



**La Paradoja de Banach-Tarski en el
espacio euclídeo y en el plano
hiperbólico**

Andrés Sánchez Moreno



La Paradoja de Banach-Tarski en el espacio euclídeo y en el plano hiperbólico

Andrés Sánchez Moreno

Memoria presentada como parte de los requisitos
para la obtención del título de Grado en Matemáticas
por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por

Prof. Juan Carlos García Vazquez

Índice general

Introducción	1
English Abstract	5
1. La Paradoja de Hausdorff	7
1.1. Conjuntos paradójicos	7
1.2. La paradoja de Hausdorff	11
2. La Paradoja de Banach-Tarski	15
2.1. Equidescomponibilidad	15
2.2. La Paradoja de Banach-Tarski	18
2.3. Forma fuerte de la Paradoja de Banach-Tarski	20
3. Minimización del número de piezas	23
3.1. Descomposición minimal del la esfera	23
3.2. Descomposición minimal de la bola	28
4. Introducción al Plano Hiperbólico	31

II LA PARADOJA DE BANACH-TARSKI EN EL ESPACIO EUCLÍDEO Y EN EL PLANO HIPERBÓLICO

4.1. El semiplano superior, métrica hiperbólica y geodésicas	31
4.2. Isometrías. Transformaciones de Möbius	34
4.3. Clasificación de las transformaciones de Möbius	39
4.4. El Disco de Poincaré	43
5. Paradojas en el Plano Hiperbólico	45
5.1. Teselación del Semiplano Superior	45
5.2. La Paradoja de Hausdorff en el Plano Hiperbólico	53
5.3. La Paradoja de Banach-Tarski en el Plano Hiperbólico	57

Introducción

El siguiente Trabajo de Fin de Grado está dedicado al estudio de diferentes descomposiciones paradójicas en distintos ámbitos. El documento se divide en dos bloques temáticos.

El primer bloque comprende los tres primeros capítulos. Al inicio del primer capítulo introducimos la noción de conjunto paradójico, la cual será el centro de todo el trabajo. Diremos que un conjunto es paradójico si podemos descomponerlo en un número finito de piezas que no se cortan entre sí y volverlas a encajar de tal forma que logramos obtener dos copias exactas del conjunto inicial. Esta situación contradice claramente nuestra intuición geométrica, pues hemos conseguido duplicar un objeto reuniendo las piezas que en un inicio lo conformaban. Por ello se conoce como paradojas a algunos de los diferentes Teoremas que trataremos. Tras esto, abordamos la paradoja de Hausdorff clásica, la cual establece una descomposición paradójica de la esfera euclídea tridimensional salvo un subconjunto numerable de puntos. En este proceso comenzaremos a visualizar la conocida importancia del axioma de elección en la construcción de las paradojas de Hausdorff y Banach-Tarski; esta última será abordada en el segundo capítulo.

En el segundo capítulo nos planteamos mejorar el resultado obtenido en el primero, de forma que podamos absorber el subconjunto de la esfera que no hemos logrado incluir en la descomposición paradójica, obteniendo así una descomposición de la esfera entera. Para ello introducimos un nuevo concepto, la equidescomponibilidad, que no es más que una generalización a conjuntos del concepto, ya conocido, de polígonos congruentes por disecciones. Así, dos conjuntos son equidescomponibles si podemos romper ambos en un número finito y común de piezas, de forma que formemos las piezas del segundo a partir de las del primero por la acción de un grupo de permutaciones. Gracias a esta nueva herramienta alcanzaremos nuestro objetivo, pues probaremos que el hecho de ser paradójico se conserva bajo la relación de ser

equidescomponible, y que la esfera es equidescomponible a ella misma menos un subconjunto numerable. Llegados a este punto probamos la paradoja de Banach-Tarski a partir de la de Hausdorff, la cual sostiene que la bola unidad cerrada centrada en el origen también es paradójica. Cabe mencionar que la restricción sobre el radio y el centro de la bola es bastante inocua, y se toma así por comodidad para la prueba; pero en realidad se tiene el mismo resultado para cualquier bola cerrada sin más que cambiar un par de detalles en la demostración. Para terminar, construimos la forma fuerte de la paradoja de Banach-Tarski, por la que dos conjuntos cualesquiera del espacio euclídeo tridimensional acotados con interior no vacío son equidescomponibles, conocido también este resultado como la paradoja del guisante y el Sol.

En el tercer capítulo estudiamos el número mínimo de piezas necesarias para lograr descomponer la esfera y la bola como hemos hecho en los capítulos anteriores. Para ellos nos servimos del concepto de acciones localmente conmutativas. En primer lugar veremos que cualquier conjunto paradójico necesita al menos cuatro piezas para su descomposición. En el caso de la esfera nos bastará con estas cuatro piezas, sin embargo para la bola necesitaremos una más.

El segundo bloque está formado por los capítulos cuatro y cinco. Ahora abandonamos el espacio euclídeo para adentrarnos en el mundo hiperbólico. La geometría hiperbólica surge a partir de considerar sólo los cuatro primeros postulados de Euclides y rechazando el quinto, conocido como el postulado de las paralelas, cuyo enunciado es equivalente a que dada una recta y un punto exterior a ella, sólo existe una recta paralela a la primera y que contenga a dicho punto. En la geometría hiperbólica siempre hay al menos dos rectas distintas que pasan por un punto exterior a otra y es paralela a una dada. El capítulo cuatro está dedicado a construir los elementos básicos del plano hiperbólico, centrándonos en el modelo del semiplano superior, aunque se incluye también una breve introducción al modelo del Disco de Poincaré al final del mismo. Esta construcción pasa por la métrica hiperbólica y las geodésicas hasta llegar a las transformaciones de Möbius, las cuales serán cruciales para el trabajo posterior. Estas transformaciones tienen una forma muy específica y su importancia reside en que, tomando los coeficientes de forma adecuada, estas conforman todas las isometrías del semiplano superior. Veremos que podemos asociar a cada transformación una matriz de forma natural, de tal manera que a lo largo del trabajo confundiremos ambas representaciones. En virtud de esta representación, clasificaremos las transformaciones de Möbius en función de la traza de la matriz asociada, lo cual nos dará información sobre los puntos fijos que deja al aplicarla al semiplano superior.

Por último, en el quinto capítulo nos ponemos como objetivo descomponer pa-

radóticamente el plano hiperbólico completo siguiendo un esquema parecido al del primer bloque. Primero construiremos una teselación del semiplano superior sirviéndonos de un polígono inicial, al que llamaremos polígono fundamental, y obteniendo el resto de polígonos que completan el semiplano superior aplicándole a este primer polígono transformaciones de cierto subgrupo del grupo de transformaciones de Möbius. En segundo lugar, probaremos la paradoja de Hausdorff en el plano hiperbólico, la cual establece una descomposición paradójica del semiplano superior (y por ende también del Disco de Poincaré) salvo el conjunto formado por la frontera de los polígonos de la teselación. Al contrario que en el inicio del trabajo, en este caso no será necesario hacer uso del axioma de elección. Tras esto, nos volvemos a proponer eliminar el conjunto que no permite una descomposición del plano hiperbólico completo, llegando así a la paradoja de Banach-Tarski en el plano hiperbólico.

English Abstract

This work deals with paradoxical decompositions in different spaces.

First of all we deal with the Hausdorff paradox, which states that the three dimensional Euclidean sphere except for a countable subset is paradoxical. After this, we improve this result building a paradoxical decomposition of the whole sphere and we treat the Banach-Tarski paradox that proves that the three-dimensional euclidean ball is also paradoxical. We also include a section about equidecomposability and the strong form of the Banach-Tarski paradox, which states that any two bounded subset of \mathbb{R}^3 having nonempty interior are equidecomposable. In addition, we will study the minimum number of pieces necessary reach out the paradoxical decompositions of the sphere and the ball.

Finally we move to the hyperbolic plane. We start by building the basic elements of this. Then, we prove the Hausdorff paradox in the hyperbolic plane which provides a paradoxical decomposition of the upper half plane except for a set of null measure. Finally we provide a decomposition of the complete upper half plane by the Banach Tarski paradox.

1 | La Paradoja de Hausdorff

Para este capítulo se ha seguido [7] y [11], capítulos 1 y 2.

1.1 Conjuntos paradójicos

Comenzamos definiendo el concepto sobre el que va a girar todo el trabajo. Se trata de los conjuntos paradójicos.

En el trabajo utilizaremos el término permutaciones para referirnos a aplicaciones biyectivas.

| Definición 1.1. *Sea G un grupo de permutaciones del conjunto X y supongamos que $E \subset X$. E es paradójico respecto a G (o G -paradójico) si para algún par de enteros $m, n \in \mathbb{N}$ existen subconjuntos de E disjuntos dos a dos $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$ y $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$ tales que $E = \bigcup_{i=1}^n g_i(A_i)$ y $E = \bigcup_{j=1}^m h_j(B_j)$*

En otras palabras, E es paradójico respecto a G si podemos descomponerlo en conjuntos disjuntos dos a dos, reordenarlos con elementos de G , y volverlos a unir formando dos copias del propio E . La idea detrás de la definición es que podemos "romper" E en un número finito de piezas de forma que, volviéndolas a encajar de cierta forma, logramos duplicar E .

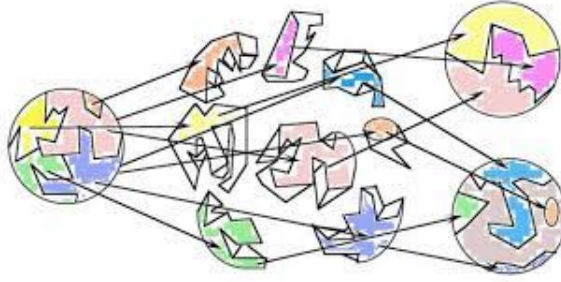


Figura 1.1: Descomposición paradójica de la bola euclídea 3-dimensional.

En la siguiente observación se muestra un ejemplo fácil de conjunto paradójico:

Observación 1.1. Si tomamos $X = \mathbb{R}$ y $E = \mathbb{Z}$, se tiene que el conjunto de los enteros \mathbb{Z} es paradójico respecto al grupo de las funciones lineales con pendiente positiva. En efecto, consideramos $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Sea $G = \{mx + n : m > 0\}$. Podemos dividir \mathbb{Z} en dos subconjuntos disjuntos, los pares $2\mathbb{Z}$ y los impares $2\mathbb{Z} + 1$. Tomamos $g(x) = \frac{x}{2} \in G$ y $h(x) = \frac{x-1}{2} \in G$ (ambas biyectivas). Así, $\mathbb{Z} = g(2\mathbb{Z}) \cup \mathbb{Z} = h(2\mathbb{Z} + 1)$.

Definición 1.2. Denotamos por SO_3 al grupo (no abeliano) de rotaciones de \mathbb{R}^3 que dejan invariante el origen, con la operación de composición.

Podemos ver este grupo como el grupo de rotaciones de eje una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Observación 1.2. Las rotaciones son aplicaciones lineales, lo que nos permite entender SO_3 como un subgrupo del grupo de matrices 3×3 . Además, dada una base ortonormal de \mathbb{R}^3 , toda rotación se representa como una matriz respecto a la base fijada, ortogonal y con determinante 1, por lo que pensaremos en SO_3 como el grupo de las matrices ortogonales con determinante 1 con la multiplicación de matrices como operación.

Definición 1.3. Un producto finito de permutaciones $\sigma_1 \dots \sigma_n$ se dice irreducible si no aparece un elemento seguido de su inverso en él.

Nuestro siguiente objetivo será construir un subgrupo F de SO_3 tal que existan dos rotaciones σ, τ tales que, junto con sus inversas, generan a F y todo producto finito y reducido de elementos de F es único. Es decir, dado un producto finito y reducido de elementos de F , este no puede reescribirse como un producto finito y reducido de elementos de F distinto al original.

Para ello, tomamos

$$\sigma^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Estas rotaciones se corresponden con las rotaciones alrededor del eje Oz y del eje Ox y de ángulo $\arccos(\frac{1}{3})$ respectivamente.

Probaremos un lema previo a la construcción de F :

Lema 1.1. Sea ω un producto finito y reducido de $\sigma^{\pm 1}$ y $\tau^{\pm 1}$. Entonces, el punto $\omega(1, 0, 0)$ es de la forma $\frac{1}{3^k}(a, b\sqrt{2}, c)$ con $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Además, b no es múltiplo de 3.

Demostración. Procedemos por inducción en el número de factores del producto ω (llamamos k a este número). Suponemos sin pérdida de generalidad que ω termina a la derecha con $\sigma^{\pm 1}$, pues $\tau^{\pm 1}(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$. Si sólo aparece un factor, $\omega = \sigma^{\pm 1}$ y $\omega(1, 0, 0) = \frac{1}{3}(1, \pm 2\sqrt{2}, 0)$. Supongamos ahora que $\omega = \sigma^{\pm 1}\omega'$ o $\omega = \tau^{\pm 1}\omega'$, donde ω' es un producto finito y reducido de $\sigma^{\pm 1}$ y $\tau^{\pm 1}$ con $n - 1$ factores. Por hipótesis de inducción, $\omega'(1, 0, 0) = \frac{1}{3^{k-1}}(a', b'\sqrt{2}, c')$ con $a', b', c' \in \mathbb{Z}$. En el primer caso, $\omega(1, 0, 0) = \frac{1}{3^k}(a, b\sqrt{2}, c)$, donde $a = a' \pm 4b'$, $b = b' \pm 2a'$ y $c = 3c'$. En el segundo caso, $\omega(1, 0, 0) = \frac{1}{3^k}(a, b\sqrt{2}, c)$, donde $a = 3a'$, $b = b' \mp 2c'$ y $c = c' \pm 4b'$.

Veámos ahora que b no es múltiplo de 3:

Distinguimos cuatro casos dependiendo si ω es igual a $\sigma^{\pm 1}\tau^{\pm 1}\nu$, $\tau^{\pm 1}\sigma^{\pm 1}\nu$, $\sigma^{\pm 1}\sigma^{\pm 1}\nu$ o $\tau^{\pm 1}\tau^{\pm 1}\nu$, con ν es un producto finito de $\sigma^{\pm 1}$ y $\tau^{\pm 1}$, o posiblemente la identidad. En los dos primeros casos, siguiendo el razonamiento de arriba, tenemos que $b = b' \mp 2c'$ donde 3 divide a c' o $b = b' \pm 2a'$ donde 3 divide a a' . Como b' no es divisible por 3, b tampoco puede serlo. Para los dos casos restantes, denotamos por a'' , b'' y c'' los enteros que aparecen en la multiplicación $\nu(1, 0, 0)$. En los dos casos, $b = 2b' - 9b''$. En el tercer caso, $b = b' \pm 2a' = b' \pm 2(a'' \mp 4b'') = b' + b'' \pm 2a'' - 9b'' = 2b' - 9b''$, un razonamiento similar funciona para el último caso, de donde se sigue que b' no es divisible por 3, y por tanto b tampoco, lo que finaliza la prueba.

|

Proposición 1.1. Existen dos rotaciones $\sigma, \tau \in SO_3$ tales que junto con sus inversas generan un subgrupo F tal que todo producto finito e irreducible de elementos de F es único, esto es, si existen dos productos finitos e irreducibles de F que resultan el mismo elemento, entonces ambos productos están conformados por los mismos elementos de F y dispuestos en el mismo orden.

Demostración. Tomamos σ y τ como antes. Veámos que todo producto finito y reducido de $\sigma^{\pm 1}$ y $\tau^{\pm 1}$ es único. Para ello basta ver que ningún producto finito, reducido y no trivial es igual a la identidad.

Procedemos por reducción al absurdo. Sin pérdida de generalidad, supongamos que ω es un producto finito reducido que termina por la derecha con $\sigma^{\pm 1}$, y que es igual a la identidad. Como ω es producto finito de $\sigma^{\pm 1}$ y $\tau^{\pm 1}$, por el Lema 1.1, $\omega(1, 0, 0)$ es de la forma $\frac{1}{3^k}(a, b\sqrt{2}, c)$ con $a, b, c \in \mathbb{Z}$ y $3 \nmid b$. Por tanto, hemos llegado a una contradicción, pues $\omega(1, 0, 0) \neq (1, 0, 0)$.

Falta probar que F es un subgrupo de SO_3 . La identidad forma parte de F pues la podemos escribir como $\sigma\sigma^{-1}$. Sean ω y ν dos productos de $\sigma^{\pm 1}$ y $\tau^{\pm 1}$, por tanto, ω^{-1} también es un producto finito de $\sigma^{\pm 1}$ y $\tau^{\pm 1}$ utilizando las propiedades habituales para el producto de matrices con la inversa. Así, $\nu\omega^{-1}$ también es un producto finito de $\sigma^{\pm 1}$ y $\tau^{\pm 1}$, en consecuencia, $\nu\omega^{-1} \in F$. Concluimos que F es un subgrupo de SO_3 . |

Podemos ver F como un grupo de permutaciones de sí mismo pues el producto de elementos de F sigue estando en F , y $\omega\nu \neq \omega\nu'$ con $\nu, \omega, \omega' \in F$ por la unicidad probada anteriormente para productos finitos y reducidos. Por ello, tiene sentido plantearse si F es paradójico respecto de sí mismo, lo cual constituye una piedra angular en la prueba de la paradoja de Hausdorff.

