



# **FUNDAMENTOS DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL**

**Carmen Gómez Reguera**

**Trabajo de Fin de Grado**





# **FUNDAMENTOS DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL**

Carmen Gómez Reguera

Trabajo de Fin de Grado

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por

María Isabel García de Soria Lucena



# Índice general

<b>English Abstract</b>	<b>1</b>
<b>Resumen</b>	<b>3</b>
<b>1. Antecedentes a la teoría especial de la relatividad</b>	<b>5</b>
1.1. Transformaciones Galileanas . . . . .	5
1.2. Relatividad Newtoniana . . . . .	7
1.3. El electromagnetismo y la relatividad newtoniana . . . . .	9
1.4. El experimento de Michelson-Morley . . . . .	10
<b>2. Fundamentos de la teoría especial de la relatividad</b>	<b>15</b>
2.1. Los postulados de la teoría de la relatividad especial . . . . .	15
2.2. Las transformaciones de Lorentz . . . . .	16
2.3. Simultaneidad . . . . .	20
2.4. Efecto Doppler relativista . . . . .	23
2.5. La paradoja de los gemelos . . . . .	24
2.6. Transformación de la velocidad . . . . .	27
2.7. Cantidad de movimiento relativista . . . . .	28

**II** FUNDAMENTOS DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL

2.8.	Energía relativista . . . . .	30
2.8.1.	Energía en reposo . . . . .	32
2.8.2.	Transformaciones de la cantidad de movimiento, la energía y la masa . . . . .	36
2.8.3.	Transformaciones de la fuerza . . . . .	37
2.9.	Electromagnetismo . . . . .	38
2.9.1.	Transformación de los campos eléctrico y magnético . . . . .	41
2.9.2.	Invarianza de las ecuaciones de Maxwell . . . . .	43
<b>3.</b>	<b>Los diagramas de Minkowski</b>	<b>47</b>
3.1.	Dilatación del tiempo y contracción de las longitudes . . . . .	54
3.2.	Paradoja de los gemelos . . . . .	59
<b>4.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>63</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>65</b>

# Abstract

Newton's classical mechanics proved to be incompatible with Maxwell's equations of electromagnetism, so it had to be modified. Throughout this paper, we will see how the shortcomings of the traditional theories of relativity prompted the need for innovative concepts that give rise to the theory of special relativity, developed by Albert Einstein in 1905, after which the idea of absolute time and space is abandoned. His theory was based on the postulation that the speed of light is constant for all observers, which required the adaptation of the classical laws of physics. Thus, we will derive the scientist's famous equation,  $E = mc^2$ , which shows a deep connection between energy and mass, providing further insight into atomic and nuclear reactions. In addition, we will develop the Minkowski diagrams, which are the fundamental tool to visualize the effects of this new theory.





# Resumen

La mecánica clásica de Newton demostró ser incompatible con las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell, por lo que debía ser modificada. A lo largo de este trabajo, veremos cómo las deficiencias de las teorías tradicionales de la relatividad impulsaron la necesidad de conceptos innovadores que dan lugar a la teoría de la relatividad especial, desarrollada por Albert Einstein en 1905, tras la que se abandona la idea de tiempo y espacio absolutos. Su teoría se basó en la postulación de que la velocidad de la luz es constante para todos los observadores, lo que requirió la adaptación de las leyes clásicas de la física. Así, deduciremos la famosa ecuación del científico,  $E = mc^2$ , que muestra una profunda conexión entre la energía y la masa, proporcionando una mayor comprensión de las reacciones atómicas y nucleares. Además, desarrollaremos los diagramas de Minkowski, que son la herramienta fundamental para visualizar los efectos de esta nueva teoría.



# 1 | Antecedentes a la teoría especial de la relatividad

En este capítulo estudiaremos la base experimental que dio lugar a la teoría especial de la relatividad. Nos apoyaremos en la referencia [1], estudiando la teoría clásica de la relatividad y los errores que esta presentaba al tratar con partículas de velocidad cercana a la luz.

## 1.1 Transformaciones Galileanas

Las transformaciones galileanas son una serie de ecuaciones matemáticas que describen cómo los observadores pueden medir el tiempo y el espacio en un marco de referencia diferente al suyo. Fueron desarrolladas por el físico italiano Galileo Galilei en el siglo XVII.

Estas ecuaciones transforman las coordenadas del tiempo y el espacio de un sistema de referencia a otro. Por ejemplo, si un observador se mueve a una velocidad constante con respecto a un segundo observador, las coordenadas de tiempo y espacio medidas por el segundo observador pueden transformarse en las coordenadas medidas por el primer observador haciendo uso de ellas. En esencia, las transformaciones galileanas afirman que las leyes físicas son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales (es decir, marcos que se mueven a una velocidad constante). Esto significa que, si dos observadores se mueven uno respecto al otro a una velocidad constante, las leyes de la física parecerán iguales para ambos observadores.

Consideramos dos sistemas de referencia inerciales  $S$  y  $S'$ , de manera que  $S'$  se mueve en el sentido positivo del eje  $x$  a una velocidad  $v$  con respecto a  $S$ , como muestra la Figura 1.1. En un punto  $P$  ocurre un evento, es decir, ocurre un hecho

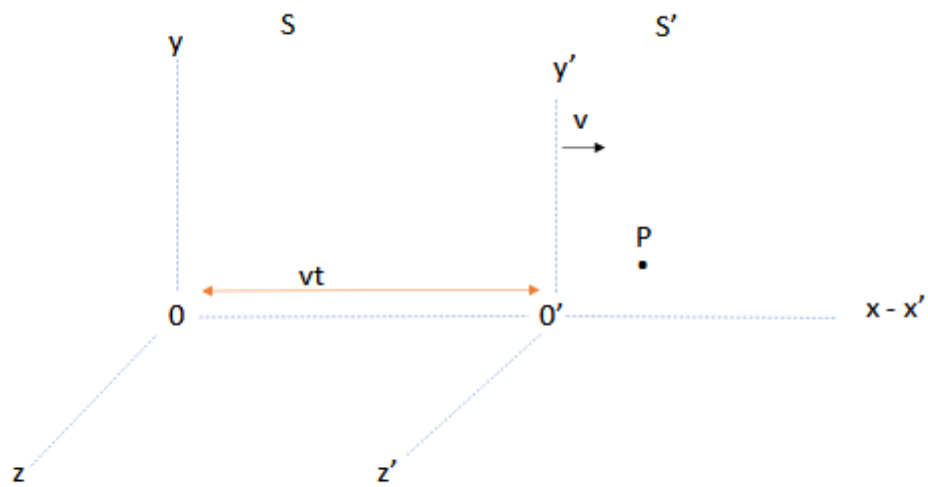


Figura 1.1: Dos sistemas inerciales con un eje común  $x-x'$ . Sus ejes  $y-y'$  son paralelos. Visto desde  $S$ ,  $S'$  se desplaza en la dirección positiva del eje  $x$  y a la velocidad  $v$ . Las coordenadas del evento  $P$  se pueden medir en cada sistema de referencia. Los orígenes  $O-O'$  de cada uno coinciden cuando  $t = t' = 0$ .

independientemente del sistema de referencia que se use para describirlo, cuyas coordenadas espaciales y de tiempo se miden en cada sistema inercial. Relacionaremos las coordenadas  $x, y, z$  y  $t$  con  $x', y', z'$  y  $t'$ , de la siguiente manera:

$$x' = x - vt, \quad (1.1)$$

$$y' = y, \quad (1.2)$$

$$z' = z. \quad (1.3)$$

En la física clásica se supone que el tiempo se puede definir independientemente de cualquier sistema de referencia, por lo que  $t = t'$ . Así, el intervalo de tiempo transcurrido entre dos eventos dados,  $P$  y  $Q$ , es el mismo para cada observador, independientemente del sistema de referencia

$$t'_P - t'_Q = t_P - t_Q. \quad (1.4)$$

De igual manera podemos ver que ambos observadores van a medir las mismas distancias entre dos puntos dados:

$$x'_P - x'_Q = x_P - vt - x_Q + vt = x_P - x_Q. \quad (1.5)$$

Las ecuaciones (1.4) y (1.5) nos indican que los intervalos de tiempo y de espacio son absolutos de acuerdo a las transformaciones galileanas.

Sin embargo, las transformaciones galileanas no son válidas para describir los fenómenos relativistas, es decir, aquellos que involucran velocidades cercanas a la velocidad de la luz. Para describir estos fenómenos, se requiere la teoría de la relatividad especial de Einstein, que utiliza las transformaciones de Lorentz en lugar de las galileanas.

## 1.2 Relatividad Newtoniana

La posición de una partícula en movimiento varía como función del tiempo, de modo que la velocidad y aceleración de la partícula se pueden expresar en función de las derivadas de la posición con respecto al tiempo, derivando sucesivamente las transformadas galileanas y teniendo en cuenta que el tiempo es invariante y no depende del observador. Así, se obtiene el teorema clásico de suma de velocidades:

$$u'_x = u_x - v, \quad (1.6)$$

$$u'_y = u_y, \quad (1.7)$$

$$u'_z = u_z. \quad (1.8)$$

En el caso general en que  $v$  tiene componentes en los tres ejes se obtiene la ecuación vectorial:

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}. \quad (1.9)$$

Al derivar las ecuaciones (1.3) respecto al tiempo obtenemos

$$\frac{d}{dt'} u'_x = \frac{d}{dt} (u_x - v), \quad (1.10)$$

$$\frac{d}{dt'} u'_y = \frac{d}{dt} u_y, \quad (1.11)$$

$$\frac{d}{dt'} u'_z = \frac{d}{dt} u_z. \quad (1.12)$$

Esto es,  $a'_x = a_x$ ,  $a'_y = a_y$ ,  $a'_z = a_z$ , es decir, la velocidad uniforme relativa de los sistemas de referencia no influye en la medida de las componentes de la aceleración de una partícula. Diferentes observadores asignan diferentes velocidades a una partícula cuando estos se encuentran en movimiento relativo, pero si este movimiento es a velocidad constante, las velocidades medidas por cada observador difieren justo en la velocidad relativa de uno respecto al otro, por lo que, cuando la velocidad de la partícula cambia, esa variación es la misma en todos los sistemas inerciales de referencia que se desplazan a velocidad constante, es decir, la aceleración de la partícula es igual respecto a cualquier sistema inercial.

Considerando que, al igual que ocurre con el tiempo, en la masa tampoco influye la velocidad de los sistemas inerciales, y tomando la definición clásica de fuerza  $\vec{F} = m\vec{a}$  (segunda ley de Newton), esta tampoco cambia. De hecho, las leyes de Newton son iguales para todos los observadores inerciales debido a que entre ellas se incluyen las siguientes afirmaciones:

1. Que las partículas interactúan en pares (tercera ley). Por cada acción, hay una reacción de igual magnitud pero de sentido contrario.
2. Que las fuerzas de acción y reacción están dirigidas a lo largo de la recta que une dos partículas que interactúan.

Por eso, aunque los números asignados a la velocidad, a la cantidad de movimiento y a la energía cinética puedan ser diferentes para distintos observadores inerciales, las leyes de Newton y las ecuaciones de movimiento de una partícula serían exactamente iguales en todos los sistemas inerciales, así como las consecuencias de las leyes de Newton como son la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento.

Por lo tanto, cualquier experimento mecánico realizado en un sistema inercial dará los mismos resultados independientemente de la velocidad a la que se mueve ese

sistema con respecto a otro sistema inercial. No habrá nada en los resultados del experimento que permita al observador determinar la velocidad del sistema en relación con otro sistema inercial.

Es decir, no hay ninguna forma de determinar la velocidad absoluta de un sistema inercial de referencia a partir de experimentos mecánicos, ya que no existe un sistema físicamente definido que esté en reposo absoluto: por ejemplo, si un jugador de billar a en el vagón de un tren que se desplaza uniformemente a lo largo de una recta, no podrá decir cuál es el movimiento del tren con respecto a tierra a partir del comportamiento de las bolas del billar.

En consecuencia, no se puede realizar un experimento mecánico que detecte una velocidad absoluta en el vacío. Solo se puede hablar de la velocidad relativa de un sistema con respecto a otro. A este hecho se le denomina relatividad newtoniana.

Newton expresó el principio de relatividad de la manera siguiente: *“Los movimientos de los cuerpos situados en cierto espacio son iguales, ya sea que el espacio se encuentre en reposo o que se desplace uniformemente en una línea recta”*.

Sin embargo, la relatividad newtoniana no es aplicable a la electrodinámica, ya que la interacción entre cargas eléctricas en movimiento implica fuerzas cuyas direcciones no se encuentran a lo largo de la línea recta que las une, y además son fuerzas que también dependen de la velocidad de las cargas y no solo de su posición.

### 1.3 El electromagnetismo y la relatividad newtoniana

Si otras leyes de la física a parte de la mecánica fuesen invariantes ante las transformaciones galileanas, entonces ningún tipo de experimento llevado a cabo en un solo sistema sería suficiente para determinar la velocidad de este con respecto a otro sistema.

Veremos aquí, que lo anterior no ocurre, ya que el caso de la electrodinámica es diferente al de la mecánica.

Consideramos un pulso de luz que se propaga en un sistema  $S$ , desde el que un observador mide una velocidad  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = 2.997925 \times 10^8 \text{ m/s}$ , donde  $\epsilon_0$  es la constante de permitividad eléctrica en el vacío y  $\mu_0$  es la constante de permeabilidad

magnética en el vacío.

Desde otro sistema inercial  $S'$ , que se desplaza a una velocidad constante,  $v$ , con respecto al primero, un observador mediría una velocidad diferente:  $c + v$  o  $c - v$ , dependiendo de la dirección del movimiento relativo.

Pero las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell contienen la constante  $c$ , que se identifica como la velocidad de propagación de una onda plana en el vacío, por lo que, al cambiar de sistema de referencia, la ecuación de la onda cambia, ya que esta velocidad de propagación deja de ser constante en todos los sistemas de referencia inerciales, lo cual es incompatible con las observaciones experimentales.

Ahora, la velocidad de propagación de la onda que parece medirse en el sistema de referencia  $S'$  es  $(c + v)$ , en lugar de  $c$ . Es decir, el principio de relatividad newtoniano no se aplica a las leyes del electromagnetismo, pero sí a las de la mecánica. Esto nos hace pensar en tres posibilidades:

- La primera es que exista un principio de relatividad para la mecánica, pero no para la electrodinámica. En la electrodinámica, existe un sistema inercial preferido al que los científicos llamaron éter, que está totalmente en reposo. Analizaremos esta posibilidad en la siguiente sección.
- La segunda es que exista un principio de relatividad para ambas, pero que las leyes de Maxwell no sean correctas.
- La tercera es que exista un principio de la relatividad para ambas, pero que las leyes de la mecánica dadas por Newton no sean correctas. En este caso, las leyes de transformación correctas no serían las galileanas, ya que son incompatibles con la invarianza de las ecuaciones de Maxwell; es decir, tendría que haber alguna otra transformación que concordase con el electromagnetismo clásico y con la nueva mecánica.

Veremos cómo la tercera posibilidad es la que se considerará correcta.

## 1.4 El experimento de Michelson-Morley

En el siglo XIX los físicos no podían aceptar el hecho de que una onda electromagnética se propagase en el vacío, por lo que postularon la existencia del “éter”, un medio indetectable que llenaba todo el espacio y en el que se podía medir la velocidad



de la luz. Para explicar la imposibilidad de su detección, le dieron propiedades como densidad nula y total transparencia.

Dos científicos estadounidenses, Albert A. Michelson y Edward W. Morley, planearon un experimento en 1887 con el objetivo de detectar al éter. Este consistía en tratar al éter como un sistema de referencia fijo con respecto al Sol, y considerar un rayo de luz medido por un observador en la Tierra, la cual se mueve a una velocidad  $v = 30\text{km/s}$  respecto al éter. Al finalizar el experimento, se acabó descartando la posibilidad de que existiese este medio que se consideraría el sistema inercial preferido para la electrodinámica.

El experimento se basa en la interferencia de dos haces de luz, que se dividen de una fuente de luz mediante un divisor de haz  $M$ , en un laboratorio  $S$  (fijo con respecto al instrumento fuente). Los dos haces viajan a lo largo de dos caminos perpendiculares, reflejados por espejos en los extremos de cada camino, antes de volver a unirse en el divisor de haz, desde donde son captados por el telescopio  $T$ , como vemos en la Figura 1.2.

Si el éter existe y se mueve a través del espacio, se esperaba que uno de los haces de luz viajara a través del éter en la misma dirección que su movimiento, y el otro viajara perpendicularmente al movimiento del éter. Por lo tanto, se esperaba que los dos haces de luz tuvieran diferentes velocidades, lo que se reflejaría en una diferencia de fase detectable entre ellos en un patrón de interferencias.

El tiempo que tarda el haz 1 en ir de  $M$  a  $M1$  y regresar a  $M$  es:

$$t_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = l_1 \left( \frac{2c}{c^2 - v^2} \right) = \frac{2l_1}{c} \left( \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right). \quad (1.13)$$

Ya que viaja a una velocidad  $c - v$  con respecto al aparato cuando es emitido, y a una velocidad  $c + v$  cuando es reflejado por el espejo.

