



UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

Trabajo Fin de Grado:

TOMOGRAFÍA GEOMÉTRICA

Víctor Díaz Gil - Grado en Matemáticas

Julio 2023

Dirigido por:
Rafael Villa Caro

Índice general

Abstract	1
Introducción	3
1. Nociones básicas	5
1.1. Conceptos básicos y notación	5
1.2. Convexidad	7
1.2.1. Conjuntos convexos	7
1.2.2. Proyecciones de conjuntos convexos	10
1.2.3. Hiperplanos soporte	14
1.2.4. Funciones Convexas	16
1.2.5. Función soporte	17
1.2.6. Dualidad	22
1.3. Teoría de Brunn-Minkowski	26
2. Proyecciones de cuerpos convexos	37
2.1. Volumen extremo de proyecciones	37
2.1.1. Proyecciones del cubo	38
2.1.2. Proyecciones del diamante	39
2.1.3. Casos intermedios	45
2.2. Desigualdad de Loomis-Whitney	45
2.2.1. Prueba de la desigualdad	46
2.2.2. Versión funcional	49
2.3. El Problema de Shephard	52
2.3.1. Resolución usando Geometría Convexa	52
2.3.2. Resolución usando Análisis de Fourier	57

3. Cuerpos de proyección de un cuerpo convexo	63
3.1. Teorema de Unicidad de Alexandrov	65
3.2. Desigualdad de Petty afín	67
3.2.1. Invariancia por transformaciones afines	67
3.2.2. Caso $n = 2$	67
3.2.3. Caso $n \geq 3$	68
3.3. Desigualdad de Zhang	69
3.3.1. Invariancia por transformaciones afines	69
3.3.2. Cota superior	70
3.3.3. Cota inferior	73
A. Resultados técnicos	75
Bibliografía	77

Abstract

The aim of this survey is to develop the study of properties relating convex bodies in \mathbb{R}^n (compact, convex sets) and its projections, in terms of measure. It will be shown basic notions of convexity and several tools of the Brunn-Minkowski Theory with the purpose of establishing concepts like projections, convex bodies and the measure of convex bodies projections. It will be discussed problems like extremal measures of the ℓ_p balls projections, the Loomis-Whitney inequality and the Shephard's Problem. Finally, the projection body of a convex body, the Alexandrov's Uniqueness Theorem, Petty's inequality and Zhang's inequality is also introduced.

Introducción

La Tomografía Geométrica es el campo de las matemáticas dentro de la Geometría Convexa que busca adquirir información sobre las propiedades de un objeto geométrico a través del estudio de sus secciones o proyecciones. Este trabajo se limitará al estudio de la de la medida de las proyecciones de lo que se denominan cuerpos convexos, con el objetivo final de mostrar bajo qué condiciones se puede relacionar esta medida con la del objeto.

Para tratar este problema se van a usar herramientas de diversas ramas de las matemáticas, las cuáles se asumirán conocidas. Entre ellas se encuentran la Teoría de la Medida, el Análisis de Fourier, la Teoría de Distribuciones y las Variedades Diferenciables. Los resultados generales de Teoría de la Medida se pueden encontrar en [2], la definición y propiedades de la medida de Hausdorff se puede encontrar en [11], sobre Análisis de Fourier y Distribuciones se recomienda [14] y sobre Variedades Diferenciables basta con ver la sección nueve del capítulo cero de [5]

El presente trabajo está dividido en tres capítulos y un apéndice cuyos contenidos pasamos a exponer brevemente.

- **Primer Capítulo:**

Se introducirán notaciones básicas, y se expondrán las herramientas fundamentales de la convexidad como las proyecciones, el vector normal exterior, la función soporte o función radial. También se mostrarán algunas propiedades de las funciones convexas y un concepto de dualidad entre proyecciones y secciones. Finalmente se expondrán herramientas de la Teoría de Brunn-Minkowski co-

mo la desigualdad de Brunn-Minkowski, la medida de superficie y los volúmenes mixtos. Se definirá la medida de una proyección con la conocida fórmula de Cauchy, y se darán los primeros resultados que relacionan ésta con la medida del objeto proyectado, como podría ser la primera Desigualdad de Brunn-Minkowski. Por último se introducirán los volúmenes mixtos duales.

■ Segundo Capítulo:

Se mostrará el cálculo de las proyecciones de las bolas ℓ_∞ y ℓ_1 , y se estimarán cotas superior e inferior, estudiando los casos de igualdad, además se comentarán los casos intermedios. Posteriormente se presentará la desigualdad de Loomis-Whitney que da una cota del volumen de un conjunto de medida finita a través de sus proyecciones en los hiperplanos coordenados. Finalmente se introducirá el Problema de Shephard, que se tratará con las herramientas de la Geometría Convexa y con las del Análisis de Fourier.

■ Tercer Capítulo:

En relación con todo lo estudiado en el capítulo anterior, se introducirá un nuevo cuerpo convexo que se denominará cuerpo de proyección de un cuerpo convexo y que está fuertemente relacionado con las proyecciones. Se demostrará el Teorema de Unicidad de Alexandrov y finalmente se tratarán la desigualdad Petty afín y la desigualdad de Zhang que relacionan la medida del cuerpo de proyección y del cuerpo de proyección dual de un cuerpo convexo respectivamente con la medida del cuerpo convexo del que proceden.

■ Apéndice:

Aquí se podrán encontrar algunos resultados técnicos que serán necesarios para el desarrollo del trabajo.

Capítulo 1

Nociones básicas

1.1. Conceptos básicos y notación

En esta sección se introducirán nociones y notaciones básicas de los elementos y herramientas que se utilizarán en este trabajo.

El espacio euclídeo n -dimensional se denota \mathbb{R}^n . Para referirse a sus elementos se utilizarán habitualmente letras minúsculas, y para sus subconjuntos letras mayúsculas.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$ entonces su expresión en coordenadas es $x = (x_1, \dots, x_n)$. El elemento nulo u origen se denotará 0 . $e_j \in \mathbb{R}^n$ con $1 \leq j \leq n$ denotará el elemento j -ésimo de la base canónica.

Un conjunto $V \in \mathbb{R}^n$ se dice subespacio vectorial de \mathbb{R}^n si contiene el origen y todas las combinaciones lineales de sus elementos.

La norma $p \in [1, +\infty)$ de \mathbb{R}^n se denota $\|\cdot\|_p$ y se define con la fórmula.

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

La norma $p = \infty$ de \mathbb{R}^n se denota $\|\cdot\|_\infty$ y se define con la fórmula.

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1 \dots, n\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

El espacio \mathbb{R}^n dotado de la norma $\|\cdot\|_p$ se denota ℓ_p^n . Cuando $p = 2$ se llamará espacio euclídeo y en tal caso su norma se escribirá simplemente $|x|$. Las p -bolas n -dimensionales son $B_p^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leq 1\}$. Cuando $p = 1$ se le llamará diamante, cuando $p = 2$ bola y cuando $p = \infty$ cubo.

La frontera topológica de un conjunto X se denotará ∂X y en particular la frontera de B_2^n se denotará $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

El producto escalar de \mathbb{R}^n se denota $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y se define

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Si A es una matriz $n \times n$, el producto escalar satisface $\langle x, x \rangle = |x|^2$ y $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^t y \rangle$, donde A^t es la traspuesta de A .

Una aplicación Φ se dice transformación lineal (afín) si y solo si es de la forma $\Phi x = Ax$ ($\Phi_{x_0} x = Ax + x_0$) donde A es una matriz $n \times n$ invertible y x_0 es un vector de \mathbb{R}^n . Se observa que $\Phi = \Phi_0$. Nótese que $\det \Phi_{x_0} = \det \Phi = \det A$ y que $\Phi_{x_0}^t, \Phi_{x_0}^{-1}$ y $\Phi_{x_0}^{-t}$ son las transformaciones afines con matrices A^t, A^{-1} o $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ respectivamente.

Una transformación afín se dirá traslación cuando $A = I$, donde I denota la identidad. Por lo que toda transformación afín es la composición de una transformación lineal y una traslación.

Si $A = rI$ con $r > 0$ entonces a la transformación afín se le denomina una homotecia de centro x_0 y razón r .

Si $\det A = 1$ y $A^t = A^{-1}$ entonces a la transformación lineal asociada se le llama giro.

Un elipsoide se define como la transformación afín de B_2^n , y se dice centrado si es la transformación lineal de B_2^n .

$\mathbb{B}(\mathbb{S}^{n-1})$ denotará la σ -álgebra Borel de \mathbb{S}^{n-1} . Una subesfera de \mathbb{S}^{n-1} es $\Phi(\mathbb{S}^k)$ con Φ un giro y $0 \leq k \leq n - 2$. Una medida en \mathbb{R}^n se dirá par si $\mu(-A) = \mu(A)$ para todo elemento en su σ -álgebra de conjuntos medibles. La medida Lebesgue n -dimensional y la medida de Hausdorff $(n - 1)$ -dimensional se denotarán $|\cdot|$. Cuando se integre respecto a la medida de Lebesgue se usará la notación dx .

$L^p(\mathbb{R}^n)$ denotará al espacio de las clases de las funciones p -integrables Lebesgue donde donde la funciones en dicha clase se identifican si son iguales salvo en un conjunto de medida Lebesgue nula. Análogamente se define $L^p(\mathbb{S}^{n-1})$ para la medida invariante por rotaciones de superficie definida en \mathbb{S}^{n-1} (véase Definición 1.3.2). La norma $p \in [1, +\infty]$ de una función en \mathbb{R}^n se denota $\|f\|_{p;\mathbb{R}^n}$.

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ la transformada de Fourier se denotará \widehat{f} .

Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dirá par si $f(-x) = f(x)$ y homogénea de grado p si $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\lambda > 0$.

Una función se dirá que está soportada en una conjunto Ω , si fuera de éste es nulo, y su soporte será la clausura del conjunto $\{f \neq 0\}$. $D(\mathbb{R}^n)$ denotará el espacio de las funciones $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables de soporte compacto en \mathbb{R}^n y $D'(\mathbb{R}^n)$ el espacio de las distribuciones de \mathbb{R}^n . Dada $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, f aplicado a φ se denotará $\langle f, \varphi \rangle$. Además una distribución $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ se dirá homogénea de grado p si para $t > 0$ y $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi(x) = t^n \varphi(x/t)$, ocurre que $\langle f, \phi \rangle = t^p \langle f, \varphi \rangle$.

La transformada de Fourier de una $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ se define como la distribución $\widehat{f} \in D'(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

1.2. Convexidad

En esta sección no se pretende dar un desarrollo global sobre la convexidad, sino dar las herramientas y nociones básicas que serán requeridas para el desarrollo del trabajo. Si se quiere ver un desarrollo más exhaustivo sobre la convexidad se referencia el capítulo uno de [17] y el cero de [5].

1.2.1. Conjuntos convexos

Definición 1.2.1. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se dirá **convexo**, si para todo $x, y \in A$ se tiene que $[x, y] \equiv \{(1 - \lambda)x + \lambda y : \lambda \in [0, 1]\} \subseteq A$.

Visto de manera geométrica, un conjunto se dirá convexo si para todo par de puntos se tiene que el segmento que los une se mantiene en el conjunto.

Algunos conjuntos convexos son las bolas B_p^n o los productos cartesianos de intervalos. Una corona circular es un conjunto no convexo.

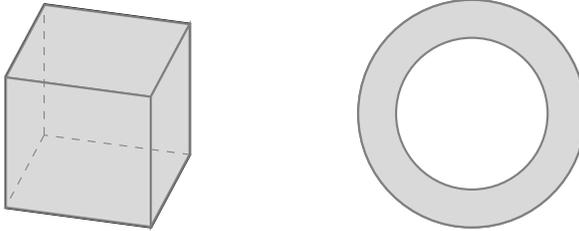


Figura 1.1: Ejemplos de conjuntos convexos y no convexos.

Definición 1.2.2. Sean $k, n \in \mathbb{N}$. Una **combinación convexa** de vectores $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ es una expresión de la forma:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \text{ con } \lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0, 1], \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1.$$

Es fácil comprobar que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si y solo si toda combinación convexa de sus elementos pertenece al conjunto.

Se van a introducir distintas operaciones entre conjuntos y se verá bajo qué condiciones se mantiene la convexidad.

Definición 1.2.3. Sean $A, B \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces definimos el **conjunto suma** y el **conjunto producto por escalar** así:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

Por $x + A$ entenderemos la suma de conjuntos $\{x\} + A$.

Proposición 1.2.4. Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

i) *Asociativa:* $A + (B + C) = (A + B) + C$.

ii) *Conmutativa:* $A + B = B + A$.

iii) *Distributiva*: $\alpha(A + B) = (\alpha A) + (\alpha B)$.

Observación 1.2.5. A pesar de que las operaciones suma y producto por escalar funcionan en conjuntos de forma muy similar a como lo hacen con números, hay igualdades que no son ciertas en general, como por ejemplo $\sum_{i=1}^k A = kA$.

Proposición 1.2.6. Sea A_1, \dots, A_k una colección finita de conjuntos convexos de \mathbb{R}^n , $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ números no negativos, entonces $\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i$ es convexo.

Proposición 1.2.7. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una colección arbitraria de conjuntos convexos de \mathbb{R}^n , entonces $\bigcap_{i \in I} A_i$ también es convexo.

Definición 1.2.8. Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se denota por **conv(A)** a la **envoltura convexa**, que será la intersección de todos los conjuntos convexos en \mathbb{R}^n que contienen a A .

Este es el menor conjunto convexo que contiene a A en \mathbb{R}^n , y coincidirá con A si y solo si éste es convexo. Además también se puede probar que éste es el conjunto de las combinaciones convexas finitas de los elementos de A .

Definición 1.2.9. Dada $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ una colección finita de puntos, su envoltura convexa se denomina **politopo**.

Algunos ejemplos de politopos son los polígonos en \mathbb{R}^2 y los prismas en \mathbb{R}^3 , en ambos casos serían la envoltura convexa de sus vértices.

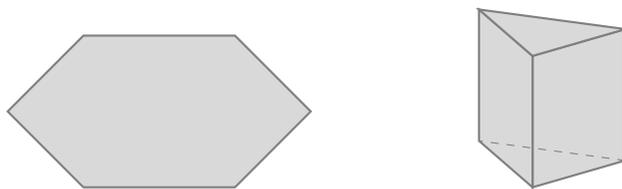


Figura 1.2: Ejemplos de politopos.

Definición 1.2.10. Sean $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ puntos afinmente independientes, el politopo que forman se denota **k-símplice**.

El 1-símplice es un segmento, el 2-símplice un triángulo y 3-símplice tendría forma de tetraedro. Véase la Figura 1.3.

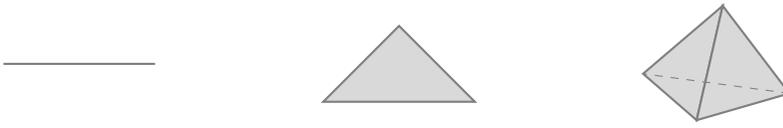


Figura 1.3: Ejemplos de símplices.

Proposición 1.2.11. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $\Phi_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación afín, entonces $\Phi_{x_0}(A)$ es convexo.*

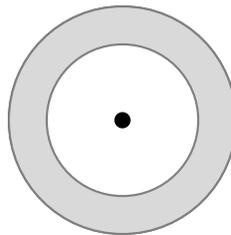
1.2.2. Proyecciones de conjuntos convexos

Este trabajo se va centrar en el estudio de las proyecciones de conjuntos convexos. Damos a continuación las nociones fundamentales para ello.

Teorema 1.2.12. *Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, cerrado y convexo. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existe un único punto en F , que se denotará $p_F(x)$, y que cumple:*

$$|x - p_K(x)| \leq |x - y| \quad \forall y \in F.$$

La prueba se puede encontrar en la segunda sección del primer capítulo de [17]. Interesa aclarar que el papel que tiene la convexidad en este resultado es la unicidad. Por ejemplo en la siguiente corona circular, que es cerrada, no vacía pero no es convexa, el punto central tiene a toda circunferencia interior como puntos que minimizan la distancia.



El teorema anterior nos permite definir la proyección.

Definición 1.2.13. *Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, cerrado y convexo. Entonces la **proyección métrica** sobre F es la aplicación que a cada punto de*

\mathbb{R}^n asocia el único punto de F que minimiza la distancia al conjunto F . Se denota de esta manera:

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto p_F(x) \in F$$

Además si $x \notin F$ denotaremos $u(F, x)$ al vector unitario que marca la dirección de $p_F(x)$ a x . Es decir:

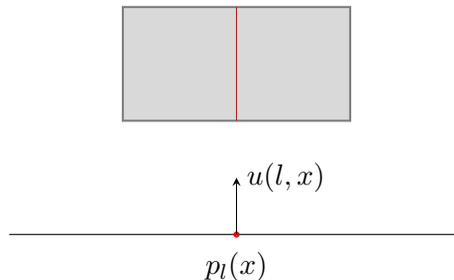
$$u(F, x) = \frac{x - p_F(x)}{d(F, x)}.$$

La proyección de un conjunto A sobre un conjunto convexo, cerrado y no vacío F no es más que el conjunto de puntos de F que se encuentran más cerca de A .

Proposición 1.2.14. *Sea F un conjunto cerrado y no vacío de \mathbb{R}^n , si $x \notin F$ e $y \in \{p_F(x) + \lambda u(F, x) : \lambda \geq 0\}$. Entonces $p_F(x) = p_F(y)$.*

La demostración de esta proposición se encuentra en la segunda sección del primer capítulo de [17], y es de gran utilidad para visualizar proyecciones. Sea un conjunto de puntos alineados en una dirección $u(F, x)$ del conjunto F sobre el que se hace la proyección, el resultado nos indica que basta hacer la proyección de uno de ellos para saber la de todo el conjunto. Véase el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.15. *En la figura siguiente, al proyectar el rectángulo sobre la recta, el segmento rojo l tiene como proyección el punto rojo.*



Con esto quedan definidas las proyecciones. Ahora se va a introducir una manera algebraica de calcularla. Para ello se va a definir otro tipo de proyección que va a tener un cálculo más sencillo, y que coincide con la proyección métrica sobre ciertos conjuntos convexos, que van a ser los

conjuntos estándares sobre los que se va a proyectar en el estudio de las proyecciones.