Proposición 1.2. El subgrupo F definido en la Proposición 1.1 es paradójico respecto a sí mismo.

Demostración. Sea F el subgrupo definido en la Proposición 1.1 Sea $\gamma \in \{\sigma, \sigma^{-1}, \tau, \tau^{-1}\}$, denotamos $W(\gamma)$ al conjunto de elementos de F cuya representación como producto finito e irreducible en $\sigma^{\pm 1}$ y $\tau^{\pm 1}$ comienza por γ . Por tanto:

$$F = \{1\} \cup W(\sigma) \cup W(\sigma^{-1}) \cup W(\tau) \cup W(\tau^{-1})$$

Los conjuntos son disjuntos dos a dos. Más aún:

$$F = W(\sigma) \cup \sigma W(\sigma^{-1})$$

$$F = W(\tau) \cup \tau W(\tau^{-1})$$

Por tanto, hemos probado que F es un conjunto paradójico respecto de sí mismo. |

1.2 La paradoja de Hausdorff

En una primera aproximación a la descomposición paradójica de la esfera S^2 , en esta sección probaremos la Paradoja de Hausdorff, la cual sostiene que tal descomposición puede darse si prescindimos de un conjunto numerable de puntos. Más adelante veremos cómo hacer para absorber este conjunto y probar que la esfera completa es SO_3 -paradójica sirviendonos de estos primeros resultados.

Definición 1.4. Si G es un grupo de permutaciones de X , diremos que $x \in X$ es un punto fijo no trivial de X bajo la acción de G si existe una permutación $g \in G$ distinta de la identidad tal que $g(x) = x$.

Definición 1.5. Dado $x \in X$, el conjunto $G(x) = \{G(x) : g \in G\}$ se llama órbita de x por la acción de G .

Proposición 1.3. Sea G un grupo de permutaciones de X . Entonces, el conjunto de las órbitas de X bajo la acción de G forman una partición de X , llamadas G -órbitas de X .

Demostración. Observamos que, para cada $x \in X$, $x \in G(x)$, pues x es un punto fijo trivial, por tanto $X = \bigcup_{x \in X} G(x)$. Veámos ahora que las órbitas son disjuntas para elementos distintos de X . Supongamos que $y \in G(x)$ con $x \in X$. Esto equivale a que $y = g(x)$ para algún $g \in G$, equivalentemente $g^{-1}(y) = x$, lo cual es equivalente a que $x \in G(y)$. Esto prueba que si $y \in G(x)$, entonces necesariamente, $G(x) = G(y)$. En conclusión, las órbitas diferentes de X forman una partición de X . |

Observación 1.3. La Proposición 1.3 nos permite definir el conjunto M formado por un único elemento (representante) de cada G -órbita de X , por ser estas disjuntas.

Lema 1.2. Sea G un grupo de permutaciones de X tal que no existen puntos fijos no triviales de X bajo la acción de G , y M el conjunto formado por un solo elemento de cada G -órbita de X . Entonces, la familia de conjuntos $\{g(M) : g \in G\}$ forman una partición de X .

Demostración. Que cada $x \in X$ esté contenido en algún $g(M)$ con $g \in G$ es consecuencia directa de la Proposición 1.3. En efecto, M contiene exactamente un representante de $G(x)$, lo llamamos y . Entonces $y = h(x)$ para algún $h \in G$, y como G es un grupo de permutaciones, $h^{-1} \in G$. Por tanto, $h^{-1}(y) = x \in h^{-1}(M)$. Por tanto, cada elemento $x \in X$ pertenece a uno de la forma $g(M)$ con $g \in G$.

Veámos que los conjuntos son disjuntos dos a dos. Procedemos por reducción al absurdo. Sean $g, h \in G$ distintos tales que $x \in g(M) \cap h(M)$. Por tanto, existen $p, q \in M$ tales que $g(p) = x = h(q)$. Por la Proposición 1.3 las órbitas de p y q son disjuntas si

$p \neq q$. Por la construcción de M , no existen en él dos elementos de X con la misma órbita, por lo que necesariamente $p = q$. De aquí obtenemos que $g(p) = h(p) \iff p = g^{-1}(h(p))$, lo cual es una contradicción, pues habíamos elegido $g \neq h$, por lo que $g^{-1}p$ no es la permutación identidad, y G actúa sobre X sin puntos fijos distintos de los triviales. El resultado está probado. |

Observación 1.4. En la definición del conjunto M en el Lema 1.2 radica la conocida importancia del axioma de elección para la prueba de la paradoja de Hausdorff, y en consecuencia, para la paradoja de Banach-Tarski, como veremos en la siguiente sección.

Como consecuencia de los resultados probados anteriormente, probamos ahora el Teorema que nos proporcionará la herramienta necesaria para la construcción de descomposiciones paradójicas.

| Teorema 1.1. *Sea X un conjunto y G un grupo de permutaciones de X paradójico respecto de sí mismo que actúa sobre X sin puntos fijos no triviales. Entonces, X es paradójico respecto de G .*

Demostración. Sean $\{A_i\}_{i=1}^n$ y $\{B_j\}_{j=1}^m$ dos colecciones de subconjuntos de G , y asociados a ellas, sean $\{g_i\}_{i=1}^n$ y $\{h_j\}_{j=1}^m$ dos subcontos de G con los que G es paradójico. Sea M el conjunto formado por un solo elemento de cada G -órbita de X . Por el Lema 1.2, $\{f(M) : f \in G\}$ forma una partición de X .

Denotamos por $A_i^* = \bigcup_{f \in A_i} f(M)$ y $B_j^* = \bigcup_{f \in B_j} f(M)$. Como los conjuntos de $\{A_i\}_{i=1}^n \cup \{B_j\}_{j=1}^m$ son disjuntos dos a dos, los de $\{A_i^*\}_{i=1}^n \cup \{B_j^*\}_{j=1}^m$ también lo son, y como $G = \bigcup_{i=1}^n g_i(A_i) = \bigcup_{j=1}^m h_j(B_j)$, entonces $X = \bigcup_{i=1}^n g_i(A_i^*) = \bigcup_{j=1}^m h_j(B_j^*)$, como queríamos ver. |

Llegados a este punto estamos listos para probar la paradoja de Hausdorff. En términos de la notación seguida en esta sección, el conjunto E pasará a ser la esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ centrada en el origen, y el grupo de permutaciones G de \mathbb{R}^3 será el subgrupo $F \subset SO_3$ construido en la Proposición 1.1 Aunque en la Proposición 1.2 probamos que F era paradójico respecto de sí mismo, al ser F un subgrupo de rotaciones de \mathbb{R}^3 con ejes pasando por el origen, S^2 posee puntos fijos no triviales bajo la acción de F (las dos intersecciones de los ejes de cada giro con S^2). En consecuencia, tendremos que considerar S^2 sin estos puntos para aplicar el Teorema 1.1.

| Teorema 1.2 (Paradoja de Hausdorff). *Existe un subconjunto contable $D \subset S^2$ tal que $S^2 \setminus D$ es SO_3 -paradójico.*

Demostración. Sea F el subgrupo de la Proposición 1.1 Cada rotación distinta de la identidad de F deja fijos dos puntos de S^2 (la intersección de la esfera con el eje de

rotación). Sea D el conjunto de puntos fijos no triviales de F .

Veámos que F no tiene puntos fijos no triviales sobre $S^2 \setminus D$. Como F es contable, D también lo es. Sea $P \in S^2 \setminus D$ y $\nu \in F$. Como a P no lo fija ninguna rotación de F , $\nu(P) \in S^2 \setminus D$. Si existiera $\gamma \in F$ que fijara $\nu(P)$, P sería punto fijo de $\nu^{-1}\gamma\nu \in F$, lo cual es una contradicción con la elección de $P \in S^2 \setminus D$. Por tanto, no existen puntos fijos no triviales de F en $S^2 \setminus D$.

En la Proposición 1.2 vimos que F es paradójico respecto de sí mismo, aplicando el Teorema 1.1 tenemos que $S^2 \setminus D$ es F -paradójico. Como F es un subgrupo de SO_3 , $S^2 \setminus D$ es SO_3 -paradójico, como queríamos probar.

|

Aunque en este capítulo nos hayamos conformado con descomponer paradójicamente la esfera S^2 salvo un conjunto numerable, en la siguiente sección usaremos herramientas más sofisticadas para ver que, en realidad, es posible hacerlo con la esfera completa y generalizaremos el resultado a otros conjuntos del espacio euclídeo, en particular a las bolas euclídeas.

2 | La Paradoja de Banach-Tarski

En este capítulo continuamos siguiendo las referencias [7] y [11], capítulos 2 y 3.

2.1 Equidescomponibilidad

En esta sección introducimos un nuevo concepto, el cual nos será útil para extender la paradoja de Hausdorff a la esfera completa S^2 . Se trata la equidescomponibilidad. Esto no es más que una generalización del concepto clásico de polígonos congruentes por disecciones. Se dice que dos polígonos son congruentes por disecciones si se puede descomponer uno de ellos en un número finito de polígonos de forma que podamos encajarlos formando el otro (ver figura 2.1). Teniendo en mente esta idea, definimos:

Definición 2.1. Sea G un grupo de permutaciones sobre X y $A, B \subset X$. A y B son G -equidescomponibles si existen $n \in \mathbb{N}$, $\{A_i\}_{i=1}^n$ sucesión de subconjuntos disjuntos dos a dos de A y $\{B_i\}_{i=1}^n$ sucesión de subconjuntos disjuntos dos a dos de B , tales que:

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

$$B = \bigcup_{i=1}^n B_i$$

y además existen $g_1, \dots, g_n \in G$ tales que $g_i(A_i) = B_i$ para cada $1 \leq i \leq n$.

En términos más sencillos, A y B son G -equidescomponibles si podemos dividir ambos en el mismo número de piezas disjuntas, de forma que podemos formar las piezas del segundo aplicando permutaciones de G a las piezas del primero.

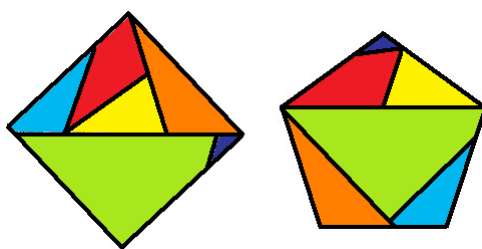


Figura 2.1: Polígonos congruentes por disecciones.

Definición 2.2. Sean $A, B \subset X$, y G un grupo de permutaciones de X . Definimos la relación: $A \sim_G B \iff A$ y B son G -equidescomponibles.

Proposición 2.1. La relación \sim_G de la Definición 2.2 es de equivalencia.

Demostración. La propiedad reflexiva se tiene pues si $A \subset X$, basta considerar la permutación identidad $I_d \in G$, y $A = I_d(A)$.

Veámos que es simétrica: Sean $A, B \subset X$ tales que $A \sim_G B$. Entonces existen $\{A_i\}_{i=1}^n \subset A$ disjuntos dos a dos, y $\{B_i\}_{i=1}^n \subset B$ disjuntos dos a dos, tales que $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$, y existen $g_1, \dots, g_n \in G$ cumpliendo $g_i(A_i) = B_i$ para cada $1 \leq i \leq n$. Tomando $g_1^{-1}, \dots, g_n^{-1} \in G$, tenemos que $g_i^{-1}(A_i) = B_i$, de donde $B \sim_G A$.

Para la propiedad transitiva supongamos que $A, B, C \subset X$ tales que $A \sim_G B$ y $B \sim_G C$.

De la primera relación, existen $\{A_i\}_{i=1}^n \subset A$ disjuntos dos a dos, y $\{B_i\}_{i=1}^n \subset B$ disjuntos dos a dos, tales que $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$, y existen $g_1, \dots, g_n \in G$ cumpliendo $g_i(A_i) = B_i$ para cada $1 \leq i \leq n$.

Análogamente, de la segunda relación, existen $\{B'_j\}_{j=1}^m \subset B$ disjuntos dos a dos, y $\{C_j\}_{j=1}^m \subset C$ disjuntos dos a dos, tales que $B = \bigcup_{j=1}^m B'_j$, $C = \bigcup_{j=1}^m C_j$, y existen $h_1, \dots, h_m \in G$ cumpliendo $h_j(B'_j) = C_j$ para cada $1 \leq j \leq m$.

La idea es superponer las dos particiones de B que se nos han generado en los dos párrafos anteriores. Para ello, consideramos $\{B_i \cap B'_j\}_{i,j=1}^{i=n, j=m} \subset B$, que también son disjuntos dos a dos porque los conjuntos que conforman tanto $\{B_i\}_{i=1}^n$ como $\{B'_j\}_{j=1}^m$, lo son. A partir de esta, construimos las particiones de A y C .

Llamamos $\mathcal{A} = \{g_i^{-1}(B_i \cap B'_j) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \subset A$. Estos conjuntos forman una partición de A pues:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^n \left(\bigcup_{j=1}^m g_i^{-1}(B_i \cap B'_j) \right) &= \bigcup_{i=1}^n g_i^{-1}(B_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^m B'_j \right)) = \\ &= \bigcup_{i=1}^n g_i^{-1}(B_i \cap B) = \bigcup_{i=1}^n g_i^{-1}(B_i) = \bigcup_{i=1}^n A_i = A \end{aligned}$$

Análogamente, llamamos $\mathcal{C} = \{h_j(B_i \cap B'_j) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \subset C$, que forman una partición de C pues:

$$\begin{aligned} \bigcup_{j=1}^m \left(\bigcup_{i=1}^n h_j(B_i \cap B'_j) \right) &= \bigcup_{j=1}^m h_j \left(\left(\bigcup_{i=1}^n B_i \right) \cap B'_j \right) = \\ & \bigcup_{j=1}^m h_j(B \cap B'_j) = \bigcup_{j=1}^m h_j(B'_j) = \bigcup_{j=1}^m C_j = C \end{aligned}$$

Además, $\#(\mathcal{A}) = \#(\mathcal{C})$ pues $g_i^{-1}(B_i \cap B'_j) \neq \emptyset \iff B_i \cap B'_j \neq \emptyset \iff h_j(B_i \cap B'_j) \neq \emptyset$. Más aún, si tomamos $f_{i,j} = (h_j \circ g_i) \in G$ para cada $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$, y se lo aplicamos a los elementos de \mathcal{A} , tenemos que:

$$f_{i,j}(g_i^{-1}(B_i \cap B'_j)) = h_j(g_i(g_i^{-1}(B_i \cap B'_j))) = h_j(B_i \cap B'_j)$$

Concluimos así que $A \sim_G C$. |

Como veremos a continuación, los conceptos de conjuntos G -paradójicos y G -equidescomponibles están íntimamente relacionados. Probaremos que si un conjunto G -paradójico es G -equidescomponible con otro, este último también será G -paradójico. Es decir, ser G -paradójico se hereda por la relación de equivalencia \sim_G de la Definición 2.2.

Proposición 2.2. Sea X un conjunto, G un grupo de permutaciones de X y $E \subset X$. Entonces, E es G -paradójico si, y sólo si existen $A, B \subset E$ disjuntos tales que $A \sim_G E$ y $B \sim_G E$.

Demostración. Supongamos que E es G -paradójico. Equivalentemente, existen subconjuntos $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \subset E$ disjuntos dos a dos, con $m, n \in \mathbb{N}$, y $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$ de forma que $E = \bigcup_{i=1}^n g_i(A_i)$ y $E = \bigcup_{j=1}^m h_j(B_j)$. Llamando $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, y $B = \bigcup_{j=1}^m B_j$, es claro que A y B son disjuntos por construcción. Veámos que $A \sim_G E$. $\{A_i\}_{i=1}^n$ es una partición de A , y $\{g_i(A_i)\}_{i=1}^n$ es una partición de E . Basta tomar las permutaciones $g_i \in G$ anteriores para ver que $A \sim_G E$. Análogamente se tiene que $B \sim_G E$ tomando ahora $\{B_j\}_{j=1}^m$ partición de B , y $\{h_j(B_j)\}_{j=1}^m$ partición de E .

Como a lo largo de la prueba solo se han usado equivalencias, la dirección contraria también está probada. |

Proposición 2.3. Sean G un grupo de permutaciones de X , y $E, E' \subset X$ tales que $E \sim_G E'$. Entonces, si E es G -paradójico, E' también es G -paradójico.

