

SUPERFICIES MÍNIMAS Y EL PROBLEMA DE PLATEAU

Trabajo de Fin de Grado realizado por:

ALEJANDRO SERRANO DÍAZ

Tutor: ALFONSO CARRIAZO RUBIO



Universidad de Sevilla

junio 2023

*Dedicado a aquellos que estuvieron
y a los que están.*

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, por ser un pilar fundamental durante todos estos años. Por motivarme y apoyarme cuando las fuerzas flaqueaban, y enderezarme cuando me desviaba del camino. Por la paciencia y empatía que habéis mostrado siempre. Soy la persona que soy gracias a vosotros.

A mi novia, mi otro pilar. Gracias por apoyarme siempre y escuchar todo lo que digo, aunque muchas veces sean desvarios. Gracias por los paseos casi diarios, sin ellos no seguiría cuerdo (si es que alguna vez lo he estado); por la confianza que depositas en mí todos los días, y que a veces me falta; por regalarme estos años.

A mi tutor Alfonso Carriazo Rubio, por la ayuda prestada y saber guiarme. Por las conversaciones distendidas sobre cosas frikis y por conseguir que el decano lo deje tranquilo a ratos y dedicarme ese tiempo.

Por último, dar gracias a mis amigos, tanto los forjados durante esta etapa como los que ya estaban de antes. Con vosotros este viaje ha sido aún más divertido y trepidante.

RESUMEN

En este trabajo estudiaremos las *superficies mínimas*, un tipo de superficies que, a día de hoy, resultan muy interesantes. Para comenzar, aportaremos una definición geométrica de dichas superficies y veremos cómo esta se puede extender a otras ramas de las matemáticas de forma equivalente. Tras esto, trataremos con algunas de las *superficies mínimas* más relevantes desde el punto de vista histórico (catenoide, helicoid...). Pasaremos entonces a demostrar el *problema de Plateau*, un problema que, además de resultar esencial en el estudio de estas superficies, las relaciona con las pompas de jabón, como se verá al final.

In this academic project, *minimal surfaces* will be studied, a sort of surface that in fact, nowadays becomes very interesting. First of all, we will provide a geometric definition of that, and then, we will work with them from different mathematical points of view. After that, some of the most historically relevant *minimal surfaces* will be discussed (such as catenoid or helicoid). Finally, we will deal with a very important problem of *minimal surfaces*: the *problem of Plateau*; and see how this associates them with soap films.

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción.	1
2. Preliminares.	7
3. Superficies Mínimas.	27
3.1. Equivalencias.	27
3.2. Algunos ejemplos.	34
3.2.1. Catenoide.	35
3.2.2. Helicoide.	37
3.2.3. Superficie de Scherk.	41
3.2.4. Superficie de Enneper.	43
3.2.5. Superficie de Henneberg.	46
3.2.6. Superficie de Catalan	48
4. Problema de Plateau.	51
4.1. Preparación.	51
4.2. Solución para una frontera.	59
4.2.1. Existencia de solución.	60
4.2.2. La solución define una superficie mínima.	61
4.3. Pompas de jabón.	64
A. Líneas de código.	67
A.1. Catenaria.	67
A.2. Catenoide.	67
A.3. Helicoide.	67
A.4. Isometría local catenoide y helicoide.	68
A.5. Superficie de Scherk.	68
A.6. Primera superficie de Scherk.	68
A.7. Segunda superficie de Scherk.	69
A.8. Superficie de Enneper.	69

A.9. Superficie de Henneberg	69
A.10.Cicloide.	69
A.11.Superficie de Catalan.	70
Bibliografía.	71

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1.	https://www.biografiasyvidas.com/biografia/1/lagrange.htm . . .	1
1.2.	https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=24657055 . . .	1
1.3.	Pompas de jabón.	2
1.4.	https://www.ecured.cu/Joseph_Antoine_Ferdinand_Plateau	3
1.5.	Tibor Radó – https://alchetron.com/Tibor-RadÃş . Jesse Douglas – https://es.wikipedia.org/wiki/Jesse_Douglas	4
1.6.	https://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/2011/08/24/133098	4
3.1.	Catenoide.	35
3.2.	Catenaria.	36
3.3.	Helicoide.	37
3.4.	Transformación isométrica (local) del catenoide al helicoide.	40
3.5.	Superficie de Scherk.	42
3.6.	Primera superficie de Scherk.	42
3.7.	Segunda superficie de Scherk.	43
3.8.	Superficie de Enneper.	44
3.9.	Superficie de Henneberg.	47
3.10.	Cicloide.	48
3.11.	Superficie de Catalan.	49
4.1.	Visualización demostración Lema 4.2	55
4.2.	Extraída de [3] para la visualización de la demostración del Lema 4.3	58
4.3.	Pompa de jabón del catenoide.	64
4.4.	Trozo de catenoide.	65
4.5.	Otro trozo de catenoide.	65
4.6.	Pompa de jabón del helicoide.	65
4.7.	Pompa de jabón de la superficie de Scherk.	66
4.8.	Pompa de jabón de nuestra invención.	66

INTRODUCCIÓN.



Figura 1.1: Joseph-Louis Lagrange (1736–1813).

La Geometría Diferencial comienza a desarrollarse en el siglo XVIII. En esta época, son muchos los científicos (y en particular los matemáticos) que creen que las formas perfectas de la naturaleza y las leyes más deseables, desde un punto de vista científico, son aquellas que, de algún modo, optimiza alguna cantidad distinguida. Buen ejemplo de esto es el caso de *Pierre Louis Maupertuis*, quien sostenía que «la naturaleza es económica en todas sus acciones». En este contexto de búsqueda de mínimos y óptimos, surge lo que conocemos como *superficies mínimas*. Cabe destacar que el término “mínima” no es muy apropiado, por razones que veremos más adelante. Es una terminología clásica que fue introducida por *Joseph-Louis Lagrange* (Figura 1.1) en 1762.

Este campo de estudio nace con Lagrange, cuando se propuso resolver el problema variacional de encontrar la superficie $z = z(u, v)$ de menor área extendida a través de un contorno cerrado dado y, para ello, se apoyó en la que hoy conocemos como *ecuación de Euler-Lagrange*. Sin embargo, la única superficie que encontró fue el plano. Unos años más tarde, el matemático e ingeniero *Jean Baptiste Meusnier* (Figura 1.2) contribuyó con dos superficies más a esta lista: el *catenoide* y el *helicoides*. Debemos avanzar hasta el año 1831 para hallar la siguiente superficie mínima de interés, cuando *Heinrich Ferdinand Scherk*, valiéndose de las fórmulas de Monge, aportó la llamada *superficie de Scherk*. Unos treinta y tres años más tarde, en 1864,

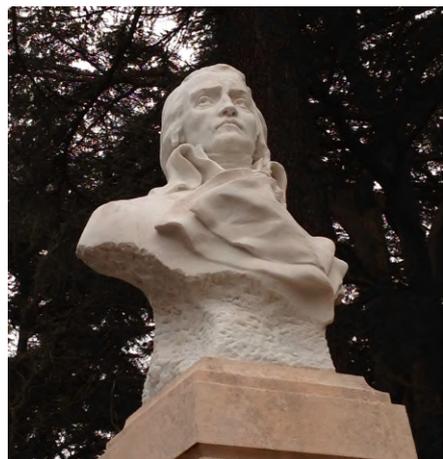
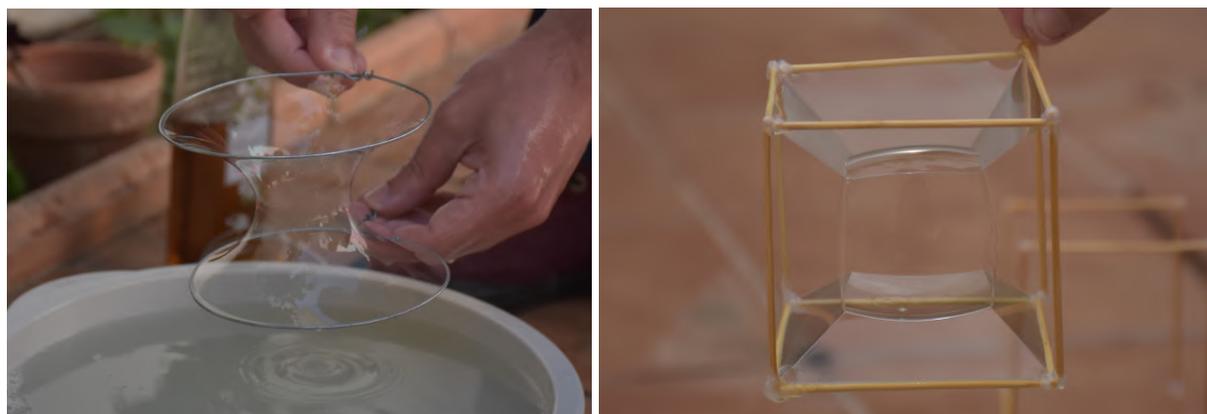


Figura 1.2: Jean Baptiste Meusnier (1754–1793).

Alfred Enneper publica un artículo donde aporta las claves para construir *superficies mínimas* a partir de un par de funciones holomorfas de una variable. Con ello, halla también la próxima superficie mínima en ser añadida a la lista: la *superficie de Enneper*. Posteriormente, en 1866, Karl Weierstrass publicó las fórmulas que conformarían la *representación de Enneper-Weierstrass* de las superficies mínimas, una potente herramienta para construir este tipo de superficies.

Las superficies mínimas se relacionan frecuentemente con las películas de jabón que se obtienen al sumergir un bastidor de alambre en una solución jabonosa. Se puede demostrar, apelando a consideraciones físicas, que la película adoptará una posición de forma que su curvatura media sea nula en sus puntos regulares. Sin embargo no todas las películas de jabón son superficies mínimas (ejemplo de este hecho lo vemos en la Figura 1.3).



(a) Pompa de jabón del catenoide.

(b) Pompa que no es superficie mínima.

Figura 1.3: Pompas de jabón.

La relación existente entre las superficies mínimas y las películas de jabón fue lo que motivó el *problema de Plateau*. En líneas generales, el problema consiste en lo siguiente:

Dada una curva simple y cerrada en el espacio, encontrar una superficie mínima cuyo borde sea dicha curva.

Aunque originalmente este fue estudiado por Lagrange, fue el físico belga *Joseph Plateau* (Figura 1.4) el que lo nombró y quien experimentó con pompas de jabón. Durante sus experimentos, Plateau se percató de que las pompas de jabón se rigen mediante una serie de leyes y estas ayudarían a esclarecer el problema ya mencionado.

El relacionar el problema de Plateau con la representación de Enneper-Weierstrass no es una tarea sencilla y fue *Hermann Schwarz* el que aporta el primer avance. Schwarz consideró una poligonal cerrada formada por cuatro segmentos de rectas no coplanares y halló las funciones holomorfas que dan una superficie minimal conteniendo a dicha poligonal. La dificultad la encontró en las esquinas de la poligonal. *Bernhard Riemann* también se interesó por este problema. Él no solo llegó al mismo resultado que Schwarz, sino que, además, estudió las superficies mínimas con borde formado por dos circunferencias o por una circunferencia y una recta.



Figura 1.4: Joseph Plateau (1801–1883).

La versión que hemos aportado anteriormente no es la única interpretación del problema de Plateau. En el siglo XX, los matemáticos se centrarán en la versión no paramétrica de este, la cual versa como sigue:

Tenemos una región R en el plano y buscamos una función definida en R , con valores de frontera dados y cuyo grafo sea una superficie mínima.

Y es que esta guarda una fuerte relación con ciertos problemas de la famosa conferencia de *David Hilbert* en el año 1900:

- **Problema 19:** ¿Son siempre analíticas las soluciones de los Lagrangianos?
- **Problema 20:** ¿Tienen solución todos los problemas variacionales con ciertas condiciones de contorno?
- **Problema 21:** Probar la existencia de ecuaciones lineales diferenciales que tengan un grupo monodrómico prescrito.

En 1902, *Henri Lebesgue* halla una solución lipschitziana para el caso de R una región convexa con frontera de curvatura nunca nula. Esta superficie es mínima en el sentido de que tiene área mínima, pero al no saber si tiene derivadas segundas clásicas, Lebesgue no pudo demostrar que tuviera curvatura media nula (definición de superficie mínima). Años más tarde, en 1926, *René Garnier* da una solución al Problema 21 y se dispone a atacar el problema de Plateau. Para ello, vuelve a las técnicas empleadas en el pasado siglo: considera una poligonal y busca las funciones holomorfas que den una superficie mínima conteniendo a dicha poligonal. El obstáculo de las esquinas de la poligonal lo sortea con ayuda de su solución del Problema 21 de Hilbert. Además, em-

plea un método de paso al límite en sucesiones de poligonales, que le permite resolver el problema de Plateau para las curvas cerradas simples no anudadas y de curvatura acotada a trozos. Pese a que hay curvas que no se pueden tratar mediante su método, es la primera solución general al problema de Plateau.



(a) Tibor Radó (1895–1965).



(b) Jesse Douglas (1897–1965).

Figura 1.5: Tibor Radó y Jesse Douglas.

En 1930, *Tibor Radó* (Figura 1.5a) publica una solución basándose en una aproximación del problema de Plateau: se deben cumplir las condiciones de contorno, pero la ecuación de las superficies mínimas se sustituye por una ε -aproximación, con ε un escalar positivo dado. También en 1930, *Jesse Douglas* (Figura 1.5b) aporta la que será la solución definitiva del problema y por la que le otorgaron la *Medalla Fields*.

La demostración que abordaremos en este trabajo está basada en la que aportó Douglas, pero con las modificaciones de *Richard Courant* (Figura 1.6) y combinada con las que se aportan en [4, 11, 15].



Figura 1.6: Richard Courant (1888–1972).

El presente trabajo se estructura de la siguiente manera:

Primero de todo, un capítulo donde veremos una serie de definiciones y resultados que nos serán de utilidad a lo largo de este. En el siguiente, trataremos las superficies mínimas desde distintas ramas de las matemáticas, no solo desde la *Geometría Diferencial*, y trabajaremos con algunas superficies de interés. A continuación, abordaremos el problema de Plateau desde el punto de vista del *Análisis Matemático* y la *Teoría del Potencial*, donde finalizaremos mostrando la relación que existe entre las superficies mínimas y las pompas de jabón. Terminamos este trabajo, mostrando al lector el código de *SageMath* empleado para la representación de las superficies.

PRELIMINARES.

El estudio de las matemáticas, como el Nílo, comienza con minuciosidad pero termina con magnificencia.

CHARLES CALEB COLTON

En el capítulo que nos ocupa se aportará una serie de definiciones y resultados que nos serán de utilidad para el cometido de este trabajo. Por ser unos meros preliminares, obviaremos las demostraciones de los mismos. Para ver estas o más información de la aquí ofrecida, el lector puede consultar [2, 5, 14] para las nociones sobre *Geometría*. En cambio, para los conceptos sobre *Análisis Complejo* puede consultar [17]. Por otra parte, para los resultados y definiciones sobre *Teoría del Potencial* véase [1, 9].

Nota 2.1.

Para nosotros los vectores irán representados en “negrita”, es decir; \mathbf{v} . Además, escribiremos el producto escalar entre dos vectores cualesquiera, \mathbf{u} y \mathbf{v} , como $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

Comenzamos por lo básico, enunciando lo que entendemos por *curva regular*.

Definición 2.1.

Una **curva parametrizada regular** (que abreviamos como *c.p.r.*) en \mathbb{R}^m es una aplicación $\alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

1. Se tiene que $\alpha \in \mathcal{C}^k$, con $k \geq 1$.
2. Se verifica la condición $\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$.

Nota 2.2.

1. La segunda condición se denomina *Condición de Regularidad*.
2. Si $m = 2$ diremos que la curva es *plana*. En cambio, si $m = 3$ se dice que la curva es *alabeada*.

A veces, el mismo conjunto imagen puede describirse por diferentes parametrizaciones. Interesa saber cuándo al cambiar la forma de describir la curva como lugar de puntos, no se pierde la Condición de Regularidad.

Definición 2.2.

Sea $\alpha : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ una c.p.r. $\alpha = \alpha(t)$. Una **reparametrización regular** o **cambio de parámetros regular** de α es una función $f : (c,d) \subset \mathbb{R} \rightarrow (a,b)$, dada por $f(r) = t$, biyectiva y de clase C^k , $k \geq 1$, tal que $\frac{df}{dr} = \frac{dt}{dr} \neq 0$ en todo (c,d) .

Definición 2.3.

Un **segmento de c.p.r. (arco regular)** es una aplicación $\alpha : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que existe un intervalo (c,d) que contiene a $[a,b]$ y existe una c.p.r. $\beta : (c,d) \rightarrow \mathbb{R}^m$ cumpliendo que $\beta|_{[a,b]} = \alpha$. Así, es posible considerar $\alpha'(a) = \beta'(a)$ y $\alpha'(b) = \beta'(b)$. La **longitud** del arco regular α es:

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Dada una c.p.r. $\alpha : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ y un punto $t_0 \in (a,b)$, se considera la función $s : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\sigma)\| d\sigma.$$

De esta forma, $s = s(t)$ mide la longitud del arco regular de α correspondiente a $[t_0, t]$ ó $[t, t_0]$, naturalmente con signo. Por ello, a la función $s = s(t)$ se le llama **longitud de arco** de la curva α con referencia a t_0 .

A raíz de este concepto, surge el siguiente teorema, que, pese a su simpleza, resulta primordial pues nos permitirá simplificar algunos cálculos, así como definir ciertas nociones de manera sencilla.

Teorema 2.1.

Toda c.p.r. puede ser reparametrizada regularmente por su longitud de arco.

Definición 2.4.

La parametrización de una curva por su arco se llama **parametrización natural**. Al parámetro longitud de arco se le llama **parámetro natural** o **parámetro arco**.

Teorema 2.2.

Una curva parametrizada $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ lo está por su longitud de arco (salvo constante) si y solo si $\|\alpha'(t)\| = 1$, para todo $t \in (a, b)$.

Nota 2.3.

Emplearemos “ \cdot ” para denotar la derivación respecto del parámetro natural.

Los siguientes conceptos que trataremos versan sobre los vectores asociados a una curva.

Definición 2.5.

Sean $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ una c.p.r. y $t_0 \in (a, b)$. Se llama **vector velocidad** de α en $\alpha(t_0)$ al vector $\alpha'(t_0)$. Al módulo del vector velocidad de α en $\alpha(t_0)$ se le llama **velocidad** de α en $\alpha(t_0)$. Se llama **vector tangente** a α en $\alpha(t_0)$ al vector $\mathbf{t}(t_0) = \frac{\alpha'(t_0)}{\|\alpha'(t_0)\|}$. Se llama **campo vectorial tangente** de α a la aplicación

$$\mathbf{t} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ dada por } t \mapsto \mathbf{t}(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Definición 2.6.

Sea $\alpha = \alpha(s)$ una curva regular parametrizada naturalmente en \mathbb{R}^3 . Se llama **curvatura** de α a la función $\kappa = \kappa(s) = \|\ddot{\alpha}(s)\|$.

Definición 2.7.

Sea $\alpha = \alpha(s)$ una curva regular parametrizada naturalmente en \mathbb{R}^3 . Se define el **vector normal principal** de α en un punto $\alpha(s_0)$ tal que $\kappa(s_0) > 0$ como

$$\mathbf{n}(s_0) = \frac{\ddot{\alpha}(s_0)}{\kappa(s_0)}.$$

A la aplicación $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s) = \frac{\ddot{\alpha}(s)}{\kappa(s)}$ se le llama **campo vectorial normal principal** a lo largo de α .

