

TRABAJO DE FIN DE GRADO

---

**Generalizaciones de la  
fórmula de Graham-Pollak.  
Una prueba combinatoria.**



*Presentado por:*  
**Luis Esquivias Quintero**

*Directora:*  
MERCEDES ROSAS CELIS

FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
Departamento de Álgebra  
Sevilla, Junio 2023



# Índice general

<b>1. Herramientas Combinatorias</b>	<b>3</b>
1.1. Pruebas Combinatorias . . . . .	3
1.2. Sumas finitas. Involuciones cancelativas . . . . .	6
<b>2. El lema de Lindström-Gessel-Viennot</b>	<b>11</b>
2.1. Nociones básicas de Teoría de Grafos . . . . .	11
2.2. El lema de Lindström-Gessel-Viennot . . . . .	16
<b>3. Prueba Combinatoria de la fórmula de Graham-Pollak</b>	<b>21</b>
3.1. Pares $T$ -compatibles y diagramas de flechas . . . . .	21
3.2. Diagramas disconexos. . . . .	27
3.3. Diagramas no estándar . . . . .	32
3.4. Diagramas estándar . . . . .	33
<b>4. Generalizaciones de Graham-Pollak</b>	<b>39</b>
4.1. Árboles ponderados . . . . .	39
4.2. Matriz de $q$ -distancias . . . . .	42
4.3. En búsqueda de nuevas generalizaciones . . . . .	46

## English Abstract

A famous formula of Graham and Pollak (1971) describes the determinant of the distance matrix of a tree  $T$  of order  $n$ :

$$\det M(T) = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

Remarkably, this formula shows that the value of this determinant only depends on  $n$ , the number of vertices of  $T$ , and not on its tree structure.

In this senior thesis, we present a long sought after combinatorial proof for the elegant formula of Graham and Pollak. Moreover, we show how our framework can be used to derive combinatorially many of its existing generalizations, and even to obtain suggestions for new ones.

## Resumen

Una famosa fórmula de Graham y Pollak (1971) describe el determinante de la distancia matriz de un árbol  $T$  de orden  $n$ .

$$\det M(T) = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

Sorprendentemente, esta fórmula revela que el valor de este determinante solo depende de  $n$ , su número de vértices, pero no de la estructura del árbol.

En este trabajo de fin de grado presentamos la tan buscada prueba combinatoria de la elegante fórmula de Graham y Pollak. Además, mostramos como nuestro marco de trabajo puede usarse para derivar combinatoriamente varias de sus generalizaciones e, incluso, sugerir otras nuevas.

# Introducción

Sea  $T$  un árbol finito con conjunto de vértices  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ . La distancia entre dos vértices  $v_i$  y  $v_j$  en  $V$  (denotada por  $d(v_i, v_j)$ ) es la longitud (el número de aristas) en el único camino en  $T$  que conecta  $v_i$  con  $v_j$ . La matriz de distancias de  $T$  se define entonces como  $M(T) = (d(v_i, v_j))_{i,j=1}^n$ .

En 1971, R. Graham y H. Pollak demostraron que el determinante de la matriz de distancias de un árbol  $T$  de orden  $n$  (con  $n$  vértices) viene dado por

$$\det M(T) = (-1)^{n-1} (n-1) 2^{n-2}. \quad (1)$$

La igualdad (1) recibe el nombre de fórmula de Graham-Pollak. En particular,  $\det M(T)$  depende únicamente de  $n$ , y no de la estructura del árbol  $T$ , [GP71]. En el último medio siglo se han publicado numerosas pruebas alternativas a la original desde enfoques muy diversos, todas ellas basadas en diferentes ideas provenientes del álgebra lineal, [GL78, YY06, DY20].

Por otra parte, como todo árbol de  $n$  vértices tiene  $n-1$  aristas, la fórmula de Graham-Pollak se puede escribir como

$$\det M(T) = (-1)^{\#A} (\#A) 2^{\#A-1}.$$

Un resultado tan elegante y de naturaleza tan manifiestamente combinatoria como la fórmula de Graham-Pollak clama por una demostración también combinatoria. Es esta pregunta la que da origen a la investigación que se presenta en el presente trabajo de fin de grado.

En el año 2022, los profesores Mercedes Rosas y Emmanuel Briand, del grupo de combinatoria algebraica de Sevilla, junto con los estudiantes Álvaro Gutiérrez (Universidad de Bonn), Adrián Lillo (Universidad de Sevilla) y el autor de este texto, crearon un grupo de trabajo con el objetivo de tratar de conseguir tal demostración.

Después de varios meses de trabajo obtuvimos la prueba combinatoria buscada. Nuestro enfoque se encuentra basado en el elegante lema de Lindström-Gessel-Viennot, a raíz de una charla del profesor Ira Gessel en el seminario de Combinatoria Algebraica de Sevilla sobre su famoso lema. Dicha charla está disponible en [Ges22].

El presente trabajo de fin de grado presenta algunos de los resultados obtenidos en esta investigación. En particular, en el capítulo 3 de este trabajo se presentan detalladamente algunos de los elementos cruciales de la demostración combinatoria de la fórmula de Graham-Pollak. En el capítulo 4, damos una demostración combinatoria de diversas generalizaciones del teorema. Dicho capítulo concluirá con conjetura sobre una nueva generalización que englobe a las demás.

En el trabajo de fin de grado de Adrián Lillo [Lil23] se presentan los resultados de nuestra investigación que no se encuentran en este trabajo. Por otra parte, falta mencionar que estos resultados han sido presentados en el VIII Encuentro Ibérico Matemático celebrado en Sevilla en octubre de 2022. Una versión preliminar de los resultados se encuentran en las actas del congreso, mientras otra más detallada de está en proceso de redacción [BEGLR].

Algunas de las generalizaciones conocidas la fórmula de Graham y Pollak son las siguientes:

Si  $T$  es un árbol ponderado (es decir, tiene pesos en sus aristas), y la distancia  $r_{ij}$  entre dos vértices  $v_i$  y  $v_j$  se define como la suma de los pesos del único camino en  $T$  que une  $v_i$  con  $v_j$ , R. Bapat, S.J. Kirkland, y M. Neumann ([BKN05]) demostraron en 2005 que el determinante de la matriz de distancias  $\overline{M}(T) = (r_{ij})_{i,j=1}^n$  depende del número de vértices y de los valores de los pesos, pero no de la distribución de estos ni de la estructura del árbol.

Explícitamente, sea  $R$  un anillo conmutativo. Si  $e_1, \dots, e_{n-1}$  son las aristas de  $T$  y  $a_i \in R$  es el peso

cada la arista  $e_i$ , entonces,

$$\det \overline{M}(T) = (-1)^{n-1} 2^{n-2} \prod_{i=1}^{n-1} a_i \left( \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right).$$

Si todos los pesos  $a_i$  son iguales a 1, la matriz  $\overline{M}(T)$  coincide con la matriz de distancias habitual y la igualdad anterior no es más que la fórmula de Graham-Pollak original.

Hay otras generalizaciones de (1) que no involucran pesos. Dado un entero no negativo  $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  definimos su  $q$ -análogo como el polinomio en la variable  $q$

$$[N]_q = 1 + q + \dots + q^{N-1} = \frac{q^N - 1}{q - 1} \in \mathbb{Z}[q].$$

Si se evalúa el polinomio  $[N]_q$  en  $q = 1$ , se obtiene de nuevo el entero  $N \in \mathbb{Z}$ .

En general, un  $q$ -análogo o  $q$ -generalización de un resultado  $P$  será un resultado en términos de una variable  $q$  que particularice en  $P$  para  $q = 1$ . Podemos definir la  $q$ -distancia en  $T$  entre dos vértices  $v_i, v_j \in V$  como  $d_q(v_i, v_j) = [d(v_i, v_j)]_q$ . Así, su respectiva matriz de  $q$ -distancias será  $M_q(T) = (d_q(v_i, v_j))_{i,j=1}^n$ . En 2007, Weigen Yan y Yeong-Nan Yeh ([YY07]) demostraron la siguiente igualdad:

$$\det M_q(T) = (-1)^{n-1} (n-1) (1+q)^{n-2} = (-1)^{n-1} (n-1) [2]_q^{n-2}.$$

Existen más problemas relacionados. Por ejemplo, se puede modificar la matriz de distancia  $\overline{M}(T)$  asignando distintos pesos a cada una de las dos orientaciones  $(a, b)$  y  $(b, a)$  de una misma arista  $\{a, b\} \in A$  (con lo que la distancia de  $v_i$  a  $v_j$  podría ser distinta a la distancia de  $v_j$  a  $v_i$ ). El determinante de esa matriz fue estudiado por Hui Zhou y Qi Ding en 2016 ([ZD16]). También es posible sustituir en la matriz  $\overline{M}(T)$  cada  $r_{ij}$  por su  $q$ -análogo (siempre que todos los pesos  $a_i$  sean enteros no negativos), tal y como tratan Yan y Yeh en [YY07].

En ninguna de las generalizaciones descritas el determinante de la matriz depende de la estructura del árbol. La demostración combinatoria obtenida en [BEGLR] nos permite dar una demostración unificada y combinatoria de todas ellas.

La estructura del presente trabajo de fin de grado es la siguiente:

A lo largo del capítulo 1 se hará una introducción sobre qué es la combinatoria y qué entendemos por una prueba combinatoria. Luego, se hablará de las sumas indexadas en un conjunto finito y de las involuciones cancelativas, una poderosa herramienta para computar este tipo de sumas cuando existen sumandos iguales pero de signo opuesto. Este tipo de sumas aparecerá en numerosas ocasiones en los capítulos posteriores.

Construir una involución cancelativa no es sencillo pero, cuando es posible, resulta muy elegante. Una forma de hacerlo es a partir del ya mencionado lema de Lindström-Gessel-Viennot o, abreviado, lema LGV ([Lin73, GV85]). La idea es construir un cierto grafo dirigido  $G$  con pesos en sus aristas y asignar a cada sumando unos ciertos caminos en  $G$  de forma apropiada. Si la construcción puede realizarse correctamente, el lema LGV define una involución cancelativa a partir de las posibles intersecciones de dichos caminos. En el capítulo 2, se presentan las nociones básicas de la teoría de grafos que necesitamos en el presente trabajo, y que nos permiten en particular presentar el lema LGV, junto con su demostración combinatoria.

Finalmente, los capítulos 3 y 4 presentan los resultados descritos a lo largo de la introducción.

# Capítulo 1

## Herramientas Combinatorias

Vamos a introducir las herramientas combinatorias que se usarán en los capítulos posteriores junto con ejemplos sencillos de sus aplicaciones. La nomenclatura utilizada y los ejemplos y resultados expuestos han sido extraídos, en gran medida, del libro *Combinatorics: The art of counting* ([Sag20]), de Bruce Sagan.

### 1.1. Pruebas Combinatorias

El objetivo de este trabajo es dar una prueba combinatoria de la fórmula de Graham-Pollak y de algunas generalizaciones de esta. Pero, ¿qué es una prueba combinatoria? Antes responder a esa pregunta, vamos a tratar de aclarar qué es o en qué consiste la combinatoria.

La combinatoria es un área de estudio que, por lo general, resulta difícil de definir de forma clara, concisa y precisa. Esto no es algo poco común dentro de las matemáticas. Sin ir más lejos, explicar qué es un conjunto (fundamento base de las matemáticas de hoy en día) sin recurrir a los axiomas que los caracterizan lleva a utilizar frases tales como «un conjunto es una colección de objetos». Aunque no sea una definición formal, condensa bien la idea en cuestión.

Para el matemático Claude Berge, [Be71], una configuración de una serie de objetos «es una forma de distribuirlos de acuerdo a ciertas restricciones predeterminadas». De esta forma, la combinatoria es la rama de las matemáticas que «cuenta, enumera, examina y investiga la existencia de configuraciones con cierta propiedad».

**Ejemplo 1.1.1.** *Si  $A$  es un conjunto finito de  $n$  elementos, podemos considerar las configuraciones sobre  $A$  dadas por cada una de las formas de elegir  $k \leq n$  elementos de entre esos  $n$ . Se corresponden con cada uno de los subconjuntos de  $A$  de cardinal  $k$ . Otros ejemplos de configuraciones son, los grafos, los árboles, las matrices, los grupos, etc.*

Como ya se ha comentado, una de las partes más importantes de la combinatoria se centra en el conteo. Matemáticamente, para contar se usan biyecciones.

Por definición, un conjunto  $A$  es finito si está en biyección con el conjunto  $[n] := \{1, \dots, n\}$  para algún  $n \geq 0$  (por convenio,  $[0] = \emptyset$ ). En ese caso dicho  $n$  (que es único) será el cardinal de  $A$  y se dirá que  $A$  tiene  $n$  elementos. Dos conjuntos finitos tienen el mismo cardinal si y solo si existe una biyección entre ellos. Así, contar el número de configuraciones con una cierta propiedad equivale a tomar el conjunto que forman y calcular su cardinal.

**Ejemplo 1.1.2.** Si  $A$  es un conjunto de  $n$  elementos, el número de subconjuntos de  $A$  de cardinal  $k \leq n$  es el número binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

En la práctica hay formas más sofisticadas de contar los elementos de un conjunto  $A$  que establecer explícitamente una biyección  $A \rightarrow [n]$ . De manera similar ocurre en Análisis, donde para calcular un límite se suele eludir, en la medida de lo posible, la definición clásica en términos de épsilon y delta, por ser poco manejable. En su lugar, es habitual el uso del álgebra de límites, monotonía, etc.

Algunas propiedades básicas del cardinal son las siguientes:

- (Principio aditivo). Si  $A_1, \dots, A_n$  son conjuntos finitos y dos a dos disjuntos,

$$\#(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \#A_1 + \dots + \#A_n.$$

- (Principio multiplicativo). Si  $A_1, \dots, A_n$  son conjuntos finitos, el cardinal de su producto cartesiano es

$$\#(A_1 \times \dots \times A_n) = \#A_1 \cdots \#A_n.$$

- (Principio de inclusión-exclusión). Si  $A$  y  $B$  son conjuntos finitos cualesquiera se cumple que

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

Es general, dados  $A_1, \dots, A_n$  conjuntos finitos y  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ , el cardinal de  $A$  es

$$\begin{aligned} \#A &= \sum_{i=1}^n \#A_i - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \#(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n-1} \#(A_1 \cap \dots \cap A_n) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\{i_1 < \dots < i_k\} \subset [n]} \#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}). \end{aligned}$$

Obsérvese que el principio aditivo no es más que un caso particular del de inclusión-exclusión.

A partir de las propiedades anteriores se derivan otras. Por ejemplo, como consecuencia directa del principio aditivo, si  $A \subset B$  son dos conjuntos cualesquiera,  $\#(B \setminus A) = \#B - \#A$ .

Todos estos resultados nos proporcionan herramientas para el cálculo del cardinal de un conjunto. Así, por una combinatoria entenderemos una demostración de un resultado empleando razonamientos basados en configuraciones, biyecciones, la noción de cardinalidad y sus propiedades (tales como las recién enunciadas). Veamos algunos ejemplos sencillos.

**Ejemplo 1.1.3.** Dado un conjunto finito  $A$ , deseamos calcular el cardinal de su conjunto potencia  $\mathcal{P}(A)$ . En otras palabras, deseamos saber cuantos subconjuntos tiene  $A$ .

Escribimos  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ . Asignamos a cada  $B \subset A$  la  $n$ -tupla  $(m_1, \dots, m_n) \in \{0, 1\}^n$  tal que, para cada  $i \in [n]$ ,

$$\begin{cases} m_i = 1 & \text{si } a_i \in B; \\ m_i = 0 & \text{si } a_i \notin B. \end{cases}$$

Esto define una correspondencia biyectiva entre  $\mathcal{P}(A)$  y  $\{0, 1\}^n$  con lo que, aplicando el principio multiplicativo,

$$\#\mathcal{P}(A) = \#(\{0, 1\}^n) = 2^n.$$

**Ejemplo 1.1.4.** Vamos a calcular de manera combinatoria el valor de la suma  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ .

Sea  $A$  un conjunto de cardinal  $n$ . Para cada  $k$ , definimos  $\mathcal{S}_k \subset \mathcal{P}(A)$  como la familia de los subconjuntos de  $A$  de cardinal  $k \leq n$ . Entonces,  $\mathcal{P}(A)$  es la unión disjunta de los conjuntos  $\mathcal{S}_0, \dots, \mathcal{S}_n$ . Por el principio aditivo,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \#\mathcal{S}_k = \#\mathcal{P}(A) = 2^n.$$



Una permutación de un conjunto  $A$  es, por definición, una biyección  $A \rightarrow A$ . Sobre un conjunto finito  $A$  de cardinalidad  $n$  existen  $n!$  permutaciones diferentes. Las permutaciones de un conjunto forman un grupo (con la composición de aplicaciones). En el caso de que  $A = [n]$ , este grupo se denotará por  $\mathbb{S}_n$  y se llamará grupo simétrico en  $n$  letras.

**Ejemplo 1.1.5.** Una permutación  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  es un desarreglo si no tiene puntos fijos. Denotamos por  $\mathbb{D}_n$  al conjunto de desarreglos de  $\mathbb{S}_n$ .

Para calcular el número de desarreglos, definimos  $A_i \subset \mathbb{S}_n$  como el conjunto de permutaciones de  $\mathbb{S}_n$  con el punto  $i \in [n]$  fijo. Se deduce de manera inmediata que  $\mathbb{D}_n = \mathbb{S}_n \setminus (\bigcup_{i=1}^n A_i)$ . Si  $\{i_1 < \dots < i_k\} \subset [n]$ , cada elemento de  $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$  es una permutación de  $[n]$  con los elementos  $i_1, \dots, i_k$  fijos. Se puede hacer corresponder, de manera biunívoca, a cada una de ellas con una permutación del conjunto  $[n] \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ . Dado que  $[n] \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$  tiene  $(n - k)$  elementos,

$$\#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = (n - k)!$$

y, por el principio de inclusión-exclusión:

$$\# \left( \bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{M \subset [n] \\ \#M=k}} (n - k)! = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n - k)! = n! \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!}.$$

Entonces,

$$\#\mathbb{D}_n = \#\mathbb{S}_n - \# \left( \bigcup_{k=1}^n A_k \right) = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Obtenido este resultado, es interesante, por ejemplo, estudiar asintóticamente la proporción de desarreglos frente al total de permutaciones de  $\mathbb{S}_n$ .

$$\frac{\#\mathbb{D}_n}{\#\mathbb{S}_n} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e}.$$

Una vez más, el número  $e$  apareciendo en los contextos más insospechados.

**Ejemplo 1.1.6.** Es bien conocida la fórmula de la suma de los primeros  $n$  números naturales:

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (1.1)$$

Hay infinidad de demostraciones del resultado anterior. Una de las más conocidas es la basada en el método que, según dice la leyenda, aplicó Gauss en la escuela para sumar los naturales desde el 1 hasta el 100.

Otra prueba, de carácter combinatorio y quizá menos conocida, es la siguiente: Sea  $A = [n + 1]$  el conjunto de enteros positivos menores o iguales que  $n + 1$ . El número de subconjuntos de  $A$  de dos elementos es, precisamente,

$$\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

¿Cómo se relaciona este hecho con la expresión (1.1)?

Sea  $\mathcal{A}$  la familia de subconjuntos de  $A$  de dos elementos. Podemos clasificar a los distintos conjuntos de  $\mathcal{A}$  en función de su mayor elemento. Si  $\mathcal{A}_k$  ( $2 \leq k \leq n + 1$ ) es la subfamilia de  $\mathcal{A}$  formada por los subconjuntos de  $A$  de cardinal 2 con mayor elemento  $k$ ,  $\{\mathcal{A}_k\}_{k=2}^{n+1}$  constituye una partición de  $\mathcal{A}$ . En otras palabras, los conjuntos  $\mathcal{A}_k$  son dos a dos disjuntos y su unión es  $\bigcup_{k=2}^{n+1} \mathcal{A}_k = \mathcal{A}$ . Por el principio aditivo:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \#\mathcal{A} = \sum_{k=2}^{n+1} \#\mathcal{A}_k.$$

Y ahora, ¿cuántos subconjuntos hay de dos elementos cuyo mayor elemento es  $k$ ? Hay exactamente  $k - 1 = \binom{k-1}{1}$ , tantos como formas de elegir un entero positivo menor que  $k$ . Por lo tanto,

$$\frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) = \sum_{k=1}^n k.$$

Con un razonamiento análogo se puede probar que, en general,

$$\binom{n+1}{m+1} = \sum_{k=m}^n \binom{k}{m} \quad \forall 0 \leq m \leq n.$$

Conviene recalcar que la igualdad (1.1) es sencilla de demostrar inducción. En ocasiones, esta forma de proceder resulta interesante, pues tras la hipótesis de inducción puede existir una iteración subyacente que proporciona, a la postre, un algoritmo. Sin embargo, en otras muchas circunstancias, este tipo de pruebas no explican el porqué del resultado, resultando ser más un simple test de veracidad que una verdadera resolución del problema en cuestión.

Si no se tiene idea de por qué algo es cierto, siempre se puede probar por inducción,  
Gian-Carlo Rota.

## 1.2. Sumas finitas. Involuciones cancelativas

En la sección anterior se han visto ejemplos de como calcular sumas finitas a través de combinatoria. La relación es recíproca. Recíprocamente, el cardinal de cualquier conjunto finito  $A$  se puede expresar como una suma finita  $\#A = \sum_{a \in A} 1$ .

Evidentemente, hay sumas indexadas en conjuntos finitos mucho más elaboradas que la anterior, aunque no necesariamente más complejas de computar (como ya se habrá podido comprobar, el cálculo de un cardinal no siempre es inmediato). En este trabajo serán de especial interés las sumas en las que aparezcan tanto términos positivos como negativos. Un ejemplo claro de este tipo de sumas es la dada por la fórmula del principio de inclusión-exclusión.

En primer lugar, vamos a considerar sumas en las que sus sumandos solo toman dos valores: 1 o  $-1$ . Estas serán de la forma  $\sum_{a \in A} m_a$  donde  $A$  es un conjunto finito y  $m_a \in \{1, -1\}$  para todo  $a \in A$ .

**Definición 1.2.1.** Un **conjunto signado** es un par  $(A, \text{sign})$  dado por un conjunto  $A$  y una aplicación  $\text{sign} : A \rightarrow \{1, -1\}$ , llamada **aplicación signo** de  $A$ . Para cada  $a \in A$ ,  $\text{sign}(a)$  es el **signo** de  $a$ . Se dice que  $a$  es **positivo** (respectivamente, **negativo**), o que es de signo positivo (resp. negativo) si  $\text{sign}(a) = 1$  (resp.  $\text{sign}(a) = -1$ ). Los **conjuntos positivo y negativo** de  $A$  son, respectivamente,

$$A^+ = \{a \in A \mid \text{sign}(a) = 1\} \quad \text{y} \quad A^- = \{a \in A \mid \text{sign}(a) = -1\}.$$

Si  $A$  es un conjunto finito, la **suma signada** de  $(A, \text{sign})$  es el número entero

$$\sum_{a \in A} \text{sign}(a). \tag{1.2}$$

**Nota.** En las condiciones anteriores, se podría decir simplemente que  $A$  es un conjunto signado. Su función signo se denotará por  $\text{sign}$  salvo que se indique lo contrario.

**Ejemplo 1.2.2.** El grupo simétrico  $\mathbb{S}_n$  es un conjunto signado para la función signo habitual.

Un primer intento para hallar el valor de una suma signada de la forma (1.2) es descomponer la suma en dos, indexadas en los conjuntos positivo y negativo de  $A$ .

$$\sum_{a \in A} \text{sign}(a) = \sum_{a \in A^+} \text{sign}(a) + \sum_{a \in A^-} \text{sign}(a) = \sum_{a \in A^+} 1 + \sum_{a \in A^-} (-1) = \#A^+ - \#A^-.$$

Esta manera de actuar podría no ser la óptima en según qué situación. Al hallar  $\#A^+$  y  $\#A^-$  se obtiene en general más información de la que es necesaria. Una alternativa es cancelar algunos términos positivos con otros negativos antes de calcular la suma.

**Ejemplo 1.2.3.** Sea, para  $n \geq 1$ , la suma alternada de binomiales

$$\mathcal{S} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Vamos a reescribir la suma (una vez más) en términos combinatorios.

$$\mathcal{S} = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{A \subset [n] \\ \#A=k}} (-1)^k = \sum_{A \subset [n]} (-1)^{\#A}.$$

En consecuencia,  $\mathcal{S}$  es la suma signada del conjunto  $\mathcal{P}([n])$ , donde se toma el signo de cada  $A \subset [n]$  como 1 si el cardinal de  $A$  es par, y como  $-1$  si es impar. Entonces,

$$\mathcal{S} = \#\{A \subset [n] \mid \#A \text{ es par}\} - \#\{A \subset [n] \mid \#A \text{ es impar}\}.$$

Sin embargo, no es necesario saber cuantos subconjuntos de  $\mathbb{S}_n$  tienen una cantidad par de elementos y cuantos una cantidad impar para calcular  $\mathcal{S}$ .

Podemos observar que todo subconjunto de  $[n]$  es de la forma  $B$  o  $B \cup \{n\}$  para un único  $B \subset [n-1]$ . Además, si el cardinal de  $B$  es par, el de  $B \cup \{n\}$  es impar, y viceversa. Se concluye así que  $[n]$  tiene tantos subconjuntos de cardinal par como subconjuntos de cardinal impar, luego

$$\mathcal{S} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

A pesar de que esta igualdad se podría haber obtenido directamente de la fórmula del binomio de Newton,  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$ , la demostración que acabamos de dar nos proporciona una imagen muy elegante de lo que sucede.