Demostración. Supongamos que E es G -paradójico. Equivalentemente, por la Proposición 2.2, existen $A, B \subset E$ disjuntos tales que $A \sim_G E$ y $B \sim_G E$. Como $E \sim_G E'$ por hipótesis, y por la Proposición 2.1, \sim_G es relación de equivalencia, tenemos que $A \sim_G E'$ y $B \sim_G E'$. Por tanto, E' también es G -paradójico. |

2.2 La Paradoja de Banach-Tarski

Llegados a este punto disponemos de las herramientas necesarias para probar que la esfera S^2 es paradójica. Probaremos que S^2 y $S^2 \setminus D$ son SO_3 -equidescomponibles, donde $D \subset S^2$ es un conjunto numerable. Esto unido a las propiedades de la equidescomponibilidad tratadas en la sección anterior y al Teorema 1.2 nos permitirá llegar a nuestro objetivo.

| Teorema 2.1. *Sea D un subconjunto numerable de S^2 , entonces S^2 y $S^2 \setminus D$ son SO_3 -equidescomponibles.*

Demostración. Sea l una recta que pasa por el origen y no contiene a ningún punto de D (podemos asegurar que esta existe pues el conjunto de rectas que pasan por el origen es no numerable y D es contable). Denotamos por ρ_θ la rotación de ángulo θ y eje l . Sea $A \subset [0, 2\pi)$ el conjunto de ángulos θ cumpliendo que existe $P \in D$ y $n > 0$ tales que $\rho_\theta^n(P) \in D$. Como \mathbb{N} y D son numerables, A también lo es. Por tanto, existe $\theta \in [0, 2\pi) \setminus A$. Por la construcción de θ , $D \cap \rho_\theta^n(D) = \emptyset$ para todo $n \geq 0$. De aquí también se deduce que $\rho_\theta^m(D) \cap \rho_\theta^n(D) = \emptyset$ para cualquier $0 \leq m < n$, pues $\rho_\theta^n(D) \cap \rho_\theta^m(D) = \rho_\theta^m(\rho_\theta^{n-m}(D) \cap D) = \rho_\theta^m(\emptyset) = \emptyset$. Definimos:

$$D' = \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho_\theta^n(D)$$

Por tanto,

$$\rho_\theta^n(D') = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho_\theta^n(D) = D' \setminus D$$

Luego $D' \sim D' \setminus D$. P or consiguiente:

$$S^2 = (S^2 \setminus D') \cup D' \sim (S^2 \setminus D') \cup (D' \setminus D) = S^2 \setminus D$$

La prueba esta completa. |

Corolario 2.1. La esfera completa S^2 es SO_3 -paradójica.

Demostración. En el Teorema 1.2 probamos que existe un subconjunto contable $D \subset S^2$ tal que $S^2 \setminus D$ es SO_3 -paradójico. Por el Teorema 2.1, $S^2 \setminus D \sim S^2$, y por la Proposición 2.3, la esfera S^2 es SO_3 -paradójica. |

Observación 2.1. Obsérvese que a lo largo de la teoría desarrollada hasta este punto no se ha usado que la esfera sea unitaria, por lo que el resultado anterior se puede enunciar para cualquier esfera centrada en el origen de radio arbitrario.

Una vez completada la descomposición paradójica para la esfera completa S^2 , podemos extender el resultado a la bola unidad (cerrada) $\bar{B}(0, 1)$. Para ello basta con identificar cada punto P de la esfera con su radio como se muestra en la siguiente imagen:

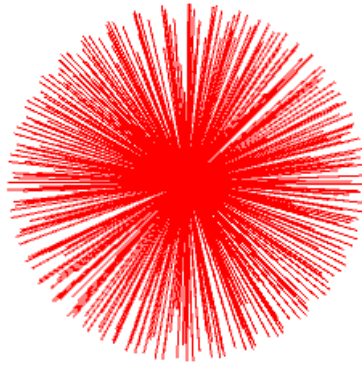


Figura 2.2: Radios de la esfera.

En lenguaje formal, la correspondencia viene dada por $P \mapsto \{\alpha P : 0 < \alpha \leq 1\}$. Cabe resaltar que para la buena definición de la correspondencia debemos prescindir punto central de la esfera. Probemos el Teorema:

| Teorema 2.2 (Paradoja de Banach-Tarski). La bola unidad cerrada centrada en el origen $\bar{B}(0, 1) \subset \mathbb{R}^3$ es paradójica respecto al grupo de isometrías de \mathbb{R}^3 .

Demostración. Denotamos por $B = \bar{B}(0, 1) \subset \mathbb{R}^3$. Identificando cada punto de $B \setminus \{0\}$ con su radio $P \mapsto \{\alpha P : 0 < \alpha \leq 1\}$ tenemos que $B \setminus \{0\}$ admite una descomposición similar a la del Corolario 2.1. En virtud de la Proposición 2.3, basta probar que $B \setminus \{0\}$ es equidescomponible con respecto al grupo de isometrías de \mathbb{R}^3 con B para finalizar la prueba. Sea $P = (0, 0, \frac{1}{2})$ y sea ϕ una rotación de orden infinito tal que su eje contiene a P , pero no contiene al origen, y sea

$D = \{\phi^n(0) : n \geq 0\}$. Entonces, $\phi(D) = \{\phi^n(0) : n \geq 1\} = D \setminus \{0\}$. De aquí, $B = (B \setminus D) \cup D \sim (B \setminus D) \cup (D \setminus \{0\}) = B \setminus \{0\}$. El Teorema está probado. |

Observación 2.2. Al igual que en la descomposición paradójica de S^2 lograda en el Corolario 2.1, la Paradoja de Banach-Tarski se puede probar para bolas de radio arbitrario $r > 0$ centradas en el origen. Para ello, basta tomar la correspondencia $P \mapsto \{\alpha P : 0 < \alpha \leq r\}$, y $P = (0, 0, \frac{1}{r})$ y seguir la demostración anterior. Más aún, cualquier bola no centrada en el origen es congruente por traslaciones con otra que sí lo esté. Por tanto, el Teorema queda extendido a cualquier bola del espacio euclídeo.

2.3 Forma fuerte de la Paradoja de Banach-Tarski

En esta última sección del capítulo 2 veremos que podemos generalizar en cierto sentido la Paradoja de Banach-Tarski (Teorema 2.2) a conjuntos acotados y de interior no vacío. Probaremos que cualesquiera dos conjuntos cumpliendo estas dos condiciones son equidescomponibles.

Definición 2.3. Sea X un conjunto con $A, B \subset X$, y G un grupo de permutaciones de X . Entonces, escribiremos $A \preceq B$ si existe $C \subset B$ tal que $A \sim_G C$.

Teorema 2.3 (de Banach-Schröder-Berstein). Sea G un grupo de permutaciones de X , y $A, B \subset X$. Si $A \preceq B$ y $B \preceq A$, entonces $A \sim_G B$. De aquí se deduce que \preceq induce una relación de orden entre las clases de equivalencia de la relación \sim_G en $\mathcal{P}(X)$.

Demostración. Es fácil ver que la relación \sim_G satisface las dos siguientes propiedades:

a) Si $A \sim_G B$, entonces existe una biyección $g : A \rightarrow B$ tal que $C \sim_G g(C)$ para cualquier $C \subset A$.

b) Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2$, y $A_1 \sim_G B_1$ y $A_2 \sim_G B_2$, entonces $A_1 \cup A_2 \sim_G B_1 \cup B_2$

Asumamos $A, B \subset X$ tales que $A \preceq B$ y $B \preceq A$. Entonces, existen $B_1 \subset B$ y $A_1 \subset A$ tales que $A \sim_G B_1$ y $B \sim_G A_1$ (como \sim_G es de equivalencia también $A_1 \sim_G B$). Tomamos las dos biyecciones de la propiedad (a) $f : A \rightarrow B_1$, y $g : A_1 \rightarrow B$. Definimos por inducción $C_{n+1} = g^{-1}f(C_n)$, donde $C_0 = A \setminus A_1$, y sea $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$. Se tiene:

$$g(A \setminus C) = g(A \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n) = g(\bigcap_{n=0}^{\infty} (A \setminus C_n)) =$$

$$\begin{aligned}
&= g(A \setminus C_0) \cap g\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (A \setminus C_n)\right) = \\
&= g(A_1) \cap g\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = B \cap g\left(A \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} g^{-1}(f(C_n))\right) = \\
&= B \setminus g\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} g^{-1}(f(C_n))\right) = B \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} f(C_n) = \\
&= B \setminus f\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n\right) = B \setminus f(C)
\end{aligned}$$

Por (a), tenemos que $A \setminus C \sim_G g(A \setminus C) = B \setminus f(C)$ y $C \sim_G f(C)$. Aplicando ahora (b):

$$A = (A \setminus C) \cup C \sim_G (B \setminus f(C)) \cup f(C) = B$$

como queríamos probar. |

Este Teorema aporta una nueva forma de probar que dos conjuntos son equidescomponibles, basta ver que la relación \preceq se cumple en las dos direcciones. Haciendo uso de este resultado estamos listos para probar la forma fuerte de la Paradoja de Banach-Tarski:

| Teorema 2.4 (Paradoja de Banach-Tarski fuerte). Sean A y B dos conjuntos acotados de \mathbb{R}^3 con interior no vacío, entonces A y B son equidescomponibles.

Demostración. Veremos que $A \preceq B$ y $B \preceq A$ y por el Teorema de Banach-Schröder-Berstein (Teorema 2.3) tendremos el resultado.

Sean K y L dos bolas tales que $A \subset K$, y $L \subset B$, las cuales sabemos que existen pues A es acotado y B tiene interior no vacío respectivamente, y sea n suficientemente grande como para que K pueda ser recubierto por n copias de L (pueden solaparse). Denotamos por S al conjunto de n copias disjuntas de L . Usando la Paradoja de Banach-Tarski (Teorema 2.2) podemos duplicar L , y usando traslaciones a las copias obtenidas llegamos a que $L \succcurlyeq S$, de donde $A \subset K \preceq S \preceq L \preceq B$, y por tanto, $A \preceq B$. Como los papeles de A y B son intercambiables, por el mismo razonamiento se concluye que $B \preceq A$. La prueba está completa. |

Si bien la Paradoja de Banach-Tarski probada en la sección anterior era sorprendente por el hecho de que nos permitía duplicar esferas, con este resultado hemos logrado demostrar que podemos "romper" cualquier conjunto acotado con interior no vacío y reensamblarlo en otro. Por esta razón, la versión fuerte de la Paradoja de Banach-Tarski se suele conocer como "la paradoja del guisante y el Sol", pues "troceando y reuniendo los trozos de un guisante de forma adecuada podríamos lograr obtener el Sol a partir de él.

3 | Minimización del número de piezas

Este capítulo está dedicado a responder la pregunta de cual es el número mínimo de piezas necesarias para lograr las descomposiciones paradójicas de la esfera y la bola estudiadas en los capítulos anteriores.

A partir de ahora, el subíndice de la notación de la relación de equidescomponibilidad denotará el número de piezas por el cual la descomposición ha sido efectuada, es decir, $A \sim_n B$ quiere decir que A es equidescomponible con B usando n piezas.

En este capítulo seguimos la referencia [11], capítulo 5.

3.1 Descomposición minimal del la esfera

Definición 3.1. Sea G un grupo de permutaciones de X y $E \subset X$. Diremos que E es G -paradójico usando r piezas si existen conjuntos disjuntos A y B de forma que $E = A \cup B$ y $A \sim_n E \sim_m B$, con $n + m = r$.

Nos planteamos reducir el número r anterior en el caso de S^2 . Una primera aproximación nos proporciona un resultado general por el cual cualquier conjunto paradójico necesita al menos 4 piezas para formar su descomposición. Veámos el resultado.

Teorema 3.1. Sea G un grupo de permutaciones de un conjunto X . Si X es G -paradójico, entonces la descomposición de X tiene al menos 4 piezas.

Demostración. Sean $A, B \subset X$ disjuntos de forma que $A \cup B = X$ y cumpliendo que $A \sim_n X \sim_m B$. Supongamos por reducción al absurdo que $n + m < 4$. En ese caso debe ocurrir $n = 1$ o $m = 1$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $n = 1$.

Entonces, se tiene que existe $g \in G$ tal que $X = g(A)$, por tanto $A = g^{-1}(X)$. Pero $g^{-1}(X) = X$, por lo que $A = X$, y por consiguiente $B = \emptyset$, lo cual es una contradicción con $B \sim X$. |

Como adelantabamos, este Teorema nos dice que $r \geq 4$ para cualquier conjunto paradójico. Ahora nos centraremos en probar que en el caso de la esfera se puede dar una descomposición con exactamente 4 piezas, y por tanto, esta es minimal.

Teorema 3.2. *Sea $F = \langle \sigma, \tau \rangle$ un grupo libre. Entonces, existe una partición de $F = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ de forma que $\sigma(A_2) = A_2 \cup A_3 \cup A_4$ y $\tau(A_4) = A_1 \cup A_2 \cup A_4$; de donde F es paradójico usando 4 piezas. Más aún, fijado $\omega \in F$, podemos escoger la partición de forma que ω esté en la misma pieza que la identidad.*

Demostración. Si $\rho \in \{\sigma^{\pm 1}, \tau^{\pm 1}\}$, denotamos de forma habitual por $W(\rho)$ al conjunto de palabras de F que comienzan por ρ . Elegimos los conjuntos como en el siguiente gráfico:

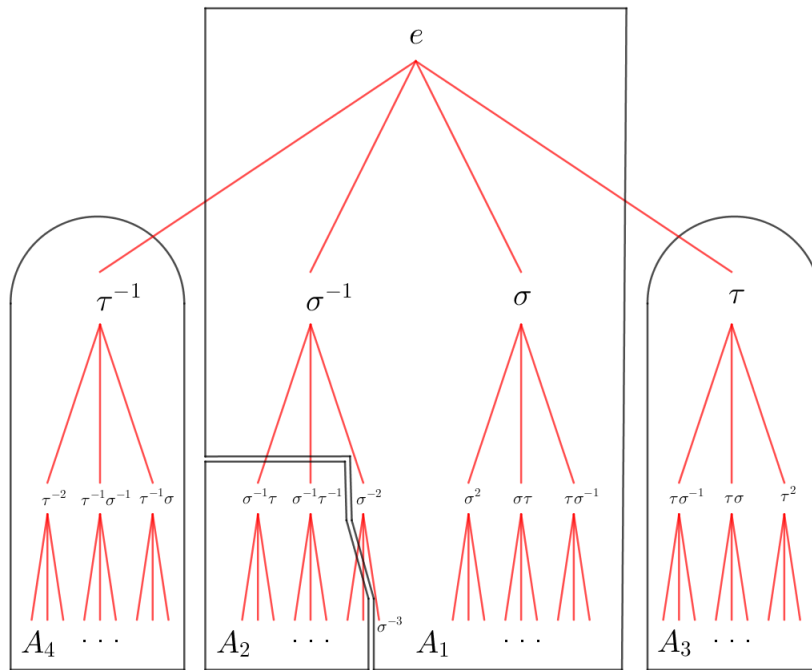


Figura 3.1: Descomposición de F

Es decir:

$$A_1 = W(\sigma) \cup \{\sigma^{-n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{e\}$$

$$A_2 = W(\sigma^{-1}) \setminus \{\sigma^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$$

$$A_3 = W(\tau)$$

$$A_4 = W(\tau^{-1})$$

Con esta elección es claro que $\sigma(A_2) = A_2 \cup A_3 \cup A_4$ y $\tau(A_4) = A_1 \cup A_2 \cup A_4$.

Para la segunda parte observamos que las dos condiciones $\sigma(A_2) = A_2 \cup A_3 \cup A_4$ y $\tau(A_4) = A_1 \cup A_2 \cup A_4$ son equivalentes a las cuatro contenciones:

$$\sigma(A_2) \subset A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

$$\sigma^{-1}(A_2 \cup A_3 \cup A_4) \subset A_2$$

$$\tau(A_4) \subset A_1 \cup A_2 \cup A_4$$

$$\tau^{-1}(A_1 \cup A_2 \cup A_4) \subset A_4$$

Llamaremos dominio de σ a A_2 y rango de σ a $A_2 \cup A_3 \cup A_4$, y de forma análoga para el resto de transformaciones.