Definición 2.8.

Sea $\alpha = \alpha(s)$ una curva regular parametrizada naturalmente en \mathbb{R}^3 . Se define el **vector binormal** de α en un punto $\alpha(s_0)$ como $\mathbf{b}(s_0) = \mathbf{t}(s_0) \times \mathbf{n}(s_0)$. A la aplicación $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$ se le llama **campo vectorial binormal** a lo largo de α .

Definición 2.9.

Dada una *c.r.p.n.*, $\alpha = \alpha(s)$, en \mathbb{R}^3 , se llama **Triedro o Referencia de Frenet** en el punto $\alpha(s)$ de α al triedro

$$\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}.$$

Proposición 2.1.

Sea $\alpha = \alpha(t)$ una *c.p.r.* en \mathbb{R}^3 . Entonces, se tiene que

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}; \quad \mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t).$$

Presentamos ahora lo que entendemos por *superficie parametrizada*:

Definición 2.10.

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto. Una **superficie parametrizada** (abreviadamente *s.p.*) en \mathbb{R}^3 es una aplicación $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

1. La aplicación \mathbf{x} es de clase \mathcal{C}^∞ .
2. Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$, entonces

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \neq \mathbf{0}, \quad (\text{C.R.})$$

en todos los puntos de U .

Además, si \mathbf{x} es inyectiva se llamará una **superficie simple** (que abreviamos como *s.s.*).

Nota 2.4.

1. La condición (C.R.) de esta definición se llama *Condición de Regularidad*.
2. En lo que sigue, para mayor simplicidad, escribiremos

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \mathbf{X}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \mathbf{X}_2,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^2} = \mathbf{X}_{11}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial v^2} = \mathbf{X}_{22} \text{ y}$$

$$\mathbf{X}_{12} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial v \partial u} = \mathbf{X}_{21}.$$

3. Si $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una s.s., por inyectividad, dado cualquier $p \in U$, existe un *único* punto $(u_0, v_0) \in U$ tal que $\mathbf{x}(u_0, v_0) = p$. Convendremos en decir que p tiene las coordenadas (u_0, v_0) (que, en realidad, son las de $\mathbf{x}^{-1}(p)$). Por ello, al vector $\mathbf{X}_i(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$ lo escribiremos como $\mathbf{X}_i(p)$, para $i = 1, 2$.

Definamos ahora un tipo de s.s. que será de interés posteriormente.

Definición 2.11.

Sea $f = f(u, v)$ una función diferenciable, definida en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ y con valores en \mathbb{R} . Se define el **grafo de f** o **carta de Monge** como la s.s. $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$, para $(u, v) \in U$.

Una vez que ya sabemos lo que es una s.p., necesitamos una noción más general de superficie, que es la siguiente:

Definición 2.12.

Sea $M \subseteq \mathbb{R}^3$. Se dice que M es una **superficie regular** (lo abreviaremos como s.r.) o **superficie inmersa** de \mathbb{R}^3 , si para cada $p \in M$ existen $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y una aplicación $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, tales que:

1. El conjunto $\mathbf{x}(U)$ está contenido en M y es entorno abierto de p en M .
2. La aplicación \mathbf{x} es homeomorfismo sobre su imagen, dotada esta de la topología euclídea relativa de \mathbb{R}^3 .
3. \mathbf{x} es una s.p. (y, por la condición anterior, también s.s.).

Cualquier aplicación verificando estas condiciones se denomina **parametrización local** (abreviadamente *p.l.*) o **parametrización regular** de M en p . La aplicación inversa $\mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \rightarrow U$ se llama **carta local** en p (cuya existencia se garantiza por la condición 3). El entorno $\mathbf{x}(U)$ de p en M se llama **entorno coordinado** y las coordenadas $\mathbf{x}^{-1}(p)$ se denominan **coordenadas locales** de p .

Vamos a tratar ahora algunos de los vectores más importantes ligados a una superficie regular.

Definición 2.13.

Sean M una s.r. y $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ una *p.l.* de M en un punto $p \in M$. Una **curva diferenciable** (de clase C^∞) en \mathbf{x} es una aplicación $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbf{x}(U)$ tal que $\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha : (a, b) \rightarrow U$ es una curva parametrizada de clase C^∞ .

Definición 2.14.

Sean M una s.r. y $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ una *p.l.* de M en un punto $p \in M$. Un **vector tangente** a \mathbf{x} en p es un vector tangente a cualquier curva diferenciable α en \mathbf{x} que pase por p .

Definición 2.15.

Sean M una s.r. y $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ una *p.l.* de M en un punto $p \in M$, $p = \mathbf{x}(u_0, v_0)$, $(u_0, v_0) \in U$, con $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto. Se llama **vector normal** a \mathbf{x} en p al vector

$$\mathbf{N}(u_0, v_0) = \frac{\mathbf{X}_1(p) \times \mathbf{X}_2(p)}{\|\mathbf{X}_1(p) \times \mathbf{X}_2(p)\|} \equiv \mathbf{N}(p) \text{ (lo notaremos de esta forma)}$$

que es unitario y, por (C.R.) está bien definido. Se llama **aplicación de Gauss** de \mathbf{x} a la aplicación:

$$\mathbf{N} : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ dada por } \mathbf{N}(p) = \frac{\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2}{\|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2\|}(p), \text{ para todo } p \in \mathbf{x}(U).$$

Observación 2.1.

Es inmediato, a partir de la propia definición, ver que $\langle \mathbf{N}(p), \mathbf{X}_i(p) \rangle = 0$, para $i = 1, 2$.

Observación 2.2.

Como el vector normal es unitario, $\|\mathbf{N}\|^2 = \langle \mathbf{N}(p), \mathbf{N}(p) \rangle = 1$. Derivando aquí, llegamos a que $\langle \mathbf{N}(p), \mathbf{N}_i(p) \rangle = 0$, para $i = 1, 2$; donde hemos denotado por $\mathbf{N}_1 = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u}$ y $\mathbf{N}_2 = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v}$.

Ligado al vector normal a la superficie \mathbf{x} en un punto $p \in \mathbf{x}(U)$ tenemos el plano tangente a \mathbf{x} en p , el cual denotamos por $T_p(\mathbf{x})$ y está definido como el plano cuyo vector normal es $\mathbf{N}(p)$. Se tiene, además, que $\mathbf{X}_1(p), \mathbf{X}_2(p)$ pertenecen a $T_p(\mathbf{x})$. Más aún, todo vector de $T_p(\mathbf{x})$ se puede expresar como combinación lineal de $\mathbf{X}_1(p)$ y $\mathbf{X}_2(p)$.

Observación 2.3.

Dados una *p.l.* de una *s.r.* $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ y un punto $p \in \mathbf{x}(U)$, en virtud de (C.R.), sabemos que los vectores $\mathbf{X}_1(p)$ y $\mathbf{X}_2(p)$ son linealmente independientes.

El siguiente es un concepto de suma importancia tanto para nuestro estudio como para la *Geometría Diferencial* en general: los *coeficientes métricos*.

Definición 2.16.

Se llaman **coeficientes métricos** de una *p.l.* de una *s.r.*, $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, a las funciones $g_{ij} = \langle \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \rangle$, $i, j = 1, 2$. Dichas funciones definen una matriz simétrica y definida positiva que denotamos por $G = (g_{ij})_{i,j=1,2}$.

Definición 2.17.

Dada una *p.l.* de una *s.r.* $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, la regla que en cada $p \in \mathbf{x}(U)$ le asigna a cada par de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in T_p(\mathbf{x})$ su producto escalar se llama **Primera Forma Fundamental** (que abreviamos como *P.F.F.*) de la superficie en p .

Observación 2.4.

Como enunciamos antes, los vectores de $T_p(\mathbf{x})$ pueden expresarse como combinación lineal de $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$. Por ello, es usual denominar a los coeficientes métricos como **coeficientes de la Primera Forma Fundamental**.

Si consideramos la base $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{N}\}$, podemos expresar los vectores \mathbf{X}_{ij} , para $i, j = 1, 2$, en función de ella. De esta forma tendríamos:

$$\mathbf{X}_{ij} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \mathbf{X}_k + L_{ij} \mathbf{N}, \text{ para todos } i, j = 1, 2.$$

Estas ecuaciones se denominan **Ecuaciones de Gauss**. Los coeficientes Γ_{ij}^k , para $i, j, k = 1, 2$, se llaman **símbolos de Christoffel** de la superficie y los coeficientes L_{ij} , para $i, j =$

1,2, se llaman **coeficientes de la Segunda Forma Fundamental** y son funciones con valores reales en $\mathbf{x}(U)$. Además, estos verifican

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{h=1}^2 \langle \mathbf{X}_{ij}, \mathbf{X}_h \rangle g^{hk};$$

$$L_{ij} = \langle \mathbf{X}_{ij}, \mathbf{N} \rangle = -\langle \mathbf{X}_i, \mathbf{N}_j \rangle, \quad (2.1)$$

para todos $i, j, k = 1, 2$; donde $g^{hk} = \begin{cases} \frac{g_{22}}{\det(G)} & \text{si } h = k = 1, \\ \frac{-g_{12}}{\det(G)} & \text{si } h = 1 \text{ ó } k = 1, \\ \frac{g_{11}}{\det(G)} & \text{si } h = k = 2. \end{cases}$

Observación 2.5.

Es fácil ver, a partir de la regularidad de \mathbf{x} , que $L_{ij} = L_{ji}$.

Como anunciamos anteriormente, el estudio de las superficies mínimas surge a raíz de la búsqueda de la superficie de menor área extendida a través de un entorno cerrado. Es por ello que debemos enunciar lo que entendemos por *área de una región acotada*, pero antes debemos aclarar el concepto de *región acotada*.

Definición 2.18.

Un **dominio** en una superficie es un abierto conexo en $\mathbf{x}(U)$ tal que su frontera es la imagen de una circunferencia del plano (u, v) bajo un difeomorfismo diferenciable a trozos. Una **región** es una unión de un dominio y su frontera. Una región $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{x}(U)$ se dice **acotada** si existe una bola de \mathbb{R}^3 que la contiene (lo cual es equivalente a que $\mathbf{x}^{-1}(\mathcal{R})$ sea acotada en el plano (u, v)).

Ahora sí estamos en disposición de dar la definición de *área*.

Definición 2.19.

El **área de una región acotada** $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{x}(U)$ viene dada por:

$$A(\mathcal{R}) = \int \int_{\mathbf{x}^{-1}(\mathcal{R})} \|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2\| du dv = \int \int_{\mathbf{x}^{-1}(\mathcal{R})} \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du dv. \quad (2.2)$$

Nos resultará de interés también introducir la diferencial de la aplicación de Gauss en un punto cualquiera $p \in \mathbf{x}(U)$:

$$d\mathbf{N}_p : T_p(M) \longrightarrow T_{\mathbf{N}(p)}(S^2), \text{ dada por } d\mathbf{N}_p(\mathbf{v}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\mathbf{N} \circ \alpha)(t),$$

donde α es cualquier curva diferenciable en $\mathbf{x}(U)$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$.

Definición 2.20.

Se llama **operador forma** o **endomorfismo de Weingarten** en $p \in \mathbf{x}(U)$ a la aplicación lineal $L_p = -d\mathbf{N}_p : T_p(\mathbf{x}) \longrightarrow T_p(\mathbf{x})$.

Proposición 2.2.

Para cada $p \in \mathbf{x}(U)$, el endomorfismo de Weingarten es autoadjunto respecto al producto escalar en $T_p(\mathbf{x})$ dado por la Primera Forma Fundamental, es decir, para cualesquiera $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p(\mathbf{x})$ se verifica que $\langle L_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, L_p(\mathbf{w}) \rangle$.

En consecuencia de este resultado, los dos autovectores de L_p son reales y se denotan por κ_1 y κ_2 y se llaman **curvaturas principales** en p . Los correspondientes autovectores se llaman **direcciones principales** en p y, tomados unitarios, se denotan por $\mathbf{X}_{(1)}(p)$ y $\mathbf{X}_{(2)}(p)$.

Observación 2.6.

Destaquemos que los vectores $\mathbf{X}_{(1)}(p)$ y $\mathbf{X}_{(2)}(p)$ se pueden tomar de manera que formen una base ortonormal.

Definición 2.21.

Sea $\mathbf{x} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una p.l. de una s.r. $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$. Sea $\alpha = \alpha(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ una curva regular parametrizada naturalmente en \mathbf{x} y denotemos por $\mathbf{N}(s) = \mathbf{N}(u(s), v(s))$. Se define la **curvatura geodésica** como la siguiente función:

$$K_g(s) = \langle \mathbf{N}(s), \dot{\alpha}(s) \times \ddot{\alpha}(s) \rangle.$$

Definición 2.22.

Sea $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una *p.l.* de una *s.r.* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$. Sea $\alpha = \alpha(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ una *c.r.p.n.* en \mathbf{x} . La curva α se dice que es una **geodésica** en \mathbf{x} si su curvatura geodésica es idénticamente nula.

A continuación, daremos a conocer lo que es la *curvatura normal*, que nos resultará de utilidad para definir la *curvatura media* de una superficie, concepto de gran importancia para el presente estudio.

Definición 2.23.

Sea $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una *p.l.* de una *s.r.*, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$. Sea $\alpha = \alpha(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ una curva regular parametrizada naturalmente en \mathbf{x} y denotemos por $\mathbf{N}(s) = \mathbf{N}(u(s), v(s))$. La función $K_n(s)$ definida por

$$K_n(s) = \langle \ddot{\alpha}(s), \mathbf{N}(s) \rangle,$$

se llama **curvatura normal** de α en el punto $\alpha(s)$.

Observación 2.7.

Bajo las mismas condiciones de la definición anterior, las curvaturas principales, κ_1 y κ_2 , se pueden interpretar como la menor y mayor, respectivamente, de las curvaturas normales.

Proposición 2.3.

Las curvaturas principales son las soluciones de la ecuación:

$$\det \begin{pmatrix} L_{11} - \lambda g_{11} & L_{12} - \lambda g_{12} \\ L_{21} - \lambda g_{21} & L_{22} - \lambda g_{22} \end{pmatrix} = 0.$$

Observación 2.8.

Como κ_1 y κ_2 son las soluciones de la ecuación de segundo grado anterior, se tiene:

$$\kappa_1 + \kappa_2 = \frac{g_{11}L_{22} + g_{22}L_{11} - 2g_{12}L_{12}}{\det(G)} = \frac{g_{11}L_{22} + g_{22}L_{11} - 2g_{12}L_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Definición 2.24.

Sea $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una *p.l.* de una *s.r.* y sea $p \in \mathbf{x}(U)$, se llama **curvatura media** de \mathbf{x} en p a la aplicación

$$H(p) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}(p) = \frac{1}{2} \frac{g_{11}L_{22} + g_{22}L_{11} - 2g_{12}L_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}(p). \quad (2.3)$$

Definición 2.25.

Sea $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una *p.l.* de una *s.r.* y sea $p \in \mathbf{x}(U)$, se llama **curvatura de Gauss** de \mathbf{x} en p a la aplicación

$$K(p) = \kappa_1(p)\kappa_2(p).$$

A continuación trataremos nociones sobre la relación entre superficies, para los que necesitaremos la siguiente definición:

Definición 2.26.

Sean M, N superficies regulares. Dados $f : M \rightarrow N$ y $p \in M$, se define la **diferencial de f en p** como la aplicación $f_{*p} : T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$ dada por $f_{*p}(\mathbf{v}) = (f \circ \gamma)'(0)$, para cualquier $\mathbf{v} \in T_p(M)$, donde $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ una curva diferenciable tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = \mathbf{v}$.

Definición 2.27.

Dadas M, N superficies regulares, una aplicación $f : M \rightarrow N$ se dirá **isometría** si f es biyectiva, regular y la aplicación f_{*p} verifica

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle f_{*p}(\mathbf{v}), f_{*p}(\mathbf{w}) \rangle$$

para cualesquiera $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p(M)$ y para todo $p \in M$.

Definición 2.28.

Sean nuevamente M y N superficies regulares. Se dice que M es **localmente isométrica** a N si para todo $p \in M$, existen U entorno abierto de p en M , V abierto en N y una aplicación $f : U \rightarrow V$ que es isometría. Si M es localmente isométrica a N y N es localmente isométrica a M , se dice que son **localmente isométricas**.

Teorema 2.3 - Caracterización de superficies localmente isométricas.

Sean M y N superficies regulares. Entonces M es localmente isométrica a N si y solo si, para todo punto $p \in M$, existen U abierto en \mathbb{R}^2 , $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ superficie simple en M con $p \in \mathbf{x}(U)$ e $\mathbf{y} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ superficie simple en N tales que los coeficientes métricos $g_{ij}^{\mathbf{x}}$ de \mathbf{x} y los de \mathbf{y} , $g_{ij}^{\mathbf{y}}$, verifican:

$$g_{ij}^{\mathbf{x}}(u, v) = g_{ij}^{\mathbf{y}}(u, v),$$

para todo $(u, v) \in U$.

Definición 2.29.

Sean M y N superficies regulares. Una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ se dice **conforme** si es biyectiva, regular y

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \lambda(p)^2 \langle f_{*p}(\mathbf{v}), f_{*p}(\mathbf{w}) \rangle,$$

para todo punto $p \in M$ y para cualesquiera $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p(M)$, siendo λ una función diferenciable en M , no nula en cada punto.

Definición 2.30.

Sean M y N superficies regulares. Se dice que M es **localmente conforme** a N si para todo punto $p \in M$, existen U entorno abierto de p en M , V abierto en N y $f : U \rightarrow V$ conforme.

Teorema 2.4 - Caracterización de superficies localmente conformes.

Sean M y N superficies regulares. Entonces M es localmente conforme a N si y solo si, para todo $p \in M$, existen U abierto en \mathbb{R}^2 , $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ s.s. en M con $p \in \mathbf{x}(U)$ e $\mathbf{y} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ s.s. en N tales que los coeficientes métricos $g_{ij}^{\mathbf{x}}$ de \mathbf{x} y los de \mathbf{y} , $g_{ij}^{\mathbf{y}}$, verifican:

$$g_{ij}^{\mathbf{x}}(u, v) = \lambda(u, v)^2 g_{ij}^{\mathbf{y}}(u, v),$$

para todo $(u, v) \in U$.

Aportemos la última definición y resultado geométricos convenientes para nuestro estudio.

Definición 2.31.

Sea $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una *p.l.* de una superficie regular. Si los coeficientes de la Primera Forma Fundamental verifican

$$g_{11} = g_{22} > 0 \text{ y } g_{12} = 0 = g_{21},$$

diremos que dicha parametrización es **isoterma**.

Teorema 2.5.

Sea M una superficie regular. Dado cualquier $p \in M$, existe una superficie simple $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $p \in \mathbf{x}(U) \subseteq M$ tal que es isoterma.

Recordemos algunos términos sobre sucesiones de funciones. Estos y más se pueden consultar en [16].

Definición 2.32.

Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en un conjunto Ω . Supongamos que la sucesión $(f_n(x))$ converge para cada $x \in \Omega$. Podemos definir entonces

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

para todo $x \in \Omega$. Bajo estas circunstancias, se dice que (f_n) **converge puntualmente** a f en Ω . Se dirá también que la sucesión (f_n) **converge uniformemente** a f en Ω si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para cada $x \in \Omega$.

Observación 2.9.

La convergencia uniforme implica la convergencia puntual.

Definición 2.33.

Una familia \mathcal{F} de funciones complejas f definidas sobre un conjunto Ω de un espacio métrico (X, d) , se dice que es **equicontinua** si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|f(z) - f(w)\| < \varepsilon$, para cualesquiera $d(z, w) < \delta$, con $z, w \in \Omega$.

