Geometría de espacios de Banach: estructura normal y reflexividad

Mario Chacón Falcón

Geometría de espacios de Banach: estructura normal y reflexividad

Mario Chacón Falcón

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por

Prof. Dr. Rafael Espínola García

Índice general

Resumen

El objetivo de este trabajo es el estudio de los espacios de Banach desde una perspectiva más geométrica. Con este fin, introducimos los espacios uniformemente convexos y los espacios de Banach con estructura normal.

La estructura normal es una propiedad geométrica de los espacios de Banach muy útil. A modo de motivación para el estudio de la estructura normal, durante el desarrollo del trabajo, se demuestra una de sus aplicaciones a la teoría del punto fijo. Introducimos un resultado dado por W. A. Kirk en 1965, quien demostró el Teorema de punto fijo de Kirk, que utilizaba la estructura normal en un espacio reflexivo para asegurar la existencia de punto fijo de una aplicación T no expansiva.

Comenzamos con el capítulo uno, que consiste en un pequeño resumen de las propiedades utilizadas durante el trabajo. A continuación, se introducen los espacios uniformemente convexos. Estos espacios se caracterizan por el carácter geométrico de sus bolas unidades, dicho informalmente, se tiene que la forma de las bolas es "redondeada". Este concepto de redondez es formalizado mediante el módulo de convexidad. Se demostrará que los espacios uniformemente convexos son caracterizados por sus subespacios de dimensión dos.

Más adelante se presentan los espacios de Banach con estructura normal, una estructura geométrica más general que la de los espacios uniformemente convexos. Comenzamos con la definición de los elementos de Chebyshev y de la estructura normal. Una vez dados estos conceptos, caracterizamos la estructura normal y damos su relación con los espacios uniformemente convexos. Acabamos el capítulo demostrando el Teorema de punto fijo de Kirk.

Por último, le damos un enfoque nuevo al estudio de la estructura normal, buscando una condición suficiente para asegurarla, basándonos solamente en sus subespacios de dimensión dos.

Es interesante destacar un resultado que se prueba durante el desarrollo de esta caracterización. Este enuncia que la longitud de la curva dada por la esfera unidad de un espacio normado de dimensión 2 está entre 6 y 8.

Fue Ji Gao, en 2001, quien introdujo el coeficiente $R(X)$ de un espacio de Banach, coeficiente que solo dependía de los subespacios de dimensión 2. Finalizamos el trabajo presentando el resutado de Ji Gao que dice que si $R(X) > 0$ entonces X posee estructura normal.

English Abstract

The goal of this dissertation is to study some geometrical properties of Banach spaces, mainly uniform convexity and normal structure. First, main Banach spaces properties are reviewed. Afterwards, we introduce uniform convex spaces. In order to study the roundness of unit balls in arbitrary Banach spaces, the modulus of convexity is defined. It will proved that a notable property of uniform convex spaces is the roundness of its unit balls. Lastly, the modulus of convexity is used to characterize uniform convex Banach spaces by its two dimensional subspaces.

We continue studying the geometry of Banach spaces introducing Chebyshev elements and the property of normal structure. Normal structure is more general than that of uniform convexity, as it will be shown in chapter 3. The importance of normal structure is seen throughout different kind of results. In particular, we present an application of normal structure to the metric fixed point theory.

Finally, we work with curves in two dimensional spaces as well as the length of the circumference of the unit ball in order to introduce a coefficient, $R(X)$ of Ji Gao. To introduce $R(X)$ we proof a result that stands out, which states that the length of the unit sphere of a 2 dimensional normed space X is between 6 and 8.

The importance about $R(X)$ is that it only depends on the two dimensional subspaces of our Banach space X. It will be seen that if $R(X) > 0$, then X has normal structure.

In summary, we will visit some geometric properties of Banach spaces, relate them and give a characterization of them throughout their two dimensional subspaces.

1 Introducción a los espacios de Banach. Reflexividad y topología débil

1.1 Espacios de Banach y de Hilbert

En lo que sigue se trabajará con el cuerpo de los números reales, aunque resultados muy parecidos se pueden demostrar para el cuerpo de los complejos. En primer lugar, se introducen los espacios de Hilbert y de Banach, los cuales estudiaremos a lo largo del trabajo.

Definición 1.1 (Producto escalar). *Sea X un espacio vectorial (real). Una aplicación $(\cdot|\cdot): X \times X \to \mathbb{R}$ se llama* ***producto escalar*** *sobre X si cumple que, para todo $x, y, z \in X$:*

1. $(x|y) = (y|x)$
2. $(x|y+z) = (x|y) + (x|z)$
3. $(\alpha x|y) = \alpha(x|y)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$
4. $(x|x) \geq 0$
5. $(x|x) = 0 \iff x = 0$

Observación 1.1. Al par $(X, (\cdot|\cdot))$ se le denomina espacio **prehilbertiano**.

Observación 1.2. Es inmediato comprobar que las siguientes propiedades se siguen de la definición anterior:

1. $(y+z|x) = (y|x) + (z|x)\ \forall x, y, z \in X$
2. $(x|\alpha y) = \alpha(x|y)$

Definición 1.2. *Sea X un espacio vectorial (real), se dice que una aplicación $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ define una* **norma** *sobre X si verifica que para todo $x, y \in X$:*

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(desigualdad triangular)*

Observación 1.3. Si denotamos $p(\cdot) := \|\cdot\|$ y se cambia la condición 2 por:

$$x = 0 \implies p(x) = 0$$

se dice que p es una **seminorma** en X.

Observación 1.4. Al par $(X, \|\cdot\|)$ se le denomina **espacio normado**.

A continuación se enunciarán una serie de resultados clásicos del análisis funcional sin demostración, para más detalle consultar [3].

Proposición 1.1. Sea $(H|(\cdot|\cdot))$ un espacio prehilbertiano, entonces la aplicación, $\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}$ dada por $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ define una norma.

Proposición 1.2. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado con $\|\cdot\|$ una norma inducida por el producto escalar $(\cdot|\cdot)$. Entonces para todo $x, y \in X$ se cumple la **identidad del paralelogramo**:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Proposición 1.3. Todo espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ tiene una métrica natural asociada $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = \|x - y\|$ para todo $x, y \in X$.

Definición 1.3. *Se dice que el espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de* ***Banach*** *si su métrica es completa.*

Definición 1.4. *Se dice que un espacio prehilbertiano $(H, (\cdot|\cdot))$ es un espacio de* ***Hilbert*** *si es completo con la métrica inducida por la norma dada por el producto escalar.*

1.2 Convexidad

Con el propósito de estudiar el carácter geométrico de las bolas en los espacios de Banach, es necesario recordar algunas propiedades de los conjuntos convexos.

Definición 1.5. *Dado X un espacio de Banach, se dice que $K \subseteq X$ es **convexo** si para todo $x, y \in K$ se tiene que:*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in K \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Definición 1.6. *Dado $A \subseteq X$, denotamos por $\operatorname{conv}(A)$ a la **envolvente convexa**, es decir, el menor convexo de X que contiene a A. Claramente se tiene:*

$$\operatorname{conv}(A) = \cap\{K \subseteq X : A \subset K, K \textit{es convexo}\}.$$

Es más, $x \in \operatorname{conv} A$ si y solo si x es de la forma $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ donde $x_i \in A$ y $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Observación 1.5. La envolvente convexa de un conjunto finito es un **politopo** (generalización del poliedro a dimensiones superiores).

Observación 1.6. La clausura de $\operatorname{conv}(A)$ se denota por $\overline{\operatorname{conv}}(A)$ y se llama **cierre convexo** de A. Como antes, se tiene:

$$\overline{\operatorname{conv}}(A) = \cap\{K \subseteq X : A \subset K, K \text{es convexo y cerrado}\}.$$

Definición 1.7. *Dado un X espacio vectorial y $A \subseteq X$ se define el **espacio generado por** A como:*

$$\operatorname{span}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i : n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}, a_i \in A \right\}.$$

Definición 1.8. *Si $K \subseteq X$ es convexo, un punto $x \in K$ es un **punto interno** relativo a K si para toda recta afín r contenida en el $\operatorname{span}(K)$ cumpliendo que $x \in r$, existen $x_1, x_2 \in r$ con $x_1 \neq x_2$ tal que $x = \frac{x_1+x_2}{2}$. Un punto de K que no es interno se llama **punto extremo**.*

Denotamos por K° al conjunto de puntos internos relativos a K y por $\partial K := K - \{K^\circ\}$ al conjunto de puntos extremos.

Definición 1.9. *Un convexo K de un espacio normado X se dice **cuerpo convexo** si es cerrado, acotado y de interior no vacío.*

Observación 1.7. Si K es un cuerpo convexo, entonces K° es su interior y ∂K es su frontera.

Ejemplo 1.1. Si llamamos $B := \overline{B}(0,1)$, se tiene que B es un cuerpo convexo. Los puntos opuestos de ∂B se llaman **antipodales** (dos puntos $p, q \in X$ son opuestos si $p + q = 0$).

1.3 Aplicaciones lineales

Con la intención de introducir los espacios reflexivos, conviene antes hablar de las aplicaciones lineales. Esto nos permitirá, dado X un espacio de Banach, definir el espacio dual X^*.

Definición 1.10. *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios normados, se dice que $T: X \to Y$ es una **aplicación** (u operador) **lineal** si:*

1. $T(x+y) = T(x_1) + T(x_2) \ \ \forall x_1, x_2 \in X$
2. $T(\lambda x) = \lambda T(x) \ \ \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Observación 1.8. En las condiciones de la definición anterior si $Y = \mathbb{R}$ se dice que T es un funcional sobre X.

Definición 1.11. *Una aplicación lineal $T: X \to Y$ se dice **acotada** si existe $c > 0$ tal que*

$$\|T(x)\|_Y \leq c\|x\|_X \qquad \forall x \in X.$$

Observación 1.9. En la definición anterior es equivalente decir que existe $c > 0$ tal que

$$\frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq c \qquad \forall x \in X - \{0\}.$$

Observación 1.10. A la menor constante c verificando la desigualdad anterior la llamamos norma de T y se denota como:

$$\|T\|_{L(X,Y)} = \sup_{x \in X - \{0\}} \left(\frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \right)$$

donde $L(X,Y) := \{T : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)\,, T$ es lineal y acotado$\}$.

Definición 1.12. *Dados $(X, \rho), (Y, \rho')$ dos espacios métricos, una aplicación $f: X \to Y$ se dice **lipschitziana** si existe $L > 0$ tal que:*

$$\rho'(f(x_1), f(x_2)) \leq L\rho(x_1, x_2) \ \forall x_1, x_2 \in X.$$

*A la menor constante satisfaciendo la desigualdad anterior se le denomina **constante de lipschitz**. Si la constante de lipschitz es menor que 1 se dice que f es **contractiva**. Si es menor o igual a 1 se dice que f es **no expansiva**.*

Teorema 1.1. *El espacio $(L(X,Y), \|\cdot\|_{L(X,Y)})$ es un espacio normado, es decir, $\|\cdot\|_{L(X,Y)}$ define una norma sobre $L(X,Y)$.*
Si $Y = \mathbb{R}$, a $(L(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L(X,\mathbb{R})})$ se le llama espacio dual de X y se denota X^*.

Es natural preguntarse si para cualquier espacio normado X existen elementos en su espacio dual X^*. La respuesta es afirmativa:

Proposición 1.4. Si X es un espacio normado no trivial, entonces X^* es no trivial.

La demostración de este hecho es consecuencia del Teorema de Hahn Banach, los detalles se pueden consultar en [3].

Proposición 1.5. Sean X un espacio normado e Y un espacio de Banach, entonces $L(X, Y)$ es un espacio de Banach.

Corolario 1.1. Si X es un espacio normado X^* es un espacio de Banach.

Definición 1.13. *Dos espacios normados $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ se dicen **isomorfos** si existe $T: X \to Y$ biyectiva y lineal.*
*X e Y se dicen **isométricamente isomorfos** si existe $T: X \to Y$ lineal, sobreyectiva e isometría ($\|T(x)\|_Y = \|x\|_X \quad \forall x \in X$).*

Observación 1.11. La inyectividad de T se deduce de que es isometría.

Observación 1.12. De ahora en adelante, cuando escribamos $X = Y$, entenderemos que se refiere a que hay un isomorfismo isométrico entre ambos (se pueden identificar).

1.4 Reflexividad

Los espacios reflexivos serán una herramienta fundamental a lo largo del trabajo. Comenzamos la sección dando una identificación natural de todo espacio de Hilbert con su dual. Después, se trata de generalizar esta identificación a los espacios de Banach, resultando en la definición de espacio reflexivo.

Teorema 1.2 (Teorema de representación de Riesz). *Sea $(H, (\cdot|\cdot))$ un espacio de Hilbert y $T: H \to \mathbb{R}$ lineal y continua, entonces existe un único $y \in H$ tal que:*

$$T(x) = (x|y) \; \forall x \in H.$$

Corolario 1.2. Dado $(H, (\cdot|\cdot))$ un espacio de Hilbert, se tiene que H es isométricamente isomorfo a H^* ($H = H^*$) mediante la aplicación:

$$\begin{aligned} \Phi: H^* &\to H \\ T &\mapsto y \end{aligned}$$

Donde $y \in H$ es el único tal que $T(x) = (x|y)$ para todo $x \in H$.

Cabe preguntarse ahora si esto es cierto también para los espacios de Banach. La respuesta es negativa.

Definición 1.14. *Dado $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, se llama **bidual** de X al dual de X^* y se denota $(X^*)^* := X^{**}$.*

Observación 1.13. X^{**} es un espacio de Banach.

Teorema 1.3. *El bidual de todo espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ contiene una copia isomorfa del propio X, es decir, $X \subseteq X^{**}$.*
Se tiene gracias a la aplicación natural:

$$\begin{aligned} J : X &\to X^{**} \\ x &\mapsto \phi_x \end{aligned}$$

Donde ϕ_x actúa de la forma:

$$\begin{aligned} \phi_x : X^* &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Observación 1.14. Con $X \subseteq X^{**}$ nos referimos a que existe $Z \subseteq X^{**}$ tal que $X = Z$ (isométricamente isomorfos). En nuestro caso, $Z = J(X)$.

¿Se tiene que J es sobreyectiva?, es decir, ¿$X = J(X) = X^{**}$? En general, no. Esto da pie a la siguiente definición.

Definición 1.15. *Diremos que un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es **reflexivo** si $X = X^{**}$.*

Observación 1.15. Todo espacio reflexivo es de Banach. Esto se sigue del hecho de que todo espacio dual X^* de un espacio normado X, es de Banach. Así, como tenemos la identificación $X = X^{**}$, y sabemos que X^{**} es de Banach, se deduce que X es de Banach.

Observación 1.16. Todo espacio de Hilbert es reflexivo (se sigue del Teorema de Riesz).

Observación 1.17. No todo espacio de Banach es reflexivo. Un ejemplo de esto sería el espacio de sucesiones $c_0 = \{(x_n) \subseteq \mathbb{R} : x_n \to 0\}$ con la norma $\|x\|_\infty := \sup\{|x_n|\}$. Se tiene que $c_0^* = l_1$ y que $l_1^* = l_\infty$, luego $c_0^{**} = l_\infty$. Ahora bien, como c_0 es separable y l_∞ no lo es, $c_0 \neq l_\infty$. Por tanto, $c_0^{**} = l_\infty \neq c_0$, es decir, c_0 no es reflexivo.

1.5 Topología débil. Caracterización de espacios de Banach reflexivos

Finalizamos el capítulo con una caracterización muy importante de los espacios reflexivos.

Es bien conocido (Teorema de Heine-Borel) que dado un espacio X de dimensión finita un conjunto K es compacto si y solo si es cerrado y acotado. En dimensión infinita esto no es cierto. En esta sección perseguimos dar un resultado parecido al que acabamos de enunciar, pero en dimensión infinita. Para ello, dotamos a X con una segunda topología, más débil que la que tiene, pero que nos permite caracterizar su reflexividad mediante la compacidad de la bola unidad. Comenzamos introduciendo una generalización de los espacios normados, los espacios vectoriales topológicos.

No demostraremos algunos de los resultados técnicos que vienen a continuación. En este trabajo se ha preferido priorizar las caracterizaciones mediante la geometría de los espacios. Para los lectores interesados en las demostraciones, se podrán consultar en [3].

Definición 1.16. *Un **espacio vectorial topológico** es un espacio vectorial dotado de una topología $\mathcal{T}$ respecto de la cual las siguientes aplicaciones son continuas:*

1. *$X \times X \to X$ definida por $(x, y) \mapsto x + y$*
2. *$\mathbb{R} \times X \to X$ definida por $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$*

Observación 1.18. Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, como la suma y el producto por escalar son continuas, se tiene que X es un espacio vectorial topológico.

Ejemplo 1.2. Sea X un espacio vectorial y $\mathcal{P}$ una familia de seminormas de X. Sea $\mathcal{T}$ la topología de X que tiene como subbase los conjuntos $\{x \in X : p(x - x_0) < \epsilon\}$, donde $x_0 \in X, p \in \mathcal{P}, \epsilon > 0$.

Esto quiere decir que $\mathcal{T}$ tiene como base a X junto con el conjunto formado por todas las intersecciones finitas de los elementos de la subbase.

Así, un subconjunto $U \subseteq X$ será abierto si y solo si para todo x_0 en U existen $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ y $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n > 0$ tal que:

$$\bigcap_{j=1}^{n} \{x \in X : p_j(x - x_0) < \epsilon_j\} \subseteq U.$$

Se puede demostrar que X con esta topología es un espacio vectorial topológico.

Este ejemplo da pie a unos espacios vectoriales topológicos que nos serán de más interés, los espacios localmente convexos.

Definición 1.17. *Un espacio vectorial topológico se dice* ***localmente convexo*** *(LCS) si su topología viene definida por una familia de seminormas $\mathcal{P}$ tal que:*

$$\bigcap_{p\in\mathcal{P}}\{x \in X : p(x) = 0\} = \{0\}.$$

Definamos ahora la segunda topología de nuestro espacio X localmente convexo. Denotamos por X^* al espacio de los funcionales lineales y continuos de X. Nótese que X^* posee estructura de espacio vectorial. Dados $x \in X, x^* \in X^*$, será conveniente denotar por $\langle x, x^*\rangle$ a $x^*(x)$.

Definición 1.18. *Si X es un espacio localmente convexo se define la* ***topología débil*** *sobre X, denotada por $\sigma(X, X^*)$, como la topología generada por la familia de seminormas $\{p_{x^*} : x^* \in X^*\}$, donde:*

$$p_{x^*}(x) = |\langle x, x^*\rangle|.$$

La ***topología débil-estrella*** *sobre X^*, denotada por $\sigma(X^*, X)$, es la topología generada por la familia de seminormas $\{p_x : x \in X\}$, donde:*

$$p_x(x^*) = |\langle x, x^*\rangle|.$$

Así, un subconjunto U de X es débil abierto si y solo si para todo $x_0 \in U$ existe un $\epsilon > 0$ y existen $x_1^*, \dots, x_n^*$ tal que:

$$\bigcap_{k=1}^{n}\{x \in X : |\langle x - x_0, x_k^*\rangle| < \epsilon\} \subseteq U.$$

Observación 1.19. Es importante prestar atención al orden de X y X^* a la hora de denotar la topología débil, $\sigma(X, X^*)$, y débil-estrella, $\sigma(X^*, X)$.

