



**FACULTAD DE MATEMÁTICAS**

**Trabajo fin de Máster**

**Máster Universitario en Matemáticas**

**CONJUNTOS CRÍTICOS ASOCIADOS A AUTOTOPISMOS NO TRIVIALES  
DE CUADRADOS LATINOS DE ORDEN SEIS**

**Realizado por  
Manuel González Regadera**

**Dirigido por  
Raúl Manuel Falcón Ganfornina  
María Dolores Frau García**

**Departamento  
Matemática Aplicada I**

**Sevilla, julio de 2023**

---

## Resumen

---

Fijado un isotopismo  $\Theta$  asociado al grupo simétrico  $S_n$ , se dice que un cuadrado latino parcial  $P$  de orden  $n$  es  $\Theta$ -completable a un cuadrado latino  $L$  del mismo orden, si: (a) todas las entradas en  $P$  son entradas en  $L$ ; y (b)  $\Theta$  es un autotopismo de  $L$ . Si  $P$  no contiene un cuadrado latino parcial que satisfaga ambas condiciones, entonces se dice que  $P$  es un  $\Theta$ -conjunto crítico de  $L$ . Si bien la clasificación de  $\Theta$ -conjuntos críticos es conocida para cuadrados latinos de orden  $n \leq 5$ , el caso  $n = 6$  sólo se ha tratado parcialmente en la literatura. Más concretamente, sólo se dispone de la clasificación completa de conjuntos críticos asociados al autotopismo trivial en  $S_6$ , así como de ciertas cotas para el menor y mayor tamaño posible de conjuntos críticos asociados a autotopismos no triviales. En este Trabajo Fin de Máster se va a realizar un estudio pormenorizado que permita demostrar la optimalidad de dichas cotas.

---

## Abstract

---

Given an isotopism  $\Theta$  associated to the symmetric group  $S_n$ , a partial Latin square  $P$  of order  $n$  is said to be  $\Theta$ -completable to a Latin square  $L$  of the same order if: (a) all the entries in  $P$  are entries in  $L$ ; and (b)  $\Theta$  is an autotopism of  $L$ . If  $P$  does not contain a partial Latin square satisfying both conditions, then  $P$  is said to be a  $\Theta$ -critical set of  $L$ . Even if the classification of  $\Theta$ -critical sets is known for Latin squares of order  $n \leq 5$ , the case  $n = 6$  has only partially been dealt with in the literature. More specifically, it is only known the complete classification of critical sets associated to the trivial autotopism in  $S_6$ , and certain bounds for the lower and higher size of critical sets associated to non-trivial autotopisms. In this work, a comprehensive study enables one to ensure the tightness of the previous bounds.

---

## Agradecimientos

---

A lo largo de este intenso curso, he experimentado momentos de alegría, tristeza, desafíos y aprendizaje profundo, no sólo a nivel académico sino también personal. Estoy seguro que no podría haber llegado hasta aquí sin el apoyo incondicional de tantas personas especiales en mi vida.

En primer lugar, quisiera dar las gracias a mis padres, Manuel y Eva, y a mis hermanos, Darío y Lucas. Vuestra confianza y amor me han dado la fuerza para enfrentar los retos y superar los obstáculos que encontré en el camino. Cada paso que di fue respaldado por vuestro cariño, y sé que este logro es también vuestro.

También me gustaría agradecer a mis tutores, Raúl y Loli, su dedicación y paciencia, pues han sido pilares fundamentales en mi proceso de aprendizaje. Aunque el camino no siempre fue fácil, vuestro apoyo y pasión por la enseñanza me inspiraron para continuar y seguir creciendo como estudiante.

A mis compañeros y amigos, Álvaro y María, gracias por compartir este emocionante trayecto conmigo y ser mis segundos profesores cuando no entendía algo.

Y, por último, quiero aprovechar esta oportunidad para agradecer a todos aquellos profesores que infravaloraron mi formación en Ingeniería Informática y dudaron de mis capacidades a lo largo del máster. Gracias por haberme motivado a demostrar que la pasión y la dedicación pueden trascender los límites académicos.

En definitiva, a todos aquellos que me enseñaron, a los que me dieron ánimos, a los que ya no están.

A todos ellos, gracias.

---

# Índice general

---

<b>Índice general</b>	<b>IV</b>
<b>Objetivos</b>	<b>VI</b>
<b>1 PRELIMINARES</b>	<b>1</b>
1.1 Origen histórico de los cuadrados latinos . . . . .	1
1.2 Conjuntos críticos . . . . .	3
1.3 Autotopismos . . . . .	4
1.4 Conjuntos críticos basados en autotopismos . . . . .	6
<b>2 Metodología</b>	<b>12</b>
<b>3 Autotopismos de ciclo largo</b>	<b>14</b>
3.1 La estructura cíclica $(6, 6, 3^2)$ . . . . .	14
3.2 La estructura cíclica $(6, 6, 321)$ . . . . .	18
3.3 La estructura cíclica $(6, 6, 31^3)$ . . . . .	20
3.4 La estructura cíclica $(6, 6, 2^21^2)$ . . . . .	21
3.5 La estructura cíclica $(6, 6, 21^4)$ . . . . .	22
3.6 La estructura cíclica $(3^2, 2^3, 6)$ . . . . .	23
3.7 La estructura cíclica $(51, 51, 51)$ . . . . .	24
<b>4 Autotopismos con ciclos de longitud media</b>	<b>26</b>
4.1 La estructura cíclica $(41^2, 41^2, 41^2)$ . . . . .	26
4.2 La estructura cíclica $(3^2, 3^2, 3^2)$ . . . . .	28
4.3 La estructura cíclica $(3^2, 3^2, 31^3)$ . . . . .	32
4.4 La estructura cíclica $(3^2, 3^2, 1^6)$ . . . . .	37
4.5 La estructura cíclica $(31^3, 31^3, 31^3)$ . . . . .	39
<b>5 Autotopismos de ciclo corto</b>	<b>40</b>
5.1 La estructura cíclica $(2^3, 2^3, 1^6)$ . . . . .	40
5.2 La estructura cíclica $(2^21^2, 2^21^2, 2^21^2)$ . . . . .	45
<b>6 Conclusiones y desarrollos futuros</b>	<b>52</b>
<b>Conclusiones y desarrollos futuros</b>	<b>52</b>
<b>Glosario de símbolos</b>	<b>54</b>
<b>Índice de cuadros</b>	<b>55</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>56</b>



---

## Objetivos

---

Durante el desarrollo del Trabajo Fin de Grado (González-Regadera, 2022), realizado por el autor del presente manuscrito, se llevó a cabo un estudio computacional estadístico que permitió construir conjuntos críticos asociados a autotopismos no triviales de cuadrados latinos de orden seis. Como consecuencia, se establecieron, por primera vez, ciertas cotas para el menor y mayor tamaño posible de estos conjuntos críticos. El principal objetivo del presente Trabajo Fin de Máster es proporcionar una demostración matemática completa y sólida que permita asegurar la optimalidad de dichas cotas, lo que permitirá a su vez una comprensión más profunda de las propiedades de los autotopismos bajo consideración.

---

## PRELIMINARES

---

En este capítulo, se recuerdan una serie de conceptos y resultados básicos conocidos que resultan esenciales para la correcta comprensión del presente manuscrito.

### 1.1– Origen histórico de los cuadrados latinos

Un *cuadrado latino parcial de orden  $n$*  es toda matriz cuadrada  $P$  de orden  $n$  verificando que cada una de sus celdas, o bien está vacía, o bien contiene un elemento de un conjunto de  $n$  símbolos distintos, de tal forma que cada símbolo sólo aparece, a lo más, una vez en cada fila y, a lo más, una vez en cada columna de la matriz. El número total de celdas no vacías en  $P$  constituye su *tamaño*, que denotamos de ahora en adelante como  $|P|$ . Así, por ejemplo, la siguiente matriz es un cuadrado latino parcial de orden y tamaño cuatro.

1		3	
		2	
	3		

Si  $P$  tiene tamaño cero se dice *trivial*. Si tiene tamaño  $n^2$  (es decir, si no tiene celdas vacías), entonces se denomina *cuadrado latino* de orden  $n$ . En este caso, todos los símbolos aparecen exactamente una vez en cada fila y una vez en cada columna, no existiendo por tanto repetición de símbolos por filas, ni por columnas. Denotaremos como  $\mathcal{PL}(n)$  al conjunto de cuadrados latinos parciales de orden  $n$  con entradas en el conjunto  $[n] := \{1, \dots, n\}$ , y como  $\mathcal{L}(n)$  a su subconjunto de cuadrados latinos del mismo orden.

Desde un punto de vista histórico, la primera aparición de los cuadrados latinos (Ibáñez, 2015) se remonta al comienzo del primer milenio, cuando las comunidades indias y árabes utilizaban esta distribución tan especial de símbolos a modo de amuletos o talismanes. A día de hoy, la obra más antigua conocida en la que aparece un cuadrado latino es el libro *Shams al-Maárif al-Kubra* de Ahmad al-Buni, escritor y matemático árabe que, durante el siglo XIII, construyó cuadrados latinos a partir de los caracteres de uno de los noventa y nueve nombres de Alá (Figura 1.1 (a)). Posteriormente, en un intento de explicar el mundo a través de representaciones simples, el filósofo castellano Ramón Llull construyó cuadrados latinos de orden cuatro en su obra *Ars Demonstrativa*, usando como símbolos los elementos fundamentales: Fuego, Aire, Agua y Tierra (Figura 1.1 (b)).



حرف الظاء للمشتري وله يوم الخميس

ظ	ث	ج	ف	خ	ش	ظ
ج	ف	خ	ش	ظ	ز	ث
خ	ش	ظ	ز	ث	ج	ف
ظ	ز	ث	ج	ف	خ	ش
ث	ج	ف	خ	ش	ظ	ز
ف	خ	ش	ظ	ز	ث	ج
ش	ظ	ز	ث	ج	ف	خ

PRIMA FIGURA  
ELEMENTALIS.

Figura Ignis			
Ignis	Aër	Aqua	Terra
Aër	Ignis	Terra	Aqua
Aqua	Terra	Ignis	Aër
Terra	Aqua	Aër	Ignis

Figura Aëris			
Aër	Ignis	Aqua	Terra
Ignis	Aër	Terra	Aqua
Aqua	Terra	Aër	Ignis
Terra	Aqua	Ignis	Aër

Figura Aquæ			
Aqua	Terra	Aër	Ignis
Terra	Aqua	Ignis	Aër
Aër	Ignis	Aqua	Terra
Ignis	Aër	Terra	Aqua

Figura Terræ			
Terra	Aqua	Aër	Ignis
Aqua	Terra	Ignis	Aër
Aër	Ignis	Terra	Aqua
Ignis	Aër	Aqua	Terra

Figura 1.1: (a) Cuadrado latino de Ahmad al-Buni (Fuente: (al Buni, 1980)). (b) Cuadrado latino de por Ramón Llull (Fuente: Ars Demonstrativa de la edición latina de Maguncia, 1722, vol.III).

$A\alpha$	$B\gamma$	$C\beta$
$B\beta$	$C\alpha$	$A\gamma$
$C\gamma$	$A\beta$	$B\alpha$

Figura 1.2: Cuadrado greco-latino (Fuente: Wikipedia)

Sin embargo, fue el matemático suizo Leonhard Euler quien, en 1779, introdujo de manera formal el concepto de cuadrado latino mientras trataba de dar solución al conocido hoy día como *problema de los 36 oficiales*. Dicho problema consiste en colocar en una matriz cuadrada de orden seis a 36 militares de seis regimientos distintos y seis rangos distintos, de tal manera que ni regimiento ni rango se repitan por filas o columnas. Euler representó ambas categorías por letras del alfabeto griego y latino, dando lugar al concepto de *cuadrado greco-latino*, equivalente a dos *cuadrados latinos ortogonales* (Figura 1.2).

Euler demostró que estas estructuras pueden ser construidas siempre que su orden sea impar o múltiplo de cuatro. De manera errónea, determinó que era imposible construirlas cuando  $n = 2 \pmod{4}$ . Fueron Satyendra Nath Bose, Sharadchandra Shankar Shrikhande y Ernest Tilden Parker quienes demostraron en (Bose, Parker, y Shrikhande, 1960) que la conjetura de Euler es falsa para todo cuadrado de orden igual o superior a diez. Como consecuencia, se probó la existencia de cuadrados greco-latinos de orden  $n$  para todo  $n > 2$ , excepto para  $n = 6$ .

Desde los trabajos de Euler, la teoría de cuadrados latinos ha sido tratada ampliamente en la literatura. Cabe destacar el hecho de que el número de cuadrados latinos experimenta un crecimiento desmesurado a medida que incrementa el orden. Hasta el momento, sólo se conoce el número exacto de cuadrados latinos hasta orden 11 (Hulpke, Kaski, y Östergård, 2011; Kolesova, Lam, y Thiel, 1990; McKay, Meynert, y Myrvold, 2007) (ver Cuadro 1.1).

Cuadro 1.1: Número de cuadrados latinos en función de su tamaño  $n$ 

$n$	$ \mathcal{L}(n) $
1	1
2	2
3	12
4	576
5	161280
6	812851200
7	61479419904000
8	108776032459082956800
9	5524751496156892842531225600
10	9982437658213039871725064756920320000
11	776966836171770144107444346734230682311065600000

## 1.2– Conjuntos críticos

Dado  $P \in \mathcal{PL}(n)$ , denotamos por  $P[i, j]$  al símbolo que aparece en la celda  $(i, j)$  en  $P$ , para todo  $i, j \leq n$ . De esta forma,  $P$  viene dada de forma única por su conjunto de entradas

$$\text{Ent}(P) := \{(i, j, P[i, j]) : i, j \in [n]\}.$$

Se dice que  $P$  es *completable* a un cuadrado latino  $L \in \mathcal{L}(n)$  si  $\text{Ent}(P) \subseteq \text{Ent}(L)$ . Abusando del lenguaje, denotamos  $P \subseteq L$  en dicho caso. De existir un único cuadrado latino con estas características, se dice que  $P$  es *únicamente completable* a  $L$ . El problema de decidir si un cuadrado latino parcial es únicamente completable es NP-completo (Colbourn, Colbourn, y Stinson, 1984). Más aún, el problema de encontrar la existencia de una completación para  $P$  también es NP-completo (Colbourn, 1984). El siguiente es un ejemplo de un cuadrado latino parcial únicamente completable y del único cuadrado latino que lo contiene.