Un resultado que nos va a resultar de utilidad en cierto punto de la demostración del problema de Plateau es el siguiente:

Teorema 2.6 - de Arzelà-Ascoli.

Sea K un espacio métrico compacto. Si una sucesión de funciones (f_n) es continua, puntualmente acotada (esto es, existe una función g con valores finitos definida en K tal que $\|f_n\| < g$ en K y para todo $n = 1, 2, \dots$) y equicontinua, entonces posee una subsucesión (f_{n_k}) que converge uniformemente.

Damos ahora a conocer un concepto primordial en el *Análisis Complejo*: el carácter *holomorfo* de una función.

Definición 2.34.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y sea también $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. La función f es **holomorfa en el punto** $z_0 \in \Omega$ si existe

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \in \mathbb{C}.$$

Diremos que la función f es **holomorfa en** Ω si es holomorfa en todos los puntos de Ω .

El siguiente resultado resulta fundamental a la hora de distinguir este tipo de funciones, además de relacionar el *Análisis Real* con el *Complejo* a partir de las conocidas *ecuaciones de Cauchy-Riemann*.

Teorema 2.7.

Sea $f = u + iv$ una función definida en $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Sea $z_0 = x_0 + iy_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

1. La función f es holomorfa en z_0 .
2. Las funciones $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son continuamente diferenciables y satisfacen las *ecuaciones de Cauchy-Riemann* en z_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(z_0), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0). \end{aligned}$$

Lo siguiente que veremos será el término de función *analítica* y su relación con las funciones holomorfas.

Definición 2.35.

Una función f definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice **analítica en un punto** $z_0 \in \Omega$ si existe una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ tal que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, para todo z en un entorno de z_0 . Si f se puede expresar como la suma de una serie de potencias en todo punto de Ω , se dirá que f es **analítica en Ω** .

Teorema 2.8.

Toda función analítica en Ω es holomorfa en Ω .

Recíprocamente, supongamos que f es holomorfa en un abierto Ω . Sea $z_0 \in \Omega$. Si D es un disco centrado en z_0 cuya clausura está contenida en Ω , entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \text{ para todo } z \in D.$$

Otro concepto analítico que nos convendrá tener presente es el de *serie de Fourier*, el cual ha sido extraído de [8].

Definición 2.36.

Sea f una función periódica de periodo $T > 0$. Se define la **serie de Fourier** de f como

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(2\pi\omega_n t) + b_n \sin(2\pi\omega_n t)],$$

donde $\omega_n = \frac{n}{T}$, $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi\omega_n t) dt$ y $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi\omega_n t) dt$.

Procedamos ahora con los conceptos sobre *Ecuaciones en Derivadas Parciales*. Recordemos primero que el *laplaciano* de una función diferenciable $u : U \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, denotado por Δu , es $\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. Ahora bien, sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado ($N \geq 2$), $f \in C^0(\Omega)$ y $\Gamma \in C^0(\partial\Omega)$. Vamos a considerar el problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = \Gamma & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

Proposición 2.4.

Bajo las condiciones precedentes, el Problema (2.4) posee a lo sumo una solución $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

Introduzcamos el concepto de *función armónica*, pues va a ser el hilo conductor que relacionará las funciones complejas con las superficies mínimas y, además, volverá a aparecer en la resolución del problema de Plateau.

Definición 2.37.

Sea $u : U \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Se dice que u es **armónica** en U si $\Delta u = 0$.

Referente a este tipo de funciones tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.5.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, abierto y $u \in C^0(\Omega)$ armónica, entonces $u \in C^\infty(\Omega)$.

El siguiente resultado sobre funciones armónicas nos será de utilidad en la demostración del problema de Plateau:

Teorema 2.9 - Primer teorema de Harnack.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, un abierto acotado. Sea (u_n) una sucesión de funciones continuas en $\overline{\Omega}$ y armónicas en Ω . Si (u_n) es uniformemente continua sobre $\partial\Omega$, entonces también converge uniformemente en Ω a una función armónica u .

Otro resultado importante de cara a la demostración del problema de Plateau es el que enunciamos a continuación:

Teorema 2.10.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, un abierto acotado. Supongamos que (u_n) es una sucesión de funciones armónicas sobre Ω tal que converge uniformemente a una función u en cada subconjunto compacto de Ω . Entonces, u es armónica en Ω . Más aún, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^N$, la sucesión $\left(D^\alpha u_n = \frac{\partial^k u_n}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \right)$, con $k = \|\alpha\|$; converge uniformemente a $D^\alpha u$ en cada subconjunto compacto de Ω .

Los resultados que trataremos a continuación están destinados a probar la existencia de solución de (2.4).

Definición 2.38.

Un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es **de clase \mathcal{C}^1** si para cualquier punto $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$, existe un abierto U tal que $\mathbf{x}_0 \in U$ y una aplicación biyectiva

$$\begin{aligned} \Phi : B(\mathbf{0}, \delta) &\longrightarrow U \\ \mathbf{0} &\longmapsto \mathbf{x}_0 \\ B(\mathbf{0}, \delta) \cap \{\mathbf{x}_N > 0\} &\longmapsto U \cap \Omega \\ B(\mathbf{0}, \delta) \cap \{\mathbf{x}_N = 0\} &\longmapsto U \cap \partial\Omega \end{aligned}$$

de clase \mathcal{C}^1 y su inversa también.

Definición 2.39.

Se define la **solución fundamental del Laplaciano** $\mathcal{G} : \mathbb{R}^N \setminus \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = \Psi(\|\mathbf{x}\|), \text{ con } \Psi(r) = \begin{cases} -\frac{1}{(N-2)|S^N|r^{N-2}} & \text{si } N > 2, \\ \frac{\log(r)}{|S^2|} & \text{si } N = 2. \end{cases}$$

El primer resultado de relevancia sobre \mathcal{G} es el siguiente:

Teorema 2.11.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \leq 2$, abierto, acotado, de clase \mathcal{C}^1 y $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Entonces para todo $\mathbf{x} \in \Omega$ se cumple:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{y}) \mathcal{G}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y} + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} u(\mathbf{y}) - \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} \mathcal{G}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right) ds(\mathbf{y}),$$

donde hemos denotado $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \langle \nabla f, \mathbf{n} \rangle$, con \mathbf{n} el vector normal exterior a $\partial\Omega$.

Con el objetivo de mejorar ahora la expresión anterior, buscamos una fórmula que nos permita calcular u conociendo únicamente los valores de Δu en Ω y los de u sobre $\partial\Omega$.

Definición 2.40.

Dado un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, acotado de clase \mathcal{C}^1 , se denomina **función de Green** en Ω a una función $G : \overline{\Omega} \times \Omega \setminus D \rightarrow \mathbb{R}$, con

$$D = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N : \mathbf{x} = \mathbf{y} \right\},$$

tal que la función $w : \overline{\Omega} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $w(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - \mathcal{G}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$, es solución del problema

$$\begin{cases} w(\cdot, \mathbf{x}) \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}), & \text{para todo } \mathbf{x} \in \Omega, \\ -\Delta_{\mathbf{y}} w(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0, & \text{para cualquier } (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \overline{\Omega} \times \Omega, \\ w(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -\mathcal{G}(\mathbf{y} - \mathbf{x}), & \text{para todo } (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \partial\Omega \times \Omega. \end{cases}$$

Para el caso de abiertos muy simples, es posible dar una representación explícita de la función de Green:

Teorema 2.12.

Para $\Omega = B(\mathbf{0}, R) \subset \mathbb{R}^N$, la función de Green viene dada por

$$G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \begin{cases} \mathcal{G}(\mathbf{y}) - \Psi(R) & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{0}, \\ \mathcal{G}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \mathcal{G}\left(\frac{\|\mathbf{x}\|}{R}(\mathbf{y} - \mathbf{x}^*)\right) & \text{si } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \end{cases}$$

donde $\mathbf{x}^* = \frac{R^2}{\|\mathbf{x}\|^2} \mathbf{x}$.

A partir de esta expresión de la función de Green, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.6.

Sea $H : \bar{B}(\mathbf{0}, R) \times \bar{B}(\mathbf{0}, R) \setminus D \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$H(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} = \frac{R^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{|S^N| R \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^N}, \text{ para cualquier } (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \bar{B}(\mathbf{0}, R) \times \bar{B}(\mathbf{0}, R) \setminus D,$$

entonces, para toda función $u \in C^2(\bar{B}(\mathbf{0}, R))$, se verifica

$$u(\mathbf{x}) = \int_{B(\mathbf{0}, R)} \Delta u(\mathbf{y}) G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\mathbf{y} + \int_{\partial B(\mathbf{0}, R)} u(\mathbf{y}) H(\mathbf{y}, \mathbf{x}) ds(\mathbf{y}), \text{ para todo } \mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, R).$$

Esta función H que acabamos de definir se llama **núcleo de Poisson** y, si tomamos $u \in C^2(\bar{B}(\mathbf{0}, R))$ armónica en $B(\mathbf{0}, R)$, se tiene

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial B(\mathbf{0}, R)} u(\mathbf{y}) H(\mathbf{y}, \mathbf{x}) ds(\mathbf{y}), \text{ para cualquier } \mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, R),$$

que es lo que se conoce como la **fórmula integral de Poisson**.

Para finalizar, enunciamos el resultado de existencia y unicidad que requeríamos:

Teorema 2.13.

Para toda función $\Gamma \in C^0(\partial B(\mathbf{0}, R))$ existe una única $u \in C^0(\bar{B}(\mathbf{0}, R)) \cap C^\infty(B(\mathbf{0}, R))$ solución de

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en } B(\mathbf{0}, R), \\ u = \Gamma & \text{sobre } \partial B(\mathbf{0}, R), \end{cases}$$

la cual viene dada por

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} \int_{\partial B(\mathbf{0}, R)} \Gamma(\mathbf{y}) H(\mathbf{y}, \mathbf{x}) ds(\mathbf{y}) & \text{si } \mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, R), \\ \Gamma(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \partial B(\mathbf{0}, R). \end{cases}$$

Con esto, contamos ya con las herramientas necesarias para afrontar el tema de este trabajo.

SUPERFICIES MÍNIMAS.

Está bien trabajar en cualquier problema, siempre y cuando genere matemáticas interesantes en el camino, incluso si no lo resuelve al final del día.

ANDREW WILES

3.1 EQUIVALENCIAS.

! Son varias las definiciones equivalentes que podemos encontrar de superficie mínima. El ver que todas ellas resultan equivalentes es el objetivo de esta sección. Para las matemáticas que se encontrarán aquí se han seguido los manuales [5, 7]. !

Durante años, los matemáticos se encontraron en debate sobre qué curvatura de una superficie era más relevante (si la curvatura de Gauss o la curvatura media). El *Teorema Egregio de Gauss* sería el que pusiera fin a este dilema, pues demuestra que la curvatura de Gauss es una cantidad intrínseca y su significado, de alguna forma, contenía información sobre la geometría de la propia superficie, con independencia de su inclusión en el espacio euclídeo. Cabe preguntarse igualmente por qué este debate duró tantos años. La siguiente definición es la que otorgará verdadera importancia a la curvatura media H de una superficie.

Definición 3.1.

Una superficie parametrizada se dice que es **mínima** si su curvatura media es nula en todos los puntos. Una superficie regular $M \subseteq \mathbb{R}^3$ es **mínima** si cada una de sus parametrizaciones es mínima.

Para entender la denominación *mínima* vamos a considerar $x : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ superficie mínima parametrizada regular. Sean $D \subset U$ un dominio acotado y $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ una

función diferenciable, donde $\bar{D} = D \cup \partial D$. Definimos la **variación normal** de $\mathbf{x}(\bar{D})$, determinada por h , como la siguiente aplicación:

$$\varphi : \bar{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\varphi(u, v, t) = \mathbf{x}(u, v) + th(u, v)\mathbf{N}(u, v); \quad (u, v) \in \bar{D}, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Consideremos ahora la aplicación $\mathbf{x}^t(u, v) = \varphi(u, v, t)$, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Es una superficie parametrizada con

$$\mathbf{X}_1^t = \frac{\partial \mathbf{x}^t}{\partial u} = \mathbf{X}_1 + th_1\mathbf{N} + th\mathbf{N}_1.$$

$$\mathbf{X}_2^t = \frac{\partial \mathbf{x}^t}{\partial v} = \mathbf{X}_2 + th_2\mathbf{N} + th\mathbf{N}_2.$$

Sus coeficientes de la Primera Forma Fundamental son:

$$\begin{aligned} g_{11}^t &= \langle \mathbf{X}_1^t, \mathbf{X}_1^t \rangle = g_{11} + 2th\langle \mathbf{X}_1, \mathbf{N}_1 \rangle + t^2h^2\langle \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_1 \rangle + t^2h_1h_1 = \\ &= g_{11} - 2thL_{11} + t^2h^2\langle \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_1 \rangle + t^2h_1h_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{12}^t &= \langle \mathbf{X}_1^t, \mathbf{X}_2^t \rangle = g_{12} + th(\langle \mathbf{X}_1, \mathbf{N}_2 \rangle + \langle \mathbf{X}_2, \mathbf{N}_1 \rangle) + t^2h^2\langle \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2 \rangle + t^2h_1h_2 = \\ &= g_{12} - 2thL_{12} + t^2h^2\langle \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2 \rangle + t^2h_1h_2 = g_{21}^t; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{22}^t &= \langle \mathbf{X}_2^t, \mathbf{X}_2^t \rangle = g_{22} + 2th\langle \mathbf{X}_2, \mathbf{N}_2 \rangle + t^2h^2\langle \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_2 \rangle + t^2h_2h_2 = \\ &= g_{22} - 2thL_{22} + t^2h^2\langle \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_2 \rangle + t^2h_2h_2. \end{aligned}$$

Combinando esto con (2.3) y agrupando adecuadamente, tenemos que:

$$\begin{aligned} g_{11}^tg_{22}^t - (g_{12}^t)^2 &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 - 2th(g_{11}L_{22} - 2g_{12}L_{12} + g_{22}L_{11}) + R = \\ &= (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)(1 - 4thH) + R, \quad \text{donde } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R}{t} = 0. \end{aligned}$$

Luego, para ε suficientemente pequeño, \mathbf{x}^t es una superficie parametrizada. Además el área de $\mathbf{x}^t(\bar{D})$ es

$$A(t) = \int_{\bar{D}} \sqrt{g_{11}^tg_{22}^t - (g_{12}^t)^2} du dv = \int_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4thH + \bar{R}} \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du dv,$$

donde $\bar{R} = \frac{R}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$.

Como ε es pequeño, la función de área anterior es diferenciable y cumple

$$A'(0) = \int_{\bar{D}} -2hH \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du dv. \quad (3.1)$$

Veamos ahora el motivo de la denominación *mínima* a las superficies de curvatura media nula gracias al siguiente resultado:

Proposición 3.1.

Sea $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada y sea $D \subset U$ un dominio acotado en U . Entonces \mathbf{x} es mínima si y solo si $A'(0) = 0$ para todos los dominios D , en las condiciones precedentes, y todas las variaciones normales de $\mathbf{x}(\bar{D})$.

Demostración. Si \mathbf{x} es una mínima, es obvio que verifica la condición pues $H \equiv 0$. Recíprocamente, admitamos que la condición se verifica y que $H \not\equiv 0$ para algún $q \in D$. Tomemos $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(q) = H(q)$, siendo h idénticamente nula fuera de un pequeño entorno de q . Realizando un procedimiento totalmente análogo al anterior, obtenemos que $A'(0) < 0$ para la variación normal determinada por esta función h y llegamos así al absurdo. ■

De esta forma, cualquier región acotada $\mathbf{x}(\bar{D})$ de una superficie mínima \mathbf{x} es un punto crítico de la función área para cualquier variación normal de $\mathbf{x}(\bar{D})$. Notemos, además, que dicho punto crítico no necesariamente es un mínimo, lo que hace que el término “mínima” resulte, en cierto sentido, inoportuno.

El problema de minimizar el área también se aborda desde el punto de vista del *Cálculo Variacional*. Lagrange estudiaba grafos, superficies que globalmente pueden expresarse como una carta de Monge y, a partir de los cuales obtenemos la siguiente equivalencia:

Proposición 3.2.

Sea M una superficie regular que, localmente, puede expresarse como la gráfica de una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces M es mínima si y solo si f verifica la ecuación de Euler-Lagrange, es decir; si verifica que:

$$f_{11}(1 + f_2^2) - 2f_{12}f_1f_2 + f_{22}(1 + f_1^2) = 0. \quad (3.1)$$

Demostración. Parametrizamos la superficie M como sigue

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

De esta forma los coeficientes de la Primera y Segunda Formas Fundamentales, respectivamente, de \mathbf{x} son:

$$g_{11} = 1 + f_1^2; \quad g_{12} = f_1 f_2; \quad g_{22} = 1 + f_2^2;$$

$$L_{11} = \frac{f_{11}}{\sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}}; \quad L_{12} = \frac{f_{12}}{\sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}}; \quad L_{22} = \frac{f_{22}}{\sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}}.$$

Gracias a (2.3), la curvatura media de \mathbf{x} viene dada por:

$$H = \frac{1}{2} \frac{f_{11}(1 + f_2^2) + f_{22}(1 + f_1^2) - 2f_{12}f_1f_2}{(1 + f_1^2 + f_2^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Por consiguiente, $H = 0$ si y solo si $f_{11}(1 + f_2^2) + f_{22}(1 + f_1^2) - 2f_{12}f_1f_2 = 0$. ■

Años después de que Lagrange definiera de esta forma las superficies mínimas, *Christoffel* observó que la aplicación de Gauss de una superficie mínima era conforme y que este hecho, además, las caracterizaba junto con las esferas. Así tenemos la siguiente nueva equivalencia:

Proposición 3.3.

Sea M una superficie regular sin puntos umbilicales, es decir; sin puntos tales que $\kappa_1 = \kappa_2$. Entonces M es mínima si y solo si \mathbf{N} es conforme.

Demostración. Sean $p \in M$ y $\{\mathbf{X}_{(1)}(p), \mathbf{X}_{(2)}(p)\}$ la base (ortonormal) de direcciones principales en $T_p(M)$.

Si $H(p) = 0$, entonces $\kappa_1(p) = -\kappa_2(p)$, y por tanto, $\kappa_1(p)^2 = \kappa_2(p)^2$. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in T_p(M)$, con $\mathbf{v}_1 = \alpha_1 \mathbf{X}_{(1)}(p) + \beta_1 \mathbf{X}_{(2)}(p)$ y $\mathbf{v}_2 = \alpha_2 \mathbf{X}_{(1)}(p) + \beta_2 \mathbf{X}_{(2)}(p)$. De esta forma tenemos que $d\mathbf{N}_p(\mathbf{v}_i) = -L_p(\mathbf{v}_i) = \alpha_i \kappa_1(p) \mathbf{X}_{(1)}(p) + \beta_i \kappa_2(p) \mathbf{X}_{(2)}(p)$ para $i, j = 1, 2$. De aquí, haciendo un cálculo sencillo, llegamos a que

$$\begin{aligned} \langle d\mathbf{N}_p(\mathbf{v}_1), d\mathbf{N}_p(\mathbf{v}_2) \rangle &= \alpha_1 \alpha_2 \kappa_1(p)^2 + \beta_1 \beta_2 \kappa_2(p)^2 = \\ &= (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2) \kappa_1(p)^2 = \kappa_1(p)^2 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle. \end{aligned}$$

Tomando ahora $\lambda(p) = \kappa_1(p)$, es claro que es diferenciable y, además, no nula, pues si $\kappa_1(p) = 0$, entonces $\kappa_2(p) = 0$ y, por tanto, p sería un punto umbílico.