Definición 1.2.16. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, su **conjunto ortogonal** se denota A^\perp y satisface:

$$A^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a \rangle = 0 \quad \forall a \in A\}.$$

A^\perp es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n , y por tanto es convexo, cerrado y no vacío.

Teorema 1.2.17. Dado V un espacio vectorial de \mathbb{R}^n , todo $x \in \mathbb{R}^n$ tiene una descomposición única en la forma

$$x = P_V(x) + P_{V^\perp}(x)$$

donde $P_V(x) \in V$ y $P_{V^\perp}(x) \in V^\perp$. Estos dos puntos se denotan **proyecciones ortogonales** de x a los conjuntos V y V^\perp respectivamente.

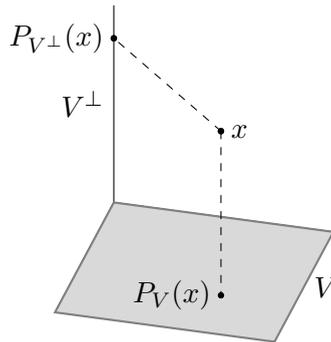


Figura 1.4: Proyección ortogonal.

Corolario 1.2.18. Dado V un espacio vectorial de \mathbb{R}^n , se pueden definir las aplicaciones proyecciones ortogonales a V o a V^\perp que a cada $x \in \mathbb{R}^n$ le asocia $P_V(x)$, $P_{V^\perp}(x)$ respectivamente.

Estas aplicaciones son lineales, continuas y coinciden con las proyecciones métricas sobre V o V^\perp respectivamente.

La prueba de estos dos resultados se encuentra en el capítulo 7 de [3].

El estudio de las proyecciones se suele reducir a proyectar a espacios vectoriales. Concretamente en este trabajo nos centraremos en los hiperplanos que son de la forma $\{u\}^\perp = u^\perp$ con $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. A continuación se muestra cómo funciona la proyección a un hiperplano y luego se dará un ejemplo particular.

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ y $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Para calcular $P_{u^\perp}(K)$, se toma $x \in K$; si $x \in u^\perp$, entonces $P_{u^\perp}(x) = x$; en otro caso, se busca $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x + \lambda u \in u^\perp$, y de ese modo $P_{u^\perp}(x) = x + \lambda u$.

Ejemplo 1.2.19. Sea $A = \text{conv}(\{(0, 0, 3), (1, 0, 3), (0, 1, 3), (1, 1, 3), (0, 5, -2, 5)\})$ y $u = (0, 0, 1)$.

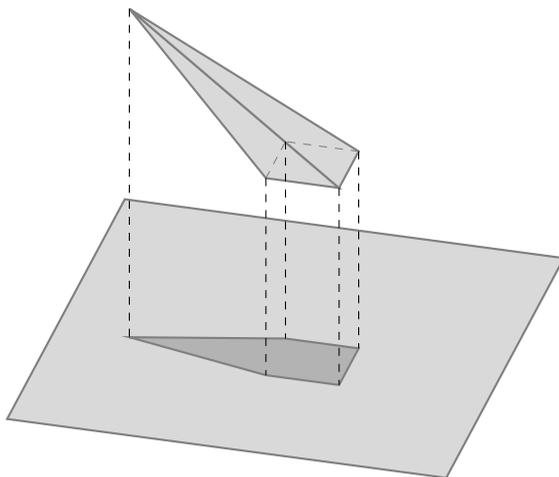


Figura 1.5: Proyección de un politopo.

La figura sombreada en el hiperplano es la proyección del politopo. En el dibujo se aprecia que realmente solo había que haber proyectado dos de las caras del politopo para obtener la misma proyección, esto va a ser algo común, en general si proyectas la frontera de un conjunto en un hiperplano obtendrás la misma proyección que al proyectar el conjunto, esto es consecuencia directa de la Proposición 1.2.14.

1.2.3. Hiperplanos soporte

En esta sección se va a mostrar cómo a ciertos conjuntos convexos se les puede asociar orientación. Este hecho será fundamental cuando pasemos al problema de la medida de las proyecciones. Las demostraciones de los resultados que se van a mostrar se pueden encontrar en la tercera sección del primer capítulo de [17].

Definición 1.2.20. Sea $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, $c \in \mathbb{R}^n$ y H el hiperplano de \mathbb{R}^n de la forma $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = c\}$. Entonces los **semiespacios** H^+ y H^- son:

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \geq c\}.$$

$$H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leq c\}.$$

Definición 1.2.21. Dado un conjunto convexo, cerrado y no vacío $F \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que un hiperplano H **soporta** a F en un punto $x \in F$ si $x \in F \cap H$ y F queda contenido en uno de los semiespacios H^+ y H^- .

Definición 1.2.22. Dado un conjunto convexo, cerrado y no vacío $F \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que H es un **hiperplano soporte** de F si H soporta a F en algún punto x . Además, en ese caso el semiespacio H^+ o H^- que contiene a F se denomina **semiespacio soporte** de F .

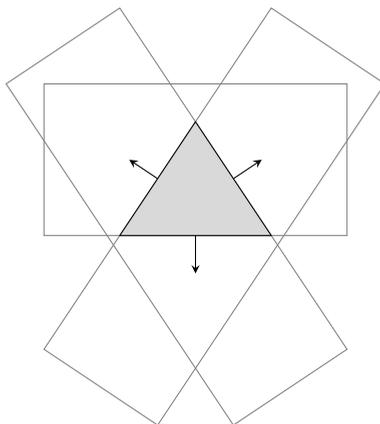
Proposición 1.2.23. Sea F un conjunto convexo, cerrado y no vacío, y $x \notin F$. Entonces, el hiperplano H que pasa por el punto $p_F(x)$ y es ortogonal al vector $u(F, x)$ soporta a F .

Teorema 1.2.24. Si F es un conjunto convexo, cerrado y no vacío de \mathbb{R}^n , entonces por cada punto frontera de F existe un hiperplano que soporta a F . Además, si F es acotado, para cada vector no nulo u existe un hiperplano soporte a F con vector normal u .

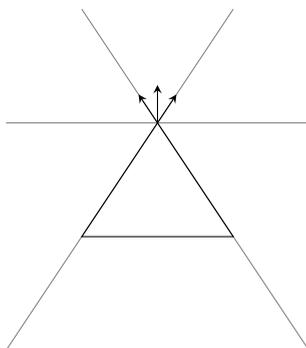
Corolario 1.2.25. Todo conjunto convexo, cerrado y no vacío F de \mathbb{R}^n es la intersección de sus semiespacios soporte.

Definición 1.2.26. Sea F un conjunto convexo, cerrado y con interior no vacío de \mathbb{R}^n . Si para $x \in \partial F$, el hiperplano H que soporta a x en F verifica $F \subseteq H^-$, entonces al vector normal $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ del hiperplano se le llama un **vector normal exterior** de F en el punto x . Si ese vector normal exterior en $x \in \partial F$ es único, se denotará $n(x)$.

Ejemplo 1.2.27. *Ilustremos los resultados de esta sección con el siguiente ejemplo. El siguiente triángulo tiene como hiperplanos soporte las rectas que contienen a sus lados, además se ve claramente que es la intersección de los semiespacios soporte.*



Los vectores que salen en el dibujo son los vectores normales exteriores, que en el triángulo están bien definidos en todos los puntos salvo los vértices. Para ver que el vector normal exterior no está bien definido en los vértices basta observar esta figura.



Esto es lo que va a pasar de manera general con los conjuntos cerrados y convexos de \mathbb{R}^n , van a tener el vector normal bien definido salvo un conjunto de medida $(n - 1)$ -dimensional nula.

1.2.4. Funciones Convexas

En esta sección introducirán las funciones convexas, con algunas de sus propiedades. Las demostraciones de los resultados se pueden encontrar en la sección cinco del capítulo uno de [17].

Definición 1.2.28. Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es **convexa** si verifica que:

$$f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in [0, 1].$$

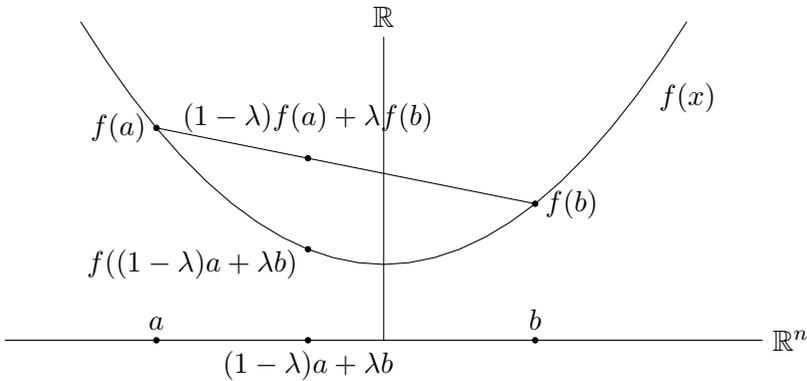


Figura 1.6: Función convexa.

Definición 1.2.29. Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es **cóncava** si $-f$ es convexa.

Proposición 1.2.30. Las funciones convexas verifican estas propiedades:

- i) El supremo de un número arbitrario de funciones convexas es convexa.
- ii) Si f y g son convexas y $\alpha \geq 0$ entonces $f + g$ y αf son convexas.
- iii) f es una función convexa si y solo si para toda combinación convexa se da la **desigualdad de Jensen**:

$$f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_i).$$

- iv) Todo mínimo local es mínimo global.

Teorema 1.2.31. Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa (cóncava), con I un intervalo abierto de \mathbb{R} . Entonces sus derivadas laterales existen y son monótonas crecientes (decrecientes). Además si f'_i y f'_d son las derivadas laterales por la izquierda y por la derecha respectivamente, entonces $f'_i \leq (\geq) f'_d$ y se da la igualdad salvo en un conjunto numerable, por lo que son derivables salvo en ese conjunto numerable.

Teorema 1.2.32. Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable, con I un intervalo abierto de \mathbb{R} . Entonces f es convexa (cóncava) si y solo si f' es monótona creciente (decreciente). Por lo tanto si f es dos veces derivable entonces f es convexa (cóncava) si y solo si $f'' \geq (\leq) 0$.

1.2.5. Función soporte

En esta sección vamos a introducir una función convexa que en ciertos casos nos va a permitir caracterizar ciertos conjuntos convexos y trabajar con ellos algebraicamente. Las demostraciones de los resultados se pueden encontrar en la séptima sección del primer capítulo de [17].

Definición 1.2.33. Sea F es conjunto convexo, cerrado y no vacío de \mathbb{R}^n e $y \in \mathbb{R}^n$, se denota h_F a la **función soporte** de F que se define como

$$h_F(y) = \sup\{\langle x, y \rangle : x \in F\}.$$

Observación 1.2.34. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y l_u la recta que pasa por origen en la dirección u , entonces es fácil de comprobar que para $x \in A$.

$$P_{l_u}(x) = \langle x, u \rangle u$$

Si tomamos un vector unitario $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, la función soporte $h_F(u)$ mide la longitud máxima de todas las proyecciones de los puntos de F sobre la recta que define el vector u .

Proposición 1.2.35. Sea F, F_1, F_2 conjuntos convexos, cerrados y no vacíos de \mathbb{R}^n , $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \geq 0$, V una subespacio vectorial y $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Se verifican las siguientes propiedades:

- i) h_F es **sublineal**, es decir, $h_F(\lambda y) = \lambda h_F(y)$ si $\lambda \geq 0$ (**positivamente homogénea**) y $h_F(y_1 + y_2) \leq h_F(y_1) + h_F(y_2)$ (**subaditiva**). De esto se deduce que la función soporte es convexa.

ii) $h_{F_1} \leq h_{F_2}$ si y sólo si $F_1 \subseteq F_2$.

iii) $h_{P_V(K)}(y) = h_K(y) \quad \forall y \in V$.

iv) $h_{\lambda F} = \lambda h_F$ y además $h_{-F}(y) = h_F(-y)$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$.

v) $h_{\Phi(F)}(y) = h_F(\Phi^t(y))$.

Demostración. i), iv) y v) son simples comprobaciones usando propiedades del supremo y del producto escalar.

La implicación *si* de ii) se debe a las propiedades del supremo; para la implicación *sólo si* basta usar un resultado de separación de conjuntos convexos cerrados que se puede hallar en la sección tres del capítulo uno de [17]. Si $x \notin F$ entonces $\exists y_0 \in \mathbb{R}^n$ de tal manera que $\langle x, y_0 \rangle > \langle x, y \rangle \quad \forall y \in F$ de donde se deduce que:

$$x \in F \iff \langle x, y \rangle \leq h_F(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Con esto se deduce la implicación no trivial de ii).

Para iii), basta observar que, por el Teorema 1.2.17, si $z \in P_V(K)$, existe $x \in K$ tal que $z = x - P_{V^\perp}(x)$, por lo que $\langle z, y \rangle = \langle x, y \rangle$ si $y \in V$, de donde se deduce fácilmente lo que se debe probar. \square

Observación 1.2.36. La propiedad i) nos permite definir h_F sólo en los vectores unitarios $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, ya que $h_F(0) = 0$, y si $y \neq 0$ se puede escribir $y = |y| \frac{y}{|y|}$, por lo que $h_F(y) = |y| h_F(\frac{y}{|y|})$ donde $\frac{y}{|y|} \in \mathbb{S}^{n-1}$ y $|y| > 0$.

La propiedad ii) permite caracterizar los conjuntos cerrados y convexos a través de sus funciones soportes.

Ejemplo 1.2.37. 1. Para $F = [-x, x]$ con $x \in \mathbb{R}^n$, si x e y forman un ángulo agudo entonces $h_F(y) = \langle x, y \rangle \geq 0$, en otro caso $h_F(y) = -\langle x, y \rangle \geq 0$. Se deduce entonces que $h_F(y) = |\langle x, y \rangle|$.

2. Si $F = rB_2^n$ con $r > 0$, entonces $\langle x, y \rangle \leq |x||y| \leq r|y|$ y si tomamos $x = r \frac{y}{|y|}$ llegamos a que $h_F(y) = r|y|$.

3. $F = \Phi(B_2^n)$ un elipsoide centrado en el origen, entonces

$$h_F(y) = |\Phi^t(y)| h_{B_2^n}\left(\frac{\Phi^t(y)}{|\Phi^t(y)|}\right) = |\Phi^t(y)|.$$

Proposición 1.2.38. Si F es un conjunto convexo, cerrado y no vacío de \mathbb{R}^n , entonces se tiene que:

$$F = \bigcap_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leq h_F(u)\}.$$

Este resultado se deduce de (1.1) y de la Observación 1.2.36. Es de gran interés y nos muestra el sentido del nombre de la función. El valor $h_F(u)$ con $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ si es finito asocia al cuerpo F un hiperplano soporte con vector normal exterior u . Además es la distancia con signo desde el origen hasta el hiperplano soporte asociado a $h_F(u)$.

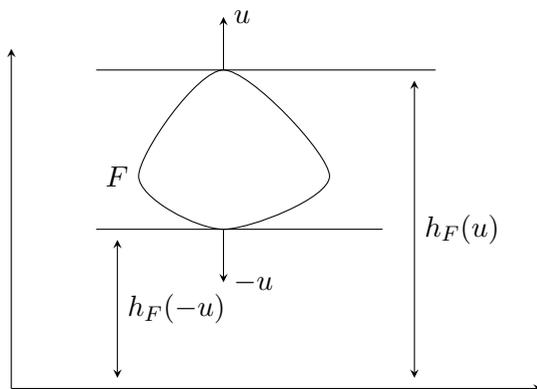


Figura 1.7: Interpretación geométrica de la función soporte.

Teorema 1.2.39. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función sublineal, entonces existe un único conjunto convexo y compacto K en \mathbb{R}^n de tal manera que su función soporte es f .

No se va a dar una prueba completa, pero si se va a mostrar la idea detrás de ella. Si tenemos una función sublineal f se puede construir el siguiente conjunto basándonos en la proposición anterior.

$$K = \bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leq f(y)\}.$$

Al ser intersección de semiespacios cerrados es convexo y cerrado, además está acotado en todas las direcciones por lo que es acotado. Si K no es vacío por definición de función soporte $h_K(y) \leq f(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$.

Bastaría demostrar que $h_K(y) \geq f(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$ y se tendría la existencia y la unicidad por las propiedades de la función soporte. La prueba completa se puede encontrar en la sección siete del capítulo uno de [17].

Corolario 1.2.40. *Si denotamos \mathcal{K}^n al conjunto de los cuerpos convexos en \mathbb{R}^n (convexos y compactos), entonces hay una biyección entre \mathcal{K}^n y las funciones sublineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} que consiste en asociarle a cada K su función soporte h_K .*

Proposición 1.2.41. *Sean $K, L \in \mathcal{K}^n$, entonces $h_{K+L} = h_K + h_L$.*

Demostración. Sea $z \in K + L$ entonces existe $x \in K, y \in L$ tal que

$$\langle z, u \rangle = \langle x, u \rangle + \langle y, u \rangle \leq h_K(u) + h_L(u).$$

De aquí se deduce que $h_{K+L} \leq h_K + h_L$. Como K, L son compactos y $\langle \cdot, u \rangle$ es continua existen valores $x_0 \in K$ e $y_0 \in L$ donde $h_K(u) = \langle x_0, u \rangle$ y $h_L(u) = \langle y_0, u \rangle$. De esto se deduce:

$$h_K(u) + h_L(u) = \langle x_0, u \rangle + \langle y_0, u \rangle = \langle x_0 + y_0, u \rangle \leq h_{K+L}(u). \quad \square$$

Una consecuencia de este resultado es que para $K \in \mathcal{K}^n$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^m K = mK \quad \text{con } m > 1.$$

Definición 1.2.42. *Sea $K \in \mathcal{K}^n$ y $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ se define la **anchura** de K en la dirección u como*

$$w_K(u) = h_K(u) + h_K(-u).$$

Proposición 1.2.43. *Sea $K \in \mathcal{K}^n$, $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ y l_u la recta que pasa por el origen con vector director u , entonces se tiene que:*

$$w_K(u) = |P_{l_u}(K)|$$

donde $|\cdot|$ es la medida de Hausdorff 1-dimensional.

Demostración. Teniendo en cuenta la Observación 1.2.34 y que se trabaja en compactos, la función soporte $h_K(u)$ asocia el mayor coeficiente que se da al proyectar K en l_u y $-h_K(-u)$ será el mínimo. La proyección de K en l_u será entonces el segmento $[-h_K(u)u, h_K(u)u]$ que mide exactamente $w_K(u)$. \square

Definición 1.2.44. Sea $K \in \mathcal{K}^n$ se dice que es **simétrico respecto al origen** o simplemente **centrado** si $K = -K$. El conjunto de cuerpos convexos centrados de \mathbb{R}^n se denota \mathcal{K}_0^n .