Definición 1.19. *Se dice que una red $\{x_i\}$ converge débilmente a x_0 si y solo si $\langle x_i, x^*\rangle \to \langle x_0, x^*\rangle$ para todo $x^* \in X^*$.*

Por último, se tiene que $\sigma(X, X^*) \subseteq \mathcal{T}$. Efectivamente, basta ver que $id : (X, \mathcal{T}) \to (X, \sigma(X, X^*))$ es continua. Se tiene porque si $\{x_i\}$ es una red en X tal que $\{x_i\} \to 0$, entonces por continuidad para todo $x^* \in X^*$, $\langle x_i, x^*\rangle \to 0$. Ahora bien, esto pasa si y solo si $\{id(x_i)\} = \{x_i\}$ converge débilmente a 0. (En espacios vectoriales topológicos son equivalente la continuidad y la continuidad en un punto).

En particular, toda $x^* \in X^*$ es débil continua. Se tiene más. Los siguientes resultados podrán encontrarse demostrados en [3].

Proposición 1.6. Si X es un espacio localmente convexo, $(X, \sigma(X, X^*))^* = X^*$.

Proposición 1.7. Si X es un espacio localmente convexo, $(X^*, \sigma(X^*, X))^* = X$.

Teorema 1.4. *Un subconjunto convexo de X es cerrado si y solo si es débil cerrado.*

Acabamos la sección presentando la caracterización de los espacios reflexivos buscada. Se denotará por $\mathrm{B}(X)$ a la bola unidad cerrada en X.

Teorema 1.5 (Teorema de Alaoglu). *Si X es un espacio normado, entonces $B(X^*)$ es un débil-estrella compacto.*

Teorema 1.6. *Si X es un espacio normado, entonces $B(X)$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$ denso en ball(X^{**}).*

Teorema 1.7. *Si X es un espacio de Banach, son equivalentes:*

1. *X es reflexivo*
2. *X^* es reflexivo*
3. $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$
4. *$B(X)$ es débil compacto*

La demostración de este teorema se basa en los teoremas 1.4, 1.6, 1.7. Como mencionamos antes, los detalles de la prueba se pueden consultar en [3].

Corolario 1.3. Si X es un espacio de Banach reflexivo y $K \subseteq X$ un cerrado, convexo y acotado entonces K es débil compacto.

Demostración. Como K es acotado existe un $R > 0$ tal que $K \subseteq \overline{B}(0, R)$. Ahora bien, como X es reflexivo se tiene que $\overline{B}(0, R)$ es débil compacto. Notando que K es cerrado y convexo, gracias al Teorema 1.4, K es débil cerrado. Concluimos entonces que, como K débil cerrado, contenido en $\overline{B}(0, R)$ débil compacto, K es débil compacto. ∎

2 Convexidad uniforme y geometría de la bola unidad

Con el objetivo de estudiar la geometría de los espacios de Banach, introducimos en primer lugar la convexidad uniforme. Una de sus características más destacables es la "redondez" de la bola unidad.

Comenzamos el capítulo definiendo los espacios uniformemente convexos y dando algún ejemplo para entenderlos mejor. Más adelante, estudiaremos la redondez de las bolas unidades de los espacios de Banach usando como herramienta una función llamada el módulo de convexidad. Para terminar, con ayuda de esta función, caracterizaremos los espacios uniformemente convexos mediante sus subespacios de dimensión dos.

A partir de ahora $(X, \|\cdot\|)$ denotará un espacio de Banach.

2.1 Convexidad estricta y convexidad uniforme

Definición 2.1. *Un espacio de Banach X se dice **estrictamente convexo** si dados $x, y \in X$, se cumple:*

$$\left.\begin{array}{l} \|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1 \\ \|x-y\| > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1.$$

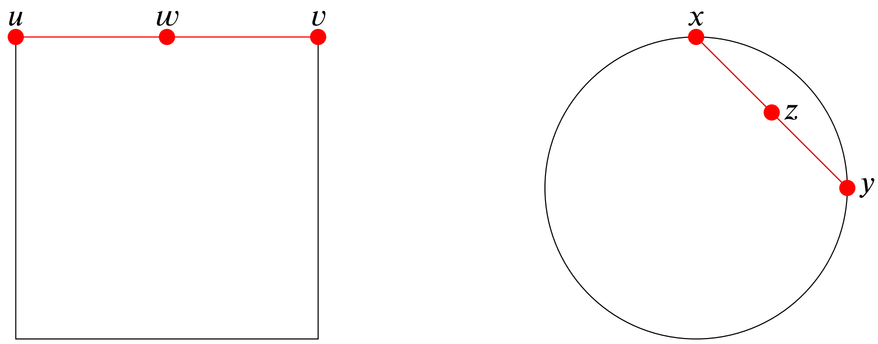
Observación 2.1. Nótese que si $\|x\|, \|y\| < 1$ se tiene, gracias a la desigualdad triangular, que $\|(x+y)/2\| < 1$. De esta manera, la condición de estrictamente convexo es siempre cierta para puntos del interior de la bola unidad. El estudio interesante está en $\|x\| = \|y\| = 1$.

Ejemplo 2.1. Tomando $x \in \mathbb{R}^2$ Si denotamos por:

$$\|x\|_1 = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|\}.$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

El espacio $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ no es estrictamente convexo mientras que $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ sí lo es, como podemos ver en la figura:



Donde $u = (0,1), v = (1,1), w = \frac{u+v}{2} = (\frac{1}{2}, 1)$ cumplen $\|u\|_1 = \|v\|_1 = \|w\|_1 = 1$ y, por tanto, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ no es estrictamente convexo. Veremos que todo espacio de Hilbert es uniformemente convexo (siguiente definición), en particular, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ estrictamente convexo.

Definición 2.2. *Un espacio de Banach se dice* ***uniformemente convexo*** *si para cada* $\epsilon \in (0, 2]$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para* $x, y \in X$ *se cumple:*

$$\left.\begin{array}{l} \|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1 \\ \|x - y\| > \epsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \delta.$$

Es interesante resaltar que, $\delta \in (0, 1)$.

Observación 2.2. Todo espacio uniformemente convexo es estrictamente convexo. Es más, gracias a que las bolas unidad son compactas en dimensión finita, la convexidad estricta y uniforme son equivalentes en dimensión finita. En general, estos conceptos son distintos.

Nótese que, en el ejemplo anterior, podemos apreciar cómo el espacio no estrictamente convexo (equivalentemente uniformemente convexo por ser dimensión finita) tiene una bola cuadrada mientras que el que sí lo es posee una estructura más redonda. Como mencionabamos en la introducción, esta es una característica notable de los espacios uniformemente convexos. A continuación, introduciremos el módulo de convexidad de un espacio de Banach, que nos permitirá saber "cuánto de redonda" es la bola del espacio con el que trabajamos. Antes de esto, veamos primero un ejemplo de espacio estrictamente convexo y no uniformemente convexo.

Ejemplo 2.2. Sea $\mu > 0$. Consideremos el espacio

$$c_0 := \{(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0, n \in \mathbb{N}\}$$

y las normas:

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\}$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right)^{1/2}$$

$$\|x\|_\mu = \|x\|_\infty + \mu\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{x_i}{i}\right)^2\right)^{1/2} = \|x\|_\infty + \mu\|\hat{x}\|_2 \quad \text{donde} \quad \hat{x} := \left(\frac{x_i}{i}\right)_{i\geq 1}.$$

Veamos que $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ no es estrictamente convexo mientras que $(c_0, \|\cdot\|_\mu)$ es estrictamente convexo pero no uniformemente convexo para todo $\mu > 0$. El hecho de que $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ no es estrictamente convexo se sigue de tomar $x = (1, 0, 0, 0, \dots)$, $y = (1, 1, 0, 0, \dots)$ con $\|y\|_\infty = \|x\|_\infty = \|(x+y)/2\|_\infty = 1$.

A continuación probemos que $(c_0, \|\cdot\|_\mu)$ es estrictamente convexo. Sean $x, y \in c_0 : x \neq y, \|x\|_\mu = \|y\|_\mu = 1$. Se tiene:

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_\mu = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_\infty + \mu\left\|\frac{\hat{x}+\hat{y}}{2}\right\|_2 <$$

$$< \left\|\frac{x}{2}\right\|_\infty + \mu\left\|\frac{\hat{x}}{2}\right\|_2 + \left\|\frac{y}{2}\right\|_\infty + \mu\left\|\frac{\hat{y}}{2}\right\|_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\|x\|_\mu + \frac{1}{2}\|y\|_\mu = 1$$

Donde hemos usado que $\|(\hat{x}+\hat{y})/2\|_2 < \|\hat{x}/2\|_2 + \|\hat{y}/2\|_2$. Efectivamente, pues si fueran iguales, entonces, al ser $(l_2, \|\cdot\|_2)$ estrictamente convexo, se tiene que existe $\alpha > 0$ tal que

$$\frac{\hat{x}}{2} = \alpha\frac{\hat{y}}{2} \iff \frac{x_i}{i} = \alpha\frac{y_i}{i} \quad \forall i \in \mathbb{N} \iff x = \alpha y$$

Pero

$$1 = \|x\|_\mu = \alpha\|y\|_\mu = \alpha$$

Lo que implica que $x = y$, llegando a contradicción. Nótese que hemos podido probar la desigualdad estricta gracias a que $(l_2, \|\cdot\|_2)$ es estrictamente convexo (veremos que todos los Hilbert son uniformemente convexos).

Probemos ahora que no es uniformemente convexo. Para ello sea $\epsilon \in (0,1)$, consideremos $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1} \subseteq c_0$ sucesiones con:

$$x_n = (x_n^m)_{m\geq 1} \text{ donde } x_n^m = \begin{cases} \frac{1-\frac{2\epsilon}{3}}{1+\mu\frac{\pi}{\sqrt{6}}} & \text{si } m \leq n \\ 0 & \text{si } m > n \end{cases}$$

$$y_n = (y_n^m)_{m\geq 1} \text{ donde } y_n^m = \begin{cases} \frac{1-\frac{4\epsilon}{3}}{1+\mu\frac{\pi}{\sqrt{6}}} & \text{si } m \leq n \\ 0 & \text{si } m > n \end{cases}$$

Nótese que $\|x_n\|_\mu \leq 1 \|y_n\|_\mu \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ pues:

$$\|x_n\|_\mu = \|x\|_\infty + \mu\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\|x\|_\infty}{i}\right)^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \|x\|_\infty + \mu\|x\|_\infty\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i}\right)^2\right)^{1/2} =$$

$$= \|x\|_\infty\left(1+\mu\frac{\pi}{\sqrt{6}}\right) = 1 - \frac{2\epsilon}{3} < 1$$

y análogo para y_n. Ahora bien, se tiene:

$$\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|_\mu = \left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|_\infty + \mu\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|_\infty}{i}\right)^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|_\infty + \mu\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|_\infty\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i}\right)^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|_\infty\left(1+\mu\frac{\pi}{\sqrt{6}}\right) = \frac{2-\frac{6\epsilon}{3}}{2\left(1+\mu\frac{\pi}{\sqrt{6}}\right)}\left(1+\mu\frac{\pi}{\sqrt{6}}\right) = 1-\epsilon$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\|_\mu = 1 - \epsilon.$$

Así, dado $\delta \in (0,1)$, escogiendo $\hat{\epsilon} \in (0, \frac{1-\delta}{2})$, gracias al límite anterior, para todo $\epsilon > 0$ (en particular para $\hat{\epsilon}$) existe un n_0 tal que

$$\left| \left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\|_\mu - (1 - \hat{\epsilon}) \right| < \hat{\epsilon} \quad \forall n \geq n_0.$$

De donde se obtiene $x_n, y_n \in c_0$ con $\|x_n\|_\mu, \|y_n\|_\mu \leq 1, x_n \neq y_n$ pero $\|(x_n + y_n)/2\|_\mu > \delta$, para un $\delta \in (0,1)$ arbitrario. Consecuentemente $(c_0, \|\cdot\|_\mu)$ no es uniformemente convexo.

2.2 Módulo de convexidad y característica de convexidad

Como se mencionó al principio de este capítulo, en esta sección nos centraremos en el módulo de convexidad y la característica de convexidad, ambos muy importantes para el estudio de la convexidad uniforme y la "redondez" de la bola unidad. Más aún, se estudiará cómo el módulo de convexidad de un espacio de Banach X solo depende de su valor en los subespacios de dimensión dos. De esta manera, obtendremos una forma de caracterizar los espacios de Banach uniformemente convexos a partir de de sus subespacios de dimensión dos.

Definición 2.3. *El* ***módulo de convexidad*** *de un espacio de Banach X es la función $\delta_X : [0,2] \to [0,1]$ definida como:*

$$\delta_X(\epsilon) = \operatorname{ínf} \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \epsilon \right\}.$$

Observación 2.3. Nótese que, al ser el ínfimo, para cualquier $\epsilon > 0$ el número $\delta_X(\epsilon)$ es el mayor número que cumple siempre la siguiente implicación, dados $x, y \in X$:

$$\left.\begin{array}{r} \|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1 \\ \|x - y\| \geq \epsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta_X(\epsilon).$$

Proposición 2.1. Dado X un espacio de Banach, y δ_X su módulo de convexidad, se tiene que:

$$\delta_X(\epsilon) := \text{ínf}\left\{1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1, \|x-y\|\geq\epsilon\right\} =$$

$$= \text{ínf}\left\{1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\|= 1, \|y\|= 1, \|x-y\|=\epsilon\right\}.$$

Demostración. Sean

$$\delta_1(\epsilon) = \text{ínf}\left\{1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1, \|x-y\|\geq\epsilon\right\}.$$

$$\delta_2(\epsilon) = \text{ínf}\left\{1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1, \|x-y\|=\epsilon\right\}.$$

$$\delta_3(\epsilon) = \text{ínf}\left\{1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\|= 1, \|y\|\leq 1, \|x-y\|=\epsilon\right\}.$$

$$\delta_4(\epsilon) = \text{ínf}\left\{1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\|= 1, \|y\|= 1, \|x-y\|=\epsilon\right\}.$$

Tenemos que probar que $\delta_1(\epsilon) = \delta_4(\epsilon)$.

Por contención de conjuntos se tiene inmediatamente que:

$$\delta_1(\epsilon)\leq\delta_2(\epsilon)\leq\delta_3(\epsilon)\leq\delta_4(\epsilon).$$

El objetivo será probar que todas son igualdades. En primer lugar, veamos que $\delta_2(\epsilon)\leq\delta_1(\epsilon)$. Para ello, es suficiente ver que dados $x, y\in X$ tal que $\|x\|, \|y\|\leq 1$ con $\|x-y\|\geq\epsilon$, encontrar $u, v\in X$ tal que $\|u\|, \|v\|\leq 1$ con $\|u-v\|=\epsilon$ que cumplan que:

$$1-\left\|\frac{u+v}{2}\right\|\leq 1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\|.$$

Busquemos estos $u, v\in X$. Fijados $x, y\in X$ en las condiciones anteriores, si $\|x-y\|=\epsilon$, basta tomar $u=x, v=y$. Supongamos entonces que $\|x-y\|=\tau>\epsilon$.

Ahora bien, como la bola unidad cerrada $B(X)$ es convexa, se tiene que el segmento que une a x e y está entero contenido en la bola unidad, es decir $r := \{tx+(1-t)y : t\in[0,1]\}\subseteq B(X)$. Considérese ahora la función continua $f(t) := \|x-(ty+(1-t)x)\|$ para $t\in[0,1]$. Como $f(0)=0$ y $f(1)=\tau>\epsilon$, se tiene que existe un $t_0\in(0,1)$ tal que $f(t_0) = \epsilon$. Sea $w := t_0 y + (1 - t_0)x$. Se tiene que cumple que $\|x - w\| = f(t_0) = \epsilon$. Trasladando x y w, se considera:

$$u = x + \frac{\tau - \epsilon}{2} \frac{(y - x)}{\|y - x\|}.$$

$$v = w + \frac{\tau - \epsilon}{2} \frac{(y - x)}{\|y - x\|}.$$

Afirmamos que u, v cumplen lo buscado. Efectivamente, $\|u - v\| = \|x - w\| = \epsilon$. Además,

$$\|x - u\| = \frac{\tau - \epsilon}{2} < \tau$$

$$\|v - x\| = \|v - w\| + \|w - x\| = \epsilon + \frac{\tau - \epsilon}{2} = \frac{\tau + \epsilon}{2} < \tau.$$

Luego $u, v \in r$. Así $\|u\| \leq 1, \|v\| \leq 1$. Por último, teniendo en cuenta que los puntos están alineados, $\tau = \|y - x\| = \|y - w\| + \|w - x\|$, luego $\|y - w\| = \tau - \epsilon$. Se tiene por tanto que

$$\tau - \epsilon = \|y - w\| = \|y - v\| + \|w - v\| = \|y - v\| + \frac{\tau - \epsilon}{2}.$$

Concluyendo que $\|y - v\| = (\tau - \epsilon)/2$. Ahora bien,

$$\left\|\frac{u + v}{2}\right\| = \left\|\frac{u + \frac{\tau-\epsilon}{2}\frac{(y-x)}{\|x-y\|} + v + \frac{\tau-\epsilon}{2}\frac{(y-x)}{\|y-x\|}}{2}\right\| = \left\|\frac{x + y}{2}\right\|.$$

Donde hemos usado que

$$v + \frac{\tau - \epsilon}{2} \frac{(y - x)}{\|y - x\|} = y.$$

Que se deduce de

$$\left\|v - \left(y + \frac{\tau - \epsilon}{2} \frac{(x - y)}{\|y - x\|}\right)\right\| = \|v - y\| - \left\|y - \left(y + \frac{\tau - \epsilon}{2} \frac{(x - y)}{\|y - x\|}\right)\right\| = 0.$$

Podemos concluir por tanto que

$$1 - \left\|\frac{u + v}{2}\right\| \leq 1 - \left\|\frac{x + y}{2}\right\|.$$

En consecuencia, $\delta_1(\epsilon) = \delta_2(\epsilon)$.

Nos disponemos ahora a probar que $\delta_3(\epsilon) \leq \delta_2(\epsilon)$. Para ello, al igual que antes, fijamos $x, y \in X$ tal que $\|x - y\| = \epsilon$ y tal que $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$. El objetivo será, de forma semejante a lo anterior, encontrar $u, v \in X$ tal que $\|u\| = 1, \|v\| \leq 1$ con $\|u - v\| = \epsilon$ que cumplan que:

$$1 - \left\| \frac{u+v}{2} \right\| \leq 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\|.$$

Si $\|x\| = 1$ ó $\|y\| = 1$ se tiene inmediatamente el resultado. Supongamos entonces que $\|x\| < 1$ y que $\|y\| < 1$. Se denotará en lo que sigue por $\operatorname{span}(x, y)$ al espacio generado por x e y y por:

$$S^1(\operatorname{span}(x, y)) := \{z \in \operatorname{span}(x, y) : \|z\| = 1\}.$$

Sean $z, w \in \operatorname{span}(x, y)$ tal que:

$$\left\| z - \frac{x+y}{2} \right\| = \mathrm{d}\left((S^1(\operatorname{span}(x, y)), \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \right) := \rho$$

$$w := \frac{x+y}{2} + \rho \left(\frac{a}{\|a\|} \right).$$

Donde $a := (x+y)/2 - z$. Nótese que $\|z\| = 1$ pues es un punto de $S^1(\operatorname{span}(x, y))$ y que w es el punto alineado con z y $(x+y)/2$ tal que:

$$\left\| z - \frac{x+y}{2} \right\| = \left\| w - \frac{x+y}{2} \right\|.$$

Es más, $\|w\| \leq 1$ pues, si no fuese así, $z \in S^1(\operatorname{span}(x, y))$ no sería el punto donde se alcanza la distancia mínima a $(x+y)/2$. Así hemos construido $z, w \in X$ con $\|z\| = 1, \|w\| \leq 1$ y $\|(z+w)/2\| = \|(x+y)/2\|$. De ahí que $\delta_3(\epsilon) = \delta_2(\epsilon)$.