Recíprocamente, supongamos que existe una función $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable no nula tal que $\langle d\mathbf{N}_p(\mathbf{v}_1), d\mathbf{N}_p(\mathbf{v}_2) \rangle = \lambda(p)^2 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$, para cualesquiera $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in T_p(M)$. En particular, se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda(p)^2 &= \lambda(p)^2 \langle \mathbf{X}_{(1)}(p), \mathbf{X}_{(1)}(p) \rangle = \langle d\mathbf{N}_p(\mathbf{X}_{(1)}(p)), d\mathbf{N}_p(\mathbf{X}_{(1)}(p)) \rangle = \\ &= \langle -\kappa_1(p)\mathbf{X}_{(1)}(p), -\kappa_1(p)\mathbf{X}_{(1)}(p) \rangle = \kappa_1(p)^2, \\ \lambda(p)^2 &= \lambda(p)^2 \langle \mathbf{X}_{(2)}(p), \mathbf{X}_{(2)}(p) \rangle = \langle d\mathbf{N}_p(\mathbf{X}_{(2)}(p)), d\mathbf{N}_p(\mathbf{X}_{(2)}(p)) \rangle = \\ &= \langle -\kappa_2(p)\mathbf{X}_{(2)}(p), -\kappa_2(p)\mathbf{X}_{(2)}(p) \rangle = \kappa_2(p)^2. \end{aligned}$$

Luego, $\kappa_1^2(p) = \lambda(p)^2 = \kappa_2(p)^2$. Por tanto, $\kappa_1(p) = \pm\kappa_2(p)$. Puesto que M no tiene puntos umbílicos, necesariamente $\kappa_1(p) = -\kappa_2(p)$ y esto implica que $H(p) = 0$. ■

Será conveniente definir, para una superficie parametrizada cualquiera, el **vector de curvatura media** dado por $\mathbf{H} = HN$. Si elegimos $h = H$, en virtud de (3.1) obtenemos, para esta variación normal:

$$A'(0) = -2 \int_{\bar{D}} \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du dv < 0.$$

Lo cual significa que si deformamos $\mathbf{x}(\bar{D})$ según el sentido del vector normal \mathbf{H} el área decrece inicialmente.

El vector curvatura media admite otra interpretación de la que nos vamos a ocupar a continuación.

Proposición 3.4.

Sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ una superficie parametrizada y supongamos que es isoterma. Entonces

$$\mathbf{X}_{11} + \mathbf{X}_{22} = 2g_{11}\mathbf{H}.$$

Demostración. Como \mathbf{x} es isoterma, $g_{11} = g_{22}$ y $g_{12} = 0$. Ahora bien, derivamos en ambas igualdades respecto de u y v respectivamente.

- Puesto que

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{11}}{\partial u} &= \langle \mathbf{X}_{11}, \mathbf{X}_1 \rangle + \langle \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_{11} \rangle = 2\langle \mathbf{X}_{11}, \mathbf{X}_1 \rangle \text{ y} \\ \frac{\partial g_{22}}{\partial u} &= \langle \mathbf{X}_{21}, \mathbf{X}_2 \rangle + \langle \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_{21} \rangle = 2\langle \mathbf{X}_{21}, \mathbf{X}_2 \rangle,\end{aligned}$$

tenemos que $\langle \mathbf{X}_{11}, \mathbf{X}_1 \rangle = \langle \mathbf{X}_{21}, \mathbf{X}_2 \rangle$.

- Ya que $\frac{\partial g_{12}}{\partial v} = \langle \mathbf{X}_{21}, \mathbf{X}_2 \rangle + \langle \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_{22} \rangle = 0$, obtenemos que $\langle \mathbf{X}_{21}, \mathbf{X}_2 \rangle = -\langle \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_{22} \rangle$.

Por tanto, $\langle \mathbf{X}_{11}, \mathbf{X}_1 \rangle = \langle \mathbf{X}_{21}, \mathbf{X}_2 \rangle = -\langle \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_{22} \rangle$. Luego,

$$\langle \mathbf{X}_{11} + \mathbf{X}_{22}, \mathbf{X}_1 \rangle = 0.$$

Derivando de nuevo en las igualdades pero ahora respecto de v y u respectivamente, llegamos de forma análoga a que

$$\langle \mathbf{X}_{11} + \mathbf{X}_{22}, \mathbf{X}_2 \rangle = 0.$$

De estas se deduce que $\mathbf{X}_{11} + \mathbf{X}_{22}$ es paralelo a \mathbf{N} . A partir de (2.3), por ser \mathbf{x} isoterma, vemos que $H = \frac{L_{11} + L_{22}}{2g_{11}}$, de donde deducimos que

$$2g_{11}H = L_{11} + L_{22} = \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}_{11} + \mathbf{X}_{22} \rangle$$

y de aquí a su vez

$$\mathbf{X}_{11} + \mathbf{X}_{22} = 2g_{11}\mathbf{H}$$

como queríamos demostrar. ■

Con esto, se deduce el resultado siguiente:

Corolario 3.1.

Sea $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ una superficie parametrizada y supongamos que es isoterma. Entonces \mathbf{x} es mínima si y solo si las funciones x, y, z son armónicas.

Demostración. Sea \mathbf{x} mínima. Entonces, por definición, se cumple que $\mathbf{H} = \mathbf{0}$. En virtud del resultado anterior, ya que \mathbf{x} es isoterma por hipótesis, tenemos que $\mathbf{X}_{11} + \mathbf{X}_{22} = 2g_{11}\mathbf{H}$. Luego, $\mathbf{X}_{11} + \mathbf{X}_{22} = \mathbf{0}$.

Ahora bien, recordemos que

$$\mathbf{X}_{11} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \right);$$

$$\mathbf{X}_{22} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right).$$

Entonces,

$$\mathbf{0} = \mathbf{X}_{11} + \mathbf{X}_{22} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right).$$

Por tanto, las funciones x, y, z son armónicas.

Recíprocamente, supongamos que x, y y z son funciones armónicas. Es decir,

$$\mathbf{0} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) = \mathbf{X}_{11} + \mathbf{X}_{22}.$$

Puesto que \mathbf{x} es isoterma, de nuevo por la proposición anterior deducimos que $\mathbf{0} = \mathbf{X}_{11} + \mathbf{X}_{22} = 2g_{11}\mathbf{H}$. Luego, $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ y la superficie \mathbf{x} es mínima. ■

Por último, veamos la relación existente entre las superficies mínimas y las funciones analíticas de una variable compleja.

Consideremos ahora $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada y definimos

$$\varphi_1(u + iv) = \frac{\partial x}{\partial u} - i \frac{\partial x}{\partial v}; \quad \varphi_2(u + iv) = \frac{\partial y}{\partial u} - i \frac{\partial y}{\partial v}; \quad \varphi_3(u + iv) = \frac{\partial z}{\partial u} - i \frac{\partial z}{\partial v}; \quad (3.2)$$

con x, y, z las funciones componentes de \mathbf{x} .

Lema 3.1.

La condición necesaria y suficiente para que \mathbf{x} sea isoterma es que $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \equiv 0$. Si se satisface esto, \mathbf{x} será mínima si y solo si φ_1, φ_2 y φ_3 son analíticas.

Demostración. Puesto que

$$\varphi_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 - \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 - 2i \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v};$$

$$\varphi_2^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 - \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 - 2i \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v};$$

$$\varphi_3^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 - 2i \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v};$$

es fácil ver que

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = g_{11} - g_{22} + 2ig_{12}.$$

Y de aquí se deduce la primera parte del lema.

Por otro lado, $\mathbf{X}_{11} + \mathbf{X}_{22} = \mathbf{0}$ si y solo si

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right) &= - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right) &= - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) &= - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Lo cual implica la mitad de las ecuaciones de Cauchy-Riemann para las funciones φ_1 , φ_2 y φ_3 . La otra mitad se verifica también debido a la regularidad de \mathbf{x} . Efectivamente, puesto que $\mathbf{X}_{12} = \mathbf{X}_{21}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right) &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right) &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Lo que implica la segunda mitad de las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Luego las funciones φ_j , $j = 1, 2, 3$; son, por el Teorema 2.7, holomorfas y por consiguiente, gracias al Teorema 2.8, analíticas. Concluimos así que $\mathbf{X}_{11} + \mathbf{X}_{22} = \mathbf{0}$ si y solo si las funciones φ_1 , φ_2 y φ_3 son analíticas. ■

Todas estas conforman las herramientas más interesantes a la hora de probar si una superficie es mínima o no, como veremos en la sección siguiente.

3.2 ALGUNOS EJEMPLOS.

■ En la presente sección veremos algunos de los ejemplos más relevantes, históricamente hablando, de superficies mínimas, así como algunos resultados y hechos que hemos considerado de interés. Para los mismos, se han seguido los manuales [4, 5, 7]. ■

3.2.1 Catenoide.

Consideraremos el catenoide de ecuaciones:

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cosh(u) \cos(v), \cosh(u) \sin(v), u),$$

donde $u \in (-1, 1)$ y $v \in (0, 2\pi)$. Su representación puede verse en la Figura 3.1:

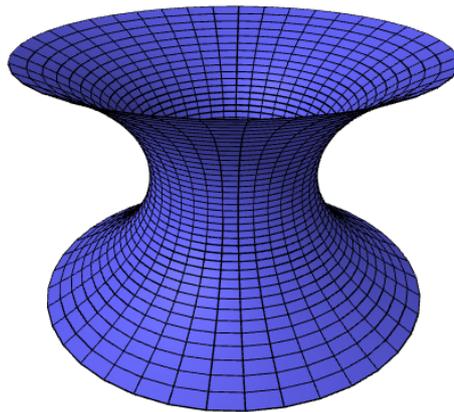


Figura 3.1: Catenoide.

Derivando, obtenemos:

$$\mathbf{X}_1 = (\sinh(u) \cos(v), \sinh(u) \sin(v), 1);$$

$$\mathbf{X}_2 = (-\cosh(u) \sin(v), \cosh(u) \cos(v), 0).$$

Así, los coeficientes de la Primera Forma Fundamental resultan:

$$g_{11} = \sinh^2 + 1 = \cosh^2(u);$$

$$g_{12} = 0;$$

$$g_{22} = \cosh^2(u).$$

Vemos por tanto que esta parametrización es isoterma. Calculemos ahora las segundas derivadas y comprobemos que su suma vale $\mathbf{0}$.

$$\mathbf{X}_{11} = (\cosh(u) \cos(v), \cosh(u) \sin(v), 0);$$

$$\mathbf{X}_{22} = (-\cosh(u) \cos(v), -\cosh(u) \sin(v), 0).$$

Luego, efectivamente, $\mathbf{X}_{11} + \mathbf{X}_{22} = \mathbf{0}$ y, por consiguiente, el catenoide es una superficie mínima.

El catenoide es la primera superficie mínima descubierta tras el ejemplo trivial del plano. Es una superficie de revolución que está generada por la catenaria, que es la curva generada por un cable o cadena sujeta por sus extremos y sometida únicamente a la fuerza de la gravedad. Es la gráfica de la función coseno hiperbólico y puede verse en la Figura 3.2.

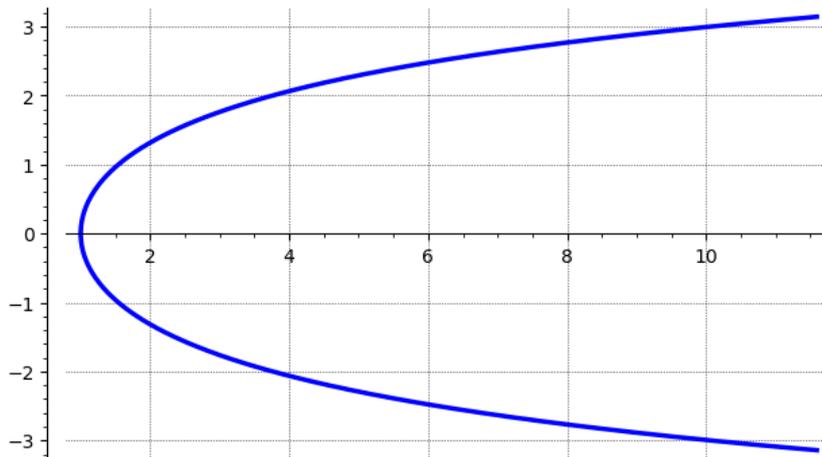


Figura 3.2: Catenaria.

Es más, se caracteriza por ser la única superficie mínima, no plana, de revolución. Efectivamente, sea $\alpha(w) = (f(w), 0, g(w))$, donde $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, la curva que genera la superficie M , que podemos suponer contenida en el plano $y = 0$. Puesto que M no es un plano, $g(w)$ no puede ser una función constante. Luego existe un abierto $I \subset \mathbb{R}$ en el cual $g'(w) \neq 0$. Entonces, por el *teorema de la función inversa*, podemos reparametrizar α mediante el cambio de parámetro $w = g^{-1}(s)$ en dicho abierto. Así, tomamos como punto de partida una curva $\beta(s) = (f(g^{-1}(s)), 0, s) = (\eta(s), 0, s)$, definida en un entorno adecuado. De esta forma, parametrizamos la superficie M como $\mathbf{x}(s, \theta) = (\eta(s) \cos \theta, \eta(s) \sin \theta, s)$ y, por tanto, las curvaturas principales son:

$$\kappa_1(\beta(s)) = \frac{-\eta''(s)}{(1 + \eta'(s)^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\kappa_2(\beta(s)) = \frac{1}{\eta(s) (1 + \eta'(s)^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Así, M es mínima si y solo si se verifica la ecuación diferencial

$$\frac{-\eta''(s)}{(1 + \eta'(s)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\eta(s) (1 + \eta'(s)^2)^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

la cual es equivalente a

$$\eta(s)\eta''(s) - \eta'(s)^2 = 1.$$

Resolviendo esta, llegamos a que $\eta(s) = a \cosh\left(\frac{s+b}{a}\right)$, con $a > 0$ y $b \geq 0$. Luego, $\beta(s) = \left(a \cosh\left(\frac{s+b}{a}\right), 0, s\right)$, es decir; $\beta(s)$ es una catenaria y, por consiguiente, M es (un trozo) de catenoide.

3.2.2 Helicoide.

Sea ahora el helicoide de ecuaciones:

$$\mathbf{x}(u, v) = (\sinh(u) \sin(v), -\sinh(u) \cos(v), v),$$

con $u \in (-1, 1)$ y $v \in (0, 2\pi)$, cuya representación puede verse la Figura 3.3.



Figura 3.3: Helicoide.

Derivemos para calcular los coeficientes de la *Primera Forma Fundamental*.

$$\mathbf{X}_1 = (\cosh(u) \sin(v), -\cosh(u) \cos(v), 0);$$

$$\mathbf{X}_2 = (\sinh(u) \cos(v), \sinh(u) \sin(v), 1).$$

Y dichos coeficientes serán entonces:

$$g_{11} = \cosh^2(u);$$

$$g_{12} = 0;$$

$$g_{22} = \sinh^2 + 1 = \cosh^2(u).$$

Vemos nuevamente que la parametrización es isoterma. Calculemos entonces las derivadas segundas:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{11} &= (\sinh(u) \sin(v), -\sinh(u) \cos(v), 0), \\ \mathbf{X}_{22} &= (-\sinh(u) \sin(v), \sinh(u) \cos(v), 0). \end{aligned}$$

Vemos fácilmente que $\mathbf{X}_{11} + \mathbf{X}_{22} = \mathbf{0}$. Por tanto, el helicoides es una superficie mínima.

El helicoides fue la segunda superficie mínima no trivial en ser encontrada. Detenta la propiedad de ser la única superficie mínima, obviando el plano, que también es una superficie reglada. Efectivamente, supongamos una superficie regular dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{a}(v) + u\mathbf{w}(v),$$

con $\mathbf{a}(v), \mathbf{w}(v) \in \mathbb{R}^3$, no plana y con curvatura media nula. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\|\mathbf{w}\| = 1$, $\|\mathbf{w}'\| = 1$ y, por ello, $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}' \rangle = 0$, $\langle \mathbf{w}', \mathbf{w}'' \rangle = 0$. Además, podemos asumir también que $\langle \mathbf{a}'(v), \mathbf{w}(v) \rangle = 0$, $\langle \mathbf{a}'(0), \mathbf{w}'(0) \rangle = 0$, pues podemos cambiar $\mathbf{a}(v)$ por la nueva directriz $\bar{\mathbf{a}}(v)$ dada por

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}}(v) &= \mathbf{a}(v) - \lambda(v)\mathbf{w}(v), \\ \lambda(v) &= \langle \mathbf{a}'(0), \mathbf{w}'(0) \rangle + \int_0^v \langle \mathbf{a}'(t), \mathbf{w}'(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Esto implica que $g_{12} = 0$ y $L_{11} = 0$. Sumando esto al hecho de que $H = 0$, deducimos que $L_{22} = 0$. Luego $\det(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_{22}) = 0$. Ahora bien, desarrollando este determinante y agrupando las potencias de u , obtenemos las tres relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{w}, \mathbf{a}', \mathbf{a}'') &= 0, \\ \det(\mathbf{w}, \mathbf{a}', \mathbf{w}'') + \det(\mathbf{w}, \mathbf{w}', \mathbf{a}'') &= 0, \\ \det(\mathbf{w}, \mathbf{w}', \mathbf{w}'') &= 0. \end{aligned}$$

Por un lado, como \mathbf{w}' es perpendicular a \mathbf{w} y a \mathbf{w}'' , la última relación implica que $\mathbf{w}'' = \langle \mathbf{w}'', \mathbf{w} \rangle \mathbf{w}$. Por consiguiente, $(\mathbf{w} \times \mathbf{w}')' = 0$ y deducimos de $\|\mathbf{w}\| = 1$ que la curva $\mathbf{w}(v)$ describe un círculo unidad en un plano fijo Π . Por otra parte, de la segunda relación obtenemos que $\det(\mathbf{w}, \mathbf{w}', \mathbf{a}'') = 0$ y, por tanto, $\mathbf{a}'' \in \Pi$ así como

$$\mathbf{a}'' = \langle \mathbf{a}'', \mathbf{w} \rangle \mathbf{w} + \langle \mathbf{a}'', \mathbf{w}' \rangle \mathbf{w}'.$$

Sustituyendo esto en la primera relación, llegamos a que $\langle \mathbf{a}'', \mathbf{w}' \rangle \det(\mathbf{w}, \mathbf{a}', \mathbf{w}') = 0$. Este determinante no se anula para valores de v cercanos a cero (pues sus columnas

son ortogonales en $v = 0$ y \mathbf{x} es una superficie regular). Luego $\langle \mathbf{a}'', \mathbf{w}' \rangle = 0$. Por consiguiente, $\langle \mathbf{a}', \mathbf{w}' \rangle' = 0$ y, puesto que $\langle \mathbf{a}'(0), \mathbf{w}'(0) \rangle = 0$, tenemos que $\langle \mathbf{a}', \mathbf{w}' \rangle = 0$. Combinando esto con el hecho de que $\langle \mathbf{a}', \mathbf{w} \rangle = 0$, deducimos que \mathbf{a}' es perpendicular a $\Pi = \text{span}\{\mathbf{w}, \mathbf{w}'\}$. Como Π no depende de v , obtenemos que \mathbf{a}'' es también perpendicular a Π . Pero hemos probado que $\mathbf{a}'' \in \Pi$, por tanto, $\mathbf{a}'' = \mathbf{0}$. Luego, la directriz $\mathbf{a}(v)$ es una recta y, ya que $\langle \mathbf{a}', \mathbf{w} \rangle = 0$, concluimos que la superficie \mathbf{x} es una sección de helicoides.

