



# **Grupos de Homotopía Superior**

**Daniel Gómez Gutiérrez**





## **Grupos de Homotopía Superior**

Daniel Gómez Gutiérrez

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por

Ramón Jesús Flores Díaz



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1. Conceptos preliminares</b>	<b>7</b>
1.1. CW-complejos . . . . .	7
1.2. CW-complejos relativos . . . . .	12
1.3. Espacios recubridores . . . . .	13
1.4. Fibraciones . . . . .	16
<b>2. Grupos de homotopía</b>	<b>19</b>
2.1. Construcción . . . . .	19
2.2. Propiedades básicas . . . . .	21
2.3. Primeros cálculos de grupos de homotopía . . . . .	23
2.4. Grupos de homotopía relativos . . . . .	24
2.5. Grupos de homotopía y fibraciones . . . . .	26
<b>3. Homotopía en CW-complejos</b>	<b>31</b>
3.1. Aproximación Celular . . . . .	31
3.1.1. Teorema de Aproximación Celular . . . . .	31

**II** GRUPOS DE HOMOTOPÍA SUPERIOR

3.1.2.	Consecuencias del Teorema de Aproximación Celular . . . . .	36
3.1.3.	Teorema de Whitehead . . . . .	37
3.1.4.	CW-aproximaciones . . . . .	41
3.1.5.	Torres de Postnikov . . . . .	44
3.1.6.	Espacios de Eilenberg-MacLane . . . . .	45
3.2.	Teorema de Escisión de Homotopía . . . . .	46
3.2.1.	Teorema de Suspensión de Freudenthal . . . . .	52
3.2.2.	Algunos cálculos interesantes . . . . .	56
3.3.	Teorema de Hurewicz . . . . .	58

## Resumen

Este Trabajo de Fin de Grado tiene como objetivo presentar los grupos de homotopía y demostrar algunos teoremas fundamentales sobre estos. Para ello, se introducen conceptos recurrentes en teoría de homotopía como son los CW-complejos y las fibraciones. A continuación, definimos los grupos de homotopía y desarrollamos herramientas algebraicas para estudiarlos. Finalmente, se empleará todo el trabajo anterior para demostrar los teoremas mencionados con detalle. Paralelamente, se presentan tanto ejemplos que ilustran el uso de la teoría desarrollada, como el problema del cálculo de grupos de homotopía de las esferas, que motivó su estudio.

## Abstract

This Final Undergraduate Project aims to present homotopy groups and to prove some fundamental theorems about them. For that purpose, we begin introducing the concepts of CW-complexes and fibrations, recurring in homotopy theory. We proceed by defining homotopy groups and developing some algebraic tools around them. In the end, we will apply all this work to prove in detail the theorems mentioned before. Simultaneously, we also present examples that show how the previous theory works, as well as the problem of the computation of homotopy groups on spheres, which is the main classical problem of homotopy theory.



# Introducción

Los grupos de homotopía fueron introducidos por primera vez por Čech a principios de los años 30, aunque Poincaré ya conocía perfectamente el grupo fundamental a principios del siglo XX. Los primeros cálculos de grupos de homotopía de esferas parecían indicar que estos se comportaban de manera muy similar a los de homología. La prueba de Hopf de que  $\pi_3(S^2) \not\cong H_3(S^2)$  supuso una conmoción que atrajo el interés en estos invariantes.

Pronto se hizo patente que estos grupos poseían una estructura diferente a la de los grupos de homología, y que en general eran bastante más difíciles de calcular. El cálculo completo de los grupos de homotopía de las esferas sigue estando abierto a día de hoy y ha sido el principal motor de la teoría de homotopía clásica. El objetivo del presente trabajo es introducir los grupos de homotopía y las herramientas más básicas y fundamentales para su cálculo. Al mismo tiempo, se calculan los casos iniciales de grupos de homotopía de esferas (todos ellos isomorfos a los grupos de homología) hasta llegar al cálculo ya mencionado de Hopf de  $\pi_3(S^2)$ .

En el primer capítulo, hablaremos sobre los CW-complejos, CW-complejos relativos, espacios recubridores y fibraciones. La estructura de los CW complejos es especialmente adecuada para el cálculo de los grupos de homotopía, y las fibraciones permiten establecer relaciones entre grupos de homotopía vía sucesiones exactas; estas propiedades dan lugar a que la aparición de CW-complejos y fibraciones sea natural en este contexto. Los CW-complejos relativos y espacios recubridores son un caso más general y un caso particular de los anteriores respectivamente.

Definiremos los grupos de homotopía cuando lleguemos al segundo capítulo, cuyo objetivo es describir sus propiedades más básicas y desarrollar algunas herramientas de cálculo. En particular, tras introducir los grupos de homotopía obtenemos la sucesión exacta larga de homotopía de un par, de una fibración y de una aplicación.

Finalmente, en el tercer capítulo se usarán todos los resultados anteriores para probar cinco teoremas fundamentales sobre el comportamiento de los grupos de homotopía. El Teorema de Aproximación Celular, como el Teorema de Aproximación Simplicial en complejos simpliciales, nos labrará el terreno para poder asumir en adelante celularidad sobre nuestras aplicaciones al trabajar con CW-complejos salvo homotopía. Esta asunción nos permitirá calcular una gran cantidad de grupos de homotopía, aunque todos ellos triviales. El Teorema de Whitehead nos demuestra que las condiciones suficientes para tener una equivalencia de homotopía entre CW-complejos son más débiles que en espacios generales y se pueden caracterizar con sus grupos de homotopía (que no su tipo de homotopía).

El Teorema de Escisión de Homotopía deja ver unos de los motivos por los que los grupos de homotopía son computacionalmente más complejos que los de homología, pues la propiedad de escisión, a diferencia que en homología, solo se puede asegurar en un cierto rango de dimensiones. Utilizando herramientas elementales, en este trabajo ofrecemos una demostración con un grado de detalle que no hemos encontrado en la literatura. Como consecuencia del teorema de escisión se obtiene el Teorema de Suspensión de Freudenthal, el cálculo de  $\pi_n(S^n)$  para  $n \geq 2$ , los grupos de homotopía estables, y el cálculo de Hopf de  $\pi_3(S^2)$ . Para terminar, demostramos el Teorema de Hurewicz que nos relaciona los grupos de homotopía y de homología, y facilita bajo ciertas condiciones el cálculo de los primeros a través de los segundos.

A continuación, listamos notación relevante que usaremos durante este trabajo:

- $\mathcal{G}$ : categoría de grupos.
- $\mathcal{T}$ : categoría de espacios topológicos.
- $\mathcal{PT}$ : categoría de espacios topológicos con punto base.
- $I$ : intervalo unidad cerrado.
- $D^n$ : disco unidad cerrado en  $\mathbb{R}^n$ .
- $S^n$ : esfera unidad cerrada en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Es subespacio de  $D^{n+1}$ .
- $\mathbb{1}_X$ : aplicación identidad del espacio topológico  $X$ .
- $Y^X$ : conjunto de aplicaciones continuas  $f : X \rightarrow Y$ .
- $C(X^n, \dots, X^0; Y^n, \dots, Y^0)$ : conjunto de aplicaciones continuas  $f : X^n \rightarrow Y^n$  tales que  $X^0 \subseteq \dots \subseteq X^n$ ,  $Y^0 \subseteq \dots \subseteq Y^n$  y  $f(X^r) \subseteq Y^r \forall r = 0, \dots, n$ .
- $f \simeq_H g$ : las aplicaciones  $f$  y  $g$  son homotópicas, y  $H$  es una homotopía entre ellas. La  $H$  se omite en la notación si está sobreentendida o no es relevante.
- $X \simeq Y$ : los espacios  $X$  e  $Y$  tienen el mismo tipo de homotopía.
- $X \cong_f Y$ : los espacios (resp. grupos)  $X$  e  $Y$  son homeomorfos (resp. isomorfos), y  $f$  es un homeomorfismo (resp. isomorfismo) entre ellos.

- $f \cdot g$ : producto de los caminos  $f$  y  $g$ .

Además, se entenderá siempre que las aplicaciones son continuas a menos que se especifique lo contrario. En el contexto de CW-complejos se sobreentiende que los espacios con los que trabajamos siempre son Hausdorff.



# 1 | Conceptos preliminares

Dedicamos este primer capítulo a introducir herramientas de la topología algebraica que necesitaremos durante el trabajo. Estudiaremos los CW-complejos, incluyendo su versión relativa, y los espacios recubridores, para posteriormente describir el concepto más general de fibración.

Una vez descritas, estas herramientas se usarán en adelante sin necesidad de una mención explícita.

## 1.1 CW-complejos

En el estudio de los grupos de homotopía, se necesitan con frecuencia tener espacios con buenas propiedades y con una estructura manejable; para ello, se introducen los CW-complejos. Estos espacios se descomponen en piezas elementales llamadas celdas, y a esta descomposición, bajo ciertas restricciones, es a lo que llamaremos una estructura de CW-complejo. No todos los espacios admiten esta estructura, pero sí una gran parte de los espacios interesantes desde el punto de vista de la teoría de homotopía.

La descomposición anterior se puede ver, a la inversa, como un proceso constructivo que va aumentando la dimensión de nuestro complejo, a través de un proceso de pegamiento de celdas. Esto nos permitirá no solo construir espacios de manera más abstracta sin necesidad de una inmersión concreta en algún  $\mathbb{R}^n$ , sino entender nuestro espacio de manera combinatoria: las relaciones de las celdas con el resto del complejo nos determinan (salvo homeomorfismo) el espacio subyacente. Esta herramienta será muy potente para poder desarrollar nuestra tarea con mayor facilidad.

Comenzamos introduciendo la definición previa de un complejo celular.

**| Definición 1.1 (Complejo celular).** Un complejo celular  $K$  sobre un espacio topológico  $X$  es una colección  $K = \{e_\alpha^n \subseteq X : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \alpha \in J_n\}$  de subconjuntos de  $X$ , con  $J_n$  un cierto conjunto de índices. Al conjunto  $e_\alpha^n$  se le llama celda de dimensión  $n$ . Las celdas deben satisfacer las propiedades 1), 2) y 3) que se enumeran más abajo.

Sea  $K^n = \{e_\alpha^r \in K : r \leq n, \alpha \in J_r\}$  el  $n$ -esqueleto de  $K$ , con  $n \geq 0$ , y donde  $K^n = \emptyset$  si  $n < 0$ . Denotaremos  $|K| = \bigcup_{\substack{n \geq 0 \\ \alpha \in J_n}} e_\alpha^n$  su **espacio subyacente** y  $|K^n| = \bigcup_{\substack{r \leq n \\ \alpha \in J_r}} e_\alpha^r$  el de su  $n$ -esqueleto. Para cada celda  $e_\alpha^n \in K$ , definimos

- $\partial e_\alpha^n = e_\alpha^n \cap |K^{n-1}|$  el **borde** de  $e_\alpha^n$ .
- $\mathring{e}_\alpha^n = e_\alpha^n \setminus \partial e_\alpha^n$  el **interior** de  $e_\alpha^n$ .

Se requiere que  $K$  cumpla:

- 1)  $X = |K|$ .
- 2) Si  $\mathring{e}_\alpha^n \cap \mathring{e}_\beta^m \neq \emptyset$ , entonces  $n = m, \alpha = \beta$ .
- 3) Para cada celda  $e_\alpha^n$  existe **aplicación característica**

$$f_\alpha^n : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (e_\alpha^n, \partial e_\alpha^n)$$

sobreyectiva y homeomorfismo entre  $\mathring{D}^n$  y  $\mathring{e}_\alpha^n$ .

Llamamos **subcomplejo** a una subcolección de  $K$  que es propiamente un complejo celular. Así, si denotamos  $X^n = |K^n|$ ,  $K^n$  es subcomplejo de  $K$  con espacio subyacente  $X^n$ , o dicho de otro modo,  $X^n$  tiene una estructura natural de complejo celular inducida por  $K$ . Si trabajamos en  $\mathcal{PT}$ , a veces puede considerarse el punto base  $x_0$  como una celda de dimensión  $-\infty$ , y así  $K^n = \{\{x_0\}\} \forall n < 0$ . Además, se deduce de la propiedad 2) que  $X = \bigsqcup_{\substack{n \geq 0 \\ \alpha \in J_n}} \mathring{e}_\alpha^n$ .

A continuación introducimos dos conceptos importantes sobre complejos celulares.

**| Definición 1.2 (Dimensión de un complejo celular).** Dado  $K$  complejo celular, definimos su dimensión como  $\dim K = \sup \{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : J_n \neq \emptyset\}$ . Si no existe este supremo, diremos que el complejo es de dimensión infinita.

**| Definición 1.3 (Cara y cara inmediata).** Dado  $K$  complejo celular y dos celdas  $e_\alpha^n$  y  $e_\beta^m$  suyas, se dice que  $e_\alpha^n$  es cara de  $e_\beta^m$  si  $\mathring{e}_\alpha^n \cap e_\beta^m \neq \emptyset$ , y lo denotaremos  $e_\alpha^n \leq e_\beta^m$ . Se dice cara inmediata si  $\exists e_\gamma^k \in K$  tal que  $e_\alpha^n \subsetneq e_\gamma^k \subsetneq e_\beta^m$  donde cada una es cara de la siguiente, y lo denotaremos  $e_\alpha^n < e_\beta^m$ .

Una celda  $e_\beta^m \in K$  siempre posee una estructura natural de complejo celular dada por sus caras  $\{e_\alpha^n\}_{e_\alpha^n \leq e_\beta^m}$ . Además, como dos celdas distintas no se pueden cortar en sus interiores, se deduce que si  $e_\alpha^n < e_\beta^m$ , entonces  $e_\alpha^n \subseteq \partial e_\beta^m \subseteq X^{m-1}$ , por lo que  $n < m$ .

Ahora ya estamos preparados para definir qué es un CW-complejo.

**| Definición 1.4 (CW-complejo).** Un CW-complejo  $K$  sobre un espacio topológico  $X$  es un complejo celular que cumple las siguientes dos propiedades:

- C) Clausura finita (closure-finite): cada celda tiene una cantidad finita de caras (o de caras inmediatas, equivalentemente).
- W) Topología débil (weak topology): consideramos en  $X$  la topología débil inducida por  $K$ , es decir,  $A \subseteq X$  es cerrado  $\Leftrightarrow A \cap e_\alpha^n$  es cerrado en  $e_\alpha^n, \forall e_\alpha^n \in K$ .

Estas propiedades no constituyen grandes restricciones sobre los complejos celulares. De hecho, son propiedades mínimas para que nuestros espacios “se comporten bien” y sean más fáciles para trabajar, perdiendo el mínimo de la flexibilidad que nos ofrecen.

Veamos brevemente cómo se comportan estos espacios respecto de aplicaciones continuas y homotopías. Empecemos con las aplicaciones continuas.

**Proposición 1.1.** Sean  $K$  un CW-complejo sobre  $X$  e  $Y$  un espacio topológico. Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación. Entonces  $f$  es continua  $\Leftrightarrow f|_{e_\alpha^n}$  es continua  $\forall e_\alpha^n \in K$ , es decir,  $f \circ f_\alpha^n$  es continua  $\forall e_\alpha^n \in K$ .

**Demostración.** Es consecuencia directa de que los CW-complejos están dotados de la topología débil. ■

Para ver que los CW-complejos tienen buenas propiedades respecto de homotopías, usaremos la siguiente proposición, que también tiene interés propio. La demostración se puede consultar en [Hat01, pg. 524].

**Proposición 1.2.** Sean  $K_X, K_Y$  CW-complejos sobre  $X, Y$  respectivamente; entonces el producto  $X \times Y$  con celdas  $K = \{e_\alpha^n \times e_\beta^m, e_\alpha^n \in K_X, e_\beta^m \in K_Y\}$  y aplicaciones característica producto tiene estructura de CW-complejo si se le dota de la topología débil.

Nótese que la topología producto no tiene por qué coincidir con la topología producto. Sin embargo, si  $X$  o  $Y$  son localmente compactos, las topologías coinciden.

Dotando a  $I$  de una estructura de CW-complejo  $K = \{\{0\}, \{1\}, I\}$ , se deduce el siguiente corolario.

**Corolario 1.1.** Sean  $K$  un CW-complejo sobre  $X$  e  $Y$  espacio topológico. Tomamos  $F : X \times I \rightarrow Y$  aplicación. Entonces,  $F$  es continua  $\Leftrightarrow F|_{e_\alpha^n \times I}$  es continua  $\forall e_\alpha^n \in K$ , es decir,  $F \circ (f_\alpha^n \times \mathbb{1}_I)$  es continua  $\forall e_\alpha^n \in K$ .

Describamos a continuación un procedimiento más abstracto para construir CW-complejos, a través del pegamiento de las celdas. Para ello necesitamos un concepto previo.

**Definición 1.5 (Cono de una aplicación).** Dada  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ , definimos el cono de la aplicación  $f$  como el espacio  $Y \cup_f CX$ , esto es, como el conjunto cociente de  $Y \vee CX$  sobre la relación de equivalencia generada al identificar  $[x, 1] \in CX$  con  $f(x) \in Y$ .

La aplicación  $i : Y \rightarrow Y \cup_f CX$  tal que  $i(y) = [y]$  es una inmersión, por lo que podemos ver  $Y$  dentro este cono. Ya podemos describir el pegado de celdas.

**Definición 1.6 (Pegamiento de celdas).** Sea  $g : S^{n-1} \rightarrow X$  aplicación continua sobre un espacio topológico  $X$ . Al cono de la aplicación  $X \cup_g CS^{n-1}$  se llama  $X$  con una  $n$ -celda pegada, y a  $g$  se le llama la **aplicación de pegado** de la celda. La proyección  $q : X \vee CS^{n-1} \rightarrow X \cup_g CS^{n-1}$  se restringe a  $f : CS^{n-1} \rightarrow X \cup_g CS^{n-1}$ , que es un homeomorfismo del interior de  $CS^{n-1}$  sobre su imagen. Se dice que  $f$  es la **aplicación característica** de la celda. Como  $CS^{n-1} \cong D^n$ , podemos ver  $f$  como una aplicación

$$f : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X \cup_g CS^{n-1}, X)$$

Nótese que  $f|_{S^{n-1}} = g$ .

En general, si tenemos una aplicación  $g : \bigvee_\alpha S_\alpha^{n-1} \rightarrow X$  de unas  $(n-1)$ -esferas en  $X$ , al cono de la aplicación  $X \cup_g C(\bigvee_\alpha S_\alpha^{n-1}) \cong X \cup_g \bigvee_\alpha (CS_\alpha^{n-1})$  se le llama  $X$  con  $n$ -celdas pegadas. El subconjunto  $e_\alpha^n = q(CS_\alpha^{n-1})$  es la  $n$ -celda con aplicación de pegado  $g|_{S_\alpha^{n-1}}$ , y su aplicación característica  $f_\alpha^n$  es  $q|_{CS_\alpha^{n-1}}$ . Pegar una 0-celda significa añadir un punto disjunto.

Como hemos adelantado, podremos construir CW-complejos de esta manera. Se puede consultar la prueba en [Swi75, pg. 70-71].

**Proposición 1.3.** Sea  $\{x_0\} = X^{-1} \subseteq X^0 \subseteq X^1 \subseteq \dots \subseteq X^n \subseteq \dots$  una sucesión de espacios de manera que  $X^n$  se obtiene a partir de  $X^{n-1}$  pegando  $n$ -celdas,  $n \geq 0$ . Si

dotamos a  $X = \bigcup_{n \geq -1} X^n$  de la topología débil ( $S \subseteq X$  cerrado  $\Leftrightarrow S \cap X^n$  cerrado en  $X^n \forall n \geq -1$ ), entonces el conjunto de todas las celdas  $K$  es un CW-complejo sobre  $X$ .

Necesitaremos usar la siguiente propiedad cuando llegemos al capítulo 3.

**Proposición 1.4.** Sea  $K$  CW-complejo sobre  $X$  y  $S \subseteq X$  compacto. Entonces,  $S$  se interseca con una cantidad finita de interiores de celdas de  $K$ .

**Demostración.** Para cada  $n \geq 0, \alpha \in J_n$ , si  $S \cap \mathring{e}_\alpha^n \neq \emptyset$ , elegimos  $x_\alpha^n \in S \cap \mathring{e}_\alpha^n$ . Sea  $T$  el conjunto de estos puntos. Dado  $T' \subseteq T$ , para cada  $n \geq 0, \alpha \in J_n$ , por la propiedad C) de CW-complejos,  $e_\alpha^n = \bigsqcup_{e_\beta^m \leq e_\alpha^n} \mathring{e}_\beta^m$  es unión finita, y  $T' \cap e_\alpha^n$  es finito, y por tanto, cerrado.

Por lo tanto,  $T$  tiene la topología discreta. Como  $T$  es subconjunto cerrado de  $S$ , es compacto. Deducimos que  $T$  es compacto y discreto, así que es finito. ■

Resulta interesante destacar que los CW-complejos son localmente conexos por caminos [Hat01, pg. 522], lo que nos permitirá hablar indistintamente de conexión y conexión por caminos.

Como trabajaremos extensivamente con esferas, veamos dos maneras comunes de dotarlas de estructura de CW-complejo (véase la figura 1.1).

- 1) Podemos ver  $S^n$  como un complejo con una 0-celda  $\{s_0\}$  y una  $n$ -celda, donde necesariamente su aplicación característica envía el borde de  $D^n$  en  $s_0$ .
- 2) Tomamos dos celdas de cada dimensión desde 0 hasta  $n$ , y las vamos pegando inductivamente viendo  $S^{n-1}$  como el ecuador de  $S^n$ .

La primera de ellas es más simple, pero la segunda nos permite ver un ecuador de una  $n$ -esfera como un subcomplejo suyo, de dimensión  $n - 1$ .

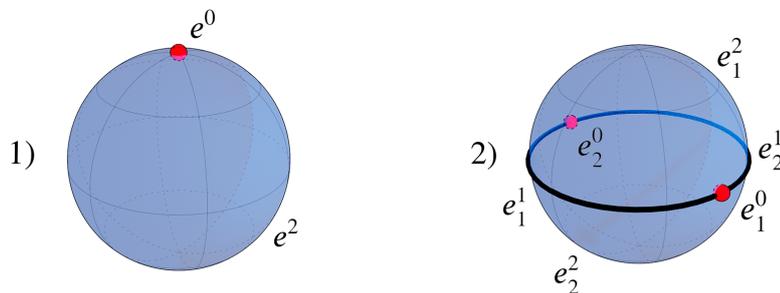


Figura 1.1: Dos estructuras de CW-complejo sobre la 2-esfera.

## 1.2 CW-complejos relativos

Los CW-complejos relativos son la generalización natural del concepto de CW-complejo a pares de espacios. Veamos primero cómo se pegan celdas a un par.

**| Definición 1.7 (Pegamiento de celdas sobre un par).** Sea  $g : (S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A)$  aplicación continua sobre un par  $(X, A)$ . A  $(X \cup_g CS^{n-1}, A)$  se lo llama  $(X, A)$  con una  $n$ -celda pegada, y a  $g$  se le llama la **aplicación de pegado** de la celda. La proyección  $q : (X \vee CS^{n-1}, A) \rightarrow (X \cup_g CS^{n-1}, A)$  restringida al cono resulta en una aplicación  $f : (CS^{n-1}, s_0) \rightarrow (X \cup_g CS^{n-1}, A)$ , que es un homeomorfismo del interior de  $CS^{n-1}$  sobre su imagen. Se dice que  $f$  es la **aplicación característica** de la celda. Como  $CS^{n-1} \cong D^n$ , podemos ver  $f$  como una aplicación

$$f : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X \cup_g CS^{n-1}, X)$$

Nótese que  $f|_{S^{n-1}} = g$ .

Se puede generalizar la definición anterior al pegamiento de un número arbitrario de  $n$ -celdas de manera análoga a como se hace en el pegamiento de una celda a un espacio. A través de los pegados de celdas se construyen los CW-complejos relativos.

**| Definición 1.8 (CW-complejo relativo).** Sea  $X$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$  subespacio suyo. Una estructura de CW-complejo relativo sobre un par  $(X, A)$  es una sucesión

$$A = (X, A)^{-1} \subseteq (X, A)^0 \subseteq \dots \subseteq (X, A)^n \subseteq (X, A)^{n+1} \subseteq \dots \subseteq X$$

de manera que  $(X, A)^n$  se obtiene a partir de  $(X, A)^{n-1}$  pegando  $n$ -celdas,  $\forall n \geq 0$ , y tales que  $X = \bigcup_{n \geq -1} (X, A)^n$ . El conjunto  $(X, A)^n$  se dice su  $n$ -esqueleto. Además, dotamos de la topología débil:  $S \subseteq X$  es cerrado  $\Leftrightarrow S \cap (X, A)^n$  es cerrado  $\forall n \geq -1$ .