Por último, veamos que $\delta_4(\epsilon) \leq \delta_3(\epsilon)$. Sean $x, y \in X$ tal que $\|x - y\| = \epsilon$ y tal que $\|x\| = 1, \|y\| \leq 1$. Análogamente a antes, buscamos $u, v \in X$ con $\|u\| = 1, \|v\| \leq 1$ con $\|u - v\| = \epsilon$ que cumplan que:

$$1 - \left\| \frac{u+v}{2} \right\| \leq 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\|.$$

Sean $u, v \in \operatorname{span}(x, y)$ tal que $\|u\| = \|v\| = 1, u - v = x - y$ y tal que v, y, u están todos contenidos en uno de los semiplanos determinados por la recta que une a x y a $-x$. Veamos que estos son los u, v buscados. Sean $\lambda \geq 1, \beta \geq 0$ tal que:

$$\frac{\lambda(x+y)}{2} = \beta u + (1 - \beta)x.$$

Usando que $y = x - u + v$ y sumando λu se llega a que:

$$\frac{\lambda(u+v)}{2} = (\beta + \lambda)u + (1 - \beta - \lambda)x.$$

Ahora bien se tiene:

$$\|\beta u + (1-\beta)x\| \le \|(\beta+\lambda)u + (1-\beta-\lambda)x\|.$$

Con el fin de demostrarlo, separaremos en dos casos, $\beta \le 1$ y $\beta > 1$.

Supongamos en primer lugar que $0 \le \beta \le 1$, entonces:

$$\begin{aligned}\|\beta u + (1-\beta)x\| &\le \beta\|x\| + (1-\beta)\|u\| = 1 = \\ &= (\beta+\lambda)\|x\| - (|1-\beta-\lambda|)\|u\| \le \\ &\le \|(\beta+\lambda)u + (1-\beta-\lambda)x\|.\end{aligned}$$

Puesto que $1 - \beta - \lambda < 0$ ya que $\lambda \ge 1$.

A continuación, supongamos que $\beta > 1$. Consideremos la función $g(t) := \|x + t(u-x)\|$. Con el objetivo de probar la desigualdad anterior, veamos que g es convexa. Sean $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in [0,1]$, así:

$$\begin{aligned}g(\lambda t_0 + (1-\lambda)t_1) &= \|x + (\lambda t_0 + (1-\lambda)t_1)(u-x)\| = \\ = \|\lambda(x + t_0(u-x)) &+ (1-\lambda)(x + t_1(u-x))\| \le \lambda g(t_0) + (1-\lambda)g(t_1).\end{aligned}$$

Luego g es convexa. Por otra parte, puesto que $\|x\| = \|u\| = 1$ y la bola unidad cerrada es convexa, el segmento que los une, $\{g(t) : t \in [0,1]\}$, está contenido en la bola unidad cerrada. Como para $t \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ se cumple que $g(t) > 1$, se tiene que g alcanza su mínimo en $\hat{t} \in (0,1)$. Gracias a que g es convexa, se deduce que g es creciente en $(\hat{t}, \infty)$, en particular en $[1, \infty)$. Como $\beta + \lambda > \beta > 1$, se tiene que $g(\beta) \le g(\beta + \lambda)$, es decir,

$$\|\beta u + (1-\beta)x\| \le \|(\beta+\lambda)u + (1-\beta-\lambda)x\|.$$

Como resultado, teniendo en cuenta que

$$\frac{\lambda(x+y)}{2} = \beta u + (1-\beta)x.$$

$$\frac{\lambda(u+v)}{2} = (\beta+\lambda)u + (1-\beta-\lambda)x.$$

Se concluye que

$$1 - \left\|\frac{u+v}{2}\right\| \le 1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|.$$

Consecuentemente, $\delta_3(\epsilon) = \delta_4(\epsilon)$ y, por tanto, que $\delta_1(\epsilon) = \delta_2(\epsilon) = \delta_3(\epsilon) = \delta_4(\epsilon)$. ∎

Cuando no haya confusión, denotaremos a $\delta_X(\epsilon)$ como $\delta(\epsilon)$. Si hay que distinguir entre módulos de convexidad de $(X, \|\cdot\|_1), (X, \|\cdot\|_2)$ escribiremos δ_1, δ_2 respectivamente.

Proposición 2.2. Un espacio X es uniformemente convexo si y solo si $\delta(\epsilon) > 0$ para todo $\epsilon > 0$.

Demostración.
$\boxed{\Rightarrow}$

Se sigue de la definición de uniformemente convexo, notando que, si $x, y \in X, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| > \epsilon$, entonces existe un δ (que depende de ϵ) tal que:

$$1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq 1 - \delta > 0.$$

De donde se deduce el resultado tomando ínfimo.
$\boxed{\Leftarrow}$
Es claro, ya que si $x, y \in X, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| > \epsilon$, entonces, gracias a que el módulo de convexidad es el ínfimo,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta(\epsilon) < 1.$$

Luego X uniformemente convexo. ∎

Como veremos en la siguiente proposición, el módulo de convexidad se puede definir equivalentemente en una bola arbitraria de centro p y radio R.

Proposición 2.3. La Observación 2.3 se puede ver equivalentemente como:
Para $x, y, p \in X$, $R > 0$ y $r \in [0, 2R]$,

$$\left.\begin{array}{r} \|x - p\| \leq R \\ \|y - p\| \leq R \\ \|x - y\| \geq r \end{array}\right\} \Rightarrow \|p - \frac{1}{2}(x + y)\| \leq \left(1 - \delta\left(\frac{r}{R}\right)\right) R.$$

Demostración. Se sigue de hacer una traslación y una homotecia, es decir, notando que $\frac{x-p}{R}, \frac{y-p}{R} \in B(0,1)$, $\frac{r}{R} := \epsilon \in (0, 2]$ y aplicando la observación 2.3. ∎

Ejemplo 2.3. Todo espacio de Hilbert H es uniformemente convexo. Calculemos su módulo de convexidad y veamos que $\delta(\epsilon) > 0 \ \forall \epsilon > 0$.

Sean $x, y \in H$ tal que $\|x\| = \|y\| = 1$ y sea $\epsilon \in (0, 2]$. Usando la identidad del paralelogramo se tiene:

$$\|x+y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x-y\|^2 =$$
$$= 4 - \|x-y\|^2 = 4\left(1 - \frac{\|x-y\|^2}{4}\right).$$

Así, si $\|x - y\| \geq \epsilon$,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 = 1 - \frac{\|x-y\|^2}{4} \leq 1 - \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Luego,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}}.$$

Se tiene entonces que:

$$1 - \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}} \leq 1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|.$$

Como se da la igualdad cuando $\|x - y\| = \epsilon$, concluimos que $\delta(\epsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}}$ y que por tanto H es uniformemente convexo.

A continuación, se presenta un resultado sobre el crecimiento y la continuidad del módulo de convexidad. Este teorema nos facilitará el estudio del módulo de convexidad, además de proporcionarnos la caracterización mediante los subespacios de dimensión dos buscada.

Proposición 2.4. Sea X un espacio de Banach con módulo de convexidad δ. Entonces δ es continua en $[0, 2)$ y creciente.

Demostración. Veamos que es creciente. Efectivamente, si se toma $\epsilon_1, \epsilon_2 \in [0, 2]$ con $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$, se tiene que

$$\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\| = 1, \|y\| = 1, \|x-y\| \geq \epsilon_2\right\} \subseteq$$
$$\subseteq \left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\| = 1, \|y\| = 1, \|x-y\| \geq \epsilon_1\right\}.$$

Tomando ínfimo se tiene que $\delta(\epsilon_1) \leq \delta(\epsilon_2)$.

Probemos ahora que es continua. Sean $u, v \in X$ linealmente independientes con $\|u\| = \|v\| = 1$, definimos el módulo direccional como:

$$\delta_{u,v}(\epsilon) = \text{ínf}\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : (x, y) \in A(u, v), \|x-y\| \geq \epsilon\right\}.$$

Donde $A(u,v) = \{(x,y) \in X \times X : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, x - y = \mu v, x + y = \lambda u\}$. Es decir, los x, y en el espacio generado por u, v con norma menor o igual que 1. Veamos que el módulo direccional es una función convexa. Para ello, basta ver que dados $\epsilon_1, \epsilon_2 \in [0,2]$, $t \in [0,1]$ se tiene:

$$\delta_{u,v}(t\epsilon_1 + (1-t)\epsilon_2) \leq t\delta_{u,v}(\epsilon_1) + (1-t)\delta_{u,v}(\epsilon_2)).$$

Probémoslo: sean $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in A(u,v)$ tal que $\|x_1 - y_1\| \geq \epsilon_1,\ \|x_2 - y_2\| \geq \epsilon_2$. Por definición de $A(u,v)$, existen $\lambda_1, \mu_1, \mu_2, \lambda_2$ de forma que:

$$x_1 - y_1 = \mu_1 v \qquad x_1 + y_1 = \lambda_1 u$$

$$x_2 - y_2 = \mu_2 v \qquad x_2 + y_2 = \lambda_2 u$$

Probaremos que

$$\left\{1 - \left\|\frac{tx_1 + (1-t)x_2 + ty_1 + (1-t)y_2}{2}\right\| :\right.$$

$$\left.(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in A(u,v), \|x_1 - y_1\| \geq \epsilon_1, \|x_2 - y_2\| \geq \epsilon_2\right\} \subseteq$$

$$\subseteq \left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : (x,y) \in A(u,v), \|x-y\| \geq t\epsilon_1 + (1-t)\epsilon_2\right\}.$$

Para ello, considérese ahora $x_3 := (tx_1 + (1-t)x_2),\ y_3 := (ty_1 + (1-t)y_2)$. Se tiene que $\|x_3\| \leq 1\|y_3\| \leq 1$. Además:

$$x_3 - y_3 = t(x_1 - y_1) + (1-t)(x_2 - y_2) = (t\mu_1 + (1-t)\mu_2)v.$$

$$x_3 + y_3 = t(x_1 + y_1) + (1-t)(x_2 + y_2) = (t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2)u.$$

Luego $(x_3, y_3) \in A(u,v)$. Es más,

$$\|x_3 - y_3\| = \|t(x_1 - y_1) + (1-t)(x_2 - y_2)\| = \|(t\mu_1 + (1-t)\mu_2)v\| =$$

$$= \|t(x_1 - y_1)\| + (1-t)\|(x_2 - y_2)\| \geq t\epsilon_1 + (1-t)\epsilon_2$$

Así,

$$1 - \left\|\frac{x_3 + y_3}{2}\right\| \in \left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : (x,y) \in A(u,v), \|x-y\| \geq (t\epsilon_1 + (1-t)\epsilon_2)\right\}.$$

Concluyendo que se da la contención. Notando ahora que:

$$1 - \left\|\frac{x_3 + y_3}{2}\right\| = 1 - \left\|\frac{tx_1 + ty_1}{2} + \frac{(1-t)x_2 + (1-t)y_2}{2}\right\| =$$

$$1-\left(t\left\|\frac{x_1+y_1}{2}\right\|+(1-t)\left\|\frac{x_2+y_2}{2}\right\|\right)=$$
$$=t\left(1-\left\|\frac{x_1+y_1}{2}\right\|\right)+(1-t)\left(1-\left\|\frac{x_2+y_2}{2}\right\|\right)$$

(Se da la igualdad ya que están alineados). Tomando ínfimo,

$$\delta_{u,v}(t\epsilon_1+(1-t)\epsilon_2)=$$
$$\inf_{x,y\in X}\left\{1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\| : (x,y)\in A(u,v), \|x-y\|\geq t\epsilon_1+(1-t)\epsilon_2\right\}\leq$$
$$\leq \inf_{x_1,y_1,x_2,y_2\in X}\left\{1-\left\|\frac{tx_1+(1-t)x_2+ty_1+(1-t)y_2}{2}\right\| :\right.$$
$$\left.(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A(u,v), \|x_1-y_1\|\geq\epsilon_1, \|x_2-y_2\|\geq\epsilon_2\right\}=$$
$$=\inf_{x_1,y_1\in X}\left\{t\left(1-\left\|\frac{x_1+y_1}{2}\right\|\right) : (x_1,y_1)\in A(u,v), \|x_1-y_1\|\geq\epsilon_1\right\}$$
$$+\inf_{x_2,y_2\in X}\left\{(1-t)\left(1-\left\|\frac{x_2+y_2}{2}\right\|\right) : (x_2,y_2)\in A(u,v), \|x_2-y_2\|\geq\epsilon_2\right\}=$$
$$=t\delta_{u,v}(\epsilon_1)+(1-t)\delta_{u,v}(\epsilon_2)).$$

Donde hemos usado que $\inf A+B=\inf A+\inf B$ si $A,B\subset\mathbb{R}$. Concluimos así que $\delta_{u,v}$ es convexa.

Veamos ahora que $\delta(\epsilon)=\inf\{\delta_{u,v}(\epsilon) : \|u\|=\|v\|=1, u\neq\pm v\}$.

$\boxed{\geq}$

Sean $x,y\in X$ con $\|x\|=\|y\|=1$, $\|x-y\|\geq\epsilon$. Probemos que existen $u,v\in S^1$ tal que:

$$1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\in\left\{1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\| : (x,y)\in A(u,v), \|x-y\|\geq\epsilon\right\}.$$

Y así tomando ínfimo en $x,y\in S^1$ y en u,v

$$\delta(\epsilon)\geq\inf\{\delta_{u,v}(\epsilon) : \|u\|=\|v\|=1, u\neq\pm v\}.$$

Busquemos entonces esos $u,v\in S^1$. Podemos suponer que $x\neq -y$ pues, si $x=-y$, para todo $\hat{x},\hat{y}\in S^1$, se tiene que:

$$1-\left\|\frac{\hat{x}+\hat{y}}{2}\right\|\leq 1=1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\|.$$

Por lo que:

$$\delta(\epsilon) = \text{ínf}\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\| = 1, \|y\| = 1, \|x-y\| \geq \epsilon\right\} =$$

$$\text{ínf}\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\| = 1, \|y\| = 1, \|x-y\| \geq \epsilon, x \neq -y\right\}.$$

Así, dados $x, y \in X$ con $\|x\| = \|y\| = 1, \|x-y\| \geq \epsilon, x \neq -y$, tomando $u = (x+y)/\|x+y\|$, $v = (x-y)/\|x-y\|$, se tiene que $x, y \in A(u,v)$, de donde se deduce el resultado.

$\boxed{\leq}$

Por definición de ínfimo, dado $\tau > 0$ existen $u, v \in S^1$ tal que:

$$\delta_{u,v}(\epsilon) < \text{ínf}\{\delta_{u,v}(\epsilon) : \|u\| = \|v\| = 1, u \neq \pm v\} + \tau.$$

Luego existen $x, y \in A(u,v)$ con $\|x\| = \|y\| = 1, \|x-y\| \geq \epsilon$ tales que:

$$1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < \text{ínf}\{\delta_{u,v}(\epsilon) : \|u\| = \|v\| = 1, u \neq \pm v\} + \tau.$$

Tomando ínfimo,

$$\delta(\epsilon) \leq \text{ínf}\{\delta_{u,v}(\epsilon) : \|u\| = \|v\| = 1, u \neq \pm v\} + \tau.$$

Como esto es válido para todo τ, se tiene que

$$\delta(\epsilon) \leq \text{ínf}\{\delta_{u,v}(\epsilon) : \|u\| = \|v\| = 1, u \neq \pm v\}.$$

En resumen, hemos probado que $\delta_{u,v}(\epsilon)$ es convexa y que:

$$\delta(\epsilon) = \text{ínf}\{\delta_{u,v}(\epsilon) : \|u\| = \|v\| = 1, u \neq \pm v\}.$$

Ahora bien, sea $a \in (0,2)$ y $\epsilon_1, \epsilon_2 \in [0,a]$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$. Gracias a que $\delta_{u,v}$ es convexa, se tiene que:

$$\frac{\delta_{u,v}(\epsilon_2) - \delta_{u,v}(\epsilon_1)}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \leq \frac{\delta_{u,v}(2) - \delta_{u,v}(a)}{2-a} \leq \frac{1}{2-a}.$$

Por lo tanto $\{\delta_{u,v}\}$ es una familia de funciones equicontinuas en el intervalo $[0,a]$. Notando ahora que $\delta(\epsilon) = \text{ínf}\{\delta_{u,v}(\epsilon) : \|u\| = \|v\| = 1, u \neq \pm v\}$, se tiene que para todo $\eta > 0$ existen $u, v \in X$ con $\|u\| = \|v\| = 1, u \neq \pm v$, tal que:

$$\delta_{u,v}(\epsilon_1) - \eta \leq \delta(\epsilon_1) \leq \delta_{u,v}(\epsilon_1).$$

Así:

$$\delta(\epsilon_2) \leq \delta_{u,v}(\epsilon_2) \leq \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2-a} + \delta_{u,v}(\epsilon_1) \leq$$
$$\leq \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2-a} + \delta(\epsilon_1) + \eta.$$

Para todo $\eta > 0$. Como $\delta(\epsilon)$ es creciente y $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$,

$$\left|\delta(\epsilon_2) - \delta(\epsilon_1)\right| = \delta(\epsilon_2) - \delta(\epsilon_1) \leq \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2-a} + \eta.$$

Tomando límite cuando $\eta \to 0$ se deduce que $\delta(\epsilon)$ es continua en $[0, 2)$. ▮

Observación 2.4. A pesar de que δ es el ínfimo de funciones convexas, $\delta(\epsilon) = \text{ínf}\{\delta_{u,v}(\epsilon) : \|u\| = \|v\| = 1, u \neq \pm v\}$, en general no se tiene que δ sea convexa.

Es interesante resaltar un resultado visto en la demostración anterior que nos ayudará a interpretar la idea geométrica del módulo de convexidad.

Teorema 2.1. ***Carácter 2-dimensional del módulo de convexidad***
Para $\epsilon \in [0, 2]$

$$\delta_X(\epsilon) = \inf_{\substack{E \subseteq X \\ dim E = 2}} \delta_E(\epsilon).$$

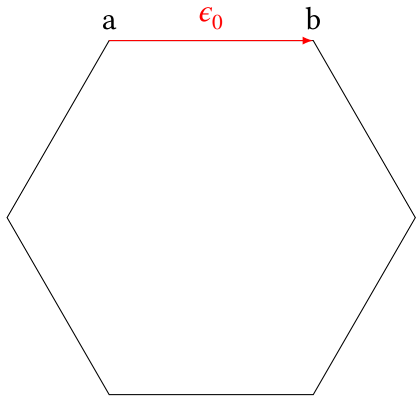
Demostración. Es inmediato observando la demostración de la Proposición 2.4, ya que el módulo de convexidad direccional $\delta_{u,v}$ es justamente el módulo de convexidad en el espacio de dimensión 2 generado por u, v. Como en la demostración anterior probamos que $\delta(\epsilon) = \text{ínf}\{\delta_{u,v}(\epsilon) : u, v \in X, \|u\| = \|v\| = 1, u \neq \pm v\}$, se tiene el resultado. ▮

Este teorema, junto con la Proposición 2.2 nos permite caracterizar los espacios uniformemente convexos mediante sus subespacios de dimensión dos. Terminamos la sección definiendo la característica de convexidad de un espacio de Banach X así como algunos cálculos de módulos y características de convexidad de X a partir de los subespacios de dimensión dos.

Definición 2.4. *La **característica (o coeficiente) de convexidad** de un espacio de Banach X es el número:*

$$\epsilon_0 = \epsilon_0(X) = \sup\{\epsilon \geq 0 : \delta(\epsilon) = 0\}.$$

Geométricamente, dados x, y puntos de la esfera ($\|x\| = \|y\| = 1$), ϵ_0 acota la longitud de los segmentos que se quedan contenidos en la frontera de la bola o bien arbitrariamente cerca de ella (es un ínfimo). A continuación, podemos ver un ejemplo, donde $\epsilon_0 = \|a - b\|$:



Proposición 2.5. El módulo de convexidad y la característica de convexidad son invariantes por isomorfismo isométrico.