Para el haz 2, medimos el tiempo de recorrido esta vez con respecto al éter (podemos hacerlo pues en física clásica el tiempo es absoluto).

$$2\sqrt{l_2^2 + \left(\frac{vt_2}{2}\right)^2} = ct_2, \quad (1.14)$$

$$t_2 = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1.15)$$

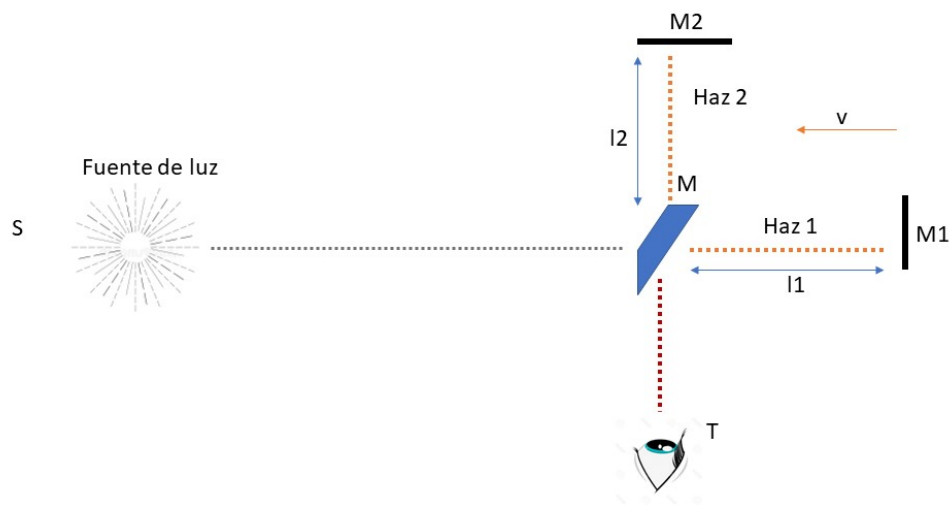


Figura 1.2: Esbozo del interferómetro de Michelson donde  $v$  es la velocidad del éter con respecto a la Tierra. El haz luminoso que proviene de la fuente  $S$  se divide en dos haces al llegar al espejo semirreflector  $M$ . Estos dos haces se reflejan en los espejos  $M1$  y  $M2$  y finalmente llegan al telescopio  $T$  donde interfieren dando lugar a un patrón de interferencias.

De este modo, la diferencia de tiempos es

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c} \left[ \frac{l_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{l_1}{1 - v^2/c^2} \right]. \quad (1.16)$$

Para descartar que pudiera deberse a una diferencia en las longitudes recorridas por los haces, ya que era difícil obtener la precisión requerida, se repitió el experimento girando el instrumento  $90^\circ$ , de forma que  $l_1$  fuese la longitud perpendicular a  $v$  y  $l_2$  paralela a  $v$ , obteniéndose el mismo resultado que anteriormente, una diferencia de tiempos.

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{2}{c} \left[ \frac{l_2}{1 - v^2/c^2} - \frac{l_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right]. \quad (1.17)$$

La rotación cambia las interferencias en

$$\Delta t' - \Delta t \cong \frac{2}{c} \left[ \frac{l_2 + l_1}{1 - v^2/c^2} - \frac{l_2 + l_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right]. \quad (1.18)$$

Según el resultado, la rotación debería ocasionar un corrimiento en el patrón de interferencias, ya que cambia la relación de fase entre los dos haces, pero esto no ocurrió en ninguno de los experimentos realizados. Por lo tanto, la conclusión fue que no había ningún corrimiento. Una manera de interpretar esto es llegar a la conclusión de que la velocidad de la luz es igual a  $c$  en todas las direcciones y en todos los sistemas inerciales, pero esto es incompatible con las transformaciones galileanas de velocidad.



## 2 | Fundamentos de la teoría especial de la relatividad

Como se ha visto en el capítulo anterior, el experimento de Michelson-Morley mostró que la velocidad de la luz era igual en todos los sistemas inerciales. Las transformaciones galileanas no eran compatibles con este hecho, en este capítulo, haciendo uso de las referencias [2] y [3], introduciremos la teoría de la relatividad especial que nos llevará a unas nuevas transformaciones, las transformaciones de Lorentz, que preservan la velocidad de la luz.

### 2.1 Los postulados de la teoría de la relatividad especial

Desde una edad temprana, Einstein demostró una gran habilidad para las matemáticas y la física. Después de completar la educación secundaria en Suiza, ingresó en la Escuela Politécnica Federal de Zúrich, donde obtuvo su diploma en 1900. Después de graduarse, tuvo dificultades para encontrar trabajo en la industria, por lo que comenzó a trabajar como tutor privado y a publicar artículos sobre física teórica. En 1905, Albert Einstein publicó el artículo titulado "Zur Elektrodynamik bewegter Körper" (Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento) [4], donde presentó su teoría de la relatividad especial, la cual revolucionó nuestra comprensión del tiempo y del espacio.

Para desarrollar su teoría y resolver el problema de que la electrodinámica no se ajustase a la relatividad clásica, Einstein trabajó a partir de dos suposiciones: La primera fue que para todos los sistemas de coordenadas en los que se cumplen las ecuaciones de la mecánica, las ecuaciones equivalentes de la electrodinámica de Maxwell

también se cumplen. La segunda, que a primera vista es incompatible con la primera, es que la velocidad de la luz en el vacío es una constante  $c$  (deducida por Maxwell) independiente del sistema de referencia.

En su artículo, Einstein estableció estos postulados fundamentales:

- **Postulado 1:** No puede detectarse el movimiento absoluto, uniforme, debido a que las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas inerciales. No hay sistema inercial preferido.
- **Postulado 2:** La velocidad de la luz es independiente del movimiento de la fuente. Todo observador inercial mide el mismo valor  $c$  para la velocidad de la luz.

Es decir, Einstein desarrolló la tercera de las posibilidades mencionadas anteriormente. Se basó en el estudio de la naturaleza del *tiempo*, rechazando la idea del tiempo absoluto para llegar a una modificación de la teoría de relatividad newtoniana existente dando lugar a una con validez universal en todas las áreas de la física.

## 2.2 Las transformaciones de Lorentz

Como vimos anteriormente, la transformación galileana no es consistente con los postulados de Einstein de la relatividad especial, ya que la velocidad de la luz no sería la misma en todos los sistemas de referencia. Por este motivo, las ecuaciones de transformación clásicas deben modificarse para hacerlas consistentes con los postulados de Einstein.

Estas nuevas transformaciones, llamadas transformaciones de Lorentz, fueron postuladas originalmente por el científico Hendrik A. Lorentz en la década de 1890, derivándose como parte de su teoría electrodinámica, la cual tenía como consecuencia la constancia de la velocidad de la luz en el vacío. Einstein probó que estas ecuaciones se deducían naturalmente de sus postulados, y las reinterpretó dando lugar a un nuevo concepto de espacio-tiempo.

Vamos a deducir las transformaciones que nos relacionan las coordenadas en dos sistemas de referencia en movimiento relativo de traslación uniforme.

Utilizaremos nuevamente un sistema de referencia  $S$ , de coordenadas rectangulares  $x, y, z$  con origen  $O$ , y otro sistema  $S'$ , de coordenadas  $x', y', z'$  con origen  $O'$ ,

que se desplaza a una velocidad constante  $v$  con respecto a  $S$ , a lo largo del eje  $x$ . Utilizaremos los postulados de Einstein para encontrar la relación entre las coordenadas  $x, y, z$  y el tiempo  $t$  de un suceso visto en el sistema de referencia  $S$  y las coordenadas  $x', y', z'$  y el tiempo  $t'$  del mismo suceso visto en el sistema de referencia  $S'$ , de manera que los orígenes coinciden en  $t = 0 = t'$ .

Supongamos que la ecuación de la transformación relativista difiere de la clásica en un multiplicador constante en el segundo miembro:

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad (2.1)$$

$$x' = \gamma(x - vt). \quad (2.2)$$

donde  $\gamma$  es una constante que puede depender de  $v$  y  $c$  pero no de las coordenadas. Consideramos un rayo de luz que parte del origen  $S$  en  $t = 0$ . Según Einstein, la ecuación correspondiente a la componente  $x$  del movimiento de la luz sea  $x = ct$  en el sistema  $S$  y  $x' = ct'$  en  $S'$ . Sustituyendo en las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$ct = \gamma(ct' + vt') = \gamma(c + v)t', \quad (2.3)$$

$$ct' = \gamma(ct - vt) = \gamma(c - v)t. \quad (2.4)$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$\gamma^2 = (1 - v^2/c^2)^{-1}, \quad (2.5)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.6)$$

Si además sustituimos  $x$  en la ecuación para  $x'$ , podemos despejar el tiempo  $t$  en función de  $x'$  y  $t'$ :

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad (2.7)$$

$$t = \gamma \left( t' + \frac{vx'}{c^2} \right). \quad (2.8)$$

De la misma forma:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (2.9)$$

$$t' = \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right). \quad (2.10)$$

Obtenemos así la transformación de Lorentz para cambios de sistemas de referencia. Las transformaciones galileanas siguen siendo ciertas para velocidades mucho menores que  $c$ , ya que en este caso  $\gamma$  es aproximadamente 1.

El **intervalo espaciotemporal** [5], definido como

$$(x^2 + y^2 + z^2) - c^2 t^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2) - c^2 t'^2, \quad (2.11)$$

es invariante ante las transformaciones de Lorentz, es decir, no depende del observador, puesto que  $ct' = \gamma(ct - \beta x)$  y  $x' = \gamma(x - c\beta t)$ , donde  $\beta = v/c$ . Luego,

$$x'^2 - c^2 t'^2 = \gamma^2 (x^2(1 - \beta^2) - c^2 t^2(1 - \beta^2)) = \frac{1}{1 - \beta^2} (1 - \beta^2) (x^2 - c^2 t^2) = x^2 - c^2 t^2. \quad (2.12)$$

Veamos a continuación dos importantes consecuencias de las transformaciones de Lorentz:

#### ■ Dilatación del tiempo

La primera consecuencia es la **dilatación del tiempo**. En la mecánica clásica se tenía que el tiempo transcurrido entre dos eventos era el mismo independientemente del sistema inercial en el que se medía. Sin embargo, con las nuevas transformaciones, este razonamiento cambia. Consideramos dos sucesos que se producen en la misma posición  $x'_0$  en los instantes  $t'_1$  y  $t'_2$  en el sistema  $S'$  y aplicamos las ecuaciones (2.7) para obtener  $t_1$  y  $t_2$ , esto es, los instantes de tiempo medidos por  $O$ :

$$t_1 = \gamma \left( t'_1 + \frac{vx'_0}{c^2} \right), \quad (2.13)$$

$$t_2 = \gamma \left( t'_2 + \frac{vx'_0}{c^2} \right), \quad (2.14)$$

$$t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1). \quad (2.15)$$

Como vemos, el intervalo de tiempo medido en cualquier otro sistema de referencia  $S$  es siempre más largo que el **tiempo propio**  $t_p$  (tiempo entre dos sucesos que ocurren en el mismo lugar en un sistema de referencia concreto) medido en  $S'$ .

Intuitivamente, consideremos un observador  $O'$  que lanza un rayo de luz hacia un espejo situado a una distancia  $D'$  dentro de una nave espacial que está en reposo en un sistema  $S'$  y mide el tiempo que tarda en recibir el reflejo, que será  $t_p = \Delta t' = \frac{2D'}{c}$ . Para otro observador  $O$  situado en la Tierra, que llamaremos



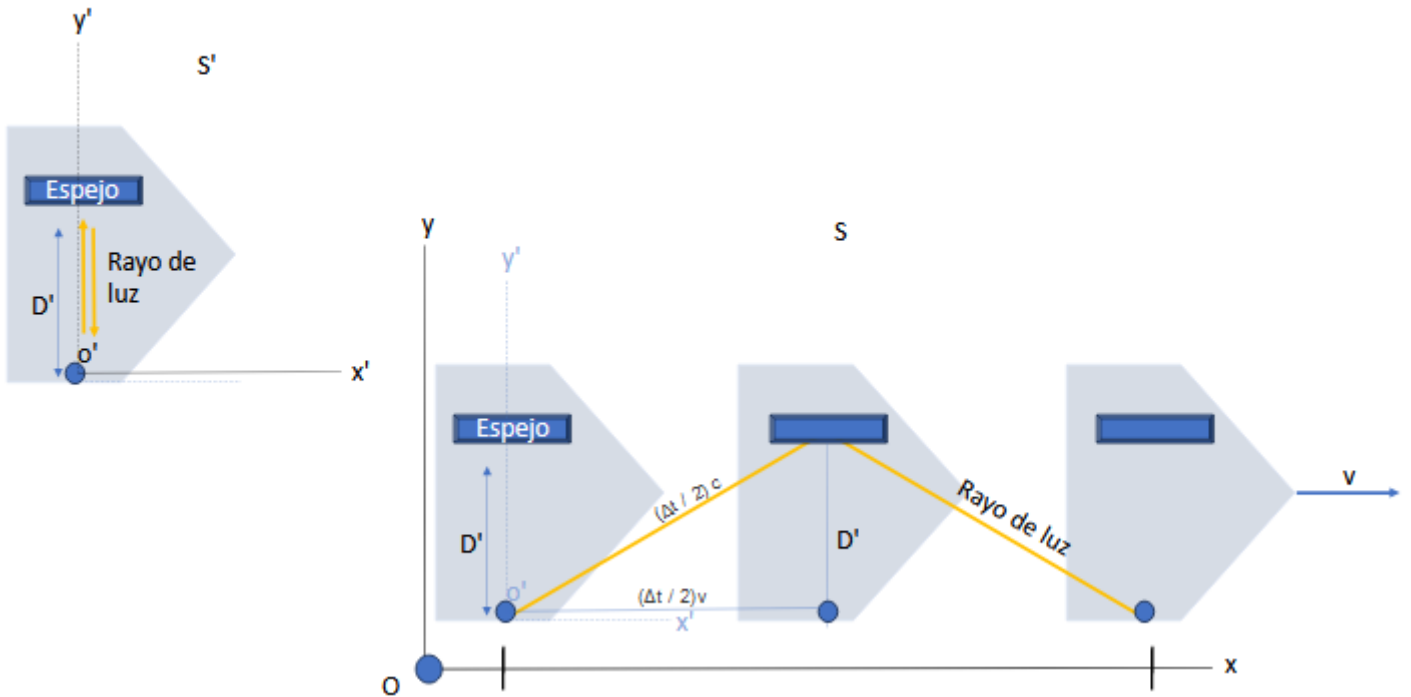


Figura 2.1: El observador  $O'$  y el espejo están dentro de una nave en el sistema  $S'$ . El tiempo que tarda el rayo en reflejarse en el espejo y volver al punto de partida es de  $2D'/c$  según se mide en  $S'$ . En  $S$ , la nave se mueve hacia la derecha con velocidad  $v$ . El triángulo rectángulo sirve para calcular el tiempo transcurrido en el sistema  $S$ .

sistema  $S$ , la distancia  $D$  recorrida por el rayo será mayor, pero, sin embargo, según los postulados de Einstein, este debe medir la misma velocidad del rayo, por lo tanto, el tiempo  $\Delta t$  transcurrido para él debe ser mayor, ya que el rayo recorre más distancia que la que midió el observador de la nave, pero a la misma velocidad. Si la nave se mueve con velocidad  $v$ , durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , el observador  $O'$  y su nave espacial han recorrido una distancia horizontal  $v\Delta t$ . Por lo tanto, como indica el triángulo de la Figura 2.1, se tiene que

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = D'^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2, \tag{2.16}$$

luego

$$\Delta t = \frac{2D'}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2D'}{c} \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \gamma \Delta t'. \tag{2.17}$$

### ■ Contracción de longitud

Un fenómeno parecido ocurre con las longitudes: Consideramos una varilla fija en el sistema  $S'$ , que se mueve a velocidad  $v$  respecto al sistema  $S$ , y queremos medir la posición de sus extremos en el sistema  $S$  en un instante concreto  $t$  (por lo que  $t_1=t_2$ ) de la siguiente manera:

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma}(x'_2 - x'_1) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}(x'_2 - x'_1). \quad (2.18)$$

o sea, la longitud de la varilla es, pues, más corta cuando se mide en un sistema en movimiento, es decir, es más corta que la distancia propia, definida como la distancia que se mide en el sistema de referencia en el que la varilla se encuentra en reposo.

En resumen, Einstein reinterpretó las transformaciones de Lorentz para expresar la conexión fundamental entre el tiempo y el espacio, y para mostrar que ambas magnitudes están interconectadas y dependen del observador y del sistema de referencia utilizado.

## 2.3 Simultaneidad

Vamos a definir en esta sección el concepto de simultaneidad y veremos cómo es un concepto relativo.

Supongamos que dos eventos ocurren en el mismo lugar, en un mismo sistema de referencia, y medimos con un reloj el tiempo en que ocurren. Si el tiempo es el mismo, entonces diríamos que los eventos son simultáneos.