La dimensión de  $(X, A)$  se define como  $\dim (X, A) = \inf \{n \geq 0 : (X, A)^n = X\}$ . Como en el caso absoluto, esta puede ser infinita.

Nótese que, efectivamente, una estructura de CW-complejo relativo sobre un par  $(X, A)$  con  $A = \{x_0\}$  es una estructura de CW-complejo sobre  $X$ . Recíprocamente, si  $X$  es un CW-complejo y  $A$  subcomplejo,  $(X, A)$  es un CW-complejo relativo. Para simplificar la notación y siempre que  $A$  esté fijado, también denotaremos  $(X, A)^n$  simplemente como  $X^n$ . Además, no es difícil ver que se puede dotar a  $X/A$  de estructura de CW-complejo.

Brevemente, describamos un proceso para inducir aplicaciones (y homotopías) que usaremos con frecuencia en el tercer capítulo.

**Proposición 1.5.** Sean  $(X, A)$  un CW-complejo relativo en el que  $X$  se obtiene pegando una  $n$ -celda  $e^n$  a  $A$ , e  $Y$  un espacio topológico. Tenemos dos aplicaciones continuas,  $f : A \rightarrow Y$  y  $g : D^n \rightarrow Y$  tales que, si  $\phi : S^{n-1} \rightarrow A$  es la aplicación de pegado de  $e^n$ , se tiene que  $f \circ \phi = g|_{S^{n-1}}$ . Entonces, estas aplicaciones inducen a su vez una aplicación continua  $\tilde{f} : X \rightarrow Y$  tal que  $\tilde{f}|_A = f$ , una extensión de  $f$  sobre la celda.

**Demostración.** Es una aplicación directa de las propiedades de los cocientes. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A \sqcup D^n & \xrightarrow{f \sqcup g} & Y \\ \downarrow p & \nearrow \tilde{f} & \\ X = A \cup e^n & & \end{array}$$

donde la relación generada por  $a \sim x \Leftrightarrow a = \phi(x) \forall a \in A \forall x \in S^{n-1}$  es la que da lugar al cociente. La aplicación  $f \sqcup g$  es compatible con esta relación porque, dados  $a \in A$  y  $x \in S^{n-1}$  relacionados,  $(f \sqcup g)(a) = f(a) = (f \circ \phi)(x) = g(x) = (f \sqcup g)(x)$ . La aplicación buscada es la  $\tilde{f}$  en la diagonal resultado del teorema. ■

**Observación 1.1.** En las condiciones de la proposición anterior, se puede ver análogamente que si tenemos  $G : D^n \times I \rightarrow Y$  homotopía rel  $S^{n-1}$  tal que  $G_0 = g$ , se induce una homotopía  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Y$  que extiende a  $H$  y es estacionaria en  $A$  ( $H_t = f \forall t \in I$ ).

Esta proposición también se puede usar cuando se pegan varias  $n$ -celdas al mismo tiempo, tomando  $\sqcup_\alpha D_\alpha^n$  y  $\sqcup_\alpha \phi_\alpha$ . También se puede dar una versión para  $\mathcal{PT}$  si las aplicaciones preservan el punto base y la suma puntual desempeña el rol de la unión disjunta.

### 1.3 Espacios recubridores

Introducimos brevemente el concepto de un espacio recubridor. Estos espacios nos ayudarán en el cálculo de los grupos de homotopía, como ya sabemos que nos permiten calcular el grupo fundamental de la circunferencia. Seguimos la sección §1.3 de [Hat01].

**| Definición 1.9 (Espacio recubridor).** Dado  $X$  un espacio topológico, un espacio recubridor es un par formado por un espacio  $\tilde{X}$  y una aplicación continua y sobreyectiva  $p: \tilde{X} \rightarrow X$ , llamada aplicación recubridora, tales que  $\forall x \in X$  existe  $U$  entorno abierto de  $x$  de manera que  $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$  unión disjunta de abiertos y  $p|_{U_\alpha}$  es un homeomorfismo entre  $U_\alpha$  y  $U \forall \alpha \in \Lambda$ . Los entornos que cumplen esta propiedad se dicen **uniformemente cubiertos**.

El ejemplo clásico de espacio recubridor es el par  $(\mathbb{R}, p)$ , donde  $p$  es la aplicación  $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$  que recubre  $S^1$ . Si recordamos el cálculo de  $\pi_1(S^1)$ , debíamos elevar los caminos sobre  $S^1$  a caminos sobre  $\mathbb{R}$ . Hablemos de una manera un poco más general sobre este concepto.

**| Definición 1.10 (Elevación).** Dadas  $p: E \rightarrow B$  y  $f: X \rightarrow B$  aplicaciones continuas, una aplicación continua  $\tilde{f}: X \rightarrow E$  se llama una elevación de  $f$  si  $p \circ \tilde{f} = f$ , es decir, una aplicación continua  $\tilde{f}$  que haga que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

**| Definición 1.11 (HLP).** Una aplicación  $p: E \rightarrow B$  se dice que tiene la propiedad de elevación de homotopía (HLP, del inglés, *homotopy lifting property*) respecto de un espacio  $X$  si para toda aplicación continua  $f: X \rightarrow B$  con una elevación  $\tilde{f}: X \rightarrow E$  y toda homotopía  $H: X \times I \rightarrow B$  de  $f$  existe una homotopía  $\tilde{H}: X \times I \rightarrow E$  de  $\tilde{f}$  que eleva a  $H$ , es decir, tal que  $p \circ \tilde{H} = H$ .

Estas definiciones en  $\mathcal{T}$  se pueden extender a  $\mathcal{PT}$  tomando las homotopías relativas al punto base correspondiente.

Sabemos que  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  descrita anteriormente tiene la HLP respecto a  $I$ , es decir, podemos elevar caminos en la circunferencia a caminos en  $\mathbb{R}$ . Es más, podemos hacer esto fijando un punto base  $s_0$  tanto en  $S^1$  como  $x_0 \in \mathbb{R}$ , donde claramente  $x_0 \in p^{-1}(s_0) = \mathbb{Z}$ . Esta propiedad se da en general para todos los espacios recubridores.

**Proposición 1.6.** Una aplicación recubridora  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  tiene la HLP respecto de cualquier espacio topológico, y la homotopía elevada es única.

**Demostración.** Sean  $Y$  un espacio topológico cualquiera,  $f: Y \rightarrow X$  aplicación continua con una elevación  $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$  y  $H: Y \times I \rightarrow X$  homotopía tal que  $f = H_0$ .

Fijemos  $y_0 \in Y$  y construyamos una homotopía  $\tilde{H}_{y_0} : N \times I \rightarrow \tilde{X}$  que eleve  $H|_{N \times I}$  con  $N$  un cierto entorno abierto de  $y_0$ . De ahora en adelante y por comodidad, dados  $a, b \in \mathbb{R}$ , entendemos  $(a, b)$  como la intersección de este intervalo con  $I$ , abierto básico en  $I$ .

Para cada  $t \in I$ , sea  $U_t$  un abierto uniformemente cubierto de  $H(y_0, t)$ . Por continuidad de la aplicación  $H$  existe un entorno abierto de  $(y_0, t)$  de la forma  $N_t \times (a_t, b_t)$ , producto de abiertos en  $Y$  e  $I$  respectivamente, tal que  $H(N_t \times (a_t, b_t)) \subseteq U_t$ . Por lo tanto,  $\bigcup_{t \in I} N_t \times (a_t, b_t)$  es recubrimiento por abiertos de  $\{y_0\} \times I$ . Así, por la compacidad de  $\{y_0\} \times I$  se deduce que  $\exists t_1, \dots, t_m \in I$ ,  $t_1 < \dots < t_m$ , tales que el conjunto  $\bigcup_{i=1}^m N_{t_i} \times (a_{t_i}, b_{t_i})$  recubre a  $\{y_0\} \times I$ . Sea  $N = N_{t_1} \cap \dots \cap N_{t_m}$ . Dividimos  $I$  en  $s_0 = 0$ ,  $s_m = 1$  y  $s_i \in (a_{t_i}, b_{t_i}) \cap (a_{t_{i+1}}, b_{t_{i+1}}) \forall i = 1, \dots, m-1$ . De esta manera, se tiene que  $H(N \times [s_i, s_{i+1}]) \subseteq H(N_{t_{i+1}} \times (a_{t_{i+1}}, b_{t_{i+1}})) \subseteq U_{t_i} \forall i = 0, \dots, m$ .

Definamos  $\tilde{H}_{y_0}$  inductivamente en los abiertos  $N \times [0, s_i] \forall i = 0, \dots, m$ . Claramente, en  $N \times [0, s_0] = N \times \{0\}$  definimos  $\tilde{H}_{y_0}$  como  $\tilde{f}|_N$ . Si ya hemos extendido  $\tilde{H}_{y_0}$  al abierto  $N \times [0, s_i]$  con  $0 \leq i < m$ , como  $s_i \in (a_{t_i}, b_{t_i})$ ,  $H(y_0, s_i) \in U_{t_i}$ , y entonces  $\exists \tilde{U}_{t_i} \subseteq \tilde{X}$ ,  $\tilde{U}_{t_i} \cong U_{t_i}$  a través de  $p$  tal que  $\tilde{H}_{y_0}(y_0, s_i) \in \tilde{U}_{t_i}$ . Esta elección nos permite definir  $\tilde{H}_{y_0}$  en  $N \times [s_i, s_{i+1}]$  como la composición  $p|_{\tilde{U}_{t_i}}^{-1} \circ H|_{N \times [s_i, s_{i+1}]}$ , bien definida pues  $H(N \times [s_i, s_{i+1}]) \subseteq H(N_{t_{i+1}} \times (a_{t_{i+1}}, b_{t_{i+1}})) \subseteq U_{t_i}$ . Repitiendo este paso una cantidad finita de veces obtenemos  $\tilde{H}_{y_0} : N \times I \rightarrow \tilde{X}$  homotopía tal que  $\tilde{H}_{y_0,0} = \tilde{f}|_N$ . Además, es continua por el lema del pegamiento gracias a que  $N \times \{s_i\}$  es cerrado en  $N \times I \forall i = 1, \dots, m-1$ .

El hecho de que  $\tilde{H} : Y \times I \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $\tilde{H}(y_0, t) = \tilde{H}_{y_0}(y_0, t)$  está bien definida se deducirá de la unicidad, así que el siguiente paso es probarla. Seguimos con el mismo  $\{y_0\}$  y con la misma partición  $s_0 < s_1 < \dots < s_m$  de  $I$ . Sean  $y_1 \in Y$  tal que el dominio  $\tilde{H}_{y_1}$  contiene a  $\{y_0\} \times I$ . Claramente, en  $\{y_0\} \times [0, s_0] = \{y_0\} \times \{0\}$  coinciden porque ambas valen  $\tilde{f}(y_0)$ . Supongamos inductivamente que  $\tilde{H}_{y_0}$  y  $\tilde{H}_{y_1}$  ya coinciden en  $\{y_0\} \times [0, s_i]$ , con  $0 \leq i < m$ . Como  $\{y_0\} \times [s_i, s_{i+1}]$  es conexo,  $\tilde{H}_{y_0}(\{y_0\} \times [s_i, s_{i+1}])$  y  $\tilde{H}_{y_1}(\{y_0\} \times [s_i, s_{i+1}])$  son conexos no disjuntos (contienen a  $\tilde{H}_{y_0}(y_0, s_i)$ ). Sabemos que  $\tilde{H}_{y_0}(\{y_0\} \times [s_i, s_{i+1}]) \subseteq U_{t_i}$ , así que  $\tilde{H}_{y_1}(\{y_0\} \times [s_i, s_{i+1}]) \subseteq U_{t_i}$  también. Como ambas elevan la misma aplicación,  $p \circ \tilde{H}_{y_0}|_{\{y_0\} \times [s_i, s_{i+1}]} = p \circ \tilde{H}_{y_1}|_{\{y_0\} \times [s_i, s_{i+1}]}$ , y por ser  $p$  inyectiva en  $\tilde{U}_{t_i}$ , deducimos  $\tilde{H}_{y_0}|_{\{y_0\} \times [s_i, s_{i+1}]} = \tilde{H}_{y_1}|_{\{y_0\} \times [s_i, s_{i+1}]}$ . De nuevo, en un número finito de pasos obtenemos la unicidad. De aquí deducimos no solo que se puede definir en todo  $Y \times I$  sino además que la homotopía elevada  $\tilde{H} : Y \times I \rightarrow \tilde{X}$  es única. La continuidad de  $\tilde{H}$  se deduce de haberla definido como una aplicación continua en un abierto que contiene a  $\{y\} \times I \forall y \in Y$ , que forman un recubrimiento abierto de  $Y \times I$ . ■

Si  $Y = \{*\}$ , de la unicidad del levantamiento de homotopías se deduce que todo camino se puede levantar de manera única. Sin embargo, para levantar homotopías necesitamos tener previamente una elevación de nuestra aplicación. Veamos una caracterización para esto que usa el grupo fundamental.

**Proposición 1.7.** Sea  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  una aplicación recubridora. Entonces, dada  $f: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  aplicación continua,  $\exists \tilde{f}: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  elevación de la aplicación  $f \Leftrightarrow f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ . Es más, si  $Y$  es conexo, la elevación  $\tilde{f}$  es única.

Se puede consultar la demostración en [Hat01, pg. 61-62]. Observamos que de aquí también se puede deducir la unicidad de la elevación de caminos.

## 1.4 Fibraciones

Las aplicaciones recubridoras forman parte de una familia más amplia de aplicaciones, llamadas fibraciones. Las fibraciones tienen buenas propiedades con respecto de las homotopías, y nos proporcionarán más herramientas de cálculo de grupos de homotopía. Seguimos en esta sección el capítulo 4 de [Swi75], y solo enunciaremos aquellas propiedades que necesitamos.

**| Definición 1.12 (Fibración).** Una aplicación continua  $p: E \rightarrow B$  se dice fibración cuando tiene la HLP respecto de cualquier espacio. En este caso, dado  $b_0 \in B$  punto base, al espacio  $F = p^{-1}(b_0)$  lo llamamos fibra de  $p$ . Si  $p$  tiene la HLP respecto de  $D^n$ ,  $\forall n \geq 0$ , se dice que es una **fibración débil o de Serre**.

Es común escribir las fibraciones  $F \rightarrow E \rightarrow B$ . A la proyección  $p_B: B \times F \rightarrow B$  se le llama fibración trivial de fibra  $F$ . Además, es inmediato por la proposición 1.6 que toda aplicación recubridora es una fibración.

Enunciemos una versión relativa de la HLP, que cumplen las fibraciones de Serre con respecto de cualquier CW-complejo relativo. Se puede consultar su demostración en [Hat01, pg. 376].

**| Definición 1.13 (HLP relativa).** Una aplicación  $p: E \rightarrow B$  se dice que tiene la propiedad de elevación de homotopía relativa respecto a un par espacio-subespacio  $(X, A)$  si para toda aplicación continua  $f: X \rightarrow B$  con una elevación  $\tilde{f}: X \rightarrow E$  y homotopías  $H: X \times I \rightarrow B$  de  $f$  y  $G: A \times I \rightarrow E$  de  $\tilde{f}|_A$ , existe una homotopía

$\tilde{H} : X \times I \rightarrow B$  de  $\tilde{f}$  que eleva a  $H$  y extiende a  $G$ , es decir, tal que  $p \circ \tilde{H} = H$  y  $\tilde{H}|_{A \times I} = G$ .

**Proposición 1.8.** Toda fibración de Serre cumple la HLP relativa respecto de cualquier CW-complejo relativo.

Enunciamos a continuación dos propiedades que serán de importancia en lo que sigue. Se deducen de [Hat01, pg. 530].

**Proposición 1.9.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos, se tienen:

- 1) La aplicación evaluación  $e : X^I \times I \rightarrow X$  tal que  $e(\omega, t) = \omega(t)$  es continua.
- 2) Una aplicación  $f : X \rightarrow Y^I$ ,  $f(x) = \omega_x \in Y^I$  es continua  $\Leftrightarrow$  la aplicación asociada  $f : X \times I \rightarrow X$ ,  $f(x, t) = \omega_x(t)$  es continua.

Los siguientes conceptos son fundamentales en teoría de homotopía, y en particular permiten definir uno de los principales ejemplos de fibración: la fibración de caminos.

**Definición 1.14 (Espacio de caminos).** Dado un espacio topológico  $(X, x_0)$ , definimos su espacio de caminos  $(PX, \omega_0)$  como el conjunto de todos los caminos en  $X$  que empiezan en  $x_0$  con la topología compacto-abierta. El punto base es  $\omega_0 \equiv x_0$  el camino constante.

**Definición 1.15 (Espacio de lazos).** Dado un espacio topológico  $(X, x_0)$ , definimos su espacio de caminos  $(\Omega X, \omega_0)$  como el conjunto de todos los caminos en  $X$  que empiezan y terminan en  $x_0$  con la topología compacto-abierta. El punto base es  $\omega_0 \equiv x_0$  el camino constante.

En el espacio de caminos de un  $(X, x_0)$  se puede definir de manera natural una aplicación  $\pi : (PX, \omega_0) \rightarrow (X, x_0)$  tal que  $\pi(f) = f(1) \forall f \in PX$ .

**Proposición 1.10.** La aplicación  $\pi : (PX, \omega_0) \rightarrow (X, x_0)$  es una fibración con fibra  $\Omega X$ .

La demostración de la proposición anterior se puede encontrar en [Swi75, pg. 53]. Los espacios de caminos son siempre contráctiles. Esto se puede ver con una homotopía que retraiga cada camino  $\omega$  en caminos cada vez más cortos hasta que acabe en el camino constante  $\omega_0$ . Una homotopía que se puede comprobar que hace esto es  $H : X \times I \rightarrow PX$  tal que  $H_t(\omega)(s) = \omega(s(1-t))$ . Más adelante, esta propiedad nos permitirá relacionar los grupos de homotopía de un espacio  $X$  y de su espacio de lazos.

Veamos un último concepto relacionado con fibraciones.

**Definición 1.16 (Fibrado).** Un fibrado es una tupla  $(B, p, E, F)$  donde  $p$  es una aplicación continua  $p: E \rightarrow B$  tal que  $B$  tiene un recubrimiento por abiertos  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  y para cada  $\alpha \in \Lambda$  existe  $\phi_\alpha: U_\alpha \times F \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$  homeomorfismo tal que  $p \circ \phi_\alpha = p_{U_\alpha}$ , fibración trivial de  $U_\alpha$  con fibra  $F$ , como indica la figura de abajo.

Es decir, podemos ver  $B$  localmente como un producto por la fibra  $F$  y la fibración  $p$  como una proyección sobre la primera componente, entorno de  $B$ , cuando se restringe a este producto.

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times F & \xrightarrow{\phi_\alpha} & p^{-1}(U_\alpha) \\ \downarrow p_{U_\alpha} & \swarrow p & \\ U_\alpha & & \end{array}$$

La siguiente proposición relaciona los fibrados con las fibraciones. Su demostración se puede encontrar en [Swi75, pg. 56-57].

**Proposición 1.11.** Si  $(B, p, E, F)$  es un fibrado, entonces  $p: E \rightarrow B$  es una fibración de Serre.

El siguiente ejemplo nos será de utilidad en el cálculo de grupos de homotopía.

**Ejemplo 1.1.** Vamos a demostrar que  $(P^n\mathbb{C}, \eta, S^{2n+1}, S^1)$  es un fibrado para  $n \geq 0$ , con  $\eta: S^{2n+1} \rightarrow P^n\mathbb{C}$  la proyección sobre el cociente.

Identificamos  $S^{2n+1}$  con el subespacio de puntos  $(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$  con módulo 1. Tomamos el recubrimiento por abiertos  $U_k = \{(z_0, \dots, z_n) \in P^n\mathbb{C} : z_k \neq 0\}$  de  $P^n\mathbb{C}$ , con  $k = 0, \dots, n$ . Se puede comprobar que  $\eta^{-1}(U_k) = \{(z_0, \dots, z_n) \in S^{2n+1} : z_k \neq 0\}$ . Sean  $\phi_k: U_k \times S^1 \rightarrow \eta^{-1}(U_k)$  definidos como

$$\phi_k([z_0, \dots, z_n], z) = \frac{\bar{z}_k z}{|z_k| \sqrt{\sum_{i=0}^n |z_i|^2}}(z_0, \dots, z_n)$$

Entonces,  $\phi_k$  es un homeomorfismo con inversa

$$\phi_k^{-1}(z_0, \dots, z_n) = \left( [z_0, \dots, z_n], \frac{z_k}{|z_k|} \right)$$

Es fácil observar que  $\eta \circ \phi_k = p_{U_k} \forall k = 0, \dots, n$ , y por lo tanto, tenemos un fibrado.

Este fibrado es intuitivo si recordamos que dos elementos  $z_1, z_2 \in S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$  representan el mismo elemento en el cociente si  $\exists \lambda \in S^1 \subseteq \mathbb{C}$  tal que  $z_1 = \lambda z_2$ . Análogamente se puede demostrar que  $(P^n\mathbb{R}, p, S^n, S^0)$  y  $(P^n\mathbb{H}, v, S^{4n+3}, S^3)$  son fibrados.

Volveremos a hablar de fibraciones cuando hablemos de los grupos de homotopía, para estudiar las propiedades que emergen al combinar ambos conceptos.

## 2 | Grupos de homotopía

Vamos a definir ahora nuestro principal objeto de estudio: los grupos de homotopía. Estos grupos generalizan el concepto de grupo fundamental y se definen de manera similar. Vamos a ver cómo se construyen, algunas maneras de interpretarlos y algunas de sus propiedades básicas. Luego veremos cómo definir los grupos de homotopía relativos y estudiaremos cómo se relacionan entre ellos y con las fibraciones. Para consultar detalles formales sobre lo que se expone en las primeras tres secciones, referimos al lector a [Hat01, pg. 340-342].

### 2.1 Construcción

Dado un espacio con punto base  $(X, x_0)$  y  $n \geq 1$ , sea  $C(I^n, \partial I^n; X, x_0)$  el conjunto de aplicaciones continuas  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ , que envían la frontera del cubo unidad al punto base  $x_0$ . Sobre este conjunto, definimos una operación de suma como

$$(f + g)(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n), & \text{si } s_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n), & \text{si } s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

que recorre la coordenada  $s_1$  “al doble de velocidad”, primero de  $f$  y luego de  $g$ , dejando intactas el resto de coordenadas.

Si tomamos ahora cociente con relación de equivalencia de homotopía rel  $\partial I^n$ , obtenemos el  **$n$ -ésimo grupo de homotopía** del espacio  $(X, x_0)$ , denotado  $\pi_n(X, x_0)$ , cuya operación de grupo es la inducida por suma anterior (es decir, definido como  $[f] + [g] = [f + g]$ ), que se puede comprobar que está bien definida. Nótese que, efectivamente, para  $n = 1$  se tiene la definición del grupo fundamental de  $(X, x_0)$ . El elemento neutro está representado por la clase de la aplicación constante a  $x_0$  y

$[f]^{-1} = [\bar{f}]$ , donde  $\bar{f}(s_1, \dots, s_n) = f(1 - s_1, s_2, \dots, s_n)$ . La notación aditiva se discute en la siguiente sección.

Recordemos que el grupo fundamental también se podía visualizar como las clases de homotopía de aplicaciones de  $(S^1, s_0)$  en  $(X, x_0)$ . Análogamente ocurre ahora para  $n \geq 2$ . Como se puede observar en la figura 2.1,  $\pi_n(X, x_0)$  también se puede entender como el conjunto de clases de homotopía de  $C(S^n, s_0; X, x_0)$ , factorizando  $f$  a través de  $S^n$ . En este caso la operación de grupo se puede ver como la composición  $(S^n, s_0) \xrightarrow{c} (S^n \vee S^n, *) \xrightarrow{f \vee g} (X, x_0)$ , donde  $c$  colapsa un ecuador  $S^{n-1}$  que contenga a  $s_0$  en un solo punto  $*$ , que pasa a ser el punto base en la suma puntual.

Además, la definición de grupo de homotopía se puede extender al caso  $n = 0$ , aunque no es posible dotarlo de una estructura de grupo de manera natural. Como  $S^0 = \partial I = \{-1, +1\}$  tiene un único elemento distinto del punto base  $s_0 = +1$ , las aplicaciones de  $(S^0, +1)$  en  $(X, x_0)$  se pueden identificar biyectivamente con los puntos de  $X$  (concretamente con la imagen de  $-1$ ), y dos de estas aplicaciones  $f$  y  $g$  son homotópicas si y solo si existe un camino en  $X$  que una  $f(-1)$  y  $g(-1)$ . Por lo tanto, el conjunto de sus clases de homotopía se corresponde con las componentes por caminos de  $X$ , y se denota  $\pi_0(X, x_0)$ . Pese a no tener estructura de grupo, cuando hablemos de manera general de grupos de homotopía también estaremos incluyendo a este último en la mayoría de los casos.

