



DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

**LA CONJETURA DE SHEEHAN EN
TEORÍA DE GRAFOS**

Sabrina Fortes Lorenzo



LA CONJETURA DE SHEEHAN EN TEORÍA DE GRAFOS

Sabrina Fortes Lorenzo

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por

Prof. Ramón Jesús Flores Díaz

Prof^a. María Nieves Atienza Martínez

Índice general

Resumen	1
English Abstract	3
Introducción	5
1. PRELIMINARES	7
1.1. Definiciones, notación y resultados previos	7
2. LA CONJETURA DE SHEEHAN	13
2.1. Establecimiento de la conjetura de Sheehan	13
2.2. Marco histórico.	13
3. EXTENSIÓN DE LA CONJETURA A CUALQUIER REGULARIDAD	15
3.1. Caso particular de las regularidades pares.	15
3.2. La 3-regularidad y su extensión a toda regularidad impar	18
3.2.1. Caso particular de la 3-regularidad	18
3.2.2. Extensión para toda regularidad impar	21
4. PRUEBA PARA REGULARIDADES SUFICIENTEMENTE GRANDES	25

II LA CONJETURA DE SHEEHAN EN TEORÍA DE GRAFOS

4.1. La cota de Thomassen	25
4.2. Mejora de la cota	29
5. GRAFOS BIRREGULARES DE REGULARIDAD 4 Y 14	35
5.1. Resultados auxiliares	36
5.2. Demostración del teorema principal. Construcción.	39
6. OTROS RESULTADOS RELACIONADOS CON LA CONJETURA DE SHEEHAN	45
6.1. Grafos hamiltonianos y grado 3	45
6.2. Aproximación asintótica a la conjetura de Sheehan	46
6.3. Ejemplos de grafos 3-conexos únicamente hamiltonianos	46
6.4. Bondy-Jackson	46
6.5. Grafos bipartitos	47
6.6. Otros grafos únicamente hamiltonianos	47

Resumen

La conjetura de Sheehan en teoría de grafos afirma la inexistencia de grafos hamiltonianos 4-regulares con un único ciclo hamiltoniano. El objetivo de este trabajo es presentar la conjetura y realizar un recorrido por los resultados parciales que se han ido obteniendo, los ejemplos de interés que han generado los intentos de refutarla, y otros resultados relacionados.

English Abstract

Sheehan's conjecture in graph theory asserts the non-existence of 4-regular Hamiltonian graphs with a unique Hamiltonian cycle. The goal of this work is to introduce the conjecture and provide an overview of the partial results that have been obtained, the interesting examples that have arisen from attempts to refute it, and other related findings.

Introducción

En el campo de la teoría de grafos, los grafos hamiltonianos han sido un tema de gran interés y relevancia desde que William Hamilton los definió en 1856.

La existencia y caracterización de grafos hamiltonianos han sido objeto de numerosas investigaciones que han dado lugar a multitud de resultados famosos sobre ellos: como el Teorema de Ore, el Teorema de Dirac o el hecho de que encontrarlos es un problema NP-completo. Aún así, siguen siendo un tema desafiante en la actualidad que ha dejado muchos problemas abiertos [5]. Un ejemplo de ello es el objeto de estudio de este trabajo.

La conjetura de Sheehan destaca por la sencillez de su enunciado y por su resistencia (casi 50 años abierta): afirma la inexistencia de grafos hamiltonianos 4-regulares con un único ciclo hamiltoniano.

El objetivo de este trabajo es ofrecer una recopilación de todas las herramientas y ejemplos que se han generado a partir de la conjetura, y pretende ser una referencia para los interesados en su resolución.

Pasamos a describir con más detalle los contenidos de cada capítulo:

En primer lugar, se proporcionarán las definiciones, notación y resultados previos necesarios para comprender el desarrollo del trabajo.

En el segundo capítulo abordaremos la conjetura de Sheehan, presentando su formulación y destacando su importancia dentro de la teoría de grafos. También se proporciona un marco histórico que resalta los avances y estudios previos relacionados con esta conjetura.

En el tercer capítulo describimos cómo la conjetura implica el resultado análogo en todas las regularidades pares, y como el caso clásico y conocido de regularidad 3 implica dicho análogo para regularidades impares.

El siguiente capítulo se centra en la prueba del resultado de la conjetura para regularidades suficientemente grandes. describe una cota inicial y su mejora a través de nuevos resultados.

En el quinto capítulo se considerará el caso de grafos birregulares de regularidad 4 y 14, presentando una construcción para una familia infinita de grafos únicamente hamiltonianos de este tipo. Dicha construcción representa el grafo conocido más cercano a un posible contraejemplo de la conjetura.

Para concluir, en el sexto capítulo realizamos un recorrido por otras referencias que tienen relación de algún tipo con la conjetura, y que incluyen resultados sobre grafos bipartitos, grafos 3-conexos, grafos triangulares o grafos únicamente hamiltonianos no regulares.

1 | PRELIMINARES

En este capítulo recopilamos los resultados y definiciones de teoría de grafos que necesitaremos en el resto del trabajo.

Como referencia clásica, se recomienda la lectura del libro "*Graph Theory with Applications*" de J. A. Bondy y U. S. R. Murty [4], como recurso adicional. Este libro proporciona una introducción completa y detallada a la teoría de grafos, abarcando desde conceptos fundamentales hasta aplicaciones prácticas.

1.1 Definiciones, notación y resultados previos

Comenzamos con la definición de grafo:

Definición 1.1 [Grafo]. Un **grafo** es un par ordenado $G = (V, A)$ formado por un conjunto $V \neq \emptyset$, a cuyos elementos llamamos **vértices** de G , y otro conjunto A formado por pares de elementos de V , a los cuales llamamos **aristas** de G .

Nota 1.1.

- a) El conjunto de vértices V (y por tanto también el de aristas A) no tiene por qué ser finito. Existen los **grafos infinitos**, aunque los resultados que se verán a lo largo de este trabajo sólo son aplicables a grafos donde V es un conjunto finito.
- b) Denotaremos $V := V(G)$ y $A := A(G)$.
- c) También usaremos $E(G)$ para denotar al conjunto de aristas del grafo G .
- d) Dados $a, b \in V$ tales que $\{a, b\} \in A$, se suele escribir la arista $\{a, b\}$ como ab .

Definición 1.2 [Algunos tipos de grafos].

- a) Un grafo $G = (V, A)$ es **dirigido** si se verifica que $A \subset V \times V \setminus \{(v, v) | v \in V\}$

de modo que $uv \neq vu \in A$.

- b) Una arista del tipo $uv \in A$ se llama **lazo**. Si en la definición anterior se permite la presencia de lazos, se dice que es un **pseudografo dirigido**.
- c) Un grafo se llama **multigrafo** si se pueden repetir aristas y puede haber lazos.
- d) Un **grafo simple** es un grafo no dirigido en el que no se repiten aristas y no hay lazos.

Nota 1.2. A lo largo de todo el trabajo, consideraremos sólo grafos simples finitos a no ser que se indique lo contrario. Para facilitar la lectura los llamaremos **grafos**.

Definición 1.3 [Adyacencia e incidencia]. Sea un grafo $G = (V, A)$,

- a) Dos vértices $u, v \in V$ se dicen **adyacentes** si $uv \in A$, es decir si definen una arista de G .
- b) Dos aristas de G se dicen **incidentes** si tienen un vértice en común. En caso contrario, se dirán **independientes**. La arista $uv \in A$ se dirá **incidente** a los vértices u y v .

Definición 1.4 [Vecindad]. Sea un grafo $G = (V, A)$. Dado un vértice $v \in V$, se llama **vecindad** de v al conjunto formado por los vértices de G adyacentes a v , es decir

$$N(v) = \{u \in V | uv \in A\}$$

También es común hablar de la **vecindad de un subconjunto de vértices** $W \subset V$ al conjunto

$$N_G(W) = \{u \in V | uv \in A, v \in W, u \notin W\} \subset V$$

Definición 1.5 [Grado]. Sea un grafo $G = (V, A)$. Se llama **grado** o **valencia** de $v \in V$ al número de vértices de G adyacentes a v . Se denota por $\delta(v) = |N(v)|$.

Nota 1.3.

- a) Un vértice $v \in V$ tal que $\delta(v) = 0$ se dice **aislado**.
- b) Llamamos **grado o valencia mínima** de G al número $\delta(G) = \min\{\delta(v) | v \in V\}$
- c) Llamamos **grado o valencia máxima** de G al número $\Delta(G) = \max\{\delta(v) | v \in V\}$

| **Lema 1.1 [Lema del apretón de manos (Teorema 1.1 [4])].** Dado un grafo $G = (V, E)$, se verifica

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$$

Definición 1.6 [Grafo k -regular]. Un grafo $G = (V, A)$ se dice **regular** si todos sus vértices tienen el mismo grado. Si k es un entero no negativo, se dice que G es **k -regular** si $\delta(v) = k \forall v \in V$.

Definición 1.7 [Grafo birregular]. Un grafo $G = (V, A)$ se dice **birregular** de regularidades k_1 y k_2 si $\forall v \in V$ se tiene $\delta(v) = k_1$ o bien $\delta(v) = k_2$, con k_1 y k_2 dos enteros positivos.

Definición 1.8 [Grafo bipartito]. Un grafo $G = (V, A)$ es **bipartito** si podemos expresar V como una unión disjunta de dos subconjuntos V_1 y V_2 de tal modo que todas las aristas están constituidas por un vértice de V_1 y otro de V_2 . Lo denotaremos por $G[V_1, V_2]$.

Definición 1.9 [Camino, recorrido, circuito y ciclo]. Sea $G = (V, A)$,

- Un **camino** es una secuencia de vértices adyacentes $T = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ no necesariamente distintos tales que $v_i v_{i+1} \in A, \forall i = 0, 1, \dots, k-1$.
- Un **recorrido** es un camino que no repite aristas.
- Un **circuito** es un recorrido que además es un camino cerrado, es decir, un recorrido en el que el primer y el último vértice coinciden.
- Un **camino simple** es un camino que no repite vértices, salvo excepto el primero y el último, en cuyo caso lo llamamos **ciclo**.

Definición 1.10 [Cintura]. La cintura de un grafo no dirigido es la longitud del ciclo más corto contenido en dicho grafo.

Definición 1.11 [Camino maximal]. Un camino entre dos vértices u y v de G es **maximal** si no se puede extender, es decir, todo vecino de sus extremos está contenido en el camino.

| **Lema 1.2.** Si todo vértice de un grafo G tiene grado mayor o igual a 2 entonces G contiene al menos un ciclo.

Demostración. Sea T un camino maximal de $G = (V, A)$ con extremo $u \in V$. Como T es maximal, no se puede extender, y por tanto $\forall v \in N(u), v \in T$. Sin embargo, como $\delta(u) \geq 2, \exists v \in T$ tal que la arista que los une uv no pertenece a T . Finalmente, si consideramos el subcamino de T que une los vértices u y v junto con la arista uv se tiene un ciclo contenido en G .

□

Definición 1.12 [Longitud]. Se llama **longitud** de un camino al número de aristas que lo componen.

Definición 1.13 [Recorrido euleriano]. Un **recorrido euleriano** en un grafo $G = (V, A)$ es un camino que pasa por cada arista de A una única vez. Un **circuito euleriano** es un recorrido euleriano que empieza y acaba en el mismo vértice.

Definición 1.14 [Grafo euleriano]. Un grafo es euleriano si tiene un circuito euleriano.

Definición 1.15 [Camino hamiltoniano]. Un **camino hamiltoniano** en un grafo $G = (V, A)$ es un camino que pasa por todos los vértices de G una única vez. Si empieza y acaba en el mismo vértice es un **ciclo hamiltoniano**.

Definición 1.16 [Grafo hamiltoniano]. Un grafo es hamiltoniano si tiene un ciclo hamiltoniano.

Definición 1.17 [Grafo únicamente hamiltoniano]. Llamamos **grafo únicamente hamiltoniano** a un grafo que contiene exactamente un ciclo hamiltoniano.

Definición 1.18 [Grafo conexo]. Un grafo $G = (V, A)$ es **conexo** si $\forall u, v \in V$ existe un camino que los conecta.

| Teorema 1.1 [Teorema 4.1 [4]]. Un grafo conexo G tiene un circuito euleriano $\iff \forall v \in V, \delta(v)$ es par.

Definición 1.19 [Subgrafo]. Dado $G = (V, A)$ decimos que $G' = (V', A')$ es **subgrafo** de G si $V' \subseteq V$ y $A' \subseteq A$. Si además $V' = V$ a G' se le llama **subgrafo recubridor**. Si $V' \subseteq V$ y $A' = \{uv \in A \mid u, v \in V'\}$ se dice que G' es un **subgrafo de G inducido por V'** . En este caso también se suele decir que G' es **lleno en G** .