Supongamos ahora que ocurren en diferentes lugares  $A$  y  $B$ , separados por una distancia  $L$ . En este caso, deberíamos colocar un reloj en cada uno de esos lugares y antes de hacer mediciones, asegurarnos de que están sincronizados, y para ello se nos ocurre a priori hacer que marquen el mismo tiempo, según lo ve el observador  $A$ . Para sincronizar los relojes podemos proceder de distintos modos.

Por ejemplo, la luz tarda en viajar de  $B$  hasta  $A$ , por lo que, cuando para  $A$ , ambos relojes marquen el tiempo  $t$ , el reloj colocado en  $B$  en realidad marcará el tiempo  $t + L/c$ , y por tanto para  $B$ , los relojes no estarán sincronizados, si no que el de  $A$  estará atrasado con respecto al suyo en  $2L/c$ . Para solucionar esto, se pone el reloj  $A$

en  $t = 0$  a la misma vez que lanzamos desde ahí una señal luminosa a  $B$ . Cuando  $B$  recibe la señal, debe poner su reloj en  $t = L/c$ .

Otra forma sería poner una fuente de luz en el punto medio de la recta que va de  $A$  a  $B$  y decir a cada uno de los observadores que pongan su reloj en  $t = 0$  cuando les llegue la señal del encendido de la luz.

Una vez hemos sincronizado nuestros relojes en un cierto sistema de referencia, podemos decir que los eventos que ocurren en dos lugares diferentes de este son simultáneos cuando los relojes de los lugares respectivos registran el mismo tiempo para ellos.

Pero, ¿es la simultaneidad independiente del sistema de referencia utilizado para describir los eventos? Supongamos ahora dos sistemas de referencia inerciales,  $S$  y  $S'$ , moviéndose uno con respecto al otro con una velocidad  $v$ . Los observadores, que tienen relojes sincronizados en su propio sistema, ven que en cada uno de los sistemas caen dos rayos, dejando señales permanentes en ambos.

Supongamos que, después, mediante mediciones, cada observador deduce que él estaba localizado en el punto medio de la marca dejada por aquellos eventos, por lo tanto si las señales luminosas de los mismos llegaron simultáneamente a su reloj, concluirán que los eventos fueron simultáneos en su propio sistema.

Supongamos ahora que el observador  $S$  se da cuenta de que los rayos cayeron simultáneamente para él, como muestra la Figura 2.2.

En el instante en que el rayo cayó en  $B$  y  $B'$  esos puntos coinciden. Sin embargo, las señales luminosas de los eventos tardan un tiempo finito en llegar a  $O$  y durante ese tiempo,  $O'$  viaja a la derecha, como se muestra en la figura 2.2. Por lo tanto, la señal del evento  $BB'$  llega a  $O'$  antes de llegar a  $O$ , mientras que la señal de  $AA'$  llega a  $O$  antes que a  $O'$ . Cuando la señal de  $BB'$  llega a  $O'$ , la señal de  $AA'$  aún no ha llegado, por lo que para  $S'$  los eventos no son simultáneos.

Así, la respuesta a nuestra pregunta es no, la simultaneidad no es independiente del sistema de referencia en el cuál se midan los eventos. En cambio, se trata de un concepto relativo, al igual que el tiempo.

Notemos que, si tuviéramos una señal infinitamente rápida, la simultaneidad sería un concepto absoluto pues los sistemas no se moverían en absoluto uno respecto al otro en el tiempo (cero) que tardaría la señal en llegar a los observadores.

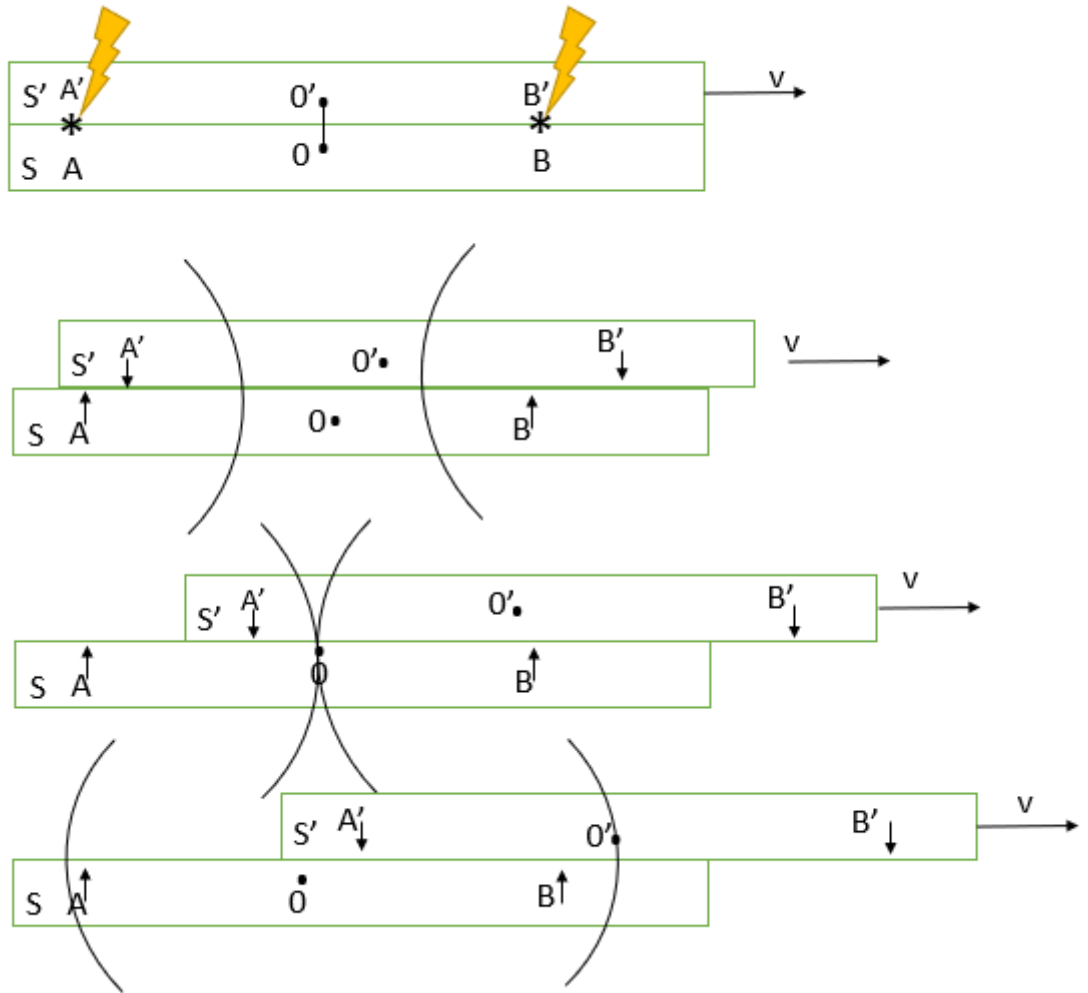


Figura 2.2: Punto de vista del sistema  $S$ , donde el sistema  $S'$  se mueve hacia la derecha. Una onda luminosa deja las marcas  $A, A'$  y  $B, B'$  en el primer dibujo, de forma que los eventos  $AA'$  y  $BB'$  son simultáneos en  $S$ . En el segundo se observa como el frente de onda del evento  $BB'$  llegará a  $O'$  antes de que el de  $AA'$  llegue a  $O$ . El tercer dibujo muestra cómo ambos frentes de onda llegan a la vez a  $O$ . El último dibujo muestra cómo el frente de onda del evento  $AA'$  llega a  $O'$ .

## 2.4 Efecto Doppler relativista

El efecto Doppler consiste en el desplazamiento de la frecuencia de las ondas debido al desplazamiento relativo del foco con respecto al observador. Supongamos que el foco emisor se mueve junto con un sistema de referencia  $S'$  a velocidad  $v$  respecto al receptor, que se encuentra en otro sistema  $S$  que se mueve a velocidad  $u_0$  respecto a  $S'$ . El foco emisor emite una onda que se mueve a velocidad  $u$  con frecuencia  $f'$  respecto al medio en el que se propaga, mientras que la frecuencia  $f$  de dicha onda percibida por el receptor será:

$$f = \frac{u + u_0}{u + v} f'. \quad (2.19)$$

Tomaremos  $u_0$  como positiva si el receptor se acerca al emisor y como negativa si se aleja. Igualmente, tomaremos  $v$  como positiva si el emisor se aleja del receptor y negativa si se acerca a él. La longitud de onda medida en  $S'$ ,  $\lambda' = u/f'$ , está relacionada inversamente con la frecuencia de esta, puesto que, a medida que el foco emisor se acerca al receptor, la frecuencia aumenta, y la longitud de onda disminuye. Este cambio aparente de longitud de onda en el sonido se manifiesta haciendo que percibamos un sonido más agudo cuando el foco se acerca a nosotros y más grave cuando se aleja, por ejemplo, el de una ambulancia. En el caso del sonido es posible diferenciar si es el emisor o el receptor quién se mueve con respecto al aire, que es el medio de propagación de las ondas sonoras. Sin embargo, esta distinción no es posible en el caso de la luz o de otras ondas electromagnéticas en el vacío. La expresión anterior del efecto Doppler no puede corregirse en el caso de la luz.

Deduciremos ahora el efecto Doppler relativista. Supongamos que la fuente emisora se mueve hacia el receptor y que emite  $N$  ondas electromagnéticas. La primera onda recorrerá una distancia  $c\Delta t$  y la fuente recorrerá una distancia de  $v\Delta t$  en el tiempo  $\Delta t$  medido en  $S$ . La longitud de onda para  $S$  será

$$\lambda = \frac{c\Delta t - v\Delta t}{N}. \quad (2.20)$$

Luego la frecuencia percibida por el receptor en  $S$  será

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{c - v} \frac{N}{\Delta t}, \quad (2.21)$$

$$f = \frac{1}{1 - v/c} \frac{N}{\Delta t}. \quad (2.22)$$

Si la frecuencia medida en un sistema  $S'$  que se mueve con la fuente emisora es  $f'$ , se tiene  $N = f'\Delta t'$ , siendo  $\Delta t'$  el tiempo propio medido en  $S'$ . Entonces,  $\Delta t = \gamma\Delta t'$

según las ecuaciones de Lorentz, obteniendo así

$$f = \frac{1}{1 - v/c} \frac{f' \Delta t'}{\Delta t} = \frac{f'}{1 - v/c} \frac{1}{\gamma}, \quad (2.23)$$

$$f = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c} f' = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} f', \quad (2.24)$$

cuando se acercan. Procediendo de igual forma en el caso en que se alejan obtenemos

$$f = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} f'. \quad (2.25)$$

Analizando la situación de manera similar en el sistema  $S'$  se obtienen las inversas de las ecuaciones anteriores

$$f' = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} f. \quad (2.26)$$

cuando se acercan y

$$f' = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} f. \quad (2.27)$$

cuando se alejan. Como vemos, la fórmula relativista del efecto Doppler difiere de la fórmula clásica en el factor de dilatación del tiempo.

## 2.5 La paradoja de los gemelos

Analicemos ahora una famosa paradoja que surge de la dilatación del tiempo. Nuestros protagonistas son Pedro y Mateo, dos gemelos idénticos. Mateo coge su nave y viaja a una velocidad cercana a la de la luz hacia un planeta más allá del sistema solar y vuelve a la Tierra mientras Pedro permanece en ella. Cuando se reúnen de nuevo, para Pedro ha pasado más tiempo, por lo que será más viejo. Lo lógico es pensar que desde el punto de vista de Mateo la situación será la inversa, ya que para él, quien se ha movido es su hermano, luego sería Pedro el que permanece joven, apareciendo así la paradoja. Si la situación es simétrica para ambos, ninguno sería capaz de determinar quién es el que realmente se mueve. Sin embargo, la paradoja se resuelve al encontrar que el papel que juegan ambos gemelos no es simétrico, y el resultado es el primero: el que envejece con respecto a su hermano es Pedro. Esto se debe a que Pedro permanece en un sistema de referencia inercial  $S$ , mientras que Mateo viaja en dos sistemas

no inerciales, ya que debe acelerar su velocidad hasta alcanzar la deseada, viajando en un sistema  $S'$ , y luego debe frenar y acelerar nuevamente para volver en un sistema  $S''$ . Mateo será capaz por tanto de identificar que es él quién se está moviendo, ya que notará en su cuerpo el cambio de velocidad. Veamos un ejemplo numérico de esta situación para ver cómo surgiría la paradoja, considerando la simplificación de que  $S'$  y  $S''$  son dos sistemas inerciales, es decir, omitiendo las aceleraciones y deceleraciones que ocurren.

Supongamos que la Tierra y el planeta  $P$ , a una distancia  $L_p = 4$  años luz de esta, están situados en el sistema  $S$ . Mateo parte de la Tierra en su nave y acelera hasta que esta alcanza una velocidad  $v = 0'8c$  con la que viaja hasta  $P$ , donde se para y vuelve a acelerar hasta alcanzar de nuevo  $v$  para realizar su viaje de vuelta, como muestra la Figura 2.3.

Podemos calcular el valor de  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 5/3. \quad (2.28)$$

- Según Pedro, Mateo viaja durante  $4c/0'8c = 5$  años en  $S'$ , y durante otros 5 años en  $S''$ , ya que la distancia medida en  $S$  es  $L_p$ . En este caso, el tiempo propio para la ida es  $\Delta t = 5$  años, ya que es el tiempo medido en el sistema en reposo  $S$ .

Sin embargo, según la ecuación (2.15), Pedro medirá que el tiempo transcurrido en el reloj de Mateo hasta llegar a  $P$  es

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{5 \text{ años}}{5/3} = 3 \text{ años}. \quad (2.29)$$

- Para Mateo, la distancia al planeta  $P$  se contrae respecto a la distancia propia medida por Pedro desde la Tierra

$$L' = L_p(3/5) = 4 \text{ años luz } (3/5) = 2'4 \text{ años luz}. \quad (2.30)$$

Por tanto para él han pasado  $2'4$  años luz/ $v = 3$  años, como habíamos calculado.

En resumen, para Mateo habrán pasado solo 6 años en total, mientras que para Pedro han pasado 10.

Pero si consideramos a Pedro moviéndose y a Mateo en reposo, el tiempo propio es en este caso de  $\Delta t = 3$  años. Es decir, estamos considerando ahora que es Pedro

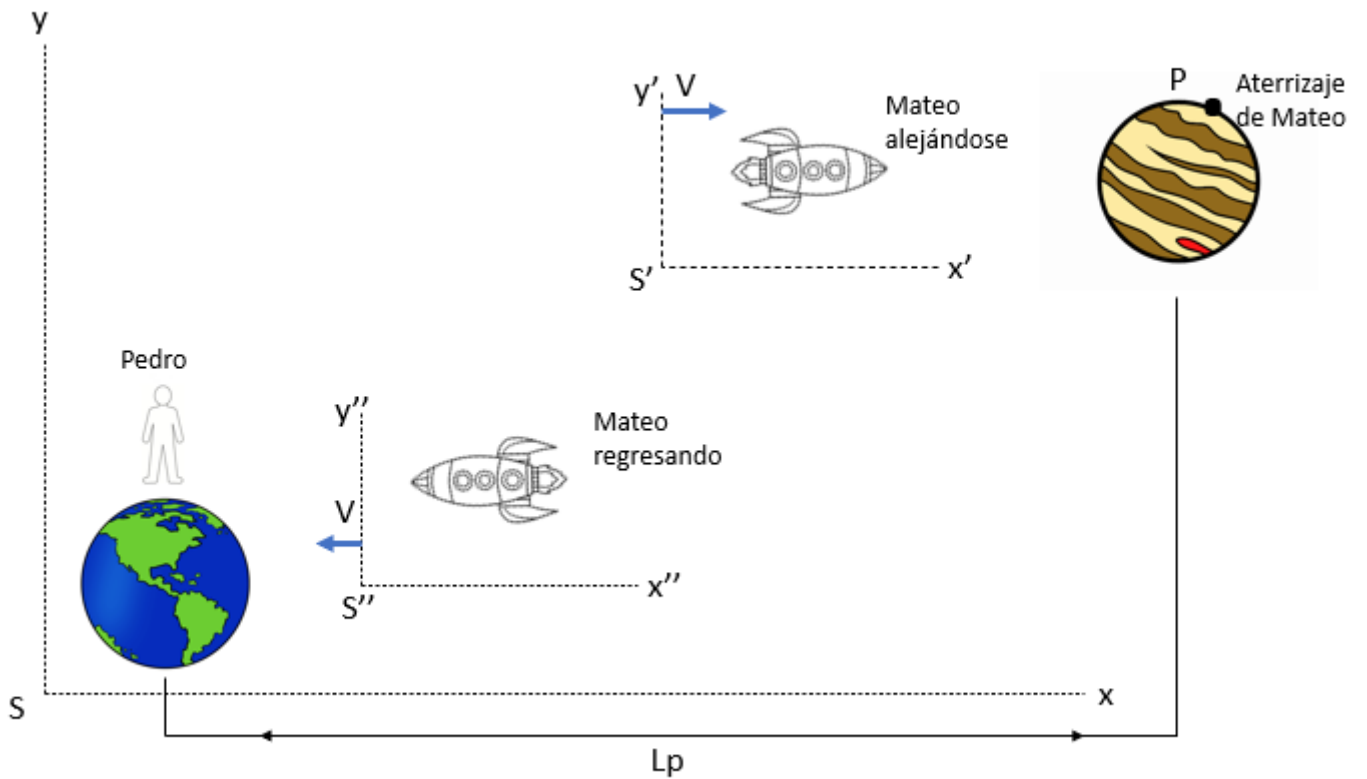


Figura 2.3: Paradoja de los gemelos. La Tierra y  $P$  están fijos en el sistema  $S$ , en el que se encuentra Pedro. Mateo viaja en el sistema  $S'$  para llegar a  $P$ , y en el sistema  $S''$  para volver a la Tierra.

el que se mueve en dos sistemas de referencia  $S'$  y  $S''$  para alejarse y volver, respectivamente, mientras Mateo está fijo en un sistema  $S$ . Luego, para Pedro habrán pasado

$$\Delta t' = t_p(3/5) = 3(3/5) = 1'8 \text{ años.} \quad (2.31)$$

Es decir, Mateo envejecería 6 años y Pedro tan solo 3'6 años, obteniéndose así la paradoja.



