FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

GRADO EN MATEMÁTICAS

Convergencia de sucesiones en espacios topológicos

Autora

Claudia Salguero González

Tutor

Rafael Ayala Gómez

Sevilla, Julio de 2023

Resumen

En este trabajo, se trata el problema del papel de las sucesiones en los espacios topológicos, desde dos puntos de vista. Por una parte, se expone brevemente la teoría de redes y filtros, que proporcionan una generalización de la convergencia de sucesiones, adecuada para la caracterización de ciertas propiedades topológicas, como la continuidad o la compacidad. Por otro lado, se estudian las propiedades elementales de los espacios 1°N, los espacios de Fréchet-Uryshon y los espacios secuenciales. Estas clases de espacios son tres ampliaciones sucesivas de los espacios métricos, en las que los conjuntos cerrados o las aplicaciones continuas pueden caracterizarse también en términos de propiedades de convergencia de sucesiones. Pero, a diferencia de lo que ocurre en los espacios métricos, en estos espacios la compacidad y la compacidad secuencial no son equivalentes, es decir, la compacidad no puede caracterizarse mediante sucesiones. No obstante, sí se tiene el siguiente resultado: en la clase de los espacios secuenciales la compacidad numerable y la compacidad secuencial son equivalentes.

Abstract

In this work, the problem of the role of sequences in topological spaces is treated from two points of view. On the one hand, the theory of nets and filters, which provide a generalization of the convergence of sequences, suitable for the characterization of certain topological properties, such as continuity or compactness, is briefly presented. On the other hand, the elementary properties of 1°N spaces, Fréchet-Uryshon spaces and sequential spaces are studied. These classes of spaces are three successive extensions of metric spaces, in which closed sets or continuous applications can also be characterized in terms of properties of convergence of sequences. But, unlike in metric spaces, in these spaces compactness and sequential compactness are not equivalent, i.e., compactness cannot be characterized by means of sequences. However, we do have the following result: in the class of sequential spaces numerable compactness and sequential compactness are equivalent.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El propósito de este trabajo es presentar un breve análisis del papel que desempeñan las sucesiones en las propiedades topológicas de un espacio. Es decir, hasta qué punto sus propiedades de convergencia influyen en las características de sus conjuntos cerrados, las funciones continuas definidas sobre él, si son o no compactos, de Hausdorff, etc. Cuando se estudian los espacios métricos, se comprueba que las sucesiones proporcionan una potente herramienta para resolver estos problemas. Pero la situación es bien distinta en la clase más abstracta de los espacios topológicos, en la que se demuestra que, a menos que se disponga en cada punto de una sucesión decreciente de entornos, la sucesiones no bastan para caracterizar una topología. Ante este problema, caben dos opciones: o bien se intenta encontrar una noción más general de convergencia que permita trasladar a los espacios topológicos el lenguaje y los métodos de las sucesiones, o bien se consigue precisar cuáles son los espacios más generales cuyas propiedades, al igual que en los espacios métricos, puedan determinarse mediante sus sucesiones.

Adoptar el primer punto de vista condujo a la teoría de redes, definidas en [10] como aplicaciones de un conjunto dirigido en el espacio. Definiendo un concepto de convergencia análogo al de las sucesiones, con las redes se pueden caracterizar la clausura de un conjunto, la continuidad de una aplicación o la compacidad. Naturalmente, el manejo de las redes es mucho más laborioso y complejo que el de las sucesiones, empezando por la definición de subred, que desempeña en la teoría un papel análogo al de subsucesión de una sucesión. Años más tarde, en 1937, H. Cartan definió en [1] el concepto de filtro como colección de subconjuntos de un conjunto con propiedades semejantes a las de las secciones o colas de una sucesión. Los filtros permiten otra forma de generalizar la idea de convergencia, y aunque a primera vista son muy diferentes de las redes, en realidad dan lugar a teorías de convergencia equivalentes, y varios autores señalan como principal motivo de la amplia aceptación de su uso en Topología General la demostración particularmente sencilla del Teorema de Tychonoff sobre el producto de espacios compactos.

Por otra parte, el problema de caracterizar la clase más general de espacios topológicos en los que las propiedades de convergencia de las sucesiones determinan las propiedades topológicas más relevantes, surge en los trabajos de Fréchet sobre los espacios métricos al principios del pasado siglo, y fue tratado sistemáticamente por Franklin , quien en [4] y [5] consideró dos ampliaciones sucesivas de los espacios 1°N: los espacios de Fréchet-Urysohn y los espacios secuenciales o s-espacios. En realidad, dichos espacios se caracterizan porque en ellos se satisfacen las conocidas propiedades de la clausura y los subconjuntos cerrados de los espacios euclídeos, que son:

1) Un punto de la clausura de un conjunto es punto límite de una sucesión en el conjunto.

2) Un conjunto es cerrado si contiene los puntos límites de sus sucesiones.

Los espacios de Fréchet-Urysohn son los que satisfacen la primera propiedad, y los s-espacios los que satisfacen la segunda.

Pero dentro del problema general del análisis del papel de las sucesiones en las propiedades topológicas de un espacio, es particularmente interesante el caso de la compacidad, una propiedad fundamental, por su papel tanto en Topología como en Análisis o Geometría. Son muy numerosos los estudios realizados sobre la génesis y desarrollo histórico de este concepto (ver [13]), e incluso sobre cuál es la forma adecuada de introducirlo en un primer curso de Topología General: mediante recubrimientos abiertos (propiedad de Borel-Lebesgue en un espacio topológico general), o mediante propiedades de las sucesiones en un espacio métrico. Lo que sí parece claro es que la primera opción no proporciona una idea intuitiva sencilla sobre el significado geométrico de la compacidad, salvo en los espacios métricos, en los que se puede decir que un conjunto compacto es aquel que se puede aproximar, tanto como se quiera, por un conjunto finito. De hecho, fueron surgiendo distintas nociones de compacidad, que trataban de trasladar a espacios generales la propiedad de que toda sucesión de números reales tiene un punto de acumulación: la compacidad numerable, la compacidad de Bolzano-Weierstrass, o la compacidad secuencial, entre otras, y en cualquier texto básico de Topología General, se da la demostración de que todas ellas son equivalentes en los espacios métricos. Es decir, un espacio métrico es compacto si toda sucesión en él admite una subsucesión convergente. Sin embargo, en los s-espacios el mejor resultado que puede obtenerse (ver [5]) es que la compacidad numerable sí es equivalente a la compacidad secuencial.

El contenido de esta Memoria se divide en diez capítulos cortos. En el segundo se recogen los conceptos básicos de Topología General que se usarán a lo largo del trabajo. En el tercero, se indican la definición y propiedades esenciales de la topología producto de una familia infinita de espacios, la noción de aplicación cociente y pseudo-abierta, y algunos ejemplos de topologías iniciales y finales. Las definiciones y propiedades generales relacionadas con las sucesiones en un espacio se exponen en el Capítulo cuarto, y en el quinto se presenta un breve resumen de las propiedades de las redes y los filtros, justo lo necesario para comprobar como con ellos se caracteriza la clausura de un conjunto, la continuidad de una función o la compacidad en un espacio topológico cualquiera. Los Capítulos sexto, séptimo y octavo están dedicados a presentar las propiedades básicas de los espacios 1°N, de Fréchet-Urysohn y secuenciales, las caracterizaciones como ciertos cocientes de las dos últimas clases, y su comportamiento respecto a las operaciones topológicas habituales, como considerar subespacios, productos o cocientes. Los (contra)-ejemplos que se incluyen en los Capítulos séptimo y octavo están tomados de [4] y [5], pero en esos artículos se presentan de una manera tan breve y concisa que a veces es complicado y laborioso comprobar sus propiedades. De hecho, las demostraciones incluidas en el trabajo son versiones más detalladas de las que se dan en [7] o [9].
Por último, hemos dedicado los tres últimos capítulos a las distintas variantes de la noción de compacidad, debido a que a que es una propiedad donde más claramente se aprecia la diferencia entre su caracterización en los espacios métricos y los espacios topológicos en general. Ahora bien, nos hemos limitado prácticamente a dar las definiciones y los contraejemplos necesario para precisar las relaciones entre ellas, salvo en el Capítulo noveno, donde se prueba que la compacidad se puede caracterizar mediante redes y filtros, y se incluye la demostración del teorema de Tychonoff sobre la compacidad del producto

de una familia compactos, por dos razones. En primer lugar, para poner de manifiesto la ventaja que supone usar la teoría de filtros, y en segundo lugar porque en opinión de varios autores, como Engelking ([3]), dicho resultado es la razón por la que la definición de la compacidad mediante la condición de Borel-Lebesgue se impuso a las demás. Ya en el último Capítulo se comprueba que el conocido resultado que afirma que todas las versiones del concepto de compacidad coinciden en los métricos no se tiene para las clases de espacios consideradas, y se da la demostración, tomada de [9], de que en los espacios secuenciales la compacidad numerable y la secuencial son equivalentes. Este resultado generaliza el que suele incluirse en los textos de topología para los espacios 1°N.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Espacios topológicos

Definición 2.1.1. Un **espacio topológico** es un par $(X, \mathcal{T})$, donde X es un conjunto y $\mathcal{T} \subseteq P(X)$ una familia de subconjuntos de X, llamada **topología sobre X**, que satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
2. Si $A, B \in \mathcal{T}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{T}$.
3. Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos de $\mathcal{T}$ entonces $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Los elementos de $\mathcal{T}$ se llamarán $\mathcal{T}$-abiertos, o simplemente **abiertos**, si no hay lugar a confusión.

Ejemplo 2.1.1.

1. La colección de los abiertos euclídeos de $\mathbb{R}^n$ es una topología en $\mathbb{R}^n$ llamada *topología usual o euclídea* y denotada por $\mathcal{T}_e$.
2. En cualquier conjunto X las familias $\{X, \emptyset\}$ y $\mathcal{P}(X)$ constituyen topologías sobre X, llamadas respectivamente *topología indiscreta* y *discreta* sobre X y denotadas por $\mathcal{T}_{ind}$ y $\mathcal{T}_{dis}$.
   También lo son las familias $\mathcal{T}_{cof} = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X; X - A \text{ es finito}\}$, llamada *topología cofinita* sobre X, y $\mathcal{T}_{con} = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X; X - A \text{ es numerable}\}$ llamada *topología conumerable* sobre X.

Definición 2.1.2. Dadas dos topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ sobre X se dice que $\mathcal{T}'$ **es más fina que** $\mathcal{T}$, o que $\mathcal{T}$ *es más gruesa que* $\mathcal{T}'$, si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$

Ejemplo 2.1.2. En $X = \mathbb{R}$, se tienen las siguientes relaciones de inclusión:

$$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{ind}) \subsetneq (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof}) \subsetneq (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e) \subsetneq (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{dis})$$

Nótese que $\mathcal{T}_e$ y $\mathcal{T}_{con}$ no son comparables respecto a la relación anterior pues $(0,1) \in \mathcal{T}_e - \mathcal{T}_{con}$ y $\mathbb{R} - \mathbb{Q} \in \mathcal{T}_{con} - \mathcal{T}_e$.

Definición 2.1.3. En un espacio topológico, $A \subseteq X$ se llama **$\mathcal{T}$-cerrado** (o simplemente **cerrado**), si $X - A \in \mathcal{T}$.
La familia de los $\mathcal{T}$-cerrados se denotará por $\mathcal{F}$.

Ejemplo 2.1.3. Los cerrados de las topologías definidas en el Ejemplo 2.1.1, son respectivamente $\{\emptyset, X\}$, $\mathcal{P}(X)$, X y sus subconjuntos finitos, y X y sus subconjuntos numerables.

Nota 2.1.1. Obsérvese que si $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ son topologías sobre X. $\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}$ si y sólo si $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$.

2.2. Base y subbase de una topología

Definición 2.2.1. En un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ se llama **base** de $\mathcal{T}$ si todo $\mathcal{T}$-abierto se puede expresar como unión de conjuntos de $\mathcal{B}$.
Es decir, $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$ si dados $G \in \mathcal{T}$ y $x \in G$, existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset G$.
Una familia $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ se llama **subbase** de $\mathcal{S}$ si la familia de las intersecciones finitas de conjuntos de $\mathcal{S}$ es una base de $\mathcal{T}$.

Definición 2.2.2. Un espacio $(X, \mathcal{T})$ se llama **espacio segundo numerable** o que satisface el segundo axioma de numerabilidad, si $\mathcal{T}$ admite una base numerable. Esta propiedad se suele expresar brevemente diciendo que $(X, \mathcal{T})$ es $2°N$.

Ejemplo 2.2.1.

1. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_e)$ es $2°N$, pues el conjunto de las bolas euclídeas de centro y radio racionales es una base de $\mathcal{T}_e$.

2. $(X, \mathcal{T}_{dis})$ es $2°N$ si y sólo si X es numerable.

3. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$ y $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{con})$ no lo son.

El siguiente resultado proporciona un método habitual para obtener una topología sobre un conjunto.

Proposición 2.2.1. *Sea X un conjunto y $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que se cumple:*

1. *$\mathcal{B}$ es un recubrimiento de X.*

2. *Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $z \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

*Entonces existe una topología $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ sobre X llamada **topología generada por** $\mathcal{B}$ que tiene a $\mathcal{B}$ como base.*

Observación 2.2.1. Si $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ satisface 1), la familia $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ de las intersecciones finitas de conjuntos de $\mathcal{S}$ satisface 2) y se llama **subbase** de $\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{S}})$.

2.3. Entornos y base de entornos de un punto

Definición 2.3.1. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $x \in X$, $N \subseteq X$ se llama **$\mathcal{T}$-entorno** de x (o simplemente entorno de x) si existe $U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U \subset N$.
La familia de los $\mathcal{T}$-entornos de x se denota por $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ y satisface las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \neq \emptyset$.

2. Si $N, M \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, $N \cap M \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$.

3. Si $N \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ y $N \subseteq M$, entonces $M \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$.

4. Si $N \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ existe $M \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ tal que $N \in \mathcal{N}_y^{\mathcal{T}}$ para todo $y \in M$.

Si $N \in \mathcal{T} \cap \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, N se llama **entorno abierto** de x.

Definición 2.3.2. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $x \in X$, $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ se llama **base de entornos** de x si para cada $N \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in B \subset N$.

Nota 2.3.1. Obsérvese que si $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$ para cada $x \in X$, $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B}; x \in B\}$ es una base de entornos (abiertos) de x. Por otra parte, si para cada $x \in X$, $\mathcal{B}_x$ es una base de entornos formada por abiertos, $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{x \in X} \mathcal{B}_x$ es una base de $\mathcal{T}$.

2.4. Interior y clausura de un conjunto

Definición 2.4.1. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $A \subset X$ se dice que $x \in A$ es un **punto interior** de A si $A \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$.
El conjunto de los puntos interiores de A se denota por $int\, A$.

Nótese que $int\, A \in \mathcal{T}$ y que $A \in \mathcal{T}$ si y sólo si $A = int\, A$; es decir, A es abierto si y sólo si es entorno de todos sus puntos.
Se tienen las siguientes propiedades:

1. $int\, A \subseteq int\, B$ si $A \subseteq B$.

2. $int\, (A \cap B) = int\, A \cap int\, B$.

3. $int\, (int\, A) = int\, A$.

Definición 2.4.2. La **clausura o de adherencia** de A en $(X, \mathcal{T})$ es el conjunto $\overline{A} = \{x \in X; N \cap A \neq \emptyset$ para todo $N \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}\}$. Es el menor $\mathcal{T}$-cerrado que contiene a A y se cumple:

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

2. $A \subseteq \overline{A}$.

3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

4. $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$

Nótese que $A \subset X$ es cerrado si y solo si $A = \overline{A}$, es decir, $\overline{A} \subset A$.
Se tiene la siguiente relación entre $int\, A$ y $\overline{A}$.

Proposición 2.4.1. $int\, A = X - \overline{X - A}$

Definición 2.4.3. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $A \subseteq X$, $x \in X$ se llama **punto de acumulación** de A si $x \in \overline{A - \{x\}}$. Se llama **derivado** de A, y se denota por A' al conjunto de los puntos de acumulación de A. Por tanto, $A' = \{x \in X; N \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset\}$ si $N \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$.

Nótese que $\overline{A} = A \cup A'$. Por tanto, A es cerrado si y sólo si $A' \subset A$.

Definición 2.4.4. Si $A \subseteq X$ cumple que $\overline{A} = X$ se dice que A es **denso** en X.
Es decir, A es denso X si $A \cap U \neq \emptyset$, para todo $U \in \mathcal{T} - \{\emptyset\}$.
$(X, \mathcal{T})$ se llama **separable** si existe $A \subset X$ que es denso y numerable.

Observación 2.4.1. Si $(X, \mathcal{T})$ es $2^\circ N$ entonces es separable, pero el recíproco no es cierto en general. Por ejemplo, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$ es separable, pero no es $2^\circ N$.

2.5. Aplicaciones continuas. Homeomorfismos.

Definición 2.5.1. Una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ se llama **continua en** $x \in X$ si para cada $N \in \mathcal{N}_{f(x)}^{\mathcal{T}'}$ existe $M \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ tal que $f(M) \subset N$.
Esta condición es equivalente a la siguiente:
f es continua en x si para cada $N \in \mathcal{N}_{f(x)}^{\mathcal{T}'}$ se cumple que $f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$.

Definición 2.5.2. Una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ se llama **continua** si es continua en todo punto $x \in X$.

Se verifica que la composición de aplicaciones continuas es continua, y en el siguiente resultado se indican algunas condiciones equivalentes a la continuidad.

Proposición 2.5.1. *Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es una aplicación, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *f es continua.*

2. *Si $O \in \mathcal{T}'$, entonces $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$.*

3. *Si C es cerrado de $\mathcal{T}'$, $f^{-1}(C)$ es cerrado de $\mathcal{T}$.*

4. *Si $A \subseteq X$, entonces $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

Nota 2.5.1. Obsérvese que $Id : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua si y sólo si $\mathcal{T}$ es más fina que $\mathcal{T}'$.

Definición 2.5.3. Una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ se llama **abierta (cerrada)** si la imagen de cualquier abierto (cerrado) de $\mathcal{T}$ es un abierto (cerrado) de $\mathcal{T}'$.

Observación 2.5.1. Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es biyectiva, la continuidad de $g = f^{-1}$ es equivalente a que f sea abierta o cerrada.

Definición 2.5.4. Una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ se llama **homeomorfismo** si f es biyectiva, continua y su inversa es continua.

Por la observación anterior, f es homeomorfismo si es biyectiva, continua y abierta (cerrada).
Las propiedades de un espacio topológico que se mantienen al actuar sobre él un homeomorfismo se llaman **propiedades topológicas o invariantes topológicos** de dicho espacio. Es decir, una propiedad P de $(X, \mathcal{T})$ es topológica si la tiene también cualquier espacio $(Y, \mathcal{T}')$ homeomorfo a $(X, \mathcal{T})$.

Ejemplo 2.5.1. "Ser $2^\circ N$" o "ser separable"son propiedades topológicas.

2.6. Subespacios topológicos

Definición 2.6.1. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $A \subseteq X$, la familia $\mathcal{T}_{|A} = \{O \cap A; O \in \mathcal{T}\}$ es una topología sobre A llamada **topología inducida o relativa a** A, y $(A, \mathcal{T}_{|A})$ se llama **subespacio (topológico)** de $(X, \mathcal{T})$.
Los elementos de $\mathcal{T}_{|A}$ se llaman **abiertos relativos a** A, y se verifican las siguientes propiedades:

Proposición 2.6.1.

1. *Si $\mathcal{B}$ es una base de $(X, \mathcal{T})$, $\mathcal{B}_A = \{B \cap A; B \in \mathcal{B}\}$ es una base de $(A, \mathcal{T}_{|A})$.*

2. *Si $C \subseteq A$, C es cerrado de $\mathcal{T}_{|A}$ si y sólo si $C = F \cap A$, siendo F cerrado de $\mathcal{T}$ y $\overline{C}^A = \overline{C} \cap A$.*

3. *Si $x \in A$, $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}_{|A}} = \{A \cap N; N \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}\}$, y si $\mathcal{B}_X$ es una base de entornos de x en $(X, \mathcal{T})$, $\mathcal{B}_x^A = \{B \cap A; B \in \mathcal{B}_x\}$ es una base de entornos de x en $(A, \mathcal{T}_{|A})$.*

4. *La inclusión canónica $j : (A, \mathcal{T}_{|A}) \to (X, \mathcal{T})$ dada por $j(x) = x$ es continua.*

5. *Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua, entonces la restricción de f a A, $g = f_{|A} : (A, \mathcal{T}_{|A}) \to (Y, \mathcal{T}')$ dada por $g(x) = f(x)$ es continua.*

En particular, si $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}')$ es un homeomorfismo y $A \subseteq X$, $g : (A,\mathcal{T}_{|A}) \to (f(A),\mathcal{T}'_{|f(A)})$ también lo es.

Definición 2.6.2. Una propiedad P de un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ se llama **propiedad hereditaria** si para todo $A \subseteq X$, $(A,\mathcal{T}_{|A})$ también la tiene.

Ejemplo 2.6.1. "Ser $2^\circ N$" es una propiedad hereditaria, pero "ser separable" no lo es.

2.7. Axiomas de separación: T_0, T_1, T_2

Definición 2.7.1. Un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ se llama $\mathbf{T_0}$ si dados $x, y \in X$ con $x \neq y$ se cumple que $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \neq \mathcal{N}_y^{\mathcal{T}}$.
El espacio se llama $\mathbf{T_1}$ si dados $x, y \in X$ con $x \neq y$ se cumple que $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} - \mathcal{N}_y^{\mathcal{T}} \neq \emptyset$ y $\mathcal{N}_y^{\mathcal{T}} - \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \neq \emptyset$.
Si todo par de puntos distintos $x, y \in X$ admite entornos disjuntos $(X,\mathcal{T})$ se llama espacio $\mathbf{T_2}$ o **de Hausdorff**.

Nótese que $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$, y además, las tres propiedades son topológicas y hereditarias.

Proposición 2.7.1. *$(X,\mathcal{T})$ es T_1 si y sólo si $\{x\}$ es cerrado para todo $x \in X$.*

2.8. Espacios (pseudo)metrizables

Definición 2.8.1. Un **espacio métrico** es un par (X,d), donde $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una aplicación llamada **distancia o métrica** sobre X, tal que:

1. $d(x,y) \geq 0$, para todo $(x,y) \in X \times Y$.

2. $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

3. $d(x,y) = d(y,x)$ (propiedad simétrica).

4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, para toda terna $x, y, z \in X$ (propiedad triangular).