Supongamos que $\omega = \rho_n \dots \rho_1$, donde $\rho_i \in \{\sigma^{\pm 1}, \tau^{\pm 1}\}$ para cada i . Antes de asignar palabras arbitrarias a los cuatro conjuntos veremos como asignar cadenas $e, \rho_1, \rho_2 \rho_1, \dots, \omega$. En primer lugar asignamos e y ω en A_2, A_1, A_4 o A_3 en el caso en el que ρ_1 sea $\sigma, \sigma^{-1}, \tau$ o τ^{-1} respectivamente. Para localizar las demás subpalabras de ω , asumamos que ρ_1 es σ . Sea $u = \rho_{n-1} \dots \rho_1 = \rho_n^{-1} \omega$. Si ω se encuentra en el dominio de ρ_n^{-1} , asignamos u en el rango de ρ_n^{-1} ; si ω no está en el dominio de ρ_n^{-1} , asignamos u en uno de los A_i que sea disjunto del rango de ρ_n^{-1} . Continuamos con $\rho_{n-2} \dots \rho_1$ considerándolo como $\rho_{n-1}^{-1} u$ y procediendo como antes. Así, hasta llegar a $\rho_1 = \sigma$. Como $\sigma = \sigma e$ y $e \in A_2$, σ debe ser asignado a $A_2 \cup A_3 \cup A_4$, y como $\sigma = \rho_1 = \rho_2^{-1}(\rho_2 \rho_1)$, σ debe ser asignado de forma que verifique la ecuación correspondiente a ρ_2^{-1} con respecto a la localización de $\rho_2 \rho_1$. Para cualquiera de las tres posibilidades $\sigma^{-1}, \tau, \tau^{-1}$ para ρ_2^{-1} , $A_2 \cup A_3 \cup A_4$ interseca con el rango de ρ_2^{-1} y su complementario, por lo que podemos emplazar σ . Los demás casos se tienen de forma análoga.

Ahora bien, cualquier palabra $u \in F$ puede escribirse de manera única como vt , donde t es una de $e, \rho_1, \rho_2 \rho_1, \dots, \omega$. Ahora, asignamos la palabra por inducción en la longitud de v . Si $v = e$, entonces u ya ha sido asignada. En caso contrario, si v no empieza por σ^{-1} , asignamos σvt a $A_2 \cup A_3 \cup A_4$ o A_1 dependiendo si v se encuentra en A_2 o no; esto asegura que vt verifica la primera contención. Para las demás extensiones de vt que no cancelan se procede de forma similar.

Definición 3.2. Sea G un grupo actuando sobre X y $x \in X$. Llamamos estabilizador de x al subgrupo de G

$$G_x = \{\sigma \in G : \sigma(x) = x\}$$

Definición 3.3. Se dirá que la acción de un grupo G sobre X es localmente conmutativa si estabilizador G_x es conmutativo para cada $x \in X$. Equivalentemente, si dos elementos de G comparten un punto fijo, entonces conmutan.

Observar que cualquier acción sin puntos fijos es localmente conmutativa. Para el caso que nos ocupa, se verifica que si dos rotaciones comparten puntos fijos en S^2 , entonces tienen el mismo eje de rotación, por lo que conmutan. De aquí se tiene que la acción de SO_3 sobre S^2 es localmente conmutativa.

La importancia de las acciones localmente conmutativas reside en que si un grupo actúa de forma localmente conmutativa sobre un conjunto X , entonces se tiene automáticamente que X es paradójico respecto a él, y podemos determinar el número de piezas necesarias para su descomposición paradójica.

Teorema 3.3. Sea F un grupo libre generado por σ y τ . Si la acción de F en X es localmente conmutativa, entonces X es F -paradójico usando cuatro piezas.

Demostración. Para la prueba de este Teorema usaremos el Teorema 3.2 para separar X en A_1^* , A_2^* , A_3^* y A_4^* cumpliendo $\sigma(A_2^*) = A_2^* \cup A_3^* \cup A_4^*$ y $\tau(A_4^*) = A_1^* \cup A_2^* \cup A_4^*$. Trabajaremos dividiendo X en órbitas y particionaremos cada una de ellas usando en cada caso una partición diferente de F .

En primer lugar, observar que una órbita está formada en su totalidad por puntos fijos no triviales o no contiene ninguno. En efecto, si $\omega(x) = x$ y $u \in F$ entonces $u(x)$ es punto fijo de $u\omega u^{-1}$. Para dividir las órbitas como hemos adelantado en el párrafo anterior distinguiremos estos dos casos.

Para órbitas que no contienen puntos fijos no triviales, podemos usar la partición de F dada en la figura 3.1 en A_1 , A_2 , A_3 y A_4 . Esto es, para cada órbita sin puntos fijos no triviales tomamos un punto x . Así, cada punto y de la órbita se puede escribir de forma única como $y = v(x)$, por lo que asignamos y en A_i^* si $v \in A_i$ con $i = 1, 2, 3, 4$. La condición impuesta para los A_i^* se heredan directamente de las propiedades de los A_i .

Trabajamos ahora con las órbitas con puntos fijos. Sea \mathcal{O} una órbita con puntos fijos no triviales. Ahora tendremos que elegir x de forma más fina. Comenzamos eligiendo una palabra no trivial $\omega \in F$ que fije un elemento de \mathcal{O} de longitud mínima,

y tomamos x un punto fijo de ω en \mathcal{O} . Sea $\rho \in \{\sigma^{\pm 1}, \tau^{\pm 1}\}$ el primer término de ω . Observamos que ω no puede terminar por ρ^{-1} , pues en ese caso $\rho^{-1}\omega\rho \in F$ tendría longitud menor que ω y fija $\rho^{-1}(x)$. Así, usamos el Teorema 3.2 para construir una partición de F en A_1, A_2, A_3, A_4 de forma que ω y e se encuentren en la misma pieza.

Llegados a este punto nos interesa asociar cada elemento de \mathcal{O} a un elemento de F de forma única como hemos hecho directamente en el caso anterior, para así poder formar una partición de \mathcal{O} a partir de la de F . En este caso se cumple que cada punto $y \in \mathcal{O}$ se puede escribir de forma única como $v(x)$, donde v no termina ni en $\omega^{\pm 1}$ ni en ρ^{-1} . Si v termina en $\omega^{\pm 1}$ entonces $y = v\omega^{\mp 1}(x)$, por lo que habríamos encontrado un elemento de longitud menor. Para ello consideramos v de longitud mínima tal que $v(x) = y$. Si v acaba en ρ^{-1} , entonces el elemento $v\omega$ no acaba en ω porque se cancela la última letra de v con la primera de ω , ni en ρ^{-1} por lo que hemos visto antes. Así, se tiene que $v\omega(x) = v(x) = y$, y podríamos cambiar v por $v\omega$. Para la unicidad usaremos la conmutatividad local. En primer lugar, se tiene que los únicos elementos de F que fijan x son las potencias de ω . En efecto, si u fija x , por la conmutatividad local se tiene que $\omega u = u\omega$. Por una propiedad de los grupos libres (consúltese [8], página 42, ejercicio 6) se tiene que $u = t^j$ y $\omega = t^k$ para algunos $t \in F$ y $j, k \in \mathbb{Z}$. Ahora bien, la minimalidad de ω implica que $|j| > |k|$, por lo que podemos escribir $j = lk + r$, donde $l, r \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq r < |k|$. Entonces, $x = u(x) = t^r(t^k)^l(x) = t^r(x)$. Usando otra vez la minimalidad de ω , se tiene que $r = 0$. Por tanto, k divide a j , y u es una potencia de ω como queríamos probar. Ya podemos ver la unicidad. Supongamos que $y = u(x) = v(x)$ son dos representaciones de y verificando lo anterior. Entonces, $u^{-1}v(x) = x$, de donde $u^{-1}v$ o $v^{-1}u$ es una potencia positiva de ω . Supongamos que $u^{-1}v$ lo es, entonces o bien u^{-1} empieza por ρ , lo cual es una contradicción con que u no termina con ρ^{-1} ; o bien todas las letras que forman u^{-1} cancelan con las primeras de v , lo cual implica que v termina con ω , lo cual es una contradicción. El otro caso es similar.

Gracias a la representación anterior, ya podemos definir los A_i^* que particionan a \mathcal{O} . Dado $y = v(x)$ es la representación única del párrafo anterior, asignamos y a A_i^* si $v \in A_i \subset F$. Falta ver que efectivamente esta asignación cumple lo requerido. Consideramos primero la relación $\sigma(A_2^*) \subset A_2^* \cup A_3^* \cup A_4^*$. Si $y \in A_2^*$, entonces $y = v(x)$, con $v \in A_2$, y consideramos $\sigma(y)$. Si $\sigma v(x)$ es la representación correcta de $\sigma(y)$, entonces como $v \in A_2$, implica que $\sigma v \in A_2 \cup A_3 \cup A_4$, por lo que $\sigma(y) \in A_2^* \cup A_3^* \cup A_4^*$ está bien localizado. Sin embargo, podría darse que σv no fuera la representación correcta por terminar en ω o en ρ^{-1} . En el primer caso, como v no termina en ω , necesariamente $\sigma v = \omega$, por lo que $\sigma(y) = \omega(x) = x$. Como σv pertenecen a $A_2 \cup A_3 \cup A_4$, ω también, y por la elección inicial de la partición de F , e también. Como

$e(x)$ es la única representación de x , esto implica que tanto x como $\sigma(y)$ pertenecen a $A_2^* \cup A_3^* \cup A_4^*$ como queríamos. En el caso en el que σv termina en ρ^{-1} , como v no termina en ρ^{-1} , entonces v tiene que ser e , y por tanto, $\sigma v = \sigma$, $\rho^{-1} = \sigma$ (es decir, ω empieza por σ^{-1}), y se tiene que $y = x$. Ahora bien, $e = v \in A_2$, luego $\omega \in A_2$, por lo que $\sigma\omega \in A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Pero $\sigma\omega(x)$ coincide con la representación única de $\sigma(x)$, por lo que $\sigma(y) = \sigma(x) \in A_2^* \cup A_3^* \cup A_4^*$ está bien asignado. Análogamente se tiene para las otras tres contenciones. Esto completa la prueba. |

| Teorema 3.4 (Descomposición minimal de la esfera). *La esfera S^2 es SO_3 -paradójica usando cuatro piezas.*

Demostración. Hemos visto que la acción de SO_3 es localmente conmutativa sobre S^2 . Tomando el subgrupo libre F usado a lo largo del Capítulo 1, se tiene el resultado por el Teorema 3.3. |

En virtud del Teorema 3.1, este número no puede mejorarse, por lo que efectivamente se trata de la mínima descomposición de la esfera.

3.2 Descomposición minimal de la bola

Denotamos por G_3 al grupo de isometrías de \mathbb{R}^3 . En esta sección buscamos minimizar el número de piezas necesarias para descomponer paradójicamente la bola cerrada, como hicimos en el Teorema 2.2, donde probamos que la bola unidad era G_3 -paradójica. En una primera aproximación podríamos plantearnos proceder como en la sección anterior, lo cual no es posible por dos razones. La primera es que la acción de G_3 no es localmente conmutativa. Para ver esto basta con tomar dos rotaciones con ejes diferentes pero que intersequen en el origen. De este modo las rotaciones no conmutan pero ambas fijan el cero. La segunda razón es que G_3 no actúa sobre la bola unidad en \mathbb{R}^3 . Podemos ver esto tomando una traslación no trivial y observando que la imagen de esta no es la bola unidad.

Lema 3.1. Sea $B = \bar{B}(0, 1)$, y S su frontera. Sean $B_1, B_2 \subset B$ disjuntos tales que $\sigma_1(B_1) \cup \sigma_2(B_2) = B$ con $\sigma_1, \sigma_2 \in G_3$, donde $\sigma_2(0) \neq 0$. Entonces B_1 contiene una semiesfera cerrada de S .

Demostración. Consideramos la recta que une 0 con $\sigma'(0)$ y el punto Q de intersección de S con la recta que se encuentra en la dirección opuesta a $\sigma'(0)$. Consideramos H la semiesfera cerrada de centro 0 y punto cuspidal Q . Se puede comprobar que

$H \cap \sigma'(B) = \emptyset$. De $\sigma(B) \cup \sigma(B') = B$ se tiene que $H \subset \sigma(B)$, de donde $\sigma^{-1}(H) \subset B$. Entonces, $\sigma^{-1}(H)$ es la semiesfera buscada. |

| Teorema 3.5 (Descomposición minimal de la bola). *Existe una descomposición paradójica de la bola cerrada en cinco piezas y no menos.*

Demostración. Al igual que en el Teorema 2.2 probaremos el resultado para la bola unidad cerrada centrada en el origen. Denotamos por $B = \bar{B}(0, 1)$ y S la esfera unidad frontera de B .

Veámos en primer lugar que al menos son necesarias cinco piezas. Supongamos por reducción al absurdo que basta con cuatro piezas. Entonces, podemos escribir $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$ donde los B_i son disjuntos dos a dos y $\sigma_1(B_1) \cup \sigma_2(B_2) = B = \sigma_3(B_3) \cup \sigma_4(B_4)$ donde $\sigma_i \in G_3$. Se tiene que no todas las isometrías anteriores pueden fijar el origen. De ser así, supongamos que $0 \in B_1$ entonces $0 \notin \sigma_3(B_3) \cup \sigma_4(B_4) = B$. Supongamos que $\sigma_4(0) \neq 0$. Entonces, $\sigma_4(B)$ es una bola unidad (por ser isometría) diferente de B , de donde se sigue que existe una semiesfera cerrada $H \subset S$ que es disjunta de $\sigma_4(B)$. Como $\sigma_4(B_4)$ no recubre a H , entonces debe ocurrir que $H \subset \sigma_3(B_3)$, de donde $\sigma_3^{-1}(H) \subset B_3$, es decir, B_3 contiene una semiesfera cerrada de S . Es decir, $(B_1 \cup B_2) \cap S$ está contenido en otra semiesfera abierta de S , el complementario de $\sigma_3^{-1}(H)$. De aquí se deduce que ni B_1 ni B_2 pueden contener una semiesfera cerrada. En virtud del Lema 3.1, se sigue que tanto σ_1 como σ_2 fijan el origen, y por tanto deben enviar S en sí misma, pues se tratan de reflexiones o rotaciones. De este modo

$$(\sigma_1(B_1) \cup \sigma_2(B_2)) \cap S = \sigma_1(B_1 \cap S) \cup \sigma_2(B_2 \cap S)$$

está contenido en la unión de dos semiesferas, y esto unido a que ni B_1 ni B_2 es una semiesfera cerrada, se tiene que es un subconjunto propio de S . Lo cual contradice que $\sigma_1(B_1) \cup \sigma_2(B_2) = B$.

Veámos ahora que basta con cinco piezas. Para cada $0 < r \leq 1$ denotamos por S_r la esfera de radio r y trabajamos de forma independiente con cada una de ellas. Tomamos las dos rotaciones sobre B independientes de la Proposición 1.1 σ y τ , y sea F el grupo libre generado por ellas. Por el Teorema 3.3, podemos encontrar una partición para S_r para cada $0 < r < 1$ en $A_1^r, A_2^r, A_3^r, A_4^r$ verificando que $\sigma(A_2^r) = A_2^r \cup A_3^r \cup A_4^r$ y $\tau(A_4^r) = A_1^r \cup A_2^r \cup A_4^r$. Falta descomponer la última capa correspondiente a S_1 y el punto del origen. Esta la haremos en cinco conjuntos $A_1^1, A_2^1, A_3^1, A_4^1$ y un punto $\{P\}$, de forma que satisfaga $\sigma(A_2^1) = A_2^1 \cup A_3^1 \cup A_4^1 \cup \{P\}$ y $\tau(A_4^1) = A_1^1 \cup A_2^1 \cup A_4^1 \cup \{P\}$. Para ello seleccionamos una órbita \mathcal{O} de puntos no fijos. Podemos hacer esto pues F tiene un conjunto numerable de puntos fijos no triviales sobre S_1 , mientras que la cantidad de órbitas es no numerable. Fijamos un punto $P \in \mathcal{O}$ y vamos formando

los conjuntos A_1^1, A_2^1, A_3^1 y A_4^1 a partir de él de la siguiente forma. Sea $Q \in \mathcal{O}$ otro punto diferente de P , entonces existe una única palabra $\omega \in F \setminus \{e\}$ de forma que $Q = \omega(P)$. Así, asignamos Q a A_1^1, A_2^1, A_3^1 o A_4^1 diferenciando si ω empieza por $\sigma, \sigma^{-1}, \tau$ o τ^{-1} . Como $\sigma W(\sigma^{-1}) = F \setminus W(\sigma)$ y $\tau W(\tau^{-1}) = F \setminus W(\tau)$, esta partición cumple lo que buscábamos. Finalmente, tomando $B_1 = \{0\} \cup \bigcup_{0 < r \leq 1} A_1^r$, $B_i = \bigcup_{0 < r \leq 1} A_i^r$ para $i = 2, 3, 4$ y ρ la traslación que envía el punto P al origen logramos que

$$B_1 \cup \sigma(B_2) = B = B_3 \cup \tau(B_4) \cup \{\rho(P)\}$$

Lo cual finaliza la prueba. |

El proceso de la prueba anterior aplicado a esferas de cualquier radio, y tratando a parte una de ellas, por ejemplo S^2 para ubicar el origen, nos proporciona una descomposición paradójica de \mathbb{R}^3 completo en cinco piezas.

4 | Introducción al Plano Hiperbólico

Al igual que el plano euclídeo se representa como \mathbb{R}^2 , con los puntos y las rectas habituales, existen diversos modelos para describir el plano hiperbólico. Este capítulo pretende desarrollar una introducción al modelo del semiplano superior y las herramientas necesarias para el capítulo 5.