Definición 1.20 [Homomorfismo de grafos]. Dados dos grafos simples $G = (V, A)$ y $G' = (V', A')$, un **homomorfismo** entre G y G' es una aplicación $\phi : V \rightarrow V'$ que conserva las adyacencias, es decir, $\forall uv \in A$ ha de verificarse $\phi(u)\phi(v) \in A'$.

Definición 1.21 [Isomorfismo de grafos]. Un homomorfismo entre G y G' biyectivo cuyo inverso es un homomorfismo entre G' y G se llama **isomorfismo**.

Definición 1.22 [k-factor]. Sea $k \geq 1$, un **k-factor** es un subgrafo recubridor de G en el que todos los vértices tienen grado k .

Definición 1.23 [Emparejamiento o matching]. Un **matching** de un grafo $G = (V, A)$ es un subconjunto $M \subseteq A$ de aristas independientes, es decir, sin vértices en común.

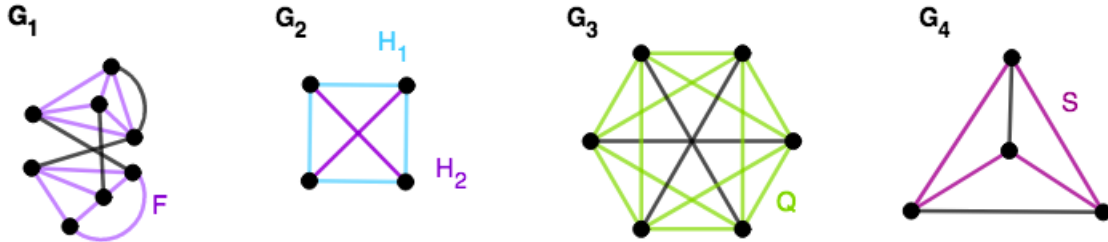
Se dice que un vértice $v \in V$ está **saturado** si alguna arista del matching es incidente en él.

Un matching M es **máximo** si contiene el número máximo de aristas posibles.

Un matching M es **maximal** si al añadirle cualquier arista que no pertenece a M deja

de ser un apareamiento.

Un matching M es **perfecto** si cubre todos los vértices del grafo. Es decir, cada vértice de G está saturado bajo el matching.



F es un 3-factor de G_1 .
 H_1 y H_2 son un 2-factor y un 1-factor de G_2 respectivamente.
 Q es un 4-factor de G_3 .
 S es un 2-factor de G_4 .

Figura 1.1: Ejemplos de k-factor.

Nota 1.4. Nótese que un matching perfecto M de un grafo $G(V, A)$ es similar a un 1-factor de G . La diferencia es que M está formado exclusivamente por aristas mientras que el segundo es un subgrafo de G .

Existe una estrecha relación entre los matchings y los grafos bipartitos. En 1986, P. Hall encontró una condición suficiente y necesaria para encontrar un matching que cubra al menos uno de los conjuntos de vértices de un grafo bipartito. El resultado viene dado por el siguiente teorema que no demostraremos.

Teorema 1.2 [Teorema del matrimonio de Hall [12]]. Sea $G[A, B]$ un grafo bipartito, entonces G tiene un matching que satura todos los vértices de $A \iff \forall S \subseteq A$ se tiene $|S| \leq |N_G(S)|$.

Corolario 1.1. Sea $G[A, B]$ un grafo bipartito k -regular con $k \geq 1$. Entonces G tiene un matching perfecto.

Demostración. Sea $G[A, B]$ un grafo bipartito k -regular con $k \geq 1$.

Sean $S \subseteq A$ y G' el subgrafo bipartito de G inducido por la partición $[S, N_G(S)]$. Supongamos que $|N_G(S)| < |S|$.

Como cada vértice de S tiene grado k , G' tendrá $\sum_{v \in S} \delta(v) = k|S|$ aristas. Así, al repartirlas entre $|N_G(S)|$ vértices se tiene

$$\frac{k|S|}{|N_G(S)|} > k$$

ya que por hipótesis se tiene $|N_G(S)| < |S|$. Es decir, la media de los grados en $N_G(S)$ es mayor que k , lo cual es absurdo puesto que $\delta(v) \leq k \forall v \in G'$.

De este modo concluimos que ha de ser $|N_G(S)| \geq |S| \forall S \subseteq A$ y por el Teorema 1.2 sabemos entonces que G tiene un matching M que satura todo vértice de A .

Finalmente, supongamos que M no es perfecto, es decir, M no satura todo vértice de G . Entonces debe ocurrir $|B| > |A|$. Sin embargo, como G es bipartito y k -regular el número de aristas viene dado por $k|A| = k|B| \Rightarrow |A| = |B|$, lo que nos lleva a una contradicción.

Se tiene por tanto que M ha de ser un matching perfecto.

□

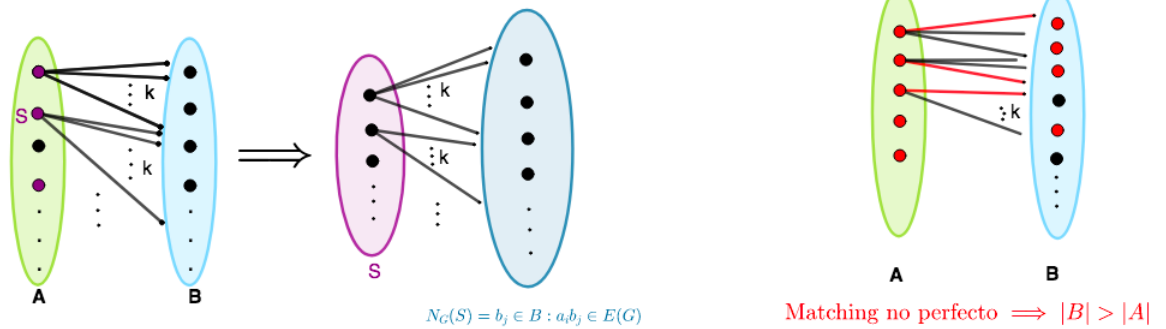


Figura 1.2: Representación gráfica para la idea de la demostración del Corolario 1.1

2 | LA CONJETURA DE SHEEHAN

2.1 Establecimiento de la conjetura de Sheehan

En 1975, J. Sheehan formuló una conjetura acerca de la existencia de un segundo ciclo hamiltoniano en grafos hamiltonianos de regularidad 4. La trascendencia de dicha conjetura reside realmente en el resultado que se desprende de ella y damos en forma de otra conjetura.

| Conjetura 2.1 [Conjetura de Sheehan [19]]. *Sea G un grafo 4-regular, si G contiene un ciclo hamiltoniano entonces contiene al menos dos.*

Si la conjetura de Sheehan es cierta, se puede extender el resultado para todo grafo hamiltoniano con regularidad mayor que 2, de modo que se tiene lo siguiente:

| Conjetura 2.2. *Para cualquier entero $d \geq 3$, todo grafo hamiltoniano d -regular contiene al menos un segundo ciclo hamiltoniano.*

2.2 Marco histórico.

En el campo de la teoría de grafos, los grafos hamiltonianos han sido un tema de gran interés durante décadas. Sin embargo, a pesar de los avances en este área, todavía existen grandes interrogantes sin respuesta y problemas no resueltos. En el estudio de la posible existencia de un segundo ciclo hamiltoniano en grafos de los que se conoce que ya contienen uno, aún queda mucho por descubrir.

El resultado más antiguo relacionado con este problema se atribuye al matemático Cedric Smith, aunque no fue conocido hasta 1946, gracias a un artículo de William Tutte en el cual se probaba que ningún grafo hamiltoniano 3-regular podía ser únicamente hamiltoniano [24].

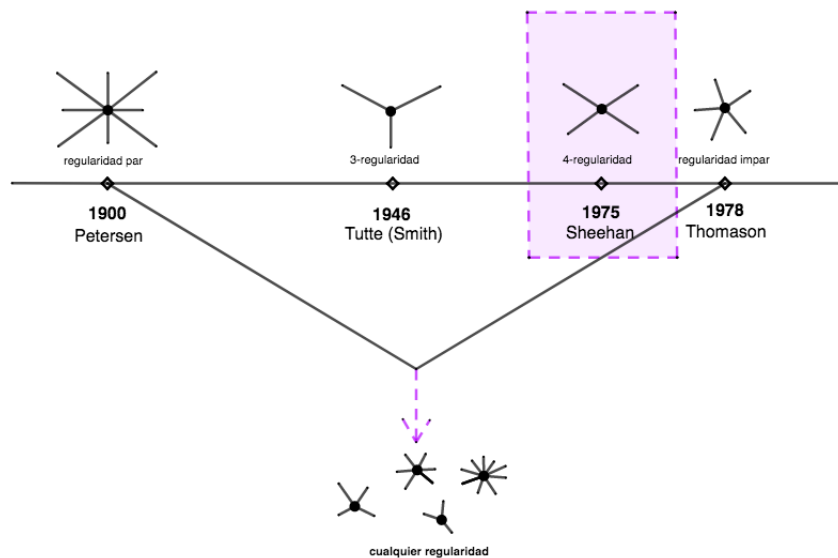
No fue hasta treinta años más tarde que Sheehan lanzó su conjetura en este contexto. La idea de que todo grafo hamiltoniano 4-regular posea al menos un segundo ciclo hamiltoniano sigue sin haber sido probada hasta día de hoy.

Dicha conjetura es el tema de interés de este trabajo y será el nexo de relación entre todos los resultados aquí presentados.

En 1978, Thomason publica una nueva demostración para lo ya conocido por el resultado de Smith-Tutte y además presenta una forma de extender estas conclusiones a grafos hamiltonianos con cualquier regularidad impar [20].

Paralelamente a esta línea, en 1900, Petersen incluyó un teorema en uno de sus numerosos artículos [18] en el que se afirma que si un grafo hamiltoniano 4-regular contiene un segundo ciclo, entonces ocurre lo mismo para toda regularidad par > 2 .

Es entonces cuando nos percatamos de la gran trascendencia de la conjetura de Sheehan: **Si la conjetura de Sheehan se sostiene, las extensiones de Thomason y Petersen implicarían la inexistencia de grafos hamiltonianos d -regulares únicamente hamiltonianos para $d \geq 3$.**



3 | EXTENSIÓN DE LA CONJETURA A CUALQUIER REGULARIDAD

A lo largo de este capítulo nos centraremos en presentar los resultados para las regularidades pares e impares, que junto a la conjetura de Sheehan, permitirían extender el resultado como se indica en la Conjetura 2.2.

3.1 Caso particular de las regularidades pares.

Recordemos que la conjetura de Sheehan describe una característica de los grafos con regularidad 4. En 1891 J. Petersen formuló un lema con el que se puede demostrar que si la conjetura es cierta, también lo es el resultado análogo en cualquier regularidad par [18],[25]. Dicho lema surge como corolario del teorema de los 2-factor de J. Petersen.

| Teorema 3.1 [Petersen]. *Sea G un grafo $2k$ -regular con k un entero positivo; entonces G puede ser expresado como descomposición de 2-factor disjuntos por aristas.*

Demostración. Nótese que los 2-factor pueden ser vistos como una colección de ciclos disjuntos por aristas tales que juntos tocan cada vértice exactamente una vez.

Para probar esta forma generalizada del teorema, Petersen demostró que un grafo 4-regular se puede descomponer en dos 2-factor tomando aristas alternas en un recorrido euleriano. Así, de forma análoga se tiene la descomposición en dos k -factor de cualquier grafo $2k$ -regular:

Sea $G = (V, A)$ un grafo $2k$ -regular de n vértices. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que G es conexo, pues en caso contrario bastaría aplicar el mismo razonamiento para cada componente. Como todo vértice de G tiene grado par, por el Teorema 1.1 existe un circuito euleriano. Sea $C = \{v_1, v_2, \dots, v_1\}$ dicho circuito.

Construimos ahora un grafo bipartito $G'[A, B]$ con $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ de modo que a_i y b_j son adyacentes en G' si y sólo si v_i precede inmediatamente a v_j en C . Nótese que, construido de este modo, G' tiene exactamente el doble de vértices que G pues se tiene que $A = B = V$.

Ahora bien, cada vértice v_i con $i \neq 1$ aparece exactamente k veces en C y v_1 aparece $k + 1$ veces (por aparecer en la primera y última posición). De este modo, cada v_i precede inmediatamente a otros k vértices (sabemos que son todos distintos pues en caso contrario encontraríamos más de una vez a la misma arista en C , lo cual es absurdo por la definición de circuito euleriano) por lo que $\delta(a_i) = k$, $\forall i = 1, \dots, n$. Análogamente, cada v_i es inmediatamente posterior a k vértices, por lo que $\delta(b_i) = k$, $\forall i = 1, \dots, n$ también. Se tiene pues que $G'[A, B]$ así construido es un grafo bipartito k -regular.