Si en lugar de 2) se cumple $2')$ $d(x,x) = 0$, d se llama **pseudodistancia o pseudométrica** sobre X, y el par (X,d) se llama **espacio pseudométrico**

Definición 2.8.2. En un espacio (pseudo)métrico las bolas abiertas, es decir, los conjuntos $\{B_d(x;r); r > 0 \text{ y } x \in X\}$ son base para una topología $\mathcal{T}_d$ sobre X, llamada **topología asociada a** d, o **inducida por** d.

Proposición 2.8.1. *1. Todo espacio métrico* (X,d) *es* T_2.

2. Un espacio métrico (X,d) *es* $2°N$ *si y sólo si es separable.*

Nota 2.8.1. No siempre una topología $\mathcal{T}$ sobre X es la inducida por una distancia. Por ejemplo, no existe ninguna distancia d sobre $\mathbb{R}$ tal que $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{cof}$, ya que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$ no es T_2. Lo mismo ocurre con $\mathcal{T}_{con}$ sobre $\mathbb{R}$.

Definición 2.8.3. Un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ se llama **espacio metrizable** si existe una distancia d sobre X tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

Si d y d' son distancias sobre X tales que $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$ se llaman **distancias equivalentes**.

2.9. Otras formas de definir espacio topológico

La definición dada de espacio topológico es debida a Alexandroff(1927), pero existen otros métodos frecuentes para definirlos, como son el operador clausura de Kuratowski (1920) o especificando cuáles han de ser las familias de los entornos de cada punto. Este método, usado por Hausdorff en 1914, fue de hecho la primera definición de espacio topológico.

Definición 2.9.1. Un **espacio topológico** es un par (X,φ) donde $\varphi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ es un operador (llamado **operador de clausura de Kuratowski**) que satisface las siguientes condiciones;

1. $\varphi(\emptyset) = \emptyset$.

2. Para todo $A \subset X$, $A \subseteq \varphi(A)$.

3. Dados $A, B \subseteq X$, se cumple $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$.

4. Para todo $A \subseteq X$, $\varphi(\varphi(A)) = \varphi(A)$.

La equivalencia entre ambas definiciones se obtiene probando que si φ es un operador clausura, entonces

$$\mathcal{T}_\varphi = \{A \subset X; \varphi(X - A) = X - A\}$$

es la única topología sobre X cuyos cerrados son los puntos fijos de φ.
La definición de espacio topológico de Hausdorff es la siguiente:

Definición 2.9.2. Un **espacio topológico** es un par (X, φ), donde $\varphi : X \to P(P(X))$ es una aplicación que satisface las siguientes propiedades:

1. Para todo $x \in X$, si $N \in \varphi(x)$, $x \in N$.
2. Si $N_1, N_2 \in \varphi(x)$, $N_1 \cap N_2 \in \varphi(x)$.
3. Si $N \in \varphi(x)$ y $N \subset M$, $M \in \varphi(x)$.
4. Si $N \in \varphi(x)$, existe $M \in \varphi(x)$ tal que $N \in \varphi(y)$para todo $y \in M$.

Proposición 2.9.1. *Si φ satisface las condiciones de la definición anterior, la familia*

$$\mathcal{T}_\varphi = \{O \subset X; O \in \varphi(x) \text{ para cada } x \in X\},$$

es la única topología sobre X tal que $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}_\varphi} = \varphi(x)$.

Capítulo 3

Topologías iniciales y finales

3.1. Topología inicial asociada a una familia de aplicaciones

Definición 3.1.1. Sea $\{X_i, \mathcal{T}_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios toplógicos, X un conjunto y $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de aplicaciones $f_i : X \to X_i$. La **topología inicial** sobre X para la familia $\{f_i\}_{i\in I}$, denotada por $\mathcal{T}_{\{f_i\}_{i\in I}}$ es la que tiene como subbase la familia $\mathcal{A}_{\{f_i\}} = \{f_i^{-1}(O_i);\ O_i \in \mathcal{T}_i,\ i \in I\}$.
Una base de esta topología es, por tanto, la familia

$$\mathcal{B}_{\{f_i\}} = \{\bigcap_{j\in J} f_j^{-1}(O_j);\, O_j \in \mathcal{T}_j \text{ y } J \subset I \text{ es finito}\}.$$

La topología $\mathcal{T}_{\{f_i\}_{i\in I}}$ admite la siguiente caracterización:

Proposición 3.1.1. *Una topología $\mathcal{T}$ sobre X es $\mathcal{T}_{\{f_i\}_{i\in I}}$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *$f : (X, \mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ es continua para todo $i \in I$.*

2. *Si $\mathcal{T}'$ es una topología sobre X tal que $f : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T}_i)$ es continua, entonces $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. Es decir, la topología inicial $\mathcal{T}_{\{f_i\}_{i\in I}}$ es la topología menos fina sobre X que hace continua a todas las aplicaciones $f_i : X \to X_i$.*

Demostración:

1. Supongamos que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\{f_i\}_{i\in I}}$. Como $\mathcal{A}_{\{f_i\}_{i\in I}} \subset \mathcal{T}$, es inmediato que $f_i : (X, \mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ es continua para todo $i \in I$.

2. Por otra parte, si $\mathcal{T}'$ es una topología sobre X tal que $f : (X, \mathcal{T}') \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ es continua, entonces $A_{\{f_i\}} \subset \mathcal{T}'$, y por tanto $\mathcal{T}_{\{f_i\}_{i\in I}} \subset \mathcal{T}'$.
   Recíprocamente, como para todo $i \in I$, $f_i : (X, \mathcal{T}_{\{f_i\}}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ es continua, se tiene que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{\{f_i\}}$. Por otro lado, si $A_{\{f_i\}} \subset \mathcal{T}$, entonces $\mathcal{T}_{\{f_i\}} \subset \mathcal{T}$. $\square$

Ejemplo 3.1.1.

1. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $j : A \to X$ es la inclusión canónica, entonces $\mathcal{T}_{\{j\}} = \mathcal{T}_{|A}$.

2. Si $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y $(X, \|\cdot\|)$ es K-espacio normado, sean $X^* = \{f : X \to K;\ \text{f es continua}\}$ La topología inicial sobre X asociada a la familia F se llama topología débil de X, y se denota por $\mathcal{T}_\omega$. Si $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ es la topología asociada a la norma, se tiene que $\mathcal{T}_\omega \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$, y ambas topologías coinciden si y sólo si X es de dimensión finita.

3.2. Topología producto

Definición 3.2.1. Si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos, su **producto cartesiano** es el conjunto

$$\prod_{i\in I} X_i = \{x : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i; x(i) \in X_i\}$$

Para los elementos x de $\prod_{i\in I} X_i$ se usará la notación $x = (x_i)$, y x_i se llama **coordenada i-ésima** de x.

Ejemplo 3.2.1.

1. Si $I = \{1, 2, ..., n\}$, entonces $\prod_{i\in I} X_i$ es el conjunto de las n-uplas ordenadas de elementos $(x_1, x_2, ..., x_n)$, donde $x_k \in X_k$, para $1 \leq k \leq n$. Es decir, la definición dada coincide con la definición conocida de producto cartesiano de una familia finita de conjuntos $X_1, X_2, ..., X_n$.

2. Si $I = \mathbb{N}$, entonces $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es el conjunto de sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $x_n \in X_n$.

3. Si la familia $\{X_i\}_{i\in I}$ se reduce a un único conjunto, es decir si $X_i = X$ para todo $i \in I$, entonces $\prod_{i\in I} X_i$ es el conjunto de aplicaciones $x : I \longrightarrow X$, y se denotará por X^I. En particular, $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ se llama *cubo de Hilbert*.

Definición 3.2.2. Si $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos, la proyección $p_j : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_j$ es la aplicación dada por $p_j((x_i)_{i\in I}) = x_j$.
La **topología producto** $\mathcal{T}_\pi$ sobre $\prod X_i$ es la topología inicial asociada a la familia de aplicaciones $\{p_i\}_{i\in I}$. Por tanto, $\mathcal{T}_\pi$ tiene como subbase la familia $\mathcal{S}_\pi = \{p_i^{-1}(U_i); i \in I, U_i \in \mathcal{T}_i\}$ y como base la familia

$$\mathcal{B}_\pi = \{B \subseteq \prod_{i\in I} X_i\,;\ B = \Pi G_i\}$$

con

$$G_i = \begin{cases} G_i \in \mathcal{T}_i & \text{si } i \in J, \\ X_i & \text{si } i \notin J \end{cases}$$

donde $J \subset I$ es finito.
Es decir, los abiertos básicos de la topología producto son productos cartesianos, de manera que un número finito de factores son abiertos en los espacios de índices correspondientes, y el resto de los factores son el espacio total.
Además, una aplicación $f : (Y, \mathcal{T}) \longrightarrow (\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{T}_\pi)$ es continua si y sólo si cada aplicación $f_i = p_i \circ f$ lo es

A partir de las definiciones, es inmediato comprobar los siguientes resultados:

Proposición 3.2.1. *a) Si $\mathcal{B}_i$ es una base de $(X, \mathcal{T}_i)$ para cada $i \in I$, entonces la familia $\mathcal{B} = \{\prod_{i\in I} B_i\}$ donde $B_i \in \mathcal{B}_i$ para $i \in J \subseteq I$ y $B_i = X_i$ para $i \in I - J$, siendo $J \subseteq I$ un subconjunto finito, es una base de $\mathcal{T}_\pi$.*
b) Sea $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ y $\mathcal{B}_i(x_i)$ una base de entornos de x_i en $(X_i, \mathcal{T}_i)$ para cada $i \in I$. Entonces la familia $\mathcal{B}(x) = \{\prod_{i\in I} B_i\}$, donde $B_i \in \mathcal{B}_i(x_i)$ para $i \in J$, y $B_i = X_i$ para $i \in I - J$, siendo $J \subseteq I$ un subconjunto finito, es una base de entornos de x en $\mathcal{T}_\pi$.

Es consecuencia inmediata de las definiciones el siguiente resultado:

Proposición 3.2.2. *Las proyecciones $p_i : (X, \mathcal{T}_\pi) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ son abiertas.*

Otra posible topología sobre $\prod_{i\in I} X_i$, que coincide con $\mathcal{T}_\pi$ cuando I es finito, es la siguiente:

Definición 3.2.3. Si $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}$ es una familia de espacios topológicos, la **topología caja** sobre $X = \prod_{i\in I} X_i$ es la topología $\mathcal{T}_B$ generada por la familia $\{\prod_{i\in I} O_i\,;\ O_i \in \mathcal{T}_i\}$.

Es decir, la base de la topología $\mathcal{T}_B$ está formada por productos de abiertos en cada espacio X_i.

Nótese que, en general, $\mathcal{T}_\pi \subsetneq \mathcal{T}_B$. En efecto, si $|X_i| \geq 2$ y $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_{dis}$, entonces $\mathcal{T}_B = \mathcal{T}_{dis}$, pero $\mathcal{T}_\pi \neq \mathcal{T}_{dis}$, pues ningún punto puede ser abierto en $\mathcal{T}_\pi$.

Por tanto, si lo que se pretende es definir una topología sobre $\prod\limits_{i \in I} X_i$ que haga continua las proyecciones, se prefiere $\mathcal{T}_\pi$ a $\mathcal{T}_B$, ya que con esta no se mantienen propiedades topológicas como la conexión o la compacidad, la convergencia no es equivalente a la convergencia coordenada a coordenada y la continuidad de una aplicación que llega a $\prod X_i$ no queda caracterizada en términos de la continuidad de las aplicaciones coordenadas.

Proposición 3.2.3. *Si $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$ es una familia de espacios topológicos, entonces $(\prod\limits_{i \in I} X_i, \mathcal{T}_\pi)$ es T_0, T_1 o T_2 si cada $(X_i, \mathcal{T}_i)$ lo es.*

Demostración. Veamos que si $(X_i, \mathcal{T}_i)$, es T_2, entonces $(\prod X_i, \mathcal{T}_\pi)$ lo es. En efecto, si $x = (x_i)$ e $y = (y_i)$ puntos distintos de $\prod X_i$, sea $i_0 \in I$ tal que $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. Como X_{i_0} es T_2, existen abiertos disjuntos $U_{i_0}, V_{i_0} \in \mathcal{T}_{i_0}$ con $x_{i_0} \in U_{i_0}$ e $y_{i_0} \in V_{i_0}$. Entonces $p_{i_0}^{-1}(U_{i_0})$ y $p_{i_0}^{-1}(V_{i_0})$ son abiertos disjuntos de $\mathcal{T}_\pi$ conteniendo a x e y respectivamente. $\square$

Proposición 3.2.4. *Si $\{(X_n, d_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de espacios métricos, entonces $(\prod\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n, \mathcal{T}_\pi)$ es metrizable.*

Demostración. Consideremos sobre X_n la distancia $d'_n = \{1, d_n\}$, que es topológicamente equivalente a d_n, y por tanto, genera la misma topología. Sea $d : \prod X_n \times \prod X_n \longrightarrow [0,1)$ la aplicación dada por $d((x_n),(y_n)) = \sum\limits_{i=I}^{\infty} \frac{d'_i(x_i,y_i)}{2^i}$

Veamos que $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_\pi$. Si $x = (x_1, x_2, ...)$, y $U = \mathcal{B}_{d'_1}(x_1; \epsilon_1) \times \cdots \times \mathcal{B}_{d'_n}(x_n; \epsilon_n) \times \prod\limits_{i \geq n} X_i$ es un entorno básico de x en $\mathcal{T}_\pi$, si $\epsilon = min\{\epsilon_1/2, \ldots, \epsilon_n/2^n\}$, se tiene que $\mathcal{B}_d(x;\epsilon) \subset U$. En efecto, si $y = (y_1, y_2, ..) \in \mathcal{B}_d(x;\epsilon), d(x,y) < \epsilon$, y por tanto $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{d'(x_i,y_i)}{2^i} < \epsilon$. Así pues, $d'_i(x_i, y_i) < \epsilon$, para $1 \leq i \leq n$, y se tiene que $\mathcal{B}_d(x;\epsilon) \subset U$.

Por otra parte, $\mathcal{T}_\pi \subset \mathcal{T}_d$, pues dado $\epsilon > 0$, sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{i=m}^{\infty} 2^{-i} < \epsilon/2$. Es fácil verificar que $\mathcal{B}_{d'_1}(x_1; \epsilon/2^m) \times \cdots \times \mathcal{B}_{d'_m}(x_m; \epsilon/2^m) \times \prod\limits_{i \geq m+1} X_i \subset U$, y por tanto $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\pi$. $\square$

3.3. Topología final asociada a una familia de aplicaciones

Definición 3.3.1. Si $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos, X un conjunto y $f_i : X_i \to X$ una familia de aplicaciones, la familia

$$\mathcal{T}^{\{f_i\}} = \{O \subset X\,;\; f_i^{-1}(O) \in \mathcal{T}_i \text{ para todo } i \in I\}$$

es una topología sobre X, llamada **topología final asociada a** la familia $\{f_i\}_{i\in I}$.

Nótese que como consecuencia inmediata de la definición dada, se tiene:

Proposición 3.3.1. *a) Cada aplicación $f_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \to (X, \mathcal{T}^{\{f_i\}})$ es continua.*

b) Si $f_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \to (X, \mathcal{T})$ es continua para todo $i \in I$, se tiene que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^{\{f_i\}}$.

Es decir, $\mathcal{T}^{\{f_i\}}$ es la topología más fina sobre X respecto a la cual las aplicaciones f_i son continuas.
De hecho, se tiene la siguiente caracterización de la topología final.

Proposición 3.3.2. *Una topología $\mathcal{T}$ sobre X es la topología final asociada a una familia de aplicaciones $f_i : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ si y sólo si la continuidad de f equivale a la continuidad de las aplicaciones $f \circ f_i$.*

Nota 3.3.1. Obsérvese que C es cerrado en $\mathcal{T}^{\{f_i\}}$ si y sólo si $f_i^{-1}(C)$ es cerrado para cada $i \in I$.

Definición 3.3.2. Sea X un conjunto y $\{(A_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos con $A_i \subset X$. Supongamos que se verifican las siguientes condiciones

$\omega 1)$ $\mathcal{T}_{i_{|A_i\cap A_j}} = \mathcal{T}_{j_{|A_i\cap A_j}}$.

$\omega 2)$ $A_i \cap A_j$ es abierto(cerrado) en $(A_i, \mathcal{T}_i)$ y en $(A_j, \mathcal{T}_j)$

Entonces, la topología final en X asociada a las inclusiones canónicas $\varphi_i : A_i \to X$ se llama **topología débil** en X asociada a $\{(A_i, \mathcal{T}_i)\}$ y se denota por $\mathcal{T}_\omega^{\{A_i\}}$, o simplemente, por $\mathcal{T}_\omega$.

Obsérvese que por definición de topología final,

$$\mathcal{T}_\omega^{\{A_i\}} = \{O \subseteq X : \ O \cap A_i \in \mathcal{T}_i \text{ para todo } i \in I\}$$

pero por las condiciones $\omega 1)$ y $\omega 2)$ se verifica que $(A_i, \mathcal{T}_i)$ es un subespacio de $(X, \mathcal{T}_\omega^{\{A_i\}})$.

Proposición 3.3.3. ${\mathcal{T}_\omega^{\{A_i\}}}_{|A_i} = \mathcal{T}_i$ *para cada* $i \in I$

Demostración. Si $O \in \mathcal{T}_i$, entonces por $\omega 1)$ $O \cap A_j$ es abierto en $A_i \cap A_j$, y por $\omega 2)$, $O \cap A_J \in \mathcal{T}_j$ para todo $j \in J$. Por tanto, $O \in {\mathcal{T}_\omega^{\{A_i\}}}_{|A_i}$. $\square$

Corolario 3.3.1. A_i es abierto (cerrado) en $\mathcal{T}_\omega^{\{A_i\}}$.

Demostración. Basta tomar $O = A_i$ en la demostración anterior. $\square$

Ejemplo 3.3.1. (Poliedros euclídeos) Sea K un complejo simplicial en $\mathbb{R}^n$. Es decir, K es un conjunto de símplices en $\mathbb{R}^n$, tal que

1. Si $\sigma \in K$ y τ es cara de σ, entonces $\tau \in K$.

2. Si $\sigma, \tau \in K$ y $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, entonces $\sigma \cap \tau$ es una cara común.

Si $|K| = \cup\{\sigma;\ \sigma \in K\}$ y sobre cada $\sigma \in K$ se considera la topología euclídea, la familia K satisface las condiciones $\omega 1)$ y $\omega 2)$ de la definición anterior, y se denotará por $|K|_\omega$ al conjunto $|K|$ dotado de la topología débil asociada a K.
Obsérvese que si K es finito, $\mathcal{T}_{e_{|_{|K|}}} = |K|_\omega$, pero en general $\mathcal{T}_{e_{|_{|K|}}} \subsetneq |K|_\omega$. Por ejemplo, sea K el complejo simplicial en $\mathbb{R}^2$ cuyo conjunto de vértices son los puntos $\{(0,1)\} \cup \{(0,0)\} \cup \{(0,1/n);\ n \geq 1\}$ y cuyo conjunto de 1-símplices son los segmentos que unen $(0,1)$ con los demás vértices. Entonces, $C = \{(0,1/n);\ n \geq 1\}$ es cerrado en $|K|_\omega$, pero no en $\mathcal{T}_{e_{|_{|K|}}}$.
Se verifica que ambas topologías coinciden si y sólo si K es localmente finito, es decir, si cada vértice está en un número finito de símplices.

3.4. Suma de espacios topológicos

Definición 3.4.1. Si $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$ es una familia de espacios topológicos disjuntos, $X = \bigcup\limits_{i \in I} X_i$ y $f_i : X_i \longrightarrow X$ es la inclusión canónica, el **espacio topológico suma** $\oplus X_i$, consiste en X dotado de la topología final de la familia $\{f_i\}_{i \in I}$. Por tanto, $U \subset X$ es abierto en $\oplus X_i$ si y sólo si $U \cap X_i \in \mathcal{T}_i$, y una aplicación $f : \oplus X_i \longrightarrow (Y, \mathcal{T})$ es continua si y sólo si cada $f_{|X_i}$ lo es.

Nota 3.4.1. Obsérvese que dada una familia arbitraria de conjuntos $\{X_i\}_{i\in I}$ podemos suponer que son disjuntos, pues podemos considerar $X_i' = X_i \times \{i\}$. Además, si $\mathcal{T}_i$ es una topología sobre X_i, entonces $\mathcal{T}_i' = \{U \times \{i\}; U \in \mathcal{T}_i\}$ es una topología sobre X_i'.

Proposición 3.4.1. *Si* $\{(X_\alpha, d_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ *es una familia de espacios métricos, entonces* $\bigoplus_{\alpha\in I} X_\alpha$ *es metrizable.*

Demostración. Podemos suponer que $d_\alpha \leq 1$, pues $d_\alpha' = min\{1, d_\alpha\}$ es una distancia topológicamente equivalente a d_α. Recordemos que $\bigoplus_{\alpha\in I} X_\alpha = (X, \mathcal{T})$, donde $X = \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha$ y $\mathcal{T} = \{U \subset X; U \cap X_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha, \forall \alpha \in I\}$.
Sea $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación dada por

$$d(x, y) = \begin{cases} d_\alpha(x, y) & \text{si existe } \alpha \in I \ tal\ que\ x, y \in X_\alpha \\ 1 & \text{si } x \in X_\alpha, y \in X_\beta\ y\ \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Veamos que d cumple la desigualdad triangular: si $x, y, z \in X$, existen $\alpha, \beta, \gamma \in I$ tales que $x \in X_\alpha, y \in X_\beta\ y\ z \in X_\gamma$.

-Si $\alpha = \beta\ y\ \alpha \neq \gamma$, entonces $d(x, y) = d_\alpha(x, y)$, $d(x, z) = 1$ y $d(z, y) = 1$. Por tanto, al ser $d_\alpha(x, y) \leq 1$ se cumple la desigualdad.

-Si $\alpha = \beta = \gamma$ se cumple, pues en este caso $x, y, z \in X_\alpha$ y $d = d_\alpha$.

-Si $\alpha \neq \beta, \alpha \neq \gamma\ y\ \gamma \neq \beta$, entonces $d(x, y) = 1, d(x, z) = 1\ y\ d(z, y) = 1$.

-Si $\alpha \neq \beta\ y\ \gamma = \alpha$ o $\gamma = \beta$, supongamos que $\gamma = \beta$. Entonces $d(x, y) = 1, d(x, z) = 1\ y\ d(y, z) = d_\beta(y, z)$, y se cumple la desigualdad.