Demostración. Se sigue del hecho de que si $A: X \to Y$ isomorfismo isométrico, entonces, dado $x \in X : \|x\| \leq 1$ existe un único $y \in Y : A(x) = y$, así , $\|y\| = \|A(x)\| = \|x\| \leq 1$ y, por tanto, se concluye que $\delta_X(\epsilon) = \delta_Y(\epsilon)$. ∎

En general, es difícil calcular el módulo de convexidad de un espacio de Banach explícitamente. Para ciertos espacios, aprovechando el Teorema 2.1, junto con el conocimiento de los espacios de dimensión 2, podemos sacar algunas conclusiones. Si denoto por $E \subseteq X$ un subespacio de dimensión 2, se sigue que:

$$\delta_X(\epsilon) \leq \delta_E(\epsilon) \text{ y } \epsilon_0(E) \leq \epsilon_0(X).$$

Veamos unos ejemplos:

Ejemplo 2.4. Consideremos $l_2^1 := (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1), l_2^\infty := (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ y $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ donde :

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|;$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\};$$

Como se vio en el ejemplo 2.1, l_2^1 tiene una bola cuadrada. Es fácil ver que l_2^∞ también. Así, ambas cumplen que $\delta(\epsilon) = 0$ para todo $\epsilon \in [0, 2]$ y $\epsilon_0(l_2^1) = \epsilon_0(l_2^1) = 2$.

Con esto, gracias a que los espacios $L^1[0, 1], L^\infty, c, c_0$ poseen subespacios 2 dimensionales isomorfos isométricamente a l_2^1 o l_2^∞, y sabiendo que el módulo de convexidad es un invariante isométrico, se deduce que el módulo de convexidad de estos espacios es idénticamente 0.

Veamos ahora una proposición que nos ayudará a estudiar el módulo de convexidad del Ejemplo 2.2.

Proposición 2.6. Un espacio de Banach X es estrictamente convexo si y solo si $\delta(2) = 1$.

Demostración.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supongamos que $\delta(2) = 1$. Sean $x, y \in X$ tal que $\|x\| = \|y\| = 1$ y $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1$. Veamos que esto pasa solo si $x = y$, por tanto:

$$\left.\begin{array}{r} \|x\| = 1 \\ \|y\| = 1 \\ \|x-y\| > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1.$$

Es decir, X es estrictamente convexo. Ahora bien, gracias a que $\|x\| = \|-y\| = \left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1$ se tiene:

$$\left\|\frac{x-y}{2}\right\| = \left\|\frac{x+(-y)}{2}\right\| \leq 1 - \delta(\|x-(-y)\|) = 1 - \delta(2) = 0$$

Donde hemos usado que $\delta(\|x-(-y)\|) \leq 1 - \left\|\frac{x+(-y)}{2}\right\|$ por ser δ el ínfimo. Concluimos así que $x = y$, finalizando la prueba.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que X es estrictamente convexo y sean $x, y \in X$ tal que $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x-y\| = 2$. Veamos que esto implica que $x = -y$. Por reducción al absurdo, si $x \neq -y$, como X es estrictamente convexo y $\|x\| = \|-y\| = 1$, $\|x-(-y)\| > 0$ se tiene que:

$$1 = \left\|\frac{x-y}{2}\right\| = \left\|\frac{x+(-y)}{2}\right\| < 1.$$

Lo cual es una contradicción, luego $x = -y$. Así,

$$1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1 \quad \forall x, y \in X : \|x\| = \|y\| = 1, \|x-y\| = 2.$$

Tomando ínfimo se deduce que $\delta(2) = 1$. ∎

Ejemplo 2.5. Sea $(c_0, \|\cdot\|_\mu)$ el espacio de Banach considerado en el Ejemplo 2.2. Ya hemos visto que es estrictamente convexo, luego por la proposición anterior, $\delta(2) = 1$. Se tiene también que cada subespacio E de dimensión 2 de c_0 es uniformemente convexo (pues, en dimensión finita, uniformemente convexo y estrictamente convexo son equivalentes). Por tanto, $\epsilon_0(E) = 0$, $\delta_E(\epsilon) > 0$ para $\epsilon > 0$. Es interesante destacar que esto no implica que $\delta_{c_0}(\epsilon) > 0$; es más, se tiene que $\delta_{c_0}(\epsilon) = 0 \ \forall \epsilon \in [0, 2)$. Esto se puede ver observando la demostración de que $(c_0, \|\cdot\|_\mu)$ no es uniformemente convexo del ejemplo 2.2, pues ahí tomamos puntos x, y con $\|x - y\| \geq \epsilon$ cuya norma del punto medio está arbitrariamente cerca de 1.

Este ejemplo en particular nos dice que δ_X puede ser discontinua en 2.

Como ya empezamos adelantando a lo largo de esta sección, es interesante resaltar cómo el módulo de convexidad nos da información sobre la convexidad de la bola. Informalmente, si X e Y son dos espacios de Banach y $\delta_X(\epsilon) \geq \delta_Y(\epsilon) \ \forall \epsilon \in [0, 2]$, entonces X es "más convexo" o "más redondo" que Y. Si $\epsilon_0(X) \leq \epsilon_0(Y)$ entonces Y es "más cuadrado" que X.

Definición 2.5. *Un espacio de Banach X se dice que es* ***uniformemente no cuadrado*** *si $\epsilon_0(X) < 2$.*

3 Estructura normal. Teorema de punto fijo de Kirk

En este capítulo, introducimos la estructura normal de los espacios de Banach y su aplicación a la Teoría Métrica del Punto Fijo a través del Teorema de Kirk. Veremos que esta propiedad es más general que la convexidad uniforme.

Para comenzar, definimos los elementos de Chebyshev, seguidos de algunas propiedades sobre ellos, que serán clave para el trabajo posterior con los espacios de Banach con estructura normal. Más adelante, introduciremos la noción de estructura normal uniforme y su relación con los espacios uniformemente convexos. Finalizaremos el capítulo enunciando y demostrando el Teorema del Punto fijo de Kirk.

3.1 Estructura normal

Definición 3.1. *Para cualquier $D, H \subset X$ se definen:*

$$\operatorname{dist}(x, D) := \inf_{y \in D} \|x - y\| \quad (\textit{con } x \in X) \quad \textbf{\textit{(distancia de x a D)}}$$

$$\operatorname{diam}(D) := \sup_{x,y \in D} \{\|x - y\|\} \quad \textbf{\textit{(diámetro de D)}}$$

$$r_u(D) := \sup_{y \in D} \{\|u - y\|\} \quad (\textit{con } u \in X) \quad \textbf{\textit{(radio de D relativo a u)}}$$

$$r_H(D) := \inf_{u \in H} \{r_u(D)\} \quad \textbf{\textit{(radio de Chebyshev de D relativo a H)}}$$

$$C_H(D) := \{u \in H : r_u(D) = r_H(D)\} \quad \textbf{\textit{(centro de Chebyshev de D relativo a H)}}$$

Observación 3.1. Cuando $H = D$ usaremos la notación $r(D)$ y $C(D)$ para estas últimas dos definiciones y los llamaremos radio y centro de Chebyshev respectivamente.

Proposición 3.1. Dado $D \subseteq X$, si denotamos por $B(a, r) = \{x \in X : \|x - a\| < r\}$, se tiene que:

1. $D \subseteq B(u, r_u(D))\ \forall u \in X$
2. Si $u \in C_H(D)$, $B(u, r_u(D))$ es la bola con centro en H que contiene a D con menor radio, es decir, si existen $v \in H, r > 0$ tal que $D \subseteq B(v, r)$, entonces $r_u(D) \leq r$
3. $r(D) \leq r_u(D) \leq diam(D)$

Demostración. 1. Sea $x \in D$, gracias a la definición de radio de D relativo a u se tiene,

$$\|x - u\| \leq \sup_{y \in D}\{\|u - y\|\} = r_u(D) \Rightarrow x \in B(u, r_u(D)).$$

2. Supongamos ahora que $u \in C_H(D)$. Por 1. sabemos que $D \subseteq B(u, r_u(D))$. Sean ahora $v \in H, r > 0$ tal que $D \subseteq B(v, r)$. Veamos que $r_u(D) \leq r$. Como $D \subseteq B(v, r)$, para todo $d \in D$, se cumple $\|d - v\| < r$, tomando supremo en D,

$$r_v(D) = \sup_{d \in D}\{\|v - d\|\} \leq r.$$

Ahora bien, $u \in C_H(D)$, luego, $r_u(D) = r_H(D) = \text{ínf}_{u \in H}\{r_u(D)\}$,

$$r \geq r_v(D) \geq \inf_{u \in H}\{r_u(D)\} = r_u(D).$$

de donde se concluye 2.
3. Es inmediato de la definición, ya que:

$$r(D) = \text{ínf}_{u \in D}\{r_u(D)\} \leq r_u(D) = \sup_{y \in D}\{\|u - y\|\} \leq \sup_{y,u \in D}\{\|u - y\|\} = \text{diam}(D).$$

Definición 3.2. *Dado $D \subseteq X$, un punto $u \in D$ se dice* ***diametral*** *si*

$$r_u(D) = \text{diam}(D).$$

En caso contrario, se dice que u es no diametral.

Observación 3.2. Existen convexos cerrados y acotados con solo puntos diametrales. A los conjuntos con solo puntos diametrales se les llama **conjuntos diametrales** y poseen una "anormalidad" geométrica.

Proposición 3.2. S es un conjunto diametral si y solo si $r(S) = \text{diam}(S)$.

Demostración. Supongamos que S es diametral, entonces $r_u(S) = \text{diam}(S)$ para todo $u \in S$. Tomando ínfimo en u, se tiene que $r(S) := \text{ínf}_{u \in S} r_u(S) = \text{diam}(S)$. Recíprocamente, si $r(S) = \text{diam}(S)$, se tiene, fijado $u \in S$:

$$\text{diam}(S) = r(S) \leq r_u(S) \leq \text{diam}(S).$$

de donde se deduce que $r_u(S) = \text{diam}(S)$ para todo $u \in S$. ▮

Definición 3.3. *Un conjunto convexo $K \subseteq X$ se dice que posee* ***estructura normal*** *si cada S convexo acotado con $S \subseteq K$ y $\text{diam}(S) > 0$ contiene un punto no diametral, es decir,*

$$\forall S \subseteq K \, \textit{convexo acotado con} \; \text{diam}(S) > 0 \; \exists u \in S : \; r_u(S) < \text{diam}(S).$$

Un espacio de Banach X se dice que tiene estructura normal si todo subconjunto convexo de X posee estructura normal.

Proposición 3.3. Sea $K \subseteq X$ convexo, son equivalentes:

1. K posee estructura normal
2. K no contiene subconjuntos S convexos acotados diametrales (excepto conjuntos unitarios), es decir:

$$\text{diam}(S) > 0 \implies r(S) < \text{diam}(S)$$

Demostración. Es inmediata a partir de la definición y de la proposición 3.2. ▮

Definición 3.4. *Un espacio de Banach X se dice que tiene* ***estructura normal débil*** *si todo débil compacto convexo K posee estructura normal.*

Gracias a la caracterización de espacios reflexivos vistas en el Capítulo 1, se pueden relacionar la estructura normal débil y la estructura normal, como será visto en la siguiente Proposición. De esta forma, bajo la condición de que X sea reflexivo, podemos trabajar a conveniencia con una de las dos estructuras. Esto nos será de especial utilidad en la demostración del Teorema de punto fijo de Kirk, así como en el resultado principal que será presentado en el Capítulo 4.

Proposición 3.4. Si X es un espacio de Banach reflexivo son equivalentes:

1. X posee estructura normal
2. X posee estructura normal débil

Demostración. Supongamos que X posee estructura normal, sea K un débil compacto convexo, veamos que K tiene estructura normal. Se tiene que K en particular es acotado y convexo, como X posee estructura normal por hipótesis, K posee estructura normal. Concluimos que X posee estructura normal débil.

Recíprocamente, supongamos que X posee estructura normal débil. Sea K un convexo acotado. Veamos que posee estructura normal. Al ser acotado, existe $R > 0$ tal que $K \subseteq \overline{B}(0, R)$. Como X es reflexivo, se tiene que $\overline{B}(0, R)$ es débil compacto, de donde se deduce que $\overline{B}(0, R)$ tiene estructura normal. Así, todo $H \subseteq K \subseteq \overline{B}(0, R)$ convexo, contiene un punto no diametral (pues es un convexo en $\overline{B}(0, R)$, que tiene estructura normal). Se concluye entonces que K posee estructura normal, y, por ello, X también. ▎

Acabamos la sección dando una caracterización para espacios de Banach con estructura normal. Para ello, es de interés definir las siguientes sucesiones.

Definición 3.5. *Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio de Banach X se dice* ***diametral*** *si no es eventualmente constante y si*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(x_{n+1}, \operatorname{conv}\{x_1, x_2, \dots x_n\}) = \operatorname{diam}(\{x_1, x_2, \dots\}).$$

Proposición 3.5. Toda subsucesión de una sucesión diametral es diametral.

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión diametral y sea $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1} \subseteq \{x_n\}$ una subsucesión. Veamos que es diametral. Fijemos $x_{n_l} \in \{x_{n_k}\}$ con $l \geq 2$ y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \in \{x_n\}$ y $x_m = x_{n_l}$. Denotando por $S_l = \{x_1, \dots, x_{n_{l-1}}\}, S_m = \{x_1, \dots, x_{m-1}\}$ y notando que $S_l \subseteq S_m$, se tiene:

$$\operatorname{dist}(x_m, \operatorname{conv}(S_m)) \leq \operatorname{dist}(x_{n_l}, \operatorname{conv}(S_l)) \leq \operatorname{diam}(S_l \cup \{x_{n_l}\}) \leq \operatorname{diam}(S_m \cup \{x_m\}).$$

Tomando límite cuando $l \to \infty$ (y por tanto $m \to \infty$), teniendo en cuenta que $\{x_n\}$ es diametral, se deduce que:

$$\lim_{l\to\infty} \operatorname{dist}(x_{n_l}, \operatorname{conv}\{xn_{n_1}, \dots x_{n_{l-1}}\}) = \operatorname{diam}(\{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots\}).$$

con lo que concluimos que $\{x_{n_k}\}$ es diametral. ▎

Teorema 3.1. *Un conjunto convexo acotado K de X espacio de Banach posee estructura normal si y solo si no contiene una sucesión diametral.*

Demostración. Veamos primero que si K posee estructura normal implica que K no contiene una sucesión diametral. Por contrarrecíproco:
Sea $\{x_n\}$ una sucesión diametral, afirmamos que $S := \operatorname{conv}(\{x_1, x_2, \dots\})$ es diametral. Efectivamente, sea $x \in S$, demostremos que x es diametral.

Como $x \in S := \operatorname{conv}(\{x_1, x_2, \dots\}) = \bigcup_{n=1}^{n=\infty} \operatorname{conv}(\{x_1, \dots, x_n\})$ (y se tiene que si $n_1 \leq n_2$, entonces $\operatorname{conv}(\{x_1, \dots, x_{n_1}\}) \subseteq \operatorname{conv}(\{x_1, \dots, x_{n_2}\})$), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \operatorname{conv}(\{x_1, \dots, x_n\})$ para todo $n \geq n_0$. Por tanto, para $n \geq n_0$:

$$\operatorname{dist}(x_{n+1}, \operatorname{conv}(\{x_1, \dots, x_n\})) = \operatorname{ínf}\{\|x_{n+1} - y\| : y \in \operatorname{conv}(\{x_1, \dots, x_n\})\} \leq$$

$$\leq \|x_{n+1} - x\| \leq \sup_{y \in S} \|y - x\| = r_x(S) \leq \operatorname{diam}(S).$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$, teniendo en cuenta que $\{x_n\}$ es diametral,

$$\operatorname{diam}(S) = \operatorname{diam}(\{x_1, x_2, \dots\}) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \operatorname{dist}(x_{n+1}, \operatorname{conv}\{x_1, x_2, \dots x_n\}) \leq$$

$$\leq r_x(S) \leq \operatorname{diam}(S).$$

De donde se deduce que $r_x(S) = \operatorname{diam}(S)$ para todo $x \in S$, luego S es diametral y por tanto K no posee estructura normal.

Recíprocamente veamos que si K no contiene una sucesión diametral entonces K posee estructura normal. Demostramos otra vez por contrarrecíproco. Supongamos que existe $S \subseteq K$ diametral no trivial (i.e. K no posee estructura normal). Sea $d := \operatorname{diam}(S)$ y $\epsilon \in (0, d)$. Construyamos una sucesión diametral. Tomando $x_1 \in S$, gracias a que S es diametral, creamos inductivamente una sucesión $\{x_n\} \subseteq S$ que satisface:

$$\|y_{n-1} - x_{n+1}\| > d - \frac{\epsilon}{n^2}, \quad \text{donde } \; y_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} \in S.$$

Efectivamente, al ser S diametral, $r_{x_1}(S) = \operatorname{diam}(S)$, así, por propiedades del supremo, para todo ϵ existe $x_2 \in S$ tal que $r_{x_1}(S) \geq \|x_2 - x_1\| > r_{x_1}(S) - \epsilon = d - \epsilon$. Tomando ϵ adecuado construyo x_2. Razonando análogamente para $y_1 := 1/2(x_1 + x_2)$ en vez de para x_1, obtengo x_3 satisfaciendo $\|y_1 - x_3\| > d - \frac{\epsilon}{4}$. Es fácil ver que inductivamente se tiene lo buscado.

Sea ahora $x \in \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_n\}$, con $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$ y $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$. (Por pertenecer a la envolvente convexa). Si denotamos por $\lambda = \lambda_p = \operatorname{máx}\{x_1, \dots, x_n\}$, se tiene:

$$y_{n-1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{n} + \frac{x}{n\lambda} - \frac{x}{n\lambda} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{n} + \frac{x}{n\lambda} - \frac{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j}{n\lambda} = \frac{x}{n\lambda} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{\lambda_j}{n\lambda}\right) x_i.$$

Cumpliendo

$$\frac{1}{n\lambda} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{\lambda_j}{n\lambda}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} + \frac{1}{n\lambda} - \frac{1}{n\lambda} = 1$$

$$\frac{1}{n} - \frac{\lambda_j}{n\lambda} \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0.$$

Así

$$d - \frac{\epsilon}{n^2} < \|y_{n-1} - x_{n+1}\| =$$

$$= \left\| \frac{x}{n\lambda} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{\lambda_j}{n\lambda}\right) x_j - \left(\frac{1}{n\lambda} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{\lambda_j}{n\lambda}\right)\right) x_{n+1} \right\| =$$

$$= \left\| \frac{1}{n\lambda}(x - x_{n+1}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{\lambda_j}{n\lambda}\right)(x_j - x_{n+1}) \right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n\lambda}\|x - x_{n+1}\| + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{\lambda_j}{n\lambda}\right)\|x_j - x_{n+1}\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n\lambda}\|x - x_{n+1}\| + \left(1 - \frac{1}{n\lambda}\right) d.$$

Luego,

$$\|x - x_{n+1}\| \geq \left(\frac{d}{n\lambda} - \frac{\epsilon}{n^2}\right) n\lambda = d - \frac{\epsilon\lambda}{n} \geq d - \frac{\epsilon}{n}.$$

Tomando ínfimo en $x \in \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_n\}$

$$d - \frac{\epsilon}{n} \leq \operatorname{dist}(x_{n+1}, \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_n\}) =$$

$$= \inf\{\|x_{n+1} - x\| : x \in \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_n\}\} \leq$$

$$\leq \operatorname{diam}(\{x_1, x_2, \dots\}) \leq \operatorname{diam}(S) = d.$$

Donde hemos usado que $\{x_n\} \subseteq S$. Tomando límite cuando $n \to \infty$,

$$d \leq \lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(x_{n+1}, \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_n\}) \leq \operatorname{diam}(\{x_1, x_2, \dots\}) \leq \operatorname{diam}(S) = d.$$

Concluimos, por tanto, que $\{x_n\}$ es una sucesión diametral. ∎

Corolario 3.1. Todo K convexo compacto tiene estructura normal.