En este capítulo seguiremos las referencias [1], [3] y [5].

4.1 El semiplano superior, métrica hiperbólica y geodésicas

Nuestro espacio de trabajo será el semiplano superior (abierto) del plano complejo. Lo Denotaremos por:

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$$

A partir de aquí nos centraremos en primer lugar en entender cómo medir distancias entre puntos y qué curvas "actúan como rectas" en \mathbb{H} .

Definición 4.1. Una curva en \mathbb{C} es una función $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$, donde (a, b) (también lo podemos considerar cerrado) es un intervalo real (se permite $a = -\infty$ y $b = +\infty$), cumpliendo que $\Re(\gamma(t))$ e $\Im(\gamma(t))$ son ambas funciones continuas y diferenciables.

Definición 4.2. Sea $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$ una curva en \mathbb{C} . Definimos el vector tangente de γ en el punto $\gamma(t)$ como $\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)$.

A partir de la definición de curva en \mathbb{C} , definimos las curvas en \mathbb{H} .

Definición 4.3. Una curva en \mathbb{H} es una curva en \mathbb{C} cuya imagen está contenida en \mathbb{H} .

La filosofía a seguir a partir de este punto será dar una forma de "medir curvas" en nuestro espacio \mathbb{H} y, a partir de ella, definiremos la distancia entre dos puntos como la "menor de las longitudes de las curvas que los unen".

Definición 4.4. Dada una curva $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{H}$, definimos la longitud de γ como:

$$L(\gamma) = \int_a^b \frac{\sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2}}{\gamma_2(t)} dt$$

Siguiendo la idea anterior, ya estamos en condiciones de definir la distancia hiperbólica. Dada una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$, diremos que los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ son sus extremos. Dados dos puntos $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$, diremos que una curva une z_1 y z_2 si z_1 y z_2 son sus extremos.

Definición 4.5. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$. Definimos la distancia hiperbólica entre z_1 y z_2 , y la denotamos por $d(z_1, z_2)$ como:

$$d(z_1, z_2) = \inf \{ L(\gamma) : \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}, \gamma(a) = z_1, \gamma(b) = z_2 \}$$

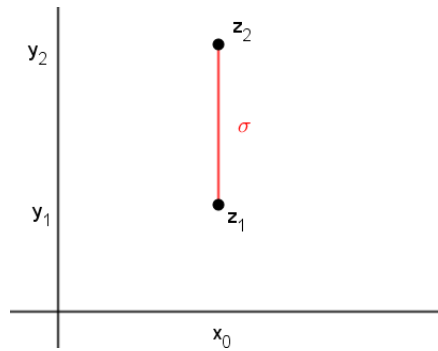
Definición 4.6. Diremos que una curva $\sigma : (a, b) \rightarrow \mathbb{H}$ es una geodésica si dados dos puntos cualquiera de la curva, σ realiza la distancia entre ellos.

Lema 4.1. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ son de la forma $z_1 = x_0 + iy_1$ y $z_2 = x_0 + iy_2$, con $y_1 < y_2$, entonces $d(z_1, z_2) = \log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$.

Demostración. Sean $z_1 = x_0 + iy_1$ y $z_2 = x_0 + iy_2$ con $y_1 < y_2$ dos puntos de \mathbb{H} , y sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ una curva que une z_1 con z_2 . Se tiene que:

$$L(\gamma) = \int_a^b \frac{\sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2}}{\gamma_2(t)} dt \geq \int_a^b \frac{|\gamma_2'(t)|}{\gamma_2(t)} dt \geq \int_a^b \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)} dt = \log\left(\frac{\gamma_2(b)}{\gamma_2(a)}\right) = \log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

Por tanto, $d(z_1, z_2) \geq \log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$. Tomamos ahora $\sigma(t) = x_0 + it$; $y_1 \leq t \leq y_2$.



Entonces:

$$L(\sigma) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dt}{t} = \log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

Por tanto, $d(z_1, z_2) = \log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$. |

Concluimos así que la curva σ es una geodésica. Se puede probar que en \mathbb{H} solo existen dos tipos de geodésicas, los segmentos verticales y los arcos de circunferencia con centro en $\Im(z) = 0$. Las semirrectas verticales y las semicircunferencias con centro en $\Im(z) = 0$ "actúan como rectas" en \mathbb{H} . A estas curvas las denominaremos también geodésicas por abuso del lenguaje.

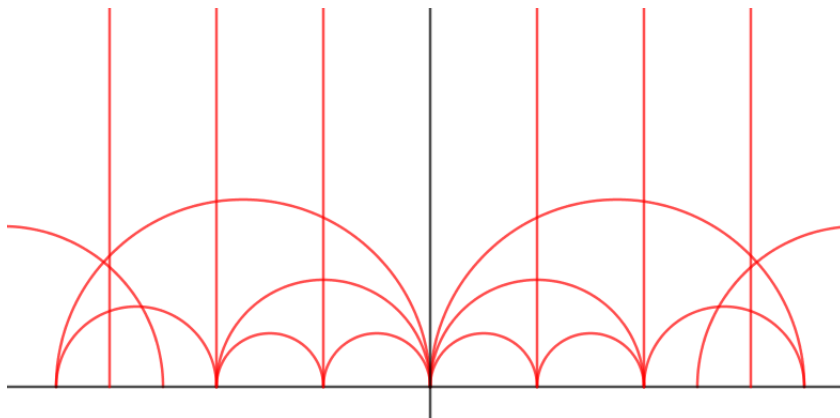


Figura 4.1: Geodésicas de \mathbb{H} .

4.2 Isometrías. Transformaciones de Möbius

En los capítulos anteriores nos hemos servido de grupos de permutaciones del conjunto al que queríamos descomponer paradójicamente para dar dicha descomposición. En este caso nos interesa caracterizar las transformaciones que conservan el semiplano superior y conservan las distancias.

Definición 4.7. Una isometría es una transformación biyectiva $T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ tal que, para todo par de puntos $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ se cumple que:

$$d(z_1, z_2) = d(T(z_1), T(z_2))$$

En particular, estamos interesados en las isometrías que preservan la orientación (este concepto se definirá más adelante). Veremos que estas tienen una forma particular. Para ello abandonaremos momentáneamente \mathbb{H} y nos localizaremos en la Esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Definición 4.8. Una transformación de Möbius es una función $M : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de la forma:

$$M(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \in \mathbb{C}, z \neq -\frac{d}{c} \\ \infty & \text{si } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

Con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ cumpliendo $ad - bc \neq 0$. Denotamos por $Mob(\hat{\mathbb{C}})$ al grupo de las transformaciones de Möbius con la composición.

Observación 4.1. Si $c = 0$, los dos últimos casos colapsan en uno solo, es decir, $M(\infty) = \infty$.

Las inversiones ($I(z) = \frac{1}{z}$), traslaciones ($T(z) = z + b$), rotaciones ($R(z) = az$, con $a = e^{i\theta}$) y homotecias ($H(z) = kz$, con $k > 0$) son casos particulares de transformaciones de Möbius. A continuación veremos que podemos describir todas las transformaciones de Möbius como composición de estas.

Proposición 4.1. Toda transformación de Möbius puede escribirse como composición de traslaciones, inversiones, rotaciones y homotecias.

Demostración. Sea $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

Si $c = 0$:

$$M(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

por tanto, $M(z)$ es composición de una rotación, una homotecia y una traslación.

Si $c \neq 0$:

$$M(z) = \frac{bc-ad}{c^2(z+\frac{d}{c})} + \frac{a}{c}$$

Por tanto, $M(z) = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$, donde:

$$T_1(z) = z + \frac{d}{c}, T_2(z) = \frac{1}{z}, T_3(z) = \frac{bc-ad}{c^2}z \text{ y } T_4(z) = z + \frac{a}{c}. \quad |$$

Observación 4.2. Las traslaciones, inversiones, rotaciones y homotecias envían rectas y circunferencias en rectas y circunferencias (esto no quiere decir que manden rectas en rectas y circunferencias en circunferencias), por lo que las transformaciones de Möbius también. Además, sabemos que las transformaciones de Möbius preservan ángulos entre curvas, es decir, son aplicaciones conformes.

A partir de la definición, podemos claramente identificar cada transformación de Möbius con una matriz de la siguiente forma:

$$\Psi : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

Además, por la condición sobre los coeficientes $ad-bc \neq 0$, tenemos que el determinante de la matriz es no nulo, por lo que Ψ está definido $GL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Mob}(\hat{\mathbb{C}})$, es un homomorfismo de grupos sobreyectivo. En particular verifica que $\Psi(AB) = \Psi(A) \circ \Psi(B)$, es decir, la multiplicación de dos matrices se identifica con la composición de transformaciones de Möbius.

Volviendo al semiplano superior, nos interesan las transformaciones de Möbius que mandan \mathbb{H} en sí mismo. Llamaremos a este conjunto (en realidad grupo con la composición de aplicaciones) $\text{Mob}(\mathbb{H})$. Veremos que estas son exactamente las que tienen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad-bc > 0$. Como estas transformaciones son invariantes si dividimos cada coeficiente por una constante, podemos suponer $ad-bc = 1$. Así, podemos identificar como antes $SL_2(\mathbb{R})$ con $\text{Mob}(\mathbb{H})$ de manera sobreyectiva.

Teorema 4.1. Una transformación de Möbius M envía el semiplano superior complejo en sí mismo, es decir $M(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ si y solo si existen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ cumpliendo $ad-bc = 1$ de forma que:

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Demostración. En primer lugar, sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ cumpliendo $ad - bc = 1$, y sea M la transformación de Möbius dada por:

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Como c y d son reales, dado un número complejo z , el conjugado de $cz + d$ es $c\bar{z} + d$, de donde se sigue que $(cz + d)(c\bar{z} + d) = |cz + d|^2$, y por tanto:

$$M(z) = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \frac{ac|z|^2 + bd + (ac + bd)\Re(z) + i(ac - bd)\Im(z)}{|cz + d|^2}$$

para cada z con $cz + d \neq 0$. Imponiendo ahora que los coeficientes a, b, c y d son números reales que verifican $ad - bc = 1$ se tiene que:

$$\Im(M(z)) = \frac{(ac - bd)\Im(z)}{|cz + d|^2} = \frac{\Im(z)}{|cz + d|^2}$$

para cada número complejo z cumpliendo $cz + d \neq 0$, y por consiguiente, $\Im(M(z)) > 0$ para todos los números complejos con parte imaginaria positiva, lo cual prueba que $M(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$. Por tanto, la transformación de Möbius M envía el semiplano superior abierto en sí mismo.

Más aún, las transformaciones de Möbius son invertibles de la esfera de Riemann en sí misma, y por la condición anterior de que $ad - bc = 1$, se cumple que:

$$M^{-1}(\omega) = \frac{d\omega - b}{-c + a\omega}$$

para cada ω tal que $a\omega - c \neq 0$. Se sigue que si ω es un elemento del semiplano superior \mathbb{H} , entonces $M^{-1}(\omega) \in \mathbb{H}$, y $\omega = M(M^{-1}(\omega))$, de donde $\omega \in M(\mathbb{H})$. Por tanto, $M(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$.

Sea ahora M una transformación de Möbius cumpliendo $M(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$. Hay que ver que existen números reales a, b, c y d de forma que

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

para cada complejo z cumpliendo $cz + d \neq 0$. Ahora bien, M tiene inversa M^{-1} , y ambas envían el semiplano superior en sí mismo. Por la continuidad de las transformaciones de Möbius tenemos que tanto M como su inversa deben enviar $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ en sí mismo, pues este subconjunto constituye la frontera del semiplano superior en

la esfera de Riemann. En el caso en que $M(\infty) = \infty$ la transformación de Möbius satisface:

$$M(z) = \frac{z - x_0}{x_1 - x_0}$$

donde $x_0 = M^{-1}(0)$ y $x_1 = M^{-1}(1)$. En el caso en que $M(\infty) = 0$, la transformación satisface:

$$M(z) = \frac{x_1 - x_\infty}{z - x_\infty}$$

donde $x_1 = M^{-1}(1)$ y $x_\infty = M^{-1}(\infty)$. Si $M(\infty) = 1$, M satisface:

$$M(z) = \frac{z - x_0}{z - x_\infty}$$

donde $x_0 = M^{-1}(0)$ y $x_\infty = M^{-1}(\infty)$. Para los casos en los que $M(\infty) \notin \{\infty, 0, 1\}$ la transformación de Möbius M satisface:

$$M(z) = \frac{(x_1 - x_\infty)(z - x_0)}{(x_1 - x_0)(z - x_\infty)}$$

donde $x_\infty = M^{-1}(\infty)$, $x_0 = M^{-1}(0)$ y $x_1 = M^{-1}(1)$. Observese que los números x_0 , x_1 y x_∞ de los casos anteriores son siempre reales. Se sigue que, en todos los casos anteriores, existen números reales a_0 , b_0 , c_0 y d_0 , donde $a_0d_0 \neq b_0c_0$ de forma que:

$$M(z) = \frac{a_0z + b_0}{c_0z + d_0}$$

para cada número complejo z con $c_0z + d_0 \neq 0$.

Ahora bien, $i \in \mathbb{H}$ y $M(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$, de donde $\Im(M(i)) > 0$. Pero:

$$M(i) = \frac{(a_0i + b_0)(d_0 + c_0i)}{(c_0i + d_0)(d_0 - c_0i)} = \frac{a_0c_0 + b_0d_0 + (a_0d_0 - b_0c_0)i}{|c_0i + d_0|^2}$$

De donde se tiene que $a_0d_0 - b_0c_0 > 0$. Tomando:

$$a = \frac{a_0}{\sqrt{a_0d_0 - b_0c_0}}$$

$$b = \frac{b_0}{\sqrt{a_0d_0 - b_0c_0}}$$

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{a_0d_0 - b_0c_0}}$$

$$d = \frac{d_0}{\sqrt{a_0 d_0 - b_0 c_0}}$$

Logramos $ad - bc = 1$ y

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

para cada complejo z verificando $cz + d \neq 0$. El resultado está probado. |

Veámos que los elementos de $\text{Mob}(\mathbb{H})$ son isometrías:

Proposición 4.2. Dados $T \in \text{Mob}(\mathbb{H})$ y una curva $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{H}$, se cumple que $L(\gamma) = L(T(\gamma))$.

Demostración. Supongamos que $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc = 1$. Se tiene que:

$$\frac{d}{dt}T(z) = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2} = \frac{1}{|cz + d|^2}$$

y

$$\Im(T(z)) = \frac{\Im(z)}{|cz + d|^2}$$

Luego:

$$\frac{|\frac{d}{dt}T(\gamma(t))|}{\Im(T(\gamma(t)))} = \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))}$$

y se tiene el resultado. |

Corolario 4.1. Si $T \in \text{Mob}(\mathbb{H})$, entonces T es una isometría.

Definición 4.9. Diremos que una isometría preserva la orientación si dados tres puntos no colineales a, b, c , y sus imágenes por la isometría A, B, C , los ángulos $\hat{a}bc$ y $\hat{A}BC$ son iguales y tienen el mismo signo.

Corolario 4.2. Las transformaciones de $\text{Mob}(\mathbb{H})$ son isometrías que preservan la orientación.

Demostración. Por la Observación 4.2 y el Corolario 4.1. |

De hecho se tiene también el recíproco, es decir, $\text{Mob}(\mathbb{H})$ es exactamente el grupo de isometrías que preservan la orientación en \mathbb{H} .

Teorema 4.2 (Isometrías que preservan la orientación de \mathbb{H}). Todas las isometrías que preservan la orientación en \mathbb{H} son de la forma $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc = 1$.

4.3 Clasificación de las transformaciones de Möbius

Hemos visto en los dos capítulos anteriores que para la construcción de descomposiciones paradójicas es importante conocer los puntos que se quedan fijos en cierto conjunto bajo la acción de el grupo de transformaciones con el que estemos trabajando. En esta sección clasificaremos las transformaciones de $\text{Mob}(\mathbb{H})$ y veremos como esta clasificación nos da información sobre los puntos fijos de las mismas.