1	2	
2		1
3		

 $\subset$ 

1	2	3
2	3	1
3	1	2

A la hora de comprobar la completabilidad de un cuadrado latino parcial  $P \in \mathcal{PL}(n)$  resulta útil encontrar entradas forzadas. Una *entrada forzada* en  $P$  es una terna  $(i, j, k) \in [n] \times [n] \times [n]$  tal que  $P[i, j] = \emptyset$ , y  $k$  el único símbolo que no aparece en el conjunto de entradas contenidas tanto en la  $i$ -ésima fila como en la  $j$ -ésima columna de  $P$ . Así, por ejemplo, la entrada  $(1, 3, 3)$  es forzada en el siguiente cuadrado latino parcial, en el que hemos destacado la correspondiente casilla  $(1, 3)$ .

1	2		
		4	
			2
	3		

En 1977, Nelder (Nelder, 1977) introdujo el concepto de *conjunto crítico* de un cuadrado latino  $L \in \mathcal{L}(n)$  como cualquier cuadrado latino parcial  $P \in \mathcal{PL}(n)$  únicamente completable a  $L$ , de manera que, si existe  $P' \in \mathcal{PL}(n)$  tal que  $P' \subset P$ , entonces  $P'$  no es únicamente completable a  $L$ . El siguiente es un ejemplo de un conjunto crítico y del único cuadrado latino que lo contiene.

1	2	
2		

 $\subset$ 

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Nelder también introdujo el problema relativo al cálculo del tamaño mínimo y el tamaño máximo de los conjuntos críticos de cualquier cuadrado latino de orden  $n$ , denotados como  $\text{scs}(n)$  y  $\text{lcs}(n)$  respectivamente. Dos años más tarde, el matemático Bohdan Smetaniuk (Smetaniuk, 1979) demostró que  $\text{scs}(2n) \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$ , asegurando además la existencia de dichos conjuntos inicialmente conjeturados por Nelder. Este hecho fue descubierto también por Donald Joseph Curran y Gerrit Hendrik Johannes Van Ree (Curran y Van Rees, 1979), quienes además demostraron la misma inecuación para el caso impar. Por otra parte, determinaron los valores de los conjuntos críticos mínimos para los cuadrados latinos de orden menor o igual a 5, y establecieron límites para el mayor y menor tamaño de conjunto crítico.

### 1.3– Autotopismos

El anterior concepto de completabilidad fue generalizado de forma natural en (Falcón, 2006) (ver también (Falcón, 2011)), imponiendo para ello la simetría descrita por un determinado autotopismo. En esta sección repasamos este último concepto, vinculado a las distintas simetrías de todo cuadrado latino parcial.

Sea  $S_n$  el grupo simétrico del conjunto  $[n]$ . Esto es, el grupo formado por todas las permutaciones de dicho conjunto. Toda permutación  $\pi \in S_n$  puede descomponerse de forma única en producto de ciclos disjuntos. Su estructura cíclica  $z_\pi$  es la expresión  $n^{d_n^\pi} \dots 1^{d_1^\pi}$ , donde, para cada  $\ell \in \{1, \dots, n\}$ , el valor  $d_\ell^\pi$  denota el número de ciclos de longitud  $\ell$  en la citada descomposición de  $\pi$  en ciclos disjuntos. En la práctica, si  $d_\ell^\pi = 1$ , no suele incluirse el exponente  $d_\ell^\pi$  en la expresión  $z_\pi$ . Así, por ejemplo, la permutación  $(123)(45)(67)(8) \in S_8$  tiene estructura cíclica  $32^21$ . Si, tal y como ocurre en el anterior ejemplo, la descomposición de una permutación en ciclos disjuntos permite que los elementos del conjunto  $[n]$  aparezcan ordenados de forma natural, diremos que la permutación en cuestión es *canónica*.

El grupo simétrico  $S_n$  actúa sobre el conjunto  $\mathcal{PL}(n)$  de manera que, dada una terna  $\Theta = (\alpha, \beta, \gamma) \in S_n \times S_n \times S_n$ , esta actúa sobre un cuadrado latino parcial  $P \in \mathcal{PL}(n)$ , dando lugar a un nuevo cuadrado latino parcial  $P^\Theta$ , cuyo conjunto de entradas es

$$\text{Ent}(P^\Theta) := \{(\alpha(i), \beta(j), \gamma(k)) : (i, j, k) \in \text{Ent}(P)\}.$$

Esto es,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  constituyen, respectivamente, una permutación de las filas, de las columnas y de los símbolos en  $P$ . La terna  $\Theta$  recibe el nombre de *isotopismo*, y los cuadrados latinos parciales  $P$  y  $P^\Theta$  se dicen que son *isotópicos*. La estructura cíclica del isotopismo  $\Theta$  se define como la terna  $z_\Theta = (z_\alpha, z_\beta, z_\gamma)$ . Así, por ejemplo, la estructura cíclica del isotopismo  $((123)(45)(6), (12)(34)(56), (123456)) \in S_6 \times S_6 \times S_6$  es la terna  $(321, 2^3, 6)$ . Si, tal y como ocurre en el anterior ejemplo, las tres permutaciones que componen el isotopismo en cuestión son canónicas, diremos que el isotopismo es *canónico*. Si  $\alpha = \beta = \gamma$ , el isotopismo  $\Theta$  es, de hecho, un *isomorfismo*. Finalmente, si  $P^\Theta = P$ , entonces  $\Theta$  constituye un *autotopismo* (un *automorfismo* si  $\alpha = \beta = \gamma$ ) del cuadrado latino parcial  $P$ . El conjunto  $\text{Atop}(P)$  formado por todos los autotopismos de  $P$  tiene estructura de grupo, y recibe el nombre de *grupo de autotopismos* de  $P$ .

*Ejemplo 1.1.* Consideremos el siguiente cuadrado latino parcial de orden cuatro, y el isotopismo  $\Theta = ((12)(34), (1234), (123))$ .

$$P \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 1 & & 3 \\ \hline 3 & & 1 & \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

A la hora de definir el cuadrado latino parcial isotópico  $P^\Theta$ , los cambios que se deben realizar son:

1. Intercambiar ambas filas 1 y 2; y ambas filas 3 y 4.
2. Sustituir la columna 1 por la 4; la 2 por la 1; la 3 por la 2; y la 4 por la 3.
3. Sustituir el símbolo 1 por el 2; el 2 por el 3; y el 3 por el 1.

Resulta así,

$$P^\Theta \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 & \\ \hline 4 & & 3 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 1 & 3 \\ \hline & 1 & & 2 \\ \hline \end{array}$$

◁

Sea  $P \in \mathcal{PL}(n)$  y  $\Theta = (\alpha, \beta, \gamma) \in \text{Atop}(P)$ . Para cada entrada  $(i, j, k) \in \text{Ent}(P)$  se define su  $\Theta$ -órbita como el conjunto

$$\text{Orb}_\Theta((i, j, k)) := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{(\alpha^m(i), \beta^m(j), \gamma^m(k))\} \subseteq \text{Ent}(L).$$

Nótese que, fijada una entrada en  $P$ , todas las entradas de su  $\Theta$ -órbita vienen unívocamente determinadas por el autotopismo  $\Theta$ . Diremos entonces que dichas entradas están  $\Theta$ -forzadas. Por su parte, una  $\Theta$ -órbita se dice *trivial* si está formado por una única entrada. Esto ocurre cuando  $\alpha^2(i) = i$ ,  $\beta^2(j) = j$  y  $\gamma^2(k) = k$ , para algún  $i, j, k \in [n]$ . Si este no es el caso, entonces la  $\Theta$ -órbita se llama:

- *Principal*, si todo par de entradas  $(i_1, j_1, k_1)$  e  $(i_2, j_2, k_2)$  en la órbita verifican que  $i_1 \neq i_2$ ,  $j_1 \neq j_2$  y  $k_1 \neq k_2$ .
- *Secundaria*, si contiene dos entradas con una componente común. En dicho caso, la órbita se dice *monótona por filas* (respectivamente, *por columnas*) si todas sus entradas están en la misma fila (respectivamente, columna). Más aún, dos  $\Theta$ -órbitas monótonas por filas (respectivamente, por columnas) se dicen *paralelas* si los correspondientes conjuntos de columnas y símbolos (respectivamente, filas y símbolos) de sus entradas coinciden.

Por su parte, una  $\Theta$ -órbita secundaria se dice *monótona por símbolos* si todas sus entradas tienen el mismo símbolo. Más aún, dos  $\Theta$ -órbitas monótonas por símbolos se dicen *paralelas* si los correspondientes conjuntos de filas y comcolumnas de sus entradas coinciden.

Finalmente, si una  $\Theta$ -órbita secundaria no es monótona por filas, columnas o símbolos, entonces se dice que es *no monótona*.

Sea  $\text{Orb}_\Theta(P)$  el conjunto formado por todas las  $\Theta$ -órbitas de  $P$ . Si la estructura cíclica de  $\Theta$  es  $z_\pi = n^{d_n^\pi} \dots 1^{d_1^\pi}$ , entonces

$$|\text{Orb}_\Theta(P)| = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i \cdot d_i^\alpha \cdot j \cdot d_j^\beta}{\text{m.c.m.}(i, j)}, \quad (1.1)$$

donde m.c.m. denota el mínimo común múltiplo. Además, el conjunto  $\text{Orb}_\Theta(P)$  es una partición del conjunto de entradas  $\text{Ent}(P)$ . Para facilitar la visualización de dicha partición, se colorean todas las celdas de una misma  $\Theta$ -órbita en  $P$  con un mismo color, de tal forma que distintas  $\Theta$ -órbitas tienen asociados distintos colores. El resultado da lugar a lo que se denomina una  $\Theta$ -coloración de  $P$ .

*Ejemplo 1.2.* Consideremos el siguiente cuadrado latino  $L$  de orden cuatro y uno de sus autotopismos  $\Theta = ((1234), (1234), (24)) \in \text{Atop}(L)$ :

$$L \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 4 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Atendiendo a (1.1), se tiene que

$$|\text{Orb}_{\Theta}(L)| = \frac{4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1}{4} = 4.$$

Más concretamente,  $\text{Orb}_{\Theta}(L) = \{O_1, O_2, O_3, O_4\}$ , donde

- $O_1 := \{(1, 1, 1), (2, 2, 1), (3, 3, 1), (4, 4, 1)\}$ .
- $O_2 := \{(1, 2, 2), (2, 3, 4), (3, 4, 2), (4, 1, 4)\}$ .
- $O_3 := \{(1, 3, 3), (2, 4, 3), (3, 1, 3), (4, 2, 3)\}$ .
- $O_4 := \{(1, 4, 4), (2, 1, 2), (3, 2, 4), (4, 3, 2)\}$ .

Una  $\Theta$ -coloración de  $L$  es la siguiente.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

◁

El grupo simétrico  $S_3$  también actúa sobre el conjunto  $\mathcal{PL}(n)$  de manera que, dada una permutación  $\pi \in S_3$ , esta actúa sobre un cuadrado latino parcial  $P \in \mathcal{PL}(n)$ , dando lugar a un nuevo cuadrado latino parcial  $P^\pi$ , cuyo conjunto de entradas es

$$\text{Ent}(P^\pi) := \{(i_{\pi(1)}, i_{\pi(2)}, i_{\pi(3)}) : (i_1, i_2, i_3) \in \text{Ent}(P)\}.$$

Este nuevo cuadrado latino parcial se denomina *conjugado* de  $P$ , y la permutación  $\pi$  se denomina *parastrofismo*. Se trata de una permutación común entre las componentes (fila, columna y símbolo) de toda entrada de  $P$ . En particular  $P^{(12)} = P^t$ , la traspuesta de  $P$ .

Combinando ambas definiciones de parastrofismo e isotopismo resulta el concepto de *paratopismo*. En concreto, dos cuadrados latinos parciales se dicen *paratopicos* si el primero es isotópico a un conjugado del segundo. Ser isotópicos o paratopicos constituyen relaciones de equivalencia entre cuadrados latinos parciales del mismo orden y tamaño, dando lugar, respectivamente, a las denominadas *clases de isotopismo* y *clases principales*. En particular, es conocida (Adams, Bean, y Khodkar, 2003) la clasificación de conjuntos críticos de todas las clases de isotopismos y clases principales de cuadrados latinos de orden  $n \leq 6$ . También se conocen conjuntos críticos para todas las clases principales de cuadrados latinos de orden siete (Donovan y Howse, 1998).

## 1.4– Conjuntos críticos basados en autotopismos

Pasamos a recordar ahora la ya mencionada completabilidad de cuadrados latinos atendiendo a un autotopismo dado (Falcón, 2006). Para ello, consideramos un cuadrado latino parcial  $P \in \mathcal{PL}(n)$  y un isotopismo  $\Theta \in S_n \times S_n \times S_n$ . Se dice que  $P$  es  $\Theta$ -completable si existe un cuadrado latino  $L \in \mathcal{L}(n)$  tal que  $P \subseteq L$  y  $\Theta \in \text{Atop}(L)$ . Si dicho cuadrado latino es único, entonces  $P$  se dice *únicamente*  $\Theta$ -completable a  $L$ . Se denomina  $\Theta$ -conjunto crítico de  $L$  a todo cuadrado latino

parcial  $P \in \mathcal{PL}(n)$ , únicamente  $\Theta$ -completable a  $L$ , verificando que, si  $Q \in \mathcal{PL}(n)$  es tal que  $\text{Ent}(Q) \subset \text{Ent}(P)$ , entonces  $Q$  no es únicamente  $\Theta$ -completable. Cuando  $\Theta$  es el autotopismo trivial  $(\text{Id}_n, \text{Id}_n, \text{Id}_n)$ , estos conceptos coinciden con los vistos en la Sección 1.2.