Demostración. Como K es compacto, se tiene que K es acotado. Apliquemos el teorema anterior para ver que K posee estructura normal, viendo que no contiene ninguna sucesión diametral. Sea $\{x_n\} \subseteq K$ una sucesión no eventualmente constante. Como K es compacto existe $\{x_{n_k}\} \subseteq K$ subsucesión convergente (en particular de Cauchy). Se tiene entonces que:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} : \|x_{n_{k_1}} - x_{n_{k_2}}\| \leq \epsilon \quad \forall n_{k_2}, n_{k_2} \geq M$$

en particular,

$$\operatorname{dist}(x_{n_{k+1}}, \operatorname{conv}(\{x_1, \dots x_{n_k}\})) \leq \epsilon.$$

Luego

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{dist}(x_{n_{k+1}}, \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_{n_k})\} = 0.$$

Observando ahora que $\operatorname{diam}(\{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots\}) \neq 0$, pues $\{x_n\}$ no es eventualmente constante, se deduce que $\{x_{n_k}\}$ no es diametral. Usando la proposición 3.5 concluimos que $\{x_n\}$ no es diametral. ∎

3.2 Estructura normal uniforme

Con el propósito de tener más herramientas para futuras secciones y capítulos, es conveniente introducir unas nociones de estructura normal más fuerte: la estructura normal uniforme.

Definición 3.6. *Un conjunto convexo acotado no vacío $K \subseteq X$ se dice que tiene **estructura normal uniforme** si existe una constante $k \in (0, 1)$ tal que:*

$$r(D) \leq k(\operatorname{diam}(D)) \quad \forall D \subseteq K \quad \textit{convexo cerrado.}$$

El espacio X se dice que tiene estructura normal uniforme si cada subconjunto convexo acotado no vacío cumple esta propiedad.

Proposición 3.6. Todo espacio con estructura normal uniforme posee estructura normal.

Demostración. Consecuencia inmediata de la Proposición 3.3.

Observación 3.3. La estructura normal uniforme es más fuerte que la estructura normal. Una de sus diferencias es que no todo espacio con estructura normal es reflexivo, sin embargo, todo espacio con estructura normal uniforme lo es (gracias al siguiente teorema).

Teorema 3.2. *Si un espacio de Banach X posee estructura normal uniforme, entonces es reflexivo.*

Demostración. Véase [5, pág 45-46].

Por último,se estudia la relación entre la convexidad uniforme y la estructura normal. Se tiene que todo espacio uniformemente convexo posee estructura normal.

Teorema 3.3. *Si X es uniformemente convexo entonces X posee estructura normal uniforme.*

Demostración. Recuérdese que X posee estructura normal uniforme si todo $K \subseteq X$ convexo acotado posee estructura normal uniforme, es decir, existe $k \in (0, 1)$ tal que $r(D) \leq k diam(D) \quad \forall D \subseteq K$convexo cerrado.

Sean entonces $K \subseteq X$ convexo acotado y $D \subseteq K$ convexo cerrado. Denotemos por $d := diam(D) > 0$ y sean $x, y \in D$ tal que $\|x - y\| \geq \frac{d}{2}$ (existen por ser d el diámetro). Sea ahora $z \in D$ arbitrario, si llamamos $m = \frac{x+y}{2} \in D$ (por ser convexo), aplicando la proposición 2.3, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \|x - z\| \leq d \\ \|y - z\| \leq d \\ \|x - y\| \geq \frac{d}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \|z - m\| \leq \left(1 - \delta\left(\frac{1}{2}\right)\right) d.$$

Tomando supremo en $z \in D$:

$$r_m(D) \leq \left(1 - \delta\left(\frac{1}{2}\right)\right) d.$$

De donde se deduce que X posee estructura normal uniforme.

Existen resultados más finos que, a partir del estudio del módulo de convexidad, nos dan resultados sobre la estructura normal de nuestro espacio. Se tiene que, si $\epsilon_0(X) < 1$, entonces X posee estructura normal uniforme. Por no alargar en exceso el trabajo, se ha incluido un apéndice dónde se demuestra el resultado anterior. Además, se complementan con un ejemplo sobre los espacios de Bynum, una clase de espacios que cumplen que $\epsilon_0(X) = 1$ pero no poseen estructura normal, demostrando consecuentemente que la condición anterior es fina.

3.3 Teorema de punto fijo de Kirk

Acabaremos el capítulo dando una aplicación a la estructura normal de un espacio de Banach. Es bien conocido que dado (X, d) un espacio métrico completo y $T : (X, d) \to (X, d)$ una aplicación contractiva, se tiene que T posee un único punto fijo (Teorema del punto fijo de Banach). ¿Qué pasa si intentamos exigirle menos a nuestra aplicación T? Como se adelantaba durante este capítulo, en esta sección, bajo ciertas condiciones, veremos que podemos asegurar la existencia de punto fijo en un espacio de Banach con ayuda de la estructura normal.

Definición 3.7. *Un subconjunto cerrado, convexo y no vacío D de un conjunto K se dice* ***conjunto minimal invariante*** *para una aplicación $T : K \to K$ si $T(D) \subseteq D$ y si D no tiene ningún subconjunto propio cerrado convexo y no vacío que sea T-invariante.*

Lema 3.1 (Lema de Zorn). Sea A un conjunto y $\preceq$ un orden sobre A. Si toda cadena C de $(A, \preceq)$ posee una cota superior, entonces existen elementos maximales en $(A, \preceq)$. (Un elemento $\alpha \in A$ es maximal si para todo $\beta \in A$ con $\alpha \preceq \beta$ se tiene que $\beta = \alpha$).

Teorema 3.4. *Sea K un débil compacto convexo no vacío de un espacio de Banach X. Entonces, para cualquier aplicación $T : K \to K$, existe un subconjunto de K convexo y cerrado que es minimal T-invariante.*

Demostración. Trataremos de aplicar el Lema de Zorn. Para ello, consideremos la famila $\mathcal{M}$ de subconjuntos cerrados convexos no vacíos de K que son T-invariantes (nótese que al ser cerrados y convexos en particular son débiles cerrados dentro de K débil compacto luego son débiles compactos). Claramente, $K \in \mathcal{M}$ luego $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Considérese ahora, dados $K_1, K_2 \in \mathcal{M}$, el siguiente orden:

$$K_1 \preceq K_2 \text{ si } K_2 \subseteq K_1.$$

Veamos que toda cadena bien ordenada C en $(\mathcal{M}, \preceq)$ tiene cota superior. Sea C una cadena bien ordenada. Gracias a que todo $K \in C$ es débil compacto y que toda intersección finita de ellos es no vacía (pues está bien ordenada), se tiene que $\bigcap_{K\in C} K \neq \emptyset$. Así:

$$\bigcap_{K\in C} K \subseteq \hat{K}\ \forall \hat{K} \in C.$$

De donde se deduce que C posee una cota superior respecto del orden $\preceq$. Aplicando el Lema de Zorn, existe un conjunto $D \in \mathcal{M}$ que es maximal respecto de $\preceq$, es decir, minimal T-invariante. ∎

Nótese que si $T: K \to K$ tiene un punto fijo x, entonces claramente $\{x\}$ es cerrado, convexo y minimal T-invariante. Así, para ver la existencia de puntos fijos de T en K, basta estudiarlo en el conjunto minimal T-invariante.

Lema 3.2. Si K es un conjunto convexo cerrado no vacío minimal T-invariante, entonces:

$$K = \overline{\text{conv}} T(K).$$

Demostración. Se tiene que, por ser K T-invariante, $T(K) \subseteq K$, luego, $\overline{\text{conv}} T(K) \subseteq \overline{\text{conv}} K = K$. Como K es minimal T-invariante, basta ver que $\overline{\text{conv}} T(K)$ es T-invariante para probar la igualdad. Ahora bien, aplicando T a lo anterior,

$$T(\overline{\text{conv}} T(K)) \subseteq T(K) \subset \overline{\text{conv}} T(K).$$

De donde se deduce que $\overline{\text{conv}} T(K)$ es T-invariante. ∎

Estamos ya en condiciones de demostrar el teorema buscado en esta sección, el Teorema de punto fijo de Kirk.

Teorema 3.5 (Teorema de punto fijo de Kirk). *Sea K un subconjunto débil compacto convexo no vacío de un espacio de Banach, y supongamos que K posee estructura normal. Entonces toda aplicación $T: K \to K$ tiene un punto fijo.*

Demostración. Como ya hemos mencionado anteriormente, podemos trabajar con el subconjunto minimal T invariante de K, que sigue siendo débil compacto por ser débil cerrado dentro de K. Abusemos de notación y denotemos por K al subconjunto minimal T-invariante. Veamos que consiste de un solo punto, y que por tanto es un punto fijo. Por el Lema 3.2 se tiene:

$$\overline{\text{conv}} T(K) = K.$$

Nótese que gracias a que K es débil compacto se tiene que $C(K) \neq \emptyset$. Efectivamente, esto es porque puedo escribir:

$$C(K) = \bigcap_{\epsilon>0} C_\epsilon(K).$$

Donde

$$C_\epsilon(K) := \{u \in K \,:\, r_u(K) \leq r(K) + \epsilon\} = \bigcap_{x\in K} \overline{B}(x; R(K) + \epsilon) \cap K.$$

Ahora bien, $C_\epsilon(K)$ son cerrados y convexos no vacíos de K (en particular débiles cerrados por la Teorema 1.4). Como K es débil compacto y $C_\epsilon(K) \subseteq K$, se tiene que $C_\epsilon(K)$ son débiles compactos. Por tanto, $C(K) \neq \emptyset$.

Sea entonces $u \in C(K)$, es decir, $r_u(K) = r(K)$. Como T es no expansiva,

$$\|Tu - Tv\| \leq \|u - v\| \leq r(K) \; \forall v \in K.$$

Luego,

$$T(K) \subseteq B(Tu, r(K)).$$

Por tanto,

$$K = \overline{\text{conv}} T(K) \subseteq B(Tu, r(K)).$$

Lo cual implica, por la Proposición 3.1, que $r_{Tu}(K) = r(K)$, y, por tanto, $Tu \in C(K)$. Esto prueba que $T(C(K)) \subseteq C(K)$ ($C(K)$ es T-invariante). Por otro lado, $C(K) \subseteq K$, con K minimal T-invariante, luego $C(K) = K$. Ahora bien, como $C(K)$ es un conjunto diametral y K posee estructura normal, esto solo puede pasar si diam$(K) = diam(C(K)) = 0$ (pues si no K no tendría estructura normal). De aquí se deduce que K es un solo punto, el punto fijo de T(es fijo porque K es T-invariante). ∎

Con este resultado, se puede ver una de las aplicaciones de la estructura normal. Equivalentemente, gracias a la Proposición 3.4, si el espacio de Banach es reflexivo (en particular para los espacios de Banach con estructura normal uniforme), el resultado anterior se puede enunciar para un convexo acotado con estructura normal (este fue el resultado original dado por Kirk).

4 Longitud de las esferas de dimensión 2 y estructura normal

A lo largo de este trabajo, hemos dotado de distintas estructuras a los espacios de Banach, centrándonos en el carácter geométrico de las mismas. En el capítulo dos, se caracterizaron los espacios uniformemente convexos a través de los subespacios de dimensión dos. Como ya vimos, todos los espacios uniformemente convexos poseen estructura normal uniforme. Por ello, cabe plantearse si es posible dar una condición suficiente, sobre los subespacios de dimensión dos de un espacio de Banach, para garantizar que tenga estructura normal.

En este capítulo, tratamos de buscar esta condición suficiente para que un espacio de Banach X posea estructura normal. Es interesante destacar que el resultado buscado tendrá una dificultad mayor que la caracterización de los espacios uniformemente convexos mediante sus subespacios dimensión dos. Por ello, habrá algunos resultados que no se demostrarán y que se dejarán referenciados para el lector interesado.

Con el objetivo de dar este teorema, serán necesarias ciertas nociones sobre curvas en espacios normados de dimensión dos. Comenzamos recordando algunos de estos resultados y definiciones.

4.1 Curvas en espacios normados

En esta primera sección, recordaremos la definición de curva y de longitud de curva, así como algunas propiedades básicas. En lo que sigue denotaremos por X a un espacio normado.

Definición 4.1. *Una curva en un espacio normado X es una aplicación continua*

$\alpha : [a, b] \to X$.

Nótese que la curva puede intersecarse consigo misma o repetirse. Esto permite que existan $t_1, t_2 \in [a, b]$ con $t_1 \neq t_2$ y $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$.

Definición 4.2. *Si denotamos por Δ a la partición $a = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n = b$ de $[a, b]$ y*

$$l(\alpha, \Delta) = \sum_{k=1}^{n} \|\alpha(a_k) - \alpha(a_{k-1})\|.$$

*Se define **la longitud** $l(\alpha)$ como:*

$$l(\alpha) = l_a^b(\alpha) = \sup_{\Delta} l(\alpha, \Delta).$$

Definición 4.3. *Una curva α se dice **rectificable** si $l(\alpha)$ es finito.*

Teorema 4.1. *Sea P una partición de $[a, b]$ y $\|P\| = \text{máx}_{1 \leq k \leq n}\{|a_i - a_{i-1}|\}$.*

Si C es una curva rectificable, entonces, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $\|P\| < \delta$, entonces $l(C) - l(C, P) < \epsilon$. Es más, si P_k es una sucesión de particiones de $[a, b]$ con $\|P_k\| \to 0$, entonces $\text{lím}_{k \to \infty} l(C, P_k) = l(C)$.

Demostración. Véase [1, pág 19-20]. ▮

Proposición 4.1. Sea $\alpha(t), a \leq t \leq b$ una curva rectificable. Se tiene que el arco de longitud $l_a^t(\alpha)$ es una función continua de t.

Demostración. Se puede consultar en [1, pag 21]. ▮

Gracias a la continuidad del arco de longitud, podemos definir el parámetro natural de la curva.

Definición 4.4. *La **parametrización natural** de una curva $\alpha : [a, b] \to X$ es la aplicación continua:*

$$g_\alpha : [0, l(\alpha)] \to X$$

Donde $g_\alpha(s)$ representa el punto $\alpha(t)$ para el cual $s = l_a^t(\alpha)$.

El concepto de curva dado anteriormente depende de la parametrización. Tratamos de dar una definición de curva que mantenga propiedades que nos interesan, como la longitud de curva o el punto inicial y final. Aunque parece natural definir una curva como el conjunto de los puntos imágenes de su parametrización, se puede ver que dos parametrizaciones con el mismo conjunto imagen no tienen por qué conservar longitudes de curvas. La definición de curva que nos interesará sera la siguiente:

Definición 4.5. *Diremos que dos curvas rectificables son equivalentes si tienen la misma parametrización natural. Así, definimos una* ***curva rectificable*** *$[c]$ como la clase de equivalencias de las parametrizaciones de c.*

Esta definición de curva cumple que si $[\alpha] = [\beta]$ entonces su longitud de curva, puntos inicial y final y su parametrización natural coinciden. A partir de ahora si no hay confusión omitiremos la clase y escribiremos solamente c.

Definición 4.6. *Dada una curva c, un* ***arco de*** *c es una curva parametrizada por una restricción de la parametrización de c. Un arco de un arco se llama* ***subarco****.*

Definición 4.7. *Una curva c se dice* ***simple*** *si g_c es inyectiva. Una curva $c : [a, b] \to X$ se dice* ***cerrada*** *si $c(a) = c(b)$. Una curva cerrada es simple si es inyectiva en $[a, b)$.*

Definición 4.8. *Una curva cerrada simple Δ se dice* ***simétrica*** *si $-\Delta = \Delta$, es decir, $0 + (-1_X)\Delta = \Delta$. Como la curva es simple, esto es equivalente a que el conjunto Δ es simétrico respecto del 0 (si $x \in \Delta$ entonces $-x \in \Delta$).*

Observación 4.1. Nótese que si Δ es una curva cerrada simple simétrica entonces $0 \notin \Delta$.

Proposición 4.2. Sea c una curva simple en $X - \{0\}$ con puntos inicial y final opuestos. Entonces existe un arco c' de c tal que la yuxtaposición de c' y $-c'$ es una curva cerrada simple simétrica.

Recíprocamente, si Δ es una curva cerrada simple simétrica en X y $p \in \Delta$, entonces Δ es la yuxtaposición del arco (simple) c de Δ,que va de p a $-p$, con el arco $-c$.

Demostración. Sea c una curva simple con puntos extremos opuestos y $g_c : [a, b] \to X$ su parametrización natural. Buscamos un arco de c que no contenga puntos opuestos, es decir, $g_c|_{[\sigma_1,\sigma_2]} = g_{c'} : [\sigma_1, \sigma_2] \to X$ tal que $g_{c'}(t_1) + g_{c'}(t_2) \neq 0\ \forall t_1, t_2 \in (\sigma_1, \sigma_2)$. Consideramos el conjunto, $K := \{s_2 - s_1 : 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq l(c), g_c(s_1) + g_c(s_2) = 0\}$ de puntos no negativos. Se tiene que es compacto y no vacío (pues los puntos extremos son opuestos y por tanto $l(c) \in K$). Veamos que K está separado del 0. Sea $s_2 - s_1 \in K$, se tiene:

$$s_2 - s_1 = l_a^{s_2}(c) - l_a^{s_1}(c) = l_{s_1}^{s_2} \geq \|g_c(s_2) - g_c(s_1)\| = 2\|g_c(s_1)\| \geq 2d(0, c) > 0.$$

Luego K está separado del cero. Por tanto, se tiene que existe un punto de K que alcanza el mínimo, llamémoslo $s_1 = \sigma_1 s_2 = \sigma_2$, cumpliendo $\sigma_2 - \sigma_1 > 0$. Así construido, el arco $g_c|_{[\sigma_1,\sigma_2]}$ cumple lo buscado. Efectivamente, cualquier par de puntos $t_1, t_2 \in [\sigma_1, \sigma_2]$ (supongamos $t_1 \leq t_2$ sin pérdida de generalidad) cumple que $t_2 - t_1 < \sigma_2 - \sigma_1$. Como $\sigma_2 - \sigma_1$ es el mínimo, $t_2 - t_1 \notin K$, y por tanto $g_c(t_2) \neq -g_c(t_1)$ para todo $t_1, t_2 \in [\sigma_1, \sigma_2]$.

El recíproco es fácil de ver teniendo en cuenta que Δ es simétrico, y que la curva $-c$ es la simétrica respecto de 0 de c.

Es interesante resaltar para la siguiente sección que, si X es un espacio normado de dimensión 2 y denotamos la esfera unidad por $S(X) : = \{x \in X : \|x\| = 1\}$, se tiene que $S(X)$ es una curva cerrada simple y simétrica única (salvo orientación).

4.2 La bola unidad en espacios normados de dimensión 2

En esta parte se busca dar resultados sobre la longitud de las curvas que determinan la esfera unidad de dimensión 2 (únicas salvo orientación). Para ello, se necesitarán algunos lemas técnicos, así como resultados bien conocidos.