Gracias a los grupos de homotopía, podemos extender la idea de espacios conexos por caminos y simplemente conexos, y hablar de un espacio  $n$ -conexo. En este lenguaje, los espacios conexos por caminos serán 0-conexos y los simplemente conexos serán 1-conexos.

**Definición 2.1 (Espacio  $n$ -conexo).** Decimos que un espacio con punto base  $(X, x_0)$  es  $n$ -conexo, con  $n \geq 1$ , si  $\pi_r(X, x_0) = 0 \forall r = 0, \dots, n$ .

Esto nos implica que todas las esferas de dimensión  $\leq n$  basadas en  $x_0$  se pueden retraer con deformación sobre  $x_0$ , lo que nos garantiza que no podremos encontrar en nuestro espacio “ $r$ -agujeros” para  $r = 1, \dots, n$ , ya que si suponemos que tuviese alguno, existiría una  $r$ -esfera que lo rodease que por tanto no se podría deformar sobre  $x_0$ , siendo un elemento no trivial de  $\pi_r(X, x_0)$ .

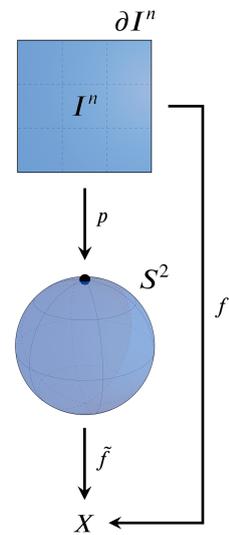


Figura 2.1: Dos formas de ver un elemento de  $\pi_n(X, x_0)$ .

## 2.2 Propiedades básicas

En esta sección se enunciarán propiedades básicas de estos grupos, así como también se verán las pruebas de algunos de estos resultados. No tienen un hilo conductor entre ellas, pues el objetivo es exponer resultados sobre el comportamiento que tienen sin entrar en consecuencias ni explicaciones mayores.

En primer lugar, es esperable (la notación así lo sugiere) que los grupos de homotopía sean abelianos.

**Proposición 2.1.** Dado  $(X, x_0)$  espacio con punto base y  $n \geq 2$ ,  $\pi_n(X, x_0)$  es abeliano.

*Demostración.* Cuando  $n \geq 2$ , tenemos suficiente espacio en  $I^n$  como para mover los dominios de  $f$  y  $g$  en el dominio de  $f + g$  hasta  $g + f$  sin que se corten. Durante este movimiento, el resto de la región se mapea a  $x_0$ . ■

Sin embargo, como demuestra  $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ , el grupo fundamental puede no ser abeliano. Conservaremos la notación de producto para el grupo fundamental mientras que usaremos la suma para el resto de grupos de homotopía.

En segundo lugar, se puede comprobar también que si  $X$  es conexo por caminos, la elección del punto base es indiferente.

**Proposición 2.2.** Sean  $X$  espacio topológico conexo por caminos,  $x_0, x_1 \in X$  y  $n \geq 1$ . Entonces,  $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(X, x_1)$ .

En este caso, podremos simplificar la notación y denotarlos como  $\pi_n(X)$ . Es más, si  $\gamma : I \rightarrow X$  es un camino de  $x_0$  a  $x_1$ , este induce  $\gamma^\# : \pi_n(X, x_1) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$  isomorfismo, que dada  $[f] \in \pi_n(X, x_1)$ , nos une  $f(S^n)$  a  $x_0$  a través de  $\gamma$  en una sola aplicación  $\gamma f$ , llamada producto de  $\gamma$  y  $f$ . Para ello, contraemos el dominio de  $f$  en  $I^n$  y, en cada segmento radial que une la frontera del dominio de  $\gamma f$  con la del de  $f$ , la aplicación  $\gamma f$  recorre el camino  $\gamma$ , como se puede observar en la figura 2.2. Para  $n = 1$ , obtenemos el cambio de punto base en el grupo fundamental, en cuyo caso denotamos el producto como  $\gamma f \gamma^{-1}$  por motivos obvios. Pese a esto, usaremos de manera general la notación  $\gamma f$ .

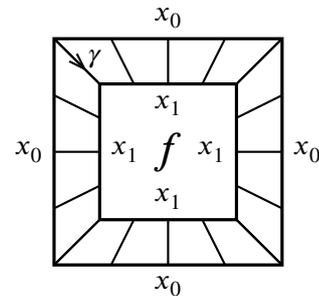


Figura 2.2: Producto  $\gamma f$ .

Se puede comprobar que este producto cumple es asociativo y distributivo respecto a aplicaciones  $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_1)$  salvo homotopía. Además, el camino constante

actúa como identidad. Estas propiedades hacen que  $\gamma^\#$  sea isomorfismo de grupos, con inversa  $\bar{\gamma}^\#$ , con  $\bar{\gamma}$  camino inverso de  $\gamma$ .

Además, esta construcción nos sirve para ver una manera en la que  $\pi_1(X, x_0)$  puede actuar sobre  $\pi_n(X, x_0)$ . Dado  $\gamma$  lazo en  $(X, x_0)$ , la asignación  $\gamma \mapsto \gamma^\#$  es compatible con la relación de homotopía de lazos (dados  $\gamma \simeq \omega$  rel  $s_0$ , entonces  $\gamma^\# = \omega^\#$ ), y esto da lugar a una aplicación  $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Aut}(\pi_n(X, x_0))$ . Esto da lugar a la acción de  $\pi_1(X, x_0)$  sobre  $\pi_n(X, x_0)$  definida por

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) &\rightarrow \pi_n(X, x_0) \\ ([\gamma], [f]) &\mapsto [\gamma f] \end{aligned}$$

Si denotamos  $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$  al anillo de sumas finitas formales de elementos de  $\pi_1(X, x_0)$ , gracias a la acción anterior, cuando  $n \geq 2$ , como  $\pi_n(X, x_0)$  es abeliano, nos permite ver  $\pi_n(X, x_0)$  como un  $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$ -módulo.

Otra propiedad de utilidad es que podemos ver  $\pi_n$  como un funtor de  $\mathcal{PT}$  en  $\mathcal{G}$ . Su demostración es análoga a la del grupo fundamental.

**Proposición 2.3.** Dada una aplicación continua  $\varphi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ,  $\pi_n$  induce un homomorfismo de grupos  $\pi_n(\varphi) = \varphi_*$  definido como

$$\begin{aligned} \varphi_* : \pi_n(X, x_0) &\rightarrow \pi_n(Y, y_0) \\ [f] &\mapsto \varphi_*[f] := [\varphi \circ f] \end{aligned}$$

Es más, si  $\varphi$  es una equivalencia de homotopía, la aplicación inducida  $\varphi_*$  es un isomorfismo sobre todos los grupos de homotopía, incluyendo  $\pi_0$ .

Los grupos de homotopía también se comportan bien con respecto a productos.

**Proposición 2.4.** Dada  $\{(X_i, x_i)\}_{i=1}^n$  colección finita de espacios con punto base, entonces  $\pi_n(\prod_{i=1}^n X_i, (x_1, \dots, x_n)) \cong \bigoplus_{i=1}^n \pi_n(X_i, x_i)$ .

**Demostración.** Se comprueba fácilmente que el isomorfismo se obtiene por la propiedad universal del producto. En [Swi75, pg. 52] se puede encontrar la demostración para  $|\Lambda| = 2$ . ■

Por último, veamos que los espacios recubridores introducidos en el capítulo anterior nos son útiles para el cálculo de grupos de homotopía.

**Proposición 2.5.** Dada  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  aplicación recubridora, la aplicación inducida  $p_* : \pi_r(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_r(X, x_0)$  es un monomorfismo para  $r = 1$  e isomorfismo para  $r \geq 2$ .

**Demostración.**  $p_*$  **inyectiva:** sea  $[\tilde{f}] \in \pi_r(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  tal que  $p_*[\tilde{f}] = 0$ . Entonces, existe  $H : S^n \times I \rightarrow X$  homotopía de  $p \circ \tilde{f}$  a  $c_{x_0} \equiv x_0$ . Por la proposición 1.6, existe una única  $\tilde{H} : S^n \times I \rightarrow \tilde{X}$  homotopía que eleva a  $H$ . Como  $\tilde{f}$  y  $c_{\tilde{x}_0}$  son elevaciones de  $p \circ \tilde{f}$  y  $c_{x_0}$  respectivamente, por la unicidad,  $\tilde{H}$  es homotopía de  $\tilde{f}$  a  $c_{\tilde{x}_0}$ , y  $[\tilde{f}] = 0$ .

$p_*$  **sobreyectiva:** dada  $[f] \in \pi_r(X, x_0)$ , cuando  $n \geq 2$ , veremos en la proposición 3.4 que  $S^n$  es simplemente conexo. De aquí, aplicando la proposición 1.7, como  $f_*(\pi_1(S^n, s_0)) = f_*(\{0\}) = \{0\} \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$  independientemente del valor del último, existe  $\tilde{f} : S^n \rightarrow \tilde{X}$  elevación de  $f$ , por lo que  $p_*[\tilde{f}] = [p \circ \tilde{f}] = [f] = 0$ .

■

## 2.3 Primeros cálculos de grupos de homotopía

Con lo que hemos visto hasta el momento podemos dar algunos ejemplos de grupos de homotopía fáciles de calcular. Aprovecharemos para hacer nuestro primer cálculo de grupos de homotopía de esferas:  $\pi_n(S^1)$  para  $n \geq 1$ .

El primer ejemplo es más sencillo. Calculemos los grupos de homotopía de un espacio  $X$  contráctil. Debe existir una equivalencia de homotopía  $\varphi : X \rightarrow \{*\}$ , y por las propiedades de la sección anterior, esto nos induce  $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(\{*\}, *)$  isomorfismo  $\forall n \geq 0 \forall x_0 \in X$ . Como  $\pi_n(\{*\}, *) = 0$ , pues solo hay una aplicación posible  $S^n \rightarrow \{*\}$  sobre este espacio, tenemos que todos los grupos de homotopía de  $X$  son triviales, y así están generados por la clase de homotopía de cualquier aplicación  $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ , respectivamente para cada  $n \geq 0$ .

Pasemos ahora al cálculo de los grupos de homotopía de la circunferencia. Recordemos que  $\mathbb{R}$  es espacio recubridor de  $S^1$ , con la aplicación recubridora  $p$  dada en el primer capítulo. Por las propiedades del apartado anterior, la aplicación inducida  $p_* : \pi_n(\mathbb{R}, 0) \rightarrow \pi_n(S^1, s_0)$  es un isomorfismo para  $n \geq 2$ , que son los casos que nos faltan por calcular. Pero como  $\mathbb{R}$  es un espacio contráctil, sus grupos de homotopía son triviales. Por lo tanto, los de  $S^1$  también, y finalmente tenemos:

$$\pi_n(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } n = 1 \\ 0, & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Para esferas de mayor dimensión se necesitan herramientas más elaboradas.

## 2.4 Grupos de homotopía relativos

Describamos ahora la versión relativa de los grupos de homotopía. Vamos a estudiar sus relaciones con los grupos absolutos y la sucesión exacta larga de homotopía relativa, que es fundamental en el cálculo de ambos. Comenzamos con la definición.

**| Definición 2.2 (Conjunto de homotopía relativo).** Sean  $(X, x_0)$  un espacio con punto base,  $x_0 \in A \subseteq X$  un subespacio de  $X$  y  $n \geq 1$ . Sea  $\mathcal{C}(D^n, S^{n-1}, s_0; X, A, x_0)$ , con  $s_0 \in S^{n-1}$ , el conjunto de aplicaciones continuas  $f : (D^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$  tales que  $f(S^{n-1}) \subseteq A$ . Definimos el  $n$ -ésimo conjunto de homotopía relativo como el conjunto cociente de  $\mathcal{C}(D^n, S^{n-1}, s_0; X, A, x_0)$  con la relación de equivalencia de homotopía rel  $x_0$ , y lo denotamos  $\pi_n(X, A, x_0)$ .

Ahora vamos a dotar a estos conjuntos de estructura de grupo. Dado  $n \geq 2$ , y entendiendo  $x_0 \in D^{n-1} \subseteq D^n$ , podemos sumar  $[f], [g] \in \pi_n(X, A, x_0)$  a través de  $(D^n, S^{n-1}, s_0) \xrightarrow{c} (D^n \vee D^n, S^{n-1} \vee S^{n-1}, *) \xrightarrow{f \vee g} (X, A, x_0)$ , donde  $c$  contrae  $D^{n-1}$  en el punto  $*$ . El elemento neutro está representado por cualquier aplicación con imagen contenida completamente en  $A$ . Sin embargo, no es posible dotar de manera general a  $\pi_1(X, A, x_0)$  de estructura de grupo. Si tomamos el par  $(\mathbb{R}, \mathbb{Z}, 0)$ , para dos caminos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  que empiecen en 0 y terminen en 1 y 2 respectivamente no existe una manera natural (functorial) de dotarlo de estructura de grupo. Además,  $\pi_0(X, A, x_0)$  no está definido para ningún par.

Para ver los grupos de homotopía relativos definidos desde  $I^n$ , tomamos el espacio  $J^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in I^n : \exists j \in \{1, \dots, n-1\} : x_j \in \{0, 1\} \text{ o } x_n = 0\} \subseteq \partial I^n$ . Así, podemos ver  $\pi_n(X, A, x_0)$  como el conjunto  $\mathcal{C}(I^n, \partial I^n, J^{n-1}; X, A, x_0)$  sobre la relación de equivalencia de homotopía rel  $J^{n-1}$ . La operación de grupo se define igual que como se hizo al principio del capítulo para los grupos de homotopía.

Inmediatamente se observa que los grupos de homotopía son un caso particular de los relativos, pues  $\pi_n(X, \{x_0\}, x_0) = \pi_n(X, x_0) \forall n \geq 1$ . También se tiene que las aplicaciones continuas  $\varphi : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  inducen un homomorfismo  $\varphi_*$  entre los grupos de homotopía relativos.

Dado  $(X, A, x_0)$  par con punto base, también existe un concepto de par  $n$ -conexo:

**| Definición 2.3 (Par  $n$ -conexo).** Dado  $(X, A, x_0)$  par con punto base, se dice que este par es 0-conexo si toda componente por caminos de  $X$  se interseca con  $A$  en un conjunto no vacío. Para  $n \geq 1$ , se dice que este par es  $n$ -conexo si es 0-conexo y  $\pi_r(X, A, x_0) = 0 \forall r = 1, \dots, n$ .

Nuestra motivación para introducir el concepto de grupo de homotopía relativo, como ya dijimos, es que estos aparecen en una sucesión exacta larga, conocida como la **sucesión exacta larga de homotopía del par**  $(X, A, x_0)$ , que usaremos más adelante. Dicha sucesión viene dada por:

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_0(X, x_0)$$

Los homomorfismos que conforman la sucesión anterior son:

- $\underline{\partial}$  : restringe  $f : (D^{n+1}, S^n, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  a su frontera, obteniendo una aplicación  $(S^n, s_0) \rightarrow (A, x_0)$ .
- $\underline{i}_*$  : es la inducida por la inclusión  $(A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$ .
- $\underline{j}_*$  : es la inducida por la inclusión  $(X, \{x_0\}, x_0) \hookrightarrow (X, A, x_0)$ .

La proposición que nos interesa es la siguiente.

**Proposición 2.6.** La sucesión anterior es exacta.

**Demostración.** Veamos que dos composiciones sucesivas dan el homomorfismo nulo. Para el resto, véase [Hat01, pg. 344-345].

$\underline{i}_* \circ \underline{\partial}$  : dada  $[f] \in \pi_{n+1}(X, A, x_0)$ , la aplicación  $H_t(s) = f((1-t)s + ts_0)$  es una homotopía de aplicaciones  $S^n \rightarrow X$  entre  $H_0 = f|_{S^n}$  y  $H_1 \equiv x_0$ , por lo que  $(\underline{i}_* \circ \underline{\partial})[f]$  es el elemento neutro de  $\pi_n(X, x_0)$  (ver figura 2.3).

$\underline{j}_* \circ \underline{i}_*$  : dada  $[f] \in \pi_n(A, x_0)$ , es obvio que  $\text{im}(j \circ i \circ f) \subseteq A$ , por lo que representa el elemento neutro en  $\pi_n(X, A, x_0)$ .

$\underline{\partial} \circ \underline{j}_*$  : dada  $[f] \in \pi_{n+1}(X, x_0)$ , como  $f : (D^{n+1}, S^n, s_0) \rightarrow (X, \{x_0\}, x_0)$  está basada en  $x_0$ , la restricción de  $j \circ f$  a la frontera de  $D^{n+1}$  es la aplicación constante en  $x_0$ , que representa el elemento neutro en  $\pi_n(A, x_0)$ . ■

Hacia el final de la sucesión, los conjuntos empiezan a perder su estructura de grupo. Sin embargo, aún tiene sentido hablar de exactitud, y de hecho, esta se conserva también en estos últimos términos. El núcleo de los morfismos está bien definido porque trabajamos con conjuntos con punto base. En este caso, dada una aplicación  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  entre conjuntos con punto base, definimos su núcleo como  $\ker f = \{x \in X : f(x) = y_0\}$ .

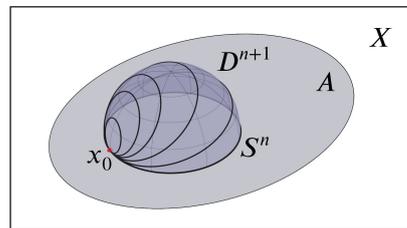


Figura 2.3: Homotopía  $f$  en  $\underline{i}_* \circ \underline{\partial}$ .

Se deduce inmediatamente de esta sucesión el siguiente corolario que nos caracteriza cuando un par  $(X, A, x_0)$  es  $n$ -conexo.

**Corolario 2.1.** Un par con punto base  $(X, A, x_0)$  es  $n$ -conexo  $\Leftrightarrow$  la aplicación inducida por la inclusión  $i_* : \pi_r(A, x_0) \rightarrow \pi_r(X, x_0)$  es un isomorfismo para  $0 \leq r < n$  y un epimorfismo para  $r = n$ .

## 2.5 Grupos de homotopía y fibraciones

Introdujimos en el primer capítulo las fibraciones por sus buenas propiedades con respecto a las homotopías. Ahora, dichas fibraciones nos van a permitir desarrollar herramientas para el cálculo de los grupos de homotopía. El objetivo de esta sección es, por lo tanto, estudiar las propiedades que surgen al relacionar ambos conceptos.

La siguiente proposición es de carácter técnico pero será fundamental en nuestra exposición.

**Proposición 2.7.** Sea  $p : E \rightarrow B$  fibración de Serre. Tomamos  $e_0 \in E$  y  $b_0 \in B$  puntos base, y sea  $F = p^{-1}(b_0)$  su fibra. Entonces,  $p_* : \pi_n(E, F, e_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$  es un isomorfismo  $\forall n \geq 1$ .

**Demostración.** Primero de todo, notemos que  $p_*$  no es más que la aplicación inducida entre grupos relativos tomando  $\pi_n(B, b_0) \cong \pi_n(B, \{b_0\}, b_0)$ .

$p_*$  **sobreyectiva:** dada  $[f] \in \pi_n(B, b_0)$ , con  $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (B, \{b_0\}, b_0)$ , hay que encontrar una preimagen. Veamos  $I^{n-1} \subseteq I^n$  como el subespacio con  $x_n = 0$  y  $f$  como una homotopía sobre  $I^{n-1}$ . Sea  $\tilde{g} : J^{n-1} \rightarrow E$  tal que  $\tilde{g} \equiv e_0$ . Entonces,  $\tilde{g}|_{I^{n-1}}$  es una elevación de  $f|_{I^{n-1}}$  y  $\tilde{g}|_{\partial I^{n-1} \times I}$  es homotopía que empieza en  $f|_{\partial I^{n-1}}$ . Aplicando la HLP relativa sobre el par  $(I^{n-1}, \partial I^{n-1})$ , obtenemos  $\tilde{f} : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (B, \{b_0\}, b_0)$  tal que  $\tilde{f}|_{I^{n-1}} = \tilde{g}$  y  $p \circ \tilde{f} = f$ . Como  $f(\partial I^n) = \{b_0\} = (p \circ \tilde{f})(\partial I^n)$ , entonces  $\tilde{f}(\partial I^n) \subseteq p^{-1}(b_0) = F$ . Por lo tanto,  $[\tilde{f}] \in \pi_n(E, F, e_0)$  y  $p_*[\tilde{f}] = [p \circ \tilde{f}] = [f]$ .

$p_*$  **inyectiva:** sean  $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, F, e_0)$  tales que  $p_*[\tilde{f}_0] = p_*[\tilde{f}_1]$ . Sea  $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I, J^n \times I) \rightarrow (B, \{b_0\}, b_0)$  homotopía de  $p \circ \tilde{f}_0$  a  $p \circ \tilde{f}_1$ . Definimos una aplicación  $\tilde{G}$  sobre un subespacio de  $I^n \times I$  como  $\tilde{f}_0$  en  $I^n \times \{0\}$ ,  $\tilde{f}_1$  en  $I^n \times \{1\}$  y  $\equiv e_0$  en  $J^n \times I$ . No es difícil comprobar que el subespacio sobre el que se ha definido es  $J = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in I^n \times I : \exists j \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{n\} : x_j \in \{0, 1\} \text{ o } x_n = 0\}$ , que  $\tilde{G}$  está bien definida y que  $p \circ \tilde{G} = H|_J$ . Por lo tanto, si  $\alpha : I^{n+1} \rightarrow I^{n+1}$  es la aplicación que permuta las dos últimas coordenadas, esta transforma el conjunto  $J$

en  $J^n$  y  $p \circ \tilde{G} \circ \alpha|_{J^n} = H \circ \alpha|_{J^n}$ . De igual manera que antes para la sobreyectividad, aplicando la HLP relativa sobre el par  $(I^n, \partial I^n)$ , obtenemos  $H' : I^n \times I \rightarrow E$  tal que  $H'|_{J^n} = \tilde{G} \circ \alpha|_{J^n}$  y  $p \circ H' = H \circ \alpha$ . Por lo tanto,  $H' \circ \alpha|_J = \tilde{G}$  y  $p \circ H' \circ \alpha = H$ , así que la homotopía que buscamos es  $\tilde{H} = H' \circ \alpha$ , que cumple además que, para  $i = 0, 1$ ,  $\tilde{H}_i = H'|_{\{x_n=i\}} \circ \alpha|_{\{x_n=i\}} = \tilde{G}_i = \tilde{f}_i$ , así que  $[\tilde{f}_0] = [\tilde{f}_1]$ . ■

Gracias a esta propiedad, dada una fibración (o fibración de Serre)  $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ , vamos a poder construir la **sucesión exacta larga de homotopía de la fibración**  $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ . Para ello, tomamos el par  $(E, F, e_0)$  y como tenemos los isomorfismos  $\pi_n(E, F, e_0) \cong \pi_n(B, b_0) \forall n \geq 1$ , podemos efectuar las sustituciones correspondientes en la sucesión de homotopía del par anterior para obtener

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}(B, b_0) \rightarrow \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_0(E, e_0) \rightarrow \pi_0(B, b_0)$$

donde los morfismos implicados que faltan son las composiciones que hacen conmutativos los triángulos de diagrama inferior.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(E, e_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_{n+1}(E, F, e_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(F, e_0) & \longrightarrow & \dots \\ & & & & \downarrow p_* & & & & \\ & & & & \pi_{n+1}(B, b_0) & & & & \end{array}$$

Notemos que según la sucesión de homotopía de partida deberíamos haber acabamos en  $\pi_0(E, e_0)$ , pero podemos usar  $p_*$  para extenderla una vez más.

En general, una aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  no es una fibración, y por lo tanto no da lugar a una sucesión exacta de sus grupos de homotopía. Sin embargo, sí que es posible factorizar  $f$  en una equivalencia de homotopía y una fibración, lo cual sí nos dará lugar a una sucesión exacta para la aplicación. Veamos en detalle cuál es el proceso que llevar a cabo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i & \nearrow p & \\ E_f & & \end{array}$$

Consideramos  $Y^I$ , espacio de todos los caminos posibles sobre  $Y$  con la topología compacto-abierto. Sea  $E_f = \{(x, \omega) \in X \times Y^I : \omega(0) = f(x)\} \subseteq X \times Y^I$  con la topología de subespacio. Este último es el espacio sobre el que factorizaremos  $f$ .

Primero, notemos que se puede ver el espacio  $X$  dentro de  $E_f$  con la inclusión natural  $i(x) = (x, \omega_{f(x)})$ , donde  $\omega_{f(x)} \equiv f(x)$  es el camino constante en el punto  $x \in X$ . Esto nos permite ver que podemos retraer con deformación el espacio  $E_f$

sobre  $X$  a lo largo de cada camino en caminos cada vez más cortos hasta llegar al camino constante con  $H_t(x, \omega(s)) = (x, \omega(s(1-t)))$ . Esto nos indica que tienen el mismo tipo de homotopía, y por lo tanto sus grupos de homotopía serán isomorfos.