Veamos que $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}$. Sean $U \in \mathcal{T}_d, \alpha \in I\ y\ x \in U_\alpha \cap A$. Existe $\epsilon > 0$ tal que $B_d(x; \epsilon) \subset U$, luego $B_{d_\alpha}(x; \epsilon) \subset B_d(x; \epsilon)$, pues si $y \in B_{d_\alpha}(x; \epsilon)$, entonces $y \in X_\alpha\ y\ d_\alpha(x, y) = d(x, y)$. Por tanto, $B_{d_\alpha}(x; \epsilon) \subset U \cap X_\alpha$, es decir $U \cap X_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$.

Por otra parte, sea $V \in \mathcal{T}$ y $x \in V \cap X_\alpha$. Como $V \cap X_\alpha \in \mathcal{T}_{d_\alpha}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_{d_\alpha}(x; \epsilon) \subset V \cap X_\alpha$. Si $r = min\{1, \epsilon\}$ e $y \in B_d(x; r)$, sea $\beta \in I$ tal que $y \in X_\beta$. Como $r \leq 1$, ha de ser $\beta = \alpha$, así que $x, y \in X_\beta$, y $d(x, y) = d_\alpha(x, y)$. Por tanto, $y \in B_{d_\alpha}(x; \epsilon)$, y se tiene que $y \in V$. Luego $B_d(x; r) \subset V$, por lo que $V \in \mathcal{T}_d$. $\square$

3.5. Espacios cocientes

Una clase de espacios especialmente importante en Topología es la clase de los espacios cocientes, es decir, los obtenidos a partir de un espacio dado identificando ciertos puntos

del mismo. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y se identifican entre sí ciertos puntos, el resultado puede considerarse un conjunto cociente de X asociado a la relación de equivalencia generada por la relación que consiste en declarar relacionados dos puntos $x, y \in X$ si dichos puntos han sido identificados. A su vez, todo conjunto cociente de X por una relación de equivalencia, se puede considerar como un conjunto obtenido identificando ciertos puntos de X, que son precisamente los elementos que constituyen cada clase de equivalencia.
Sobre un conjunto cociente o de identificación, se define de manera natural una topología del siguiente modo,

Definición 3.5.1. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y una relación de equivalencia sobre X, $\sim$, si $p : X \to X/\sim$ es la proyección canónica dada por $p(x) = [x]$ se llama **topología cociente o de identificación** sobre $X/\sim$ a la topología final $\mathcal{T}_p$ asociada a $\{p\}$.
Por tanto, $\mathcal{T}_p$ es la topología más fina que hace continua a p, y se tiene que
$f : (X/\sim, \mathcal{T}_p) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua si y sólo si $f \circ p$ lo es.

Ejemplo 3.5.1. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y $A \subseteq X$, si $\sim$ es la relación de equivalencia sobre X definida como $x \sim y$ si $x = y$ ó $\{x, y\} \subset A$, y el espacio cociente $(X/\sim, \mathcal{T}_p)$ se denota por $(X/A, \mathcal{T}_p)$ o por X/A simplemente.
Nótese que si $B \subseteq X$,

$$p^{-1}(p(B)) = \begin{cases} B & \text{si } B \cap A = \emptyset \\ B \cup A & \text{si } B \cap A \neq \emptyset \end{cases}$$

Por tanto, si A es cerrado (abierto), p es cerrada (abierta).

Definición 3.5.2. Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua y sobreyectiva, se dice que f es una **aplicación cociente** si $\mathcal{T}'$ es la topología final asociada a f. Es decir, f es una aplicación cociente si y sólo si $\mathcal{T}' = \{U \subset Y; f^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$
Nótese que si f es una aplicación cociente, entonces $(Y, \mathcal{T}')$ es homeomorfo a $(X/\sim_f, \mathcal{T}_p)$, donde "$\sim_f$" es la relación de equivalencia asociada a f. Es decir, $x \sim_f y$ si y sólo si $f(x) = f(y)$.

Ejemplo 3.5.2. Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es una aplicación sobreyectiva, continua y abierta o cerrada, entonces f es una aplicación cociente. En efecto, si $U \in \mathcal{T}'$, por ser

f continua, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Supongamos que $U \subset Y$ cumple que $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Entonces $f(f^{-1}(U)) = U \in \mathcal{T}'$.

Observación 3.5.1. Nótese que existen aplicaciones cocientes que no son ni abiertas ni cerradas. Si $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es la proyección canónica, p es una aplicación cociente, pero p no es ni abierta ni cerrada ya que $p(0)$ no es abierto ni cerrado en $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, pues $p^{-1}(p(0)) = \mathbb{Q}$.

En el Capítulo 8 de este trabajo desempeñan un papel importante las aplicaciones cocientes que siguen siéndolo al restringirlas a cualquier subespacio. Es decir, satisfacen la siguiente condición

Definición 3.5.3. Una aplicación cociente $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ se llama **hereditariamente cociente** si para todo $B \subseteq Y$ $f_{|A} : (A, \mathcal{T}_{|A}) \to (B, \mathcal{T}'_{|B})$ lo es, siendo $A = f^{-1}(B)$.

Ejemplo 3.5.3. Existen aplicaciones cocientes que no son hereditariamente cociente. En efecto, sea $X = ((\{0\} \cup \{1/n; n \in \mathbb{N}\}) \times \{1\}) \cup (\mathbb{R} - \{0\})$ con la topología relativa de $\mathbb{R}^2$ e $Y = \mathbb{R}$ con la topología final inducida por la aplicación $f : X \to Y$ dada por $f(x, y) = x$. Si $B = Y - \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ y $A = f^{-1}(B) = \{(0, 1)\} \cup \{(x, 0); x \not\in \{0\}\} \cup \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ la aplicación $g = f_{|A} : (A, \mathcal{T}_{e|A}) \to (B, \mathcal{T}_{f|B})$ no es una aplicación cociente, pues $\{0\} \not\in \mathcal{T}_{f|B}$, pero $g^{-1}(\{0\}) = \{(0, 1)\}$

A continuación, veremos que las aplicaciones hereditariamente cocientes coinciden con las aplicaciones pseudo-abiertas, que son aquellas que satisfacen la siguiente condición:

Definición 3.5.4. Una aplicación sobreyectiva $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ se llama **pseudo-abierta** si para cada $y \in Y$ y cada entorno abierto U de $f^{-1}(y)$ se tiene que $y \in int f(U)$

Ejemplo 3.5.4. Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es una aplicación abierta o cerrada, $f$es pseudo-abierta. En efecto, si f es abierta, sea $y \in Y$ y $U \in \mathcal{T}$ con $f^{-1}(y) \subset U$. Entonces $y \in f(f^{-1}(y)) \subset f(U) = int f(U)$.
Si f es cerrada, como $X - U$ es cerrado y $f^{-1}(y) \not\subseteq X - U$, $y \not\in f(X - U)$, que es cerrado. Por tanto, $y \in Y - f(X - U) \subset f(U)$

Proposición 3.5.1. *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación sobreyectiva y pseudo-abierta. Entonces, si $B \subset Y$ y $A = f^{-1}(B)$, $h = f_{|A} : (A, \mathcal{T}_{|A}) \to (B, \mathcal{T}_{|B})$ también lo es.*

Demostración. Sea $y \in B$ y $U_1 \in \mathcal{T}_{|A}$ con $h^{-1}(y) \subset U_1$. Entonces, $U_1 = U \cap A$, con $U \in \mathcal{T}$ y $f^{-1}(y) = h^{-1}(y) \subset U_1 \subset U$. Como f es pseudo-abierta, $y \in intf(U)$, luego $y \in intf(U) \cap B = int_B(intf(U) \cap B) \subset int_B(f(U) \cap B) \subset int_B(h(U_1))$. □

Nota 3.5.1. Es inmediato comprobar que si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es sobreyectiva, continua, y pseudo-abierta, entonces f es una aplicación cociente, pues si $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$, para cada $y \in V$, $f^{-1}(V)$ es un entorno abierto de $f^{-1}(y)$, y por ser f pseudo-abierta, $y \in int(f(f^{-1}(V))) = intV$.

Proposición 3.5.2. *Una aplicación sobreyectiva y continua es pseudo-abierta si y sólo si es hereditariamente cociente.*

Demostración. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ sobreyectiva, continua y pseudo-abierta. Por la Nota anterior, f es una aplicación cociente. Además,si $B \subset Y$, $A = f^{-1}(B)$ y $h = f_{|A}$, por la Proposición anterior $h : (A, \mathcal{T}_{|A}) \to (B, \mathcal{T}_{|B})$ es pseudo-abierta, así que también es una aplicación cociente.
Recíprocamente, supongamos que f es hereditariamente cociente. Si $y \in Y$ y $V \in \mathcal{T}$ con $f^{-1}(y) \subseteq V$, sea $Z = (Y - f(V)) \cup \{y\}$, $W = f^{-1}(Z) = (X - f^{-1}(f(V))) \cup f^{-1}(y)$, y $h = f_{|W} : W \to Z$. Entonces, $h^{-1}(y) = f^{-1}(y) = V \cap W \in \mathcal{T}_{|W}$, como por hipótesis h es una aplicación cociente, $\{y\} \in \mathcal{T}'_{|Z}$. Por tanto, existe $O \in \mathcal{T}'$ tal que $\{y\} = O \cap Z$, así que O ha de estar contenido en $f(V)$, y resulta que $y \in intf(V)$. Es decir, f es pseudo-abierta.

□

Capítulo 4

Sucesiones en los espacios topológicos

4.1. Convergencia de sucesiones en un espacio topológico y continuidad en un punto

Definición 4.1.1. Si X es un conjunto, una **sucesión** en X es una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Los valores $f(n) = x_n$ se llaman **términos de la sucesión**, que se representará por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, o simplemente por $\{x_n\}$.

Definición 4.1.2. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge a** x **respecto a** $\mathcal{T}$, y se escribe $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$, si para cada $O \in \mathcal{T}$ tal que $x \in O$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in O$ si $n \geq n_0$.
Es decir, $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ si cualquier entorno de x contiene casi a todos los términos de la sucesión (todos, excepto quizás un número finito).

Nótese que si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$, entonces $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ si y sólo si para cada $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B$ si $n \geq n_0$.

Ejemplo 4.1.1. *a*) Si (X, d) es un espacio (pseudo)métrico $\{x_n\} \xrightarrow{d} x$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_d(x; \epsilon)$ cuando $n \geq n_0$. Por tanto, $\{x_n\} \xrightarrow{d} x$ si y sólo si $lim\, d(x_n, x) \to 0$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$.

b) En $(X, \mathcal{T}_{dis})$, $\{x_n\} \xrightarrow{\mathcal{T}_{dis}} x$ si y sólo si $\{x_n\}$ es casi constante igual a x, es decir, si todos los términos de $\{x_n\}$ son iguales a x a partir de un índice.

c) En $(X, \mathcal{T}_{indis})$, cualquier sucesión converge a cualquier punto.

d) Si en $\mathbb{R}$ se considera la topología conumerable $\mathcal{T}_{con} = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq \mathbb{R}; \mathbb{R} - A \ \textit{es numerable}\}$ $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_{con}} x$ si y sólo si $\{x_n\}$ es casi constante igual a x. Pues si no lo fuese, es decir, si el conjunto $D = \{n \in \mathbb{N}; x_n \neq x\}$ fuese infinito, en el conjunto $U = \mathbb{R} - D \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}_{con}}$ faltarían infinitos términos de la sucesión.

Definición 4.1.3. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio toplógico y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en X, se denotará por $lim\, x_n$ el **conjunto de puntos límites** de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, es decir, el conjunto de puntos a los que converge.

El conjunto $lim\, x_n$ puede ser infinito, pero si $(X, \mathcal{T})$ es T_2, entonces $|lim\, x_n| \leq 1$. Ahora bien, la condición de ser T_2 no es necesaria, como se observa en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{con})$.

Proposición 4.1.1. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subseteq X$. Si $\{x_n\} \subseteq A$ y $x \in A$, $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_{|A}} x$ si y sólo si $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$.*

Demostración. Supongamos que $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_{|A}} x$, y sea $O \in \mathcal{T}$, tal que $x \in O$. Como $O \cap A \in \mathcal{T}_{|A}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in O \cap A$ si $n \geq n_0$. Por tanto, $x_n \in O$ si $n \geq n_0$. Recíprocamente, si $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$, si $O \in \mathcal{T}$ y $x \in O$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in O$ si $n \geq n_0$. Como $O \cap A \in \mathcal{T}_{|A}$, se tiene el resultado. $\square$

Definición 4.1.4. Si X es un conjunto y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, se dice que una sucesión $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ es un **subsucesión** de $\{x_n\}$ si existe una aplicación $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $y_k = x_{n_k}$, donde $n_k = \varphi(k)$.

Nota 4.1.1. Obsérvese que si $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ y $\{x_{n_k}\}$ es una subsucesión de $\{x_n\}$, entonces $x_{n_k} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$.

Definición 4.1.5. Si $(X, \mathcal{T})$ es una espacio topológico y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en X, se dice que x es un **punto adherente** (o de acumulación) de $\{x_n\}$ si para cada $N \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, dado $m \in N$, existe $n_m \geq m$ tal que $x_{n_m} \in N$.
Es decir, x es un punto adherente de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si todo entorno de x contiene infinitos

términos de la sucesión. Se denotará por $Ad(\{x_n\})$ al conjunto de puntos adherentes de $\{x_n\}$.

Proposición 4.1.2. *Si $\{x_n\}_{n\in\mathcal{T}} \subset (X,\mathcal{T})$ es una sucesión, se tiene que $Ad(\{x_n\}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}$, donde los conjuntos $A_k = \{x_n; n \geq k\}$ se denominan colas o secciones de la sucesión.*

Demostración. Si $x \in Ad(\{x_n\})$ y $k \in \mathbb{N}$, existe $n_k \geq k$ tal que para todo $N \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, $x_{n_k} \in N$. Por tanto, $x \in \overline{A_k}$. Recíprocamente, si $x \in \bigcap \overline{A_k}$, dado $k \in \mathbb{N}$ y $N \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}, N \cap A_k \neq \emptyset$, luego existe n_k tal que $x_{n_k} \in N \cap A_k$, por lo que $x \in Ad\{x_n\}$. $\square$

Ejemplo 4.1.2. En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{con}), Ad(\{x_n\}) = \emptyset$ si no hay ningún término que aparezca repetido infinitas veces. En caso contrario, $Ad(\{x_n\})$ es el conjunto de puntos de la sucesión que se repiten infinitas veces.

Proposición 4.1.3. *En un espacio métrico (X,d) si x es un punto adherente de x_n entonces x_n admite una subsucesión que converge a x.*

Demostración. Si $x \in Ad(\{x_n\})$, dado $m \in \mathbb{N}$, existe n_m tal que $x_{n_m} \in B_d(x; 1/m)$. Entonces $\{x_{n_m}\}$ es una subsucesión de $\{x_n\}$, y $x_{n_m} \to x$, pues $d(x_{n_m}, x) \to 0$. $\square$

El resultado anterior no es cierto, en general, si el espacio no es métrico, como se prueba en el siguiente ejemplo, el espacio de Arens, que es numerable y T_2.(Véase el Ejemplo 6.0.3)

4.2. Sucesiones y clausura

Proposición 4.2.1. *Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Entonces*
a) $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe $\{x_n\} \subset A$ tal que $x_n \xrightarrow{d} x$.
b) $x \in A'$ si y sólo si existe $\{x_n\} \subset A$ con $x \in lim\, x_n$ siendo los términos x_n todos distintos entre sí.

Demostración. $a)$ En todo espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ se cumple que si existe $\{x_n\} \subset A$ con $x \in lim\, x_n$, entonces $x \in \overline{A}$. Pues si $O \in \mathcal{T}$ y $x \in O$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in O$ si $n \geq n_0$.

Recíprocamente, supongamos que $x \in \overline{A}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in B_d(x; 1/n) \cap A$, y $\{x_n\} \to x$, pues $d(x_n, x) < 1/n$.
b) Si $x \in A'$, existe $x_1 \in B_d(x; 1) \cap (A - \{x\})$. Si $r_2 = min\{1/2, d(x, x_1)\}$, existe $x_2 \in B_d(x; r_2) \cap (A - \{x_1\})$. En general, tomando $r_n = min\{1/n, d(x, x_{n-1})\}$, se obtiene una sucesión $\{x_n\}$, cuyos términos son todos distintos entre sí, y que converge a x, pues $d(x_n, x) < 1/n$. □

Corolario 4.2.1. Si (X, d) es un espacio métrico, son equivalentes:
1) A es cerrado.
2) Si $\{x_n\} \subset A$ y $x \in lim\, x_n$, entonces $x \in A$.

Es decir, en un espacio métrico los subconjuntos cerrados son aquellos que contienen los puntos límites de sus sucesiones. Este resultado no es cierto en cualquier espacio topológico, como se comprueba en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2.1. En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{con})$, las únicas sucesiones que convergen son las casi constante. Si $A = [0, 1], A = \mathbb{R}$, pero no existe ninguna sucesión $\{x_n\} \subset A$ tal que $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_{con}} 2$.

Definición 4.2.1. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $A \subseteq X$, el conjunto $lim\, A = \{x \in X;\ \text{existe } \{x_n\} \subset A \text{ } con \text{ } x \in lim\, x_n\}$, se llama **clausura secuencial o s-clausura** de A.

Nótese que $A \subseteq lim\, A \subseteq \overline{A}$, y que si $(X, \mathcal{T})$ es metrizable entonces $A = lim\, A = \overline{A}$.

Ejemplo 4.2.2. Si se considera $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{con})$ y $A = [0, 1]$ entonces $A = lim\, A$ pero $\overline{A} = \mathbb{R}$, ya que las únicas sucesiones convergentes en A son las casi constantes, y los únicos cerrados propios en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{con})$ son los conjuntos numerables.

Definición 4.2.2. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, $A \subseteq X$ se llama **cerrado secuencial o s-cerrado** si lim A = A.
Es decir, A es s-cerrado si contiene los puntos límites de todas sus sucesiones.

Es evidente que si A es cerrado, A es s-cerrado, pero el recíproco no es cierto, como se comprueba en el ejemplo anterior.

Proposición 4.2.2. *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, entonces $lim : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ dado por $lim(A) = lim\, A$ cumple las siguientes propiedades:*

1) $lim\, \emptyset = \emptyset$.

2) Si $A \subseteq B$, $lim\, A \subseteq lim\, B$.

3) $lim\, (A \cup B) = lim\, A \cup lim\, B$.

4) $lim\, A \subseteq lim\, (lim\, A)$.

Demostración. 3) Si $x \in lim\, x_n$ con $\{x_n\} \subset A \cup B$ alguno de los conjuntos $\mathbb{N}_A = \{n \in \mathbb{N}; x_n \in A\}$ o $\mathbb{N}_B = \{n \in \mathbb{N}; x_n \in B\}$ es infinito. Si $\mathbb{N}_A$ lo es, $y_m = \{x_m; m \in \mathbb{N}_A\}$ es una subsucesión de $\{x_n\}$, y $x \in lim\, y_m$. Por tanto $x \in lim\, A$. □

Observación 4.2.1. *lim* es un operador que satisface las propiedades de un operador clausura de Kuratowski, salvo, en general, la idempotencia.
Es decir, (X, lim) es un espacio de clausura de Čech o espacio pretopológico.

Ejemplo 4.2.3. En $X = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times \{0\}) \cup \{(0,0)\}$, para cada punto (n,m) se considera la familia $\mathcal{B}_{(n,m)}$ dada por:
- Si $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_{(n,m)} = \{(n,m)\}$.
-Si $(n,0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_{(n,0)} = \{(n,0)\} \cup \{(n,m); existe\ \ q \in \mathbb{N}\ \ con\ \ m \geq q\}$.
-$\mathcal{B}_{(0,0)} = \{U \subset X; (0,0) \in U$ y existe $F \subset \mathbb{N}$ finito tal que $U \in \mathcal{B}_{(n,0)}$ para todo $n \in \mathbb{N} - F\}$.
Entonces existe una única topología $\mathcal{T}$ sobre X tal que una base de entornos de cada punto de x son las familias dadas, y en $(X, \mathcal{T})$ se tiene que $lim(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times \{0\})$, pero $lim(lim(\mathbb{N} \times \mathbb{N})) = X$.

4.3. Sucesiones y continuidad

Al igual que en los espacios euclídeos, las aplicaciones continuas entre espacios métricos pueden caracterizarse mediante sucesiones: son aquellas que mantienen la convergencia de las sucesiones. Es decir, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 4.3.1. *Si* $f : (X,d) \to (Y,d')$ *es una aplicación entre espacios métricos, son equivalente:*

a) f *es continua en* x.

b) Si $x_n \xrightarrow{d} x$, *entonces* $f(x_n) \xrightarrow{d'} f(x)$

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Dada $B_{d'}(f(x);\epsilon)$, por ser f continua, existe $B_d(x;\delta)$ tal que $f(B_d(x;\delta)) \subset B_{d'}(f(x);\epsilon)$. Como $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$, casi toda la sucesión $\{x_n\}$ está contenida en $B_d(x;\delta)$, así que casi toda la sucesión $f(x_n)$ está en $B_{d'}(f(x);\epsilon)$.

$b) \Rightarrow a)$ Si f no fuese continua en x, existiría $\epsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(B_d(x;1/n)) \not\subseteq B_{d'}(f(x);\epsilon)$. Por tanto, existe $x_n \in X$ tal que $d(x,x_n) < 1/n$ y $d'(f(x_n), f(x)) > \epsilon$. Pero entonces se tendría que $x_n \xrightarrow{d} x$ y $f(x_n) \stackrel{d'}{\not\to} f(x)$. □

Nota 4.3.1. La implicación $a) \Rightarrow b)$ de la proposición anterior es cierta para cualquier aplicación entre espacios topológicos, pero $b) \Rightarrow a)$ no, como se comprueba en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.3.1. Sea $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{con}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ dada por $f(x) = x$. Entonces, si $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_{con}} x$, x_n es casi constante igual a x, por tanto $f(x_n) = x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_e} x$. Sin embargo, f no es continua, pues $A = [0,1]$ es cerrado en $\mathcal{T}_e$, pero $f^{-1}(A) = A$ no lo es en $\mathcal{T}_{con}$.

Se plantea así el problema de determinar la clase de espacios topológicos en los que las aplicaciones continuas sobre ellos son precisamente las que conservan las convergencias de sucesiones, cuya respuesta se indica en el Capítulo 7.

En el siguiente resultado se comprueba que las sucesiones convergentes en la topología producto son aquellas que convergen coordenada a coordenada.

