apéndice C

Resultados de Análisis Funcional

Introducimos algunos resultados de interés de Análisis Funcional relativos a la convergencia débil y semicontinuidad inferior. Además, enunciaremos dos resultados importantes como son el Teorema de Rellich-Kondrachov y la desigualdad de Hölder:

Definición C.1 (Convergencia débil) *Sea X un espacio normado, una sucesión $\{x_n\} \subset X$ se dice que converge débilmente a un punto $x \in X$ y se escribe $x_n \rightharpoonup x$ si y solo si*

$$\langle x', x_n \rangle \rightarrow \langle x', x \rangle$$

para todo $x' \in X'$.

Observación C.2 (Sobre la convergencia débil)

- *El concepto de límite débil es lineal, es decir, el límite de la suma es la suma de los límites y el límite de un escalar por una sucesión es el escalar por el límite de la sucesión.*
- *Si una sucesión $\{x_n\}$ converge en norma hacia un elemento $x \in X$, entonces gracias a la continuidad de los elementos de X' se tiene que $\langle x', x_n \rangle$ converge a $\langle x', x \rangle$ para todo $x' \in X'$ y por tanto, $\{x_n\}$ converge débil a $x \in X$.*

Proposición C.3 (Propiedad de la convergencia débil 1) *Sean X, Y dos espacios normados y A un operador lineal y continuo de X en Y . Si $\{x_n\}$ converge débilmente a x en X , entonces Ax_n converge débilmente a Ax en Y .*

Demostración: Sea $\{x_n\}$ que converge débilmente a x en X . Para todo $y' \in Y'$, se tiene que $y' \circ A$ pertenece a X' y por tanto, por la Definición C.1 se tiene

$$\langle y', Ax_n \rangle_{Y',Y} = \langle y' \circ A, x_n \rangle_{X',X} \rightarrow \langle y' \circ A, x \rangle_{X',X} = \langle y', Ax \rangle_{Y',Y}$$

para todo $y' \in Y'$. Por tanto, Ax_n converge débilmente a Ax . □

Proposición C.4 (Propiedad de convergencia débil 2) *Sea X un espacio normado. Si $\{x_n\}$ converge débilmente a $x \in X$, entonces está acotada y se verifica*

$$\|x\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X$$

Demostración: Consultar en [3, 11]. □

Definición C.5 (Espacio reflexivo) *Sea X un espacio normado. Se dice que X es reflexivo si $X = X'$ donde X' denota el espacio dual de X .*

Teorema C.6 *Sea X un espacio reflexivo. Entonces, toda sucesión acotada en X admite una subsucesión débilmente convergente.*

Demostración: Consultar en [3, 11]. □

Definición C.7 (Semicontinuidad inferior) *Sea X un espacio métrico y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f es semicontinua inferiormente, y se escribirá f s.c.i., en un punto $x \in X$ si para toda sucesión $\{x_n\} \subset X$ que converge a x , se tiene*

$$f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

Diremos que f es semicontinua inferiormente (en X) si lo es en todo punto x de X .

Proposición C.8 (Propiedades de la semicontinuidad inferior) *Sea X un espacio métrico.*

- a) *Si f es s.c.i. en X y $\lambda \geq 0$ entonces λf es s.c.i. en X .*
- b) *Si f y g son s.c.i. en X entonces $f + g$ también es s.c.i. en X .*

Demostración: Inmediata a partir de la linealidad del límite. □

Teorema C.9 (Rellich-Kondrachov) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto conexo acotado no vacío con frontera Lipschitz continua. Entonces:

- Si $1 \leq p < N$, la inyección de $W^{1,p}(\Omega)$ en $L^q(\Omega)$ es compacta para todo $q \in [1, p^*)$.
- Si $p = N$, la inyección de $W^{1,N}(\Omega)$ en $L^q(\Omega)$ es compacta para todo $q \in [1, \infty)$.
- Si $p > N$, la inyección de $W^{1,p}(\Omega)$ en $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ es compacta para todo $0 \leq \alpha < 1 - N/p$.

En particular, para $1 \leq p \leq \infty$, la inyección de $W^{1,p}(\Omega)$ en $L^p(\Omega)$ es compacta.

Demostración: Consultar en [6]. □

Teorema C.10 (Desigualdad de Hölder) Consideramos Ω un conjunto medible de \mathbb{R}^N y q el exponente conjugado de p , es decir, el único $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sean $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$. Entonces, se tiene la desigualdad de Hölder:

$$\int_{\Omega} |f(t)g(t)| dt \leq \left(\int_{\Omega} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} |g(t)|^q dt \right)^{1/q}$$

Demostración: Consultar en [2]. □

Teorema C.11 (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue) Sea $\{f_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones medibles en un espacio X tal que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

existe para todo $x \in X$. Si $g \in L^1(\mu)$ verificando que

$$|f_n(x)| \leq |g(x)|$$

para todo $x \in X$ y para todo $n \geq 1$, entonces $f \in L^1(\mu)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Demostración: Consultar en [12]. □

Bibliografía

- [1] BERNAL GONZÁLEZ, LUIS, *Diferenciación de Funciones de Varias Variables*, Universidad de Sevilla, Sevilla, 2020.
- [2] BERNAL GONZÁLEZ, LUIS Y DOMÍNGUEZ BENAVIDES, TOMÁS, *Nociones de Análisis Funcional*, Universidad de Sevilla, Sevilla, 2010.
- [3] BREZIS, HAIM, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer Book Company, Department of Mathematics, Rutgers University, Piscataway, USA, 2011.
- [4] CASADO DÍAZ, JUAN, *Análisis Funcional y Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Universidad de Sevilla, Sevilla, 2017.
- [5] DACOROGNA, BERNARD, *Introduction to the Calculus of Variations*, Ecole Polytechnique Fédérale, Imperial College Press, Switzerland, 2004.
- [6] DACOROGNA, BERNARD, *Direct Methods to the Calculus of Variations*, Springer, Berlin, 2008.
- [7] GELFAND, I. M. Y FOMIN, S.V., *Calculus of Variations*, Prentice-Hall, Moscow State University, Moscow, 1963.
- [8] GJURCHINOVSKI, ALEKSANDAR, *Einstein's mirror and Fermat's principle of least time*, American Journal of Physics, American Association of Physics Teachers, Department of Physics, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Sts. Cyril and Methodius University, Skopje, Macedonia, 2004.
- [9] GONZÁLEZ BURGOS, MANUEL, *Análisis Numérico y Optimización*, Universidad de Sevilla, Sevilla, 2009.
- [10] LIONS, P.L., *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Research Notes in Math. 69, Pitman, Londres, 1982.

- [11] MARTÍN GÓMEZ, JOSÉ D., *Análisis Funcional y Optimización*, Universidad de Sevilla, Sevilla, 2010.
- [12] RUDIN, WALTER, *Real and Complex Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill Book Company, University of Wisconsin, Madison, 1987.