Así, aplicando repetidamente el Corolario 1.1 se consigue una descomposición de G' en 1-factor disjuntos (Ver Figura 3.1 situada en la siguiente página).

Sea F un 1-factor de G' . Como cada arista en $E(G')$ viene dada por una arista en $E(C) = E(G)$ y viceversa, podemos decir que las aristas de G' están relacionadas una a una con las de G . De este modo, cada par de vértices a_i y b_i son incidentes a una arista de F , por lo que cada v_i debe ser incidente a dos aristas del subgrafo de G correspondiente a F . Se tiene pues que F corresponde a un 2-factor en G , y esto implica que los 1-factor que componen G' corresponden a una descomposición en 2-factor de G . \square

►Corolario 3.1. *Sea G un grafo $2k$ -regular, con $k \geq 3$, que contiene un ciclo hamiltoniano C . Supongamos que la conjetura de Sheehan es cierta: todo grafo hamiltoniano 4 -regular contiene un segundo ciclo hamiltoniano. Entonces existen al menos dos ciclos hamiltonianos en G .*

Demostración. Sea $k \geq 3$ y $G = (V, A)$ un grafo $2k$ -regular que contiene un ciclo hamiltoniano C . Como C es un 2-factor de G , el grafo $G' = (V, A \setminus A(C))$ es un grafo $(2k-2)$ -regular. Por tanto, podemos aplicar el Teorema de Petersen (3.1) para encontrar una descomposición de G' en 2-factor.

Sea F uno de esos 2-factor, se tiene entonces que $F \cup C$ es un grafo 4 -regular y por hipótesis ha de contener un segundo ciclo hamiltoniano. Finalmente, como $F \cup C \subset G$ se deduce que G tiene un segundo ciclo hamiltoniano.



Así, gracias al Teorema de Petersen se deduce que si la conjetura de Sheehan es cierta, entonces todo grafo Hamiltoniano con regularidad par >2 contiene al menos dos ciclos hamiltonianos. Esto, junto con el trabajo de Smith, Tutte y Thomason sobre las regularidades impares implicaría el resultado para grafos hamiltonianos de cualquier regularidad $d \geq 3$.

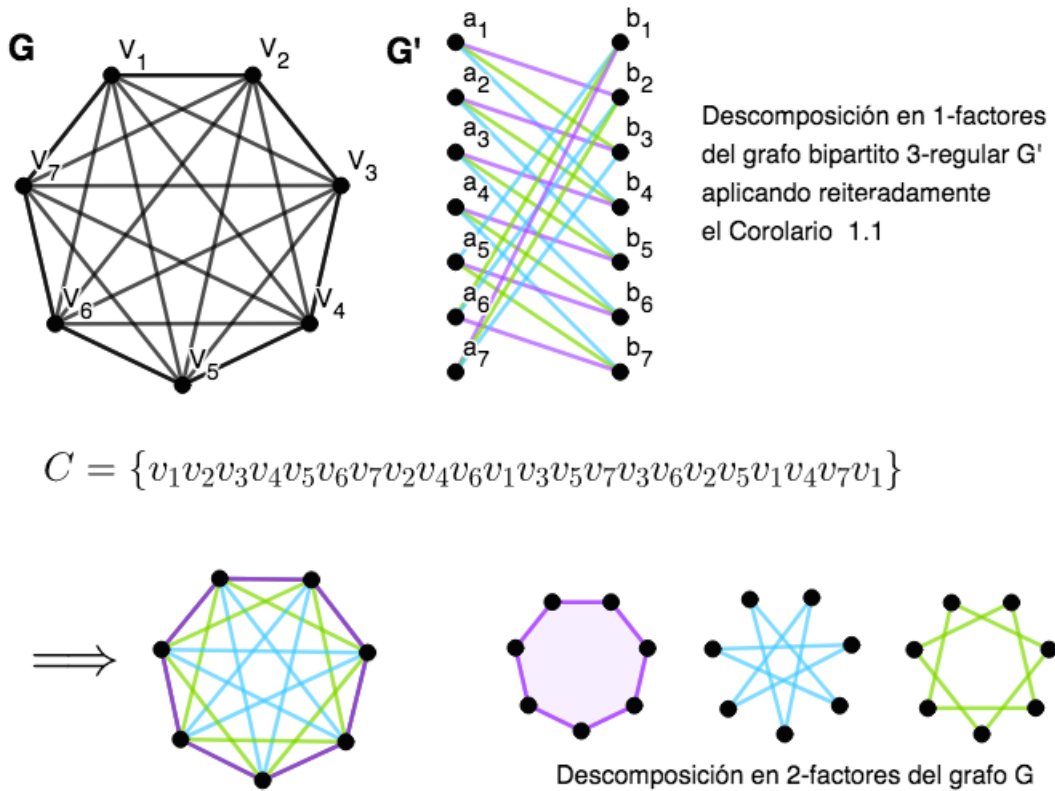


Figura 3.1: Ejemplo de aplicación del Teorema de Petersen para un grafo 6-regular.

3.2 La 3-regularidad y su extensión a toda regularidad impar

3.2.1 Caso particular de la 3-regularidad

Treinta años antes de que Sheehan formulara su conjetura, William Tutte publicó lo que podríamos considerar como el primer resultado relacionado con el problema. En el artículo, Tutte atribuye el teorema a Cedric Smith, aunque la primera prueba que consta es la suya publicada en 1946. [24]

En lo que sigue, consideraremos $G = (V, A)$ un grafo 3-regular. Para la demostración del resultado necesitaremos las siguientes definiciones:

Definición 3.1 [T-coloración]. Una *T-coloración* de un grafo 3-regular G es un conjunto no ordenado de tres clases mutuamente excluyentes de aristas de G , llamadas *T-clases*, de modo que:

- a) La unión de todas las clases constituye el total de las aristas de G .
- b) Cada vértice de G es incidente con un y sólo un miembro de cada clase.

Observación 3.1. La definición anterior es lo que habitualmente llamamos una 3-coloración por aristas, la particularidad está en que al ser un grafo 3-regular todos los vértices tocan los 3 colores.

Definición 3.2 [S-subconjunto]. Un *S-subconjunto* de G es la unión de cualquier conjunto de ciclos disjuntos, formados por un número par de aristas de G , de modo que cada vértice de G está contenido en algún ciclo del conjunto.

Dado un *S-subconjunto* S de G , el número de componentes de S se denota $\sigma(S) + 1$, de modo que $\sigma(S)$ es un entero no negativo.

Observación 3.2. Nótese que como G es 3-regular, el lema del apretón de manos garantiza que $2|A| = 3|V|$, y por tanto G tiene un número par de vértices. Si contiene un ciclo hamiltoniano C , es un ciclo con un número par de vértices y por tanto, con un número par de aristas. Es decir, C es componente de un *S-subconjunto*. Como contiene todos los vértices de G ha de ser la única. Así concluimos que los ciclos hamiltonianos de G son aquellos *S-subconjuntos* para los cuales $\sigma(S) = 0$.

Sea S un S -subconjunto y una arista $e \in A$ definimos el coeficiente:

$$c_e = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in S \\ 0 & \text{si } e \notin S \end{cases}$$

y denotamos por $X(S)$ a la suma formal de aristas de G cuyos coeficientes son c_e :

$$X(S) = \left\{ \sum_{e \in A} c_e * e \right\}$$

Dados S y S' se define la suma $X(S)+X(S')$ coeficiente a coeficiente *mod* 2. En otras palabras, estamos interpretando $X(S)$ como un elemento del $\mathbb{Z}/2$ -espacio vectorial con base las aristas de G .

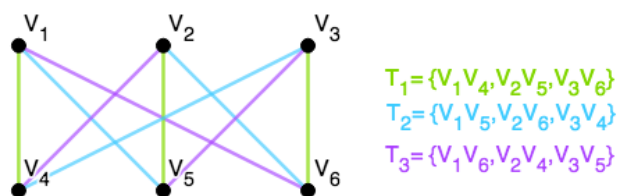
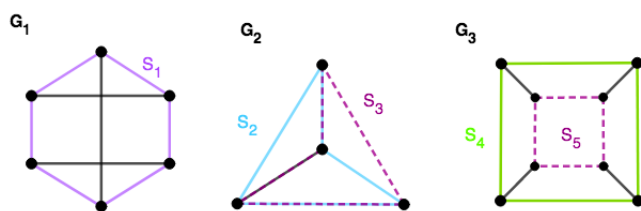


Figura 3.2: Ejemplo de una T-coloración.



- S_1 es S -subconjuntos de G_1 .
- $S_2 \cup S_3$ no es S -subconjunto de G_1 pues los ciclos no son disjuntos.
- S_2 es S -subconjunto de G_2 .
- $S_4 \cup S_5$ es S -subconjuntos de G_3 .

Figura 3.3: Ejemplo de S -subconjuntos en distintos grafos 3- regulares.

| Teorema 3.2 [Tutte, "On Hamiltonian Circuits"]. En cualquier grafo 3-regular G se tiene

$$\sum_H X(H) = 0. \quad (1)$$

Aquí H denota los distintos ciclos hamiltonianos contenidos en G .

Demostración. Sea G un grafo 3-regular. Sea T una T -coloración de G . Obsérvese que dos clases de T dan lugar a un subgrafo recubridor de G que es 2-regular, y tal que en cada vértice inciden dos aristas de clase diferente. Se comprueba fácilmente que la unión de dos T -clases de T es un S -subconjunto de G .

Podemos considerar esta relación diciendo que T y S están asociados. Así, dada T , sólo existen tres S -subconjuntos, S_1 , S_2 y S_3 , asociados a T de este modo (las posibles combinaciones de dos clases entre las tres existentes en T).

Además, se verifica que

$$X(S_1) + X(S_2) + X(S_3) = 0 \quad (2)$$

ya que cada arista de G aparece exactamente una vez en dos de los tres S -subconjuntos. Al sumar se tiene por lo tanto que cada arista tiene coeficiente $2 \equiv 0 \pmod{2}$.

Por otra parte, dado un S -subconjunto S de G , el número de las posibles T -coloraciones asociadas es $2^{\sigma(S)}$. Veámoslo por inducción sobre $\sigma(S)$:

- Si $\sigma(S) = 0$, entonces por la observación 3.2, S es un ciclo hamiltoniano, y la única T -coloración posible es : dos T -clases alternas para las aristas del ciclo, y la tercera para el resto del grafo. Como $2^{\sigma(S)} = 2^0 = 1$, se cumple el paso inicial de la inducción.
- Supongamos que es cierto para S con $n - 1$ componentes. Si ahora S tiene una componente más, sea A dicha componente. Consideramos primero $S \setminus A$, que por inducción tiene asociadas $2^{\sigma(S)-1}$ T -coloraciones posibles. Ahora, cada una de esas coloraciones da lugar a dos coloraciones de S , dependiendo de cómo se combinen las dos clases de coloración correspondientes en $S \setminus A$ con las dos clases de coloración posibles en A . Esto implica inmediatamente que S tiene $2 \times 2^{\sigma(S)-1} = 2^{\sigma(S)}$ T -coloraciones.

De este modo, si efectuamos la suma (2) para todas las T -coloraciones de G se tiene:

$$\sum_S 2^{\sigma(S)} X(S) = 0.$$

Finalmente, se tiene que el coeficiente $2^{\sigma(S)}$ sólo toma valor distinto de 0 mod 2 en el caso $\sigma(S) = 0$ (correspondiente a los ciclos hamiltonianos), ya que en cualquier caso contrario dicho coeficiente es par, y por lo tanto congruente con 0 mod 2. Así concluye el teorema. □

►**Corolario 3.2.** *Si un grafo 3-regular contiene un ciclo Hamiltoniano, entonces contiene al menos 3.*

Demostración. Si hubiera un sólo grafo hamiltoniano H , el teorema 3.2 implica que todos los coeficientes de

$$X(H)$$

serían cero, lo cual es absurdo. Si hubiera dos diferentes H y H' , de nuevo por el teorema los coeficientes de $X(H)$ y $X(H')$ habrían de ser iguales, lo cual implicaría $H = H'$. Por tanto, hay al menos tres ciclos hamiltonianos en el grafo. □

3.2.2 Extensión para toda regularidad impar

En 1978, Thomason publicó una demostración alternativa de lo anterior. Dicha prueba, aunque sea más compleja, destaca por la construcción de lo que Thomason llamó **lollipop**, además de permitir extender la conclusión a grafos hamiltonianos con cualquier regularidad impar. [20]

A lo largo de esta sección, a diferencia de las anteriores, consideramos $G = (V, A)$ un multigrafo. Además, los caminos y ciclos se denotarán como secuencias de aristas (en vez de vértices) como (e_1, \dots, e_k) de modo que e_i y e_{i+1} son incidentes al mismo vértice de G para $i = 1, \dots, k - 1$.