Para terminar, nos hace falta una aplicación  $p: E_f \rightarrow Y$  tal que el diagrama conmute. La definición natural de esta aplicación es  $p(x, \omega) = \omega(1)$ . Se comprueba que  $(p \circ i)(x) = p(x, \omega_{f(x)}) = \omega_{f(x)}(1) = f(x) \forall x \in X$ . Además, la continuidad de ambas aplicaciones se deduce de la proposición 1.9. Ahora solo nos queda un paso que probar:

**Proposición 2.8.** La aplicación  $p: E_f \rightarrow Y$  anterior es una fibración.

*Demostración.* Sean  $Z$  espacio topológico,  $H: Z \times I \rightarrow Y$  homotopía y  $\tilde{g}: Z \rightarrow E$  elevación de  $g = H_0$ . Denotamos  $H_{[0,t]}^z(s) = H(z, st)$  camino que recorre  $H(z, s)$  cuando  $0 \leq s \leq t$ . Si escribimos  $\tilde{g}(z) = (h(z), \omega^z)$ , con  $h: Z \rightarrow X$  correspondiente y  $\omega^z$  un camino dependiente de  $z$ , definimos la homotopía elevada  $\tilde{H}: Z \times I \rightarrow E_f$  como  $\tilde{H}(z, t) = (h(z), \omega^z \cdot H_{[0,t]}^z)$ . El producto de caminos está bien definido porque  $H_{[0,t]}^z(0) = H(z, 0) = g(z) = (p \circ \tilde{g})(z) = p(h(z), \omega^z) = \omega^z(1)$ . La continuidad de  $\tilde{H}$  se tiene de nuevo por la proposición 1.9. Finalmente, esta homotopía eleva a  $H$ , pues  $p(\tilde{H}(z, t)) = p(h(z), \omega^z \cdot H_{[0,t]}^z) = (\omega^z \cdot H_{[0,t]}^z)(1) = H_{[0,t]}^z(1) = H(z, t) \forall t, s \in I$ . ■

Pasamos ahora a calcular la fibra. Para ello, fijamos  $y_0 \in Y$ , y así sean  $F = f^{-1}(y_0)$  y  $F_f = p^{-1}(y_0)$ , donde a  $F_f$  lo llamamos la fibra homotópica de  $p$  en  $y_0$ . Vamos a ver que  $F \simeq F_f$ . Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{\subseteq} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i|_F & & \downarrow i & \nearrow p & \\ F_f & \xrightarrow{\subseteq} & E_f & & \end{array}$$

Primero, notemos que efectivamente  $i(F) \subseteq F_f$  por la conmutatividad del diagrama. Tenemos que  $F_f = \{(x, \omega) \in X \times Y^I : \omega(0) = f(x), \omega(1) = y_0\}$ , y podemos ver  $F$  en  $F_f$  como  $i(F) = \{(x, \omega) \in X \times Y^I : \omega \equiv f(x), \omega(1) = y_0\} = X \times \{\omega_{y_0}\}$ . La homotopía  $G_t(x, \omega(s)) = (x, \omega(t + s(1-t)))$  retrae con deformación  $F_f$  sobre  $F$ , por lo que tienen el mismo tipo de homotopía.

A partir de la sucesión exacta de la fibración  $F_f \rightarrow E_f \rightarrow Y$ , e intercambiando los grupos de homotopía de  $F_f$  y  $E_f$  por los de  $F$  y  $X$  respectivamente, obtenemos la sucesión exacta de la aplicación

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}(Y, y_0) \rightarrow \pi_n(F, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_0(Y, y_0)$$

donde  $x_0$ , punto base de  $F$  y  $X$ , es un punto cualquiera en  $F = f^{-1}(y_0)$ . Los morfismos implicados se vuelven a obtener de las composiciones adecuadas al realizar las sustituciones de unos grupos de homotopía por otros.

En el caso en que  $X \subseteq Y$  y  $f : X \rightarrow Y$  sea la inclusión, podemos identificar esta sucesión con la sucesión del par  $(Y, X, x_0)$ , con  $x_0 \in X$ . Gracias a que tenemos  $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(E_f, (x_0, \omega_{f(x_0)})) \forall n \geq 0$ , podemos usar el lema de los cinco sobre las sucesiones de homotopía del par  $(Y, X, x_0)$  y la sucesión que acabamos de obtener para obtener que la aplicación inducida por la inclusión  $(F, \{x_0\}, x_0) \hookrightarrow (Y, X, x_0)$  es un isomorfismo entre  $\pi_n(F, x_0) \cong \pi_n(Y, X, x_0) \forall n \geq 0$ . Además, obtenemos que efectivamente podemos identificar ambas sucesiones, pues los grupos de ambas sucesiones son isomorfos y las aplicaciones correspondientes conmutan.

Recordando ahora (proposición 1.10) que dado un espacio con punto base  $(X, x_0)$ ,  $\Omega X \rightarrow PX \rightarrow X$  es una fibración, y teniendo en cuenta que también vimos que  $PX$  es contráctil (y por lo tanto sus grupos de homotopía son triviales), de la sucesión de la fibración se obtiene que  $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_{n-1}(\Omega X, \omega_{x_0}) \forall n \geq 1$ .

Se deduce también del razonamiento anterior que, aunque ya dijimos que no era posible dotar para cualquier  $(X, x_0)$  a  $\pi_0(X, x_0)$  de estructura de grupo de modo functorial, para los espacios de lazos sí se puede hacer. Esto se debe a que los espacios de lazos son lo que se llama un **H-espacio**, aunque no usaremos este concepto en ningún momento. Se puede consultar más sobre ellos en el capítulo 3 de [Swi75]. También se obtiene que el grupo fundamental del espacio de lazos de un  $(X, x_0)$  arbitrario es abeliano, pues  $\pi_1(\Omega X, \omega_{x_0}) \cong \pi_2(X, x_0)$  donde este último es abeliano.



## 3 | Homotopía en CW-complejos

Hasta el momento hemos estudiado los grupos de homotopía sobre espacios topológicos generales. A partir de ahora, vamos a restringirnos a los CW-complejos, cuya estructura combinatoria permite probar resultados importantes.

En este contexto, demostraremos cinco teoremas que nos proporcionan herramientas de cálculo más avanzadas. Con dichas herramientas, podremos empezar a abordar el problema de los grupos de homotopía de las esferas, calculando  $\pi_m(S^n)$  cuando  $m \leq n$ . Para  $m > n$ , describiremos el cálculo de  $\pi_3(S^2)$ , el primero que se descubrió no isomorfo al grupo de homología correspondiente.

### 3.1 Aproximación Celular

Para poder trabajar de manera efectiva con CW-complejos, necesitaremos aplicaciones que respeten la estructura combinatoria de los mismos. Estas son las aplicaciones celulares, y una vez definidas, podremos estudiar el comportamiento de la homotopía respecto a la estructura de los CW-complejos, destacando como principales resultados el Teorema de Aproximación Celular y el Teorema de Whitehead. Finalmente, se construirán las CW-aproximaciones, torres de Postnikov y espacios de Eilenberg-MacLane, fundamentales en teoría de homotopía.

#### 3.1.1 Teorema de Aproximación Celular

El objetivo de esta sección es probar el Teorema de Aproximación Celular (TAC, en adelante), y con él, calcular  $\pi_m(S^n)$  para  $m < n$ . Este teorema nos permite aproximar cualquier aplicación continua entre CW-complejos por una aplicación celular, en el

sentido de que existe una aplicación celular homotópica a la primera. Introduzcamos ya qué es una aplicación celular.

**| Definición 3.1 (Aplicación celular).** Dada  $f : X \rightarrow Y$  aplicación continua entre CW-complejos, decimos que es celular si  $f(X^n) \subseteq Y^n \forall n \geq 0$ .

Esta es una propiedad bastante natural que pedirle a nuestras aplicaciones en el contexto de CW-complejos, y en particular respeta la estructura combinatoria. De hecho, nuestro objetivo es ver que todas nuestras aplicaciones son de esta forma salvo homotopía.

La siguiente propiedad será esencial para construir la homotopía en la demostración:

**| Definición 3.2 (HEP).** Una inclusión  $i : A \rightarrow X$  se dice que tiene la propiedad de extensión de homotopía (HEP, del inglés, *homotopy extension property*) respecto a un espacio topológico  $Y$  si para toda aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  y toda homotopía  $G : A \times I \rightarrow Y$  de  $f|_A$  existe una homotopía  $H : X \times I \rightarrow Y$  de  $f$  que extiende a  $G$ , es decir, tal que  $H|_{A \times I} = G$ .

**| Definición 3.3 (Cofibración).** Una inclusión  $i : A \rightarrow X$  se dice cofibración si tiene la HEP con respecto a cualquier espacio.

La siguiente proposición nos muestra que cuando pegamos una celda, la inclusión es cofibración.

**Proposición 3.1.** Dada  $g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  aplicación continua, la inclusión en el cono  $i : Y \rightarrow Y \cup_g CX$  es una cofibración.

La demostración es analítica y se puede encontrar en [Swi75, pg. 75]. Gracias a que podemos extender las homotopías a nuevas celdas que peguemos, podemos probar el siguiente resultado.

**Proposición 3.2.** Sea  $(X, A)$  un CW-complejo relativo, entonces  $i : A \rightarrow X$  inclusión es una cofibración.

**Demostración.** Primero, como cada  $n$ -celda  $e_\alpha^n$  tiene una aplicación de pegado  $g_\alpha^n$ , podemos ver el pegamiento de estas celdas con una sola aplicación  $\bigvee_\alpha g_\alpha^n : \bigvee_\alpha S_\alpha^n \rightarrow (X, A)^{n-1}$  para obtener  $(X, A)^n$ , por lo que  $(X, A)^{n-1} \subseteq (X, A)^n$  es una cofibración.

Ahora, dadas  $f : X \rightarrow Y$  y  $G : A \times I \rightarrow Y$  homotopía tal que  $G_0 = f|_A$ , podemos extender  $G$  inductivamente sobre cada esqueleto construyendo homotopías  $H^n : (X, A)^n \times I \rightarrow Y$  tales que

- $H^{-1} = G$ .
- $H_0^n = f|_{(X,A)^n}$ .
- $H^n|_{(X,A)^{n-1} \times I} = H^{n-1}$ .

Entonces, es fácil comprobar que la homotopía que buscamos es  $H : X \times I \rightarrow Y$  definida tal que  $H(x, t) = H^n(x, t)$  si  $x \in (X, A)^n$ . ■

El siguiente lema es crucial para la demostración del TAC. Notemos previamente que dada  $e_\alpha^n$  celda de un complejo celular, por definición,  $\mathring{e}_\alpha^n \cong \mathring{D}^n \cong \mathbb{R}^n$ . Esto nos permite inducir una estructura lineal sobre la celda que nos permitirá controlar mejor nuestras aplicaciones. Esta técnica se usará en los siguientes resultados.

**Lema 3.1.** Sea  $W$  espacio topológico. Dada  $\rho : S^{k-1} \rightarrow W$  aplicación continua, sean  $Z = W \cup_\rho D^k$ ,  $e^k$  la  $k$ -celda pegada,  $\varphi : \mathring{e}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  homeomorfismo y  $f : I^n \rightarrow Z$  aplicación continua. Entonces,  $\exists H : I^n \times I \rightarrow Z$  rel  $f^{-1}(W) \cup \partial I^n$  homotopía tal que  $H_0 = f$  y  $H_t(f^{-1}(\mathring{e}^k)) \subseteq \mathring{e}^k \forall t \in I$ . Además, si  $\tilde{f} = H_1$ , existe  $K$  un complejo simplicial finito sobre un subespacio de  $I^n$  tal que:

- 1)  $\tilde{f}(\Delta) \subseteq \mathring{e}^k$  y  $\varphi \circ \tilde{f}|_\Delta$  es lineal  $\forall \Delta \in K$ .
- 2)  $\exists U \subseteq \mathring{e}^k$  abierto tal que  $\tilde{f}^{-1}(U) \subseteq |K|$ .

**Demostración.** Para probar el resultado, vamos a construir explícitamente  $H$  y  $K$ .

Tomamos  $B_1, B_2 \subseteq \mathring{e}^k$  como  $B_r = \varphi^{-1}(\bar{B}(0, r))$ ,  $r = 1, 2$ , cerrados. El conjunto  $f^{-1}(B_2)$  es cerrado en  $I^n$  compacto, así que es compacto, y  $\varphi \circ f$  es uniformemente continua en  $f^{-1}(B_2)$ . Por el lema de Lebesgue,  $\exists \varepsilon_1 > 0$  tal que  $\forall x, y \in f^{-1}(B_2)$  tales que  $|x - y| < \varepsilon_1$  se tiene que  $|(\varphi \circ f)(x) - (\varphi \circ f)(y)| < \frac{1}{2}$ . Como los conjuntos  $f^{-1}(B_1)$  e  $I^n \setminus f^{-1}(\mathring{B}_2)$  son cerrados disjuntos, la distancia  $d$  entre ellos es positiva. Elegimos  $\varepsilon \in (0, \min\{\frac{d}{2}, \varepsilon_1\})$ .

Subdividimos  $I^n$  en cubos (cerrados) de igual tamaño tales que cada uno se encuentra dentro de una bola de diámetro  $\varepsilon$ . Sean  $K_1$  la unión de todos los cubos que se intersecan con  $f^{-1}(B_1)$  y  $K_2$  la de los que se intersecan con  $K_1$ . Dividimos inductivamente los cubos de  $I^n$  en símlices: las aristas de los cubos ya son 1-símlices, y para dividir  $C^r$  un  $r$ -cubo, cara de un  $n$ -cubo, en símlices, sabemos que podemos dividir sus caras en símlices y formar el cono (simplicial) de este complejo con vértice el centro de  $C^r$ . Sea  $K$  el subcomplejo con espacio subyacente  $|K| = K_1$ .

Veamos que  $K_2 \subseteq f^{-1}(\mathring{B}_2)$ . Dado  $x \in K_2$ ,  $\exists C_1 \subseteq K_1$ ,  $\exists C_2 \subseteq K_2$  cubos tales que  $x \in C_2$  y  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ . Tomamos  $y \in C_1 \cap C_2$ , y como  $C_1 \cap f^{-1}(B_1) \neq \emptyset$ ,  $\exists z \in C_1 \cap f^{-1}(B_1)$ . Tenemos que  $d(x, f^{-1}(B_1)) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < 2\varepsilon < d$ . Por lo tanto,  $x \notin I^n \setminus f^{-1}(\mathring{B}_2) \Rightarrow x \in f^{-1}(\mathring{B}_2)$ .

Definimos  $g: K_2 \rightarrow \dot{e}^k$  tal que  $g(v) = f(v) \forall v$  vértice de  $K_2$ , y la extendemos linealmente dentro de cada símlice, es decir, dado  $x \in K_2$ ,  $x \in \Delta^r$  con  $\Delta^r$   $r$ -símlice de vértices  $v_0, \dots, v_r$ , entonces  $x = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_r v_r$  coordenadas baricéntricas, y definimos  $g(x) = \varphi^{-1}(\lambda_0(\varphi \circ f)(v_0) + \dots + \lambda_r(\varphi \circ f)(v_r))$ . Sea  $h: K_2 \rightarrow [0, 1]$  lineal en los símlices tal que  $h(v) = 1$  si  $v$  vértice de  $K_1$  y  $h(v) = 0$  si  $v$  vértice en  $K_2 \setminus K_1$ . La homotopía  $G: K_2 \times I \rightarrow \dot{e}^k$  tal que  $G(x, t) = \varphi^{-1}((1-th(x))(\varphi \circ f)(x) + th(x)(\varphi \circ g)(x))$  cumple que  $G_0 = f|_{K_2}$  y  $G_1|_{K_1} = g|_{K_1}$ . Además, en aquellos símlices  $\Delta^r = (v_0, \dots, v_r)$  de  $K_2$  disjuntos de  $K_1$ ,  $h(x) = \lambda_0 h(v_0) + \dots + \lambda_r h(v_r) = \lambda_0 \cdot 0 + \dots + \lambda_r \cdot 0 = 0$ , por lo que  $G|_{\Delta^r} \equiv f|_{\Delta^r}$ , y extendemos  $G$  a  $H: I^n \times I \rightarrow Z$  como  $H \equiv G$  en  $K_2$  y  $H_t \equiv f \forall t \in I$  fuera de  $K_2$ . Sea  $\tilde{f} = H_1: I^n \rightarrow Z$ .

Comprobemos que se cumplen las propiedades deseadas. Como  $Z = W \sqcup \dot{e}^k$ , entonces  $I^n = f^{-1}(W) \sqcup f^{-1}(\dot{e}^k)$ , y como  $K_2 \subseteq f^{-1}(B_2) \subseteq f^{-1}(\dot{e}^k)$  y  $H$  es estacionaria fuera de  $K_2$ ,  $H$  es rel  $f^{-1}(W)$ . Notemos que  $H$  es relativa a los puntos que están fuera del interior (en  $\mathbb{R}^n$ ) de  $K_2$ . Como este interior es disjunto de  $\partial I^n$ ,  $H$  también es rel  $\partial I^n$ . Además, se tiene que  $f^{-1}(\dot{e}^k) = (f^{-1}(\dot{e}^k) \setminus K_2) \sqcup K_2$ . En  $f^{-1}(\dot{e}^k) \setminus K_2$  vale siempre  $f$ , por lo que  $H_t(x) = f(x) \in \dot{e}^k \forall t \in I \forall x \in f^{-1}(\dot{e}^k)$ , y en  $K_2$  por definición de  $G = H|_{K_2 \times I}$ ,  $\text{im } G \subseteq \dot{e}^k$ . Finalmente:

- 1) Dado  $x \in K_1 = |K|$ ,  $\tilde{f}(x) = H_1(x) \subseteq H_1(K_1) \subseteq H_1(K_2) \subseteq H_1(f^{-1}(\dot{e}^k)) \subseteq \dot{e}^k$ . Además,  $\varphi \circ \tilde{f}|_{K_1} = \varphi \circ H_1|_{K_1} = \varphi \circ g|_{K_1}$  lineal por definición.
- 2) Veamos que  $(\varphi \circ \tilde{f})(I^n \setminus \mathring{K}_1)$  es un compacto (imagen continua de compacto) que no contiene al cero. Por construcción, en  $I^n \setminus K_2$  tenemos  $\tilde{f} = f$ , y ya que  $f^{-1}(B_1) \subseteq K_2$ , se deduce que  $f(I^n \setminus K_2) \cap B_1 \neq \emptyset$ , así que  $0 \notin (\varphi \circ \tilde{f})(I^n \setminus K_2)$  pues  $0 \in \varphi(B_1)$  y  $\varphi$  biyectiva. Dado un símlice  $\Delta \subseteq K_2: \Delta \notin K$ , como  $K_2 \subseteq f^{-1}(B_2)$  y por la elección de  $\varepsilon$ , existe una bola abierta  $B \subseteq \mathbb{R}^k$  de radio  $\frac{1}{2}$  tal que  $(\varphi \circ f)(\Delta) \subseteq B$ , puesto que  $\text{diam } \Delta < \varepsilon < \varepsilon_1$ . Dado que  $B$  es convexo  $(\varphi \circ f)(\Delta) \subseteq B$ , por definición de  $g$ ,  $(\varphi \circ g)(\Delta) \subseteq B$ . Es más,  $(\varphi \circ H_t)(\Delta) \subseteq B \forall t \in I$ , y en particular,  $\tilde{f}(\Delta) \subseteq B$ . Como  $\Delta$  contiene puntos fuera de  $K_1$ ,  $B \not\subseteq \varphi(B_1)$ . Como  $B$  tiene radio  $\frac{1}{2}$  y  $\varphi(B_1)$  tiene radio 1, deducimos que  $0 \notin B$ , y  $0 \notin \tilde{f}(\Delta)$ . Tenemos que  $(\varphi \circ \tilde{f})(I^n \setminus \mathring{K}_1)$  es un compacto que no contiene al cero, por lo que  $\exists V \subseteq \mathbb{R}^k$  entorno abierto del cero tal que  $V \cap (\varphi \circ \tilde{f})(I^n \setminus \mathring{K}_1) \neq \emptyset$ . Por ser  $\varphi$  homeomorfismo,  $U = \varphi^{-1}(V)$  es entorno abierto de  $\varphi^{-1}(0)$  tal que  $U \cap \tilde{f}(I^n \setminus \mathring{K}_1) \neq \emptyset \Rightarrow \tilde{U} \subseteq \tilde{f}(K_1) = \tilde{f}(|K|)$ , de donde finalmente deducimos que  $\tilde{f}^{-1}(U) \subseteq |K|$ . ■

Este lema nos va a permitir deformar una aplicación continua cualquiera entre celdas de dimensión creciente de manera que la aplicación deformada deje al menos

un punto  $p$  fuera de la imagen. Con esto, podemos retraer con deformación esta última celda sin el punto  $p$  sobre su borde, para finalmente obtener una homotopía entre nuestra aplicación y otra cuya imagen tiene intersección vacía con el interior de la celda.

**Proposición 3.3.** Sean  $X, Y$  CW-complejos,  $e_\alpha^n$   $n$ -celda de  $X$  y  $e_\beta^k$   $k$ -celda de  $Y$ , con  $n < k$ . Sea  $f : X^{n-1} \cup e_\alpha^n \rightarrow Y^k$  aplicación continua. Entonces, existe una homotopía  $H : (X^{n-1} \cup e_\alpha^n) \times I \rightarrow Y^k$  de  $f$  a  $\tilde{f}$  de manera que  $\exists p \in e_\beta^k \setminus \text{im} \tilde{f}$ .

**Demostración.** Tomamos  $\phi_\alpha^n : I^n \rightarrow Y^k$  aplicación característica de  $e_\alpha^n$ ,  $Z = Y^k$  y  $W = Y^k \setminus e_\beta^k$ . El lema anterior nos proporciona una homotopía  $G$ , una aplicación  $\tilde{g} = G_1$ , un complejo simplicial  $K$  y  $U \subseteq e_\beta^k$  abierto con las propiedades descritas, respecto a un homeomorfismo  $\varphi : e_\beta^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ . De estas propiedades se deduce que  $\varphi(\text{im} \tilde{g} \cap U) \subseteq (\varphi \circ \tilde{g})(|K|) \subseteq \bigcup_{\Delta \in K} (\varphi \circ \tilde{g})(\Delta) \subseteq \mathbb{R}^k$  unión finita, donde cada  $(\varphi \circ \tilde{g})(\Delta)$  es un subespacio de una variedad lineal de dimensión  $\leq n < k$ , por lo que existe un punto  $q \in \varphi(U) \setminus \bigcup_{\Delta \in K} (\varphi \circ \tilde{g})(\Delta) \subseteq \varphi(U) \setminus \varphi(\text{im} \tilde{g} \cap U) = \varphi(U \setminus \text{im} \tilde{g})$ . El punto que buscamos es  $p = \varphi^{-1}(q) \in U \setminus \text{im} \tilde{g} \subseteq e_\beta^k \setminus \text{im} \tilde{g}$ . Ahora, como esta homotopía es rel  $\partial I^n$ , por la observación 1.1, induce una homotopía  $H$  definida estacionaria como  $f$  en  $X^{n-1}$  y como  $G$  en  $e_\alpha^n$ , y tomamos  $\tilde{f} = H_1$ . Al moverse  $H$  solo dentro de  $e_\beta^k$ , se sigue teniendo  $p \in U \setminus \text{im} \tilde{f}$ . ■

Ahora ya tenemos herramientas suficientes para probar el Teorema de Aproximación Celular.

**| Teorema 3.1 (de Aproximación Celular).** Toda aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  entre CW-complejos es homotópica a una aplicación celular. Además, si  $f$  ya es celular en un subcomplejo  $A \subseteq X$ , la homotopía se puede tomar rel  $A$ .

**Demostración.** La demostración es constructiva y la vamos a hacer en tres pasos.

**Primer paso:** veamos que existe  $f^0 \simeq f$  celular en  $X^0$ . Como cada componente conexa por caminos de  $Y$  debe tener mínimo una 0-celda, podemos encontrar una homotopía que empiece en  $f|_{X^0}$  y que nos mande cada punto de  $f(X^0)$  a algún punto de  $Y^0$ , a través de un camino que los una en  $Y$ . Extendemos esta homotopía a todo  $X$  por la HEP, y obtenemos una homotopía  $H^0$  desde  $f$  hasta la  $f^0$  que buscamos.

