



Superficies de Riemann

Jose Alberto Ruiz Alba



Superficies de Riemann

Jose Alberto Ruiz Alba

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por

Prof. Tutor Alberto Castaño Domínguez

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es tratar los conocimientos fundamentales sobre superficies de Riemann así como enunciar, demostrar y comprender el teorema de Riemann-Roch para curvas proyectivas planas lisas. Para ello se definen y trabajan los conceptos necesarios, empezando con las superficies de Riemann y las aplicaciones entre estas. Más adelante se realiza un breve estudio sobre formas diferenciales y se concluye con los conceptos fundamentales sobre divisores, lo que nos permite cerrar este proyecto con una corta prueba de dicho teorema.

English Abstract

The main goal of this work is to address the foundations of Riemann surfaces as well as to state, prove and understand the Riemann-Roch theorem for smooth projective plane curves. To achieve this, the necessary concepts are defined and studied, starting with Riemann surfaces and the maps between them. Later on, a brief study on differential forms is conducted and we conclude with the essential concepts on divisors, which allows us to close this project with a short proof of the mentioned theorem.

Índice general

1. Generalidades	3
1.1. Cartas complejas	3
1.2. Primeros ejemplos	6
2. Funciones y aplicaciones	13
2.1. Funciones en superficies de Riemann	13
2.2. Ejemplos de funciones meromorfas	21
2.3. Holomorfismos	26
2.4. Propiedades globales de los holomorfismos	31
3. 1-formas diferenciales	41
3.1. Conceptos básicos	41
3.2. Operaciones con 1-formas	44
3.3. Integración y el teorema del residuo	46
4. Divisores	51
4.1. Generalidades	51
4.2. Equivalencia lineal de divisores	58

IV SUPERFICIES DE RIEMANN

4.3. Espacios de funciones y formas asociadas a los divisores	61
5. El teorema de Riemann-Roch	67
5.1. Resultados previos	67
5.2. Prueba del teorema y algunas consecuencias	71
A. Apéndice	75

Introducción

A lo largo de la historia se han producido varios enfoques a la teoría de superficies de Riemann. En este proyecto seguiremos el camino dibujado por Riemann. Él marcó las pautas de lo que hoy conocemos como las superficies que llevan su nombre. Otra postura a destacar es la de Gauss que trató el tema desde las variedades reales de dimensión 2. Más información sobre la historia detrás de las superficies de Riemann puede ser encontrada en [Yin05] o en [Sti20].

Comenzamos siguiendo las notas de Rick Miranda en su libro *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*. En el capítulo uno nos presenta el concepto de atlas complejo, que no deja de ser una reunión de cartas con alguna condición especial, y gracias a esto define las superficies de Riemann como 1-variedades complejas conexas. Estas mismas líneas hemos seguido nosotros también en el primer capítulo.

Una vez definidas las superficies de Riemann podemos considerar las aplicaciones entre ellas, prestando especial interés a las aplicaciones holomorfas, u holomorfismos, pero para ello debemos definir anteriormente las funciones de estas superficies en el plano complejo. Todo esto lo tratamos en el capítulo dos, inspirado en [Mir95, Cap. II].

El tercer capítulo es una breve introducción a las formas diferenciales. En él definimos los conceptos de 1-formas holomorfas y meromorfas así como ciertas operaciones que podemos realizar con ellas, siendo la más importante la integración. Por desgracia no es el objetivo de este trabajo definir todos los rudimentos necesarios para integrar en superficies de Riemann, aún así enunciaremos los conceptos fundamentales. Para más información consultar [Mir95, Cap. IV].

El siguiente capítulo sigue la teoría presentada en [Mir95, cap. V]. Tratamos el concepto de divisores; estos son una forma de organizar y estudiar los ceros de una función meromorfa. Esta inocente idea resulta tener una gran cantidad de sorpren-

dentés propiedades que se pueden demostrar de forma relativamente sencilla.

Para finalizar, usamos el libro de Frances Kirwan, *Complex Algebraic Curves*, más concretamente [Kir92, cap. VI]. Procedemos a enunciar y demostrar el teorema de Riemann-Roch para curvas proyectivas planas lisas y algunos resultados necesarios. Cerramos el trabajo dando algunos corolarios de interés.

1 | Generalidades

Empezaremos este proyecto definiendo los conceptos básicos sobre superficies de Riemann y presentando ejemplos interesantes que nos acompañarán durante el resto del trabajo. Como se ha comentado en la introducción, este capítulo está sacado de [Mir95, cap. I]; otra referencia de interés es [DD20, cap. VI].

1.1 Cartas complejas

| Definición 1.1.1. Sea X un espacio topológico. Llamamos carta compleja o simplemente **carta** de X a un homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ donde $U \subseteq X$ es un conjunto abierto de X y $V \subseteq \mathbb{C}$ es un conjunto abierto del plano complejo. Diremos que U es el **dominio** de la carta ϕ y que está centrada en $p \in U$ si $\phi(p) = 0$.

Observación 1.1.2. Sea $\phi : U \rightarrow V$ una carta de X . Supongamos que $U_1 \subseteq U$ es un subconjunto abierto de U . Entonces $\phi|_{U_1} : U_1 \rightarrow \phi(U_1)$ es un homeomorfismo y por lo tanto es una carta de X . La restricción $\phi|_{U_1}$ se llama **subcarta** de X .

| Definición 1.1.3. Sean ϕ_1 y ϕ_2 cartas de X tales que $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ y $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$. Decimos que las cartas son **compatibles** si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ o la composición

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : (U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

es holomorfa. A la función $T = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ la llamaremos **función de transición** (o **cambio de coordenadas**) entre las cartas ϕ_1 y ϕ_2 .

Observación 1.1.4. Destacamos que si $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en su dominio entonces $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ es también holomorfa en su respectivo dominio. Ambas pueden ser la función de transición. De aquí deducimos que T es biyectiva.

Lema 1.1.5. Sea T una función de transición entre dos cartas compatibles. Entonces su derivada T' no se anula en el dominio de T .

Demostración. Sea S la inversa de T , así $S(T(w)) = w$ para todo w . Derivando esta expresión tenemos que

$$S'(T(w))T'(w) = 1,$$

por lo tanto $T'(w)$ no puede ser cero. ■

Definición 1.1.6. Un atlas A de X es una colección $A = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$ de cartas compatibles dos a dos cuyos dominios recubren X , es decir, $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$.

Ejemplo 1.1.7. Sea S^2 la esfera unidad en \mathbb{R}^3

$$S^2 = \{(x, y, w) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + w^2 = 1\}.$$

Identificamos el plano complejo \mathbb{C} con el plano real dado por $w = 0$ donde un punto $z = x + iy$ de \mathbb{C} se identifica con $(x, y, 0)$. Sea $\phi_1 : S^2 - \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\phi_1(x, y, w) = \frac{x}{1-w} + i \frac{y}{1-w},$$

cuya inversa es

$$\phi_1^{-1}(z) = \left(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

Efectivamente:

$$\begin{aligned} \phi_1^{-1}(\phi_1(x, y, w)) &= \frac{x^2 + y^2 + (1-w)^2}{(1-w)^2} \left(2\frac{x}{1-w}, 2\frac{y}{1-w}, \frac{x^2 + y^2 - (1-w)^2}{(1-w)^2} \right) \\ &= \frac{1-w}{2} \left(2\frac{x}{1-w}, 2\frac{y}{1-w}, \frac{2w^2 - 2w}{(1-w)^2} \right) \\ &= (x, y, w), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_1(\phi_1^{-1}(a + ib)) &= \frac{\frac{2a}{a^2+b^2+1}}{1 - \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1}} + i \left(\frac{\frac{2b}{a^2+b^2+1}}{1 - \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1}} \right) \\ &= \frac{\frac{2a}{a^2+b^2+1}}{\frac{2}{a^2+b^2+1}} + i \left(\frac{\frac{2b}{a^2+b^2+1}}{\frac{2}{a^2+b^2+1}} \right) \\ &= a + ib. \end{aligned}$$

Definimos $\phi_2 : S^2 - \{(0, 0, -1)\} \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$\phi_2(x, y, w) = \frac{x}{1+w} - i \frac{y}{1+w},$$

con inversa

$$\phi_2^{-1}(z) = \left(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{-2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{1 - |z|^2}{|z|^2 + 1} \right).$$

Su dominio común es $S^2 - \{(0, 0, \pm 1)\}$, y ambas aplicaciones lo envían de forma biyectiva a $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$. La composición $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = 1/z$ es holomorfa. Por lo tanto, las cartas son compatibles y forman un atlas de la esfera.

El siguiente resultado se sigue de las definiciones y de la observación 1.1.2:

Lema 1.1.8. Si $A = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$ es un atlas de X e $Y \subset X$ es cualquier subconjunto abierto, entonces la colección de subcartas

$$A_Y = \{\phi_\alpha|_{Y \cap U_\alpha} : Y \cap U_\alpha \rightarrow \phi_\alpha(Y \cap U_\alpha)\}$$

es un atlas de Y .

Definición 1.1.9. Dos atlas A y B se dicen **equivalentes** si todas las cartas de un atlas son compatibles con todas las cartas del otro.

Definición 1.1.10. Una **estructura** en X es una clase de equivalencia de atlas de X .

Definición 1.1.11. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es una **superficie de Riemann** si es conexo, segundo numerable, Hausdorff y cuenta con una estructura.

Ejemplos 1.1.12. Daremos dos ejemplos bien conocidos:

1. Plano complejo:

Sea $X = \mathbb{C}$ considerado topológicamente como \mathbb{R}^2 . Dotamos a \mathbb{R}^2 de un atlas formado por una sola carta $\phi(x, y) = x + iy$. Así, \mathbb{C} es una superficie de Riemann llamada **plano complejo**.

2. Esfera de Riemann:

Sea X la 2-esfera con la estructura compleja definida en el ejemplo 1.1.7. Se tiene que X es una superficie de Riemann compacta que llamaremos **esfera de Riemann** o simplemente \mathbb{C}_∞ . Observamos que si una carta tiene como coordenadas a z , la otra tendrá como coordenadas a $1/z$ y hay un único punto que no está en la otra carta, este será "el punto del infinito" ∞ .

Usando el atlas descrito en el lema 1.1.8 podemos probar el siguiente resultado:

Lema 1.1.13. Todo subconjunto abierto y conexo de una superficie de Riemann es a su vez una superficie de Riemann.

Observación 1.1.14. Se observa una clara analogía entre las definiciones anteriores y la teoría de variedades diferenciables. Como cada aplicación holomorfa de una variable compleja $z = x + iy$ es una aplicación C^∞ en las variables x e y , podemos ver que cada superficie de Riemann es una 2-variedad C^∞ real.

De aquí podemos deducir que gracias a la equivalencia entre conexión y conexión por caminos de las variedades, todas las superficies de Riemann son conexas por caminos. También podemos dotar a las superficies de Riemann de orientación: las aplicaciones holomorfas entre dos subconjuntos del plano complejo preservan la orientación del plano, es más, son conformes.

Estas dos observaciones son suficientes para clasificar completamente las superficies de Riemann compactas, para ello usaremos la clasificación de 2-variedades compactas y orientables sin borde. Cada una de estas variedades será un toro con g agujeros $g \geq 0$. Para $g = 0$ no tenemos agujeros y el resultado es una 2-esfera. Si $g = 1$, hay un agujero y la variedad es un toro simple homeomorfo a $S^1 \times S^1$. Para $g \geq 2$ la superficie es una esfera a la que se le han añadido g "asas". Al entero g lo llamaremos **género topológico** de la superficie de Riemann compacta. Esto da lugar a la siguiente proposición:

Proposición 1.1.15. Toda superficie de Riemann es una 2-variedad conexa por caminos, orientable y C^∞ . Si además es compacta, entonces es difeomorfa a un toro con g -agujeros, para g un entero ≥ 0 .

1.2 Primeros ejemplos

Toro complejo

Fijemos ω_1 y ω_2 dos números complejos linealmente independientes en \mathbb{R} . Definimos L como el retículo:

$$L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

El retículo L es un subgrupo de \mathbb{C} como grupo aditivo. Sea $X = \mathbb{C}/L$ el grupo cociente con la proyección $\pi : \mathbb{C} \rightarrow X$. Usando la topología cociente definida en X por π , esta es continua (y abierta) y como \mathbb{C} es conexo, también lo es X .

Para todo $z \in \mathbb{C}$ definimos el paralelogramo cerrado

$$P_z = \{z + \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \mid \lambda_i \in [0, 1]\}.$$

Observamos que cada punto en \mathbb{C} es congruente módulo L con un punto de P_z , por lo tanto la imagen de P_z por π es X . Como P_z es compacto, X también lo es.

Vamos a darle un atlas a X . Usando que L es un subconjunto discreto de \mathbb{C} , podemos encontrar un $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\omega \neq 0$ en L , $|\omega| > 2\varepsilon$. Fijado ε y un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ consideramos el disco abierto $D_{z_0} = D(z_0, \varepsilon)$, de esta forma, para todo z_0 la restricción de la proyección π al disco abierto D_{z_0} define un homeomorfismo de D_{z_0} en el conjunto abierto $\pi(D_{z_0})$. Claramente la aplicación $\pi|_{D_{z_0}} \rightarrow \pi(D_{z_0})$ es sobreyectiva, continua y abierta. La inyectividad se deduce del ε tomado.

Para cada $z_0 \in \mathbb{C}$ definimos la aplicación $\phi_{z_0} : \pi(D_{z_0}) \rightarrow D_{z_0}$ como la inversa de la aplicación $\pi|_{D_{z_0}}$ que gracias al desarrollo anterior sabemos que es una carta de X .

Queremos probar que las cartas definidas anteriormente forman un atlas de X . Para ello veamos que son compatibles, escojamos dos puntos distintos z_1 y z_2 y consideremos las dos cartas siguientes $\phi_1 = \phi_{z_1} : \pi(D_{z_1}) \rightarrow D_{z_1}$ y $\phi_2 = \phi_{z_2} : \pi(D_{z_2}) \rightarrow D_{z_2}$. Sea $U = \pi(D_{z_1} \cap D_{z_2})$. Si $U = \emptyset$ no hay nada que probar. En caso contrario, sea $T(z) = \phi_2(\phi_1^{-1}(z)) = \phi_2(\pi(z))$ para $z \in \phi_1(U)$. Hay que comprobar que T es holomorfa en $\phi_1(U)$. Observemos que $\pi(T(z)) = \pi(z)$ para todo $z \in \phi_1(U)$ así que $T(z) - z = \omega(z) \in L$ para todo $z \in \phi_1(U)$. La función $\omega : \phi_1(U) \rightarrow L$ es continua y gracias a que L es discreto, ω es constante en cada componente conexa de U . Se sigue que, localmente, $T(z) = z + \omega$ para algún ω fijo, y por lo tanto, es holomorfa. Las dos cartas son compatibles y $\{\phi_z \mid z \in \mathbb{C}\}$ es un atlas de X . Recapitulando, X es una superficie de Riemann compacta llamada **toro complejo**.

Grafo de funciones holomorfas

Sea $V \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto conexo del plano complejo y sea g una función holomorfa definida en todo V . Consideramos el grafo de g , $\Gamma_g \subset \mathbb{C}^2$, como la siguiente superficie de Riemann que admite un atlas con una única carta

$$X = \{(z, g(z)) \mid z \in V\}.$$

Dotado X de la topología relativa, sea $\pi : X \rightarrow V$ la primera proyección, tenemos que π es un homeomorfismo cuya inversa manda el punto $z \in V$ al par ordenado $(z, g(z))$. Luego π es una carta compleja de X , cuyo dominio es todo X . Por un razonamiento análogo podemos generalizar este desarrollo a una colección finita de funciones holomorfas g_1, \dots, g_n , considerando X como el grafo en \mathbb{C}^{n+1}

$$X = \{(z, g_1(z), \dots, g_n(z)) \mid z \in V\}.$$

Curvas lisas afines

Nuestro objetivo es identificar un subconjunto $X \subset \mathbb{C}^2$ que globalmente no tiene por qué ser un grafo, pero localmente sí. La forma más natural de hacerlo es definir X como el lugar de los ceros de un polinomio en dos variables, $f(z, w)$. Para ello el polinomio debe satisfacer el siguiente teorema:

| Teorema 1.2.1 (Teorema de la función implícita). Sea $f(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$ un polinomio y sea $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid f(z, w) = 0\}$ el lugar de sus ceros. Sea $p = (z_0, w_0)$ un punto de X , es decir, p es una raíz de f . Supongamos que $\frac{\partial f}{\partial w}(p) \neq 0$. Entonces existe una función $g(z)$ holomorfa en un entorno abierto de z_0 tal que, cerca de p , X es el grafo $w = g(z)$. Más aún, $g' = -\frac{\partial f}{\partial z} / \frac{\partial f}{\partial w}$ cerca de z_0 .

| Definición 1.2.2. Una **curva afin plana** es el lugar de los ceros en \mathbb{C}^2 de un polinomio $f(z, w)$. Un polinomio $f(z, w)$ es **liso** en una raíz $p \in \mathbb{C}^2$ si alguna de sus derivadas parciales es distinta de 0 en p (si ambas son 0 decimos que p es **singular**). La curva plana afin X de las raíces del polinomio f se dice **lisa** en p si f es liso en p y decimos que la curva X es lisa si lo es en todos sus puntos.

Proposición 1.2.3. Sea X la curva afin plana lisa definida por el polinomio $f(z, w)$. Entonces X tiene un atlas complejo, es segundo numerable y Hausdorff.

Demostración. Primero definamos las cartas. Gracias a que X es lisa, para todo punto $p \in X$ alguna de sus parciales será no nula. Supongamos que $p = (z_0, w_0) \in X$ y que $\partial f / \partial w(p) \neq 0$. Por el teorema de la función implícita encontramos una función holomorfa $g_p(z)$ tal que en un entorno U de p , X es el grafo de $w = g_p(z)$ y por lo tanto la proyección en z , $\pi_z : U \rightarrow \mathbb{C}$, es un homeomorfismo de U en su imagen V , la cual es un abierto de \mathbb{C} . Este desarrollo es análogo si $\partial f / \partial z(p) \neq 0$, en ambos casos obtenemos una carta de X para todo $p \in X$.

Comprobemos que las cartas anteriores formen un atlas de X . Solo falta comprobar que son cartas compatibles. Supongamos primero que ambas cartas se obtienen usando la misma proyección π_z o π_w . Si la intersección de ambos abiertos es no vacía la composición resultante al hacer el cambio de coordenadas es la identidad, que es una función holomorfa. Supongamos ahora que cada carta usa una proyección distinta. Sea U la intersección de los dominios y sea $p = (z_0, w_0)$ un punto suyo. Podemos asumir que, cerca de p , X es localmente de la forma $w = g(z)$ para cierta función holomorfa g . Así, en $\pi_z(U)$ cerca de z_0 , la inversa de π_z envía z en $(z, g(z))$, luego la composición $\pi_w \circ \pi_z^{-1}$ envía z a $g(z)$, la cual es holomorfa. Hemos probado que las cartas son compatibles y claramente recubren X , luego forman un atlas. X es segundo numerable y Hausdorff como subespacio de \mathbb{C}^2 . ■

Observación 1.2.4. Si X fuera conexa sería una superficie de Riemann. Desafortunadamente, X no es necesariamente conexa, por ejemplo tomemos el siguiente polinomio $f(z, w) = (z + w)(z + w + 1)$. Este define una curva plana afín X que es la unión de dos rectas complejas que no se cortan, cada recta es una superficie de Riemann por sí misma, pero ambas a la vez no.

| Teorema 1.2.5. Si $f(z, w)$ es un polinomio irreducible, entonces su lugar de ceros, X , es conexo. Por lo tanto si f es liso e irreducible, X es una superficie de Riemann.

Demostración. Si $f(z, w)$ es un polinomio irreducible, entonces X es irreducible en el sentido topológico y por tanto X es conexo. ■

Observación 1.2.6. Si $f(z, w)$ es un polinomio irreducible, entonces los puntos de su lugar de ceros X donde f es singular son un conjunto finito (ver la proposición A.0.2). Si eliminamos esos puntos, el subconjunto abierto resultante de X es una superficie de Riemann con las mismas cartas de antes (nótese que, al estar definida sobre \mathbb{C} , quitar una cantidad finita de puntos no impide que sea conexa). Llamaremos a esta superficie como **parte lisa** de una curva afín plana X . En general, si f es un polinomio irreducible, la parte lisa de su lugar de ceros es una superficie de Riemann.

Curvas proyectivas planas lisas

Vamos a hacer un desarrollo similar a la sección anterior pero ahora en el plano proyectivo \mathbb{P}^2 .