*Ejemplo 1.3.* Sea  $\Theta = ((1234), (1234), (24)) \in S_4 \times S_4 \times S_4$ . El cuadrado latino parcial

1	2		

es únicamente  $\Theta$ -completable al cuadrado latino descrito en el Ejemplo 1.2. Para verlo más claro, introducimos en color negro las entradas que resultan  $\Theta$ -forzadas.

1	2		
	1	4	
		1	2
4			1

A partir de aquí se comprueba fácilmente que el resto de entradas son forzadas.  $\triangleleft$

Sea  $\text{CS}_\Theta(L)$  el conjunto de  $\Theta$ -conjuntos críticos del cuadrado latino  $L$ , y sean  $\text{scs}_\Theta(L)$  y  $\text{lcs}_\Theta(L)$ , respectivamente, el menor y mayor tamaño de  $\Theta$ -conjuntos críticos de  $L$ . Los siguientes resultados son conocidos y serán utilizados a lo largo del presente manuscrito.

**Teorema 1.4.** (Falcón, Johnson, y Perkins, 2021) Sean  $L \in \mathcal{L}(n)$  y  $\Theta \in \text{Atop}(L)$ . Los valores  $\text{scs}_\Theta(L)$  y  $\text{lcs}_\Theta(L)$ , así como la cardinalidad del conjunto  $\text{CS}_\Theta(L)$ , sólo dependen de la clase principal de  $L$  y de la estructura cíclica de  $\Theta$ .

**Proposición 1.5.** (Falcón y cols., 2021) Si  $L \in \mathcal{L}(n)$  y  $\Theta \in \text{Atop}(L)$ , entonces ningún  $\Theta$ -conjunto crítico de  $L$  tendrá más de una entrada en la misma órbita. Como consecuencia,

$$0 < \text{scs}_\Theta(L) \leq \text{lcs}_\Theta(L) \leq |\text{Orb}_\Theta(L)|.$$

**Proposición 1.6.** (Falcón y cols., 2021) Sean  $L \in \mathcal{L}(n)$  y  $\Theta \in \text{Atop}(L)$ . Si existen  $m$   $\Theta$ -órbitas secundarias paralelas del mismo tipo (es decir, monótonas por filas, columnas o símbolos), entonces cada  $\Theta$ -conjunto crítico de  $L$  contiene, al menos,  $m - 1$  entradas. Por tanto,

$$\text{scs}_\Theta(L) \geq m - 1.$$

**Teorema 1.7.** (Falcón y cols., 2021) Sean  $L \in \mathcal{L}(n)$  y  $\Theta = (\alpha, \beta, \text{Id}_n) \in \text{Atop}(L)$ , donde  $\text{Id}_n$  denota la permutación trivial en  $S_n$ . Si  $z_\alpha = z_\beta = n$ , entonces

- $\text{scs}_\Theta(L) = \text{lcs}_\Theta(L) = n - 1$ , y
- $|\text{CS}_\Theta(L)| = n^n$ .

**Lema 1.8.** (Falcón y cols., 2021) Sea  $L \in \mathcal{L}(n)$  y  $\theta = (\alpha, \beta, \gamma) \in \text{Atop}(L)$  tal que  $\lambda_1^\alpha = \lambda_1^\beta = 1$ . Entonces, ningún  $\theta$ -conjunto crítico de  $L$  contendrá la entrada relativa a la órbita trivial.

**Proposición 1.9.** (Falcón y cols., 2021) Supongamos  $P$  y  $Q$  dos subcuadrados latinos parciales (no necesariamente distintos) relativos a un cuadrado latino  $L \in \mathcal{L}(n)$  de tal manera que se cumpla una de las siguientes condiciones:

- $\text{Filas}(P) = \text{Filas}(Q)$ .
- $\text{Columnas}(P) = \text{Columnas}(Q)$ .

- $\text{Simbolos}(P) = \text{Simbolos}(Q)$ .

Además, supongamos un autotopismo  $\Theta \in \text{Atop}(L)$  tal que  $P^\Theta = Q$  y  $Q^\Theta = P$ . Entonces:

$$(\text{Ent}(P) \cup \text{Ent}(Q)) \cap \text{Orb}_\Theta(R) \neq \emptyset$$

para cualquier  $\Theta$ -conjunto crítico relativo a  $L$ .

**Lema 1.10.** (Falcón y cols., 2021) Sean  $L \in \mathcal{L}(n)$  y  $\Theta, \Theta' \in S_n \times S_n \times S_n$  tales que  $\Theta \in \text{Atop}(L) \cap \text{Atop}(L^{\Theta'})$  y  $\Theta' \notin \text{Atop}(L)$ . Entonces, todo  $\Theta$ -conjunto crítico de  $L$  contiene al menos una entrada del conjunto  $\text{Ent}(L) \setminus \text{Ent}(L^{\Theta'})$ .

En base a todos estos resultados, el Cuadro 1.2 muestra los valores  $\text{scs}_\Theta(L)$  y  $\text{lcs}_\Theta(L)$ , así como la cardinalidad del conjunto  $\text{CS}_\Theta(L)$ , para todo cuadrado latino de orden  $n \leq 5$ . Teniendo en cuenta el Teorema 1.4, basta fijarse en un representante de cada clase principal y de cada estructura cíclica que posibilita un autotopismo del primero. En concreto, los representantes de clases principales a los que hace referencia el Cuadro 1.2 son los siguientes.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 4 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 4 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 4 & 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \\
 L_2 & L_3 & L_{4,1} & L_{4,2} \\
 \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ \hline 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ \hline 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} & \\
 L_{5,1} & L_{5,2} & & \\
 \end{array} \tag{1.2}$$

Para orden  $n > 5$  sólo se conocen de forma exacta (Adams y cols., 2003) el tamaño de los conjuntos críticos de cuadrados latinos de orden seis, y el tamaño de  $\Theta$ -conjuntos críticos, con  $\Theta$  no trivial, vinculados a los resultados que acabamos de enumerar. Además, para  $n = 6$ , se conocen cotas superiores de  $\text{scs}_\Theta(L)$  y cotas inferiores de  $\text{lcs}_\Theta(L)$ . Estas cotas fueron obtenidas en el Trabajo Fin de Grado del autor del presente manuscrito (González-Regadera, 2022), tomando para ello conjuntos aleatorios formados por, a lo más, una entrada de cada  $\Theta$ -órbita de  $L$ , y comprobando si las mismas forman un cuadrado latino únicamente completable a  $L$ . En caso afirmativo se van eliminando entradas de dicho conjunto aleatorio hasta que se alcanza un  $\Theta$ -conjunto crítico.

Este procedimiento se realizó mil veces para cada posible tamaño de  $\Theta$ -conjunto crítico, dando lugar a las cotas indicadas. De hecho, esta forma de proceder ha permitido obtener  $\Theta$ -conjuntos críticos para todos los posibles tamaños comprendidos entre las cotas obtenidas. Sin embargo, la aleatoriedad llevada a cabo no permite asegurar que estas cotas sean óptimas, siendo necesario un estudio pormenorizado que permita bien asegurar dicha optimalidad, o bien determinar la existencia de mejores y óptimas cotas. Las cotas en cuestión se muestran en el Cuadro 1.3, donde nuevamente se atiende a la clase principal del cuadrado latino y a las estructuras cíclicas que posibilitan un autotopismo del mismo <sup>1</sup>. En aquellos casos en los que aparece una referencia en la última columna del cuadro, las cotas mostradas se han probado ya ser óptimas.

<sup>1</sup>Nótese que las componentes de estas estructuras cíclicas pueden intercambiarse, al mismo tiempo que se intercambian de forma análoga por conjugación las componentes del cuadrado latino en cuestión

Cuadro 1.2: Menor y mayor tamaño de  $\Theta$ -conjuntos críticos de cuadrados latinos de orden  $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ .

(Falcón y cols., 2021))

$L$	$\Theta \in \text{Atop}(L)$	$z_\Theta$	$ \text{CS}_\Theta(L) $	$\text{scs}_\Theta(L)$	$\text{lcs}_\Theta(L)$
$L_2$	$(\text{Id}_2, \text{Id}_2, \text{Id}_2)$	$(1^2, 1^2, 1^2)$	4	1	1
	$((12), (12), \text{Id}_2)$	$(2, 2, 1^2)$	4	1	1
$L_3$	$(\text{Id}_3, \text{Id}_3, \text{Id}_3)$	$(1^3, 1^3, 1^3)$	27	2	3
	$((12), (12), (13))$	$(21, 21, 21)$	14	1	2
	$((123), (132), \text{Id}_3)$	$(3, 3, 1^3)$	27	2	2
	$((123), (123), (132))$	$(3, 3, 3)$	9	1	1
$L_{4,1}$	$(\text{Id}_4, \text{Id}_4, \text{Id}_4)$	$(1^4, 1^4, 1^4)$	576	5	7
	$((12)(34), (12)(34), \text{Id}_4)$	$(2^2, 2^2, 1^4)$	192	4	4
	$((23), (14), (14))$	$(21^2, 21^2, 21^2)$	256	4	4
	$((12)(34), (13)(24), (14)(23))$	$(2^2, 2^2, 2^2)$	256	3	3
	$((243), (134), (134))$	$(31, 31, 31)$	90	2	2
	$((1234), (1234), (24))$	$(4, 4, 21^2)$	64	2	2
$L_{4,2}$	$(\text{Id}_4, \text{Id}_4, \text{Id}_4)$	$(1^4, 1^4, 1^4)$	736	4	6
	$((12)(34), (12)(34), \text{Id}_4)$	$(2^2, 2^2, 1^4)$	192	4	4
	$((13)(24), (14)(23), (34))$	$(2^2, 2^2, 21^2)$	224	3	3
	$((12), (12), (34))$	$(21^2, 21^2, 21^2)$	256	4	4
	$((1324), (1324), (12)(34))$	$(4, 4, 2^2)$	64	2	2
	$((1423), (1324), \text{Id}_4)$	$(4, 4, 1^4)$	256	3	3
$L_{5,1}$	$(\text{Id}_5, \text{Id}_5, \text{Id}_5)$	$(1^5, 1^5, 1^5)$	53250	6	10
	$((12)(35), (13)(45), (14)(23))$	$(2^21, 2^21, 2^21)$	3088	3	5
	$((2354), (1243), (1243))$	$(41, 41, 41)$	832	3	3
	$((12345), (15432), \text{Id}_5)$	$(5, 5, 1^5)$	3125	4	4
	$((12345), (12345), (13524))$	$(5, 5, 5)$	250	2	2
$L_{5,2}$	$(\text{Id}_5, \text{Id}_5, \text{Id}_5)$	$(1^5, 1^5, 1^5)$	48462	7	11
	$((13)(45), (25)(34), (13)(45))$	$(2^21, 2^21, 2^21)$	2896	3	5
	$((345), (345), (345))$	$(31^2, 31^2, 31^2)$	8424	5	6

Los representantes de clases principales a los que hace referencia el Cuadro 1.3 son los siguientes.

1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5
3	5	6	1	4	2
4	6	5	2	3	1
5	3	1	6	2	4
6	4	2	5	1	3

$L_{6,1}$

1	2	3	4	5	6
2	3	1	5	6	4
3	1	2	6	4	5
4	6	5	1	3	2
5	4	6	2	1	3
6	5	4	3	2	1

$L_{6,2}$

1	2	3	4	5	6
2	3	1	5	6	4
3	1	2	6	4	5
4	6	5	3	2	1
5	4	6	1	3	2
6	5	4	2	1	3

$L_{6,3}$

1	2	3	4	5	6
2	3	1	6	4	5
3	1	2	5	6	4
4	6	5	2	1	3
5	4	6	1	3	2
6	5	4	3	2	1

$L_{6,4}$

1	2	3	4	5	6
2	3	1	6	4	5
3	4	5	2	6	1
4	1	6	5	2	3
5	6	2	3	1	4
6	5	4	1	3	2

$L_{6,5}$

1	2	3	4	5	6
2	4	5	1	6	3
3	1	2	6	4	5
4	3	6	5	1	2
5	6	1	2	3	4
6	5	4	3	2	1

$L_{6,6}$



1	2	3	4	5	6
2	4	5	1	6	3
3	1	2	6	4	5
4	5	6	2	3	1
5	6	4	3	1	2
6	3	1	5	2	4

 $L_{6,7}$ 

1	2	3	4	5	6
2	4	5	1	6	3
3	5	6	2	4	1
4	6	1	3	2	5
5	1	4	6	3	2
6	3	2	5	1	4

 $L_{6,8}$ 

1	2	3	4	5	6
2	4	5	1	6	3
3	6	4	2	1	5
4	3	6	5	2	1
5	1	2	6	3	4
6	5	1	3	4	2

 $L_{6,9}$ 

1	2	3	4	5	6
2	5	6	3	1	4
3	6	2	1	4	5
4	3	5	2	6	1
5	4	1	6	3	2
6	1	4	5	2	3

 $L_{6,10}$ 

1	2	3	4	5	6
2	6	4	3	1	5
3	5	6	1	2	4
4	3	5	2	6	1
5	4	1	6	3	2
6	1	2	5	4	3

 $L_{6,11}$ 

1	2	3	4	5	6
2	6	4	5	3	1
3	4	2	6	1	5
4	5	1	2	6	3
5	3	6	1	2	4
6	1	5	3	4	2

 $L_{6,12}$

Cuadro 1.3: Cotas del menor y mayor tamaño de  $\Theta$ -conjuntos críticos en  $\mathcal{L}(6)$ .  
(González-Regadera, 2022)