En el ejemplo anterior hemos emparejado a cada sumando con uno del signo opuesto. Esto será posible solo cuando la suma signada sea 0. En el caso general se emparejaran algunos sumandos de signo opuesto, mientras que otros quedarán «aislados». La suma signada será igual a la suma sobre dichos sumandos sin emparejar. Vamos a formalizar este procedimiento.

Recordemos que si  $f : A \rightarrow A$  es una aplicación y  $n \geq 1$  es un natural, la aplicación  $f^n : A \rightarrow A$  se define como  $f^n := \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ veces}}$ . Establecemos el convenio de que  $f^0 := \text{Id}_A$  es la aplicación identidad.

Si además  $f$  es biyectiva (i.e. es una permutación de  $A$ ), la definición de  $f^n$  se extiende a los enteros negativos tomando  $f^{-n} = (f^{-1})^n$  para cada  $n > 0$ .

**Definición 1.2.4.** Dado un conjunto  $A$ , una **involución** sobre  $A$  es una aplicación  $\iota : A \rightarrow A$  tal que  $\iota^2 = \iota \circ \iota = \text{Id}_A$ . Es decir,  $\iota$  es involución si  $\iota(\iota(a)) = a \quad \forall a \in A$ .

Observamos que toda involución  $\iota : A \rightarrow A$  es una permutación del conjunto  $A$ , siendo la propia  $\iota$  su inversa.

En general, si  $f : A \rightarrow A$  es una permutación de  $A$ , la órbita de cada elemento  $a \in A$  por  $f$  es, por definición, el conjunto  $\{f^n(a) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . Las órbitas por  $f$  de los distintos elementos de  $A$  siempre conforman una partición de  $A$ . En el caso particular de una involución  $\iota : A \rightarrow A$  hay dos opciones para la órbita de cada  $a \in A$ :

1. Si  $a$  es punto fijo de  $\iota$  (i.e.  $\iota(a) = a$ ), entonces  $\iota^n(a) = a$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto, su órbita por  $\iota$  es el conjunto unitario  $\{a\}$
2. Si  $a$  no es punto fijo de  $\iota$ ,  $\iota(a) = b$  para cierto  $b \in A$ ,  $b \neq a$ . Dado que  $\iota$  es involución, se tiene que  $\iota(b) = \iota(\iota(a)) = a$ . En general, para cada  $n \in \mathbb{Z}$

$$\iota^n(a) = \begin{cases} a & \text{si } n \text{ es par,} \\ b & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

En consecuencia, la órbita de  $a$  por  $\iota$  es  $\{a, b\} = \{a, \iota(a)\}$ .

La idea es calcular una suma signada como la del ejemplo 1.2.3 mediante una involución  $\iota$  tal que los sumandos aislados se correspondan con puntos fijos de la involución, mientras que los sumandos que van «en pareja» provengan de dos elementos distintos  $a, \iota(a)$ . Lo único que falta por exigir es que, en este segundo caso, dichos elementos tengan signo opuesto, para que realmente cancelen.

**Nota.** Si  $f : A \rightarrow A$  una aplicación cualquiera, denotamos por  $\text{Fij}(f)$  al conjunto de puntos fijos de  $f$ .

**Definición 1.2.5.** Sean  $A$  un conjunto signado y sea  $\iota$  una involución en  $A$ . Se dice que  $\iota$  es **cancelativa** si  $\text{sign}(\iota(a)) = -\text{sign}(a)$  para todo  $a \in A \setminus \text{Fij}(\iota)$ .

Comprobamos que la definición anterior cumple su cometido.

**Proposición 1.2.6.** Sea  $A$  un conjunto signado finito y sea  $\iota$  una involución cancelativa en  $A$ . Entonces, su suma signada coincide con la suma signada de los puntos fijos de  $\iota$ . Es decir,

$$\sum_{a \in A} \text{sign}(a) = \sum_{a \in \text{Fij}(\iota)} \text{sign}(a). \quad (1.3)$$

*Demostración.* Descomponemos la suma signada de  $A$  en término de las órbitas de  $\iota$ . Denotamos por  $A_1, \dots, A_n$  y por  $B_1, \dots, B_m$  a las distintas órbitas de  $\iota$  de cardinal 1 y 2 respectivamente ( $n, m \geq 0$ ). Entonces,

$$\sum_{a \in A} \text{sign}(a) = \sum_{i=1}^n \sum_{a \in A_i} \text{sign}(a) + \sum_{i=1}^m \sum_{a \in B_i} \text{sign}(a). \quad (1.4)$$

Las órbitas de cardinal 1 se corresponden con los puntos fijos de  $\iota$ , con lo que

$$\sum_{i=1}^m \sum_{a \in B_i} \text{sign}(a) = \sum_{a \in \text{Fij}(\iota)} \text{sign}(a).$$

Por otra parte, la suma para las órbitas de cardinal dos valdrá 0. En efecto, si  $A_i$  es una órbita de cardinal dos y  $b \in A_i$ , dicha órbita es  $A_i = \{b, \iota(b)\}$ . Gracias a que  $\iota$  es cancelativa y que  $b$  no es punto fijo de  $\iota$ ,

$$\sum_{a \in A_i} \text{sign}(a) = \text{sign}(b) + \text{sign}(\iota(b)) = 0.$$

Basta sustituir en (1.4) para obtener el resultado deseado.  $\square$

**Ejemplo 1.2.7.** Apliquemos el resultado anterior al cálculo de la suma del ejemplo 1.2.3.

Sea  $\iota : \mathcal{P}([n]) \rightarrow \mathcal{P}([n])$  la aplicación dada por

$$\iota(A) = \begin{cases} A \cup \{n\} & \text{si } n \notin A; \\ A \setminus \{n\} & \text{si } n \in A. \end{cases}$$

Se puede comprobar de manera sencilla que  $\iota$  es una involución cancelativa (respecto al signo definido en 1.2.3) y que no tiene puntos fijos, luego

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{A \subset [n]} (-1)^{\#A} = \sum_{A \in \text{Fij}(\iota)} (-1)^{\#A} = 0.$$

La eficacia del método expuesto dependerá de que la involución tenga un número reducido de puntos fijos. Por ejemplo, en cualquier conjunto signado  $A$  la aplicación identidad  $\text{Id}_A$  (para la cual todo punto es fijo) es siempre una involución cancelativa. Sin embargo, la igualdad (1.3) es trivial en ese caso.

En el mejor caso posible, se obtendrá una involución  $\iota : A \rightarrow A$  que, o bien no tenga puntos fijos (en cuyo caso, la suma signada valdrá 0, como en el ejemplo 1.2.3) o bien, en su defecto, que todos sus puntos fijos tengan el mismo signo. Bajo tal circunstancia, en  $\sum_{a \in \text{Fij}(\iota)} \text{sign}(a)$  no habrá más cancelaciones posibles de términos y el valor de la suma signada será  $S := \pm \# \text{Fij}(\iota)$ . El signo de  $S$  coincidirá el signo de cualquiera de los puntos fijos de  $\iota$ .

Ahora bien, ¿qué ocurre si deseamos calcular el valor de una suma finita en la que los sumandos toman otros valores distintos de 1 y  $-1$ ? ¿Podemos proceder de forma parecida? Responderemos a esa pregunta de manera aún más general, considerando sumas sobre grupos abelianos.

En concreto, dado un conjunto finito  $A$  y un grupo abeliano  $G$  con notación aditiva (grupo aditivo, de aquí en adelante), deseamos hallar formas de simplificar el cálculo de  $\sum_{a \in A} m_a$  siendo ahora cada  $m_a$  un elemento de  $G$ . Lo podemos interpretar como un «peso» que se asigna al elemento  $a \in A$ .

**Definición 1.2.8.** Un **conjunto ponderado** es una terna  $(A, G, p)$  donde  $A$  es un conjunto,  $G$  un grupo abeliano aditivo y  $p : A \rightarrow G$  es una aplicación, llamada **función peso** de  $A$  en  $G$ . Dado  $a \in A$ , se dice que  $p(a)$  es el **peso** de  $a$ . Si  $A$  es finito, la suma

$$\sum_{a \in A} p(a)$$

recibe el nombre de **suma ponderada** de  $(A, G, p)$ .

De manera similar a lo que ocurría con los conjuntos signados, si  $(A, G, p)$  es un conjunto ponderado, se podrá decir, abusando del lenguaje, que  $A$  es un conjunto ponderado con pesos en  $G$ . Con frecuencia no se usará ningún símbolo para denotar a su función de pesos asociada. Bastará con dar explícitamente el peso de cada  $a \in A$ .

**Ejemplo 1.2.9.** Sea  $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$  una matriz cuadrada de orden  $n$  con entradas en un cierto anillo conmutativo  $R$ . La fórmula combinatoria de su determinante es

$$\det M = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{i,\sigma(i)}.$$

Aparece así una suma ponderada sobre  $\mathbb{S}_n$  en la que el peso de cada  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  es  $\text{sign}(\sigma)m_{i,\sigma(i)}$ .

En general, todo conjunto signado puede estudiarse como un conjunto ponderado en el que sus pesos toman sus valores en  $\{1, -1\}$ . Toda suma signada será, en particular, una suma ponderada. La siguiente definición no es más que una generalización de 1.2.5.

**Definición 1.2.10.** Sea  $(A, p, G)$  un conjunto ponderado. Una **involución cancelativa** sobre  $A$  es una involución  $\iota : A \rightarrow A$  tal que  $p(\iota(a)) = -p(a) \quad \forall a \in A \setminus \text{Fij}(\iota)$ .

Se recuerda que si  $G$  un grupo abeliano aditivo y  $g \in G$ , el elemento  $-g \in G$  es el único tal que  $g - g = -g + g = 0$ . Aún así, conviene recalcar que carece de sentido decir que  $g$  es positivo y  $-g$  negativo o viceversa pues los elementos de  $G$  no tienen definido un signo. Véase el caso de los números complejos o el de los enteros módulo  $p$  con  $p$  primo.

Las involuciones cancelativas para conjuntos ponderados cumplen una propiedad análoga a la vista en la proposición 1.2.6. Su demostración usa el mismo razonamiento y se omite.

**Proposición 1.2.11.** Sea  $A$  un conjunto finito ponderado con pesos en  $G$  y sea  $p(a) \in G$  el peso de cada  $a \in A$ . Si  $\iota$  es una involución cancelativa sobre  $A$ ,

$$\sum_{a \in A} p(a) = \sum_{a \in \text{Fij}(\iota)} p(a).$$



## Capítulo 2

# El lema de Lindström-Gessel-Viennot

En este capítulo se introducirá el lema de Lindström-Gessel-Viennot como un elegante procedimiento para obtener involuciones cancelativas, tanto sobre conjuntos signados como conjuntos ponderados en general. Dado que el lema se aplica a grafos dirigidos, es buen momento para hacer un recordatorio general y unificar notación sobre los conceptos de teoría de grafos que se usarán en este capítulo y siguientes. De nuevo, la referencia principal será [Sag20].

### 2.1. Nociones básicas de Teoría de Grafos

Recordemos que un **grafo** (no dirigido) es un par  $G = (V, A)$  donde  $V$  es un conjunto y  $A$  es un conjunto de pares no ordenados de la forma  $\{u, v\}$  con  $u, v \in V$ ,  $u \neq v$ . Los elementos de  $V$  son los **vértices** de  $G$ , mientras que los de  $A$  serán sus **aristas**. Se dice que el grafo  $G$  es **finito** si su conjunto de vértices  $V$  es finito. En ese caso, el **orden** de  $G$  será  $\#V$  (i.e. el número de vértices de  $G$ ). En este texto siempre se considerarán grafos finitos.

Las aristas de  $G$  representan conexiones entre sus vértices. Dos vértices  $u, v \in V$  son **vecinos** o **adyacentes** si  $e := \{u, v\}$  es una arista de  $G$ . En tal caso se dirá que la arista  $e$  une a  $u$  con  $v$  y que  $u$  y  $v$  son los **extremos** de  $e$ .

Un grafo se suele representar mediante una figura con «puntos» y «líneas» (segmentos) que unen dichos puntos. En el caso de  $G$ , cada punto se corresponderá con un vértice  $v \in V$ . Dos puntos correspondientes a vértices distintos  $u, v$  estarán unidos por una línea si  $\{u, v\}$  es una arista en  $G$ . Se pueden sustituir los puntos por «etiquetas» si fuera necesario hacer distinción entre ellos.

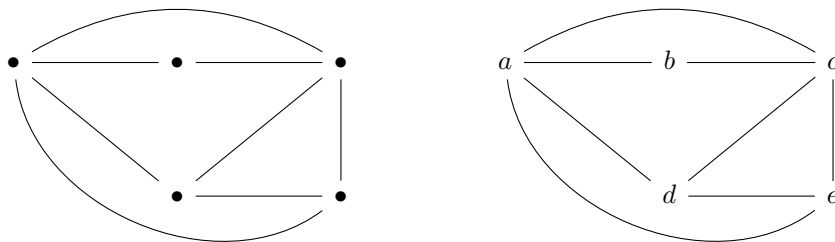


Figura 2.1: Ejemplos de grafos. El de la derecha tiene etiquetas en sus vértices.

El **orden** de un vértice de  $G$  es su número de vecinos. Un vértice es **aislado** si su orden es 0 (i.e. no tiene vecinos), es una **hoja** si tiene orden 1, y es **interno** si tiene orden mayor o igual que 2.

## Paseos, caminos y ciclos

Un **paseo**  $w$  en un grafo  $G$  es una sucesión de vértices  $w : v_0, \dots, v_n$  ( $n \geq 0$ ) tal que  $e_i := \{v_{i-1}, v_i\}$  es una arista en  $G$  para cada  $i$ . Se dirá entonces que las aristas  $e_i$  son las aristas del paseo  $w$  y que la **longitud** de  $w$  es  $n$  (el número de aristas). Los vértices  $v_0$  y  $v_n$  son los vértice **inicial** y **final** de  $w$ , respectivamente. Se dice que son los **extremos** de  $w$  y que  $w$  es un paseo entre  $v_0$  y  $v_n$  o de  $v_0$  a  $v_n$ . También es habitual decir que  $w$  une o conecta  $v_0$  con  $v_n$ . En las condiciones anteriores, será frecuente denotar a  $w$  por la palabra  $w = v_0 \cdots v_n$ . Diremos que dos paseos se **cruzan** o **intersecan** en un vértice  $v \in V$  si  $v$  es vértice de ambos paseos.

Un paseo  $w$  en  $G$  es **cerrado** si sus vértices inicial y final coinciden. Si además no tiene aristas repetidas y no tiene más repeticiones de vértices que el inicial y el final, se dice que  $w$  es un **ciclo**. Equivalentemente, un ciclo es un paseo cerrado de tres o más vértices sin repeticiones de vértices más allá de sus extremos. El grafo  $G$  es **acíclico** si no existen ciclos en  $G$ . Un **camino** en  $G$  es un paseo sin vértices (y, por tanto, ni aristas) repetidos.

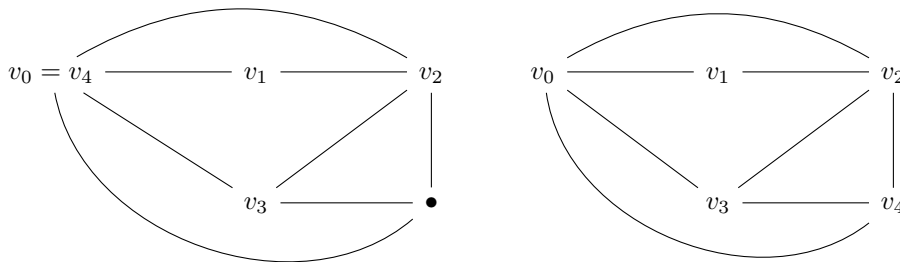


Figura 2.2: En la imagen de la derecha, un camino. A la izquierda, un paseo que no es camino.

Un **subpaseo** de un paseo  $w = v_0 \cdots v_n$  en  $G$  es cualquier paseo de la forma  $v_i v_{i+1} \cdots v_{j-1} v_j$  con  $0 \leq i \leq j \leq n$ . Un **subcamino** de un camino en  $G$  es cualquier subpaseo de este. Todo subcamino de un camino es también un camino.

Si  $w_1 = u_0 u_1 \cdots u_n$  y  $w_2 = v_0 v_1 \cdots v_m$  son dos paseos con  $u_n = v_0$ , la **yuxtaposición** de  $w_1$  y  $w_2$  es el paseo  $w_1 w_2 := u_0 u_1 \cdots u_n v_1 \cdots v_m$ . La yuxtaposición de caminos puede no ser un camino.

## Subgrafos. Conexión. Componentes Conexas

Un grafo  $H = (V', A')$  es **subgrafo** de  $G = (V, A)$  si  $V' \subset V$  y  $A' \subset A$ . Es decir, si todo vértice y toda arista de  $H$  también es arista de  $G$ .

Si  $\{G_i = (V_i, A_i)\}_{i \in I}$  es una familia de grafos, su **unión** es el grafo  $G = \bigcup_{i \in I} G_i := (\bigcup_{i \in I} V_i, \bigcup_{i \in I} A_i)$ . Obsérvese que los grafos  $G_i$  son subgrafos de  $G$ . Si además los conjuntos de vértices  $V_i$  son dos a dos disjuntos, los conjuntos de aristas  $A_i$  también lo son, y se dirá que unión  $G = \bigcup_{i \in I} G_i$  es disjunta.

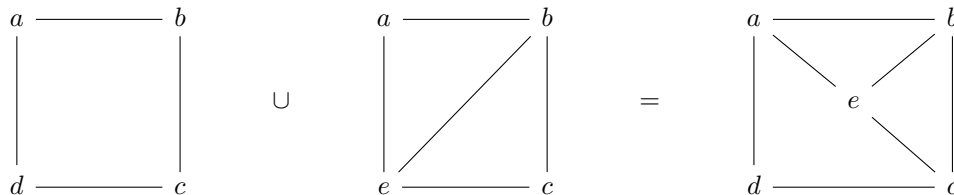


Figura 2.3: Unión de dos grafos.

En el caso de que  $I = [n] = \{1, \dots, n\}$ , podemos denotar a esa unión por  $G = G_1 \cup \cdots \cup G_n$ .

Dos vértices  $u, v \in V$  están **conectados** en  $G = (V, A)$  si existe un camino (o, equivalentemente, un paseo) entre  $u$  y  $v$ . La relación sobre  $V$  «estar conectados» es de equivalencia. El grafo  $G$  es **conexo** si todo par de vértices de  $V$  está conectado en  $G$ . En caso contrario, se dice que  $G$  es **disconexo**.

Si  $V_u \subset V$  es la clase de equivalencia de un vértice  $u \in V$  por la relación anterior y  $A_u \subset A$  es el conjunto de aristas  $A_u = \{\{a, b\} \in A \mid a, b \in V_u\}$ , el grafo  $G_u = (V_u, A_u)$  es el mayor subgrafo conexo de  $G$  que contiene al vértice  $u$ . Recibe el nombre de **componente conexa** de  $u$ .



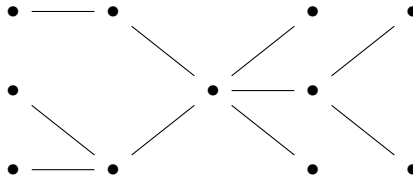


Figura 2.6: Un árbol.

Los conjuntos  $\{V_u\}_{u \in V}$  y  $\{A_u\}_{u \in V}$  conforman particiones de  $V$  y  $A$  respectivamente. En consecuencia, el grafo  $G$  es unión disjunta de sus componentes conexas  $\{G_u\}_{u \in V}$ . Un grafo es conexo si y solo si tiene una única componente conexa.

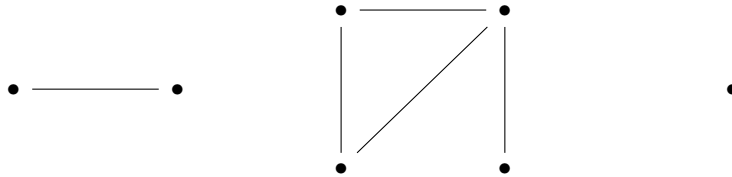


Figura 2.4: Un grafo disconexo con tres componentes conexas.

## Distancia entre vértices. Matriz de distancias

Dados  $G = (V, A)$  un grafo y  $u, v \in V$  dos vértices conectados, un camino **mínimo** entre  $u$  y  $v$  es un camino en  $G$  de la menor longitud posible. Dicha longitud será la **distancia** entre  $u$  y  $v$ , denotada por  $d(u, v)$ . Dicha distancia cumple las propiedades habituales. En particular,  $d(u, v) = d(v, u)$  y  $d(u, u) = 0$ .

Si  $G = (V, A)$  es un grafo conexo con  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , la **matriz de distancias** de  $G$  es  $M(G) = (d(v_i, v_j))_{i,j=1}^n$ . Dicha matriz es simétrica y sus entradas diagonales son nulas.

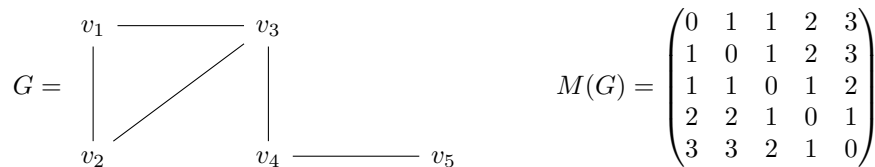


Figura 2.5: Matriz de distancias de un grafo de cinco vértices.

La matriz de distancias de un grafo depende del orden elegido para los vértices. En el caso de  $G$ , si se fija otro orden sobre los vértices de  $V$ , para obtener su nueva matriz de distancias  $\overline{M}(G)$  basta aplicar a  $M(G)$  una cierta permutación  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  sobre sus filas y la misma permutación  $\sigma$  sobre sus columnas. Dado que

$$\det(\overline{M}(G)) = \text{sign}(\sigma)^2 \det M(G) = \det M(G),$$

se concluye que el determinante de la matriz de distancias de  $G$  depende únicamente del grafo.

## Árboles

Un **árbol** es un grafo conexo y acíclico o, de manera equivalente, un grafo en el que todo par de vértices está conectado por un único camino. Si  $G = (V, A)$  es un grafo con  $n$  vértices y  $m$  aristas, entonces  $G$  es un árbol si y solo si es conexo y  $\#V = \#A + 1$ ; a la vez, si y solo si es acíclico y  $\#V = \#A + 1$  (Lema (1.10.2), [Sag20]).

Sea  $G = (V, A)$  un grafo. Entonces,  $G$  es un **grafo camino** si sus vértices y aristas son de la forma  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  y  $A = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid i = 1, \dots, n-1\}$ . Por otra parte,  $G$  es un **grafo estrella** si existe un vértice  $a \in V$  tal que las únicas aristas de  $G$  parten de  $a$  hacia el resto de vértices. Es decir, tal que  $A = \{\{a, b\} \mid b \in V; b \neq a\}$ . Dicho  $a$  es único si  $\#V \geq 3$ .

Todos los grafos camino y estrella son árboles. Por ello, reciben también el nombre de **árboles camino** y **árboles estrella**, respectivamente.

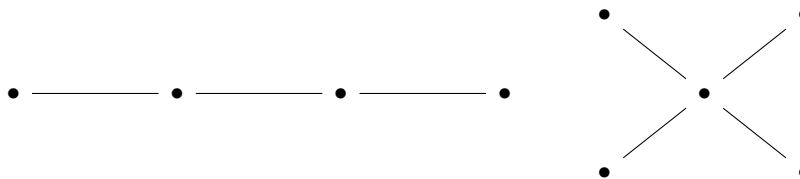


Figura 2.7: Un árbol camino (a la izquierda) y un árbol estrella (a la derecha).

## Grafos dirigidos

En la definición de grafo, los extremos de una arista juegan un papel simétrico, ya que conforman un par no ordenado. Sin embargo, hay casos en los que es conveniente que las aristas tengan dirección.

Un **grafo dirigido** es un par  $G = (V, A)$  donde  $V$  es un conjunto (el conjunto de vértices de  $G$ ) y  $A$  es un conjunto de pares ordenados  $(u, v)$  con  $u, v \in V$ ;  $u \neq v$ . Los elementos de  $A$  reciben el nombre de **aristas**, **aristas dirigidas**, **aristas orientadas**, **flechas**, o **arcos**, según el contexto. Si  $e = (u, v) \in A$  es una arco de  $G$ , se dice que  $u$  y  $v$  son los extremos inicial y final de  $e$ , respectivamente.

Los grafos dirigidos se representan de forma similar a los no dirigidos. Los vértices serán puntos (o etiquetas en su defecto). En este caso, los arcos no serán segmentos sino flechas. Cada arco  $(u, v) \in A$  se representará por una flecha con inicio en  $u$  y final en  $v$ .

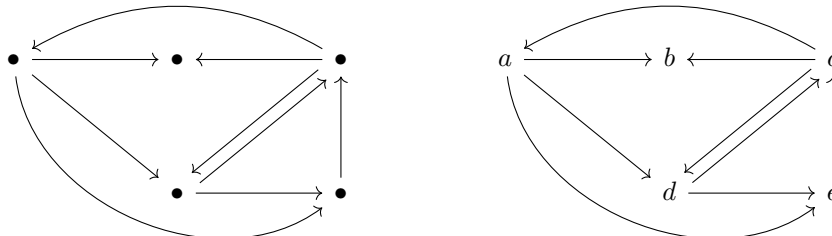


Figura 2.8: Dos grafos dirigidos. El de la derecha, con etiquetas.