Observación 1.2.7. \mathbb{P}^2 puede ser recubierto por 3 conjuntos abiertos:

$$U_i = \{[x_0 : x_1 : x_2] \mid x_i \neq 0\} \quad i = 0, 1, 2.$$

Cada conjunto U_i es homeomorfo al plano afín \mathbb{C}^2 . Por ejemplo, el homeomorfismo de U_0 manda $[x : y : z] \in \mathbb{P}^2$ a $(y/x, z/x) \in \mathbb{C}^2$ cuya inversa manda el par $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ a $[1 : a : b]$. Para U_1 y U_2 el razonamiento es análogo. De aquí podemos deducir que el plano proyectivo es compacto.

Observación 1.2.8. Dado un polinomio $F(x, y, z)$ homogéneo de grado d , no tiene sentido evaluar este polinomio en un punto proyectivo ya que

$$F(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0) = \lambda^d F(x_0, y_0, z_0)$$

pero $[x_0 : y_0 : z_0]$ representa la misma clase en el plano proyectivo que el punto $[\lambda x_0 : \lambda y_0 : \lambda z_0]$. Sin embargo, sí podemos saber si F se anula en ese punto, luego

podemos definir X como el lugar de sus ceros

$$X = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid F(x, y, z) = 0\}$$

es más, X es un subconjunto cerrado del plano proyectivo. La intersección de X con los U_i , que llamaremos X_i , son curvas planas afines vistas en \mathbb{C}^2 . Para $i = 0$:

$$X_0 = X \cap U_0 \cong \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid F(1, a, b) = 0\}$$

es la curva afín plana descrita por el polinomio $f(a, b) = 0$, donde $f(a, b) = F(1, a, b)$.

Definición 1.2.9. Un polinomio homogéneo $F(x, y, z)$ es **liso** si el sistema de ecuaciones

$$F = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (1.1)$$

no tiene soluciones en el plano proyectivo.

Observación 1.2.10. Destacamos que cualquier polinomio homogéneo (en cualquier número de variables) satisface la fórmula de Euler:

$$F = \frac{1}{d} \sum_i x_i \frac{\partial F}{\partial x_i},$$

donde d es el grado de F . Como F es un polinomio homogéneo, todos sus monomios tienen el mismo grado y por linealidad es suficiente probar el resultado para uno de ellos. Para un monomio el resultado es inmediato.

Lema 1.2.11. Supongamos que $F(x, y, z)$ es un polinomio homogéneo de grado d . Se tiene que F es liso si y solo si cada X_i es una curva plana afín lisa en \mathbb{C}^2 .

Demostración. Tomemos F un polinomio homogéneo de grado d . Supongamos que sea liso y por reducción al absurdo que algún X_i no lo sea, por simplicidad tomaremos $i = 0$. X_0 está definido como el lugar de los ceros del polinomio $f(u, v) = F(1, u, v)$. Como X_0 no es liso, existe un punto $(u_0, v_0) \in \mathbb{C}^2$ que es solución del sistema de ecuaciones

$$f = \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

Vamos a demostrar que $[1 : u_0 : v_0]$ es solución del sistema de ecuaciones (1.1). Se tiene que

$$\begin{aligned} F[1 : u_0 : v_0] &= f(u_0, v_0) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y}[1 : u_0 : v_0] &= \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z}[1 : u_0 : v_0] &= \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) = 0, \end{aligned}$$

y despejando de la fórmula de Euler

$$\frac{\partial F}{\partial x}[1 : u_0 : v_0] = (dF - u_0 \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial z})[1 : u_0 : v_0] = 0.$$

Hemos probado que F no es liso en $[1 : u_0 : v_0]$, lo cual es una contradicción.

Para probar el recíproco supongamos que los X_i sean curvas planas afines lisas en \mathbb{C}^2 y por reducción al absurdo que F no sea liso. Entonces existe al menos un punto $[x_0 : y_0 : z_0] \in \mathbb{C}^2$ que es solución de (1.1). Como este punto está en el espacio proyectivo, una de sus coordenadas es no nula, de nuevo por simplicidad supongamos que $x_0 \neq 0$. Así $[x_0 : y_0 : z_0]$ está en U_0 y razonando de forma similar llegamos a que es un punto singular de X_0 . Esto contradice el hecho de que X_0 sea lisa. ■

Lema 1.2.12. Todo polinomio homogéneo liso es irreducible.

Demostración. Dado un polinomio homogéneo liso $F(x, y, z)$ en \mathbb{P}^2 , razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que F sea reducible, entonces existen dos polinomios $g_1(x, y, z)$ y $g_2(x, y, z)$ tales que $F = g_1 g_2$. Por el teorema de Bézout (ver teorema A.0.3), podemos afirmar que g_1 y g_2 se anulan a la vez en, al menos, un punto p (por tanto $F(p) = 0$). Consideremos ahora las derivadas parciales de F

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial g_1}{\partial x_i} g_2 + \frac{\partial g_2}{\partial x_i} g_1 \quad i = 1, 2, 3.$$

Estas derivadas parciales se anulan en p , luego p es un punto singular de F y llegamos a una contradicción con la hipótesis de que F sea liso. ■

Observación 1.2.13. Supongamos que $F(x, y, z)$ es un polinomio homogéneo liso que define la curva X . Por el lema anterior, F es irreducible y por tanto los tres subconjuntos abiertos X_i de X son curvas planas afines lisas e irreducibles, luego superficies de Riemann por el teorema 1.2.5.

Proposición 1.2.14. Sea $F(x, y, z)$ un polinomio liso y homogéneo. Entonces, el lugar de los ceros de F en \mathbb{P}^2 es una superficie de Riemann compacta.

Demostración. Los tres abiertos X_i recubren X y es fácil comprobar que las tres cartas son compatibles entre sí. La compacidad se obtiene al ser X un subconjunto cerrado de \mathbb{P}^2 . ■

Definición 1.2.15. Decimos que X es una **curva plana proyectiva lisa** si X es el lugar de ceros de un polinomio F liso y homogéneo en \mathbb{P}^2 .

2 | Funciones y aplicaciones

El objetivo de este capítulo es definir las aplicaciones entre superficies de Riemann y explorar algunas propiedades interesantes de ellas. Para ello, comenzaremos tratando las funciones en superficies de Riemann y algunos ejemplos en algunas superficies particulares. En [For91, cap. I] podemos encontrar una fuente alternativa a [Mir95, cap. II].

2.1 Funciones en superficies de Riemann

Funciones holomorfas

Sea X una superficie de Riemann, sea p un punto suyo y sea f una función compleja definida en un entorno W de p .

Definición 2.1.1. Decimos que f es **holomorfa** en p si existe una carta $\phi : U \rightarrow V$ con $p \in U$ tal que la composición $f \circ \phi^{-1}$ es holomorfa en $\phi(p)$. Decimos que f es holomorfa en W si lo es en todo punto de W .

El siguiente lema muestra que no importa la carta que escojamos para comprobar que f es holomorfa en X .

Lema 2.1.2. Sea X una superficie de Riemann, sea p un punto suyo y sea f una función compleja definida en un entorno W de p . Entonces:

1. f es holomorfa en p si y solo si para cada carta $\phi : U \rightarrow V$ con $p \in U$, la composición $f \circ \phi^{-1}$ es holomorfa en p .
2. f es holomorfa en W si y solo si existe un conjunto de cartas $\{\phi_i : U_i \rightarrow V_i\}$ con $W \subseteq \bigcup_i U_i$ tal que $f \circ \phi_i^{-1}$ es holomorfa en $\phi_i(W \cap U_i)$ en cada i .

3. si f es holomorfa en p , f es holomorfa en un entorno de p .

Demostración. Bajo las hipótesis del enunciado:

1. Sean ϕ_1 y ϕ_2 dos cartas que contienen a p y supongamos que f es holomorfa con la carta ϕ_1 . Entonces $f \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en $\phi_1(p)$. Debemos comprobar que $f \circ \phi_2^{-1}$ es holomorfa en $\phi_2(p)$. Como

$$f \circ \phi_2^{-1} = (f \circ \phi_1^{-1}) \circ (\phi_1 \circ \phi_2^{-1}),$$

$f \circ \phi_2^{-1}$ es holomorfa por ser la composición de funciones holomorfas. La otra implicación es trivial.

2. Se deduce inmediatamente de 1.
3. Es una consecuencia directa del mismo resultado para funciones holomorfas de un abierto de \mathbb{C} .

■

De la definición podemos deducir los dos siguientes corolarios:

Corolario 2.1.3. Toda carta compleja considerada como una función compleja sobre su dominio es holomorfa sobre su dominio.

Corolario 2.1.4. Supongamos que f y g son funciones holomorfas en $p \in X$. Entonces $f + g$, $f - g$ y fg son holomorfas en p . Además, si $g(p) \neq 0$, entonces f/g es holomorfa en p .

Ejemplos 2.1.5. Veamos como se traduce que una función sea holomorfa en algunas superficies de Riemann conocidas.

1. Esfera de Riemann:

Sea f una función compleja en la esfera de Riemann \mathbb{C}_∞ definida en un entorno de ∞ . Entonces f es holomorfa en ∞ si y solo si $f(1/z)$ es holomorfa en $z = 0$. En particular, si f es una función racional $f(z) = p(z)/q(z)$, entonces f es holomorfa en ∞ si y solo si $\deg(p) \leq \deg(q)$.

2. Toro complejo:

Consideramos un toro complejo \mathbb{C}/L con la proyección $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/L$. Sea $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja de un subconjunto abierto $W \subset \mathbb{C}/L$. Entonces f es holomorfa en un punto $p \in W$ si y solo si existe una preimagen z de p en \mathbb{C} tal que $f \circ \pi$ es holomorfa en z . Además f es holomorfa en W si y solo si $f \circ \pi$ es holomorfa en $\pi^{-1}(W)$.

3. Curva afín plana lisa:

Sea X una curva plana afín definida por un polinomio liso $f(z, w) = 0$. Entonces las dos proyecciones (en el eje z y el w) son funciones holomorfas en X . Cualquier función polinómica $g(z, w)$, al restringirla a X , es una función holomorfa.

4. Curva proyectiva plana lisa:

Sea X una curva proyectiva plana definida por un polinomio liso $F(x, y, z) = 0$ y un punto $p = [x_0 : y_0 : z_0]$ de X . Si $G(x, y, z)$ es un polinomio homogéneo de grado d y $H(x, y, z)$ otro polinomio homogéneo del mismo grado que no se anula en p , entonces el cociente G/H es una función holomorfa de X en el punto p . Destacamos que, a diferencia de las curvas afines, hemos tenido que considerar un cociente de polinomios. Veremos más adelante el porqué de esto.

| Definición 2.1.6. Si $W \subset X$ es un subconjunto abierto de una superficie de Riemann X , escribiremos $\mathcal{O}_X(W)$ (o simplemente $\mathcal{O}(W)$) para denotar al conjunto de funciones holomorfas de W :

$$\mathcal{O}_X(W) = \mathcal{O}(W) = \{f : W \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es holomorfa}\}.$$

Observamos que, por el corolario 2.1.4, $\mathcal{O}(W)$ es una \mathbb{C} -álgebra.

Singularidades

En esta sección vamos a extender el concepto de singularidad de funciones complejas (polo, esencial o evitable) a superficies de Riemann. Para ello, sea X una superficie de Riemann:

| Definición 2.1.7. Sea f una función holomorfa en un entorno punteado de $p \in X$. Decimos que:

1. f tiene una **singularidad evitable** en p si y solo si existe una carta $\phi : U \rightarrow V$ con $p \in U$ tal que la composición $f \circ \phi^{-1}$ tiene una singularidad evitable en $\phi(p)$.
2. f tiene un **polo** en p si y solo si existe una carta $\phi : U \rightarrow V$ con $p \in U$ tal que la composición $f \circ \phi^{-1}$ tiene un polo en $\phi(p)$.
3. f tiene una **singularidad esencial** en p si y solo si existe una carta $\phi : U \rightarrow V$ con $p \in U$ tal que la composición $f \circ \phi^{-1}$ tiene una singularidad esencial en $\phi(p)$.

Como era de esperar, el tipo de singularidad no depende de la carta que escojamos:

Lema 2.1.8. Con la notación anterior, f tiene una singularidad evitable (respectivamente esencial o polo) si y solo si para cada carta $\phi : U \rightarrow V$ con $p \in U$, la composición $f \circ \phi^{-1}$ tiene una singularidad evitable (respectivamente esencial o polo) en $\phi(p)$.

Demostración. Razonemos de forma similar al lema 2.1.2. Supongamos que f tiene una singularidad evitable (análogamente esencial o polo) en p . Por hipótesis, existe una carta $\phi_1 : U \rightarrow V$ tal que la composición $f \circ \phi_1^{-1}$ tiene dicha singularidad en p . Consideremos ahora cualquier otra carta de X , ϕ_2 , compatible con ϕ_1 en p . Observemos de nuevo que

$$f \circ \phi_2^{-1} = (f \circ \phi_1^{-1}) \circ (\phi_1 \circ \phi_2^{-1}).$$

Por lo tanto, si $f \circ \phi_1^{-1}$ presenta una singularidad en p , $f \circ \phi_2^{-1}$ también. ■

Corolario 2.1.9. Si f está definida y es holomorfa en un entorno punteado de p podemos saber qué tipo de singularidad presenta en p investigando el comportamiento de $f(x)$ para x próximo a p :

- Si $|f(x)|$ está acotado en un entorno de p , entonces f tiene una singularidad evitable en p . Definimos $f(p)$ como el límite $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ que sabemos que existe por estar $|f(x)|$ acotado.
- Si $|f(x)|$ tiende a ∞ cuando x se aproxima a p , entonces f tiene un polo en p .
- Si $|f(x)|$ no tiene límite cuando x se aproxima a p , entonces f tiene una singularidad esencial en p .

Demostración. Al estar $|f(x)|$ acotado en un entorno de p , $f \circ \phi^{-1}$ también lo está en un entorno de $\phi(p)$ y por lo tanto la composición presenta una singularidad evitable en $\phi(p)$. Los otros dos casos son similares a este y análogos a sus correspondientes homónimos para funciones meromorfas en \mathbb{C} . ■

Funciones meromorfas

De forma similar a como hemos definido las funciones holomorfas en una superficie de Riemann X , podemos definir funciones meromorfas:

Definición 2.1.10. Una función f en X se dice **meromorfa** en un punto $p \in X$ si o es holomorfa o tiene una singularidad no esencial en p . Decimos que f es meromorfa en un abierto W si es meromorfa en cada punto de W .

Observación 2.1.11. Sea f una función compleja definida en un abierto de \mathbb{C} . La definición de función meromorfa anterior (considerando \mathbb{C} como una superficie de Riemann) coincide con la usual.

Corolario 2.1.12. Supongamos que f y g son funciones meromorfas en $p \in X$. Entonces, $f + g$, $f - g$, f/g son funciones meromorfas en p . Si g no es idénticamente nula, entonces f/g es una función meromorfa. Es más, cualquier función h meromorfa en p es localmente el cociente de dos funciones holomorfas.

Ejemplos 2.1.13. Tal y como hicimos con las funciones holomorfas, enunciemos algunos ejemplos en nuestras superficies habituales. Los detalles los veremos en una sección posterior.

1. Esfera de Riemann:

Sea f una función compleja en la esfera de Riemann \mathbb{C}_∞ definida en un entorno de ∞ . Entonces f es meromorfa en ∞ si y solo si $f(1/z)$ es meromorfa en $z = 0$. En particular, cualquier función racional $f(z) = p(z)/q(z)$ es meromorfa en ∞ , de hecho, cualquier función racional es meromorfa en la esfera de Riemann.

2. Toro complejo:

Consideremos el toro complejo \mathbb{C}/L con la proyección $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/L$. Sea $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja en un subconjunto abierto $W \subset \mathbb{C}/L$. Entonces f es meromorfa en un punto $p \in W$ si y solo si hay una preimagen z de p en \mathbb{C} tal que $f \circ \pi$ es meromorfa en z . De hecho, f es meromorfa en W si y solo si $f \circ \pi$ es meromorfa en $\pi^{-1}(W)$.

Observemos que $g = f \circ \pi$ es siempre L -periódica, es decir, $g(z + w) = g(z)$ para cada $z \in \mathbb{C}$ y para todo $w \in L$. Es más, hay una biyección entre funciones de \mathbb{C}/L y funciones L -periódicas en \mathbb{C} . Una función meromorfa L -periódica en \mathbb{C} se llama **función elíptica**¹ y por tanto tenemos una biyección entre funciones elípticas en \mathbb{C} y las funciones meromorfas en el toro.

3. Curva proyectiva plana lisa:

Sea X una curva proyectiva plana definida por un polinomio liso $F(x, y, z) = 0$. Sea $G(x, y, z)$ un polinomio homogéneo de grado d y $H(x, y, z)$ un polinomio homogéneo del mismo grado que no se anula completamente en X . Se tiene que el cociente G/H es una función meromorfa en X . Como caso particular tenemos la recta proyectiva y las curvas afines planas lisas.

¹Las funciones elípticas son una área de las matemáticas muy atractiva con aplicaciones en criptografía, teoría de números, análisis complejo, entre otras. Por desgracia, hacer un estudio de estas funciones está fuera del alcance de este trabajo. El lector interesado puede encontrar más información en [Apo90].

4. Recta proyectiva:

Consideremos la recta proyectiva \mathbb{P}^1 con coordenadas homogéneas $[z : w]$. Sean $p(z, w)$ y $q(z, w)$ dos polinomios homogéneos del mismo grado (con q no idénticamente cero). Entonces $f([z : w]) = p(z, w)/q(z, w)$ es una función meromorfa en \mathbb{P}^1 .

5. Curvas afines planas lisas:

Sea X una curva afín plana lisa dado por un polinomio $f(x, y) = 0$. El cociente de dos polinomios $g(x, y)/h(x, y)$ define una función meromorfa en X siempre y cuando $h(x, y)$ no se anule completamente en X .

Definición 2.1.14. Si $W \subset X$ es un subconjunto abierto de una superficie de Riemann X , denotamos el conjunto de funciones meromorfas en W por $\mathcal{M}_X(W)$ (o simplemente $\mathcal{M}(W)$):

$$\mathcal{M}_X(W) = \mathcal{M}(W) = \{f : W \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es meromorfa}\}.$$

Observamos que, por el corolario 2.1.12, $\mathcal{M}_X(W)$ es un cuerpo.

Series de Laurent

Sea f una función holomorfa definida en un entorno punteado de $p \in X$ y sea $\phi : U \rightarrow V$ una carta en X con $p \in U$. Sea z la coordenada local de un punto cercano a p , es decir, dado x próximo a p , $z = \phi(x)$, tenemos que $f \circ \phi^{-1}$ es holomorfa en un entorno de $z_0 = \phi(p)$. Por lo tanto, podemos desarrollar $f \circ \phi^{-1}$ en su desarrollo en series de Laurent centrado en z_0 :

$$f(\phi^{-1}(z)) = \sum_n c_n (z - z_0)^n.$$

Definición 2.1.15. Al desarrollo anterior lo llamaremos **serie de Laurent** de f respecto a ϕ , y a los coeficientes $\{c_n\}$ de la serie, **coeficientes de Laurent**.

Observación 2.1.16. La serie de Laurent depende de las coordenadas locales, es decir, depende de la carta ϕ escogida. Sin embargo, podemos usarla para comprobar el tipo de singularidad de f en p . Para ello usamos el criterio para funciones de una variable compleja:

Lema 2.1.17. Con la notación anterior, f tiene una singularidad evitable en p si y solo si ninguna de sus series de Laurent tiene términos negativos. La función f tiene un polo en p si y solo si cualquiera de sus series de Laurent tiene una cantidad finita

(pero no cero) de términos negativos. Finalmente, la función f tiene una singularidad esencial en p si y solo si cualquiera de sus series de Laurent tiene infinitos términos negativos.

Demostración. Estas afirmaciones se deducen de forma sencilla del lema 2.1.8 y de este mismo resultado para funciones meromorfas en \mathbb{C} . ■

Orden de funciones meromorfas en un punto

Definición 2.1.18. Sea f una función meromorfa en $p \in X$ cuya serie de Laurent en la coordenada local z es $\sum_n c_n (z - z_0)^n$. El **orden** de f en p , denotado por $\text{ord}_p(f)$, es el mínimo exponente que aparece (obviando los de coeficiente 0) en la serie de Laurent:

$$\text{ord}_p(f) = \min\{n \mid c_n \neq 0\}.$$

Observación 2.1.19. Debemos comprobar que esta definición no depende de las coordenadas locales que tomemos. Supongamos que $\psi : U' \rightarrow V'$ es otra carta con $p \in U'$ y coordenada local $w = \psi(x)$ para x cerca de p . Supongamos que $\psi(p) = w_0$. Consideremos el cambio de coordenadas $T(w) = \phi \circ \psi^{-1}$ que expresa z como una función holomorfa de w . Como T es invertible en w_0 , se tiene que $T'(w_0) \neq 0$ (lema 1.1.5). El desarrollo en serie de potencias de T será de la forma

$$z = T(w) = z_0 + \sum_{n \geq 1} a_n (w - w_0)^n$$

con $a_1 \neq 0$.