$n$	$\Theta \in \text{Atop}(L_{6,n})$	$z_\Theta$	Cota superior $\text{scs}_\Theta(L_{6,n})$	Cota inferior $\text{lcs}_\Theta(L_{6,n})$	Referencia		
1	$(\text{Id}_6, \text{Id}_6, \text{Id}_6)$	$(1^6, 1^6, 1^6)$	11	17	(Adams y cols., 2003)		
	$((36)(45), (36)(45), (36)(45))$	$(2^2 1^2, 2^2, 1^2, 2^2 1^2)$	7	9			
	$((12)(35)(46), (12)(34)(56), \text{Id}_6)$	$(2^3, 2^3, 1^6)$	9	10			
	$((12)(34)(56), (12)(35)(46), (36)(45))$	$(2^3, 2^3, 2^2 1^2)$	7	8			
2	$(\text{Id}_6, \text{Id}_6, \text{Id}_6)$	$(1^6, 1^6, 1^6)$	12	18	(Adams y cols., 2003)		
	$((23)(45), (23)(45), (23)(45))$	$(2^2 1^2, 2^2 1^2, 2^2 1^2)$	7	9			
	$((14)(25)(36), (14)(26)(35), \text{Id}_6)$	$(2^3, 2^3, 1^6)$	9	10			
	$((14)(26)(35), (14)(25)(36), (23)(56))$	$(2^3, 2^3, 2^2 1^2)$	7	8			
	$((456), (456), (456))$	$(31^3, 31^3, 31^3)$	8	9			
	$((123)(456), (15)(26)(34), (163524))$	$(3^2, 2^3, 6)$	4	4			
	$((132)(465), (123)(456), \text{Id}_6)$	$(3^2, 3^2, 1^6)$	8	8			
	$((123)(456), (132)(456), (465))$	$(3^2, 3^2, 31^3)$	6	7			
	$((142635), (153426), (13)(46))$	$(6, 6, 2^2 1^2)$	4	4			
	$((142536), (143526), (456))$	$(6, 6, 31^3)$	3	3			
	3	$(\text{Id}_6, \text{Id}_6, \text{Id}_6)$	$(1^6, 1^6, 1^6)$	11		16	(Adams y cols., 2003)
		$((456), (123), (123))$	$(31^3, 31^3, 31^3)$	8		9	
$((14)(26)(35), (15)(26)(34), (12)(45))$		$(2^3, 2^3, 2^2 1^2)$	6	8			
$((123)(465), (132)(465), \text{Id}_6)$		$(3^2, 3^2, 1^6)$	8	8			
$((123)(456), (123)(465), (132))$		$(3^2, 3^2, 31^3)$	6	6			
$((153624), (152634), (13)(45))$		$(6, 6, 2^2 1^2)$	4	4			
$((123)(465), (132)(465), (132))$		$(3^2, 3^2, 1^6)$	8	8			
4	$(\text{Id}_6, \text{Id}_6, \text{Id}_6)$	$(1^6, 1^6, 1^6)$	9	17	(Adams y cols., 2003)		
	$((23)(45), (23)(45), (23)(45))$	$(2^2 1^2, 2^2 1^2, 2^2 1^2)$	7	9			
	$((16)(25)(34), (16)(25)(34), \text{Id}_6)$	$(2^3, 2^3, 1^6)$	9	10			
	$((14)(25)(36), (15)(26)(34), (23)(45))$	$(2^3, 2^3, 2^2 1^2)$	6	8			
	$((123)(465), (16)(25)(34), (153624))$	$(3^2, 2^3, 6)$	4	4			
	$((123)(465), (132)(456), \text{Id}_6)$	$(3^2, 3^2, 1^6)$	8	8			
	$((123)(465), (123)(465), (132)(456))$	$(3^2, 3^2, 3^2)$	4	5			
	$((142635), (153624), \text{Id}_6)$	$(6, 6, 1^6)$	5	5			
	$((142635), (142635), (123)(465))$	$(6, 6, 3^2)$	3	3			
	$((142635), (142635), (123)(465))$	$(6, 6, 3^2)$	3	3			
5	$(\text{Id}_6, \text{Id}_6, \text{Id}_6)$	$(1^6, 1^6, 1^6)$	10	17	(Adams y cols., 2003)		
	$(\text{Id}_6, (15)(24)(36), (15)(24)(63))$	$(1^6, 2^3, 2^3)$	9	10			
	$((12)(45), (23)(46), (12)(45))$	$(2^2 1^2, 2^2 1^2, 2^2 1^2)$	8	9			
	$((345), (123)(465), (123)(465))$	$(31^3, 3^2, 3^2)$	4	6			
	$((345), (143526), (143526))$	$(31^3, 6, 6)$	3	3			
	$((12)(45), (15)(26)(34), (14)(25)(36))$	$(2^2 1^2, 3^2, 3^2)$	6	8			
	$((12)(45), (15)(26)(34), (14)(25)(36))$	$(2^2 1^2, 3^2, 3^2)$	6	8			
6	$(\text{Id}_6, \text{Id}_6, \text{Id}_6)$	$(1^6, 1^6, 1^6)$	11	17	(Adams y cols., 2003)		
	$((23), (12)(34)(56), (12)(34)(56))$	$(21^4, 2^3, 2^3)$	7	9			
	$((25)(34), (25)(34)(25)(34))$	$(2^2 1^2, 2^2 1^2, 2^2 1^2)$	7	9			
	$((354), (124)(365), (124)(365))$	$(31^3, 3^2, 3^2)$	4	6			
	$((2453), (2453), (2453))$	$(41^2, 41^2, 41^2)$	5	6			
	$((354)(12), (164325), (134526))$	$(321, 6, 6)$	2	3			
	$((12345), (26543), (12345))$	$(51, 51, 51)$	3	4			
	$((12345), (26543), (12345))$	$(51, 51, 51)$	3	4			
7	$(\text{Id}_6, \text{Id}_6, \text{Id}_6)$	$(1^6, 1^6, 1^6)$	11	17	(Adams y cols., 2003)		
	$((12)(56), (14)(35), (24)(36))$	$(2^2 1^2, 2^2 1^2, 2^2 1^2)$	7	9			
	$((15)(26)(34), (15)(26)(34), \text{Id}_6)$	$(2^3, 2^3, 1^6)$	9	10			
	$((14)(26)(35), (15)(24)(36), (13)(45))$	$(2^3, 2^3, 2^2 1^2)$	6	8			
	$((123)(456), (164)(235), (136)(254))$	$(3^2, 3^2, 3^2)$	4	5			
	$((142536), (136542), (163)(245))$	$(6, 6, 3^2)$	3	3			
	$((142536), (136542), (163)(245))$	$(6, 6, 3^2)$	3	3			
8	$(\text{Id}_6, \text{Id}_6, \text{Id}_6)$	$(1^6, 1^6, 1^6)$	10	17	(Adams y cols., 2003)		
	$((12)(34), (14)(36), (24)(56))$	$(2^2 1^2, 2^2 1^2, 2^2 1^2)$	8	9			
	$((1234), (2653), (1234))$	$(41^2, 41^2, 41^2)$	5	6			
	$((24), (14)(23)(56), (14)(23)(56))$	$(21^4, 2^3, 2^3)$	7	9			
	$((24), (14)(23)(56), (14)(23)(56))$	$(21^4, 2^3, 2^3)$	7	9			
9	$(\text{Id}_6, \text{Id}_6, \text{Id}_6)$	$(1^6, 1^6, 1^6)$	10	17	(Adams y cols., 2003)		
	$((13)(24)(56), (12)(34)(56), (16)(23))$	$(2^3, 2^3, 2^2 1^2)$	6	8			
10	$(\text{Id}_6, \text{Id}_6, \text{Id}_6)$	$(1^6, 1^6, 1^6)$	10	17	(Adams y cols., 2003)		
	$((34), (14)(23)(56), (14)(23)(56))$	$(21^4, 2^3, 2^3)$	7	9			
	$((12)(34), (25)(36), (12)(34))$	$(2^2 1^2, 2^2 1^2, 2^2 1^2)$	7	9			
11	$(\text{Id}_6, \text{Id}_6, \text{Id}_6)$	$(1^6, 1^6, 1^6)$	10	17	(Adams y cols., 2003)		
	$((12)(35), (12)(56), (16)(34))$	$(2^2 1^2, 2^2 1^2, 2^2 1^2)$	8	9			
12	$(\text{Id}_6, \text{Id}_6, \text{Id}_6)$	$(1^6, 1^6, 1^6)$	11	17	(Adams y cols., 2003)		
	$(\text{Id}_6, (126)(345), (126)(345))$	$(1^6, 3^2, 3^2)$	8	8			
	$((34), (13)(24)(56), (13)(24)(56))$	$(21^4, 2^3, 2^3)$	7	9			
	$((45), (132465), (132465))$	$(21^4, 6, 6)$	4	5			
	$((345), (345), (345))$	$(31^3, 31^3, 31^3)$	8	9			
	$((345), (126)(354), (126)(354))$	$(31^3, 3^2, 3^2)$	6	7			
	$((12)(35), (26)(34), (12)(35))$	$(2^2 1^2, 2^2 1^2, 2^2 1^2)$	8	9			
	$((12)(35), (26)(34), (12)(35))$	$(2^2 1^2, 2^2 1^2, 2^2 1^2)$	8	9			
	$((354)(12), (132564), (142365))$	$(321, 6, 6)$	3	3			

---

### Metodología

---

En el presente manuscrito se pretende avanzar en el estudio de las cotas descritas en el Cuadro 1.3, que aún están por probar que sean óptimas. Para ello realizaremos un estudio de casos, que vendrá unívocamente determinado por la estructura cíclica del correspondiente autotopismo a analizar. En todos los casos descritos se procederá siguiendo los pasos que se muestran a continuación.

1. Se fija la estructura cíclica a estudiar.
2. Se define  $\Theta$  como el isotopismo canónico que tiene la anterior estructura cíclica.
3. Se describe una  $\Theta$ -coloración del cuadrado latino parcial trivial de orden seis.
4. De forma secuencial, se van introduciendo entradas en dicho cuadrado latino parcial, que sean candidatas a formar parte de nuestro  $\Theta$ -conjunto crítico, al que denotaremos a partir de ahora como  $\mathcal{C}_\Theta$ . Atendiendo a la Proposición 1.5, se toma a lo más una entrada de cada  $\Theta$ -órbita. Dicha entrada se toma en la celda  $(i, j)$  situada lo más arriba y a la izquierda posible, dentro de la  $\Theta$ -órbita en cuestión. Abusando del lenguaje, denotaremos este hecho como  $(i, j) \in \mathcal{C}_\Theta$ . De igual forma, denotaremos como  $(i, j) \notin \mathcal{C}_\Theta$  el hecho de que ninguna de las celdas de la  $\Theta$ -órbita vinculada a la celda  $(i, j)$  aparecerá rellena en  $\mathcal{C}_\Theta$ . Además, la selección de dichas entradas se hará sin pérdida de generalidad, atendiendo para ello a las relaciones de equivalencia descritas por isotopismos, conjugación y paratopismos.
5. En dicha  $\Theta$ -coloración, se presentan en blanco los símbolos de aquellas entradas que se tomen para conformar  $\mathcal{C}_\Theta$ . Al mismo tiempo, se presentan en negro aquellas entradas que están forzadas o  $\Theta$ -forzadas por la elección de las anteriores.
6. En el momento en el que las entradas marcadas en blanco determinen un cuadrado latino parcial únicamente  $\Theta$ -completable, se comprueba si éste es un  $\Theta$ -conjunto crítico. En caso negativo, se analizan qué entradas marcadas en blanco pueden eliminarse para conseguir el deseado  $\Theta$ -conjunto crítico  $\mathcal{C}_\Theta$ .

El procedimiento de comprobación se realiza mediante la función *existenDeMenorTamano* desarrollada en Python y que hace uso del código relativo al Trabajo Fin de Grado (González-Regadera, 2022). Todo el código necesario, así como la documentación, puede obtenerse en: <https://github.com/mangonreg/TFG> y <https://github.com/mangonreg/TFM>.

Además, con vistas a simplificar el estudio de casos, haremos uso del siguiente resultado, donde se plantea una nueva cota inferior para el tamaño mínimo de todo  $\Theta$ -conjunto crítico, que complementa la indicada en la Proposición 1.6. Atendemos para ello al número de ciclos no triviales (de longitud  $\ell \geq 2$ ) de los que consta la descomposición en ciclos disjuntos de cada una de las tres componentes del autotopismo  $\Theta$ .

**Proposición 2.1.** *Sean  $L \in \mathcal{L}(n)$  y  $\Theta = (\alpha, \beta, \gamma) \in \text{Atop}(L)$ . Si  $\alpha_0$  (respectivamente,  $\beta_0$  o  $\gamma_0$ ) es un ciclo no trivial en la descomposición en ciclos disjuntos de  $\alpha$  (respectivamente,  $\beta$  o  $\gamma$ ), entonces todo  $\Theta$ -conjunto crítico de  $L$  contiene al menos una entrada en las filas (respectivamente, una entrada en las columnas, o una entrada conteniendo un símbolo) que intervienen en el ciclo  $\alpha_0$  (respectivamente,  $\beta_0$  o  $\gamma_0$ ). Como consecuencia,*

$$\text{máx} \left\{ \sum_{i=2}^n d_i^\alpha, \sum_{i=2}^n d_i^\beta, \sum_{i=2}^n d_i^\gamma \right\} \leq \text{scs}_\Theta(L).$$

*Demostración.* Probamos la primera parte del resultado en el caso de disponer de un ciclo no trivial  $\alpha_0$  de la descomposición en ciclos disjuntos de la permutación de filas  $\alpha$ . (Los otros dos casos referentes a la permutación  $\beta$  de columnas y la permutación  $\gamma$  de símbolos, se demuestran análogamente por conjugación). Para ello, sea  $\bar{\alpha} \in S_n$  tal que

$$\bar{\alpha}(i) = \begin{cases} \alpha_0(i), & \text{si } i \text{ interviene en el ciclo } \alpha_0, \\ i, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Consideremos entonces el isotopismo  $\Theta' := (\bar{\alpha}, \text{Id}_n, \text{Id}_n) \in S_n \times S_n \times S_n$ , el cual consiste simplemente en una permutación de las filas que intervienen en el ciclo  $\alpha_0$ . Como dicho ciclo es no trivial, resulta que  $\Theta' \notin \text{Atop}(L)$ . Además, se comprueba fácilmente que  $\Theta \in \text{Atop}(L^{\Theta'})$ . El resultado viene entonces asegurado por el Lema 1.10.