Consideremos los vértices de G numerados en el sentido de recorrido de un ciclo hamiltoniano. Nos centraremos en encontrar caminos hamiltonianos que empiezan en una cierta secuencia de aristas.

Definición 3.3 [Stick]. *Sea m un entero positivo. Llamamos **stick** a un camino $s = (e_1, \dots, e_m)$ en G de modo que e_i es la arista entre los vértices v_i y v_{i+1} , $1 \leq i \leq m$.*

Las siguientes definiciones y el teorema que nombraremos a continuación dependen de la elección del *stick* $s \subseteq A$. Los corolarios que se desprenden de él se obtendrán exigiendo unas condiciones convenientes en s .

Sea $|V| = n$. Sea $v \in V$. Denotamos por $\epsilon(v)$ al número de aristas $e \in A$ entre v y el conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_m\}$, es decir, todos los vértices del *stick* s menos el último. Sea $h = (e_1, \dots, e_{n-1})$ un camino hamiltoniano que comienza con el *stick* s de modo que la arista e_i conecta los vértices v_i y v_{i+1} , $1 \leq i \leq n - 1$ y consideremos e_n otra arista cuyos extremos son los vértices v_n y v_k , $k \geq m + 1$, tal que $e_n \neq e_{n-1}$.

Definición 3.4 [Lollipop]. Con las condiciones que acabamos de describir, llamamos ***lollipop*** al conjunto $\ell = \{e_1, \dots, e_n\} \subset A$.

Observación 3.3. Cada *lollipop* contiene dos caminos hamiltonianos que comienzan en s : $h = (e_1, \dots, e_{n-1})$ y $h' = (e_1, \dots, e_{k-1}, e_n, e_{n-1}, \dots, e_{k+1})$. Nótese que si e_n es un lazo entonces $h = h'$ y podemos considerar que ℓ contiene dos copias de h .

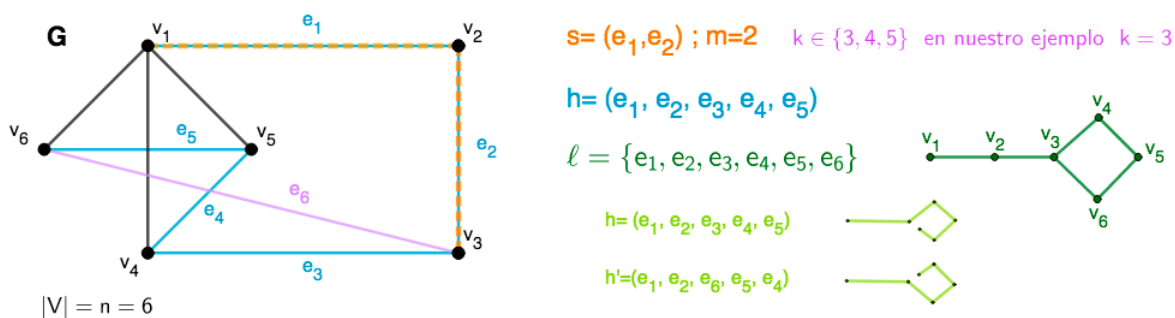


Figura 3.4: Ejemplo de *lollipop* para un grafo G con 6 vértices. Se ha usado la misma notación para una mejor comprensión.

Por último, definimos el multigrafo $\ell(G, s)$ cuyo conjunto de vértices es

$$V' = \{h \mid h \text{ es un camino hamiltoniano en } G \text{ que comienza en } s\}$$

y de modo que dos vértices h y h' de W están conectados por una arista si están contenidos en el mismo *lollipop* ℓ de G .

Supongamos que h es un camino hamiltoniano de G que comienza en el *stick* s y acaba en el vértice v_n . Por construcción se tiene que el grado de h en $\ell(G, s)$ es exactamente el número de veces que h está contenido en un *lollipop* en G . Se comprueba fácilmente que dicho número es $\delta_{\ell(G,s)}(h) = \delta_G(v_n) - \epsilon(v_n) - 1$, pues vendrá dado por el número de posibles elecciones para la arista e_n en la construcción del *lollipop*: como $e_n = \{v_n v_k\}$,

$k \geq m + 1$, la arista e_n sólo puede unir a v_n con vértices no contenidos en el *stick*, es decir, son posibles todas las aristas incidentes en v_n ($\delta_G(v_n)$) menos aquellas que lo unen con un vértice del *stick* ($\epsilon(v_n) + 1$).

Nota 3.1. *La construcción del lollipop está bien definida. Además, en nuestro caso con valencias impares la existencia de la arista e_n se tiene inmediatamente: si partimos de un ciclo hamiltoniano, al llegar al último vértice (arista e_{n-1}), debe tener forzosamente una arista a alguno de los otros vértices ya que si no su valencia sería par, y con esa arista, eligiendo el *stick* adecuado, se forma el lollipop. En cualquier grafo hamiltoniano regular con valencia impar, partiendo de un vértice cualquiera podemos construir un lollipop.*

| Teorema 3.3. *El número de caminos hamiltonianos en G que comienzan con el *stick* s y acaban en un vértice del conjunto $W = \{w \in V \mid \delta(w) - \epsilon(w) \text{ es par}\}$ es par.*

Demostración. Sea h un camino hamiltoniano que comienza en el *stick* s y termina en $w \in W$, si $\delta(w) - \epsilon(w)$ es par, se tiene que $\delta_{\ell(G,s)}(h) = \delta_G(v_n) - \epsilon(v_n) - 1$ es impar. Como en todo grafo el número de vértices de grado impar es par, se deduce inmediatamente el resultado. □

▷Corolario 3.3. *Sean G un multigrafo, $u, v \in V$ y supongamos que $\delta(w)$ es impar para cada vértice $w \in V \setminus \{u, v\}$. Entonces el número de caminos hamiltonianos en G entre u y v es par.*

Demostración. Supongamos que u y v son vértices adyacentes, (si no lo fueran podríamos añadir una arista entre ellos. Esto no afecta al resultado puesto que no contradice ninguna hipótesis). Sea e una arista entre u y v . Entonces podemos elegir $e_1 := e$ de modo que $u = v_1$ y $v = v_2$. Si tomamos como *stick* a $s = (e_1)$, entonces $\forall w \in V$ se tiene que el número de aristas entre u y w es $\epsilon(w)$. Así, un camino hamiltoniano h que empieza en s y acaba en w da lugar a exactamente a $\epsilon(w)$ caminos hamiltonianos entre u y v . Finalmente, considerando la hipótesis $\delta(w)$ es impar, se tienen dos casos:

CASO 1: Si $\delta(w) - \epsilon(w)$ es impar, entonces $\epsilon(w)$ es par. Luego hay un número par de caminos hamiltonianos entre u y v .

CASO 2: Si $\delta(w) - \epsilon(w)$ es par, entonces $\epsilon(w)$ es impar. Sin embargo, por el Teorema 3.3, el número de caminos hamiltonianos que empiezan en s y acaban en w es par. Luego hay un número par de caminos hamiltonianos entre u y v . □

Sea pues G un grafo hamiltoniano 3-regular y sea $uv \in E(G)$. Entonces por el Corolario 3.3 sabemos que existe un número par de caminos hamiltonianos entre u y v , y por tanto que G contiene un número par de ciclos hamiltonianos.

Observación 3.4. El resultado del Corolario 3.3 es en realidad más fuerte, puesto que la conclusión anterior no se tiene sólo para regularidad 3 sino para cualquier grafo con valencias únicamente impares, y en concreto para cualquier regularidad impar.

4 | PRUEBA PARA REGULARIDADES SUFICIENTEMENTE GRANDES

En 1998, Thomassen consiguió probar que para ciertas regularidades no existen grafos con un único ciclo hamiltoniano [23]. Más recientemente, en 2006, tres matemáticos de la Universidad de Waterloo, Penny Haxell, Ben Seamone y Jacques Verstraete, mejoraron este resultado dando una cota más fina.

4.1 La cota de Thomassen

En el artículo publicado en 1998, Thomassen utiliza un método probabilístico para probar que todo grafo hamiltoniano r -regular contiene un segundo ciclo hamiltoniano si $r \geq 300$. Para entender su razonamiento comenzaremos con las siguientes definiciones:

Definición 4.1. Sea G un grafo en el cual cada arista es coloreada de rojo o verde.

- Un subconjunto de vértices $S \subset V(G)$ se llama **rojo-independiente** si ningún par de vértices de S está unido por una arista roja.
- Un subconjunto de vértices $S \subset V(G)$ se llama **verde-dominante** si todo vértice $v \notin S$ es adyacente a un vértice de S por una arista verde.

Con estas definiciones, se tienen los siguientes teoremas que nos llevan a la deducción de la cota.

| Teorema 4.1 [Teorema 2.2 de "*Chords of longest cycles in cubic graphs*" de Thomassen [22]]. Sea G un grafo y sea C un ciclo hamiltoniano contenido en él. Consideremos las aristas de G coloreadas de rojo si pertenecen a C y de verde en caso contrario. Entonces,

si $\exists S \subset V(G)$ tal que es a la vez rojo-independiente y verde-dominante, se tiene que G contiene un segundo ciclo hamiltoniano.

Demostración. Consideremos un subgrafo G' de G tal que G' contiene a C y tal que para cada vértice w adyacente a un vértice de S en C , contiene una única arista verde que lo une con un vértice de S . Es decir, $V(G') = V(G)$ y $E(G')$ son todas las aristas de C más una por cada vértice adyacente a un vértice de S en C .

De este modo, $\delta_{G'}(w) = 3$ y para todo $v \in C$ tal que $v \notin S$ y no sea consecutivo a un vértice de S en C se tiene $\delta_{G'}(v) = 2$. Nótese que $G' \setminus S$ tiene precisamente $|S|$ componentes, cada una de las cuales es un camino cuyos extremos tienen grado impar en G' y cuyos vértices internos tienen grado 2:

Sea $e = xy$ con $x \in S$. Cada camino hamiltoniano de G' que empiece con e debe terminar en un vértice de $G' \setminus S$ puesto que debe recorrer los vértices de cada componente consecutivamente; es decir, en dicho ciclo, desde cada vértice de S pasamos a una componente de $G' \setminus S$, y tras recorrerla por completo, salimos por uno de sus extremos a otro vértice de S nuevamente. Esto, junto a la condición $|G' \setminus S| = |S|$, justifica que el ciclo acabe en un vértice que no pertenece a S .

Ahora, como ese vértice tiene grado impar en G' , por el argumento del *lollipop* de Thomason se tiene que G' tiene un número par de ciclos hamiltonianos que contengan a e . De aquí se sigue que G' contiene un ciclo hamiltoniano C' distinto de C y por lo tanto G también.

□

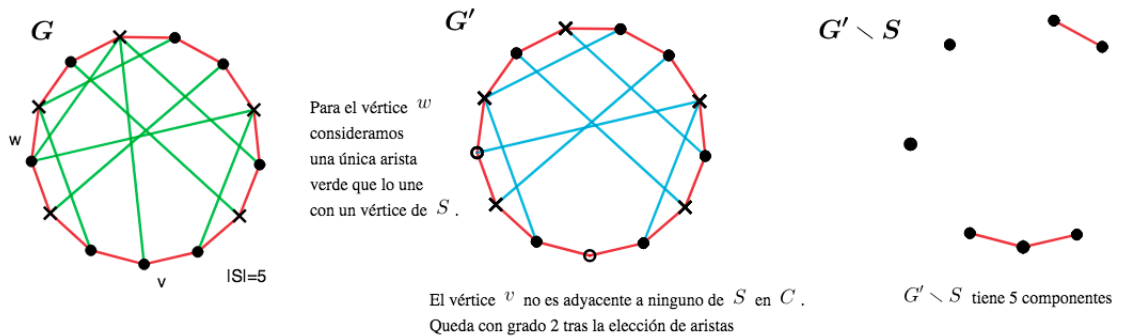


Figura 4.1: Ejemplo de conjunto rojo-independiente y verde-dominante (vértices con X) tras colorear un grafo como se indica en el Teorema 4.1. Ilustración representativa de la demostración del teorema.

Teorema 4.2. Sea G un grafo cuyas aristas se han coloreado de rojo y verde. Asumimos que un subgrafo recubridor del subgrafo rojo es r -regular y un subgrafo recubridor

del subgrafo verde es k -regular. Si $r \geq 3$ y $k > 200r \log r$, entonces G tiene un conjunto de vértices S que es rojo-independiente y verde-dominante.

Nota 4.1. En el enunciado del teorema anterior, \log denota el logaritmo neperiano.