Supongamos ahora que $\sum_{i=n_0} c_i (z - z_0)^i$ es la serie de Laurent para f en p en las coordenadas z (con $c_{n_0} \neq 0$) de forma que el orden de f leído con las coordenadas de z es c_{n_0} . Para obtener la serie de Laurent para f respecto de w simplemente componemos la serie anterior con el desarrollo en series de potencias $z - z_0 = \sum_{n \geq 1} a_n (w - w_0)^n$. Vemos que el término de menor grado posible es $c_{n_0} a_1^{n_0} (w - w_0)^{n_0}$. Como ni a_1 ni c_{n_0} son cero, el grado de f con la carta ψ es también n_0 y por lo tanto el orden de f en p está bien definido.

Lema 2.1.20. Supongamos que f es meromorfa en p . Entonces f es holomorfa en p si y solo si $\text{ord}_p(f) \geq 0$. En este caso $f(p) = 0$ si y solo si $\text{ord}_p(f) > 0$. f tiene un polo en p si y solo si $\text{ord}_p(f) < 0$. f tiene no tiene ni un cero ni un polo en p si y solo si $\text{ord}_p(f) = 0$.

Demostración. Fijemos por comodidad una carta $\phi : U \rightarrow V$ con $p \in U$. Por el lema 2.1.17 f tiene una singularidad evitable (o es holomorfa) en p si y solo si su desarrollo como serie de Laurent no tiene términos negativos, es decir, $\text{ord}_p(f) \geq 0$.

El orden de f en p será no negativo si y solo si no aparecen términos de grado negativo en su desarrollo en serie y su término independiente es 0, esto es, $f(p) = 0$.

f tiene un polo en p si y solo si la serie de Laurent tiene una cantidad finita de términos negativos, de donde deducimos que $\text{ord}_p(f) < 0$. Si f no tiene ni un cero ni un polo en p , por lo anterior sabemos que $\text{ord}_p(f) = 0$. ■

Definición 2.1.21. Decimos que f tiene un **cero** de orden $n \geq 1$ en p si $\text{ord}_p(f) = n$ y decimos que f tiene un **polo** de orden $n \geq 1$ en p si $\text{ord}_p(f) = -n$.

Lema 2.1.22. Sean f y g funciones (no nulas) meromorfas en $p \in X$. Entonces:

- $\text{ord}_p(fg) = \text{ord}_p(f) + \text{ord}_p(g)$.
- $\text{ord}_p(1/f) = -\text{ord}_p(f)$
- $\text{ord}_p(f/g) = \text{ord}_p(f) - \text{ord}_p(g)$
- $\text{ord}_p(f \pm g) \geq \min\{\text{ord}_p(f), \text{ord}_p(g)\}$.

Demostración. El primer apartado es trivial. El siguiente es consecuencia del primero usando que el orden de la función identidad es cero, de aquí podemos deducir el tercer apartado. Para el cuarto sabemos que al sumar series el término de menor grado tiene a lo sumo el grado del término de menor grado de los sumandos. ■

Ejemplo 2.1.23. Sea $f(z) = p(z)/q(z)$ una función no nula racional en z que podemos considerar como una función meromorfa en la esfera de Riemann. Si factorizamos p y q obtenemos la siguiente expresión de f

$$f(z) = c \prod_i (z - \lambda_i)^{e_i},$$

donde $c \neq 0$ es una constante, los λ_i son números complejos distintos y los exponentes e_i son enteros. Entonces se tiene que $\text{ord}_{z=\lambda_i}(f) = e_i$ para cada i . Más aún, $\text{ord}_\infty(f) = \deg(q) - \deg(p) = -\sum_i e_i$. Finalmente, $\text{ord}_x(f) = 0$ si $x \neq \infty$ o $x \neq \lambda_i$. Tenemos que

$$\sum_{x \in X} \text{ord}_x(f) = 0,$$

lo cual veremos más adelante que es un resultado general para funciones meromorfas en superficies de Riemann compactas.

Teoremas heredados de una variable compleja

Vamos a hacer una recopilación de teoremas formulados para funciones holomorfas y meromorfas de una variable compleja que pueden aplicarse inmediatamente a superficies de Riemann.

| Teorema 2.1.24 (Carácter discreto de los ceros y polos). Sea f una función meromorfa definida en un conjunto abierto W conexo de una superficie de Riemann X . Si f no es idénticamente nula, sus ceros y polos forman un subconjunto discreto de W .

Corolario 2.1.25. Sea f una función meromorfa en un compacto de una superficie de Riemann. Si f no es idénticamente nula entonces tiene un número finito de ceros y polos.

| Teorema 2.1.26 (Teorema de la identidad). Supongamos que f y g son dos funciones meromorfas definidas en un conjunto abierto y conexo W de una superficie de Riemann X . Supongamos que $f = g$ en un subconjunto $S \subset W$ que tiene un punto límite en W . Entonces $f = g$ en W .

| Teorema 2.1.27 (Teorema del módulo máximo). Sea f una función holomorfa en un conjunto abierto y conexo W de una superficie de Riemann X . Supongamos que hay un punto $p \in W$ tal que $|f(x)| \leq |f(p)|$ para todo $x \in W$. Entonces f es constante en W .

Gracias al Teorema del módulo máximo podemos deducir el siguiente corolario, válido para superficies de Riemann y similar al teorema de Liouville.

| Teorema 2.1.28. Sea X una superficie de Riemann compacta. Supongamos que f es holomorfa en todo X . Entonces f es una función constante.

Demostración. Como f es holomorfa, su valor absoluto $|f|$ es una función continua y como X es compacta, $|f|$ alcanza su valor máximo en algún punto de X . Por el teorema del módulo máximo, f es constante en X ya que X es conexo. ■

2.2 Ejemplos de funciones meromorfas

En esta sección trataremos con un poco más de detalle algunos ejemplos de funciones meromorfas en ciertas superficies de Riemann.

Funciones meromorfas en la esfera de Riemann

Hemos visto anteriormente que cualquier función racional $r(z) = p(z)/q(z)$ es meromorfa en toda la esfera de Riemann. De hecho, el recíproco también es cierto:

| Teorema 2.2.1. Cualquier función meromorfa en la esfera de Riemann es una función racional.

Demostración. Consideremos una función meromorfa f en la esfera de Riemann \mathbb{C}_∞ . Como \mathbb{C}_∞ es compacto, tiene una cantidad finita de ceros y polos. Sea $\{\lambda_i\}$ el conjunto de los ceros y polos de f en el plano complejo \mathbb{C} y supongamos que el orden de f en cada λ_i es e_i , es decir, $\text{ord}_{z=\lambda_i}(f) = e_i$. Tomemos la función racional

$$r(z) = \prod_i (z - \lambda_i)^{e_i}$$

que tiene los mismos ceros y polos con el mismo orden que f en \mathbb{C} . Entonces, sea $g(z) = f(z)/r(z)$ una función meromorfa en \mathbb{C}_∞ , sin ceros ni polos en el plano complejo. Por lo tanto, como función en \mathbb{C} es una función holomorfa y tiene un desarrollo en serie de Taylor de la forma

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

el cual converge en todo \mathbb{C} . Sin embargo, g es también una función meromorfa en $z = \infty$, con las coordenadas $w = 1/z$ en ∞ tenemos que

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^{-n}$$

y para que sea meromorfa en $w = 0$ debe cumplirse que g tenga un número finito de términos, es decir, que g sea un polinomio en z . Si el polinomio g no es constante, entonces tendrá ceros en \mathbb{C} lo cual es una contradicción. Por lo tanto, el cociente f/r es constante y f es una función racional. ■

Corolario 2.2.2. Sea f una función meromorfa en la esfera de Riemann. Entonces

$$\sum_p \text{ord}(f) = 0.$$

Demostración. La prueba de este resultado para funciones racionales ya se vio en el ejemplo 2.1.23. Gracias al teorema anterior, toda función meromorfa en \mathbb{C}_∞ puede verse como una función racional en \mathbb{C}_∞ , lo que nos prueba el resultado. ■

Observación 2.2.3. Observamos que para funciones meromorfas, el orden de los ceros es positivo, mientras que el de los polos es negativo. Por el corolario anterior, una función meromorfa f tiene el mismo número de ceros que de polos contados de acuerdo a su multiplicidad.

Funciones meromorfas en la recta proyectiva

Sea \mathbb{P}^1 la recta proyectiva. Hemos afirmado en un ejemplo anterior que el cociente de polinomios homogéneos del mismo grado tiene como resultado funciones meromorfas en \mathbb{P}^1 . Veamos los detalles.

Sabemos que \mathbb{P}^1 se puede expresar como el espacio cociente

$$\mathbb{P}^1 = (\mathbb{C}^2 - \{0\}) / \mathbb{C}^*,$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}^*$ actúa en un vector no nulo (z, w) de \mathbb{C}^2 enviándolo en $(\lambda z, \lambda w)$. Para definir funciones en \mathbb{P}^1 trataremos de definir funciones en \mathbb{C}^2 que sean invariantes bajo la acción de \mathbb{C}^* , veremos esta función en el cociente \mathbb{P}^1 y comprobaremos si es o no meromorfa. Por ejemplo, la función que envía (z, w) en z/w .

Gracias a la definición de polinomio homogéneo, estos polinomios pueden expresarse de forma única de la siguiente manera:

$$p(z, w) = \sum_{i=0}^d a_i z^i w^{d-i}.$$

Recordamos que se tiene que $p(\lambda z, \lambda w) = \lambda^d p(z, w)$ donde d es el grado del polinomio homogéneo. Así, el cociente de dos de ellos con el mismo grado $p(z, w)$ y $q(z, w)$ (con q no idénticamente nulo), $r(z, w) = p(z, w)/q(z, w)$, será invariante bajo la acción de \mathbb{C}^* :

Lema 2.2.4. Si $p(z, w)$ y $q(z, w)$ son homogéneos del mismo grado, con q no idénticamente nulo, entonces $r(z, w) = p(z, w)/q(z, w)$ es una función meromorfa en \mathbb{P}^1 .

Demostración. Sea $\phi : \{w \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ una de las dos cartas estándar de \mathbb{P}^1 tal que $\phi([z : w]) = z/w$, cuya inversa es $\phi^{-1}(u) = [u : 1]$. Para comprobar que $r([z : w]) = p(z, w)/q(z, w)$ es meromorfa en $\{w \neq 0\}$, debemos probar que $r \circ \phi^{-1}$ es meromorfa en \mathbb{C} . Pero

$$r(\phi^{-1}(u)) = r([u : 1]) = p(u, 1)/q(u, 1)$$

es una función racional en u y es meromorfa. De forma análoga se prueba para la otra carta (que envía $[z : w]$ a w/z). ■

Todo polinomio homogéneo de grado positivo en z y w puede ser factorizado en factores lineales. Así, los cocientes de polinomios homogéneos del mismo grado pueden escribirse de la forma

$$r(z, w) = \prod_i (b_i z - a_i w)^{e_i},$$

donde podemos asumir que los diferentes factores son coprimos entre sí. Es fácil ver que, con esta notación, $\text{ord}_{[a_i : b_i]}(r) = e_i$ donde consideramos r como una función meromorfa de \mathbb{P}^1 . Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.2.5. Cada función meromorfa en \mathbb{P}^1 es un cociente de polinomios homogéneos en z y w del mismo grado.

Demostración. Sea f una función meromorfa en \mathbb{P}^1 que no sea idénticamente nula. Como \mathbb{P}^1 es compacto, f tiene un número finito de ceros y de polos, que escribiremos como $\{[a_i : b_i]\}$. Asumamos que $\text{ord}_{[a_i : b_i]}(f) = e_i$ y consideremos el cociente

$$r(z, w) = w^n \prod_i (b_i z - a_i w)^{e_i}$$

donde n está elegido de forma que r sea un cociente de polinomios homogéneos del mismo grado: $n = -\sum_i e_i$. Observemos que $g = f/r$ no tiene ni ceros ni polos, excepto posiblemente en el punto $[1 : 0]$ donde $w = 0$. Nuestro objetivo es mostrar que g es constante.

Si g tiene un polo en $[1 : 0]$, entonces g no tiene ceros y $1/g$ no tiene polos. Por lo tanto $1/g$ es constante ya que \mathbb{P}^1 es compacto, pero $1/g$ tiene un cero en $[1 : 0]$, lo cual es una contradicción con que $1/g = r/f$ no sea idénticamente cero.

De esta manera asumimos que g no tiene un polo en $[1 : 0]$, luego g es holomorfa en \mathbb{P}^1 y g es constante en \mathbb{P}^1 por ser compacto. ■

Observación 2.2.6. Observamos que, igual que en la esfera de Riemann, tenemos que $\sum_p \text{ord}_p(r) = 0$ para cualquier cociente r de polinomios del mismo grado. Por el teorema anterior, toda función meromorfa se puede expresar como un cociente de esa forma, lo que nos lleva al siguiente corolario:

Corolario 2.2.7. Sea f una función meromorfa no constante en \mathbb{P}^1 . Entonces

$$\sum_p \text{ord}_p(f) = 0.$$

Funciones meromorfas en curvas planas lisas

En esta sección será muy importante el siguiente corolario, consecuencia del teorema A.0.1:

Corolario 2.2.8. Supongamos que h es un polinomio que se anula donde un polinomio irreducible f se anula. Entonces f divide a h .

Veamos como definir funciones meromorfas en una curva plana lisa.

Proposición 2.2.9. Sea X una curva afín lisa definida por un polinomio irreducible y liso $f(x, y) = 0$. Entonces cualquier cociente de polinomios $r = g(x, y)/h(x, y)$ es una función meromorfa en X siempre y cuando f no divida al denominador h . En el caso proyectivo, sea X una curva proyectiva plana lisa definida por un polinomio irreducible liso y homogéneo $F(x, y, z)$. Entonces el cociente de dos polinomios homogéneos $R = G(x, y, z)/H(x, y, z)$ donde G y H tienen el mismo grado es una función meromorfa en X siempre y cuando F no divida al denominador H .

Demostración. Supongamos que $f(x, y) = 0$ define una curva plana lisa $X \subset \mathbb{C}^2$. Sabemos que las funciones coordenadas x e y definen ambas funciones holomorfas en X , y por lo tanto, también cualquier polinomio $g(x, y)$. Así, cualquier cociente de polinomios $r(x, y) = g(x, y)/h(x, y)$ es una función meromorfa en X siempre y cuando h no sea completamente nula en X . Si el polinomio $f(x, y)$ divide al polinomio del denominador, $h(x, y)$, entonces h se anulará claramente en todo X . El corolario anterior nos asegura que este es el único caso donde h se puede anular completamente en X .

Para el caso proyectivo, consideremos las coordenadas homogéneas $[x : y : z]$ con la curva plana $X \subset \mathbb{P}^2$ definida como el lugar de los ceros de un polinomio irreducible, liso y homogéneo $F(x, y, z)$. Ahora debemos considerar el cociente de dos polinomios homogéneos del mismo grado, $R(x, y, z) = G/H$. R es una función compleja bien definida en todo \mathbb{P}^2 salvo en los ceros de H . El corolario anterior puede extenderse al caso proyectivo y nos afirma que H se anula completamente en la curva plana proyectiva X definida por $F = 0$ solo si F divide a H .

De esta forma, como las cartas afines de una curva proyectiva son curvas afines, podemos comprobar que el cociente R es meromorfo comprobándolo en las cartas afines de \mathbb{P}^2 . Para ello, por ejemplo en \mathbb{C}^2 donde $z \neq 0$, simplemente fijamos $z = 1$ en la ecuación de F para obtener la ecuación afín $f(x, y) = F(x, y, 1)$ para X , y también fijar $z = 1$ en los polinomios homogéneos G y H . Así vemos que la función R es, en \mathbb{C}^2 con $z \neq 0$, igual al cociente de los polinomios $g(x, y)/h(x, y) = G(x, y, 1)/H(x, y, 1)$.

Por lo tanto, es meromorfa en todos los puntos de X con esta elección de coordenadas, ya que es el cociente de funciones holomorfas. De forma análoga para las otras dos cartas se prueba que R es meromorfa en todo X . ■

2.3 Holomorfismos

Una vez definido nuestro objeto de estudio así como las funciones complejas, tiene sentido estudiar las aplicaciones entre superficies de Riemann.

Definición 2.3.1. Sean X e Y dos superficies de Riemann. Decimos que una aplicación $F : X \rightarrow Y$ es **holomorfa** en $p \in X$ si existen dos cartas $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ de X con $p \in U_1$ y $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ de Y con $F(p) \in U_2$ tales que la composición $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en $\phi_1(p)$. Si F está definida en un subconjunto abierto $W \subset X$, entonces decimos que F es holomorfa en W si F es holomorfa en cada punto de W . En particular, decimos que F es una aplicación holomorfa (o un **holomorfismo**) si F es holomorfa en todo X .

De hecho, F es holomorfa con cualquier par de cartas:

Lema 2.3.2. Sea $F : X \rightarrow Y$ una aplicación entre superficies de Riemann. Entonces:

- F es holomorfa en p si y solo si para cualquier par de cartas $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ de X y $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ de Y con $p \in U_1$ y $F(p) \in U_2$, la composición $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en $\phi_1(p)$.
- F es holomorfa en W si y solo si existen dos colecciones de cartas $\{\phi_1^{(i)} : U_1^{(i)} \rightarrow V_1^{(i)}\}$ de X con $W \subset \bigcup_i U_1^{(i)}$ y $\{\phi_2^{(j)} : U_2^{(j)} \rightarrow V_2^{(j)}\}$ de Y con $F(W) \subset \bigcup_j U_2^{(j)}$ tales que $\phi_2^{(j)} \circ F \circ \phi_1^{(i)-1}$ es holomorfa para cada i y j donde esté definido.

Demostración. Probaremos el primer apartado. Si F es una aplicación holomorfa en p entonces existen dos cartas $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ de X con $p \in U_1$ y $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ de Y con $F(p) \in U_2$ tal que la composición $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en $\phi_1(p)$. Tomemos ahora dos cartas cualesquiera, $\phi'_1 : U'_1 \rightarrow V'_1$ y $\phi'_2 : U'_2 \rightarrow V'_2$, con $p \in U'_1$ y $F(p) \in U'_2$. Sabemos que los cambios de coordenadas son aplicaciones holomorfas, luego:

$$\phi'_2 \circ F \circ \phi'^{-1}_1 = (\phi'_2 \circ \phi_2^{-1}) \circ (\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}) \circ (\phi_1 \circ \phi'^{-1}_1)$$

es holomorfa en $\phi'_1(p)$ por ser composición de aplicaciones holomorfas entre abiertos de \mathbb{C} . La otra implicación es inmediata y el segundo apartado se deduce del primero fácilmente. ■

Observación 2.3.3. Si $Y = \mathbb{C}$ entonces las nociones de función y aplicación holomorfa coinciden, es decir, una aplicación holomorfa $F : X \rightarrow Y$ es simplemente una función holomorfa en X .

Lema 2.3.4. Se tienen las siguientes afirmaciones:

- Si F es holomorfa, entonces F es continua y C^∞ ².
- La composición de aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann es holomorfa.
- La composición de una aplicación holomorfa con una función holomorfa es una función holomorfa: si $F : X \rightarrow Y$ es holomorfa y g es una función holomorfa en un abierto $W \subset Y$, entonces $g \circ F$ es una función holomorfa en $F^{-1}(W)$.
- La composición de una aplicación holomorfa con una función meromorfa es también meromorfa: si $F : X \rightarrow Y$ es holomorfa y G es una función meromorfa en un abierto $W \subset Y$, entonces $G \circ F$ es una función meromorfa en $F^{-1}(W)$ (hay que tener en cuenta que la imagen de $F(X)$ no puede ser un subconjunto de los polos de G).

Demostración. Veámoslo punto a punto:

- Probaremos la continuidad. Sea $F : X \rightarrow Y$ holomorfa y G un abierto de Y . Consideremos una colección de cartas de Y que recubran a G , por ejemplo $\{\phi_2^{(i)} : U_2^{(i)} \rightarrow V_2^{(i)}\}$, y notamos $G_i = G \cap U_2^{(i)}$ (que son abiertos de Y). Como $\phi_2^{(i)}$ es un homeomorfismo, $\phi_2^{(i)}(G_i)$ es un abierto de \mathbb{C} . Ahora, como F es holomorfa existen cartas $\{\phi_1^{(i)} : U_1^{(i)} \rightarrow V_1^{(i)}\}$ de forma que $\phi_2^{(i)} \circ F \circ \phi_1^{(i)-1}$ es holomorfa como aplicación entre \mathbb{C} , por lo tanto es una aplicación continua y podemos afirmar que

$$(\phi_2^{(i)} \circ F \circ \phi_1^{(i)-1})^{-1}(\phi_2^{(i)}(G_i))$$

es un abierto de X . Si ahora componemos a la izquierda con $\phi_1^{(i)}$ obtenemos que

$$\phi_1^{(i)} \circ (\phi_2^{(i)} \circ F \circ \phi_1^{(i)-1})^{-1}(\phi_2^{(i)}(G_i)) = F^{-1}(G_i)$$

es un abierto de X . Luego sabemos que $F^{-1}(G) = \bigcup_i F^{-1}(G_i)$ donde $F^{-1}(G_i)$ es abierto, de donde deducimos que $F^{-1}(G)$ es abierto por ser unión de conjuntos abiertos.