Por su parte, la consecuencia a la que hace referencia el enunciado resulta inmediata a partir de lo anterior y del hecho de que la descomposición en ciclos de cada una de las permutaciones  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , a la que hace referencia el enunciado, es disjunta.  $\square$

### Autotopismos de ciclo largo

Comenzaremos nuestro estudio centrándonos en aquellas estructuras cíclicas vinculadas a ciclos de longitud cinco o seis.

#### 3.1– La estructura cíclica $(6, 6, 3^2)$

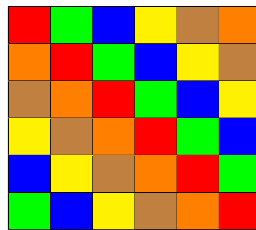
Esta estructura cíclica está vinculada a un autotopismo  $\Theta$  de las clases principales descritas por  $L_{6,4}$  y  $L_{6,7}$ . Atendiendo al Cuadro 1.3, se tiene que

$$scs_{\Theta}(L_{6,n}) \leq 3 \leq lcs_{\Theta}(L_{6,n}),$$

para  $n \in \{4, 7\}$ . Con vistas a probar que dichas cotas son óptimas, consideramos el isotopismo canónico

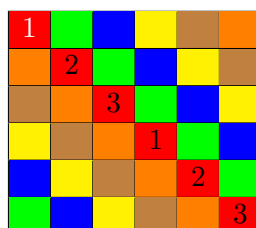
$$\Theta := ((123456), (123456), (123)(456)),$$

dando lugar a la siguiente  $\Theta$ -coloración.



Atendiendo a la estructura cíclica bajo consideración, se presentan seis órbitas secundarias no monótonas. Por su parte, se deduce de la anterior  $\Theta$ -coloración que, a la hora de seleccionar entradas para que conformen nuestro  $\Theta$ -conjunto crítico  $\mathcal{C}_{\Theta}$ , podemos reducir nuestra búsqueda a entradas de la primera fila. En particular, la Proposición 2.1 nos asegura que  $\mathcal{C}_{\Theta}$  debe contener al menos un par de entradas. Una de ellas debe contener un símbolo en el conjunto  $\{1, 2, 3\}$  y la otra en el conjunto  $\{4, 5, 6\}$ .

Salvo isotopismo (más concretamente, salvo permutación de símbolos), podemos tomar, sin pérdida de generalidad, la entrada  $(1, 1, 1)$  como inicial en nuestro candidato a  $\Theta$ -conjunto crítico. Completando con las entradas  $\Theta$ -forzadas obtenemos el siguiente cuadrado latino parcial.



A la hora de seleccionar nuestra segunda entrada, existen dos tipos de celdas vacías en la primera fila de nuestra matriz.

- La celda  $(1, 4)$ , en la que es factible introducir hasta cinco símbolos distintos (del 2 al 6). Esto es debido a que el único símbolo presente en su fila y columna es el 1.
- Celdas en las que es factible introducir hasta cuatro símbolos distintos. Esto es debido a que ya existen dos entradas (una de ellas forzada) con símbolos distintos en su correspondiente fila y columna.

Estudiamos ambos casos por separado.

**Caso 1)**  $(1, 4) \in \mathcal{C}_\Theta$ .

A la hora de introducir un símbolo en dicha celda, nos encontramos de nuevo con dos opciones, dependiendo de si tomamos o no un símbolo de la  $\Theta$ -órbita inicial. Estudiamos ambos casos por separado.

- **Tomar un símbolo de la  $\Theta$ -órbita inicial.**

Salvo isotopismo, podemos seleccionar el símbolo 2, obteniendo así el siguiente cuadrado latino parcial, donde hemos introducido también las entradas  $\Theta$ -forzadas.

1			2		
	2			3	
		3			1
2			1		
	3			2	
		1			3

Se puede observar que es imposible introducir el símbolo 3 en la primera fila, pues habría repetición de símbolos por columna, y tendríamos conflicto con la definición de cuadrado latino. Así pues, este caso no es posible.

- **Tomar un símbolo que no aparece en la  $\Theta$ -órbita inicial.**

Salvo isotopismo, podemos seleccionar el símbolo 4, obteniendo así el siguiente cuadrado latino parcial, donde, de nuevo, hemos introducido también las entradas  $\Theta$ -forzadas.

1			4		
	2			5	
		3			6
4			1		
	5			2	
		6			3

Es fácil comprobar que en cualquier celda aún vacía pueden colocarse dos símbolos distintos, jugando ambos un papel análogo en todos los casos. Así, salvo isotopismo, podemos tomar la entrada  $(1, 2, 6)$ , que fuerza el siguiente cuadrado latino parcial.

1	6		4	3	
	2	4		5	1
2		3	5		6
4	3		1	6	
	5	1		2	4
5		6	2		3

Nuevamente, en cualquier celda aún vacía se pueden introducir dos símbolos distintos, dando lugar al hecho de que las  $\Theta$ -órbitas que están aún por rellenar sean intercambiables. Necesitamos, por tanto, seleccionar una cuarta entrada en la primera fila para que el cuadrado obtenido sea únicamente  $\Theta$ -completable. Salvo isotopismo, podemos seleccionar la entrada  $(1, 3, 2)$ , dando lugar ya a un cuadrado latino parcial únicamente  $\Theta$ -completable, cuyo conjunto de entradas sería

$$\{(1, 1, 1), (1, 2, 6), (1, 3, 2), (1, 4, 4)\}.$$

En este punto debemos comprobar si dicho cuadrado latino parcial es un  $\Theta$ -conjunto crítico, o si bien incluye información redundante. En este sentido, se puede observar que el subconjunto de entradas

$$\{(1, 2, 6), (1, 3, 2), (1, 4, 4)\},$$

determina también un cuadrado latino parcial únicamente  $\Theta$ -completable, siendo de hecho un  $\Theta$ -conjunto crítico.

1	6	2	4	3	5
6	2	4	3	5	1
2	4	3	5	1	6
4	3	5	1	6	2
3	5	1	6	2	4
5	1	6	2	4	3

Así pues, este caso da lugar a un  $\Theta$ -conjunto crítico de tamaño tres.

**Caso 2)**  $(1, 4) \notin \mathcal{C}_\Theta$ .

Nótese que si  $\{(1, 2), (1, 5)\} \subset \mathcal{C}_\Theta$ , o  $\{(1, 3), (1, 6)\} \subset \mathcal{C}_\Theta$ , nos encontramos en una situación análoga al Caso 1, que da lugar a la existencia, a lo más, de un  $\Theta$ -conjunto crítico de tamaño tres. Así pues, este segundo caso debe centrarse en seleccionar a lo más una entrada en el par de celdas  $\{(1, 2), (1, 5)\}$  y a lo más una entrada en el par de celdas  $\{(1, 3), (1, 6)\}$ . Más aún, por el apartado anterior, conocemos que la celda  $(1, 4)$  debe contener un símbolo que no se encuentre en la  $\Theta$ -órbita de la entrada  $(1, 1, 1)$ . Esto hace que la  $\Theta$ -órbita vinculada a la celda  $(1, 4)$  juegue el mismo papel que  $\text{Orb}_\Theta((1, 1, 1))$  en la construcción de  $\mathcal{C}_\Theta$ . Como consecuencia, como las cuatro celdas aún vacías  $(1, 2)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(1, 5)$  y  $(1, 6)$  son adyacentes a una de estas dos  $\Theta$ -órbitas, todas estas celdas también juegan el mismo papel en la construcción de  $\mathcal{C}_\Theta$ . Por ello, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $(1, 2) \in \mathcal{C}_\Theta$ . De nuevo encontramos dos opciones a la hora de colocar un símbolo en ella, dependiendo de si tomamos o no un símbolo de la  $\Theta$ -órbita inicial.

Salvo isotopismo, nos encontraremos en una de estas dos situaciones.

1	3				
	2	1			
		3	2		
			1	3	
				2	1
2					3

1	4				
	2	5			
		3	6		
			1	4	
				2	5
2					6

Ninguno de los dos cuadrados latinos parciales es únicamente  $\Theta$ -completable, siendo necesario, por tanto, incluir una nueva entrada en una de las celdas  $(1, 3)$  o  $(1, 6)$ . En caso de que esta nueva entrada no diera lugar a un cuadrado latino parcial únicamente  $\Theta$ -completable, sería necesaria una cuarta entrada que nos llevaría obligatoriamente al Caso 1. Así pues, este caso da lugar a lo más a un  $\Theta$ -conjunto crítico de tamaño tres.

Atendiendo al razonamiento anterior, alcanzamos el siguiente resultado.

**Proposición 3.1.** *Sea  $L \in \mathcal{L}(6)$  con un autotopismo  $\Theta \in \text{Atop}(L)$  tal que  $z_\Theta = (6, 6, 3^2)$ . Entonces,  $\text{scs}_\Theta(L) = \text{lcs}_\Theta(L) = 3$ .*



### 3.2– La estructura cíclica (6, 6, 321)

Esta estructura cíclica está vinculada a un autotopismo  $\Theta$  de las clases principales descritas por  $L_{6,6}$  y  $L_{6,12}$ . Atendiendo al Cuadro 1.3, todo cuadrado latino  $L \in \mathcal{L}(6)$  paratópico  $L_{6,6}$ , con un autotopismo  $\Theta \in \text{Atop}(L)$  tal que  $z_\Theta = (6, 6, 321)$ , verifica que

$$\text{scs}_\Theta(L) \leq 2 \leq 3 \leq \text{lcs}_\Theta(L). \tag{3.1}$$

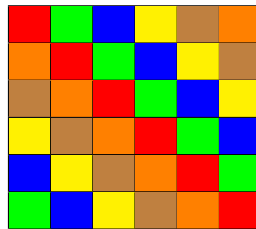
Por su parte, todo cuadrado latino  $L \in \mathcal{L}(6)$  paratópico a  $L_{6,12}$ , con un autotopismo  $\Theta \in \text{Atop}(L)$  tal que  $z_\Theta = (6, 6, 321)$ , verifica que

$$\text{scs}_\Theta(L) \leq 3 \leq \text{lcs}_\Theta(L). \tag{3.2}$$

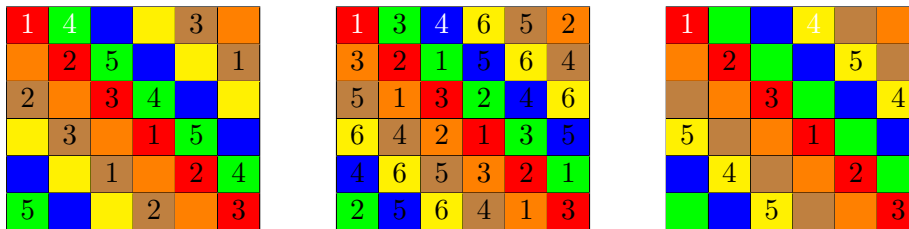
Con vistas a probar que todas estas cotas son óptimas, consideramos el isotopismo canónico

$$\Theta := ((123456), (123456), (123)(45)),$$

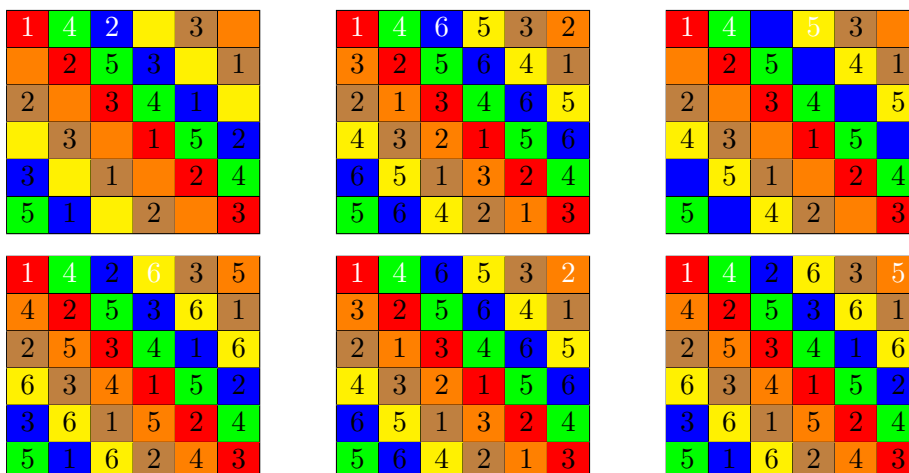
dando lugar a la siguiente  $\Theta$ -coloración.



Atendiendo a la estructura cíclica bajo consideración, se presentan cinco órbitas secundarias no monótonas y una órbita secundaria monótona en símbolos. Por la Proposición 2.1, sabemos que nuestro  $\Theta$ -conjunto crítico  $\mathcal{C}_\Theta$  debe contener dos entradas conteniendo un símbolo del conjunto  $\{1, 2, 3\}$  y un símbolo del conjunto  $\{4, 5\}$ . Haciendo uso de nuestra metodología, las únicas situaciones factibles, salvo isotopismo y/o transposición, son las siguientes.



Sólo la segunda situación da lugar a un  $\Theta$ -conjunto crítico de tamaño dos, vinculado a un cuadrado latino paratópico a  $L_{6,6}$ . Las otras dos situaciones indicadas dan lugar a cuadrados latinos parciales que no son únicamente  $\Theta$ -completables, requiriendo por ello añadir una tercera entrada. Es así que las cotas inferiores indicadas en (3.1) y (3.2) son óptimas. Salvo isotopismo y/o transposición, las únicas situaciones factibles derivadas de la elección de una tercera entrada es una de las siguientes.