Proposición 4.3.2. *Si $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$ es una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{i \in I} X_i$, $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_\pi} x$ si y sólo si $p_i(x_n) \xrightarrow{\mathcal{T}_i} p_i(x)$, para todo $i \in I$.*

Demostración. Si $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_\pi} x$, por ser $p_i : X \to X_i$ continua $p_i(x_n) \to p_i(x)$.
Recíprocamente, supongamos que $p_i(x_n) \xrightarrow{\mathcal{T}_i} p_i(x)$, y sea $U = \bigcap_{i \in J} p_i^{-1}(V_i)$ un abierto básico de $\mathcal{T}_\pi$, con $x \in U$, donde $J \subset I$ es finito, con $V_i \in \mathcal{T}_i$. Como $p_i(x_n) \xrightarrow{\mathcal{T}_i} p_i(x) \in V_i$ para todo $i \in J$, existen naturales $\{n_i\}_{i \in J}$ tales que $p_i(x_n) \in V_i$ si $n \geq n_i$. Tomando $n_0 = max\,\{n_i\}_{i \in J}$ se tiene que $p_i(x_{n_0}) \in U$, así que $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_\pi} x$. □

Nota 4.3.2. El resultado anterior no es cierto en general, si sobre X se considera la topología caja, es decir, la generada por la familia $\{\prod_{i \in I} O_i; O_i \in \mathcal{T}_i\}$. En efecto, en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con dicha topología, si x_n tiene sus coordenadas iguales a $1/n$ en las n primeras posiciones y nulas en las demás, $p_m(x_n) \xrightarrow{\mathcal{T}_e} 0$, pero $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a x, donde $p_n(x) = 0$, ya que $U = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}}(-1/n, 1/n)$ no contiene ninguna cola de la sucesión.

Observación 4.3.1. Si $A \subseteq \mathbb{R}$, $(X_i, \mathcal{T}_i) = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ e $I = \mathbb{R}$. Entonces $X = A^{\mathbb{R}} = \{f : A \to \mathbb{R}\}$ y por tanto, se tiene que $f_n \xrightarrow{\mathcal{T}_\pi} f$ si y sólo si $f_n(x) \to f(x)$, para cada $x \in A$. Por eso la topología $\mathcal{T}_\pi$ sobre X suele llamarse **topología de la convergencia puntual**.

Capítulo 5

Redes y filtros

5.1. Redes

Los primeros estudios para obtener una teoría de convergencia en espacios topológicos generales análoga a la de las sucesiones en los espacios métricos se deben a E.H. Moore (1915) y a Smith (1922). Los objetos definidos por ellos se llama *redes o sucesiones de Moore-Smith* (ver [10]).

La noción de red está inspirada en la noción de sucesión, la cual nos sirve para los espacios métricos pero no para los espacios topológicos, pues no resulta suficiente para caracterizar la clausura de un conjunto o la continuidad de una función.

Definición 5.1.1. Se dice que un conjunto no vacío Λ es un **conjunto dirigido** si existe una relación $\leq$ sobre Λ de forma que:

1. Si $\lambda \in \Lambda$ entonces $\lambda \leq \lambda$.
2. Dados $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda$, si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\lambda_2 \leq \lambda_3$, entonces $\lambda_1 \leq \lambda_3$.
3. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, entonces existe $\lambda_3 \in \Lambda$ de forma que $\lambda_1 \leq \lambda_3$ y $\lambda_2 \leq \lambda_3$.

Ejemplo 5.1.1. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $\mathcal{B}_x$ es una base de entornos de x, entonces $\mathcal{B}_x$ es un conjunto dirigido definiendo en $\mathcal{B}_x$ la relación $M \leq N$ si $N \subset M$. En efecto, si $M, N \in \mathcal{B}_x$, $M \cap N \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, luego existe $L \in \mathcal{B}_x$ tal que $L \subseteq M \cap N$, así que $M \leq L$ y $N \leq L$.

Definición 5.1.2. Sea X un conjunto. Una **red** en X es una función $D : \Lambda \longrightarrow X$, donde Λ es un conjunto dirigido.

Notaremos al punto $D(\lambda)$ como x_λ y la red por $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Definición 5.1.3. Si $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una red en X, los conjuntos $T_\mu(x_\lambda) = \{x_\lambda;\ \mu \leq \lambda\}$ se llaman **colas** o **secciones** de la red asociada a μ.

Nótese que $T_\mu(x_\lambda) \neq \emptyset$ para todo $\mu \in \Lambda$, y que, dados $\mu, \mu' \in \Lambda$, por ser $(\Lambda, \leq)$ un conjunto dirigido existe $\mu'' \geq \mu, \mu'$. Por tanto, $T_{\mu''}(x_\lambda) \subset T_\mu(x_\lambda) \cap T_{\mu'}(x_\lambda)$.

Definición 5.1.4. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una red en X y $x \in X$. Se dice que la red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ **converge** a x respecto a $\mathcal{T}$ si para cada $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in V$ para cada $\lambda \geq \lambda_0$.

Esta condición se expresa habitualmente diciendo que una red converge a un punto si está finalmente en cualquier entorno de dicho punto, y se escribirá $x_\lambda \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ ó $D \xrightarrow{\mathcal{T}} x$.

Observación 5.1.1. Nótese que $x_\lambda \to x$ si y sólo si para cada $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $T_{\lambda_0}(x_\lambda) \subseteq V$.

Ejemplo 5.1.2.

1. Si $\mathcal{B}_x$ es una base de entornos de x en $(X, \mathcal{T})$, $(\mathcal{B}_x, \leq)$ es un conjunto dirigido, siendo $\leq$ la relación del ejemplo anterior. Entonces la aplicación $D : (\mathcal{B}_x, \leq) \longrightarrow X$ que a cada $B \in \mathcal{B}_x$ le asocia un punto $x_B \in B$, es una red y $D \xrightarrow{\mathcal{T}} x$. En efecto, si $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, sea $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in \mathcal{B}_x \subset V$. Entonces, si $\mathcal{B}_x \leq \mathcal{B}'_x$, $\mathcal{B}'_x \subset \mathcal{B}_x$, y por tanto, $D(\mathcal{B}'_x) = x_{\mathcal{B}'_x} \in V$.

2. Sea $\Lambda = \{q \in \mathbb{Q} :\ q \leq 0\}$ con el orden habitual y $D : \Lambda \to \mathbb{R}$ la inclusión canónica. Entonces $x_\lambda \xrightarrow{\mathcal{T}_e} 0$.

Se puede generalizar el concepto de subsucesión de una sucesión para una red de la siguiente forma.

Definición 5.1.5. Si Λ es un conjunto dirigido, un subconjunto $\Lambda' \subseteq \Lambda$ se llama **cofinal** si para cada $\lambda \in \Lambda$ existe un elemento $\lambda' \in \Lambda'$ tal que $\lambda \leq \lambda'$.

Definición 5.1.6. Sean $D : \Lambda \to X$ y $D' : \Lambda' \to X$ redes en X. Se dice que D' es una **subred** de D si existe una función $f : \Lambda' \to \Lambda$ de forma que,

1. f es monótona,es decir, si $\alpha \preceq \beta$, entonces $f(\alpha) \leq f(\beta)$.
2. f es cofinal, es decir, $f(\Lambda')$ es un subconjunto cofinal de Λ.
3. $\Lambda'(\alpha) = \Lambda(f(\alpha))$.

La subred D' se denotará por $\{x_{f(\lambda)'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$.

Ejemplo 5.1.3. 1. Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión. La aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} n & \text{si } n < 10 \\ 10 & \text{si } n \geq 10 \end{cases}$$

es monótona, pero no cofinal.

Por otra parte, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$g(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es par} \\ 2 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

es cofinal pero no monótona.

Por tanto, ni $\{x_{f(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ni $\{x_{g(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ son subredes de $\{x_n\}$.

2. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una sucesión y $f : [1,\infty) \to \mathbb{N}$ dada por $f(t) = [t]$. Entonces $\{x_{f(t)}\}_{t\in[0,\infty)}$ es una subred de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que no es subsucesión.

Veamos que si una red converge a un punto, todas sus subredes convergen a él.

Proposición 5.1.1. *Si $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ y $\{x_{f(\lambda')}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ es una subred, entoces $\{x_{f(\lambda')}\}_{\lambda'\in\Lambda} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$.*

Demostración. Si $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, por hipótesis existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in V$ si $\lambda \geq \lambda_0$. Por ser $f(\Lambda')$ cofinal en Λ, existe $\lambda_0' \in \Lambda'$ con $f(\lambda_0') \geq \lambda_0$, y por ser f monótona, si $\lambda' \geq \lambda_0'$ entonces $f(\lambda') \geq f(\lambda_0') \geq \lambda_0$. Por tanto, $f_{f(\lambda')} \in V$, y se tiene el resultado. $\square$

Definición 5.1.7. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, $x \in X$ se llama **punto adherente** a una red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ si para cada $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ y cada $\lambda \in \Lambda$ existe $\mu \in \Lambda$ tal que $\mu \geq \lambda$ y $x_\mu \in V$.
El conjunto de puntos adherentes a $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ se denotará por $Ad(\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$.

Proposición 5.1.2. $Ad(\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}) = \bigcap\limits_{\mu\in\Lambda} \overline{T_\mu}(x_\lambda)$

Demostración. Si $x \in Ad(\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ dados $\mu \in \Lambda$ y $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ existe $\nu \geq \mu$ tal que $x_\nu \in V$. Por tanto, $x \in \overline{T_\mu}(x_\lambda)$.
Recíprocamente, si $x \in \overline{T_\mu}(x_\lambda)$ para todo $\mu \in \Lambda$, dados $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ y $\mu \in \Lambda$, $V \cap T_\mu(x_\lambda) \neq \emptyset$,

luego existe $\nu \geq \mu$ con $x_\nu \in V$. Por tanto, x es adherente a $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. $\square$

El siguiente resultado generaliza para redes una propiedad de las subsucesiones de una sucesión en un espacio métrico, que dice que un punto x es de acumulación de una sucesión x_n si x_n admite una subsucesión convergente a x.

Proposición 5.1.3. *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, $\{(x)_{\lambda\in\Lambda}\} \subset X$ una red, y $x \in X$, son equivalentes:*

a) $x \in Ad(\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$.

b) Existe una subred $\{(x)_{f(\lambda')}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ que converge a x.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Consideremos en el conjunto

$$\Lambda' = \{(\lambda, V)\ ;\ \lambda \in \Lambda,\ V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}\ \ y\ \ x_\lambda \in V\}$$

la siguiente relación de preorden: $(\lambda, V) \leq (\mu, W)$ si $\lambda \leq \mu$ y $W \subseteq V$. Entonces $(\Lambda', \leq)$ es dirigido, pues si (λ, V) y $(\mu, W) \in \Lambda'$, por hipótesis existe $\nu \geq \lambda, \mu$ tal que $x_\nu \in V \cap W'$. Por otra parte, $f : \Lambda' \to \Lambda$ dada por $f(\lambda, V) = \lambda$ es creciente y sobreyectiva, así que $\{x_{f(\lambda,V)}\}_{(\lambda,V)\in\Lambda'}$ es una subred de $\{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\}$ que converge a x. Pues si $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ y $\lambda \in \Lambda$,existe $\mu \geq \lambda$ tal que $x_\mu \in V$, luego $(\mu, V) \in \Lambda'$. Por tanto, si $(\nu, W) \in \Lambda'$ con $(\mu, V) \leq (\nu, W)$, $x_{f(\nu,W)} = x_\nu \in W \subset V$.

$b) \Rightarrow a)$ Supongamos que $\{(x)_{f(\lambda')}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ es una subred de $\{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\}$ que converge a x, y sean $\lambda \in \Lambda$ y $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$. Por hipótesis, existe $\lambda'_0 \in \Lambda'$ tal que $x_{f(\lambda')} \in V$ si $f(\lambda') \geq f(\lambda'_0)$. Pero por ser $f(\Lambda')$ cofinal, existe $\mu'_0 \in \Lambda'$ tal que $f(\mu'_0) \geq \lambda$. Como Λ' es dirigido, existe $\nu'_0 \geq \lambda'_0, \mu'_0$, así que por ser f monótona $f(\nu'_0) \geq f(\lambda'_0)$ y $f(\nu'_0) \geq f(\mu'_0) \geq \lambda$. Por tanto, $f(\nu'_0)$ verifica las dos propiedades buscadas: por un lado, $f(\nu'_0) \geq \lambda$, y por otro, $x_{f(\nu'_0)} \in V$, ya que $f(\nu'_0) \geq f(\lambda'_0)$ $\square$

A continuación, se comprobará cómo mediante la noción de red se pueden extender a un espacio topológico cualquiera las caracterizaciones de ciertas propiedades topológicas que se obtuvieron en los espacio métricos mediante la convergencia de sucesiones.

Proposición 5.1.4. *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, y $A \subseteq X$ son equivalentes:*

a) $x \in \overline{A}$.

b) Existe una red $\{(x_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda} \subset A$ *tal que* $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$.

Demostración. *a)* $\Rightarrow$ *b)* Sea $(\Lambda, \leq)$ el conjunto dirigido del Ejemplo 5.1.1. Es decir, $\Lambda = \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ y $V \leq W$ si $W \subseteq V$. Si $x \in \overline{A}$, dado $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ existe $x_V \in A \cap V$. Tomando $D : (\Lambda, \leq) \to X$ como $D(V) = x_V$, se obtiene una red que converge x. En efecto, dado $W \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, sea $\lambda_0' = W$. Si $\lambda = V \geq W$, $V \subseteq W$, así que $x_\lambda = x_V \in V \subseteq W$.

b) $\Rightarrow$ *a)* Sea $\{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\}$ una red en A tal que $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \to x$, y supongamos que $x \notin \overline{A}$. Entonces, existiría $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ abierto tal que $V \subset X - A$, y la red no estaría finalmente en V. □

La propiedad de Hausdorff puede también caracterizarse mediante convergencia de redes, pues se tiene,

Proposición 5.1.5. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *es un espacio topológico, son equivalentes:*

a) $(X, \mathcal{T})$ *es* T_2.

b) Toda red convergente en X *tiene un único punto límite.*

Demostración. *a)* $\Rightarrow$ *b)* Supongamos que $\{(x_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge a x e y, con $x \neq y$. Como X es T_2, existen $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ y $W \in \mathcal{N}_y^{\mathcal{T}}$ disjuntos, y $\mu, \nu \in \Lambda$ tales que $x_\lambda \in V$ si $\lambda \geq \mu$ y $x_\lambda \in W$ si $\lambda \geq \nu$. Tomando $\alpha \geq \mu, \nu$, se tendría que $x_\lambda \in V \cap W$ si $\lambda \geq \alpha$.

b) $\Rightarrow$ *a)* Si X no es T_2 existen $x, y \in X$ con $x \neq y$, tales que para todo par $(V, W) \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \times \mathcal{N}_y^{\mathcal{T}}$ se tendría que $V \cap W \neq \emptyset$. Pero $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \times \mathcal{N}_y^{\mathcal{T}}$ es un conjunto dirigido para la relación $(V, W) \leq (V', W')$ si $V' \subseteq V$ y $W' \subseteq V$. Entonces, tomando $x_{(V,W)} \in V \cap W$ se obtendría una red convergente a x e y. □

Para una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ la continuidad en un punto queda caracterizada por convergencia de redes, de forma análoga a como se hizo para las aplicaciones entre espacios métricos:

Proposición 5.1.6. *Para una aplicación* $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$*, son equivalentes:*

a) f es continua en x.

b) Si $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$, entonces $\{f(x_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda} \xrightarrow{\mathcal{T}'} f(x)$.

Demostración. *a)* $\Rightarrow$ *b)* Supongamos que $\{(x_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ y sea $W \in \mathcal{N}^{\mathcal{T}'}_{f(x)}$. Por ser f continua en x, $V = f^{-1}(W) \in \mathcal{N}^{\mathcal{T}'}_x$, así que $\{(x_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ está finalmente en V. Por tanto, $\{f(x_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ está finalmente en W.

b) $\Rightarrow$ *a)* Si $W \in \mathcal{N}^{\mathcal{T}'}_{f(x)}$ y $f^{-1}(W) \notin \mathcal{N}^{\mathcal{T}}_x$, para cada $O \in \mathcal{T}$ con $x \in O$, $O \not\subset f^{-1}(W)$, es decir, existe $x_0 \in O - f^{-1}(W)$. Como $\mathcal{T}_x = \{O \in \mathcal{T};\ x \in O\}$ es un conjunto dirigido respecto al orden del Ejemplo 5.1.1, $\lambda : \mathcal{T}_x \to X$ dada por $\lambda(O) = x_0$ es una red que converge a x. Sin embargo, $\{f(x_0)\}_{O\in\mathcal{T}_x} \nrightarrow f(x)$. $\square$

Igual que se hizo para las sucesiones en un producto de espacios, se demuestra el siguiente resultado:

Proposición 5.1.7. *Si $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos, una red $\{(x_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $x \in \prod X_i$ en $\mathcal{T}_\pi$ si y sólo si $\{(p_i(x_\lambda))\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $p_i(x)$, para cada $i \in I$.*

5.2. Filtros

Definición 5.2.1. Dado un conjunto X, un **filtro** $\mathcal{F}$ en X es una colección de subconjuntos no vacíos de X tal que:
1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
2. Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
3. Si $F \in \mathcal{F}$ y $F \subseteq G$ entonces $G \in \mathcal{F}$.

Se denotará por Fil(X) el conjunto de filtros sobre X.

Ejemplo 5.2.1.
1. Si $A \in \mathcal{P}(X) - \emptyset$, entonces la familia $[A] = \{F \subseteq X;\ A \subseteq F\}$ es un filtro sobre X llamado filtro principal generado por A. Nótese que si X es finito, todos los filtros sobre X son de este tipo.

2. Si $\mathcal{F} \in Fil(X)$ y $A \subseteq X$, la familia $\mathcal{F}_A = \{G \subset X; G \supset F \cap A$ para algún $F \in \mathcal{F}\}$ es un filtro llamado *filtro inducido por $\mathcal{F}$ sobre A*.

3. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y $x \in X$, el conjunto $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ es un filtro sobre X.

4. Dado un conjunto infinito X, la colección $\mathcal{F}_{cof} = \{A \subseteq X; X - A \text{ es finito}\}$ es también un filtro, llamado *filtro de Fréchet o filtro cofinito*. En efecto,

   a) $X \in \mathcal{F}_{cof}$ luego $\mathcal{F}_{cof} \neq \emptyset$. Además, $\emptyset \notin \mathcal{F}_{cof}$, ya que $X - \emptyset = X$ no es finito.

   b) Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{cof}$, entonces $X - (F_1 \cap F_2) = (X - F_1) \cup (X - F_2)$ es finito, pues si $X - F_1$ y $X - F_2$ lo son luego $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_{cof}$.

   c) Sea $G \subset X$ tal que $F \subset G$ para algún $F \in \mathcal{F}_{cof}$. Entonces $X - G \subset X - F$. Como $X - F$ es finito, $X - G$ es finito, luego $G \in \mathcal{F}_{cof}$.

Definición 5.2.2. Se dice que un subconjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ es una **base del filtro** $\mathcal{F}$ si para todo $F \in \mathcal{F}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset F$, es decir, si

$$\mathcal{F} = \{F \subset X; \text{ existe } B \in \mathcal{B} \text{ con } B \in F\}$$

Definición 5.2.3. Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de X. Se dice que $\mathcal{B}$ es **base de filtro sobre X** si:
1. $\mathcal{B} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{B}$
2. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.
Si $\mathcal{B}$ es una base de filtro sobre X,

$$< \mathcal{B} >= \{F \subset X; \text{ existe } B \in \mathcal{B} \text{ con } B \in \mathcal{F}\}$$

se llama **filtro generado** por $\mathcal{B}$

Normalmente los filtros se definen indicando solo algunos de sus elementos y a partir de estos y utilizando la Propiedad 3 de la definición de filtro los demás. Es decir, los elementos del filtro son los superconjuntos de los elementos de una base.

Ejemplo 5.2.2. 1. Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Entonces, si $\mathcal{B}_x^{\mathcal{T}}$ es una base de entornos de x, $\mathcal{B}_x^{\mathcal{T}}$ es base del filtro $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$.

2. Sea $\mathcal{F} \in Fil(X)$ y $A \subseteq X$. Si $F \cap A \notin \emptyset$ para $F \in \mathcal{F}$, entonces $\{F \cap A; F \in \mathcal{F}\}$ es una base del filtro $\mathcal{F}_A$.

3. Si $\{(x_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una red en X, la familia de sus colas o secciones $\{T_\mu(x_\lambda)\}_{\lambda,\mu\in\Lambda}$ (ver Definición 5.1.3.) es una base de filtro, y el filtro que genera se llama filtro de las secciones de la red.

Nota 5.2.1. Sean X e Y conjuntos, y $f : X \to Y$ una aplicación. Entonces, si $\mathcal{F} \in Fil(X)$, $f(\mathcal{F}) = \{f(F);\ F \in \mathcal{F}\}$ no es un filtro en general. Por ejemplo, cuando f no es sobreyectiva. Ahora bien, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 5.2.1. *$f(\mathcal{F})$ es base de filtro.*

Demostración. Si $f(F_1),\ f(F_2) \in f(\mathcal{F})$, $f(F_1 \cap F_2) \in f(\mathcal{F})$ y $f(F_1 \cap F_2) \subset f(F_1) \cap f(F_2)$.

□

Observación 5.2.1. Si $\mathcal{F} \in Fil(Y)$, $f^{-1}(\mathcal{F}) = \{f^{-1}(F);\ F \in \mathcal{F}\}$ no es base de filtro en general, pues puede ocurrir que exista $F \in \mathcal{F}$ con $f^{-1}(F) = \emptyset$.

La relación "ser más fino que" es una relación de orden parcial en $Fil(X)$.

Ejemplo 5.2.3. Si $A \subseteq X$ y $x \in A$, $[A] \preceq [x]$.

5.3. Convergencia de Filtros

El concepto de convergencia en términos de filtros fue introducido por primera vez por Henri Cartan y más tarde desarrollado por Bourbaki (1940). Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, se definirá punto límite y punto de acumulación de un filtro y de esta forma podremos caracterizar mediante filtros conceptos topológicos como la clausura y la compacidad, como ocurre en los espacios métricos con las sucesiones.

Definición 5.3.1. Sea $\mathcal{F}$ un filtro en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Se dice que $\mathcal{F}$ **converge** a x, y lo denotamos por $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$, si $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{F}$.
Si $\mathcal{B}$ es base de filtro, se dice que $\mathcal{B} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ si para cada $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq V$. Por tanto, $\mathcal{B} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ si $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \subseteq \langle B \rangle$.