**Segundo paso:** veamos que dada  $f$  que ya sea celular en el  $(n-1)$ -esqueleto, se puede hacer celular en el  $n$ -esqueleto rel  $X^{n-1}$ . Sea  $f$  celular en  $X^{n-1}$ , tomamos  $e_\alpha^n$  una  $n$ -celda suya (si no tiene ninguna no hay nada que hacer). Como  $e_\alpha^n$  es compacto,  $f(e_\alpha^n) \subseteq Y$  es compacto, y por lo tanto solo se interseca con un número finito de celdas de  $Y$  por la proposición 1.4. Sea  $e_\beta^k$  la celda de  $Y$  de mayor dimensión con la que se

interseca en su interior, es decir, tal que  $f(e_\alpha^n) \cap \dot{e}_\beta^k \neq \emptyset$ , y supongamos  $k > n$  (si  $k \leq n$  ya es celular en  $X^n$ ).

Por la proposición 3.3, podemos deformar  $f|_{X^{n-1} \cup e_\alpha^n}$  rel  $X^{n-1}$  de manera que no pase por al menos un punto  $p \in f(e_\alpha^n) \cap \dot{e}_\beta^k$ . Dada  $\phi_\beta^k$  aplicación característica de  $e_\beta^k$ ,  $(\phi_\beta^k)^{-1}(p) \in \dot{D}^k$ , y  $D^k \setminus \{(\phi_\beta^k)^{-1}(p)\}$  retrae con deformación sobre  $\partial D^k$ . Por lo tanto, podemos deformar  $f|_{X^{n-1} \cup e_\alpha^n}$  en  $g$  para que  $g(e_\alpha^n) \cap \dot{e}_\beta^k = \emptyset$ , componiendo la deformación anterior con la retracción con deformación de  $Y \setminus \{p\}$  en  $Y \setminus \dot{e}_\beta^k$ , según la observación 1.1. De hecho, se puede hacer rel  $X^{n-1}$ . Repitiendo este proceso con todas las celdas de dimensión mayor que  $n$  con las que se interseca  $f(e_\alpha^n)$  en sus interiores, y para todas las  $n$ -celdas de  $X$  al mismo tiempo, obtenemos  $g^n \simeq_{G^n} f|_{X^n}$  rel  $X^{n-1}$ . Por la HEP, podemos extender  $G^n$  a una homotopía  $H^n$  rel  $X^{n-1}$  de  $f$ , donde  $f^n = H_1^n$  es celular en  $X^n$ .

**Último paso:** combinando los dos pasos anteriores, sabemos que existe una sucesión de homotopías y de aplicaciones celulares en cada esqueleto

$$f \simeq_{H^0} f^0 \simeq_{H^1} f^1 \simeq_{H^2} f^2 \simeq_{H^3} \dots$$

de manera que cada  $f^n$  es celular en  $X^n$ . Por lo tanto, las podemos combinar en una sola homotopía  $H$  haciendo  $H^0$  en  $[0, \frac{1}{2}]$ ,  $H^1$  en  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ , ..., y cada  $H^n$  en  $[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}]$ . Esta homotopía está bien definida porque  $H_1^n = f^n = H_0^{n+1}$ , y es continua porque  $X = \bigcup_{n \geq 0} X^n$  y  $H|_{X^n} = H^{n+1}|_{X^n}$  continua, para cada  $n \geq 0$ , pues las homotopías son estacionarias en  $X^n$  a partir de  $H^{n+1}$  y usando el lema del pegamiento ( $X^n \subseteq X$  es cerrado). Por lo tanto,  $f = H_0 \simeq_H H_1 = \tilde{f}$ , y  $\tilde{f}(X^n) = f^n(X^n) \subseteq Y^n$ . Así, hemos conseguido encontrar  $\tilde{f}$  celular y homotópica a  $f$ .

Finalmente, la segunda parte del enunciado del teorema se sigue de la construcción anterior. ■

### 3.1.2 Consecuencias del Teorema de Aproximación Celular

Veamos primero cómo este teorema nos permite calcular algunos casos de grupos de homotopía de esferas. Estos casos son muy sencillos, pues son todos isomorfos al grupo trivial, y la aplicación del teorema es directa.

**Proposición 3.4.** Dados  $n > m \geq 1$ , entonces  $\pi_m(S^n, s_0) = 0$ .

**Demostración.** Tomamos las estructuras de CW-complejos sobre cada esfera formada por una 0-celda y una celda principal. Dado  $[f] \in \pi_m(S^n, s_0)$ , podemos suponer

que la  $f$  representante de la clase de homotopía es celular gracias al TAC. Entonces,  $f(S^m) \subseteq (S^n)^m = \{s_0\}$ , y  $[f] = 0$ . Por lo tanto,  $\pi_m(S^n, s_0) = 0$ . ■

Aunque hemos usado directamente el TAC, habría sido suficiente reproducir la idea de la prueba. Dado que la imagen de una celda en otra de dimensión superior se puede deformar para que no pase por al menos un punto, se puede componer con una retracción con deformación al punto base para ver que toda aplicación es homotópica a la trivial.

También podemos demostrar la siguiente propiedad sobre CW-complejos.

**Proposición 3.5.** Sea  $(X, A)$  un CW-complejo relativo con un punto base  $x_0$ , entonces el par  $(X, X^n)$  es  $n$ -conexo  $\forall n \geq 0$ .

*Demostración.* Para ver que es 0-conexo, notemos que  $X^0 \subseteq X^n$ , y como debe haber mínimo una 0-celda en cada componente conexa de  $X$ ,  $X^n$  tiene intersección no vacía con todas las componentes conexas de  $X$ . Entonces, el par  $(X, X^n)$  es 0-conexo.

Dado  $1 \leq r \leq n$ , tomamos  $[f] \in \pi_r(X, X^n, x_0)$ . Como  $f(S^{r-1}) \subseteq X^n$ ,  $f$  es celular en el  $(r-1)$ -esqueleto, y gracias al TAC (versión relativa) podemos suponer que  $f$  es celular. Por lo tanto,  $f(D^r) \subseteq X^r \subseteq X^n$ , así que  $[f] = 0$  en  $\pi_r(X, X^n, x_0)$ . Se deduce que  $\pi_r(X, X^n, x_0)$  es trivial  $\forall r \leq n$ . ■

Equivalentemente, por la sucesión de homotopía del par  $(X, X^n, x_0)$ , se tiene que  $i_* : \pi_r(X^n, x_0) \rightarrow \pi_r(X, x_0)$  es isomorfismo para  $r < n$  y epimorfismo para  $r = n$ . En particular,  $\pi_r(X^{r+1}, x_0) \cong \pi_r(X, x_0) \forall r \geq 0$ . Esto nos indica que el  $n$ -ésimo grupo de homotopía solo depende del  $(n+1)$ -esqueleto y no de células de dimensión superior.

### 3.1.3 Teorema de Whitehead

Dada la regularidad en el comportamiento de los CW-complejos, uno podría pensar que dos CW-complejos con grupos de homotopía isomorfos deben tener el mismo tipo de homotopía. Sin embargo, este no está totalmente determinado por sus grupos de homotopía. El Teorema de Whitehead (TW, en adelante) nos dirá que si existe una aplicación que induzca estos isomorfismos, entonces sí deben tener el mismo tipo de homotopía. Necesitamos primero presentar algunos conceptos.

**| Definición 3.4 (Equivalencia de homotopía débil).** Dada una aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$ , se dice que es una equivalencia de homotopía débil si induce isomor-

fismos sobre todos los grupos de homotopía, es decir, si  $f_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$  es un isomorfismo  $\forall n \geq 0 \forall x_0 \in X$ .

**Observación 3.1.** Nótese que como consecuencia de la sucesión exacta de homotopía relativa, dados  $A \subseteq X$  espacios topológicos, el hecho de que la inclusión  $i : A \hookrightarrow X$  sea una equivalencia de homotopía débil es equivalente a que todos los los grupos de homotopía relativos del par  $(X, A, x_0)$  sean triviales  $\forall x_0 \in X$ .

Además, el siguiente objeto y sus propiedades nos facilitarán, en general, el trabajo con CW-complejos, y en particular, la demostración del Teorema de Whitehead.

**Definición 3.5 (Cilindro de una aplicación).** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua entre dos espacios topológicos. Se define  $M_f$  el cilindro de la aplicación  $f$  como el espacio cociente de  $(X \times I) \sqcup Y$  sobre la relación de equivalencia generada al identificar  $(x, 1) \in X$  con  $f(x) \in Y$ . Si queremos trabajar en  $\mathcal{PT}$ , dado  $x_0 \in X$  punto base de  $X$ , también contraemos en un punto la arista  $\{x_0\} \times I$ , y tomamos este como punto base de cilindro.

La aplicación  $i : Y \rightarrow M_f$  dada por  $i(y) = [y]$  es una inmersión, y podemos ver  $X$  como el subespacio  $X \times \{0\} \subseteq M_f$ .

**Proposición 3.6.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua entre dos espacios topológicos. Entonces,  $M_f$  retrae con deformación sobre  $Y$ .

**Demostración.** Es fácil ver que podemos retraer cada arista  $\{x\} \times I$  sobre su extremo  $f(x)$ . Se puede comprobar que la homotopía  $H$  definida sobre  $M_f$  estacionaria en  $Y$  y definida en  $X \times I$  como  $H_t(x, s) = (x, t+s(1-t))$  nos da la retracción con deformación buscada (ver figura 3.1). ■

**Proposición 3.7.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  equivalencia de homotopía débil, entonces la inclusión  $i : X \hookrightarrow M_f$  también es una equivalencia de homotopía débil.

**Demostración.** Dada  $r : M_f \rightarrow Y$  retracción con deformación,  $f = r \circ i$ . Entonces,  $f_* = r_* \circ i_*$  donde  $f_*$  y  $r_*$  son isomorfismos  $\forall n \geq 0$ . Así,  $i_*$  es isomorfismo  $\forall n \geq 0$  e  $i$  es equivalencia de homotopía débil. ■

**Proposición 3.8.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  aplicación celular entre CW-complejos, entonces se puede dotar a  $M_f$  de estructura de CW-complejo. Además, con esta estructura  $X$  e  $Y$  son subcomplejos de  $M_f$ .

La prueba de la última proposición se puede encontrar en [Rud90, pg. 62-63]. Usaremos durante la demostración el siguiente lema, al que llamamos el lema de compre-

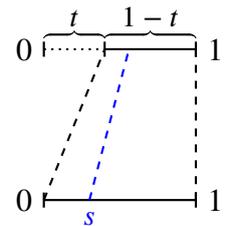


Figura 3.1:  $H$ .

sión.

**Lema 3.2 (de compresión).** Sea  $(X, A)$  un CW-complejo relativo y  $(Y, B)$  un par con  $B \neq \emptyset$ . Si en  $X \setminus A$  hay  $n$ -celdas, con  $n \geq 1$ , suponemos que  $\pi_n(Y, B, y_0) = 0 \forall y_0 \in B$ ; si hay 0-celdas, suponemos que  $(X, A)$  es 0-conexo. Entonces, toda aplicación continua  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  es homotópica rel  $A$  a  $\tilde{f} : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ , otra aplicación continua tal que  $\text{im } \tilde{f} \subseteq B$ .

**Demostración.** La prueba usa una técnica similar a la del TAC. Como  $f(A) \subseteq B$ , nuestra propiedad se cumple para el  $(-1)$ -esqueleto. Veamos por inducción que dada  $f$  tal que  $f(X^{n-1}) \subseteq B$ , podemos encontrar  $f^n \simeq f$  tal que  $f^n(X^n) \subseteq B$ .

Si  $X$  no tiene  $n$ -celdas,  $X^n = X^{n-1}$  y basta tomar  $f^n = f$ . Si tiene  $n$ -celdas, sea  $e_\alpha^n$  una de ellas, con aplicación característica  $\phi$ . Entonces,  $f \circ \phi : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (Y, B)$ , y como  $\pi_n(Y, B, y_0) = 0$ ,  $f \circ \phi \simeq_G g$  rel  $S^{n-1}$  tal que  $g(D^n) \subseteq B$ . Dada la aplicación  $k : X^{n-1} \times I \rightarrow X^{n-1}$  dada por  $k(x, t) = f(x) \forall x \in X^{n-1}$ , definimos  $g^n = f|_{X^{n-1}} \sqcup g$  y  $G^n = k \sqcup G$ , entonces tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc}
 X^{n-1} \sqcup D^n & \xrightarrow{g^n} & B \\
 \downarrow & \nearrow \tilde{g}^n & \\
 X^{n-1} \cup e_\alpha^n & & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 (X^{n-1} \sqcup D^n) \times I & \xrightarrow{G^n} & B \\
 \downarrow & \nearrow \tilde{G}^n & \\
 (X^{n-1} \cup e_\alpha^n) \times I & & 
 \end{array}$$

donde  $\tilde{g}$  y  $\tilde{G}$  son respectivamente una aplicación y una homotopía rel  $X^{n-1}$  de  $f|_{X^{n-1} \cup e_\alpha^n}$  a  $\tilde{g}^n$  sobre el espacio cociente  $X^{n-1} \cup e_\alpha^n$ , por la proposición 1.5 y la observación 1.1. Haciendo este proceso para todas las celdas a la vez, y extendiendo luego esta homotopía con la HEP a una homotopía  $H^n$  de  $f$ , tenemos que  $H_1^n(X^n) \subseteq B$ . La aplicación que buscamos es  $f^n = H_1^n$ .

Finalmente, combinamos todas las aplicaciones y homotopías igual que en el último paso de la demostración del TAC para obtener  $f \simeq_H \tilde{f}$  donde  $\tilde{f}(X) \subseteq B$ . Como cada homotopía era relativa a los esqueletos, que contienen a  $A$ ,  $H$  es relativa a  $A$ . ■

Con estas herramientas, estamos en condiciones de demostrar el Teorema de Whitehead.

**| Teorema 3.2 (de Whitehead).** Toda  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  equivalencia de homotopía débil entre CW-complejos es una equivalencia de homotopía. Es más, si  $f$  es la inclusión de un subcomplejo,  $X$  es un retracto de deformación de  $Y$ .

**Demostración.** Empecemos probando la segunda parte. Si  $X$  es subcomplejo de  $Y$ , gracias a la observación 3.1 podemos aplicarle el lema de compresión (3.2) a la identidad  $\mathbb{1} : (Y, X) \rightarrow (Y, X)$  hasta obtener una retracción con deformación de  $X$  en  $Y$ .

Para el caso general, usamos el cilindro de la aplicación  $f$ . Por la proposición 3.7,  $i$  es equivalencia de homotopía débil. El TAC nos permite suponer que  $f$  es celular (si no lo fuera,  $\exists \varphi \simeq f$  celular, y  $f_* = \varphi_*$ ), así que  $(M_f, X)$  es CW-complejo relativo. Aplicándole la segunda parte de este teorema, que ya hemos probado, tenemos que  $i_*$  es equivalencia de homotopía. Por lo tanto,  $f_* = r_* \circ i_*$  es una equivalencia de homotopía. ■

**Corolario 3.1.** Sea  $X$  CW-complejo con todos sus grupos de homotopía triviales, entonces  $X$  es contráctil.

Antes de pasar a ver algunas construcciones interesantes, veamos un pequeño lema que nos será de utilidad en ellas, y al que llamaremos el lema de extensión.

**Lema 3.3 (de extensión).** Sea  $(X, A, x_0)$  CW-complejo relativo,  $Y$  espacio topológico y  $f : A \rightarrow Y$  aplicación continua. Si para cada  $n \geq 1$  tal que hay  $n$ -celdas en  $X \setminus A$  se tiene que  $\pi_{n-1}(Y, y_0) = 0 \forall y_0 \in Y$ , entonces existe  $\tilde{f} : X \rightarrow Y$  aplicación continua que extiende a  $f$ , es decir, tal que  $\tilde{f}|_A = f$ .

**Demostración.** Definimos  $\tilde{f}$  por inducción. Sea  $\tilde{f}^{-1} = f$ , definida en  $A$ , el  $(-1)$ -esqueleto.

Supongamos ahora que ya tenemos  $\tilde{f}^{n-1} : X^{n-1} \rightarrow Y$  tal que  $\tilde{f}^{n-1}|_A = f$ , y que existen  $n$ -celdas  $\{e_\alpha^n\}_{\alpha \in \Lambda}$  en  $X \setminus A$ , con aplicaciones de pegado  $\{\xi_\alpha^n\}_{\alpha \in \Lambda}$ . Por hipótesis, para cada celda  $e_\alpha^n$ , como  $\tilde{f}^{n-1} \circ \xi_\alpha^n : S^{n-1} \rightarrow Y$ , deducimos que  $[\tilde{f}^{n-1} \circ \xi_\alpha^n] = 0$ , así que  $\exists H_\alpha^n : S^{n-1} \times I \rightarrow X$  homotopía tal que  $H_{\alpha,0}^n = \tilde{f}^{n-1} \circ \xi_\alpha^n$  y  $H_{\alpha,1}^n \equiv \tilde{f}(x_0)$ . Por el Primer Teorema de Isomorfía, podemos factorizar  $H_\alpha^n = \tilde{H}_\alpha^n \circ p$  con  $\tilde{H}_\alpha^n : CS^{n-1} \rightarrow X$ , y tomando  $\varphi : D^n \rightarrow CS^{n-1}$  homeomorfismo, definimos la aplicación  $\tilde{f}_\alpha^n = \tilde{H}_\alpha^n \circ \varphi$ , y  $\tilde{f}_\alpha^n|_{S^{n-1}} = \tilde{H}_\alpha^n \circ \varphi|_{S^{n-1}} = \tilde{H}_\alpha^n|_{S^{n-1} \times \{0\}} = H_{\alpha,0}^n = \tilde{f}^{n-1} \circ \xi_\alpha^n$ , así que podemos extender  $\tilde{f}^{n-1}$  a cada  $e_\alpha^n$  gracias a la proposición 1.5.

Finalmente, si definimos  $\tilde{f} : X \rightarrow Y$  como  $\tilde{f}(x) = \tilde{f}^n(x)$  cuando  $x \in X^n$ , esta aplicación está bien definida porque las aplicaciones que hemos ido construyendo coinciden en los esqueletos que comparten, y es continua gracias al lema del pegamiento y que  $X^n \subseteq X$  es cerrado. Se deduce también que  $\tilde{f}|_A = f$ . ■

**Observación 3.2.** Cuando estemos extendiendo una aplicación sobre una  $n$ -celda, la condición  $\pi_{n-1}(Y, y_0) = 0 \forall y_0 \in Y$  puede resultar demasiado fuerte. En estos

casos, es suficiente pedir que  $f \circ \xi$  sea nulhomotópica (homotópica a la constante), con  $\xi$  aplicación de pegado de la  $n$ -celda. Como  $[f \circ \xi] = 0$  y el razonamiento se sigue exactamente igual para extenderla a esta celda.

### 3.1.4 CW-aproximaciones

Una CW-aproximación es una construcción sobre un espacio topológico  $X$  que permite aproximaciones combinatorias a su tipo de homotopía, e incluso en el caso de aproximar un CW-complejo, reducir el número de celdas con las que trabajamos.

Formalmente, una **CW-aproximación a  $X$**  es una equivalencia de homotopía débil  $f : Z \rightarrow X$  con  $Z$  un CW-complejo. El espacio  $X$  está fijado de antemano, y se prueba por construcción que todo espacio topológico  $X$  posee una CW-aproximación. La construcción de  $f$  y  $Z$  se hace pegando celdas de dimensión cada vez mayor y extendiendo la aplicación sobre las nuevas celdas, que irán generando poco a poco isomorfismos sobre los grupos de homotopía. Describamos el proceso de construcción como una inducción.

**Caso base:** sean  $\{X_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  las componentes conexas por camino de  $X$ . Tomamos  $Z^0 = \{z_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  y  $f^0 : Z^0 \rightarrow X$  de manera que  $f(z_\gamma) \in X_\gamma$ . Así,  $f_*^0$  es biyectiva. En realidad, nos basta con que sea sobreyectiva para aplicar el siguiente paso.

**Paso de inducción:** supongamos que ya tenemos  $f^{n-1} : Z^{n-1} \rightarrow X$  de manera que  $f_*^{n-1} : \pi_r(Z^{n-1}, z_\gamma) \rightarrow \pi_r(X, f(z_\gamma))$  es isomorfismo para  $r < n-1$  y epimorfismo para  $r = n-1$ . En este paso, pegaremos  $n$ -celdas para construir  $Z^n$  a partir de  $Z^{n-1}$  y extender  $f^{n-1}$  adecuadamente a  $f^n$  para que  $f_*^n$  sea isomorfismo para  $r < n$  y epimorfismo para  $r = n$ . Notemos que para  $r < n-1$ ,  $i_* : \pi_r(Z^n, z_\gamma) \rightarrow \pi_r(Z^{n-1}, z_\gamma)$  es isomorfismo, así que  $f_*^n = f_*^{n-1} \circ i_*$  también lo es. En otras palabras, pegar  $n$ -celdas no afectará a los isomorfismos ya construidos.

Dividimos el paso de inducción en el pegamiento de  $n$ -celdas con dos objetivos distintos. En el primer paso conseguiremos que  $f_*^n : \pi_r(Z^n, z_\gamma) \rightarrow \pi_r(X, x_0)$  sea isomorfismo  $\forall r < n$ , y en el segundo que sea epimorfismo para  $r = n$ . Geométricamente, si vemos cada  $\pi_r(X, f^{n-1}(z_\gamma)) \cong F_r/R_r$  como un grupo libre sobre unas relaciones, el segundo paso pega  $n$ -celdas para generar todo  $F_n$  mientras que el primero pega  $r$ -celdas que representan relaciones en  $R_{n-1}$  para obtener exactamente  $\pi_{n-1}(X, f^{n-1}(z_\gamma))$ . Una demostración formal de este hecho se tiene en el ejemplo 3.4. Si recordamos que escribimos  $Z^0 = \{z_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ , estos pasos se hacen para cada  $\gamma \in \Gamma$ .

$$\underline{f_*^n : \pi_r(Z^n, z_\gamma) \rightarrow \pi_r(X, x_0) \text{ isomorfismo } \forall r < n:}$$

Como ya tenemos contruidos isomorfismos para  $r < n-1$  y un epimorfismo para  $r = n-1$ , en este paso solo debemos preocuparnos por hacer este último también monomorfismo.

Tomamos  $\{g_\alpha^n : (S^{n-1}, s_0) \rightarrow (Z^{n-1}, z_\gamma)\}_{\alpha \in \Lambda}$  conjunto de generadores del núcleo de  $f_*^{n-1} : \pi_{n-1}(Z^{n-1}, z_\gamma) \rightarrow \pi_{n-1}(X, f^{n-1}(z_\gamma))$ . Dotamos a  $S^{n-1}$  estructura de CW-complejo con solo dos celdas para poder suponer que  $g_\alpha^{n-1}$ . A través de las aplicaciones  $g_\alpha^n$  pegamos  $n$ -celdas  $e_\alpha^n$  y obtenemos  $Z_0^n$  (obtendremos  $Z^n$  cuando peguemos las  $n$ -celdas que faltan en el siguiente caso). Para extender  $f^{n-1}$  a cada  $e_\alpha^n$ , notemos que  $[f^{n-1} \circ g_\alpha^n] = f_*^{n-1}[g_\alpha^n] = 0$ . Debido a esto, la observación 3.2 nos permite extender  $f^{n-1}$  a  $e_\alpha^n$ . Repitiendo esto para todas las celdas obtenemos  $f_0^n : Z_0^n \rightarrow X$ .

$$\underline{f_*^n : \pi_n(Z^n, z_\gamma) \rightarrow \pi_n(X, x_0) \text{ epimorfismo:}}$$

Tomamos  $\{f_\beta^n : (S^n, s_0) \rightarrow f(X, z_\gamma)\}_{\beta \in B}$  representantes de un conjunto generador de  $\pi_n(X, f^{n-1}(z_\gamma))$ . Pegamos  $n$ -esferas  $e_\beta^n$  a  $Z^{n-1}$  para construir  $Z^n$  y extendemos  $f^{n-1}$  a cada una a través de  $f_\beta^n$  respectivamente, según la proposición 1.5.

Comprobemos que efectivamente  $f_*^n : \pi_{n-1}(Z^n, z_\gamma) \rightarrow \pi_{n-1}(X, f^n(z_\gamma))$  es isomorfismo. Como  $f^n$  es una extensión de  $f^{n-1}$  y  $f_*^{n-1}$  era sobreyectiva,  $f_*^n$  es sobreyectiva. Para la inyectividad, dada  $[h] \in \ker f_*^n$  representada por  $h : S^{n-1} \rightarrow X$  celular,  $h(S^{n-1}) \subseteq Z^{n-1}$ , con lo que  $[h] \in \ker f_*^{n-1}$ . Por lo tanto,  $h$  es homotópica a una suma finita de  $g_\alpha^n$ , que se pueden retraer a lo largo de  $e_\alpha^n$  cada una hasta  $z_\gamma$ , así que  $[h] = 0$ . Esto prueba que  $f_*^n$  es inyectiva, y por tanto, isomorfismo.