1	4	2	5	3	6	1	3	2	4	6	5	1	6	2	4	3	5
6	2	5	3	4	1	4	2	1	3	5	6	4	2	6	3	5	1
2	6	3	4	1	5	6	5	3	2	1	4	2	5	3	6	1	4
4	3	6	1	5	2	5	6	4	1	3	2	5	3	4	1	6	2
3	5	1	6	2	4	3	4	6	5	2	1	3	4	1	5	2	6
5	1	4	2	6	3	2	1	5	6	4	3	6	1	5	2	4	3
1		2	4			1	5	6	4	3	2	1			4	3	
	2		3	5		3	2	4	6	5	1		2			5	1
		3		1	4	2	1	3	5	6	4	2		3			4
5			1		2	5	3	2	1	4	6	5	3		1		
3	4			2		6	4	1	3	2	5		4	1		2	
	1	5			3	4	6	5	2	1	3			5	2		3
1	3	2	4	6	5	1	5	6	4	3	2	1	5	2	4	3	6
4	2	1	3	5	6	3	2	4	6	5	1	6	2	4	3	5	1
6	5	3	2	1	4	2	1	3	5	6	4	2	6	3	5	1	4
5	6	4	1	3	2	5	3	2	1	4	6	5	3	6	1	4	2
3	4	6	5	2	1	6	4	1	3	2	5	3	4	1	6	2	5
2	1	5	6	4	3	4	6	5	2	1	3	4	1	5	2	6	3
						1			4		5						
						4	2			5							
							5	3			4						
						5		4	1								
							4		5	2							
								5		4	3						

Existen cinco situaciones que dan lugar a cuadrados latinos parciales que no son únicamente  $\Theta$ -completibles y que requerirían una cuarta entrada. Un simple estudio de casos demuestra que esta nueva entrada daría lugar a un nuevo cuadrado latino parcial que contemplaría, salvo isotopismo y/o transposición, uno de los cuadrados latinos parciales que ya hemos comprobado que son  $\Theta$ -conjuntos críticos. Es así que el tamaño máximo de  $\mathcal{C}_\Theta$  es tres. Con todo ello hemos probado el siguiente resultado.

**Proposición 3.2.** *Sea  $L \in \mathcal{L}(6)$  con un autotopismo  $\Theta \in \text{Atop}(L)$  tal que  $z_\Theta = (6, 6, 321)$ . Entonces,  $\text{scs}_\Theta(L) = 2$  and  $\text{lcs}_\Theta(L) = 3$ , si  $L$  es paratópico a  $L_{6,6}$ , mientras que  $\text{scs}_\Theta(L) = \text{lcs}_\Theta(L) = 3$ , si  $L$  es paratópico a  $L_{6,12}$ .*

### 3.3– La estructura cíclica $(6, 6, 31^3)$

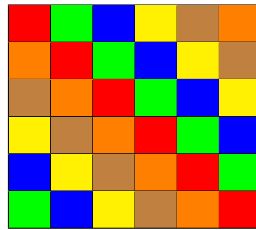
Esta estructura cíclica está vinculada a un autotopismo  $\Theta$  de las clases principales descritas por  $L_{6,2}$  y  $L_{6,5}$ . Sea  $L \in \mathcal{L}(6)$  perteneciente a una de estas dos clases, con un autotopismo  $\Theta \in \text{Atop}(L)$  tal que  $z_\Theta = (6, 6, 31^3)$ . Atendiendo al Cuadro 1.3, se tiene que

$$\text{scs}_\Theta(L) \leq 3 \leq \text{lcs}_\Theta(L). \tag{3.3}$$

Con vistas a probar que dichas cotas son óptimas, consideramos el isotopismo canónico

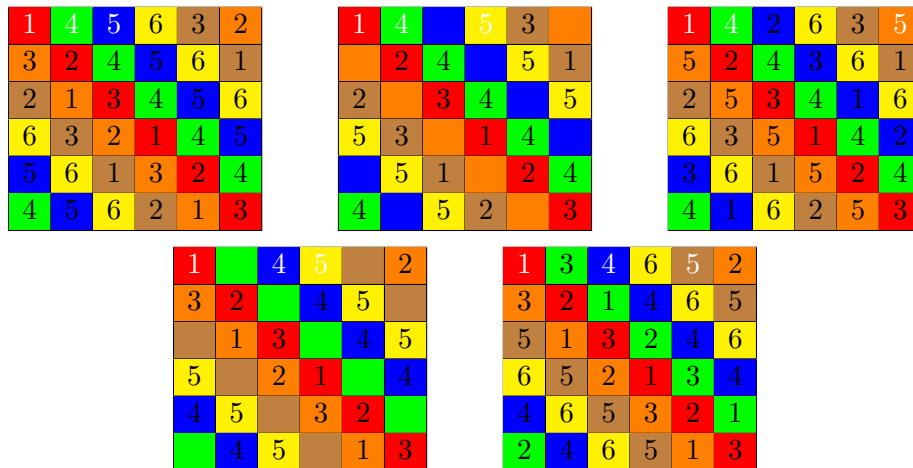
$$\Theta := ((123456), (123456), (123)),$$

dando lugar a la siguiente  $\Theta$ -coloración.



Atendiendo a la estructura cíclica bajo consideración, se presentan tres órbitas secundarias monótonas en símbolos y tres órbitas secundarias no monótonas. La Proposición 1.6 nos asegura que nuestro  $\Theta$ -conjunto crítico  $\mathcal{C}_\Theta$  debe contener al menos dos entradas, vinculadas a dos de las tres órbitas secundarias monótonas por símbolos. Esto es,  $\mathcal{C}_\Theta$  debe contener dos símbolos del conjunto  $\{4, 5, 6\}$ . Además, la Proposición 2.1 nos asegura que  $\mathcal{C}_\Theta$  debe contener una entrada conteniendo un símbolo en el conjunto  $\{1, 2, 3\}$ . Así pues, teniendo en cuenta la cota indicada en (3.3), resulta que  $\text{scs}_\Theta(L) \geq 3$ .

Para evitar perder generalidad, debemos tener en cuenta, además, la colocación de dichas entradas dentro del cuadrado, dependiendo de si tomamos celdas adyacentes o no, siempre dentro de la primera fila, según vimos en la descripción de la metodología a seguir. Salvo isotopismo y/o transposición, las únicas situaciones factibles son las siguientes.



En las únicas dos situaciones factibles que no se alcanza un cuadrado latino parcial únicamente  $\Theta$ -completable aparecen dos  $\Theta$ -órbitas que son intercambiables, siendo necesaria por tanto una cuarta entrada. Ahora bien, cualquier entrada que se tome conlleva a un cuadrado latino parcial que comprende una de las situaciones anteriores y que da lugar a un cuadrado latino parcial únicamente  $\Theta$ -completable. En definitiva, todas las situaciones anteriores dan lugar a un  $\Theta$ -conjunto crítico de tamaño tres. Se ha demostrado así el siguiente resultado.

**Lema 3.3.** *Sea  $L \in \mathcal{L}(6)$  con un autotopismo  $\Theta \in \text{Atop}(L)$  tal que  $z_\Theta = (6, 6, 31^3)$ . Entonces,  $\text{scs}_\Theta(L) = \text{lcs}_\Theta(L) = 3$ .*

### 3.4– La estructura cíclica $(6, 6, 2^2 1^2)$

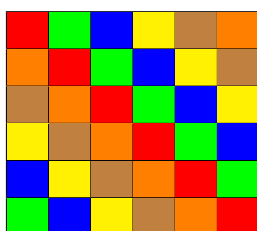
Esta estructura cíclica está vinculada a un autotopismo  $\Theta$  de las clases principales descritas por  $L_{6,2}$  y  $L_{6,3}$ . Atendiendo al Cuadro 1.3, se tiene que

$$scs_{\Theta}(L_{6,n}) \leq 4 \leq lcs_{\Theta}(L_{6,n}).$$

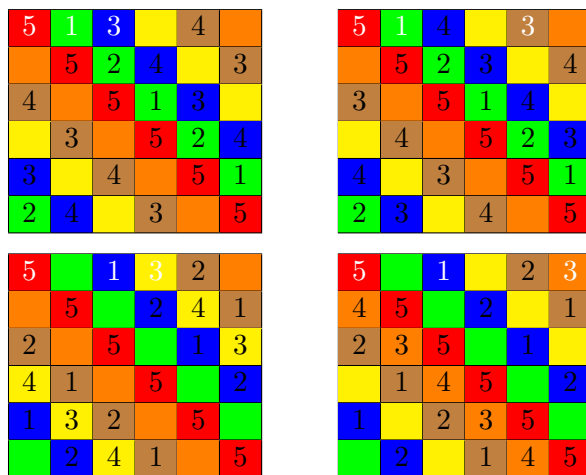
para  $n \in \{2, 3\}$ . Con vistas a probar que dichas cotas son óptimas, consideramos el isotopismo canónico

$$\Theta := ((123456), (123456), (12)(34)),$$

dando lugar a la siguiente  $\Theta$ -coloración.



Se presentan dos órbitas secundarias paralelas monótonas en símbolos y cuatro órbitas secundarias no monótonas. Por la Proposición 1.6, sabemos que nuestro  $\Theta$ -conjunto crítico  $\mathcal{C}_{\Theta}$  debe contener al menos una entrada vinculada a las dos órbitas monótonas en símbolos. Esto es,  $\mathcal{C}_{\Theta}$  debe contener un símbolo del conjunto  $\{5, 6\}$ . Además, la Proposición 2.1 implica que  $\mathcal{C}_{\Theta}$  debe contener una entrada con un símbolo en el conjunto  $\{1, 2\}$  y otra entrada con un símbolo en el conjunto  $\{3, 4\}$ . Haciendo uso de nuestra metodología, las únicas situaciones factibles, salvo isotopismo y/o transposición, son las siguientes.



En las cuatro situaciones aparecen dos  $\Theta$ -órbitas intercambiables: una secundaria monótona en símbolos y otra secundaria no monótona. Se hace pues necesaria una cuarta entrada en todos los casos, dando lugar a un cuadrado latino parcial  $\Theta$ -completable. La eliminación de una de estas cuatro entradas en cualquiera de las situaciones daría lugar de nuevo a una de las cuatro situaciones o al incumplimiento de las condiciones que son necesarias atendiendo a las Proposiciones 1.6 y 2.1. En definitiva, todo  $\Theta$ -conjunto crítico debe estar formado por cuatro entradas: una relativa a una de las dos órbitas secundarias monótonas por símbolos y tres relativas a las distintas órbitas secundarias no monótonas, o bien dos órbitas secundarias no monótonas y dos órbitas secundarias monótonas por símbolos. Se ha demostrado así el siguiente resultado.

**Proposición 3.4.** *Sea  $L \in \mathcal{L}(6)$  con un autotopismo  $\Theta \in \text{Atop}(L)$  tal que  $z_{\Theta} = (6, 6, 2^2 1^2)$  entonces  $scs_{\Theta}(L) = lcs_{\Theta}(L) = 4$ .*

### 3.5– La estructura cíclica $(6, 6, 21^4)$

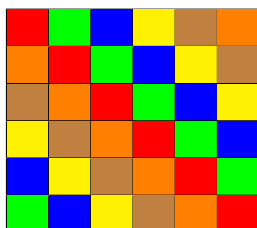
Esta estructura cíclica está vinculada a un autotopismo  $\Theta$  de la clase principal descrita por  $L_{6,12}$ . Sea  $L \in \mathcal{L}(6)$  en dicha clase, con un autotopismo  $\Theta \in \text{Atop}(L)$  tal que  $z_\Theta = (6, 6, 21^4)$ . Atendiendo al Cuadro 1.3, se tiene que

$$\text{scs}_\Theta(L) \leq 4 \leq 5 \leq \text{lcs}_\Theta(L). \tag{3.4}$$

Con vistas a probar que dichas cotas son óptimas, consideramos el isotopismo canónico

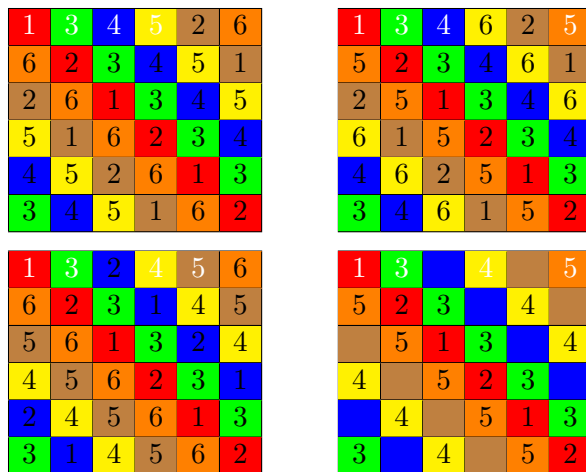
$$\Theta := ((123456), (123456), (12)),$$

dando lugar a la siguiente  $\Theta$ -coloración.



Se presentan dos órbitas no monótonas y cuatro órbitas monótonas en símbolos. Por la Proposición 1.6 sabemos que nuestro  $\Theta$ -conjunto crítico  $\mathcal{C}_\Theta$  debe contener al menos tres entradas vinculadas a las cuatro órbitas monótonas en símbolos. Esto es,  $\mathcal{C}_\Theta$  debe contener tres símbolos en el conjunto  $\{3, 4, 5, 6\}$ .

Además, la Proposición 2.1 implica que  $\mathcal{C}_\Theta$  debe contener un símbolo del conjunto  $\{1, 2\}$ . Así pues, teniendo en cuenta la cota indicada en (3.4), resulta que  $\text{scs}_\Theta(L) = 4$ . Atendiendo a nuestra metodología, las únicas situaciones factibles, salvo isotopismo y/o transposición, son las siguientes.



En la única situación factible en la que no se alcanza un cuadrado latino parcial únicamente  $\Theta$ -completable aparecen dos  $\Theta$ -órbitas intercambiables, siendo necesaria una quinta entrada. La eliminación de una de esas cinco entradas llevaría a dos posibles situaciones: que las cuatro entradas restantes coincidan con una de las situaciones anteriores, en cuyo caso se tendría un conjunto crítico de tamaño 4; o que las cuatro entradas restantes lleven a una situación análoga a la de partida o que incumplan las condiciones impuestas por las Proposiciones 1.6 y 2.1, en cuyo caso las cinco entradas conformarían con conjunto crítico. En definitiva, todo  $\Theta$ -conjunto crítico debe estar formado por cuatro o cinco entradas. Se ha demostrado así el siguiente resultado.