Ejemplo 5.3.1. 1. En cualquier espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$, y $[x] \xrightarrow{\mathcal{T}} x$.

2. En $(X, \mathcal{T}_{dis})$ $[x]$ es el único filtro que converge a x.

3. En un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, $\mathcal{F} = \{X\} \to x$ si y sólo si $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} = \{X\}$.

Definición 5.3.2. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $\mathcal{F} \in Fil(X)$ se dice que x es un **punto adherente** a $\mathcal{F}$ si $V \cap F \neq \emptyset$ para todo $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ y todo $F \in \mathcal{F}$.
Es decir, x es un punto adherente a $\mathcal{F}$ si y sólo si $x \in \bigcap\{\overline{F};\ F \in \mathcal{F}\}$.

El conjunto de puntos adherentes a $\mathcal{F}$ se denotará por $Ad(\mathcal{F})$.
Cuando $\mathcal{B}$ es una base de filtro, se dice que x es adherente a $\mathcal{B}$ si $B \cap V \neq \emptyset$, para todo $B \in \mathcal{B}$ y todo $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$. Es decir, x es adherente a $\mathcal{B}$ si $x \in Ad(\langle B \rangle)$.

Ejemplo 5.3.2. Consideremos $([0,1], \mathcal{T})$, donde $\mathcal{T} = \{\emptyset, [0,1], [0,1)\}$. Si $\mathcal{F} = \{[0,1]\}$, entonces $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}} 1$, pero $Ad(\mathcal{F}) = [0,1]$.

Proposición 5.3.1. *1. Si $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$, $x \in Ad(\mathcal{F})$.*

2. Si $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ y $\mathcal{F} \preceq \mathcal{G}$, entonces $\mathcal{G} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$.

Demostración.

1. Si $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$, entonces $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{F}$, así que si $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ y $F \in \mathcal{F}$, $V \cap F \neq \emptyset$.

2. Si $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{G}$. □

Proposición 5.3.2. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $\mathcal{F} \in Fil(X)$. Entonces $x \in Ad(\mathcal{F})$ si y sólo si existe $\mathcal{G} \in Fil(X)$ más fino que $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{G} \to x$.*

Demostración. Si $x \in Ad(\mathcal{F})$, entonces $\mathcal{B} = \{V \cap F;\ V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ y $F \in \mathcal{F}\}$ es base de filtro en X, pues $V \cap F \neq \emptyset$ ya que $x \in Ad(\mathcal{F})$. Además si $B_1 = V_1 \cap F_1$ y $B_2 = V_2 \cap F_2$ son conjuntos de $\mathcal{B}$, entonces $B_3 = B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}$. Tomando $\mathcal{G} = \langle \mathcal{B} \rangle$ se tiene el resultado, pues $\mathcal{G}$ es más fino que $\mathcal{F}$ y que $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$.
Recíprocamente, si existe $\mathcal{G} \in Fil(X)$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ y $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{G}$, entonces $F \cap V \neq \emptyset$, si $F \in \mathcal{F}$ y $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$. Por tanto, $x \in Ad(\mathcal{F})$. □

A continuación, se comprueba cómo la clausura de un conjunto, la propiedad de Hausdorff o la continuidad de una función en un punto, pueden caracterizarse en términos de la convergencia de filtros.

Proposición 5.3.3. *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $A \subseteq X$, son equivalentes:*

a) $x \in \overline{A}$.

b) *Existe* $\mathcal{F} \in Fil(X)$ *tal que* $A \in \mathcal{F}$ *y* $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$.

Demostración. *a)* $\Rightarrow$ *b)* Si $x \in \overline{A}$, $V \cap A \neq \emptyset$ para cada $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, y $\mathcal{B} = \{V \cap A;\ V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}\}$ es base de filtro en X. Si $\mathcal{F} = \langle \mathcal{B} \rangle$, entonces $A \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{F}$.

b) $\Rightarrow$ *a)* Si $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{F}$ y $A \in \mathcal{F}$, entonces $V \cap A \neq \emptyset$ para cada $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, así que $x \in \overline{A}$.

□

Proposición 5.3.4. $(X, \mathcal{T})$ *es un espacio* T_2 *si y sólo si todo filtro en* X *tiene un punto límite como máximo.*

Demostración. Si $(X, \mathcal{T})$ es T_2 y existe $\mathcal{F} \in Fil(X)$ que converge a x, $y \in X$ con $x \neq y$, existirían $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ y $W \in \mathcal{N}_y^{\mathcal{T}}$ disjuntos. Pero por hipótesis, $U, V \in \mathcal{F}$, y $\mathcal{F}$ no sería filtro. Recíprocamente, supongamos que $(X, \mathcal{T})$ no es T_2. Entonces, existirían $x, y \in X$ con $x \neq y$ y $V \cap W \neq \emptyset$, para cada $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ y $W \in \mathcal{N}_y^{\mathcal{T}}$. Si $\mathcal{B} = \{V \cap W;\ V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \text{ y } W \in \mathcal{N}_y^{\mathcal{T}}\}$, entonces $\mathcal{B}$ es base de filtro, y se tendrá que $\langle B \rangle$ converge a x e y, pues es más fino que $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ y $\mathcal{N}_y^{\mathcal{T}}$. □

Proposición 5.3.5. *Dada una aplicación* $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$, *son equivalentes:*

a) f *es continua en* x.

b) *Si* $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$, *entonces* $\langle f(\mathcal{F}) \rangle \xrightarrow{\mathcal{T}'} f(x)$.

Demostración. *a)* $\Rightarrow$ *b)* Si $W \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ existe $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ tal que $f(V) \subset W$, por ser f continua en x. Como $V \in \mathcal{F}$ ya que $\mathcal{F} \to x$, se tiene que $W \in \langle f(\mathcal{F}) \rangle$, así que $\mathcal{N}_{f(x)}^{\mathcal{T}'} \subseteq \langle f(\mathcal{F}) \rangle$.

b) $\Rightarrow$ *a)* Si $\mathcal{F} = \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, entonces $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$, luego por hipótesis se tiene que $\langle f(\mathcal{F}) \rangle \xrightarrow{\mathcal{T}'} f(x)$. Por tanto, $\mathcal{N}_{f(x)}^{\mathcal{T}'} \subset \langle f(\mathcal{F}) \rangle$. Así pues, si $W \in \mathcal{N}_{f(x)}^{\mathcal{T}'}$, existe $f(V) \subset W$ con $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, por lo que f es continua en x. □

En cuanto a la convergencia de los filtros en una topología producto, se tiene un resultado análogo al obtenido para las redes.

Proposición 5.3.6. *Si* $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ *es una familia de espacios topológicos.* $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}_\pi} x$ *si y sólo si* $p_i(\mathcal{F}) \xrightarrow{\mathcal{T}_i} p_i(x)$ *para cada* $i \in I$.

Demostración. Si $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}_\pi} x$, como p_i es continua en x para cada $i \in I$, se tiene que $p_i(\mathcal{F}) \xrightarrow{\mathcal{T}_i} p_i(x)$.
Recíprocamente, supongamos que $p_i(\mathcal{F}) \xrightarrow{\mathcal{T}_i} p_i(x)$, y sea $V = \bigcap\limits_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(U_k)$ un entorno básico de x en $\mathcal{T}_\pi$, siendo $U_k \in \mathcal{N}_{p_{i_k}}(x_{i_k})$. Entonces, $U_k \in p_{i_k}(\mathcal{F})$ para $k = 1, \ldots, n$, por lo que existe $F_k \in \mathcal{F}$ con $p_{i_k}(F_k) \subseteq U_k$. Como $\bigcap\limits_{k=1}^{n} F_k \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(U_k) = V$, $V \in \mathcal{F}$, y por tanto $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ □

5.4. Ultrafiltros

En esta sección se estudiarán los elementos maximales de la relación de orden definida en *Fil(X)*, que son llamados *ultrafiltros*.

Definición 5.4.1. Dado un conjunto X, un **ultrafiltro** $\mathcal{U}$ en X es un elemento maximal de $(Fil(X), \leq)$, es decir, un filtro tal que no existe ningún filtro en X más fino que $\mathcal{U}$.

Por tanto, $\mathcal{U} \in Fil(X)$ es un *ultraflitro* sobre X si para todo $\mathcal{F} \in Fil(X)$ tal que $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$, se tiene $\mathcal{F} = \mathcal{U}$.

Ejemplo 5.4.1.

1. Sea X un conjunto. Si $x \in X$, entonces $[x]$ es un ultrafiltro. En efecto, sea $\mathcal{G}$ un filtro sobre X tal que $[x] \subset \mathcal{G}$. Entonces para cada $G \in \mathcal{G}$, $G \cap \{x\} \neq \emptyset$, luego $x \in G$ para cada $G \in \mathcal{G}$, es decir, $G \in [x]$. Por tanto, $\mathcal{G} = [x]$.

2. Sean X conjunto y $A \subset X$, con más de un punto. Entonces, $[A]$ no es un ultrafiltro, pues si $x \in A, [A] \subset [x]$. Pero $[x] \not\subset [A]$, pues $\{x\} \in [x]$ pero $\{x\} \notin [A]$.

Los ultrafiltros son de gran interés en Topología, pues gracias a estos podemos expresar de una forma muy sencilla ciertas propiedades topológicas basadas en nociones de convergencia. Sin embargo, aparte de los puntuales, es decir, los del tipo $[x]$, no se conoce ningún otro ejemplo de ultrafiltro definido explícitamente, y para asegurar su existencia es necesario usar el Lema de Zorn, que es un principio de Teoría de Conjuntos equivalente al Axioma de Elección.

Recordemos que si $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y $A \subset X$, una cota superior de A es un elemento $a \in X$ tal que $x \leq a$ para todo $x \in A$, y que A se llama cadena si $(A, \leq)$ está totalmente ordenado. Se tiene,

Lema 5.4.1. *(Lema de Zorn) Si toda cadena en $(X, \leq)$ tiene una cota superior, entonces $(X, \leq)$ admite al menos un elemento maximal. Es decir, existe $x \in X$ tal que $y \leq x$ para todo $y \in X$.*

Proposición 5.4.1. *Dado $\mathcal{F} \in Fil(X)$ en X, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ en X tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{M} = \{\mathcal{G} \in Fil(X); \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\}$ con la relación de orden parcial $\mathcal{G}_1 \preceq \mathcal{G}_2$ si $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$. Dada una cadena $\{\mathcal{G}_i\}_{i \in I} \subset M$, $\mathcal{U} = \cup\{\mathcal{G}_i;\ \mathcal{G}_i \in M\}$ es un filtro más fino que $\mathcal{F}$ y es una cota superior de la cadena. Por el Lema de Zorn, la cadena tiene un elemento maximal que es un ultrafiltro que contiene a $\mathcal{F}$. $\square$

Veamos que para un ultrafiltro los puntos adherentes son puntos límites.

Proposición 5.4.2. *Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, $\mathcal{U} \to x$ si y sólo si $x \in Ad(\mathcal{U})$.*

Demostración. Por la Proposición 5.3.1, si $\mathcal{U} \to x$ entonces $x \in Ad(\mathcal{U})$. Recíprocamente, si $x \in Ad(\mathcal{U})$, por la Proposición 5.3.2, existe $\mathcal{G} \geq \mathcal{U}$ tal que $\mathcal{G} \to x$. Pero por ser $\mathcal{U}$ ultrafiltro, ha de ser $\mathcal{G} = \mathcal{U}$. $\square$

Proposición 5.4.3. *Un filtro $\mathcal{U}$ en X es un ultrafiltro si y sólo si $A \in \mathcal{U}$ o $X - A \in \mathcal{U}$ para todo $A \subset X$*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un filtro en X tal que $A \in \mathcal{U}$ o $X - A \in \mathcal{U}$ para todo $A \subset X$. Si $\mathcal{U}$ está contenido estrictamente en un filtro $\mathcal{V}$, entonces existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \notin \mathcal{U}$. Por hipótesis $X - V \in \mathcal{U}$, y por tanto $X - V \in \mathcal{V}$, pero entonces $(X - V) \cap V = \emptyset$ y $\mathcal{V}$ no sería filtro. Recíprocamente, si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro y $A \subseteq X$, supongamos que $A \notin \mathcal{U}$. Entonces, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \cap A = \emptyset$, pues en caso contrario $\mathcal{B} = \mathcal{U} \cup \{A\}$ sería una base de diltro, y $\mathcal{U} \lneq \langle \mathcal{B} \rangle$. Por tanto, se tendría que $U \subset X - A$, con lo que $X - A \in \mathcal{U}$.

$\square$

Proposición 5.4.4. *Si $f : X \to Y$ es una aplicación y $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro en X, entonces $\langle f(\mathcal{U}) \rangle$ es un ultrafiltro en Y.*

Demostración. Si $A \subseteq Y$ y $B = f^{-1}(A)$, por la proposición anterior $B \in \mathcal{U}$ ó $X - B \in \mathcal{U}$. Si $B \in \mathcal{U}$, entonces $f(B) = A \in f(\mathcal{U})$. Análogamente, si $X - B \in \mathcal{U}$, como $f(X - B) \subset Y - A$ y $f(X - B) \in f(\mathcal{U})$, $Y - A \in F(\mathcal{U})$. $\square$

Corolario 5.4.1. Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro en $\prod_{i \in I} X_i$, entonces para cada $i \in I$, $\langle p_i(\mathcal{U}) \rangle$ es un ultrafiltro en X_i.

5.5. Relación entre Filtros y Redes

Hemos visto dos nociones de convergencia en un espacio topológico, la de filtro y la de red. Ahora veremos que son equivalentes una de la otra. Para ello indicaremos una forma de asociar un filtro a partir de una red y viceversa.

Definición 5.5.1. Si $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una red en X, el filtro de las secciones de la red, es decir,el filtro que tiene como base la familia $\{T_\mu(x_\lambda)\}_{\lambda,\mu \in \Lambda}$ se llama **filtro generado por** $\{x_\lambda\}_\lambda \in \Lambda'$ y se denotará por $\mathcal{F}_{(x_\lambda)}$.
Si $\mathcal{F} \in Fil(X)$, el conjunto $\Lambda_{\mathcal{F}} = \{(x, F);\ x \in F \in \mathcal{F}\}$ es dirigido respecto a la relación $(y, F_1) \leq (z, F_2)$ si y sólo si $F_2 \subseteq F_1$. Por tanto, la aplicación $D : \Lambda_{\mathcal{F}} \to X$ dada por $D((y, F)) = y$ es una red en X llamada la **red basada en** $\mathcal{F}$ y denotada por $\{(x)_{(y,F)}\}_{(y,F) \in \Lambda_{\mathcal{F}}}$.

Las convergencias de filtros y redes son equivalente en el siguiente sentido:

Proposición 5.5.1. *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, se tiene*

1. $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}} t$ *si y sólo si* $x_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\mathcal{T}} t$.

2. $\{(x_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ *si y sólo si* $\mathcal{F}_{(x_\lambda)} \to x$.

Demostración. 1) Si $\mathcal{F} \to t$, y $V \in \mathcal{N}_t^{\mathcal{T}}$, $V \in \mathcal{F}$. Por tanto, $(t, V) \in \Lambda_{\mathcal{F}}$, y si $(t, V) \leq (z, F)$, con $F \in \mathcal{F}$, se tiene que $x_{(z,F)} = z \in F \subset V$. Es decir, la red basada en $\mathcal{F}$ converge a t.
Recíprocamente, si $\{x_{(y,F)}\}_{(y,F) \in \Lambda_{\mathcal{F}}} \xrightarrow{\mathcal{T}} t$, dado $V \in \mathcal{N}_t^{\mathcal{T}}$ existe $(y_0, F_0) \in \Lambda_{\mathcal{F}}$ tal que si $(y, F) \geq (y_0, F_0)$ entonces $x_{(y,F)} = y \in V$. Como $(x, F_0) \geq (y_0, F_0)$, para todo $z \in F_0$, $x_{(z,F_0)} = z \in V$. Es decir, $F_0 \subset V$, luego $V \in \mathcal{F}$.

2) Si $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \xrightarrow{\mathcal{T}} t$ y $V \in \mathcal{N}_t^{\mathcal{T}}$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in V$ si $\lambda \geq \lambda_0$. Es decir, $T_{\lambda_0}(x_\lambda) \subseteq V$, luego $V \in \mathcal{F}_{(x_\lambda)}$.

Recíprocamente, si $\mathcal{F}_{(x_\lambda)} \to t$, $V \in \mathcal{F}_{(x_\lambda)}$ si $V \in \mathcal{N}_t^{\mathcal{T}}$. Luego por definición de $\mathcal{F}_{(x_\lambda)}$ existe una sección de la red $T_{\lambda_0}(x_\lambda) \subset V$. $\square$

Resulta así que si una propiedad topológica se caracteriza por convergencia de redes, también puede hacerse por convergencia de filtros, y el usar una u otra depende de las dificultades técnicas de la demostración.

Capítulo 6

Espacios 1° numerables

Definición 6.0.1. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se llama **primero numerable (1°N)** si para cada $x \in X$ existe una base de entornos $\mathcal{B}_x$ numerable.
Los espacios topológicos que cumplen esta condición tiene propiedades importantes respecto la convergencia de sus sucesiones.

Ejemplo 6.0.1.

1. Todo espacio (pseudo)-métrico es 1°N, pues $\{B_d\left(x; \frac{1}{n}\right) | n \in \mathbb{N}\}$es una base de entornos numerable de cualquier punto x.

2. Si $(X, \mathcal{T})$ es $2^\circ N$ entonces es $1^\circ N$, pues si $\mathcal{B} = \{B_n\}$ es una base numerable de $\mathcal{T}$, para cada $x \in X$, $\mathcal{B}_x = \{B_n; x \in B_n\}$ es una base de entornos de x.
El recíproco no es cierto, pues la recta de Sorgenfrey, es decir, $\mathbb{R}$ con la topología generada por la familia $\{[a, b); a, b \in \mathbb{R}\}$ es $1^\circ N$ (para cada $x \in \mathbb{R}$ basta considerar la familia $\{[x, x + 1/n); n \in \mathbb{N}\}$), pero no es $2^\circ N$.

3. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$ no es $1^\circ N$. Para demostrarlo consideremos una sucesión cualquiera de entornos $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de un punto $x \in \mathbb{R}$ en dicha topología. $\mathbb{R} - V_n$ es un conjunto finito para todo $n \in \mathbb{N}$, luego existe $y \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n = \mathbb{R} - \{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{R} - V_n)\}$ diferente de x. Pero $V = \mathbb{R} \setminus \{y\}$ es un entorno de x que no contiene ningún V_n y, por lo tanto, $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no sería base de entornos de x.
Concluimos que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$ no es seudometrizable.

4. Siguiendo un razonamiento análogo, se prueba que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{con})$ no es $1^\circ N$.

Observación 6.0.1. Obsérvese que $(X, \mathcal{T}_{cof})$ es $1^\circ N$ si y sólo si X es numerable.

Proposición 6.0.1. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *es* $1^{\circ}N$ *cada* $x \in X$ *admite una base de entornos* $\mathcal{V} = \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *decreciente.*

Demostración. Si $\mathcal{B}_x = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de entornos numerable entonces si tomamos $V_1 = U_1$ y $V_n = U_1 \cap \cdots \cap U_{n-1}$ con $n \geq 2$, se tiene que $\mathcal{B}'_x = \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Proposición 6.0.2. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *es 1°N y* $A \subset X$*, entonces* $(A, \mathcal{T}_{|A})$ *es también 1°N.*

Demostración. Basta tener en cuenta que si $x \in A$ y $\mathcal{B}_x = \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de entornos de x respecto a $\mathcal{T}$, $\mathcal{B}_x^A = \{V_n \cap A\}_{n\in A}$ es una base de entornos de x en $\mathcal{T}_{|A}$. $\square$

Proposición 6.0.3. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *es* $1^{\circ}N$ *y* $A \subseteq X$ *entonces* $x \in \overline{A}$ *si y sólo si existe* $\{x_n\} \subset A$ *tal que* $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$*.*

Demostración. Si $x \in \overline{A}$, sea $\mathcal{B}_x = \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de entornos de x decreciente. Entonces, $V_n \cap A \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Si se toma $x_n \in V_n \cap A$, $\{x_n\} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$. En efecto, si $N \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, sea $V_{n_0} \in \mathcal{B}_x$ tal que $V_{n_0} \subset N$. Si $n \geq n_0$, como $V_n \subset V_{n_0} \subset N$, $x_n \in N$. El recíproco es cierto en cualquier espacio topológico. $\square$

Proposición 6.0.4. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *es* $1^{\circ}N$ *y* $A \subseteq X$ *entonces* A *es cerrado si y sólo si* A *es* s*-cerrado.*

Demostración. Veamos que si A es s-cerrado, A es cerrado. Si $x \in \overline{A}$, por la proposición anterior, $x \in lim\, A$, y por hipótesis $lim \subset A$. Por tanto, $\overline{A} \subset A$.. $\square$

Proposición 6.0.5. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *es* $1^{\circ}N$ *y* $x \in Ad(\{x_n\})$*, existe una subsucesión* $\{x_{n_k}\}$ *de* $\{x_n\}$ *que converge a* x*.*

Demostración. Si $x \in Ad(\{x_n\})$ y $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de entornos decrecientes de x, existe $n_1 \geq 1$ tal que $x_{n_1} \in V_1$. Análogamente, existe $n_2 \geq n_1$ tal que $x_{n_2} \in V_2$. De este modo, se obtiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ tal que $x_{n_k} \in V_k$. Veamos que $x_{n_k} \to x$. En efecto, si $N \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in V_m \subset N$. Pero, por la construcción de la sucesión, si $n_k \geq m$, se tiene que $x_{n_k} \in V_m \subset N$. $\square$

En el siguiente ejemplo se define el espacio de Arens(véase [14], p.54), que es un espacio numerable y T_2 que no es $1^{\circ}N$, y por tanto no metrizable, y se prueba que no se verifica la proposición anterior.

Ejemplo 6.0.2. *El espacio de Arens.*

Sobre $X = \{(0,0)\} \cup \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se considera la siguiente topología $\mathcal{T}$:

$G \in \mathcal{T}$ si y sólo si $(0,0) \notin G$, o bien, si $(0,0) \in G$ entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para cualquier $n \geq m$, $(\{n\} \times \mathbb{N}) - A$ es finito.