Un **paseo**  $w$  en un grafo dirigido  $G$  entre dos vértices  $u, v \in V$  de longitud  $n \geq 0$  es una sucesión de vértices  $w : u = v_0, \dots, v_n = v$  (en notación de palabra,  $w = v_0 \dots v_n$ ) donde cada par  $(v_{i-1}, v_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) es una arista de  $G$ . Análogamente, se definen las nociones de **paseo cerrado**, **ciclo**, **camino**, **subpaseo** y **subcamino**. A diferencia del caso no dirigido, todo paseo en  $G$  la forma  $uvu$   $u, v \in V$  es un ciclo, puesto que sus dos aristas  $(u, v)$  y  $(v, u)$  son distintas.

En algunas circunstancias se pueden utilizar los términos **camino dirigido** y **paseo dirigido** (en lugar de camino y paseo) para especificar que son caminos y paseos de un grafo dirigido.

Como en el caso no dirigido, un **subgrafo** de  $G$  es un grafo dirigido  $H$  en el que todo vértice y todo arco de  $H$  es también vértice y arco de  $G$ .

## Relación entre grafos dirigidos y no dirigidos

Si  $(u, v) \in A$  es un arco, su **arista no orientada** asociada es el par no ordenado  $\overline{(u, v)} := \{u, v\}$ . Así, el **grafo no dirigido asociado** a  $G$  es el dado por  $\overline{G} := (V, \overline{A})$  siendo  $\overline{A}$  el conjunto de aristas no orientadas  $\overline{A} := \{\{i, j\} \mid (i, j) \in A\}$ .

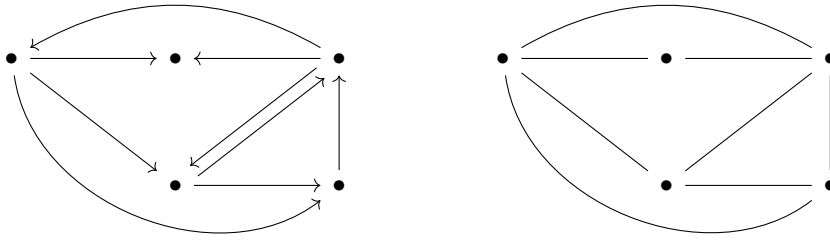


Figura 2.9: Un grafo dirigido y, a su derecha, su grafo no dirigido asociado.

En otras palabras, el grafo no dirigido subyacente a  $G$  es el obtenido al sustituir flechas por líneas (y eliminar repeticiones).

Si ahora  $G = (V, A)$  es un grafo no dirigido y  $e = \{u, v\} \in A$  es una arista, a partir de ella se obtienen dos arcos  $(u, v)$  y  $(v, u)$ , Son las dos **orientaciones** de la arista  $e$ . Todo grafo no dirigido  $G = (V, A)$  puede estudiarse como un grafo dirigido  $\vec{G} = (V, \vec{A})$ , donde  $\vec{A} = \{(u, v) \in V^2 \mid \{u, v\} \in A\}$  es el conjunto de las posibles orientaciones de las aristas de  $A$ . Decimos que  $\vec{G}$  es el **grafo dirigido asociado** a  $G$ .



Figura 2.10: Un grafo no dirigido y su grafo dirigido asociado.

Los conceptos de paseo, paseo cerrado, ciclo y camino son equivalentes en  $G$  y en  $\vec{G}$  (con la salvedad de los ciclos de longitud dos comentada anteriormente).

## Grafos ponderados

Sea  $G = (V, A)$  un grafo o un grafo dirigido. Una **ponderación** sobre  $G$  es una aplicación  $w : A \rightarrow R$ , donde  $R$  es un anillo conmutativo. Se dice que el par  $(G, w)$  es un grafo (o un grafo dirigido) **ponderado** y que  $w(e)$  es el **peso** de cada arista  $e \in A$ .

La ponderación sobre las aristas induce otra sobre los caminos y los paseos. Si  $P$  es un paseo en  $G$  con aristas  $e_1, \dots, e_n$ , se podrá decir que el peso de  $P$  es la suma o el producto de los pesos  $w(e_i)$ , según el contexto.

La función  $w$  con frecuencia se omite, y se dice simplemente que  $G$  es un grafo ponderado sobre un cierto anillo  $R$ , dando explícitamente el peso  $a_e \in R$  de cada arista  $e$ , ya sea en el propio texto o mediante una figura.

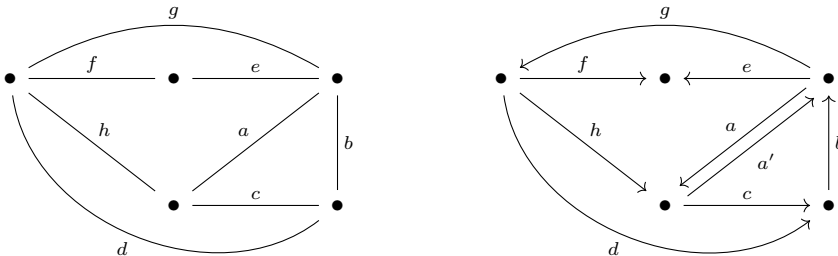


Figura 2.11: Dos grafos ponderados: uno no dirigido (izquierda) y otro dirigido (derecha).

## Multigrafos

Tanto en los grafos no dirigidos como en los dirigidos, las aristas vienen dadas por un conjunto. En consecuencia, una misma arista (o flecha) no puede estar «repetida». Hay circunstancias en las que es deseable que sí aparezca varias veces. Para formalizar esto se pueden usar multiconjuntos.

Los **multiconjuntos** son una generalización de la noción de conjunto, en los que se admite que un mismo elemento aparezca varias veces en él. Se emplea la doble llave  $\{\{\cdot\}\}$  en lugar de la llave simple  $\{\cdot\}$  habitual

Así, un **multigrafo** (respectivamente, **multigrafo dirigido**) es un par  $G = (V, A)$  donde  $V$  es un conjunto (de vértices) y  $A$  un multiconjunto de pares no ordenados (resp. ordenados) de  $V$ , que serán sus aristas. En contraste, los grafos y grafos dirigidos definidos anteriormente se dice que son **simples**.

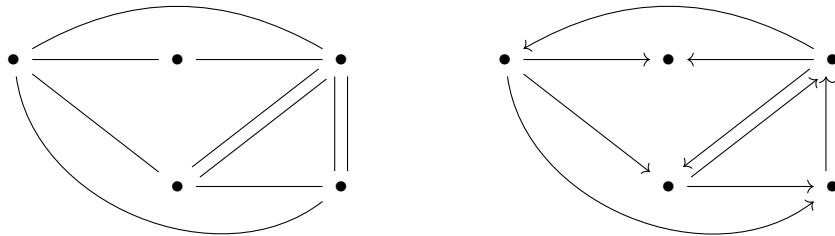


Figura 2.12: Un multigrafo (izquierda) y un multigrafo no dirigido (derecha).

La **multiplicidad** de una arista  $e \in A$  es el número de apariciones de  $e$  en  $G$ . Si la multiplicidad de  $e$  es  $n$ , se dirá que  $e$  **aparece**  $n$  veces en  $G$ .

Los multigrafos (dirigidos o no) inducen grafos «simples» sin más que eliminar las repeticiones en sus aristas o arcos.

## 2.2. El lema de Lindström-Gessel-Viennot

En matemáticas, por lo general, un lema es un resultado que simplifica y agiliza la demostración de un cierto teorema o proposición posterior. Una gran cantidad de ellos se enuncian *ad hoc* para luego caer en el olvido. Hay otros, por el contrario, que trascienden y se ganan el derecho a tener relevancia de manera independiente. En Álgebra, algunos ejemplos son: el lema de Gauss (teoría de números), el lema de normalización de Noether (álgebra conmutativa) o el lema de los cinco (álgebra homológica).

Cabe preguntarse qué hace exactamente que un resultado de peso, como los enumerados anteriormente, se considere un lema. Al fin y al cabo, la palabra «lema» es (al igual que «proposición», «teorema» y «corolario») una etiqueta que se asigna, de manera más o menos arbitraria, a un estamento matemático. Una interesante respuesta a esta pregunta aparece en el libro *Proofs from THE BOOK* ([TB18]) de Martin Aigner y Günter Ziegler. Citamos textualmente:

«Primero, un lema debería ser aplicable a una amplia variedad de contextos, incluso a problemas aparentemente no relacionados. En segundo lugar, un lema debe ser, una vez visto, completamente obvio. La reacción del lector bien podría ser de leve envidia: “¿por qué no me había dado cuenta de esto antes?” Y en tercer lugar, a nivel estético, el resultado (incluida su prueba) debería ser elegante».

El lema de Lindström-Gessel-Viennot satisface todos estos criterios. Demostrado originalmente por Lindström, e independientemente por Gessel y Viennot, este lema tiene el honor de aparecer en [TB18] por su elegancia y versatilidad. Esta sección se encargará de explicar su enunciado y prueba.

Se trabajará con grafos dirigidos y acíclicos. La siguiente caracterización será de gran utilidad.

**Lema 2.2.1.** Sea  $G = (V, A)$  un grafo dirigido. Son equivalentes:

1.  $G$  es acíclico.
2. Todo paseo en  $G$  es un camino.

*Demostración.* La implicación  $\boxed{2 \implies 1}$  es inmediata. Probemos el contrarrecíproco de  $\boxed{1 \implies 2}$ .

Supongamos que existe  $w$  un paseo en  $G$  que no es camino. Existe al menos un vértice  $a \in V$  que aparece repetidas veces en  $G$ . Podemos tomar dicho  $a$  cumpliendo además que alguno de los subpaseos cerrados de  $w$  de la forma  $w' = a \cdots a$  sea de la menor longitud posible. Esta elección garantiza que en el paseo  $w'$  anterior no haya más repeticiones de vértices más allá de sus extremos. El paseo  $w'$  es un ciclo en  $G$ , por lo que  $G$  no es acíclico.  $\square$

**Observación 2.2.2.** El resultado anterior no es cierto para grafos no dirigidos. Si  $G = (V, A)$  es un grafo no dirigido y acíclico con  $A \neq \emptyset$  y  $e = \{a, b\} \in A$  es una arista de  $G$ ,  $w = aba$  es un paseo en  $G$  que no es camino.

De aquí en adelante,  $G = (V, A)$  será un grafo dirigido acíclico. mientras que  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$  y  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  serán dos conjuntos de (exactamente)  $n$  vértices de  $G$ .

**Definición 2.2.3.** Un  $n$ -camino en  $G$  de  $\mathcal{A}$  en  $\mathcal{B}$  es un conjunto  $\mathbf{P}$  formado por  $n$  caminos en  $G$  de tal forma que cada  $a_i$  es el vértice inicial de un camino de  $\mathbf{P}$  y cada  $b_i$  es el vértice final de un camino de  $\mathbf{P}$ . Denotamos por  $\mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  al conjunto de  $n$ -caminos de  $\mathcal{A}$  en  $\mathcal{B}$ .

**Nota.** En coherencia con la notación anterior, si  $a, b \in V$  son dos vértices,  $\mathcal{P}(a, b)$  será el conjunto de caminos de  $G$  con vértice inicial  $a$  y vértice final  $b$ .

**Observación 2.2.4.** En la definición anterior, dado que hay tantos caminos en  $\mathbf{P}$  como vértices en  $\mathcal{A}$  y vértices en  $\mathcal{B}$ , se deduce que, para cada  $i \in [n]$ , existe un único camino en  $\mathbf{P}$  que comience en  $a_i$  y existe un único camino en  $\mathbf{P}$  que termine en  $b_i$ .

El hecho anterior permite escribir (y de hecho, así se hará de aquí en adelante)  $\mathbf{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$  siendo  $P_i$  el único camino en  $\mathbf{P}$  que parte de  $a_i$ .

**Definición 2.2.5.** Sea  $\mathbf{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$  un  $n$ -camino en  $G$  entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ . La **permutación subyacente** a  $\mathbf{P}$  es la aplicación  $\sigma_{\mathbf{P}} : [n] \rightarrow [n]$  tal que, para cada  $i \in [n]$ , el camino  $P_i$  (que parte de  $a_i$ ) tiene como vértice final a  $b_{\sigma_{\mathbf{P}}(i)}$ .

Algunos comentarios sobre la definición anterior:

1. La observación 2.2.4 implica que  $\sigma_{\mathbf{P}}$  es realmente una permutación de  $[n]$  (i.e. es biyectiva) para todo  $\mathbf{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ . En otras palabras,  $\sigma_{\mathbf{P}} \in \mathbb{S}_n$ .
2. La permutación subyacente a un  $n$ -camino  $\mathbf{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  depende del orden elegido para los vértices de  $\mathcal{A}$  y de  $\mathcal{B}$ . Por ello, es necesario cuál es con anterioridad.
3. El conjunto  $\mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  es un conjunto signado para la función signo dada por  $\text{sign}(\mathbf{P}) := \text{sign}(\sigma_{\mathbf{P}})$  para cada  $\mathbf{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ .

**Definición 2.2.6.** Un  $n$ -camino  $\mathbf{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  es una **ruta** si ninguno de los caminos de  $\mathbf{P}$  se cruzan. En caso contrario, se dice que  $\mathbf{P}$  es **entrelazado**. El conjunto de rutas de  $\mathcal{A}$  en  $\mathcal{B}$  será  $\mathcal{R}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ .

El motivo de hacer la distinción anterior es que, dado un  $n$ -camino entrelazado, se pueden intercambiar dos caminos a partir de una intersección para obtener otro  $n$ -camino distinto, tal y como se puede observar en la siguiente figura.

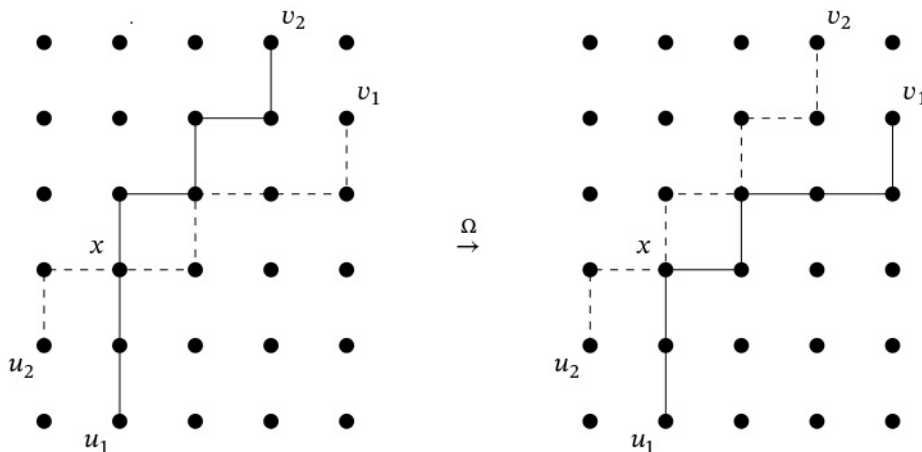


Figura 2.13: Intercambio de caminos ([Sag20], pág. 57, figura 2.5).

Tras esta observación, parece natural definir una aplicación que asocie a cada  $n$ -camino entrelazado otro a partir de intercambiar dos de sus caminos por un cruce. Más allá de que el resultado sea realmente un  $n$ -camino (que como veremos, será cierto por ser  $G$  acíclico) hay otros obstáculos. En primer lugar, en un  $n$ -camino puede haber más de un par de caminos que se crucen. En segundo, dos caminos pueden tener varios vértices en común. En otras palabras, hay que hacer elecciones arbitrarias.

Vamos a establecer fija una forma de proceder.

Sea  $\mathbf{P} = \{P_1, \dots, P_n\} \in \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  un  $n$ -camino entrelazado y sea  $i \in [n]$  el menor índice tal que  $P_i$  tiene un vértice en común con otro camino de  $\mathbf{P}$ . Escribamos pues

$$P_i : a_i = v_0, \dots, v_m = b_{\sigma_{\mathbf{P}}(i)}.$$

Podemos tomar ahora  $v_r$  el primer vértice de  $P_i$  que aparezca en otro camino distinto de  $\mathbf{P}$ . Sea ahora  $j \in [n]$  el menor  $j \neq i$  tal que el camino

$$P_j : a_j = w_0, \dots, w_l = b_{\sigma_{\mathbf{P}}(j)}$$

contiene a  $v_r$ . Por la minimalidad de  $i$ , se cumple que  $i < j$ .

Sea pues  $w_s$  la primera aparición de  $v_r$  en  $P_j$ . Podemos intercambiar esos dos caminos a partir de ese primer cruce. Tras esto se obtienen dos nuevos paseos

$$Q_i = v_0 \cdots v_r w_{s+1} \cdots w_l; \quad Q_j = w_0 \cdots w_s v_{r+1} \cdots v_m$$

que son caminos ya que  $G$  es acíclico.

Definimos  $Q_k := P_k$  si  $k \in [n]$ ;  $k \neq i, j$ . Por construcción, cada  $a_k$  es el extremo inicial del camino  $Q_k$ . Por otra parte, dado  $b \in \mathcal{B}$ , si  $P_k$  es el camino de  $\mathcal{P}$  con extremo final  $b$ , (i.e  $b = b_{\sigma_{\mathbf{P}}(k)}$ ) hay tres posibilidades.

- Si  $k \neq i, j$ , entonces  $b$  es el extremo final de  $Q_k$ .
- Si  $k = i$ , el vértice  $b$  es el extremo final de  $Q_j$
- Finalmente, si  $k = j$ , es el camino  $Q_i$  el que tiene a  $b$  como vértice final.

Se deduce así que  $\mathbf{Q} = \{Q_1, \dots, Q_n\}$  es  $n$ -camino de  $\mathcal{A}$  en  $\mathcal{B}$  con permutación subyacente

$$\sigma_{\mathbf{Q}}(k) = \begin{cases} \sigma_{\mathbf{P}}(k) & \text{si } k \neq i, j; \\ \sigma_{\mathbf{P}}(j) & \text{si } k = i; \\ \sigma_{\mathbf{P}}(i) & \text{si } k = j. \end{cases}$$

La igualdad anterior se puede expresar como  $\sigma_{\mathbf{Q}} = \sigma_{\mathbf{P}} \circ (i \ j)$ . Es decir, la permutación subyacente a  $\mathbf{Q}$  es la composición de la de  $\mathbf{P}$  con una trasposición.

**Definición 2.2.7.** *En las condiciones anteriores, diremos que  $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  es el  $n$ -camino traspuesto de  $\mathbf{P}$ .*

**Observación 2.2.8.** *Sea  $\mathbf{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  es un  $n$ -camino entrelazado con  $n$ -camino traspuesto  $\mathbf{Q}$ . Por construcción, los arcos de los caminos de  $\mathbf{P}$  son, en conjunto, los mismos que los de  $\mathbf{Q}$ . Es más, cada arista  $e \in A$  aparece tantas veces en los caminos de  $\mathbf{P}$  como en los de  $\mathbf{Q}$ . Lo mismo puede decirse de los vértices de cada  $n$ -camino.*

Ahora bien, ¿qué ocurre si aplicamos el mismo procedimiento a  $\mathbf{Q}$ ? ¿Volvemos a obtener  $\mathbf{P}$ ?

**Lema 2.2.9.** *En las condiciones anteriores,  $\mathbf{Q}$  es entrelazado y  $\mathbf{P}$  es el  $n$ -camino traspuesto de  $\mathbf{Q}$ .*

*Demostración.* Por la minimalidad de  $i$ , para cualquier  $k \in [n]$  con  $k < i < j$ , el camino  $Q_k = P_k$  no se cruza con ningún otro camino de  $\mathbf{Q}$ . Dado que los caminos  $Q_i$  y  $Q_j$  comparten el vértice  $v_r = w_s$ , el  $n$ -camino  $\mathbf{Q}$  es entrelazado y  $i$  es, de nuevo, el menor índice para el cual  $Q_i$  se cruza con otro camino de  $\mathbf{Q}$ .

Sea ahora  $u \in V$  el primer vértice de  $Q_i = v_0 \cdots v_r w_{s+1} \cdots w_l$  que también es vértice de algún otro camino  $Q_k \in \mathbf{Q}$ . El vértice  $v_r$  está en  $Q_j$ , por lo que dicho  $u$ , o bien es igual a  $v_r$ , o bien lo antecede en  $Q_i$ . Es decir,  $u = v_d$  con  $d \leq r$ . Veamos que  $d = r$ .

Por reducción al absurdo, supongamos  $d < r$ . Necesariamente  $k = j$  (en caso contrario,  $v_d$  sería un vértice común de  $P_i$  y  $P_k$  anterior a  $v_r$ , algo imposible por la elección de dicho  $r$ ). Entonces,  $v_d$  está en el camino  $Q_j = w_0 \cdots w_s v_{r+1} \cdots w_m$ .

De manera similar, el vértice  $v_d$  no puede estar en el subcamino  $w_0 \cdots w_s$ , pues, una vez más,  $v_d$  aparecería en  $P_j$ . Así,  $v_d$  está en el subcamino  $v_{r+1} \cdots v_m$ . Pero entonces el camino  $P_i$  toma la forma

$$P_i = v_0 \cdots v_d \cdots v_r v_{r+1} \cdots v_d \cdots v_m$$

llegando a la contradicción buscada.

En resumen,  $v_r$  es el primer vértice de  $Q_i$  que aparece en otro camino. Por argumentos análogos a los anteriores,  $j \in [n]$  es el menor índice para el cual  $v_r$  aparece en  $Q_j$ , y  $w_s$  es la primera aparición de  $v_r$  en dicho camino. Se concluye así que el  $n$ -camino traspuesto de  $\mathbf{Q}$  es  $\mathbf{P}$ .  $\square$

El lema anterior da una forma de «emparejar» a los  $n$ -caminos entrelazados de  $\mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ . Como se vió en el capítulo 1, tras esto hay una involución subyacente.

**Proposición 2.2.10.** *Sea la aplicación  $T : \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  tal que, para cada  $\mathbf{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ,  $T(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$  si  $\mathbf{P}$  es ruta y  $T(\mathbf{P})$  es el camino traspuesto de  $\mathbf{P}$  en caso contrario. Entonces,  $T$  es una involución cuyos únicos puntos fijos son las rutas de  $\mathcal{R}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ .*

*Demostración.* El lema anterior prueba que  $T$  es una involución. Por construcción, los únicos puntos fijos son las rutas.  $\square$

La aplicación  $T$  anterior no es solo una involución. Recordemos que sobre  $\mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  hay definida una función signo (dada por los signos de cada permutación subyacente).

Si  $\mathbf{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  es un  $n$ -camino entrelazado con  $n$ -camino traspuesto  $\mathbf{Q}$  entonces, por propiedades elementales de la función signo de  $\mathbb{S}_n$ ,

$$\text{sign}(\sigma_{\mathbf{Q}}) = \text{sign}(\sigma_{\mathbf{P}} \circ (i j)) = \text{sign}(\sigma_{\mathbf{P}}) \text{sign}(i j) = -\text{sign}(\sigma_{\mathbf{P}}).$$

Es decir,  $\iota$  es cancelativa. Aplicando la proposición 1.2.6 se obtiene de manera inmediata una primera versión del lema de Lindström-Gessel-Viennot.

**Lema 2.2.11** (Lindström-Gessel-Viennot, [Lin73], [GV85]). *La suma signada de los  $n$ -caminos de  $\mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  es igual a la de sus rutas. Es decir,*

$$\sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \text{sign}(\sigma_{\mathbf{P}}) = \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{R}(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \text{sign}(\sigma_{\mathbf{P}})$$

Sin embargo, para los resultado que se prueban en este trabajo se necesita una versión algo más general del lema, la cual involucra grafos dirigidos ponderados.

Supongamos que, en las condiciones anteriores,  $G$  es un grafo ponderado, siendo  $w_e \in R$  el peso de cada arco  $e \in A$ . Estos pesos serán pesos multiplicativos, en el sentido de que si  $P$  es un camino en  $G$ , el peso de  $P$  (denotado por  $w(P)$ ) es el producto de los pesos de los arcos de  $P$ . Escribiremos esto como

$$w(P) = \prod_{e \in P} w_e,$$

donde la notación  $e \in P$  indica que  $e \in A$  es un arco del camino  $P$ . De la misma forma, si  $\mathbf{P} = \{P_1, \dots, P_n\} \in \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  es un  $n$ -camino, su peso es

$$w(\mathbf{P}) = \text{sign}(\sigma_{\mathbf{P}}) \prod_{i=1}^n w(P_i)$$

(ahora, la función signo definida sobre  $\mathbb{S}_n$  toma valores en  $1, -1 \in R$ ). Bajo estas condiciones,  $\mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  es un conjunto ponderado con pesos en  $R$  (considerado ahora como grupo aditivo).