Definición 1.2.45. Sea $K \in \mathcal{K}^n$, se define su **cuerpos simétrico** ΔK como

$$\Delta K = \frac{1}{2}(K - K).$$

Además $\Delta K = K$ si y solo si $K \in \mathcal{K}_0^n$.

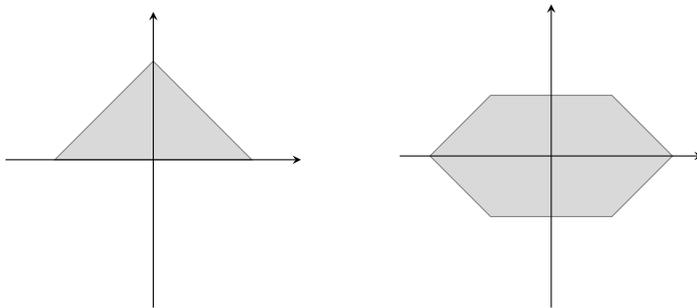


Figura 1.8: Cuerpo convexo con su cuerpo simétrico.

Ejemplo 1.2.46. Sea K un triángulo de vértices $(-1,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$.

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - 1 \leq x \leq 1 - y, 0 \leq y \leq 1\}.$$

$$-K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 - y \leq x \leq 1 + y, -1 \leq y \leq 0\}.$$

Sea $(x_1, y_1) \in K$ y $(x_2, y_2) \in -K$ entonces $K - K$ satisface:

$$-1 \leq y_1 + y_2 \leq 1 \quad -2 + y_1 - y_2 \leq x_1 + x_2 \leq 2 - y_1 + y_2.$$

Por último realizando la homotecia de centro 0 y razón 2 se tiene que ΔK satisface:

$$-2 \leq y_1 + y_2 \leq 2 \quad -4 + y_1 - y_2 \leq x_1 + x_2 \leq 4 - y_1 + y_2.$$

Estas ecuaciones definen el cuerpo simétrico del triángulo, que forman un hexágono.

1.2.6. Dualidad

En esta última subsección se va a introducir el concepto de dualidad en \mathcal{K}_0^n que va a permitir relacionar las dos ramas de la Tomografía Geométrica, las proyecciones y las secciones. Las demostraciones de los resultados salvo que se diga lo contrario se pueden encontrar en la sección seis del capítulo uno de [17].

Definición 1.2.47. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se define el conjunto **dual** de A como

$$A^* = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a \rangle \leq 1 \quad \forall a \in A\}.$$

Proposición 1.2.48. Sean A, B y $\{A_i\}_{i \in I}$, subconjuntos no vacíos de \mathbb{R}^n . Entonces se verifica:

- i) $[\bigcup_{i \in I} A_i]^* = \bigcap_{i \in I} A_i^*$.
- ii) A^* es cerrado, convexo y $0 \in A^*$.
- iii) Si $A \subseteq B$, entonces $B^* \subseteq A^*$.
- iv) Si $\lambda > 0$, entonces $(\lambda A)^* = (1/\lambda)A^*$.
- v) Sea Φ una transformación lineal, entonces $(\Phi A)^* = \Phi^{-t}A^*$.
- vi) $A \subseteq (A^*)^* \equiv A^{**}$.
- vii) $A^{**} = \overline{\text{conv}(A \cup \{0\})}$.

Demostración. Los apartados que no probamos aquí son directos, y basta manejar las propiedades básicas del producto escalar.

i)

$$\left[\bigcup_{i \in I} A_i \right]^* = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a \rangle \leq 1 \quad \forall a \in \bigcup_{i \in I} A_i\} =$$

$$= \bigcap_{i \in I} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a \rangle \leq 1 \quad \forall a \in A_i\} = \bigcap_{i \in I} A_i^*.$$

ii) Basta aplicar i) a $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$, entonces $A^* = \bigcap_{a \in A} \{a\}^*$, donde $\{a\}^*$ es un semiespacio cerrado que contienen a 0.

iii) Sea $x \in B^*$, entonces $\langle x, b \rangle \leq 1 \quad \forall b \in B$; como $A \subseteq B$, en particular $\langle x, a \rangle \leq 1 \quad \forall a \in A$, por lo que $x \in A^*$.

vi) Sea $x \in A$ entonces $\forall y \in A^*$ se tiene $\langle x, y \rangle \leq 1$, por lo que $x \in A^{**}$.

vii) Por vi) se tiene $\overline{\text{conv}(A \cup \{0\})} \subseteq A^{**}$ por la definición de la clausura y de la envolvente convexa. La otra inclusión se puede encontrar en la sección seis del capítulo uno de [17] y se basa en un resultado de separación. \square

Ejemplo 1.2.49. i) $A = rB_2^n$ la bola euclídea n -dimensional y $r > 0$. Sea $x \neq 0$ entonces $r \frac{x}{|x|} \in rB_2^n$, por lo que si $x \in A^*$ se debe cumplir $\langle x, r \frac{x}{|x|} \rangle = r|x| \leq 1$, de donde se deduce que $x \in \frac{1}{r}B_2^n$. Si $x \in \frac{1}{r}B_2^n$ y $a \in rB_2^n$, entonces $\langle x, a \rangle \leq |x||a| \leq 1$. Por lo que $A^* = \frac{1}{r}B_2^n$.

ii) $A = \Phi(B_2^n)$ un elipsoide centrado, entonces por la Proposición 1.2.48 se tiene $A^* = \Phi^{-t}((B_2^n)^*) = \Phi^{-t}B_2^n$ que es otro elipsoide centrado.

iii) $A = B_\infty^n$. Dado $y \in A^*$, tomamos $x \in A$ de tal manera que $x_i = 1$ si $y_i \geq 0$, $x_i = -1$ si $y_i < 0$. Entonces $|y_1| + \dots + |y_n| = \langle x, y \rangle \leq 1$, es decir, $A^* \subseteq B_1^n$. Si y satisface la condición anterior entonces $\langle x, y \rangle \leq |y_1| + \dots + |y_n| \leq 1$. Por lo que $A^* = B_1^n$. Además si $z \in (B_1^n)^*$, entonces tomando $x = (0, \dots, x_i, \dots, 0)$ con $x_i = 1$ si $z_i \geq 0$, y $x_i = -1$ si $z_i < 0$, se llega a que $|z_i| \leq 1$ para todo $i = 1, \dots, n$. Es decir $(A^*)^* = (B_1^n)^* \subseteq B_\infty^n = A$, la otra inclusión siempre ocurre por la Proposición 1.2.48.

iv) $A = \{(1, 1)\}$, entonces $A^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1\}$ y $(1/2, 1/2) \in (A^*)^*$ ya que $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \leq \frac{1}{2} < 1 \quad \forall (x, y) \in A^*$, por lo que $A^{**} \not\subseteq A$.

Proposición 1.2.50. Sea F un conjunto convexo y cerrado de \mathbb{R}^n que contiene el origen. Entonces F es acotado si y solo si 0 es un punto interior de F^* , y además F^* es acotado si y solo si 0 está en el interior de F .

Demostración. Si F es acotado entonces $\exists r > 0$ tal que $F \subseteq rB_2^n$, aplicando la Proposición 1.2.48 se tiene $\frac{1}{r}B_2^n \subseteq F^*$, por lo que el 0 es punto interior de F^* . Recíprocamente si 0 es punto interior de F^* entonces $\exists r > 0$

tal que $rB_2^n \subseteq F^*$, de manera análoga a lo anterior y volviendo a usar la Proposición 1.2.48 se llega a que $F = F^{**} \subseteq \frac{1}{r}B_2^n$, con lo que F está acotado. \square

Corolario 1.2.51. *La aplicación $(\cdot)^*$ es una biyección entre los cuerpos convexos de \mathbb{R}^n que tienen el origen como punto interior, y su inversa es ella misma.*

Vamos a introducir una función que caracteriza los $K \in \mathcal{K}^n$ con $0 \in K$ y que va a ser de gran utilidad para el estudio de la frontera de los cuerpos convexos mencionados anteriormente.

Definición 1.2.52. *Sea $K \in \mathcal{K}^n$ que contiene el 0, entonces se denota ρ_K a la función radial definida para $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ como*

$$\rho_K(x) = \text{máx}\{\lambda \geq 0 : \lambda x \in K\}.$$

Por definición la función radial asocia a cada $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ el número $\lambda \geq 0$ de tal manera que $\lambda x \in \partial K$.

Definición 1.2.53. *Sean $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ se define la suma radial como*

$$x_1 \tilde{+} \dots \tilde{+} x_k = x_1 + \dots + x_k.$$

si x_1, \dots, x_k están en una misma recta que pasa por el origen, y 0 en otro caso.

Definición 1.2.54. *Sean $K_1, \dots, K_m \in \mathcal{K}_0^n$ y $t_1, \dots, t_m \geq 0$, entonces*

$$t_1 K_1 \tilde{+} \dots \tilde{+} t_m K_m = \{t_1 x_1 \tilde{+} \dots \tilde{+} t_m x_m : x_i \in K_i\}.$$

Proposición 1.2.55. *Sea $K, L \in \mathcal{K}^n$ tal que $0 \in K, L$, $r > 0$, $\alpha \geq 0$, V un subespacio vectorial, Φ una transformación lineal. Se tiene que:*

i) $\rho_K(rx) = r^{-1}\rho_K(x)$.

ii) $\rho_{\alpha K}(x) = \alpha\rho_K(x)$.

iii) $\rho_{K \tilde{+} L}(x) = \rho_K(x) + \rho_L(x)$.

iv) $\rho_K(x) = \rho_{K \cap V}(x)$ si $x \in V$.

v) $\rho_{\Phi K}(x) = \rho_K(\Phi^{-1}x)$.

Demostración. *i)* y *v)* son simples reescrituras usando propiedades del máximo.

ii) si $\alpha = 0$ es trivial y en otro caso basta darse cuenta de que $\rho_{\alpha K}(x) = \rho_K(\frac{x}{\alpha})$ y aplicar *i)*.

Sea $\lambda = \rho_{K\dot{+}L}(x)$, entonces $\lambda x \in K\dot{+}L$. Entonces existe $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda x = (\lambda_1 + \lambda_2)y$. De aquí se puede deducir que $x = y$ y por tanto $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ o que $\lambda = 0$. De ambas se tiene que $\rho_{K\dot{+}L}(x) \leq \rho_K(x) + \rho_L(x)$.

Si $\lambda_1 = \rho_K(x)$ y $\lambda_2 = \rho_K(L)$, entonces $\lambda_1 x \in K$ y $\lambda_2 x \in L$. Por definición se tiene $(\lambda_1 + \lambda_2)x \in K\dot{+}L$, de donde se deduce que $\lambda_1 + \lambda_2 \leq \rho_{K\dot{+}L}(x)$.

iv) Si $\lambda = \rho_K(x)$, entonces $\lambda x \in K$. Si $x \in V$, se tiene $\lambda x \in V$, por lo que $\lambda x \in K \cap V$, de donde se deduce $\lambda \leq \rho_{K \cap V}(x)$ si $x \in V$.

Si $\mu = \rho_{K \cap V}(x)$, entonces $\mu x \in K \cap V$, por lo que $\mu x \in K$. De donde se deduce $\mu \leq \rho_K(x)$. \square

Al igual que con la función soporte debido a la propiedad *i)* basta con definir la función radial en los $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Además en ese conjunto de puntos $\rho_K(u)$ es el máximo radio que tiene el conjunto K en el sentido u .

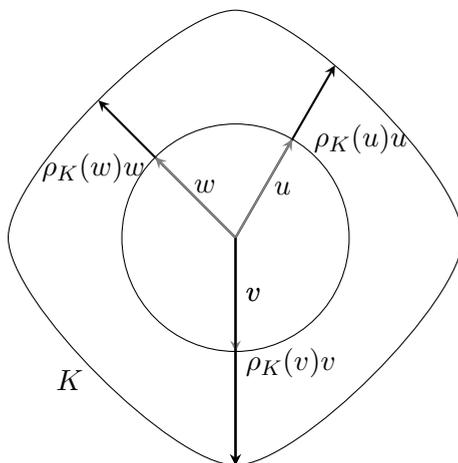


Figura 1.9: Función radial sobre la circunferencia.

Teorema 1.2.56. *Sea $K \in \mathcal{K}^n$ tal que tiene el 0 como punto interior y $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ entonces se tiene*

$$h_{K^*}(x) = \frac{1}{\rho_K(x)}.$$

La prueba de este resultado se puede encontrar en la sección siete del capítulo uno de [17]. Aplicando la Proposición 1.2.48 se deduce que la función radial caracteriza a los cuerpos convexos que tienen al 0 como punto interior.

Proposición 1.2.57. *Sea $K \in \mathcal{K}_0^n$ tal que tiene el 0 como punto interior entonces ρ_K^{-1} define una norma que se denotará $\|\cdot\|_K$ para la que K es la bola unidad.*

Por último se introduce el resultado que relaciona secciones con proyecciones.

Teorema 1.2.58. *Sea $K \in \mathcal{K}^n$ con el 0 como punto interior y V un espacio vectorial. Se tiene que*

$$K^* \cap V = (P_V(K))^*$$

donde el espacio ambiente en el que se calcula el segundo dual es V .

Demostración. Basta usar las Proposiciones 1.2.55, 1.2.35 y 1.2.48, y el Teorema 1.2.56, entonces para todo $u \in \mathbb{S}^{n-1} \cap V$.

$$\rho_{K^* \cap V}(u) = \rho_{K^*}(u) = \frac{1}{h_K(u)} = \frac{1}{h_{P_V(K)}(u)} = \rho_{(P_V(K))^*}(u).$$

Como cualquier elemento de V se puede expresar como combinación lineal de $u \in \mathbb{S}^{n-1} \cap V$ con coeficientes no negativos se tiene que ambos conjuntos coinciden. \square

1.3. Teoría de Brunn-Minkowski

En esta sección se van introducir herramientas de la Teoría de Brunn-Minkowski. Sólo se han recogido los resultados necesarios para el trabajo. Para un desarrollo más exhaustivo, véase el apéndice de [5] y la sección uno del capítulo de [17].

Esta teoría tiene su origen en la célebre desigualdad de Brunn-Minkowski, a partir de la cual se obtienen propiedades fundamentales de los cuerpos convexos. Dicha desigualdad, que establece una relación de concavidad relacionando la suma de conjuntos con la medida de Lebesgue, es cierta para conjuntos muy generales, aunque nosotros sólo la usaremos para cuerpos convexos.

Teorema 1.3.1. Desigualdad de Brunn-Minkowski: Sean $K, L \in \mathcal{K}^n$ y $t \in [0, 1]$, se tiene:

$$|(1-t)K + tL|^{1/n} \geq (1-t)|K|^{1/n} + t|L|^{1/n},$$

dándose la igualdad si y solo si K, L están contenidos en hiperplanos paralelos o $K = x + rL$ con $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$.

Demostración. Sean K y L cajas ortogonal con lados de longitud $x_i, y_i > 0$ respectivamente, entonces se tiene.

$$|K| = \prod_{i=1}^n x_i \quad |L| = \prod_{i=1}^n y_i \quad |K + L| = \prod_{i=1}^n (x_i + y_i).$$

Aplicando la desigualdad aritmético-geométrica, se deduce

$$\left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i}{x_i + y_i} \right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i + y_i} \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_i + y_i} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i + y_i} = 1.$$

Despejando se tiene $|K + L|^{1/n} \geq |K|^{1/n} + |L|^{1/n}$. Esta desigualdad se puede generalizar a colección finitas de cajas ortogonales no solapadas, la prueba se encuentra en el apéndice de [5]. Como la medida de los conjuntos compactos se obtiene usando colección finitas de cajas ortogonales no solapadas, se tiene $|K + L|^{1/n} \geq |K|^{1/n} + |L|^{1/n}$ para $K, L \in \mathcal{K}^n$. Basta coger $(1-t)K$ y tL en lugar de K y L y aplicar propiedades de la medida para deducir la desigualdad deseada. El caso de igualdad se puede encontrar en [5]. \square

Se ha probado la desigualdad 1.3.1 usando que para todo $K, L \in \mathcal{K}^n$ se tiene

$$|K + L|^{1/n} \geq |K|^{1/n} + |L|^{1/n}.$$

Realmente estas dos desigualdades son equivalentes, ya que basta escoger $t = 1/2$ y utilizar las propiedades de la medida Lebesgue. Por lo que cuando se hable de la Desigualdad de Brunn-Minkowski nos referiremos a cualquiera de las dos versiones.

Se van a introducir dos conceptos fundamentales para el estudio de la medida de los cuerpos convexos y de sus proyecciones.

Definición 1.3.2. Sea $K \in \mathcal{K}^n$ y sea $\mathbb{B}(\mathbb{S}^{n-1})$ la σ -álgebra Borel de \mathbb{S}^{n-1} , entonces la **medida de superficie** del conjunto K viene dada por $S(K, w) = |\tau(K, w)|$, donde $\tau(K, w) = \{x \in \partial K : n(x) \in w\}$ con $w \in \mathbb{B}(\mathbb{S}^{n-1})$ y $|\cdot|$ la medida de Hausdorff. Esta es una medida Borel no negativa y finita en \mathbb{S}^{n-1} que satisface

$$S(K, \mathbb{S}^{n-1}) \equiv S(K) = |\partial K|.$$

En el caso de la bola euclídea, denotamos $\nu(\cdot) = S(B_2^n, \cdot)$ (es una medida positiva, finita e invariante por rotaciones de \mathbb{S}^{n-1}).

Teorema 1.3.3. Sea μ una medida no negativa y finita definida en $\mathbb{B}(\mathbb{S}^{n-1})$, que satisface:

1. $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u d\mu(u) = 0$.
2. $\mu(w) < \mu(\mathbb{S}^{n-1}) \quad \forall w \in \mathbb{B}(\mathbb{S}^{n-1})$ subesfera.

Entonces existe un único $K \in \mathcal{K}^n$ tal que $\mu(\cdot) = S(K, \cdot)$.

La demostración de este resultado se encuentra en la sección uno del capítulo siete de [17].