Para ver que  $f_*^n : \pi_n(Z^n, z_\gamma) \rightarrow \pi_n(X, f^n(z_\gamma))$  es sobreyectiva, basta tomar un elemento  $[h] \in \pi_n(X, f^n(z_\gamma))$ , suma finita de algunos  $[f_\beta^n]$ , cada uno de ellos con preimagen por construcción. La suma de las preimágenes es preimagen de  $[h]$ . Se deduce que  $f_*^n$  es epimorfismo.

Finalmente, tomamos  $Z = \bigcup_{n \geq 0} Z^n$  y se define  $f : Z \rightarrow X$  como  $f(z) = f^n(z)$  si  $z \in Z^n$ . Está bien definida porque cada  $f^n$  es extensión de la anterior y es continua por el lema del pegamiento, ya que los  $n$ -esqueletos son cerrados. Para cada  $r \geq 0$ , recordemos que dada  $i$  inclusión del  $(r+1)$ -esqueleto, la aplicación inducida  $i_* : \pi_r(Z^{r+1}, z_\gamma) \rightarrow \pi_r(Z, z_\gamma)$  es isomorfismo, y como  $f^{r+1} = f \circ i$ , tenemos que  $f_*^{r+1} = f_* \circ i_*$ , donde  $f_*^{r+1} : \pi_r(Z^{r+1}, z_\gamma) \rightarrow \pi_r(X, x_0)$  también es isomorfismo, por lo que  $f_* : \pi_r(Z, z_\gamma) \rightarrow \pi_r(X, x_0)$  es isomorfismo. Esto prueba la existencia de una CW-aproximación para  $X$ .

Hemos visto que siempre existe una CW-aproximación para cualquier espacio topológico  $X$ . Tenemos un resultado sobre unicidad de los mismos salvo homotopía.

**Proposición 3.9.** Sean  $f : Z \rightarrow X$  y  $f' : Z' \rightarrow X$  CW-aproximaciones a un espacio  $X$ . Entonces,  $Z$  y  $Z'$  tienen el mismo tipo de homotopía.

*Demostración.* Denotemos  $i_Z, i_{Z'}$  las inclusiones en los cilindros respectivos y  $i'_X$  la inclusión de  $X$  en  $M_{f'}$  (equivalencia de homotopía). Como  $f$  y  $f'$  son equivalencias de homotopía débiles, todas estas inclusiones también lo son.

Dado  $z'_0 \in Z'$ , de la sucesión exacta larga de homotopía del par  $(M_{f'}, Z', z'_0)$  se obtiene que  $\pi_n(M_{f'}, Z', z'_0) = 0 \forall n \geq 0$ . Entonces,  $g = i'_X \circ f : Z \rightarrow M_{f'}$  se puede deformar en  $\tilde{g} : Z \rightarrow Z'$  ( $i_{Z'} \circ \tilde{g} \simeq g$ ) por el lema de compresión (3.2), y  $i_{Z'_*} \circ \tilde{g}_* = g_* = i_{Z_*} \circ f_*$ , de donde se deduce que  $\tilde{g}_*$  es isomorfismo. Por lo tanto,  $\tilde{g}$  es una equivalencia de homotopía débil entre CW-complejos, y por el TW, es equivalencia de homotopía. ■

De la construcción se deduce inmediatamente la siguiente propiedad.

**Corolario 3.2.** Todo CW-complejo  $X$  conexo es homotópicamente equivalente a otro CW-complejo  $Z$  con una sola 0-celda. Es más, si  $X$  es  $n$ -conexo, podemos obtener  $Z$  que no tenga celdas de dimensión  $r = 1, \dots, n$ .

Es más, también se tiene para CW-complejos relativos. Enunciamos un lema previo (cuya demostración se puede encontrar en [Hat01, pg. 16-17]) que necesitaremos.

**Lema 3.4.** Sean  $i_X : A \rightarrow X$  y  $i_Z : A \rightarrow Z$  cofibraciones, y  $f : Z \rightarrow X$  equivalencia de homotopía tal que  $f|_A = \mathbb{1}_A$ , entonces  $f$  es equivalencia de homotopía rel  $A$ .

**Proposición 3.10.** Sea  $(X, A)$  un CW-complejo relativo  $n$ -conexo. Entonces, existe un CW-complejo relativo  $(Z, A) \simeq (X, A)$  rel  $A$  tal que todas las celdas en  $Z \setminus A$  tienen dimensión mayor que  $n$ .

*Demostración.* La primera aplicación del proceso es la inclusión  $A \hookrightarrow X$ , y empezamos directamente pegando celdas de dimensión  $n + 1$  y superior, con lo que construimos un CW-complejo relativo  $(Z, A)$  y una aplicación continua  $f : Z \rightarrow X$  que induce isomorfismos sobre todos los grupos de homotopía de orden  $\geq n + 1$ .

Además, se tiene que  $f_* : \pi_n(Z, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$  es monomorfismo por construcción. Si denotamos  $i_Z, i_X$  las inclusiones de  $A$  en los respectivos espacios, también tenemos  $f \circ i_Z = i_X$ . Recordamos que  $(X, A)$   $n$ -conexo implica que  $i_{X*}$  es epimorfismo, y entonces  $f_*$  es también epimorfismo.

Finalmente, como ambos pares son  $n$ -conexos, tenemos la cadena de isomorfismos  $\pi_r(Z, x_0) \cong_{i_{Z^*}} \pi_r(A, x_0) \cong_{i_{X^*}^{-1}} \pi_r(X, x_0) \forall r < n \forall x_0 \in A$ . Por lo tanto,  $f$  es equivalencia de homotopía débil, y por el TW, una equivalencia de homotopía. Aplicando el lema anterior tenemos que, de hecho, es rel  $A$ . ■

### 3.1.5 Torres de Postnikov

Aplicando una técnica similar a la de la construcción de CW-aproximaciones, vamos a construir unos espacios con unas características concretas que podremos organizar en un diagrama al que llamamos torre de Postnikov. Por simplicidad trabajaremos con CW-complejos conexos. Comenzamos con la siguiente definición.

**Definición 3.6 (Pieza de Postnikov).** Dado  $n \geq 1$ , se llama  $n$ -ésima pieza de Postnikov a un espacio  $P_n$  tal que  $\pi_r(X, x_0) = 0 \forall r > n \forall x_0 \in X$ .

Dado un espacio topológico  $X$ , se dice  **$n$ -ésima pieza de Postnikov de  $X$** , denotada  $P_n(X)$ , a una pieza de Postnikov tal que existe una aplicación continua  $f : X \rightarrow P_n(X)$  que induce isomorfismos sobre los primeros  $n$  grupos de homotopía.

Para construir  $P_n(X)$  para un cierto CW-complejo conexo  $X$ , tomamos la aplicación constante  $c : X \rightarrow \{*\}$  y aplicamos la construcción de una CW-aproximación pegando celdas de dimensión  $n + 2$  y superior. Así, obtenemos  $f : P_n(X) \rightarrow \{*\}$ . Pegar celdas de dimensión  $n + 2$  y superior ya vimos que no afectaba a los grupos de homotopía de orden  $r \geq n$ . Para ver que la inclusión induce

$$\begin{array}{ccc} X^{n+1} & \hookrightarrow & X \\ \parallel & & \downarrow i \\ P_n(X)^{n+1} & \hookrightarrow & P_n(X) \end{array}$$

Figura 3.2:  $i_*$  isomorfismo

estos isomorfismos, observamos que los  $(n + 1)$ -esqueletos de  $X$  y  $P_n(X)$  son iguales, con lo que en el diagrama conmutativo de la figura 3.2 las inclusiones horizontales inducen isomorfismos sobre los primeros  $n$  grupos de homotopía, así que  $i_*$  también. Finalmente, por la construcción de la CW-aproximación que se ha llevado a cabo,  $\pi_r(P_n(X), x_0) \cong_{f_*} \pi_r(\{*\}, *) = 0 \forall r > n + 1$ , y  $f_* : \pi_{n+1}(P_n(X), x_0) \rightarrow \pi_{n+1}(\{*\}, *) = 0$  es monomorfismo, con lo que necesariamente  $\pi_{n+1}(P_n(X), x_0) = 0$ . Así, hemos verificado que el espacio que hemos construido es  $n$ -ésima pieza de Postnikov de  $X$ .

**Proposición 3.11.** Las piezas de Postnikov de un espacio  $X$  de orden  $n$  son únicas salvo homotopía.

**Demostración.** Dadas dos piezas de Postnikov  $P_n(X)$  y  $P_n(X)'$ , las inclusiones respectivas  $i$  e  $i'$  inducen isomorfismos sobre los grupos de homotopía. Tomando  $i^{-1}$  inversa

por la izquierda de  $i$ , la composición  $i' \circ i^{-1}$  induce isomorfismos sobre los primeros  $n$  grupos de homotopía, y también sobre los superiores porque son triviales. Entonces, es equivalencia de homotopía débil, y por el TW, equivalencia de homotopía. ■

Ya hemos construido las piezas de Postnikov. Para dar la definición de una torre de Postnikov, nos hace falta construir unas aplicaciones  $P_{n+1}(X) \rightarrow P_n(X) \forall n \geq 1$ . Como  $P_{n+1}(X)$  se forma a partir de  $X$  pegando celdas de dimensión  $n + 3$  y superior, y  $\pi_r(P_n(X)) \cong 0 \forall r > n$ , podemos aplicar el lema de extensión (3.3) para extender la inclusión  $X \hookrightarrow P_n(X)$  a una aplicación  $P_{n+1} \rightarrow P_n(X)$ , que será la aplicación que buscamos.

**Definición 3.7 (Torre de Postnikov).** Dado  $X$  un CW-complejo conexo y la colección  $\{P_n(X)\}_{n \geq 1}$  de sus piezas de Postnikov, llamamos torre de Postnikov de  $X$  a un diagrama conmutativo como el de la figura 3.3, donde las aplicaciones implicadas son las que se han descrito más arriba.

Notemos que el diagrama conmuta porque las aplicaciones verticales son una extensión de inclusiones de  $X$ .

Podemos entender una torre de Postnikov como una sucesión de espacios que proporciona cada vez mejores aproximaciones al nuestro espacio  $X$ . Esto resulta útil en topología algebraica para probar teoremas inductivamente.

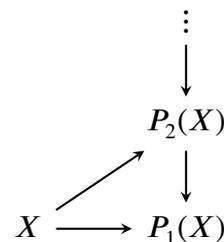


Figura 3.3: Torre de Postnikov

### 3.1.6 Espacios de Eilenberg-MacLane

A continuación, describimos un ejemplo especialmente relevante de pieza de Postnikov.

**Definición 3.8.** Dado  $n \geq 1$  y  $G$  un grupo (abeliano si  $n \geq 2$ ), llamamos espacio de Eilenberg-MacLane, denotado por  $K(G, n)$  a un CW-complejo conexo  $X$  tal que  $\pi_n(X) \cong G$  y  $\pi_r(X) \cong 0 \forall r \neq n$ .

Para conseguir, dados  $n$  y  $G$  como en la definición, hallar un  $K(G, n)$ , procedemos de la siguiente manera. Gracias al ejemplo 3.4, dada una presentación de  $G = \langle \{g_\alpha\}_{\alpha \in A} | \{r_\beta\}_{\beta \in B} \rangle$ , el espacio  $A = (\bigvee_\alpha S_\alpha^n) \cup_{\bigvee_\beta r_\beta} e_\beta^{n+1}$  tiene por el TAC los  $n - 1$  primeros grupos de homotopía triviales, y el  $n$ -ésimo isomorfo a  $G$ . Entonces,  $K(G, n)$  es  $n$ -ésima pieza de Postnikov del espacio  $A$ .

Gracias a esto, podemos crear de hecho espacios conexos por caminos con los grupos de homotopía que se deseen. Dada una sucesión de grupos  $\{G_n\}_{n \geq 1}$  con  $G_n$  abeliano para  $n \geq 2$ , y donde solo una cantidad finita de ellos son no triviales, podemos tomar  $X = \prod_{n \geq 1} K(G_n, n)$ , de manera que  $\forall m \geq 1$  se tiene que  $\pi_m(X) \cong \bigoplus_{n \geq 1} \pi_m(K(G_n, n)) \cong \bigoplus_{\substack{n \geq 1 \\ n \neq m}} \{0\} \oplus G_m \cong G_m$ . Esta construcción también funciona cuando hay una cantidad infinita de  $G_n$  no triviales, utilizando una versión de la proposición 2.4 para productos infinitos. Este caso se puede encontrar en [Swi75, pg. 95].

## 3.2 Teorema de Escisión de Homotopía

Una de las ventajas computacionales de la homología respecto de la homotopía es que verifica el axioma de escisión (usualmente llamado sucesión de Mayer-Vietoris). Esto nos permite calcular la homología de un espacio dividiéndolo en piezas cuya homología conozcamos. A pesar de que para la homotopía no se tenga dicha propiedad de manera general, el Teorema de Escisión de Homotopía (TEH, en adelante) nos asegurará que se verifica un resultado del mismo tipo.

**| Teorema 3.3 (de Escisión de Homotopía).** Sean  $(X, x_0)$  un CW-complejo con punto base y  $A, B \subseteq X$  dos subcomplejos suyos tales que  $x_0 \in C = A \cap B$ . Si  $(A, C, x_0)$  es  $m$ -conexo y  $(B, C, x_0)$  es  $n$ -conexo, con  $m, n \geq 0$ , entonces la aplicación inducida por la inclusión  $i_* : \pi_r(A, C, x_0) \rightarrow \pi_r(X, B, x_0)$  es un isomorfismo para  $r < m + n$  y un epimorfismo para  $r = m + n$ .

*Demostración.* Dividimos la prueba en casos.

**Caso 1:** sean  $A = C \cup_{\alpha \in \Lambda} e_\alpha^{m+1}$ ,  $B = C \cup e^{n+1}$ ; entonces  $X = C \cup e^{n+1} \cup_{\alpha \in \Lambda} e_\alpha^{m+1}$ .

$i_*$  sobreyectiva: dada  $[f] \in \pi_r(X, B, x_0)$ , si  $r \leq n$ , por el TAC existe  $\tilde{f} \simeq f$  celular, con lo que conseguimos que  $\tilde{f}(I^r) \subseteq X^r \subseteq X^n \subseteq A$ ,  $\tilde{f}(\partial I^r) \subseteq B^{r-1} \subseteq B^n \subseteq C$ . Por lo tanto,  $[\tilde{f}] \in \pi_r(A, C, x_0)$  y  $i_*[\tilde{f}] = [f]$ .

Suponemos por lo tanto ahora que  $r > n$ , entonces como  $f(I^r) \subseteq X$  es compacto, se interseca con una cantidad finita de  $e_\alpha^{m+1}$  y  $e_\alpha^{n+1}$ . Digamos que  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Lambda$  con  $k \geq 1$  tal que  $e_{\alpha_j}^{m+1} \cap f(I^r) \neq \emptyset \forall j = 1, \dots, k$  y que  $e_\alpha^{n+1} \cap f(I^r) \neq \emptyset$ , que es el caso más complicado.

Sean  $\varphi_0 : e^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  y  $\varphi_j : e_{\alpha_j}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  homeomorfismos correspondientes. Tomamos  $Z = X$ ,  $W_0 = X \setminus e^{n+1}$ . Entonces, aplicando el lema 3.1 sobre  $f$  sabemos

que  $\exists H^0, K_0, U_0$  como en el lema. Sea  $f_0 = H_1^0$ . Aplicamos el lema a  $f_0$  tomando  $Z = X, W_1 = Z \setminus \dot{e}_{\alpha_1}^{m+1}$ , obteniendo  $H^1, K_1$  y  $U_1$  correspondientes. Sea  $f_1 = H_1^1$ . Repetimos este proceso un número finito de veces de manera análoga hasta obtener  $f_k$  tal que  $f \simeq_{H^0} f_0 \simeq_{H^1} f_1 \simeq_{H^2} \dots \simeq_{H^k} f_k$ . Además, cumple que  $f_k|_C = f|_C$ , pues la homotopía que lleva  $f$  a  $f_k$  es estacionaria en  $\bigcap_{j=0}^k W_j = (X \setminus \dot{e}^{n+1}) \cap \bigcap_{j=1}^k (X \setminus \dot{e}_{\alpha_j}^{m+1}) = C$ . Gracias que las homotopías no alteran el resultado conseguido en la celda anterior,  $f_k^{-1}(U_j) \subseteq |K_j| \forall j = 1, \dots, k$  y  $\varphi_j \circ f_k|_{\sigma}$  es lineal  $\forall \sigma \in K_j \forall j = 0, \dots, k$ . Denotamos  $A_{j\sigma}$  a las matrices/aplicaciones lineales cuya restricción a  $\sigma$  es precisamente  $\varphi_j \circ f_k|_{\sigma}$ , para  $\sigma \in K_j, j = 0, \dots, k$ .

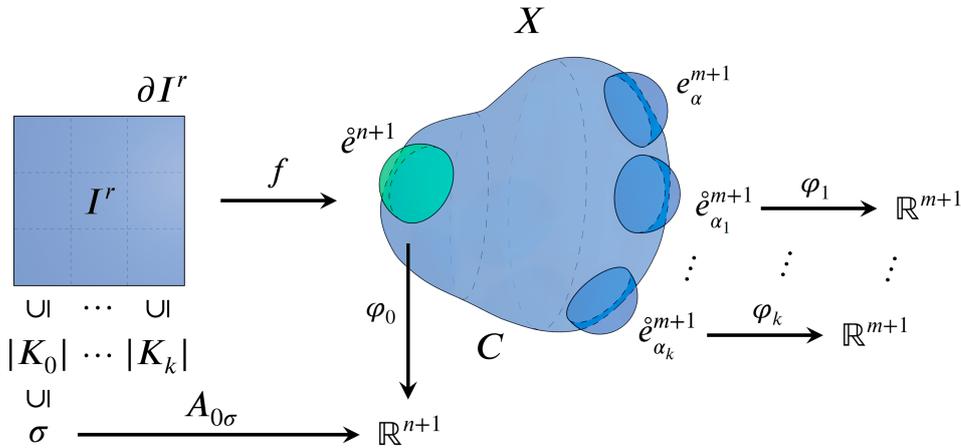


Figura 3.4: ilustración general del caso 1.

Escogemos ahora símlices  $\Delta_j \subseteq \varphi_j(U_j) \forall j = 0, \dots, k$  de dimensión máxima (el símlice  $\Delta_0$  es de dimensión  $n+1$  y  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$  son de dimensión  $m+1$ ). Como  $(\varphi_j \circ f_k)^{-1}(\Delta_j) \subseteq (\varphi_j \circ f_k)^{-1}(\varphi_j(U_j)) = f_k^{-1}(U_j) \subseteq |K_j| \forall j = 0, \dots, k$ , podemos escribir  $(\varphi_j \circ f_k)^{-1}(\Delta_j) = \bigcup_{\sigma \in K_j} (\varphi_j \circ f_k|_{\sigma})^{-1}(\Delta_j)$ .

Podemos suponer que  $A_{0\sigma}$  es sobreyectiva  $\forall \sigma \in K_0$ . Estas aplicaciones están determinadas por dónde mandan los vértices de  $K_0$ . Si existiera  $\sigma = (v_0, \dots, v_r) \in K_0$  tal que  $A_{0\sigma} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  no sobreyectiva, como  $r > n$ , el conjunto  $\{A_{0\sigma}(v_0), \dots, A_{0\sigma}(v_r)\}$  debe ser afinmente dependiente y no generar todo  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Si desplazamos  $A_{0\sigma}(v_0)$  fuera del espacio generado por  $\{A_{0\sigma}(v_1), \dots, A_{0\sigma}(v_r)\}$  (aunque dentro de  $U_0$ ), obtenemos una aplicación homotópica a  $A_{0\sigma}$  con el rango aumentando en 1. Es importante notar que las imágenes de los vértices distintos de  $v_0$  de los símlices adyacentes que

comparten este vértice generan variedades afines de dimensión  $\leq n$ , por lo que no cubren todo  $U_0$  se puede mover  $A_{0\sigma}(v_0)$  a un punto fuera de estos espacios. Así, no afectamos al rango de las  $A_{0\sigma'}$  para otros  $\sigma' \in K_0$ . Procedemos análogamente con el resto de vértices hasta que la aplicación tiene rango máximo, lo que es posible porque  $\dim \mathbb{R}^r = r \geq n + 1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$ . Si componemos la aplicación final con  $\varphi_0^{-1}$ , obtenemos  $f' \simeq f$  con las propiedades anteriores de  $f_k$ , pero pudiendo suponer ahora que  $\varphi_0 \circ f'|_\sigma$  es sobreyectiva  $\forall \sigma \in K_0$ . Si no hubiera que hacer ninguna corrección para la sobreyectividad, renombramos  $f' = f_k$ .

Necesitamos ahora demostrar el siguiente lema:

**Lema 3.5.** Si  $r \geq m + n$ , entonces existen  $p_j \in \Delta_j \forall j = 1, \dots, k$ ,  $q \in \Delta_0$  y una aplicación continua  $\psi : I^{r-1} \rightarrow [0, 1)$  tales que:

- 1)  $(\varphi_0 \circ f')^{-1}(q)$  está “bajo la gráfica de  $\psi$ ”, es decir,  $\forall (x_1, \dots, x_r) \in (\varphi_0 \circ f')^{-1}(q)$  se tiene que  $x_n < \psi(x_1, \dots, x_{r-1})$ .
- 2)  $(\varphi_j \circ f')^{-1}(p_j)$  está “sobre la gráfica de  $\psi$ ”, es decir,  $\forall (x_1, \dots, x_r) \in (\varphi_j \circ f')^{-1}(p_j)$  se tiene que  $x_n > \psi(x_1, \dots, x_{r-1})$ ,  $\forall j = 1, \dots, k$ .
- 3)  $\psi \equiv 0$  en  $\partial I^{r-1}$ .

**Demostración.** Dado  $q \in \Delta_0$ ,  $(\varphi_0 \circ f')^{-1}(q)$  es unión finita de poliedros convexos de dimensión  $\leq r - n - 1$  gracias a que las restricciones a cada símplice son aplicaciones lineales sobreyectivas. Si  $\pi : I^r \rightarrow I^{r-1}$  la proyección sobre las primeras  $r - 1$  componentes, vamos a encontrar puntos  $p_j$  de manera que cada  $(\varphi_j \circ f')^{-1}(p_j)$  no se interseque, no solo con  $(\varphi_0 \circ f')^{-1}(q)$ , sino con todo  $T = \pi((\varphi_0 \circ f')^{-1}(q)) \times I$ . Este conjunto  $T$  por lo tanto es unión finita de poliedros convexos de dimensión  $\leq r - n$ . Entonces, para cada  $j = 1, \dots, k$ ,  $(\varphi_j \circ f')(T) \cap \Delta_j \subseteq \Delta_j$  es unión finita de poliedros convexos de dimensión  $\leq r - n$ . Cuando  $m + 1 = \dim \Delta_j > r - n$ , podemos encontrar  $p_j \in \Delta_j \setminus (\varphi_j \circ f')(T) \forall j = 1, \dots, k$ , y esto implica que cuando  $r \leq m + n$ ,  $(\varphi_j \circ f')^{-1}(p_j) \cap T = \emptyset$ . Como  $\pi$  es aplicación cerrada, los conjuntos  $\pi((\varphi_0 \circ f')^{-1}(q))$  y  $\pi((\varphi_j \circ f')^{-1}(p_j))$  son cerrados  $\forall j = 1, \dots, k$ , y entonces existen abiertos disjuntos  $V_0, \dots, V_k \subseteq I^{r-1}$  que contienen a los conjuntos  $\pi((\varphi_0 \circ f')^{-1}(q))$ ,  $\pi((\varphi_1 \circ f')^{-1}(p_1)), \dots, \pi((\varphi_k \circ f')^{-1}(p_k))$  respectivamente. Solo nos queda definir  $\psi$  como 0 en  $V_1 \cup \dots \cup V_k \cup \partial I^{r-1}$  (para cumplir 2) y 3)) y como un cierto valor  $1 - \frac{\varepsilon}{2}$  en  $V_0$ , con  $\varepsilon > 0$ , y como ciertos valores en  $[0, 1 - \frac{\varepsilon}{2})$  en el resto de  $I^{r-1}$  (esto nos asegura que  $\text{im } \psi \subseteq [0, 1)$ ) que hagan continua  $\psi$ . Para hallar este  $\varepsilon$ , notamos que por la demostración del lema 3.1,  $|K_0|$  es un poliedro cerrado en el interior de  $I^r$ . Por tanto,  $|K_0|$  y  $\partial I^r$  son compactos y disjuntos, y la distancia entre estos alcanza un mínimo  $\varepsilon > 0$ . Entonces, la distancia entre  $\partial I^r$  y  $(\varphi_0 \circ f')^{-1}(q) \in (\varphi_0 \circ f')^{-1}(\Delta_0) \subseteq (f')^{-1}(U_0) \subseteq |K_0|$  es  $\geq \varepsilon > 0$ , y así tenemos 1). Este último razonamiento sobre los  $p_j$  nos asegura que  $(\varphi_j \circ f')^{-1}(p_j)$  está estrictamente por encima de la gráfica de  $\psi$ . ■

Finalmente, podemos definir una homotopía  $H : I^r \times I \rightarrow X$  tal que  $H_0 = f'$  como

$$H(x_1, \dots, x_r, t) = f(x_1, \dots, x_{r-1}, t\psi(x_1, \dots, x_{r-1})) + x_n(1 - t\psi(x_1, \dots, x_{r-1}))$$

inspirada en la figura 3.1 que deforma el dominio de  $f'$  en el volumen sobre la gráfica de  $\psi$ . Si llamamos  $f'' = H_1$ ,  $P = \{p_1, \dots, p_k\}$  y  $Q = \{q\}$ , hemos escindido el dominio de manera que  $H_t(I^{r-1}) \cap P = \emptyset \forall t \in I$  y  $f''(I^r) \cap Q = \emptyset$ . Como la imagen de  $f''$  no pasa por ninguno de los puntos en  $P \cup Q$  podemos retraer con deformación  $(\bigcup_{j=1}^k e_{\alpha_j}^{m+1} \cup e^{n+1}) \setminus (P \cup Q)$  sobre  $\bigcup_{j=1}^k \partial e_{\alpha_j}^{m+1} \cup \partial e^{n+1}$ , y como hacíamos en el TAC, obtenemos una aplicación  $\tilde{f} \simeq f''$  cuya imagen no se interseca con el interior de ninguna de las celdas  $e^{n+1}$ ,  $e_{\alpha_1}^{m+1}, \dots, e_{\alpha_k}^{m+1}$ . Por transitividad,  $f \simeq f_k \simeq f' \simeq f'' \simeq \tilde{f}$ , y como estas homotopías son estacionarias en el resto del complejo, la imagen de  $\tilde{f}$  tiene intersección vacía con los interiores de todas las celdas  $e_{\alpha}^{m+1}$  y  $e^{n+1}$ , así que  $\text{im } \tilde{f} \subseteq C$ . Por lo tanto,  $[\tilde{f}] \in \pi_r(A, C, x_0)$  e  $i_*[\tilde{f}] = [\tilde{f}] = [f]$ .