La prueba de que F es C^∞ es similar a la anterior.

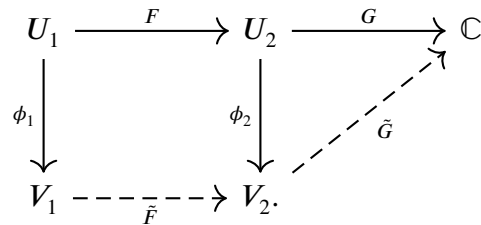
- Tomemos ahora dos holomorfismos entre superficies de Riemann $F : X \rightarrow Y$ y $G : Y \rightarrow Z$. Veamos que la composición $G \circ F : X \rightarrow Z$ es holomorfa en todo X . Fijemos un punto p de X , entonces existen dos cartas $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$

²La definición de aplicación C^∞ entre superficies de Riemann es análoga a la de aplicación holomorfa intercambiando holomorfa por C^∞ .

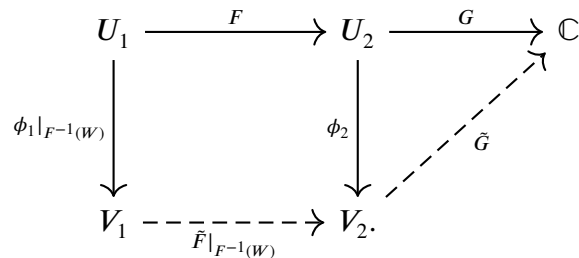
y $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ con $p \in U_1$, $F(p) \in U_2$ y $\tilde{F} = \phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ holomorfa en $\phi_1(p)$. Como G es holomorfa en Y y $F(p) \in Y$ tenemos que existe una carta $\phi_3 : U_3 \rightarrow V_3$ con $G(F(p)) \in U_3$ y $\tilde{G} = \phi_3 \circ G \circ \phi_2^{-1}$ holomorfa en $\phi_2(F(p))$. Hay que probar que $\tilde{H} = \phi_3 \circ F \circ G \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en $\phi_1(p)$, pero tenemos que $\tilde{H} = \tilde{G} \circ \tilde{F}$ es holomorfa por ser composición de aplicaciones holomorfas en \mathbb{C} .

- c. Es un corolario del caso anterior.
- d. Veamos que para todo punto $p \in F^{-1}(W)$ la composición $G \circ F : F^{-1}(W) \rightarrow \mathbb{C}$ es una función meromorfa, para ello, gracias a que G es meromorfa, existe una carta $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ con $F(p) \in U_2 \subset W$ tal que la composición $\tilde{G} = \phi_2^{-1} \circ G$ es meromorfa.

Por otro lado, como ϕ_2 es una carta de Y y F es un holomorfismo, sabemos que existe una carta $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ con $p \in U_1 \subset X$ tal que la composición $\tilde{F} = \phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa. Tenemos el siguiente diagrama



Consideremos ahora el conjunto abierto $F^{-1}(W)$ (W es abierto y hemos visto que F es continua), $p \in F^{-1}(W)$. Sea $U_1|_{F^{-1}(W)} = F^{-1}(W) \cap U_1$, entonces podemos definir la siguiente carta de $F^{-1}(W)$, $\phi_1|_{F^{-1}(W)} : U_1|_{F^{-1}(W)} \rightarrow \mathbb{C}$. Obtenemos otro diagrama



Ahora sí, la composición $G \circ F \circ \phi_1^{-1}|_{F^{-1}(W)} = \tilde{G} \circ \tilde{F}|_{F^{-1}(W)}$ es una función meromorfa en $\phi_1^{-1}|_{F^{-1}(W)}(p)$ por ser composición de una función holomorfa con una meromorfa (entre abiertos de \mathbb{C}). Por lo tanto $G \circ F$ es una función meromorfa de $F^{-1}(W)$.



Observación 2.3.5. Los dos últimos apartados del lema anterior dan lugar a las siguientes afirmaciones:

Sea $F : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa entre superficies de Riemann. Entonces, para cada conjunto abierto $W \subset Y$, F induce un homomorfismo de \mathbb{C} -álgebras

$$F^* : \mathcal{O}_Y(W) \rightarrow \mathcal{O}_X(F^{-1}(W))$$

definido por la composición con F : $F^*(g) = g \circ F$. De forma análoga se tiene para funciones meromorfas:

$$F^* : \mathcal{M}_Y(W) \rightarrow \mathcal{M}_X(F^{-1}(W))$$

Isomorfismos y automorfismos

Definición 2.3.6. Un **isomorfismo** entre superficies de Riemann es una aplicación holomorfa $F : X \rightarrow Y$, biyectiva y cuya inversa $F^{-1} : Y \rightarrow X$ es holomorfa. Un isomorfismo en sí mismo $F : X \rightarrow X$ se dice **automorfismo**. Si existe un isomorfismo entre X e Y decimos que son **isomorfas**.

Ejemplo 2.3.7. La esfera de Riemann \mathbb{C}_∞ y la recta proyectiva \mathbb{P}^1 son isomorfas mediante la siguiente aplicación $F : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{P}^1$ vista en el ejemplo 1.1.7

$$F([z : w]) = \left(2\operatorname{Re}(z\bar{w}), 2\operatorname{Im}(z\bar{w}), \frac{|z|^2 - |w|^2}{|z|^2 + |w|^2} \right).$$

De aquí deducimos que el género de la recta proyectiva coincide con el de la esfera de Riemann.

Teoremas sobre aplicaciones holomorfas

De nuevo, podemos heredar algunos teoremas de funciones holomorfas a aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann. Los tres primeros resultados tienen pruebas muy sencillas teniendo en cuenta estos mismos resultados para funciones holomorfas en el plano complejo y que las cartas complejas son homeomorfismos.

Proposición 2.3.8 (Teorema de la aplicación abierta). Sea $F : X \rightarrow Y$ un holomorfismo no constante entre superficies de Riemann. Entonces F es una aplicación abierta.

Proposición 2.3.9. Sea $F : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa e inyectiva entre superficies de Riemann. Entonces F es un isomorfismo entre X y su imagen $F(X)$.

Proposición 2.3.10 (Teorema de la Identidad). Sean F y G dos holomorfismos entre las superficies de Riemann X e Y . Si $F = G$ en un subconjunto S de X con un punto límite en X , entonces $F = G$.

Veamos ahora dos resultados propios de superficies de Riemann.

Proposición 2.3.11. Sea X una superficie de Riemann compacta y sea $F : X \rightarrow Y$ un holomorfismo no constante. Entonces Y es compacto y F es sobreyectiva.

Demostración. Como F es holomorfa y X es abierto de sí mismo, $F(X)$ es abierto de Y por el teorema de la aplicación abierta. Por otro lado, como X es compacto, $F(X)$ es compacto y por ser Y Hausdorff, $F(X)$ debe ser cerrado en Y . Se sigue entonces que $F(X)$ es abierto y cerrado en Y , y como Y es conexa, $F(X) = Y$, por lo tanto F es sobreyectiva e Y es compacto. ■

Observación 2.3.12. Desde este momento en adelante hablaremos de conjuntos discretos y cerrados, siendo esto último prescindible en algunos casos. Asumiremos que los conjuntos discretos son cerrados si fuese necesario.

Proposición 2.3.13 (Carácter discreto de las preimágenes). Sea $F : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann. Entonces para cada $y \in Y$, la preimagen $F^{-1}(y)$ es un subconjunto discreto de X . En particular, si X e Y son compactos, entonces $F^{-1}(y)$ es un subconjunto no vacío finito para todo $y \in Y$.

Demostración. Fijemos una coordenada local z centrada en $y \in Y$, y para un punto $x \in F^{-1}(y)$ elegimos una coordenada local w centrada en x . Entonces la función F escrita en términos de sus coordenadas locales es una función holomorfa no constante $z = g(w)$, más aún, g tiene un cero en el origen ya que x (que es $w = 0$) se envía en y (que es $z = 0$). Por lo tanto, como los ceros de una función holomorfa no constante son discretos, vemos que en un entorno (suficientemente pequeño) de x ella es la única preimagen de y . Esto prueba que F^{-1} es un subconjunto discreto de X . La segunda afirmación se sigue de que F debe ser sobreyectiva (por la proposición anterior) y los subconjuntos discretos de espacios compactos son finitos. ■

Funciones meromorfas y aplicaciones holomorfas en la esfera de Riemann

Sea f una función meromorfa en la superficie de Riemann X . Los valores que toma f fuera de los polos son números complejos mientras que en los polos podemos decir que su "valor" es ∞ . De esta forma, podemos definir la siguiente función $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ como

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \in \mathbb{C} & \text{si } x \text{ no es un polo de } f \\ \infty & \text{si } x \text{ es un polo de } f. \end{cases}$$

Veamos que es una aplicación holomorfa: sea p un punto de X , si p no es un polo de f no tenemos problema, consideramos la lectura usual de coordenadas en \mathbb{C}_∞ y la composición con F es holomorfa por hipótesis. Ahora, si p es un polo, tomamos la coordenada local de \mathbb{C}_∞ que contiene al punto del infinito, esta es, $1/z$. La composición con $f(x)$ es holomorfa en un entorno de p .

Proposición 2.3.14. La construcción anterior induce una biyección entre las funciones meromorfas f en X y los holomorfismos $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ (no idénticamente ∞).

Demostración. Hemos visto cómo pasar de funciones meromorfas a aplicaciones holomorfas en la esfera, veamos la otra parte. Dada $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ distinta de la aplicación constantemente ∞ . Definimos $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ como $f(p) = F(p)$ si $F(p) \neq \infty$. Veamos que f es meromorfa. Consideremos la carta de la esfera que no contiene a ∞ y obtenemos que f es holomorfa en p . Para ver que los puntos donde $F(p) = \infty$ se transforman en singularidades, podemos considerar de nuevo la carta anterior y al componerla con f el resultado es un polo en el punto p . ■

Observación 2.3.15. Como \mathbb{C}_∞ es isomorfa a \mathbb{P}^1 , hay una correspondencia entre funciones meromorfas y aplicaciones holomorfas a la recta proyectiva.

2.4 Propiedades globales de los holomorfismos

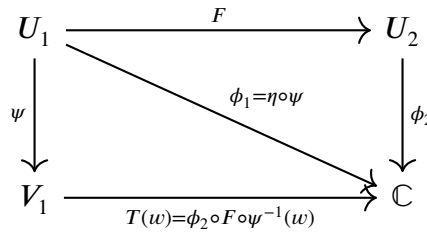
Proposición 2.4.1 (Forma normal local). Sea $F : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante definida en $p \in X$. Entonces existe un único entero $m \geq 1$ que satisface la siguiente propiedad: para cada carta $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ de Y centrada en $F(p)$, existe una carta $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ de X centrada en p tal que $\phi_2(F(\phi_1^{-1}(z))) = z^m$.

Demostración. Fijemos una carta ϕ_2 de Y centrada en $F(p)$ y escojamos cualquier carta $\psi : U \rightarrow V$ de X centrada en p . Entonces la serie de Taylor de la función

$T(w) = \phi_2(F(\psi^{-1}(w)))$ debe tener la forma

$$T(w) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i w^i$$

con $c_m \neq 0$ y $m \geq 1$ ya que $T(0) = 0$. Así tenemos que $T(w) = w^m S(w)$ donde $S(w)$ es una función holomorfa en $w = 0$ y $S(0) \neq 0$ (si fuese cero bastaría tomar m más grande). En este caso, aplicando el teorema de la función implícita al polinomio $y^m - x$, sabemos que existe una función $R(w)$ holomorfa en un entorno de $w = 0$ tal que $R(w)^m = S(w)$, por lo que $T(w) = (wR(w))^m$. Sea $\eta(w) = wR(w)$, se tiene que $\eta'(0) = R'(0) \neq 0$. Observemos que cerca del cero, η es holomorfa e invertible (usando el teorema de la función implícita en el polinomio $xy - 1$). Luego la composición $\phi_1 = \eta \circ \psi$ es también una carta de X definida y centrada cerca de p .



Si pensamos en η como una nueva coordenada local z (tal que $z = \eta(w)$), vemos que z y w están relacionados por $z = wR(w)$. Entonces

$$\begin{aligned} \phi_2(F(\phi_1^{-1}(z))) &= \phi_2(F(\psi^{-1}(\eta^{-1}(z)))) \\ &= T(\eta^{-1}(z)) \\ &= T(w) \\ &= (wR(w))^m \\ &= z^m. \end{aligned}$$

La unicidad de m se deduce de que si existen coordenadas locales en p y $F(p)$ tal que la aplicación F tiene la forma $z \mapsto z^m$, entonces en un entorno de $F(p)$, cada punto tiene exactamente m preimágenes. Así, este exponente m depende únicamente de las propiedades topológicas de la aplicación F cerca de p , y por lo tanto es independiente de las elecciones de coordenadas locales. ■

Definición 2.4.2. La **multiplicidad** de F en p , $\text{mult}_p(F)$, es el único entero m tal que hay coordenadas locales cerca de p y $F(p)$ con F de la forma $z \mapsto z^m$.

Hay una manera más simple de calcular la multiplicidad sin tener que hallar la forma normal de F o tener que calcular unas coordenadas locales centradas en cada p y $F(p)$. Tomamos dos coordenadas locales cualesquiera, z cerca de p y w cerca de $F(p)$, y suponemos que envían p en z_0 y $F(p)$ en w_0 . Así, F puede ser leído en sus coordenadas locales como $w = h(z)$ donde h es holomorfa y se tiene que $w_0 = h(z_0)$.

Lema 2.4.3. Con la notación anterior, la multiplicidad de F en p es

$$\text{mult}_p(F) = 1 + \text{ord}_{z_0}(dh/dz).$$

En particular, la multiplicidad es el exponente del menor término estrictamente positivo de la serie de potencias de h : si $h(z) = h(z_0) + \sum_{i=m}^{\infty} c_i(z - z_0)^i$ con $m \geq 1$ y $c_m \neq 0$, entonces $\text{mult}_p(F) = m$.

Demostración. Hemos visto en la proposición anterior que la multiplicidad es el término más bajo que aparece en el desarrollo en series de potencias de T , con T la lectura en coordenadas de F con cartas locales centradas en p y $F(p)$ respectivamente. Con la notación anterior, $z - z_0$ y $w - w_0$ son las coordenadas locales centradas, así pues, como $w - w_0 = h(z) - h(z_0)$, vemos que la multiplicidad es el término más bajo en aparecer en la expansión en series de potencias de $h(z) - h(z_0)$ en $z = z_0$. Por el teorema de Taylor, esto es uno más que el orden de la derivada de h en z_0 . ■

Corolario 2.4.4. Los puntos del dominio de F donde tiene multiplicidad al menos dos forman un conjunto discreto.

Demostración. Por el lema anterior, estos puntos se corresponden con ceros de la derivada de h , la lectura en coordenadas de F . Como h es holomorfa su derivada es holomorfa y sus ceros forman un conjunto discreto. ■

Definición 2.4.5. Sea $F : X \rightarrow Y$ un holomorfismo no constante. Un punto $p \in X$ se dice **punto de ramificación** (o simplemente ramificación) de F si $\text{mult}_p(F) \geq 2$. Un punto $y \in Y$ es un **punto rama** de F si es la imagen de un punto de ramificación de F .

Lema 2.4.6. Sea X una curva plana afín lisa definida por la función $f(x, y) = 0$ y sea $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}$ la función proyección $\pi(x, y) = x$. Entonces π tiene un punto de ramificación en $p \in X$ si y solo si $(\partial f / \partial y)(p) = 0$.

Sea X una curva plana proyectiva lisa definida por un polinomio homogéneo $F(x, y, z) = 0$. Consideramos la aplicación $G : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ que envía $[x : y : z]$ en $[x : z]$. Entonces G se ramifica en $p \in X$ si y solo si $(\partial F / \partial y)(p) = 0$.

Demostración. Empezaremos por el caso afín. Sea $p = (x_0, y_0)$. Por reducción al absurdo supongamos que $(\partial f / \partial y)(p) \neq 0$. Entonces π es una carta de X cerca de p (ver

la prueba de la proposición 1.2.3) y π , leída respecto a sus coordenadas locales, es la identidad, luego su multiplicidad es uno lo cual es una contradicción con que p sea un punto de ramificación.

Para el recíproco, supongamos que $(\partial f / \partial y)(p) = 0$. Como X es lisa debemos tener que $(\partial f / \partial x)(p) \neq 0$ y por lo tanto, la proyección en y es una carta de X cerca de p . Por el teorema de la función implícita, de nuevo cerca de p , X es localmente el grafo de una función holomorfa $g(y)$. Así pues $f(g(y), y)$ es idénticamente cero en un entorno de y_0 y derivando respecto de y obtenemos que $(\partial f / \partial x)g'(y) + (\partial f / \partial y)$ es idénticamente cero cerca de p . Por hipótesis, $(\partial f / \partial y)(p) = 0$, luego ya que $(\partial f / \partial x)(p) \neq 0$ se tiene que $g'(y_0) = 0$. Como la lectura en coordenadas de π con la carta anterior es exactamente $g(y)$, por el lema 2.4.3 π se ramifica en p .

El caso proyectivo se sigue del desarrollo anterior teniendo en cuenta que localmente X es la curva plana afín definida por $f(x, y) = F(x, y, 1) = 0$ ■

Resaltamos la siguiente relación entre la multiplicidad (definida para aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann) y el orden (definido para funciones meromorfas).

Lema 2.4.7. Sea f una función meromorfa en una superficie de Riemann X con la aplicación holomorfa asociada $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$:

- a. Si $p \in X$ es un cero de f , entonces $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f)$.
- b. Si p es un polo de f , entonces $\text{mult}_p(F) = -\text{ord}_p(f)$.
- c. Si p no es ni un cero ni un polo de f , entonces $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f - f(p))$.

Demostración. El apartado a. es un caso particular del c. Sabiendo esto:

- b. Supongamos que p es un polo de f . Entonces el orden de f en p es negativo y p es un cero de $1/f$. Se sigue que $\text{mult}_p(F) = -\text{ord}_p(f)$.
- c. Supongamos que $p \in X$ no es un polo de f y que $z_0 = f(p)$. Entonces la función $f - z_0$ tiene un cero en p , y por el lema 2.4.3 vemos que $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f - f(p))$.

■

Grado de aplicaciones holomorfas entres superficies de Riemann compactas

Veamos algunas propiedades.

Proposición 2.4.8. Sea $F : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas. Para cada $y \in Y$ definimos $d_y(F)$ como la suma de las multiplicidades de F en los puntos de X que se envían en y :

$$d_y(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y)} \text{mult}_p(F).$$

Entonces $d_y(F)$ es constante, independientemente de y .

Demostración. Vamos a demostrar que la función $y \mapsto d_y(F)$ es una función de Y en \mathbb{Z} localmente constante. Como Y es conexo, una función localmente constante debe ser constante, lo cual prueba el resultado.

Consideremos el disco abierto unidad $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| < 1\}$ y la aplicación $f_m : D \rightarrow D$ dada por $f_m(z) = z^m$ para algún $m \geq 1$. Esta aplicación es holomorfa, sobreyectiva y su único punto de ramificación es $z = 0$ con multiplicidad m . La multiplicidad del resto de puntos es uno. Para todo $w \in D$ con $w \neq 0$ hay exactamente m preimágenes (las raíces m -ésimas de w), todas con multiplicidad uno. Si $w = 0$ su única preimagen es $z = 0$ con multiplicidad m . Observemos que esta aplicación f_m satisface que la suma de las multiplicidades es constante.

Nuestro objetivo ahora es probar que una aplicación F como la del enunciado se puede expresar como una aplicación que envía la unión disjunta de dichos discos en D (posiblemente cada f_m asociada tenga una m distinta).

Fijemos un punto $y \in Y$ y sea $\{x_1, \dots, x_n\}$ el conjunto de preimágenes de y por F . Escojamos una coordenada local w de Y centrada en y . Por la proposición 2.4.1 podemos escoger una coordenada local z_i para cada x_i en X centrada en x_i para todo $i = 1, \dots, n$, tal que en un entorno de z_i la lectura en coordenadas de la aplicación F envía z en $w = z^{m_i}$. Por lo tanto, si miramos estos entornos de x_i , tenemos exactamente la unión disjunta de discos deseada.