## 2.6 Transformación de la velocidad

Al igual que en el caso de las transformaciones galileanas, podemos, derivando las transformaciones de Lorentz, ecuaciones (2.7), obtener la transformación de la velocidad de un sistema de referencia a otro según la relatividad especial. Tenemos que:

$$dx = \gamma(dx' + vdt'), \quad (2.32)$$

$$dt = \gamma\left(dt' + \frac{vdx'}{c^2}\right). \quad (2.33)$$

De esta forma, la componente  $x$  de la velocidad medida por el observador  $O$  será:

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + vdt')}{\gamma\left(dt' + \frac{vdx'}{c^2}\right)} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2}. \quad (2.34)$$

A diferencia de las transformaciones galileanas, donde se obtenía  $u'_y = u_y$  y  $u'_z = u_z$ , en la transformación relativista de la velocidad esto no ocurre, puesto que el tiempo no es absoluto. En este caso, teniendo en cuenta la relación entre  $dt$  y  $dt'$  obtenemos

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + vu'_x/c^2)}, \quad (2.35)$$

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1 + vu'_x/c^2)}. \quad (2.36)$$

De la misma forma obtenemos las ecuaciones inversas:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}, \quad (2.37)$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - vu_x/c^2)}, \quad (2.38)$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - vu_x/c^2)}. \quad (2.39)$$

Observamos que, cuando  $v$  y  $u'_x$  son pequeñas en comparación con  $c$ , las expresiones relativista y clásica coinciden.

## 2.7 Cantidad de movimiento relativista

En la mecánica clásica se define la cantidad de movimiento de una partícula como  $\vec{p} = m\vec{u}$ , donde  $\vec{u}$  es la velocidad de la partícula. En un sistema aislado de partículas, sin ninguna fuerza neta que actúe sobre el mismo, esta cantidad se conserva, es decir, siempre permanece constante, aunque haya interacciones entre las partículas. Sin embargo, veremos que en mecánica relativista, esta cantidad no es la que se conserva, y la redefiniremos para encontrar aquella que si permanece constante.

Consideremos un observador  $A$  que posee una bola de masa  $m$  en el sistema de referencia  $S$ , y otro observador  $B$  en el sistema  $S'$ , con una bola idéntica. El sistema  $S'$ , cuyo origen se encuentra por encima del origen de  $S$ , se mueve respecto al sistema  $S$  a velocidad  $v$ , en el sentido positivo del eje  $x$ . Ambos observadores lanzan sus bolas verticalmente con una velocidad  $u_0$  de forma que recorren una distancia  $L$ , realizan un choque elástico y regresan. La Figura 2.4 muestra el aspecto que presentan am-

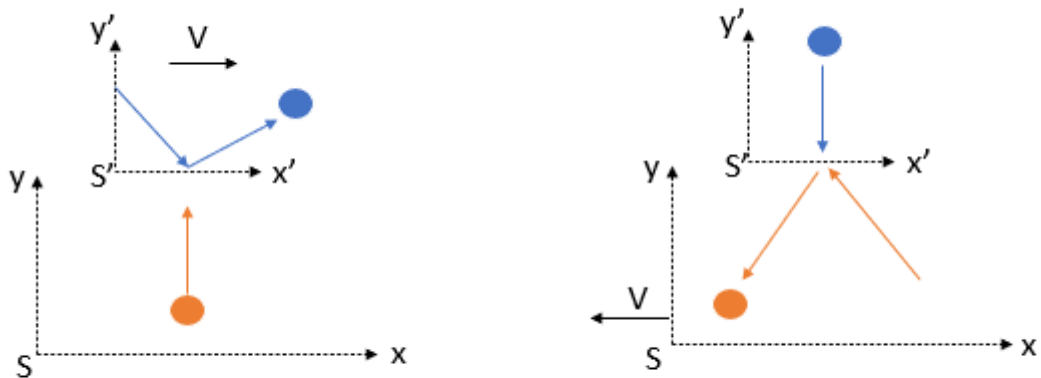


Figura 2.4: Se muestra un choque elástico de dos pelotas en dos sistemas de referencia que se mueven el uno respecto al otro con velocidad  $v$ . A la izquierda, se considera el punto de vista del observador  $O$ ; en este caso, la pelota naranja realiza un movimiento vertical mientras que la velocidad de la pelota azul tiene componente en el eje  $x$ . A la derecha, se considera el punto de vista del observador  $O'$ ; ahora, es la pelota azul la que realiza movimiento vertical y la velocidad de la naranja tiene componente negativa en el eje  $x$ .

bas colisiones en cada sistema de referencia. Según la mecánica clásica, ambas bolas tienen cantidades de movimiento opuestas de valor  $mu_0$ , por lo tanto la cantidad de movimiento vertical total es 0 antes del choque y se conserva después del choque. Sin embargo, aplicando las ecuaciones de Lorentz, vemos que desde el punto de vista del observador  $A$ , la velocidad de su bola es  $u_{A_y} = u_0$  y la de la bola B es  $u_{B_y} = -u_0/\gamma$ , por lo que la cantidad de movimiento total vertical antes del choque no es nula y cuando el movimiento se invierte tras el choque, se observa que la cantidad no se ha conservado. Como siempre, en el límite clásico, cuando  $\gamma$  se aproxima a 1, el momento lineal, se conserva para ambos observadores. Se plantearon entonces una redefinición de  $\vec{p}$  que tendiese a  $m\vec{u}$  cuando  $u \ll c$  y se conservase en las colisiones. Así, se establece la cantidad de movimiento relativista como

$$\vec{p} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (2.40)$$

Veamos que esta cantidad si se conserva en la situación anterior: La velocidad de la bola  $A$  en  $S$  solo tiene componente vertical y su valor es  $u_A = u_{A_y} = u_0$ , de modo que la componente  $y$  de su cantidad de movimiento relativista es

$$p_{A_y} = \frac{mu_0}{\sqrt{1 - u_0^2/c^2}}. \quad (2.41)$$

La velocidad de  $B$  en  $S$  tiene componente horizontal  $u_{B_x} = v$  y componente vertical  $u_{B_y} = -u_0/\gamma$ , es decir,

$$u_B^2 = u_{B_x}^2 + u_{B_y}^2 = v^2 + (-u_0\sqrt{1 - v^2/c^2})^2 = v^2 + u_0^2 - \frac{u_0^2 v^2}{c^2}. \quad (2.42)$$

Por lo tanto

$$1 - \frac{u_B^2}{c^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{u_0^2}{c^2} + \frac{u_0^2 v^2}{c^4} = (1 - v^2/c^2)(1 - u_0^2/c^2) \quad (2.43)$$

y

$$\sqrt{1 - u_B^2/c^2} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{1 - u_0^2/c^2}. \quad (2.44)$$

Por ello, la componente  $y$  de la cantidad de movimiento relativista de la bola y vista en  $S$  es

$$p_{B_y} = \frac{mu_{B_y}}{\sqrt{1 - u_B^2/c^2}} = \frac{-mu_0/\gamma}{(1/\gamma)\sqrt{1 - u_0^2/c^2}} = \frac{-mu_0}{\sqrt{1 - u_0^2/c^2}}. \quad (2.45)$$

Se tiene que  $p_{B_y} = -p_{A_y}$ , luego la componente  $y$  de la cantidad de movimiento total de las dos bolas es 0. Si se invierte la velocidad de cada bola en el choque, la cantidad de movimiento total seguirá siendo 0, y por tanto, se conservará la cantidad de movimiento. De esta forma se obtiene una magnitud que sí se conserva en sistemas de partículas aislados donde actúa una fuerza neta de valor 0. La cantidad de movimiento relativista de una partícula tiene así dos componentes, una que es su velocidad, que es constante ya que no actúan fuerzas, y otra que es la que corresponde a la masa, que no es constante, si no que depende de la velocidad de la partícula. Es por eso que se define la masa relativista de una partícula como

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (2.46)$$

donde  $m_0$  es la masa en reposo de la partícula. Está claro que la masa relativista aumenta a medida que  $u$  se acerca a  $c$ .

## 2.8 Energía relativista

En mecánica newtoniana se define la energía cinética,  $E_c$ , de una partícula como el trabajo realizado por una fuerza externa para aumentar su velocidad desde cero hasta algún valor  $u$ . Según el teorema de las Fuerzas Vivas, considerando el movimiento de la partícula en una sola dirección (eje  $x$ ), se tiene:  $F dx = \Delta E_c$ , por lo tanto:

$$E_c = \int_0^l F dx. \quad (2.47)$$

en la cual  $F dx$  es el trabajo realizado por la fuerza  $F$  al desplazar en  $dx$  a la partícula y  $l$  es la longitud recorrida por la partícula. Usando la ecuación (2.46) para la masa relativista obtenemos

$$E_c = \int_0^l \frac{d}{dt}(mu) \cdot dx = \int_0^u d(mu) \cdot \frac{dx}{dt} = \int_0^u (mdu + udm)u = \int_0^u (mudu + u^2 dm). \quad (2.48)$$

Reordenando la expresión de la masa relativista, esta puede escribirse como

$$m^2 c^2 - m^2 u^2 = m_0^2 c^2. \quad (2.49)$$

Tomando diferenciales obtenemos

$$2mc^2 dm - m^2 2u du - u^2 2m dm = 0, \quad (2.50)$$

$$c^2 dm = mu du + u^2 dm. \quad (2.51)$$

Volviendo a la ecuación de la energía cinética

$$E_c = \int_{m_0}^m c^2 \cdot dm = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 \right). \quad (2.52)$$

Como vemos, hay un factor en la energía cinética,  $m_0c^2$ , que no depende de la velocidad de la partícula. Esta cantidad se define como **energía de reposo** y profundizaremos en ella más adelante. La **energía total** de la partícula es igual a su energía en reposo más su energía cinética

$$E = m_0c^2 + E_c = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (2.53)$$

Veamos como esta expresión de la energía cinética se reduce a la expresión clásica cuando  $u$  es mucho menor que  $c$ . Desarrollando el binomio de la ecuación de la energía total, se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \frac{1/2(1/2 + 1)}{2} \left( \frac{u^2}{c^2} \right)^2 + \dots \quad (2.54)$$

Cuando  $u$  es mucho menor que  $c$ , lo anterior puede simplificarse como

$$\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2}. \quad (2.55)$$

Así,

$$E_c = m_0c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 \right) \quad (2.56)$$

$$= m_0c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} - 1 \right) \quad (2.57)$$

$$= \frac{1}{2} m_0 u^2. \quad (2.58)$$

Notar que, a medida que  $u$  tiende a  $c$ , la energía cinética tiende a infinito, es decir, se necesita una energía infinita para aumentar la velocidad de una partícula hasta la velocidad de la luz, o, visto de otra forma, según la ecuación de la masa relativista, esta aumentaría infinitamente a dicha velocidad.

Al igual que ocurría con la cantidad definida en la ecuación (2.11) podemos definir otra cantidad que es invariante ante cambios de sistemas de referencia [6]

$$c^2 m^2 - (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = c^2 m^2 - p^2 = c^2 m_0^2. \quad (2.59)$$

Multiplicando la igualdad anterior por  $c^2$  se tiene

$$E^2 - p^2 c^2 = c^4 m_0^2, \quad (2.60)$$

y sustituyendo las ecuaciones (2.40 y (2.53) obtenemos el resultado directamente

$$\frac{m_0^2 c^4}{1 - v^2/c^2} - \frac{m_0^2 v^2 c^2}{1 - v^2/c^2} = \frac{m_0^2 (c^4 - v^2 c^2)}{1 - v^2/c^2} = m_0^2 c^4. \quad (2.61)$$

### 2.8.1 Energía en reposo

Para entender mejor la energía en reposo, consideremos una **colisión inelástica** de dos cuerpos idénticos de masa en reposo  $m_0$ , cada uno con energía cinética  $E_c$ , que chocan y se quedan unidos formando un nuevo cuerpo  $C$  de masa en reposo  $M_0$ , visto por un observador particular  $S'$  (Figura 2.5). Como las velocidades de ambos cuerpos se anulan al sumarse, ya que son del mismo valor  $u'$  pero en sentidos contrarios en la dirección  $x'$ , se tiene que el nuevo cuerpo estará en reposo en  $S'$ , según la conservación de la cantidad de movimiento.

Consideremos el punto de vista de un observador  $S$  que se mueve a velocidad  $v = u'$  en el sentido negativo del eje  $x'$ , es decir, un sistema de referencia situado en la bola  $A$  (Figura 2.6). Para él, el cuerpo combinado  $C$  se moverá a velocidad  $v$  hacia la derecha.

Apliquemos la conservación de la cantidad de movimiento de la colisión según lo ve este segundo observador

$$m_A u_A + m_B u_B = m_C u_C. \quad (2.62)$$

La velocidad de  $A$  será 0, ya que  $S$  se mueve en el mismo sentido y a la misma velocidad que el observador que lo mide. La velocidad de  $B$  será

$$u_B = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} = 2u'/(1 + u'^2/c^2). \quad (2.63)$$

Calculemos ahora la masa relativista de  $B$ :

$$m_B = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u_B^2/c^2}} = \frac{m_0(1 + u'^2/c^2)}{1 - u'^2/c^2}, \quad (2.64)$$

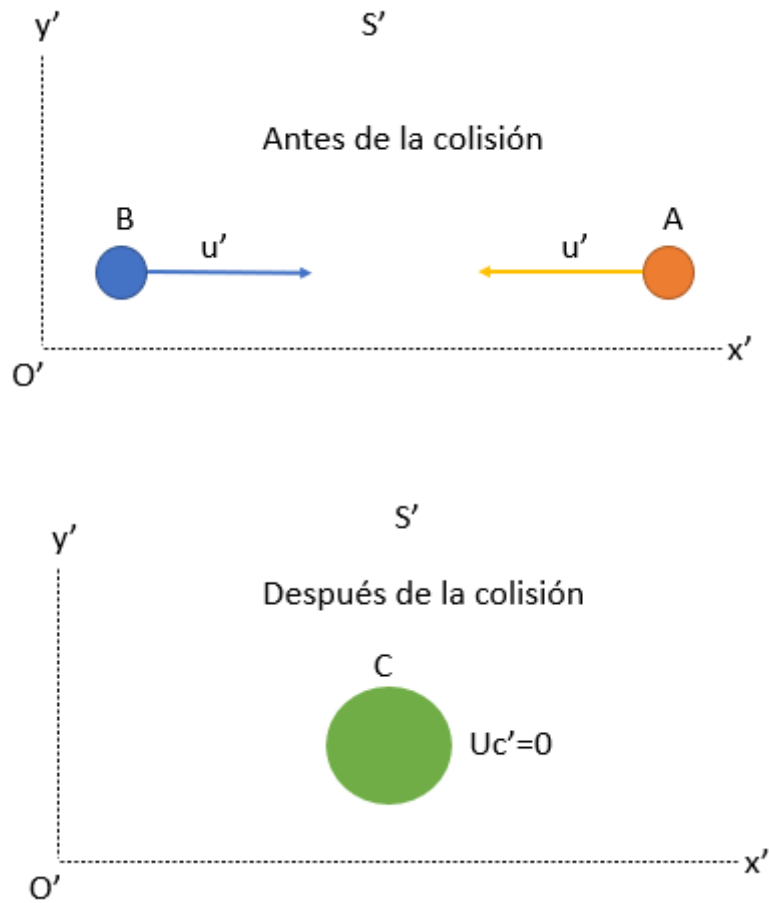


Figura 2.5: Colisión inelástica vista por el observador  $S'$ .