Definición 1.3.4. Sea $K \in \mathcal{K}^n$ de tal manera que $S(K, \cdot)$ es absolutamente continua respecto de ν , entonces la función de densidad $f \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ que satisface $dS(K, \cdot) = f d\nu(\cdot)$ se llama **función curvatura** del cuerpo K .

Definición 1.3.5. Sea $K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}^n$ se define el **volumen mixto** como

$$V(K_1, \dots, K_n) = \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \sum_{i_1 < \dots < i_j} |K_{i_1} + \dots + K_{i_j}|.$$

El siguiente resultado muestra cómo el volumen de una combinación lineal de cuerpos convexos con coeficientes positivos es un polinomio homogéneo de grado n , cuyos coeficientes vienen dados precisamente por los volúmenes mixtos definidos anteriormente.

Teorema 1.3.6. Sea $K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}^n$ y $t_1, \dots, t_n \in [0, +\infty)$. Se verifica

$$|t_1 K_1 + \dots + t_n K_n| = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n V(K_{i_1}, \dots, K_{i_n}) t_{i_1} \dots t_{i_n}.$$

La demostración de este resultado pasa por la prueba para polítopos, y mediante un argumento de aproximación se tiene para cuerpos convexos generales. Se puede encontrar en [17].

Proposición 1.3.7. Sea $K, L \in \mathcal{K}^n$, $K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}^n$, $\alpha, \beta \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\Phi_{x_0} = x_0 + \Phi$ una transformación afín. Entonces el volumen mixto satisface:

- i) $V(K, \dots, K) = |K|$.
- ii) $V(K_1, \dots, K_n) = V(K_{i_1}, \dots, K_{i_n})$ para toda permutación de índices.
- iii) $V(\alpha K + \beta L, K_2, \dots, K_n) = \alpha V(K, K_2, \dots, K_n) + \beta V(L, K_2, \dots, K_n)$.
- iv) $V(K, K_2, \dots, K_n) \leq V(L, K_2, \dots, K_n)$ si $K \subseteq L$.
- v) $V(x_0 + K_1, K_2, \dots, K_n) = V(K_1, K_2, \dots, K_n)$.
- vi) $V(\Phi_{x_0}(K_1), \dots, \Phi_{x_0}(K_n)) = |\det(\Phi)| V(K_1, K_2, \dots, K_n)$.

Demostración. Las pruebas de *iii)* y *iv)* se omiten ya que es un trabajo laborioso que solo requiere utilizar la expresión de los volúmenes mixtos.

i) Basta usar $|(t_1 + \dots + t_n)K| = |K|(t_1 + \dots + t_n)^n$ por las propiedades de la medida Lebesgue y comparar coeficientes de los polinomios.

ii) Es una consecuencia de que la suma de conjuntos sea asociativa y conmutativa.

v) Basta observar que la medida Lebesgue es invariante por traslación y comparar coeficientes de los polinomios.

vi) Basta usar que $|\Phi_{x_0}(t_1 K_1 + \dots + t_n K_n)| = |\det \Phi| |t_1 K_1 + \dots + t_n K_n|$ por las propiedades de la medida Lebesgue y comparar coeficientes de los polinomios. \square

Notación 1.3.8. Sean $K, L \in \mathcal{K}^n$ y $m, k \in \mathbb{N}$ tales que $m + k = n$, se usará la notación

$$V(\underbrace{K, \dots, K}_m, \underbrace{L, \dots, L}_k) \equiv V(K, m; L, k).$$

Si $m = 1$ o $k = 1$, entonces no se escribirá en la expresión.

Teorema 1.3.9. Sean $K, L \in \mathcal{K}^n$ entonces se tiene:

$$nV(K, n-1; L) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{|K + \varepsilon L| - |K|}{\varepsilon}.$$

Demostración. Sea $K, L \in \mathcal{K}^n$ y $\varepsilon > 0$, consideramos la siguiente identidad:

$$\left| \frac{1}{n-1}K + \dots + \frac{1}{n-1}K + \varepsilon L \right| = |K + \varepsilon L|.$$

Por el Teorema 1.3.6 se tiene que es un polinomio homogéneo cuyo coeficiente del término de orden 1 es

$$n(n-1)^{n-1}V\left(\frac{1}{n-1}K, n-1; L\right).$$

Por la linealidad del volumen mixto, es igual a $nV(K, n-1; L)$. \square

Teorema 1.3.10. Sean $K, L \in \mathcal{K}^n$ entonces se tiene:

$$V(K; L, n-1) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_K(u) dS(L, u).$$

La prueba de este resultado se encuentra en [17] y también se basa en la técnica de aproximación por politopos.

Corolario 1.3.11. Si $K \in \mathcal{K}^n$ entonces se tiene que:

$$|K| = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_K(u) dS(K, u).$$

Demostración. Basta aplicar el resultado anterior con $L = K$ y usar que $V(K, \dots, K) = |K|$. \square

Teorema 1.3.12. Sea $K \in \mathcal{K}^n$ y $\varepsilon > 0$ entonces se tiene que:

$$S(K) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{|K + \varepsilon B_2^n| - |K|}{\varepsilon}.$$

Demostración. Se aplica el Teorema 1.3.9 con $L = B_2^n$ y el Teorema 1.3.10:

$$S(K) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} dS(K, u) = nV(K, n-1; B_2^n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{|K + \varepsilon B_2^n| - |K|}{\varepsilon}. \quad \square$$

Teorema 1.3.13. Sea $K \in \mathcal{K}^n$ y $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Se tiene

$$|P_{u^\perp}(K)| = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v \rangle| dS(K, v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v \rangle| dS(-K, v),$$

donde $|\cdot|$ denota la medida de Hausdorff.

Demostración. De manera análoga a la prueba del Teorema 1.3.9 se tiene que si $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ y $K \in \mathcal{K}^n$, entonces $|K + \varepsilon[0, u]|$ es un polinomio que tiene a $V(K, n-1; [0, u])$ como coeficiente del término de orden 1.

Aplicando el Principio de Cavalieri se tiene $|K + \varepsilon[0, u]| = |K| + \varepsilon |P_{u^\perp}(K)|$, véase la Figura 1.10. Comparando polinomios se llega a que

$$V(K, n-1; [0, u]) = |P_{u^\perp}(K)|.$$

Análogamente para $[-u, 0]$ se tiene $V(K, n-1; [-u, 0]) = |P_{u^\perp}(K)|$. Por lo que aplicando la Proposición 1.3.7, el Corolario 1.3.11 y recordando que $h_{[-u, u]}(v) = |\langle u, v \rangle|$,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v \rangle| dS(K, v) = V(K, n-1; [-u, u]) = 2|P_{u^\perp}(K)|.$$

Para la segunda parte basta aplicar la Proposición 1.3.7 con $\Phi = -I$, donde I es la identidad y utilizar que $[-u, u]$ es centrado. \square

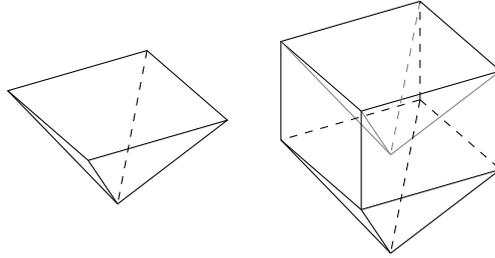


Figura 1.10: Cuerpo K junto a $K + \varepsilon[0, u]$.

Teorema 1.3.14. Sea $K \in \mathcal{K}^n$ entonces se tiene que:

$$S(K) = \frac{1}{|B_2^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |P_{u^\perp}(K)| d\nu(u).$$

Demostración. Basta recordar que $\nu(\cdot) = S(B_2^n, \cdot)$, usar el Teorema de Fubini junto con el Teorema anterior y observar que $|P_{u^\perp}(B_2^n)| = |B_2^{n-1}|$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B_2^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |P_{u^\perp}(K)| d\nu(u) &= \\ &= \frac{1}{|B_2^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v \rangle| dS(K, v) \right) dS(B_2^n, u) = \\ &= \frac{1}{|B_2^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v \rangle| dS(B_2^n, v) \right) dS(K, u) = S(K). \square \end{aligned}$$

Teorema 1.3.15. Primera Desigualdad de Minkowski:

Sea $K, L \in \mathcal{K}^n$ entonces se tiene:

$$V(K, n-1; L)^n \geq |K|^{n-1} |L|,$$

dándose la igualdad si y solo si K, L están contenidos en hiperespacios paralelos o $K = x + rL$ con $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$.

Demostración. Aplicando 1.3.9 con $\varepsilon = \frac{t}{1-t}$, se tiene:

$$\begin{aligned} nV(K, n-1; L) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{|(1-t)K + tL| - (1-t)^n |K|}{t(1-t)^n} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{|(1-t)K + tL| - |K|}{t} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1 - (1-t)^n}{t} |K| \end{aligned}$$

En el segundo término de la suma aparece la derivada en el 0 de la función

$-(1-t)^n$, que vale n . Por lo que obtenemos esta expresión:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{|(1-t)K + tL| - |K|}{t} = n(V(K, n-1; L) - |K|). \quad (1.2)$$

La función $f(t) = |(1-t)K + tL|^{1/n}$ con $t \in [0, 1]$ es cóncava por el Teorema 1.3.1, por lo que existe el límite en 0 por la derecha; aplicando la regla de la cadena y usando (1.2) se tiene:

$$f'(0^+) = \frac{V(K, n-1; L) - |K|}{|K|^{(n-1)/n}}.$$

Como f es cóncava, aplicando el Teorema 1.2.31 se tiene $f'(0^+) \geq f(1) - f(0)$. Despejando el volumen mixto se deduce la desigualdad. La igualdad se daría cuando $f'(0^+) = f(1) - f(0)$, como f es cóncava se tiene que para $t \in (0, 1]$

$$f(t) - f(0) = tf'(0^+) = f(1) - f(0) \implies \frac{f(t) - f(0)}{t} = f(1) - f(0),$$

que reescrito es la Desigualdad de Brunn-Minkowski 1.3.1 pero con una igualdad. \square

Teorema 1.3.16. Desigualdad Isoperimétrica: Dado $K \in \mathcal{K}^n$,

$$\left(\frac{S(K)}{S(B_2^n)} \right)^n \geq \left(\frac{|K|}{|B_2^n|} \right)^{n-1}.$$

La igualdad se da si y solo si $K = x + rB_2^n$ con $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$.

Demostración. Como $h_{B_2^n}(u) = 1$ para todo $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, aplicando 1.3.10

$$V(K, n-1; B_2^n) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} dS(K, u) = \frac{S(K)}{n}.$$

Aplicando el Corolario 1.3.11 se tiene

$$|B_2^n| = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} dS(B_2^n, u) = \frac{S(B_2^n)}{n}.$$

Aplicando el Teorema 1.3.15 con K y $L = B_2^n$

$$\left(\frac{S(K)}{n}\right)^n \geq |K|^{n-1}|B_2^n| \implies \left(\frac{S(K)}{S(B_2^n)}\right)^n = \left(\frac{S(K)}{n|B_2^n|}\right)^n \geq \left(\frac{|K|}{|B_2^n|}\right)^{n-1}.$$

Como B_2^n no está contenido en ningún hiperplano se da la igualdad si y solo si $K = x + rB_2^n$ con $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. \square

Definición 1.3.17. Sean $K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}^n$ conteniendo el 0, se define el **volumen mixto dual** así

$$\tilde{V}(K_1, \dots, K_n) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \rho_{K_1}(u) \dots \rho_{K_n}(u) d\nu(u),$$

donde ρ_K es la función radial dada en la Definición 1.2.52.

Teorema 1.3.18. Si $K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}^n$ conteniendo el 0 y $t_1, \dots, t_n \geq 0$, entonces

$$|t_1 K_1 \tilde{+} \dots \tilde{+} t_n K_n| = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \tilde{V}(K_{i_1}, \dots, K_{i_n}) t_{i_1} \dots t_{i_n}.$$

Demostración. Sea $K = t_1 K_1 \tilde{+} \dots \tilde{+} t_n K_n$. Aplicando la definición de volumen mixto dual, la Proposición 1.2.55, el Teorema de Fubini y usando coordenadas polares.

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \tilde{V}(K_{i_1}, \dots, K_{i_n}) t_{i_1} \dots t_{i_n} &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \rho_K(u)^n d\nu(u) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{\rho_K(u)} r^{n-1} dr d\nu(u) = |K| \end{aligned} \quad \square$$

Proposición 1.3.19. Sean $K_1, \dots, K_n, K, L \in \mathcal{K}^n$ conteniendo el 0, $\alpha, \beta \geq 0$ y Φ una transformación afín. El volumen mixto dual satisface:

- i) $\tilde{V}(K, \dots, K) = |K|$.
- ii) $\tilde{V}(\alpha K \tilde{+} \beta L, K_2, \dots, K_n) = \alpha \tilde{V}(K, K_2, \dots, K_n) + \beta \tilde{V}(L, K_2, \dots, K_n)$.
- iii) $\tilde{V}(K_1, \dots, K_n) = \tilde{V}(K_{i_1}, \dots, K_{i_n})$ para toda permutación de índices.

iv) $\tilde{V}(\Phi K_1, \dots, \Phi K_n) = |\det \Phi| \tilde{V}(K_1, \dots, K_n)$.

v) Si $K \subseteq L$ entonces $\tilde{V}(K, K_2, \dots, K_n) \leq \tilde{V}(L, K_2, \dots, K_n)$.

vi) $\tilde{V}(K_1, \dots, K_n) \geq 0$.

Demostración. Para iii), v) y vi) basta usar la definición.

i) Basta aplicar el Teorema de Fubini y usar coordenadas polares

$$\tilde{V}(K, \dots, K) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \rho_K(u)^n d\nu(u) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{\rho_K(u)} r^{n-1} dr d\nu(u) = |K|.$$

ii) Basta aplicar la Proposición 1.2.55.

iv) Se hace de manera análoga a los volúmenes mixtos. □

Notación 1.3.20. Sea $K, L \in \mathcal{K}^n$ con el 0 y $i \in \mathbb{R}$, denotamos

$$\tilde{V}_i(K, L) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \rho_K(u)^{n-i} \rho_L(u)^i d\nu(u).$$

Capítulo 2

Proyecciones de cuerpos convexos

Este capítulo está dedicado al estudio de proyecciones de cuerpos convexos sobre hiperplanos. En primer lugar, se darán cotas para cuerpos convexos particulares. A continuación, se presentará la desigualdad de Loomis-Whitney, que acota la medida de un cuerpo convexo usando la medida de las proyecciones sobre los hiperplanos coordenados. Por último, se tratará un problema clásico relacionado con proyecciones, como es el Problema de Shephard. Existen dos aproximaciones diferentes para su resolución, que serán expuestas aquí: usando la Geometría Convexa, y mediante el Análisis de Fourier.

2.1. Volumen extremo de proyecciones

Esta sección está dedicada al estudio de los valores extremos de $|P_{u^\perp}(K)|$ con $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, para ciertos cuerpos convexos K .

En primer lugar se calcularán las proyecciones máximas y mínimas del cubo $K = B_\infty^n$ y del diamante $K = B_1^n$, estudiando las direcciones u donde se alcanzan los valores extremos.

A continuación se comentará el caso $K = B_p^n$ con $1 < p < +\infty$ y el caso del símplice. Para un desarrollo más exhaustivo de estos casos, se puede consultar la referencia [1].

2.1.1. Proyecciones del cubo

Teorema 2.1.1. Sea $K = B_\infty^n$ y $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, entonces se tiene

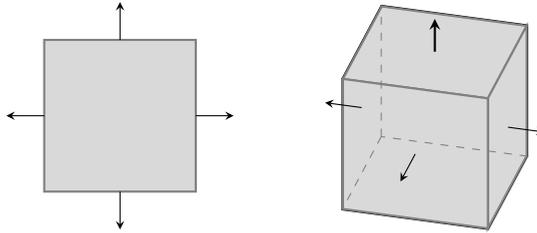
$$|B_\infty^{n-1}| \leq |P_{u^\perp}(B_\infty^n)| \leq \sqrt{n}|B_\infty^{n-1}|,$$

dándose la igualdad en la cota inferior si y solo si $u \in \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$, y en la cota superior si y solo si $u = \frac{1}{\sqrt{n}}(\pm 1, \dots, \pm 1)$.

Cálculo de las proyecciones

Se va a usar el Teorema 1.3.13 para el cálculo de las proyecciones, por lo que se va a hacer un estudio del vector normal exterior del cubo.

El vector normal exterior del cubo solo está bien definido en el interior de sus $2n$ caras, fuera de ahí no está definido, pero ese conjunto es de medida nula. La medida de esas caras vale $|B_\infty^{n-1}| = 2^{n-1}$, y además cada una de las $2n$ caras tiene asociado como vector normal uno y solo uno de estos $\{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$.



Proposición 2.1.2. Si $K = B_\infty^n$ y $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ entonces se tiene

$$|P_{u^\perp}(B_\infty^n)| = |B_\infty^{n-1}| \sum_{i=1}^n |u_i|.$$

Demostración. Sea F_i^+ la parte de la frontera que tiene como vector normal exterior a e_i , y F_i^- la parte que tiene como vector normal exterior a

$-e_i$. Aplicando el Teorema 1.3.13 se tiene

$$\begin{aligned} |P_{u^\perp}(B_\infty^n)| &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v \rangle| dS(B_\infty^n, v) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |F_i^+| |\langle e_i, u \rangle| + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |F_i^-| |\langle -e_i, u \rangle| \\ &= 2^{n-1} \sum_{i=1}^n |u_i| = |B_\infty^{n-1}| \sum_{i=1}^n |u_i|. \quad \square \end{aligned}$$

Teniendo ya una fórmula para las proyecciones del cubo, para acotarlas basta estudiar la expresión $\sum_{i=1}^n |u_i|$.

Cota inferior

Como $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ se tiene $0 \leq |u_i| \leq 1$ y por tanto:

$$\sum_{i=1}^n |u_i| \geq \sum_{i=1}^n |u_i|^2 = 1.$$

La igualdad se da solamente cuando $u \in \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$.

Cota superior

Usando la desigualdad de Hölder A.0.1 para $p = q = 2$ se llega a que:

$$\left(\sum_{i=1}^n 1 |u_i| \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n 1^2 \sum_{i=1}^n |u_i|^2 = n.$$

La igualdad ocurre si y solo si $1^2 = C |u_i|^2 \forall i = 1 \dots n$. De donde se deduce que $|u_i|$ son constantes y usando que $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ se llega a que tiene que ocurrir que $u = \frac{1}{\sqrt{n}}(\pm 1, \dots, \pm 1)$.