Tenemos que asegurarnos de que no hay ninguna preimagen de puntos cercanos a y fuera de los entornos de los x_i . Por reducción al absurdo supongamos que, para un punto arbitrariamente cercano a y , haya algunas preimágenes cuyas fuera de dichos entornos. Así encontramos una sucesión de puntos de X que no están contenidos en ningún entorno de los x_i tales que la imagen de estos puntos por F converge a $y \in Y$ (por hipótesis). Como X es compacto, podemos encontrar una subsucesión, $\{p_n\}$, convergente a un punto $x \in X$ cuyas imágenes convergen a y . Como F es continua, se tiene que $F(x) = y$. Pero por hipótesis, este x debe ser uno de los x_i y llegamos a una contradicción ya que ninguno de los p_n se encuentran en los entornos de los x_i . ■

Gracias a la proposición anterior tenemos la siguiente definición:

Definición 2.4.9. Sea $F : X \rightarrow Y$ un holomorfo no constante entre superficies de Riemann compactas. Llamamos **grado** de F o $\deg(F)$ al entero $d_y(F)$ para cualquier $y \in Y$.

Observación 2.4.10. F tiene grado uno si y solo si F es inyectiva.

Corolario 2.4.11. Una aplicación holomorfa entre superficies de Riemann compactas es un isomorfismo si y solo si tiene grado uno.

Demostración. Este resultado es una consecuencia de las proposiciones 2.3.9 y 2.3.11 usando la observación anterior. ■

Proposición 2.4.12. Sea X una superficie de Riemann compacta y f una función meromorfa definida en X con un único polo. Si este polo es simple entonces X es isomorfa a \mathbb{C}_∞ .

Demostración. Sea $p \in X$ el único polo de f . Supongamos además que es un polo simple. Entonces la aplicación $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ asociada a f tiene multiplicidad uno en p y este el único punto que se envía en ∞ . De esta forma F tiene grado uno y por el corolario anterior F es un isomorfismo. ■

Suma de los órdenes de una función meromorfa

Ya reunimos el conocimiento necesario para probar la versión general de la suma de los órdenes de una función meromorfa no constante en una superficie de Riemann. Este resultado lo habíamos visto anteriormente en la esfera de Riemann (ver corolario 2.2.7). Veamos una prueba general.

Proposición 2.4.13. Sea f una función meromorfa no constante en una superficie de Riemann compacta X . Entonces

$$\sum_p \text{ord}_p(f) = 0.$$

Demostración. Sea $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ el holomorfo asociado a f en la esfera de Riemann. Sean $\{x_i\}$ las preimágenes del cero y sean $\{y_j\}$ los puntos de X que se envían en ∞ . Observemos que los x_i son los ceros de f y que los y_j son sus polos. Sea d el grado de la aplicación F . Por la definición de grado tenemos que

$$d = \sum_i \text{mult}_{x_i}(F) \quad \text{y} \quad d = \sum_j \text{mult}_{y_j}(F).$$

Ahora, los únicos puntos de X donde f tiene orden distinto de cero son sus ceros y sus polos, es decir, los $\{x_i\}$ y los $\{y_j\}$. Por el lema 2.4.7 se tiene que

$$\text{mult}_{x_i}(F) = \text{ord}_{x_i}(f) \text{ y } \text{mult}_{y_j}(F) = -\text{ord}_{y_j}(f).$$

Luego

$$\begin{aligned} \sum_p \text{ord}_p(f) &= \sum_i \text{ord}_{x_i}(f) + \sum_j \text{ord}_{y_j}(f) \\ &= \sum_i \text{mult}_{x_i}(F) - \sum_j \text{mult}_{y_j}(F) = 0 \end{aligned}$$

ya que ambos sumandos son iguales al grado. ■

La característica de Euler para superficies compactas y la fórmula de Hurwitz

En esta breve sección usaremos la analogía entre superficies de Riemann y 2-variedades topológicas reales para estudiar su característica de Euler y deducir la fórmula de Hurwitz. Recordemos qué es una triangulación:

Definición 2.4.14. Sea S una 2-variedad compacta (posiblemente con borde). Una **triangulación** de S es una descomposición de S en subconjuntos cerrados cada uno homeomorfo a un triángulo, tal que dos triángulos o son disjuntos o se cortan en una arista o en un vértice.

Definición 2.4.15. Sea S una 2-variedad compacta (posiblemente con borde). Supongamos que tenemos una triangulación de S con v vértices, e aristas y t triángulos. La **característica de Euler** de S (con respecto a la triangulación anterior) es el entero $e(S) = v - e + t$.

Proposición 2.4.16. La característica de Euler es independiente de la triangulación elegida. Para una 2-variedad compacta sin borde topológico y género g su característica de Euler es $2 - 2g$.

Demostración. Se puede probar usando los conocidos resultados A.0.4 y A.0.5. ■

A lo largo de este capítulo hemos ido recopilando resultados sobre el grado de aplicaciones holomorfas en superficies de Riemann compactas. Todo esto sumado a la teoría vista sobre la característica de Euler nos permiten probar una importante fórmula.

| Teorema 2.4.17 (Fórmula de Hurwitz). Sea $F : X \rightarrow Y$ un holomorfo no constante entre superficies de Riemann compactas. Se satisface

$$2g(X) - 2 = \deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} [\text{mult}_p(F) - 1].$$

Demostración. Observemos que como X es compacta, por el corolario 2.4.3 el conjunto de sus puntos de ramificación es finito y por lo tanto la suma es una suma finita.

Tomemos una triangulación de Y tal que cada punto rama de F es un vértice y supongamos que esta triangulación tiene v vértices, e aristas y t triángulos. Dotemos a X de la triangulación correspondiente al aplicar F^{-1} a la triangulación de Y . Esta nueva triangulación tiene por vértices a los puntos de ramificación de F y supongamos que tiene v' vértices, e' aristas y t' triángulos.

Como no hay puntos de ramificación de X sobre el interior de ningún triángulo, cada triángulo de Y da lugar a $\deg(F)$ triángulos en X , luego $t' = \deg(F)t$. De manera similar, $e' = \deg(F)e$. Fijemos ahora un vértice $q \in Y$. El número de preimágenes de q en X es $|F^{-1}(q)|$, que puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} |F^{-1}(q)| &= \sum_{p \in F^{-1}(q)} 1 \\ &= \deg(F) + \sum_{p \in F^{-1}(q)} [1 - \text{mult}_p(F)] \end{aligned}$$

(en la segunda igualdad hemos sumado y restado el grado de F).

Se sigue que el número total de preimágenes de los vértices de Y , v' , es

$$\begin{aligned} v' &= \sum_{q \in \text{vert}(Y)} (\deg(F) + \sum_{p \in F^{-1}(q)} [1 - \text{mult}_p(F)]) \\ &= \deg(F)v - \sum_{q \in \text{vert}(Y)} \sum_{p \in F^{-1}(q)} [\text{mult}_p(F) - 1] \\ &= \deg(F)v - \sum_{p \in \text{vert}(X)} [\text{mult}_p(F) - 1]. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
 2g(X) - 2 &= -e(X) \\
 &= -v' + e' - t' \\
 &= -\deg(F)v + \sum_{p \in \text{vert}(X)} [\text{mult}_p(F) - 1] + \deg(F)e - \deg(F)t \\
 &= -\deg(F)e(Y) + \sum_{p \in \text{vert}(X)} [\text{mult}_p(F) - 1] \\
 &= -\deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} [\text{mult}_p(F) - 1]
 \end{aligned}$$

donde la última igualdad se tiene ya que todos los puntos de ramificación de F son vértices de X . ■

3 | 1-formas diferenciales

En este capítulo, de forma análoga a [Mir95, cap. IV], presentamos las 1-formas diferenciales, holomorfas y meromorfas, cómo operar con ellas y enunciamos los resultados esenciales sobre integración en superficies de Riemann.

3.1 Conceptos básicos

1-formas holomorfas

Definición 3.1.1. Una **1-forma holomorfa** en un conjunto abierto $V \subset \mathbb{C}$ es una expresión ω de la forma

$$\omega = f(z)dz$$

donde f es una función holomorfa en V . Decimos que ω es una 1-forma holomorfa en la coordenada z .

Este va a ser nuestro objeto de estudio básico en este capítulo. Con el fin de transportar esta definición a superficies de Riemann usando cartas complejas introducimos la siguiente definición:

Definición 3.1.2. Supongamos que $\omega_1 = f(z)dz$ es una 1-forma holomorfa en la coordenada z , definida en un abierto V_1 y que $\omega_2 = g(w)dw$ es otra 1-forma holomorfa en la coordenada w , definida en V_2 . Sea $z = T(w)$ una aplicación holomorfa de V_2 a V_1 . Decimos que T **transforma** ω_1 en ω_2 si $g(w) = f(T(w))T'(w)$.

Observación 3.1.3. Si T es invertible con función inversa S , entonces T transforma ω_1 en ω_2 si y solo si S transforma ω_2 en ω_1 .

Ahora sí, podemos definir 1-formas en superficies de Riemann.

Definición 3.1.4. Sea X una superficie de Riemann. Una **1-forma holomorfa** en X es una colección de 1-formas holomorfas $\{\omega_\phi\}$, una por cada carta $\phi : U \rightarrow V$ en la coordenada de V , tal que si dos cartas $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$ ($i = 1, 2$) se cortan en su dominio entonces las 1-formas holomorfas asociadas satisfacen que ω_{ϕ_1} se transforma en ω_{ϕ_2} a través del cambio de coordenadas $T = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$.

Lema 3.1.5. Sea X una superficie de Riemann y sea \mathcal{A} un atlas compatible con X . Supongamos que existen 1-formas para cada carta del atlas tales que si dos cartas tienen dominio común se transforman una en la otra. Entonces existe una única 1-forma holomorfa en X que extiende estas 1-formas holomorfas en cada una de las cartas de \mathcal{A} .

Demostración. Sea ψ una carta de X que no está en el atlas. Nuestro objetivo es definir una 1-forma holomorfa respecto a la coordenada local w de ψ . Fijemos un punto p en el dominio de ψ y escojamos una carta del atlas, ϕ , con p en su dominio. Sea z la coordenada local de esta carta, entonces $\omega = f(z)dz$ es una 1-forma holomorfa con respecto a ϕ . Definamos ahora la 1-forma holomorfa respecto a ψ como $f(T(w))T'(w)dw$ donde $z = T(w)$ describe el cambio de coordenadas $\phi \circ \psi^{-1}$.

Hay que comprobar que esta 1-forma es independiente de la elección de la carta ϕ y por lo tanto es una 1-forma asociada a ψ en cada punto de su dominio: sea $\tilde{\phi}$ otra carta del atlas con p en su dominio y con la 1-forma asociada $\tilde{\omega} = g(\tilde{z})d\tilde{z}$. Por hipótesis, $\hat{T} = \phi \circ \tilde{\phi}^{-1}$ transforma ω en $\tilde{\omega}$, es decir, $g(\tilde{z}) = f(\hat{T}(\tilde{z}))\hat{T}'(\tilde{z})$. Como ψ y $\tilde{\phi}$ son compatibles, el cambio de coordenadas $\tilde{T} = \tilde{\phi} \circ \psi^{-1}$ es una función holomorfa. Luego tenemos

$$\begin{aligned} f(T(w))T'(w)dw &= f(\phi \circ \psi^{-1}(w))(\phi \circ \psi^{-1})'(w)dw \\ &= f(\phi \circ \tilde{\phi}^{-1} \circ \tilde{\phi} \circ \psi^{-1}(w))(\phi \circ \tilde{\phi}^{-1} \circ \tilde{\phi} \circ \psi^{-1})'(w)dw \\ &= f(\hat{T} \circ \tilde{T}(w))(\hat{T} \circ \tilde{T})'(w)dw \\ &= f(\hat{T} \circ \tilde{T}(w))(\hat{T}' \circ \tilde{T}')(w)\tilde{T}'(w)dw \\ &= g(\tilde{T}(w))\tilde{T}'(w)dw, \end{aligned}$$

lo cual prueba que no depende de la carta elegida. Se comprueba de forma análoga que las 1-formas así definidas se transforman de la manera esperada entre ellas. La unicidad es consecuencia inmediata de la definición dada. ■

1-formas meromorfas

Siguiendo la sección anterior, podemos definir 1-formas meromorfas en superficies de Riemann.

Definición 3.1.6. Una **1-forma meromorfa** en un abierto $V \subset \mathbb{C}$ es una expresión ω de la forma

$$\omega = f(z)dz$$

donde f es una función meromorfa en V . Decimos que ω es una 1-forma meromorfa en la coordenada z .

Definición 3.1.7. Sean $\omega_1 = f(z)dz$ y $\omega_2 = g(w)dw$ dos 1-formas meromorfas en la coordenada z y w y definidas en un abierto V_1 y V_2 respectivamente. Sea $z = T(w)$ una función holomorfa de V_2 a V_1 . Decimos que T **transforma** ω_1 en ω_2 si $g(w) = f(T(w))T'(w)$.

Definición 3.1.8. Sea X una superficie de Riemann. Una **1-forma meromorfa** en X es una colección de 1-formas meromorfas $\{\omega_\phi\}$, una por cada carta $\phi : U \rightarrow V$ en la coordenada de V , tales que si dos cartas $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$ ($i = 1, 2$) se cortan en su dominio, entonces las 1-formas asociadas satisfacen que ω_{ϕ_1} se transforma en ω_{ϕ_2} a través del cambio de coordenadas $T = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$.

El siguiente lema es el equivalente al lema 3.1.5 para 1-formas meromorfas. Su demostración sigue las mismas líneas.

Lema 3.1.9. Sea X una superficie de Riemann y \mathcal{A} un atlas suyo. Supongamos que existen 1-formas meromorfas para cada carta del atlas que se transforman entre sí en sus dominios comunes. Entonces existe una única 1-forma meromorfa en X que extiende estas 1-formas meromorfas en cada carta de \mathcal{A} .

También podemos hablar del orden de 1-formas meromorfas en superficies de Riemann.

Proposición 3.1.10. Sea X una superficie de Riemann con $p \in X$ y sea $\omega = \{\omega_\phi\}$ una 1-forma meromorfa en X . Sean $\{\omega_i\}$ las 1-formas de ω con p en su dominio. Así para cada ω_i podemos escoger una coordenada local z_i centrada en p y obtener la correspondiente 1-forma $\omega_i = f_i(z_i)dz_i$ donde f_i es una función meromorfa en $z_i = 0$. Entonces se tiene que el orden de f_i en dicho punto es el mismo para todas las f_i asociadas a las ω_i .

Demostración. Sean ϕ_1 y ϕ_2 dos cartas de X con p en su dominio. Por hipótesis, las 1-formas $\omega_1 = f_1(z_1)dz_1$ y $\omega_2 = f_2(z_2)dz_2$ asociadas a las cartas anteriores se

transforman entre ellas a través de $T = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$, es decir, $f_2(z_2) = f_1(T(z_2))T'(z_2)$. Probemos que $\text{ord}_p(f_1) = \text{ord}_p(f_2)$. Teniendo en cuenta que las cartas están centradas en p y que T es una aplicación holomorfa, entonces T tiene un cero de orden 1 en p . Aplicando el lema 2.1.22 se tiene la igualdad. ■

Definición 3.1.11. Llamamos a este número **orden** de ω en p y lo denotamos $\text{ord}_p(\omega)$. Decimos que p es un **cero** de ω de orden $n > 0$ si $\text{ord}_p(\omega) = n$ y decimos que p es un **polo** de ω de orden $n > 0$ si $\text{ord}_p(\omega) = -n$.

Observación 3.1.12. El conjunto de los ceros y polos de una 1-forma meromorfa es un conjunto discreto.

Veamos un ejemplo que nos será de utilidad más adelante:

Ejemplo 3.1.13. Sea $X = \mathbb{C}_\infty$ y sea la 1-forma holomorfa $\omega_1 = dz$ en \mathbb{C} . Quereamos definir una 1-forma en X tal que $\omega = \omega_1$ si nos restringimos a \mathbb{C} . Para ello, sea $\phi_1(z) = z$ la carta usual de X y $\phi_2(w) = 1/w$ la carta de X que contiene a ∞ . Observamos que $\omega_1 = f(z)dz$ está definida en el dominio de ϕ_1 (siendo $f(z)$ la función constante 1). Tenemos que definir una 1-forma $\omega_2 = g(w)dw$ en el dominio de ϕ_2 que se transforme bien bajo el cambio de coordenadas $T = \phi_1 \circ \phi_2^{-1} = 1/w$. Impongamos que T transforme ω_1 en ω_2 :

$$g(w) = f(T(w))T'(w) = -1/w^2.$$

Luego aplicando el lema 3.1.9 queda definida la 1-forma ω en \mathbb{C}_∞ . Es fácil ver que esta 1-forma no tiene ceros y solo tiene un polo (doble) en el punto del infinito.

Consideremos ahora la 1-forma meromorfa $\omega_1 = f(z)dz$ definida en \mathbb{C} . Repitiendo el razonamiento anterior concluimos que $g(w) = f(1/w)(-1/w^2)$, luego la 1-forma ω definida en \mathbb{C}_∞ tiene en el infinito orden $-2 + \text{ord}_\infty(f)$.

3.2 Operaciones con 1-formas

En esta sección trataremos de forma breve las operaciones más frecuentes que se pueden hacer con 1-formas cuyo resultado sea otra 1-forma.

Multiplicación por funciones

Proposición 3.2.1. Supongamos que h es una función holomorfa en una superficie de Riemann X y $\omega = f(z)dz$ es una 1-forma holomorfa en X . Entonces $h\omega = hf(z)dz$ es una 1-forma holomorfa en X .

Demostración. Tenemos que comprobar que las 1-formas locales de $h\omega$ se transforman bien. Supongamos que $hw_1 = hf_1(z)dz$ y $hw_2 = hf_2(w)dw$ son dos 1-formas holomorfas, cada una con su coordenada local, tales que se cortan en sus dominios y por lo tanto las respectivas 1-formas de X , ω_1 y ω_2 también. Por hipótesis sabemos que estas dos últimas se transforman la una en la otra por el cambio de coordenadas T . De aquí deducimos que T transforma hw_1 en hw_2 . ■

Observación 3.2.2. Esta misma proposición puede enunciarse para h una función meromorfa y ω una 1-forma meromorfa. El resultado $h\omega$ es una 1-forma meromorfa en X . Su demostración es análoga a la anterior.

Corolario 3.2.3. Si h y ω son meromorfas en p entonces $\text{ord}_p(h\omega) = \text{ord}_p(h) + \text{ord}_p(\omega)$.

Demostración. Se sigue de este mismo resultado para funciones meromorfas. ■

Imagen inversa de una 1-forma

Sea $F : X \rightarrow Y$ un holomorfismo no constante entre dos superficies de Riemann. Sea $\omega = f(z)dz$ una 1-forma holomorfa (meromorfa) en Y . Nuestro objetivo en esta sección es asociar a F y ω una 1-forma holomorfa (meromorfa) en X . Para ello, fijamos una carta $\phi : U \rightarrow V$ de X y una carta $\psi : U' \rightarrow V'$ tal que $F(U) \subset U'$. Sean w y z las coordenadas locales de U y U' respectivamente y sea $z = h(w)$ la lectura en coordenadas de F .

Definición 3.2.4. Bajo las hipótesis anteriores, llamamos **imagen inversa** de ω por F a la expresión

$$F^*\omega = f(h(w))h'(w)dw.$$

Lema 3.2.5. $F^*\omega$ es una 1-forma holomorfa (meromorfa) bien definida en X .

Demostración. Sea $h(z)$ es una función holomorfa. Si ω es una 1-forma holomorfa (meromorfa) entonces $f(h(w))h'(w)$ es una función holomorfa (meromorfa). Para comprobar que la 1-forma está bien definida en X , es decir, que se transforma bien, razonamos siguiendo la prueba del lema 3.1.5 reemplazando T por h y \tilde{T} por \tilde{h} . ■

Corolario 3.2.6. Si ω es una 1-forma holomorfa (o meromorfa) entonces $F^*(\omega)$ es una 1-forma holomorfa (o meromorfa).

Observación 3.2.7. También podemos hablar de la imagen inversa de una función f vía F : sea f una función en Y , entonces F^*f es la función $f \circ F$.