**Lema 2.2.12** (Lindström-Gessel-Viennot, versión con pesos, [Lin73], [GV85]). *En las condiciones anteriores,*

$$\sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})} w(\mathbf{P}) = \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{R}(\mathcal{A}, \mathcal{B})} w(\mathbf{P}).$$

*Demostración.* Basta ver que la involución  $T$  anterior también es cancelativa para los pesos definidos sobre  $\mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ . Sea  $\mathbf{P} = \{P_1, \dots, P_n\} \in \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  un  $n$ -camino entrelazado con  $n$ -camino traspuesto  $\mathbf{Q} = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ . De la observación 2.2.8 se deduce:

$$\prod_{i=1}^n \prod_{e \in P_i} w(e) = \prod_{i=1}^n \prod_{e \in Q_i} w(e).$$

Por lo tanto,

$$w(\mathbf{Q}) = \text{sign}(\sigma_{\mathbf{Q}}) \prod_{i=1}^n \prod_{e \in Q_i} w(e) = -\text{sign}(\sigma_{\mathbf{P}}) \prod_{i=1}^n \prod_{e \in P_i} w(e) = -w(\mathbf{P}),$$

concluyendo así la prueba.  $\square$

Observamos que si  $w(e) = 1$  para todo  $e \in A$ , obtenemos la versión clásica (sin pesos) del lema de Lindström-Gessel-Viennot.

**Observación 2.2.13.** *La prueba anterior se ha basado en que el peso de cada  $n$ -camino entrelazado  $\mathbf{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$  es, salvo signo,  $f(w(e_1), \dots, w(e_m))$  siendo*

1.  $e_1, \dots, e_m$  la lista de todos los arcos de cada camino  $P_i$  (contando multiplicidades) y
2.  $f(x_1, \dots, x_m) \in R[x_1, \dots, x_m]$  un polinomio simétrico. En este caso, el polinomio simétrico elemental  $e_m(x_1, \dots, x_m) = x_1 \cdots x_m$ .

Si se hubiera definido  $w(\mathbf{P}) := \text{sign}(\sigma_{\mathbf{P}})g(w(e_1), \dots, w(e_m))$  para cualquier otro polinomio simétrico  $g \in R[x_1, \dots, x_m]$  el resultado seguiría siendo cierto. Un ejemplo sencillo se obtiene tomando

$$g(x_1, \dots, x_m) := e_1(x_1, \dots, x_m) = x_1 + \cdots + x_m.$$

En tal caso, el peso de cada  $\mathbf{P}$  sería

$$w(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^n \sum_{e \in P_i} w(e).$$

Es más, siguiendo la observación 2.2.8, pueden formularse otras construcciones análogas al lema de Lindström-Gessel-Viennot que involucren pesos en los vértices en lugar de en las aristas.

El procedimiento de la prueba de LGV no solo se puede aplicar al conjunto  $\mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  de todos los  $n$ -caminos. También se puede aplicar a cualquier subconjunto de  $\mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  para la cual la involución  $\iota : \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  actúe de forma interna.

**Definición 2.2.14.** *Se dice que una familia de  $n$ -caminos  $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  es **cerrada** (bajo trasposiciones) si  $T(\mathbf{P}) \in \mathcal{P}$  para todo  $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$ .*

**Corolario 2.2.15.** *Sea  $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  una familia cerrada bajo trasposiciones y sea  $\mathcal{R} := \mathcal{P} \cap \mathcal{R}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  su subfamilia de rutas. Entonces,*

$$\sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}} \text{sign}(\sigma_{\mathbf{P}}) = \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{R}} \text{sign}(\sigma_{\mathbf{P}}); \quad \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}} w(\mathbf{P}) = \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{R}} w(\mathbf{P}).$$

*Demostración.* Dado que  $\mathcal{P}$  es cerrada, la restricción de  $T : \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  define otra aplicación  $T|_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ , que también es involución cancelativa tanto para la función signo  $\mathbf{P} \in \mathcal{P} \mapsto \text{sign}(\sigma_{\mathbf{P}})$  como para la función peso  $\mathbf{P} \in \mathcal{P} \mapsto w(\mathbf{P})$ . Por construcción, sus únicos puntos fijos son los de  $\mathcal{R}$ .  $\square$

En los capítulos 3 y 4 se verá como aplicar el lema de Lindstrom-Gessel-Viennot (o más bien, el corolario 2.2.15) para calcular algunas sumas signadas y ponderadas a partir de rutas en un cierto grafo dirigido.



## Capítulo 3

# Prueba Combinatoria de la fórmula de Graham-Pollak

Una vez establecidas las nociones básicas necesarias y fijadas la nomenclatura y notación, nos introducimos en la prueba combinatoria de la fórmula de Graham-Pollak.

Durante todo este capítulo  $T = (V, A)$  será un árbol. Por simplicidad se tomará su conjunto de vértices como  $V = [n] = \{1, \dots, n\}$ , siendo así  $M(T) = (d(i, j))_{i, j=1}^n$  la matriz de distancias de  $T$ . Se recuerda que  $\vec{A} = \{(i, j) \in V^2 \mid \{i, j\} \in A\}$  es el conjunto de las posibles orientaciones de cada arista de  $A$ . También se llamará **conjunto de flechas** de  $T$ .

### 3.1. Pares $T$ -compatibles y diagramas de flechas

Si se desea calcular el determinante de  $M(T)$  de manera combinatoria, un buen punto de partida es usar la fórmula combinatoria del determinante de una matriz. Obtenemos,

$$\det M(T) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i \in V} d(i, \sigma(i)). \quad (3.1)$$

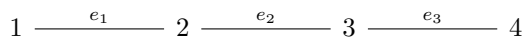
**Observación 3.1.1.** Si  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  tiene algún punto fijo, entonces  $\prod_{i \in V} d(i, \sigma(i)) = 0$ . Por lo tanto, (3.1) podría expresarse como

$$\det M(T) = \sum_{\sigma \in \mathbb{D}_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i \in V} d(i, \sigma(i)), \quad (3.2)$$

donde recordamos que  $\mathbb{D}_n$  el conjunto de desarreglos (i.e. permutaciones sin puntos fijos) de  $\mathbb{S}_n$ . Sin embargo, se preferirá trabajar con (3.1) ya que imponer más restricciones sobre el sumatorio puede complicar su manipulación. En cualquier caso, conviene tener en mente que los sumandos no nulos que aparecen (3.1) se corresponden con desarreglos.

En (3.1) aparece una suma de enteros indexada en permutaciones, donde el signo de cada sumando es el de la permutación  $\sigma$  correspondiente. Una forma de hallar el valor de dicha suma podría ser, como en el capítulo 1, cancelar algunos sumandos mediante una involución. Sin embargo, esto no es operativo.

**Ejemplo 3.1.2.** Sea  $T = P_4$  el grafo camino de 4 vértices.



La siguiente tabla muestra los valores de  $m_\sigma := \text{sign}(\sigma) \prod_{i \in V} d(i, \sigma(i))$  para cada desarreglo  $\sigma \in \mathbb{D}_n$ .

$\sigma$	$m_\sigma$	$\sigma$	$m_\sigma$
(1234)	-3	(1243)	-4
(1324)	-12	(1342)	-4
(1423)	-12	(1432)	-3
(12)(34)	1	(13)(24)	16
(14)(23)	9		

Observamos que no hay ningún  $m_\sigma$  positivo que pueda cancelar directamente con otro negativo. En cualquier caso, aplicando (3.2) obtenemos

$$\det M(P_4) = \sum_{\sigma \in \mathbb{D}_n} m_\sigma = -3 - 4 - 12 - 4 - 12 - 3 + 1 + 16 + 9 = -12 = (-1)^{4-1} (4-2) 2^{4-2}.$$

Vamos a reescribir (3.1). Para ello, recordamos que, por definición,  $d(i, j)$  denota el número de aristas del camino  $P(i, j)$  para cada  $i, j \in V$  (pues es el único en  $T$  entre  $i$  y  $j$ ). Para cada  $\sigma \in \mathbb{S}_n$ , el principio multiplicativo nos dice que  $\prod_{i \in V} d(i, \sigma(i))$  es igual al número de  $n$ -tuplas de aristas  $(e_1, \dots, e_n) \in A^n$ , donde cada  $e_i$  es una arista de  $P(i, \sigma(i))$ .

Por otra parte, cada  $n$ -tupla  $(e_1, \dots, e_n) \in A^n$  se corresponde (de manera biunívoca) con una aplicación  $f : V \rightarrow A$  (la dada por  $f(i) = e_i \ \forall i \in V$ ). Por lo tanto,

$$\prod_{i \in V} d(i, \sigma(i)) = \# \{ f : V \rightarrow A \mid f(i) \in P(i, \sigma(i)) \ \forall i \in V \} = \sum_{\substack{f: V \rightarrow A \\ f(i) \in P(i, \sigma(i))}} 1,$$

recalcando que si  $i, j \in V$  y  $e \in A$ , la notación  $e \in P(i, j)$  indica que  $e$  es una arista en el camino  $P(i, j)$ . Sustituyendo en (3.1),

$$\det M(T) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \text{sign}(\sigma) \sum_{\substack{f: V \rightarrow A \\ f(i) \in P(i, \sigma(i))}} 1 = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \sum_{\substack{f: V \rightarrow A \\ f(i) \in P(i, \sigma(i))}} \text{sign}(\sigma) \quad (3.3)$$

Todo ello motiva la siguiente definición.

**Definición 3.1.3.** Un **par  $T$ -compatible** es un par  $(\sigma, f)$  donde  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  y  $f : V \rightarrow A$  es una aplicación tal que  $f(i)$  es una arista del camino  $P(i, \sigma(i))$  para todo  $i \in V$ . Denotamos por  $P_T$  al conjunto de todos los pares  $T$ -compatibles.

**Observación 3.1.4.** La permutación  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  es un desarreglo para cualquier  $(\sigma, f) \in P_T$ . Si  $\sigma$  tuviera un punto fijo  $i \in V$ , el camino  $P(i, \sigma(i))$  no tendría ninguna arista, por lo  $i$  no podría tener imagen por  $f$ .

**Ejemplo 3.1.5.** Sea  $T = P_4$  el grafo camino del ejemplo 3.1.2. Hay 3 pares  $T$ -compatibles  $(\sigma, f) \in P_T$  con  $\sigma = (1234)$ . Si denotamos a cada aplicación  $f$  por la palabra  $f(1)f(2)f(3)f(4)$ , estos 3 pares son los correspondientes a  $f = e_1e_2e_3e_1$ ,  $f = e_1e_2e_3e_2$  y  $f = e_1e_2e_3e_3$ .

En general, tal y como se observa en el desarrollo anterior, para cada  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  el producto  $\prod_{i \in V} d(i, \sigma(i))$  cuenta el número de pares  $T$ -compatibles de la forma  $(\sigma, f)$ .

A partir de (3.3) y la definición anterior tenemos la siguiente igualdad:

$$\det M(T) = \sum_{(\sigma, f) \in P_T} \text{sign}(\sigma). \quad (3.4)$$

Esta expresión, al menos a priori, dista mucho de ser la fórmula conocida. La ventaja sobre (3.1) es que en esta igualdad aparece una suma signada, (los sumandos toman los valores 1 y  $-1$ ) sobre la que será más sencilla cancelar términos. Sin embargo, el motivo de la idoneidad de esta forma de proceder es más profundo y se irá constatando a lo largo del texto.

Los pares  $T$ -compatibles serán realmente la clave que conecte la expresión de  $\det M(T)$  en función de permutaciones con la fórmula cerrada  $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$ . Además, permitirán establecer un marco común para probar no solo la fórmula de Graham-Pollak si no diversas generalizaciones de esta sin más que realizar algunas modificaciones en cada caso.

Sean ahora  $i, j \in V$  dos vértices distintos y sea  $e = \{a, b\}$  una arista del camino  $P(i, j)$ . El camino en  $T$  entre  $i$  y  $j$  toma una de las dos siguientes formas

$$P(i, j) = i \cdots ab \cdots j \quad \text{o} \quad P(i, j) = i \cdots ba \cdots j.$$

En cada caso, de cierta manera, la arista  $e$  aparece en  $P(i, j)$  con una orientación distinta ( $(a, b)$  y  $(b, a)$  respectivamente).

$$i \text{ --- } a \xrightarrow{e} b \text{ --- } j \quad \quad i \text{ --- } b \xrightarrow{e} a \text{ --- } j$$

Figura 3.1: Las dos posibles orientaciones de una arista  $e = \{a, b\}$  en un camino  $P(i, j)$ .

**Definición 3.1.6.** Sean  $i, j \in V$  dos vértices y  $e \in P(i, j)$  una arista. Dados  $a, b \in V$  tales que  $e = \{a, b\}$  y  $P(i, j) = i \cdots ab \cdots j$ , se dirá que  $(a, b) \in \vec{A}$  es la arista  $e$  **orientada respecto al camino**  $P(i, j)$  o en el camino  $P(i, j)$ .

Si  $(\sigma, f) \in P_T$  es un par  $T$ -compatible,  $\vec{f}_\sigma : V \rightarrow \vec{A}$ , es la aplicación tal que  $\vec{f}_\sigma(i)$  es la arista  $f(i)$  orientada respecto al camino  $P(i, \sigma(i))$  para todo  $i \in V$ .

**Ejemplo 3.1.7.** Sea el grafo camino  $T = P_4$  del ejemplo 3.1.2 y el par  $T$ -compatible  $(\sigma, f) \in P_T$  con  $\sigma = (1234)$  y  $f = e_1 e_2 e_3 e_1$ . Se tiene entonces,

$$\vec{f}_\sigma(1) = (1, 2); \quad \vec{f}_\sigma(2) = (2, 3); \quad \vec{f}_\sigma(3) = (3, 4); \quad \vec{f}_\sigma(4) = (2, 1).$$

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\vec{f}_\sigma(1)} \\ \xleftarrow{\vec{f}_\sigma(4)} \end{array} 2 \xrightarrow{\vec{f}_\sigma(2)} 3 \xrightarrow{\vec{f}_\sigma(3)} 4$$

Figura 3.2: Representación gráfica de  $\vec{f}_\sigma(i)$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ .

En la figura anterior se observa que para orientar  $f(i)$  en el camino  $P(i, \sigma(i))$  basta colocar la flecha correspondiente de apuntando en la dirección opuesta al vértice  $i$ . El objetivo de las siguientes líneas es constatar que, dado  $(\sigma, f) \in P_D$ , la orientación de la arista  $f(i)$  en  $P(i, \sigma(i))$  se puede estudiar a partir del vértice  $i$ , con independencia de la permutación  $\sigma$ .

**Lema 3.1.8.** Sean  $i \in V$  y  $e = \{a, b\}$ . Se cumplen una y solo una de las siguientes condiciones:

1.  $P(i, b) = i \cdots ab$ .
2.  $P(i, a) = i \cdots ba$ .

*Demostración.* Si se cumple «1», excluyendo de  $P(i, b)$  al vértice  $b$  se obtiene el subcamino  $i \cdots a$ , que no contiene a  $b$  y es el único en  $T$  entre  $i$  y  $a$ . Por lo tanto, «2» es falso.

Recíprocamente, si «1» es falso, y  $w$  es el camino  $w = ba$ , la yuxtaposición  $P(i, b)w = i \cdots ba$  debe ser un camino. En caso contrario, se tendría necesariamente  $P(i, b)a = i \cdots a \cdots ba$ . Extrayendo el subpaseo cerrado  $a \cdots ba$  obtendríamos que este es un ciclo (tiene al menos tres vértices y solo se repiten sus extremos), lo cual es un absurdo. Se concluye así que  $P(i, b)w = i \cdots ba = P(i, a)$ . Es decir, «2» es cierto.  $\square$

El lema anterior permite orientar una arista únicamente a partir de un vértice.

**Definición 3.1.9.** Sean  $i \in V$  un vértice y  $e \in A$  una arista. Sean  $a, b \in V$  tales que  $e = \{a, b\}$  y  $P(i, b) = i \cdots ab$ . Entonces,  $(a, b) \in \vec{A}$  es la arista  $e$  **orientada desde el vértice**  $i$ .

Si  $f : A \rightarrow V$  es su aplicación, se denota por  $\vec{f} : V \rightarrow \vec{A}$  a la aplicación tal que, para cada  $i \in V$ ,  $\vec{f}(i)$  es la arista  $f(i)$  orientada desde el vértice  $i$ .

Y, en efecto, orientar una arista según un camino es equivalente a orientarla desde su vértice inicial.

**Proposición 3.1.10.** Si  $(\sigma, f) \in P_T$  es un par  $T$ -compatible,  $\vec{f}_\sigma = \vec{f}$ .

*Demostración.* Sean  $i \in V$  y  $\vec{f}_\sigma = (a, b)$ . Por definición,  $P(i, \sigma(i)) = i \cdots ab \cdots \sigma(i)$ . De  $P(i, \sigma(i))$  se extrae el subcamino  $P(i, b) = i \cdots ab$ , luego  $\vec{f}(i) = (a, b)$ .  $\square$

Dado un par  $T$ -compatible  $(\sigma, f) \in P_T$ , parece lógico representar las imágenes  $\vec{f}(i)$  con flechas sobre las propias aristas del árbol  $T$ , tal y como se hizo con la figura 3.2 para el ejemplo 3.1.7. Puede ocurrir que haya flechas repetidas. Estamos pues ante un multigrafo dirigido.

**Definición 3.1.11.** Sea  $(\sigma, f)$  un par  $T$ -compatible. El **diagrama de flechas** (o simplemente, diagrama) de  $(\sigma, f)$  es el multigrafo dirigido  $D$  con conjunto de vértices  $V$  (el mismo que el de  $T$ ) y multiconjunto de flechas (i.e. aristas dirigidas)  $\{\{\vec{f}(i) \mid i \in V\}\}$ .

**Ejemplo 3.1.12.** Los diagramas de flechas de los tres pares  $P_4$ -compatibles dados en el ejemplo 3.1.5 son, respectivamente,

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \qquad 1 \longrightarrow 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} 3 \longrightarrow 4 \qquad 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} 4.$$

Por simplicidad en los razonamientos posteriores, nos interesa definir un diagrama de flechas sobre  $T$  de manera independiente a los pares  $T$ -compatibles. La idea es que sean multigrafos dirigidos de  $n$  vértices (los de  $V$ ) y  $n$  flechas de tal forma que cada flecha se corresponda con una arista de  $T$ . Formalmente:

**Definición 3.1.13.** Un **diagrama (de flechas) sobre  $T$**  es un multigrafo dirigido  $D = (V, \vec{A}_D)$  tal que  $\vec{A}_D$  es un multiconjunto de  $n$  flechas de  $T$ . El conjunto de pares  $T$ -compatibles con diagrama  $D$  se denotará por  $P_D$  mientras que para el conjunto de diagramas de flechas sobre  $T$  se empleará  $\mathcal{D}(T)$ .

Es inmediato comprobar que todo diagrama de un par  $T$ -compatible es un diagrama sobre  $T$ . Se concluye así que  $P_T$  es la unión disjunta de los conjuntos  $P_D$  (con  $D \in \mathcal{D}(T)$ ). Por lo tanto,

$$\det M(T) = \sum_{D \in \mathcal{D}(T)} \sum_{(\sigma, f) \in P_D} \text{sign}(\sigma) \quad (3.5)$$

En los siguientes ejemplos se constatará que, por lo general, existen diagramas sobre  $T$  sin ningún par  $T$ -compatible asociado y pares  $T$ -compatibles distintos con el mismo diagrama de flechas.

**Ejemplo 3.1.14.** Consideramos el grafo camino  $T = P_4$ .

$$1 \text{ ————— } 2 \text{ ————— } 3 \text{ ————— } 4$$

1. El diagrama de flechas sobre  $T$

$$D_1 = 1 \xrightarrow{\quad} 2 \xleftarrow{\quad} 3 \xrightarrow{\quad} 4$$

no tiene ningún par  $T$ -compatible asociado. Veámoslo por reducción al absurdo. Supongamos que existe  $(\sigma, f) \in P_D$ . Dado que la flecha  $(1, 2)$  aparece 2 veces en el grafo dirigido  $D$ , deben existir dos vértices distintos  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$  tales que  $\vec{f}(i) = \vec{f}(j) = (1, 2)$ .

$$1 \xrightarrow[\vec{f}(j)]{\vec{f}(i)} 2 \xleftarrow{\quad} 3 \xrightarrow{\quad} 4$$

Por lo tanto, los caminos de  $i$  a  $\sigma(i)$  y de  $j$  a  $\sigma(j)$  deben ser de la forma.

$$P(i, \sigma(i)) = i \cdots 12 \cdots \sigma(i) \quad y \quad P(j, \sigma(j)) = j \cdots 12 \cdots \sigma(j).$$

Ahora bien, como  $i$  es una hoja en  $T$  y tiene como único vértice adyacente a 2, necesariamente

$$P(i, \sigma(i)) = 12 \cdots \sigma(i) \quad y \quad P(j, \sigma(j)) = 12 \cdots \sigma(j).$$

Concluimos que  $i = 1 = j$ , llegando así a una contradicción.

2. Los pares  $T$ -compatibles  $((12)(34), e_1 e_1 e_3 e_3)$  y  $((1243), e_1 e_3 e_1 e_3)$  comparten el mismo diagrama

$$D_2 = 1 \xleftarrow{\quad} 2 \quad \quad 3 \xleftarrow{\quad} 4.$$

De hecho, hay únicamente otros 2 pares  $T$ -compatibles (4 en total) con diagrama  $D_2$ ; a saber,  $((13)(24), e_1 e_3 e_1 e_3)$  y  $((1342), e_1 e_1 e_3 e_3)$ .

3. Si  $D_3$  es el diagrama

$$D_3 = 1 \xleftarrow{\quad} 2 \xrightarrow{\quad} 3 \xleftarrow{\quad} 4,$$

solo hay dos pares  $T$ -compatibles en  $P_{D_3}$ . Estos son  $((13)(24), e_2 e_2 e_1 e_3)$  y  $((1423), e_2 e_2 e_1 e_3)$ .

4. Hay exactamente 7 pares  $T$ -compatibles con diagrama

$$D_4 = 1 \xleftarrow{\quad} 2 \xrightarrow{\quad} 3 \xleftarrow{\quad} 4.$$

Aparecen indicados en la siguiente tabla:

$\sigma$	$f$	$\sigma$	$f$
(1243)	$e_2e_3e_1e_3$	(13)(24)	$e_2e_3e_1e_3$
(1423)	$e_3e_2e_1e_3$	(14)(23)	$e_3e_2e_1e_3$
(1342)	$e_2e_1e_3e_3$	(12)(34)	$e_2e_1e_3e_3$
(1324)	$e_2e_3e_1e_3$		

Calculemos la suma  $\sum_{(\sigma,f) \in P_{D_i}} \text{sign}(\sigma)$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ . En primer lugar, comprobamos que

$$\sum_{(\sigma,f) \in P_{D_1}} \text{sign}(\sigma) = \sum_{(\sigma,f) \in P_{D_2}} \text{sign}(\sigma) = \sum_{(\sigma,f) \in P_{D_3}} \text{sign}(\sigma) = 0$$

(en el caso del diagrama  $D_1$ , la suma en cuestión es de hecho la suma vacía). Por otra parte,

$$\sum_{(\sigma,f) \in P_{D_4}} \text{sign}(\sigma) = -1.$$

Si nos detenemos a estudiar con detalle los cuatro diagramas expuestos anteriormente, podemos observar que  $D_2$  presenta un «hueco» sobre la arista  $\{2, 3\}$  mientras que en los demás diagramas no ocurre tal cosa.

Entre los diagramas  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_4$  también se pueden establecer diferencias. En los tres casos existe una única arista de  $T$  que «aparece» dos veces en el diagrama (en el sentido de que aparece dos veces contando sus dos posibles orientaciones). Sin embargo, en  $D_1$  y  $D_2$  esas dos flechas son iguales, mientras que en  $D_4$  apuntan en direcciones opuestas.

Como veremos, los diagramas sobre  $T$  serán clasificados de acuerdo a las propiedades descritas anteriormente en tres familias disjuntas: los diagramas disconexos, los diagramas conexos no estándar y los diagramas estándar.

El paso fundamental de esta sección es el de relacionar los diagramas de flechas sobre  $T$  con la expresión  $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$ . Lo cierto es que, si la consideraremos en valor absoluto (omitiendo por el momento el factor  $(-1)^{n-1}$ ), la cantidad  $(n-1)2^{n-2}$  será el número de cierto de diagramas de una de las tres familias ya mencionadas: la de los diagramas estándar.

**Definición 3.1.15.** Sea  $D$  un diagrama sobre  $T$ . Diremos que  $D$  es **conexo** si el grafo simple no dirigido  $\bar{D}$  asociado a  $D$  (es decir, el que se obtiene al eliminar las orientaciones de sus flechas y sus repeticiones) es conexo. En caso contrario,  $D$  será **disconexo**.

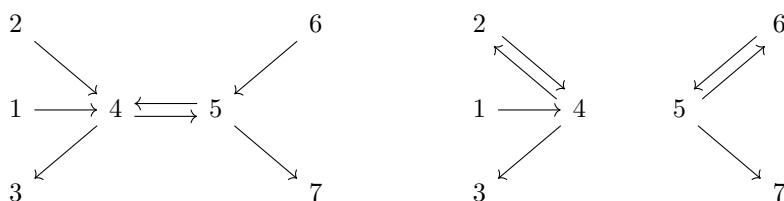


Figura 3.3: Dos diagramas sobre un mismo árbol. Uno conexo (izquierda) y otro disconexo (derecha).

**Ejemplo 3.1.16.** Los diagramas  $D_1$ ,  $D_3$  y  $D_4$  del ejemplo 3.1.14 son conexos. Por otra parte, el diagrama  $D_2$  es disconexo.