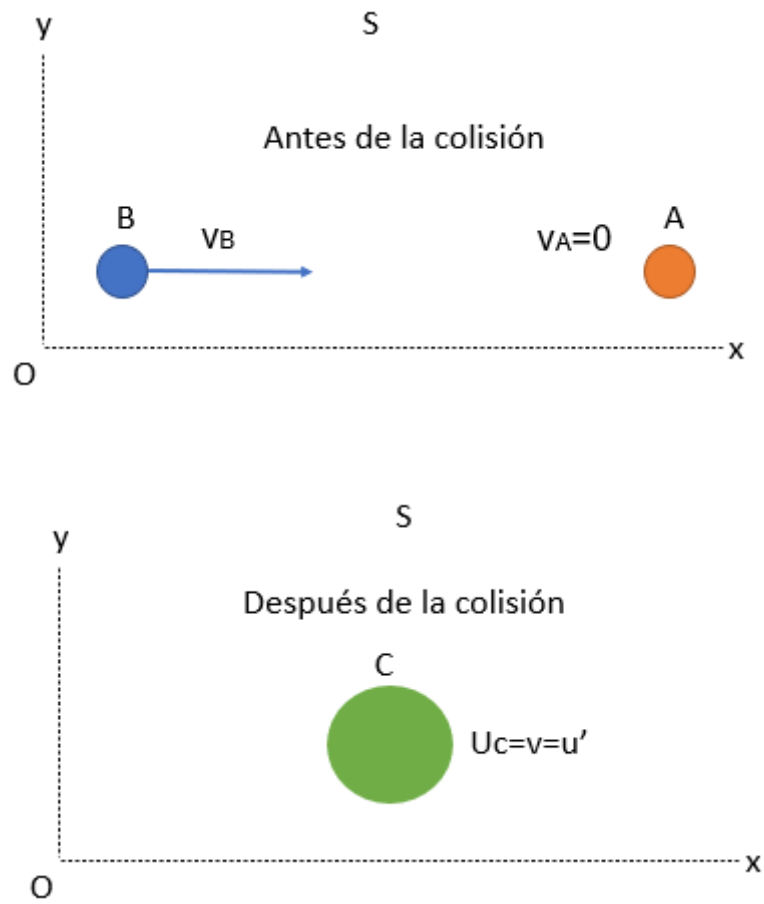


Figura 2.6: Colisión inelástica vista por el observador S.



y la de  $C$  será

$$m_C = \frac{M_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.65)$$

Como  $u_C = v = u'$  tenemos que

$$\frac{m_0(1 + u'^2/c^2)}{1 - u'^2/c^2} u_B + 0 = \frac{M_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} v, \quad (2.66)$$

$$\frac{m_0(1 + u'^2/c^2)}{(1 - u'^2/c^2)} \frac{2u'}{(1 + u'^2/c^2)} = \frac{M_0 u'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}, \quad (2.67)$$

$$M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}. \quad (2.68)$$

La nueva masa es mayor que  $2m_0$  con una diferencia de

$$M_0 - 2m_0 = 2m_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} - 1 \right). \quad (2.69)$$

Como la masa en reposo tras el choque es la misma para ambos observadores, esta cantidad también será la que mida  $S'$  y observamos también que su energía asociada (que se obtiene al multiplicarla por  $c^2$ ) coincide justo con la cantidad total de energía cinética en  $S'$  antes del choque, la cual se calcula:

$$E_{c_A} + E_{c_B} = 2E_c = 2m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} - 1 \right). \quad (2.70)$$

Tras el choque, toda la energía cinética se ha transformado en masa en reposo, es decir, ambas son equivalentes. Por lo tanto, aunque en una colisión inelástica la energía cinética no se conserva, sí se conserva la *energía total*, que incluye a la masa en reposo y a la energía cinética.

Si volvemos a observar las ecuaciones para una sola partícula, cuya energía total es  $E = mc^2$  donde  $m$  es la masa relativista, vemos que un cambio en la energía cinética origina un cambio proporcional en  $m$ , ya que:  $dm/dt = (1/c^2)(dE_c/dt)$ , es decir,  $dE_c/dt = c^2 dm/dt$ . Llegamos así a la misma conclusión que en la colisión inelástica: la masa y la energía son equivalentes, difiriendo sus unidades en un factor  $c^2$ .

Si se considera a la energía cinética como la energía externa de un cuerpo, la masa en reposo puede considerarse como la energía interna, y consiste mayoritariamente en

la energía total de la masa en reposo proporcionada por las partículas "fundamentales", a quienes se considera como fuente primaria de energía interna. Esta energía puede cambiar, como por ejemplo en los procesos de aniquilamiento electrón-positrón. En estos procesos, un electrón y un positrón son atraídos debido a sus cargas eléctricas opuestas, y al encontrarse, se aniquilan mutuamente, de forma que sus masas en reposo se transforman en energía de igual valor emitida en forma de radiación gamma, es decir, en forma de fotones de alta energía, ya que estas partículas tienen masa en reposo nula.

### 2.8.2 Transformaciones de la cantidad de movimiento, la energía y la masa

Veamos ahora cómo se transforma la cantidad de movimiento, la energía y la masa medidas en un sistema  $S$ , a otro sistema  $S'$  que se mueve en la dirección del eje  $x$  a velocidad  $v$  con respecto a  $S$ . Vamos a utilizar la siguiente igualdad fácil de verificar:

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{1+u'_x v/c^2}{\sqrt{1-u'^2/c^2}\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (2.71)$$

Las cantidad de movimiento y la energía en  $S$  y en  $S'$  son:

$$p = \frac{m_0 u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad p' = \frac{m_0 u'}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}, \quad (2.72)$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad E' = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}. \quad (2.73)$$

Sustituyendo la ecuación (2.34) y utilizando la igualdad (2.71), nos queda

$$p_x = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left( p'_x + \frac{m_0 v}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} \right). \quad (2.74)$$

Teniendo en cuenta que  $E' = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}$ , nos queda

$$p_x = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left( p'_x + \frac{E' v}{c^2} \right). \quad (2.75)$$

De la misma forma, se obtiene

$$p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad E = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(E' + vp'_x). \quad (2.76)$$

Y las transformaciones inversas son:

$$p'_x = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left( p_x - \frac{Ev}{c^2} \right), \quad (2.77)$$

$$p'_y = p_y, \quad (2.78)$$

$$p'_z = p_z, \quad (2.79)$$

$$E' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(E - vp_x). \quad (2.80)$$

Si recordamos las ecuaciones (2.7) y (2.8), podemos ver que  $\vec{p}$  y  $E$  se transforman de la misma manera que la posición y el tiempo.

Para transformar la masa, utilizamos de nuevo la igualdad 2.71 y directamente obtenemos

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{m_0(1+u'_x v/c^2)}{\sqrt{1-u'^2/c^2}\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad (2.81)$$

$$m = \frac{m'(1+u'_x v/c^2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (2.82)$$

### 2.8.3 Transformaciones de la fuerza

Finalmente, transformaremos la fuerza. En el sistema  $S$  se tiene

$$F_x = \frac{d}{dt}(mu_x), \quad F_y = \frac{d}{dt}(mu_y), \quad F_z = \frac{d}{dt}(mu_z).$$

Sustituyendo la transformación de la masa  $m$  en estas ecuaciones, se tiene

$$F_x = F'_x + \frac{u'_y v}{(c^2 + u'_x v)} F'_y + \frac{u'_z v}{(c^2 + u'_x v)} F'_z, \quad (2.83)$$

$$F_y = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+u'_x v/c^2} F'_y, \quad (2.84)$$

$$F_z = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+u'_x v/c^2} F'_z. \quad (2.85)$$

y sus inversas

$$F'_x = F_x - \frac{u_y v}{(c^2 - u_x v)} F_y - \frac{u_z v}{(c^2 - u_x v)} F_z, \quad (2.86)$$

$$F'_y = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - u_x v/c^2} F_y, \quad (2.87)$$

$$F'_z = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - u_x v/c^2} F_z. \quad (2.88)$$

Utilizando el producto escalar  $\langle \vec{u}' | \vec{F}' \rangle$ , podemos escribirlas como sigue

$$F'_x = \frac{F'_x + (v/c^2) \langle \vec{u}' | \vec{F}' \rangle}{1 + u'_x v/c^2}, \quad (2.89)$$

$$F'_y = \frac{F'_y}{\gamma(1 + u'_x v/c^2)}, \quad (2.90)$$

$$F'_z = \frac{F'_z}{\gamma(1 - u'_x v/c^2)}. \quad (2.91)$$

## 2.9 Electromagnetismo

En esta sección veremos como efectivamente, el electromagnetismo clásico es compatible con la teoría especial de la relatividad. Las ecuaciones de Maxwell son invariantes ante una transformación de Lorentz y no requieren ser modificadas. De hecho, como ya se ha comentado, Lorentz consiguió originalmente sus ecuaciones imponiendo la invarianza de las ecuaciones de Maxwell.

Pensemos en una carga en movimiento  $q_s$ , llamada carga fuente, en un sistema inercial  $S$ , la cual induce un campo magnético  $\vec{B}$  y una carga de prueba  $q_t$  que se desplaza a velocidad  $\vec{u}$  respecto a  $S$ . Sobre  $q_t$  actúa una fuerza magnética:  $\vec{F}_m = q_t(\vec{u} \times \vec{B})$ . Lo mismo ocurriría si consideramos un sistema de referencia que se mueve con la carga fuente. En ese caso no se crearía ningún campo eléctrico y la fuerza magnética sobre  $q_t$  sería nula. Vemos con este sencillo ejemplo que las fuerzas magnéticas dependen del sistema de referencia en el cual se midan.

Nuestro objetivo ahora será hallar las ecuaciones de transformación de un campo magnético  $\vec{B}$  de un sistema a otro, así como las de un campo eléctrico  $\vec{E}$ , y encontraremos que ambos son interdependientes y se unen en un mismo concepto: el campo electromagnético.

Para comenzar, veamos como se transforman las componentes de las densidades de corriente y de carga eléctrica. Consideremos un cubo que contiene  $N$  electrones, cuyas aristas tienen una longitud en reposo  $l_0$ . La densidad de carga del cubo es  $\rho_0 = Ne/l_0^3$ , donde  $e$  representa la carga de un electrón. En el sistema de referencia del cubo las cargas están en reposo y la densidad de corriente será  $j_0 = 0$ . Consideremos un sistema  $S$  en el cual el cubo se mueve con velocidad  $u$  en dirección de un borde del cubo, el cual tendrá una longitud de  $l_0\sqrt{1-u^2/c^2}$  en  $S$ , y la densidad de carga será  $\rho = Ne/l_0^3\sqrt{1-u^2/c^2}$ , es decir,

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \quad (2.92)$$

En este sistema, la densidad de corriente será

$$\vec{j} = \frac{\rho_0\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \quad (2.93)$$

Podemos reescribir las ecuaciones anteriores de las densidades de carga y corriente, respectivamente, como

$$\rho = \frac{\rho_0}{m_0}m, \quad (2.94)$$

$$\vec{j} = \frac{\rho_0}{m_0}\vec{p}. \quad (2.95)$$

Sea ahora  $S'$  un sistema que se mueve respecto a  $S$  con velocidad  $v$ . Sustituimos primero la ecuación (2.82) de transformación de la masa en la ecuación (2.94) y despejamos la  $\rho' = \frac{\rho_0}{m_0}m'$ . Luego, sustituimos las ecuaciones (2.75) y (2.76) de transformación de la cantidad de movimiento en la ecuación (2.95) y despejamos componente por componente la densidad de corriente, obteniendo

$$j'_x = \frac{j_x - \rho v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad j'_y = j_y, \quad (2.96)$$

$$j'_z = j_z, \quad \rho' = \frac{\rho - vj_x/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad (2.97)$$

y sus inversas

$$j_x = \frac{j'_x + \rho'v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad j_y = j'_y, \quad (2.98)$$

$$j_z = j'_z, \quad \rho = \frac{\rho' + vj'_x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.99)$$

Con estas ecuaciones de transformación, pensemos en un conductor en el que los electrones libres se mueven hacia la derecha con velocidad  $u$  en un sistema de referencia  $S$ . El número de electrones por unidad de volumen es  $n$ , al igual que el de iones positivos, luego, la carga neta en  $S$  es 0. La densidad de carga negativa en  $S$  es  $\rho^- = -ne$ , donde  $e$  es la magnitud de una carga electrónica y la positiva  $\rho^+ = ne$ , luego  $\rho = 0$ . Tenemos entonces que no hay campo eléctrico. La densidad de corriente es  $j_x = j_x^- + j_x^+ = j_x^- = \rho^-u$ , es decir, hay un campo magnético  $\vec{B}$ . En un sistema  $S'$  que se mueve a velocidad  $v$ , el conductor no será eléctricamente neutro sino que

$$\rho^{-'} = \frac{\rho^- - vj_x^-/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (2.100)$$

$$\rho^{+'} = \frac{\rho^+ - vj_x^+/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.101)$$

Luego

$$\rho^{-'} = \rho^- \frac{(1 - vu/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (2.102)$$

$$\rho^{+'} = \frac{\rho^+}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.103)$$

La densidad de carga neta será entonces

$$\rho' = \frac{nevu/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > 0. \quad (2.104)$$

El conductor en  $S'$  está cargado positivamente, luego en  $S'$  existe un campo eléctrico y uno magnético, ya que en este sistema los electrones también se están moviendo.

Este ejemplo nos muestra que el campo electromagnético es puramente magnético o puramente eléctrico, o eléctrico y magnético, dependiendo del sistema de referencia. En  $S'$  los iones positivos se mueven y la separación entre ellos está contraída en comparación con la separación en reposo, aumentando la densidad de carga positiva, al igual que la separación de los electrones puede aumentar y por tanto la densidad de carga negativa podría disminuir.

### 2.9.1 Transformación de los campos eléctrico y magnético

Una vez hemos visto cómo los campos eléctrico y magnético están interrelacionados, pasemos a demostrar las ecuaciones de transformación de estos de un sistema de referencia en otro.

La fuerza electromagnética (o de Lorentz) sobre una partícula de carga  $q$  con velocidad  $\vec{v}$  a lo largo del eje  $x$  de un sistema  $S$ , en un punto y en un instante en que el campo eléctrico es  $\vec{E}$  y el campo magnético es  $\vec{B}$ , está dada por:  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ . Como sabemos, la velocidad depende del sistema de referencia, por lo que la fuerza electromagnética también lo hará. Consideremos el sistema de referencia  $S'$  situado sobre la partícula, en el cual la fuerza electromagnética sobre esta será:  $\vec{F}' = q\vec{E}'$ . Vamos a aplicar las ecuaciones (2.86) de transformación de la fuerza deducidas anteriormente.

En primer lugar, se tiene que  $F'_x = F_x$ . Ahora bien:

$$(\vec{v} \times \vec{B})_x = v_y B_z - v_z B_y = 0, \quad (2.105)$$

ya que  $v_x = v$ ,  $v_y = 0$  y  $v_z = 0$ . Entonces,

$$F_x = q[E_x + (\vec{v} \times \vec{B})_x] = qE_x \quad (2.106)$$

y  $F'_x = qE'_x$ . Luego,

$$E'_x = E_x. \quad (2.107)$$

Para la componente  $y$ , se tiene  $F_y = F'_y/\gamma$ . Como

$$F_y = q[E_y + (\vec{v} \times \vec{B})_y] = q(E_y + v_z B_x - v_x B_z) = q[E_y + vB_z] \quad (2.108)$$

y  $F'_y = qE'_y$ , entonces,

$$E'_y = \gamma(E_y - vB_z). \quad (2.109)$$

Similarmente,

$$E'_z = \gamma(E_z + vB_y). \quad (2.110)$$

Las relaciones inversas vienen dadas por:

$$E_x = E'_x, \quad (2.111)$$

$$E_y = \gamma(E'_y + vB'_z), \quad (2.112)$$

$$E_z = \gamma(E'_z - vB'_y). \quad (2.113)$$

Podemos generalizar estas ecuaciones considerando que la dirección del eje  $x$  es simplemente la dirección paralela a la velocidad de  $S'$  con respecto a  $S$ , y el resto son las perpendiculares a esta:

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}, \quad (2.114)$$

$$E'_{\perp} = \gamma[E_{\perp} + (\vec{v} \times \vec{B})_{\perp}]. \quad (2.115)$$

Para la transformación de  $\vec{B}$ , se considera un sistema de referencia  $S'$  que se desplace respecto a otro sistema  $S$  a velocidad  $v$ , a lo largo del eje común  $x - x'$  y una partícula de carga  $q$  que se desplaza en  $S'$  en la dirección  $y'$  a velocidad  $u' = u'_y$ . En  $S'$ , la fuerza que actúa sobre  $q$  será:  $\vec{F}' = q(\vec{E}' + \vec{u}' \times \vec{B}')$ , cuyas componentes son:

$$F'_x = q(E'_x + u'_y B'_z), \quad F'_y = qE'_y \quad \text{y} \quad F'_z = q(E'_z - u'_y B'_x). \quad (2.116)$$

En  $S$ , la fuerza será  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$ , donde  $\vec{u}$  es la velocidad de la carga en  $S$ , que se calcula con las ecuaciones de transformación de la velocidad (2.34) y (2.35) ya conocidas:

$$u_x = v, \quad u_y = u'_y / \gamma \quad \text{y} \quad u_z = 0. \quad (2.117)$$

Por lo que

$$F_x = q(E_x + u_y B_z), \quad F_y = q(E_y - v B_z) \quad \text{y} \quad F_z = q(E_z + v B_y - u_y B_x). \quad (2.118)$$

Sustituyendo al igual que antes, en las ecuaciones de transformación de la fuerza, y utilizando las transformaciones de las componentes de  $\vec{E}$ , llegamos a

$$B'_x = B_x, \quad (2.119)$$

$$B'_y = \gamma(B_y + \frac{v}{c^2} E_z), \quad (2.120)$$

$$B'_z = \gamma(B_z - \frac{v}{c^2} E_y). \quad (2.121)$$

Y sus inversas son:

$$B_x = B'_x, \quad (2.122)$$

$$B_y = \gamma(B'_y + \frac{v}{c^2} E'_z), \quad (2.123)$$

$$B_z = \gamma(B'_z - \frac{v}{c^2} E'_y). \quad (2.124)$$



Generalizando las direcciones:

$$B'_{\parallel} = B_{\parallel}, \quad (2.125)$$

$$B'_{\perp} = \gamma \left[ B_{\perp} - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \vec{E})_{\perp} \right]. \quad (2.126)$$

Hemos finalizado así la transformación completa relativista del campo electromagnético.