$i_*$  *inyectiva*: sean  $[f_0], [f_1] \in \pi_r(A, C, x_0)$  tales que  $i_*[f_0] = i_*[f_1]$  es decir, que  $i \circ f_0$  y  $i \circ f_1$  son homotópicas. Sea  $F : I^r \times I \rightarrow X$  esta homotopía. Podemos verla como una aplicación sobre  $I^{r+1}$ . Igual que en el apartado anterior, obtenemos  $F' \simeq F$  y posteriormente, para  $r+1 \leq m+n$  ( $\Leftrightarrow r < m+n$ ),  $\tilde{F} \simeq F'$  escindiendo análogamente  $I^{r+1}$ . Finalmente, las retracciones con deformación de las celdas correspondientes nos proporcionan preimágenes de las clases de  $\tilde{F}_0$  y  $\tilde{F}_1$ , que son la misma clase porque son homotópicas a través de  $\tilde{F}$ . Así  $[f_0] = [\tilde{F}_0] = [\tilde{F}_1] = [f_1]$ , con lo que terminamos la inyectividad y el caso 1.

**Caso 2:** sean  $A = C \cup_{\alpha \in \Lambda} e_{\alpha}^{m+1}$ ,  $B = C \cup_{i=1}^k e_i^{n+1}$ . Basta aplicar el caso 1 inductivamente sobre las  $(n+1)$ -celdas de  $B$ . Formalmente, para cada  $j = 1, \dots, k$ , definimos

$$\begin{aligned} A_j &= C \cup_{\alpha \in \Lambda} e_{\alpha}^{m+1} \cup_{i=1}^{j-1} e_i^{n+1} & B_j &= C \cup_{i=1}^j e_i^{n+1} \\ C_j &= A_j \cap B_j & X_j &= A_j \cup B_j \end{aligned}$$

Se observa que  $X_{j-1} = A_j$  y  $B_{j-1} = C_j \forall j = 2, \dots, k$ , y  $A_1 = A$ ,  $C_1 = C$ ,  $B_k = B$  y  $X_k = X$ . Por lo tanto, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\pi_r(A, C, x_0) & & \\
\parallel & & \\
\pi_r(A_1, C_1, x_0) & \longrightarrow & \pi_r(X_1, B_1, x_0) \\
& & \parallel \\
\pi_r(X_2, B_2, x_0) & \longleftarrow & \pi_r(A_2, C_2, x_0) \\
\parallel & & \\
\vdots & & \\
\parallel & & \\
\pi_r(A_k, C_k, x_0) & \longrightarrow & \pi_r(X_k, B_k, x_0) \\
& & \parallel \\
& & \pi_r(X, B, x_0)
\end{array}$$

donde los homomorfismos implicados son igualdades e inclusiones, siendo estas últimas gracias al caso 1 isomorfismos si  $r \leq m + n$  y epimorfismos si  $r = m + n$ . El homomorfismo que resulta de la composición del diagrama entero es concretamente  $i_* : \pi_r(A, C, x_0) \rightarrow \pi_r(X, B, x_0)$ , isomorfismo si  $r \leq m + n$  y epimorfismo si  $r = m + n$  por composición.

**Caso 3:** sean  $A = C \cup_{\alpha \in \Lambda} e_\alpha^{m+1}$ ,  $B = C \cup_{\gamma \in \Gamma} e_\gamma$ , donde  $\dim e_\gamma \geq n + 1 \forall \gamma \in \Gamma$ .

$i_*$  sobreyectiva: dada  $[f] \in \pi_r(X, B, x_0)$ ,  $f(I^r)$  es compacto, por lo que solo se interseca con una cantidad finita de interiores de celdas. Supongamos que existen  $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \Gamma$  tales que  $f(I^r) \cap \mathring{e}_{\gamma_j} \neq \emptyset \forall j = 1, \dots, k$ . Sea  $d = \max_{j=1, \dots, k} \dim e_{\gamma_j} \geq n + 1$ , y

definimos  $A' = C \cup_{\alpha \in \Lambda} e_\alpha^{m+1} \cup \bigcup_{\substack{\gamma \in \Lambda \\ \gamma \neq \gamma_1, \dots, \gamma_k}} e_\gamma \cup \bigcup_{\substack{j=1 \\ \dim e_{\gamma_j} < d}}^k e_{\gamma_j}$ , entonces sea  $C' = A' \cap B$ , es decir,  $C' = "B \text{ sin las celdas } e_{\gamma_j} \text{ de dimensión } d"$ , así que  $(B, C')$  es  $(d - 1)$ -conexo. Gracias

al caso 2, en particular  $\pi_r(A', C', x_0) \xrightarrow{i'_*} \pi_r(X, B, x_0)$  es epimorfismo si  $r \leq m + d - 1$ , y como  $d \geq n + 1$ , también se cumple cuando  $r \leq m + n$ , y así tiene preimagen  $f' : (I^r, \partial I^r, v_0) \rightarrow (A', C', x_0)$  tal que  $i'_*[f'] = [f]$ .

Hemos conseguido retirar  $f(I^r)$  de los interiores de las celdas de dimensión máxima (=  $d$ ) con las que se intersecaba. Por como funciona la homotopía que lleva  $f$  en  $f'$ , viendo el caso 1, el dominio de  $f'$  es una "restricción" del de  $f$ , así que  $f'(I^r) \subseteq f(I^r)$  y solo se puede intersecar con las celdas  $e_{\gamma_j}$  de dimensión  $< d$  y con las celdas contenidas en el borde de las  $e_{\gamma_j}$  de dimensión  $d$ , que son también de dimensión  $< d$ . Repetimos análogamente para quitar  $f'(I^r)$  de los interiores de aquellas celdas con los que se interseca de dimensión máxima, que en este caso será  $\leq d - 1$ . Todo el razonamien-

to se aplica hasta que se haya conseguido  $f$  en una  $f'' : (I^r, \partial I^r, v_0) \rightarrow (A'', C'', x_0)$ , con  $A'' = A' = C \cup_{\alpha \in \Lambda} e_\alpha^{m+1} \cup \bigcup_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \neq \gamma_1, \dots, \gamma_k}} e_\gamma$  y  $C'' = A'' \cap B$ . Como desde un principio  $f(I^r)$  no se intersecaba con las  $e_\gamma$  con  $\gamma \neq \gamma_1, \dots, \gamma_k$ , podemos ver  $f''$  como una aplicación  $(I^r, \partial I^r, v_0) \rightarrow (A, C, x_0)$ . Esto nos da la sobreyectividad.

$i_*$  *inyectiva*: para no alargar la prueba, la idea es una combinación de la inyectividad del caso 1 y la sobreyectividad que acabamos de hacer. Es decir, sobre  $F : I^{r+1} \rightarrow X$  aplicamos el razonamiento que hemos hecho en la sobreyectividad, pero ahora para  $r + 1 \leq m + n$ , es decir,  $r < m + n$ .

**Caso 4:** sean  $A = C \cup_{\alpha \in \Lambda} e_\alpha$ ,  $B = C \cup_{\gamma \in \Gamma} e_\gamma$ , entonces  $X = C \cup_{\alpha \in \Lambda} e_\alpha \cup_{\gamma \in \Gamma} e_\gamma$ , donde  $m + 1 \leq \dim e_\alpha \forall \alpha \in \Lambda$  y  $n + 1 \leq \dim e_\gamma \forall \gamma \in \Gamma$ . Podemos suponer que  $\dim e_\alpha \leq m + n + 1 \forall \alpha \in \Lambda$  como consecuencia del TAC.

Sean  $A_k = C \cup \bigcup_{\substack{\gamma \in \Lambda \\ \dim e_\gamma \leq k}} e_\gamma$  y  $X_k = A_k \cup B \forall k = m + 1, \dots, m + n + 1$ . Notamos que  $A_{m+n+1} = A$ .

Necesitamos usar la siguiente sucesión exacta [véase Hat01, pg. 344-345]:

**Lema 3.6.** Dado  $X$  espacio topológico, y  $x_0 \in B \subseteq A \subseteq X$ , existe una sucesión exacta larga del triple  $(X, A, B, x_0)$

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(A, B, x_0) \rightarrow \pi_n(X, B, x_0) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \dots$$

terminando en  $\pi_1(X, A, x_0)$ .

Demostremos por inducción en  $k$ . Para  $k = m + 1$ , tenemos el resultado porque esta es exactamente la situación del caso 3. Suponiendo cierto para  $k - 1$ , tomamos las sucesiones de los triples  $(A_k, A_{k-1}, C, x_0)$  y  $(X_k, X_{k-1}, B, x_0)$ , tenemos el siguiente diagrama (omitimos los puntos base,  $x_0$  en todos, por cuestiones de espacio):

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_{r+1}(A_k, A_{k-1}) & \rightarrow & \pi_r(A_{k-1}, C) & \rightarrow & \pi_r(A_k, C) & \rightarrow & \pi_r(A_k, A_{k-1}) & \rightarrow & \pi_{r-1}(A_{k-1}, C) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \pi_{r+1}(X_k, X_{k-1}) & \rightarrow & \pi_r(X_{k-1}, B) & \rightarrow & \pi_r(X_k, B) & \rightarrow & \pi_r(X_k, X_{k-1}) & \rightarrow & \pi_{r-1}(X_{k-1}, B) \end{array}$$

donde las aplicaciones verticales están inducidas por las inclusiones. Este diagrama es conmutativo.

Para  $r \leq m + n$ , descomponiendo  $X_k = A_k \cup X_{k-1}$ , con  $A_k \cap X_{k-1} = A_{k-1}$ , nos reducimos al caso 2, con  $(A_k, A_{k-1}, x_0)$   $(k - 1)$ -conexo y  $(X_{k-1}, A_{k-1}, x_0)$   $n$ -conexo, así que para  $r + 1 \leq m + n \leq k - 1 + n$  la primera y cuarta flechas verticales son isomorfismos. Además, por hipótesis de inducción, la segunda y quinta flechas son isomorfismo. Por el lema de los cinco, la tercera es también isomorfismo.

Para  $r = m + n$ , análogamente razonamos que la segunda flecha es un epimorfismo, la quinta es un isomorfismo, y la cuarta también. Esto es suficiente para probar gracias a una mitad del lema de los cinco que  $i_*$  es sobreyectiva.

Cuando  $r = 1, 2$ , debemos proceder con cuidado porque pueden aparecer grupos no abelianos en el diagrama e incluso conjuntos sin estructura de grupo. Para  $r = 2$ , una ligera modificación al lema de los cinco nos sigue permitiendo llegar al resultado. Para  $r = 1$ , probamos directamente que  $i_* : \pi_1(A, C, x_0) \rightarrow \pi_1(X, B, x_0)$ . Si  $m \geq 1$ , los pares  $(A, C, x_0)$  y  $(X, B, x_0)$  son al menos 1-conexos porque estamos pegando celdas de dimensión como mínimo 2. Por lo tanto,  $i_*$  es una aplicación entre conjuntos de un solo elemento, y entonces es biyectiva. Si  $m = 0$  y  $n \geq 1$  (si  $n = 0$  no hay nada que probar), queremos probar que  $i_*$  es sobreyectiva. Dada  $[f] \in \pi_1(X, B, x_0)$ , como  $\dim e_\gamma \geq n + 1 \geq 2 \forall \gamma \in \Gamma$ , por el TAC existe  $f' \simeq f$  tal que  $f'(\partial I) \subseteq C$ . Aplicando el TAC relativo, existe  $f'' \simeq f$  rel  $\partial I$  tal que  $f''(I) \subseteq A$ . Entonces,  $[f''] \in \pi_1(A, C, x_0)$  y  $i_*[f''] = [f]$ , así que  $i_*$  es sobreyectiva.

**Caso 5 (caso general):** dados  $X, A, B, C$  como en el enunciado, gracias a las CW-aproximaciones de CW-complejos relativos (proposición 3.10), existen  $(A', C, x_0)$  y  $(B', C, x_0)$  CW-complejos relativos del mismo tipo de homotopía que  $(A, C, x_0)$  y  $(B, C, x_0)$  como en el caso 4, a través de homotopías estacionarias en  $C$ . Por lo tanto, se puede juntar en una homotopía sobre  $X' = A' \cup B'$ , y  $(X', x_0) \simeq (X, x_0)$  rel  $C$ . Para  $X'$  es cierto pues está en las condiciones del caso 4, por ser del mismo tipo de homotopía que  $X$ , también se cumple para  $X$ . Así terminamos el último caso y el teorema. ■

### 3.2.1 Teorema de Suspensión de Freudenthal

Una de las consecuencias más importantes del TEH es el Teorema de Suspensión de Freudenthal (TSF, en adelante), que nos permite no solo calcular los grupos de homotopía  $\pi_n(S^n)$ , sino que ayuda a entender el fenómeno de estabilización en homotopía.

Notemos que dada una aplicación continua  $f : S^n \rightarrow X$ , existe una aplicación natural  $Sf : S^{n+1} \rightarrow SX$  inducida sobre las suspensiones. Denotaremos la suspensión iterada por  $S^m f = S \dots S f$ . Geométricamente, la aplicación funciona como en la figura 3.5. Dadas  $f \simeq g$ , también se tiene que  $Sf \simeq Sg$ , así que la siguiente aplicación está bien definida.

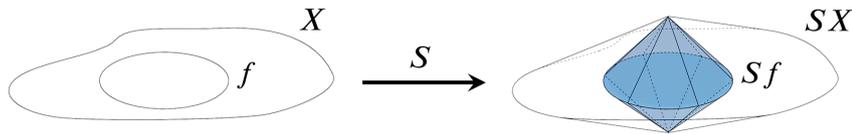


Figura 3.5:  $Sf$

**Definición 3.9 (Suspensión de homotopía).** Sea  $(X, x_0)$  un CW-complejo con punto base, se define la suspensión de homotopía como  $\Sigma : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_{n+1}(SX, *)$ ,  $n \geq 0$ , tal que  $\Sigma[f] = [Sf]$ .

Además, recordando la interpretación de la suma en  $\pi_n(X, x_0)$  a través de una suma puntual de esferas, la figura 3.6 nos deja ver que  $\Sigma$  es un homomorfismo de grupos.

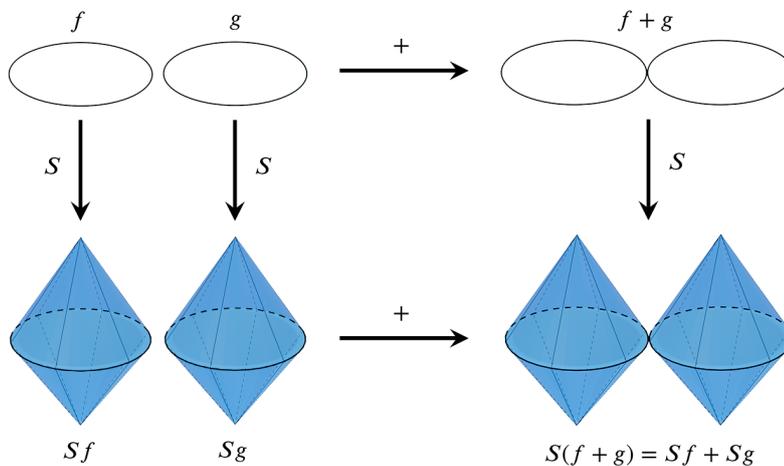


Figura 3.6:  $Sf + Sg$

Esta interpretación de la suma proviene de la estructura de **co-H-espacio** de las suspensiones. El lector interesado puede consultar más información en el capítulo 23 de [Jam95].

Nuestro objetivo es demostrar que dependiendo de la conectividad de nuestro espacio, esta aplicación se hace isomorfismo. Para ello, usaremos el TEH descomponiendo la suspensión en  $C_+X$  y  $C_-X$ , conos superior e inferior, que se intersecan en una copia de  $X$ . El punto base  $x_0$  de los cuatro espacios se toma en  $X$ .

**| Teorema 3.4 (de Suspensión de Freudenthal).** *Sea  $(X, x_0)$  un CW-complejo  $n$ -conexo con punto base. Entonces, la aplicación  $\Sigma : \pi_r(X, x_0) \rightarrow \pi_{r+1}(SX, x_0)$  es isomorfismo para  $r < 2n + 1$  y epimorfismo para  $r = 2n + 1$ .*

*Demostración.* Primero, observemos que si desarrollamos la sucesión de homotopía de los pares  $(C_+X, X, x_0)$  y  $(SX, C_-X, x_0)$ , la contractibilidad de los conos implica que  $\pi_{n+1}(C_+X, x_0) \cong_{\partial} \pi_n(X, x_0)$  y  $\pi_{n+1}(SX, x_0) \cong_{j_*} \pi_{n+1}(SX, C_-X, x_0) \forall n \geq 0$ . Podemos ver esto con el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_r(X, x_0) & \xrightarrow{\Sigma} & \pi_{r+1}(SX, x_0) \\ \downarrow \partial^{-1} & & \downarrow j_* \\ \pi_{r+1}(C_+X, X, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_{r+1}(SX, C_-X, x_0) \end{array}$$

donde las flechas verticales son isomorfismos, por lo que es equivalente estudiar el isomorfismo inferior  $i_*$ , el inducido por la inclusión entre los pares.

De la sucesión de los pares  $(C_{\pm}X, X, x_0)$  se deduce que son  $(n + 1)$ -conexos por ser  $X$   $n$ -conexo, y aplicando el TEH,  $i_*$  es isomorfismo para  $r < 2n + 1$ , y epimorfismo para  $r = 2n + 1$ . ■

La consecuencia inmediata más importante es el cálculo de  $\pi_n(S^n)$  para  $n \geq 2$ . Como ya sabemos que  $\pi_r(S^n) = 0$  para  $r < n$ ,  $S^n$  es un espacio  $(n - 1)$ -conexo, por el TSF tenemos que  $\Sigma : \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n+1}(SS^n) \cong \pi_{n+1}(S^{n+1})$  es isomorfismo para  $n < 2n - 1$ , es decir, para  $n > 1$ . Por lo tanto,  $\pi_2(S^2) \cong \pi_3(S^3) \cong \dots$ , y solo necesitamos calcular  $\pi_2(S^2)$ . Para esto, nos remitimos al ejemplo 1.1. En particular, tenemos que  $(P^1\mathbb{C}, \eta, S^3, S^1)$  es un fibrado, que por la proposición 1.11 es una fibración de Serre, y por tanto tenemos una sucesión exacta larga de  $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow P^1\mathbb{C}$  que relaciona sus grupos de homotopía. El espacio  $P^1\mathbb{C}$  es la esfera de Riemann, homeomorfa a  $S^2$ , y sus grupos de homotopía son isomorfos. En el siguiente fragmento de la sucesión exacta

$$\dots \rightarrow \pi_2(S^3) \rightarrow \pi_2(S^2) \rightarrow \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(S^3) \rightarrow \dots$$

notamos que  $\pi_2(S^3)$  y  $\pi_1(S^3)$  son triviales, y por lo tanto,  $\pi_2(S^2) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ . Con esto, tenemos finalmente:

**Corolario 3.3.**  $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z} \forall n \geq 1$ , generados por la identidad  $\mathbb{1}_{S^n}$ . Además, la aplicación grado  $\deg : \pi_n(S^n, s_0) \rightarrow \mathbb{Z}$  es un isomorfismo.

*Demostración.* Ya hemos conseguido deducir que  $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z} \forall n \geq 1$ . Para ver que el grado es isomorfismo, vemos gracias a [Hat01, pg. 134] que  $\deg$  es homomorfismo. De hecho, en el cálculo de  $\pi_1(S^1, s_0)$  veíamos que este era isomorfismo. Para cada  $n \geq 2$ , dado  $k \in \mathbb{Z}$ , existe  $[f] \in \pi_1(S^1, s_0)$  de grado  $k$ . Por [Hat01, pg. 137],  $\deg S^n f = k$ , y  $\deg[S^n f] = k$  con  $[S^n f] \in \pi_n(S^n, s_0)$ . Así, el grado es epimorfismo de  $\pi_n(S^n, s_0) \cong \mathbb{Z}$  en  $\mathbb{Z}$ , por lo que necesariamente debe ser isomorfismo. Para terminar, como el grado es isomorfismo y la identidad tiene grado 1, que genera  $\mathbb{Z}$ , la identidad  $\mathbb{1}_{S^n}$  genera  $\pi_n(S^n, s_0)$ . ■

El comportamiento observado no es solo aplicable a la diagonal  $\pi_n(S^n)$  (ver figura 3.7). Si fijamos  $k \geq 0$ , observamos que  $\Sigma : \pi_{n+k}(S^n) \rightarrow \pi_{n+k+1}(S^{n+1})$  es un isomorfismo para  $n + k < 2n - 1$ , es decir,  $n > k + 1$ . Esto quiere decir que todas las diagonales superiores se estabilizan a partir de algún punto. Este grupo se denota  $\pi_k^S$  y se le llama  **$k$ -ésimo grupo de homotopía estable**.

Observamos que hasta ahora hemos conseguido calcular  $\pi_m(S^n, s_0)$  cuando  $m \leq n$ . Sin embargo, hemos desarrollado suficientes herramientas para calcular algún otro grupo más. El primer ejemplo no trivial de estos pertenece a Hopf en 1931. Si desarrollamos la última sucesión exacta larga de nuevo en otro sitio

$$\dots \rightarrow \pi_3(S^1) \rightarrow \pi_3(S^3) \xrightarrow{\eta_*} \pi_3(S^2) \rightarrow \pi_2(S^1) \rightarrow \dots$$

donde los grupos  $\pi_3(S^1)$  y  $\pi_2(S^1)$  son triviales, así que  $\pi_3(S^2) \cong \pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$ . Para obtener un generador, tenemos que  $\eta_* : \pi_3(S^3, s_0) \rightarrow \pi_3(S^2, s_0)$  es isomorfismo y  $\pi_3(S^3, s_0)$  está generado por  $[\mathbb{1}_{S^3}]$ , así que  $\eta_*[\mathbb{1}_{S^3}] = [\eta]$  genera  $\pi_3(S^2, s_0)$ . Nótese que aunque  $\eta$  llega a  $P^1\mathbb{C}$ , podemos entender que su conjunto de llegada es  $S^2$  porque  $S^2 \cong P^1\mathbb{C}$ . A la aplicación  $\eta : S^3 \rightarrow S^2$  se la llama la **fibración de Hopf**. El cálculo de este  $\pi_2$ , y el hecho de que este difiera del cálculo del grupo de homología correspondiente ( $H_2(S^3) = 0$ ), amplió el interés sobre los grupos de homotopía.