**Proposición 3.5.** *Sea  $L \in \mathcal{L}(6)$  con un autotopismo  $\Theta \in \text{Atop}(L)$  tal que  $z_\Theta = (6, 6, 21^4)$  entonces  $\text{scs}_\Theta(L) = 4 \leq 5 = \text{lcs}_\Theta(L)$ .*

### 3.6– La estructura cíclica $(3^2, 2^3, 6)$

Esta estructura cíclica está vinculada a un autotopismo  $\Theta$  de las clases principales descritas por  $L_{6,2}$  y  $L_{6,4}$ . Atendiendo al Cuadro 1.3, se tiene que

$$scs_{\Theta}(L_{6,n}) \leq 4 \leq lcs_{\Theta}(L_{6,n}),$$

para  $n \in \{2, 4\}$ . Para probar que dichas cotas son óptimas, consideramos el isotopismo canónico

$$\Theta := ((123)(456), (12)(34)(56), (123456)),$$

dando lugar a la siguiente  $\Theta$ -coloración.


Se presentan seis órbitas no monótonas. Por la Proposición 2.1, nuestro  $\Theta$ -conjunto crítico  $\mathcal{C}_{\Theta}$  debe contener al menos tres entradas, relativas cada una de ellas a uno de los tres ciclos de la permutación por columnas. Además, la Proposición 2.1 nos indica que  $\mathcal{C}_{\Theta}$  debe contener dos entradas que pertenezcan a distintos ciclos de la permutación por filas. Buscando que  $\mathcal{C}_{\Theta}$  sea de menor tamaño posible, si combinamos ambas condiciones, nos encontramos, salvo isotopismo, con la posibilidad de tomar una entrada en cada una de las siguientes zonas coloreadas.


Salvo isotopismo, podemos suponer la siguiente situación.

1	4	3	6		
5	2	1	4		
3	6	5	2		
				6	3
				4	1
				2	5

Puede verse que en la casilla (1,5) debe colocarse obligatoriamente el símbolo 5, con lo cual nos encontramos realmente ante la siguiente situación.

1	4	3	6	5	2
5	2	1	4	3	6
3	6	5	2	1	4
				6	3
				4	1
				2	5

Este cuadrado latino no es únicamente  $\Theta$ -completable, requiriendo para ello una cuarta entrada, que se encontraría en una de las zonas vacías. Esta cuarta entrada bastaría para construir  $\mathcal{C}_{\Theta}$ . Con ello queda demostrado el siguiente resultado.

**Proposición 3.6.** *Sea  $L \in \mathcal{L}(6)$  con un autotopismo  $\Theta \in \text{Atop}(L)$  tal que  $z_{\Theta} = (3^2, 2^3, 6)$ . Entonces  $scs_{\Theta}(L) = lcs_{\Theta}(L) = 4$ .*

### 3.7- La estructura cíclica (51, 51, 51)

Esta estructura cíclica está vinculada a un autotopismo  $\Theta$  de la clase principal descrita por  $L_{6,6}$ . Atendiendo al Cuadro 1.3, se tiene que

$$s_{CS\Theta}(L_{6,6}) \leq 3 \leq 4 \leq l_{CS\Theta}(L_{6,6}). \tag{3.5}$$

Con vistas a probar que dichas cotas son óptimas, consideramos el isotopismo canónico

$$\Theta := ((12345), (12345), (12345)),$$

dando lugar a la siguiente  $\Theta$ -coloración.

Red	Green	Blue	Yellow	Teal	Pink
Teal	Red	Green	Blue	Yellow	Pink
Yellow	Teal	Red	Green	Blue	Pink
Blue	Yellow	Teal	Red	Green	Pink
Green	Blue	Yellow	Teal	Red	Pink
Orange	Orange	Orange	Orange	Orange	Purple

Se presentan una órbita secundaria monótona en símbolos, una órbita secundaria monótona por filas, una órbita secundaria monótona por columnas, cuatro órbitas principales y una órbita trivial. Nótese en particular que todo par de entradas  $(i, 6, k)$  y  $(6, j, k)$ , con  $i, j \leq 5$ , en nuestro cuadrado latino con autotopismo  $\Theta$ , implica que el mismo debe contener también la entrada  $(i, j, 6)$ . Este hecho hace que toda órbita monótona pueda conocerse a partir de las otras dos. Se tiene además, por el Lema 1.8, que nuestro  $\Theta$ -conjunto crítico  $\mathcal{C}_\Theta$  no contendrá la entrada relativa a la órbita trivial. Finalmente, la Proposición 2.1 implica que debe contener al menos una entrada en las primeras cinco filas, al menos una entrada en las primeras cinco columnas, y al menos un símbolo en el conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Salvo isotopismo y/o transposición, se presentan las siguientes situaciones iniciales.

1	Green	Blue	Yellow	Teal	Pink
Teal	2	Green	Blue	Yellow	Pink
Yellow	Teal	3	Green	Blue	Pink
Blue	Yellow	Teal	4	Green	Pink
Green	Blue	Yellow	Teal	5	Pink
Orange	Orange	Orange	Orange	Orange	Purple

6	Green	Blue	Yellow	Teal	1
Teal	6	Green	Blue	Yellow	2
Yellow	Teal	6	Green	Blue	3
Blue	Yellow	Teal	6	Green	4
Green	Blue	Yellow	Teal	6	5
1	2	3	4	5	6

6	Green	Blue	Yellow	Teal	1
Teal	6	Green	Blue	Yellow	2
Yellow	Teal	6	Green	Blue	3
Blue	Yellow	Teal	6	Green	4
Green	Blue	Yellow	Teal	6	5
1	2	3	4	5	6

En ningún caso se alcanza un cuadrado latino únicamente  $\Theta$ -completable, requiriendo al menos una entrada más. Nótese además que la segunda y tercera situación son equivalentes por conjugación. Más específicamente, bastaría intercambiar filas por símbolos para pasar de una a otra. Por este motivo, seguimos nuestro razonamiento con los dos primeros cuadrados latinos parciales. Añadir en ellos una nueva entrada vinculada a  $\mathcal{C}_\Theta$  da lugar, salvo paratopismo, a una de las siguientes situaciones.

1	3	Blue	Yellow	Teal	Pink
Teal	2	4	Blue	Yellow	Pink
Yellow	Teal	3	5	Blue	Pink
Blue	Yellow	Teal	4	1	Green
Green	2	Blue	Yellow	Teal	5
Orange	Orange	Orange	Orange	Orange	Purple

1	Green	Blue	Yellow	Teal	2
Teal	2	Green	Blue	Yellow	3
Yellow	Teal	3	Green	Blue	4
Blue	Yellow	Teal	4	Green	5
Green	Blue	Yellow	Teal	5	1
Orange	Orange	Orange	Orange	Orange	Purple

6	3	5	2	4	1
5	6	4	1	3	2
4	1	6	5	2	3
3	5	2	6	1	4
2	4	1	3	6	5
1	2	3	4	5	6

Sólamente la última situación da lugar a un  $\Theta$ -conjunto crítico, que tiene tamaño tres. Ninguna de las de tamaño dos da lugar a un  $\Theta$ -conjunto crítico, lo que asegura la cota inferior indicada en (3.5). En todas ellas necesitamos una tercera entrada, dando lugar, salvo paratopismo, o bien a uno de los  $\Theta$ -conjuntos críticos que ya han aparecido, o bien a una de las dos siguientes situaciones factibles.

1	3	5						1	3	5	6	4	2
	2	4	1					5	2	4	1	6	3
			3	5	2			6	1	3	5	2	4
3			4	1				3	6	2	4	1	5
2	4				5			2	4	6	3	5	1
						6		4	5	1	2	3	6

La segunda situación da lugar a un  $\Theta$ -conjunto crítico de tamaño tres, mientras que la primera requiere de una nueva entrada. Cualquier entrada factible que se tome en una de las celdas vacías da lugar de hecho a un cuadrado latino parcial únicamente  $\Theta$ -completable. Ahora bien, si dicha entrada extra da lugar a una órbita secundaria monótona, entonces el cuadrado latino parcial no es un conjunto  $\Theta$ -crítico, pudiéndose eliminar una de las entradas de las órbitas secundarias no monótonas. En otro caso, si la entrada extra da lugar a una órbita secundaria no monótona, el cuadrado latino obtenido es un  $\Theta$ -conjunto crítico, alcanzando así la cota superior indicada en (3.5), que resulta óptima. Atendiendo a todo nuestro razonamiento, queda probado el siguiente resultado.

**Proposición 3.7.** *Sea  $L \in \mathcal{L}(6)$  con un autotopismo  $\Theta \in \text{Atop}(L)$  tal que  $z_\Theta = (51, 51, 51)$ . Entonces,  $\text{scs}_\Theta(L) = 3 \leq 4 = \text{lcs}_\Theta(L)$ .*



## Autotopismos con ciclos de longitud media

El presente capítulo se centra en el estudio de aquellas estructuras cíclicas que presentan ciclos de longitud tres o cuatro.

### 4.1– La estructura cíclica $(41^2, 41^2, 41^2)$

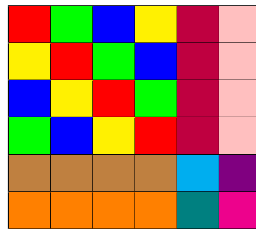
Esta estructura cíclica está vinculada a un autotopismo  $\Theta$  de las clases principales descritas por  $L_{6,6}$  y  $L_{6,8}$ . Atendiendo al Cuadro 1.3, se tiene que

$$scs_{\Theta}(L_{6,n}) \leq 5 \leq 6 \leq lcs_{\Theta}(L_{6,n}).$$

para  $n \in \{6, 8\}$ . Con vistas a probar que dichas cotas son óptimas, consideramos el isotopismo canónico

$$\Theta := ((1234), (1234), (1234)),$$

dando lugar a la siguiente  $\Theta$ -coloración.



Atendiendo a la estructura cíclica bajo consideración, se presentan dos órbitas secundarias paralelas monótonas en símbolos, dos órbitas secundarias paralelas monótonas en filas, dos órbitas secundarias paralelas monótonas en columnas, dos órbitas principales y cuatro órbitas triviales. Por la Proposición 1.6 sabemos que el tamaño de conjunto crítico mínimo será mayor o igual a 3, siendo estas entradas relativas a una de las órbitas secundarias monótonas por símbolos, a una de las órbitas secundarias monótonas por filas y a una de las órbitas secundarias monótonas por columnas. Además, es obligatorio tomar una orbita trivial en nuestro conjunto crítico. Salvo isotopismo, podemos considerar una de las siguientes dos situaciones.



En este punto, existe la posibilidad de incluir una entrada relativa a alguna de las órbitas secundarias monótonas o bien relativa a alguna de las órbitas principales. Estudiamos entonces ambos casos:

- **Colocar una entrada relativa a una órbita secundaria monótona.**

Salvo paratopismo, alcanzamos una de las siguientes situaciones.

6			3	1	2
4	6			2	3
	1	6		3	4
		2	6	4	1
1	2	3	4	5	6
				6	5

6	4			1	2
	6	1		2	3
		6	2	3	4
3			6	4	1
2	3	4	1	5	6
				6	5

6		2		1	3
	6		3	2	4
4		6		3	1
			6	4	2
2	3	4	1	5	6
				6	5

La asignación de un valor factible en una cualquiera de las celdas aún vacías daría lugar a un cuadrado latino parcial únicamente  $\Theta$ -completable, de tal forma que cualquier subconjunto de tamaño menor incluido en el conjunto de entradas anterior, no constituye por sí mismo un  $\Theta$ -conjunto crítico. Es decir, este caso da lugar a un conjunto crítico de tamaño seis.

- **Colocar una entrada relativa a una órbita principal.**

Salvo paratopismo, alcanzamos una de las siguientes situaciones.

6	3			1	
	6	4		2	
		6	1	3	
2			6	4	
1	2	3	4	5	6
				6	5

6	4			1	
	6	1		2	
		6	2	3	
3			6	4	
1	2	3	4	5	6
2	3	4	1	6	5

6		2	5	1	
5	6		3	2	
4	5	6		3	
	1	5	6	4	
1	2	3	4	5	6
				6	5

6		4		1	
	6		1	2	
2		6		3	
	3		6	4	
1	2	3	4	5	6
				6	5

6	2	5	3	1	4
4	6	3	5	2	1
5	1	6	4	3	2
1	5	2	6	4	3
2	3	4	1	5	6
3	4	1	2	6	5

6		2		1	3
	6		3	2	4
4		6		3	1
	1		6	4	2
2	3	4	1	5	6
				6	5

6		3		1	
	6		4	2	
1		6		3	
	2		6	4	
2	3	4	1	5	6
				6	5

En particular, obtenemos un  $\Theta$ -conjunto crítico de tamaño cinco. El resto de casos requiere de una sexta entrada. Cualquiera factible que se tome da lugar a un  $\Theta$ -conjunto crítico de tamaño seis.

**Proposición 4.1.** Sea  $L \in \mathcal{L}(6)$  con un autotopismo  $\Theta \in \text{Atop}(L)$  tal que  $z_\Theta = (41^2, 41^2, 41^2)$ . Entonces,  $\text{scs}_\Theta(L) = 5 \leq 6 = \text{lcs}_\Theta(L)$ .

### 4.2- La estructura cíclica $(3^2, 3^2, 3^2)$

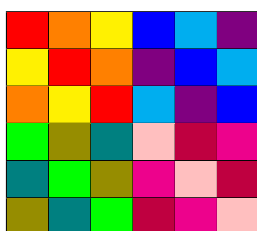
Esta estructura cíclica está vinculada a un autotopismo  $\Theta$  de las clases principales descritas por  $L_{6,4}$  y  $L_{6,7}$ . Atendiendo al Cuadro 1.3, se tiene que

$$scs_{\Theta}(L_{6,n}) \leq 4 \leq 5 \leq lcs_{\Theta}(L_{6,n}), \tag{4.1}$$

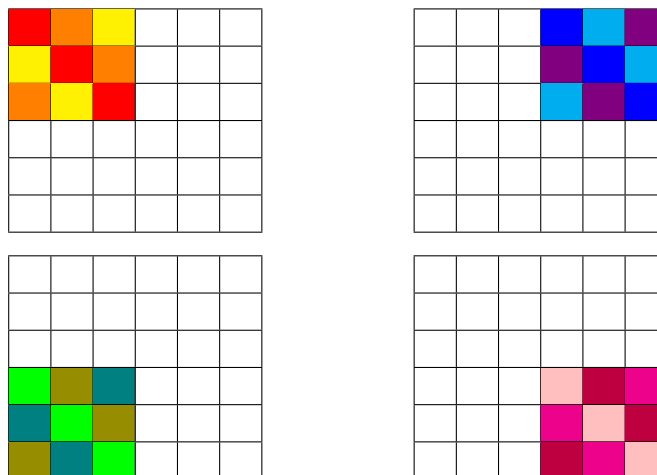
para  $n \in \{4, 7\}$ . Con vistas a probar que dichas cotas son óptimas, consideramos el isotopismo canónico

$$\Theta := ((123)(456), (123)(456), (123)(456)),$$

dando lugar a la siguiente  $\Theta$ -coloración.