Observación 3.1.

El catenoide y el helicoides no solo son mínimas, sino que también son localmente isométricas.

Aún más general, podemos considerar la familia de superficies

$$\mathbf{x}(a, u, v) = (x(a, u, v), y(a, u, v), z(a, u, v)),$$

donde

$$\begin{aligned} x(a, u, v) &= \cos(a) \cosh(u) \cos(v) + \sin(a) \sinh(u) \sin(v), \\ y(a, u, v) &= \cos(a) \cosh(u) \sin(v) - \sin(a) \sinh(u) \cos(v), \\ z(a, u, v) &= \cos(a)u + \sin(a) \left(v - \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned}$$

con $a \in [0, 2\pi)$.

El catenoide corresponde al valor $a = 0$ mientras que para el helicoides $a = \frac{\pi}{2}$.

Veamos que todas ellas son isométricas entre sí y que, además, son mínimas. Puesto que

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1(a, u, v) &= (\cos(a) \cos(v) \sinh(u) + \sin(a) \sin(v) \cosh(u), \\ &\quad \cos(a) \sin(v) \sinh(u) - \sin(a) \cos(v) \cosh(u), \cos(a)), \\ \mathbf{X}_2(a, u, v) &= (\sin(a) \cos(v) \sinh(u) - \cos(a) \sin(v) \cosh(u), \\ &\quad \sin(a) \sin(v) \sinh(u) + \cos(a) \cos(v) \cosh(u), \sin(a)); \end{aligned}$$

los coeficientes de la Primera Forma Fundamental son:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \cosh^2(u); \\ g_{12} &= 0; \\ g_{22} &= \cosh^2(u). \end{aligned}$$

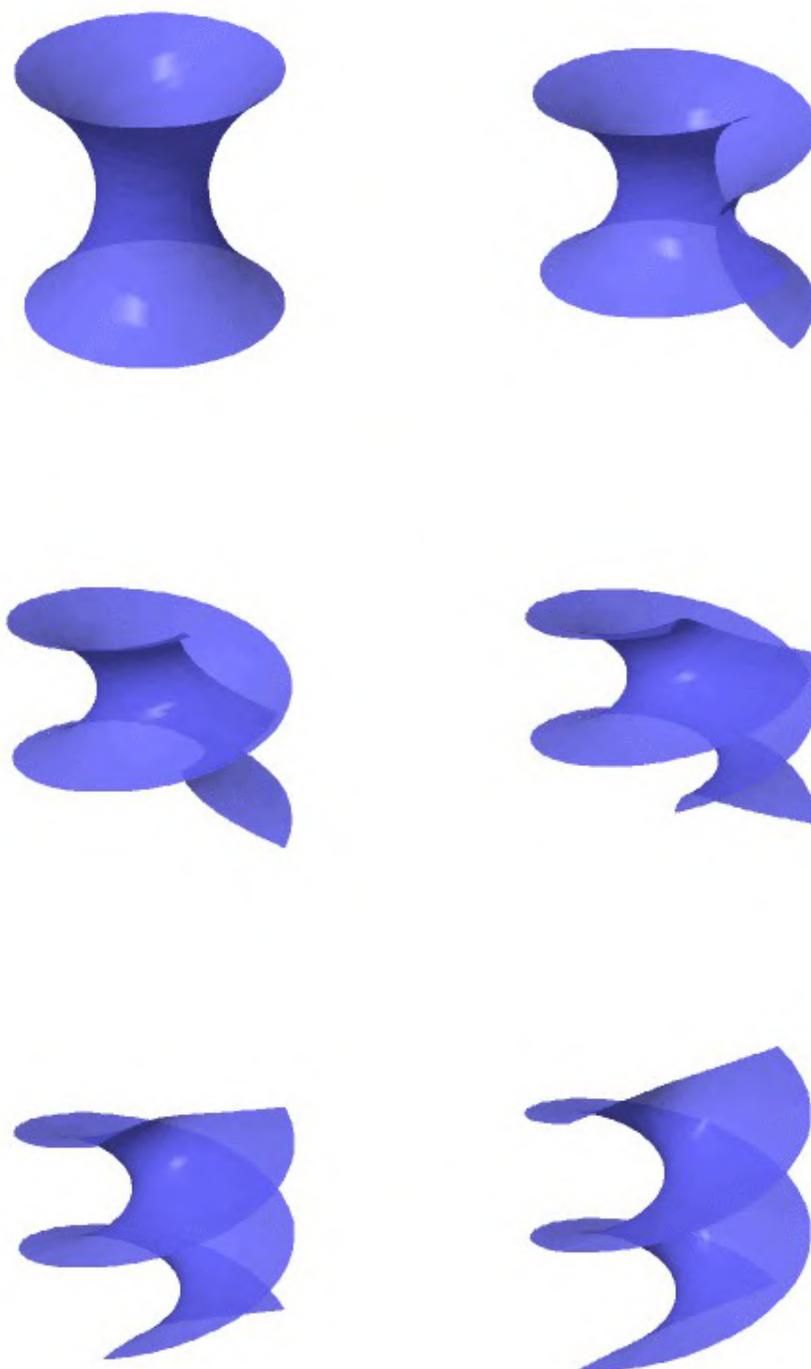


Figura 3.4: Transformación isométrica (local) del catenoide al helicoides.

Luego, en virtud del Teorema 2.3, todas las superficies son isométricas entre sí. Además, estamos en las condiciones del Corolario 3.1 y para ver que cada una de las su-

perfiles es mínima bastará con probar que las funciones x, y, z son armónicas. Efectivamente, como

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{11} &= (\sin(a) \sin(v) \sinh(u) + \cos(a) \cos(v) \cosh(u), \\ &\quad \cos(a) \sin(v) \cosh(u) - \sin(a) \cos(v) \sinh(u), 0), \\ \mathbf{X}_{22} &= (-\sin(a) \sin(v) \sinh(u) - \cos(a) \cos(v) \cosh(u), \\ &\quad \sin(a) \cos(v) \sinh(u) - \cos(a) \sin(v) \cosh(u), 0); \end{aligned}$$

tenemos que $\mathbf{X}_{11} + \mathbf{X}_{22} = \mathbf{0}$ y por consiguiente las superficies son mínimas.

Gracias a dicha familia, podemos visualizar de manera sencilla la ya mencionada transformación localmente isométrica entre el catenoide y helicoide (como puede apreciarse en la Figura 3.4).

3.2.3 Superficie de Scherk.

Esta superficie viene dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(\arg \left(\frac{u + iv + i}{u + iv - i} \right), \arg \left(\frac{u + iv + 1}{u + iv - 1} \right), \log \left| \frac{(u + iv)^2 + 1}{(u + iv)^2 - 1} \right| \right),$$

con $u + iv \neq \pm 1, u + iv \neq \pm i$ y $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$ el ángulo que forma z con el eje real.

Realizando los cálculos oportunos obtenemos

$$\arg \left(\frac{u + iv + i}{u + iv - i} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 - 1} \right);$$

$$\arg \left(\frac{u + iv + 1}{u + iv - 1} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{-2v}{u^2 + v^2 - 1} \right);$$

$$\log \left| \frac{(u + iv)^2 + 1}{(u + iv)^2 - 1} \right| = \frac{1}{2} \log \left(\frac{(u^2 - v^2 + 1)^2 + 4u^2v^2}{(u^2 - v^2 - 1)^2 + 4u^2v^2} \right).$$

Con ellas, ya podemos representar la superficie, que se aprecia en la Figura 3.5.

Estas mismas igualdades nos permiten construir las funciones (3.2):

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{2}{1 + (u + iv)^2}; \\ \varphi_2 &= -\frac{2i}{1 - (u + iv)^2}; \\ \varphi_3 &= \frac{4(u + iv)}{1 - (u + iv)^4}. \end{aligned}$$

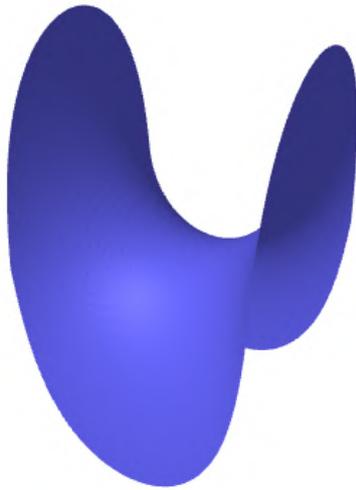


Figura 3.5: Superficie de Scherk.

Realizando una serie de cálculos, llegamos a que $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \equiv 0$. Por consiguiente, la parametrización \mathbf{x} es isoterma. Puesto que, además, las funciones φ_1 , φ_2 y φ_3 son analíticas, la superficie de Scherk es una superficie mínima.

Esta superficie que acabamos de abordar, no es más un caso particular de la familia de superficies mínimas que descubrió Scherk. Estas vienen dadas por la ecuación implícita $e^z \cos(y) - \cos(x) = 0$. Dicha familia cumple la particularidad de que puede ser definida sobre el tablero de ajedrez, como se puede observar en la Figura 3.6 (las casillas negras corresponderían a las superficies, mientras que las casillas blancas a los huecos vacíos).

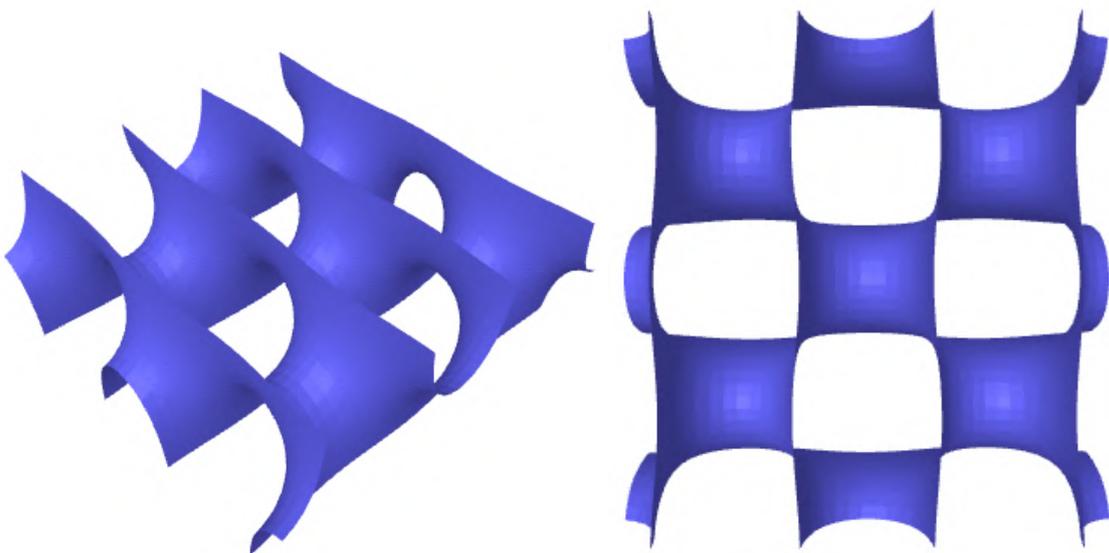


Figura 3.6: Primera superficie de Scherk.

La segunda familia de superficies descubiertas por Scherk tienen como ecuación implícita: $\sin(z) - \sinh(x) \sinh(y) = 0$; y su representación puede verse en la Figura 3.7.

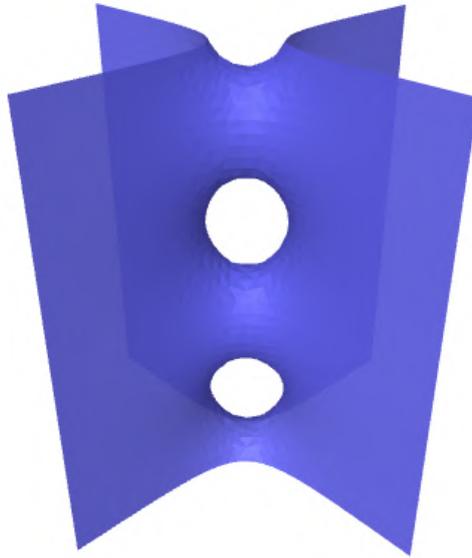


Figura 3.7: Segunda superficie de Scherk.

3.2.4 Superficie de Enneper.

Vamos a tomar la parametrización siguiente de la superficie de Enneper:

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right),$$

donde $u, v \in \mathbb{R}$ (aunque para la representación hemos tomado $u, v \in (-2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$).

La representación de esta superficie aparece en la Figura 3.8.

Derivando llegamos a que

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= (v^2 - u^2 + 1, 2uv, 2u), \\ \mathbf{X}_2 &= (2uv, -v^2 + u^2 + 1, -2v). \end{aligned}$$

De aquí se obtienen de manera sencilla los coeficientes de la Primera Forma Fundamental:

$$\begin{aligned} g_{11} &= v^4 + (2u^2 + 2)v^2 + u^4 + 2u^2 + 1; \\ g_{12} &= 0; \\ g_{22} &= v^4 + (2u^2 + 2)v^2 + u^4 + 2u^2 + 1. \end{aligned}$$

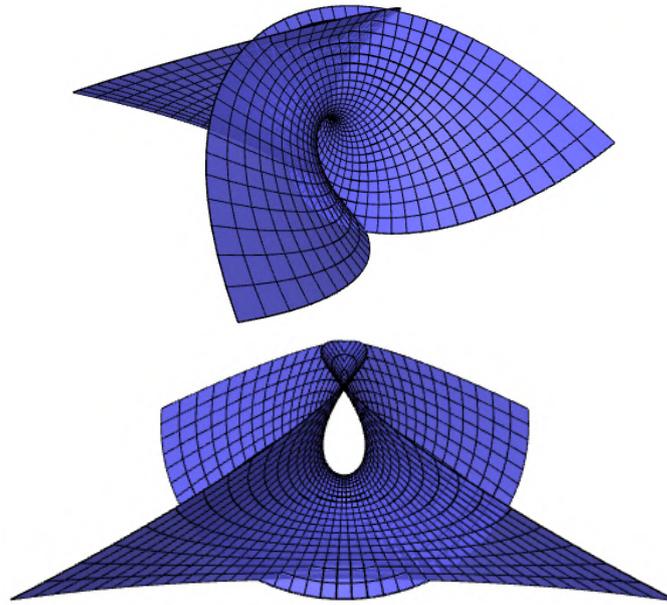


Figura 3.8: Superficie de Enneper.

Luego, estamos en las condiciones de la Proposición 3.4. Veamos, por tanto, que $\mathbf{X}_{11} + \mathbf{X}_{22} = \mathbf{0}$. Efectivamente, puesto que

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{11} &= (-2u, 2v, 2); \\ \mathbf{X}_{22} &= (2u, -2v, -2);\end{aligned}$$

tenemos que $\mathbf{X}_{11} + \mathbf{X}_{22} = \mathbf{0}$.

Observación 3.2.

Esta superficie es también una *superficie de Bézier*, es decir; cada coordenada puede expresarse como combinación lineal de la base de Bernstein:

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v), \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v), \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m c_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v) \right),$$

donde $B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}$ y $B_j^m(v) = \binom{m}{j} v^j (1-v)^{m-j}$.

Nos preguntamos ahora si existe una superficie mínima cuyas componentes sean polinomios de grado, a lo sumo, dos y, además, dicha parametrización sea isoterma. Supongamos pues una tal superficie cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\mathbf{x}(u, v) = (p_1(u, v), p_2(u, v), p_3(u, v)),$$

donde $p_i(u, v) = a_i + b_i u + c_i v + d_i uv + e_i u^2 + f_i v^2$. Derivando llegamos a que

$$\mathbf{X}_1(u, v) = (b_1 + d_1 v + 2e_1 u, b_2 + d_2 v + 2e_2 u, b_3 + d_3 v + 2e_3 u),$$

$$\mathbf{X}_2(u, v) = (c_1 + d_1 u + 2f_1 v, c_2 + d_2 u + 2f_2 v, c_3 + d_3 u + 2f_3 v).$$

Así pues, imponiendo que sea isoterma y como

$$\begin{aligned} g_{11} &= (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + 2(b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3)v + 4(b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3)u + \\ &\quad + 4(d_1 e_1 + d_2 e_2 + d_3 e_3)uv + (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)v^2 + 4(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)u^2, \\ g_{22} &= (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + 2(c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3)u + 4(c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3)v + \\ &\quad + 4(d_1 f_1 + d_2 f_2 + d_3 f_3)uv + (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)u^2 + 4(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)v^2, \\ g_{12} &= (b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3) + (b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3 + 2(c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3))u + \\ &\quad + (2(b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 f_3) + c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3)v + \\ &\quad + (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + 2(e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_3 f_3))uv + 2(d_1 e_1 + d_2 e_2 + d_3 e_3)u^2 + \\ &\quad + 2(d_1 f_1 + d_2 f_2 + d_3 f_3)v^2; \end{aligned}$$

obtenemos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2, \\ 2(b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3) = 4(c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3), \\ 4(b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) = 2(c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3), \\ 4(d_1 e_1 + d_2 e_2 + d_3 e_3) = 4(d_1 f_1 + d_2 f_2 + d_3 f_3), \\ d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 4(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2), \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0, \\ b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3 + 2(c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3) = 0, \\ 2(b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 f_3) + c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 = 0, \\ 2(d_1 e_1 + d_2 e_2 + d_3 e_3) = 0, \\ 2(d_1 f_1 + d_2 f_2 + d_3 f_3) = 0, \\ 4(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2, \\ d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + 2(e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_3 f_3) = 0. \end{array} \right.$$

Supongamos que los coeficientes verifican estas ecuaciones y veamos qué deben cumplir para que cada polinomio de la parametrización sea armónico. Puesto que

$$\mathbf{X}_{11} = (2e_1, 2e_2, 2e_3),$$

$$\mathbf{X}_{22} = (2f_1, 2f_2, 2f_3);$$

la condición es $e_i = -f_i$, para cada $i = 1, 2, 3$. Expresando las dos últimas ecuaciones del sistema anterior en forma vectorial:

$$\begin{cases} \langle \mathbf{d}, \mathbf{d} \rangle = -2\langle \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle, \\ 4\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = \langle \mathbf{d}, \mathbf{d} \rangle; \end{cases}$$

de las que deducimos que $2\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = -\langle \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle$, que a su vez implica que

$$2\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle + \langle \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle = 2\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle - \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = 0.$$

Tenemos entonces que $\mathbf{e} = \mathbf{0}$, es decir, $e_i = 0$, para cada $i = 1, 2, 3$. Por tanto, $f_i = 0$, para cada $i = 1, 2, 3$. Combinando esto con el hecho de que $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 4(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = 0$, obtenemos que $d_i = 0$, para cada $i = 1, 2, 3$. Luego la superficie que estamos considerando es una porción del plano.

En relación con el problema de Plateau, podemos formular un problema similar pero restringiéndonos a las superficies de Bézier. Este se conoce como *problema de Plateau-Bézier* y reza así:

Dado el borde, o de forma equivalente, los puntos de control de la frontera, de una superficie de Bézier, encontrar los puntos de control interiores tales que la correspondiente superficie de Bézier sea la de menor área entre todas las superficies de Bézier que tengan la misma frontera.

Para conocer más sobre este problema, se puede consultar [10].

3.2.5 Superficie de Henneberg.

Muchas superficies mínimas se pueden encontrar al resolver el *problema de Björling*:

Encontrar la superficie mínima que atraviese a una curva analítica real no cerrada dada, conocidos también los planos tangentes de la curva a lo largo de ella.