Para la prueba del Teorema 4.2 será necesario usar el siguiente lema:

| **Lema 4.1** [Lovász' Local Lemma [7]]. Sean A_1, A_2, \dots, A_n sucesos de un espacio probabilístico. Sea G un grafo con vértices A_1, A_2, \dots, A_n tales que para cada $i = 1, 2, \dots, n$, A_i es un suceso independiente de cualquier combinación de los sucesos adyacentes a él en G . Supongamos que existen x_1, x_2, \dots, x_n números reales positivos menores que 1 tales que para cada $i = 1, 2, \dots, n$, la probabilidad de A_i satisface

$$\mathbb{P}(A_i) < x_i \prod_j (1 - x_j) \quad (4.1)$$

con j tal que $A_j A_i \in E(G)$. Entonces

$$\mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n) > 0 \quad (4.2)$$

Demostración (Teorema 4.2). Sea p un número real fijo, con $0 < p < 1$. Definimos el espacio probabilístico donde los sucesos son las coloraciones de $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ usando los colores 0 y 1, (de modo que pueden verse como particiones del conjunto de vértices en dos conjuntos, o elecciones de vértices) con la función de probabilidad siguiente:

Sea T una coloración de G en la cual se selecciona 1 con probabilidad p y 0 con probabilidad q . Entonces $\mathbb{P}(T) = p^q(1 - p)^{m-q}$. Nótese que tras esta definición, a lo largo de la prueba se manejaremos dos coloraciones diferentes: la *rojo-verde* y la *0-1*.

El conjunto S buscado será aquel formado por los vértices coloreados de 1. De este modo, como buscamos que sea rojo-independiente y verde-dominante, deducimos que no puede haber ninguna arista roja cuyos dos extremos sean 1s y además, cualquier vértice que no esté en S (i.e. con un 0) debe ser adyacente mediante una arista verde al menos a un vértice con un 1.

Para cada arista roja e de G denotamos por A_e al suceso en el que ambos extremos de e tienen el color 1 y los demás vértices tienen un color cualquiera. Por tanto, $\mathbb{P}(A_e) = p^2$.

De manera similar, para cada vértice v de G denotamos por A_v al suceso en el cual v y sus vértices adyacentes mediante aristas verdes tienen el color 0 y los demás vértices tienen un color cualquiera. Por tanto, $\mathbb{P}(A_v) = (1 - p)^{k+1}$. (Puede consultarse una representación de estos sucesos en la figura incluida más adelante)

Se probará la existencia del conjunto S demostrando que la probabilidad de escogerlo es mayor que 0, o lo que es equivalente, que la probabilidad de que no ocurra ninguno de los sucesos A_e o A_v es positiva.

Consideremos ahora el grafo H cuyos vértices son todos los posibles sucesos A_e y A_v , de modo que dos vértices son adyacentes en H si y sólo si los conjuntos de vértices correspondientes en G intersecan. El grafo H así definido es como requiere el lema 4.1, nos falta entonces encontrar números reales asociados que permitan satisfacer (4.1).

A cada suceso A_e le asociamos $x \in \mathbb{R}, 0 < x < 1$ y a cada suceso A_v le asociamos $y \in \mathbb{R}, 0 < y < 1$.

- Sea A_{e_1} un suceso del tipo arista con extremos v_1 y v_2 .
 A_{e_1} será adyacente a $2(r-1)$ sucesos A_{e_i} correspondientes a las $r-1$ aristas rojas incidentes a v_1 y a las $r-1$ incidentes a v_2 .
 Por otra parte, será adyacente a $2(k+1)$ sucesos A_{v_i} : los k correspondientes a las k aristas verdes incidentes a v_1 , los k correspondientes a las k incidentes a v_2 y a los sucesos A_{v_1} y A_{v_2} en sí. Por lo tanto la expresión 4.1 queda de la forma

$$p^2 < x(1-x)^{2r-2}(1-y)^{2k+2} \quad (4.3)$$

- Mediante un razonamiento análogo para los sucesos del tipo A_v se tiene

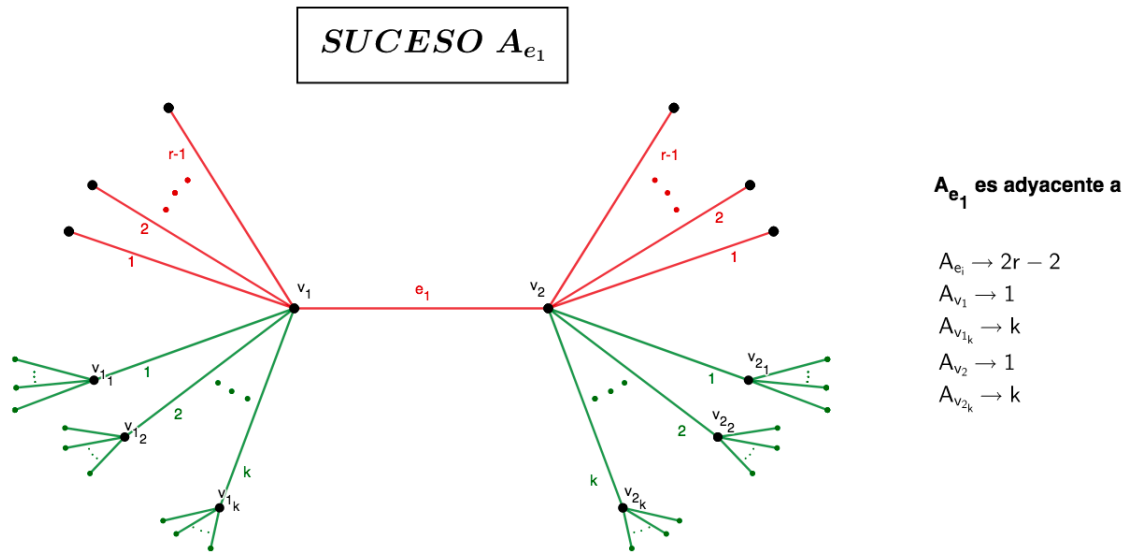
$$(1-p)^{k+1} < y(1-x)^{(k+1)r}(1-y)^{k^2} \quad (4.4)$$

Si las expresiones consideradas se verifican, nos encontramos en las condiciones del lema 4.1. Así, por (4.2) concluiríamos que la probabilidad de que no ocurra ninguno de los sucesos A_e o A_v es positiva.

Se observa finalmente que eligiendo $p = \frac{1}{5r}$, $x = \frac{1}{10r^2}$ e $y = \frac{1}{k^2}$, la desigualdad (4.3) se verifica $\forall k \geq 10$ y la desigualdad (4.4) se verifica $\forall k > 200r \log r$. Se tiene pues que si $r \geq 3$ y $k > 200r \log r$, $\exists S \in V(G)$ rojo-independiente y verde-dominante. □

De este modo, combinando la prueba del Teorema 4.2 con el Teorema 4.1, Thomassen llegó a la siguiente conclusión:

Teorema 4.3. *Si G tiene un ciclo hamiltoniano y es m -regular con $m \geq 300$, entonces tiene un segundo ciclo hamiltoniano.*



Demostración. Si $r = 2$, $k = 298$ y p, x, y son como en la prueba del Teorema 4.2, entonces (4.3) y (4.4) se satisfacen. □

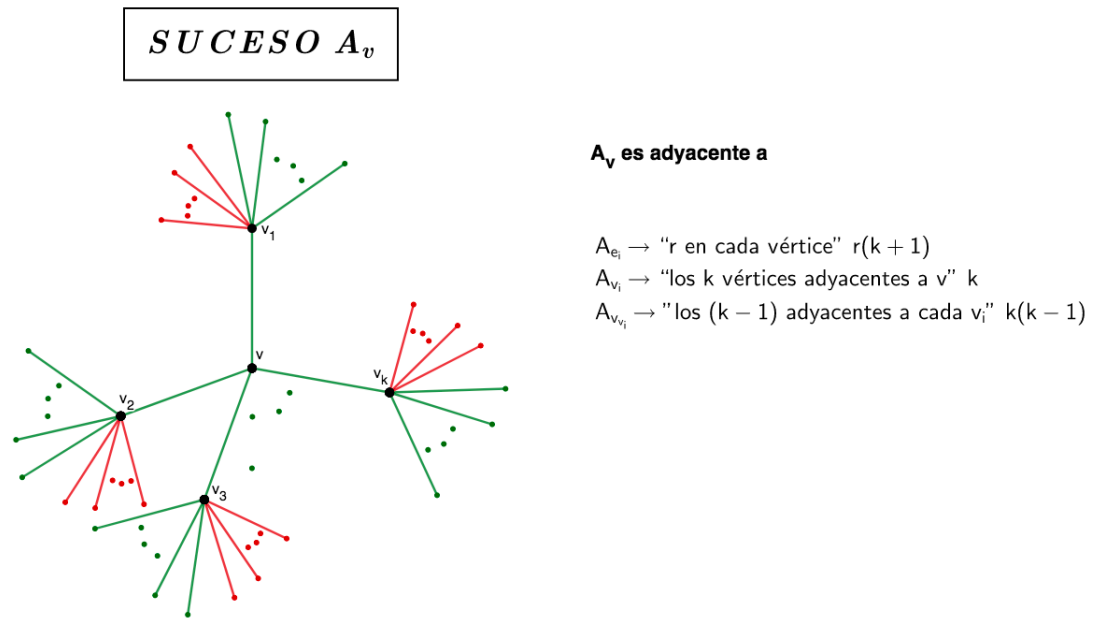
Así, gracias al Teorema 4.3, Thomassen consiguió probar la cota mencionada al comienzo de la sección y que resulta de gran interés en nuestro estudio: **no existen grafos únicamente hamiltonianos r -regulares, con $r \geq 300$.**

4.2 Mejora de la cota

Como se ha mencionado anteriormente, Haxel, Seamone y Verstraete mejoraron el resultado de Thomassen. Para ello se usó nuevamente el método probabilístico. Debido a la extensión de la prueba y la gran cantidad de cálculos de probabilidades, lo que sigue en esta subsección es tan sólo una indicación de la demostración que se puede encontrar con todo detalle en [13].

De nuevo, consideraremos únicamente grafos finitos sin aristas múltiples ni lazos y la siguiente definición:

Definición 4.2 [Conjunto dominante independiente de un ciclo C]. Sea C un ciclo hamiltoniano de un grafo G . A un conjunto de vértices $I \subset V(G)$ tal que ningún par de vértices de I es adyacente en C y cada vértice de G es adyacente a un vértice de I en $G \setminus E(C)$, se le llama **conjunto dominante independiente del ciclo C** .



Observación 4.1. Nótese que con esta definición, podemos considerar un caso particular del Teorema 4.1: todo grafo G que contenga un ciclo hamiltoniano C tiene al menos dos ciclos hamiltonianos si contiene un conjunto I dominante independiente de C .

Utilizando lo anterior, indicaremos (siguiendo la estructura del artículo original) la prueba del siguiente teorema.

Teorema 4.4. No existen grafos r -regulares únicamente hamiltonianos con $r > 22$, y tampoco grafos r -regulares únicamente hamiltonianos con cintura al menos 7 si $r > 14$.

Idea de demostración.

Para la demostración del teorema, usaron la versión simétrica del Lema de Lovász:

Lema 4.2 [Versión simétrica del Lema de Lovász [7]]. Sean A_1, A_2, \dots, A_n sucesos en un espacio de probabilidad, y para cada A_i sea $J_i \subset \{1, 2, \dots, n\}$ el conjunto de los valores de j tales que A_j depende de A_i . Supongamos que existe un número real positivo $0 < \gamma < 1$ tal que

$$\mathbb{P}(A_i) < \gamma(1 - \gamma)^{|J_i|} \tag{4.5}$$

Entonces se tiene que

$$\mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n) \geq (1 - \gamma)^n > 0 \tag{4.6}$$

■ **PRIMERA PARTE: INTRODUCCIÓN DE LA PRUEBA.**

Se considera G un grafo hamiltoniano $(d+2)$ -regular con n vértices y se escoge por conveniencia n par, siendo $C = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ el ciclo hamiltoniano considerado en G .

Se describe cómo escoger un conjunto I de manera recursiva, partiendo con $I_0 = V(C)$. Para $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ se define I_k eliminando el vértice v_{2k+1} en I_{k-1} con probabilidad p y eliminando ambos vértices v_{2k} y v_{2k+2} con probabilidad $(1-p)$. Se tiene además que el conjunto $I = I_{\frac{n}{2}}$ es independiente en C y escogemos I^* un conjunto maximal independiente en los vértices de C que contenga a I .

El objetivo es demostrar que si $d \geq 22$ entonces hay una probabilidad positiva de que I^* sea un conjunto dominante independiente en C :

Para ello se definen los sucesos A_h^* y A_h en los que un vértice $v_h \in V(C)$ no es dominado por I^* e I respectivamente.