Con esto termina la prueba del Teorema 2.1.1.

2.1.2. Proyecciones del diamante

Teorema 2.1.3. Si $K = B_1^n$ y $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ entonces se tiene

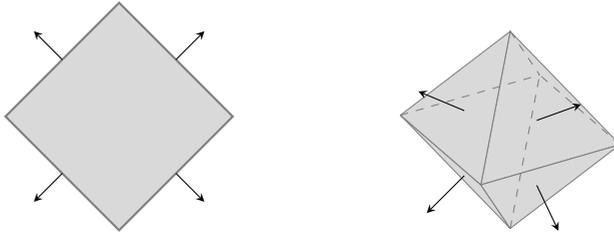
$$\frac{1}{\sqrt{2}} |B_1^{n-1}| \leq |P_{u^\perp}(B_1^n)| \leq |B_1^{n-1}|,$$

dándose la igualdad en la cota inferior si y solo si u tiene todas las componentes nulas salvo dos de igual módulo, y en la cota superior si y solo si $u \in \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$.

Cálculo de las proyecciones

La frontera de B_1^n satisface la ecuación $\sum_{i=1}^n |x_i| = 1$. Fijando cada una de las 2^n elecciones de signo de las coordenadas de x , se convierte en la ecuación del hiperplano con vector normal $\varepsilon \in \{1, -1\}^n$, que son las 2^n caras del diamante.

De ahí se deduce que en el interior de las 2^n caras el vector normal exterior es uno y solo uno de estos $\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon$ con $\varepsilon \in \{-1, 1\}^n$, y el conjunto donde no está bien definido tiene medida nula. Es fácil calcular la medida de las caras, que vale $\frac{\sqrt{n}}{(n-1)!}$.



Proposición 2.1.4. Sea $K = B_1^n$ y $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ entonces se tiene

$$|P_{u^\perp}(B_1^n)| = |B_1^{n-1}| \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} \frac{|\langle \varepsilon, u \rangle|}{2^n}.$$

Demostración. Sea F_ε la cara del diamante con vector normal exterior $\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon$, aplicando el Teorema 1.3.13 se tiene:

$$\begin{aligned} |P_{u^\perp}(B_1^n)| &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v \rangle| dS(B_1^n, v) = \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} \frac{1}{\sqrt{n}} |F_\varepsilon| |\langle \varepsilon, u \rangle| \\ &= \frac{1}{2(n-1)!} \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} |\langle \varepsilon, u \rangle| = |B_1^{n-1}| \sum_{\varepsilon \in \{1, -1\}^n} \frac{|\langle \varepsilon, u \rangle|}{2^n}. \end{aligned}$$

En la última igualdad se ha usado el Teorema A.0.6 para $p = 1$. □

Cota inferior

Se va a seguir la demostración que se muestra en [9], para ello se usará la siguiente notación.

Sea $\varepsilon, \sigma \in \{-1, 1\}^n$ $\tau \in \{0, 1\}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces:

- $|\tau| = \sum_{i=1}^n \tau_i.$
- $x^\tau = \prod_{i=1}^n x_i^{\tau_i}$ con $0^0 = 1.$
- $d(\varepsilon, \sigma) = \text{card}\{i : \varepsilon_i \neq \sigma_i\}.$

Usaremos el siguiente lema técnico, que puede demostrarse fácilmente por inducción.

Lema 2.1.5. Sea $t > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$ y $\tau \in \{0, 1\}^n$ entonces:

$$t^2 \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\alpha_i}{t}\right) = \sum_{\tau \in \{0, 1\}^n} t^{2-|\tau|} \alpha^\tau.$$

Derivando la expresión respecto la variable t , sustituyendo $t = 1$, tomando α con componentes $\alpha_i = \varepsilon_i \sigma_i$, y sumando en $\varepsilon, \sigma \in \{1, -1\}^n$ el término $|\langle \varepsilon, u \rangle| |\langle \sigma, u \rangle|$ se tiene:

$$\begin{aligned} & \sum_{\varepsilon, \sigma \in \{-1, 1\}^n} \left(2 \prod_{i=1}^n (1 + \varepsilon_i \sigma_i) - \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \sigma_j \prod_{i=1, i \neq j}^n (1 + \varepsilon_i \sigma_i) \right) |\langle \varepsilon, u \rangle| |\langle \sigma, u \rangle| \\ &= \sum_{\varepsilon, \sigma \in \{-1, 1\}^n} \sum_{\tau \in \{0, 1\}^n} (2 - |\tau|) \varepsilon^\tau \sigma^\tau |\langle \varepsilon, u \rangle| |\langle \sigma, u \rangle| \\ &= \sum_{\tau \in \{0, 1\}^n} (2 - |\tau|) \left(\sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} \varepsilon^\tau |\langle \varepsilon, u \rangle| \right)^2. \end{aligned}$$

Se van a acotar los extremos. Para el derecho se utiliza que para $|\tau| = 1$ se tiene $\sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} \varepsilon^\tau |\langle \varepsilon, u \rangle| = 0$, de donde se deduce:

$$\sum_{\tau \in \{0,1\}^n} (2 - |\tau|) \left(\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \varepsilon^\tau |\langle \varepsilon, u \rangle| \right)^2 \leq 2 \left(\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} |\langle \varepsilon, u \rangle| \right)^2. \quad (2.1)$$

Para el lado izquierdo se observa que $\prod_{i=1}^n (1 + \varepsilon_i \sigma_i) \neq 0$ si y solo si $\varepsilon = \sigma$ y $\prod_{i=1, i \neq j}^n (1 + \varepsilon_i \sigma_i) \neq 0$ si y solo si $\varepsilon_i = \sigma_i$ con $i \neq j$, con lo que el término de la izquierda es igual a

$$\begin{aligned} & 2^{n-1} \left(\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} |\langle \varepsilon, u \rangle|^2 - n \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} |\langle \varepsilon, u \rangle|^2 + \sum_{\substack{\varepsilon, \sigma \in \{-1,1\}^n \\ d(\varepsilon, \sigma) = 1}} |\langle \varepsilon, u \rangle| |\langle \sigma, u \rangle| \right) \\ &= 2^{n-1} \left(2 \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} |\langle \varepsilon, u \rangle|^2 + \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} (2 - n) |\langle \varepsilon, u \rangle|^2 + \sum_{\substack{\varepsilon, \sigma \in \{-1,1\}^n \\ d(\varepsilon, \sigma) = 1}} |\langle \varepsilon, u \rangle| |\langle \sigma, u \rangle| \right) \\ &= 2^{n-1} \left(2 \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} |\langle \varepsilon, u \rangle|^2 + \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} |\langle \varepsilon, u \rangle| \left(\sum_{\substack{\sigma \in \{-1,1\}^n \\ d(\varepsilon, \sigma) = 1}} |\langle \sigma, u \rangle| - (n - 2) |\langle \varepsilon, u \rangle| \right) \right). \end{aligned}$$

Usando la desigualdad triangular se tiene que para todo $\varepsilon \in \{-1, 1\}^n$:

$$(n - 2) |\langle \varepsilon, u \rangle| \leq \sum_{\substack{\sigma \in \{-1,1\}^n \\ d(\varepsilon, \sigma) = 1}} |\langle \sigma, u \rangle|. \quad (2.2)$$

Juntándolo todo se llega a

$$2 \left(\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} |\langle \varepsilon, u \rangle| \right)^2 \geq 2^n \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} |\langle \varepsilon, u \rangle|^2$$

$$\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \frac{|\langle \varepsilon, u \rangle|}{2^n} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \frac{|\langle \varepsilon, u \rangle|^2}{2^n} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{i=1}^n u_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Con esto se concluye que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |B_1^{n-1}| \leq |P_{u^\perp}(B_1^n)|.$$

Para el caso de igualdad, hay que tener en cuenta que para que se dé la igualdad en (2.1), tiene que ocurrir que para $|\tau| \geq 3$,

$$\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \varepsilon^\tau |\langle \varepsilon, u \rangle| = 0.$$

Nótese que la igualdad anterior siempre se cumple para $|\tau|$ impar, por lo que sólo nos da información para cuando $|\tau|$ es par. Si suponemos que $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ tiene cuatro componentes no nulas, digamos $u_1, u_2, u_3, u_4 \neq 0$, tomando $\tau = (1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$ llegaríamos a que

$$\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 |\langle \varepsilon, u \rangle| = 0.$$

por lo que

$$\sum_{\varepsilon' \in \{-1,1\}^{n-1}} \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 |u_1 + \langle \varepsilon', u' \rangle| = \sum_{\varepsilon' \in \{-1,1\}^{n-1}} \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 |u_1 - \langle \varepsilon', u' \rangle|.$$

Pero ambos términos son siempre opuestos, por lo que son nulos. Pero entonces el término izquierdo vale:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\substack{\varepsilon' \in \{-1,1\}^{n-1} \\ \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 > 0}} \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 |u_1 + \langle \varepsilon', u' \rangle| + \sum_{\substack{\varepsilon' \in \{-1,1\}^{n-1} \\ \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 < 0}} \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 |u_1 + \langle \varepsilon', u' \rangle| \\ &= \sum_{\substack{\varepsilon' \in \{-1,1\}^{n-1} \\ \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 > 0}} \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 |u_1 + \langle \varepsilon', u' \rangle| - \sum_{\substack{\varepsilon' \in \{-1,1\}^{n-1} \\ \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 > 0}} \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 |u_1 - \langle \varepsilon', u' \rangle| \end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{\varepsilon' \in \{-1, 1\}^{n-1} \\ \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 > 0}} \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 (|u_1 + \langle \varepsilon', u' \rangle| - |u_1 + \langle \varepsilon', u' \rangle|)$$

Como todos los sumandos son no negativos, deben ser todos cero, por lo que para todo $\varepsilon' \in \{-1, 1\}^{n-1}$,

$$|u_1 + \langle \varepsilon', u' \rangle| = |u_1 - \langle \varepsilon', u' \rangle|$$

lo cual no es posible si $u_1, u_2, u_3, u_4 \neq 0$.

Así que a lo sumo hay tres coordenadas no nulas en u .

Ahora, para que (2.2) sea una igualdad, la desigualdad triangular es una igualdad, que ocurre cuando el signo de $\langle \varepsilon, u \rangle$ y de $\varepsilon_j u_j$ coinciden para todo $\varepsilon \in \{-1, 1\}^n$ y para todo $1 \leq j \leq n$. Es fácil ver en ese caso que entonces u debe tener dos componentes no nulas iguales en valor absoluto.

Cota superior

Aplicando la desigualdad de Hölder A.0.1 para $p = q = 2$.

$$\sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} \frac{|\langle \varepsilon, u \rangle|}{2^n} \leq \left(\sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} \frac{1}{2^{2n}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} |\langle \varepsilon, u \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Con lo que se concluye:

$$|P_{u^\perp}(B_1^n)| \leq |B_1^{n-1}|.$$

Para la igualdad, es necesario que se dé la igualdad en la desigualdad de Hölder, que según A.0.1 debe ser cuando

$$|\langle \varepsilon, u \rangle|^2 = C \frac{1}{2^{2n}} \quad \forall \varepsilon \in \{-1, 1\}^n.$$

De aquí se deduce que se da la igualdad si y solo si para toda selección de signos $\varepsilon, \sigma \in \{-1, 1\}^n$ se tiene:

$$\left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n \sigma_i u_i \right|.$$

Esto implica que $u \in \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$, y con esto se termina la demostración del Teorema 2.1.3.

2.1.3. Casos intermedios

En este trabajo no se van a desarrollar los casos $1 < p < +\infty$. En [1] se puede encontrar un estudio sobre este problema. Se pueden distinguir tres casos:

- i) Cuando $K = B_2^n$ tenemos que la medida de las proyecciones es constantemente $|B_2^{n-1}|$.
- ii) Cuando $K = B_p^n$ con $p > 2$ se tiene un caso análogo al del $p = +\infty$.

$$|B_p^{n-1}| \leq |P_{u^\perp}(B_p^n)| \leq C_n |B_p^{n-1}|,$$

donde $C_n > 0$ y las igualdades se dan en la cota inferior cuando $u \in \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$, y en la cota superior en $u = \frac{1}{\sqrt{n}}(\pm 1, \dots, \pm 1)$.

- iii) Cuando $K = B_p^n$ con $1 < p < 2$ se tiene un caso análogo al del $p = 1$.

$$\text{máx} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \left(\frac{n-1}{n} \right)^{(n-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} \right\} |B_p^{n-1}| \leq |P_{u^\perp}(B_p^n)| \leq |B_p^{n-1}|$$

siendo solamente óptima la cota superior con igualdad para $u \in \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$.

2.2. Desigualdad de Loomis-Whitney

En esta sección se introducirá una desigualdad clásica de proyecciones que relaciona la medida de un conjunto con medida finita y la medida de sus proyecciones en ciertos hiperplanos.

Es bien conocido que en \mathbb{R}^2 si tenemos un conjunto de medida finita y tomamos el menor rectángulo que lo contiene, entonces el área del rectángulo acota al del cuerpo. La desigualdad de Loomis-Whitney es una generalización de esta idea.

Teorema 2.2.1. Desigualdad de Loomis-Whitney: Sea A un conjunto medible con $|A| < +\infty$, entonces se verifica:

$$|A|^{n-1} \leq \prod_{j=1}^n |P_{e_j^\perp} A|. \quad (2.3)$$

Además la igualdad se da si y solo si A es producto cartesiano de n intervalos acotados.

2.2.1. Prueba de la desigualdad

Se va a seguir la prueba que mostraron Loomis y Whitney en [10].

Lema 2.2.2. *Sea S una colección finita de cubos de una partición cúbica de \mathbb{R}^n . Sea S_i el conjunto de los cubos $(n-1)$ -dimensionales que se obtienen proyectando los cubos de S sobre el i -ésimo hiperplano coordenado. Sean N y N_i los cardinales de los respectivos conjuntos. Entonces:*

$$N^{n-1} \leq \prod_{i=1}^n N_i.$$

Demostración. Lo probaremos por inducción en n . Para $n = 2$ es trivial, ya que en ese caso, $S \subset S_1 \times S_2$, por lo que $N \leq N_1 N_2$.

Consideremos ahora I_1, \dots, I_k los intervalos generados al proyectar los cubos de S sobre el eje de la primera coordenada. Sea T_i el conjunto de cubos de S que se proyectan sobre I_i , y T_{ij} el conjunto de cubos que se obtienen al proyectar T_i sobre el hiperplano $x_j = 0$ para $j > 1$. Sean a_i y a_{ij} los cardinales de T_i y T_{ij} respectivamente. Por construcción se tiene

$$\sum_{i=1}^k a_i = N \quad a_i \leq N_1 \quad \forall i = 1, \dots, k \quad \sum_{i=1}^k a_{ij} = N_j.$$

Aplicando la hipótesis de inducción a los a_i se deduce $a_i^{n-2} \leq \prod_{j=2}^n a_{ij}$ y por tanto

$$a_i^{n-1} \leq a_i \prod_{j=2}^n a_{ij} \leq N_1 \prod_{j=2}^n a_{ij}.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder generalizada A.0.2 se concluye:

$$N = \sum_{i=1}^k a_i \leq \sum_{i=1}^k N_1^{\frac{1}{n-1}} \prod_{j=2}^n a_{ij}^{\frac{1}{n-1}} \leq N_1^{\frac{1}{n-1}} \prod_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^k a_{ij} \right)^{\frac{1}{n-1}} = \prod_{j=1}^n N_j^{\frac{1}{n-1}}.$$

□

Con este lema técnico ya podemos pasar a la prueba del Teorema 2.3. Nótese que para que se dé la igualdad en el lema, $N = N_i$ para todo i , por lo que $N = 1$, es decir sólo hay un cubo en la partición.

Demostración. Como A tiene medida finita podemos encontrar para cada $\varepsilon > 0$ una colección finita de cubos de lado $\delta > 0$ de una partición cúbica de \mathbb{R}^n , llamémosla S , y que además cumpla $|K - \bar{S}| < \varepsilon$. Entonces aplicando el lema anterior a S se llega a que:

$$|S|^{n-1} = N^{n-1} \delta^{n(n-1)} \leq \prod_{i=1}^n N_i \delta^{n-1} \leq \prod_{i=1}^n |P_{e_i^\perp} A|.$$

El caso de igualdad se obtiene a partir de la igualdad del Lema 2.2.2. \square

Observación 2.2.3. La desigualdad de Loomis-Whitney es válida en particular $K \in \mathcal{K}^n$.

Para $n = 2$, el Teorema 2.3 tiene esta forma:

$$|K| \leq |P_{e_1^\perp}(K)| |P_{e_2^\perp}(K)|$$

La proyecciones ortogonales al ser lineales y continuas llevan cuerpos convexos de \mathbb{R}^n a cuerpos convexos de \mathbb{R}^{n-1} . Pero los únicos compactos y convexos en \mathbb{R} son los intervalos $[a, b]$.

Se puede comprobar que $P_{e_1^\perp}(K) \times P_{e_2^\perp}(K)$ salvo una traslación es el menor rectángulo con el que se podría contener a K . Por lo que la desigualdad de Loomis-Whitney nos dice que el área de K es menor o igual que el área del menor rectángulo que lo contiene. Pero esto no es cierto en general, véase este ejemplo.

Ejemplo 2.2.4. Sea $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z \in [0, 1]\}$. Se puede comprobar que la menor caja ortogonal que lo contiene es $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [0, 1]$,

y además

$$P_{e_1^\perp}(K) = \{0\} \times [-1, 1] \times [0, 1].$$

$$P_{e_2^\perp}(K) = [-1, 1] \times \{0\} \times [0, 1].$$

$$P_{e_3^\perp}(K) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}.$$

$$\sqrt{\prod_{j=1}^3 |P_{e_j^\perp}(K)|} = \sqrt{4\pi} < 4 = |[-1, 1] \times [0, 1] \times [-1, 1]|.$$

Por lo que la desigualdad de Loomis-Whitney en general no da como cota el volumen de la mayor caja ortogonal que contiene a K . Realmente el Teorema 2.3 da una cota más fina.

Sea $1 \leq j \leq n$ entonces $\pi_j^n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ es la función que elimina la variable x_j del vector (x_1, \dots, x_n) y $g_j^n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la que solo deja la variable x_j .