Un aspecto interesante sobre este problema es que si la curva está contenida en un plano, entonces es una geodésica de la superficie resultante.

La superficie que tratamos ahora es una solución de este para la curva

$$c(t) = \left(\cosh(2t) - 1, 0, -\sinh(t) + \frac{1}{3}\sinh(3t) \right)$$

y viene dada por las ecuaciones paramétricas $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, donde

$$x(u, v) = -1 + \cosh(2u) \cos(2v),$$

$$y(u, v) = \sinh(u) \sin(v) + \frac{1}{3} \sinh(3u) \sin(3v),$$

$$z(u, v) = -\sinh(u) \cos(v) + \frac{1}{3} \sinh(3u) \cos(3v),$$

con $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Su representación se observa en la Figura 3.9.

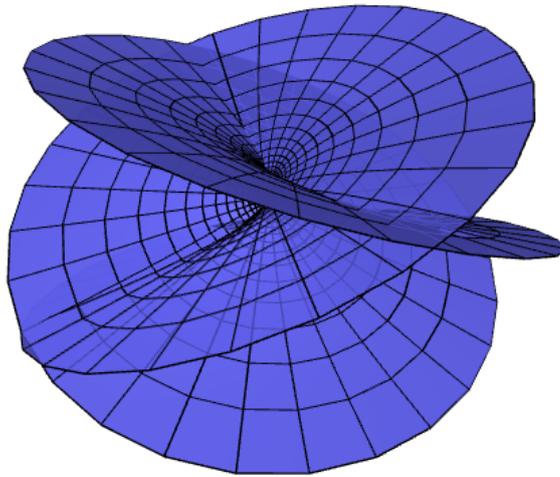


Figura 3.9: Superficie de Henneberg.

Sus derivadas respecto de u y v son

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= (2 \sinh(2u) \cos(2v), \\ &\quad \cosh(3u) \sin(3v) + \cosh(u) \sin(v), \\ &\quad \cosh(3u) \cos(3v) - \cosh(u) \cos(v)), \\ \mathbf{X}_2 &= (-2 \cosh(2u) \sin(2v), \\ &\quad \sinh(3u) \cos(3v) + \sinh(u) \cos(v), \\ &\quad \sinh(u) \sin(v) - \sinh(3u) \sin(3v)). \end{aligned}$$

A partir de estos calculamos sus coeficientes de la Primera Forma Fundamental, que son los siguientes:

$$\begin{aligned} g_{11} &= 2 \cosh^2(u) (\cosh(4u) - \cos(4v)), \\ g_{12} &= 0, \\ g_{22} &= 2 \cosh^2(u) (\cosh(4u) - \cos(4v)). \end{aligned}$$

Vemos pues que la parametrización es isoterma. Calculando sus segundas derivadas

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{11} &= (4 \cosh(2u) \cos(2v), \\ &\quad 3 \sinh(3u) \sin(3v) + \sinh(u) \sin(v), \\ &\quad 3 \sinh(3u) \cos(3v) - \sinh(u) \cos(v)), \\ \mathbf{X}_{22} &= (-4 \cosh(2u) \cos(2v), \\ &\quad -3 \sinh(3u) \sin(3v) - \sinh(u) \sin(v), \\ &\quad \sinh(u) \cos(v) - 3 \sinh(3u) \cos(3v)); \end{aligned}$$

observamos que, claramente, $\mathbf{X}_{11} + \mathbf{X}_{22} = \mathbf{0}$. Luego esta superficie es mínima.

Esta superficie es no orientable y puede verse como una inmersión en el plano proyectivo sin un punto. Hasta 1981, era la única superficie mínima no orientable conocida.

3.2.6 Superficie de Catalan

La siguiente superficie es también una solución del problema de Björling, pero esta vez para la cicloide, es decir, la curva $c(t) = (1 - \cos(t), 0, t - \sin(t))$, cuya representación se puede apreciar en la Figura 3.10.

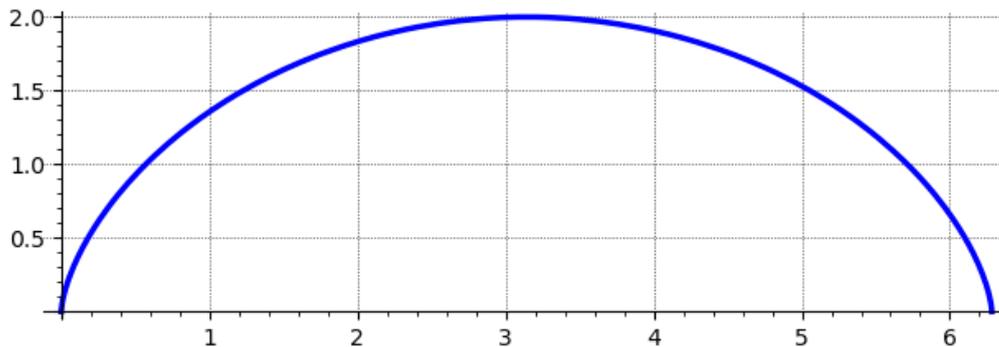


Figura 3.10: Cicloide.

La superficie solución de este problema se la conoce como superficie de Catalan y viene expresada por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(1 - \cos(u) \cosh(v), 4 \sin\left(\frac{u}{2}\right) \sinh\left(\frac{v}{2}\right), u - \sin(u) \cosh(v) \right),$$

con $u \in (-3\pi, 3\pi)$ y $v \in (-2, 2)$; y su representación puede verse en la Figura 3.11.

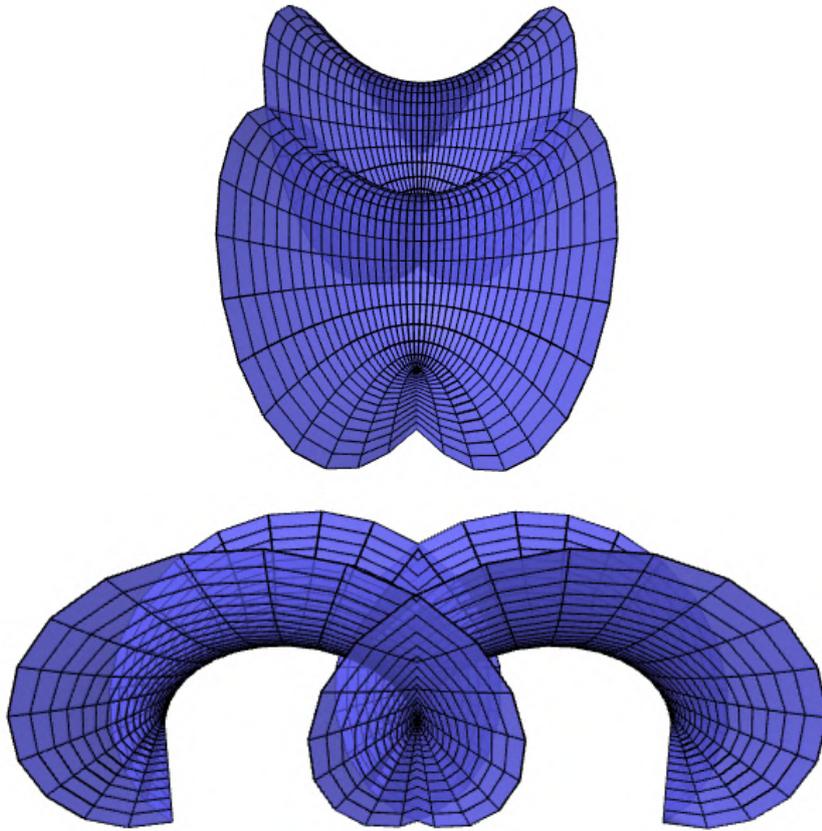


Figura 3.11: Superficie de Catalan.

Derivando obtenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_1 &= \left(\sin(u) \cosh(v), 2 \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sinh\left(\frac{v}{2}\right), 1 - \cos(u) \cosh(v) \right), \\ \mathbf{X}_2 &= \left(-\cos(u) \sinh(v), 2 \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cosh\left(\frac{v}{2}\right), -\sin(u) \sinh(v) \right).\end{aligned}$$

Luego los coeficientes de la Primera Forma Fundamental son:

$$\begin{aligned}g_{11} &= 2 \cosh^2\left(\frac{v}{2}\right) (\cosh(v) - \cos(u)), \\ g_{12} &= 0, \\ g_{22} &= 2 \cosh^2\left(\frac{v}{2}\right) (\cosh(v) - \cos(u)).\end{aligned}$$

Vemos así que esta parametrización es isoterma. Veamos ahora que es armónica. Como

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{11} &= \left(\cos(u) \cosh(v), -\sin\left(\frac{u}{2}\right) \sinh\left(\frac{v}{2}\right), \sin(u) \cosh(v) \right), \\ \mathbf{X}_{22} &= \left(-\cos(u) \cosh(v), \sin\left(\frac{u}{2}\right) \sinh\left(\frac{v}{2}\right), -\sin(u) \cosh(v) \right);\end{aligned}$$

podemos afirmar que $\mathbf{X}_{11} + \mathbf{X}_{22} = \mathbf{0}$ y, por consiguiente, la superficie de Catalan es mínima.

Con esto concluimos esta sección, pero si el lector está interesado en conocer más superficies mínimas, le remitimos a la siguiente página, donde podrá ver un vídeo en el que aparecen algunas superficies mínimas más de las que aquí tratamos: <http://www.polthier.info/booklet/history.html>.

PROBLEMA DE PLATEAU.

No hay rama de las matemáticas, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real.

NIKOLAI LOBACHEVSKI

4.1 PREPARACIÓN.

La finalidad de esta sección es bien clara: asentar la notación que emplearemos para la resolución del problema de Plateau para una única frontera, así como probar unos resultados que nos facilitarán la demostración del mismo. El lector interesado puede consultar [3, 4, 6, 11, 16], para más información de la que aquí ofreceremos. |

La construcción de una superficie delimitada por un contorno Γ dado, cuya área sea la menor de todas las que tienen como frontera a Γ , es un problema clásico del *Cálculo Variacional*. Para formular analíticamente el problema, supongamos que la superficie viene expresada por $\mathbf{x}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$, con las $x_j(u, v)$ definidas en un dominio B del plano y cuya frontera es C . Además, las $x_j(u, v)$ deben ser continuas en $B \cup C$, con segundas derivadas continuas a trozos en B y que transformen C en Γ . De esta forma, debemos buscar, de entre todas las funciones que verifican estas condiciones, aquella que minimice la integral:

$$A(\mathbf{x}) = \int \int_B \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \, dudv.$$

Observación 4.1.

Esta integral es invariante bajo transformaciones isotermas del disco unidad en sí mismo (para la demostración véase [11], página 192, §220).

Observación 4.2.

El dominio B se puede tomar como la bola $u^2 + v^2 < 1$, si Γ es una curva de Jordan, es

decir; si es cerrada y, vista como función, Γ es inyectiva en el intervalo en el que está definida.

Las condiciones para este problema variacional forman un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales en B con condiciones también no lineales, expresando no solo que la superficie requerida está delimitada por Γ , sino también que tiene curvatura media cero. Reemplazando el problema de mínima área por el de una superficie mínima delimitada por Γ (problema de Plateau), se presentan dos grandes dificultades:

1. La no linealidad de las ecuaciones diferenciales.
2. La no linealidad de las condiciones adicionales.

Aprovechando la libertad en la elección de los parámetros, podemos transformar las ecuaciones diferenciales del problema de mínima área en una ecuación lineal. Efectivamente, supongamos que es posible tomar parametrizaciones isotermas para las superficies consideradas en el problema variacional. Entonces con unos pequeños cálculos se tiene que $A(\mathbf{x}) = D(\mathbf{x})$, donde

$$\begin{aligned} D(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \int \int_B (g_{11} + g_{22}) \, dudv = \frac{1}{2} \int \int_B (\langle \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1 \rangle + \langle \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_2 \rangle) \, dudv = \\ &= \frac{1}{2} \int \int_B (\mathbf{X}_1^2 + \mathbf{X}_2^2) \, dudv. \end{aligned}$$

Esta integral D es conocida como la **integral de Dirichlet**. A partir de esta y de las equivalencias vistas en la Sección 3.1, obtenemos que la ecuación diferencial a verificar es $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{X}_{11} + \mathbf{X}_{22} = \mathbf{0}$, eliminando así los problemas con la no linealidad de las ecuaciones. Sin embargo, la no linealidad de las condiciones sigue permaneciendo, pues estamos exigiendo que la parametrización sea isoterma. De esta forma, resolver el problema de Plateau exige encontrar un “vector potencial” \mathbf{x} en $B \cup C$ con parámetros isotermos y con Γ como borde.

Si consideramos las funciones potenciales \mathbf{x}_j como las partes reales $\Re(f_j(u + iv)) = \Re(f_j(z))$ de las funciones analíticas $f_j(z)$ de variable compleja, se sigue que

$$g_{11} - g_{22} - 2ig_{12} = \sum_{j=1}^3 (f_j'(z))^2 = G(z)$$

es una función analítica de variable compleja para cualquier vector potencial \mathbf{x} . Así, la condición de que la parametrización sea isoterma se puede expresar como $G(z) = 0$.

Observación 4.3.

Las condiciones de contorno representan dos relaciones no lineales entre las funciones componentes x_j sobre C mientras que las dos relaciones adicionales (que la parametrización sea isoterma o, equivalentemente, que $G(z) = 0$), que tienen la apariencia de dos ecuaciones en derivadas parciales adicionales no lineales, equivalen a solo un requerimiento más del carácter de una condición de contorno.

Observación 4.4.

Para que esta función $G(z)$ sea idénticamente nula, ya que es una función analítica con cualquier vector potencial, su parte real $g_{11} - g_{22}$ debe tener valores de contorno nulos y, además, la parte imaginaria debe anularse en un punto.

Para la resolución que trataremos, trabajaremos con un tipo de funciones para las que necesitamos introducir el siguiente concepto:

Definición 4.1.

Supongamos que Γ es una curva de Jordan cerrada en \mathbb{R}^3 orientada por el homeomorfismo $\gamma : C \rightarrow \Gamma$. Entonces se dice que la función $\varphi : C \rightarrow \Gamma$ es **débilmente monótona** si existe una función continua no decreciente $\tau : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ con $\tau(2\pi) = \tau(0)$ tal que $\varphi(e^{i\theta}) = \gamma(e^{i\tau(\theta)})$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Ahora sí, las funciones con las que trataremos en la demostración son las siguientes:

Definición 4.2.

Dada una curva de Jordan Γ en \mathbb{R}^3 , una función $x : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ es de clase $\mathcal{C}(\Gamma)$ respecto a una orientación fijada $\gamma : C \rightarrow \Gamma$ de Γ si x pertenece al espacio de Sobolev $H^1(B)^3 = \{f \in L^2(B) \mid D^\alpha f \in L^2(B), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N}^2 : \|\alpha\| \leq 1\}^3$ y si su traza $x|_C$ se puede representar por una función continua débilmente monótona $\varphi : C \rightarrow \Gamma$.

Nota 4.1.

Aquí por "traza" nos referimos a una aplicación $\phi : H^1(B) \rightarrow L^2(C)$, la cual extiende a la aplicación lineal $f \in \mathcal{C}^1(B \cup C) \mapsto f|_C$.

Nota 4.2.

Recordemos que el espacio $L^2(B)$ es el espacio cociente $\mathcal{L}^2(B)/R$, con $\mathcal{L}^2(B)$ el conjunto de las funciones medibles definidas sobre B tales que $\int \int_B \|f\|^2 dm < \infty$ y R es la relación de equivalencia fRg si y solo si $f = g$ salvo un conjunto de medida nula (es decir, $\int \int_B \|f - g\|^2 dm = 0$).

En lo que sigue nos será de utilidad el siguiente lema elemental.

Lema 4.1.

Sea $f(\lambda)$ una función no negativa y continua a trozos en el intervalo $0 \leq a \leq \lambda \leq b$ verificando que

$$\int_a^b f(\lambda) d\lambda \leq L.$$

Entonces existe, en todo subintervalo $\alpha \leq \lambda \leq t\alpha$, un valor λ_0 para el cual $f(\lambda_0) \leq \frac{\varepsilon}{\lambda_0}$, donde $\varepsilon = \frac{L}{\log(t)}$. Este ε se puede tomar arbitrariamente pequeño y no dependiente de $f(\lambda)$ sino únicamente de L , si t es suficientemente grande.

Demostración. Si en $\alpha \leq \lambda \leq t\alpha$ tenemos que $f(\lambda) > \frac{\varepsilon}{\lambda}$, se seguiría que

$$\int_{\alpha}^{t\alpha} f(\lambda) d\lambda > \varepsilon \log(t) = L,$$

llegando así a una contradicción. ■

Una consecuencia de suma importancia para el tratamiento que haremos del problema de Plateau es la siguiente:

Lema 4.2 - de Courant-Lebesgue.

Sea \mathbf{x} de clase $\mathcal{C}^0(B \cup C) \cap \mathcal{C}^1(B)$ y de forma que su integral de Dirichlet está acotada por $L < \infty$.

Sea \mathcal{O} un punto del plano, A_r parte de una circunferencia de radio r alrededor de \mathcal{O} contenida en B . Entonces, para todo δ suficientemente pequeño, existe un r_0 , con $\delta \leq r_0 \leq \sqrt{\delta}$, tal que, sobre todo arco conexo de A_{r_0} , la oscilación de los vectores \mathbf{x} no excede el valor

$$\varepsilon(\delta) = \left(\frac{4\pi L}{|\log(\delta)|} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(La oscilación del vector \mathbf{x} se tomará nula si no existe un arco A_r en B).

En particular, para \mathcal{O} sobre C y δ tan pequeño que A_r es un único arco, existen dos puntos P_1, P_2 sobre C a la misma distancia r_0 de \mathcal{O} con $\|\mathbf{x}(P_1) - \mathbf{x}(P_2)\| \leq \varepsilon(\delta)$.

Demostración. Consideremos las coordenadas polares alrededor de $\mathcal{O}(\rho, \theta)$ y tomemos $s = (r, \theta)$,

$$p(r) = \int_{A_r} \mathbf{x}_s^2 ds$$

y definimos $p = 0$ si la circunferencia de radio r no tiene un arco dentro de B . De aquí se deduce que

$$\int_a^b p(r) dr \leq D(\mathbf{x}) \leq L,$$

donde a y b son límites arbitrarios. Tomando $a = \delta$ y $b = \sqrt{\delta}$, encontramos dos puntos arbitrarios P_1, P_2 sobre A_r de forma que, por la *desigualdad de Hölder*, se tiene

$$\|\mathbf{x}(P_1) - \mathbf{x}(P_2)\|^2 \leq \left| \int_{A_r} \|\mathbf{x}_s\| ds \right|^2 \leq \int_{A_r} \|\mathbf{x}_s\|^2 ds \int_{A_r} ds \leq 2\pi r \int_{A_r} \mathbf{x}_s^2 ds = 2\pi r p(r).$$

Por consiguiente, gracias al Lema 4.1, $\|\mathbf{x}(P_1) - \mathbf{x}(P_2)\|^2 \leq \varepsilon^2$ para un valor $r = r_0$ adecuado con $\varepsilon = \left(\frac{4\pi L}{|\log(\delta)|} \right)^{\frac{1}{2}}$. ■

Para ayudar en la visualización de esta prueba introducimos la Figura 4.1.