Lema 3.2.8. Supongamos que $F : X \rightarrow Y$ es un holomorfismo entre superficies de Riemann y ω una 1-forma meromorfa en Y . Fijado un punto p en X se tiene que

$$\text{ord}_p(F^*\omega) = (1 + \text{ord}_{F(p)}(\omega)) \cdot \text{mult}_p(F) - 1.$$

Demostración. Escojamos una coordenada local w en p y otra z en $F(p)$ tal que cerca de p la aplicación F tenga la forma $z = w^n$, con $n = \text{mult}_p(F)$. Por otro lado, la 1-forma ω con respecto a la coordenada z se puede expresar como $\omega = (\sum_{i=k} c_i z^i) dz$ donde $k = \text{ord}_{F(p)}(\omega)$ y $c_k \neq 0$. Entonces la 1-forma $F^*\omega$ es una expresión

$$F^*\omega = \left(\sum_{i=k} c_i w^{ni} \right) (n w^{n-1}) dw$$

en w . De aquí se deduce que el orden de $F^*\omega$ es $nk + n - 1$. ■

De manera similar al lema anterior, si tenemos en cuenta la observación 3.2.7, podemos probar el siguiente resultado:

Lema 3.2.9. Sea $F : X \rightarrow Y$ es un holomorfismo entre superficies de Riemann y f una función meromorfa en Y . Fijado un punto p en X se satisface

$$\text{ord}_p(f \circ F) = \text{mult}_p(F) \cdot \text{ord}_{F(p)}(f).$$

3.3 Integración y el teorema del residuo

El objetivo de esta sección es probar el famoso teorema del residuo para integrales en superficies de Riemann. No es el enfoque de este trabajo definir y tratar en profundidad los conceptos relacionados con la integración en dichas superficies, para ello ver [Mir95, sec. IV.3] o [FK92, sec I.4]. No obstante, haremos un breve resumen.

Integración en superficies de Riemann

Definición 3.3.1. Un **camino** en una superficie de Riemann X es una función continua $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ de clase C^∞ a trozos, con $[a, b]$ un intervalo cerrado real. Decimos que es un **camino cerrado** si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Lema 3.3.2. Veamos algunas propiedades:

- Todo camino puede reparametrizarse para que su dominio sea $[0, 1]$.
- Si $F : X \rightarrow Y$ es una aplicación C^∞ entonces $F^*\gamma = F \circ \gamma$ es un camino en Y .
- Dados dos caminos γ_1 y γ_2 en X (sin pérdida de generalidad supongamos ambos parametrizados en $[0, 1]$) tales que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, entonces podemos concatenarlos, es decir, encontrar un camino $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ que satisface que $\gamma|_{[0, 1/2]} = \gamma_1$ y $\gamma|_{[1/2, 1]} = \gamma_2$. Este argumento se aplica fácilmente a un número finito de caminos.
- De manera similar al caso anterior, podemos dividir un camino en un número finito de caminos, es decir, dado un camino γ en X , podemos encontrar una partición $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$ que da lugar a n caminos que se concatenan en γ .

Corolario 3.3.3. Sea X una superficie de Riemann y γ un camino suyo. Entonces γ puede ser dividido en un número finito de caminos $\{\gamma_i\}$ tal que cada γ_i es C^∞ y su imagen está contenida en una única carta de X .

Ya podemos definir la integral de una 1-forma ω definida en una superficie de Riemann X en un camino γ de X . Escogemos una partición de γ tal que los γ_i sean caminos C^∞ en su dominio $[a_{i-1}, a_i]$ y su imagen esté contenida en el dominio U_i de una carta ϕ_i de X . Con respecto a cada carta ϕ_i escribimos la 1-forma ω como $\omega = f_i(z)dz$ y consideramos la composición $\phi_i \circ \gamma_i = z(t)$.

Definición 3.3.4. Con la notación anterior definimos la **integral** de ω en γ como el número complejo

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_i \int_{t=a_{i-1}}^{a_i} f_i(z(t))z'(t)dt.$$

Observación 3.3.5. Cabe destacar que, como f es una función holomorfa, el integrando es una función C^∞ y por lo tanto la integral está bien definida. Además, gracias a la definición dada, la integral de ω en γ no depende de la elección de coordenadas locales y es independiente de la parametrización de γ .

Por último enunciaremos un corolario del teorema de Stokes que nos será de utilidad en la prueba del teorema del residuo.

Corolario 3.3.6. Sea D un conjunto cerrado triangulable de una superficie de Riemann X y sea ω una 1-forma holomorfa o meromorfa. Entonces

$$\int_{\partial D} \omega = 0,$$

donde ∂D es la frontera topológica de D .

Este resultado se obtiene del teorema de Stokes (que está enunciado en su totalidad en [Mir95, Teorema IV.3.16]) aplicando [Mir95, Lema IV.2.4] ya que nuestra función es holomorfa (o meromorfa).

El teorema del residuo

Sea ω una 1-forma en una superficie de Riemann X meromorfa en un punto $p \in X$. Escogiendo una coordenada local z centrada en p , podemos escribir su serie de Laurent como

$$\omega = f(z)dz = \left(\sum_{n=M}^{\infty} c_n z^n \right) dz$$

donde c_M es distinto de cero y el orden de ω en p es M .

Definición 3.3.7. El **residuo** de ω en p , denotado por $\text{Res}_p(\omega)$, es el coeficiente c_{-1} de la serie de Laurent para ω en p .

Sabemos que los coeficientes de la serie de Laurent dependen de la coordenada local escogida, no obstante el coeficiente c_{-1} no viene determinado por la carta seleccionada.

Lema 3.3.8. Sea ω una 1-forma meromorfa definida en $p \in X$. Sea γ un camino cerrado alrededor de p que no encierra ningún otro polo de ω . Entonces

$$\text{Res}_p(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \omega.$$

Demostración. Sea $\phi : U \rightarrow V$ una carta de X centrada en p tal que $\text{Im}(\gamma) \subset U$ con coordenada local z . Entonces, podemos escribir ω en dicha coordenada local, $\omega = f(z)dz$. Sea $\sum_n c_n z^n$ la serie de Laurent de $f(z)$. Así

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\phi\gamma} f(z)dz$$

la cual sabemos que es $2\pi i c_{-1}$ por el teorema del residuo para funciones de variable compleja. ■

Corolario 3.3.9. El residuo de una 1-forma meromorfa está bien definido.

Demostración. Es consecuencia del lema anterior y del hecho de que la integral no depende la carta escogida (y por lo tanto de la coordenada local) para definir la serie de Laurent de la 1-forma. ■

Lema 3.3.10. Supongamos que f es una función meromorfa en $p \in X$. Entonces df/f es una 1-forma meromorfa en p y su residuo en p coincide con el orden de f en p .

Demostración. Escojamos una carta centrada en p . Supongamos que su coordenada local es z y que $\text{ord}_p(f) = n$. De esta forma, podemos expandir f , $f = \sum_{i=-n} c_i z^i$, cerca de p con $c_n \neq 0$. Así, $1/f$ se puede expresar como $\sum_{i=-n} c'_i z^i$ cerca de p con $c'_{-n} = 1/c_n$. Por lo tanto $df = (\sum_{i=-n-1} (i+1)c_{i+1} z^i) dz$ cerca de p y entonces el término de menor grado del cociente df/f es n/z . Observemos que el residuo en p es n . ■

Teorema 3.3.11 (Teorema del residuo). Sea ω una 1-forma meromorfa en una superficie de Riemann compacta X . Entonces

$$\sum_{p \in X} \text{Res}_p(\omega) = 0.$$

Demostración. Sabemos que los polos de ω forman un conjunto finito en X (que es compacta), por lo tanto la suma es finita. Sean p_1, p_2, \dots, p_n los polos de ω . Escojamos para cada polo p_i un camino cerrado γ_i en X que encierre a p_i y a ningún otro polo de ω y llamemos U_i al interior de dicho camino (entendemos por interior al conjunto que encierra la imagen del camino cerrado). Por el lema 3.3.8 sabemos que

$$\int_{\gamma_i} \omega = 2\pi i \text{Res}_{p_i}(\omega).$$

Sea $D = X - \bigcup_i U_i$. Se tiene que $\partial D = -\sum_i \gamma_i$. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_i \text{Res}_{p_i}(\omega) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_i \int_{\gamma_i} \omega \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\sum_i \gamma_i} \omega \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial D} \omega \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos usado el corolario 3.3.6 del teorema de Stokes. ■

Como consecuencia directa de este teorema y del lema 3.3.10, podemos llegar al mismo resultado que en la proposición 2.4.13.

Corolario 3.3.12. Sea f una función meromorfa no constante en una superficie de Riemann compacta X , entonces

$$\sum_{p \in X} \text{ord}_p(f) = 0.$$

Veamos otro resultado consecuencia del teorema del residuo que nos será de utilidad más adelante:

Corolario 3.3.13. Sea ω una 1-forma meromorfa en una superficie de Riemann compacta X con un único polo. Entonces este polo no es un polo simple (es decir, tiene multiplicidad al menos 2).

Demostración. Sea p el único polo de ω . Supongamos que este es un polo simple. Por el teorema del residuo se tiene que $\text{Res}_p(\omega) = 0$, pero esto no es posible ya que el residuo de los polos simples es no nulo. ■

4 | Divisores

Vamos a presentar una herramienta fundamental en este trabajo, los divisores. Estos son una forma de organizar los ceros de funciones holomorfas y meromorfas. De manera similar a como se hace en [Mir95, cap. V], trataremos desde las nociones más básicas sobre divisores hasta sus espacios de funciones meromorfas asociados.

4.1 Generalidades

Definición 4.1.1. Sea X una superficie de Riemann. Llamamos **soporte** de una función $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$ al conjunto de puntos $p \in X$ donde $D(p) \neq 0$.

Observación 4.1.2. El conjunto de las funciones de X en \mathbb{Z} es un grupo con la operación suma punto a punto de funciones.

Definición 4.1.3. Un **divisor** en X es una función $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$ cuyo soporte es vacío o un conjunto discreto de X . Los divisores en X forman un grupo con la operación suma punto a punto de funciones. Lo denotaremos $\text{Div}(X)$. Sea $D \in \text{Div}(X)$, escribiremos D como

$$D = \sum_{p \in X} D(p) \cdot p.$$

Definición 4.1.4. Llamamos **grado** de un divisor D en una superficie de Riemann compacta a la suma de los valores de D :

$$\text{deg}(D) = \sum_{p \in X} D(p).$$

Observaciones 4.1.5. Esta suma es finita ya que X es una superficie de Riemann compacta, así la función grado, $\text{deg} : \text{div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, está bien definida y es un homomorfismo de grupos. Su núcleo es el subgrupo $\text{Div}_0(X)$ formado por los divisores en X de grado 0.

Divisores de una función meromorfa

| Definición 4.1.6. Sea X una superficie de Riemann y f una función meromorfa en X . Llamamos **divisor de f** y lo denotamos $\text{div}(f)$ al divisor definido por la función orden, es decir

$$\text{div}(f) = \sum_p \text{ord}_p(f) \cdot p.$$

| Definición 4.1.7. Cualquier divisor en X se dice **divisor principal** en X si es de la forma $\text{div}(f)$ con f una función meromorfa en X . Al conjunto de divisores principales de X lo denotaremos por $\text{PDiv}(X)$.

Gracias al lema 2.1.22 podemos deducir el siguiente resultado:

Lema 4.1.8. Sean f y g funciones meromorfas en X no nulas. Entonces:

- $\text{div}(fg) = \text{div}(f) + \text{div}(g)$.
- $\text{div}(f/g) = \text{div}(f) - \text{div}(g)$.
- $\text{div}(1/f) = -\text{div}(f)$.

Observación 4.1.9. Del lema anterior podemos afirmar que $\text{PDiv}(X)$ es un subgrupo de $\text{Div}(X)$. Es más, si X es una superficie de Riemann compacta y f una función meromorfa no nula en X , de la proposición 2.4.13 se tiene que $\text{deg}(\text{div}(f)) = 0$.

Ejemplo 4.1.10. Sea X la esfera de Riemann con coordenadas z en el plano complejo usual \mathbb{C} . Sea $f(z)$ una función racional. Como ya hemos visto, cualquier función racional puede ser escrita como

$$f(z) = c \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i)^{e_i}$$

donde los e_i son enteros y los λ_i son números complejos distintos entre sí. Entonces

$$\text{div}(f) = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \lambda_i - \left(\sum_{i=1}^n e_i \right) \cdot \infty.$$

| Definición 4.1.11. Sea X una superficie de Riemann y f una función meromorfa. Llamaremos **divisor de los ceros** de f , denotado por $\text{div}_0(f)$, al divisor

$$\text{div}_0(f) = \sum_{p \in X \text{ con } \text{ord}_p(f) > 0} \text{ord}_p(f) \cdot p.$$

De forma similar, llamamos **divisor de los polos** de f , $\text{div}_\infty(f)$, al divisor

$$\text{div}_\infty(f) = \sum_{p \in X \text{ con } \text{ord}_p(f) < 0} (-\text{ord}_p(f)) \cdot p.$$

Observación 4.1.12. Destacamos que ambos divisores son funciones no negativas, con soportes disjuntos y que satisfacen

$$\operatorname{div}(f) = \operatorname{div}_0(f) - \operatorname{div}_\infty(f). \quad (4.1)$$

Divisores de una 1-forma meromorfa

Definición 4.1.13. Sea X una superficie de Riemann y ω una 1-forma meromorfa en X que no es idénticamente nula. Definimos el **divisor de ω** , abreviado $\operatorname{div}(\omega)$, como el divisor definido por la función orden:

$$\operatorname{div}(\omega) = \sum_p \operatorname{ord}_p(\omega) \cdot p.$$

Cualquier divisor de esta forma será llamado **divisor canónico** en X . El conjunto de divisores canónicos en X se denota como $\operatorname{KDiv}(X)$.

Observación 4.1.14. Podemos definir $\operatorname{div}_0(\omega)$ y $\operatorname{div}_\infty(\omega)$ de forma análoga a como se hizo para funciones meromorfas.

Ejemplo 4.1.15. Sea $\omega = f(z)dz$ una 1-forma en la esfera de Riemann con f una función racional en z . Entonces, podemos escribir f como $f = c \cdot \sum_i (z - \lambda_i)^{e_i}$ y como ya vimos en el ejemplo 3.1.13 se tiene que

$$\operatorname{div}(\omega) = \sum_i e_i \lambda_i - (2 + \sum_i e_i) \cdot \infty.$$

En particular, toda 1-forma meromorfa en \mathbb{C}_∞ tiene grado -2 .

Lema 4.1.16. Sea f una función meromorfa y ω una 1-forma meromorfa en X . Se cumple que

$$\operatorname{div}(f\omega) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(\omega).$$

Demostración. Es consecuencia del corolario 3.2.3. ■

Lema 4.1.17. Sean ω_1 y ω_2 dos 1-formas meromorfas en una superficie de Riemann X , con ω_1 no idénticamente nula. Entonces existe una única función meromorfa f en X tal que $\omega_2 = f\omega_1$.

Demostración. Sea $\phi : U \rightarrow V$ una carta de X con coordenada local z . Así podemos escribir $\omega_i = g_i(z)dz$ con g_i una función meromorfa en V . Definimos $h = g_2/g_1$ como el cociente de ambas funciones. Se tiene que h es también una función meromorfa en

V y podemos definir $f = h \circ \phi$ que es una función meromorfa en U . Observamos f es la función deseada y se comprueba de forma similar a como se ha hecho en enunciados anteriores que f no depende de la elección de coordenadas. ■

De los dos lemas anteriores se obtiene el siguiente corolario:

Corolario 4.1.18. La diferencia entre dos divisores canónicos cualesquiera es un divisor principal.

Grado de un divisor canónico

Proposición 4.1.19. Sea X una superficie de Riemann compacta de género g . Si existe una función meromorfa definida en X no constante, entonces existe un divisor canónico en X de grado $2g - 2$.

Demostración. Supongamos que f es una función meromorfa no constante en X . Sea $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ la aplicación asociada a f . Supongamos que F tiene grado d . Por la fórmula de Hurwitz tenemos que

$$\sum_p [\text{mult}_p(F) - 1] = 2g - 2 + 2\text{deg}(F).$$

Consideremos la 1-forma meromorfa $\omega = dz$ definida en \mathbb{C}_∞ (ver ejemplo 3.1.13), que sabemos tiene un polo doble en ∞ y no tiene más polos ni ceros, por lo tanto $\text{deg}(\text{div}(\omega)) = -2$. Sea $\eta = F^*(\omega)$ la imagen inversa de ω en X . Entonces:

$$\begin{aligned} \text{deg}(\text{div}(\eta)) &= \sum_{p \in X} \text{ord}_p(\eta) \\ &= \sum_{p \in X} \text{ord}_p(F^*(\omega)) \\ &= \sum_{p \in X} [(1 + \text{ord}_{F(p)}(\omega)) \cdot \text{mult}_p(F) - 1] \\ &= \sum_{\substack{q \neq \infty \\ p \in F^{-1}(q)}} (\text{mult}_p(F) - 1) + \sum_{p \in F^{-1}(\infty)} (-\text{mult}_p(F) - 1) \\ &= \sum_{p \in X} (\text{mult}_p(F) - 1) - \sum_{p \in F^{-1}(\infty)} 2\text{mult}_p(F) \\ &= 2g - 2 + 2\text{deg}(F) - 2\text{deg}(F) \\ &= 2g - 2, \end{aligned}$$

donde hemos usado el lema 3.2.8, que el orden de w es cero salvo en ∞ , que es -2 , y la fórmula de Hurwitz (teorema 2.4.17). Hemos probado que el divisor canónico η tiene grado $2g - 2$. ■

Imagen inversa de un divisor

Definición 4.1.20. Sea $F : X \rightarrow Y$ un holomorfismo no constante entre dos superficies de Riemann y sea $q \in Y$. El **divisor imagen inversa** de F en q , denotado $F^*(q)$, es el divisor en X

$$F^*(q) = \sum_{p \in F^{-1}(q)} \text{mult}_p(F) \cdot p.$$

Observación 4.1.21. Si X e Y son compactas, el grado del divisor imagen inversa es independiente del punto q escogido y coincide con el grado de la aplicación F (ver proposición 2.4.8).

Definición 4.1.22. Sea $D = \sum_{q \in Y} n_q \cdot q$ un divisor de Y . Llamamos **imagen inversa** de D a X por F , abreviado $F^*(D)$ al divisor en X

$$F^*(D) = \sum_{q \in Y} n_q F^*(q).$$

Visto como una función tenemos que

$$F^*(D)(p) = \text{mult}_p(F) D(F(p)).$$

Lema 4.1.23. Sea $F : X \rightarrow Y$ un holomorfismo no constante entre superficies de Riemann, entonces:

- La imagen inversa nos proporciona un homomorfismo de grupos entre $\text{Div}(Y)$ y $\text{Div}(X)$.
- La imagen inversa de un divisor principal es principal. Es más, si f es una función meromorfa en Y , entonces $F^*(\text{div}(f)) = \text{div}(F^*(f)) = \text{div}(f \circ F)$.
- Si X e Y son compactas entonces

$$\deg(F^*(D)) = \deg(F) \deg(D).$$

Demostración. El primer apartado se tiene de la definición dada de imagen inversa de un divisor.

Para el segundo apartado, sea f una función meromorfa en Y , queremos probar que $F^*(\text{div}(f))$ es principal. Tomemos un punto p en X , sabemos que

$$\begin{aligned} F^*(\text{div}(f))(p) &= \text{mult}_p(F) \cdot \text{div}(f)(F(p)) \\ &= \text{mult}_p(F) \cdot \text{ord}_{F(p)}(f) \\ &= \text{ord}_p(f \circ F), \end{aligned}$$

donde hemos usado el lema 3.2.9.