En la sección anterior vimos que podemos identificar de manera sobreyectiva $SL_2(\mathbb{R})$ con $\text{Mob}(\mathbb{H})$, el grupo de isometrías que preservan las orientaciones de \mathbb{H} . En primer lugar, veremos que, en realidad, podemos conseguir un resultado más fuerte.

| Teorema 4.3. *Dos matrices de $SL_2(\mathbb{R})$ inducen la misma transformación en $\text{Mob}(\mathbb{H})$ si, y solo si sus matrices difieren en un factor ± 1 .*

Demostración. Sean $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ dos matrices de $SL_2(\mathbb{R})$ tales que inducen la misma transformación de $\text{Mob}(\mathbb{H})$. Es decir, $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{Az+B}{Cz+D}$ para cada $z \in \mathbb{H}$, lo cual es equivalente a $(az+b)(Cz+D) = (Az+B)(cz+d)$. Desarrollando la expresión:

$$aCz^2 + aDz + bCz + bD = Acz^2 + Adz + Bcz + Bd$$

Tenemos una igualdad entre dos polinomios, por lo que deben ser iguales coeficiente a coeficiente, luego $aC = Ac \Rightarrow \frac{C}{c} = \frac{A}{a} = \lambda_1$. Análogamente, se tiene que $\frac{D}{d} = \frac{B}{b} = \lambda_2$. Además $aD + bC = Ad + Bc$, de donde $\lambda_2 ad + \lambda_1 bc = \lambda_1 ad + \lambda_2 bc$, por tanto:

$$\lambda_2(ad - bc) = \lambda_1(ad - bc)$$

Pero $ad - bc = 1$ por hipótesis, por lo que $\lambda_1 = \lambda_2$. Luego, existe λ tal que:

$$\lambda = \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d}$$

Por lo que:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ahora bien, el determinante de la matriz de la derecha es $\lambda^2(ad - bc)$ es igual a el determinante de la matriz de la izquierda, que es igual a 1, pero $ad - bc$ también es igual 1, por lo que $\lambda^2 = 1$, por tanto $\lambda = \pm 1$. El resultado está probado. **|**

Observación 4.3. Gracias al Teorema anterior, se sigue el isomorfismo de grupos $PSL_2(\mathbb{R}) \cong \text{Mob}(\mathbb{H})$, donde $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}$.

Nos centramos ahora en la clasificación de las transformaciones de Möbius. A partir de ahora utilizaremos $PSL_2(\mathbb{R})$ y $\text{Mob}(\mathbb{H})$ para referirnos a cualquiera de los dos en virtud del isomorfismo anterior. Comenzamos probando tres lemas:

Lema 4.2. Toda transformación de Möbius $T \in PSL_2(\mathbb{R})$ fija al menos un punto en $\hat{\mathbb{C}}$.

Demostración. Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z$ para cada $z \in \hat{\mathbb{C}}$. Tenemos que resolver la ecuación $\frac{az+b}{cz+d} = z$. Podemos reescribirla como:

$$az + b = cz^2 + dz$$

Por tanto:

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$z = \frac{-(d - a) \pm \sqrt{(d - a)^2 + 4bc}}{2c}$$

Si $c \neq 0$. Si el radicando $(d - a)^2 + 4bc$ es mayor que cero, tenemos dos soluciones reales. Si es menor que cero, tenemos dos soluciones complejas, y si es igual a cero, tenemos una solución real. Si $c = 0$, $T(z) = \frac{az+b}{d}$, y tenemos que buscar las soluciones de $\frac{az+b}{d} = z$. Esto puede ser reescrito como:

$$(a - d)z + b = 0$$

Si $a \neq d$, entonces $\frac{-b}{a-d}$ es un punto fijo, además de ∞ . Si $a = d$, ∞ es el único punto fijo de T . |

Observación 4.4. Como los puntos fijos de una transformación de Möbius verifican la ecuación:

$$z = \frac{-(d - a) \pm \sqrt{(d - a)^2 + 4bc}}{2c}$$

Del Teorema anterior se deduce que si una transformación de Möbius fija exactamente un punto en $\hat{\mathbb{C}}$, este debe encontrarse necesariamente en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, pues de estar en \mathbb{C} su conjugado también sería punto fijo. Por la misma razón, una transformación de Möbius solo puede fijar a lo sumo un punto en \mathbb{H} , pues su conjugado no pertenecería a \mathbb{H} .

Lema 4.3. Si una transformación de Möbius $T \in PSL_2(\mathbb{R})$ fija tres o más puntos, entonces T es la identidad.

Demostración. Utilizando los cálculos del Lema anterior, sabemos que los puntos fijos de T vienen dados por las raíces de un polinomio de grado 2. Si existen tres (o más) raíces de este polinomio, entonces, este debe tener todos sus coeficientes nulos, es decir, $c = 0 = b$ y $(d - a) = 0 \Rightarrow d = a$. Por tanto, la transformación de Möbius en cuestión sería de la forma:

$$T(z) = \frac{az}{a} = z$$

La transformación identidad. |

Lema 4.4. Es posible encontrar transformaciones de $PSL_2(\mathbb{R})$ que lleven cualquier punto de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ a 0 o ∞ ; o cualquier punto de \mathbb{H} a el punto i .

Demostración. Fijamos $x \in \mathbb{R}$. Vamos a construir una transformación de $PSL_2(\mathbb{R})$ que envíe x a 0.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{R})$. Queremos que $A(x) = 0$. Por tanto:

$$A(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = 0$$

Luego $ax + b = 0$, con lo que $b = -ax$. Tomamos $a = 1$, entonces $b = -x$. Imponiendo ahora que el determinante de A tiene que ser 1, tenemos que $d - xc = 1$, y tomando $c = 0$, $d = 1$, obtenemos que:

$$A(z) = \frac{z - x}{1} = z - x$$

Análogamente se puede conseguir una transformación que lleva x a ∞ :

$$B(z) = \frac{-1}{z - x}$$

Buscamos ahora una transformación que lleve ∞ a 0. Igual que antes, tomamos $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{R})$. Queremos que:

$$C(\infty) = \frac{a\infty + b}{c\infty + d} = 0$$

Imponemos que $a\infty + b$ sea constante, en este caso, $a\infty + b = 1$. Tomamos $a = 0$, luego $b = 1$. Imponemos que el determinante sea 1, entonces, $-c = 1$. Tomamos $d = 0$ Por tanto:

$$C(z) = -\frac{1}{z}$$

Para mandar ∞ en si mismo basta tomar la transformación identidad.

Para llevar cualquier punto de \mathbb{H} a i , si el punto en cuestión es de la forma $x + iy$, trabajando igual que antes basta tomar:

$$D(z) = \frac{1}{y}z - \frac{x}{y}$$

La clasificación de las transformaciones de Möbius se realizará en función de la traza, la cual es invariante bajo conjugación de matrices. En virtud de los Lemas anteriores, dada una transformación de Möbius T con uno o dos puntos fijos en $\mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que estos son $\{\infty\}$, $\{0, \infty\}$ o $\{i\}$ conjugando T con otras transformaciones.

Teorema 4.4. Si $T \in PSL_2(\mathbb{R})$ fija un punto en \mathbb{H} , entonces $|tr(T)| < 2$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que i es el punto fijo de $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Esto es:

$$T(i) = \frac{ai + b}{ci + d} = i$$

Lo cual podemos reescribir como:

$$ai + b = di - c$$

Equivalentemente:

$$(a - d)i + b + c = 0$$

Lo cual implica que $a = d$ y $b = -c$. Como debe cumplirse que $ad - bc = a^2 + b^2 = 1$, $a = \cos(\theta)$ y $b = \sen(\theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi)$. La matriz de la transformación es:

$$T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sen(\theta) \\ -\sen(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Por tanto, $|tr(T)| = |2\cos(\theta)| < 2$ salvo si $\theta = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, en cuyo caso T es la transformación identidad, que fija más de un punto en \mathbb{H} .

Teorema 4.5. Si $T \in PSL_2(\mathbb{R})$ fija un punto en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, entonces $|tr(T)| = 2$.

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que T fija el punto del infinito. Es decir, $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z$ para $z = \infty$, de donde $c = 0$. Por tanto, tenemos la ecuación $\frac{az+b}{d} = z$, la cual podemos reescribir como $dz = az + b$, de donde

$$z = \frac{b}{d - a}$$

Como $z = \infty$, necesariamente $d = a$, por lo que la matriz de la transformación es:

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Con $a^2 = 1$, lo que implica que $a = \pm 1$, y por tanto $|tr(A)| = 2$. |

| Teorema 4.6. Si $T \in PSL_2(\mathbb{R})$ fija dos puntos en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, entonces $|tr(T)| > 2$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\{0, \infty\}$ son los puntos fijos de $T = \frac{az+b}{cz+d}$. Al igual que en la prueba del Teorema 4.5, como T fija el punto del infinito, $c = 0$. Ahora bien, como T también fija el 0:

$$T(0) = \frac{b}{d} = 0$$

Lo cual implica que $b = 0$. Por tanto, la matriz de esta transformación es:

$$T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

donde $ad = 1$, por lo cual $d = a^{-1}$. Observamos que si $a = \pm 1$ entonces T es la identidad, la cual fija más de dos puntos. En otro caso, $|tr(A)| > 2$. |

En resumen, lo que hemos probado es:

| Teorema 4.7 (Clasificación de las transformaciones de $Mob(\mathbb{H})$). Dada una transformación $T \in PSL_2(\mathbb{R})$ distinta de la identidad, y denotamos por $tr(T)$ a la traza de T :

- 1) Si T fija un único punto en \mathbb{H} , entonces $|tr(T)| < 2$.
- 2) Si T fija un único punto en la frontera de \mathbb{H} , entonces $|tr(T)| = 2$.
- 3) Si T fija exactamente dos puntos en la frontera de \mathbb{H} , entonces $|tr(T)| > 2$.

Demostración. Por los Teoremas 4.4, 4.5 y 4.6. |

4.4 El Disco de Poincaré

En esta sección introduciremos brevemente en modelo del Disco de Poincaré, el cual nos será útil en el siguiente capítulo para visualizar algunos procesos.

El disco de Poincaré, el cual denotaremos por \mathbb{D} , consiste en el disco unidad abierto donde las líneas hiperbólicas son arcos de circunferencias ortogonales a la frontera y los diámetros del disco.

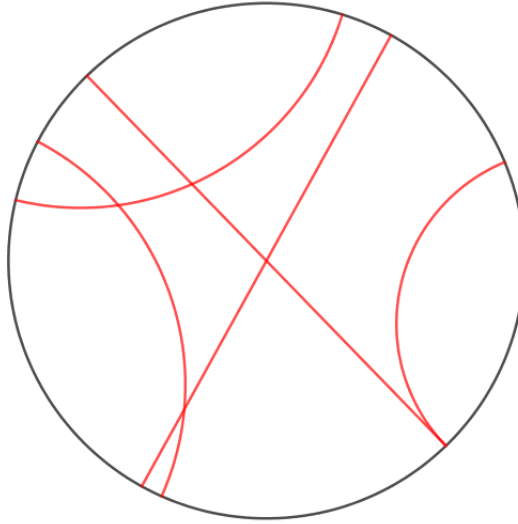


Figura 4.2: Disco de Poincaré

El modelo del disco de Poincaré \mathbb{D} y el semiplano superior \mathbb{H} son equivalentes. En efecto, considerando la transformación de $Mob(\hat{\mathbb{C}})$

$$T(z) = \frac{z - i}{-iz + 1}$$

Tenemos que $T(0) = -i$, $T(\infty) = i$ y $T(1) = 1$, por lo que T manda la frontera de \mathbb{H} en la frontera de \mathbb{D} . Además, eligiendo una orientación vemos que el semiplano superior se envía al interior del disco. Además, como las transformaciones de $Mob(\hat{\mathbb{C}})$ preservan perpendicularidad y envía rectas y circunferencias en rectas y circunferencias, obtenemos líneas hiperbólicas de \mathbb{D} mediante líneas hiperbólicas de \mathbb{H} .

Así, por la transformación T , todas las construcciones que hagamos en el semiplano superior quedarán automáticamente reflejadas en el disco de Poincaré tomando la imagen por ella.

5 | Paradojas en el Plano Hiperbólico

En este capítulo seguiremos [11] capítulo 4, [2] capítulo 6 y [9] capítulo 7.

5.1 Teselación del Semiplano Superior

Comenzamos construyendo una teselación de \mathbb{H} , esto es, demostraremos que existe cierto grupo de transformaciones de Möbius G y un polígono hiperbólico \mathcal{F} de forma que

$$\mathbb{H} = \bigcup_{M \in G} M(\mathcal{F})$$

donde estos polígonos son esencialmente disjuntos, es decir, su intersección es vacía o puntos de la frontera.

En nuestro caso trabajaremos con el grupo modular

$$\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm I\}$$

El cual se corresponde con las transformaciones de la forma

$$\frac{az + b}{cz + d}$$

con $ad - bc = 1$ y $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

Y el polígono fundamental:

$$\mathcal{F} = \{z \in \mathbb{H} : |z| \geq 1, |\Re(z)| \leq 1/2\}$$

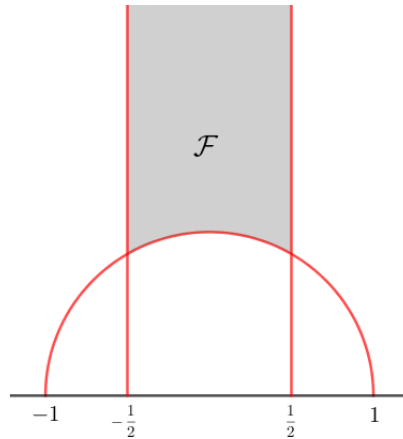


Figura 5.1: Polígono Fundamental \mathcal{F}

Remarcar que, al ser Γ un grupo cociente, cuando hablemos a continuación de matrices en Γ estaremos pensando en ella como representante de su clase de equivalencia, es decir, ella misma salvo signo.

La siguiente Proposición está extraída de [4].

Proposición 5.1. Las matrices $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (de orden infinito y dos respectivamente) generan el grupo modular Γ .

Demostración. Observamos que

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad n \in \mathbb{Z}$$

y

$$S^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por lo que las afirmaciones sobre los órdenes son inmediatas.

Tomamos ahora $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$. Vamos a escribirla generada por T y S . Notese que

$$T^n A = \begin{pmatrix} a + nc & b + nd \\ c & d \end{pmatrix}$$

y que

$$SA = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $|c| \leq |a|$, en caso contrario aplicamos el siguiente razonamiento a SA en lugar de a A . Distinguimos dos casos:

1) Si $c = 0$, $\det(A) = ad = 1$ luego $a = d = 1$ o $a = d = -1$ por tanto $A = T^n$ en Γ para cierto $n \in \mathbb{Z}$.

2) Si $c \neq 0$, aplicamos el algoritmo de Euclides a a y c :

$$\begin{aligned} a &= k_0c + r_1 \\ -c &= k_1r_1 + r_2 \\ r_1 &= k_2r_2 + r_3 \\ &\dots \\ (-1)^n r_{n-1} &= k_n r_n + 0 \end{aligned}$$

y finalmente $r_n = \pm 1$. Por lo que se tiene que

$$ST^{-k_n}T \dots ST^{-k_0}A = T^{k_{n+1}}$$

donde $k_{n+1} \in \mathbb{Z}$, con lo que podemos despejar A .

Proposición 5.2. Para cualquier punto $z \in \mathbb{H}$ existe una transformación $M \in \Gamma$ tal que el punto Mz está contenido en \mathcal{F} .

Demostración. Se tiene que

$$\Im(Mz) = \frac{\Im(z)}{|cz + d|^2}$$

Si (c, d) varía en una sucesión de pares que no se repiten, entonces $|cz + d| \rightarrow \infty$. Por ello existe $M_0 \in \Gamma$ tal que:

$$\Im(M_0z) \geq \Im(Mz); \quad \forall M \in \Gamma$$

Sea $z_0 = Mz$. Como la parte imaginaria de z_0 no cambia reemplazándolo por $z_0 + n$ con $n \in \mathbb{Z}$

$$z_0 + n = \left(\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_0 \right) (z)$$

podemos suponer que $|\Re(z_0)| \leq \frac{1}{2}$ ajustando $n \in \mathbb{Z}$.

Usando ahora la desigualdad

$$\Im(M_0 z) \geq \Im(Mz); \quad \forall M \in \Gamma$$

para la matriz $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que:

$$\Im(z_0) \geq \Im(Sz_0) = \frac{\Im(z_0)}{|z_0|^2}$$

Luego $|z_0|^2 \geq 1$ y $|z_0| \geq 1$. |

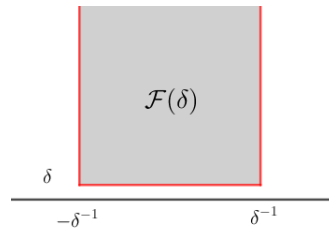
Gracias a la Proposición 5.2 hemos logrado nuestro primer objetivo de probar que $\mathbb{H} = \bigcup_{M \in \Gamma} M(\mathcal{F})$. En efecto, como Γ tiene estructura de grupo, la transformación M que envía cada punto z del semiplano superior dentro de \mathcal{F} tiene inversa $M^{-1} \in \Gamma$, por lo que aplicando estas transformaciones a \mathcal{F} terminamos cubriendo todos los puntos de \mathbb{H} .

En lo que resta nos centraremos en probar que los polígonos dados por la acción de Γ sobre \mathcal{F} son esencialmente disjuntos.