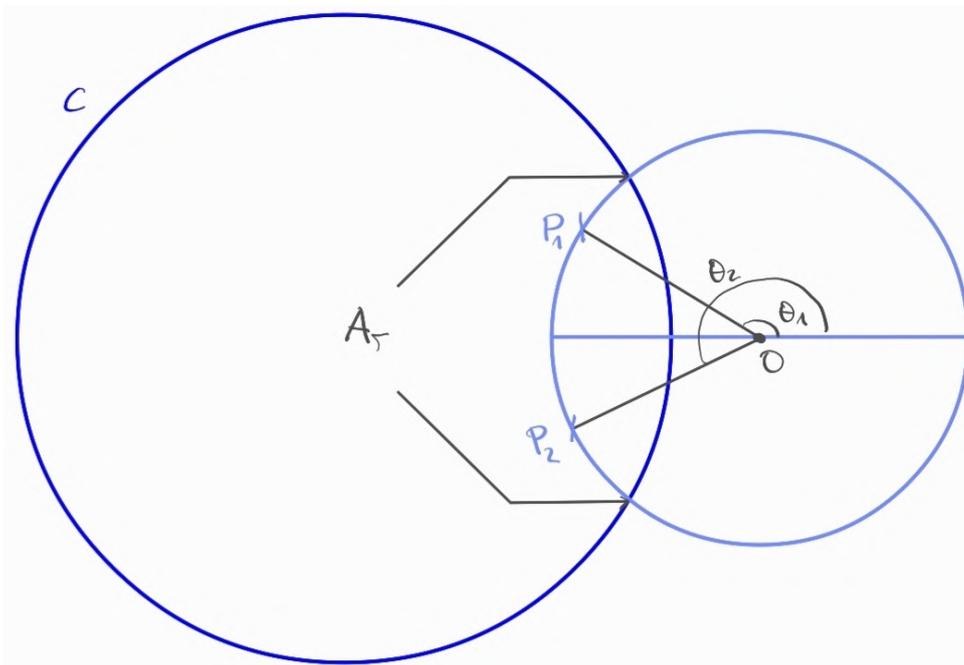


Figura 4.1

Observación 4.5.

Notemos que ε solo depende de L y de δ . Esto implica que el lema se puede aplicar uniformemente a todos los vectores \mathbf{x} con $D(\mathbf{x}) \leq L$ y todos los dominios B .

Observación 4.6.

Si B fuera un dominio cualquiera en el plano y su frontera fuera una curva de Jordan, no necesariamente una circunferencia, podríamos aportar un lema idéntico al anterior y cuya demostración es totalmente análoga a la que aquí vemos.

Del Lema 4.2 podemos deducir otro lema que nos resultará esencial en la prueba del problema de Plateau. Para este se requerirá que Γ sea una curva de Jordan, ya que este tipo de curvas verifican la siguiente propiedad:

Proposición 4.1.

Dada una curva de Jordan Γ , existe una función $\eta(\varepsilon)$ que converge a 0 cuando ε tiende a 0, de modo que, para dos puntos cualesquiera P_1 y P_2 de Γ cuya distancia no exceda de ε , P_1 y P_2 son los puntos extremos de un arco sobre Γ con diámetro menor que $\eta(\varepsilon)$.

Recordemos el concepto de sucesión de funciones equicontinua, pero para las funciones que estamos manejando:

Definición 4.3.

Una sucesión de vectores (\mathbf{x}_n) bajo las condiciones del Lema 4.2 y transformando C en Γ de manera monótona, se dirá que es **equicontinua** sobre C si para cualquier par de puntos P_1 y P_2 sobre C , con distancia menor que δ , se verifica que

$$\|\mathbf{x}_n(P_1) - \mathbf{x}_n(P_2)\| < \varepsilon(\delta),$$

donde $\varepsilon(\delta)$ converge a 0 cuando δ tiende a 0 y, además, $\varepsilon(\delta)$ es independiente de n .

Por otra parte, se dirá que R es un punto de **no equicontinuidad** si existen dos sucesiones de puntos (P_n) y (Q_n) sobre C , ambas convergiendo a R , y una constante positiva α , tales que $\|\mathbf{x}_n(P_n) - \mathbf{x}_n(Q_n)\| > \alpha$ para infinitos n . Si existe tal punto, se dirá que la sucesión (\mathbf{x}_n) es **no equicontinua**.

Observación 4.7.

Eligiendo una subsucesión adecuada y notándola nuevamente como (\mathbf{x}_n) , podemos asumir que la desigualdad $\|\mathbf{x}_n(P_n) - \mathbf{x}_n(Q_n)\| > \alpha$ se cumple para todo n .

Lema 4.3.

Sea (x_n) una sucesión cumpliendo las condiciones de la Definición 4.3. Sea R un punto de no equicontinuidad para (x_n) sobre C . Sea nuevamente $D(x_n)$ acotada por L . Sea b un arco de C de extremos A, B conteniendo a R pero arbitrariamente pequeño y sea b' el arco complementario de C . Entonces, al menos para una subsucesión (x_n) , la imagen β de b por x_n cubre todo Γ , excepto un arco β' cuyo diámetro tiende a cero cuando n crece.

Demostración. Por el Lema 4.2 hay, para todo n , dos puntos P_n, Q_n (dependientes de n) sobre C a igual distancia r_0 de R con $\delta \leq r_0 \leq \sqrt{\delta}$ tal que $\|x_n(P_n) - x_n(Q_n)\| < \varepsilon(\delta) = \left(\frac{2\pi L}{|\log(\delta)|}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Las imágenes P'_n y Q'_n de P_n y Q_n sobre Γ dividen por tanto a Γ en dos arcos φ y φ' , uno de ellos con diámetro menor que $\eta(\varepsilon)$ (por la Proposición 4.1) y, por consiguiente, menor que cualquier cantidad para δ suficientemente pequeño.

Elegido δ , seleccionamos n tan grande que la distancia de los puntos P_n y Q_n a R es menor que δ . Ya que φ , tomado como la imagen del arco $P_n R Q_n$, debe, para δ fijo y n suficientemente grande, estar contenido en la imagen β de b y puesto que el diámetro de φ excede a α , pues R es un punto de no equicontinuidad, tenemos que el diámetro de φ' y, puesto que φ' es el complementario de φ y, por tanto, contiene a β' ; también el diámetro de la imagen β' de b' , es menor que η y tiende a cero con δ . ■

Para ayudar en la visualización de esta prueba introducimos la Figura 4.2.

Corolario 4.1.

El mismo enunciado y una prueba idéntica se mantienen si el vector x_n no transforma C en una curva fija Γ , sino en una curva continua Γ_n que tiende a Γ cuando n crece.

Observación 4.8.

La convergencia de la que hablamos en el resultado anterior debe ser tal que si dos puntos P_n y Q_n de Γ_n tienden a dos puntos A y B de Γ , entonces los puntos del arco $P_n Q_n$ sobre Γ_n deben tender también a los puntos del arco AB sobre Γ correspondiente. Sin embargo, la curva Γ_n no necesariamente es inyectiva, puede tener autointersecciones, las cuales desaparecen en el límite.

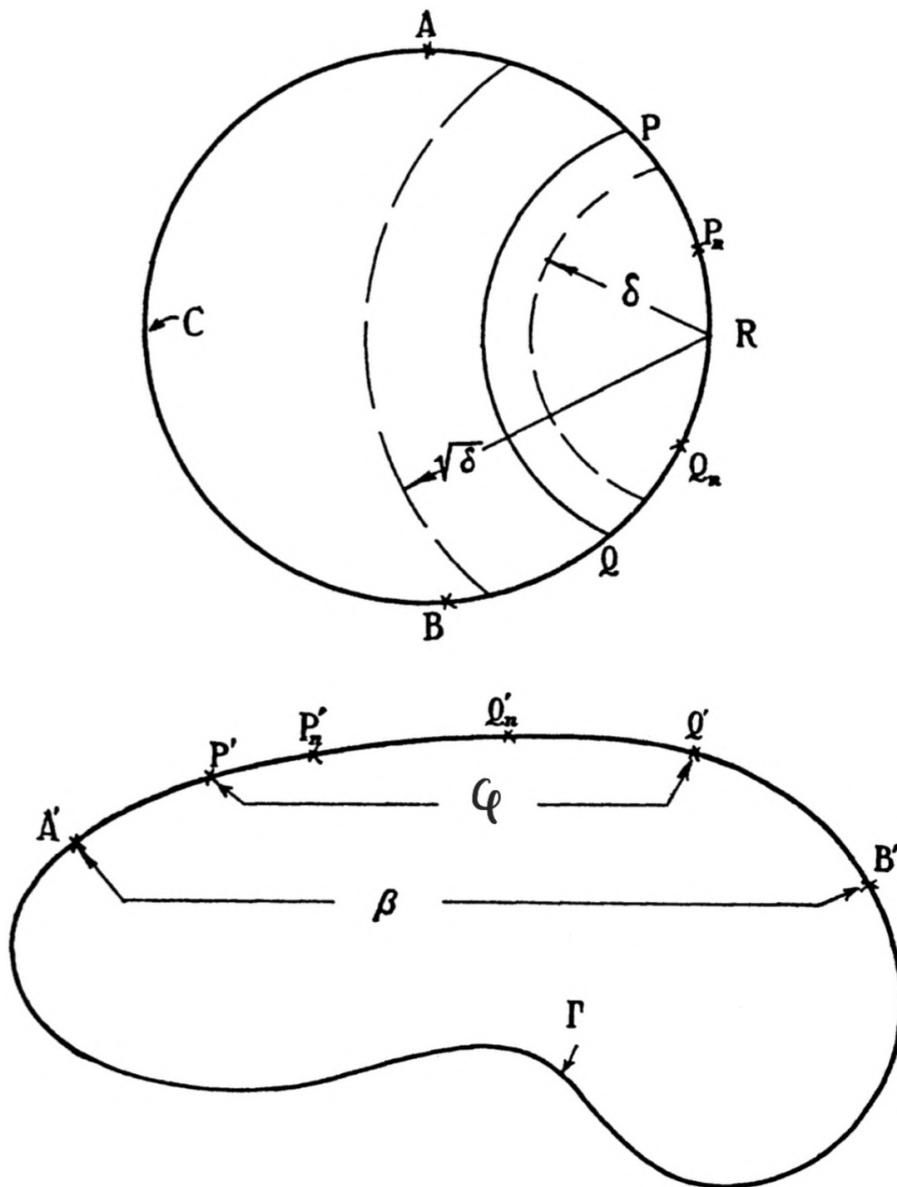


Figura 4.2

Observación 4.9.

De igual manera, el lema sigue siendo cierto si los vectores x_n no están definidos en un dominio B fijado, sino en un dominio circular B_n que converja a B .

El último concepto que nos va a resultar de interés es el de *sucesión minimizante*:

Definición 4.4.

Consideremos el problema de encontrar el mínimo del funcional $J(f)$ definido en un espacio \mathcal{H} de funciones admisibles f . Asumamos que hay funciones en \mathcal{H} para las que $J(f) < \infty$ y, aún más, que $\inf_{f \in \mathcal{H}} J(f) := \mu > -\infty$. Entonces, por la definición de μ , existe una sucesión de funciones (f_n) , llamada **sucesión minimizante**, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n) = \mu$. De esta forma, si la sucesión tiene una función límite \hat{f} y podemos escribir $J(\hat{f}) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n)$, entonces $J(\hat{f}) = \mu$ y \hat{f} es la solución del problema variacional.

Con esto, procedemos a “atacar” el problema de Plateau.

4.2 SOLUCIÓN PARA UNA FRONTERA.

En la presente sección abordaremos finalmente la solución del problema de Plateau. Encontramos que esta se encuentra dividida en dos partes bien diferenciadas. La primera, sobre la existencia de solución del problema, para la que se ha seguido [3, 4]. La segunda, la demostración de que dicha solución define efectivamente una superficie mínima. El lector interesado puede consultar [11, 15] para obtener más información de la que aquí tratamos sobre esta última. |

Recordemos que nuestro problema es el siguiente:

Sea Γ una curva de Jordan dada en el espacio tridimensional. Encontrar una superficie M cuyo borde es Γ y venga dada, en ecuaciones paramétricas, por $x(u, v)$ sobre el círculo unidad \bar{B} , siendo su frontera C , y tal que x verifica que $g_{11} = g_{22}$, $g_{12} = 0$ y transforma C monótonamente en Γ .

Recordemos también que la integral de Dirichlet es invariante bajo parametrizaciones isotermas. Por tanto, todos los correspondientes problemas para otros dominios B' que son equivalentes a B de manera conforme, son equivalentes. Es por ello que, en lo que resta, asumiremos que la *condición de los tres puntos* se satisface para los vectores x a considerar, es decir; para estos x se verifica:

Para cualesquiera P_1, P_2, P_3 puntos distintos y fijos sobre C , y Q_1, Q_2, Q_3 puntos distintos y fijos sobre Γ , entonces x debe transformar P_i en Q_i , para cada $i = 1, 2, 3$.

Procedamos con la demostración.

4.2.1 Existencia de solución.

Sin saber a priori de la existencia de una solución para el problema variacional, sí que estamos seguros de que existe una sucesión minimizante $(\mathbf{x}_n) \in \mathcal{C}(\Gamma)$ de vectores admisibles verificando la regla de los tres puntos para la cual $D(\mathbf{x}_n)$ converge a d cuando n tiende a infinito. Además, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que \mathbf{x}_n es una superficie de clase $\mathcal{C}^0(B \cup C) \cup \mathcal{C}^2(B)$ que satisface $\Delta \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$ en B , para $n = 1, 2, \dots$. Si no fuera así, podemos sustituir la sucesión (\mathbf{x}_n) por la solución (\mathbf{y}_n) del problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{y}_n = \mathbf{0} & \text{en } B, \\ \mathbf{y}_n = \mathbf{x}_n & \text{sobre } C, \end{cases}$$

que sabemos que tiene solución y es única por el Teorema 2.13. Estas \mathbf{y}_n tienen la misma regularidad que (\mathbf{x}) y, puesto que minimizan $D(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x} \in H^1(B)^3$ con $\mathbf{x} - \mathbf{x}_n \in \text{int}(H^1(B))^3$, se tiene que $D(\mathbf{y}_n) \leq D(\mathbf{x})$. Por construcción, tenemos que $\mathbf{y} \in \mathcal{C}(\Gamma)$ verificando la regla de los tres puntos, por ello $d \leq D(\mathbf{y}_n)$, y de aquí se sigue que $D(\mathbf{y}_n) = d$ cuando n tiende a infinito.

Notemos ahora que la sucesión (\mathbf{x}_n) es equicontinua sobre C . Efectivamente, supongamos por el contrario que, después de escoger una subsucesión adecuada, tenemos un punto de no equicontinuidad R sobre C . Esto contradice, por el Lema 4.3, la condición de los tres puntos, pues esta condición excluye la posibilidad de que un arco arbitrariamente pequeño b de C sea transformado en toda la curva Γ salvo un segmento arbitrariamente pequeño.

Teniendo en cuenta que la sucesión es minimizante, existe $L > 0$ tal que $D(\mathbf{x}_n) \leq L$, para todo n . Luego estamos en las condiciones del Lema 4.2 y, como $\mathbf{x}_n(C) = \Gamma$, encontramos una esfera S_r^2 de radio $r > 0$ centrada en el origen de forma que $\Gamma \subset S_r^2$. Por tanto, $\|\mathbf{x}_n|_C\| < r$ para todo n , es decir; $(\mathbf{x}_n|_C)$ es puntualmente acotada. De aquí se sigue, por el Teorema 2.6, que podemos tomar una subsucesión de (\mathbf{x}_n) , que en un abuso de notación llamaremos nuevamente (\mathbf{x}_n) , que converja uniformemente sobre la frontera C .

Ahora bien, en virtud del Teorema 2.9, la convergencia uniforme de los valores de contorno de esta sucesión implica la convergencia uniforme de estos vectores en $B \cup C$. Definimos así el vector \mathbf{x} como el límite de (\mathbf{x}_n) cuando n tiende a infinito. Como consecuencia, \mathbf{x} es de clase $\mathcal{C}(\Gamma)$ y cumple la regla de los tres puntos. Por tanto, $d \leq D(\mathbf{x})$.

Combinando la convergencia uniforme de (\mathbf{x}_n) en $B \cup C$ con el Teorema 2.10, se deduce

que, en cada círculo concéntrico, las derivadas de (\mathbf{x}_n) convergen uniformemente a las derivadas de \mathbf{x} . Denotando por D_r a la integral de Dirichlet para un círculo concéntrico de radio $r < 1$, tenemos que

$$D_r(\mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} D_r(\mathbf{x}_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} D(\mathbf{x}_n) = d.$$

Ahora, tomando r tendiendo a 1, obtenemos que $D(\mathbf{x}) \leq d$ y, por tanto, $D(\mathbf{x}) = d$. Luego, \mathbf{x} es solución del problema.

4.2.2 La solución define una superficie mínima.

Debemos probar ahora que la superficie $M = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v) : (u, v) \in B \cup C\}$ es, en realidad, una superficie mínima. Para ello, será suficiente ver que $G(z) = G(u + iv) = (\mathbf{X}_1 - i\mathbf{X}_2)^2 = g_{11} - g_{22} - 2ig_{12}$ es idénticamente nula en B , ya que \mathbf{x} es armónico por el razonamiento anterior.

Consideremos el cambio de variables:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \alpha(u, v) = u \cos(\varepsilon\lambda) - v \sin(\varepsilon\lambda) = \rho \cos(\theta + \varepsilon\lambda) \\ \beta = \beta(u, v) = u \sin(\varepsilon\lambda) + v \cos(\varepsilon\lambda) = \rho \sin(\theta + \varepsilon\lambda) \end{array} \right\}, \quad (4.1)$$

donde $\lambda(u, v)$ es una función con primeras y segundas derivadas continuas en $B \cup C$. Debido a esto, en virtud del *Teorema de Weierstrass*, λ_1^2 y λ_2^2 son acotadas y alcanzan sus extremos absolutos en $B \cup C$. Por tanto, existe $L = \left[\max_{B \cup C} \{\lambda_1^2 + \lambda_2^2\} \right]^{\frac{1}{2}}$. Para $|\varepsilon| < \frac{1}{L}$, este cambio de variables define una transformación biyectiva del disco unidad $u^2 + v^2 \leq 1$ en $\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$ la cual lleva círculos concéntricos en círculos concéntricos.

Sean $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$ la inversa de este cambio de variables y

$$\widehat{\mathbf{x}}(\alpha, \beta) = \mathbf{x}(u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta)).$$

Aplicando una transformación isoterma $\alpha = \alpha(\xi, \eta)$, $\beta = \beta(\xi, \eta)$ del disco $\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$ al disco $\xi^2 + \eta^2 \leq 1$, podemos hacer que los puntos $z_1 = 1$, $z_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ y $z_3 = e^{\frac{4\pi i}{3}}$ permanezcan fijos por la composición $(u, v) \rightarrow (\xi, \eta)$. Tomamos ahora

$$\mathbf{x}^{(\varepsilon)}(\xi, \eta) = \widehat{\mathbf{x}}(\alpha(\xi, \eta), \beta(\xi, \eta)).$$

El vector $\mathbf{x}^{(\varepsilon)}(u, v)$, donde hemos reemplazado ξ y η por u y v , es admisible. La invarianza de la integral de Dirichlet bajo transformaciones isotermas implica que

$$\begin{aligned} 2D(\mathbf{x}^{(\varepsilon)}) &= \int \int_{B^{(\varepsilon)}} \left((\mathbf{X}_\xi^{(\varepsilon)})^2 + (\mathbf{X}_\eta^{(\varepsilon)})^2 \right) d\xi d\eta = \int \int_{\widehat{B}} (\widehat{\mathbf{X}}_\alpha^2 + \widehat{\mathbf{X}}_\beta^2) d\alpha d\beta = \\ &= \int \int_B \left[g_{11}(\alpha_2^2 + \beta_2^2) - 2g_{12}(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + g_{22}(\alpha_1^2 + \beta_1^2) \right] \det(J)^{-1} dudv, \end{aligned}$$

donde hemos denotado por $B^{(\varepsilon)}$, \widehat{B} y B a los dominios $\zeta^2 + \eta^2 < 1$, $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ y $u^2 + v^2 < 1$, respectivamente; J a la matriz jacobiana de (4.1) y hemos aplicado el *teorema general del cambio de variables*.