Durante toda la sección X denotará un espacio normado de dimensión 2. A un cuerpo convexo en X lo llamaremos **disco convexo**. Si K es un disco convexo en X, se tiene que ∂K es el rango de exactamente dos curvas simples (rectificables), iguales salvo orientación. Denotaremos por $\partial_+ K$ a la curva con sentido antihorario y por ∂_K al sentido horario. Claramente ambas curvas tienen la misma longitud, llamada la **circunferencia de** K, denotada por $\gamma_X(K)$ o simplemente $\gamma(K)$. Cuando se diga un arco de ∂K nos referiremos a un arco de $\partial_+ K$ o de ∂_K. Enunciemos algún resultado que nos será de utilidad sobre los discos convexos. Las demostraciones de los mismos se pueden consultar en [7].

Proposición 4.3. Sean K_1, K_2 discos convexos distintos en X y $h \in X$ tal que $K_2 = (1-\lambda)h + \lambda K_1$ para algún $\lambda > 0$. Supongamos además que $K_1^\circ \cap K_2^\circ \neq \emptyset$ y $h \notin K_1$. Sean R_1, R_2 las líneas soporte distintas desde h al disco convexo $K_1 \cap K_2$. Entonces, $\partial K_1 \cap \partial K_2 = (R_1 \cap K_1 \cap K_2) \cup (R_2 \cap K_1 \cap K_2)$.

Teorema 4.2. *Si K, K' son discos convexos en X y $K' \subseteq K$, entonces $\gamma(K') \leq \gamma(K)$.*

Una vez vistos estos resultados, estamos en condiciones de demostrar los teoremas buscados. La idea de esta parte es acotar la circunferencia de la bola unidad $B := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ (que es disco convexo). Veremos que $6 \leq \gamma(B) \leq 8$.

Se denotará por $L := \frac{1}{2}\gamma(B)$. Nótese también que dados dos puntos $p, q \in \partial B$, las únicas curvas simples de p a q en el conjunto ∂B son los dos arcos de p a q de ∂B. Claramente la suma de sus longitudes es $\gamma(B) = 2L$. Llamaremos $\delta(p, q)$ a la longitud del arco de menor longitud. Como $-\partial B = \partial B$, se tiene:

Proposición 4.4. Dados $p, q \in \partial B$:

1. $\delta(p, q) = L \iff p$ y q son antipodales.
2. $\delta(p, q) + \delta(-p, q) = L \; \forall p, q \in \partial B$.

Demostración. Vamos con 1.

$\boxed{\Leftarrow}$

Por la Proposición 4.2, como $-\partial B = \partial B$, se tiene que ∂B es la yuxtaposición del arco que c que va de q a $-q$ con $-c$. En particular, $2L = \gamma(B) = \delta(q, -q) + \delta(-q, q) = 2\delta(q, -q)$, de donde se deduce que $\delta(q, -q) = L$.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supongamos que $\delta(p, q) = L$. Por yuxtaposición, $2L = \gamma(B) = \delta(p, q) + \delta(q, -q) + \delta(-q, p) = 2L + \delta(-q, p)$. Por tanto $\delta(-q, p) = 0$, es decir, $p = -q$.

el apartado 2. se deduce usando que $\delta(p, -p) = L$ y por yuxtaposición. ▮

Proposición 4.5. Sea $p \in \partial B$ y sea κ uno de los arcos de ∂B de p a $-p$. La función continua $\phi : [0, L] \to [0, 2]$ definida por $\phi(s) := \|g_\kappa(s) - p\|$ es creciente.

Demostración. Nótese en primer lugar que se tiene que $\phi(0) = 0$ y que $\phi(L) = 2$ (ya que $g_\kappa(L) = -p$ pues $\delta(p, -p) = L$). Así, bastará probar que $\phi^{-1}(\{\lambda\})$ es conexo para cada $\lambda \in (0, 1) \cup (1, 2)$. Veámoslo, notando que $s \in \phi^{-1}(\{\lambda\})$ si y solo si $\|g_\kappa(s) - p\| = \lambda$ si y solo si $g_\kappa(s) \in \kappa \cap (p + \lambda\partial B)$, gracias a que g_κ es la parametrización de una curva simple, se tendrá que $\phi^{-1}(\{\lambda\})$ es conexo si $\kappa \cap (p + \lambda\partial B)$ lo es. Apliquemos ahora la Proposición 4.3 para ver que es conexo.

Sea $K_1 := B, K_2 := p + \lambda B = (1-\lambda)(1-\lambda)^{-1}p + \lambda K_1$. Veamos que se cumplen las condiciones de la proposición para $h = (1-\lambda)^{-1}p$. En primer lugar, como $|1-\lambda|^{-1} > 1$, se tiene que $\|(1-\lambda)^{-1}p\| > 1$, luego $h \notin K_1$. Además, $p \in K_1 \cap K_2^\circ$, por tanto $K_1^\circ \cap K_2^\circ \neq \emptyset$. Se cumplen así las hipótesis de la Proposición 4.3, luego tenemos que $\partial B \cap \partial(p + \lambda B) = (R_1 \cap B \cap (p + \lambda B)) \cup (R_2 \cap B \cap (p + \lambda B))$ donde R_1, R_2 son las líneas soporte (distintas) desde h al disco convexo $B \cap (p + \lambda B)$. De aquí deducimos que $\partial B \cap \partial(p + \lambda B)$ es la unión de dos compactos convexos disjuntos, cada uno en una de las rayas soporte, $R1, R2$.

Por otro lado, la recta que pasa por $h, p, 0, -p$ separa a estos compactos y también separa a los arcos $\kappa, -\kappa$. Teniendo en cuenta que la yuxtaposición de $\kappa, -\kappa$ es $\partial_+ B$ o $\partial_- B$, entonces,

$$\partial B \cap \partial(p + \lambda B) = \kappa \cap \partial(p + \lambda B) \cup -\kappa \cap \partial(p + \lambda B).$$

es una unión disjunta, no vacía, luego ha de pasar que $\kappa \cap \partial(p + \lambda B)$ sea uno de los dos compactos convexos y, por tanto, conexo. ∎

El siguiente resultado es bien conocido.

Proposición 4.6. Existen $u, v \in \partial B$ tal que el paralelogramo con vértices $-u-v, -u+v, u+v, u-v$ contiene a B.

Demostración. Véase [7]. ∎

Teorema 4.3. *$L(X) \leq 4$. $L(X) = 4$ si y solo si B es un paralelogramo.*

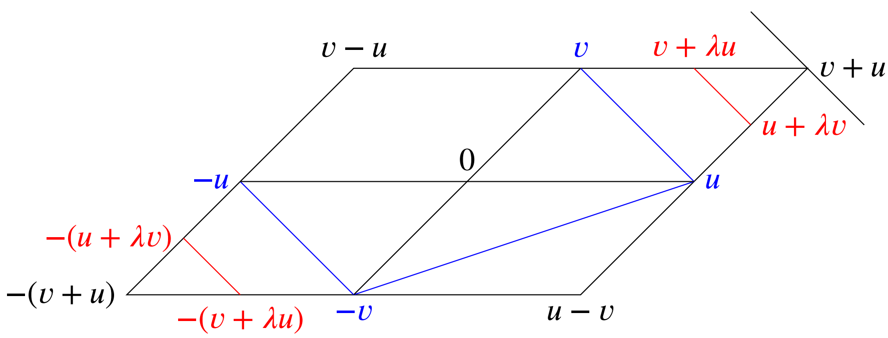
Demostración. Veamos primero que $L(X) \leq 4$. Por la Proposición 4.6 sabemos que existen $u, v \in \partial B$ tal que el paralelogramo de vértices $\pm u \pm v$, que denotaremos por Π, contiene a B. Por el Teorema 4.2 se tiene que

$$L(X) = \frac{1}{2}\gamma(B) \leq \frac{1}{2}\gamma(\Pi) =$$

$$= \frac{1}{2}(2\|(u+v) - (v-u)\| + 2\|(u+v) - (u-v)\|) =$$

$$= 2\|u\| + 2\|v\| = 4.$$

Veamos ahora que $L(X) = 4$ si y solo si B es un paralelogramo. Si B es un paralelogramo, sean u, v los puntos medios de dos lados contiguos. Las cuentas anteriores demuestran que $\frac{1}{2}\gamma(\Pi) = 4$.



Recíprocamente, supongamos que $L(X) = 4$ y sean $u, v \in \partial B$ los puntos que cumplen las hipótesis de la Proposición 4.6. Si $B = \Pi$, ya tenemos que B es un paralelogramo. Asumamos entonces que $B \neq \Pi$, y, por tanto (como $\Pi = \mathrm{conv}\{\pm u \pm v\}$) que un vértice de Π no está en B. Podemos asumir sin pérdida de generalidad, (intercambiando v y $-v$ si es necesario), que este vértice es $u + v$. Ahora bien, la linea paralela al segmento uv que pasa por $u + v$ es rayo soporte de Π en $u + v \notin B$ (ver imagen anterior). Por ello, se tiene que existe otro rayo soporte en B paralelo a uv, que separa a u, v de $u + v$. Considerando la intersección de este rayo con Π, llegamos a que el rayo contiene puntos de la forma $v + \lambda u, u + \lambda v$ con $\lambda \in [0, 1)$. Aplicando el Teorema 4.2 a B y a $K := \mathrm{conv}\{u - v, -(u - v), u + \lambda v, -(u + \lambda v), v + \lambda u, -(v + \lambda u)\}$, teniendo en cuenta que $B \subseteq K$, se tiene:

$$4 = L(X) = \frac{1}{2}\gamma(B) \leq \frac{1}{2}\gamma(K) =$$

$$= \|(u + \lambda v) - (u - v)\| + \|v + \lambda u - (u + \lambda v)\| + \| - (u - v) - (v + \lambda u)\| =$$

$$= (1 + \lambda)\|v\| + (1 - \lambda)\|u - v\| + (1 + \lambda)\|u\| =$$

$$= (1 - \lambda)\|u - v\| + 2(1 + \lambda) \leq$$

$$\leq 2(1 - \lambda) + 2(1 + \lambda) = 4.$$

Así, son todo igualdades, y, como $\lambda < 1$,

$$(1 - \lambda)\|u - v\| + 2(1 + \lambda) = 2(1 - \lambda) + 2(1 + \lambda).$$

implica que $\|u - v\| = 2$, es decir, $\frac{1}{2}(u - v) \in \partial B$. Ahora bien, este es el punto medio del segmento $[-v, u]$, luego todo este segmento está en ∂B. Llegamos entonces a que $u - v \notin B$, y, intercambiando v por $-v$ en el proceso anterior, análogamente deducimos que el segmento $[u, v]$ también está en ∂B. Se concluye así que B es el paralelogramo con vértices $\pm v, \pm u$. ∎

Teorema 4.4. $L(X) \geq 3$. $L(X) = 3$ *si y solo si* B *es un hexágono regular.*

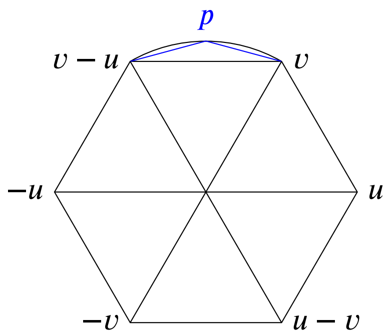
Demostración. Veamos primero que $L(X) \geq 3$. Sea $u \in \partial B$ dado. Gracias a la Proposición 4.6, se tiene que, denotando por κ a uno de los arcos de u a $-u$, la función continua $\phi(s) := \|g_\kappa(s) - u\|$ es creciente y cumple $\phi(0) = 0, \phi(L) = 2$, luego toma todos los valores entre 0 y 2. En particular, existe $v \in \kappa$ tal que $\|v - u\| = 1$ ($v - u \in \partial B$). Ahora bien, como $v - (v - u) = u$ y $v \in \kappa$, se tiene que $v - u$ está en κ, y, por tanto, los puntos $u, v, v - u, -u$ están todos en el arco κ, en ese orden. Teniendo en cuenta la Proposición 4.4,

$$L(X) = \delta(u, -u) = l(\kappa) \geq$$

$$\geq \|v-u\| + \|(v-u)-v\| + \|-u-(v-u)\| =$$

$$= \|v-u\| + \|u\| + \|v\| = 3.$$

Veamos ahora que $L(X) = 3$ si y solo si B es un hexágono regular.



Supongamos que B es un hexágono regular con vértices consecutivos u, v, w, $-u, -v, -w$. Se tiene que $u - v + w = 0$, por tanto,

$$L(X) = \|v-u\| + \|w-v\| + \|-u-w\| =$$

$$= \|w\| + \|u\| + \|v\| = 3.$$

Recíprocamente, supongamos que $L(X) = 3$. Sea $u \in \partial B$ un punto extremal de B y sea $v \in \partial B$ tal que $\|v-u\| = 1$ (sabemos que existe gracias al razonamiento hecho anteriormente). Sea ahora $p \in \partial B$ el punto del arco más corto entre v y $v-u$ que hace que $\delta(v-u, p) = \delta(v, p)$ (el punto medio en longitud de arco, ver imagen anterior). Tenemos así que:

$$3 = L(X) = \delta(u, -u) \geq$$

$$\geq \|v-u\| + \delta(v, p) + \delta(v-u, p) + \|-u-(v-u)\| =$$

$$= 2 + \delta(v, p) + \delta(v-u, p) \geq 2 + \|p-v\| + \|(v-u)-p\| \geq$$

$$\geq 2 + \|(v-u)-v\| = 3.$$

Se tiene entonces que todo son igualdades, lo que implica que:

$$\|p-v\| = \delta(v, p), \|(v-u)-p\| = \delta(v-u, p)$$

$$\|p-v\| + \|(v-u)-p\| = \|(v-u)-v\| = 1.$$

Teniendo en cuenta que elegimos p de forma que $\delta(v-u, p) = \delta(v, p)$,

$$2\|p-v\| = 2\|(v-u)-p\| = 1.$$

De donde se obtiene que $2(v-p), 2u-2(v-p) \in \partial B$. Notando ahora que $\frac{2(v-p)+2u-2(v-p)}{2} = u$, se tiene que u es el punto medio de dos puntos de B, pero asumimos que u era extremal, esto implica que $2(v-p) = 2u-2(v-p) = u$. Por tanto, $v - \frac{1}{2}u = p \in \partial B$, que es el punto medio del segmento $[v, v-u]$. De aquí se deduce que el segmento $[v, v-u]$ está entero contenido en ∂B.

Demostremos ahora que esto implica que v ha de ser un punto extremal. Razonemos por reducción al absurdo, supongamos que v no es un punto extremo, entonces, el razonamiento anterior implicaría que $v+\lambda u \in \partial B$ para todo $\lambda > 0$ suficientemente pequeño. Tomando $\lambda \in (0,1]$, tenemos que $\|(v+\lambda u)-u\| = \|\lambda v+(1-\lambda)(v-u)\| = 1$ ya que está en el segmento $[v, v-u]$. Así:

$$3 = L(X) = \delta(u, -u) \geq$$

$$\geq \|(v+\lambda u)-u\| + \|(v-u)-(v+\lambda u)\| + \|-u-(v-u)\| =$$

$$= 1 + (1+\lambda) + 1 > 3.$$

lo cual es un absurdo, y, por tanto, v es un punto extremo.

Aplicando ahora el razonamiento anterior a v y a $v-u$ en vez de a u y a v, se deduce de forma análoga que el segmento $[v-u, -u]$ está entero contenido en ∂B, y por tanto que $v-u$ es también punto extremo. A partir de aquí tenemos igual que antes que el segmento $[-u, -v]$ está entero en ∂B, deduciendo finalmente que B es un hexágono regular con vértices consecutivos $u, v, v-u, -u, -v, u-v$. ∎

4.3 Coeficiente R(X) de un espacio de Banach

Dedicaremos esta parte final a relacionar los resultados de dimensión 2 vistos en este capítulo con la estructura normal, dando así una condición suficiente sobre un espacio de Banach X para poseer estructura normal, basada solo en sus subespacios de dimensión 2. Para ello, definiremos el coeficiente $R(X)$, introducido por primera vez por Ji Gao.

En esta sección, dado X un espacio de Banach, denotaremos por X_2 a los subespacios de dimensión 2 de X, por $B = B(X) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, por $S(X) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ y por $B_0(X) = B(X) - S(X)$.

Dados $x, y \in S(X_2)$, se tiene que $2(\|x+y\| + \|x-y\|)$ es el perímetro del paralelogramo inscrito en $S(X_2)$ con vértices $x, y, -x, -y$.

Definición 4.9. *Dado X_2 un espacio de Banach de dimensión 2 se define $r(X_2)$ como:*

$$r(X_2) := \sup\{2(\|x+y\| + \|x-y\|) : x, y \in S(X_2)\}.$$

Observación 4.2. Gracias al Teorema 4.2 se tiene que $r(X_2) \leq 2L(X_2)$

Definición 4.10. *Dado un espacio de Banach X se define el coeficiente $R(X)$ de Gao como:*

$$R(X) := \text{ínf}\{2L(X_2) - r(X_2) : X_2 \subseteq X\}.$$

El objetivo ahora es probar que todo espacio de Banach X que cumpla que $R(X) > 0$ posee estructura normal. Para ello, necesitaremos los siguientes resultados. Sus demostraciones se pueden consultar en [4].

Lema 4.1. Sea X un espacio de Banach que no posee estructura normal débil. Entonces, para todo $\epsilon \in (0,1)$, existen $x_1, x_2, x_3 \in S(X)$ que cumplen:

1. $x_2 - x_3 = ax_1$ con $|a-1| < \epsilon$
2. $|\|x_1 - x_2\| - 1|, |\|x_3 - (-x_1)\| - 1| < \epsilon$
3. $\|(x_1 + x_2)/2\|, \|(x_3 - x_1)/2\| > 1 - \epsilon$

Geométricamente, esto se puede ver como que si X no posee estructura normal débil, existe un hexágono inscrito en $S(X)$ con lados de longitud arbitrariamente cerca de 1(por los apartados 1 y 2), y con al menos 4 lados arbitrariamente cerca de $S(X)$.

Teorema 4.5. *Si X es un espacio de Banach con $R(X) > 0$, entonces X es uniformemente no cuadrado.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que X no es uniformemente no cuadrado, es decir, que $\epsilon_0(X) = 2$. Esto quiere decir que $\delta(\epsilon) = 0$ para todo $\epsilon \in [0,2)$, por lo tanto, para cualquier $\hat{\epsilon} > 0$ existen $x, y \in S(X)$ tal que

$$\|x+y\|, \|x-y\| > 2 - \frac{\hat{\epsilon}}{4}.$$

Sea X_2 el espacio generado por x, y. se tiene entonces que

$$r(X_2) \geq 2(\|x+y\| + \|x-y\|) > 8 - \hat{\epsilon}.$$

Usando ahora el Teorema 4.3, se deduce que $2L(X_2) \leq 8$, por tanto,

$$R(X) = \text{ínf}\{2L(X_2) - r(X_2) : X_2 \subseteq X\} < \hat{\epsilon}.$$

Como $\hat{\epsilon}$ es arbitrariamente pequeño, llegamos a que $R(X) = 0$, lo cual es un absurdo. ∎

Nótese que dados dos puntos $x_1, x_2 \in X$, el segmento que los une, $\{tx_1+(1-t)x_2 : t \in [0,1]\}$ es justamente la envolvente convexa de los puntos, $\operatorname{conv}\{x_1, x_2\}$. De ahora en adelante, cada vez que se escriba la envolvente convexa de dos puntos se entenderá que se refiere al segmento que los une.

Lema 4.2. Sean $x, y \in B(X)$ y $\epsilon \in (0,1)$ tal que $\|x+y\|/2 > 1-\epsilon$. Entonces, para cualquier $c \in [0,1]$ y $z = cx + (1-c)y \in \operatorname{conv}\{x,y\}$ se tiene $\|z\| > 1-2\epsilon$.