	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$	$\pi_7$	$\pi_8$	$\pi_9$	$\pi_{10}$
$S^1$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$S^2$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$
$S^3$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$
$S^4$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_3$
$S^5$	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$

Figura 3.7: Primeros grupos de homotopía de las esferas

### 3.2.2 Algunos cálculos interesantes

Vamos a realizar ahora algunos cálculos de grupos de homotopía que demostrarán la utilidad del TEH. Además, algunos de estos grupos nos harán falta posteriormente, y otros nos enseñarán propiedades interesantes que no hemos podido ver todavía.

**Ejemplo 3.1.** Continuando el trabajo hecho en el TSF, calculemos explícitamente  $\pi_n(\bigvee_{i=1}^m S_i^n, *)$ , con  $n, m \geq 2$ . Si tomamos  $\prod_{i=1}^m S_i^n$  como CW-complejo, solo tiene celdas de dimensiones múltiplo de  $n$ , y su  $n$ -esqueleto es exactamente  $\bigvee_{i=1}^m S_i^n$ . Por el TAC, toda aplicación  $f : D^r \rightarrow \prod_{i=1}^m S_i^n$  se puede deformar para que su imagen esté contenida en el  $r$ -esqueleto de  $\prod_{i=1}^m S_i^n$ , así que para  $r \leq 2n - 1$ , como este esqueleto es exactamente  $\bigvee_{i=1}^m S_i^n$ , tenemos que  $\pi_r(\prod_{i=1}^m S_i^n, \bigvee_{i=1}^m S_i^n, *) = 0$ . Por la sucesión exacta larga de homotopía, la inclusión  $\bigvee_{i=1}^m S_i^n \hookrightarrow \prod_{i=1}^m S_i^n$  induce un isomorfismo  $\pi_n(\bigvee_{i=1}^m S_i^n, *) \cong \pi_n(\prod_{i=1}^m S_i^n, *)$  cuando  $n < 2n - 1$ , es decir,  $n \geq 2$ . Usando la proposición 2.4,  $\pi_n(\bigvee_{i=1}^m S_i^n, *) \cong \pi_n(\prod_{i=1}^m S_i^n, *) \cong \bigoplus_{i=1}^m \pi(S_i^n, s_{0i})$ , donde los isomorfismos son naturales. Si  $c_j : (S_j^n, s_{0j}) \rightarrow (S_j^n, s_{0j})$ ,  $j = 1, \dots, m$ , son las aplicaciones constantes,  $\{([\mathbb{1}_{S_1^n}], [c_2], \dots, [c_m]), \dots, ([c_1], \dots, [c_{m-1}], [\mathbb{1}_{S_m^n}])\}$  es base del último término, y trasladándola al primero a través de los isomorfismos, obtenemos que  $\{[i_1], \dots, [i_m]\}$  es base de  $\pi_n(\bigvee_{i=1}^m S_i^n, *)$ . En particular,  $\pi_n(\bigvee_{i=1}^m S_i^n, *) \cong \mathbb{Z}^m$ .

**Ejemplo 3.2.** Sea  $\Lambda$  un conjunto de índices infinito, calculemos  $\pi_n(\bigvee_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha^n, *)$ . Consideramos el homomorfismo  $\Phi : \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \pi_n(S_\alpha^n, s_{0\alpha}) \rightarrow \pi_n(\bigvee_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha^n, *)$  definido por  $[\mathbb{1}_{S_\alpha^n}] \mapsto [i_{S_\alpha^n}]$ , donde  $i_{S_\alpha^n}$  es la inclusión de  $S_\alpha^n$  en la suma puntual. Vemos que  $\Phi$  es isomorfismo.

**$\Phi$  sobreyectiva:** dada  $[f] \in \pi_n(\bigvee_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha^n, *)$ , el conjunto  $\text{im } f \subseteq \bigvee_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha^n$  es compacto, así que está contenido la suma puntual de una cantidad finita de  $S_\alpha^n$ , y posee una preimagen.

**$\Phi$  inyectiva:** dada  $c \in \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \pi_n(S_\alpha^n, s_{0\alpha})$ , se puede escribir  $c = \sum_{j=1}^m n_j [\mathbb{1}_{S_{\alpha_j}^n}]$ , con  $n_j \in \mathbb{Z} \forall j = 1, \dots, m$ . Entonces, si  $\Phi(c) = 0 = \sum_{j=1}^m n_j [i_{S_{\alpha_j}^n}]$ , y podemos restringirnos al caso finito viendo esta suma como elemento en  $\pi_n(\bigvee_{j=1}^m S_{\alpha_j}^n, *)$ , y sabemos que por tanto  $c = 0$  en  $\bigoplus_{j=1}^m \pi_n(S_{\alpha_j}^n, s_{0\alpha_j}) \subseteq \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \pi_n(S_\alpha^n, s_{0\alpha})$ .

Este ejemplo nos ha permitido ver que el grupo de homotopía de un espacio no tiene por qué ser finitamente generado. El siguiente va a enseñarnos que no hace falta buscar espacios tan elaborados para tener este comportamiento. De hecho, este espacio va a ser un CW-complejo finito.

**Ejemplo 3.3.** Calculemos  $\pi_n(S^1 \vee S^n, s_0)$  para  $n \geq 2$ . La aplicación recubridora

$p: X \rightarrow S^1 \vee S^n$ , con  $(X, 0)$  el espacio  $\mathbb{R}$  con una copia  $S_k^n$  de  $S^n$  pegada en cada  $k \in \mathbb{Z}$ , induce isomorfismos sobre los grupos de homotopía de ambos para  $n \geq 2$ . De hecho,  $X \simeq \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} S_k^n$  retrayendo con deformación  $\mathbb{R}$  en un punto  $*$  a través de una aplicación  $r: X \rightarrow \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} S_k^n$ . Si observamos el siguiente diagrama

$$\pi_n(\bigvee_{k \in \mathbb{Z}} S_k^n, *) \xleftarrow{r_*} \pi_n(X, 0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(S^1 \vee S^n, s_0)$$

las aplicaciones implicadas son isomorfismos, y una base del primero es  $\{[i_{S_j^n}]\}_{j \in \mathbb{Z}}$  clases de las inclusiones  $i_{S_j^n}: S_j^n \rightarrow \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} S_k^n$ . Si denotamos  $\gamma_k$  al camino que va de 0 a  $k$  por el segmento  $[0, k]$  que los une en  $\mathbb{R}$ , el conjunto  $(r_*)^{-1}(\{[i_{S_j^n}]\}_{j \in \mathbb{Z}}) = \{[\gamma_k \cdot i_{S_0^n}]\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es base de  $\pi_n(X, 0)$ . Sean  $i_{S^1}: S^1 \hookrightarrow S^1 \vee S^n$  y  $i_{S^n}: S^n \hookrightarrow S^1 \vee S^n$  inclusiones; entonces,  $p \circ \gamma_k = i_{S^1} \circ \dots \circ i_{S^1} \circ i_{S^n}$ , por lo que  $p_*(\{[i_{S_j^n}]\}_{j \in \mathbb{Z}}) = \{[i_{S^1}]^k \cdot [i_{S^n}]\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es base de  $\pi_n(S^1 \vee S^n, s_0)$ , donde el producto es la acción de  $\pi_1(S^1 \vee S^n, s_0)$  sobre  $\pi_n(S^1 \vee S^n, s_0)$ . Gracias a esta base, obtenemos finalmente un cálculo explícito de  $\pi_n(S^1 \vee S^n, s_0) = \{\sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k [i_{S^1}]^k \cdot [i_{S^n}]\}_{m_k \in \mathbb{Z} \forall k \in \mathbb{Z}}$ . Se comprueba que  $\pi_n(S^1 \vee S^n, s_0)$  se puede ver como un  $\mathbb{Z}[\pi_1(S^1 \vee S^n, s_0)]$ -módulo, con base  $\{[i_{S^n}]\}$ .

Es fácil ver por el TAC que  $\pi_1(S^1 \vee S^n, s_0) \cong \mathbb{Z}$  generado por  $[i_{S^1}]$ . Notamos que la asignación  $t \mapsto [i_{S^1}]$  genera  $\phi: \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}[\pi_1(S^1 \vee S^n, s_0)]$  isomorfismo, pues  $\pi_1(S^1 \vee S^n, s_0) = \{\sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k [i_{S^1}]^k : m_k \in \mathbb{Z} \forall k \in \mathbb{Z}\}$ , es decir, series de Laurent sobre  $[i_{S^1}]$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}$ . Como  $\pi_n(S^1 \vee S^n, s_0)$  visto como un  $\mathbb{Z}[\pi_1(S^1 \vee S^n, s_0)]$ -módulo tiene una base de un solo elemento, obtenemos finalmente que  $\pi_n(S^1 \vee S^n, s_0) \cong \mathbb{Z}[\pi_1(S^1 \vee S^n, s_0)] \cong \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ .

Ahora justificaremos la interpretación geométrica que dábamos a la construcción de una CW-aproximación. De nuevo, necesitamos un lema previo.

**Lema 3.7.** Sean  $(X, A, x_0)$  un CW-complejo relativo  $n$ -conexo con  $A$   $m$ -conexo y  $m, n \geq 0$ . Entonces, la aplicación  $p_*: \pi_r(X, A, x_0) \rightarrow (X/A, *)$  inducida por la proyección es un isomorfismo para  $r < n + m + 1$  y epimorfismo para  $r = n + m + 1$

**Demostración.** Ofrecemos un esquema de la demostración. Se comienza demostrando que si  $A$  fuera contráctil, la aplicación sería equivalencia de homotopía [Swi75, pg. 75]. Para el caso general, factorizamos  $p$  en

$$(X, A) \xrightarrow{i} (X \cup CA, CA) \xrightarrow{p'} X \cup CA/CA \cong X/A$$

donde  $p'$  es equivalencia de homotopía por ser  $CA$  contráctil. De la sucesión del par  $(CA, A)$  obtenemos que es  $(m + 1)$ -conexo por ser  $A$   $m$ -conexo, y escidiendo  $X \cup CA$  en  $X$  y  $CA$ , aplicamos el TEH para deducir los isomorfismos y el epimorfismo en el rango correspondiente. ■

**Ejemplo 3.4.** Sea  $X = (\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n) \cup \bigvee_{\beta} e_{\beta}^{n+1}$ . Vamos a calcular  $\pi_n(X)$ ,  $n \geq 2$ . Para ello, del siguiente fragmento de la sucesión exacta de homotopía del par  $(X, \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n)$

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}(X, \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n, x_0) \rightarrow \dots$$

obtenemos por el TAC  $\pi_n(X, \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n, x_0) = 0$ . Por tanto,

$$\pi_n(X) \cong \frac{\pi_n(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n, x_0)}{\partial(\pi_{n+1}(X, \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n, x_0))} = \text{coker } \partial$$

Gracias al lema anterior y al ejemplo 3.2,  $\pi_{n+1}(X, \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n, x_0) \cong_{p_*} \pi_{n+1}(\bigvee_{\beta} S_{\beta}^{n+1}, *)$ , donde este último es grupo libre generado por inclusiones de las  $(n+1)$ -esferas. Las aplicaciones tales que al pasarlas por la proyección dan las inclusiones son las aplicaciones característica de las celdas, por lo que  $\pi_{n+1}(X, \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n, x_0)$  está generado por estas. Al aplicarles  $\partial$ , obtenemos las aplicaciones de pegado  $\varphi_{\beta}$  de estas celdas. En resumen,  $\pi_n(X) \cong \frac{\pi_n(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n, x_0)}{\langle \varphi_{\beta} \rangle}$ , con  $\alpha$  y  $\beta$  en los conjuntos de índices adecuados.

### 3.3 Teorema de Hurewicz

Aunque como hemos visto hasta ahora existen muchas herramientas para calcular grupos de homotopía, suelen ser bastante complicados de calcular para espacios en general, especialmente  $\pi_n$  cuando  $n \gg 1$ . Los grupos de homología, en cambio, suelen ser más accesibles a los cálculos, sobre todo en complejos finitos.

De aquí proviene la importancia del Teorema de Hurewicz. Este resultado relaciona mediante un isomorfismo algunos grupos de homotopía y de homología, proporcionando una herramienta de cálculo más sencilla cuando se cumplen unas ciertas hipótesis. Usaremos el material desarrollado en la sección anterior para demostrar el teorema.

Necesitaremos la siguiente propiedad, cuya prueba se encuentra en [Hat01, pg. 356].

**Proposición 3.12.** Una equivalencia de homotopía débil induce isomorfismos sobre todos los grupos de homología de ambos espacios.

**| Teorema 3.5 (de Hurewicz).** Sea  $X$  un espacio topológico  $(n-1)$ -conexo, con  $n \geq 2$ . Entonces,  $\tilde{H}_r(X) = 0 \forall r < n$  y  $\pi_n(X) \cong H_n(X)$ .

*Demostración.* Tomamos  $f : Z \rightarrow X$  CW-aproximación a  $X$  con  $Z^{n-1} = \{z_0\}$ , que induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía y homología (corolario 3.2 y proposición 3.12). Así reemplazamos  $X$  por  $Z$  y planteamos un argumento basado en la estructura celular.

Primero, como el  $(n-1)$ -esqueleto de  $Z$  tiene un único punto,  $\tilde{H}_r(Z) = 0 \forall r < n$ . Ahora, como solo nos queda comprobar  $\pi_n(Z) \cong H_n(Z)$ , y ambos depende únicamente del  $(n+1)$ -esqueleto de  $Z$ , podemos intercambiar  $Z$  por  $Z^{n+1}$ . Este espacio es de la forma  $(\bigvee_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha^n) \cup \bigvee_{\beta \in B} e_\beta^{n+1}$ , como en el ejemplo 3.4, y por este sabemos que  $\pi_n(Z^{n+1}) \cong \text{coker} \partial$ , con  $\partial : \pi_n(Z^{n+1}, \bigvee_{\alpha} S_\alpha^n, *) \rightarrow \pi_n(\bigvee_{\alpha} S_\alpha^n, *)$ , es decir, una aplicación  $\bigoplus_{\beta \in B} \mathbb{Z} \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \mathbb{Z}$ .

Por otra parte, sea  $d : H_{n+1}(Z^{n+1}, Z^n) \rightarrow H_n(Z^n, Z^{n-1})$  la aplicación borde celular. Esta también es una aplicación  $\bigoplus_{\beta \in B} \mathbb{Z} \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \mathbb{Z}$ . De la sucesión exacta larga de homología del par  $(Z^{n+1}, Z^n)$  se obtiene que

$$\dots \rightarrow H_{n+1}(Z^{n+1}, Z^n) \xrightarrow{d_n} H_n(Z^n) \rightarrow H_n(Z^{n+1}) \rightarrow H_n(Z^{n+1}, Z^n) \rightarrow \dots$$

donde  $H_n(Z^{n+1}, Z^n) = 0$ . Además, de la sucesión del par  $(Z^n, Z^{n-1})$  se tiene que  $j_* : H_n(Z^n) \rightarrow H_n(Z^n, Z^{n-1})$  es isomorfismo, pues  $Z^{n-1} = \{z_0\}$  al no tener celdas de dimensión  $1, \dots, n-1$ . Por lo tanto,  $d = j_*^{-1} \circ d_n$ . De todo esto, deducimos que  $H_n(Z) \cong H_n(Z^{n+1}) \cong \text{coker} d_n \cong \text{coker} d$ .

Para finalizar la prueba, vamos a ver que  $\text{coker} d \cong \text{coker} \partial$ . Ambas son aplicaciones  $\bigoplus_{\beta \in B} \mathbb{Z} \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \mathbb{Z}$ , con lo que será suficiente ver que los coeficientes que definen cada una son iguales. Sean  $\varphi_\beta : S^n \rightarrow Z^{n+1}$  las aplicaciones de pegado de las celdas  $e_\beta^{n+1}$ , y sean  $q_\alpha$  la aplicación que colapsa todas las  $n$ -celdas de  $Z^{n+1}$  excepto  $S_\alpha^n$  en un solo punto. De [Hat01, pg. 140], tenemos que dada una  $(n+1)$ -celda  $e_\beta^{n+1}$ ,  $\beta \in B$ ,

$$d(e_\beta^{n+1}) = \sum_{\alpha \in \Lambda} d_{\beta\alpha} e_\alpha^n$$

donde  $d_{\beta\alpha} \in \mathbb{Z}$  es el grado de la composición  $q_\alpha \circ \varphi_\beta : S^n \rightarrow S^n$ . Para  $\partial$ , el grupo  $\pi_n(Z^{n+1}, \bigvee_{\alpha} S_\alpha^n, *)$  está generado por  $\{\xi_\beta^{n+1}\}_{\beta \in B}$  aplicaciones característica de las  $(n+1)$ -celdas. Se cumple que  $\partial[\xi_\beta^{n+1}] = [\varphi_\beta] = \sum_{\alpha \in \Lambda} c_{\beta\alpha} [i_{S_\alpha^n}] = [\sum_{\alpha \in \Lambda} c_{\beta\alpha} i_{S_\alpha^n}]$ , pues sabemos que las clases de las inclusiones de las esferas representan una base gracias al ejemplo 3.2. Esto quiere decir que  $\varphi_\beta$  es homotópica a una aplicación  $\sum_{\alpha \in \Lambda} c_{\beta\alpha} i_{S_\alpha^n} \forall \beta \in B$ , con exactamente los coeficientes de la suma anterior. Si componemos esta aplicación con  $q_\alpha$ , obtenemos una aplicación  $S^n \rightarrow S_\alpha^n$ , cuyo grado es concretamente  $c_{\beta\alpha}$ . Por lo tanto, por propiedades de grado,  $\text{deg } q_\alpha \circ \varphi_\beta = c_{\beta\alpha}$ . Pero ya

sabíamos que este grado era concretamente  $d_{\beta\alpha}$ . Esto implica que las aplicaciones  $d$  y  $\partial$  tienen los mismos coeficientes, y así

$$\pi_n(X) \cong \pi_n(Z) \cong \text{coker} \partial \cong \text{coker} d \cong H_n(Z) \cong H_n(X)$$

■

Observamos que el Teorema de Hurewicz solo nos relaciona grupos de homología y homotopía para  $n \geq 2$ . Para  $n = 1$ , se tiene una relación más débil entre el grupo fundamental y el primer grupo de homología. La demostración formal de lo que se expone a continuación se puede encontrar en [Hat01, pg. 166-167]. Queremos esbozar el siguiente teorema.

**Teorema 3.6.** *Sea  $(X, x_0)$  un espacio topológico conexo por caminos. Entonces, existe un homomorfismo  $h : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$  sobreyectivo, con núcleo el conmutador de  $\pi_1(X, x_0)$ .*

La primera observación que realizamos es que podemos ver todo lazo basado como un 1-símplice singular. Nuestro objetivo a partir de aquí es definir un homomorfismo  $h : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ . Necesitamos suponer que  $X$  es conexo por caminos, pues el grupo fundamental, a diferencia del primer grupo de homología, solo puede tener en cuenta una componente conexa por caminos a la vez.

Si denotamos  $f \simeq g$  a los lazos homotópicos en  $\pi_1(X, x_0)$  y  $f \sim g$  a los 1-símplices singulares homólogos en  $H_1(X)$ , queremos concluir que  $f \simeq g \Rightarrow f \sim g$ . Si  $H$  es una homotopía rel  $\partial I$  entre  $f$  y  $g$ , se puede factorizar a través del cociente de  $I^2$  que identifica las aristas  $\{0\} \times I$  y  $\{1\} \times I$  en un solo punto cada una. Este cociente es homeomorfo a  $I^2$ , con borde precisamente los 1-símplices singulares  $f$  y  $g$ . Esto prueba que nuestra aplicación está bien definida.

Dados  $f$  y  $g$  caminos en  $X$  tales que  $f(1) = g(0)$ , podemos construir un 2-símplice  $\sigma : \Delta^2 \rightarrow (X, x_0)$  como el de la figura 3.8. Para cada  $s$  en el segmento vertical central, los segmentos  $[v_0, s]$  y  $[s, v_1]$  se aplican en  $f$  y  $g$  respectivamente. Su borde está conformado por  $f$ ,  $g$  y  $f \cdot g$ , por lo que  $f \cdot g \sim f + g$ . En particular, esto ocurre para lazos basados en  $x_0$ , de lo que se deduce que  $h$  es un homomorfismo.

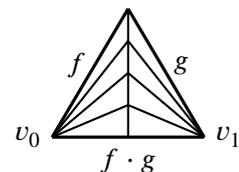


Figura 3.8:  
2-símplice  $\sigma$ .

Sin mucha dificultad podemos observar que este homomorfismo es sobreyectivo. Para verlo, tomamos  $c$  un 1-ciclo en  $H_1(X)$  y construimos su preimagen. Reordenando los factores de  $c$ , podemos suponer que  $c = \sigma_1 + \dots + \sigma_n$  donde  $\sigma_j$  es un 1-símplice

que empieza y termina en  $x_0 \forall j = 1, \dots, n$ , pues si no se pudiera hacer esta reordenación  $\partial c \neq 0$  y  $c$  no sería ciclo. Esto  $\sigma_j$  son lazos basados en  $x_0$ , y por lo tanto  $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \pi_1(X, x_0)$ . Como  $h$  es homomorfismo,  $h[\sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_n] = \sigma_1 + \dots + \sigma_n = c$ , y hemos encontrado una preimagen de  $c$ .

Queremos calcular el núcleo de  $h$ . Sea  $C$  el subgrupo conmutador de  $\pi_1(X, x_0)$ , y veamos que  $C \subseteq \ker h$ . Tomemos  $x \in C$  de la forma  $x = aba^{-1}b^{-1}$  para ciertos  $a, b \in \pi_1(X, x_0)$ , su imagen es  $h(x) = h(a)h(b)h(a)^{-1}h(b)^{-1} = 0$  trivial en  $H_1(X)$  por ser un grupo abeliano. Deducimos que  $x \in \ker h$ , y como los elementos de esta forma generan  $C$ , tenemos que  $C \subseteq \ker h$ .

Para la contención contraria, dado  $[f] \in \ker h \subseteq \pi_1(X, x_0)$ , si vemos  $f$  como un 1-símplice singular,  $f$  es un 1-ciclo, por lo que es el borde de una 2-cadena singular  $c$ . Reorganizando los sumandos de  $c$  podemos escribir  $c = \mu_1 + \dots + \mu_m$  donde el borde de cada  $\mu_i$  es un lazo basado en  $x_0$ , y  $f = \partial c = \partial\mu_1 + \dots + \partial\mu_m$ . Gracias a la última expresión observamos que los puntos del borde de  $c$  o se encuentran en  $f$  o se encuentran en los bordes de dos  $\mu_i$  con signos opuestos. Viendo estos bordes como lazos basados en  $x_0$ ,  $f$  es el producto de caminos de los  $\partial\mu_i$  en un cierto orden salvo homotopía, y sin pérdida de generalidad, suponemos que este orden es  $\mu_1, \dots, \mu_m$ , así que  $[f] = [\partial\mu_1 \cdot \dots \cdot \partial\mu_m]$  en  $\pi_1(X, x_0)$ . Su imagen en el cociente  $\pi_1(X, x_0)^{ab} = \pi_1(X, x_0)/C$  es nula, pues por la observación anterior, en este cociente podemos cancelar parte de algunos bordes (signos opuestos en 1-símplices implica orientación opuesta de los lazos), obteniendo  $[f]$  como el borde de una 2-cadena singular donde los bordes de los sumandos son disjuntos y de manera que  $x_0$  está en estos bordes. Cada uno de los sumandos nos permite retraer con deformación su borde sobre el punto  $x_0$ , y por lo tanto  $[f] = 0$  en  $\pi_1(X, x_0)/C$ . Esto implica que  $[f] \in C$ .

Un hecho importante que se obtiene de este teorema, a partir del Primer Teorema de Isomorfía, es que la aplicación inducida sobre el cociente  $\tilde{h}$  es un isomorfismo entre el abelianizado de  $\pi_1(X, x_0)$  y  $H_1(X)$ . En particular, cuando  $\pi_1(X, x_0)$  es abeliano,  $\pi_1(X, x_0) \cong H_1(X)$ .



# Bibliografía

- [Hat01] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001. URL: <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>.
- [Jam95] I. M. James. *Handbook of algebraic topology*. Elsevier Science B.V, 1995. URL: <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/handbat.pdf>.
- [Rud90] Renzo A. Piccinini Rudolf Fritsch. *Cellular structures in topology*. Cambridge University Press, 1990.
- [Swi75] Robert M. Switzer. *Algebraic topology: homotopy and homology*. Springer-Verlag, 1975.