Trabajemos el primer término:

$$\begin{aligned}
 \frac{g_{11}(\alpha_2^2 + \beta_2^2)}{\det(J)} &= \frac{g_{11} + 2\varepsilon g_{11}u\lambda_2 + \varepsilon^2 g_{11}(u^2\lambda_2^2 + v^2\lambda_2^2)}{1 - \varepsilon v\lambda_1 + \varepsilon u\lambda_2} = \\
 &= g_{11} + \frac{-\varepsilon g_{11}(u\lambda_2 - v\lambda_1) + 2\varepsilon g_{11}u\lambda_2 + \varepsilon^2 g_{11}(u^2\lambda_2^2 + v^2\lambda_2^2)}{1 - \varepsilon v\lambda_1 + \varepsilon u\lambda_2} = \\
 &= g_{11} + \frac{\varepsilon g_{11}(v\lambda_1 + u\lambda_2) + \varepsilon^2 g_{11}(u^2\lambda_2^2 + v^2\lambda_2^2)}{1 - \varepsilon v\lambda_1 + \varepsilon u\lambda_2} = \\
 &= g_{11} + \varepsilon g_{11}(v\lambda_1 + u\lambda_2) + \\
 &\quad + \frac{-\varepsilon^2 g_{11}(v\lambda_1 + u\lambda_2)(-v\lambda_1 + u\lambda_2) + \varepsilon^2 g_{11}(u^2\lambda_2^2 + v^2\lambda_2^2)}{1 - \varepsilon v\lambda_1 + \varepsilon u\lambda_2} = \\
 &= g_{11} + \varepsilon g_{11}(v\lambda_1 + u\lambda_2) + \frac{\varepsilon^2 g_{11}v^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}{1 - \varepsilon v\lambda_1 + \varepsilon u\lambda_2} = \\
 &= g_{11} + \varepsilon g_{11}(v\lambda_1 + u\lambda_2) + \varepsilon^2 g_{11}v^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \varepsilon^3 \sigma_1,
 \end{aligned}$$

donde $\sigma_1 = \frac{g_{11}v^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)(v\lambda_1 - u\lambda_2)}{1 - \varepsilon v\lambda_1 + \varepsilon u\lambda_2}$. Este mismo procedimiento nos sirve para obtener que

$$\begin{aligned}
 \frac{g_{22}(\alpha_1^2 + \beta_1^2)}{\det(J)} &= g_{22} - \varepsilon g_{22}(v\lambda_1 + u\lambda_2) + \varepsilon^2 g_{22}u^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \varepsilon^3 \sigma_2, \\
 \frac{-2g_{12}(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)}{\det(J)} &= -2\varepsilon g_{12}(u\lambda_1 - v\lambda_2) - 2\varepsilon^2 g_{12}uv(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \varepsilon^3 \sigma_3,
 \end{aligned}$$

$$\text{con } \sigma_2 = \frac{g_{22}u^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)(v\lambda_1 - u\lambda_2)}{1 - \varepsilon v\lambda_1 + \varepsilon u\lambda_2} \text{ y } \sigma_3 = \frac{-2g_{12}uv(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)(v\lambda_1 - u\lambda_2)}{1 - \varepsilon v\lambda_1 + \varepsilon u\lambda_2}.$$

Agrupando adecuadamente los términos se llega a que:

$$\begin{aligned}
 2D(\mathbf{x}^{(\varepsilon)}) &= D(\mathbf{x}) + \varepsilon \int \int_B [(g_{11} - g_{22})(v\lambda_1 + u\lambda_2) - 2g_{12}(u\lambda_1 - v\lambda_2)] dudv + \\
 &\quad + \varepsilon^2 \int \int_B (g_{11}v^2 - 2g_{12}uv + g_{22}u^2)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) dudv + \\
 &\quad + \varepsilon^3 \int \int_B (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) dudv.
 \end{aligned}$$

Notemos ahora que $0 \leq \int \int_B (g_{11}v^2 - 2g_{12}uv + g_{22}u^2)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) dudv \leq L^2 D(\mathbf{x})$. Además, el valor absoluto de la integral que acompaña a ε^3 se puede acotar por $C(L)D(\mathbf{x})$,

donde la constante $C(L)$ únicamente depende de L (y no del vector \mathbf{x}) para ε suficientemente pequeño.

Ahora bien, consideremos la expresión de $2D(\mathbf{x}^{(\varepsilon)})$ como un polinomio dependiente de ε , que denotamos por $p(\varepsilon)$. Teniendo en cuenta que $D(\mathbf{x}^{(0)}) = D(\mathbf{x}) = d$, vemos que presenta un mínimo en $\varepsilon = 0$. Por tanto, $p'(0) = 0$, es decir; el término que acompaña a ε debe ser nulo para toda función $\lambda \in \mathcal{C}^2(B \cup C)$. Como la función $G(z)$ es analítica, por el Teorema 2.8, es holomorfa y, por consiguiente, gracias al Teorema 2.7, se sigue que:

$$\frac{\partial}{\partial u} [(g_{11} - g_{22})v - 2g_{12}u] + \frac{\partial}{\partial v} [(g_{11} - g_{22})u + 2g_{12}v] = 0.$$

Teniendo en cuenta esto, si aplicamos el Teorema de Green y denotamos como $\bar{B}(\rho)$ al dominio $u^2 + v^2 \leq \rho$ y como $\partial\bar{B}(\rho)$ a $u^2 + v^2 = \rho$, obtenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \int \int_B [(g_{11} - g_{22})(v\lambda_1 + u\lambda_2) - 2g_{12}(u\lambda_1 - v\lambda_2)] dudv = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 1} \int \int_{\bar{B}(\rho)} \{[(g_{11} - g_{22})v - 2g_{12}u]\lambda_1 + [(g_{11} - g_{22})u + 2g_{12}v]\lambda_2\} dudv = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 1} \int_{\partial\bar{B}(\rho)} \lambda(u, v) \{ -[(g_{11} - g_{22})u + 2g_{12}v] \} du + \lambda(u, v) [(g_{11} - g_{22})v - 2g_{12}u] dv = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 1} \int_{\partial\bar{B}(\rho)} \lambda(u, v) \Im(z^2 G(z)) d\theta. \end{aligned}$$

Puesto que $G(z)$ es analítica, podemos considerar $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + ia_n)z^n$, con a_n y b_n valores reales, y, así, $H(z) = z^2 G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + ia_n)z^{n+2}$. Cambiando a coordenadas polares se tiene que:

$$\begin{aligned} H(\rho, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + ia_n) (\rho \cos(\theta) + i\rho \sin(\theta))^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + ia_n) (\rho e^{i\theta})^{n+2} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n+2} (b_n + ia_n) e^{i(n+2)\theta} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n+2} (b_n + ia_n) (\cos[(n+2)\theta] + i \sin[(n+2)\theta]). \end{aligned}$$

Desarrollando el producto $(b_n + ia_n) (\cos[(n+2)\theta] + i \sin[(n+2)\theta])$, llegamos a que $\Im(H(\rho, \theta)) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n+2} (a_n \cos[(n+2)\theta] + b_n \sin[(n+2)\theta])$. Esta expresión la podemos interpretar como la serie de Fourier de la función $\Im(H(\rho, \theta))$, fijado ρ . Por tanto, intro-

duciendo esto en la integral anterior:

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \lambda(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n+2} (b_n \cos((n+2)\theta) + a_n \sin((n+2)\theta)) \right] d\theta = 0.$$

Sustituyendo primero por $\lambda = \rho^k \cos(k\theta)$, con $k = 2, 3, \dots$; deducimos que $a_n = 0$, para $n = 0, 1, \dots$; pues, por la Definición 2.36, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Im(H(\rho, \theta)) \rho^k \cos(k\theta) d\theta$ y esta integral es nula por lo que acabamos de ver. De forma análoga, pero sustituyendo ahora por $\lambda = \rho^k \sin(k\theta)$, con $k = 2, 3, \dots$; se obtiene que $b_n = 0$, para $n = 0, 1, \dots$. Por tanto, $G(z) = 0$ y la superficie es mínima. ■

Podríamos ir un paso más allá y probar que esta superficie x es de clase C^m con $m \geq 2$, ó demostrar el problema de Plateau para un dominio B delimitado por más de un borde. Aún más, se puede demostrar el mismo resultado para una curva de Jordan en \mathbb{R}^n . Nosotros finalizamos aquí (por ahora), pero el lector interesado puede consultar, por ejemplo, [3, 11] para las demostraciones que acabamos de comentar.

4.3 POMPAS DE JABÓN.

Como ya mencionamos en la introducción, el problema de Plateau se relaciona con las pompas de jabón. La solución de este problema nos dice que, si sumergimos en una solución jabonosa un alambre o bastidor con forma de curva cerrada (y simple) en \mathbb{R}^3 , la pompa resultante será una superficie mínima. En esta sección presentaremos algunas imágenes de elaboración propia para mostrar que, efectivamente, las pompas de jabón y las superficies mínimas están relacionadas. ■



Figura 4.3: Catenoide.



Figura 4.4: Trozo de catenoide.



Figura 4.5: Trozo de catenoide (el aro superior es de menor diámetro que el inferior).

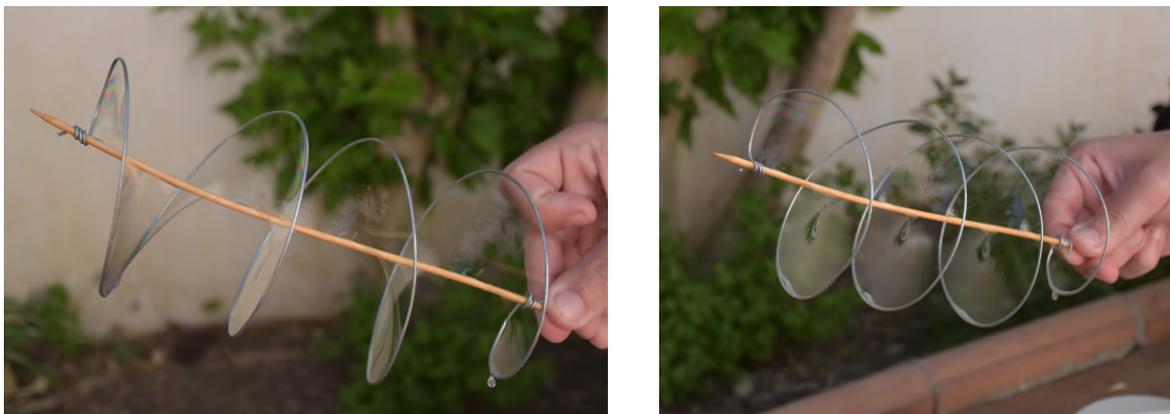


Figura 4.6: Helicoide.



Figura 4.7: Superficie de Scherk.

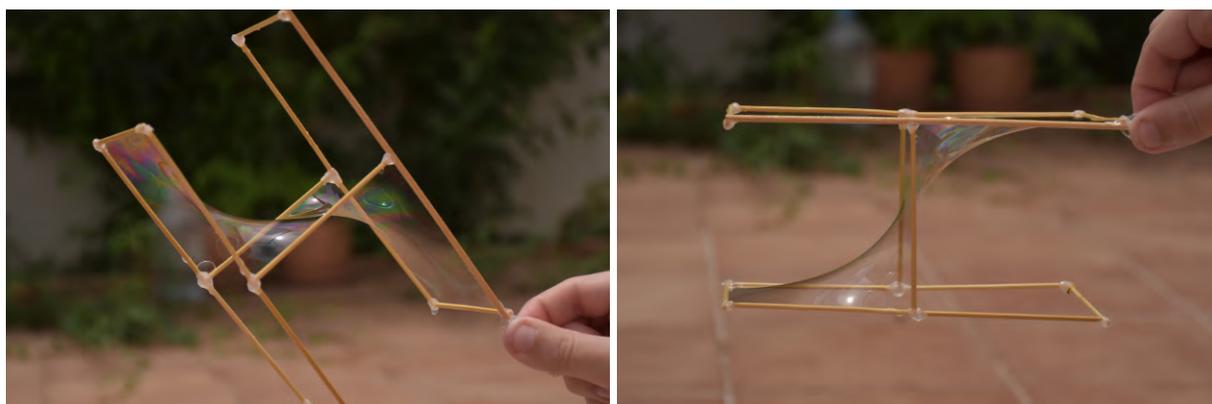


Figura 4.8: Invención.

LÍNEAS DE CÓDIGO.

Expresamos en este apartado el código empleado para la representación de las superficies vistas en la Sección 3.2. En la realización de las mismas se empleó el software libre *SageMath*.

A.1 CATENARIA.

```
f = (lambda s: cosh(s), lambda s: s)
parametric_plot(f, (-pi, pi), thickness = 2.5, gridlines = True)
```

A.2 CATENOIDE.

```
f = (lambda u,v: cosh(u)*cos(v), lambda u,v: cosh(u)*sin(v), lambda u,v: u)
parametric_plot3d(f, (-1.5, 1.5), (0, 2*pi), frame = False, mesh = True)
```

A.3 HELICOIDE.

```
f = (lambda u,v: sinh(u)*sin(v), lambda u,v: -sinh(u)*cos(v), lambda u,v: v)
parametric_plot3d(f, (-1, 1), (0, 2*pi), frame = False)
```

A.4 ISOMETRÍA LOCAL CATENOIDE Y HELICOIDE.

```

var('u,v')

def Cat_Hel(a):
    return parametric_plot3d((cos(a)*cosh(u)*cos(v)+sin(a)*sinh(u)*sin(v),
                              cos(a)*cosh(u)*sin(v)-sin(a)*sinh(u)*cos(v),
                              cos(a)*u+sin(a)*(v-pi/2)), (u, -1.5, 1.5), (v,
                              0, 2*pi),
                              mesh = False, frame = False,
                              opacity = 8/10)

ani = animate([Cat_Hel(a) for a in srange(0,pi/2,0.1)])

show(ani)

```

A.5 SUPERFICIE DE SCHERK.

```

var('x,y,z')

f = exp(z)*cos(y)-cos(x)

implicit_plot3d(f, (x, -1.5, 1.5), (y, -1.5, 1.5), (z, -2.65, 2.65), frame =
    False, mesh = False)

```

A.6 PRIMERA SUPERFICIE DE SCHERK.

```

var('x,y,z')

f = exp(z)*cos(y)-cos(x)

implicit_plot3d(f, (x, -6, 6), (y, -6, 6), (z, -2.5, 2.5), frame = False,
    mesh = False)

```

A.7 SEGUNDA SUPERFICIE DE SCHERK.

```
var('x,y,z')
f = sin(z)-sinh(x)*sinh(y)
implicit_plot3d(f, (x, -7, 7), (y, -7, 7), (z, -7, 7), mesh = False, frame
= False, opacity = 9.25/10)
```

A.8 SUPERFICIE DE ENNEPER.

```
f = (lambda u,v: u-u^3/3+u*v^2, lambda u,v: v-v^3/3+v*u^2, lambda u,v: u^2-
v^2)
parametric_plot3d(f, (-2.5, 2.5), (-2.5, 2.5), mesh = True, frame = False)
```

A.9 SUPERFICIE DE HENNEBERG

```
f = (lambda u,v: -sinh(u)*cos(v)+1/3*sinh(3*u)*cos(3*v),
lambda u,v: sinh(u)*sin(v)+1/3*sinh(3*u)*sin(3*v),
lambda u,v: -1+cosh(2*u)*cos(2*v))
parametric_plot3d(f, (-pi/2,pi/2), (-pi/2,pi/2), frame = False, mesh = True
, opacity = 9.75/10)
```

A.10 CICLOIDE.

```
g = (lambda t: t-sin(t), lambda t: 1-cos(t))
parametric_plot(g, (0,2*pi), thickness = 2.5, gridlines = True)
```

A.11 SUPERFICIE DE CATALAN.

```
f = (lambda u,v: u-sin(u)*cosh(v),  
     lambda u,v: 4*sin(u/2)*sinh(v/2),  
     lambda u,v: 1-cos(u)*cosh(v))  
  
parametric_plot3d(f, (0,4*pi), (-2,2), mesh = True, frame = False, opacity  
                  = 9/10)
```

BIBLIOGRAFÍA

- [1] S. AXLEY, P. BOURDON, W. RAMEY. *Harmonic Function Theory*. Segunda edición. Springer-Verlag. Nueva York, 2001.
- [2] A. CARRIAZO, L. M. FERNÁNDEZ, M. T. VILLAR. *Resumen de la Asignatura: Geometría Local de Curvas y Superficies*. Departamento de Geometría y Topología. Universidad de Sevilla.
- [3] R. COURANT. «Plateau's Problem and Dirichlet's Principle». *Annals of Mathematics*, vol. 38, 679–724, 1937. <https://www.jstor.org/stable/1968610>.
- [4] U. DIERKES, S. HILDEBRANDT, F. SAUVIGNY. *Minimal Surfaces*. Segunda Edición. Springer-Verlag. Berlin, 2010. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-11698-8>
- [5] M. P. DO CARMO. *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*. Primera edición. Alianza Universidad Textos. Madrid, 1990.
- [6] S. V. FOMIN, I. M. GELFAND. *Calculus of Variations*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.
- [7] M. A. HERNÁNDEZ, J. A. PASTOR. *Un Curso de Geometría Diferencial*. Ediciones Doce Calles, S. L. Madrid, 2010.
- [8] K. B. HOWELL. *Principles of Fourier Analysis*. Chapman & Hall/CRC. Boca Raton, Florida, 2001.
- [9] M. LUNA, C. MORALES. *Resumen de la Asignatura: Ecuaciones en Derivadas Parciales*. Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico. Universidad de Sevilla.
- [10] J. MONTERDE. «The Plateau-Bézier Problem». En: M. J. WILSON, R. R. MARTIN (EDS). *Mathematics of Surfaces. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 2768, 261–273. Springer-Verlag. Berlin, 2003. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-540-39422-8_18.

- [11] J. C. C. NITSCHÉ. *Lectures on Minimal Surfaces*, vol. 1. Cambridge University Press. Cambridge, 1989.
- [12] R. OSSERMAN. *A Survey of Minimal Surfaces*. Dover Publications. Mineola, Nueva York, 1986.
- [13] J. G. PÉREZ. «Jesse Douglas y el Problema de Plateau». *La Gaceta de la RSME*, vol. 8.2, 453–469, 2005. <https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=485>.
- [14] M. PRADO, J. REBOLLO, I. RUIZ. *Resumen de la Asignatura: Geometría Aplicada*. Departamento de Geometría y Topología. Universidad de Sevilla.
- [15] T. RADÓ. *On the Problem of Plateau/Subharmonic Functions*. Springer-Verlag. Berlin, 1933.
- [16] W. RUDIN. *Principles of Mathematical Analysis*. Tercera edición. McGraw-Hill. Nueva York, 1976.
- [17] R. SHAKARCHI, E. M. STEIN. *Complex Analysis*. Princeton University Press. Princeton, Nueva Jersey, 2003.