En el último apartado si el soporte de D es un único punto, digamos q , se sigue de la definición:

$$\begin{aligned} \text{deg}(F^*(D)) &= \sum_{p \in F^{-1}(q)} \text{mult}_p(F) D(q) \\ &= D(q) \cdot \sum_{p \in F^{-1}(q)} \text{mult}_p(F) \\ &= \text{deg}(D) \text{deg}(F). \end{aligned}$$

Por linealidad en D se tiene en general. ■

Divisor de ramificación y divisor de rama

Definición 4.1.24. Sea $F : X \rightarrow Y$ un holomorfismo no constante entre dos superficies de Riemann. Definimos el **divisor de ramificación** de F , y lo denotamos R_F , como el divisor en X

$$R_F = \sum_{p \in X} [\text{mult}_p(F) - 1] \cdot p.$$

También definimos el **divisor de rama** de F , denotado B_F , como el divisor en Y

$$B_F = \sum_{y \in Y} \left[\sum_{p \in F^{-1}(y)} (\text{mult}_p(F) - 1) \right] \cdot y.$$

Observación 4.1.25. Si X e Y son compactas, ambas sumas son finitas y tienen el mismo grado. Por otro lado, los grados de estos divisores nos permiten escribir la fórmula de Hurwitz como sigue:

$$2g(X) - 2 = \text{deg}(F)(2g(Y) - 2) + \text{deg}(R_F).$$

Lema 4.1.26. Sea $F : X \rightarrow Y$ un holomorfismo no constante entre superficies de Riemann y sea ω una 1-forma meromorfa en Y , no idénticamente nula. Entonces

$$\operatorname{div}(F^*\omega) = F^*(\operatorname{div}(\omega)) + R_F.$$

Demostración. Sabemos que, fijado un punto p ,

$$F^*(\operatorname{div}(\omega))(p) = \operatorname{mult}_p(F) \cdot \operatorname{div}(\omega)(F(p)) = \operatorname{mult}_p(F) \operatorname{ord}_{F(p)}(\omega).$$

Por otro lado, aplicando el lema 3.2.8 tenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F^*\omega) &= \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(F^*\omega) \cdot p \\ &= \sum_{p \in X} [(1 + \operatorname{ord}_{F(p)}(\omega)) \cdot \operatorname{mult}_p(F) - 1] \cdot p \\ &= \sum_{p \in X} [(\operatorname{mult}_p(F) \cdot \operatorname{ord}_{F(p)}(\omega)) + (\operatorname{mult}_p(F) - 1)] \cdot p \\ &= F^*(\operatorname{div}(\omega)) + R_F \end{aligned}$$

■

Orden de los divisores

Sea X una superficie de Riemann. Vamos a dotar al conjunto de los divisores de X , $\operatorname{Div}(X)$, de un orden parcial:

Definición 4.1.27. Sea $D \in \operatorname{Div}(X)$. Diremos que $D \geq 0$ si $D(p) \geq 0$ para todo $p \in X$. Así, escribiremos $D > 0$ si $D \geq 0$ y $D \neq 0$. También podemos comparar dos divisores de X , sean D_1 y $D_2 \in \operatorname{Div}(X)$, entonces $D_1 \geq D_2$ si $D_1 - D_2 \geq 0$ y de manera similar podemos implementar $>$ así como \leq y $<$.

Observación 4.1.28. De esta forma, podemos descomponer un divisor D en su parte positiva y su parte negativa: $D = P - N$, donde P y N son divisores no negativos de soporte disjunto.

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata que también puede ser enunciado para 1-formas meromorfas.

Corolario 4.1.29. Si f es una función meromorfa en X , entonces f es holomorfa si y solo si $\operatorname{div}(f) \geq 0$.

4.2 Equivalencia lineal de divisores

Definición 4.2.1. Sea X una superficie de Riemann y sean D_1 y $D_2 \in \text{Div}(X)$. Decimos que son **linealmente equivalentes**, denotado por $D_1 \sim D_2$, si su diferencia es un divisor principal.

Lema 4.2.2. Sea X una superficie de Riemann. Entonces

- Un divisor es linealmente equivalente a 0 si y solo si es un divisor principal.
- Ser linealmente equivalentes es una relación de equivalencia en el conjunto $\text{Div}(X)$ de los divisores en X .
- Si X es compacta, entonces los divisores linealmente equivalentes tiene el mismo grado.

Demostración. La primera afirmación es inmediata, solo hay que tener en cuenta que $D - 0 = D$ siendo D un divisor en X .

Veamos (b). La propiedad reflexiva es inmediata. Supongamos que D_1, D_2 y D_3 son divisores en X tales que $D_1 \sim D_2$ y $D_2 \sim D_3$. Claramente $D_2 - D_1$ es principal. Se tiene que $D_1 \sim D_3$ ya que

$$D_1 - D_3 = D_1 - D_2 + D_2 - D_3$$

y esto por hipótesis es la suma de dos divisores principales.

Para el último apartado, gracias al lema 4.1.9 por ser X compacta sabemos que el grado de los divisores principales es nulo. Luego si $D_1 \sim D_2$, $\deg(D_1) - \deg(D_2) = 0$ lo que prueba el resultado. ■

Ejemplos 4.2.3. Podemos ver algunos ejemplos sencillos, sea X una superficie de Riemann:

- Si f es una función meromorfa en X no idénticamente nula, entonces por la ecuación (4.1) sabemos que $\text{div}_0(f) \sim \text{div}_\infty(f)$.
- Sea $X = \mathbb{C}_\infty$, entonces dos puntos cualesquiera p_1 y p_2 de X son linealmente equivalentes. Para ello, tomemos $p_2 \neq \infty$, entonces la siguiente función $f(z) = (z - p_1)/(z - p_2)$ es una función meromorfa tal que $\text{div}(f) = 1 \cdot p_1 - 1 \cdot p_2$. Si $p_2 = \infty$ consideramos $f(z) = z - p_1$.

El siguiente corolario será de gran importancia:

Corolario 4.2.4. Sea X una superficie de Riemann compacta de género g . Si existe una función meromorfa en X no constante entonces

$$\deg(\kappa) = 2g - 2$$

para todo divisor canónico κ en X .

Demostración. Gracias a la proposición 4.1.19 sabemos que existe un divisor canónico en X , η , de grado $2g - 2$. Utilizando el corolario 4.1.18, la diferencia entre dos divisores canónicos es un divisor principal luego $\eta \sim \kappa$ y gracias al apartado (c) del lema anterior se completa la prueba. ■

Multiplicidad de intersección

Definición 4.2.5. Sean C_1 y C_2 dos curvas proyectivas planas lisas definidas por los polinomios homogéneos e irreducibles F_1 y F_2 respectivamente, donde ambos polinomios no se dividen entre sí. Sea p un punto común a ambas. Llamamos **multiplicidad de intersección** de C_1 y C_2 en p , y lo denotamos $I_p(C_1, C_2)$, a la dimensión del anillo local en p de la intersección de C_1 y C_2 . Es decir:

$$I_p(C_1, C_2) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, p}}{\langle F_1, F_2 \rangle}.$$

Observación 4.2.6. Podemos relajar la definición anterior definiendo $I_p(C_1, C_2)$ como 0 si p no es un punto en la intersección de ambas curvas. En cualquier caso, la multiplicidad de intersección toma valores enteros.

Definición 4.2.7. Bajo las hipótesis anteriores, podemos definir el **divisor de intersección** de las curvas C_1 y C_2 como

$$I(C_1, C_2) = \sum_{p \in \mathbb{P}^2} I_p(C_1, C_2) \cdot p$$

Lema 4.2.8. El divisor de intersección es efectivamente un divisor bien definido de grado $\deg(F_1) \cdot \deg(F_2)$.

Demostración. Como los polinomios F_1 y F_2 no se dividen entre sí y son irreducibles, sus respectivas curvas no tienen componentes en común. Sean n_1 y n_2 el grado de dichos polinomios. El teorema de Bézout (ver teorema A.0.3) nos asegura que las curvas C_1 y C_2 se cortan en exactamente $n_1 \cdot n_2$ puntos (contados de acuerdo a su multiplicidad) y podemos afirmar que el soporte es finito. ■

Si queremos hacer hincapié en el polinomio homogéneo que define una de las curvas, podemos definir el divisor de intersección como sigue:

| Definición 4.2.9. Sean C_1 y C_2 dos curvas proyectivas planas lisas donde C_2 es el lugar de los ceros de un polinomio homogéneo G . Llamaremos **divisor de intersección** de G en C_1 , $\text{div}(G)$, al divisor de intersección de C_1 y C_2 .

Fórmula de Plücker

En esta breve sección vamos a enunciar y demostrar la fórmula de Plücker, para ello necesitamos el siguiente lema:

Lema 4.2.10. Sea C una curva proyectiva plana lisa definida por el polinomio homogéneo $F(x, y, z) = 0$. Consideramos ahora la aplicación $\pi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ definida como $\pi[x : y : z] = [x : z]$. Entonces el divisor de intersección definido por la función meromorfa $\partial F / \partial y$ en C es exactamente el divisor de ramificación R_π de π :

$$\text{div}(\partial F / \partial y) = R_\pi.$$

Demostración. Recordemos que gracias al lema 2.4.6, $p \in C$ es un punto de ramificación si y solo si $(\partial F / \partial y)(p) = 0$. Es decir, ambos divisores tienen el mismo soporte.

Vamos a probar el lema para el conjunto abierto $z \neq 0$, en los otros dos abiertos el razonamiento es similar. En este caso, X es isomorfo a la curva afín plana definida por $f(x, y) = F(x, y, 1) = 0$, es más, la restricción de π al plano afín es la aplicación proyección de (x, y) en x . Sea $p = (x_0, y_0)$ un punto de ramificación de π y por lo tanto un cero de $\partial f / \partial y$. De aquí deducimos que $\partial f / \partial x$ es distinto de cero en p ya que X es lisa, así, por el teorema de la función implícita, en un entorno de p se tiene que X es localmente el grafo de una función holomorfa $g(y)$. De esta manera $f(g(y), y)$ es exactamente cero en un entorno de y_0 . Derivamos respecto de y obteniendo que

$$\frac{\partial f}{\partial x} g'(y) + \frac{\partial f}{\partial y}$$

es idénticamente nulo en X cerca de p , luego

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial x} g'(y)$$

cerca de p .

Ahora, $g(y)$ es precisamente la lectura en coordenadas de la proyección π . En consecuencia, el orden de $g(y)$ es la multiplicidad de π y el orden de $g'(y)$ es uno

menos que dicha multiplicidad. Como $(\partial f/\partial x) \neq 0$ en p , el orden de $g'(y)$ es el mismo que el orden de $\partial f/\partial y$. Así pues

$$\text{ord}_p\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \text{mult}_p(\pi) - 1.$$

El número de la izquierda es el valor del divisor de intersección $\text{div}(\partial F/\partial y)$ en p mientras que a la derecha tenemos el valor del divisor de ramificación R_π en p . ■

Proposición 4.2.11 (Fórmula de Plücker). Una curva proyectiva plana lisa de grado d tiene género $g = (d-1)(d-2)/2$.

Demostración. Sea C una curva proyectiva plana lisa de grado d , definida por el polinomio homogéneo F . Consideremos el holomorfismo π anterior. Esta aplicación tiene grado d y por el lema anterior su divisor de ramificación es igual al divisor de intersección de $(\partial F/\partial y)$. Por el teorema de Bézout esta intersección tiene $d(d-1)$ puntos, entonces por la fórmula de Hurwitz y teniendo en cuenta que el género de \mathbb{P}^1 es cero (ver 2.3.7) se tiene que

$$2g - 2 = d(-2) + d(d-1)$$

para g el género de X . Trabajando esta expresión llegamos a que

$$g = (d-1)(d-2)/2.$$

■

4.3 Espacios de funciones y formas asociadas a los divisores

En esta sección nuestro objetivo es caracterizar las funciones meromorfas usando divisores, para ello usaremos la función orden. Por conveniencia, diremos que si una función es idénticamente nula en un entorno de un punto p , esta tendrá orden ∞ en p .

El espacio $\mathcal{L}(D)$

| Definición 4.3.1. Sea D un divisor en una superficie de Riemann X . Llamaremos **espacio de funciones meromorfas con polos acotados por D** , denotado por $\mathcal{L}(D)$, al conjunto

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) \mid \text{div}(f) \geq -D\}.$$

Observaciones 4.3.2. De esta definición podemos deducir algunos hechos relevantes:

- Primero interpretemos la definición. Supongamos que $D(p) = n > 0$, así si $f \in \mathcal{L}(D)$ se tiene que $\text{ord}_p(f) \geq -n$, es decir, a lo sumo f tiene un polo en p de orden n . Si $D(p) = -n < 0$ entonces para que f esté en $\mathcal{L}(D)$ debe tener un cero de orden n en el peor de los casos.
- $\mathcal{L}(D)$ es un espacio vectorial complejo. Llamaremos $l(D)$ a su dimensión.
- Si $D_1 \leq D_2$, se tiene que $D_1(p) \leq D_2(p)$ para todo p , luego $\mathcal{L}(D_1) \subseteq \mathcal{L}(D_2)$
- Sabemos que una función meromorfa es holomorfa si y solo si $\text{div}(f) \geq 0$, luego

$$\mathcal{L}(0) = \mathcal{O}(X) = \{ \text{funciones holomorfas en } X \}.$$

En particular, si X es compacta entonces

$$\mathcal{L}(0) = \{ \text{funciones constantes en } X \} \cong \mathbb{C}$$

Lema 4.3.3. Sea X una superficie de Riemann compacta. Si D es un divisor en X con $\text{deg}(D) < 0$, entonces $\mathcal{L}(D) = \{0\}$

Demostración. Por reducción al absurdo, sea $f \in \mathcal{L}(D)$ y f no idénticamente nula. Consideremos el divisor $E = \text{div}(f) + D$. Teniendo en cuenta que $f \in \mathcal{L}(D)$, es una simple comprobación ver que $E \geq 0$ y por lo tanto $\text{deg}(E) \geq 0$. Sin embargo, sabemos que $\text{deg}(\text{div}(f)) = 0$ de donde se deduce que $\text{deg}(E) = \text{deg}(D) < 0$ lo cual contradice lo anterior. ■

En una sección anterior presentamos el concepto de divisores linealmente equivalentes. Esto nos será de utilidad ya que si $D_1 \sim D_2$ entonces sus espacios de funciones meromorfas serán isomorfos.

Proposición 4.3.4. Sean D_1 y D_2 dos divisores linealmente equivalentes en una superficie de Riemann X . Sabemos que $D_1 = D_2 + \text{div}(h)$ con h una cierta función meromorfa no nula. Entonces, la multiplicación por h da un isomorfismo de espacios vectoriales complejos:

$$\begin{aligned} \mu_h : \mathcal{L}(D_1) &\xrightarrow{\cong} \mathcal{L}(D_2) \\ f &\mapsto hf. \end{aligned}$$

Demostración. Veamos que μ_h está bien definida. Sea $f \in \mathcal{L}(D_1)$, es decir, se tiene que $\text{div}(f) \geq -D_1$. Teniendo en cuenta el lema 4.1.8:

$$\text{div}(hf) = \text{div}(h) + \text{div}(f) \geq \text{div}(h) - D_1 = -D_2,$$

así pues la función $hf = \mu_h(f)$ está en $\mathcal{L}(D_2)$. Por lo tanto, μ_h envía $\mathcal{L}(D_1)$ en $\mathcal{L}(D_2)$.

Por la definición dada se observa que es lineal y por simetría $\mu_{1/h}$ envía $\mathcal{L}(D_2)$ en $\mathcal{L}(D_1)$, siendo inversas una de la otra. Concluimos que μ_h es un isomorfismo. ■

El espacio $\mathcal{L}^{(1)}(D)$

De forma similar a como hemos definido el espacio de funciones con polos acotados por un divisor podemos definir espacios de 1-formas meromorfas.

Definición 4.3.5. Sea D un divisor en una superficie de Riemann X . Llamaremos **espacio de 1-formas meromorfas con polos acotados por D** , denotado $\mathcal{L}^{(1)}(D)$, al conjunto de 1-formas meromorfas

$$\mathcal{L}^{(1)}(D) = \{\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) \mid \text{div}(\omega) \geq -D\}.$$

Observaciones 4.3.6. De nuevo, recalcamos un par de hechos:

- $\mathcal{L}^{(1)}(D)$ es un \mathbb{C} -espacio vectorial y llamamos $l(D)$ a su dimensión.
- $\mathcal{L}^{(1)}(0)$ es el espacio de las 1-formas holomorfas en X .

Igual que para el caso de funciones meromorfas podemos probar la siguiente proposición:

Proposición 4.3.7. Sean D_1 y D_2 dos divisores de X linealmente equivalentes, es decir, $D_1 = D_2 + \text{div}(h)$ con h una cierta 1-forma meromorfa. Entonces, la multiplicación por h da un isomorfismo entre espacios vectoriales

$$\begin{aligned} \mu_h : \mathcal{L}^{(1)}(D_1) &\xrightarrow{\cong} \mathcal{L}^{(1)}(D_2) \\ f &\mapsto hf. \end{aligned}$$

Isomorfismos entre $\mathcal{L}^{(1)}(D)$ y $\mathcal{L}(D + \kappa)$

Lema 4.3.8. Sea $\kappa = \text{div}(\omega)$ un divisor canónico en una superficie de Riemann X y D un divisor en X . Entonces, la aplicación

$$\begin{aligned} \mu_\omega : \mathcal{L}(D + \kappa) &\rightarrow \mathcal{L}^{(1)}(D) \\ f &\mapsto f\omega. \end{aligned}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración. Comprobemos que μ_ω está bien definida. Sea $f \in \mathcal{L}(D + \kappa)$, luego $\text{div}(f) + D + \kappa \geq 0$. Por el lema 4.1.16 sabemos que la 1-forma $f\omega$ satisface que $\text{div}(f\omega) = \text{div}(f) + \text{div}(\omega) = \text{div}(f) + \kappa$. Así pues, $\text{div}(f\omega) + D = \text{div}(f) + \kappa + D \geq 0$ y $f\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(D)$.

Por otro lado, se observa que es claramente lineal e inyectiva. Demostremos que es sobreyectiva. Para ello, escojamos una 1-forma $\omega' \in \mathcal{L}^{(1)}(D)$. Por el lema 4.1.17, existe una función meromorfa f tal que $\omega' = f\omega$. Entonces

$$\operatorname{div}(f) + D + \kappa = \operatorname{div}(f) + D + \operatorname{div}(\omega) = \operatorname{div}(f\omega) + D = \operatorname{div}(\omega') + D \geq 0,$$

luego $f \in \mathcal{L}(D + \kappa)$ y se satisface que $\mu_\omega(f) = \omega'$. ■

$\mathcal{L}(D)$ en la esfera de Riemann

Sea D un divisor en la esfera de Riemann con grado no negativo,

$$D = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \lambda_i + e_\infty \cdot \infty$$

con los $\lambda_i \in \mathbb{C}$ distintos entre sí. Como $\deg(D) \geq 0$, $\sum_i e_i + e_\infty \geq 0$. Consideramos la función

$$f_D(z) = \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i)^{-e_i}.$$

Proposición 4.3.9. Con la notación anterior, el espacio $\mathcal{L}(D)$ es exactamente el espacio

$$\mathcal{L}(D) = \{g(z)f_D(z) \mid g(z) \text{ es un polinomio de grado a lo sumo } \deg(D)\}.$$

Demostración. Realizaremos la prueba por doble contención.

Sea $g(z)$ un polinomio de grado $d \leq \deg(D)$. Observemos que el orden de g es 0 salvo en d puntos (contados de acuerdo a su multiplicidad), luego cumple la siguiente relación: $\operatorname{div}(g) \geq -d \cdot \infty$ (el término derecho de la igualdad es el divisor nulo salvo en ∞ , que toma el valor $-d$).

Por otro lado, el divisor asociado a f_D es

$$\operatorname{div}(f_D) = \sum_i -e_i \cdot \lambda_i + \left(\sum_i e_i\right) \cdot \infty$$

y se verifica que

$$\operatorname{div}(f_D) + D = \left(\sum_i e_i + e_\infty\right) \cdot \infty.$$

Teniendo esto en cuenta

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(g(z)f_D(z)) + D &= \operatorname{div}(g) + \operatorname{div}(f_D) + D \\ &\geq \left(\sum_i e_i + e_\infty - d \right) \cdot \infty \\ &= (\operatorname{deg}(D) - d) \cdot \infty \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Esto prueba que el espacio dado es un subespacio de $\mathcal{L}(D)$.

Veamos la otra inclusión. Sea $h \in \mathcal{L}(D)$ y sea $g = h/f_D$. Tenemos que

$$\operatorname{div}(g) = \operatorname{div}(h) - \operatorname{div}(f_D) \geq -D - \operatorname{div}(f_D) = \left(- \sum_i e_i - e_\infty \right) \cdot \infty = -\operatorname{deg}(D) \cdot \infty,$$

esto nos dice que g no tiene polos en \mathbb{C} y que a lo sumo puede tener un polo en ∞ de orden $\operatorname{deg}(D)$. Concluimos que g es un polinomio de grado como mucho $\operatorname{deg}(D)$. Esto finaliza la prueba. ■

Gracias a la proposición anterior, podemos deducir la dimensión del espacio $\mathcal{L}(D)$:

Corolario 4.3.10. Sea D un divisor en la esfera de Riemann. Se cumple que

$$l(D) = \dim \mathcal{L}(D) = \begin{cases} 0 & \text{si } \operatorname{deg}(D) < 0, \text{ y} \\ 1 + \operatorname{deg}(D) & \text{si } \operatorname{deg}(D) \geq 0. \end{cases}$$

Demostración. Si $\operatorname{deg}(D) < 0$ entonces $\mathcal{L}(D) = \{0\}$ por el lema 4.3.3. En caso contrario, $\mathcal{L}(D)$ tiene la misma dimensión que el espacio vectorial generado por los polinomios de grado menor o igual que $\operatorname{deg}(D)$, es decir, $\operatorname{deg}(D) + 1$. ■

Cota en la dimensión de $\mathcal{L}(D)$

Lema 4.3.11. Sea X una superficie de Riemann, D un divisor en X y p un punto de X . Se cumple que $\mathcal{L}(D - p) = \mathcal{L}(D)$ o $\mathcal{L}(D - p)$ tiene codimensión uno como subespacio de $\mathcal{L}(D)$ (entendemos p como el divisor nulo excepto en p , que vale uno).