Figura 3.4: El grafo simple inducido por  $D_2$  es disconexo.

El siguiente lema caracteriza de forma sencilla a los diagramas conexos.

**Lema 3.1.17.** Sea  $D$  un diagrama de flechas sobre  $T$ . Son equivalentes:

1.  $D$  es conexo.
2. Toda arista  $e \in A$  aparece en  $D$  (i.e. aparece con alguna de sus orientaciones).

*Demostración.* Observemos que  $\overline{D}$  es subgrafo de  $T$  con el mismo conjunto de vértices. Si toda arista de  $T$  aparece en  $D$ , entonces  $T = \overline{D}$ , con lo que  $D$  es conexo.

Supongamos que existe  $e = \{i, j\} \in A$  arista tal que  $e$  no aparece en  $D$ . Entonces,  $i$  y  $j$  no están conectados en  $\overline{D}$ . De estarlo, el camino  $P$  que los une en  $D$  sería un camino en  $T$  con extremos  $i$  y  $j$  distinto de  $P' = ij$ , llegando a una contradicción. Se concluye que  $D$  es conexo.  $\square$

Por el punto «2» del lema anterior, los diagramas conexos son los diagramas en los que cada arista de  $T$  aparece con alguna de sus orientaciones al menos una vez, como bien se observa en la figura 3.3.

Como ya hemos comentado, si  $D$  es un diagrama conexo, hay al menos una flecha  $D$  por cada arista de  $T$ . Dado que  $T$  tiene  $n - 1$  aristas y  $D$  tiene  $n$  flechas, todas las aristas de  $T$  excepto una ( $n - 2$  en total) aparecen una y solo una vez en  $D$ , mientras que la arista restante aparece dos veces.

**Definición 3.1.18.** Si  $D \in \mathcal{D}(T)$  es un diagrama conexo, la arista  $e \in A$  que aparece dos veces en  $D$  recibe el nombre de **arista doble** de  $D$ . Se denota por  $e_D$ .

**Observación 3.1.19.** Veamos cuantos diagramas conexos hay sobre  $T$ . Hay  $\#A = n - 1$  posibles aristas dobles.

$$1 \xleftrightarrow{\quad} 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \qquad 1 \longleftarrow 2 \xrightarrow{\quad} 3 \longrightarrow 4 \qquad 1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3 \xleftrightarrow{\quad} 4$$

Una vez fijada la arista doble  $\{p, q\}$ , hay tres posibilidades para las dos flechas correspondientes: que ambas sean  $(p, q)$ , que ambas sean  $(q, p)$ , o que una sea  $(p, q)$  y la otra  $(q, p)$ .

$$1 \longleftarrow 2 \xleftarrow{\quad} 3 \longrightarrow 4 \qquad 1 \longleftarrow 2 \xrightarrow{\quad} 3 \longrightarrow 4 \qquad 1 \longleftarrow 2 \xleftrightarrow{\quad} 3 \longrightarrow 4$$

Finalmente, para las otras  $n - 2$  flechas del diagrama, (correspondientes a cada una de las aristas de  $T$  distintas de la arista doble) hay dos orientaciones posibles. Eso hace un total de  $2^{n-2}$  distintas combinaciones.

$$\begin{array}{cc} 1 \longrightarrow 2 \xleftrightarrow{\quad} 3 \longrightarrow 4 & 1 \longrightarrow 2 \xleftrightarrow{\quad} 3 \longleftarrow 4 \\ 1 \longleftarrow 2 \xleftrightarrow{\quad} 3 \longrightarrow 4 & 1 \longleftarrow 2 \xleftrightarrow{\quad} 3 \longleftarrow 4 \end{array}$$

Se concluye que hay exactamente  $3(n - 1)2^{n-2}$  diagramas conexos sobre  $T$ .

La expresión obtenida en la observación es similar a la deseada, aunque se diferencia de esta en el factor 3 que aparece. Obsérvese que este 3 proviene del hecho de elegir las posibles configuraciones de las dos flechas asociadas a la arista doble. De esas tres posibilidades solo en una las flechas aparecen con orientaciones opuestas.

**Definición 3.1.20.** Sea  $D$  un diagrama conexo con arista doble  $e_D$ . Diremos que  $D$  es **estándar** si las dos flechas correspondientes a  $e_D$  tienen orientaciones opuestas. En caso contrario, se dice que  $D$  es **conexo no estándar**. El conjunto de diagramas estándar sobre  $T$  se denotará por  $\mathcal{S}(T)$ .

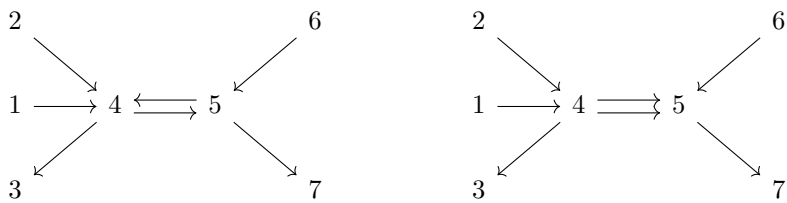


Figura 3.5: Ejemplos de diagrama estándar (izquierda) y no estándar (derecha).

Por simplicidad, a los diagramas sobre  $T$  conexos pero no estándar se les podrá llamar simplemente **diagramas no estándar**.

**Ejemplo 3.1.21.** En el ejemplo 3.1.14, los diagramas  $D_1$  y  $D_3$  son conexos no estándar, mientras que el diagrama  $D_4$  sí es estándar. También son estándar los diagramas de 3.1.12

Y, ahora sí,

**Proposición 3.1.22.** *Hay  $(n - 1)2^{n-2}$  diagramas estándar sobre  $T$ .*

*Demostración.* La prueba es análoga al razonamiento empleado en la observación 3.1.19, con la salvedad de que, a diferencia de los diagramas conexos, en este caso solo hay una distribución posible para las dos flechas correspondientes a la arista doble.  $\square$

Cuando en el grupo de trabajo empezamos a abordar el problema de la fórmula de Graham-Pollak, la proposición anterior unida a la igualdad (3.5) nos llevó a establecer la siguiente conjetura:

Para cada diagrama  $D$  sobre  $T$ , la suma signada de los los pares  $T$ -compatibles con diagrama  $D$  (i.e. los pares en  $P_D$ ) es

$$\sum_{(\sigma, f) \in P_D} \text{sign}(\sigma) = \begin{cases} (-1)^{n-1} & \text{si } D \text{ es estándar;} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (3.6)$$

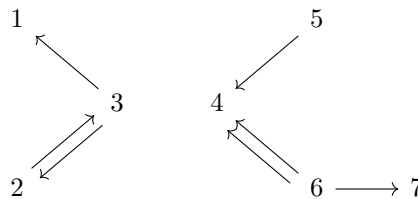
Es sencillo comprobar que se cumple para los diagramas del ejemplo 3.1.14. Como veremos, el resultado es cierto en general. Sustituyendo en (3.5) se llega trivialmente a

$$\det M(T) = \sum_{D \in \mathcal{S}(T)} (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1} \#\mathcal{S}(T) = (-1)^{n-1} (n - 1)2^{n-2}.$$

En [BEGLR] se prueba lo expuesto con sendas involuciones cancelativas (una para cada diagrama), con la ventaja adicional de que servirán también para demostrar algunas generalizaciones, estudiadas en este texto en el capítulo 4. Antes proceder con ellas, vamos a explicar cómo y por qué funciona la involución en los casos desconexo y conexo no estándar (secciones 3.2 y 3.3). El motivo es que tienen una expresión sencilla y son ilustrativas del poder de las involuciones cancelativas. Para el caso estándar, estudiado en 3.4, solo se elaborará un boceto de la prueba, dejando como referencia tanto a [Lil23] como a [BEGLR].

### 3.2. Diagramas desconexos.

Sea  $D$  un diagrama desconexo



Vamos a probar

$$\sum_{(\sigma, f) \in P_D} \text{sign}(\sigma) = 0.$$

construyendo una involución cancelativa  $\iota_D : P_D \rightarrow P_D$  sin puntos fijos.

Para ello, hay que «emparejar» a cada par  $(\sigma, f) \in P_D$  con otro  $(\tau, g) \in P_D$  de tal forma que  $\sigma$  y  $\tau$  tengan signos opuestos. La forma más simple de cambiar de signo a una permutación  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  es componiéndola con una trasposición. Como ya se observó en el capítulo 2 al tratar el lema de Gessel-Viennot, si  $i, j \in [n]$ ;  $i \neq j$ , con la composición  $\tau := \sigma \circ (i \ j)$  se obtiene una nueva permutación que intercambia las imágenes de  $i$  y  $j$  por  $\sigma$ .

$$\tau(k) = \begin{cases} \sigma(k) & \text{si } k \neq i, j, \\ \sigma(j) & \text{si } k = i, \\ \sigma(i) & \text{si } k = j. \end{cases}$$

Además, al aplicar el mismo procedimiento a  $(\tau, f)$  se vuelve a obtener  $(\sigma, f)$ . Ahora bien, si  $i, j \in V$  son dos vértices cualesquiera, no elegidos apropiadamente,  $(\tau, f)$  podría no ser un par  $T$ -compatible. La arista  $f(i)$ , que está en el camino que va de  $i$  a  $\sigma(i)$ , no tiene por qué estar en el camino que va de  $i$  a  $\tau(i) = \sigma(j)$ .

$$\sigma(j) \text{ --- } i \text{ --- } \xrightarrow{f(i)} \text{ --- } \sigma(i) \quad \Longrightarrow \quad \tau(i) \text{ --- } i \text{ --- } \xrightarrow{f(i)} \text{ --- } \tau(j)$$

Figura 3.6:  $(\tau, f)$  no es un par  $T$ -compatible.

Una posible solución podría ser intercambiar también las imágenes de  $i$  y  $j$  por  $f$ , enviando cada  $(\sigma, f) \in P_D$  a  $(\tau, g) := (\sigma \circ (i \ j), f \circ (i \ j))$ . Sin embargo hay casos en los que el par obtenido sigue sin ser  $T$ -compatible.

$$\begin{aligned} i \text{ --- } j \text{ --- } \xrightarrow{f(i)} \text{ --- } \sigma(i) &\quad \Longrightarrow \quad i \text{ --- } j \text{ --- } \xrightarrow{g(j)} \text{ --- } \tau(j) \\ i \text{ --- } \xrightarrow{f(i)} \text{ --- } j \text{ --- } \sigma(i) &\quad \Longrightarrow \quad i \text{ --- } \xrightarrow{g(j)} \text{ --- } j \text{ --- } \tau(j) \end{aligned}$$

Figura 3.7: En general,  $(\tau, g)$  no es un par  $T$ -compatible.

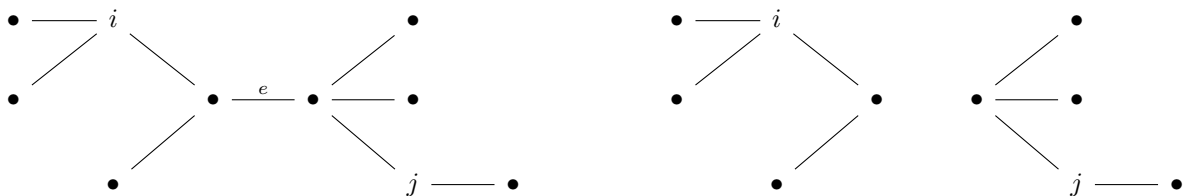
Para entender qué ocurre, vamos a interpretar qué quiere decir que una arista esté en el camino que une dos vértices de  $T$ .

**Lema 3.2.1.** Sean  $i, j \in V$  dos vértices,  $e \in A$  una arista y  $T_e$  el grafo  $T_e := (V, A \setminus \{e\})$ . Entonces,  $e \in P(i, j)$  si y solo si  $i$  y  $j$  están en componentes conexas distintas de  $T_e$ .

*Demostración.* Probamos los respectivos contrarrecíprocos. Si  $e \notin P(i, j)$ , dicho camino que une  $i$  y  $j$  en  $T$  sigue siendo un camino en  $T_e$ . Por lo tanto  $i, j$  están en la misma componente conexa de  $T_e$ .

Por otra parte, si  $i$  y  $j$  están en la misma componente conexa de  $T_e$ , existe un camino  $P$  que los une en  $T_e$  (que, lógicamente, no contiene a la arista  $e$ ). Ese camino también conecta  $i$  y  $j$  en  $T$  y, por ser un árbol, es el único con esa propiedad. Se concluye que  $e \notin P = P(i, j)$ .  $\square$

Es decir, para saber si una arista está en un camino de un árbol, basta eliminar dicha arista y estudiar las dos componentes conexas del subgrafo  $T_e$ .



A la hora de trabajar con un grafo concreto esto resultaría una forma enrevesada de proceder, pero desde un punto de vista teórico permite tanto simplificar los razonamientos como entender por qué la involución  $\iota_D$  está realmente bien definida.

**Observación 3.2.2.** Si  $e = \{a, b\} \in A$  una arista de  $T$ . El camino  $P(a, b)$  contiene a la arista  $e$  (de hecho, es su única arista). Por el lema anterior,  $a$  y  $b$  están en componentes conexas distintas de  $T_e$ .

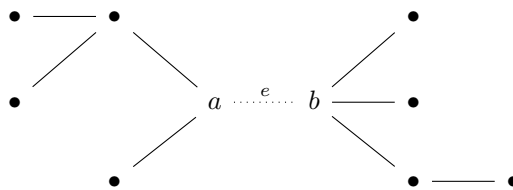


Figura 3.8: Los extremos de la arista  $e = \{a, b\}$  determinan las dos componentes conexas de  $T_e$ .

De hecho, las de  $a$  y  $b$  serán las dos únicas componentes conexas de  $T_e$ .



**Lema 3.2.3.** Si  $e \in A$  es una arista, el grafo  $T_e$  tiene exactamente dos componentes conexas.

*Demostración.* Sean  $a, b \in V$  los extremos de la arista  $e$ . Por el lema 3.2.1, los vértices de la componente conexa de  $a$  en  $T_e$  son los del conjunto

$$V_a = \{c \in V \mid e \notin P(a, c)\}.$$

Basta ver que en la componente conexa de  $b$  (que es distinta a la de  $a$ ) están el resto de vértices de  $T$ .

Sea  $c \in V$  tal que  $e \in P(a, c)$ . Dado que el camino  $P(a, b)$  parte de  $a$  e incluye a la arista  $\{a, b\}$ , este debe ser de la forma

$$P(a, c) = ab \cdots c.$$

Eliminando el vértice  $a$  se obtiene el subcamino  $P(b, c) = b \cdots c$ , que no incluye a la arista  $e$ . Por lo tanto,  $b$  y  $c$  están en la misma componente conexa de  $T_e$ .  $\square$

**Observación 3.2.4.** Sean  $e \in A$  y  $i \in V$ . Tal y como se razonó en la prueba anterior a partir del lema 3.2.1, los vértices de la componente conexa de  $i$  en  $T_e$  son

$$V_1 = \{j \in V \mid e \notin P(i, j)\}.$$

Dado que solo hay otra componente conexa en  $T_e$ , esta debe incluir al resto de vértices, que son los del conjunto

$$V_2 = \{j \in V \mid e \in P(i, j)\}.$$

Sea ahora otro vértice  $k \in V$  tal que  $e \in P(i, k)$ . Entonces, la componente conexa de  $k$  es la dada por  $V_2$ . Pero, de nuevo, aplicando 3.2.1,

$$V_2 = \{j \in V \mid e \notin P(j, k)\}.$$

Se concluye así que, para cualquier  $k \in V$ ,

$$e \in P(i, j) \iff e \notin P(j, k).$$

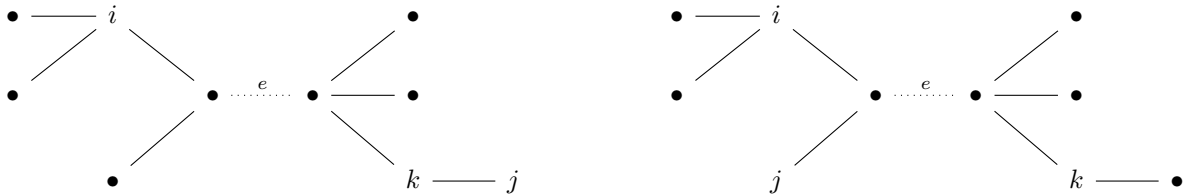


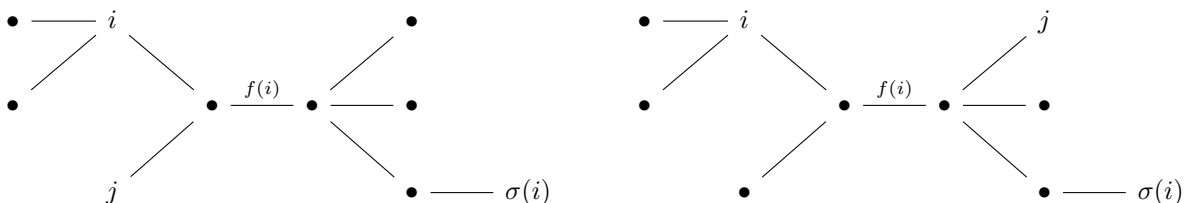
Figura 3.9: La arista  $e$  está, o bien en  $P(i, j)$ , o bien en  $P(j, k)$ , pero no en ambos a la vez.

En otras palabras, asumiendo que  $e \in P(i, k)$ , la arista  $e$  está en uno y solo uno de los caminos  $P(i, j)$ ,  $P(j, k)$ .

La observación anterior muestra cuando el intercambio de las imágenes de  $i, j \in V$  de  $(\sigma, f)$  no proporciona un nuevo par  $T$ -compatible: cuando  $f(i)$  o  $f(j)$  quedan en el camino de  $i$  a  $j$ .

**Lema 3.2.5.** Sean  $(\sigma, f) \in P_T$  un par  $T$ -compatible e  $i, j \in V$ . Entonces,  $f(i) \in P(j, \sigma(i))$  si y solo si  $f(i) \notin P(i, j)$ .

*Demostración.* Por ser  $(\sigma, f)$  un par  $T$ -compatible,  $f(i) \in P(i, \sigma(i))$ . Basta aplicar la observación anterior con  $k = \sigma(i)$ .  $\square$



**Observación 3.2.6.** Intercambiando los papeles de  $i$  y  $j$  en el lema anterior se obtiene que  $f(j) \in P(i, \sigma(i))$  si y solo si  $f(j) \notin P(i, j)$ .

Todavía queda trabajo por realizar. No solo deseamos que  $(\tau, g) = (\sigma \circ (i, j), f \circ (i, j))$  sea  $T$ -compatible. También es necesario que tenga a  $D$  como diagrama de flechas, para que así  $\iota_D$  sea realmente una aplicación  $P_D \rightarrow P_D$ .

Si  $D'$  es el diagrama de  $(\tau, g)$ , es claro que las flechas de  $D$  y  $D'$  coinciden salvo, a lo sumo, dos: las correspondientes a  $\vec{g}(i)$  y  $\vec{g}(j)$ . Si, por ejemplo,  $\vec{g}(j)$  y  $\vec{f}(i)$  fueran orientaciones opuestas de la misma arista  $f(i) = g(j)$ , se podría llegar a que  $D \neq D'$ . Como veremos, tal hecho no puede ocurrir.

La orientación de una arista  $e$  en un camino también se puede estudiar a partir de las componentes conexas de  $T_e$ .

**Observación 3.2.7.** Sean  $i, j \in V$  vértices y  $e = \{a, b\}$  un arista del camino  $P(i, j)$  con orientación inducida  $(a, b)$  en él. Entonces,

$$P(i, j) = i \cdots ab \cdots j.$$

Obtenemos así dos subcaminos  $P(i, a) = i \cdots a$  y  $P(b, j) = b \cdots j$ , que no contienen a la arista  $e$ . Se concluye que  $i$  está en la componente conexas de  $a$  y que  $j$  está en la de  $b$ .

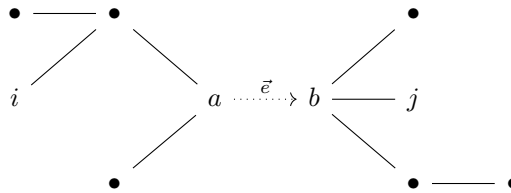


Figura 3.10: La orientación de  $e$  en  $P(i, j)$  a partir de las componentes conexas de  $T_e$ .

De igual forma, si la orientación inducida es  $(b, a)$ ,  $i$  está en la componente conexas de  $b$  de  $T_e$  mientras que  $j$  está en la de  $a$ .

**Lema 3.2.8.** Sean  $(\sigma, f) \in P_T$  un par  $T$ -compatible e  $i, j \in V$  dos vértices tales que  $f(i) \notin P(i, j)$ . La arista  $f(i)$  tiene la misma orientación inducida en los caminos  $P(i, \sigma(i))$  y  $P(j, \sigma(i))$ .

*Demostración.* Por el lema 3.2.5,  $f(i)$  está también en el camino  $P(j, \sigma(i))$ . Comparamos su orientación respecto a la que tiene en el camino  $P(i, \sigma(i))$ .

Sea  $\vec{f}(i) = (a, b)$  la orientación de la arista  $f(i) = \{a, b\}$  en el camino  $P(i, \sigma(i))$ . Por la observación anterior, dicha orientación está determinada por cuál de los dos extremos de  $f(i)$  está en la componente conexas de  $\sigma(i)$  en  $T_{f(i)}$ ; en este caso,  $b$ . Por lo tanto, la orientación de  $\{a, b\}$  en el camino  $P(j, \sigma(i))$  también es, necesariamente,  $(a, b)$ .  $\square$

**Observación 3.2.9.** De igual forma, en las condiciones anteriores, si  $f(j) \notin P(i, j)$ ,  $f(j)$  presenta la misma orientación inducida en los caminos  $P(j, \sigma(j))$  y  $P(i, \sigma(j))$ .

Los lemas 3.2.5 y 3.2.8 dan condiciones necesarias (y de hecho, también suficientes) sobre  $i, j \in V$  para que  $(\sigma \circ (i, j), f \circ (i, j)) \in P_D$ : que ni  $f(i)$  ni  $f(j)$  estén en el camino  $P(i, j)$ . En el caso de los diagramas conexos, es suficiente con que  $i$  y  $j$  sean los extremos de una arista que no aparezca en  $D$ .

**Proposición 3.2.10.** Sea  $D$  un diagrama desconexo sobre  $T$  y sea  $\{i, j\} \in A$  una arista de  $T$  que no aparezca en el diagrama  $D$ . La aplicación  $\iota_D : P_D \rightarrow P_D$  tal que  $\iota_D(\sigma, f) = (\sigma \circ (i, j), f \circ (i, j))$  está bien definida y es una involución de  $P_D$  sin puntos fijos.

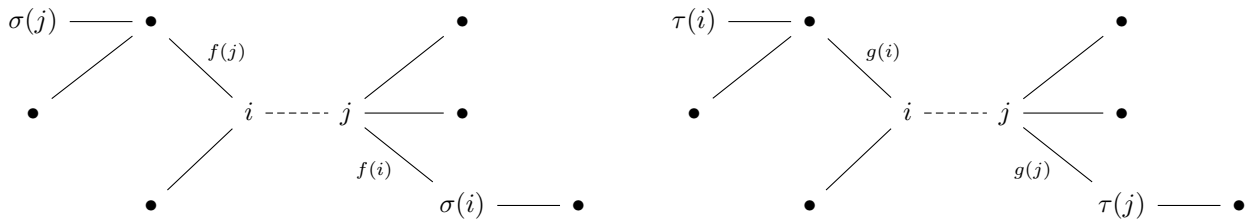


Figura 3.11: La involución  $\iota_D$  para un diagrama  $D$  desconexo.

*Demostración.* Por definición,  $\iota_D$  envía cada  $(\sigma, f) \in P_D$  a  $(\tau, g)$ , siendo  $\tau = \sigma \circ (i j)$ ,  $g = f \circ (i j)$ . Veamos en primer lugar que  $\iota_D$  está bien definida. Para ello, es necesario ver que, fijado el par  $(\sigma, f)$  anterior, realmente  $(\tau, g) \in P_D$ .

En primer lugar,  $(\tau, g)$  es  $T$ -compatible, pues para cada  $k \in V$ ,  $g(k)$  está en el camino  $P(k, \tau(k))$  (para el caso  $k \neq i, j$  es inmediato. Para  $k = i, j$  contrario, se sigue del lema 3.2.5). Además, de la definición de  $g$  junto con el lema 3.2.8 se obtiene

$$\vec{g}(k) = \begin{cases} \vec{f}(k) & \text{si } k \neq i, j, \\ \vec{f}(j) & \text{si } k = i, \\ \vec{f}(i) & \text{si } k = j. \end{cases}$$

Esto implica que los multiconjuntos  $\{\{\vec{f}(i) \mid i \in V\}\}$  y  $\{\{\vec{g}(i) \mid i \in V\}\}$  son iguales, con lo que  $(\sigma, f)$  y  $(\tau, g)$  tienen el mismo diagrama  $D$ .

Por otra parte,  $\iota_D$  es una involución puesto que

$$\iota_D(\iota_D(\sigma, f)) = (\sigma \circ (i j) \circ (i j), f \circ (i j) \circ (i j)) = (\sigma, f) \text{ para todo } (\sigma, f) \in P_D.$$

Finalmente,  $\iota_D$  no tiene puntos fijos ya que  $\sigma \neq \sigma \circ (i j)$  para cualquier  $\sigma \in \mathbb{S}_n$ .  $\square$

A partir de la proposición anterior no se obtiene sólo una involución, sino tantas como aristas en  $T$  que no aparezcan en  $D$ . Para resolver esta arbitrariedad, a la hora de definir  $\iota_D$ , los vértices  $i, j \in [n]$  se elegirán de forma que el par  $(i, j)$  sea el menor posible respecto al orden lexicográfico.