Comenzamos estudiando los elementos $M \in \Gamma$ verificando $M\mathcal{F} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$:

Lema 5.1. Sea $\delta > 0$. Consideramos

$$\mathcal{F}(\delta) = \{z = x + iy \in \mathbb{H} : |x| \leq \delta^{-1}, y \geq \delta\}$$



Entonces, existen únicamente un número finito de $M \in \Gamma$ verificando

$$M\mathcal{F}(\delta) \cap \mathcal{F}(\delta) \neq \emptyset$$

Demostración. Sea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d. \end{pmatrix}$

En el caso $c = 0$, la aplicación $z \mapsto Mz$ es una traslación. Como las partes reales de z y Mz son acotadas, existe una cantidad finita de traslaciones que cumplen esta propiedad.

Nos centramos ahora en el caso $c \neq 0$. Si z pertenece a la intersección tenemos que:

$$y = \Im(z) \geq \delta$$

y

$$\frac{y}{|cz + d|^2} = \Im(Mz) \geq \delta$$

Lo cual implica que:

$$y \geq \delta(cx + d)^2 + \delta c^2 y^2 \geq \delta c^2 y^2$$

Y por tanto:

$$\frac{1}{\delta c^2} \geq y \geq \delta$$

En particular, $c^2 \leq \frac{1}{\delta^2}$ de donde obtenemos que solo hay un número finito de posibilidades para c . De aquí se obtiene también que hay una cantidad finita de valores para d , pues de lo anterior se tiene que

$$(cx + d)^2 \leq \frac{y}{\delta}$$

donde x , y y δ son fijos, y solo hay una cantidad finita de posibilidades para c . Además, junto con M , la inversa M^{-1} también satisface la condición de intersección no vacía, lo cual muestra que solo hay una cantidad finita para a . Para finalizar, como $ad - bc = 1$, unido a lo anterior tenemos que también hay una cantidad finita de b . |

Corolario 5.1. Para cualquier par de conjuntos compactos $K, \tilde{K} \subset \mathbb{H}$ existen únicamente un número finito de $M \in \Gamma$ tal que

$$MK \cap \tilde{K} \neq \emptyset$$

Demostración. Como $K \cup \tilde{K} \subset \mathcal{F}(\delta)$ para algún δ adecuado, se tiene por el Lema 5.1. |

Corolario 5.2. Sea $p \in \mathbb{H}$ y K un conjunto compacto de \mathbb{H} . Entonces, existe solo un número finito de elementos $M \in \Gamma$ cumpliendo $Mp \in K$.

En particular, la órbita de p con respecto a Γ , $\{Mp : M \in \Gamma\}$ es discreta en \mathbb{H} .

Corolario 5.3. El estabilizador de p respecto la acción de Γ

$$\Gamma_p = \{M \in \Gamma : Mp = p\}$$

es un grupo finito para cada punto $p \in \mathbb{H}$.

Ahora nos interesamos por las transformaciones $M \in \Gamma$ que fijan el vértice inferior derecho ρ de \mathcal{F}

$$\rho = e^{\pi i/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Se tiene que $\rho^2 = -\bar{\rho} = \rho - 1$ y $\rho^3 = -1$.

Lema 5.2. Hay exactamente seis transformaciones $M \in \Gamma$ cumpliendo $M\rho = \rho$.

Demostración. Sea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$. De la ecuación

$$\frac{a\rho + b}{c\rho + d} = \rho$$

Se tiene que

$$a\rho + b = c\rho^2 + d\rho$$

Como $\rho^2 = -\bar{\rho} = \rho - 1$:

$$a\rho + b = -c\bar{\rho} + \rho = c\rho - c + d\rho$$

De donde se deduce que

$$a = c + d$$

y

$$b = -c$$

Por consiguiente:

$$M = \begin{pmatrix} d - b & b \\ -b & d \end{pmatrix}$$

Por la condición del determinante se tiene:

$$b^2 - bd + d^2 = 1$$

Las únicas soluciones enteras para esta ecuación es:

$$(b, d) = \pm(0, 1), \pm(1, 0), \pm(1, 1)$$

Por tanto, tenemos seis posibles matrices:

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Que en nuestro grupo Γ se corresponden con tres transformaciones diferentes. |

Observación 5.1. La segunda y tercera transformación de la proposición anterior se corresponden con TS y ST^{-1} , donde T y S son los generadores de Γ dados en la Proposición 5.1.

Corolario 5.4. Para cada ecuación

$$M\rho = \rho^2; \quad M\rho^2 = \rho; \quad M\rho^2 = \rho^2$$

existen exactamente seis soluciones en $SL_2(\mathbb{Z})$ (es decir, tres en Γ):

$$1) \quad M\rho = \rho^2 : \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) \quad M\rho^2 = \rho : \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3) \quad M\rho^2 = \rho^2 : \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostración. La prueba se tiene sustituyendo en cada caso ρ^2 por ρ usando la relación

$$\rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rho$$

Y reduciendo cada ecuación a una de la forma $N\rho = \rho$. |

Llegados a este punto podemos determinar los polígonos de la forma $M\mathcal{F}$ que son vecinos de \mathcal{F} .

Proposición 5.3. Sea $M \in \Gamma$ cumpliendo

$$R(M) = M\mathcal{F} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$$

Entonces, se tiene uno de los siguientes casos:

I. $M = I$.

II. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; ($R(M)$ es la semirrecta vertical derecha de la frontera).

$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; ($R(M)$ es la semirrecta vertical izquierda de la frontera).

III. $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; ($R(M)$ es el arco inferior de la frontera).

IV. En los casos restantes, $R(M)$ consiste en un único punto de la frontera, ρ o $\rho^2 = -\bar{\rho} = \rho - 1$.

Hay cuatro casos, a saber:

- 1) $M\rho = \rho$
- 2) $M\rho^2 = \rho$
- 3) $M\rho^2 = \rho^2$
- 4) $M\rho = \rho^2$

Los dos primeros se corresponden con $R(M) = \{\rho\}$ y los dos últimos con $R(M) = \{\rho^2\}$.

Demostración. La demostración se encuentra en [2] Proposición VI.1.3. |

De la Proposición 5.3 se deducen directamente los dos resultados por los cuales alcanzamos finalmente el objetivo de la sección.

Corolario 5.5. Dos puntos diferentes z y ω de \mathcal{F} son equivalentes módulo Γ sí y solo si se encuentran en la frontera de \mathcal{F} y verifican:

$$\omega = -\bar{z}$$

Es decir, en uno de estos dos casos:

- 1) Si z y ω son opuestos en las líneas verticales de la frontera de \mathcal{F} , esto es:

$$\Re(z) = -\frac{1}{2} ; \omega = z + 1$$

o bien

$$\Re(z) = \frac{1}{2} ; \omega = z - 1$$

- 2) z y ω son opuestos en el arco circular de la frontera de \mathcal{F} , es decir:

$$|z| = |\omega| = 1 ; \omega = -\bar{z}$$

Corolario 5.6. Sean M y N dos elementos distintos en Γ . Entonces, las regiones $M\mathcal{F}$ y $N\mathcal{F}$ solo pueden tener puntos de la frontera en común. En particular, los puntos interiores de \mathcal{F} no pueden ser equivalentes módulo Γ .

Con este último corolario finaliza la construcción de la teselación del semiplano superior como queríamos. En la siguiente imagen se puede visualizar la acción de Γ sobre \mathcal{F} para cubrir \mathbb{H} .

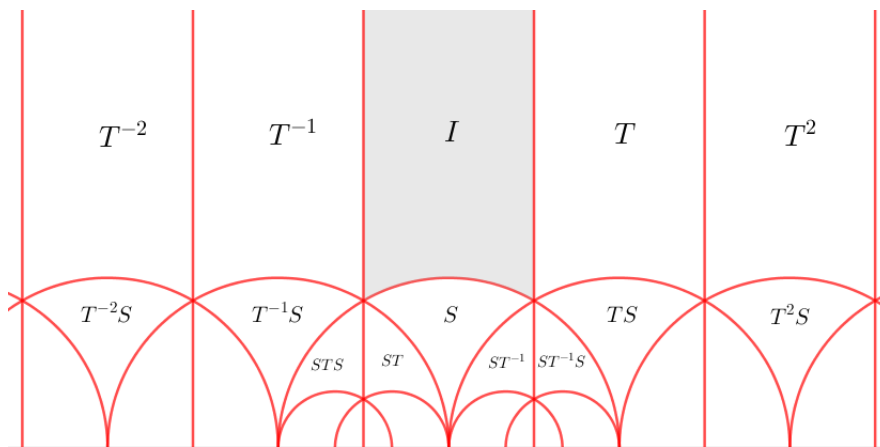


Figura 5.2: Teselación de \mathbb{H} .

5.2 La Paradoja de Hausdorff en el Plano Hiperbólico

En el primer capítulo vimos la Paradoja de Hausdorff original, la cual establecía una descomposición paradójica de la esfera S^2 , salvo un subconjunto numerable, respecto al grupo de rotaciones en \mathbb{R}^3 . Recordamos que la clave en dicho resultado fue encontrar cierto grupo de permutaciones paradójico respecto de sí mismo (Teorema 1.1). El subconjunto que perdíamos en esta primera aproximación se debía a que dicho resultado tiene como hipótesis que el grupo de permutaciones actúe sobre el conjunto que queremos descomponer sin puntos fijos no triviales.

En esta sección veremos que siguiendo un esquema parecido podemos descomponer paradójicamente el semiplano superior hiperbólico \mathbb{H} salvo cierto subconjunto "pequeño". Sorprendentemente, en este caso el axioma de elección pierde la importancia que tenía en el trabajo anterior y el proceso se torna más constructivo y visualizable.

En la sección anterior hemos construido una teselación de \mathbb{H} mediante el polígono

fundamental

$$\mathcal{F} = \{z \in \mathbb{H} : |z| \geq 1, |\Re(z)| \leq 1/2\}$$

y la acción del grupo modular Γ generado por $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sin embargo, para esta sección nos conviene restaurar algunos aspectos. Es fácil ver que tomando ahora como polígono fundamental el triángulo hiperbólico de vértices 0 y $\pm \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, que en la construcción original se correspondía con la transformación S , podemos recomponer la misma teselación tomando ahora las transformaciones:

$$\sigma = S$$

y

$$\tau = ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora el esquema que a cada polígono le asigna su transformación correspondiente quedaría así (usamos e para el elemento neutro del grupo).

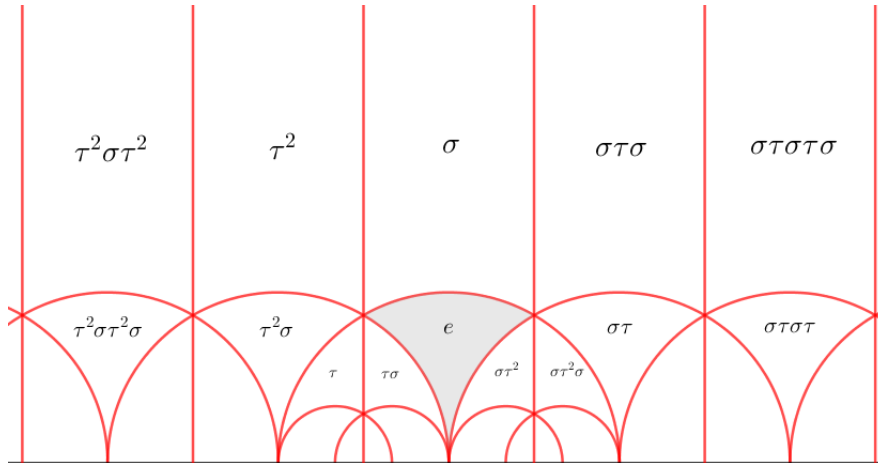


Figura 5.3: Nueva Teselación de \mathbb{H} .

Por la elección de σ y τ tenemos que el grupo modular Γ también está generado por ellos. De hecho, teniendo esto en cuenta junto a la siguiente Proposición veremos que se tiene el isomorfismo de grupos $PSL_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$.

Proposición 5.4. Las transformaciones $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\tau = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ generan el producto libre $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$.

Demostración. Primero observamos que los órdenes de σ y τ son 2 y 3 respectivamente. Sea $\rho = \tau^2$. Supongamos por reducción al absurdo que ω es una palabra no vacía formada por σ , τ y ρ de forma que no aparecen parejas de la forma $\sigma\sigma$, $\tau\tau$, $\tau\rho$ o $\rho\tau$, de forma que $\omega = e$. Conjugando con σ , $\tau\sigma$ o $\rho\sigma$ si es necesario, podemos asumir que

$$\omega = \sigma y \dots y \sigma y \sigma$$

donde $y \in \{\tau, \rho\}$. Nótese que $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\sigma\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Empezando con $(-1, 0)$, el último σ de la derecha de ω da $(0, 1)$. Aplicando luego $\sigma\tau$ o $\sigma\rho$, las entradas nunca decrecen, por lo que nunca volveremos a llegar a $(-1, 0)$, lo cual es una contradicción con que $\omega = e$. |

| Teorema 5.1. *El grupo modular $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$ es isomorfo al producto libre*

$$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 = \langle \sigma, \tau : \sigma^2 = \tau^3 = e \rangle$$

En lo que resta probaremos que el grupo $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ es paradójico, lo cual unido a la teselación que produce en el semiplano superior (ver Figura 5.3) nos proporcionará una descomposición paradójica del mismo. Veremos que existe una partición del grupo en $A \cup B \cup C$ de forma que

$$\tau(A) = B ; \tau^2(A) = C ; \sigma(A) = B \cup C$$

De aquí podría decirse que "A es simultáneamente un tercio del grupo y dos tercios del grupo", lo cual es una situación claramente paradójica.

| Teorema 5.2. *El grupo $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ es paradójico. Esto es, existe una partición del grupo en $A \cup B \cup C$ de forma que*

$$\tau(A) = B ; \tau^2(A) = C ; \sigma(A) = B \cup C$$

Demostración. Para cada $L \in \{\sigma, \tau, \tau^2\}$, sea W_L el conjunto de palabras que tienen L al inicio (nótese que consideramos τ^2 como una letra, por lo que las palabras que empiezan por dos τ consecutivos están en W_{τ^2} , no en W_τ). De esta forma, todas las palabras están asignadas salvo e , por lo que definimos los conjuntos como sigue, absorbiendo e en A . Sea j recorriendo \mathbb{N} :

$$A = \{ \text{todos los } (\tau\sigma)^j \text{ y todos los } W_\sigma, \text{ excepto } \tau^2(\tau\sigma)^j \}$$

$$B = \{ \text{todos los } \tau(\tau\sigma)^j \text{ y todos los } W_\tau, \text{ excepto } (\tau\sigma)^j \}$$

$$C = \{ \text{todos los } \tau^2(\tau\sigma)^j \text{ y todos los } W_{\tau^2}, \text{ excepto } \tau(\tau\sigma)^j \}$$

Veámos que

$$\tau(A) = B ; \tau^2(A) = C ; \sigma(A) = B \cup C$$

Si $\omega \in A$ diferenciamos dos casos:

1) Si $\omega = (\tau\sigma)^j$, entonces $\tau(\omega) = \tau(\tau\sigma)^j \in B$.

2) Si $\omega \in W_\sigma$, entonces $\tau(\omega) \in W_\tau \subset B$.

Además, como $\tau^2(\tau\sigma)^j \notin A$, entonces $\tau\tau^2(\tau\sigma)^j = (\tau\sigma)^j \notin B$.

Esto prueba que $\tau(A) \subset B$. Para la otra contención basta trabajar análogamente para probar que $A \supset \tau^{-1}(B)$.

Los otros dos casos se tienen también de forma análoga a lo anterior. |

Del isomorfismo $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ y $PSL_2(\mathbb{Z})$ dado en el Teorema 5.1 y la teselación dada en la sección anterior bajo la acción del grupo modular, esto proporciona de forma inmediata subconjuntos, denotados también por A , B y C de \mathbb{H} que producen una descomposición de Hausdorff de $\mathbb{H} \setminus N$, donde N es el conjunto formado por la frontera de cada uno de los polígonos que forman la teselación. El subconjunto $A \subset \mathbb{H}$ está formado por la unión de las imágenes mediante $A \subset \Gamma$ del triángulo fundamental, análogamente para B y C .

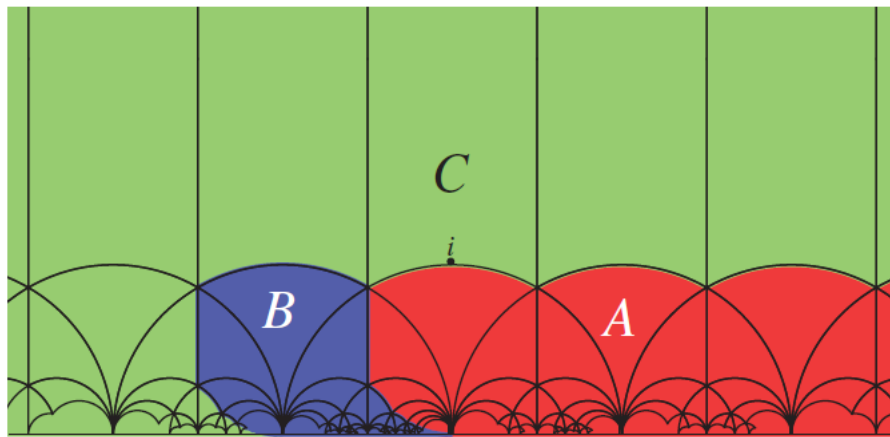


Figura 5.4: Paradoja de Hausdorff en \mathbb{H} .