Demostración. Escojamos una coordenada local z centrada en p y sea $n = -D(p)$. Así, toda función $f \in \mathcal{L}(D)$ tiene como serie de Laurent en p una de la forma $\sum_{i=n} c_i z^i$.

(Esto se tiene ya que f tiene en p orden mayor o igual que n . Ojo, c_n puede ser nulo.)
Definimos una aplicación

$$\begin{aligned}\alpha : \mathcal{L}(D) &\rightarrow \mathbb{C} \\ f &\mapsto c_n\end{aligned}$$

(siendo c_n el respectivo coeficiente en el desarrollo de Laurent para cada $f \in \mathcal{L}(D)$).

Es fácil ver que α es una aplicación lineal cuyo núcleo es $\mathcal{L}(D - p)$. Si α es la aplicación idénticamente nula se satisface que $\mathcal{L}(D - p) = \mathcal{L}(D)$, en caso contrario, α es sobreyectiva y podemos aplicar el primer teorema de isomorfía para concluir que $\mathcal{L}(D - p)$ tiene codimensión uno. ■

Proposición 4.3.12. Sea X una superficie de Riemann compacta y sea D un divisor en X . Entonces si expresamos D como $D = P - N$ con P y N divisores no negativos con soportes disjuntos se satisface que $l(D) \leq 1 + \deg(P)$.

Demostración. Lo probaremos por inducción en el grado de la parte positiva P de D . Si P tiene grado cero podemos afirmar que $P = 0$ (P es no negativo, ver observación 4.1.28). Al ser X una superficie de Riemann compacta la observación 4.3.2 nos dice que $\mathcal{L}(0) \cong \mathbb{C}$, luego $\mathcal{L}(P)$ tiene dimensión uno. Por construcción $D \leq P$ entonces $\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{L}(P)$ y $l(D) \leq l(P) = 1 = 1 + \deg(P)$.

Supongamos el resultado cierto para divisores cuya parte positiva tiene grado $k-1$ y lo probamos para divisores cuya parte positiva tiene grado k . Sea D un divisor de esta forma, $D = P - N$ con $\deg(P) = k$. Escojamos un punto p en el soporte de P tal que $P(p) \geq 1$ (siempre podemos encontrar uno ya que si no estaríamos en el caso anterior) y consideremos el divisor $D - p$ cuya parte positiva es $P - p$ con grado $k-1$. Por la hipótesis de inducción, $l(D - p) \leq \deg(P - p) + 1 = \deg(P)$ y aplicando el lema anterior $l(D) \leq 1 + l(D - p)$. Esto prueba que $l(D) \leq \deg(P) + 1$. ■

Corolario 4.3.13. Sea X una superficie de Riemann compacta y D un divisor en X . Entonces $\mathcal{L}(D)$ es un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión finita.

Gracias al lema 4.3.8 podemos llevar este resultado a los espacios $\mathcal{L}^{(1)}(D)$.

Corolario 4.3.14. Sea X una superficie de Riemann compacta. Para todo divisor D en X , el espacio $\mathcal{L}^{(1)}(D)$ tiene dimensión finita.

Estos dos últimos resultados juegan un papel fundamental a la hora de definir los espacios de cohomologías de una superficie de Riemann compacta ya que nos aseguran que estos son de dimensión finita. Por desgracia, este fascinante tema se desvía mucho del objetivo de este trabajo.

5 | El teorema de Riemann-Roch

A lo largo del trabajo hemos ido presentando los conceptos necesarios para comprender el teorema de Riemann-Roch. Lo enunciaremos:

| Teorema 5.0.1 (Teorema de Riemann-Roch). Sea D un divisor en una curva proyectiva plana lisa C de género g y sea κ un divisor canónico en C , entonces

$$l(D) - l(\kappa - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Para probar este teorema necesitamos algunos resultados más específicos. Estos están tomados de [Kir92, sec VI.3].

El teorema de Riemann-Roch es cierto en general para cualquier superficie de Riemann compacta, pero su demostración usa técnicas que exceden el alcance de este proyecto.

5.1 Resultados previos

A partir de ahora, C será una curva plana proyectiva lisa, definida por un polinomio homogéneo F de grado d y género g .

Lema 5.1.1. Sean H el divisor de intersección de C y una recta $L \in \mathbb{P}^2$ definida por un polinomio homogéneo $R(x, y, z)$, D un divisor cualquiera en C y m_0 un entero positivo, entonces existe $m \geq m_0$ y puntos p_1, \dots, p_k de C (no necesariamente distintos) tales que

$$D + p_1 + \dots + p_k \sim mH$$

Demostración. Consideremos D como $\sum_{p \in C} n_p \cdot p$ donde $n_p = D(p)$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $D \geq 0$ y $\deg(D) \geq m_0$, en caso contrario añadimos

puntos a D de forma que $n_p \geq 0$ para todo $p \in C$ y que $\deg(D) \geq m_0$. Teniendo en cuenta que el soporte de D es discreto, sabemos que hay una cantidad finita de puntos $p \in C$ tales que $n_p > 0$. Así, para todos estos puntos podemos considerar la recta L_p cuyos puntos de intersección con C son

$$q_1^{(p)} = p, q_2^{(p)}, \dots, q_d^{(p)}$$

(hay exactamente d por el teorema de Bézout, pudiendo estar repetidos).

Añadimos n_p veces esta cantidad finita de puntos a D obteniendo

$$\begin{aligned} D + p_1 + \dots + p_k &= \sum_{p \in C} n_p p + \sum_{p \in C} n_p \sum_{i=2}^d q_i^{(p)} \\ &= \sum_{p \in C} n_p \sum_{i=1}^d q_i^{(p)} \\ &= \sum_{p \in C} n_p \sum_{q \in L_p \cap C} I_q(C, L_p) \cdot q \\ &= \sum_{p \in C} n_p H_p \end{aligned}$$

Por otro lado, $H_p \sim H_q$ ya que su diferencia viene dada por el divisor de la función meromorfa dada por el cociente de los polinomios que definen ambas rectas. De esta forma, $H_p \sim H$ para todo $p \in C$. Luego

$$\sum_{p \in C} n_p H_p \sim \sum_{p \in C} n_p H = mH$$

donde $m = \deg(D) \geq m_0$. ■

Lema 5.1.2. Sea D un divisor en C , κ un divisor canónico y p un punto de C . Se tiene que

$$0 \leq l(D + p) - l(\kappa - D - p) - l(D) + l(\kappa - D) \leq 1.$$

Demostración. Aplicamos el lema 4.3.11 a los divisores $\kappa - D$ y $\kappa - D - p$, obtenemos que $\mathcal{L}(\kappa - D) = \mathcal{L}(\kappa - D - p)$ o que $\mathcal{L}(\kappa - D - p)$ es un subespacio de codimensión uno de $\mathcal{L}(\kappa - D)$. En ambos casos se tiene que

$$0 \leq l(\kappa - D) - l(\kappa - D - p) \leq 1.$$

Por otro lado y de forma completamente similar llegamos a que

$$0 \leq l(D + p) - l(D) \leq 1.$$

Para demostrar el resultado hay que probar que ambas diferencias no son uno simultáneamente. Supongamos que sí, entonces existen funciones f y g en C tales que $\text{div}(g) + \kappa - D \geq 0$ y $\text{div}(f) + D + p \geq 0$ dándose la igualdad en p . Manipulando ambas ecuaciones observamos que

$$\text{div}(f) + \text{div}(g) + \kappa \geq -p.$$

Luego si ω es la 1-forma meromorfa que define κ , se tiene que la 1-forma meromorfa, $f g \omega$ en C satisface

$$\text{div}(f g \omega) = \text{div}(f) + \text{div}(g) + \kappa \geq -p$$

con un único polo (de orden uno) en p . Esto entra en contradicción con el corolario 3.3.13. ■

Lema 5.1.3. Sean D un divisor de C , κ un divisor canónico y H el divisor de intersección de C y una recta $L \in \mathbb{P}^2$ definida por un polinomio lineal homogéneo $R(x, y, z)$. Entonces

$$l(mH) - l(\kappa - mH) \geq \text{deg}(mH) + 1 - g$$

para m un entero positivo lo suficientemente grande.

Demostración. Sabemos por el teorema de Bézout que el grado de H es d . Así, para cualquier entero positivo m se tiene que

$$\text{deg}(\kappa - mH) = \text{deg}(\kappa) - md.$$

Si consideramos un m suficientemente grande este grado es negativo, por lo tanto $l(\kappa - mH) = 0$ gracias al lema 4.3.3.

Por otro lado, consideremos un polinomio homogéneo $Q(x, y, z)$ de grado m . El cociente

$$\frac{Q(x, y, z)}{R(x, y, z)^m}$$

define una función, f , meromorfa en C tal que

$$\text{div}(f) + mH \geq 0,$$

es decir, $\text{div}(f) \in \mathcal{L}(mH)$ (esto se debe a que los polos de f son puntos de corte entre C y L) y de esta forma el espacio $\mathcal{L}(mH)$ tiene al menos la misma dimensión que el espacio de las funciones meromorfas $\text{div}(f)$, con f de la forma anterior.

Dado otro polinomio homogéneo $Q'(x, y, z)$, de grado m , este define la misma función en C que Q si y solo si su diferencia es nula en C , o lo que es lo mismo,

$Q - Q'$ es divisible por F . Teniendo esto en cuenta denotamos $\mathbb{C}_k[x, y, z]$ al espacio de polinomios homogéneos de grado k en dichas variables, así:

$$\begin{aligned}
 l(mH) &\geq \dim (\mathbb{C}_m[x, y, z] / (\langle F \rangle \cap \mathbb{C}_m[x, y, z])) \\
 &= \dim (\mathbb{C}_m[x, y, z]) - \dim (\mathbb{C}_{m-d}[x, y, z]) \\
 &= \frac{1}{2}(m+1)(m+2) - \frac{1}{2}(m-d+1)(m-d+2) \\
 &= md + \frac{1}{2}d(3-d) \\
 &= md + 1 - g,
 \end{aligned}$$

donde hemos usado que la dimensión de $\mathbb{C}_k[x, y, z]$ es $(k+1)(k+2)/2$ (es fácil verlo con un argumento combinatorio) y en la última igualdad se ha usado la fórmula de Plücker (proposición 4.2.11). Ahora, teniendo en cuenta que $\deg(mH) = md$ y que $l(\kappa - mH) = 0$ se sigue el resultado. ■

Corolario 5.1.4 (Teorema de Riemann). Si D es un divisor en C y κ un divisor canónico, entonces

$$l(D) - l(\kappa - D) \geq \deg(D) - g + 1.$$

Demostración. Como hemos visto en el lema anterior, sabemos que existe un m_0 tal que si $m \geq m_0$ se tiene que

$$l(mH) - l(\kappa - mH) \geq \deg(mH) + 1 - g. \quad (5.1)$$

Por el lema 5.1.1 podemos escoger un $m \geq m_0$ y puntos p_1, \dots, p_k en C que satisfagan

$$D + p_1 + \dots + p_k \sim mH$$

y como dos divisores equivalentes tienen el mismo grado

$$\deg(mH) = \deg(D + p_1 + \dots + p_k) = \deg(D) + k. \quad (5.2)$$

Además, dos divisores equivalentes tienen el mismo espacio de funciones meromorfas asociadas, así

$$l(mH) - l(\kappa - mH) = l(D + p_1 + \dots + p_k) - l(\kappa - D - p_1 - \dots - p_k). \quad (5.3)$$

Usando el lema 5.1.2 y por inducción en k llegamos a que

$$l(D + p_1 + \dots + p_k) - l(\kappa - D - p_1 - \dots - p_k) - l(D) + l(\kappa - D) \leq k,$$

es decir,

$$l(D) - l(\kappa - D) \geq l(D + p_1 + \dots + p_k) - l(\kappa - D - p_1 - \dots - p_k) - k.$$

Ahora usando en este orden las ecuaciones (5.3), (5.1) y (5.2) concluimos que

$$\begin{aligned} l(D) - l(\kappa - D) &\geq l(mH) - l(\kappa - mH) - k \\ &\geq \deg(mH) - g + 1 - k \\ &= \deg(D) - g + 1, \end{aligned}$$

como queríamos probar. ■

5.2 Prueba del teorema y algunas consecuencias

Ahora sí estamos en posición de probar el teorema de Riemann-Roch para curvas proyectivas planas lisas.

Demostración. Dados un divisor cualquiera D y un divisor canónico κ en C , por la proposición 4.2.4 se tiene que

$$\deg(\kappa) = 2g - 2$$

(basta considerar como función meromorfa el cociente de dos polinomios que definan dos rectas distintas en C). Usando el teorema de Riemann con D y con $\kappa - D$ tenemos que

$$l(D) - l(\kappa - D) \geq \deg(D) - g + 1$$

y

$$\begin{aligned} l(\kappa - D) - l(D) &\geq \deg(\kappa - D) - g + 1 \\ &= 2g - 2 - \deg(D) - g + 1 \\ &= -\deg(D) + g - 1. \end{aligned}$$

En resumen,

$$\deg(D) - g + 1 \geq l(D) - l(\kappa - D) \geq \deg(D) - g + 1$$

luego

$$l(D) - l(\kappa - D) = \deg(D) - g + 1.$$

■

Corolarios

Gracias al teorema de Riemann-Roch podemos dar una definición alternativa del género de una curva proyectiva plana lisa:

Corolario 5.2.1. El género de una curva proyectiva plana lisa C es igual a la dimensión del espacio vectorial de las 1-formas holomorfas en C .

Demostración. Tomando $D = 0$ en el teorema de Riemann-Roch obtenemos que

$$l(0) - l(\kappa) = 1 - g.$$

Sabemos que $l(0)$ es la dimensión del espacio vectorial de las funciones holomorfas en C que por la observación 4.3.2 tiene dimensión 1. Así pues

$$l(\kappa) = g$$

donde $l(\kappa)$ es la dimensión de $\mathcal{L}(\kappa)$, que por el lema 4.3.8 (de nuevo, $D = 0$) es isomorfo a $\mathcal{L}^{(1)}(0)$, o lo que es lo mismo, el espacio de todas las 1-formas holomorfas en C . ■

Observación 5.2.2. De esta forma hemos caracterizado el género de una curva proyectiva plana lisa de tres formas equivalentes: como superficie topológica (género topológico), mediante la fórmula de Plücker y gracias al teorema de Riemann-Roch (género geométrico). Se conoce al menos una noción más de género, el género aritmético, pero este escapa del alcance de este trabajo.

Corolario 5.2.3. Toda función meromorfa en una curva proyectiva plana lisa es una función racional.

Demostración. Como hemos visto con anterioridad, sabemos que existe una 1-forma meromorfa κ definida en C . El teorema de Riemann-Roch nos dice que la desigualdad del lema 5.1.3 es exactamente una igualdad, por lo tanto el espacio de funciones meromorfas $\mathcal{L}(mH)$ tiene la misma dimensión que el espacio de las posibles funciones f definidas en dicho lema. Gracias a que $\text{div}(f) \in \mathcal{L}(mH)$ podemos asegurar que ambos espacios son iguales.

Ahora, consideremos una función meromorfa f en C tal que

$$\text{div}(f) + mH \geq 0.$$

Así, esta función está contenida en el espacio de funciones meromorfas acotadas por mH , es decir, $f \in \mathcal{L}(mH)$ y por tanto f es de la forma

$$\frac{Q(x, y, z)}{R(x, y, z)^m}$$

para cierto polinomio $Q(x, y, z) \in C_m[x, y, z]$.

Este mismo argumento se puede repetir cambiando las hipótesis del lema 5.1.3 de forma que si L_1, \dots, L_m son rectas en \mathbb{P}^2 y H_j sus correspondientes divisores de intersección con C , entonces si m es lo suficientemente grande toda función f meromorfa en C que cumpla

$$\operatorname{div}(f) + H_1 + \dots + H_m \geq 0 \quad (5.4)$$

es racional. Nos basta probar que toda función meromorfa en C satisface (5.4) para ciertos H_1, \dots, H_m . Para ello, sea f una función meromorfa en C y sea $p \in C$ un polo de f . Consideramos una recta, L_p , que pase por este polo y sea H_p el divisor de intersección de L_p y C . Sabemos que $H_p \geq 0$ (siendo la desigualdad estricta en p) luego sumando un número finito de veces este divisor obtenemos que

$$\operatorname{ord}_p(f) + H_p(p) + \dots + H_p(p) \geq 0.$$

Ya que f tiene un número finito de polos, repetimos este proceso en cada uno de ellos obteniendo unos H_1, \dots, H_m que satisfacen la ecuación (5.4), concluyendo así que f es una función racional. ■

Corolario 5.2.4. Toda curva proyectiva plana lisa C de género 0 es isomorfa a la esfera de Riemann.

Demostración. Fijemos un punto $p \in C$. Sabemos que existe un divisor canónico κ de grado $2g - 2 = -2$. Vamos a aplicar el teorema de Riemann-Roch donde D es el divisor asociado al punto p :

$$l(D) - l(\kappa - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Como el divisor $\kappa - p$ tiene grado -3 se tiene que $0 = \mathcal{L}(\kappa - p) = \mathcal{L}(\kappa - D)$. Así

$$l(D) = 1 + 1 - 0 = 2.$$

De aquí deducimos que existe una función meromorfa no constante f en $\mathcal{L}(D)$. Esta función f solo tiene un polo en p que además es simple. La proposición 2.4.12 nos afirma que C es isomorfa a \mathbb{C}_∞ . ■

Observación 5.2.5. En general, se puede demostrar que toda superficie de Riemann X compacta tiene una función meromorfa no trivial. Para ello, consideramos el divisor $D = (g + 1)p$. Por el teorema de Riemann (para superficies de Riemann compactas)

$$l(D) \geq \deg(D) + 1 - g = 2,$$

y razonando como antes vemos que existe una función meromorfa no trivial en X .

Otro gran resultado sobre superficies de Riemann compactas es la equivalencia de categorías entre estas (junto con los holomorfismos entre ellas) y las curvas algebraicas sobre \mathbb{C} (con las aplicaciones racionales entre sí). A su vez, ambas categorías son equivalentes a las extensiones de \mathbb{C} de grado de trascendencia uno con los homomorfismos entre ellas. Estas importantes afirmaciones desafortunadamente no pueden ser tratadas con el rigor que merecen en este trabajo debido a la complejidad que conllevan. Se pueden encontrar detalladas en [Mir95, cap. VI] y en [DD20, sec. VI.3].

A | Apéndice

En este breve apéndice enunciaremos resultados que ya hemos visto a lo largo de la carrera y que hemos utilizado en este trabajo o de los que se deduce algún otro resultado necesario en este proyecto.

Resultados de geometría algebraica

Los siguientes resultados se pueden encontrar en [Rei95] y [Har97].

| Teorema A.0.1 (Hilbert's Nullstellensatz). Supongamos que K es un cuerpo algebraicamente cerrado y sea $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ un ideal. Entonces $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$.

Proposición A.0.2. El conjunto de puntos regulares de una variedad cuasi-proyectiva es abierto en la topología de Zariski.

| Teorema A.0.3 (Teorema de Bézout). Sean C_1 y C_2 dos curvas proyectivas planas sin componentes en común de grado n_1 y n_2 respectivamente. Se satisface que estas curvas se cortan en $n_1 \cdot n_2$ puntos contados de acuerdo a su multiplicidad.

Resultados de geometría y topología

Proposición A.0.4. Toda región regular admite una triangulación.

Proposición A.0.5. Dada una región regular R , la característica de Euler-Poincaré de cualquier triangulación de no depende de la triangulación.

Para ver estos resultados en detalle, consultar [Mun97].

Bibliografía

- [Apo90] Tom M. Apostol, *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 41, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [DD20] Régine Douady and Adrien Douady, *Algebra and Galois theories*, Springer, Cham, 2020.
- [FK92] Hershel M. Farkas and Irwin Kra, *Riemann surfaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 71, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [For91] Otto Forster, *Lectures on Riemann surfaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 81, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [Har97] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. 52, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1997.
- [Kir92] Frances Kirwan, *Complex algebraic curves*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 23, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [Mir95] Rick Miranda, *Algebraic curves and Riemann surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 5, American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
- [Mun97] James R. Munkres, *Topology: A first course*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1997.
- [Rei95] Miles Reid, *Undergraduate commutative algebra*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 29, Cambridge University Press, 1995.
- [Sti20] John Stillwell, *Mathematics and its history*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, Cham, 2020.
- [Yin05] Daniel Ying, *History of Riemann surfaces*, disponible en <http://riemannsurfaces.com/ownwork/history.pdf>, 2005.