Ya estamos en condiciones de probar (3.6) para diagramas desconexos. Recordemos que estudiamos  $P_D$  (al igual que  $P_T$ ) como conjunto signado, siendo  $\text{sign}(\sigma)$  el signo de cada  $(\sigma, f) \in P_D$ .

**Corolario 3.2.11.** *Si  $D$  un diagrama desconexo,*

$$\sum_{(\sigma, f) \in P_D} \text{sign}(\sigma) = 0.$$

*Demostración.* La involución  $\iota_D$  es cancelativa pues  $\text{sign}(\sigma \circ (i j)) = \text{sign}(\sigma) \text{sign}(i j) = -\text{sign}(\sigma)$ . Dado que no tiene puntos fijos, por la proposición 3.2.10,

$$\sum_{(\sigma, f) \in P_D} \text{sign}(\sigma) = \sum_{(\sigma, f) \in \text{Fij}(\iota_D)} \text{sign}(\sigma) = 0. \quad \square$$

**Ejemplo 3.2.12.** *Veamos como funciona la involución del diagrama desconexo  $D_2$  del ejemplo 3.1.14*

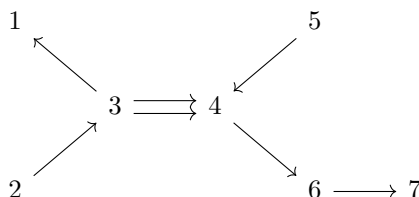
$$1 \longleftrightarrow 2 \qquad 3 \longleftrightarrow 4$$

*La única arista de  $T = P_4$  que no aparece en  $D_2$  es  $\{2, 3\}$ . Por lo tanto,  $\iota_{D_2}(\sigma, f) = (\sigma \circ (2 3), f \circ (2 3))$  para todo  $(\sigma, f) \in P_{D_2}$ . En la siguiente tabla aparecen los cuatro pares  $(\sigma, f) \in P_{D_2}$  (en las dos columnas de la izquierda) junto a sus respectivas imágenes  $(\tau, g)$  por  $\iota_{D_2}$  (en las dos columnas de la derecha).*

$\sigma$	$f$	$\tau$	$g$
(12)(34)	$e_1 e_1 e_3 e_3$	(1243)	$e_1 e_3 e_1 e_3$
(1243)	$e_1 e_3 e_1 e_3$	(12)(34)	$e_1 e_1 e_3 e_3$
(13)(24)	$e_1 e_3 e_1 e_3$	(1342)	$e_1 e_1 e_3 e_3$
(1342)	$e_1 e_1 e_3 e_3$	(13)(24)	$e_1 e_3 e_1 e_3$

### 3.3. Diagramas no estándar

Sea  $D$  un diagrama (conexo) no estándar con arista doble  $e_D$ .



La idea para probar (3.6) en este caso será similar a la de la sección anterior: construir una involución cancelativa sobre  $P_D$  enviando cada  $(\sigma, f) \in P_D$  a  $(\tau, g) = (\sigma \circ (i j), f \circ (i j))$ , para ciertos  $i, j \in V$ .

Al igual que para los diagramas disconexo dichos  $i, j$  eran los extremos de una arista que no aparecía en el diagrama, ahora estos vértices estarán relacionados con la arista doble. Concretamente, serán los dos únicos tales que  $f(i) = f(j) = e_D$ .

**Observación 3.3.1.** Sea  $e_D = \{p, q\}$ . Dicha arista aparece dos veces en  $D$  con la misma orientación. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que dicha orientación es  $(p, q)$ .

Sean  $i, j \in V$  los dos únicos vértices tales que  $\vec{f}(i) = \vec{g}(j) = (p, q)$ . Entonces,  $i$  y  $j$  están en una componente conexa de  $T_{\vec{f}(i)} = T_{\vec{g}(j)} = T_{e_D}$  (la de  $p$ ) mientras que  $\sigma(i)$  y  $\sigma(j)$ , en la otra (la de  $q$ ). Por lo tanto, por el lema 3.2.1,  $e_D$  es una arista de los caminos  $P(i, \sigma(j))$  y  $P(j, \sigma(i))$ . Este hecho queda ilustrado en la figura 3.12.

Obsérvese que en las condiciones anteriores, los vértices  $i, j$  dependen del par  $(\sigma, f)$ , y no sólo del diagrama  $D$ . Además,  $f \circ (i j) = f$  (pues  $f(i) = f(j)$ ).

**Proposición 3.3.2.** Sea  $D$  un diagrama no estándar con arista doble  $e_D$ . Para cada  $(\sigma, f) \in P_D$ ,  $\iota_D(\sigma, f) = (\sigma \circ (i j), f)$ , siendo  $i, j \in V$  los dos vértices tales que  $f(i) = f(j) = e_D$ . Entonces  $\iota_D : P_D \rightarrow P_D$  es una aplicación bien definida y una involución de  $P_D$  sin puntos fijos.

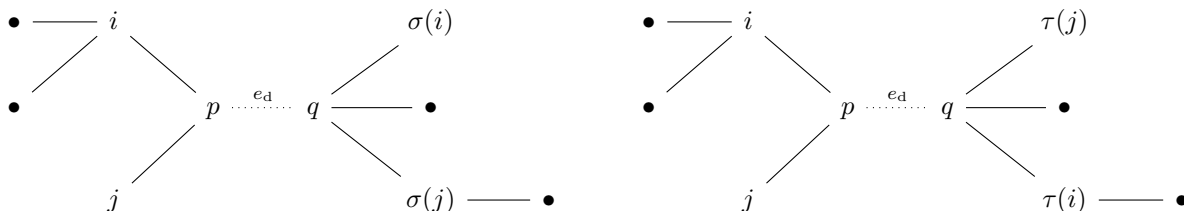


Figura 3.12: La involución  $\iota_D$  para un diagrama  $D$  no estándar.

*Demostración.* Sea  $(\sigma, f)$  un par  $T$ -compatible con diagrama  $D$  y sean  $i, j$  los dos vértices en  $T$  tales que  $f(i) = f(j) = e_d$ . Sea pues  $\tau := \sigma \circ (i j)$ .

La observación anterior muestra que  $(\tau, f)$  es un par  $T$ -compatible. Además, su conjunto de flechas asociado  $\{\{\vec{f}(i) \mid i \in V\}\}$  es el mismo que el de  $(\sigma, f)$ . En consecuencia, el diagrama de  $(\tau, f)$  es  $D$ . Esto prueba que  $\iota_D$  está bien definida.

Al aplicar  $\iota_D$  al par  $(\tau, f)$ , se tiene que  $\iota_D(\tau, f) = (\tau \circ (i j), f) = (\sigma, f)$ . Se concluye así que es una involución, la cual no tiene puntos fijos pues, de nuevo,  $\sigma \circ (i j) \neq \sigma \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}_n$ .  $\square$

A diferencia del caso disconexo, para definir la involución  $\iota_D$  no ha habido ninguna elección arbitraria. Se ha construido a partir de la arista doble  $e_D$ .

**Corolario 3.3.3.** Si  $D$  es un diagrama no estándar,

$$\sum_{(\sigma, f) \in P_D} \text{sign}(\sigma) = 0.$$

*Demostración.* Análoga a la de 3.2.11. La involución  $\iota_D$  es cancelativa y no tiene puntos fijos. □

**Ejemplo 3.3.4.** Sea  $T$  el árbol camino de cinco vértices etiquetado de la forma habitual.

$$T = 1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \text{ --- } 4 \text{ --- } 5 .$$

Sobre él se considera el diagrama no estándar  $D$  dado por la siguiente figura:

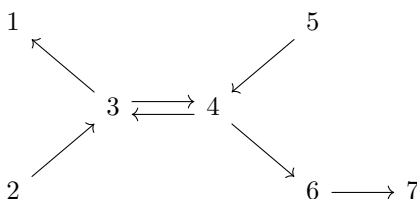
$$D = 1 \text{ --- } 2 \text{ } \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} 3 \text{ --- } 4 \text{ --- } 5$$

Existen seis pares  $T$ -compatibles con diagrama  $D$ . La tabla a continuación muestra como actúa la involución  $\iota_D$  sobre ellos.

$\sigma$	$f$	$\tau$	$g$
(135)(24)	$e_1e_3e_4e_2e_2$	(13524)	$e_1e_3e_4e_2e_2$
(13524)	$e_1e_3e_4e_2e_2$	(135)(24)	$e_1e_3e_4e_2e_2$
(134)(25)	$e_1e_4e_3e_2e_2$	(13425)	$e_1e_4e_3e_2e_2$
(13425)	$e_1e_4e_3e_2e_2$	(134)(25)	$e_1e_4e_3e_2e_2$
(134)(25)	$e_1e_3e_2e_4e_2$	(13425)	$e_1e_3e_2e_4e_2$
(13425)	$e_1e_3e_2e_4e_2$	(134)(25)	$e_1e_3e_2e_4e_2$

### 3.4. Diagramas estándar

Sea  $D \in \mathcal{S}(T)$  un diagrama estándar.



En las secciones anteriores se ha probado la igualdad (3.6) para diagramas desconexos y no estándar a partir de las características genéricas de estas dos familias de diagramas. En el caso estándar la situación es más compleja y merece un estudio detallado. Para empezar, si se desea probar

$$\sum_{(\sigma, f) \in P_D} \text{sign}(\sigma) = (-1)^{n-1} \tag{3.7}$$

mediante una involución cancelativa, es claro que esta debe tener al menos un punto fijo (lo ideal es que solo tenga uno). A primera vista, no hay un «candidato» a punto fijo, pues ni tan siquiera sabemos como son los elementos de  $P_D$ .

Tras asistir a una charla de Ira Gessel ([Ges22]), en el grupo de trabajo optamos por tratar de aplicar el lema de Lindström-Gessel-Viennot (lema LGV de aquí en adelante) a este problema. El resultado fue un éxito y culminó la tan deseada prueba combinatoria de la fórmula de Graham-Pollak.

En esta sección nos limitamos a hacer un resumen de la prueba, explicando los puntos claves necesarios para el capítulo 4, pero omitiendo las demostraciones. Todos los detalles se pueden encontrar en el trabajo [Lil23].

Vamos a seguir el procedimiento habitual para calcular una suma signada empleando el lema LGV. Para el caso de (3.7), los pasos a seguir son los siguientes:

1. Construir un grafo dirigido  $G = G(D)$  que sea acíclico con dos conjuntos de  $n$  vértices  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ .
2. Asociar a par  $T$ -compatible con diagrama  $D$  un  $n$ -camino  $\Lambda(\sigma, f) \in \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ , de tal forma que la permutación subyacente a  $\Lambda(\sigma, f)$  sea, precisamente,  $\sigma$ .
3. Comprobar que la aplicación  $(\sigma, f) \in P_D \mapsto \Lambda(\sigma, f)$  define una biyección entre  $P_D$  y una familia de  $n$ -caminos  $\mathcal{P}(D) \subset \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  cerrada bajo trasposiciones. Así, si  $\mathcal{R}(D)$  es la subfamilia de rutas de  $\mathcal{P}(D)$ ,

$$\sum_{(\sigma, f) \in P_D} \text{sign}(\sigma) = \sum_{P \in \mathcal{P}(D)} \text{sign}(\sigma_P) = \sum_{P \in \mathcal{R}(D)} \text{sign}(\sigma_P).$$

4. Probar que en  $\mathcal{P}(D)$  existe una única ruta  $P_D$ , que además cumple que  $\text{sign}(\sigma_{P_D}) = (-1)^{n-1}$ , concluyendo la prueba.

La dificultad, claro está, reside en construir  $G$  de manera apropiada de, tal forma que la biyección entre los pares  $T$ -compatibles con diagrama  $D$  y cierta familia de  $n$ -caminos cumpla las propiedades requeridas. Es fundamental que la construcción permita asignar de manera natural un  $n$ -camino a cada elemento de  $P_D$ .

Una primera idea para construir  $G$  es la expuesta a continuación. Aclaremos que se empleará el término «nodo» en lugar de vértice para evitar confusiones con los vértices de  $T$ . El motivo será aparente.

Los nodos de  $G$  se dividen en tres tipos:

- v-nodos de partida:  $v(1), \dots, v(n)$ ;
- v-nodos de llegada:  $v'(1), \dots, v'(n)$ ;
- e-nodos:  $e(i, j)$  para cada flecha  $(i, j) \in \vec{A}$ .

Los v-nodos de partida y llegada representan a los vértices de  $T$ , mientras que los e-nodos hacen lo propio con las orientaciones de cada arista.

Describamos los arcos de  $G$ :

- Si  $i, j \in V$  son vecinos en  $T$ ,  $(v(i), e(i, j))$  y  $(e(i, j), v'(j))$  son arcos en  $G$ .
- Para cada  $i, j, k \in V$  tales que  $i$  y  $k$  son vecinos de  $j$  existe el arco  $(e(i, j), e(j, k))$ . Para evitar generar ciclos imponemos también que  $i \neq k$ .

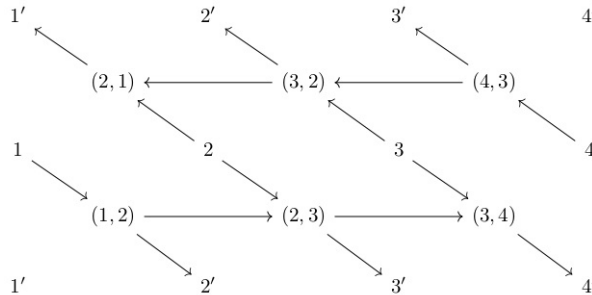


Figura 3.13: Un primer intento de construir  $G$  sobre un árbol camino de 4 vértices. Cada v-nodo de llegada está representado dos veces para facilitar la comprensión.

Con esta construcción, si el camino entre dos vértices distintos  $i$  y  $j$  en  $T$  es

$$P(i, j) = i = u_0, u_1, \dots, u_m = j, \quad (3.8)$$

es sencillo comprobar que el único camino en  $G$  entre  $v(i)$  y  $v(j)$  es

$$P_G(v(i), v(j)) := v(i)e(u_0, u_1) \cdots e(u_{m-1}, u_m)v(j).$$

Cada  $(\sigma, f) \in P_D$  induce un  $n$ -camino  $\Lambda(\sigma, f)$  en  $G$  entre  $\{v(1), \dots, v(n)\}$  y  $\{v'(1), \dots, v'(n)\}$ : el formado por los caminos  $P_G(v(i), v(\sigma(i)))$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Sin embargo, esta asociación puede no ser inyectiva. Sin ir más lejos, en el ejemplo 3.3.4 existen pares  $T$ -compatibles de la forma  $(\sigma, f), (\sigma, g)$  con  $f \neq g$  y el mismo diagrama  $D$  asociado. Es necesario que el  $n$ -camino  $\Lambda(\sigma, f)$  dependa también de la función  $f$ .

Observemos que un par  $(\sigma, f) \in P_D$  es, en cierto sentido, un conjunto de  $n$  caminos  $P(i, \sigma(i))$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) en el que cada uno de ellos con una arista distinguida  $f(i)$ , o, equivalentemente, una flecha  $\vec{f}(i)$ .

Sea entonces  $i \in V$  con  $\vec{f}(i) = (a, b) \in \vec{A}$ . A partir del camino  $P(i, \sigma(i)) = i \cdots ab \cdots \sigma(i)$  obtenemos dos subcaminos, uno  $i \cdots ab$  «anterior» a la arista  $f(i)$  y otro  $ab \cdots \sigma(i)$  «posterior» a esta.

Esta observación nos lleva a una segunda idea para  $G$ . Los nodos de  $G$  son los siguientes:

- v-nodos:  $v(1), \dots, v(n), v'(1), \dots, v'(n)$ .
- e-nodos:  $e(i, j), e'(i, j)$  para cada  $(i, j) \in \vec{A}$ .

Los arcos de  $G$  siguen las siguientes reglas:

- Si  $i, j \in V$  son vecinos en  $T$ ,  $(v(i), e(i, j))$  y  $(e'(i, j), v'(j))$  son arcos en  $G$ .
- Para cualesquiera  $i, j, k \in V$  tales que  $i$  y  $k$  son distintos vecinos de  $j$ ,  $(e(i, j), e(j, k))$  y  $(e'(i, j), e'(i, k))$  son arcos en  $G$ .

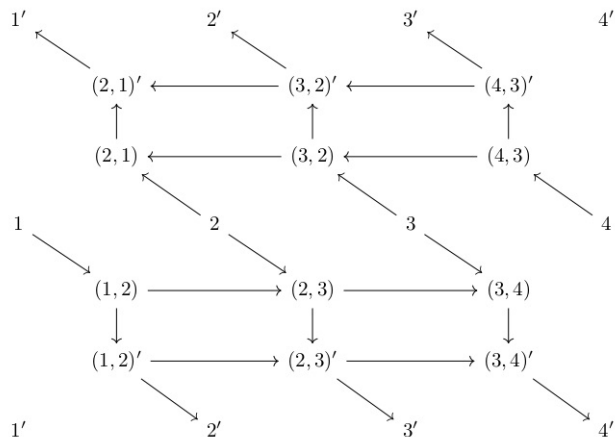


Figura 3.14: Segunda idea para el grafo  $G$ . De nuevo, los vértices  $v'(i)$  aparecen duplicados.

De este forma, si el camino de  $i$  a  $j$  en  $T$  es (3.8), para cada  $k \in \{1, \dots, m\}$  existe un camino dirigido en  $G$

$$P_G(i, \sigma(i), (u_k, u_{k+1})) := v(i)e(u_0, u_1) \cdots e(u_k, u_{k+1})e'(u_k, u_{k+1}) \cdots e'(u_{m-1}, u_m)v'(j).$$

Decimos que  $P_G(i, \sigma(i), (u_k, u_{k+1}))$  es el camino dirigido entre  $v(i)$  y  $v(j)$  con flecha marcada  $(u_k, u_{k+1})$ . Así, podemos asociar a cada  $(\sigma, f) \in P_D$  el  $n$ -camino  $\Lambda(\sigma, f)$  entre  $\{v(1), \dots, v(n)\}$  y  $\{v'(1), \dots, v'(n)\}$  formado por los caminos dirigidos en  $G$  de  $i$  en  $\sigma(i)$  con flecha marcada  $\vec{f}(i)$ .

Bajo estas condiciones se cumplen los tres primeros pasos expuestos al principio de la sección. Sin embargo, el cuarto no es cierto en general. Es posible que exista más de una ruta entre los conjuntos de v-nodos  $\{v(1), \dots, v(n)\}$  y  $\{v'(1), \dots, v'(n)\}$ . Por ello, la construcción definitiva del grafo  $G$  será algo más elaborada. Aún así, la idea detrás de ella será, en esencia, la misma que la recién expuesta.

## Árboles planos

Antes de construir el grafo dirigido  $G(D)$  es necesario introducir más conceptos sobre árboles.

Un **árbol enraizado** es un árbol  $T' = (V', A')$  con un vértice «distinguido»  $R \in V'$ , llamado **raíz** del árbol  $T'$ .

Sean  $i, j \in V$  dos vértices adyacentes. Entonces, al eliminar de  $T'$  la arista  $e = \{i, j\}$ , una de las componentes conexas de  $T'_e$  contiene a  $i$  y la otra a  $j$ . Decimos que  $i$  es el padre de  $j$  (y que  $j$  es el hijo de  $i$ ) en  $T'$  si  $i$  está en la componente conexa de la raíz. Equivalentemente,  $i$  es el padre de  $j$  si y solo si la arista  $e$  está en el camino  $P(i, R)$ , o bien, si y solo si la arista  $e$  no está en el camino  $P(j, R)$ .

Se cumplen las siguientes propiedades:

- Si  $i, j \in V$  son vecinos, o bien  $i$  es padre de  $j$ , o bien  $j$  es padre de  $i$ .
- La raíz es padre de todos sus vecinos y no tiene padre.
- Todo vértice distinto de la raíz tiene un único padre.

Un **árbol enraizado plano** o, simplemente, un **árbol plano** es un par  $(T', \{<_i\}_{i \in V})$  donde  $T' = (V', A')$  es un árbol enraizado y, para cada  $i \in V$ ,  $<_i$  es un orden total sobre sus hijos, al que llamaremos orden local de  $i$ .

Los árboles planos se representan colocando a cada padre por encima de sus hijos. En particular, la raíz siempre se sitúa por encima del resto de vértices (ver figura 3.15). Los hijos, a su vez, estarán ordenados de manera creciente de izquierda a derecha.

Si  $i \in V'$  no es la raíz de  $T'$ , extenderemos el orden local  $<_i$  al padre de  $i$ , de tal forma que sea mayor que cualquier hijo de  $i$ . Se obtiene así una lista ordenada  $j_1 <_i \dots <_i j_r$  de los vecinos de  $i$  en la que  $j_r$  es el padre de  $i$ .

El árbol simétrico especular de un árbol plano  $(T', <_i)$  es el árbol plano  $(T', <_i^E)$ , cuyo orden local es el dado por  $<_i^E := >_i$ . Es decir, es el árbol plano obtenido invirtiendo los órdenes locales sobre los hijos (figura 3.15).

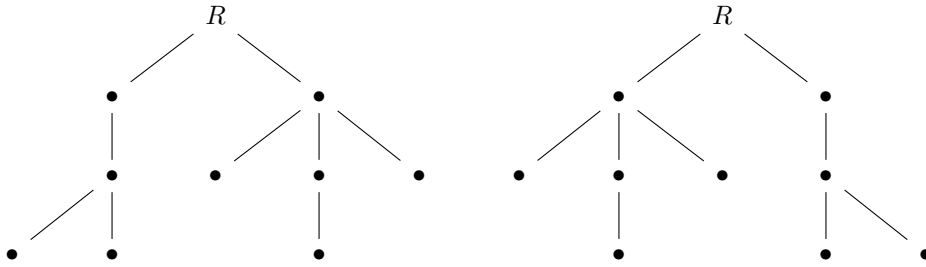


Figura 3.15: Un árbol plano y su simétrico especular. Su nombre se debe a que geoméricamente se obtiene aplicando una simetría especular al primero.

Con el convenio anterior, si  $i \in V'$  es un vértice distinto de la raíz, su padre seguirá siendo en  $(T', <_i^E)$  el mayor de sus hijos. Por lo tanto, si  $j_1 <_i \dots <_i j_r$  son los vecinos de  $i$  ordenados en el árbol plano  $(T', <_i)$ , los vecinos ordenados en su simétrico especular serán,  $j_{r-1} <_i^E \dots <_i^E j_2 <_i^E j_1 <_i^E j_r$ .

### Construcción del grafo

El grafo dirigido  $G(D)$  no se construirá a partir de  $T$  sino a partir de un árbol enraizado  $T_R$ . Este se obtiene añadiendo a  $T$  un vértice  $R$  (que será la raíz de  $T_R$ ) y dividiendo la arista doble  $e_D = \{p, q\}$  en dos:  $\{p, R\}$  y  $\{q, R\}$  (ver figura 3.16). Este procedimiento se conoce en teoría de grafos como subdivisión de la arista  $e_D$ .

Formalmente,  $T_R$  es el árbol dado por  $T_R = (V_R, A_R)$  con  $V_R = V \cup \{R\}$  y  $A_R = A \setminus \{p, q\} \cup \{\{p, R\}, \{q, R\}\}$ . Resaltamos que dicho árbol depende de la arista doble de  $D$ , pero no del diagrama  $D$  en su conjunto.

Sea  $\{i, j\} \in A$  una arista distinta de la arista doble tal que  $i$  es el padre de  $j$ . Se dice que el hijo  $j$  es **descendente** si  $(i, j) \in \vec{A}_D$  y es **ascendente** si  $(j, i) \in \vec{A}_D$ . Esta definición se extiende a las flechas en sí. Si  $(i, j) \in \vec{A}_D$  no es una orientación de la arista doble, esta se dice descendente si  $i$  es el padre de  $j$  (i.e. si apunta en dirección opuesta a la raíz) y ascendente en caso contrario.

Consideramos a  $T_R$  como árbol plano, con ciertos órdenes locales  $\{<_i\}_{i \in V_R}$  hijos. La única restricción exigida es que en cada orden local todo hijo ascendente sea menor que todo hijo descendente, como se ve en la siguiente figura.

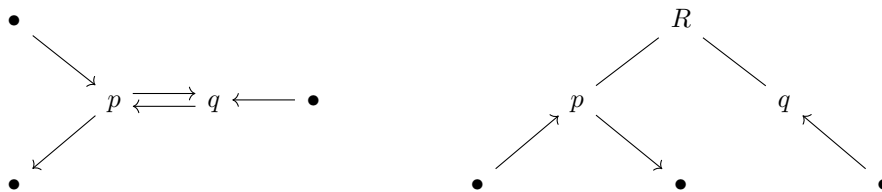


Figura 3.16: Subdivisión de la arista doble  $\{p, q\}$  para obtener el árbol plano  $T_R$ . Todo hijo ascendente es menor que cualquier hijo descendente.



El grafo dirigido  $G(D)$  constará de dos subgrafos  $G_0(D)$  y  $G_F(D)$  conectados únicamente por unos arcos, llamados puentes.