Es fácil de comprobar que ambas son lineales y continuas por lo que llevan cuerpos convexos en cuerpos convexos. Además es de fácil comprobación $|P_{e_j^\perp}(K)| = |\pi_j(K)|$.

Teorema 2.2.5. *Sea $K \in \mathcal{K}^n$ entonces se tiene que:*

$$\prod_{j=1}^n |\pi_j^n(K)| \leq \prod_{j=1}^n |g_j^n(K)|^{n-1}.$$

Demostración. Se aplica inducción en n . Para el caso $n = 2$ basta observar que $\pi_1^2(x) = g_2^2(x)$ y $\pi_2^2(x) = g_1^2(x)$.

Para el caso inductivo simplemente se aplica la desigualdad de Loomis-Whitney a los $\pi_j^{n+1}(K)$ que al ser lineal y continua están en \mathcal{K}^{n-1} , luego se aplica la hipótesis de inducción y reescribiendo el producto se llega a

$$\prod_{j=1}^{n+1} |\pi_j^{n+1}(K)| \leq \prod_{j=1}^{n+1} |g_j^{n+1}(K)|^n. \quad \square$$

Proposición 2.2.6. *Sea $K \in \mathcal{K}^n$, entonces la menor caja ortogonal que salvo una traslación contiene a K es el conjunto Q definido así:*

$$Q = g_1^n(K) \times \dots \times g_n^n(K).$$

Demostración. Como g_i^n es continua y lineal lleva elemento de \mathcal{K}^n en elementos de \mathcal{K}^1 . Como los únicos convexos y compactos de \mathbb{R} son los intervalos cerrados y acotados, Q es una caja ortogonal. Además Q contiene a K salvo traslación por definición de las g_j^n .

Sea B una caja ortogonal que contiene a K . Se tiene

$$g_i^n(K) \subseteq g_i^n(B) \quad \forall i = 1, \dots, n \implies Q \subseteq B. \quad \square$$

Con esto se concluye que:

$$|K| \leq \prod_{j=1}^n |P_{e_j^\perp}(K)|^{\frac{1}{n-1}} \leq |Q|$$

Observación 2.2.7. Los elementos $g_j^n(K)$ realmente se pueden interpretar como proyectar el cuerpo K sucesivamente en los hiperplanos $x_i = 0$ con $i \neq j$, por lo que realmente la idea de que la menor caja ortogonal que contiene a K acote la medida de K se puede interpretar como aplicar Loomis-Whitney $n - 1$ veces. Por eso cuando $n = 2$, se tiene que el Teorema 2.3 da la medida de la menor caja ortogonal que lo contiene salvo traslación.

2.2.2. Versión funcional

A continuación, vamos a introducir una versión funcional de la desigualdad de Loomis-Whitney.

Teorema 2.2.8. Sea $n \geq 2$, $f_1, \dots, f_n \in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ no negativas. Entonces se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n f_j^{\frac{1}{n-1}}(\pi_j^n(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \dots dx_n \leq \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{1; \mathbb{R}^{n-1}}^{\frac{1}{n-1}}.$$

Demostración. Se va a demostrar por inducción en n .

El caso $n = 2$ es simplemente el Teorema de Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_1(x_2) f_2(x_1) dx_1 dx_2 = \int_{\mathbb{R}} f_1(x_2) dx_2 \int_{\mathbb{R}} f_2(x_1) dx_1.$$

Ahora se asume que la desigualdad es cierta para $n \geq 2$.

Sea $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ y $\hat{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Se van a usar estas notaciones para abreviar las demostración:

$$\begin{aligned} dx_1 \dots dx_{n+1} &\equiv dx & dx_1 \dots dx_n &\equiv d\hat{x} \\ (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}) &\equiv x^j & dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_{n+1} &\equiv dx^j \\ (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) &\equiv \hat{x}^j & dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n &\equiv d\hat{x}^j \end{aligned}$$

$$\prod_{j=1}^{n+1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x^j) dx^j \right)^{\frac{1}{n}} = \prod_{j=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x^j) dx^j \right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_{n+1}(\hat{x}) d\hat{x} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Se aplica el Teorema de Fubini

$$= \prod_{j=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_j(x^j) dx_{n+1} \right) d\hat{x}^j \right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_{n+1}(\hat{x}) d\hat{x} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Sea $g_j(\hat{x}^j) = \int_{\mathbb{R}} f_j(x^j) dx_{n+1} \in L^1(\mathbb{R}^{n-1}; [0, +\infty])$, que está bien definida por las hipótesis y por el Teorema de Fubini.

$$= \prod_{j=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_j(\hat{x}^j) d\hat{x}^j \right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_{n+1}(\hat{x}) d\hat{x} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Aplicando la hipótesis de inducción

$$\geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{j=1}^n g_j(\hat{x}^j) \right)^{\frac{1}{n-1}} d\hat{x}^j \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_{n+1}(\hat{x}) d\hat{x} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Aplicando Hölder A.0.3 para $\frac{1}{p} = \frac{n-1}{n}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{n}$.

$$\geq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{j=1}^n g_j(\hat{x}^j) \right)^{\frac{1}{n}} f_{n+1}(\hat{x})^{\frac{1}{n}} d\hat{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} f_j(x^j) dx_{n+1} \right)^{\frac{1}{n}} f_{n+1}(\hat{x})^{\frac{1}{n}} d\hat{x}$$

Se aplica Hölder generalizado A.0.4 para $\frac{1}{p_n} = \frac{1}{n}$, y finalmente el Teorema de Fubini.

$$\geq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^n f_j(x^j)^{\frac{1}{n}} dx_{n+1} \right) f_{n+1}(\hat{x})^{\frac{1}{n}} d\hat{x} = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \prod_{j=1}^{n+1} f_j(x^j)^{\frac{1}{n}} dx.$$

Juntándolo todo se deduce

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \prod_{j=1}^{n+1} f_j(x^j)^{\frac{1}{n}} dx \leq \prod_{j=1}^{n+1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x^j) dx^j \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Reescribiendo la desigualdad, se llega a

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \prod_{j=1}^{n+1} f_j^{\frac{1}{n}}(\pi_j^{n+1}(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \dots dx_{n+1} \leq \prod_{j=1}^{n+1} \|f_j\|_{1; \mathbb{R}^n}^{\frac{1}{n}}. \quad \square$$

La desigualdad de Loomis-Whitney se deduce cogiendo $f_j = \chi_{\pi_j^n(K)}$ con K un conjunto de medida finita. Entonces se tiene que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \chi_{\pi_j^n(K)}^{\frac{1}{n-1}}(\pi_j^n(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \dots dx_n \leq \prod_{j=1}^n \|\chi_{\pi_j^n(K)}\|_{1; \mathbb{R}^{n-1}}^{\frac{1}{n-1}}.$$

Es fácil comprobar que $\chi_K(x) \leq \prod_{j=1}^n \chi_{\pi_j^n(K)}^{\frac{1}{n-1}}(\pi_j^n(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Y por tanto aplicando propiedades de la integral Lebesgue.

$$|K| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \chi_{\pi_j^n(K)}^{\frac{1}{n-1}}(\pi_j^n(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \dots dx_n.$$

Además $|\pi_j^n(K)| = |P_{e_j^\perp}(K)|$, por lo que finalmente

$$|K|^{n-1} \leq \prod_{j=1}^n |P_{e_j^\perp}(K)|.$$

2.3. El Problema de Shephard

El Problema de Shephard es uno de los problemas más importantes en el estudio de las proyecciones de cuerpos convexos. Se plantea el problema de deducir que la medida de un conjunto es menor que la de otro, sabiendo que todas las proyecciones en hiperplanos del primero tienen medida menor que el segundo. El enunciado formal es éste:

Sean $K, L \in \mathcal{K}_0^n$. ¿Se tiene que

$$\forall u \in \mathbb{S}^{n-1} \quad |P_{u^\perp}(K)| \leq |P_{u^\perp}(L)| \implies |K| \leq |L|. \quad (2.4)$$

Esta sección tiene dos partes: una en la que se da una respuesta al Problema de Shephard con herramientas de la Geometría Convexa y otro con herramientas del Análisis de Fourier.

2.3.1. Resolución usando Geometría Convexa

Las ideas que se van a mostrar se pueden encontrar en la sección dos del capítulo cuatro de [5].

Caso $n = 2$

Teorema 2.3.1. *Sea $K \in \mathcal{K}^2, L \in \mathcal{K}_0^2, u \in \mathbb{S}^1$ y l_u la recta que pasa por el origen con vector director u . Entonces se tiene:*

$$|P_{l_u}(K)| \leq |P_{l_u}(L)| \quad \forall u \in \mathbb{S}^1 \implies |K| \leq |L|.$$

Demostración. Considerando los conjuntos simétricos asociados

$$\Delta K = \frac{1}{2}(K - K) \quad \Delta L = \frac{1}{2}(L - L)$$

Aplicando las Proposiciones 1.2.35, 1.2.41 y 1.2.43

$$h_{\Delta K}(u) = \frac{w_K(u)}{2} = \frac{|P_{l_u}(K)|}{2} \leq \frac{|P_{l_u}(L)|}{2} = \frac{w_L(u)}{2} = h_{\Delta L}(u) \quad \forall u \in \mathbb{S}^1$$

De donde se deduce que $\Delta K \subseteq \Delta L$. Por el Teorema 1.3.1 para $L = -K$ y $t = \frac{1}{2}$ se tiene que usando las propiedades de la medida Lebesgue $|K| \leq |\Delta K|$ y por tanto:

$$|K| \leq |\Delta K| \leq |\Delta L| = |L|. \quad \square$$

Corolario 2.3.2. Dado $K \in \mathcal{K}^2$ y $L \in \mathcal{K}_0^2$. Entonces se tiene:

$$|P_{u^\perp}(K)| \leq |P_{u^\perp}(L)| \quad \forall u \in \mathbb{S}^1 \implies |K| \leq |L|.$$

Basta observar que los hiperplanos en \mathbb{R}^2 son las rectas que pasan por el origen.

Observación 2.3.3. Lo que se ha probado anteriormente realmente es más general que lo que se pedía, se van a hacer dos observaciones.

1. La prueba anterior sigue siendo cierta para $n \geq 2$, ya que el problema de Shephard sería cierto si las proyecciones fuera en rectas. El único espacio donde las rectas que pasan por el origen son los hiperplanos es \mathbb{R}^2 .
2. En la prueba para (2.4) en $n = 2$ no era necesario usar que K fuera simétrico. Esto podría inducir a pensar en que se podría relajar aún más las condiciones y colocar que L tampoco lo fuera. Se va a mostrar un contraejemplo, por lo que las mínimas condiciones para que el problema de Shephard en $n = 2$ sea cierto son las del Teorema 2.3.1.

Proposición 2.3.4. Todo $K \in \mathcal{K}_0^2$ con w_K constante es un círculo centrado en el origen.

Demostración. Sea $K \in \mathcal{K}_0^2$ con $w_K = c > 0$, entonces se tiene

$$c = w_K(u) = h_K(u) + h_K(-u) = h_K(u) + h_{-K}(u) = 2h_K(u).$$

Por lo que $h_K(u) = \frac{c}{2}$ y como la función soporte caracteriza a los cuerpos convexos tenemos que K es un círculo centrado en el origen de radio $\frac{c}{2}$.

Si $K = rB_2^2$ entonces $h_K(u) = r$. Como K es simétrico se tiene que:

$$h_K = h_{\Delta K} = \frac{1}{2}w_K \implies w_K = 2r$$

Por lo que los círculos centrados en el origen tienen anchura igual a su diámetro. □

Proposición 2.3.5. Existen $K \in \mathcal{K}^2$ no simétricos tales que su w_K es constante.

Demostración. Basta considerar un triángulo de Reuleaux, véase la Figura 2.1. Se construye dibujando un triángulo equilátero de lado $a > 0$ y trazando arco de circunferencia de radio a centrado en uno de los vértices y que vaya entre los restantes. Partiendo del segmento que une dos vértices, y moviéndolo de tal manera que uno de los extremos se deja fijo y el otro se mueve por el arco de circunferencia, se observa que se puede encajar un segmento de longitud a en todas las direcciones de \mathbb{S}^1 , y por construcción del triángulo no hay ninguno mayor por lo que $w_T = a$. \square

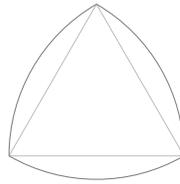


Figura 2.1: Triángulo de Reuleaux.

Teorema 2.3.6. *Existen $K \in \mathcal{K}_0^2$ y $L \in \mathcal{K}^2$ de tal manera que:*

$$|P_{u^\perp}(K)| \leq |P_{u^\perp}(L)| \quad \forall u \in \mathbb{S}^1$$

$$|K| > |L|$$

Demostración. Sea $K = rB_2^2$ con un $r < 1$ y sea $L = T$ un triángulo de Reuleaux de tal manera que $w_L = 2$. Usando la Fórmula de Cauchy para superficies 1.3.14 se llega a que $S(L) = 2\pi$. Usando la Desigualdad Isoperimétrica 1.3.16 y que L no es un círculo se llega a que $|L| < \frac{\pi^2}{4} < \pi = |B_2^2|$. Como la desigualdad es estricta, se puede tomar un $r < 1$ lo suficientemente pequeño para que $|L| < |K|$. Juntándolo se tiene

$$|K| > |L|.$$

$$w_K = 2r < 2 = w_L \implies |P_{u^\perp}(K)| < |P_{u^\perp}(L)| \quad \forall u \in \mathbb{S}^1. \quad \square$$

Caso $n > 3$

Primero se va a dar un ejemplo en \mathbb{R}^3 donde (2.4) no se cumple, luego se definirá los conjuntos donde (2.4) es cierto y finalmente se dará la intuición de por qué en $n > 2$ el Problema de Shephard no es cierto.

Ejemplo 2.3.7. Sea L la superficie de revolución generada al girar el triángulo de vértices $(0, 0, k)$, $(0, 0, -k)$, $(1, 0, 0)$ sobre el eje z , con $k = \sqrt{2}\cos(\alpha)$ tal que $2\alpha + \tan\alpha = \pi$ y sea $K = rB_2^3$ con $r < (\sqrt{6}k\sin(\alpha/\pi))^{1/2}$, entonces

$$|P_{u^\perp}(K)| < |P_{u^\perp}(L)| \quad \forall u \in \mathbb{S}^2 \quad \text{pero} \quad |K| > |L|.$$

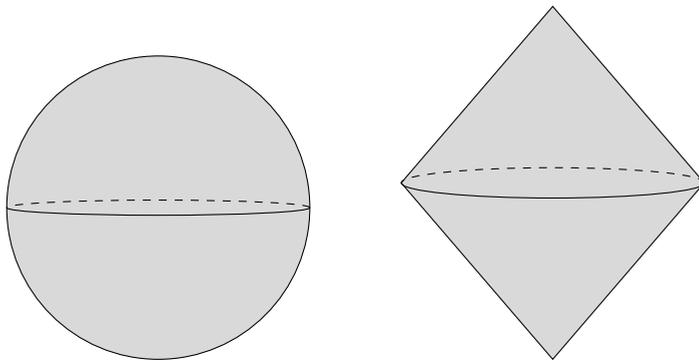


Figura 2.2: Contraejemplo a (2.4) en $n = 3$.

En la sección dos del capítulo cuatro de [5] hay un desarrollo de los cálculos para llegar a este contraejemplo.

Definición 2.3.8. Un conjunto $Z \in \mathcal{K}_0^n$ es un zonoide si y solo si existe una medida μ no negativa, par y finita definida en $\mathbb{B}(\mathbb{S}^{n-1})$ cumpliendo

$$h_Z(u) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v \rangle| d\mu(v)$$

Teorema 2.3.9. Sea $K \in \mathcal{K}^n$ y $Z \in \mathcal{K}_0^n$ un zonoide, entonces:

$$|P_{u^\perp}(K)| \leq |P_{u^\perp}(Z)| \quad \forall u \in \mathbb{S}^{n-1} \implies |K| \leq |Z|.$$

Demostración. Aplicando el Corolario 1.3.11 y el Teorema 1.3.10 y 1.3.13, además del Teorema de Fubini se tiene

$$\begin{aligned}
 V(Z; K, n-1) &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_Z(u) dS(K, u) \\
 &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v \rangle| d\mu(v) \right) dS(K, u) \\
 &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v \rangle| dS(K, u) \right) d\mu(v) \\
 &\leq \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v \rangle| dS(Z, u) \right) d\mu(v) \\
 &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v \rangle| d\mu(v) \right) dS(Z, u) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_Z(u) dS(Z, u) = |Z|
 \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema 1.3.15 se deduce

$$|Z|^n = V(Z; K, n-1)^n \geq |Z|^{n-1} |K| \implies |Z| \geq |K|. \quad \square$$

Por lo que (2.4) es cierto en zonoides, de hecho, al igual que en $n = 2$, solo se necesita que el zonoide sea el conjunto con las proyecciones mayores. A continuación vamos a hacer una observación clave para dar una respuesta al Problema de Shephard en $n > 2$.

Sea $K \in \mathcal{K}_0^2$, $u \in \mathbb{S}^1$ y sea Φ un giro de $\frac{\pi}{2}$ radianes, entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
 h_K(u) &= \frac{1}{2} w_K(u) = \frac{1}{2} |P_u(K)| = \frac{1}{4} \int_{S^1} |\langle \Phi(u), v \rangle| dS(K, v) \\
 &= \frac{1}{4} \int_{S^1} |\langle u, \Phi^t(v) \rangle| dS(K, v).
 \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $\Phi^t(v) = w$ y considerando $d\mu = \frac{1}{4} dS(K, \Phi(\cdot))$, que es una medida no negativa, finita y par en $\mathbb{B}(S^1)$, se comprueba:

$$h_K(u) = \int_{S^1} |\langle u, w \rangle| d\mu(w).$$

Por tanto, en \mathbb{R}^2 el conjunto de los zonoides y de los \mathcal{K}_0^2 es el mismo. Esta va a ser la principal razón por la que en $n > 2$ no se tenga (2.4). En el Ejemplo 2.2 el doble cono era centrado, pero no era un zonoide ya que no satisface el Teorema anterior. En [15] se da un contraejemplo al Problema de Shephard para $n \geq 3$ que se basa en la existencia de conjuntos de \mathcal{K}_0^n que no son zonoides.