Con estas definiciones, establecen la siguiente propiedad: se tiene que si v_h tiene tres vecinos consecutivos en C entonces es dominado por I^* , luego deducen que basta considerar únicamente los vértices que no cumplen dicha condición. Si se consigue probar que estos vértices son dominados por I con una probabilidad positiva, entonces I^* será un conjunto dominante independiente de C y el teorema quedará demostrado. Por el Lema 4.2, esto ocurrirá si existen $p, \gamma \in (0, 1)$ tal que $\forall v_h$ que no tenga vecinos consecutivos en C se tiene

$$\mathbb{P}(A_h) < \gamma(1 - \gamma)^{\delta_h} \quad (4.7)$$

donde $\delta_h = |J_h|$ es el número de sucesos A_j mutuamente dependientes con A_h .

■ **SEGUNDA PARTE: ESTIMACIÓN DE $\mathbb{P}(A_h)$.**

Para el cálculo de $\mathbb{P}(A_h)$ se introduce notación necesaria sobre conjuntos relacionados con la vecindad de $v \in V(C)$ y nuevos sucesos:

- Γ es la vecindad de v en $G \setminus E(C)$, $|\Gamma| = d$.
- Un vértice v_i es par o impar si lo es i respectivamente y un vecino par o impar de v es un vértice par o impar respectivamente en Γ .
- Dado un subconjunto $W \subset V$ se denota al suceso en el que ningún vértice de W pertenece a I como $[W \cap I = \emptyset]$.
- Q denota a la unión de todos los vértices $\{v_{2k-3}, v_{2k-2}, v_{2k}, v_{2k+2}, v_{2k+3}\} \subset \Gamma$, $|Q| = 5q$ y $A_Q = [Q \cap I = \emptyset]$.
- R es el conjunto de los vecinos pares de v en $\Gamma \setminus Q$ que son adyacentes en C a un vecino impar de v y $A_R = [R \cap I = \emptyset]$.

- S es el conjunto de los vecinos impares de v en $\Gamma \setminus Q$, $|S| = s$ y $A_S = [S \cap I = \emptyset]$.
- T es el conjunto de vecinos pares de v en $\Gamma \setminus (R \cup Q)$, T admite una partición en conjuntos maximales T_1, T_2, \dots, T_m y $A_T = [T \cap I = \emptyset]$.
- S_i es el conjunto de vértices impares adyacentes en C a un vértice de T_i , $t_i = |S_i|$ y $t = \sum_{i=1}^m t_i$.
- ρ es el número de conjuntos de la forma $\{v_{2k}, v_{2k+1}, v_{2k+2}\}$ que contienen un vértice en R y ninguno en S .

Con estas definiciones, se llega a una primera aproximación

$$\mathbb{P}(A_h) = \mathbb{P}(A_Q \cap A_R \cap A_S \cap A_T) = p^{2q}(1-p)^{2q}(1-p)^\rho p^s \mathbb{P}(A_T|A_R) \quad (4.8)$$

Usando un lema auxiliar se deduce que

$$\mathbb{P}(A_T|A_R) = \prod_{i=1}^m (1-p)^{t_i} \Phi(t_i + 1) \quad (4.9)$$

donde $\Phi(n) = \frac{\beta+2}{2\beta+2} \left(\frac{\beta+2}{2}\right)^n + \frac{\beta}{2\beta+2} \left(1 - \frac{\beta+2}{2}\right)^n$, $\beta = \sqrt{1 + 4\alpha - 1}$ y $\alpha = \frac{p}{1-p}$.

Finalmente, para aplicar el lema 4.2 se utilizan también resultados auxiliares y se llega a

$$\mathbb{P}(A_h) \leq (1-p)^{d+1} \varphi(d+2) \quad (4.10)$$

donde $\varphi(n) = \frac{\beta+2}{2\beta+2} \left(\frac{\beta+2}{2}\right)^n + \frac{\beta}{2\beta+2} \left|1 - \frac{\beta+2}{2}\right|^n$.

■ TERCERA PARTE: DEDUCCIÓN DE LOS RESULTADOS

• PRIMER RESULTADO:

Como vimos en la sección 3.2.2, por Thomason se tiene que todo grafo hamiltoniano r -regular con r impar tiene al menos dos ciclos hamiltonianos.

Consideremos pues H un grafo hamiltoniano r -regular con $r \geq 24$ par. Si C es un ciclo hamiltoniano entonces $H \setminus E(C)$ es un grafo $(r-2)$ -regular, y por el Teorema de Petersen 3.1 contiene un 2-factor.

Así, si eliminamos este 2-factor de H se obtiene un grafo $(r-2)$ -regular que contiene al ciclo hamiltoniano C . Repitiendo este procedimiento, llegamos a un grafo hamiltoniano 24 -regular, G , que contiene a C . Finalmente, tomando $d = 22$ y aplicando el razonamiento descrito se tiene que para

$p = 33/50$ y $\gamma = 1/25$, existe una probabilidad positiva de que I sea un conjunto independiente dominante de C . De este modo, G contiene un conjunto independiente dominante I^* de C y por lo tanto H tiene al menos dos ciclos hamiltonianos distintos.

Esto prueba la primera afirmación del teorema.

• SEGUNDO RESULTADO:

Sea G un grafo r -regular de cintura al menos 7, donde $r = d + 2$, y sea C un ciclo hamiltoniano en G . Como en la primera parte, por el Teorema 3.1 basta considerar el caso $d = 14$. Para un vértice $v_h \in V(C)$ se define el suceso $A_h^* = \{v_h \text{ no es dominado por } I^*\}$. Se escoge $p = 0.657$ y se tiene $\mathbb{P}[w \notin I^*] = 2p^2 - p^3$ si w es impar y $\mathbb{P}[w \notin I^*] = 1 - p^2$ si w es par. Por la definición de I^* se tiene:

$$\mathbb{P}[A_h^*] = (2p^2 - p^3)^s (1 - p^2)^{d-s+1}$$

donde s es el número de vecinos impares de v_h en $G \setminus E(C)$ (incluido él mismo si h es impar). Sea δ_h el número de eventos A_j^* que son mutuamente dependientes con A_h^* . Como G tiene cintura al menos 7, los sucesos $x \in I^*$ e $y \in I^*$ serán independientes mientras la distancia entre ellos en C sea mayor que 3. Se comprueba entonces que

$$\delta_h \leq 5d^2 + 8d + 4 + 2(d + 1)s$$

Finalmente, mediante algunos cálculos se deduce que si $\gamma = \frac{1}{20}$ y $d = 14$, entonces $\mathbb{P}[A_h^*] < \gamma(1 - \gamma)^{\delta_h}$ y por el teorema 4.2 se tiene que con probabilidad positiva I^* es un conjunto dominante independiente de C en G .

□

Resumidamente, podemos interpretar de todo lo anterior que Haxel, Seamone y Verstraete aplicaron el método probabilístico en grafos $(d+2)$ -regulares definiendo nuevos sucesos, y mediante cálculos con sus probabilidades obtuvieron una condición para que la probabilidad de que existiera el conjunto dominante independiente fuera positiva. Con ello discutieron el valor de esos parámetros en función de la regularidad interesada, obteniendo finalmente unas cotas más finas que Thomassen.

5 | GRAFOS BIRREGULARES DE REGULARIDAD 4 Y 14

Uno de los resultados más recientes que relacionan el número de ciclos hamiltonianos y la regularidad en grafos se debe al matemático Herbert Fleischner. En 2013 publicó un artículo [8] en el cual demuestra el siguiente teorema:

Teorema 5.1. *Existe una familia infinita de grafos únicamente hamiltonianos cuyo grado mínimo es 4 y máximo arbitrario. También existen infinitos grafos únicamente hamiltonianos con birregularidad 4 y 14.*

Sin embargo, a pesar de que todos estos grafos tienen vértices con valencia 4, no son regulares, por lo que la conjetura de Sheehan sigue sin resolverse. Por tanto, el objetivo de esta construcción es minimizar el número de vértices con grado distinto a 4 y acercarnos así a las condiciones de la conjetura de Sheehan.

Para la construcción se necesita definir la siguiente operación:

Definición 5.1 [Operación de empalme]. Sean G y H grafos. Supongamos que G tiene un vértice $x \in V(G)$ tal que $\delta(x) = 3$ y denotemos a sus vecinos por $N(x) = \{y, u, v\}$. Sean $\bar{y}, u_1, v_1 \in V(H)$, y sea $\gamma\bar{e} = \bar{e}$ si $\bar{e} = u_1v_1 \in E(H)$ y $\gamma\bar{e} = \emptyset$ en otro caso. Al grafo que se obtiene al considerar

$$(G \setminus x) \cup (H \setminus \gamma\bar{e}) \cup \{uu_1, vv_1\}$$

mediante la identificación $y = \bar{y}$, se le llama **H-empalme de G en x respecto a $e = xy$** y se denota $G_{\langle H \rangle}$. (Ver figura en la siguiente página)

Nota 5.1. En la construcción de los grafos únicamente hamiltonianos consideraremos también grafos G con un único camino hamiltoniano que une a $x, y \in V(G)$. Para facilitar la escritura, a lo largo de toda la sección diferenciaremos a los primeros de los

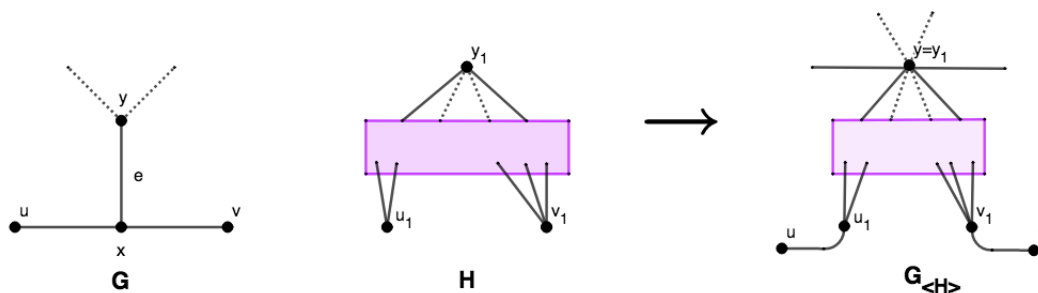


Figura 5.1: H-empalme de un grafo G en x respecto de $e = xy$ (aquí $e_1 = u_1v_1 \in E(H)$).

segundos abreviando por UH y UHC respectivamente. Nótese que UHC asume el conocimiento de los extremos x e y .

5.1 Resultados auxiliares

Partimos considerando un grafo \bar{P} , ilustrado en la figura siguiente, derivado del grafo de Petersen. Nótese que \bar{P} tiene un único camino hamiltoniano entre u_1 y v_1 (es UHC) porque tiene precisamente un único ciclo hamiltoniano que contiene la arista u_1v_1 : El camino hamiltoniano es precisamente el ciclo menos la arista. (Puesto que \bar{P} es un grafo pequeño, el lector puede encontrar dicho ciclo mediante prueba y error, lo representamos en la figura de abajo).

La figura 5.3 demuestra que \bar{P} no es un grafo únicamente hamiltoniano. Sin embargo, utilizando \bar{P} podemos construir un grafo con esta propiedad: para conseguirlo se consideran dos copias de \bar{P} , sean P^* y P^{**} y se define

$$U^* = P^* \cup P^{**} \cup \{u_1^*u_1^{**}, v_1^*v_1^{**}\}$$

o bien

$$U^{**} = P^* \cup P^{**} \cup \{u_1^*v_1^{**}, v_1^*u_1^{**}\}.$$

Claramente, ambos grafos son isomorfos y UH : los dos están formados por dos copias de \bar{P} , y la única forma de pasar de una copia a otra es mediante los vértices u_1 y v_1 . Como para cada copia existe un único camino hamiltoniano entre u_1 y v_1 , el único

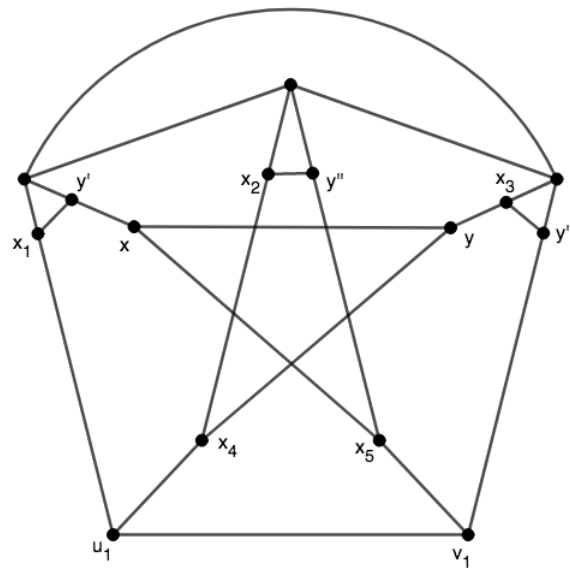


Figura 5.2: Grafo \bar{P}

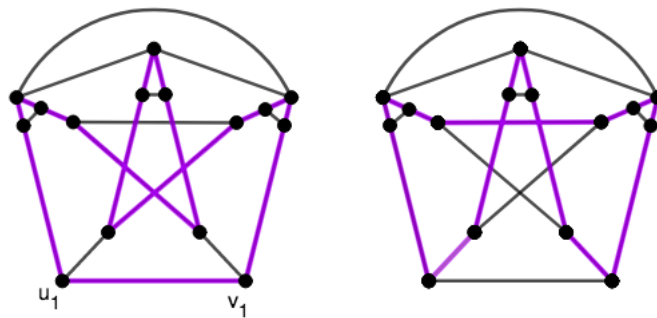


Figura 5.3: Dos ciclos hamiltonianos distintos contenidos en \bar{P} . El primero es el único que contiene la arista u_1v_1 .

ciclo hamiltoniano para las dos copias será la unión de esos caminos y las dos nuevas aristas.