Definimos  $G_0(D)$  dando explícitamente sus nodos y sus arcos. En el caso de los nodos, hay tres tipos, v-nodos, e-nodos y s-nodos.

- Para cada  $i \in V$  vértice de  $T$  existe un v-nodo  $v(i)$ .
- Si  $\{i, j\} \in A_R$  es una arista de  $T$ , hay dos e-nodos  $e(i, j)$  y  $e(j, i)$ .
- Sea  $i \in V_R$  un nodo interno de  $T$  (i.e.  $i$  no es una hoja). Entonces  $i$  tiene  $r \geq 2$  vecinos  $j_1 <_i j_2 <_i \dots <_i j_r$ . Para cada pareja de vecinos consecutivos  $j_k, j_{k+1}$  hay dos s-nodos:  $s_i(j_k, j_{k+1})$  y  $s_i(j_{k+1}, j_k)$ .

Pasamos a los arcos. Para cada  $i$  un vértice de  $T$  con vecinos  $j_1 <_i \dots <_i j_r$  ( $r \geq 1$ ), siempre existe el arco  $(v(i), e(i, j_1))$ . Si  $i$  no es una hoja (es decir,  $r \geq 2$ ), tenemos también los siguientes arcos:

- entre un v-nodos y un s-nodo: si  $j_1$  y  $j_2$  los dos hijos menores de  $i$ , se añade el arco  $(v(i), s_i(j_1, j_2))$ .
- entre un e-nodo y un s-nodo: Para cada  $k \in [r - 1]$  existen cuatro arcos  $(e(j_k, i), s_i(j_k, j_{k+1}))$ ,  $(e(j_{k+1}, i), s_i(j_{k+1}, j_k))$ ,  $(s_i(j_k, j_{k+1}), e(i, j_{k+1}))$ ,  $(s_i(j_{k+1}, j_k), e(i, j_k))$ .

Si además  $r \geq 3$ , por cada  $k \in [r - 2]$ , hay dos arcos  $(j_{k-1}, j_k), s_i(j_k, j_{k+1})$  y  $(s_i(j_{k+1}, j_k), s_i(j_k, j_{k-1}))$ .

El grafo  $G_F(D)$  será muy similar a  $G_0(D)$ . Se construye de la misma que este, pero con las siguientes modificaciones:

1. El árbol plano que se considera no es  $(T_R, <_i)$ , si no su simétrico especular  $(T_R, <_i^E)$ .
2. Los nodos se denotan por  $v'(i), e'(i, j), s'_i(j, k)$  para distinguirlos de los de  $G_0(D)$ .
3. Si  $i \in V$  es un vértice de  $T$  con vecinos  $j_1 <_i^E \dots <_i^E j_r$ , el arco  $(v'(i), e'(i, j_1))$  se sustituye por  $(e'(j_1, i), v'(i))$ . Si además  $i$  no es hoja de  $T'$ , cada  $(v'(i), s'_i(j_1, j_2))$  se cambia por  $(s'_i(j_2, j_1), v'(i))$ .

Finalmente,  $G$  se obtiene de la unión de  $G_0(D)$  y  $G_F(D)$  sobre la que se añaden los arcos (puentes)  $(e(i, j), e'(i, j)), (e(j, i), e'(j, i))$  para cualquier  $\{i, j\} \in A_R$ . El objetivo es estudiar los  $n$ -caminos en  $G(D)$  entre los conjuntos de v-nodos  $V_0 = \{v(1), \dots, v(n)\}$   $V_F = \{v'(1), \dots, v'(n)\}$  y ver su relación con los pares  $T$ -compatibles con diagrama  $D$ .

Respecto a la última idea planteada para la definición de  $G$ , hay dos modificaciones. En primer lugar, se han añadido una tercera clase de nodo: los s-nodos, que funcionan a modo de «sectores» entre vecinos de un mismo vértice. Gracias a ellos habrá más intersecciones de caminos en  $G(D)$ , algo deseable, sin duda. Por otra parte, se ha añadido una raíz al árbol  $T$ . El motivo en este caso es algo más técnico. La única ruta de la familia de  $n$ -caminos  $\mathcal{P}(D)$  con la que se trabaja está directamente relacionada con el algoritmo de búsqueda en profundidad aplicado al árbol plano  $(T_R, <_i)$ .

La definición de  $G(D)$  cumple las mínimas condiciones requeridas para poder aplicar el lema LGV.

**Proposición 3.4.1.** *El grafo dirigido  $G(D)$  es acíclico.*

En consecuencia, por el corolario 2.2.15:

**Corolario 3.4.2.** *Sea  $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(V_0, V_F)$  una familia cerrada de  $n$ -caminos y sea  $\mathcal{R}$  la subfamilia de rutas de  $\mathcal{P}$ . Entonces,*

$$\sum_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}} \text{sign}(\sigma_{\mathcal{P}}) = \sum_{\mathcal{P} \in \mathcal{R}} \text{sign}(\sigma_{\mathcal{P}}).$$

## Levantamiento de un par $T$ -compatible

Dados  $i, j \in V$ , todo camino entre los v-nodos de  $v(i)$  a  $v(j)$  pasa por un único puente. De hecho, si  $P_R(i, j) = i = u_0, \dots, u_m = j$  es el único camino en  $T_R$ , para cada  $r \in [m]$  existe un único camino  $G$  de  $v(i)$  a  $v(j)$  cuya subsecuencia de v-nodos y e-nodos correspondiente (i.e. la obtenida eliminando los s-nodos) es

$$v(i), e(u_0, u_1), \dots, e(u_{r-1}, u_r), e'(u_{r-1}, u_r), \dots, e'(u_{m-1}, u_m)v(j).$$

Decimos que es el camino de  $v(i)$  a  $v'(j)$  con flecha marcada  $(e_{r-1}, e_r)$ . Si  $\mathbf{P} \in \mathcal{P}(V_0, V_F)$  es un  $n$ -camino, denotamos por  $B(\mathbf{P})$  al conjunto de flechas marcadas de  $\mathbf{P}$  (es decir, el conjunto de flechas marcadas de los caminos de  $P_i$ ).

Sería deseable asociar a cada  $(\sigma, f) \in P_D$  el  $n$ -camino  $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}$  de  $V_0$  en  $V_F$  tal que  $\Lambda_i$  es el camino de  $v(i)$  a  $v(\sigma(i))$  con flecha marcada  $\vec{f}(i)$ . Sin embargo, al haber añadido la raíz  $R$ , esto no es posible si  $f(i) = e_D = \{p, q\}$ . En ese caso, lo lógico es asignar a  $f(i)$ , alguna de las flechas  $(p, R), (q, R), (R, p), (R, q)$ . Definimos:

$$\pi_R(i, j) = \begin{cases} (R, q) & \text{si } (i, j) = (p, q); \\ (R, p) & \text{si } (i, j) = (q, p); \\ (i, j) & \text{en caso contrario;} \end{cases} \quad \text{para cada } (i, j) \in \vec{A}.$$

**Definición 3.4.3.** Sea  $(\sigma, f) \in P_D$  un par  $T$ -compatible con diagrama  $D$ . El levantamiento de  $(\sigma, f)$  es el camino  $\Lambda(\sigma, f) = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}$  tal que  $\Lambda_i$  es, para cada  $i \in V$ , el único camino en  $G(D)$  de  $v(i)$  en  $v(\sigma(i))$  con flecha marcada  $\pi_R(i, j)$ .

Obsérvese que, por construcción, la permutación subyacente de cada  $\Lambda(\sigma, f)$  es  $\sigma$ . No es de extrañar tampoco que dos pares  $(\sigma, f), (\tau, g) \in P_D$  distintos tengan levantamientos distintos.

**Proposición 3.4.4.** La aplicación  $(\sigma, f) \in P_D \mapsto \Lambda(\sigma, f) \in \mathcal{P}(V_0, V_F)$  es inyectiva. Su imagen es la familia  $\mathcal{P}(D)$ , formada por los  $n$ -caminos  $\mathbf{P} \in \mathcal{P}(V_0, V_F)$  tales que  $B(\mathbf{P}) = \{\pi_R(i, j) \mid (i, j) \in \vec{A}_D\}$ .

**Proposición 3.4.5.** La familia de  $n$ -caminos  $\mathcal{P}(D)$  es cerrada bajo trasposiciones.

**Corolario 3.4.6.** Si  $\mathcal{R}(D)$  es la subfamilia de rutas de  $\mathcal{P}(D)$ ,

$$\sum_{(\sigma, f) \in P_D} \text{sign}(\sigma) = \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{R}(D)} \text{sign}(\sigma_{\mathbf{P}})$$

Es decir, el problema planteado se reduce a ver como son las rutas de  $V_0$  en  $V_F$ .

**Teorema 3.4.7.** La familia  $\mathcal{P}(D)$  solo presenta una ruta  $\mathbf{P}_D$ . Su permutación subyacente  $\sigma_{\mathbf{P}_D}$  es un ciclo completo de longitud  $n$ .

**Corolario 3.4.8.** Si  $D \in \mathcal{S}(T)$  es un diagrama estándar sobre  $T$ ,

$$\sum_{(\sigma, f) \in P_D} \text{sign}(\sigma) = (-1)^{n-1}.$$

Hemos visto que las sumas signadas para los diagramas disconexos y los conexos no estándar son cero, mientras que para los diagramas estándar son iguales a  $(-1)^{n-1}$ .

#### Teorema de Graham y Pollak :

Para cualquier árbol  $T$  de orden  $n$ , el determinante de su matriz de distancias es

$$\det M(T) = (-1)^{n-1} (n-1) 2^{n-2}.$$

Los detalles que faltan para concluir esta demostración son bastante técnicos y laboriosos y se presentan detalladamente en el trabajo de fin de grado de Adrián Lillo [Lil23]. Por esta razón, en lugar de detenernos en ellos, remitimos al lector a (adrian) (begam).

Como hemos mencionado en la introducción, en este trabajo nos concentramos en las distintas generalizaciones del teorema de Graham y Pollak, que procedemos a exponer en el capítulo 4.

# Capítulo 4

## Generalizaciones de Graham-Pollak

En este capítulo se presentan variantes de la fórmula de Graham-Pollak. Concretamente, se va a ver como abordar de manera combinatoria el problema cuando hay pesos definidos sobre el árbol ([BKN05], [ZD16]) y cuando se toma, en vez de la distancia habitual, su  $q$ -generalización ([YY07]). En todos los casos el procedimiento será similar al dado en el capítulo 3. Finalmente, se establecerá una conjetura que engloba a los resultados anteriores.

De nuevo,  $T = (V, A)$  será un árbol con conjunto de flechas  $\vec{A}$ .

### 4.1. Árboles ponderados

La generalización más común de distancia en un grafo es la que surge al involucrar pesos en sus aristas. Consideramos a  $T$  como un árbol ponderado en un cierto anillo conmutativo  $R$ . Para cada  $e \in A$ ,  $a_e \in R$  será el peso de la arista  $e$ . Típicamente, los pesos serán enteros, reales, o, en general, variables de un cierto anillo de polinomios. No hay pérdida de generalidad en suponer esto último y así se hará cuando sea preciso.

La distancia en  $T$  entre dos vértices  $i, j \in V$  (que denotaremos por  $r_{ij}$ ) no será más que la suma de los pesos de las aristas de  $P(i, j)$ . Es decir,

$$r_{ij} = \sum_{e \in P(i, j)} a_e.$$

De esta forma, la matriz de distancias asociada es:

$$\overline{M}(T) = (r_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Dado que el conjunto de aristas del camino  $P(i, j)$  es el mismo que el de  $P(j, i)$ , la matriz  $\overline{M}(T)$  es simétrica.

#### Ejemplo 4.1.1.

1. Consideramos el grafo camino  $T = P_4$  con pesos en las variables  $a, b, c$ , tal y como se indica en la figura.

$$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{c} 4$$

La matriz de distancias correspondiente es

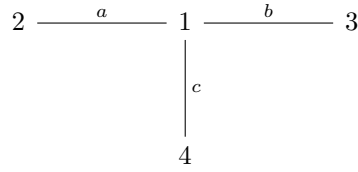
$$\overline{M}(T) = \begin{pmatrix} 0 & a & a+b & a+b+c \\ a & 0 & b & b+c \\ a+b & b & 0 & c \\ a+b+c & b+c & c & 0 \end{pmatrix}$$

Al computar su determinante, se obtiene,

$$\det \overline{M}(T) = -4abc(a+b+c).$$

Observamos que es polinomio simétrico en  $a, b, c$ . Cualquier permuta en los pesos no varía el resultado.

2. Sea  $T' = K_{1,3}$  el grafo estrella de cuatro vértices etiquetado y con pesos  $a, b, c$  dado por la siguiente imagen:



La matriz de distancias de  $T'$  es

$$\overline{M}(T) = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & a+b & a+c \\ b & a+c & 0 & b+c \\ c & a+c & b+c & 0 \end{pmatrix}$$

El determinante de  $M(T')$  es

$$\det \overline{M}(T') = -4abc(a+b+c),$$

el mismo que el de  $\overline{M}(T)$ .

Veremos que en general, el determinante de la matrix  $\overline{M}(T)$  solo depende del número de vértices y de sus pesos, pero no de como se distribuyen estos en el árbol  $T$ . Antes, vamos a establecer un marco más general. Al hacerlo, curiosamente, se podrá entender mejor la relación entre el determinante en cuestión y los diagramas estándar.

Concretamente, considerando  $\vec{T}$  el grafo dirigido asociado a  $T$ , asignamos un peso para cada una de sus flechas. Para cada flecha  $e = (i, j) \in \vec{A}$ , su peso será  $a_{ij} = a_e \in R$ .

Sea  $P(i, j) = i = v_0, v_1, \dots, v_r = j$  el camino en  $T$  entre dos vértices  $i, j \in V$ . Denotamos por  $\vec{P}(i, j)$  al mismo camino  $v_0 \cdots v_r$  pero considerado como camino dirigido en  $\vec{T}$ . En este contexto, la distancia de  $i$  a  $j$  será

$$\vec{r}_{ij} = \sum_{k=1}^r a_{v_{k-1}, v_k}.$$

Es decir,  $\vec{r}_{ij}$  es la suma de los pesos de las flechas del camino dirigido  $\vec{P}(i, j)$ . Podemos escribir entonces,

$$\vec{r}_{ij} = \sum_{e \in \vec{P}(i, j)} a_e$$

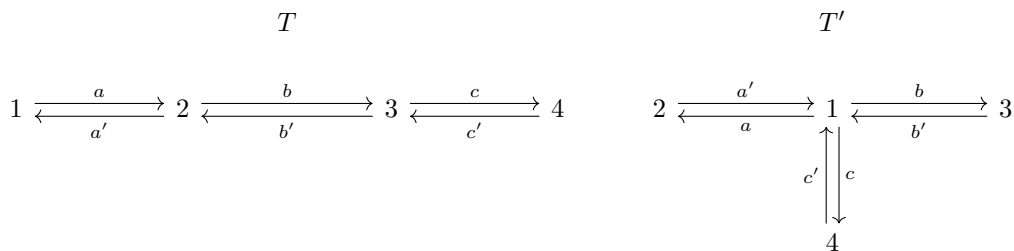
donde la notación  $e \in \vec{P}(i, j)$  indica que  $e \in \vec{A}$  es una flecha del camino dirigido  $\vec{P}(i, j)$  en  $\vec{T}$ . Obsérvese que una flecha  $e = (a, b) \in \vec{A}$  está en ese camino si y solo si  $\{a, b\} \in P(i, j)$  y la orientación de  $e$  en  $P(i, j)$  es, precisamente,  $(a, b)$ .

La matriz de distancias correspondiente es

$$\vec{M}(T) = (\vec{r}_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

**Observación 4.1.2.** Observamos que no es simétrica. Sin embargo, si para cada arista  $e = \{i, j\} \in A$  se cumple  $a_{ij} = a_{ji}$  y se define  $a_e := a_{ij}$ , la matriz  $\vec{M}(T)$  coincide con la matriz  $\overline{M}(T)$  anterior.

**Ejemplo 4.1.3.** Sean  $T = P_4$  y  $T' = K_{1,3}$  los árboles con pesos en sus flechas dados de la siguiente forma



Sus respectivas matrices de distancias son

$$\vec{M}(T) = \begin{pmatrix} 0 & a & a+b & a+b+c \\ a' & 0 & b & b+c \\ a+b' & b' & 0 & c \\ a'+b'+c' & b'+c' & c' & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{M}(T') = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a' & 0 & a'+b & a'+b \\ b' & a+b' & 0 & b'+c \\ c' & a+c' & b+c' & 0 \end{pmatrix}$$

De nuevo, sus determinantes coinciden.

$$\det \vec{M}(T) = \det \vec{M}(T') = -[aa'(b+b')(c+c') + bb'(a+a')(c+c') + cc'(a+a')(c+c')].$$

En este caso, no se obtiene un polinomio simétrico. Sin embargo, sigue existiendo cierto tipo de simetría en él.

Sean  $v_a = (a, a')$ ,  $v_b = (b, b')$  y  $v_c = (c, c')$ . Entonces,  $\det M(T)$  es un polinomio cuyas variables son las coordenadas de esos tres vectores. Podemos permutar dichas coordenadas internamente en cada vector, o incluso permutar  $v_a, v_b$  y  $v_c$  sin que  $\det \vec{M}(T)$  cambie. Decimos que es un polinomio diagonalmente simétrico.

Si desarrollamos la expresión del determinante de  $\vec{M}(T)$  en el ejemplo anterior, quedan 12 monomios en las variables  $a, a', b, b', c, c'$ .

$$\begin{aligned} \det \vec{M}(T) = & aa'bc + aa'b'c + aa'bc' + aa'b'c' + \\ & bb'ac + bb'a'c + bb'ac' + bb'a'c' + \\ & cc'ab + cc'a'b + cc'ab' + cc'a'b'. \end{aligned}$$

Los sumandos deberían resultar familiares. Cada uno representa uno de los 12 diagramas estándar de  $T$  (y de  $T'$ ). Por ejemplo, el monomio  $aa'bc$  representa al diagrama estándar con arista doble  $\{1, 2\}$  (pesos  $a$  y  $a'$ ) y flechas  $(2, 3)$  y  $(3, 4)$  (pesos  $b$  y  $c$ ). Todo esto será cierto para cualquier árbol.

Imitando el razonamiento de la sección 3.1, vamos a escribir  $\vec{M}(T)$  como una suma ponderada en el conjunto de pares  $T$ -compatibles  $P_T$ .

$$\det \vec{M}(T) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i \in V} \vec{r}_{i, \sigma(i)}$$

Desarrollando el producto anterior para cada  $\sigma \in \mathbb{S}_n$ ,

$$\prod_{i \in V} \vec{r}_{i, \sigma(i)} = \prod_{i \in V} \sum_{e_i \in \vec{P}(i, \sigma(i))} a_{e_i} = \sum_{\substack{(e_1, \dots, e_n) \in \vec{A}^n \\ e_i \in \vec{P}(i, \sigma(i))}} a_{e_1} \dots a_{e_n} = \sum_{\substack{g: V \rightarrow \vec{A} \\ g(i) \in \vec{P}(i, \sigma(i))}} a_{g(1)} \dots a_{g(n)}. \quad (4.1)$$

Nos encontramos ante la primera diferencia. Ahora los sumandos no vienen dados por funciones  $V \rightarrow A$  sino por otras  $V \rightarrow \vec{A}$ .

**Lema 4.1.4.** Sean  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  y sea  $g: V \rightarrow \vec{A}$  tal que  $g(i) \in \vec{P}(i, \sigma(i))$  para todo  $i \in V$ . Existe una única función  $f: V \rightarrow A$  tal que  $\vec{f} = g$ .

*Demostración.* Recordamos que para cada flecha  $(a, b) \in \vec{A}$ , su arista no dirigida asociada es  $\overline{(a, b)} = \{a, b\}$ . Entonces, si existiera tal función  $f: V \rightarrow A$ , debería cumplirse que  $f(i) = \overline{\vec{f}(i)} = \overline{g(i)}$  para todo  $i \in V$ . Esto prueba la unicidad.

Veamos que la función  $f: V \rightarrow A$  dada por  $f(i) := \overline{g(i)}$  para todo  $i \in V$  cumple las propiedades requeridas. Dado  $i \in V$ , tanto  $\vec{f}(i)$  como  $g(i)$  son orientaciones de una misma arista  $\overline{g(i)}$ , ambas orientadas respecto al camino  $P(i, \sigma(i))$ . Necesariamente  $\vec{f}(i) = g(i)$ .  $\square$

Este lema permite expresar permite expresar la igualdad (4.1) tal como sigue:

$$\prod_{i \in V} \vec{r}_{i, \sigma(i)} = \sum_{\substack{f: V \rightarrow A \\ f(i) \in P(i, \sigma(i))}} a_{\vec{f}(1)} \dots a_{\vec{f}(n)}.$$

Entonces,

$$\det \vec{M}(T) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \text{sign}(\sigma) \sum_{\substack{f: V \rightarrow A \\ f(i) \in P(i, \sigma(i))}} a_{\vec{f}(1)} \dots a_{\vec{f}(n)} = \sum_{(\sigma, f) \in P_T} \text{sign}(\sigma) a_{\vec{f}}$$

siendo  $a_{\vec{f}} := a_{\vec{f}(1)} \cdots a_{\vec{f}(n)}$  para cada  $(\sigma, f) \in P_T$ .

Se obtiene una suma de monomios. Cada uno de ellos representa un diagrama sobre  $T$  (el dado por el par  $(\sigma, f)$ ). Si  $D \in \mathcal{D}(T)$  es un diagrama sobre  $T$  con multiconjunto de flechas  $\vec{A}_D$ , definimos el peso de  $D$  como el producto  $a_D := \prod_{e \in \vec{A}_D} a_e$  de los pesos correspondientes a sus flechas. Es inmediato que  $a_D = a_{\vec{f}}$  para cualquier  $(\sigma, f) \in P_D$ . Por lo tanto,

$$\det \vec{M}(T) = \sum_{D \in \mathcal{D}(T)} \sum_{(\sigma, f) \in P_D} \text{sign}(\sigma) a_{\vec{f}} = \sum_{D \in \mathcal{D}(T)} a_D \sum_{(\sigma, f) \in P_D} \text{sign}(\sigma).$$

Pero, precisamente por el capítulo 3, sabemos exactamente cuanto valen las sumas  $\sum_{(\sigma, f) \in P_D} \text{sign}(\sigma)$ . Aplicando los corolarios 3.2.11, 3.3.3 y 3.4.8:

$$\det \vec{M}(T) = (-1)^{n-1} \sum_{D \in \mathcal{S}(T)} a_D, \quad (4.2)$$

lo cual, de por sí, es una respuesta elegante al problema planteado. A partir de aquí el siguiente resultado de Zhou y Ding es inmediato:

**Teorema 4.1.5** (Zhou, Ding, [ZD16]). *El determinante de  $\vec{M}(T)$  es*

$$\det \vec{M}(T) = (-1)^{n-1} \sum_{\{p, q\} \in A} a_{pq} a_{qp} \prod_{\substack{\{u, v\} \in A \\ \{u, v\} \neq \{p, q\}}} (a_{uv} + a_{vu}).$$

*Demostración.* Desarrollando el producto en la expresión

$$\sum_{\{p, q\} \in A} a_{pq} a_{qp} \prod_{\substack{\{u, v\} \in A \\ \{u, v\} \neq \{p, q\}}} (a_{uv} + a_{vu})$$

se obtiene una suma de todos los distintos monomios de la forma  $a_{e_1} \cdots a_{e_n}$  tales que,

- $e_1, e_2 \in \vec{A}$  son orientaciones opuestas de una misma arista de  $T$ .
- $e_3, \dots, e_n$  son, cada una, orientaciones de las  $n - 2$  aristas restantes de  $T$ .

Es decir, aparecen cada uno de los monomios  $a_D$  con  $D \in \mathcal{S}(T)$  diagrama estándar. Basta aplicar (4.2).  $\square$

También obtenemos, claro está, la versión con pesos en las aristas.

**Teorema 4.1.6** (Bapat, Kirkland, Neumann, [BKN05]). *El determinante de  $\vec{M}(T)$  es*

$$\det \vec{M}(T) = (-1)^{n-1} 2^{n-2} \left( \sum_{e \in A} a_e \right) \prod_{e \in A} a_e.$$

*Demostración.* Por la observación 4.1.2, si se toma  $a_{ij} = a_{ji} = a_e$  para cada  $e \in \{i, j\} \in A$  en el teorema anterior,

$$\det \vec{M}(T) = (-1)^{n-1} \sum_{e \in A} a_e^2 \prod_{\substack{f \in A \\ f \neq e}} 2a_f = (-1)^{n-1} 2^{n-2} \sum_{e \in A} a_e \prod_{e \in A} a_e.$$

$\square$

## 4.2. Matriz de $q$ -distancias

Ahora, vamos a estudiar el  $q$ -análogo de la matriz de distancias  $M(T)$ . En su prueba combinatoria existirán paralelismos con la sección anterior, aunque será algo más técnica.