2.3.2. Resolución usando Análisis de Fourier

En [7] Koldovsky mostró una relación estrecha entre el Análisis de Fourier y el estudio de las proyecciones. Se van a seguir sus pasos para dar una respuesta al problema de Shephard desde un punto de vista completamente distinto al anterior.

Sea μ una medida no negativa, Borel y finita definida en \mathbb{S}^{n-1} , entonces se puede extender a una $\mu_e \in D'(\mathbb{R}^n)$ con esta fórmula.

$$\langle \mu_e, \phi \rangle = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle r^{-2}, \phi(rv) \rangle d\mu(v) \quad r \in \mathbb{R}, \phi \in D(\mathbb{R}^n). \quad (2.5)$$

Además si $0 \notin \text{sop}(\phi)$, se tiene $\langle r^{-2}, \phi(rv) \rangle = \int_{\mathbb{R}} r^{-2} \phi(rv) dr$. Es fácil de comprobar que en ese caso μ_e es una distribución homogénea de grado $-n - 1$.

Si μ es absolutamente continua respecto de ν , se le puede asociar una función de densidad $g \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$. Ésta a su vez se extiende a una función homogénea de grado $-n - 1$

$$g_e(x) = |x|^{-n-1} g\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

con $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Se va a identificar $\widehat{\mu}_e$ con \widehat{g}_e .

Teorema 2.3.10. *Sea $K, L \in \mathcal{K}_0^n$ y sea f_K la función de curvatura de K , entonces se tiene:*

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \widehat{h}_L(u) \widehat{f}_K(u) d\nu(u) = (2\pi)^n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_L(u) f_K(u) d\nu(u).$$

La prueba de este resultado se encuentra en [7].

Proposición 2.3.11. Sea $\phi \in D(\mathbb{R}^n)$ par y con $0 \notin \text{supp}(\phi)$, entonces:

$$\langle \widehat{\mu}_e, \widehat{\phi} \rangle = (2\pi)^n \langle \mu_e, \phi \rangle.$$

Basta usar que $\widehat{\phi}(x) = (2\pi)^n \phi(-x) = (2\pi)^n \phi(x)$.

Una vez enunciados los resultados necesarios, vamos a establecer la conexión del Análisis de Fourier con el estudio de las proyecciones.

Teorema 2.3.12. Sea μ una medida no negativa, Borel y finita definida en \mathbb{S}^{n-1} , μ_e la distribución homogénea de grado $-n - 1$ definida por (2.5) y $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ entonces:

$$\widehat{\mu}_e(u) = -\frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, y \rangle| d\mu(y).$$

Demostración. Sea $\phi \in D(\mathbb{R}^n)$ una función par con $0 \notin \text{supp}(\widehat{\phi})$, por definición

$$\langle \widehat{\mu}_e, \phi \rangle = \langle \mu_e, \widehat{\phi} \rangle = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} r^{-2} \widehat{\phi}(rv) dr \right) d\mu(v).$$

Por el Teorema A.0.8, la Proposición 2.3.11 y usando que la Transformada de Fourier es sobreyectiva en $L^2(\mathbb{R}^n)$ se tiene que tomando $\phi = \widehat{\psi}$

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\mu}_e, \phi \rangle &= -\frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle v, u \rangle| \phi(u) du \right) d\mu(v) \\ &= -\frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(u) \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle v, u \rangle| d\mu(v) \right) du = \left\langle -\frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle v, u \rangle| d\mu(v), \phi \right\rangle, \end{aligned}$$

de donde se deduce que $\widehat{\mu}_e$ y $-\frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle v, u \rangle| d\mu(v)$ son distribuciones que coinciden para cualquier $\phi \in D(\mathbb{R}^n)$ par con $0 \notin \text{supp}(\phi)$ por lo que por sólo se pueden diferenciar en un polinomio. Como son distribuciones pares y homogéneas de grado 1, se tiene que coinciden para $\phi \in D(\mathbb{R}^n)$ par con $0 \notin \text{supp}(\phi)$. \square

Aplicando el Teorema 1.3.13 se llega al resultado central de esta parte.

Corolario 2.3.13. *Sea $K \in \mathcal{K}_0^n$ y $S(K, \cdot)$ su medida de superficie asociada. Se tiene que*

$$\widehat{S_e(K)}(u) = -\pi|P_{u^\perp}(K)| \quad \forall u \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Concretamente si $S(K, \cdot)$ tiene a f_K como función de curvatura asociada, entonces

$$\widehat{(f_K)_e}(u) = -\pi|P_{u^\perp}(K)| \quad \forall u \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Usando resultados de aproximación que se pueden encontrar en el capítulo dos de [17], a partir de ahora se añadirá a (2.4) la hipótesis de que $K, L \in \mathcal{K}_0^n$ tengan función soporte diferenciable en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, y que tengan función curvatura.

Lema 2.3.14. *Sean $K, L \in \mathcal{K}_0^n$ tales que $\widehat{h_L}(u) \leq 0$ y $\widehat{(f_K)_e}(u) \geq \widehat{(f_L)_e}(u)$ $\forall u \in \mathbb{S}^{n-1}$, entonces $|K| \leq |L|$.*

Demostración.

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \widehat{h_L}(u) \widehat{(f_K)_e}(u) d\nu(u) \leq \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \widehat{h_L}(u) \widehat{(f_L)_e}(u) d\nu(u)$$

aplicando los Teoremas 2.3.10 y 1.3.10, y el Corolario 1.3.11 se deduce:

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \widehat{h_L}(u) \widehat{(f_K)_e}(u) d\nu(u) = n(2\pi)^n V(L; K, n-1).$$

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \widehat{h_K}(u) \widehat{(f_K)_e}(u) d\nu(u) = n(2\pi)^n |L|,$$

de donde se deduce que $V(L; K, n-1) \leq |L|$ y aplicando el Teorema 1.3.15 se llega a que $|K| \leq |L|$. \square

Lema 2.3.15. *Sea $K \in \mathcal{K}_0^n$ tal que $f_K(u) > 0 \quad \forall u \in \mathbb{S}^{n-1}$, y tal que $\widehat{h_K}$ es estrictamente positiva en un abierto de \mathbb{S}^{n-1} . Entonces existe $L \in \mathcal{K}_0^n$ tal que $\widehat{(f_K)_e} \geq \widehat{(f_L)_e}$, pero $|K| > |L|$.*

Demostración. Sea $\Omega = \{u \in \mathbb{S}^{n-1} : \widehat{h_K}(u) > 0\}$ y sea $v \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ una función no positiva, par y que tenga como soporte Ω . La extendemos a una función homogénea de grado 1 en \mathbb{R}^n mediante la igualdad $v(ru) =$

$rv(u)$. Existe $g \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ de tal manera que v tiene como transformada de Fourier la función g extendida a una función homogénea de grado $-n-1$, es decir

$$\widehat{rv}(u) = r^{-n-1}g(u).$$

Como g está acotada en \mathbb{S}^{n-1} se puede encontrar $\varepsilon > 0$ de tal manera que para todo $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ y $r > 0$ se tenga $h(ru) = f_K(ru) + \varepsilon r^{-n-1}g(u) > 0$. Por el Teorema 1.3.3 $h(ru)$ es la función curvatura de algún $L \in \mathcal{K}_0^n$, que denotaremos $f_L(ru)$. Por construcción de v se tiene

$$(\widehat{f_L})_e(ru) = (\widehat{f_K})_e(ru) + (2\pi)^n \varepsilon rv(u) \leq (\widehat{f_K})_e(ru).$$

Como v tiene como soporte Ω y es no positiva aplicando los Teoremas 2.3.10 y 1.3.10, y el Corolario 1.3.11

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \widehat{h_K}(u) (\widehat{f_L})_e(u) d\sigma(u) = n(2\pi)^n V(K; L, n-1).$$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \widehat{h_K}(u) (\widehat{f_L})_e(u) d\sigma(u) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \widehat{h_K}(u) (\widehat{f_K})_e(u) d\sigma(u) + \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \widehat{h_K}(u) \varepsilon v(u) d\sigma(u) \\ &< \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \widehat{h_K}(u) (\widehat{f_K})_e(u) d\sigma(u) = n(2\pi)^n |K|. \end{aligned}$$

Entonces $V(K; L, n-1) < |K|$, que junto al Teorema 1.3.15 implica que $|K| > |L|$. \square

Ya tenemos todas las herramientas para dar una solución a (2.4) usando Análisis de Fourier.

Teorema 2.3.16. *El Problema de Shephard (2.4) es cierto cuando $n = 2$ y falso si $n \geq 3$.*

Demostración. Sean $K, L \in \mathcal{K}_0^n$ tales que $|P_{u^\perp}(K)| \leq |P_{u^\perp}(L)| \quad \forall u \in \mathbb{S}^n$, por 2.3.13 sabemos que $(\widehat{f_K})_e \geq (\widehat{f_L})_e$.

Para el caso $n = 2$ basta probar que $\widehat{h_L} \leq 0$. En [4] se demuestra que $\widehat{h_L}(u) = \pi A_{L^*,u}^2(0)$, donde $A_{L^*,u}(t)$ es la función de secciones paralelas

de L^* en la dirección u . En la sección dos del capítulo dos de [7], usando Brunn-Minkowski, se demuestra que dicha función es cóncava en t y que alcanza máximo en el 0. Aplicando el Lema 2.3.14 se deduce el resultado.

Cuando $n \geq 3$ basta encontrar un cuerpo $K \in \mathcal{K}_0^n$ cuya función soporte sea diferenciable en \mathbb{S}^{n-1} , con $f_K > 0$ y $\widehat{h}_K > 0$ en un abierto de \mathbb{S}^{n-1} .

Sea $K' = B_{4/3}^n$. Usando la Proposición 1.2.57 se tiene que $h_{K'}(\cdot) = \|\cdot\|_4$, que es diferenciable en \mathbb{S}^{n-1} . La prueba de que $\widehat{h}_{K'}$ es positiva está en [6]. Finalmente se toma $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño como para que la transformada de Fourier de $f(u) = h_{K'}(u) + \varepsilon h_{B_2^n}(u)$ siga siendo positiva en un abierto de \mathbb{S}^{n-1} . Ésta es una función sublineal par, y aplicando el Teorema 1.2.39 hay un cuerpo $K \in \mathcal{K}_0^n$ de tal manera que $h_K = f$. Por último, en [4] se puede ver que se cumple $f_K > 0$. Aplicando el Lema 2.3.15 a K , tenemos el contraejemplo buscado. \square

Observación 2.3.17. *La razón por la que en $n = 2$ no se puede aplicar el Lema 2.3.15 es porque en [4] se obtiene que la transformada de Fourier de la función soporte de cualquier cuerpo convexo centrado es no positiva. En cambio para $n \geq 3$ el signo no se puede controlar y por tanto se pueden hallar contraejemplos. Esto nos da otra perspectiva de por qué el problema de Shephard no es cierto en $n \geq 3$ completamente distinta a la razón que se da con la Geometría Convexa.*

Capítulo 3

Cuerpos de proyección de un cuerpo convexo

En este capítulo se introducirá el concepto de cuerpo de proyección de un cuerpo convexo, dándose algunos ejemplos. A continuación se enunciará y demostrará el Teorema de Unicidad de Alexandrov, y finalmente se hablará sobre la desigualdad de Petty y de Zhang que acotan la medida del cuerpo de proyección y la de su dual respectivamente, en términos de la medida del cuerpo convexo original.

Un desarrollo exhaustivo del tema se encuentra en el capítulo cuatro de [5].

Se comenzará definiendo el cuerpo de proyección. Sea $K \in \mathcal{K}^n$, se considera la función $f_K : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow [0, +\infty)$ dada por:

$$f_K(u) = |P_{u^\perp}(K)|.$$

Dados dos vectores $u, v \in \mathbb{S}^{n-1}$ y $\lambda \geq 0$, aplicando el Teorema 1.3.13, las propiedades del producto escalar y la desigualdad triangular, se tiene

$$f_K(u + v) \leq f_K(u) + f_K(v) \quad f_K(\lambda u) = \lambda f_K(u).$$

Por el Teorema 1.2.39 existe un único L de tal manera que $f_K = h_L$.

Definición 3.0.1. Dado $K \in \mathcal{K}^n$ su cuerpo de proyección se denota ΠK y es aquel cuerpo convexo que tiene como función soporte a f_K .

Proposición 3.0.2. *Sea $K \in \mathcal{K}^n$ y $\Phi_{x_0} = x_0 + \Phi$ una transformación afín, entonces el cuerpo de proyección satisface:*

i) $\Pi K \in \mathcal{K}_0^n$.

ii) $\Pi\Phi_{x_0}K = |\det\Phi|\Phi^{-t}\Pi K$.

iii) ΠK es un zonoide.

Demostración. i) Es una consecuencia de que $(-u)^\perp = u^\perp$.

ii) Basta aplicar que $|\langle u, v \rangle| = h_{[-u, u]}(v)$, los Teoremas 1.3.13, 1.3.7 y 1.3.10, y las Proposiciones 1.2.35 y 1.3.7.

$$\begin{aligned} h_{\Pi\Phi_{x_0}K} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v \rangle| dS(\Phi_{x_0}K, v) = \frac{n}{2} V([-u, u]; \Phi(K), n-1) \\ &= \frac{n}{2} V(\Phi(\underbrace{[-w, w]}_{w=\Phi^{-1}(u)}); \Phi(K), n-1) = |\det\Phi| h_{\Pi K}(w) = |\det\Phi| h_{\Pi K}(\Phi^{-1}(u)) \end{aligned}$$

Por último se aplica que por la Proposición 1.2.35 $h_K(\Phi^{-1}(u)) = h_{\Phi^{-t}(K)}(u)$.

iii) Basta aplicar el Teorema 1.3.13 y definir la medida $\mu(\cdot) = \frac{1}{4}(S(K, \cdot) + S(-K, \cdot))$ que es Borel, par y finita en \mathbb{S}^{n-1} . Entonces se tiene que

$$h_{\Pi K}(u) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v \rangle| d\mu(v). \quad \square$$

A continuación, damos algunos ejemplos de cuerpos de proyección.

Ejemplo 3.0.3. i) *En $n = 2$ se tiene que dado $K \in \mathcal{K}^2$ su cuerpo simétrico satisfacía*

$$\begin{aligned} h_{\Pi K}(u) &= |P_{u^\perp}(K)| = w_K(v) = w_{\Delta K}(v) \\ &= 2h_{\Delta K}(v) = h_{2\Delta K}(v) = h_{\Phi(\Delta K)}(u) \end{aligned}$$

donde $u, v \in \mathbb{S}^1$ son perpendiculares y $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la composición de un giro de $\frac{\pi}{2}$ radianes con una homotecia de centro 0 y razón 2. Es decir, por el Teorema 1.2.39 el cuerpo de proyección de $K \in \mathcal{K}^2$ es $\Phi(\Delta K)$. En

particular, si $K \in \mathcal{K}_0^2$ entonces su cuerpo de proyección es $\Phi(K)$. De aquí se puede deducir que dado $K \in \mathcal{K}_0^2$ considerando $L = \Phi^{-1}(K)$ se tiene que $\Pi L = K$ donde $L \in \mathcal{K}_0^2$, por lo que el conjunto de los cuerpos convexos centrado y el de los cuerpos de proyección es el mismo en el plano.

ii) Sea $K = x + rB_2^n$ con $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, entonces se tiene $|P_{u^\perp}(K)| = r^{n-1}|B_2^{n-1}|$, un valor que no depende de $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, ni de $x \in \mathbb{R}^n$. Sea $L = r^{n-1}|B_2^{n-1}|B_2^n$, entonces se satisface $h_L(u) = r^{n-1}|B_2^{n-1}|$. Por lo que $\Pi K = L$ y por tanto la aplicación Π no es inyectiva, todos los trasladados de la bola rB_2^n tienen el mismo cuerpo de proyección.

iii) Sea $K = \Phi(B_2^n)$ un elipsoide centrado. Aplicando la Proposición 3.0.2

$$\Pi K = |\det \Phi| \Phi^{-t}(\Pi B_2^n) = |\det \Phi| |B_2^{n-1}| \Phi^{-t}(B_2^n).$$

Aplicando propiedades de la medida Lebesgue se tiene que $|\det \Phi| = \frac{|K|}{|B_2^{n-1}|}$ y además por la Proposición 1.2.48 $\Phi^{-t}(B_2^n) = \Phi^{-t}((B_2^n)^*) = (\Phi(B_2^n)^*) = K^*$. De lo que se deduce que:

$$\Pi K = \frac{|B_2^n| |K|}{|B_2^{n-1}|} K^*,$$

que es otro elipsoide centrado. Esto generaliza el caso de la esfera visto con anterioridad. Además se tiene que cualquier elipsoide centrado en el origen es un cuerpo de proyección.

Sea $L = \left(\frac{|B_2^{n-1}| |K^*|}{|B_2^n|} \right)^{\frac{-1}{n-1}} K^*$, entonces aplicando la Proposición 3.0.2 y la Proposición 1.2.48 se tiene $\Pi L = K^{**} = K$.

3.1. Teorema de Unicidad de Alexandrov

Como se vio en los ejemplos anteriores, la aplicación Π que lleva $K \in \mathcal{K}^n$ en su cuerpo de proyección en general no es un proceso inyectivo. En esta sección se va a demostrar que la condición necesaria y suficiente es que sean centrados.

Teorema 3.1.1. Teorema de Unicidad de Alexandrov: Sea $K, L \in \mathcal{K}_0^n$ tales que $\Pi K = \Pi L$, entonces $K = L$.

Vamos a exponer a continuación las herramientas necesarias para la demostración del Teorema 3.1.1.

Teorema 3.1.2. Sean $K, L \in \mathcal{K}^n$ con $S(K, \cdot) = S(L, \cdot)$ e interior no vacío, entonces existe $x \in \mathbb{R}^n$ cumpliendo $K = x + L$.

Demostración. Integrando h_K respecto a $S(K, \cdot)$ y $S(L, \cdot)$ por los Teoremas 1.3.11 y 1.3.10 se tiene $V(K; L, n-1) = |K|$. Además por el Teorema 1.3.15.

$$|K|^n = V(K; L, n-1)^n \geq |L|^{n-1}|K| \implies |K| \geq |L|.$$

Análogamente con h_L se llega a que $|L| \geq |K|$, entonces $|K| = |L|$. Se deduce que se da la igualdad en el Teorema 1.3.15, entonces $K = x + rL$ con $r > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Como $V(K; L, n-1) = |K|$ aplicando la Proposición 1.3.7 se llega a $r^{n-1}|K| = |K|$, por lo que $r = 1$ \square

Teorema 3.1.3. Sean $K, L \in \mathcal{K}^n$ tales que $|P_{u^\perp}(K)| = |P_{u^\perp}(L)| \quad \forall u \in \mathbb{S}^{n-1}$, entonces se tiene que $S(K, \cdot) + S(-K, \cdot) = S(L, \cdot) + S(-L, \cdot)$.