Es decir, todos los puntos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son abiertos de $\mathcal{T}$, y los abiertos que contienen al $(0,0)$ contienen casi todos los puntos de casi todas las columnas de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Por tanto, en $(X, \mathcal{T})$ ninguna sucesión puede converger a un punto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, salvo que sea casi constante igual a dicho punto, y aunque $(0,0) \in \overline{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ ninguna sucesión puede converger a $(0,0)$. En efecto, dada $\{x_n\} \subset X$ puede ocurrir que, o bien exista una columna $\{m\} \times \mathbb{N}$ en X que contenga infinitos puntos de la sucesión o que en toda columna solo haya un número finito de términos de $\{x_n\}$. Si se da el primer caso, $A = \{(0,0)\} \cup (X - \{m\} \times \mathbb{N})$ sería un abierto que deja fuera infinitos términos de $\{x_n\}$, y por tanto $(0,0) \notin lim\ x_n$. En el segundo caso, $A = \{(0,0)\} \cup (X - \{x_n\})$ sería un abierto de $\mathcal{T}$ que no corta a $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. De la Proposición 6.0.3 se deduce que $(X, \mathcal{T})$ no es $1^{\circ}N$

Veamos que existe una sucesión $\{x_n\} \subset X$ tal que $(0,0) \in Ad(\{x_n\})$. Se tendrá así un ejemplo de un punto adherente a una sucesión al que no converge ninguna subsucesión de esta. La definición de x_n es la misma que la usada en la demostración de la numerabilidad de $\mathbb{Q}$: se toma $n \in \mathbb{N}$, y se van colocando los pares $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tales que $i + j = n$. En cada grupo de pares que satisfacen dicha condición se considera el orden lexicográfico inverso, y se obtiene la sucesión

$\{(1,1), (2,1), (1,2), (3,1), (2,2), (1,3), (4,1), \dots, (1,4), \dots, (n,1), (n-1,2), \dots, (1,n), \dots\}$

Obsérvese que para todo $m \in \mathbb{N}$ los puntos $\{m\} \times \mathbb{N}$ son términos de la sucesión. Por tanto, si $A \in \mathcal{N}^{\mathcal{T}}_{(0,0)}$ y $m \in \mathbb{N}$, sea $q \geq m$ tal que $A - (\{q\} \times \mathbb{N})$ es finito si $q \geq m$: se tiene que casi todos los puntos de la sucesión cuya abscisa es q están en A, luego $(0,0) \in Ad(\{x_n\})$.

Proposición 6.0.6. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *es* $1^{\circ}N$ *y* $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ *es sobreyectiva, continua y abierta, entonces* $(Y, \mathcal{T}')$ *es* $1^{\circ}N$.

Demostración. Dado $y \in Y$, sea $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Como $(X, \mathcal{T})$ es $1^{\circ}N$, sea $\mathcal{B}_x = \{V_x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base de entornos numerable de x. Por ser f abierta, $f(V_x^n)$ es un entorno abierto de y. Veamos que $\{f(V_x^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de entornos de y. En efecto, si $N \in \mathcal{N}_y^{\mathcal{T}'}$, por ser f continua en x, $f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, luego existe $V_x^n \in \mathcal{B}_x$ tal que $V_x^n \subset f^{-1}(N)$. Por tanto, $f(V_x^n) \subset f(f^{-1}(N)) = N$. □

Corolario 6.0.1. La propiedad "ser $1^\circ N$" es topológica.

Nota 6.0.1. En el Capítulo 7, en el Ejemplo 7.0.2, se comprueba que un cociente de un espacio $1^\circ N$ no es, en general, $1^\circ N$.

Proposición 6.0.7. *Si $(X,\mathcal{T})$ es $1^\circ N$, son equivalentes:*

a) $(X,\mathcal{T})$ es de Hausdorff.

b) Para toda sucesión $\{x_n\} \subset X$, $|lim\{x_n\}| \leq 1$.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Se da para todo espacio topológico.
$b) \Rightarrow a)$ Supongamos que $x, y \in X$ son dos puntos distintos tales que todo entorno de x corta a todo entorno de y. Si $\mathcal{B}_x = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{B}_y = \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son bases de entornos numerables decrecientes de x e y respectivamente, entonces $U_n \cap V_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$ Tomando $x_n \in U_n \cap V_n$, se obtiene una sucesión que converge a x e y. □

Ejemplo 6.0.3. El resultado anterior no es cierto en general si $(X,\mathcal{T})$ no es $1^\circ N$, pues en $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{con})$ se cumple $b)$, ya que las únicas sucesiones convergentes son las casi constantes pero no es $\mathcal{T}_2$.

A continuación, se prueba que aunque el producto infinito de espacios $1^\circ N$ no es en general $1^\circ N$, sí lo es en el caso de un producto numerable.

Proposición 6.0.8. *Si $\{X_i,\mathcal{T}_i\}_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{i\in I} X_i$, X es $1^\circ N$ si y sólo si para cada $i \in I$ $(X_i,\mathcal{T}_i)$ es $1^\circ N$, y existe $J \subset I$ numerable tal que $\mathcal{T}_i$ es la topología indiscreta para todo $i \in I - J$.*

Demostración. Si X es $1^\circ N$, por ser $p_i : X \to X_i$ sobreyectiva, continua y abierta, X_i también lo es, por la Proposición 6.0.6. Por otra parte, si $x = (x_i)_{i\in I} \in X$, sea $\mathcal{B}_x = \{V^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de entornos numerable de x. Podemos suponer que cada V^n es un abierto básico de la topología producto sobre X, es decir, que para cada $n \in \mathbb{N}$, $V^n = \prod_{i\in I} V_i^n$, donde $V_i^n = X_i$ para todo $i \in I - J_n$, siendo $J_n \subset I$ un conjunto finito. Veamos que $\mathcal{T}_j$ es la topología indiscreta, para todo $i \in I - J$, siendo J el conjunto numerable $J = \bigcup_{n\in I} J_n$. Si no fuese así, existiría $j \in I - J$ y $G_j \in \mathcal{T}_j$ con $x_j \in G_j$ y $G_j \subsetneq X_j$. Entonces, $x \in G = p_j^{-1}(G_j)$, y por tanto existe $V^n \in \mathcal{B}_x$ tal que $V^n \subset G$. Como $j \notin J_n$, se tendría que $X_j = V_j^n = p_j(V^n) \subset p_j(G) = G_j$, lo que es una contradicción.

Recíprocamente, supongamos que cada X_i es $1°N$ y $\mathcal{T}_i$ la topología indiscreta para todo $i \in I - J$, con J numerable. Si $x = (x_i) \in X$, sea $\mathcal{B}_j(x_j)$ una base de entornos numerable de x_j, para cada $j \in J$. Como J es numerable, $\mathcal{F} = \{F \subset J; F\ es\ finito\}$ también lo es. Para cada $F \in \mathcal{F}$, sea

$$\mathcal{B}_F = \{\prod_{i \in I} Y_i; Y_i = X_i\ si\ i \notin F\ e\ Y_j \in \mathcal{B}_j(x_j)\ para\ cada\ j \in F\} = \{\bigcap_{j \in F} p_j^{-1}(Y_j)\}$$

Como $\mathcal{B}_j(x_j)$ es numerable y F es finito, $\mathcal{B}_F$ es numerable, pues sus elementos quedan determinados escogiendo un número finito de conjuntos en la unión disjunta $\bigcup_{j \in J} B_j(x_j)$. Además, cada conjunto de $\mathcal{B}_F$ es abierto en X. Veamos que $\mathcal{B}_x = \bigcup\{B_F; F \in \mathcal{F}\}$, que es numerable por ser unión numerable de conjuntos numerables, es base de entornos de $x \in X$. En efecto, si $V = \prod_{i \in I} V_i$ es un abierto básico de la topología producto con $x \in V$, $V_i = X_i$ para cada $i \in J$, pues $\mathcal{T}_i$ es la topología indiscreta. El conjunto $F = \{j \in I; V_j \neq X_j\}$ es finito, y para cada $j \in F$ existe $U_j \in \mathcal{B}_j(x_j)$ tal que $U_j \subset V_j$. Sea $\mathcal{U} = \prod_{i \in I} U_i$, donde $U_j = X_j$ si $j \in I - F$. Entonces, $\mathcal{U} \in \mathcal{B}_F$, y por tanto, $\mathcal{U} \in \mathcal{B}_x$. Como $\mathcal{U} \subset V$, queda probado que $\mathcal{B}_x$ es base de entornos de x. □

Corolario 6.0.2. $X = [0,1]^{[0,1]}$ no es $1°N$, y por tanto, no es metrizable.

Para finalizar este Capítulo, se prueba que, al igual que en los espacios métricos, las funciones continuas sobre los espacios $1°N$ son aquellos que conservan las convergencias.

Proposición 6.0.9. *Si $(X, \mathcal{T})$ es $1°N$, dada $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$, son equivalentes:*

a) f es continua en x.

b) Si $x \in lim\, x_n$, entonces $f(x) \in lim\, f(x_n)$

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Se cumple en cualquier espacio topológico.

$b) \Rightarrow a)$ Veamos que si $N \in \mathcal{N}_{f(x)}^{\mathcal{T}'}$ entonces $f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$. En caso contrario si $\{V_n\}$ es una base de entornos decreciente de x, se tendría que para cada $n \geq 1$ $\{V_n\} \not\subseteq f^{-1}(N)$. Por tanto, dado $n \geq 1$ existiría $x_n \in V_n$ con $f(x_n) \notin N$. Pero $\{x_n\}$ es una sucesión que converge a x, y sin embargo $f(x) \notin lim\, f(x_n)$. □

Capítulo 7

Espacios secuenciales

Definición 7.0.1. $(X, \mathcal{T})$ se llama **espacio secuencial o s-espacio** si todo subconjunto $A \subseteq X$ s-cerrado es cerrado.

Ejemplo 7.0.1.
1. Por la Proposición 6.0.4, todo espacio $1°N$ es s-espacio.
2. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{con})$ no es s-espacio, pues $A = [0, 1]$ es s-cerrado, pero no es cerrado.
3. El espacio de Arens (Ejemplo 6.0.2.) no es s-espacio, pues $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es s-cerrado pero no cerrado.

Proposición 7.0.1. *Si $(X, \mathcal{T})$ es un s-espacio y $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ es una aplicación cociente, $(Y, \mathcal{T}')$ es s-espacio.*

Demostración. Si $B \subseteq Y$ es s-cerrado, veamos que $f^{-1}(B)$ es cerrado en X. Si $\{x_n\} \in f^{-1}(B)$ y $x \in lim\{x_n\}$ entonces $f(x_n) \in B$ y por ser f continua en x, $f(x) \in lim f(x_n)$. Por ser B s-cerrado, $f(x) \in B$, luego $x \in f^{-1}(B)$. Por tanto, $f^{-1}(B)$ es s-cerrado, así que es cerrado por ser $(X, \mathcal{T})$ un s-espacio. □

Ejemplo 7.0.2. $\mathbb{R}/\mathbb{N}$ es un s-espacio que no es $1°N$.

Sea $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{N}$ la proyección canónica. Supongamos que $\mathcal{V} = \{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de entornos numerable de $[\mathbb{N}]$. Entonces como V_n es abierto, $p^{-1}(V_n) \subset \mathbb{R}$ es abierto para todo $n \geq 1$, y $\mathbb{N} \subset p^{-1}(V_n)$. Por tanto, dado $n \in \mathbb{N}$ existe $\epsilon_n > 0$ tal que $(n - \epsilon_n, n + \epsilon_n) \subset V_n$. Si $\delta_n = \epsilon_n/2$, $O = \bigcup p(n - \delta_n, n + \delta_n)$ es abierto en $\mathbb{R}/\mathbb{N}$, pues $p^{-1}(O) = \bigcup(n - \delta_n, n + \delta_n)$ lo es, y sin embargo, no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $V_n \subset O$.

Que $\mathbb{R}/\mathbb{N}$ es un espacio secuencial es consecuencia de la proposición anterior, ya que por ser $\mathbb{N}$-cerrado en $\mathbb{R}$, p es cerrado, y por tanto, cociente.

Definición 7.0.2. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, $A \subseteq X$ se llama **secuencialmente abierto** o **s-abierto** si para cada sucesión $\{x_n\} \subset X$ tal que $lim\, x_n \cap A \neq \emptyset$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ si $n \geq n_0$.
Es decir, A es s-abierto si toda sucesión que converja a un punto de A está casi toda ella contenida en A.

Ejemplo 7.0.3. 1. En todo espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, si $A \in \mathcal{T}$, A es un s-abierto.

2. En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{con})$, $A = [0, 1]$ no es abierto, pero sí es s-abierto, pues si $x \in A$ y $X_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$, x_n es casi constante igual a x, y por tanto, está casi toda contenida en A.

Proposición 7.0.2. *A es s-cerrado en $(X, \mathcal{T})$ si y sólo si $C = X - A$ es s-abierto.*

Demostración. Sea A un conjunto s-cerrado, $\{x_n\}$ una sucesión, y $x \in C \cap lim\, x_n$. Si infinitos términos de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ estuvieran en A, se tendría una sucesión $\{x_{n_k}\}$ convergiendo a x, así que, por ser A s-cerrado $x \in A$. Por tanto, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está casi toda en C.
Recíprocamente, supongamos que $C = X - A$ es s-abierto,$\{x_n\} \subset A$ y $x \in lim\, x_n$. Si $x \in C$, entonces casi toda la sucesión estaría en C. $\square$

Corolario 7.0.1. $(X, \mathcal{T})$ es un s-espacio si y sólo si todo conjunto s-abierto es abierto.

Demostración. Si $(X, \mathcal{T})$ es un s-espacio y $A \subseteq X$ es s-abierto, entonces por la Proposición anterior $X - A$ es s-cerrado, así que $X - A$ es cerrado, y por tanto $A \in \mathcal{T}$.
Recíprocamente, si $A \subseteq X$ es un conjunto s-cerrado, entonces $X - A$ es s-abierto, luego $X - A \in \mathcal{T}$, y por tanto A sería cerrado. $\square$

Proposición 7.0.3. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. La familia $\mathcal{T}_s = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X; A\ es\ s - abierto\}$ es una topología sobre X.*

Demostración. Veamos que si $A, B \in \mathcal{T}_s$, entonces $A \cap B \in \mathcal{T}_s$. Sea pues $\{x_n\}$ una sucesión con $x \in (A \cap B) \cap lim\, x_n$. Por hipótesis, existen $n_0, n_0' \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ si $n \geq n_0$ y $x_n \in B$. Si $n \geq n_0'$. Tomando $n_0'' = max\{n_0, n_0'\}$, se tiene que $x_n \in A \cap B$ si $n \geq n_0''$.

Por otra parte, si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos s-abiertos, supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ y $x \in (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap lim\ x_n$. Entonces, existe $i_0 \in I$ tal que $x \in A_{i_0}$, y por ser A_{i_0} s-abierto, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está casi toda en A_{i_0}, así que está casi toda en $\bigcup_{i\in I} A_i$. $\square$

Nota 7.0.1. Obsérvese que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, en general $\mathcal{T}$ es más fina que $\mathcal{T}_s$. Es decir, $id : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}_s)$ es continua, y se tiene:

Corolario 7.0.2. $(X, \mathcal{T})$ es un s-espacio si y sólo si $\mathcal{T} = \mathcal{T}_s$

Veamos a continuación cómo los s-espacios son la clase de espacios más amplia en la que las aplicaciones continuas sobre ellas coinciden con las aplicaciones secuencialmente continuas, es decir, las que conservan las convergencias.

Proposición 7.0.4. *Si $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, son equivalentes:*
a) $(X, \mathcal{T})$ es un s-espacio.
b) Para todo espacio $(Y, \mathcal{T}')$, $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ es continua si y sólo si es secuencialmente continua.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Hay que probar que si $(X, \mathcal{T})$ es un s-espacio y $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es secuencialmente continua, entonces f es continua. Si no lo fuese, existiría $U \in \mathcal{T}'$ tal que $f^{-1}(U) \notin \mathcal{T}$, es decir, $f^{-1}(U)$ no sería s-abierto. Por tanto, existiría una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X - f^{-1}(U)$ convergente a un punto $x \in f^{-1}(U)$. Así pues, $Y - U$ sería un cerrado en Y que contendría la sucesión $f(x_n)$ pero no a $f(x)$, que es punto límite de la misma.
$b) \Rightarrow a)$ Si $(X, \mathcal{T})$ no es un s-espacio, entonces la topología $\mathcal{T}_s$ de la Proposición anterior sería estrictamente más fina que $\mathcal{T}$, y por tanto

$$id : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}_s)$$

no sería continua. Sin embargo, sí es secuencialmente continua, pues si $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ y $U \in \mathcal{T}_s$ con $x \in U$, $U \in \mathcal{T}$, luego $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ estaría casi toda en U. Es decir, $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_s} x$. $\square$

El siguiente resultado, obtenido en [4], es una caracterización de los s-espacios muy útil, pues permite obtener con facilidad ejemplos de s-espacios sin necesidad de comprobar que todos sus subconjuntos s-abiertos(cerrados) son abiertos(cerrados).

Proposición 7.0.5. *Todo s-espacio X es el cociente de un espacio métrico.*

Demostración. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X y $x \in lim\ x_n$, podemos considerar la sucesión $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $x'_1 = x$ y $x'_n = x_{n-1}$, si $n \geq 2$. Por tanto, está definido, y no es vacío el conjunto $\mathcal{C}$ de las sucesiones en X que convergen a su primer término. Sea $Y = \{0\} \cup \{1/n+1;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ con la topología euclídea. Entonces $A \subseteq Y$ es abierto si $0 \notin Y$ ó $0 \in A$ e $Y - A$ es finito.Sea

$$Z = \bigoplus_{\{x_n\}\in\mathcal{C}} \{\{x_n\}\} \times Y$$

Es decir, Z es el conjunto $\bigcup_{\{x_n\}\in\mathcal{C}} \{\{x_n\}\} \times Y$ con la topología formada por los conjuntos $B \subseteq Z$ tales que para cada $\{x_n\} \in \mathcal{C}$, $\{y \in Y;\ (\{x_n\}, y) \in B\}$ es abierto en Y. El espacio Z se obtiene, pues, tomando una copia de Y por cada elemento $\{x_n\} \in \mathcal{C}$, y considerando sobre la unión disjunta de tales copias la topología suma definida en 3.4.1. Recordemos que según dicha definición los abiertos de Z son los subconjuntos que al cortarlos con cada copia de $\{x_n\} \times Y$ dan un abierto de Y etiquetado por la sucesión $\{x_n\}$, y la Proposición 3.4.1 garantiza que Z es metrizable.
Sea $f : Z \to X$ la aplicación dada por

$$f(\{x_n\}, 0) = x_1$$
$$f(\{x_n\}, \tfrac{1}{1+n}) = x_n, \text{ si } n \in \mathbb{N}$$

Esta aplicación es sobreyectiva, pues dado $x \in X$, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión constante igual a x, se tiene que $f(\{x_n\}, 0) = x$. Veamos que f es una aplicación cociente, es decir, que $A \subseteq X$ es abierto si y sólo si $f^{-1}(A) \subset X$ es abierto. Por ser X un s-espacio, toda sucesión $\{x_n\}$ que converja a un punto $x \in A$ debe estar casi toda en A. Luego si $(\{x_n\}, 0) \in f^{-1}(A)$, es decir, si $x_n \to x_1 \in A$, $f^{-1}(A)$ contiene casi todos los puntos de $\{x_n\} \times Y$, y por tanto $\{y \in Y;\ (\{x_n\}, y) \in f^{-1}(A)\}$ es abierto en Y.
Recíprocamente, si $A \notin \mathcal{T}$, A no es s-abierto en X, así que existe una sucesión $\{x_n\} \subset X - A$ que converge a algún punto $x \in A$. Pero entonces $\{y \in Y;\ (\{x_n\}, y) \in f^{-1}(A)\} = \{0\}$ no es abierto en Y, así que $f^{-1}(A)$ no es abierto en Z. □

Corolario 7.0.3. $(X, \mathcal{T})$ es un s-espacio si y sólo si es el cociente de un espacio métrico.

Demostración. Si $(X,\mathcal{T})$ es un s-espacio por la Proposición anterior, es el cociente de un espacio métrico. Recíprocamente, si (X,d) es un espacio métrico, (X,d) es $1°N$, así que por el Ejemplo 7.0.1 (1) es un s-espacio, y teniendo en cuenta la Proposición 7.0.1, un cociente de (X,d) también lo es. $\square$

Terminaremos este Capítulo comprobando que a diferencia de la propiedad "ser $1°N$", la propiedad de ser "s-espacio" no es hereditaria en general, y que el producto de s-espacios no siempre es un s-espacio, ni siquiera en el caso de dos factores. Sí es cierto, como se verá a continuación, que los subespacios abiertos o cerrados de un s-espacio son s-espacios.

Proposición 7.0.6. *Si $(X,\mathcal{T})$ es un s-espacio y $A \subseteq X$ es abierto o cerrado, entonces $(A,\mathcal{T}_{|A})$ es un s-espacio.*

Demostración. a) Supongamos que $(X,\mathcal{T})$ es un s-espacio y que $A \subset X$ es abierto. Basta comprobar que si U es s-abierto en $(A,\mathcal{T}_{|A})$, U es s-abierto en $(X,\mathcal{T})$, pues entonces $U \in \mathcal{T}$, y por tanto $U \in \mathcal{T}_{|A}$. Si $\{x_n\}$ es una sucesión en X y $x_n \to x \in U \subseteq A$, como A es abierto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ si $n \geq n_0$. Por tanto, podemos suponer que $\{x_n\} \subset A$ y que $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}|A} x$. Pero por ser U s-abierto en A, $\{x_n\}$ está casi toda en U, y se tiene el resultado.

b) Veamos que si C es s-cerrado en $(A,\mathcal{T}_{|A})$, entonces C es cerrado en $(X,\mathcal{T})$. Pero si $\{x_n\} \subset C$ y $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$, por ser A cerrado, $x \in A$. Por tanto, $x_n \subset C$ y $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}|A} x$. Como C es s-cerrado en A, $x \in C$. $\square$

Ejemplo 7.0.4. (*Ser s-espacio no es una propiedad hereditaria*)

Sean $L = \mathbb{R} - \{0\}$, $M = \{0\} \cup \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ e $Y = (L \times \{0\}) \cup (M \times \{1\})$ con la topología euclídea. Si $X = \{0\} \cup L$, sea $f : Y \to X$ la primera proyección canónica. Si sobre X se considera la topología final asociada a f, $\mathcal{T}_f$, dicha topología admite como base la familia $\mathcal{B}_f = \mathcal{T}_e \cup \{\{0\} \cup U; U \in \mathcal{T}_e\}$. Por ser un cociente de un espacio métrico, $(X,\mathcal{T}_f)$ es un s-espacio.