Como se definió en la introducción, para cada  $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , su  $q$ -análogo  $[N]_q$  es el polinomio

$$[N]_q = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1} \in \mathbb{Z}[q].$$

La  $q$ -distancia entre dos vértices  $i, j \in V$  se define como

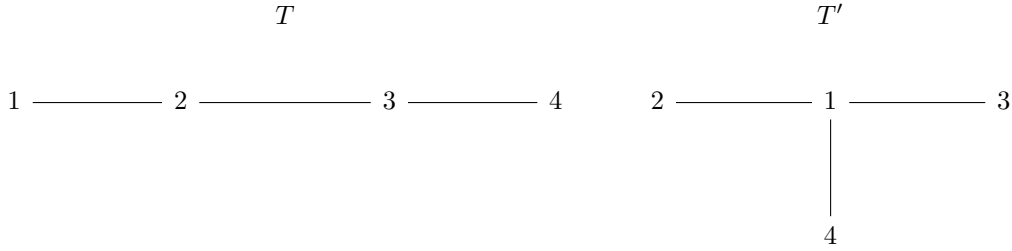
$$d_q(i, j) = [d(i, j)]_q.$$

La matriz de  $q$ -distancias de  $T$  correspondiente será, por tanto,

$$M_q(T) = (d_q(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Veamos como es esta matriz para los grafos del ejemplo 4.1.1

**Ejemplo 4.2.1.** Las matrices de  $q$ -distancias de los árboles  $T$  y  $T'$  siguientes



son

$$M_q(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1+q & 1+q+q^2 \\ 1 & 0 & 1 & 1+q \\ 1+q & 1 & 0 & q \\ 1+q+q^2 & 1+q & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_q(T') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+q & 1+q \\ 1 & 1+q & 0 & 1+q \\ 1 & 1+q & 1+q & 0 \end{pmatrix}$$

Ambos determinantes coinciden. De hecho, son iguales a

$$(-1)^{n-1}(n-1)(q^2 + 2q + 1) = (-1)^{n-1}(n-1)(1+q)^2 = (-1)^{n-1}(n-1)[2]_q^2.$$

Para la prueba partimos, de nuevo, de la expresión combinatoria del determinante de  $M_q(T)$ .

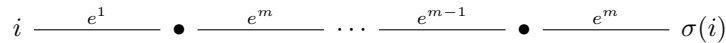
$$\det M_q(T) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i \in V} d_q(i, \sigma(i)).$$

Para cada  $\sigma \in \mathbb{S}_n$ ,

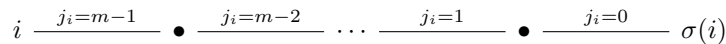
$$\prod_{i \in V} d_q(i, \sigma(i)) = \prod_{i \in V} \sum_{j_i=0}^{d(i, \sigma(i))-1} q^{j_i} = \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_n) \in A^n \\ 0 \leq j_i \leq d(i, \sigma(i))-1}} q^{j_1} \dots q^{j_n}. \quad (4.3)$$

El objetivo es reescribir la suma anterior en términos de funciones  $f : V \rightarrow A$  con  $f(i) \in P(i, \sigma(i))$  para todo  $i \in V$ .

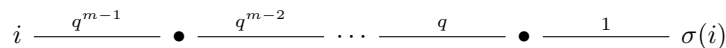
Sean  $i \in V$  y  $m := d(i, \sigma(i))$ . Consideramos al único camino  $P(i, \sigma(i))$  con sucesión de aristas  $e^1, \dots, e^m$ .



Cada elección de  $j_i \in \{0, \dots, m-1\}$  representa una de las aristas  $e^k$  anteriores. Hacemos corresponder a  $j_i = 0$  con  $e^m$ ,  $j_i = 1$  con  $e^{m-1}$  y así sucesivamente. Es decir, cada arista  $e^k$  será la asociada a  $j_i = m - k$ .



En cierto sentido, hemos asignado a cada  $e^k$  un peso  $q^{m-k}$ .



Conviene recalcar que este peso depende del camino  $P(i, \sigma(i))$ , en función de cuan cerca se encuentre dicha arista de  $\sigma(i)$ .

Vamos a tratar de formalizar todo esto.

**Definición 4.2.2.** Sean  $j \in V$  un vértice y  $e = \{a, b\} \in A$  una arista. Se define la **distancia** de  $e$  a  $j$  como

$$d(e, j) := \min \{d(a, j), d(b, j)\}.$$

**Observación 4.2.3.** En las condiciones anteriores, si el camino de  $a$  a  $j$  es  $P(a, j) = ab \cdots j$ , se tiene que  $d(e, j) = d(b, j)$ .

Volvemos al camino  $P(i, \sigma(i))$  anterior. Escribimos pues.

$$P(i, \sigma(i)) = v_0 \cdots v_m.$$

Empleando la notación anterior para las aristas de  $P(i, \sigma(i))$ ,  $e^k = \{v_{k-1}, v_k\}$  ( $k = 1, \dots, m$ ). La distancia de  $e^k$  a  $\sigma(i)$  es, por definición,

$$d(e_k, \sigma(i)) = d(v_k, \sigma(i)) = d(v_k, v_m) = m - k,$$

que a su vez era el número  $j_i \in \{0, \dots, m-1\}$  que habíamos asignado a  $e^k$ . Así, (4.3) se puede reescribir como

$$\prod_{i \in V} d_q(i, \sigma(i)) = \sum_{\substack{(e_1, \dots, e_n) \in A^n \\ e_i \in P(i, \sigma(i))}} q^{d(e_1, \sigma(1))} \cdots q^{d(e_n, \sigma(n))} = \sum_{\substack{f: V \rightarrow A \\ f(i) \in P(i, \sigma(i))}} q^{d(f(1), \sigma(1))} \cdots q^{d(f(n), \sigma(n))}.$$

Por lo tanto, si denotamos  $q_{\sigma, f} := q^{d(f(1), \sigma(1))} \cdots q^{d(f(n), \sigma(n))}$  para todo  $(\sigma, f) \in P_T$ ,

$$\det M_q(T) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \text{sign}(\sigma) \sum_{\substack{f: V \rightarrow A \\ f(i) \in P(i, \sigma(i))}} q^{d(f(1), \sigma(1))} \cdots q^{d(f(n), \sigma(n))} = \sum_{(\sigma, f) \in P_T} \text{sign}(\sigma) q_{\sigma, f}.$$

Expresado como una suma ponderada:

$$\det M_q(T) = \sum_{D \in \mathcal{D}(T)} \sum_{(\sigma, f) \in P_D} p(\sigma, f)$$

siendo  $p(\sigma, f) := \text{sign}(\sigma) q_{\sigma, f}$  el peso de cada  $(\sigma, f) \in P_T$ .

Una vez más, las sumas correspondientes a diagramas conexos y no estándar son nulas.

**Proposición 4.2.4.** Si  $D$  es un diagrama disconexo o conexo no estándar sobre  $T$ ,

$$\sum_{(\sigma, f) \in P_D} p(\sigma, f) = 0.$$

*Demostración.* Sea  $D$  diagrama disconexo o conexo no estándar. En cualquier caso, dado  $(\sigma, f) \in P_D$ , existen  $i, j \in V$  tales que  $\iota_D(\sigma, f) = (\sigma \circ (i j), f \circ (i j)) := (\tau, g)$ . Entonces,

$$p_{\tau, g} = \prod_{i \in V} q^{d(g(i), \tau(i))} = \prod_{i \in V} q^{d(f(i), \sigma(i))} = p_{\sigma, f},$$

lo que prueba que la involución  $\iota_D$  es cancelativa también en este caso.  $\square$

**Ejemplo 4.2.5.** Veamos como se comporta la involución vista en el ejemplo 3.2.12 para el diagrama  $D_2$ .

$\sigma$	$f$	$p(\sigma, f)$	$\tau$	$g$	$p(\tau, g)$
(12)(34)	$e_1 e_1 e_3 e_3$	1	(1243)	$e_1 e_3 e_1 e_3$	-1
(1243)	$e_1 e_3 e_1 e_3$	-1	(12)(34)	$e_1 e_1 e_3 e_3$	1
(13)(24)	$e_1 e_3 e_1 e_3$	$q^2$	(1342)	$e_1 e_1 e_3 e_3$	$-q^2$
(1342)	$e_1 e_1 e_3 e_3$	$-q^2$	(13)(24)	$e_1 e_3 e_1 e_3$	$q^2$

Por la proposición anterior,

$$\sum_{D \in \mathcal{D}(T)} \sum_{(\sigma, f) \in P_D} p(\sigma, f). \quad (4.4)$$



Queda ver qué es lo que ocurre con los diagramas estándar. Para ello, vamos a usar la versión con pesos del lema LGV.

Sea  $D \in \mathcal{S}(T)$  diagrama estándar y sea  $(\sigma, f) \in P_D$  un par  $T$ -compatible con diagrama  $D$ . Consideramos su levantamiento en  $G(D)$  correspondiente:  $\mathbf{P} = \{P_1, \dots, P_n\} := \Lambda(\sigma, f)$ .

Buscamos definir una función de pesos  $w$  sobre los arcos del grafo dirigido  $G$  para que el peso de cada camino  $P_i$  de  $v(i)$  a  $v'(\sigma(i))$  sea  $w(P_i) = q^{d(f(i), \sigma(i))}$  y, así,

$$w(\mathbf{P}) = \text{sign}(\sigma_{\mathbf{P}}) \prod_{i \in V} q^{d(f(i), \sigma(i))} = \text{sign}(\sigma) q_{\sigma, f} = p(\sigma, f).$$

Denotamos  $P(i, \sigma(i)) = u_0 \cdots u_m$ . Sea  $k \in [m]$  tal que  $f(i) = \{u_{k-1}, u_k\}$ . Recordamos que  $d(f(i), \sigma(i))$  es el número de aristas de la lista  $\{u_k, u_{k+1}\}, \dots, \{u_{m-1}, u_m\}$ . Hay dos posibilidades:

1. Si en  $\{u_k, u_{k+1}\}, \dots, \{u_{m-1}, u_m\}$  no se encuentra la arista doble  $e_D$ , los e-nodos de  $P_i$  en  $G_F(D)$  posteriores a  $e'(u_{k-1}, u_k)$  son  $e'(u_k, u_{k+1}), \dots, e'(u_{m-1}, u_m)$ .
2. Por el contrario, si existe  $l \in \{k+1, \dots, m\}$  tal que  $\{u_{l-1}, u_l\} = e_D = \{p, q\}$ , dichos e-nodos serán

$$e'(u_k, u_{k+1}), \dots, e'(u_{l-2}, u_{l-1}), e'(p, R), e'(R, q), e'(u_l, u_{l+1}), \dots, e'(u_{m-1}, u_m)$$

o bien,

$$e'(u_k, u_{k+1}), \dots, e'(u_{l-2}, u_{l-1}), e'(q, R), e'(R, p), e'(u_l, u_{l+1}), \dots, e'(u_{m-1}, u_m).$$

Por otra parte, por la construcción de  $G$ , por cada uno de los e-nodos en cuestión incide un único arco procedente de un s-nodo en  $G_0(D)$ . Puede comprobarse entonces que la función de pesos sobre los arcos de  $G(D)$

$$w(x) = \begin{cases} q & \text{si es un arco en } G_F(D) \text{ entre un s-nodo } s \text{ y un e-nodo } e \text{ distinto de } e'(q, R) \text{ y } e'(p, R) \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

verifica que el peso de  $P_i$  es  $w(P_i) = q^{d(f(i), \sigma(i))}$ , tal y como se deseaba. Aplicando el corolario 2.2.15 y la biyección entre  $P_D$  y  $\mathcal{P}(D)$  dada en la proposición 3.4.4,

$$\sum_{(\sigma, f) \in P_D} p(\sigma, f) = \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}(D)} w(\mathbf{P}) = \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{R}(D)} w(\mathbf{P}) = w(\mathbf{P}_D)$$

siendo  $\mathbf{P}_D$  la única ruta de  $\mathcal{P}(D)$ . Solo falta saber cuál es el peso de  $\mathbf{P}_D$ .

Empleamos la notación anterior para  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_D$ . Para cada  $i \in [n]$ , ninguno de los e-nodos de  $P_i$   $e(u_k, u_{k+1}), \dots, e(u_{m-1}, u_m)$  se corresponden con ninguna flecha de  $B(\mathbf{P}_D) = \{\pi_R(i, j) \mid (i, j) \in D\}$ . En caso contrario,  $P_i$  se cruzaría con otro camino de  $\mathbf{P}_D$  y este sería entrelazado. Tampoco puede pasar por los e-nodos  $e'(p, R)$  y  $e'(q, R)$ , pues ello implicaría que también pasa por  $e'(R, p)$  o  $e'(R, q)$ .

Por lo tanto, los e-nodos  $e(u_k, u_{k+1}), \dots, e(u_{m-1}, u_m)$  son todos de la forma  $e'(i, j)$  siendo  $(i, j) \in \vec{A} \setminus \vec{A}_D$ . A su vez, dichos e-nodos  $e'(i, j)$  pueden aparecer en un camino de  $\mathbf{P}_D$  o en ninguno pues, de nuevo,  $\mathbf{P}_D$  es ruta.

Tras todo ello, se concluye que el peso de  $\mathbf{P}_D$  es, salvo signo,  $q^{r_D}$ , siendo  $r_D$  el número de e-nodos de la forma  $e'(i, j)$  con  $(i, j) \in \vec{A} \setminus \vec{A}_D$  por los que pasa  $\mathbf{P}_D$  (es decir, por los que pasa algún camino de  $\mathbf{P}_D$ ).

Ahora bien, ¿cuánto vale  $r_D$ ? ¿Depende del diagrama? Por suerte, en el camino a la prueba del teorema 3.4.7 se encuentran las respuestas a estas preguntas.

**Proposición 4.2.6.** *Sea  $\mathbf{P}_D$  la única ruta de  $\mathcal{P}(D)$  y sea  $(i, j) \in \vec{A} \setminus \vec{A}_D$  una flecha que no aparezca en  $D$ .*

1. La ruta  $\mathbf{P}_D$  pasa por el e-nodo  $e(i, j)$  si y solo si  $(i, j)$  es flecha ascendente.
2. La ruta  $\mathbf{P}_D$  pasa por el e-nodo  $e'(i, j)$  si y solo si  $(i, j)$  es flecha descendente.

**Corolario 4.2.7.** Si  $D$  es un diagrama estándar sobre  $T$ ,

$$\sum_{(\sigma, f) \in P_D} p(\sigma, f) = (-1)^{n-1} q^{m_D}$$

siendo  $m_D$  el número de flechas de  $\vec{A}_D \setminus \{(p, q), (q, p)\}$  que son ascendentes.

*Demostración.* Por cada flecha de  $\vec{A}$  que no aparece en  $D$  y que es descendente existe una flecha de  $\vec{A}_D$  (su opuesta) que es ascendente. Por los razonamientos previos,  $r_D = m_D$  y

$$\sum_{(\sigma, f) \in P_D} p(\sigma, f) = w(\mathbf{P}_D) = \text{sign}(\mathbf{P}_D) q^{r_D} = (-1)^{n-1} q^{m_D}.$$

□

**Teorema 4.2.8** (Yan, Yeh, 2007). En las condiciones anteriores,

$$M_q(T) = (-1)^{n-1} (n-1)(1+q)^{n-2}.$$

*Demostración.* Por la igualdad (4.4) y el corolario anterior,

$$\det M_q(T) = \sum_{D \in \mathcal{S}(T)} \sum_{(\sigma, f) \in P_D} p(\sigma, f) = (-1)^{n-1} \sum_{D \in \mathcal{S}(T)} q^{m_D}.$$

Fijada una arista  $e = \{p, q\} \in A$  y un entero  $k \in \{0, \dots, n-2\}$ , el número de diagramas estándar  $D \in \mathcal{S}(T)$  con arista doble  $e \in A$  y  $m_D = k$  coincide con las formas de elegir  $k$  flechas ascendentes para  $D$  de entre las  $n-2$  flechas distintas de  $(q, p)$  y  $(p, q)$ . Esto hace un total de  $\binom{n-2}{k}$  posibilidades. Aplicando el corolario anterior y la fórmula del binomio de Newton:

$$\det M_q(T) = (-1)^{n-1} \sum_{e \in A} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} q^k = (-1)^{n-1} \sum_{e \in A} (1+q)^{n-2} = (-1)^{n-1} (n-1)(1+q)^{n-2}.$$

□

### 4.3. En búsqueda de nuevas generalizaciones

Una vez estudiadas las generalizaciones con pesos y  $q$ -análogas, el siguiente paso es tratar de combinarlas.

Como una primera aproximación, podemos tomar  $T$  como un árbol con pesos enteros en sus aristas  $\alpha_e \in \mathbb{Z}_{>0}$  ( $e \in A$ ). La distancia en  $T$  entre dos vértices  $i$  y  $j$  es,

$$r_{ij} = \sum_{e \in P(i, j)} \alpha_e.$$

Teniendo en cuenta la  $q$ -generalización anterior, podemos considerar la  $q$ -distancia (con pesos) entre  $i$  y  $j$  como el « $q$ -entero»  $[r_{ij}]_q$  correspondiente a  $r_{ij}$ :

$$[r_{ij}]_q = \left[ \sum_{e \in P(i, j)} \alpha_e \right]_q.$$

Dichas  $q$ -distancias definen la matriz

$$\overline{M}_q(T) = \left( [r_{ij}]_q \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Yan y Yeh probaron en el mismo artículo [YY07] que, si  $e_1, \dots, e_{n-1} \in A$  son las aristas de  $T$  y  $\alpha_i = \alpha_{e_i}$  para cada  $i \in [n-1]$ , el determinante de  $\overline{M}_q(T)$  es

$$\det(\overline{M}_q(T)) = (-1)^{n-1} \prod_f [2\alpha_f]_q \cdot S$$

siendo

$$S = \frac{[\alpha_1]_q [\alpha_2]_q [\alpha_1 + \alpha_2]_q}{[2\alpha_1]_q [2\alpha_2]_q} + \sum_{i=2}^{n-2} \frac{[\alpha_{i-1}]_q [\alpha_{i+1}]_q [\alpha_{i-1} + \alpha_{i+1}]_q}{[2\alpha_{i-1}]_q [2\alpha_{i+1}]_q} + \frac{[\alpha_{n-2}]_q [\alpha_{n-1}]_q [\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}]_q}{[2\alpha_{n-2}]_q [2\alpha_{n-1}]_q}.$$

Usando procedimientos análogos a los ya esgrimidos en esta sección, en [BEGLR] se obtiene otra fórmula cuya expresión, por su simplicidad, mejora drásticamente a la anterior:

$$\det(\vec{M}_q(T)) = (-1)^{n-1} \sum_e [a_e]_q^2 \prod_{f \neq e} [2a_f]_q.$$

Observamos la gran similitud que guarda con la fórmula de [BKN05] para pesos no orientados.

Tras esto, se podría tratar el mismo problema pero para pesos enteros orientados. Sin embargo, no parece que por este camino se pueda alcanzar la mayor generalidad posible. Esta forma de proceder no admite que los pesos no sean enteros positivos (tal y como se ha definido,  $[N]_q$  carece de sentido cuando  $N \notin \mathbb{Z}_{>0}$ ).

Entonces, ¿cómo encontrar una  $q$ -generalización con pesos en un anillo arbitrario? La clave la da la siguiente igualdad:

$$[a + b]_q = [a]_q + [b]_q + (q - 1)[a]_q [b]_q \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad (4.5)$$

de la que surge la siguiente definición.

**Definición 4.3.1.** Sea  $R$  un anillo conmutativo. Dados  $a, b \in R[q]$  dos polinomios, su  $q$ -suma es

$$a + b = a + b + (q - 1)ab \in R[q].$$

Por la propia definición, dicha operación es conmutativa. También es asociativa, pues

$$(a + b) + c = a + b + c + (q - 1)(ab + ac + bc) + (q - 1)^2 abc = a + (b + c).$$

Por otra parte, evaluando  $a + b$  en  $q = 1$  se obtiene  $a + b$ , con lo que  $+$  es un  $q$ -análogo de la suma en  $R$ . Además, permite reescribir la igualdad (4.5) como sigue:

$$[a + b]_q = [a]_q + [b]_q.$$

Usaremos la notación  $\sum^{(q)}$  para indicar la  $q$ -suma de una cantidad finita de polinomios de  $R[q]$ . Por ejemplo, la  $q$ -suma de  $n$  polinomios  $a_1, \dots, a_n \in R[q]$  es

$$\sum_{i \in [n]}^{(q)} a_i = a_1 + \dots + a_n.$$

Por las propiedades, la expresión anterior no depende del orden de los términos.

La  $q$ -suma permite englobar a todos los problemas ya tratados en uno único. Sea el árbol  $T$  con pesos dirigidos  $a_{ij}$  ( $(i, j) \in \vec{A}$ ) en un cierto anillo conmutativo  $R$ . Definimos

$$\vec{M}_q(T) = (d_{ij})_{i,j=1}^n$$

siendo

$$d_{ij} = \sum_{e \in \vec{P}(i,j)}^{(q)} a_e$$

Si tomamos para cada  $e = \{i, j\} \in A$  los pesos  $a_{ij} = a_{ji} = [\alpha_e]_q$ , con  $\alpha_e \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$  para cada arista  $e \in A$ ,

$$d_{ij} = \sum_{e \in P(i,j)}^q [\alpha_e]_q = \left[ \sum_{e \in P(i,j)} \alpha_e \right]_q.$$

En este caso, la matriz  $\vec{M}_q(T)$  es la matriz con pesos « $q$ -enteros» definida al principio de la sección. En particular, si todos los  $\alpha_e$  son iguales a 1,  $d_{ij} = [d(i, j)]_q$  y  $\vec{M}_q(T)$  es la matriz de  $q$ -distancias de  $T$  estudiada en la sección anterior.

Finalmente, si  $q = 1$ ,

$$d_{ij} = \sum_{e \in \vec{P}(i, j)} a_e.$$

Es decir, la matriz  $M_1(T)$  es la matriz de pesos orientados de  $T$ .

El cálculo del determinante de  $\vec{M}_q(T)$  es un problema abierto. Su resolución es una de las vías de investigación de nuestro grupo de trabajo actualmente. Los ejemplos estudiados y la intuición nos llevan a postular la siguiente conjetura, que cierra el contenido de este trabajo.

**Conjetura:** El determinante de la matriz  $\vec{M}_q(T)$  es

$$\det \vec{M}(T) = (-1)^{n-1} \sum_{\{p, q\} \in A} a_{pq} a_{qp} \prod_{\substack{\{u, v\} \in A \\ \{u, v\} \neq \{p, q\}}} \left( a_{uv} + \frac{a_{vu}}{q} \right).$$

# Bibliografía

- [BKN05] R. Bapat, S.J. Kirkland, and M. Neumann. On distance matrices and laplacians. *Linear Algebra and its Applications*, 401:193–209, 2005. Special Issue in honor of Graciano de Oliveira. doi:10.1016/j.laa.2004.05.011.
- [Be71] Claude Berge. *Principles of combinatorics*. Translated from the French Mathematics in Science and Engineering, Vol. 72 Academic Press, New York-London 1971 viii+176 pp.
- [BEGLR] E. Briand, L. Esquivias, Á.Gutiérrez, A. Lillo, M. Rosas. A combinatorial proof of the Graham-Pollak formula and its generalizations, en preparación, 2023.
- [DY20] Du, Zhibin; Yeh, Jean. Another simple proof of Graham and Pollak’s theorem. *Discrete Math.* 343 (2020), no. 10, 111994, 3 pp
- [Ges22] Ira Gessel. Nonintersecting paths in enumerative combinatorics. charla en el Seminario de Combinatoria Algebraica de la Universidad de Sevilla. [https://personal.us.es/mrosas/combinatoria\\_algebraica\\_en\\_Sevilla/](https://personal.us.es/mrosas/combinatoria_algebraica_en_Sevilla/)
- [GL78] Graham, R. L.; Lovász, L. Distance matrix polynomials of trees. *Adv. in Math.* 29 (1978), no. 1, 60–88.
- [GP71] R. L. Graham and H. O. Pollak. On the addressing problem for loop switching. *Bell System Tech. J.*, 50:2495–2519, 1971.
- [GV85] Ira Gessel and Gérard Viennot. Binomial determinants, paths, and hook length formulae. *Adv. in Math.*, 58(3):300–321, 1985. doi:10.1016/0001-8708(85)90121-5.
- [Lil23] A. Lillo. Una prueba combinatoria de la formula de Graham-Pollak. Trabajo de fin de grado, Universidad de Sevilla, julio 2023.
- [Lin73] Bernt Lindström. On the vector representations of induced matroids. *Bull. London Math. Soc.* 5 (1973), 85–90. 05B35
- [Sag20] Bruce E Sagan. *Combinatorics: the art of counting*. Graduate Studies in Mathematics, 210. American Mathematical Society, Providence, RI, [2020], xix+304 pp.
- [TB18] Aigner, Martin; Ziegler, Günter M., *Proofs from The Book*. Fourth edition. Springer-Verlag, Berlin, 2010. viii+274 pp.
- [YY06] Yan, Weigen; Yeh, Yeong-Nan. A simple proof of Graham and Pollak’s theorem. *J. Combin. Theory Ser. A* 113 (2006), no. 5, 892–893.
- [YY07] Weigen Yan and Yeong-Nan Yeh. The determinants of  $q$ -distance matrices of trees and two quantiles relating to permutations. *Adv. in Appl. Math.*, 39(3):311–321, 2007. doi:10.1016/j.aam.2006.04.002.
- [ZD16] Hui Zhou and Qi Ding. The distance matrix of a tree with weights on its arcs. *Linear Algebra and its Applications*, 511:365–377, 2016. doi:10.1016/j.laa.2016.09.028.