Sea ahora $\mathcal{U}(e)$ el conjunto de todos los grafos que tienen precisamente un ciclo hamiltoniano que contiene a e , y sea $\mathcal{U}(s, t)$ el conjunto de todos los grafos UHC con respecto a s, t (es decir, tienen precisamente un camino hamiltoniano que une s y t). Claramente, si $G \in \mathcal{U}(e)$ y $e = st$, entonces tanto G como $G \setminus e$ pertenecen a $\mathcal{U}(s, t)$.

Definición 5.2 [Cono parcial]. Sea $G = (V, E)$ un grafo, $z \notin V$ y un subconjunto no vacío $V' \subset V$, definimos al **cono parcial de G** , denotado por $G[V', z]$ como el grafo

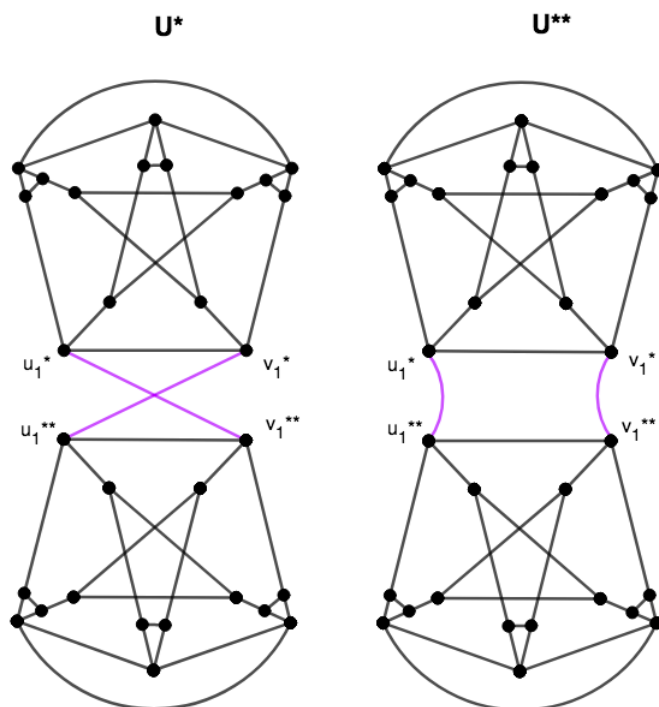


Figura 5.4: Construcción de grafos UH a partir del grafo \bar{P}

cuyo conjunto de vértices es $V \cup \{z\}$ y el de aristas $E \cup \{zv : v \in V'\}$.

Para nuestra construcción nos interesarán en particular los conos parciales de grafos UHC respecto a u_1 y v_1 . Es decir, para $H \in \mathcal{U}(u_1, v_1)$ consideraremos $H[V', z]$, con $V' \subset V(H)$ y $z \notin V(H)$.

Observación 5.1. Nótese que $H[V', z]$ puede tener muchos caminos hamiltonianos que unen u_1 y v_1 (o ninguno si $|V'| = 1$), y sin embargo tiene un único camino que une u_1 y v_1 que contiene todos los vértices de $H[V', z]$ excepto z , es decir, el único camino hamiltoniano correspondiente en H .

Se presentan a continuación varios lemas generales que garantizarán que las próximas construcciones nos lleven al resultado deseado.

Lema 5.1 [[8]]. Sea $G \in \mathcal{U}(s, t)$ y sea W el único camino hamiltoniano entre s y t en G . Sea $x \in V(G)$ tal que su vecindad es $\{u, y, v\}$. Supongamos que G contiene un triángulo cuyos vértices son x, y, u de modo que $xu, uy \in E(W)$. Supongamos que $\{x, y\} \cap \{s, t\} = \emptyset$. Entonces, para algún $H \in \mathcal{U}(u_1, v_1)$ y $V' \subseteq V(H)$, se tiene que $G_{\langle H[V', z] \rangle} \in \mathcal{U}(s, t)$ donde el H -empalme es en x respecto a xy y donde z e y han sido

identificados.

| **Lema 5.2** [[8]]. Sean G y W como en el lema anterior. Supongamos $y \in \{s, t\}$ y que $x \in V(G) \setminus \{s, t\}$ tiene como vecindad a $\{u, y, v\}$ tal que $xy \notin E(W)$. Entonces, se tiene la misma conclusión que en el lema 5.1.

| **Lema 5.3** [[8]]. Sean G y W como en el lema 5.1. Supongamos que $x \in V(G) \setminus \{s, t\}$ tiene como vecindad a $\{u, y, v\}$ y que $xy \notin E(W)$. Supongamos además que $\{x, y\} \cap \{s, t\} = \emptyset$. Sea $H \in \mathcal{U}(u_1, v_1)$ y supongamos que se puede escoger V' de modo que $H[V', z]$ no tiene ningún camino hamiltoniano entre u_1 y v_1 . Entonces, el H -empalme en x respecto a xy , $G_{\langle H[V', z] \rangle}$, satisface que $G_{\langle H[V', z] \rangle} \in \mathcal{U}(s, t)$.

La razón por la que los tres lemas anteriores se han formulado por separado quedará clara en la sección siguiente. En cuanto al conjunto V' en el lema 5.3, es equivalente a decir que dos vértices de V' no pueden estar unidos por un camino hamiltoniano en H que contenga a $u_1 v_1$ si $u_1 v_1 \in E(H)$.

5.2 Demostración del teorema principal. Construcción.

A continuación, procedemos a explicar de forma detallada la construcción que dará lugar al resultado del Teorema 5.1.

Demostración (Teorema 5.1). En lo que sigue nos concentraremos en “borrar” los vértices de grado 3 de \bar{P} mediante empalmes apropiados en x y x_i , $1 \leq i \leq 5$. La idea es sustituir los vértices de grado 3 añadiendo el menor número de vértices posibles con otra valencia, (en nuestro caso será 14). Esto, junto a una construcción análoga a la representada en la Figura 5.4 y los tres lemas mencionados anteriormente, asegurarán la existencia de una familia infinita de grafos UH birregulares de valencias 4 y 14. Estructuraremos la construcción en función de los empalmes a realizar, lo que nos lleva a tres partes diferenciadas:

Sea $G = H = \bar{P} \setminus \{u_1 v_1\}$, y sea H_i una copia de $\bar{P} \setminus \{u_1 v_1\}$ tal que $w \in \bar{P} \setminus \{u_1 v_1\}$ corresponde a $w^{(i)} \in V(H_i)$. Llamando $V_i' = \{w^{(i)} \in V(H_i) : \delta(w^{(i)}) \leq 3\}$, denotamos al cono parcial de H_i como $H_i^+ = H_i[V', z]$ para $1 \leq i \leq 5$.

Así construido, todos los vértices de H_i^+ serán de grado 4, a excepción de z_i con grado 12 y dos vértices de grado 3: $u_1^{(i)}$ y $v_1^{(i)}$.

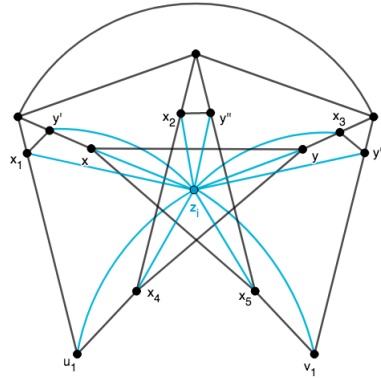


Figura 5.5: Grafo H_i^+ con el que se realizarán los empalmes en los vértices x_i .

■ **PRIMERA PARTE: Empalmes en x_1, x_2 y x_3 .**

Con este grafo, realizaremos un empalme en los vértices x_1, x_2 y x_3 sucesivamente respecto a las aristas $x_i y^{(i)}$ mediante las identificaciones $z_i = y^{(i)}$ para $i = 1, 2, 3$. Para cada H_i^+ obtendremos el H_i^+ -empalme G_i de G_{i-1} siendo $G_0 = G$ tal y como se ilustra en la figura. De este modo, $\delta(u_1) = \delta(v_1) = 4$ y $\delta(z) = 14$ y además por el Lema 5.1 sabemos que existe un único camino hamiltoniano entre u_1 y v_1 , lo que nos da un modo de recorrer el grafo "entrando y saliendo de él" pasando por todos sus vértices.

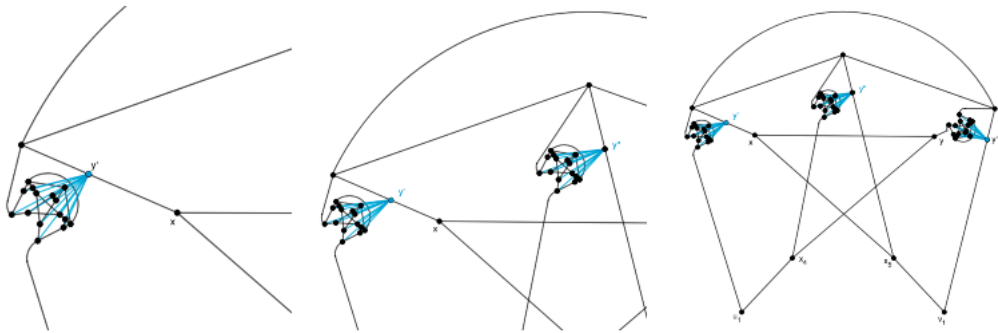


Figura 5.6: Detalle de los grafos G_1 y G_2 y el grafo G_3 resultante tras los tres primeros empalmes.

Observación 5.2. Obsérvese que para $i = 1, 2, 3$ los vértices x_i e $y^{(i)}$ pueden intercambiar sus papeles en la operación de empalme debido a que ambos tienen grado 3, y por tanto el Lema 5.1 se puede aplicar de forma simétrica. Sin embargo, para $i = 4, 5$ no se tiene esta simetría, motivo por el cual diferen-

ciamos el siguiente paso.

■ **SEGUNDA PARTE: Empalmes en x_4 y x_5 .**

Para los vértices x_4 y x_5 aplicaremos el Lema 5.2 ya que tanto u_1 como v_1 tienen grado 2 en G y porque estamos considerando caminos hamiltonianos entre ellos. Usando el mismo grafo H_i^+ que anteriormente se tiene que $G_5 \cup \{u_1v_2\}$ no es UH pero sí es UHC respecto a u_1v_1 . Tras estos dos empalmes, se tiene que todos los vértices de $G_5 \cup \{u_1v_2\}$ excepto x e y tienen grado 4 o 14 y que precisamente los vértices z_i , $1 \leq i \leq 5$ son los 14-valentes.

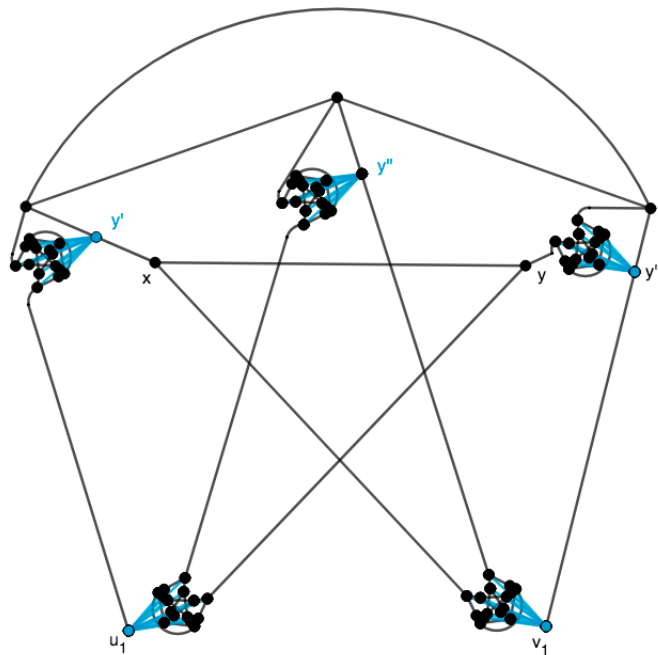


Figura 5.7: Grafo $G_5 \cup \{u_1v_1\}$.