Demostración. El resultado se probará por casos. En primer lugar, si $0 \le c \le 1/2$, se tiene que:

$$z = cx + (1-c)y = cx - (1-c)x + (1-c)(x+y) =$$
$$= 2(1-c)\frac{x+y}{2} - (2c-1).$$

De modo que:

$$\|z\| \ge (2-2c)\left\|\frac{x+y}{2}\right\| - (|1-2c|)\|x\| >$$
$$> (2-2c)(1-\epsilon) - 1 + 2c = 1 - 2\epsilon + 2c\epsilon \ge 1 - 2\epsilon.$$

De forma similar, si $1/2 \le c \le 1$:

$$z = c(x+y) + y - 2cy = 2c\frac{x+y}{2} + (1-2c)y.$$

De tal forma que:

$$\|z\| > 2c(1-\epsilon) - (|1-2c|) = 2c(1-\epsilon) + 1 - 2c =$$
$$2c - 2c\epsilon + 1 - 2c \ge 1 - 2\epsilon.$$

▮

Teorema 4.6. *Todo espacio uniformemente no cuadrado es reflexivo.*

Demostración. Véase [6]. ▮

Estamos ya en condiciones de demostrar el teorema.

Teorema 4.7. *Si X es un espacio de Banach con $R(X) > 0$, entonces X posee estructura normal.*

Demostración. Lo demostraremos por reducción al absurdo. Supongamos que X no posee estructura normal. Por hipótesis, $R(X) > 0$, luego por el Teorema 4.5 se tiene que X es uniformemente no cuadrado. Aplicando ahora el Teorema 4.6 se tiene que X es reflexivo. Como en los espacios reflexivos la estructura normal y la estructura normal débil coinciden y además hemos supuesto que X no posee estructura normal, X no posee estructura normal débil.

Aplicamos ahora el Lema 4.1 a X, de donde deducimos que para todo $\epsilon \in (0, 1)$ existen $x_1, x_2, x_3 \in S(X)$ tal que:

$$x_2 - x_3 = ax_1 \text{ con } |a - 1| < \epsilon$$

$$|\|x_1 - x_2\| - 1|, |\|x_3 - (-x_1)\| - 1| < \epsilon$$
$$\left\|\frac{(x_1 + x_2)}{2}\right\|, \left\|\frac{(x_3 - x_1)}{2}\right\| > 1 - \epsilon.$$

Sea ahora X_2 el espacio generado por x_1, x_2. Intersecando la recta que pasa por x_3 con dirección $x_3 - (-x_1)$ con la recta que pasa por x_2 con dirección $x_2 - x_1$, se tiene que existe un $x \in X$ y un $\alpha \in \mathbb{R}$ (basta tomar $\alpha = |a|/(2 - a)$) tal que:

$$x - x_2 = \alpha(x_2 - x_1)$$

$$x - x_3 = \alpha(x_3 + x_1).$$

La idea ahora es acotar superiormente la longitud de arco de $S(X_2)$, para ello construimos un polígono que contiene a $S(X_2)$ (Ver imagen para una idea más geométrica).

Construyamis los puntos intersección del rayo soporte de $S(X_2)$ paralelo al segmento $\text{conv}\{x_3, x_2\}$ con los segmentos $\text{conv}\{x_3, x\}$ $\text{conv}\{x_2, x\}$. Para ello, tomo $y_2 \in \text{conv}\{x_2, x\}$, $y_3 \in \text{conv}\{x_3, x\}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tal que:

$$y_2 - x_2 = \beta(x_2 - x_1)$$

$$y_3 - x_3 = \beta(x_3 + x_1).$$

y tal que $\text{conv}\{y_2, y_3\} \cap S(X) \neq \emptyset$ y $\text{conv}\{y_2, y_3\} \subseteq X_2 - B_0(X_2)$. Es más, debido a que $x - x_2 = \alpha(x_2 - x_1)$, $x - x_3 = \alpha(x_3 + x_1)$, podemos expresar

$$\text{conv}\{x_3, x\} = \{x_3 + \lambda(x_3 + x_1) \,:\, \lambda \in [0, \alpha]\}.$$

$$\text{conv}\{x_2, x\} = \{x_2 + \lambda(x_2 - x_1) \,:\, \lambda \in [0, \alpha]\}.$$

Por ende, $\beta \in (0, \alpha)$. Veamos que por esta razón $y_2 - y_3 = \delta(x_2 - x_3)$ con $\delta \in (0, 1)$. Por construcción:

$$y_2 - y_3 = x_2 + \beta(x_2 - x_1) - x_3 - \beta(x_3 + x_1) =$$

$$= x_2 - x_3 + \beta(x_2 - x_3) - 2\beta x_1 = (1 + \beta)(x_2 - x_3) - 2\beta x_1.$$

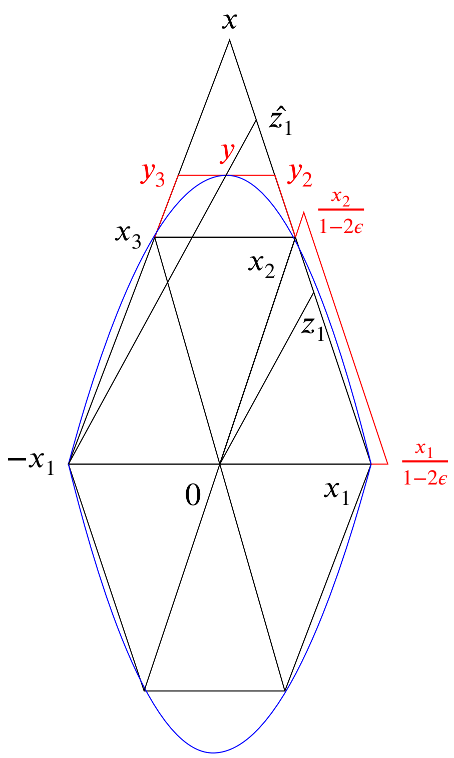
Teniendo en cuenta que $x_2 - x_3 = ax_1$, como $\epsilon \in (0,1)$ y $|a| > 0$:

$$y_2 - y_3 = \left(1 + \beta - \frac{2\beta}{a}\right)(x_2 - x_3) := \delta(x_2 - x_3).$$

Gracias a que $\beta \in (0, \alpha)$ se tiene que $\delta \in (0,1)$. En resumen, se tiene que $y_2 - y_3 = \delta(x_2 - x_3)$ con $\delta \in (0,1)$. Es más, en vista de que $|a-1| < \epsilon$, podemos tomar un ϵ suficientemente pequeño como para que:

$$\beta < \alpha = \frac{|a|}{|2-a|} =$$

$$= \frac{|a|}{|1+1-a|} \leq \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} < 2.$$



Hemos concluido la construcción de parte del polígono, tratemos de acotar las longitudes de los segmentos. Usando que $|\|x_1 - x_2\| - 1|, |\|x_3 - (-x_1)\| - 1| < \epsilon$ se tiene que $\|x_1 - x_2\| - 1 \leq |\|x_1 - x_2\| - 1| < \epsilon$, de manera que:

$$\|x_2 - x_1\| \leq 1 + \epsilon.$$

Así,

$$\|y_2 - x_2\| = \beta\|x_2 - x_1\| \leq \beta(1+\epsilon) \leq \beta + 2\epsilon.$$

Y análogamente,

$$\|y_3 - x_3\| = \beta\|x_3 + x_1\| \leq \beta(1+\epsilon) \leq \beta + 2\epsilon.$$

A continuación, tratamos de acotar $\|y_2 - y_3\| = \delta\|x_2 - x_3\|$. Con el objetivo de acotar δ, es necesario ver que se tiene:

$$\frac{\|x - x_2\|}{\|x - x_1\|} = \frac{\alpha\|x_2 - x_1\|}{(1+\alpha)\|x_2 - x_1\|} = \frac{a}{2} = \frac{\|x_2 - x_3\|}{2\|x_1\|}.$$

Del hecho de que x, x_1, x_2 están alineados se deducen las igualdades:

$$\frac{2\|x_1\|}{\|x_2 - x_3\|} = \frac{\|x - x_1\|}{\|x - x_2\|} =$$

$$= \frac{\|x - x_2\| + \|x_2 - x_1\|}{\|x - x_2\|} = 1 + \frac{\|x_2 - x_1\|}{\|x - x_2\|}.$$

Por lo tanto concluimos:

$$\frac{\|x_2 - x_1\|}{\|x - x_2\|} = \frac{2\|x_1\|}{\|x_2 - x_3\|} - 1 = \frac{2 - \|x_2 - x_3\|}{\|x_2 - x_3\|} \geq$$

$$\geq \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} = \frac{1+\epsilon}{1+\epsilon} - \frac{2\epsilon}{1+\epsilon} \geq 1 - 2\epsilon.$$

Por otro lado, probemos:

$$\delta = \frac{\|y_2 - y_3\|}{\|x_2 - x_3\|} = \frac{\|x - y_2\|}{\|x - x_2\|}.$$

En primer lugar, nótese que, por construcción,

$$x - y_2 = (\alpha - \beta)(x_2 - x_1).$$

$$x - x_2 = \alpha(x_2 - x_1).$$

Luego basta probar:

$$\delta = \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = \frac{\|x - y_2\|}{\|x - x_2\|}.$$

Recordando que, con ϵ suficientemente pequeño para que $a > 0$,

$$\alpha = \frac{a}{2-a} \qquad \delta = \left(1 + \beta - \frac{2\beta}{a}\right).$$

Se tiene que:

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=\frac{a-\beta(2-a)}{a}=\frac{a-2\beta+\beta a}{a}=\delta.$$

Por ende,

$$\delta=\frac{\|y_2-y_3\|}{\|x_2-x_3\|}=\frac{\|x-y_2\|}{\|x-x_2\|}.$$

Para terminar, usando que x, x_2, y_2 están alineados, que $\beta \leq 2$, que $\beta=\frac{\|x_2-y_2\|}{\|x_2-x_1\|}$ y que $\frac{\|x_2-x_1\|}{\|x-x_2\|}\geq 1-2\epsilon$, deducimos que:

$$\delta=\frac{\|y_2-y_3\|}{\|x_2-x_3\|}=\frac{\|x-y_2\|}{\|x-x_2\|}=$$

$$=\frac{\|x-x_2+x_2-y_2\|}{\|x-x_2\|}=\frac{\|x-x_2\|}{\|x-x_2\|}-\frac{\|x_2-y_2\|}{\|x-x_2\|}=$$

$$=1-\frac{\|x_2-y_2\|}{\|x_2-x_1\|}\frac{\|x_2-x_1\|}{\|x-x_2\|}\leq$$

$$\leq 1-\beta(1-2\epsilon)\leq 1-\beta+4\epsilon.$$

Deduciendo como resultado:

$$\|y_2-y_3\|=\delta\|x_2-x_3\|\leq(1-\beta+4\epsilon)a\|x_1\|\leq$$

$$\leq(1-\beta+4\epsilon)(1+\epsilon)\leq 1-\beta+4\epsilon+2\epsilon=1-\beta+6\epsilon.$$

De esta manera concluimos que, si denotamos por $\kappa_{x_2}^{x_3}$ al arco de $S(X_2)$ que va de x_2 a x_3 y por $[c,d]$ a la curva cuya imagen es el segmento que va de c a d, se tiene:

$$l(\kappa_{x_2}^{x_3})\leq l([x_2,y_2])+l([y_2,y_3])+l([y_3,x_3])\leq$$

$$\leq 2(\beta+2\epsilon)+1-\beta+6\epsilon=1+\beta+10\epsilon.$$

Construyamos ahora una poligonal que acote el arco de curva $\kappa_{x_1}^{x_2}$. Por construcción, se tiene que $\frac{\|x_1+x_2\|}{2}>1-\epsilon$ (gracias al Lema 4.1). Aplicando ahora el Lema 4.2, se tiene que para todo $z\in\operatorname{conv}\{x_1,x_2\}$ se cumple $\|z\|>1-2\epsilon$. Veamos que $\operatorname{conv}\{\frac{x_1}{1-2\epsilon},\frac{x_2}{1-2\epsilon}\}\subseteq X_2-B_0(X_2)$. Sea $u\in\operatorname{conv}\{\frac{x_1}{1-2\epsilon},\frac{x_2}{1-2\epsilon}\}$, es decir, existe $\lambda\in[0,1]$ tal que

$$u=\lambda\frac{x_1}{1-2\epsilon}+(1-\lambda)\frac{x_2}{1-2\epsilon}.$$

Luego

$$\|u\|=\frac{\|\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\|}{1-2\epsilon}>1.$$

Donde hemos usado que $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2 \in \operatorname{conv}\{x_1, x_2\}$ y por tanto $\|\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\| > 1-2\epsilon$.

tenemos entonces que las longitudes de los segmentos $\left[x_1, \frac{x_1}{1-2\epsilon}\right]$, $\left[\frac{x_1}{1-2\epsilon}, \frac{x_2}{1-2\epsilon}\right]$, $\left[\frac{x_2}{1-2\epsilon}, x_2\right]$ acotaran el arco de curva $\kappa_{x_1}^{x_2}$, por tanto,

$$l(\kappa_{x_1}^{x_2}) \leq l\left(\left[x_1, \frac{x_1}{1-2\epsilon}\right]\right) + l\left(\left[\frac{x_1}{1-2\epsilon}, \frac{x_2}{1-2\epsilon}\right]\right) + l\left(\left[\frac{x_2}{1-2\epsilon}, x_2\right]\right) \leq$$

$$\leq 2\left(\frac{1}{1-2\epsilon} - 1\right) + \frac{1+\epsilon}{1-2\epsilon} = \frac{1+5\epsilon}{1-2\epsilon} \leq 1+8\epsilon.$$

Para ϵ suficientemente pequeño.

Análogamente, podemos probar que $l(\kappa_{x_3}^{-x_1}) \leq 1+8\epsilon$ Tenemos entonces que

$$2L(X_2) = \delta(-x_1, x_1) = 2(l(\kappa_{x_3}^{-x_1}) + l(\kappa_{x_3}^{x_2}) + l(\kappa_{x_2}^{x_1})) \leq$$

$$\leq 2(2(1+8\epsilon) + 1 - \beta + 10\epsilon) = 6 + 2\beta + 52\epsilon.$$

Acabando por lo tanto la primera mitad de la demostración. Para la segunda mitad, el objetivo será acotar inferiormente el coeficiente $r(X_2)$, para así tener una cota de $R(X)$.

Sea $y \in \operatorname{conv}\{y_2, y_3\} \cap S(X_2)$(por construcción sé que hay alguno). Acotaremos $r(X_2)$ por el paralelogramo de vértices $\pm y, \pm x_1$, es decir, tratamos de acotar inferiormente $\|y - x_1\|, \|y + x_1\|$.

Para ello, la idea ahora es tomar la intersección de la recta que une $-x_1$ con y con $\operatorname{conv}\{x_2, x\}$, digamos $\hat{z}_1$, y tomar un $z_1 \in \operatorname{conv}\{x_1, x\}$ que cumpla $\|\hat{z}_1 + x_1\| = 2\|z_1\|$(mirar imagen). Formalmente, una vez escogido el y, deben existir $\hat{z}_1 \in \operatorname{conv}\{x_2, x\}$ y un $z_1 \in \operatorname{conv}\{x_1, x\}$ que cumplen:

$$y \in \operatorname{conv}\{\hat{z}_1, -x_1\}$$

$$\|\hat{z}_1 + x_1\| = 2\|z_1\|.$$

Tratemos de acotar $\|y + x_1\|$. Veamos que $\|y + x_1\| \geq 2 - 4\epsilon - \|y - y_2\|$.

$\boxed{Caso 1}$ Supongamos que $z_1 \in \operatorname{conv}\{x_2, x_1\}$. Entonces, tenemos que $z_1, \frac{x_1+x_2}{2} \in \operatorname{conv}\{x_2, x_1\}$ (estan alineados), luego:

$$\|z_1\| = \left\|z_1 - \frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_1+x_2}{2}\right\| =$$

$$\left\|z_1 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right\| + \left\|\frac{x_1 + x_2}{2}\right\| \geq$$
$$\geq \left\|\frac{x_1 + x_2}{2}\right\| \geq 1 - \epsilon \geq 1 - 2\epsilon.$$

De donde tenemos que $\|\hat{z_1} + x_1\| = 2\|z_1\| \geq 2(1 - 2\epsilon) = 2 - 4\epsilon$. Por otro lado, usando la invariancia de la norma por traslaciones, se deduce:

$$\frac{\|\hat{z_1} - y\|}{\|z_1\|} = \frac{\|y - y_2\|}{\|x_1\|}.$$

Y sabiendo que $\|x_1\| = 1$,

$$\|\hat{z_1} - y\| = \|z_1\|\|y - y_2\| \leq \|y - y_2\|.$$

Donde hemos usado que $\|z_1\| \leq 1$ ya que $x_2, x_1 \in B(X_2)$ convexa y $z_1 \in \text{conv}\{x_2, x_1\}$. Llegamos a que:

$$\|y + x_1\| = \|\hat{z_1} + x_1\| - \|\hat{z_1} - y\| \geq 2 - 4\epsilon - \|y - y_2\|.$$

$\boxed{Caso 2}$ Supongamos ahora que $z_1 \in \text{conv}\{x_2, x\}$. Necesitaremos el siguiente resultado auxiliar:

Denotamos por $u = x_2 + t(x_2 - x_1)$ y por $u_1 = x_2 + t_1(x_2 - x_1)$ con $t_1 \geq 0$. Si se tiene que $\|u_1 + x_1\| \geq 2$, entonces $\|u + x_1\|$ es una función creciente para $t \in [t_1, \infty)$.

Probémoslo, usaremos la notación $B(x, a) = \{y \in X : \|y - x\| \leq a\}$, $S(x, a) := \{y \in X : \|y - x\| = a\}$ y $B_0(x, a) = \{y \in X : \|y - x\| < a\}$.

Nótese que, como $-x_1, x_2 \in B(X)$, tenemos que $\|x_2 + x_1\| \leq 2$ y así $x_2 \in B(-x_1, 2)$. Por hipótesis, $u_1 \notin B_0(-x_1, 2)$, por lo tanto, tenemos que existe $v_1 \in \text{conv}\{x_2, u_1\}$ con $v_1 \in S(-x_1, 2)$.

Demostremos por reducción al absurdo, supongamos que $\|u + x_1\|$ no es creciente, entonces existen t_2, t_3 tal que $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ y cumplen que $\|u_2 + x_1\| = b > \|u_3 + x_1\|$, donde $u_2 = x_2 + t_2(x_2 - x_1)$ y $u_3 = x_2 + t_3(x_2 - x_1)$.

Afirmamos que se tiene que $b \geq 2$. Efectivamente, nótese en primer lugar que, como u_2, u_1 están alineados y $0 \leq t_1 \leq t_2$, se tiene que $\text{conv}\{x_2, u_1\} \subseteq \text{conv}\{x_2, u_2\}$. Si $b < 2$ entonces $u_2 \in B_0(-x_1, 2)$ y por tanto, por la convexidad de la bola, $u_1 \in \text{conv}\{x_2, u_1\} \subseteq \text{conv}\{x_2, u_2\} \subseteq B_0(-x_1, 2)$, lo cual es una contradicción, pues $u_1 \notin B_0(-x_1, 2)$.