Demostración. Sea $\mu(\cdot) = S(K, \cdot) + S(-K, \cdot) - S(L, \cdot) - S(-L, \cdot)$ una medida real par y Borel en \mathbb{S}^{n-1} . Aplicando el Teorema 1.3.13 se tiene:

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v \rangle| d\mu(v) = 0 \quad \forall u \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Por el Teorema A.0.7 μ es idénticamente nula. \square

Con estos resultados ya se puede hacer la prueba del Teorema 3.1.1.

Demostración. Como $\Pi K = \Pi L$ estamos en las hipótesis del Teorema 3.1.3, de donde $S(K, \cdot) + S(-K, \cdot) = S(L, \cdot) + S(-L, \cdot)$. Como $K, L \in \mathcal{K}_0^n$, se tiene que $S(K, \cdot) = S(L, \cdot)$, y por el Teorema 3.1.2 existe $x \in \mathbb{R}^n$ cumpliendo $K = x + L$. Pero como son simétricos se tiene:

$$-x + L = -x - L = -K = K = x + L \implies x = 0. \quad \square$$

3.2. Desigualdad de Petty afín

En esta sección se vamos a comparar el volumen del cuerpo de proyección ΠK con el volumen de K . Homogeneizando, vamos a estudiar el cociente

$$\frac{|\Pi K|}{|K|^{n-1}} \quad K \in \mathcal{K}^n. \quad (3.1)$$

Vamos a ver que dicho cociente es invariante por transformación afín, se va a estudiar los casos extremos para el plano y se va a comentar lo que se sabe para dimensiones mayores.

3.2.1. Invariancia por transformaciones afines

Teorema 3.2.1. *Sea $K \in \mathcal{K}^n$ y Φ_{x_0} una transformación afín. Se tiene*

$$\frac{|\Pi K|}{|K|^{n-1}} = \frac{|\Pi \Phi_{x_0} K|}{|\Phi_{x_0} K|^{n-1}}.$$

Demostración. Aplicando la Proposición 3.0.2, propiedades del determinante y propiedades de la medida Lebesgue se tiene:

$$|\Pi \Phi(K)| = |\det \Phi| |\Phi^{-t}(\Pi K)| = |\det \Phi|^{n-1} |\Pi K|.$$

$$|\Phi K|^{n-1} = |\det \Phi|^{n-1} |K|. \quad \square$$

3.2.2. Caso $n = 2$

Teorema 3.2.2. *Sea $K \in \mathcal{K}^2$ con interior no vacío. Entonces*

$$4 \leq \frac{|\Pi K|}{|K|} \leq 6,$$

con igualdad en la superior si y solo si K es un triángulo y en la inferior si y solo si $\exists x \in \mathbb{R}^2$ tal que $-K = x + K$

Recordemos que para $n = 2$ todo $K \in \mathcal{K}^2$ tiene como cuerpo de proyección a $\Phi \Delta K$ donde Φ es un giro de $\frac{\pi}{2}$ radianes con una homotecia de centro 0 y razón 2. Por lo que aplicando las propiedades de la medida Lebesgue el cociente (3.1) se vuelve

$$\frac{|\Pi K|}{|K|} = \frac{|\Phi \Delta K|}{|K|} = \frac{|\det \Phi| |\Delta K|}{|K|} = \frac{4|\Delta K|}{|K|}.$$

Cota inferior

Para la cota inferior basta recordar que aplicando el Teorema 1.3.1 con $L = -K$ y $t = 1/2$ y usando las propiedades de la medida Lebesgue se tiene $|K| \leq |\Delta K|$, dándose la igualdad si y solo si $-K = x + rK$ con $x \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$. Aplicando las propiedades de la medida Lebesgue se tiene que $|K| = |-K| = |x + rK| = r^2|K|$, de donde se deduce que $r = 1$.

Cota superior

La cota superior es consecuencia del siguiente resultado, de interés independiente.

Teorema 3.2.3. Desigualdad de Rogers-Shephard: Sea $K \in \mathcal{K}^n$, entonces

$$|K - K| \leq \binom{2n}{n} |K|,$$

dándose la igualdad si y solo si K es un símplice.

La prueba de este resultado se puede encontrar en este artículo [13]. Aplícala para $n = 2$

$$|\Delta K| = \frac{|K - K|}{4} \leq \binom{4}{2} \frac{|K|}{4} = 6|K|.$$

Con esto se demuestra la cota superior y el caso de igualdad se da si y solo si K es un símplice de \mathbb{R}^2 con interior no vacío, es decir, un triángulo.

3.2.3. Caso $n \geq 3$

El problema para $n \geq 3$, todavía está abierto. En el caso anterior hemos utilizado una expresión sencilla de los cuerpos de proyección, que no existe en dimensiones mayores. Éstas son las dos conjeturas principales:

Petty conjeturó en [12] que para $n > 2$

$$\frac{|\Pi K|}{|K|^{n-1}} \geq \frac{|B_2^{n-1}|^n}{|B_2^n|^{n-2}},$$

dándose la igualdad si y solo si K es un elipsoide.

Schneider conjeturó en [16] que en el conjunto de los conjuntos $K \in \mathcal{K}^n$ tales que existe $x \in \mathbb{R}^n$ de tal manera que $x + K$ es centrado, entonces

$$\frac{|\Pi K|}{|K|^{n-1}} \leq 2^n,$$

dándose la igualdad si y solo si K es producto cartesiano de segmentos o de conjunto planos tales que son centrados salvo una traslación.

3.3. Desigualdad de Zhang

En esta sección se va a estudiar la versión dual del cociente anterior.

$$|\Pi^* K| |K|^{n-1} \quad K \in \mathcal{K}^n, \quad (3.2)$$

donde se usa la notación $(\Pi K)^* = \Pi^* K$. Se va a comprobar que es invariante por transformación afín, se va a dar una prueba de la cota superior y se va mostrar que como se comporta la cota inferior.

3.3.1. Invariancia por transformaciones afines

Teorema 3.3.1. *Sea $K \in \mathcal{K}^n$ y $\Phi_{x_0} = x_0 + \Phi$ una transformación afín. Se verifica*

$$|\Pi^* K| |K|^{n-1} = |\Pi^* \Phi_{x_0} K| |\Phi_{x_0} K|^{n-1}.$$

Demostración. Aplicando la Proposiciones 3.0.2 y 1.2.48, las propiedades del determinante y las propiedades de la medida Lebesgue se tiene:

$$|\Pi^* \Phi K| = |(|\det \Phi| \Phi^{-t} \Pi K)^*| = |\det \Phi|^{1-n} |\Pi^* K|.$$

$$|\Phi K|^{n-1} = |\det \Phi|^{n-1} |K|. \quad \square$$

3.3.2. Cota superior

Para el desarrollo de este apartado se ha seguido la sección una y dos del capítulo nueve de [5]

Teorema 3.3.2. *Sea $K \in \mathcal{K}^n$ entonces se tiene:*

$$|K|^{n-1} |\Pi^* K| \leq \left(\frac{|B_2^n|}{|B_2^{n-1}|} \right).$$

Dándose la igualdad si y solo si K es un elipsoide.

Antes de dar la prueba van a ser necesarios algunos resultados previos.

Definición 3.3.3. *Sea $K \in \mathcal{K}^n$ con $|K| > 0$, el **centroide** de K se denota ΓK y viene definido por la expresión:*

$$h_{\Gamma K}(u) = \frac{1}{|K|} \int_K |\langle u, x \rangle| dx.$$

Proposición 3.3.4. *Sea $K \in \mathcal{K}^n$ con $|K| > 0$ y $0 \in K$ entonces se verifica:*

$$h_{\Gamma K}(u) = \frac{1}{(n+1)|K|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \rho_K(v)^{n+1} |\langle u, v \rangle| d\nu(v),$$

donde ρ_K viene dada en la Definición 1.2.52.

Demostración. Basta pasar a coordenadas polares y usar el Teorema de Fubini

$$\begin{aligned} h_{\Gamma K}(u) &= \frac{1}{|K|} \int_K |\langle u, x \rangle| dx = \frac{1}{|K|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{\rho_K(v)} |\langle u, tv \rangle| t^{n-1} dt d\nu(v) \\ &= \frac{1}{(n+1)|K|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \rho_K(v)^{n+1} |\langle u, v \rangle| d\nu(v). \quad \square \end{aligned}$$

Proposición 3.3.5. *Si $K \in \mathcal{K}^n$ con $|K| > 0$ y Φ_{x_0} una transformación lineal, se tiene $\Gamma(\Phi K) = \Phi(\Gamma K)$.*

Demostración. Aplicando el cambio de variable con $y = \Phi^{-1}(x)$ y las propiedades de la medida Lebesgue y la Proposición 1.2.35

$$\begin{aligned} h_{\Gamma(\Phi K)} &= \frac{1}{|\Phi K|} \int_{\Phi K} |\langle u, x \rangle| dx = \frac{1}{|\det \Phi| |K|} \int_K |\langle u, \Phi y \rangle| |\det \Phi| dy \\ &= \frac{1}{|K|} \int_K |\Phi^t u, y| dy = h_{\Gamma K}(\Phi^t u) = h_{\Phi(\Gamma K)}(u). \quad \square \end{aligned}$$

Corolario 3.3.6. *El centroide de un elipsoide centrado es otro elipsoide centrado.*

Demostración. Ya que $\Gamma(\Phi K) = \Phi(\Gamma K)$, basta probar que el centroide de una bola es la homotecia de centro 0 de una bola. B_2^n satisface las condiciones de la Proposición 3.3.4 por lo que:

$$h_{\Gamma B_2^n}(u) = \frac{1}{(n+1)|B_2^n|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \rho_{B_2^n}(v)^{n+1} |\langle u, v \rangle| d\nu(v) = \frac{2|B_2^{n-1}|}{(n+1)|B_2^n|}. \quad \square$$

Teorema 3.3.7. *Sea $K \in \mathcal{K}^n$ con $|K| > 0$ entonces se tiene*

$$|\Gamma| \geq \left(\frac{2|B_2^{n-1}|}{(n+1)|B_2^n|} \right)^n |K|.$$

Dándose la igualdad si y solo si K es un elipsoide centrado.

La prueba de este resultado se encuentra en la sección dos del capítulo nueve de [5].

Lema 3.3.8. *Sea $K \in \mathcal{K}^n$ y $L \in \mathcal{K}^n$ con $0 \in L$ y $|L| > 0$. Se tiene*

$$V(K, n-1; \Gamma L) = \frac{2}{(n+1)|L|} \tilde{V}_{-1}(L, \Pi^* K).$$

Demostración. Usando la Notación 1.3.20

$$\frac{2}{(n+1)|L|} \tilde{V}_{-1}(L, \Pi^* K) = \frac{2}{(n+1)|L|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \rho_L(u)^{n+1} \rho_{\Pi^* K}(u) d\nu(u)$$

y aplicando el Teorema 1.2.56 y la Proposición 1.2.48

$$= \frac{2}{n(n+1)|L|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \rho_L(u)^{n+1} h_{\Pi K}(u) d\nu(u).$$

Se aplica el Teorema 1.3.13 para obtener

$$= \frac{1}{n(n+1)|L|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \rho_L(u)^{n+1} \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v \rangle| dS(K, v) \right) d\nu(u)$$

y aplicando Fubini

$$= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\frac{1}{(n+1)|L|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v \rangle| \rho_L(u)^{n+1} d\nu(u) \right) dS(K, v).$$

Finalmente, usando la Proposición 3.3.4

$$= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_{\Gamma L}(v) dS(K, v) = V(K, n-1; \Gamma L)$$

donde se ha utilizado Teorema 1.3.10 □

Ya se tienen las herramientas para probar el Teorema 3.3.2.

Demostración. Se aplica el lema anterior con $L = \Pi^* K$. Por la Proposición 1.3.19 se tiene

$$V(K, n-1; \Gamma(\Pi^* K)) = \frac{2}{n+1}.$$

Usando el Teorema 3.3.7 con $\Pi^* K$ y aplicando el Teorema 1.3.15

$$\begin{aligned} |K|^{n-1} |\Pi^* K| &\leq \left(\frac{(n+1)|B_2^n|}{2|B_2^{n-1}|} \right)^n |K|^{n-1} |\Gamma(\Pi^* K)| \leq \\ &\leq \left(\frac{(n+1)|B_2^n|}{2|B_2^{n-1}|} \right)^n V(K, n-1; \Gamma(\Pi^* K))^n = \left(\frac{|B_2^n|}{|B_2^{n-1}|} \right)^n. \end{aligned}$$

Para ver cuando se da la igualdad basta ver donde se da la igualdad en el Teorema 3.3.7 y en la primera desigualdad de Minkowski 1.3.15. Por lo primero $\Pi^* K$ debe ser un elipsoide centrado, por el Corolario 3.3.6 $\Gamma(\Pi^* K)$ es un elipsoide centrado. Este conjunto no puede estar contenido en un hiperplano, por lo que $K = x + r\Gamma(\Pi^* K)$. □

3.3.3. Cota inferior

Teorema 3.3.9. *Sea $K \in \mathcal{K}^n$, entonces*

$$|K|^{n-1} |\Pi^* K| \geq \frac{(2n)!}{n^n (n!)^2},$$

dándose la igualdad si y solo si K es un símplice con interior no vacío.

La prueba se escapa a las técnicas que se han desarrollado en este trabajo, pero se puede encontrar en el artículo de Zhang [18].

Apéndice A

Resultados técnicos

Teorema A.0.1. Desigualdad de Hölder para sumas:

Sea $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $p, q \in [1, +\infty]$ tales que $p^{-1} + q^{-1} = 1$, entonces se tiene

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

Además se da la igualdad si y solo si $|x_i|^p = C|y_i|^q \quad \forall i = 1, \dots, n$ para $C > 0$.

Teorema A.0.2. Desigualdad de Hölder para sumas generalizada:

Sea $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ y $p_1, \dots, p_k \in [1, +\infty]$ tales que la suma de sus inversos es 1, entonces si $z \in \mathbb{R}^k$ es el vector que tiene por componentes el producto de las componentes de $x_1 \dots, x_n$ se tiene

$$\|z\|_1 \leq \prod_{j=1}^k \|x_j\|_{p_j}$$

Teorema A.0.3. Desigualdad de Hölder para funciones Sean $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $p, q \in [1, +\infty]$ tal que $p^{-1} + q^{-1} = 1$, entonces

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Teorema A.0.4. Desigualdad de Hölder para funciones generalizada Sean $f_1, \dots, f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $p_1, \dots, p_k \in [1, +\infty]$ tal que la suma de sus inversos es 1, entonces

$$\left\| \prod_{i=1}^k f_i \right\|_1 \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{p_k}$$

Estos resultados se pueden encontrar en [2]

Definición A.0.5. La función Gamma se define para $x > 0$ así:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Teorema A.0.6. La medida Lebesgue de la p -bola n -dimensional B_p^n es

$$|B_p^n| = \frac{2^n \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{p}\right)}.$$

Estos resultados se pueden encontrar en la sección 4 capítulo 2 de [4].

Teorema A.0.7. Sea μ una medida real par definida en $\mathbb{B}(\mathbb{S}^{n-1})$, entonces son equivalentes:

- a) $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v \rangle| d\mu(v) = 0 \quad \forall u \in \mathbb{S}^{n-1}$
- b) $\mu \equiv 0$

La demostración se encuentra en la sección dos del apéndice C de [5]

Teorema A.0.8. Sea $\phi \in D(\mathbb{R}^n)$ par y con $0 \notin \text{supp}(\phi)$, y $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\langle u, x \rangle| \widehat{\phi}(x) dx = -2(2\pi)^{n-1} \int_{\mathbb{R}} r^{-2} \phi(ru) dr$$

La prueba se encuentra en [8].

Bibliografía

- [1] F. Barthe and A. Naor. *Hyperplane projections of the unit ball of l_p^n* . *Discrete Comput Geom*, 27:215–226, 2002.
- [2] V.I. Bogachev. *Measure theory*. Springer, 2007.
- [3] A.N. Boules. *Fundamentals of Mathematical Analysis*. Oxford University Press, 2021.
- [4] A. Koldobsky D. Ryabogin and A. Zvavitch. *Projections of convex bodies and the Fourier transform*. *Israel J. Math*, 104:361–380, 2004.
- [5] R. J. Gardner. *Geometric tomography*, volume 58 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2006.
- [6] A. Koldobsky. *Schoenberg’s problem on positive definite functions*. *St. Petersburg Math. J.*, 3:563–570, 1992.
- [7] A. Koldobsky. *Fourier Analysis in Convex Geometry*. American Mathematical Soc, 1995.
- [8] A. Koldobsky. *Inverse formula for the Blaschke-Levy representation*. *Houston. J. Math*, 23:95–108, 1998.
- [9] R. Latała and K. Oleszkiewicz. *On the best constant in the Khinchin-Kahane inequality*. *Studia Math*, 109(1):101–104, 1994.
- [10] L. H. Loomis and H. Whitney. *An inequality related to the isoperimetric inequality*. *Bull Amer Math Soc*, 55:961–962, 1949.
- [11] F. Morgan. *Geometric Measure Theory*. Academic Press, 1988.

- [12] C.M. Petty. *Isoperimetric problems. Proc. Conf. Convexity Combinat.*, pages 26–41, 1971.
- [13] C.A. Rogers and G.C. Shephard. *The difference body of a convex body. Archiv der Mathematiks*, 8:220–233, 1957.
- [14] W. Rudin. *Functional analysis*. McGraw Hill, 1973.
- [15] R. Schneider. *Zu einem problem von Shephard über die projection konvexer Körper. Math Z*, 101:582–589, 1967.
- [16] R. Schneider. *Random hyperplanes meeting convex body. Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Geb*, 61:379–387, 1982.
- [17] R. Schneider. *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, volume 44 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [18] G. Zhang. *Restricted chord projection and affine inequalities. Geometriae Dedicata*, 39:213–222, 1991.