## 2.9.2 Invarianza de las ecuaciones de Maxwell

Vamos a comprobar ahora que si las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo las transformaciones de Lorentz, se obtienen las ecuaciones que hemos deducido en la sección (2.9) para transformar  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ . Para ello usaremos las referencias [1] y [7].

Las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial son:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.127)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.128)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \quad (2.129)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (2.130)$$

Donde  $\mu_0$  es la constante de permeabilidad magnética en el vacío y  $\epsilon_0$  es la constante de permitividad eléctrica en el vacío.

Restringiremos en primer lugar el razonamiento por simplicidad a las ecuaciones (2.128) y (2.130), que solo dependen de  $\vec{B}$  y  $\vec{E}$ .

Escribiendo las ecuaciones (2.128) y (2.130) por componentes tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y + \frac{\partial}{\partial z} B_z = 0, \quad (2.131)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad (2.132)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} E_x - \frac{\partial}{\partial x} E_z = -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad (2.133)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \quad (2.134)$$

Imponemos que tengan la misma forma en  $S'$ , que se desplaza a velocidad  $v$  respecto a  $S$  a lo largo del eje  $x - x'$ . Para ello hemos de calcular la diferenciación parcial respecto a las variables  $x, y, z$  y  $t$  en función de la diferenciación parcial respecto al conjunto de variables  $x', y', z'$  y  $t'$ . Tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'}. \quad (2.135)$$

Y similarmente se obtienen  $\frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z}$  y  $\frac{\partial}{\partial t}$ .

Teniendo las transformaciones de Lorentz, ecuaciones (2.7) y (2.8) tenemos que

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \gamma, \quad \frac{\partial y'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{\gamma v}{c^2}. \quad (2.136)$$

Obtenemos entonces que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \gamma \left( \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right), \quad (2.137)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}, \quad (2.138)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}, \quad (2.139)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \gamma \left( \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right). \quad (2.140)$$

Ahora podemos sustituir en las ecuaciones (2.131)-(2.134). Por ejemplo, en la ecuación (2.133), quedaría

$$\frac{\partial}{\partial z'} E_x - \frac{\partial}{\partial x'} [\gamma(E_z + vB_y)] = -\frac{\partial}{\partial t'} \left[ \gamma \left( B_y + \frac{vE_z}{c^2} \right) \right]. \quad (2.141)$$

Tomando

$$E'_x = E_x, \quad (2.142)$$

$$E'_z = \gamma(E_z + vB_y), \quad (2.143)$$

$$B'_y = \gamma \left( B_y + \frac{vE_z}{c^2} \right), \quad (2.144)$$

conseguiamos que dicha ecuación sea invariante ante el cambio de sistema de referencia de  $S$  a  $S'$ . Haciendo lo mismo para la ecuación (2.134), se obtiene

$$E'_x = E_x, \quad (2.145)$$

$$E'_y = \gamma(E_y - vB_z), \quad (2.146)$$

$$B'_z = \gamma \left( B_z - \frac{vE_y}{c^2} \right). \quad (2.147)$$

Similarmente, utilizando ahora las ecuaciones (2.131) y (2.132), obtenemos

$$B'_x = B_x. \quad (2.148)$$

Como predecíamos, las ecuaciones obtenidas son idénticas a las transformaciones para las componentes del campo electromagnético desarrolladas en la sección anterior.

Comprobemos ahora la invarianza de las ecuaciones (2.127) y (2.129). Primero, las escribimos en por componentes:

$$\rho = \epsilon_0 \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right), \quad (2.149)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \rho u_x + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad (2.150)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \rho u_y + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad (2.151)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 \rho u_z + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t}. \quad (2.152)$$

Donde  $(u_x, u_y, u_z)$  son las componentes de la velocidad de la carga. Para que estas ecuaciones sean válidas es necesario que satisfagan la siguiente ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (2.153)$$

Comenzamos por la ecuación (2.149). Sustituyendo las componentes de  $\vec{E}$  por las que tendría  $\vec{E}'$  según las ecuaciones (2.107), (2.109), (2.110) y usando (2.137), se tiene

$$\rho' = \gamma \left[ \rho - \epsilon_0 v \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \right) \right], \quad (2.154)$$

de donde, usando las ecuaciones (2.149) y (2.150) se obtiene

$$\rho' = \gamma \left( \rho - \frac{v}{c^2} \rho u_x \right). \quad (2.155)$$

Ahora, usando las ecuaciones de transformación de la velocidad, ecuaciones (2.34) y (2.35) y sus inversas, se tiene

$$\rho = \gamma \left( \rho' + \frac{v}{c^2} \rho' u'_x \right), \quad (2.156)$$

que tiene la misma expresión que obtuvimos en la ecuación (2.99).

Ahora, la invarianza de las ecuaciones (2.150)-(2.152) se obtiene fácilmente. Tomamos la ecuación (2.150) y sustituimos las componentes del campo magnético por sus transformadas usando las ecuaciones (2.119)-(2.121), obteniendo

$$\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} = \mu_0 \left( \frac{\rho u_x}{\gamma} - \rho' v \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_x}{\partial t'}, \quad (2.157)$$

y utilizando (2.156) y (2.34) queda

$$\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} = \mu_0 \left[ \gamma \left( \rho - \frac{v}{c^2} \rho u_x \right) \right] u'_x + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_x}{\partial t'}. \quad (2.158)$$

Es decir, se obtiene

$$\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} = \mu_0 \rho' u'_x + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_x}{\partial t'}, \quad (2.159)$$

que tiene la misma forma que la ecuación (2.150). Transformando las ecuaciones restantes, ecuaciones (2.151) y (2.152), de la misma forma se obtienen

$$\frac{\partial B'_x}{\partial z'} - \frac{\partial B'_z}{\partial x'} = \mu_0 \rho' u'_y + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_y}{\partial t'}, \quad (2.160)$$

$$\frac{\partial B'_y}{\partial x'} - \frac{\partial B'_x}{\partial y'} = \mu_0 \rho' u'_z + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_z}{\partial t'} \quad (2.161)$$

De esta forma, comprobamos que las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo las transformaciones de Lorentz de la relatividad especial.

### 3 | Los diagramas de Minkowski

Analizaremos en esta sección los diagramas de Minkowski, apoyándonos en [2], [5], [8] y [6]. Estos diagramas nos proporcionan una herramienta matemática muy útil para comprender las consecuencias de la relatividad especial.

El espacio de Minkowski es un espacio cuatridimensional donde puede representarse cualquier evento. En él, cada evento está caracterizado por sus coordenadas de posición  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y del momento  $t$  en el que ocurre. En el espacio-tiempo de Minkowski en cuatro dimensiones, la ecuación

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 = s^2, \tag{3.1}$$

representa la trayectoria (llamada en el caso bidimensional *línea de mundo*) de una señal de luz esférica emitida desde el origen  $x = y = z = 0$  en el instante  $t = 0$ . En cada momento la señal consiste en una esfera de radio  $ct$ . Consideraremos en adelante por simplicidad el caso bidimensional.

La dilatación del tiempo y la relatividad de la simultaneidad vistas anteriormente, pueden visualizarse haciendo uso del diagrama de Minkowski. Dicho diagrama es una representación gráfica del espacio-tiempo que solo considera una dimensión espacial  $x$  y el tiempo  $t$ . El eje horizontal corresponde al espacio  $x$ , mientras que el vertical corresponde al tiempo,  $w = ct$ . Utilizamos  $ct$  en lugar de  $t$ , para mantener la consistencia entre la medición del tiempo y la distancia en la geometría del espacio-tiempo. Así, la medida  $1m$  en el eje vertical indica el tiempo que tarda la luz en recorrer un metro según el observador  $O$ .

Las ecuaciones de Lorentz para pasar de un sistema  $S$  a otro  $S'$  que se mueve con

velocidad constante  $v$  respecto al primero, en función de  $w$  son:

$$x' = \frac{x - (v/c)w}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (3.2)$$

$$x = \frac{x' + (v/c)w'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (3.3)$$

$$w' = \frac{w - (v/c)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (3.4)$$

$$w = \frac{w' + (v/c)x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.5)$$

Comenzamos trazando los ejes  $x$  y  $w$  del sistema  $S$ , ortogonales entre sí. Para representar el movimiento de una partícula en este sistema, se traza una curva llamada *línea de mundo*. Las líneas de mundo de la luz son las rectas  $ct = x$  y  $ct = -x$ , que forman un ángulo de  $45^\circ$  con el eje del tiempo, como vemos en la Figura 3.1.

La tangente a la línea de mundo de cualquier objeto, está dada por:  $dx/dw = \frac{1}{c}(dx/dt)$  y está inclinada respecto al eje del tiempo en un ángulo de  $\phi = \text{arctg}(dx/dw) = \text{arctg}(u/c)$  donde  $u$  es la velocidad del objeto. Este ángulo  $\phi$  es siempre menor a  $45^\circ$ , ya que de lo contrario significaría que el objeto tiene velocidad igual o superior a la de la luz en ese punto.

Vamos a trazar ahora los ejes  $x'$  y  $w'$ , correspondientes al sistema de referencia  $S'$ . Para trazar el eje  $w'$ , imponemos  $x' = 0$ , obteniendo  $x = (v/c)w$ . De la misma forma, el eje  $x'$  se obtiene imponiendo  $w' = 0$ . Tenemos en ese caso la recta  $w = (v/c)x$ . Observamos que el ángulo entre los ejes espaciales  $x$  y  $x'$  es el mismo que entre los ejes temporales,  $w$  y  $w'$ , como puede verse en la Figura 3.2.

Procedemos ahora a la calibración de los ejes. Para ello usaremos la cantidad  $x^2 - w^2$ , que como vimos en la ecuación (2.12), es un invariante. Es importante la calibración de los ejes, ya que las distancias entre las marcas de referencia de los ejes de cada observador no miden lo mismo. Para encontrar la relación entre las marcas de los ejes temporales, notamos que la rama superior de la hipérbola  $x^2 - w^2 = -1$  corta al eje  $w$  en  $w = 1$  y al eje  $w'$  en  $w' = 1$ . Similarmente, la rama derecha de la hipérbola  $x^2 - w^2 = 1$  corta al eje  $x$  en  $x = 1$  y a cualquier eje  $x'$  en  $x' = 1$ , como se muestra en la Figura 3.2. A estas hipérbolas se las llama curvas de calibración.

Como ya sabíamos, el intervalo de unidad de tiempo a lo largo de  $w'$  es mayor que el de la unidad de tiempo a lo largo de  $w$  y el intervalo de longitud a lo largo de

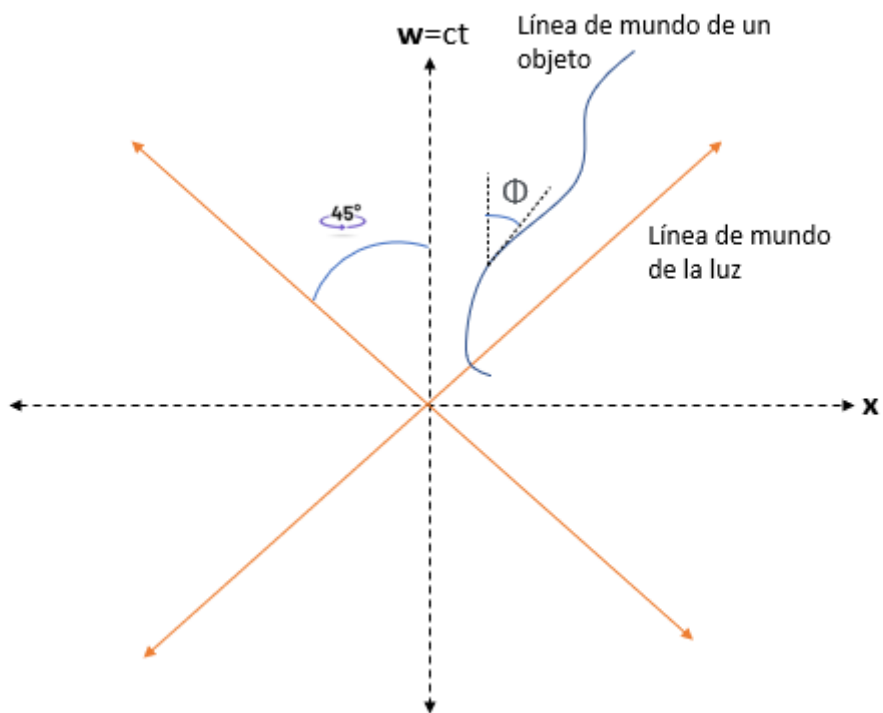


Figura 3.1: Lugar geométrico de los puntos espacio-tiempo del movimiento de una partícula.

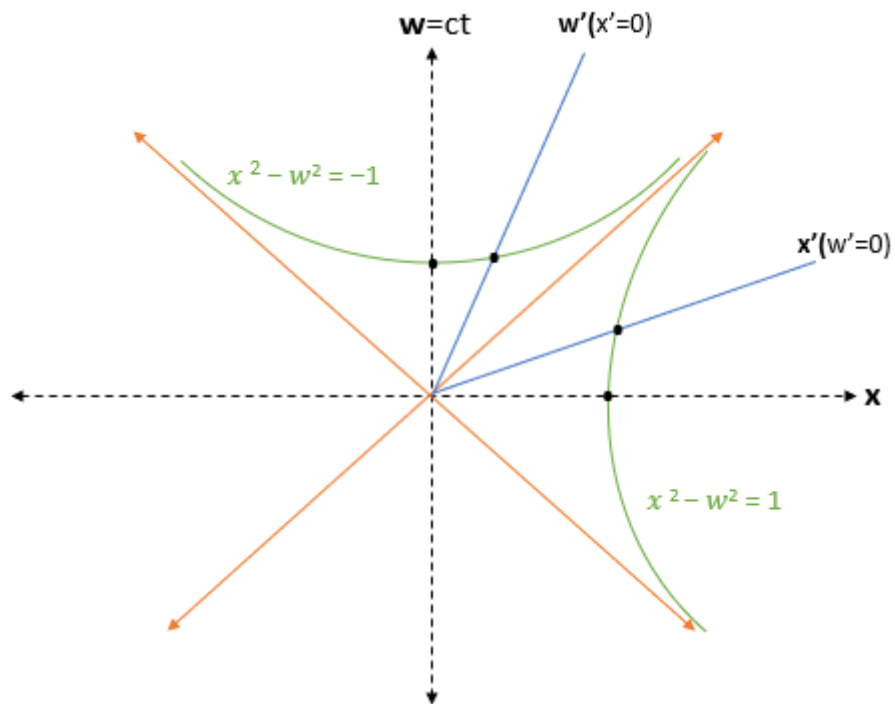


Figura 3.2: Calibrado de los ejes del observador  $O'$ .



$x'$  mayor que el de la unidad de longitud a lo largo de  $x$ .

Supongamos que ocurren dos eventos  $A$  y  $B$  dentro del espacio delimitado por las líneas de mundo de la luz, como se muestra en la Figura 3.3. El orden causal en que ocurren dichos eventos es el mismo para ambos observadores, es decir, están conectados causalmente, está claro que  $A$  ocurre en el presente de ambos observadores, y  $B$ , en el futuro de los mismos. Sin embargo si nos fijamos en dos eventos que están fuera de este espacio, como lo son  $A$  y  $D$ , vemos que en el sistema  $S$ , estos eventos ocurren simultáneamente, pero en  $S'$ , el evento  $A$  ocurrió antes que  $D$ , quedando así visualizada la relatividad de la simultaneidad. Asimismo, los eventos  $A$  y  $C$  invierten su orden al cambiar de observador.