■ **TERCERA PARTE: Empalme en x .**

Por último, $G_5 \cup \{u_1v_1\}$ visto como UHC respecto a u_1v_1 no contiene a xy en su único camino hamiltoniano entre u_1 y v_1 . Además, $G_5 \setminus y$ contiene un camino hamiltoniano entre u_1 y v_1 . Aplicaremos pues el Lema 5.3 haciendo $G = G_5$ y tomando como H_6 a una copia de G_5 con $w \in V(G_5)$ correspondiente a $w^{(6)} \in V(H_6)$, y definimos $V'_6 = \{x^{(6)}y^{(6)}\}$. Realizando a G_5 un $H_6[V'_6, z]$ -empalme en x respecto a xy con la identificación $z = y$ se obtiene un grafo F tal que $G^* = F \cup \{u_1v_1\}$ tiene un único ciclo hamiltoniano que contiene a u_1v_1 y cuyos vértices tienen grado 4 o 14 exclusivamente.

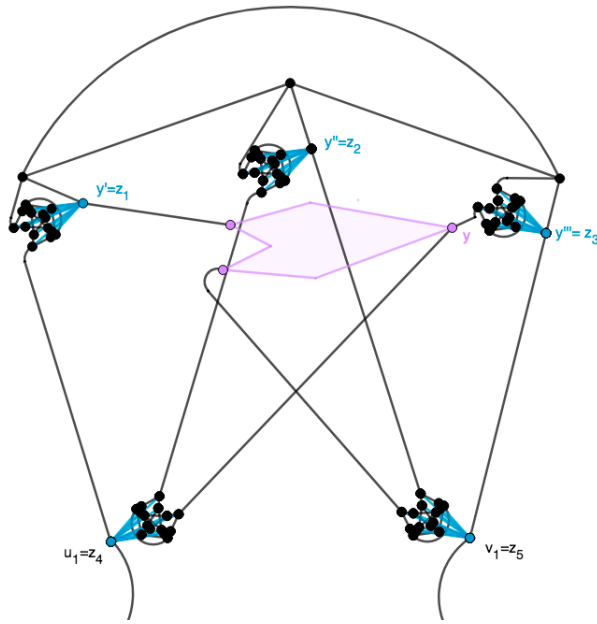


Figura 5.8: Grafo F con semiaristas incidentes a u_1 y v_1 para una posterior construcción. Se tiene $\delta(z_i) = 14$, $1 \leq i \leq 5$ y $\delta(z) = 4$.

Finalmente, se lleva a cabo una construcción análoga a la anterior para U^* , tomando dos copias F^* y F^{**} que generará un grafo UH:

$$U = F^* \cup F^{**} \cup \{u_1^* u_1^{**}, v_1^* v_1^{**}\}$$

o bien

$$U = F^* \cup F^{**} \cup \{u_1^* v_1^{**}, v_1^* u_1^{**}\}.$$

En cualquier caso, el grafo U es birregular con valencias 4 y 14, por lo que además es euleriano. (ver 1.1). Además, como

$$((15 \times 5 + 3 + 2) \times 2 - 1) \times 2 = 338,$$

el grafo tiene 338 vértices, de los cuales sólo 20 tienen grado 14.

Este nuevo grafo UH puede ser usado para la operación de empalme descrita con el objetivo de crear un grafo UH más grande. De este modo obtenemos una familia infinita de grafos UH con vértices de grado 4 y cuyo grado máximo crecerá tanto como nuevos grafos UH construyamos con este procedimiento. Podemos hacerlo tomando $V' = V(H)$ al definir $H[V', z]$ y repetirlo en cada nuevo grafo UH construido, aumentando así el grado máximo en cada iteración.

Por otra parte, si queremos que el grado máximo sea lo más pequeño posible, podemos generar la familia infinita tomando dos copias U^* y U^{**} del grafo U y realizar la última construcción con estas copias en lugar de las de F . Reiterando una y otra vez se tiene una familia infinita de grafos UH cuyos vértices son de grado 4 y 14 únicamente. \square

6 | OTROS RESULTADOS RELACIONADOS CON LA CONJETURA DE SHEEHAN

En este último capítulo, repasamos brevemente diferentes trabajos relacionados en mayor o menor grado con la conjetura de Sheehan. Los resultados que se presentan en ellos han surgido en el contexto de la investigación sobre grafos únicamente hamiltonianos.

6.1 Grafos hamiltonianos y grado 3

En [6], R.C. Entringer y H. Swart, motivados por el hecho de que todo grafo hamiltoniano 3-regular debiera contener al menos 3 ciclos hamiltonianos, se preguntaron si ocurría lo mismo para grafos hamiltonianos con grado mínimo 3. En el artículo, responden de manera negativa a esta pregunta, mostrando grafos con $n = 2m + 1$, $m \geq 5$, vértices en los cuales un vértice tiene grado 4, todos los demás tienen grado 3, y solo existen dos ciclos hamiltonianos.

Aunque estos grafos construidos por Entringer y Swart contienen un único ciclo hamiltoniano, contienen otros ciclos que casi recubren todos los vértices del grafo, por lo que es natural preguntarse si esta situación es del todo inevitable. En este contexto se tiene la siguiente recomendación.

6.2 Aproximación asintótica a la conjetura de Sheehan

En 2017, A. Girão, T. Kittipassorn y B. Narayanan publican un artículo [9], en el que se prueba que si un grafo de n vértices con grado mínimo al menos 3 contiene un ciclo hamiltoniano, entonces contiene otro ciclo de longitud $n - o(n)$; (más precisamente, de longitud $n - cn^{\frac{4}{5}}$ con $c > 0$ constante). Para ello combinan métodos constructivos, técnicas basadas en conjuntos parcialmente ordenados y argumentos no constructivos basados en la paridad.

Este artículo resulta de gran interés pues supone que la conjetura de Sheehan se verifica asintóticamente.

6.3 Ejemplos de grafos 3-conexos únicamente hamiltonianos

En 1986, E. Grinberg encontró algunos grafos únicamente hamiltonianos 3-conexos no planares. Estos resultados fueron recopilados por D. Zeps a partir de varios fragmentos de sus manuscritos, y recogidos en la memoria [10], donde afirma que ya los había encontrado en 1978.

6.4 Bondy-Jackson

Como consecuencia de lo anterior J.A. Bondy [3] planteó una nueva pregunta en esta línea: ¿existen grafos únicamente hamiltonianos de grado mínimo al menos 4? Junto con B. Jackson, Bondy demostró en [2] que un grafo únicamente hamiltoniano tiene un vértice de grado $\leq c \log_2 8n + 3$, donde $c = (2 - \log_2 3)^{-1} \approx 2.41$. Este resultado se mejoró en [13], y posteriormente se obtuvo una estimación aún mejor en [1].

Bondy y Jackson [2] también muestran que un grafo UH planar contiene un vértice de grado 2 o 3, y conjeturan que los grafos UH planares siempre tienen al menos dos vértices de grado 2:

En el contexto de esta nueva conjetura, recordemos que un grafo es *outerplanar* si admite una representación plana con todos sus vértices en la cara exterior del dibujo. En relación con estos grafos, dado que todo grafo 2-conexo de este tipo tiene al menos

dos vértices de grado 2 y es únicamente hamiltoniano, la conjetura se cumple para este caso particular.

6.5 Grafos bipartitos

En el artículo [21], Thomassen expone varios resultados como consecuencia del estudio de la coloración de grafos bipartitos:

Prueba que un grafo bipartito únicamente hamiltoniano tiene un vértice de grado 2 en cada clase de color y que debido a ello, todo grafo bipartito hamiltoniano de grado mínimo d tiene al menos $2^{1-d}d!$ ciclos hamiltonianos. También concluye que todo grafo bipartito hamiltoniano de grado mínimo al menos 4 y cintura g tiene al menos $(\frac{3}{2})^{\frac{g}{8}}$ ciclos hamiltonianos e indica cómo la existencia de más de un ciclo hamiltoniano puede llevar a un método general de reducción para grafos hamiltonianos.

6.6 Otros grafos únicamente hamiltonianos

En algunos artículos, (véanse [15],[14],[16]) se han estudiado grafos únicamente hamiltoniano-conexos desde un vértice. Además, en 1981, L.S. Melnikov [17], se pregunta si existen triangulaciones (simples) del plano que son grafos UH. Esta pregunta tiene una respuesta negativa por los resultados de [11],[17].

Bibliografía

- [1] ABBASI, S., AND JAMSHED, A. A degree constraint for uniquely hamiltonian graphs. *Graphs and Combinatorics* 22, 4 (Dec 2006), 433–442.
- [2] BONDY, J., AND JACKSON, B. Vertices of small degree in uniquely hamiltonian graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 74, 2 (1998), 265–275.
- [3] BONDY, J. A. *Basic Graph Theory: Paths and Circuits*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1996, p. 3–110.
- [4] BONDY, J. A., AND MURTY, U. S. R. *Graph Theory with Applications*. Elsevier, New York, 1976.
- [5] BROERSMA, H. On some intriguing problems in hamiltonian graph theory—a survey. *Discrete Mathematics* 251, 1 (2002), 47–69. Cycles and Colourings.
- [6] ENTRINGER, R., AND SWART, H. Spanning cycles of nearly cubic graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 29, 3 (1980), 303–309.
- [7] ERDŐS, P., AND LÁSZLÓ, L. Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions. *Coll Math Soc J Bolyai* 10 (01 1974).
- [8] FLEISCHNER, H. Uniquely hamiltonian graphs of minimum degree 4. *J. Graph Theory* 75, 2 (2013), 167–177.
- [9] GIRÃO, A., KITTIPASSORN, T., AND NARAYANAN, B. Long cycles in hamiltonian graphs. *Israel Journal of Mathematics* 229, 1 (Jan 2019), 269–285.
- [10] GRINBERG, E., AND ZEPS, D. Three-connected graphs with only one hamiltonian circuit. *Article compiled from several fragments from Grinbergs manuscripts by D. Zeps* (1986).

- [11] HAKIMI, S. L., SCHMEICHEL, E. F., AND THOMASSEN, C. On the number of hamiltonian cycles in a maximal planar graph. *Journal of Graph Theory* 3, 4 (1979), 365–370.
- [12] HALL, P. On representatives of subsets. *Journal of The London Mathematical Society-second Series* (1935), 26–30.
- [13] HAXELL, P., SEAMONE, B., AND VERSTRAETE, J. Independent dominating sets and hamiltonian cycles. *Journal of Graph Theory* 54, 3 (2007), 233–244.
- [14] HENDRY, G. The size of graphs uniquely hamiltonian-connected from a vertex. *Discrete Mathematics* 61, 1 (1986), 57–60.
- [15] HENDRY, G. R., KNICKERBOCKER, C., LOCK, P. F., AND SHEARD, M. Forbidden subgraphs of graphs uniquely hamiltonian-connected from a vertex. *Discrete Mathematics* 187, 1 (1998), 281–290.
- [16] KNICKERBOCKER, C., LOCK, P. F., AND SHEARD, M. On the structure of graphs uniquely hamiltonian-connected from a vertex. *Discrete Mathematics* 88, 1 (1991), 33–48.
- [17] KRATOCHVÍL, J., AND ZEPS, D. On the number of hamiltonian cycles in triangulations. *J. Graph Theory*, 12(2) (1998), 191–194.
- [18] PETERSEN, J. Die Theorie der regulären graphs. *Acta Mathematica* 15, none (1900), 193 – 220.
- [19] SHEEHAN, J. The multiplicity of hamiltonian circuits in a graph, in: Recent advances in graph theory. M. Fiedler, pp. 447–480.
- [20] THOMASON, A. G. Hamiltonian cycles and uniquely edge colourable graphs. *Annals of discrete mathematics* 3 (1978), 259–268.
- [21] THOMASSEN, C. On the number of hamiltonian cycles in bipartite graphs. *Combinatorics, Probability and Computing* 5, 4 (1996), 437–442.
- [22] THOMASSEN, C. Chords of longest cycles in cubic graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 71, 2 (1997), 211–214.
- [23] THOMASSEN, C. Independent dominating sets and a second hamiltonian cycle in regular graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 72, 1 (1998), 104–109.

- [24] TUTTE, W. T. On hamiltonian circuits. *Journal of The London Mathematical Society-second Series* (1946), 98–101.
- [25] WAGNER, A. On the existence of a second hamilton cycle in hamiltonian graphs with symmetry.