Sean ahora $v_2 = \frac{2(u_2+x_1)}{b} - x_1$ y $v_3 = \frac{2(u_3+x_1)}{b} - x_1$. Se tiene que:

$$\|v_2 + x_1\| = \frac{\|2(u_2 + x_1)\|}{b} = 2 \;\Rightarrow\; v_2 \in S(-x_1, 2)$$

$$\|v_3 + x_1\| = \frac{\|2(u_3 + x_1)\|}{b} < \frac{2b}{b} = 2 \;\Rightarrow\; v_3 \in B_0(-x_1, 2).$$

Por otro lado, análogamente a antes, como $\operatorname{conv}\{x_2, u_1\} \subseteq \operatorname{conv}\{x_2, u_2\} \subseteq \operatorname{conv}\{x_2, u_3\}$ y $v_1 \in \operatorname{conv}\{x_2, u_1\}$, se deduce que $u_2 \in \operatorname{conv}\{v_1, u_3\}$ y por tanto existe un $c \in [0, 1]$ tal que:

$$u_2 = cv_1 + (1 - c)u_3 \iff u_2 + x_1 = c(v_1 + x_1) + (1 - c)(u_3 + x_1).$$

Luego

$$\frac{b\|v_2 + x_1\|}{2} = \|u_2 + x_1\| \leq c\|v_1 + x_1\| + (1 - c)\|u_3 + x_1\| =$$

$$= 2c + (1 - c)\frac{b\|v_3 + x_1\|}{2} < 2c + (1 - c)\frac{b}{2}2.$$

Donde he usado que $v_2 \in S(-x_1, 2)$ y que $v_3 \in B_0(-x_1, 2)$. Por tanto,

$$\|v_2 + x_1\| < \frac{2(2c + (1 - c)b)}{b} = \frac{4c}{2} + \frac{2(1 - c)b}{b} \leq 2c + 2 - 2c = 2.$$

Lo cual es una contradicción pues $v_2 \in S(-x_1, 2)$ y queda probado el lema auxiliar. Notando ahora que $\|\hat{x}_1 + x_2\| = 2\|z_1\| \geq 2$, aplicando el lema auxiliar a $\hat{z}_1 \in \operatorname{conv}\{x, x_1\}$ y a $x = x_2 + \alpha(x_2 - x_1)$, se tiene:

$$\|\hat{z}_1 + x_1\| \leq \|x + x_1\| = \|x - x_3\| + \|x_3 + x_1\| =$$

$$= (1 + \alpha)\|x_3 + x_1\| \leq \left(1 + \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}\right)\|x_3 + x_1\| \leq$$

$$\leq \frac{2}{1 - \epsilon}(1 + \epsilon) \leq 2 + 6\epsilon.$$

Para ϵ suficientemente pequeño. Por tanto $\|z_1\| = \frac{\|\hat{z}_1 + x_1\|}{2} \leq 1 + 3\epsilon$ y vimos antes que $\|\hat{z}_1 - y\| = \|z_1\|\|y - y_2\| \leq (1 + 3\epsilon)\|y - y_2\|$, así,

$$\|y + x_1\| = \|\hat{z}_1 + x_1\| - \|\hat{z}_1 - y\| \geq 2 - (1 + 3\epsilon)\|y - y_2\| \geq$$

$$\geq 2 - (1 + 4\epsilon)\|y - y_2\| \geq 2 - 4\epsilon - \|y - y_2\|.$$

Que es lo que buscabamos.

Análogamente, se puede probar que $\|y - x_1\| \geq 2 - 4\epsilon - \|y - y_3\|$. Así,

$$\|y + x_1\| + \|y - x_1\| \geq 4 - 8\epsilon - (\|y - y_2\| + \|y_3\|) =$$

$$= 4 - 8\epsilon - \|y_2 - y_3\| \geq 4 - 8\epsilon - (1 - \beta + 6\epsilon) = 3 + \beta - 14\epsilon.$$

Y por tanto,

$$r(X_2) = \sup\{2(\|x + y\| + \|x - y\|) : x, y \in S(X_2)\} \geq 6 + 2\beta - 28\epsilon.$$

Concluimos la demostración viendo que

$$R(X) := \text{ínf}\{2L(X_2) - r(X_2) : X_2 \subseteq X\} \leq 6 + 2\beta + 52\epsilon - (6 + 2\beta - 28\epsilon) = 80\epsilon.$$

Haciendo ϵ tender a 0 se deduce que $R(X) = 0$ lo cual es una contradicción. ▍

Como ya adelantabamos a principio de la sección, este teorema nos proporciona una herramienta para ver si un espacio posee estructura normal o no. Ya en capítulos anteriores hemos visto la riqueza de estos espacios, por ejemplo, a la hora de calcular existencia de puntos fijos. Además, es interesante el estudio del carácter geométrico que tiene junto con la relación con los espacios de dimensión dos.

Concluimos por tanto el trabajo habiendo dotado a los espacios de Banach con una estructura geométrica rica, útil en muchos ámbitos, y caracterizándola mediante sus subespacios de dimensión dos.

Apéndice

Casos límites en estructura normal: Espacios de Bynum

En los capítulos anteriores hemos estudiado propiedades geométricas de los espacios de Banach, principalmente la convexidad uniforme y la estructura normal. Ya hemos visto que todo espacio uniformemente convexo posee estructura normal uniforme. ¿Podemos decir más? Trabajando con el módulo de convexidad, demostraremos que si un espacio de Banach X cumple que $\delta_X(1) > 0$ (o equivalentemente $\epsilon_0(X) < 1$), entonces X posee estructura normal uniforme.

Terminaremos el apéndice presentando los espacios de Bynum, los cuales no poseen estructura normal y cumplen que $\epsilon_0(X) = 1$. De esta forma, se confirma que la condición $\delta_X(1) > 0$ es fina.

Definición 4.11. *Se define el **coeficiente de estructura normal** de un espacio de Banach como:*

$$N(X) = \sup\left\{\frac{r(K)}{diam(K)} : K \subseteq X \,\textit{convexo acotado}, \operatorname{diam}(K) > 0\right\}.$$

Equivalentemente, $N(X)$ es el menor número para el cual $r(K) \leq N(X)\operatorname{diam}(K)$ para todo $K \subseteq X$ convexo acotado.

Claramente, como $r(K) \leq \operatorname{diam}(K)$ y $r(K) < \operatorname{diam}(K)$ si y solo si X posee estructura normal, se tiene que $N(X) \leq 1$ y $N(X) < 1$ si y solo si X posee estructura normal.

Teorema 4.8. *Si el módulo de convexidad de un espacio de Banach cumple que* $\delta(1) > 0$ $(\epsilon_0(X) < 1)$ *, entonces X posee estructura normal uniforme y:*

$$N(X) \leq 1 - \delta(1).$$

En particular $r(K) \leq (1 - \delta(1))\mathrm{diam}(K)$ *para todo* $K \subseteq X$ *convexo acotado.*

Demostración. Sea $K \subseteq X$ convexo cerrado acotado con $\mathrm{diam}(K) = d > 0$. Como $d > \epsilon_0(X)d$, considero $\mu > 0$ tal que $d - \mu > \epsilon_0 d$. Sean ahora $u, v \in K : \|u - v\| \geq d - \mu$ y denotemos por $z := \frac{u+v}{2}$. Así, aplicando la proposición 2.3, para todo $x \in K$ se tiene que:

$$\left.\begin{array}{r} \|x-u\| \leq d \\ \|x-v\| \leq d \\ \|u-v\| \geq d-\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \|x - \frac{1}{2}(u+v)\| = \|x - z\| \leq \left(1 - \delta\left(\frac{d-\mu}{d}\right)\right) d.$$

Ahora bien, notando que $\frac{d-\mu}{d} > \epsilon_0(X) := \sup\{\epsilon > 0 : \delta(\epsilon) = 0\}$, se tiene, $\delta(\frac{d-\mu}{d}) > 0$. Consecuentemente, se deduce que z es no diametral y que por tanto K posee estructura normal. Veamos más, tomando supremo en x se llega a que:

$$r(K) \leq r_z(K) \leq \left(1 - \delta\left(\frac{d-\mu}{d}\right)\right) d.$$

Sin más que tomar límite cuando $\mu \to 0^+$, teniendo en cuenta que δ es continua en $[0, 2)$:

$$r(K) \leq (1 - \delta(1))d.$$

Más aún, tomando supremo en K:

$$N(X) \leq (1 - \delta(1)).$$

Como $\delta(1) > 0$, concluimos en particular que $N(X) < 1$ y por tanto que X posee estructura normal uniforme.

Proposición 4.7. Sea X un espacio de Banach y $K \subseteq X$ un convexo acotado. Se tiene que si X es uniformemente convexo entonces todos los puntos diametrales de K son extremales.

Demostración. Sea $z \in K$ no extremal, es decir que $\exists u, v \in K, u \neq v : z = \frac{1}{2}(u+v)$. Como X uniformemente convexo, $\epsilon_0(X) = 0$, observando la demostración anterior, se tiene que puedo tomar $\mu \in (0, d)$. Escogiendo μ tal que $\|u - v\| \geq d - \mu$, se tiene, para $x \in K$:

$$\left.\begin{array}{r} \|x-u\| \leq d \\ \|x-v\| \leq d \\ \|u-v\| \geq d-\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \|x - \frac{1}{2}(u+v)\| = \|x - z\| \leq \left(1 - \delta\left(\frac{d-\mu}{d}\right)\right) d < d.$$

Concluimos que z es no diametral, luego todos los diametrales son extremales.

∎

Proposición 4.8. **Estimación del centro de Chebyshev de K convexo acotado** Si el módulo de convexidad δ de X espacio de Banach cumple $\delta(1) > 0$ y $K \subseteq X$ convexo acotado, se tiene que:

$$\operatorname{diam}(C(K)) \leq \epsilon_0(X)(1 - \delta(1))\operatorname{diam}(K).$$

Demostración. Sea $\mu > 0$ y tomemos $u, v \in C(K)$ tales que $\|u - v\| \geq (1-\mu)\operatorname{diam}(C(K))$. Sea ahora $z = \frac{1}{2}(u+v)$ y, gracias a que:

$$(1-\mu)r(K) < r(K) \leq r_z(K) := \sup_{x \in K}\{\|z - x\|\}.$$

Existe un $x \in K$ tal que $\|z - x\| \geq (1-\mu)r(K)$. Así aplicando la Proposición 2.3:

$$\left.\begin{array}{r} \|x-u\| \leq r_u(K) = r(K) \\ \|x-v\| \leq r_v(K) = r(K) \\ \|u-v\| \geq (1-\mu)\operatorname{diam}(C(K)) \end{array}\right\} \Rightarrow \|x - z\| \leq \left(1 - \delta\left(\frac{(1-\mu)\operatorname{diam}(C(K))}{r(K)}\right)\right) r(K).$$

Y por tanto:

$$(1-\mu)r(K) \leq \|x - z\| \leq \left(1 - \delta\left(\frac{(1-\mu)\operatorname{diam}(C(K))}{r(K)}\right)\right) r(K).$$

Tomando límite cuando $\mu \to 0^+$

$$0 \leq \delta\left(\frac{(1-\mu)\operatorname{diam}(C(K))}{r(K)}\right) \leq 0 \iff \delta\left(\frac{(1-\mu)\operatorname{diam}(C(K))}{r(K)}\right) = 0$$

$$\iff \frac{(1-\mu)diam(C(K))}{r(K)} \leq \epsilon_0(X) \iff (1-\mu)\text{diam}(C(K)) \leq \epsilon_0(X)r(K).$$

Aplicando el teorema 4.8 se deduce:

$$\text{diam}(C(K)) \leq \epsilon_0(X)(1-\delta(1))\text{diam}(K).$$

Observación 4.3. Si X es uniformemente convexo, (si y solo si $\epsilon_0(X) = 0$), de la desigualdad anterior se deduce que el diam$(C(K)) = 0$ para cualquier convexo acotado $K \subseteq X$, es decir, que el centro de Chebyshev de K consta de un solo punto.

Después de haber estudiado el Teorema 4.8, parece lógico plantearse si existen espacios de Banach con $\epsilon_0(X) = 1$ que no posean estructura normal. La respuesta es afirmativa, lo que nos dice que la condición $\epsilon_0(X) < 1$ es fina. Acabaremos el capítulo dando un ejemplo de un espacio sin estructura normal con $\epsilon_0(X) = 1$, presentado por primera vez por Bynum(1972) en [2]. Por ello, a esta clase de espacios se les llama **Espacios de Bynum**.

En el siguiente ejemplo trabajaremos con los espacios l_p con $1 < p < \infty$ y su norma habitual que denotaremos por $\|\cdot\|$. Dado $x \in l_p$ definimos las siguientes sucesiones:

$$(x^+)_n = \sup\{x_n, 0\} = \frac{|x_n| + x_n}{2}$$

$$(x^-)_n = \sup\{-x_n, 0\} = \frac{|x_n| - x_n}{2}.$$

Se tiene que como $x \in l_p, x^+, x^- \in l_p$ y además $x = x^+ - x^-$. Considero el espacio $l_{p,q} := (l_p, |\cdot|)$ donde:

$$|x| := (\|x^+\|^q + \|x^-\|^q)^{1/q}.$$

Para $q = \infty$, el espacio $l_{p,\infty} := (l_p, |\cdot|)$ donde:

$$|x| := \sup\{\|x^+\|, \|x^-\|\}.$$

Se tiene que para $1 \leq q \leq \infty$, $|\cdot|$ es una norma de l_p equivalente a su norma habitual, $\|\cdot\|$.

Ejemplo 4.1. Para para $1 < p < \infty$, $l_{p,\infty}$ no posee estructura normal y $\epsilon_0(l_{p,\infty}) = 1$.

Veámoslo, probemos primero que no posee estructura normal. Para ello, demostraremos que $\{e_n\} \subseteq l_{p,\infty}$ es una sucesión diametral , donde e_n es el vector con la coordenada n-ésima 1 y el resto 0. Sea $m \in \mathbb{N}$, calculamos dist$\{e_{m+1}, \text{conv}\{e_1, \dots, e_m\}\}$.

Tomemos $x \in \operatorname{conv}\{e_1, \dots, e_m\}$, por tanto, existen $\alpha_1, \dots \alpha_m$ con $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ tal que $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i$. Si denotamos por $z := e_{m+1} - x$, se tiene:

$$z^+ = e_{m+1} \Rightarrow \|z^+\| = 1$$

$$z^- = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i \Rightarrow \|z^-\| = \left(\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^p\right)^{1/p} < 1.$$

Y así,

$$|e_{m+1} - x| = \sup\{\|z^+\|, \|z^-\|\} = 1.$$

Tomando supremo en $x \in \operatorname{conv}\{e_1, \dots, e_m\}$,

$$\operatorname{dist}\{e_{m+1}, \operatorname{conv}\{e_1, \dots, e_m\}\} = 1.$$

Concluimos que:

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{dist}\{e_{m+1}, \operatorname{conv}\{e_1, \dots, e_m\}\} = 1 = \operatorname{diam}\{e_i\}.$$

Donde hemos usado que $|e_i - e_j| = \sup\{1, 1\} = 1\ \forall i, j \in \mathbb{N}$. Luego hemos probado que $\{e_n\} \subseteq l_{p,\infty}$ es una sucesión diametral y que por tanto $l_{p,\infty}$ no posee estructura normal.

Probemos ahora que $\epsilon_0(l_{p,\infty}) = 1$. Gracias al Teorema 4.8 y a que hemos visto que $l_{p,\infty}$ no posee estructura normal, se tiene que $\epsilon_0(l_{p,\infty}) \geq 1$. Probemos que $\epsilon_0(l_{p,\infty}) \leq 1$.

Supongamos que $\delta(t) = 0$ para algún $t \in [0, 2]$. Veamos que $t \leq 1$, lo que implica que $\epsilon_0(l_{p,\infty}) \leq 1$. Al ser δ un ínfimo, sabemos que para todo $\epsilon > 0$ existen $x, y \in l_{p,\infty}$ con $|x| = |y| = 1, |x - y| \geq t$ tal que $\delta(t) \leq 1 - |(x + y)/2| < \epsilon$. Tomando $\epsilon = \frac{1}{n}$, se deduce que existen $\{x_n\}, \{y_n\}$ sucesiones en la esfera unidad de $l_{p,\infty}$, tal que para cada n, $|x_n - y_n| \geq t$ y $|x_n + y_n| \to 2$ cuando $n \to \infty$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad que para cada n, $|x_n + y_n| = \|(x_n + y_n)^+\|$ y $|x_n - y_n| = \|(x_n - y_n)^+\|$. Efectivamente, gracias a que para cada $u \in l_{p,\infty}$ se tiene que $(-u)^+ = u^-$ y $(-u)^- = u^+$, si $|x_n + y_n| = \|(x_n + y_n)^-\|$, simplemente tomo las sucesiones $\{-x_n\}, \{-y_n\}$ y así $|(-(x_n + y_n)| = |x_n + y_n| = \|(x_n + y_n)^-\| = \|(-(x_n + y_n))^+\|$. Ahora bien,

$$\|(x_n + y_n)^+\|^p = \sum_{k=1}^\infty (\sup\{x_{n_k} + y_{n_k}, 0\})^p \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^\infty (\sup\{x_{n_k}, 0\} + \sup\{y_{n_k}, 0\})^p = \|x_n^+ + y_n^+\|^p.$$

De manera que $\|(x_n + y_n)^+\| \le \|x_n^+ + y_n^+\|$. Por consiguiente,

$$2 \ge \|x_n^+ + y_n^+\| \ge \|(x_n + y_n)^+\| = |x_n + y_n| \to 2 \text{ cuando } n \to \infty.$$

lo que implica que $\|x_n^+ + y_n^+\| \to 2$ cuando $n \to \infty$. Como $(l_p, \|\cdot\|)$ es uniformemente convexo ($\delta(\epsilon) > 0$ para todo $\epsilon \in (0, 2]$) y $x_n^+, y_n^+ \in l_p$, se deduce que:

$$\|x_n^+ - y_n^+\| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Teniendo ahora en cuenta que:

$$\|(x_n^+ - y_n^+)^+\| = \sum_{k=1}^{\infty} \sup\{(x_n^+)_k - (y_n^+)_k, 0\} \le \sum_{k=1}^{\infty} |(x_n^+)_k - (y_n^+)_k| = \|x_n^+ - y_n^+\|.$$

Y también, gracias a que $(y_n^-)_k, (x_n^-)_k \ge 0$:

$$\|(y_n^- - x_n^-)^+\| = \sum_{k=1}^{\infty} \sup\{(y_n^-)_k - (x_n^-)_k, 0\} \le \sum_{k=1}^{\infty} \sup\{(y_n^-)_k, 0\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (y_n^-)_k = \|y_n^-\| = 1.$$

Se llega a:

$$t \le |x_n - y_n| = \|(x_n^+ - x_n^- - (y_n^+ - y_n^-))^+\| = \|(x_n^+ - y_n^+ + y_n^- - x_n^-)^+\| \le$$

$$\le \|(x_n^+ - y_n^+)^+ + (y_n^- - x_n^-)^+\| \le \|(x_n^+ - y_n^+)^+\| + \|(y_n^- - x_n^-)^+\| \le$$

$$\|x_n^+ - y_n^+\| + 1 \to 1 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Luego $t \le 1$, con lo que se concluye que $\epsilon_0(l_{p,\infty}) = 1$.

Bibliografía

[1] Buseman. *The Geometry of geodesics*. University of Michigan: Academic Press, 1955.

[2] W. L. Bynum. "A class of spaces lacking normal structure". En: *Compositio Mathematica* 25.3 (1972), págs. 233-236.

[3] John B. Conway. *Graduate text in mathematics, A course in Functional Analysis*. 2.ª ed. University of Tennessee, Knoxville, Tennessee: Springer, 2000.

[4] Ji Gao. "Normal structure and the arc length in Banach spaces". En: *Taiwanese Journal of Mathematics* 5.2 (2001), págs. 353-366.

[5] Kazimierz Goebel. *Topics in metric fixed point theory*. Cambridge university press, 2000.

[6] R. C. James. "Uniformly nonsquare Banach spaces". En: *Annals of Mathematics* 80.3 (1964), págs. 542-550.

[7] Juan Jorge Schãffer. *Geometry of spheres in normed spaces*. Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, Pennsylvania, USA: Marcel Dekker, INC, 1976.