Supongamos ahora un espacio tridimensional para verlo mejor (Figura 3.4). En este caso, en cada instante la señal consiste en una circunferencia de radio  $ct$ . Dibujando las coordenadas de posición  $x(t)$  e  $y(t)$ , la trayectoria de la luz que parte del origen en  $t = 0$  corresponde a un cono con el vértice en el origen, llamado *cono de luz del futuro*. Asimismo, la trayectoria de la luz que llega al origen en  $t = 0$  corresponde a un cono invertido con vértice en el origen, el *cono de luz del pasado*.

Los puntos dentro del cono de luz satisfacen  $s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 > 0$ , mientras que los puntos fuera del cono de luz satisfacen  $s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 < 0$ .

Cualquier evento que ocurra dentro del cono de luz está en contacto causal con el origen de coordenadas, que representa al observador en el presente y situado en  $x = y = 0$ . Es decir, este observador puede recibir señales de eventos que ocurrieron en el cono pasado, así como enviar señales a puntos en el cono futuro, pero nunca podrá percibir ni enviar señales a eventos fuera de los conos.

Veamos qué significa esto para un observador en el universo. Por ejemplo, pensemos en enviar una señal luminosa a una persona que se encuentra en la Luna (suceso), como muestra la Figura 3.5. Esta persona verá aparecer la luz un segundo después de encenderla, en  $t = 1$ , ya que la Luna se encuentra aproximadamente a  $300.000km$ , que es la constante  $c$ , y en ese momento habrá entrado en el cono de luz futuro del suceso. Para que la persona en la Luna recibiese la señal en el presente ( $t = 0$ ) deberíamos haber encendido la luz un segundo antes.

Dos sucesos  $(ct_1, x_1, y_1, z_1)$  y  $(ct_2, x_2, y_2, z_2)$  en el diagrama tridimensional de Minkowski están separados por la cantidad

$$\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2. \quad (3.6)$$

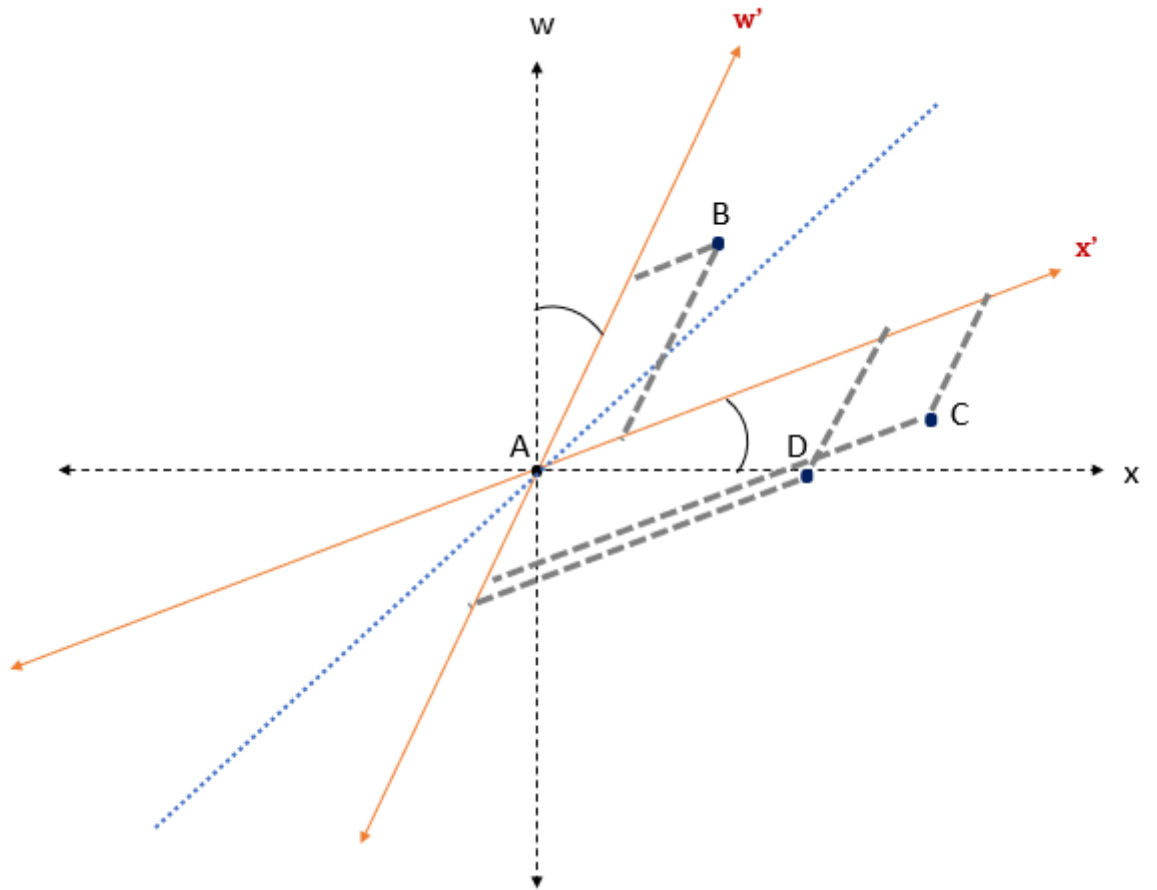


Figura 3.3: Los sucesos  $A$  y  $D$  son simultáneos para  $O$  pero no para  $O'$ . El suceso  $B$  ocurre después que el  $A$ , tanto para  $O$  como para  $O'$ . El suceso  $C$  ocurre después que el  $A$  para  $O$  pero antes que el  $A$  para  $O'$ .

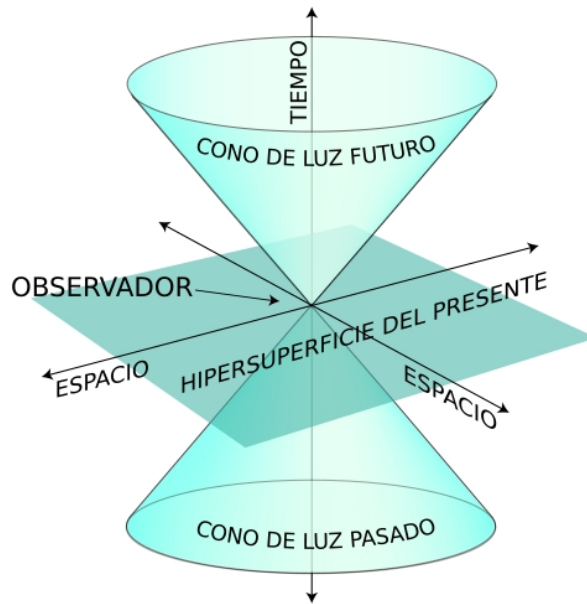


Figura 3.4: Cono de sucesos casualmente conectados con el origen.

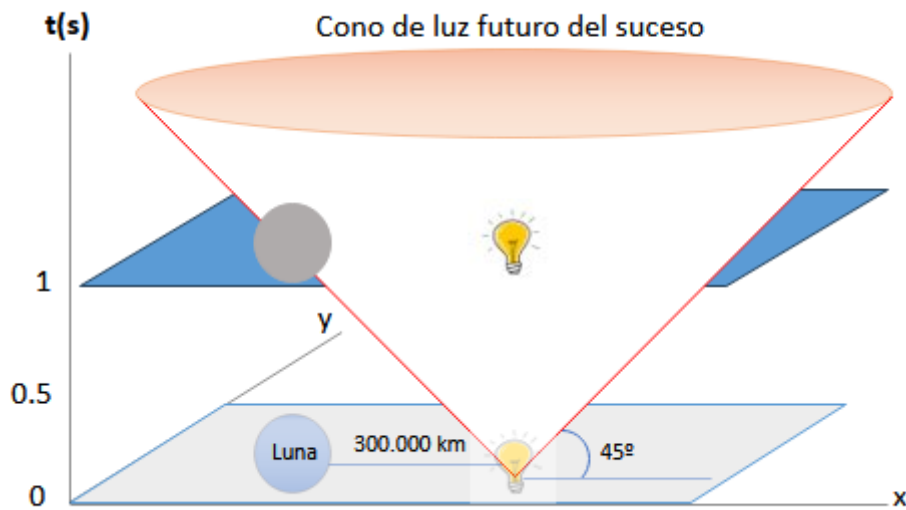


Figura 3.5: Se envía una señal luminosa a la persona en la Luna. Se representa cómo esta entra en el cono de luz futuro del suceso.

Si esta cantidad es mayor que 0, entonces los sucesos se dicen separados por **trayectorias de tipo tiempo**; mientras que si es negativa, están separados por **trayectorias de tipo espacio**. Cualquier punto dentro del cono de luz está en contacto causal con el origen. Sin embargo, ninguna señal de luz llegaría desde el origen a un suceso que esté tan alejado que se salga del cono ( $s^2 < 0$ ); así como ninguna señal de este suceso llegaría al origen.

Los sucesos conectados causalmente son los que ocurren dentro del cono, separados por trayectorias temporales. Aquí, no hay ningún observador inercial que pueda medir sucesos separados temporalmente como sucesos simultáneos. El orden temporal de los sucesos es el mismo para cualquier observador inercial.

Los sucesos no conectados causalmente son los que quedan fuera de este cono, separados por trayectorias espaciales. En este caso, siempre es posible encontrar un observador inercial que pueda medir sucesos separados espacialmente como sucesos simultáneos. Como vemos, el orden temporal de los sucesos depende del observador.

Matemáticamente, el espacio de Minkowski tiene la estructura de un espacio vectorial, por lo que podemos considerar que  $s^2$  es la norma del vector cuatridimensional  $(ct, x, y, z)$ , ya que es invariante, como debe ser una norma. Es decir,

$$s^2 = \|(ct, x, y, z)\|^2. \quad (3.7)$$

Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre en  $\mathbb{R}^n$ , donde la norma euclídea es definida positiva, en el espacio de Minkowski hay vectores con norma nula que no son el vector  $\underline{0}$ , e incluso vectores cuya norma al cuadrado es negativa. Esta norma va asociada a un producto escalar  $s^2 = \langle (ct, x, y, z) | (ct, x, y, z) \rangle$  definido como

$$\langle v | w \rangle = v_t w_t - v_x w_x - v_y w_y - v_z w_z,$$

con  $v, w \in \mathbf{R}^4$ . Así, aunque en la Figura 3.2 se intuya lo contrario, según esta definición, tanto el sistema de referencia  $O$  como el  $O'$  forman bases ortogonales completas del espacio de Minkowski.

### 3.1 Dilatación del tiempo y contracción de las longitudes

En esta sección veremos cómo a partir de los diagramas de Minkowski podemos representar la dilatación temporal y la contracción de la longitud.

Para representar gráficamente la contracción de la longitud, supongamos que tenemos una varilla fija en el sistema  $S$  con sus extremos en  $x = 3$  y  $x = 4$ . La longitud en reposo en  $S$  será entonces la distancia entre los eventos simultáneos  $E1$  y  $E2$ , como muestra la Figura 3.6.

Sin embargo, estos mismos eventos no son simultáneos en el sistema en movimiento  $S'$ , por lo que en él la distancia de la varilla cambia. En  $S'$ , se debe calcular la distancia entre los extremos de la varilla medidos simultáneamente, es decir, estando ambos en el eje  $x'$ . Para ello medimos la separación en  $S'$  de las intersecciones de las líneas de mundo de los eventos con el eje  $x'$ , o cualquier recta paralela al eje  $x'$ , ya que estos puntos de intersecciones representan eventos simultáneos en  $S'$ .

Además, se puede notar que la coordenada  $x'$  de cada punto extremo decrece a medida que transcurre el tiempo, lo cual concuerda con el hecho de que la varilla se desplaza hacia la izquierda en  $S'$ .

Suponemos ahora que la misma varilla se encuentra en reposo en  $S'$ , con puntos extremos en  $x' = 3$  y  $x' = 4$ , como vemos en la Figura 3.7. La longitud en  $S'$  será la intersección de las líneas de mundo de los extremos, que son paralelas al eje  $w'$ , con el eje  $x'$ , es decir, 1 metro. Para medir la distancia en  $S$ , se traza una paralela al eje  $x$  que corte con ambas líneas de mundo y se mide la distancia entre estos puntos de intersección, obteniendo una distancia menor a 1 metro, ya que la varilla se desplaza hacia la derecha.

De manera similar podemos ver representada la dilatación del tiempo en la Figura 3.8. Supongamos que en el punto  $x = 2.3$  colocamos un reloj y que en dicho punto ocurren dos eventos  $T1$  y  $T2$  separados por un intervalo de tiempo de 1 unidad según lo mide el reloj. En  $S'$ , este reloj se mueve hacia la izquierda, por lo que los eventos suceden en distintos lugares. Para medir en  $S'$  el intervalo de tiempo entre estos sucesos, necesitamos por lo tanto dos relojes, situados en la coordenada  $x'$  de cada evento. El tiempo transcurrido entre ambos eventos para  $S'$  será entonces la diferencia entre las intersecciones de las líneas paralelas al eje  $x'$  que pasan por cada evento con el eje  $w'$ . En la figura podemos ver que esta diferencia es mayor a 1. Es decir, desde el punto de vista de  $S'$ , el reloj en movimiento parece marchar más lentamente.

En la misma figura podemos ver también el caso recíproco, en que medimos eventos que ocurren en el mismo lugar en  $S'$ , con una diferencia de 1 unidad de tiempo en  $w'$  entre ellos. Para medir esta diferencia en  $S$ , puesto que en este caso el reloj se desplaza hacia la izquierda, necesitaremos dos relojes, ya que nuestros eventos no son simultáneos aquí. Calculamos la diferencia de tiempo intersecando las líneas paralelas



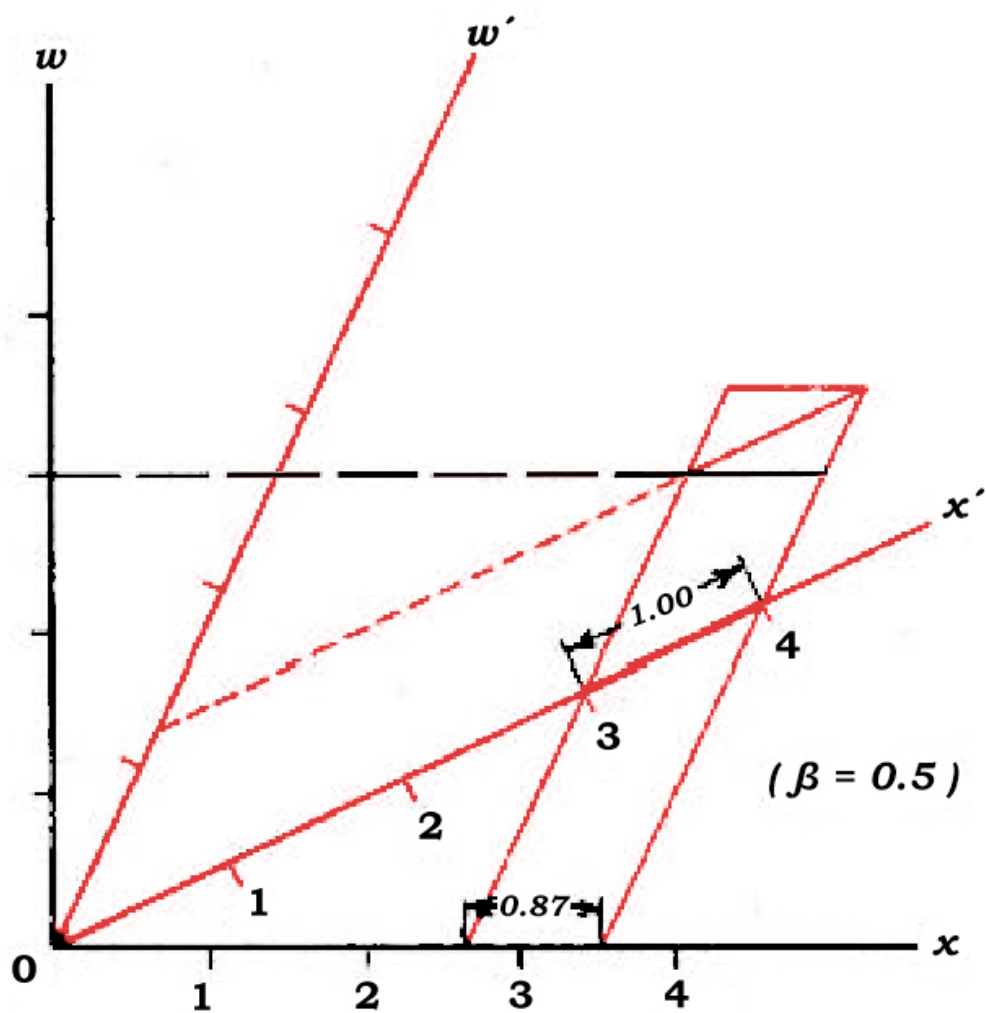


Figura 3.7: Varilla fija en el sistema  $S'$  con extremos en  $x' = 3$  y  $x' = 4$ . La medida de la varilla en  $S$  se calcula intersectando las líneas de mundo de los extremos de la varilla con cualquier recta paralela al eje  $x$ .