Veamos que si $A = (X - M) \cup \{0\}$, $(A,\mathcal{T}_{f|A})$ no es un s-espacio. Nótese que $\{0\} \notin \mathcal{T}_f$, ya que $f^{-1}(\{0\}) = \{(0,1)\}$ no es abierto en Y. Sin embargo, $\{0\}$ es un s-abierto en A, ya que las únicas sucesiones en A que convergen a 0 son las casi constantes iguales a 0. En efecto, sea $\{x_n\} \subset A$ una sucesión que converge a 0 pero que contiene una subsucesión de términos distintos de 0. Para simplificar las notaciones, podemos suponer que dicha subsucesión es la propia $\{x_i\}$. Como $x_n \neq 0$, $\delta_n = inf\{|x_n - 1/m|; m \in \mathbb{N}\} > 0$ y el conjunto $W = \{0\} \cup (\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (1/n - \delta_n, 1/n + \delta_n))$ es un entorno abierto de 0 que no contiene ningún término de $\{x_n\}$: si existieran m y n tales que $x_m \in (1/n - \delta_n, 1/n - \delta_n)$, $|x_m - 1/n| < \delta_n$, pero por definición de δ_n, $|x_m - 1/n| \geq \delta_n$.

Ejemplo 7.0.5. (*El producto de dos s-espacios no siempre es un s-espacio*)

Sea $X = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ con la topología producto de $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}_e)$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Veamos que X admite un conjunto W que no es abierto pero sí s-abierto. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de irracionales estrictamente decreciente, $x_n < 1$ y convergente a 0 en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos los siguientes subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^2$

- T_n es el interior del triángulo de vértices $(x_n, n), (1, n + 1/2)$ y $(1, n - 1/2)$.

- T'_n es el interior del triángulo cuyos vértices son los simétricos de los vértices de T_n respecto del eje OY. Es decir, los puntos $(-x_n, n), (-1, n + 1/2)$ y $(-1, n - 1/2)$.

- R_n es el interior del rombo de vértices $(-x_n, n), (x_n, n), (0, n + 1/2)$ y $(0, n - 1/2)$

Si $W_n = (T_n \cup R_n \cup T'_n) \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| > x_1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y < 0\}$, y $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es la aplicación $p(x, y) = (x, [y])$, sea $W = X \cap p(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} W_n)$.

Si $\pi_1 : X \to \mathbb{Q}$ y $\pi_2 : X \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son las proyecciones canónicas y U y V son entornos abiertos de 0 en $\mathbb{Q}$ y de $[0]$ en $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)$ no está contenido en W, ya que tomando $\epsilon > 0$ tal que $(-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{R} \subset \pi_1^{-1}(U)$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < \epsilon$, e $y \in (x_n, \epsilon)$ se tiene que $(y, n) \in ((\pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)) - W)$. Por tanto, $(0, [0]) \notin intW$.

Veamos que W es s-abierto en X, es decir, que si $y_n \to y \in W$, entonces $\{y_n\}$ está contenida finalmente en W. Pero si $\pi_2(y) \neq [0]$, converger a y en X es equivalente a hacerlo en $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, y como $(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\cap(\bigcup W_n)$ es abierto en $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, $\{y_n\}$ está finalmente en W. Por otra parte, si $\pi_1(y) \neq 0$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $y = (\pi_1(y), k)$. Por tanto, $y \in W_k$. Así pues, podemos suponer que $y = (0, [0])$ por lo que $z_n = \pi_2(y_n) \to [0]$. Pero si $q : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es la aplicación cociente y $U \in \mathcal{N}_{[0]}$, $V = q^{-1}(U)$ es un entorno de $\mathbb{Z}$, por lo que, para cada $j \in \mathbb{Z}$, existe $\epsilon_j > 0$ tal que $I_j = (j - \epsilon_j, j + \epsilon_j) \subset V$. Tomando el conjunto $\{\epsilon_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de forma que $I_j \cap I_k = \emptyset$, si $j \neq k$, se tiene que el conjunto $K = \{k \in \mathbb{Z}; k > 0, q^{-1}(z_n) \cap I_k \neq \emptyset\}$ ha de ser finito, pues si existieran enteros $0 < k_1 < k_2 < \cdots < k_m < \cdots$ tales que

$q^{-1}(z_n) \cap I_{k_l} \neq \emptyset$, consideremos $z_{k_l} \in q^{-1}(x_n) \cap I_{k_l}$ y $\delta_{k_l} < |k_l - z_{k_l}|$. Si $N = \bigcup(k_l - \delta_{k_l}, k_l + \delta_{k_l})$ y N' es un entorno abierto de $\mathbb{Z} - K$ disjunto con N, $q(N \cup N')$ sería un entorno abierto de $[0]$ en el que no estarían infinitos términos de la sucesión $\{z_n\}$

Sea pues $q = max\{k; k \in K\}$. Como $\pi_1(y_n) \to 0$ en $\mathbb{Q}$, $\pi_1(y_m) < x_n$ si $m > q$, por lo que $\{y_n\}$ está casi toda contenida en $(X \cap (\bigcup\{W_n; n \leq q\})\mathbb{Q} \times \{0\}) \subset W$.

Capítulo 8

Espacios de Fréchet-Urysohn

Definición 8.0.1. Un espacio topológico $(X; \mathcal{T})$ se llama **espacio de Fréchet-Urysohn (o FU-espacio)** si para todo $A \subseteq X$ se verifica que $\overline{A} = \{lim\, x_n; \{x_n\} \subseteq A\}$.
Es decir, $(X, \mathcal{T})$ es un *FU-espacio* si para todo $A \subseteq X$, $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe $\{x_n\} \subseteq A$ tal que $x \in lim\, x_n$.

Proposición 8.0.1. *a) Si $(X, \mathcal{T})$ es $1°N$, entonces $(X, \mathcal{T})$ es FU-espacio.*
b) Si $(X, \mathcal{T})$ es FU-espacio, entonces $(X, \mathcal{T})$ es un s-espacio. Es decir, los FU-espacios son una clase intermedia entre los espacios 1°N y los s-espacios.

Demostración. a) Es consecuencia inmediata de las definiciones.
b)Veamos que si A es sucesionalmente cerrado, entonces A es cerrado, es decir, $\overline{A} \subset A$. Pero si $x \in \overline{A}$, como $(X, \mathcal{T})$ es un FU-espacio, existe $\{x_n\} \subseteq A$ tal que $x \in lim\ x_n$. Ahora bien, por ser A sucesionalmente cerrado, $x \in \overline{A}$. □

Veamos que las inclusiones anteriores son estrictas, es decir, que existen FU-espacios que no son $1°N$ y s-espacios que no son FU-espacios.

Ejemplo 8.0.1. *a*) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$ es un FU-espacio que no es $1°N$. En efecto, dado $A \subset \mathbb{R}$, si A es finito, $A = \overline{A}$. Por tanto, si $x \in A$, la sucesión $\{x_n\}$ con $x_n = x$ converge a x. Si A es infinito, sea $\{x_n\} \subset A$ una sucesión cuyos términos son todos distintos entre sí. Entonces, $\overline{A} = \mathbb{R}$, y $x_n \to x$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.
Por otra parte, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$ no es $1°N$ (Ejemplo 6.0.1.(3)).

b) El espacio $(X, \mathcal{T})$ del Ejemplo 7.0.4 es un s-espacio, pero por la Proposición siguiente no puede ser un FU-espacio.

Proposición 8.0.2. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *es un FU-espacio y* $A \subseteq X$*, entonces* $(A, \mathcal{T}_{|A})$ *es un FU-espacio.*

Demostración. Sea $B \subset A$ y $x \in \overline{B}^A$. Como $\overline{B}^A = \overline{B} \cap A$, $x \in \overline{B}$. Por tanto, existe $\{x_n\} \subset B$ tal que $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$. Pero entonces $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_{|A}} x$. $\square$

Proposición 8.0.3. $(X, \mathcal{T})$ *es un FU-espacio si y sólo si para cada* $A \subset X$*,* $(A, \mathcal{T}_{|A})$ *es un s-espacio.*

Demostración. $\Rightarrow$) Si $(X, \mathcal{T})$ es un FU-espacio y $A \subset X$, por la Proposición anterior, $(A, \mathcal{T}_{|A})$ es un FU-espacio, y por tanto un s-espacio.

$\Leftarrow$) Si $(X, \mathcal{T})$ no fuese un FU-espacio, existirían $A \subseteq X$ y $x \in \overline{A}$ tal que ninguna sucesión en A converge a x. Si $Y = \{x\} \cup A$, entonces A no es cerrado en $(Y, \mathcal{T}_{|Y})$, ya que $x \in \overline{A}^Y - A$. Para ver que A es s-cerrado en $(Y, \mathcal{T}_{|Y})$ basta tener en cuenta que si $\{x_n\} \subset A$, entonces $lim\ \{x_n\} \subset A$, pues $x \notin lim\ \{x_n\}$. Por tanto, $(Y, \mathcal{T}_{|Y})$ no sería un s-espacio. $\square$

Observación 8.0.1. En general, el cociente de un FU-espacio no es un FU-espacio. En efecto, si X es el espacio cociente definido en el Ejemplo 7.0.4, dicho espacio no puede ser FU-espacio porque admite un subespacio que no es s-espacio, lo que contradice la Proposición 8.0.3.

Proposición 8.0.4. *Si* X *es un FU-espacio y* $f : X \to Y$ *es continua y pseudo-abierta,* Y *es un FU-espacio.*

Demostración. Sea $B \subset Y$ e $y \in \overline{B}$. Si $f^{-1}(y) \cap \overline{f^{-1}(B)} = \emptyset$, $U = X - \overline{f^{-1}(B)}$ es un entorno abierto de $f^{-1}(y)$. Como f es pseudo-abierta, $y \in int f(U) \subset f(U) = f(X - \overline{f^{-1}(B)}) \subset f(X - f^{-1}(B)) \subset Y - B$, lo que contradice que $y \in \overline{B}$. Así pues, existe $x \in f^{-1}(y) \cap \overline{f^{-1}(B)}$, y como X es FU-espacio, existe $\{x_n\} \subset f^{-1}(B)$ tal que $x_n \to x$. Por tanto, $\{f(x_n)\} \subset B$, y $f(x_n) \to f(x) = y$. $\square$.

Corolario 8.0.1. Si X es un FU-espacio y $f : X \to Y$ es continua, sobreyectiva y abierta o cerrada, Y es un FU-espacio.

Demostración. Basta tener en cuenta que por el Ejemplo 3.5.4. una aplicación abierta o cerrada es pseudo-abierta. □

Ejemplo 8.0.2. La aplicación cociente $p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es cerrada, pues si $F \subset \mathbb{Q}$ es cerrado, $p(F)$ lo es ya que

$$p^{-1}(p(F)) = \begin{cases} F & \text{si } F \cap \mathbb{Z} = \emptyset \\ F \cup \mathbb{Z} & \text{si } F \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset \end{cases}$$

Teniendo en cuenta el corolario anterior, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un FU-espacio, y $\mathbb{Q}$ también lo es. Sin embargo el espacio $X = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ no lo es, ya que como se probó en el Ejemplo 7.0.5. no es un s-espacio. Así pues, en general, el producto de dos FU-espacios no es FU-espacio.

Proposición 8.0.5. *Sean $(X, \mathcal{T})$ un FU-espacio, $(Y, \mathcal{T}')$ un espacio T_2 y $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación cociente. Entonces Y es un FU-espacio si y sólo si f es pseudo-abierta.*

Demostración. Veamos que si Y es FU-espacio, entonces f es pseudo-abierta. Sea $y \in Y$ y $U \in \mathcal{T}$ tal que $f^{-1}(y) \subset U$, y supongamos que $y \notin int f(U)$. Entonces $y \in \overline{Y - f(U)}$, por lo que existe $\{w_n\} \subset Y - f(U)$ tal que $w_n \to y$. Si $A = \{w_n\}$, por ser Y un espacio T_2, $\overline{A} = A \cup \{y\}$. Luego si $B = f^{-1}(A)$, por ser f continua se tiene que $\overline{B} \subset f^{-1}(\overline{A}) = f^{-1}(A \cup \{y\}) = B \cup f^{-1}(\{y\})$. Como $f(U) \subset Y - A$, $U \subset f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(Y - A) \subset X - f^{-1}(A)$. Es decir, $B \subset X - U$, y por tanto $\overline{B} \subset X - U$. Puesto que $f^{-1}(\{y\}) \subset U$, se tiene que $\overline{B} \cap f^{-1}(y) = \emptyset$, así que $B = \overline{B}$. Pero $X - B = X - f^{-1}(A) = f^{-1}(y - A) \in \mathcal{T}$, y como f es una aplicación cociente, $Y - A \in \mathcal{T}'$. Es decir, A es cerrado, y por tanto $y \in \overline{A} = A \subset Y - f(U)$ lo que es una contradicción con que $f^{-1}(y) \subset U$. Por lo tanto, $y \in int(f(U))$, y f es pseudo-abierta. La otra implicación es consecuencia de la Proposición 8.0.4. □

Proposición 8.0.6. *Si Y es un espacio T_2, Y es un FU-espacio si y sólo si existen un espacio métrico X y una aplicación pesudo-abierta $f : X \to Y$*

Demostración. Si Y es un FU-espacio, por la Proposición 8.0.1. b), Y es un s-espacio. Por tanto, por el Corolario 7.0.3, existen un espacio métrico X y una aplicación cociente $f : X \to Y$, que por la Proposición anterior f es pseudo-abierta.
Recíprocamente, si X es un espacio métrico y $f : X \to Y$ es pseudo-abierta, de nuevo por la proposición anterior, Y es un FU-espacio. □

Capítulo 9

Espacios compactos

9.1. Espacios compactos

La compacidad es una de las propiedades topológicas más relevantes debido a la importancia de sus aplicaciones, no solamentente en Topología, sino también en Geometría y Análisis. Se trata de una condición de finitud relativa a la topología considerada, de la que no resulta sencillo dar una interpretación intuitiva.
La propiedad fue demostrada primeramente por Borel y Lebesgue para los intervalos cerrados $[a, b]$ de la recta, y después, en torno a 1900, Borel la demostró para cualquier subconjunto cerrado y acotado de un espacio euclídeo. En los espacios métricos, la compacidad es equivalente a una propiedad de las sucesiones del espacio, pero esta equivalencia no se mantiene para otros espacios más generales, y la definición adoptada finalmente fue la propuesta por Alexandroff y Urysohn en 1923.

Definición 9.1.1. Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es **compacto** si todo recubrimiento de X por abiertos $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ admite un subrecubrimiento finito. Es decir, existe una familia finita $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_n}\}$ cuya unión es X.
Si $A \subseteq X$, las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $(A, \mathcal{T}_{|A})$ es un espacio compacto.

b) Todo recubrimiento de A por abiertos de $\mathcal{T}$ admite un subrecubrimiento finito.

La propiedad de la compacidad de un espacio puede expresarse en términos de las familias de sus cerrados que verifican la propiedad de la intersección finita (PIF), cuyo enunciado es el siguiente:

Definición 9.1.2. Una familia $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X tiene la **Propiedad de la Intersección Finita (PIF)** si cualquier subfamilia finita de $\mathcal{A}$ tiene intersección no vacía. Es decir, si para todo $J \subset I$ finito, $\bigcap\{A_j\}_{j\in J} \neq \emptyset$.

Proposición 9.1.1. $(X, \mathcal{T})$ *es compacto si y sólo si toda familia de subconjuntos cerrados de* X*,* $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i\in I}$ *con la PIF tiene intersección no vacía.*

Demostración. Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es compacto y sea $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i\in I}$ una familia de cerrados en X con la PIF. Veamos que $\bigcap\{C_i\}_{i\in I} \neq \emptyset$. En efecto, si $\bigcap\{C_i\}_{i\in I} = \emptyset$, se tendría que $X - \bigcap\{C_i\}_{i\in I} = X$. Luego $\bigcup(X - C_i) = X$. Como C_i es cerrado, $X - C_i$ es abierto. Por tanto, $\mathcal{U} = \{X - C_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de X. Por hipótesis X es compacto, luego una familia finita $\{X - C_{i_1}, X - C_{i_2}, \ldots, X - C_{i_n}\}$ recubre X. Es decir, $\bigcup\limits_{1\leq k\leq n}(X - C_{i_k}) = X$, así que, $X - (\bigcup(X - C_{i_k})) = \emptyset$, y se tendría que $\bigcap(X - (X - C_{i_k})) = \bigcap\limits_{1\leq k\leq n} C_{i_k} = \emptyset$. Por tanto, $\mathcal{C}$ no tendría la PIF. $\square$

Veamos a continuación que la propiedad de la compacidad se puede caracterizar mediante una noción de convergencia más general que la proporcionada por las sucesiones. Dicha noción es la de convergencia de una red, o su equivalente, la convergencia de filtros. Una de las mayores utilidades de los filtros es precisamente, la sencilla caracterización de los espacios compactos, y la demostración, particularmente simple, del teorema de Tychonoff de la compacidad de un producto infinito de espacios compactos, mucho menos laboriosa que la original o la que se expone en textos que no usan el concepto de filtro.
El siguiente resultado es una caracterizaci´n mediante redes de la compacidad en los espacios topológicos

Proposición 9.1.2. *Dado un espacio topológico* $(X, \mathcal{T})$*, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $(X, \mathcal{T})$ *es compacto.*

2. *Toda red en* X *tiene al menos un punto adherente.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Si $(X,\mathcal{T})$ es compacto y $\{(x_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una red en X, los conjuntos $\overline{T_\mu}(x_\lambda)$, donde $\{T_\mu(x_\lambda)\}$ son las secciones de la red, son cerrados, y tienen la PIF, pues $\overline{T_{\mu_1}}(x_\lambda)\cap\overline{T_{\mu_2}}(x_\lambda)\cap\cdots\cap\overline{T_{\mu_k}}(x_\lambda)\supset T_{\mu_1}(x_\lambda)\cap T_{\mu_2}(x_\lambda)\cap\cdots\cap T_{\mu_k}(x_\lambda)\supset T_\mu(x_\lambda)\neq\emptyset$, con $\mu\geq\mu_1,\ldots,\mu_k$.Por tanto, existe $x\in\bigcap\limits_{\mu\in\Lambda}\overline{T_\mu}(x_\lambda)$, y $x\in Ad(\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$.

2) $\Rightarrow$ 1) Sea $\mathcal{C}=\{C_i\}_{i\in I}$ una familia de cerrados en $(X,\mathcal{T})$. Si Λ es la familia formada por las intersecciones finitas de conjuntos de $\mathcal{C}$, y $\leq$ la relación en Λ definida como $F\leq F'$ si $F'\subseteq F$, la aplicación $D:\Lambda\to X$ dada por $D(F)=x_F$, donde x_F es un punto de la intersección de los conjuntos cuya intersección es F, es una red en X. Pero si $G\in\Lambda$ y $G\leq F$, entonces $x_F\in F\subseteq G$, por tanto $T_G(\{x_F\}_{F\in\Lambda})\subseteq G$. Luego si $x\in Ad(\{x_F\}_{F\in\Lambda})$, $x\in\bigcap\overline{T_G}(\{x_F\})\subseteq\bigcap\{G;\ G\in\Lambda\}\subset\bigcap\limits_{i\in I}C_i$. □

Corolario 9.1.1. $(X,\mathcal{T})$ es compacto si y sólo si toda red en X tiene una subred convergente.

Obsérvese que este resultado es análogo al conocido que caracteriza la compacidad en los espacios métricos mediante sucesiones, que afirma que un espacio métrico (X,d) es compacto si y sólo si toda sucesión en X admite una subsucesión convergente.

Indicamos a continuación una caracterización de la compacidad mediante convergencia de filtros. Este resultado es interesante porque permite una demostración corta y sencilla del Teorema de Tychonoff sobre la compacidad de un producto de espacios.

Proposición 9.1.3. *Si $(X,\mathcal{T})$ es un espacio topológico, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$(X,\mathcal{T})$ es compacto.*
2. *Todo ultrafiltro en X converge.*
3. *Todo filtro en X tiene un punto adherente.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que $(X,\mathcal{T})$ es compacto y que $\mathcal{U}\in Ult(X)$ no converge. Entonces para cada $x\in X$ existe un entorno abierto $N_x\in\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}\setminus\mathcal{U}$. Por tanto, $C=\{N_x|x\in X\}$ es un recubrimiento abierto de X, por lo que $X=\bigcup\limits_{i=1}^{n}N_{x_i}$. Pero por ser

$\mathcal{U}$ ultrafiltro, por la Proposición 5.4.3. $X - N_{x_i} \in \mathcal{U}$. Luego $\bigcap_{i=1}^{n}(X - N_{x_i}) = X - \bigcup_{i=1}^{n} N_{x_i} = \emptyset \in \mathcal{U}$, lo que no es posible.

2) $\Rightarrow$ 3) Si $\mathcal{F} \in Fil(X)$, sea $\mathcal{G}$ un ultrafiltro con $\mathcal{F} \preceq \mathcal{G}$. Si $\mathcal{G} \to x$, dados $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ y $F \in \mathcal{F}, V \cap F \in \mathcal{G}$ así que $V \cap F \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in \overline{F}$ luego x es adherente a $\mathcal{F}$.
3) $\Rightarrow$ 1) Si $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$ es una familia de cerrados de X que tiene la PIF. Entonces $\mathcal{C}$ es base para un filtro $\mathcal{F}$. Si x es adherente a $\mathcal{F}$, $x \in \overline{F}$ para todo $F \in \mathcal{F}$. En particular, $x \in \overline{C_i} = C_i$ para todo i, así que $\cap C_i \neq \emptyset$, y por tanto $(X, \mathcal{T})$ es compacto. $\square$

9.2. El Teorema de Tychonoff

Un resultado de gran importancia en Topología General es el Teorema de Tychonoff, que afirma que el producto de espacios compactos, con la topología producto, es compacto. Ya la demostración de que el resultado es válido para un número finito de factores es laboriosa, como puede comprobarse con la dada en el Teorema 2.6.7 [11], y además, no hay ninguna forma directa de extender el resultado a productos arbitrarios de espacios.
Se presenta aquí una demostración basada en las propiedades de ultrafiltros, cuya sencillez contribuyó en gran medida a la aceptación y difusión de la teoría de filtros debida a H.Cartan.