5.3 La Paradoja de Banach-Tarski en el Plano Hiperbólico

En el segundo capítulo, tras construir una descomposición paradójica de la esfera euclídea 3-dimensional salvo un conjunto numerable de puntos, nos planteamos descomponer S^2 completa. El objetivo de esta sección será construir una paradoja en el plano hiperbólico completo. En la sección anterior hemos logrado descomponer paradójicamente $\mathbb{H} \setminus N$, donde N es el conjunto de fronteras de los polígonos que forman la teselación del semiplano superior. Observese que las transformaciones usadas para finalmente conseguir la descomposición tienen ambas traza menor o igual que dos, por lo que por el Teorema 4.7, estas tienen puntos fijos, por lo que no podemos usarlas para una descomposición completa de \mathbb{H} . En esta sección trabajaremos con un subgrupo $F \subset PSL_2(\mathbb{Z})$ generado por las transformaciones

$$\sigma(z) = \frac{z}{2z+1} \quad ; \quad \tau(z) = z+2$$

llamado el subgrupo principal de congruencias del grupo modular de nivel 2. En forma matricial, F está formado por todas las matrices de $PSL_2(\mathbb{Z})$ que son congruentes con la identidad módulo 2. Más aún, F actúa sin dejar puntos fijos sobre el semiplano superior.

| Teorema 5.3. *Las dos transformaciones de $SL_2(\mathbb{R})$ definidas por $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son independientes y actúan sobre \mathbb{H} sin puntos fijos.*

Demostración. Tomamos $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $R = T^2$ (estas se corresponden con las transformaciones σ , τ y ρ de la Proposición 5.4). Se tiene que $A = SRSR$, $B = STST$, $A^{-1} = TSTS$ y $B^{-1} = RSRS$.

Cada palabra no trivial e irreducible en A , B , A^{-1} y B^{-1} vista como palabra en S , T y R es también un elemento no trivial e irreducible en $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$. Esto se debe a que de las posibles letras que pueden aparecer adyacentes son AA , BB , AB , BA , AB^{-1} , BA^{-1} , $A^{-1}B$ y $B^{-1}A$ solo las últimas dos tienen alguna reducción que hacer, pues aparecen dos S seguidas.

La primera se trata de $A^{-1}B = TSTS STST = TSTTST = TSRST$. La segunda es $B^{-1}A = RSRS RSRS = RSRRSR = RSTSR$. A partir de aquí, ya no habría más reducciones posibles pues en ningún caso terminan o empiezan con S .

Por la Proposición 5.4, ninguna es la identidad y por el Teorema 4.7 de clasificación de las transformaciones de Möbius, actúan sin puntos fijos en \mathbb{H} . |

El subgrupo F proporciona una nueva teselación del semiplano superior, en este caso por cuadriláteros (véase la Figura 5.5).

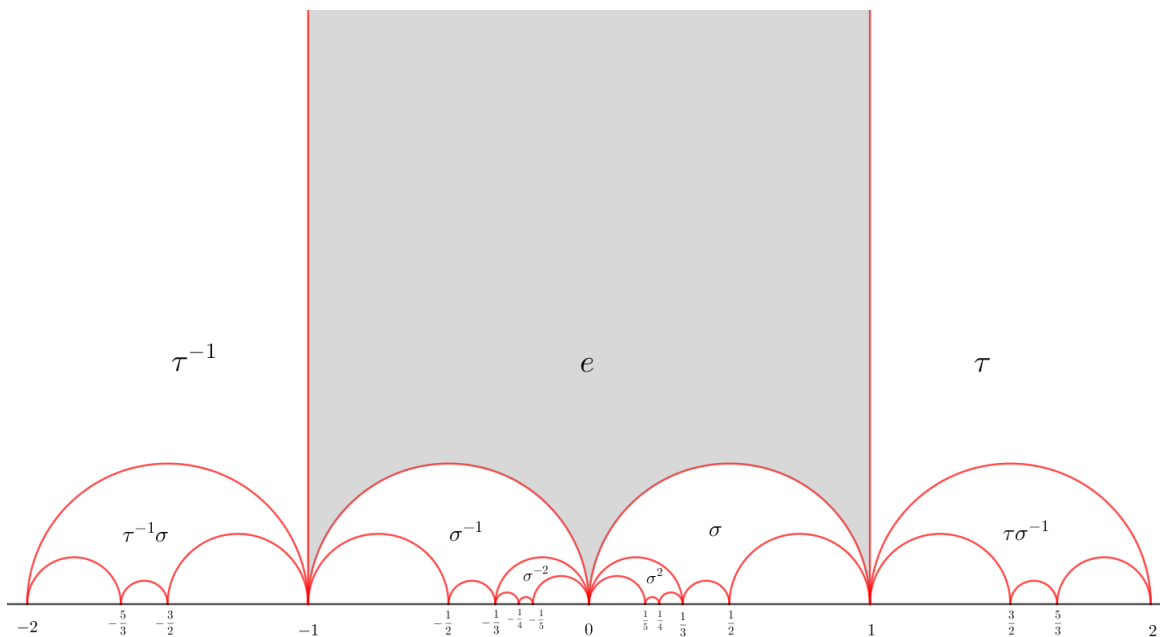


Figura 5.5: Teselación por cuadriláteros de \mathbb{H} bajo la acción de F .

Veámos que efectivamente el cuadrilátero de la figura anterior es un polígono fundamental para F . Para ello usaremos el método de los círculos isométricos descrito en [6], página 57 el caso general, y en la página 60 ejemplo 6C el caso que nos ocupa.

Diremos que un subconjunto de \mathbb{H} es un conjunto fundamental para F si contiene exactamente un punto de cada órbita de F al actuar sobre \mathbb{H} . Observamos que el polígono fundamental no puede ser abierto, pues en ese caso debería contener puntos equivalentes módulo F a puntos de su frontera, pero F es discreto. Por ello, diremos que un subconjunto abierto $J \subset \mathbb{H}$ es región fundamental si dos puntos de J no pueden ser equivalentes módulo F y todo punto de \mathbb{H} es equivalente módulo F a uno de su clausura \bar{J} .

El método de los círculos isométricos impone que F contenga traslaciones, lo cual es cierto pues $\tau \in F$. Dada una transformación $V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $c \neq 0$, llamaremos

el círculo isométrico de V a:

$$I(V) : |cz + d| = 1$$

Para las transformaciones con $c = 0$ el círculo isométrico no está definido.

El método sostiene que si denotamos por F_∞ al estabilizador de infinito y J_∞ a una región fundamental de F_∞ , entonces una región fundamental de F viene dada por:

$$J = J_\infty \cap \left\{ \bigcup_{V \in F \setminus F_\infty} (\mathbb{H} \setminus I(V)) \right\}$$

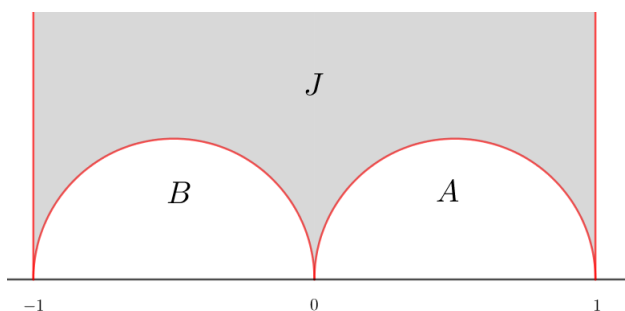
Calculemos J . En primer lugar, observamos que el estabilizador de infinito F_∞ está generado por τ . Tomamos la región fundamental para F_∞ :

$$J_\infty : |x| < 1$$

Hay dos círculos isométricos

$$A : |2z - 1| = 1 ; B : |2z + 1| = 1$$

que cortan a J_∞ definiendo la región J como podemos ver en la siguiente figura:



Veámos que esta es la región fundamental. Un círculo isométrico general para las transformaciones de F vienen dadas por $|cz + d| = 1$ con c par y d impar. Podemos asumir $c > 0$. Si $c = 2$, los círculos isométricos no cortan J a no ser que $d = \pm 1$, los cuales se corresponden con A y B . Si $c \geq 3$, como son circunferencias de centro $z = -\frac{d}{c}$ y radio $\frac{1}{c}$, basta considerar $|d| < c$. En todos estos casos, las circunferencias se encuentran en el interior de A o B .

Esto prueba que, como J es región fundamental, entonces su clausura \bar{J} es polígono fundamental como queríamos ver.

Procediendo como en el artículo [10], podemos visualizar la teselación anterior en el disco de Poincaré sin más que aplicar la transformación habitual (ver Figura 5.6)

$$T(z) = \frac{z - i}{-iz + 1}$$

Ahora la teselación tiene estructura de árbol, con e como raíz con cuatro hijos. A partir de este punto cada nodo tendrá tres hijos.

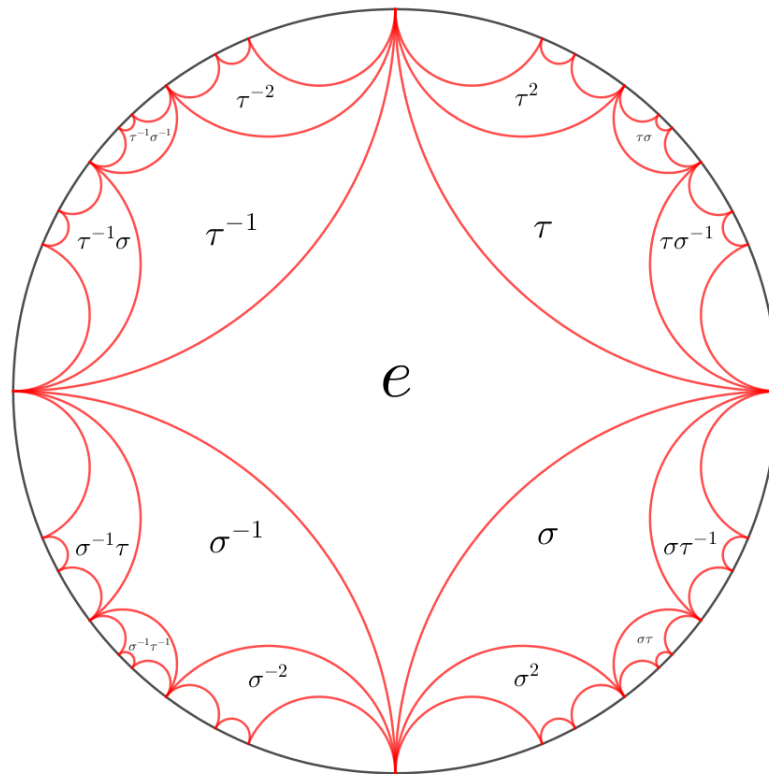


Figura 5.6: Teselación por cuadriláteros del disco bajo la acción de F .

Ahora probamos que el subgrupo F es paradójico respecto de sí mismo. En realidad, vamos a ver un resultado más general, por el cual todo grupo libre de rango 2 es paradójico. La prueba se sigue mediante un razonamiento ya usado en varias ocasiones a lo largo del trabajo.

| Teorema 5.4. *Todo grupo libre no abeliano F de rango 2 es F -paradójico actuando sobre sí mismo mediante la multiplicación a izquierda.*

Demostración. Sean σ y τ dos generadores de F como grupo libre. Tomamos $\rho \in \{\sigma, \sigma^{-1}, \tau, \tau^{-1}\}$, y sea $W(\rho)$ el conjunto de elementos de F cuya representación como producto en $\sigma^{\pm 1}$ y $\tau^{\pm 1}$ comienzan a izquierda por ρ . Entonces, se tiene que

$$F = \{e\} \cup W(\sigma) \cup W(\sigma^{-1}) \cup W(\tau) \cup W(\tau^{-1})$$

donde los conjuntos anteriores son disjuntos dos a dos. Además

$$F = W(\sigma) \cup \sigma W(\sigma^{-1})$$

y

$$F = W(\tau) \cup \tau W(\tau^{-1})$$

lo que finaliza la demostración. |

Llegados a este punto estamos listos para descomponer paradójicamente el semiplano superior completo.

| Teorema 5.5. *Existe una descomposición paradójica del semiplano superior \mathbb{H} bajo la acción de las isometrías de F*

Demostración. Para descomponer paradójicamente el semiplano superior usamos la descomposición habitual ya usada en otras ocasiones para F :

$$F = \{e\} \cup W(\sigma) \cup W(\sigma^{-1}) \cup W(\tau) \cup W(\tau^{-1})$$

Nos referimos a los subconjuntos del semiplano superior o del disco de Poincaré usando la correspondencia con las palabras de F (ver figura 5.5). En una primera aproximación podríamos tomar los subconjuntos $B'_1 = W(\tau)$, $B'_2 = W(\tau^{-1})$, $A'_1 = W(\sigma) \cup \{e\}$ y $A'_2 = W(\sigma^{-1}) \setminus \{\sigma^{-1}\}$. Observamos que

$$B'_1 \cup \tau(B'_2) = \mathbb{H} = A'_1 \cup \sigma(A'_2)$$

pero con esta descomposición hay fronteras que se solapan. Para arreglar esto consideramos los conjuntos B_1, B_2, A_1 y A_2 de la misma forma que los de antes, pero considerando algunos sin parte de su frontera como vemos en la Figura 5.7.

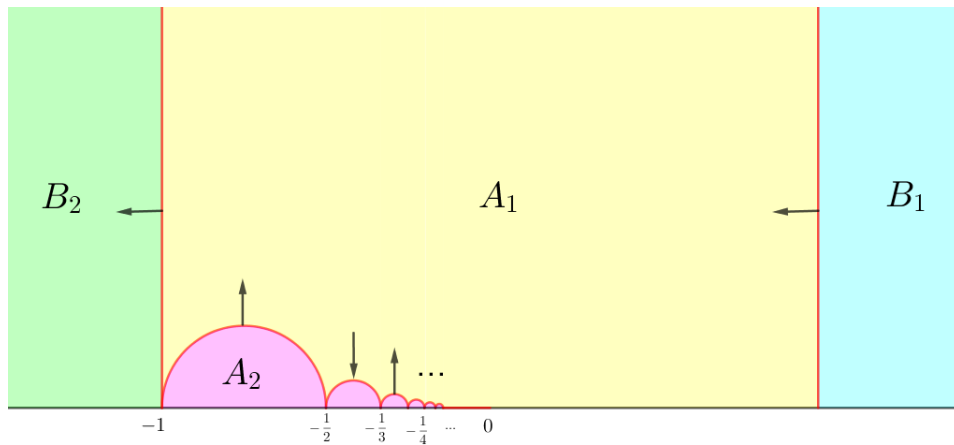


Figura 5.7: Conjuntos usados para la descomposición paradójica de \mathbb{H} . Las flechas indican a que conjunto le corresponde esa parte de la frontera.

Esto proporciona una descomposición paradójica del semiplano superior completo \mathbb{H} usando cuatro piezas.

■

Como ya adelantamos no hemos necesitado usar del axioma de elección para la descomposición del semiplano superior. El resultado anterior se tiene de forma análoga para el disco de Poincaré usando la correspondencia de las palabras de F con la teselación del disco (ver Figura 5.6).

Bibliografía

- [1] BEARDON, A. F. *The geometry of discrete groups*, vol. 91. Springer Science & Business Media, 2012.
- [2] BUSAM, R., AND FREITAG, E. *Complex analysis*. Springer, 2009.
- [3] CHANG, A. *Isometries of the hyperbolic plane*. University of Chicago (2010).
- [4] JIMÉNEZ HUEDO, Á. N. *El Grupo Modular. Subgrupos, espacios de órbitas y generalización*. Universidad Nacional de Educación a Distancia (España). Facultad de Ciencias, 2018.
- [5] KISBYE, N. P. *El plano de Poincaré*. Facultad de Matemática Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. (2009).
- [6] LEHNER, J. *A short course in automorphic functions*. Courier Corporation, 2014.
- [7] LEVANGER, R. *Imagining The Banach–Tarski Paradox*. 2011.
- [8] MAGNUS, W., KARRASS, A., AND SOLITAR, D. *Combinatorial group theory: Presentations of groups in terms of generators and relations*. Courier Corporation, 2004.
- [9] SERRE, J.-P. *A course in arithmetic*, vol. 7. Springer Science & Business Media, 2012.
- [10] TOMKOWICZ, G., AND WAGON, S. Visualizing paradoxical sets. *Math. Intelligencer* 36, 3 (2014), 36–43.
- [11] TOMKOWICZ, G., AND WAGON, S. *The Banach–Tarski Paradox*, vol. 163. Cambridge University Press, 2016.