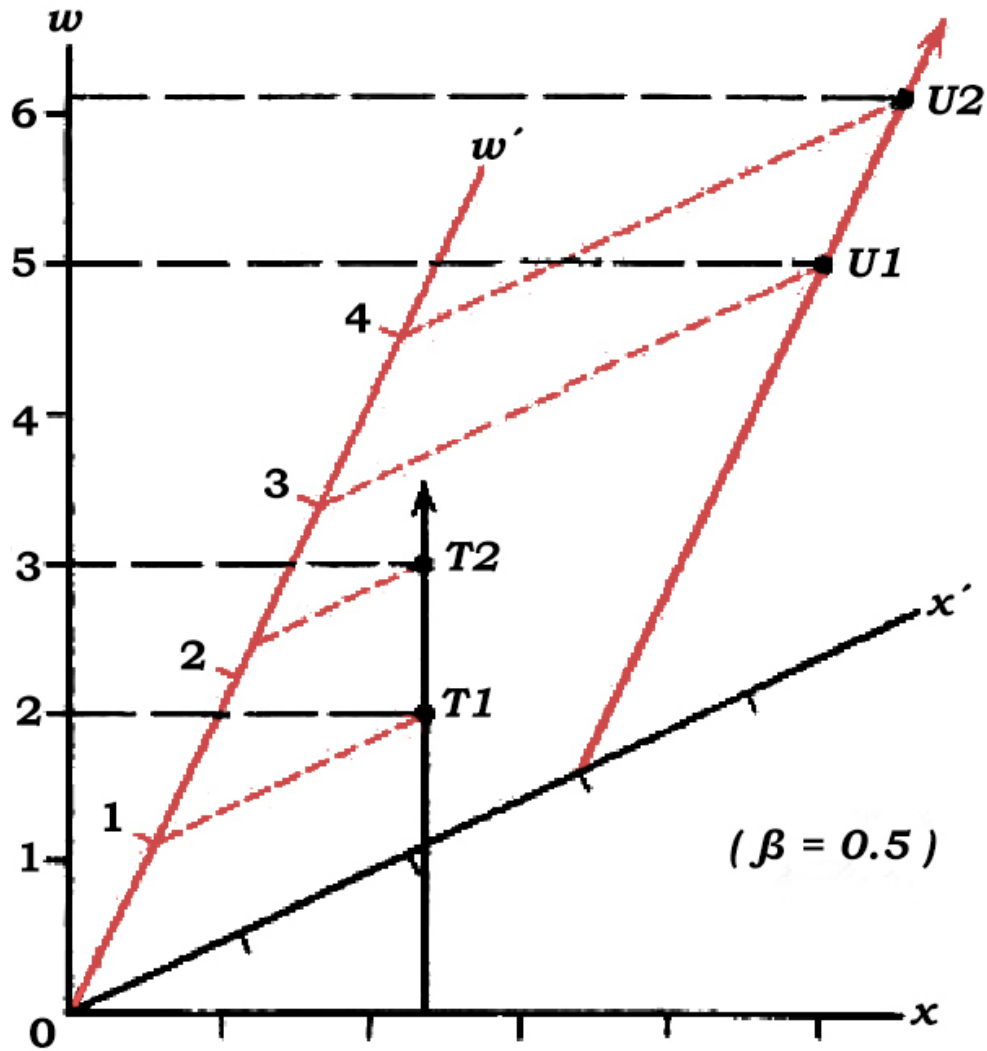


Figura 3.8: Se coloca un reloj en el punto  $x = 2.3$ , donde ocurren dos eventos  $T1$  y  $T2$  separados en un intervalo de tiempo de 1 unidad según lo mide el reloj. En  $S'$  utilizamos dos relojes para medir el anterior intervalo de tiempo, siendo este la distancia entre las intersecciones de las líneas paralelas al eje  $x'$  que pasan por cada evento con el eje  $w'$ . Se coloca otro reloj en  $S'$  en el punto  $x' = 3$  donde ocurren los eventos  $U1$  y  $U2$ , que en el sistema  $S$  están separados por un intervalo de tiempo mayor.



al eje  $x$  que pasan por el punto de cada evento con el eje  $w$  y midiendo la diferencia entre ambos puntos de intersección, obteniendo una diferencia mayor a 1. Al igual que antes, para  $S$ , el reloj que se mueve marcha más lentamente.

## 3.2 Paradoja de los gemelos

Como vimos anteriormente, debido a la dilatación del tiempo, un reloj en movimiento a una velocidad constante  $v$  relativa a un sistema inercial que contiene relojes sincronizados registra un tiempo menor por el factor  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  cuando se le registra por dichos relojes, siendo esta situación recíproca.

Volvamos ahora a la situación planteada en la sección 2.4 sobre la paradoja de los gemelos. En este caso tenemos un único reloj en movimiento y queremos compararlo con el reloj en reposo, lo cual podemos hacer porque coinciden dos veces, en la salida y en la llegada de Mateo. Sin embargo, la situación ahora no es recíproca, puesto que, para dar la vuelta, Mateo ha debido frenar y volver a acelerar, lo cual produce cambios en su cuerpo que le hacen notar que de hecho es él el que se está moviendo. Pensemos en el ejemplo numérico estudiado anteriormente, en el que el planeta  $P$  se encuentra a 4 años luz de la Tierra. El tiempo transcurrido para Pedro es de 10 años en total. Su línea de mundo en el diagrama de Minkowski será el mismo eje  $ct$ . La línea de mundo de Mateo se dibuja teniendo en cuenta que se desplaza a  $0.8c$  respecto a Pedro, obteniendo así el eje  $ct'$  que está inclinado respecto al eje  $ct$  como muestra la Figura 3.9.

Obtuvimos que se registran 3 años en el eje  $ct'$ , correspondiendo cada punto a la señal anual de año nuevo del reloj de Mateo. Pasado este tiempo, Mateo llega al planeta  $P$  y se traslada al sistema  $S''$ , trazando una nueva línea de mundo, el eje  $ct''$ , el cual registra otros 3 años para la vuelta.

Cada vez que Mateo registre un año con su reloj, le enviará una señal a Pedro, quién lo anotará en su sistema. Para representar esto en nuestro diagrama, trazamos de cada punto sobre la línea de mundo de Mateo una recta inclinada  $45^\circ$  con respecto a sus ejes, correspondiendo a la señal luminosa, y la intersectamos con la línea de mundo de Pedro. De igual manera, las señales del reloj de Pedro son rectas, parten de cada punto situado en la línea de mundo de Pedro, inclinadas  $45^\circ$  con respecto a los ejes del sistema  $S$ , que intersectan con las líneas de mundo de los sistemas  $S'$  y  $S''$  en los que se mueve Mateo. Observamos que cada vez que Pedro registra 3 años, le

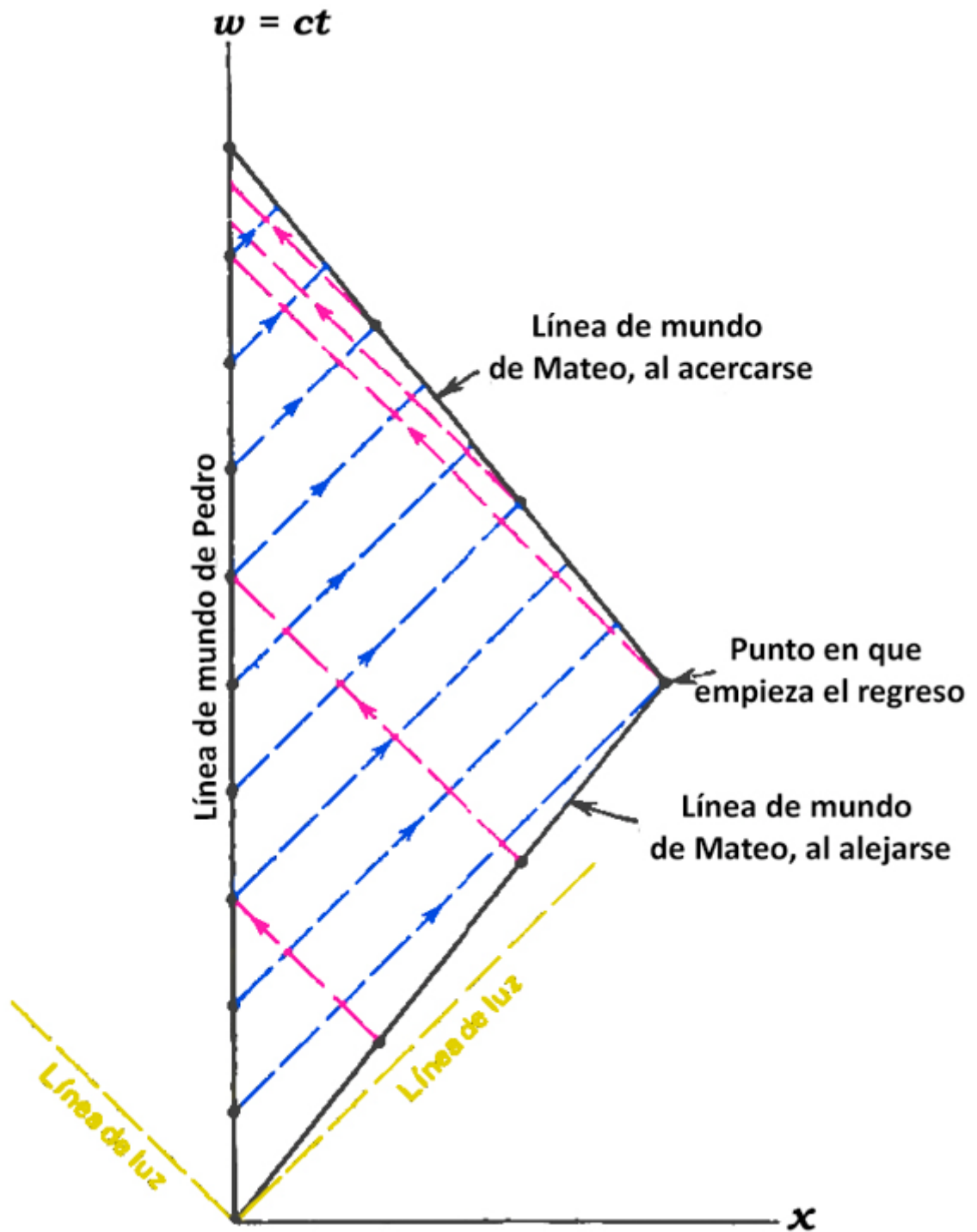


Figura 3.9: Gráfica espacio-tiempo de la paradoja de los gemelos. Se muestra la línea de mundo de Pedro, quien está fijo, así como las líneas de mundo de Mateo al alejarse (la cual es muy cercana a la línea de mundo de la luz puesto que la velocidad es  $0.8c$ ) y al regresar a la Tierra. Pedro envía a Mateo 10 señales, mientras que Mateo a Pedro envía solo 6 señales. Además, la frecuencia de las señales aumenta en el último año para Pedro y en los últimos tres años para Mateo, que coinciden con su regreso, debido al efecto Doppler.

llega la señal indicándole que Mateo solo ha registrado 1 año.

Este diagrama espacio-tiempo se puede comprobar numéricamente por el efecto Doppler. A medida que los gemelos se alejan uno del otro, la frecuencia de sus señales se reducen, en este caso, en el factor Doppler siguiente según la ecuación (2.25):

$$\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = \sqrt{\frac{c-0.8c}{c+0.8c}} = \sqrt{\frac{0.2}{1.8}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}. \quad (3.8)$$

Luego, la frecuencia de las señales recibidas por Mateo a medida que se aleja es de una señal cada tres de sus años. Recíprocamente, Pedro recibirá señales de Mateo a medida que se aleja una vez cada 3 de sus años, recibiendo 3 señales en 9 años. A medida que se aproximan, la frecuencia de sus señales aumenta, ya que en este caso, según la ecuación (2.24) el factor Doppler será:

$$\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = \sqrt{\frac{1.8}{0.2}} = \frac{9}{1} = 3. \quad (3.9)$$

Es decir, Mateo recibe 9 señales de Pedro mientras regresa en 3 de sus años, al igual que Pedro recibe 3 señales de Mateo en el último año antes de que este regrese. Los registros de Pedro demuestran que recibió señales a frecuencia retardada durante 9 años y a frecuencia rápida durante 1 año, es decir, que Mateo se alejó durante 9 años y volvió en 1 solo año. Igualmente, Mateo registra que él recibió señales a una frecuencia retardada durante 3 años, y a una frecuencia rápida en los 3 años del regreso. A pesar de esto, ambos gemelos están de acuerdo en que han pasado 10 años para Pedro y solo 6 para Mateo. Estos hechos reflejan la asimetría esencial que resuelve la supuesta paradoja.



## 4 | Conclusiones

- Hemos comenzado estudiando la teoría clásica de la relatividad, en la cual las transformaciones galileanas postulaban la naturaleza absoluta del espacio y del tiempo. Sin embargo, a través del experimento de Michelson-Morley, obtuvimos un resultado contradictorio. Teóricamente, aparecía una diferencia de fase entre ambos rayos, pero experimentalmente esto no ocurría. A partir de este resultado, nos adentramos en el desarrollo de la teoría de la relatividad especial de Einstein, estableciendo sus dos postulados: la constancia de la velocidad de la luz en todos los sistemas inerciales y la uniformidad de las leyes de la física en todos los sistemas inerciales. Para mantener la invarianza de la velocidad de la luz, se introdujeron las transformaciones de Lorentz.
- De las transformaciones de Lorentz hemos deducido directamente que el tiempo transcurrido para un observador en reposo se dilata respecto al tiempo medido por otro observador que se mueve respecto a él a una velocidad cercana a la de la luz. De la misma forma, las longitudes medidas por un observador en movimiento relativo se contraen respecto a las longitudes medidas por otro observador en reposo respecto a él. Como consecuencia de estas observaciones, concluimos que el concepto de simultaneidad es relativo gracias a un sencillo experimento mental. Seguidamente, presentamos una famosa paradoja, la Paradoja de los Gemelos, que ilustra la asimetría en la dilatación del tiempo y se resuelve al tener en cuenta que el gemelo que viajó experimentó aceleraciones y cambios en su velocidad.
- Una vez analizadas las transformaciones de Lorentz del tiempo y del espacio, pasamos a transformar la velocidad, y con ella, la cantidad de movimiento, la energía y la fuerza. La transformación de la cantidad de movimiento nos llevó a definir el concepto de masa relativista. A diferencia de la masa en reposo, la masa relativista no es constante, sino que aumenta a medida que la velocidad de la partícula se acerca a la velocidad de la luz ( $c$ ). De manera similar, al deducir la expresión relativista de la energía total, se reveló el concepto de energía

en reposo. A través de esta noción, comprendimos que la energía cinética de una partícula se convierte en masa, tal como se expresa la famosa ecuación de Einstein  $E = mc^2$ .

- Necesitábamos comprobar que nuestra nueva teoría, con todos los ajustes relativistas realizados, era realmente consistente con el electromagnetismo de Maxwell. Con este fin, impusimos la invarianza de las ecuaciones de Maxwell para demostrar que esto requería que los campos eléctrico y magnético se transformaran exactamente de la forma en que lo hacen según la relatividad especial. De esta forma, quedó estudiada la forma en que Einstein reconcilió las ecuaciones de Maxwell para el electromagnetismo con las leyes de la mecánica para cuerpos moviéndose a velocidades próximas a la de la luz.
- Para finalizar, discutimos la estructura del espacio de Minkowski, que describe el espacio-tiempo en la relatividad especial. Con el objetivo de visualizar los efectos relativistas desarrollamos los diagramas de Minkowski, los cuales se restringen a dos dimensiones: el tiempo y el espacio unidimensional. Al analizar los diagramas, encontramos que cada evento posee un cono de luz futuro y un cono de luz pasado, de manera que ninguna señal procedente de fuera del cono puede alcanzar dicho evento. Por último, retomamos el estudio de la Paradoja de los Gemelos y representamos la situación en nuestros diagramas.

La relatividad especial desafía nuestra intuición clásica y nos brinda una comprensión profunda de la naturaleza del espacio y el tiempo.

# Bibliografía

- [1] Resnick, R. *Introduction to Special Relativity*. John Wiley & Sons, Inc., 1968.
- [2] Tipler, P.A. y Mosca, G. *Física para la ciencia y la tecnología. Volumen 2. Tercera edición*. Reverté, S.A, 2010.
- [3] Einstein, A. *Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General*, 1916.
- [4] Einstein, A. "Zur Elektrodynamik bewegter Körper" (*Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento*). *Annalen der Physik*. 17 (10): 891–921, 1905.
- [5] Mezzera, C. *Geometría Lorentziana y Singularidades*. Monografía de Licenciatura. Facultad de Ciencias Universidad de la República Montevideo. Uruguay, 2014.
- [6] Janssen, B. *Breve repaso de la Relatividad Especial*, Departamento de Física Teórica y del Cosmos. Universidad de Granada, 2005.
- [7] Redzic, D, V. *Are Maxwell's equations Lorentz-covariant?*, Facultad de Física. Universidad de Belgrado. Serbia, 2023.
- [8] Illana, J, I. *Descubre la Relatividad*, Departamento de Física Teórica y del Cosmos. Universidad de Granada, 2013.