Proposición 9.2.1. *(Teorema de Tychonoff). Si $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, $(\prod_{i \in I} X_i, \mathcal{T}_\pi)$ es compacto si y sólo si cada $(X_i, \mathcal{T}_i)$ lo es.*

Demostración. Si $(\prod X_i, \mathcal{T}_i)$ es compacto, como $p_i : (\prod X_i, \mathcal{T}_\pi) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ es continua y sobreyectiva, $(X_i, \mathcal{T}_i)$ lo es.
Recíprocamente, supongamos que cada $(X_i, \mathcal{T}_i)$ es compacto, y sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro en $\prod X_i$. Entonces, por el Corolario 5.4.1, $p_i(\mathcal{F})$ es un ultrafiltro en X_i. Por ser X_i compacto, existe $x_i \in X_i$ tal que $p_i(\mathcal{F}) \xrightarrow{\mathcal{T}} x_i$, así que, por la Proposición 5.3.6, $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}_\pi} x$, con $x = (x_i)_{i \in I}$. $\square$

Ejemplo 9.2.1. Sea $X = (\{0,1\}, \mathcal{T}_{discreta})$. Entonces la topología caja sobre $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es la discreta, y por tanto no es compacto. Es decir, el Teorema de Tychonoff no es cierto en general para un producto infinito con la topología caja.

Capítulo 10

Espacios numerablemente compactos y B-W compactos

La primera noción de compacidad para espacios generales se debe a Fréchet (ver [13]), y en ella pretendía reflejar la propiedad de Bolzano-Weierstrass, características de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ cerrados y acotados.

Definición 10.0.1. $(X, \mathcal{T})$ se llama **numerablemente compacto** o **$\mathbb{N}$-compacto** si toda sucesión en X tiene al menos un punto adherente. Es decir, si toda sucesión en X admite una subred convergente.

Proposición 10.0.1. *$(X, \mathcal{T})$ es $\mathbb{N}$-compacto si y sólo si todo recubrimiento abierto numerable de X, $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, admite un subrecubrimiento finito.*

Demostración. $\Rightarrow$ Supongamos que $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto de X que no admite ningún subrecubrimiento finito. Sea $\mathcal{U}' = \{U'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $U'_n = \bigcup\limits_{i\leq n} U_i$. Entonces, $U'_n \subset U'_{n+1}$, y $U'_n \neq X$, por lo que podemos considerar una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \notin U'_n$ y $x_n \neq x_i$, $1 \leq i \leq n-1$. Por hipótesis, $\{x_n\}$ admite un punto adherente x. Sea pues $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_m$. Como $x_n \notin U_m$ para $n > m$, se tiene una contradicción.

$\Leftarrow$ Si $\{x_n\} \subset X$ es una sucesión tal que $Ad\{x_n\} = \emptyset$, por la Proposición 4.1.2 $\bigcap\limits_{n\geq 1} \overline{A_n} = \emptyset$, donde $A_n = \{x_k;\ k \geq n\}$. Por tanto, $\{(\overline{A_n})^c\}$ es un recubrimiento abierto numerable de X, luego por hipótesis, existe $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\} \subset \mathbb{N}$ tal que $\bigcap\limits_{i=1}^{k} \overline{A_{n_i}} = \emptyset$, lo que no es cierto, pues si $n_0 = max\{n_1, \ldots, n_k\}$, $x_{n_0} \in \bigcap_{i=1}^{k} A_{n_i}$. $\square$

Razonando igual que en la demostración de la Proposición 9.1.1, se prueba el siguiente resultado.

Proposición 10.0.2. $(X, \mathcal{T})$ *en* $\mathbb{N}$*-compacto si y sólo si toda familia numerable de cerrados con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.*

Observación 10.0.1. Es inmediato que todo espacio compacto es $\mathbb{N}$-compacto, pero el recíproco no es cierto en general. El contraejemplo clásico que suele darse es el de un espacio construido a partir de los números ordinales, pero para evitar tener que incluir en este trabajo los conceptos y resultados de teoría de conjuntos necesarios para definir dicho espacio, preferimos presentarlo más adelante en el capítulo siguiente, tras estudiar los espacios sucesionalmente compactos.

En una amplia clase de espacios como son los espacios de Lindelöf, que incluye a los espacios $2^\circ N$, la compacidad y la $\mathbb{N}$-compacidad coinciden:

Definición 10.0.2. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se llama **espacio de Lindelöf** si todo recubrimiento abierto de X admite un subrecubrimiento numerable.

En los espacios métricos esta propiedad equivale al 2° axioma de numerabilidad, pero existen espacios de Lindelöf que no son $2^\circ N$, como por ejemplo $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$ o la recta de Sorgenfrey, que es $\mathbb{R}$ con la topología generada por los intervalos $[a, b)$.
Es inmediato comprobar a partir de las definiciones el siguiente resultado:

Proposición 10.0.3. *Un espacio de Lindelöf* $(X, \mathcal{T})$ *es compacto si y sólo si es* $\mathbb{N}$*-compacto.*

Puede darse otra caracterización de los espacios compactos en términos de los llamados puntos de ω-acumulación de sus conjuntos. Estos puntos son una clase particular de puntos de acumulación, y pueden considerarse una generalización de los puntos adherentes de una sucesión.

Definición 10.0.3. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subseteq X$. Se dice que x es un **punto de ω-acumulación** de A si $V \cap A$ es infinito para todo $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$.
Nótese que si que x es punto de ω-acumulación de A, entonces $x \in A'$, pero el recíproco no es cierto.

Ejemplo 10.0.1. Sea $\mathbb{N}$ con la topología que tiene como base la familia $\mathcal{B} = \{\{n, n+1\}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si $A \subseteq \mathbb{N}$ no es vacío, $A' \neq \emptyset$, pues si $n \in A$, entonces $n+1 \in A'$. Sin embargo, $A = \{2n;\ n \in \mathbb{N}\}$ no tiene puntos de ω-acumulación.

Se tiene la siguiente caracterización de la $\mathbb{N}$-compacidad:

Proposición 10.0.4. *$(X, \mathcal{T})$ es $\mathbb{N}$-compacto si y sólo si todo conjunto infinito $A \subseteq X$ tiene al menos un punto de ω-acumulación.*

Demostración. Si $(X, \mathcal{T})$ es $\mathbb{N}$-compacto y $A \subseteq X$ es infinito, sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ una subsucesión en A cuyos términos son todos distintos. Por hipótesis, x admite al menos un punto adherente, que es un punto de ω-acumulación de A. En efecto, si existe $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ con $A \cap V$ finito, $V \cap \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sería finito, y x no sería adherente a la sucesión.
Recíprocamente, sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Si existe un término que se repite infinitas veces en la sucesión, es decir, si admite una subsucesión constante, dicho término es punto adherente de la sucesión. En caso contrario, la sucesión admite una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ cuyos términos son todos distintos entre sí; es decir, $A = \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es un conjunto infinito. Por hipótesis, A admite un punto de ω-acumulación x, y se tiene que x es adherente a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. En efecto, dados $N \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ y $m \in \mathbb{N}$, por ser $A \cap N$ infinito, existe $n_m > m$ tal que $x_{n_m} \in A \cap N \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in \overline{A_m}$, donde $A_m = \{x_n;\ n \geq m\}$. $\square$

Otra noción de compacidad, cercana a la anterior, se obtiene mediante la generalización de la propiedad de Bolzano-Weierstrass de $\mathbb{R}$, que afirma que todo subconjunto infinito y acotado de números reales tiene al menos un punto de acumulación.

Definición 10.0.4. Un espacio $(X, \mathcal{T})$ se llama **compacto en el sentido de Bolzano-Weierstrass** o **BW-compacto** si para todo subconjunto infinito $A \subset X$ se cumple que $A' \neq \emptyset$.
Es decir, $(X, \mathcal{T})$ se llama *BW-compacto* si todo subconjunto infinito de X tiene al menos un punto de acumulación.

Otro término frecuente para designar a estos espacios es "*espacio compacto por puntos límites*".

Proposición 10.0.5. *Si $(X, \mathcal{T})$ es $\mathbb{N}$-compacto, entonces es BW-compacto.*

Demostración. Si $A \subseteq X$ es infinito, por la proposición anterior, A admite al menos un punto de ω-acumulación, y por tanto, de acumulación. $\square$

Corolario 10.0.1. Si $(X, \mathcal{T})$ es compacto, $(X, \mathcal{T})$ es BW-compacto.

Demostración. Basta tener en cuenta que todo espacio compacto es $\mathbb{N}$-compacto y la proposición anterior. $\square$

Ejemplo 10.0.2. (Existen espacios BW-compactos que no son compactos)
Por ejemplo, sea $Y = (\{0,1\}, \mathcal{T}_{ind})$, $\mathbb{N}$ con la topología discreta, y $X = Y \times \mathbb{N}$ con la topología producto. Entonces, X no es compacto, pues el recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $U_n = \{n\} \times Y$, no admite ningún subrecubrimiento finito. Sin embargo, X es B-W compacto, pues si $A \subset X$ no es vacío, $A' \neq \emptyset$. En efecto, si $(0,n) \in A$, entonces $(1,n) \in A'$, y si $(1,n) \in A$, entonces $(0,n) \in A'$.

Nota 10.0.1. Como se observa, la diferencia entre los espacios $\mathbb{N}$-compactos y BW-compactos se basa en la distinción entre puntos de acumulación y puntos de ω-acumulación. Ahora bien, en los espacios T_1 ambos tipos de puntos coinciden. En efecto, si $(X, \mathcal{T})$ es T_1 y $A \subseteq X$, supongamos que $x \in A'$ no es punto de acumulación. Entonces, existiría $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ abierto con $A \cap V = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Pero por ser $(X, \mathcal{T})$ T_1, $W = V - \{x_1, \ldots, x_m\} \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ y $W \cap A = \emptyset$.

Se tiene por tanto el siguiente resultado:

Proposición 10.0.6. *Si $(X, \mathcal{T})$ es T_1, entonces son equivalentes:*

a) $(X, \mathcal{T})$ *es $\mathbb{N}$-compacto.*

b) $(X, \mathcal{T})$ *es BW-compacto.*

Ejemplo 10.0.3. El espacio definido en el Ejemplo 10.0.1 prueba que el resultado anterior no es cierto en general en un espacio T_0.

Los espacios $\mathbb{N}$-compactos tienen algunas propiedades de los espacios compactos que se demuestran de forma muy parecida. Por ejemplo,

Proposición 10.0.7. *Si $(X, \mathcal{T})$ es $\mathbb{N}$-compacto y $A \subseteq X$ es cerrado, entonces A es $\mathbb{N}$-compacto.*

Proposición 10.0.8. *Si* $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ *es continua y* $(X, \mathcal{T})$ *es* $\mathbb{N}$*-compacto, entonces* $f(X)$ *también lo es.*

No es cierto, sin embargo, que el producto de dos espacios $\mathbb{N}$-compactos sea $\mathbb{N}$-compacto. El primer ejemplo se debe a Novak [12](véase 3.10.19 de [3]) y en su construcción se hace uso de la compactificación de Stone-Čech de $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{dis})$.

Capítulo 11

Espacios secuencialmente compactos

En este Capítulo se trata la noción de compacidad secuencial que es especialmente apropiada para los espacios métricos, pues está basada en los objetos que determinan la topología de estos espacios, las sucesiones. Pretende ser una extensión a dichos espacios del Teorema de Bolzano-Weierstrass, que afirma que toda sucesión acotada en un espacio euclídeo admite una subsucesión convergente.

Definición 11.0.1. Un espacio métrico (X, d) se llama **secuencialmente compacto** o s**-compacto** si toda sucesión en X admite una subsucesión convergente.

La extensión de esta definición a los espacios topológicos quedaría del siguiente modo:

Definición 11.0.2. Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es **secuencialmente compacto** o s**-compacto** si toda sucesión en X contiene una subsucesión convergente.

Nota 11.0.1. Obsérvese que todo espacio s-compacto es $\mathbb{N}$-compacto, y que por la Proposición 4.1.3. en los espacios métricos ambas nociones son equivalentes. Pero dicha equivalencia se tiene en la clase más amplia de los s-espacios, y al final del Capítulo se detalla la prueba dada en 3.10.31. de [3]. Debido a ello, algunos autores (ver [6]) consideran que la diferencia entre ambas definiciones es tan sutil que califican de "esotéricos"los espacios en los que no coinciden. No obstante, hay una diferencia considerable entre ellas en lo que respecta a su comportamiento respecto al producto, pues mientras que el producto de dos espacios $\mathbb{N}$-compactos no siempre lo es, para el producto de s-compactos se tiene:

Proposición 11.0.1. *Si $\{(X_k, \mathcal{T}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una familia numerable de espacios s-compactos, entonces $X = \prod_{k\in\mathbb{N}}$ con la topología producto es un espacio s-compacto.*

Demostración. Sea $\{x^k\}_{k\geq 1}$ una sucesión en X. Por ser X s-compacto, la sucesión $p_1(x^k) = \{x_1^k\}_{k\geq 1}$ tiene una subsucesión $\{x_1^{u(1,k)}\}_{k\geq 1}$ convergente a $x_1 \in X_1$. A su vez, la sucesión $p_2(x_1^{u(1,k)}) = \{x_2^{u(1,k)}\}_{k\geq 1}$ admite una subsucesión convergente $\{x_2^{u(2,k)}\}_{k\geq 1}$ a $x_2 \in X_2$. De este modo, se obtienen inductivamente subsucesiones $\{x_m^{u(m,k)}\}$ que convergen a puntos $x_m \in X_m$, y la subsucesión $\{x^{u(k,k)}\}_{k\geq 1}$ converge a $x = (x_m) \in X$. Ello se debe a que para cada $n \geq 1$ $\{x_n^{u(k,k)}\}_{k\geq n}$ es una subsucesión de $\{x_n^{u(n,k)}\}_{k\geq n}$ y por tanto converge a x_n. □

Por otra parte, la compacidad y la s-compacidad son propiedades independientes en el sentido de que ninguna de ellas implica la otra.

Ejemplo 11.0.1. (Espacio s-compacto que no es compacto)
Sea $Y = \{0,1\}^{\mathbb{R}}$ con la topología producto, donde en $\{0,1\}$ se considera la topología discreta, y sea $X = \{x \in Y;\ x^{-1}(1) \textit{ es numerable}\}$ con la topología relativa. Es decir, el conjunto de las coordenadas no nulas de X es numerable.
Se tiene que X es denso en Y, ya que si O es un abierto básico de Y, $O = \prod_{i\in\mathbb{R}} U_i$, siendo $U_j \neq \{0,1\}$ para $j \in J \subset \mathbb{R}$ finito, y tomando $x \in O$ con todas sus coordenadas nulas salvo las que estén en J, $x \in X$. Por tanto X no es compacto, ya que por ser Y un espacio T_2, si lo fuese sería cerrado.
Veamos que X es s-compacto. Si $\{x_n\}$ es una sucesión en X, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} x_n^{-1}(1)$ es numerable ya que cada $x_n^{-1}(1)$ lo es. Si $Z = \{0,1\}^A$ con la topología relativa de Y, Z es s-espacio por ser un producto numerables de s-espacios. Por tanto, si $f : X \to Z$ es la aplicación $f(x) = x_{|A}$ la sucesión $\{f(x_n)\}$ admite una subsucesión convergente. Es decir, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ tal que $f(x_{n_k}) \to z \in Z$. Como $x_n(\mathbb{R} - A) = \{0\}$, si $x \in X$ viene dado por

$$x(s) = \begin{cases} z(s) & \text{si } s \in A \\ 0 & \text{si } s \notin A \end{cases}$$

se tiene que $x_{n_k} \to x$.

Ejemplo 11.0.2. (Espacio compacto que no es s-espacio)
Sea $X = [0,1]^{[0,1]}$ con la topología producto. Es decir, $X = \{f : [0,1] \to [0,1]\}$ con la

topología de la convergencia puntual. Veamos que existe una sucesión $\{f_n\}$ en X que no admite ninguna subsucesión convergente. En efecto, dado $x \in [0,1]$, consideremos su expresión binaria, adoptando el convenio de que si tiene dos, una con una cola infinita de ceros y otra con una cola infinita de unos, elegimos la primera. Sea $f_n : [0,1] \to [0,1]$ dada por $f_n(x) = n$, donde n es el n-ésimo dígito de la expresión binaria de x. Si $\{f_{n_k}\}$ fuese una subsucesión de $\{f_n\}$ que converge a f, entonces $f_{n_k}(x) \to f(x)$ para todo $x \in [0,1]$. Pero si se considera $t \in [0,1]$ con la condición de que su expresión binaria venga dada por la propiedad de que

$$\text{n-ésimo dígito de t} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = n_k \text{ y } k \text{ par} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

la sucesión $f_{n_k}(t) = \{0,1,0,1,\dots\}$ no converge.

Nota 11.0.2. Obsérvese que el espacio del ejemplo anterior proporciona un Ejemplo de espacio $\mathbb{N}$-compacto que no es s-compacto.

Proposición 11.0.2. *Un s-espacio $(X,\mathcal{T})$ es s-compacto si y sólo si es $\mathbb{N}-$compacto.*

Demostración. Como todo espacio s-compacto es $\mathbb{N}$-compacto, basta probar que si $(X,\mathcal{T})$ es $\mathbb{N}$-compacto, entonces es s-compacto. Sea pues $\{x_n\}$ una sucesión en X. Podemos suponer que si $n \neq m$, entonces $x_n \neq x_m$, es decir, que todos los términos de la sucesión son distintos. En efecto, si $x \in X$, sea $N_x = \{n \in \mathbb{N}; x_n = x\}$. Si alguno de estos conjuntos es infinito, entonces $\{x_n\}$ admite una subsucesión constante, y por tanto convergente. Por tanto, todos los conjuntos N_{x_n} serían finitos, luego dado x_1 existiría $x_{n_1} \neq x_1$. Al ser $N_{x_{n_1}}$ finito, existiría $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \neq x_{n_1}$, y de este modo se obtendría una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ cuyos términos serían todos distintos entre sí.

Como $A = \{x_n\}$ es infinito, por hipótesis admite un punto de w-acumulación $x \in A'$. Y como $B = A - \{x\}$ no es cerrado, ya que $x \in \overline{B} - B$, B no es s-cerrado. Por tanto, existe una sucesión $\{y_n\} \subset A - \{x\}$ e $y \notin A - \{x\}$ tal que $y_n \to y$. Nótese que aunque existe una aplicación inyectiva $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $y_n = x_{j(n)}$, $\{y_n\}$ no es necesariamente una subsucesión de $\{x_n\}$.

Veamos que se puede obtener una subsucesión de $\{y_n\}$ que lo es también de $\{x_n\}$, y así se tendrá el resultado. Para ello se considera la aplicación inyectiva $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida inductivamente como sigue:

$$i(1) = j(1), \;\; i(n+1) = j(min\{p > m; j(p) > i(m)\})$$

De este modo, $\{x_{j(n)}\}$ es una subsucesión tanto de $\{x_n\}$ como de $\{y_n\}$, y por tanto convergente. $\square$

Proposición 11.0.3. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *es* $1°N$ *y* $B{-}W$ *compacto, entonces* $(X, \mathcal{T})$ *es s-compacto.*

Demostración. Sea $\{x_n\} \subset X$ una sucesión. Si $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es finito admite una subsucesión constante, y por tanto convergente. Si A es infinito, entonces existe $x \in A'$, y por tanto $x \in lim\,\{x_n\}$. Como $(X, \mathcal{T})$ es $1°N$, por la Proposición 6.0.5. existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ que converge a x. $\square$

Corolario 11.0.1. Un espacio $1°N$ es $\mathbb{N}-$ compacto si y sólo si es s-compacto.

Demostración. Por la Nota 11.0.1, todo espacio s-compacto es $\mathbb{N}-$compacto. Para el recíproco, basta tener en cuenta la Proposición 10.0.5. y la Proposición anterior. $\square$

Aunque en general el producto de dos espacios $\mathbb{N}-$compactos no es $\mathbb{N}-$compacto se tiene el siguiente resultado:

Proposición 11.0.4. *Si* X *e* Y *son* $\mathbb{N}-$*compactos e* Y *es s-espacio entonces* $X \times Y$ *es* $\mathbb{N}-$*compacto.*

Demostración. Si $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $X \times Y$, veamos que tiene un punto adherente. En efecto, por la Nota 11.0.2. Y es s-compacto, así que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente $\{y_{n_k}\}$. Por ser X $\mathbb{N}-$compacto la subsucesión $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ admite un punto adherente x. Entonces, si $y \in lim\;\{y_k\}$ se tiene que $(x, y) \in Ad(\{(x_n, y_n)\})$. Pues si $U \times V$ es un abierto básico de $X \times Y$ con $(x, y) \in U \times V$ y $m \in \mathbb{N}$, existe n_{k_0} tal que $y_{n_p} \in V$ si $n_p \geq n_{k_0}$. Si se toma $n_q \geq m, n_{k_0}$, existe $n_s \geq n_q$ tal que $x_{n_s} \in U$, luego $(x_{n_s}, y_{n_s}) \in U \times V$. $\square$

Bibliografía

[1] Cartan, H. (1937). *Théorie des filtres.* C. R. Acad. Sci. Paris, 205:595–598.

[2] Christenson, C.O., Voxman, W.L. (1998) *Aspects of Topology.* Marcel Dekker.

[3] Engelking, R. (1977) *Elements of general topology.* Polish Scientific Publishers.

[4] Franklin, S.P. (1965) *Spaces in which sequences suffice.* Fundamenta Mathematicae 57: 107-116.

[5] Franklin, S.P. (1967) *Spaces in which sequences suffice II.* Fundamenta Mathematicae 61: 51-56.

[6] Gemignani, M.C. (1990) *Elementary Topology.* Dover.

[7] Goreham, A. (2016) *Sequential convergence in topological spaces*, arXiv:math/0412558v2

[8] Hinrichsen, D., Fernández, J. L. (1977) *Topología general.* Urmo.

[9] Kremsater, T. P. (1972). *Sequential space methods* (Doctoral dissertation, University of British Columbia).

[10] Smith, H.L., Moore, E.H. (1922) *A General Theory of Limits.* Amer. J. Math., 4(2):102–121.

[11] Munkres, J. (2002) *Topología 2. ª Edición* Pearson Educación.

[12] Novák, J. (1953). *On the Cartesian product of two compact spaces.* Fund. Math, 40, 106-112.

[13] Pier, J. P. (1961) *Genèse et évolution de l'idée de compact.* Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, 169-179.

[14] Steen, J. A., Seebach, J. A. (1995) *Counterexamples in Topology* Dover.

[15] Vermeeren, S. (2010) *Sequences and nets in topology.* arXiv preprint arXiv:1006.4472.