Se presentan doce órbitas principales. Si observamos con detenimiento la  $\Theta$ -coloración, parece estar conformado por cuatro subcuadrados que contienen tres órbitas principales cada uno.



Pueden presentarse los siguientes dos casos

1. Cada subcuadrado corresponde a un cuadrado latino de orden 3 con tres órbitas principales.

Si tuviéramos la seguridad de encontrarnos en este caso y además supiéramos los símbolos asignados a cada subcuadrado, los resultados mostrados en el Cuadro 1.2 implican que cada subcuadrado requeriría exactamente una entrada para ser  $\Theta$ -completado. Por tanto, nuestro  $\Theta$ -conjunto crítico  $\mathcal{C}_{\Theta}$  requeriría al menos cuatro entradas, una por cada subcuadrado formado. Si eliminásemos alguna entrada, el cuadrado no sería únicamente  $\Theta$ -completable. Si añadiéramos alguna más, sería redundante.

2. Cada subcuadrado contiene todos los símbolos, estando formado por dos órbitas principales de uno de los ciclos de símbolos y otra del restante.

En este caso, si dos subcuadrados en una diagonal están completos (es decir, se usan seis entradas), entonces los dos subcuadrados restantes pueden rellenarse de manera forzada. Véase en este sentido el siguiente ejemplo, donde se ha hecho uso de símbolos genéricos en el conjunto  $\{a, b, c, d, e, f\}$ .

a	c	d			
e	b	a			
b	f	c			
			f	c	b
			c	d	a
			b	a	e

Más aún, si tuviéramos la seguridad de encontrarnos en este caso, no serían necesarias las seis entradas. Véase, por ejemplo, el siguiente caso.

	c	d			
e		a			
b	f				
			f	c	b
			c	d	a
			b	a	e

A partir de este punto, podemos completar forzosamente el cuadrado parcial anterior.

	c	d			f
e		a	d		
b	f			e	
			f	c	b
			c	d	a
			b	a	e

Una vez incluimos dicho símbolo, podemos añadir de manera forzada la  $\Theta$ -órbita que habíamos eliminado. Por tanto, el cuadrado sería únicamente completable con cinco entradas, no pudiéndose eliminar ninguna otra entrada para lograr un cuadrado latino parcial únicamente  $\Theta$ -completable.

Tal y como se ha indicado, los comentarios anteriores son de utilidad si sabemos con seguridad en qué caso nos encontramos. Sin embargo, un razonamiento genérico es necesario para asegurarnos la optimalidad de las cotas presentadas en (4.1). Por la Proposición 2.1, sabemos que  $\mathcal{C}_\Theta$  requiere al menos dos entradas, que deben cubrir los dos conjuntos de filas, columnas y símbolos  $\{1, 2, 3\}$  y  $\{4, 5, 6\}$ . Salvo paratopismo, la situación será una de las siguientes.

1					
	2				
		3			
			4		
				5	
					6

1			4		
	2			5	
		3			6
			1		
				2	
					3

1	4				
	2	5			
6		3			
			1		
				2	
					3

Ninguno de estos cuadrados latinos parciales es únicamente  $\Theta$ -completable, por lo que necesitamos una nueva entrada en cada uno de ellos. Para equiparar el número de entradas en los cuadrados latinos parciales que resulten en nuestro razonamiento, indicamos a continuación las dos situaciones que resultan, salvo paratopismo, del primero de los tres cuadrados latinos parciales anteriores.

1	3				
	2	1			
2		3			
			4		
				5	
					6

1			2		
	2			3	
		3			1
			4		
				5	
					6

Se observa que ninguno de estos cuadrados latinos parciales es únicamente  $\Theta$ -completable, requiriendo una cuarta entrada. Analizando estos casos, juntos a los dos casos de tres entradas seleccionadas que vimos con anterioridad, resulta que nuestro  $\Theta$ -conjunto crítico debe contemplar, salvo paratopismo, alguna de las siguientes situaciones.

1	3	4	2	6	5
5	2	1	6	3	4
2	6	3	5	4	1
6	5	2	4	1	3
3	4	6	1	5	2
4	1	5	3	2	6

1	3	4	2	6	5
5	2	1	6	3	4
2	6	3	5	4	1
6	5	2	4	1	3
3	4	6	1	5	2
4	1	5	3	2	6

1	3	6	5	4	2
4	2	1	3	6	5
2	5	3	6	1	4
3	6	5	4	2	1
6	1	4	2	5	3
5	4	2	1	3	6

1	3	4	2	6	5
5	2	1	6	3	4
2	6	3	5	4	1
6	5	2	4	1	3
3	4	6	1	5	2
4	1	5	3	2	6

1	3		4	6	
	2	1		5	4
2		3	5		6
			1	3	
				2	1
				2	3

1	6		4	3	
	2	4		5	1
5		3	2		6
4	3		1	6	
	5	1		2	4
2		6	5		3

1	6		4	3	
	2	4		5	1
5		3	2		6
4	3		1	6	
	5	1		2	4
2		6	5		3

1			4		
	2			5	
		3			6
4			1		
	5			2	
		6			3

1	3	2	4	6	5
3	2	1	6	5	4
2	1	3	5	4	6
5	4	6	1	3	2
4	6	5	3	2	1
6	5	4	2	1	3

1	6		4	3	
	2	4		5	1
5		3	2		6
4	3		1	6	
	5	1		2	4
2		6	5		3

1	3	2	4	6	5
3	2	1	6	5	4
2	1	3	5	4	6
5	4	6	1	3	2
4	6	5	3	2	1
6	5	4	2	1	3

1	3	2	4	6	5
3	2	1	6	5	4
2	1	3	5	4	6
6	5	4	1	3	2
5	4	6	3	2	1
4	6	5	2	1	3

1	3		4	6	
	2	1		5	4
2		3	5		6
	6		1		
			4		2
5					3

1	4	2			
3	2	5			
6	1	3			
			1		
				2	
					3

1	4	6	5	3	2
4	2	5	3	6	1
6	5	3	2	1	4
5	3	2	1	4	6
3	6	1	4	2	5
2	1	4	6	5	3

1	4	2	3	6	5
3	2	5	6	1	4
6	1	3	5	4	2
2	5	4	1	3	6
5	3	6	4	2	1
4	6	1	2	5	3

1	4		5	3	
	2	5		6	1
6		3	2		4
5	3		1	4	
	6	1		2	5
2		4	6		3

1	4	2	3	6	5
3	2	5	6	1	4
6	1	3	5	4	2
2	5	4	1	3	6
5	3	6	4	2	1
4	6	1	2	5	3

1	4	5	3	6
2	5	6	1	4
6	3	2	4	5
5	3	1	4	6
6	1	2	5	3
2	4	6	3	5

Diez de las situaciones planteadas dan lugar a  $\Theta$ -conjuntos críticos de tamaño cuatro. En particular, el primero y el quinto de estos diez no son paratópicos, perteneciendo de hecho a las dos clases principales bajo consideración. El resto de los casos requieren al menos una nueva entrada. Salvo paratopismo, dichos casos contienen uno de los  $\Theta$ -conjuntos críticos de tamaño cuatro indicados anteriormente, o bien contienen uno de los siguientes  $\Theta$ -conjuntos críticos de tamaño cinco, correspondientes a las dos clases principales bajo consideración.

1	6	5	4	3	2
6	2	4	3	5	1
5	4	3	2	1	6
4	3	2	1	6	5
3	5	1	6	2	4
2	1	6	5	4	3

1	3	2	4	6	5
3	2	1	6	5	4
2	1	3	5	4	6
4	6	5	1	3	2
6	5	4	3	2	1
5	4	6	2	1	3

Atendiendo al razonamiento anterior, hemos probado el siguiente resultado.

**Proposición 4.2.** *Sea  $L \in \mathcal{L}(6)$  con un autotopismo  $\Theta \in \text{Atop}(L)$  tal que  $z_\Theta = (3^2, 3^2, 3^2)$ . Entonces  $\text{scs}_\Theta(L) = 4 \leq 5 = \text{lcs}_\Theta(L)$ .*

### 4.3– La estructura cíclica $(3^2, 3^2, 31^3)$

Esta estructura cíclica está vinculada a un autotopismo  $\Theta$  de las clases principales descritas por  $L_{6,n}$ , para  $n \in \{2, 3, 5, 6, 12\}$ . Atendiendo al Cuadro 1.3, se tiene que

$$scs_{\Theta}(L_{6,3}) \leq 6 \leq lcs_{\Theta}(L_{6,3}), \tag{4.2}$$

$$scs_{\Theta}(L_{6,n}) \leq 6 \leq 7 \leq lcs_{\Theta}(L_{6,n}), \tag{4.3}$$

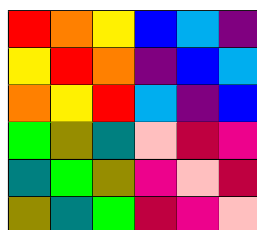
para  $n \in \{2, 12\}$ , y

$$scs_{\Theta}(L_{6,n}) \leq 4 \leq 6 \leq lcs_{\Theta}(L_{6,n}), \tag{4.4}$$

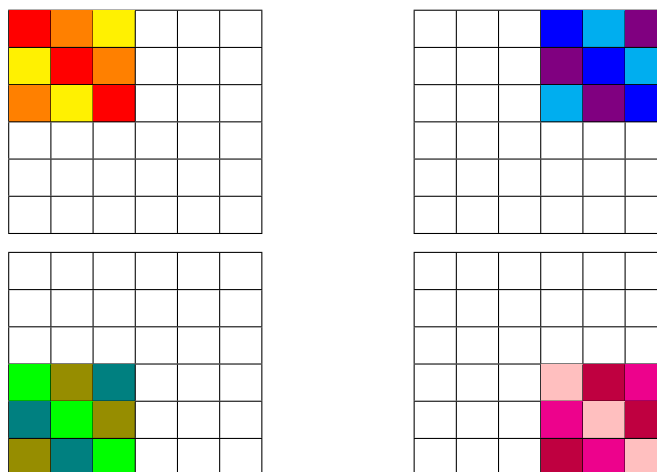
para  $n \in \{5, 6\}$ . Con vistas a estudiar la optimalidad de dichas cotas, consideramos el isotopismo canónico

$$\Theta := ((123)(456), (123)(456), (123)),$$

dando lugar a la siguiente  $\Theta$ -coloración.



Atendiendo a la estructura cíclica bajo consideración, se presentan seis órbitas principales y seis órbitas secundarias monótonas por símbolos. Al igual que en la sección anterior, estos cuadrados latinos pueden dividirse en cuatro subcuadrados.



Nos encontramos, entonces, ante dos posibles situaciones:

1. Los cuatro subcuadrados anteriores son cuadrados latinos de orden tres de tal manera que dos de ellos están conformados por tres órbitas principales y los dos restantes contienen tres órbitas monótonas por símbolos.

Como ejemplo ilustrativo tenemos el siguiente cuadrado latino.

1	3	2	4	5	6
3	2	1	6	4	5
2	1	3	5	6	4
4	5	6	1	3	2
6	4	5	3	2	1
5	6	4	2	1	3

Si tuviéramos la seguridad de encontrarnos en este caso, los resultados mostrados en el Cuadro 1.2 implican que los dos subcuadrados que son cuadrados latinos de orden tres con tres órbitas principales requieren una única entrada para ser reconstruidos. Además, la Proposición 1.6 implicaría que cada uno de los otros dos subcuadrados requerirían dos entradas relativas a dos órbitas monótonas por símbolos de cada uno para poder ser completados. De esta formas, se necesitarían **seis entradas** como mínimo para completar únicamente el cuadrado, siendo éstas: cuatro entradas relativas a órbitas monótonas por símbolos y dos a órbitas principales. Esta elección de seis entradas resulta óptima en el caso de encontrarnos en la clase principal  $L_{6,3}$ .

Mediante un simple estudio de casos se observa que en las clases principales  $L_{6,2}$  y  $L_{6,12}$  existen conjuntos de entradas en los que, si se toman sólo dos símbolos distintos en las cuatro entradas de órbitas no monótonas, el cuadrado no sería únicamente completable, pues una órbita principal podría intercambiarse por una secundaria. Si añadiésemos una órbita secundaria nos encontraríamos en el caso anterior, pudiendo completar el cuadrado con sólo seis entradas, sin embargo, si añadimos una entrada relativa a una órbita principal, tendríamos un total de **siete entradas** que harían posible la completación de manera única del cuadrado y conformarían un conjunto crítico. En ningún caso serían necesarias más de siete entradas para formar un  $\Theta$ -conjunto crítico. Vease el siguiente ejemplo:

1		2	4		6
3	2		6	4	
	1	3		6	4
4		6		3	
6	4				1
	6	4	2		

2. Cada subcuadrado contiene una órbita principal y dos monótonas por símbolos o viceversa.

Esta situación requiere un estudio de casos. Por la Proposición 2.1, sabemos que nuestro  $\Theta$ -conjunto crítico  $\mathcal{C}_\Theta$  requiere al menos dos entradas, que deben cubrir los dos conjuntos de filas y columnas  $\{1, 2, 3\}$  y  $\{4, 5, 6\}$ , y al menos un símbolo en el conjunto  $\{1, 2, 3\}$ . Además, la Proposición 1.6 implica que  $\mathcal{C}_\Theta$  requiere al menos dos entradas con símbolos en el conjunto  $\{4, 5, 6\}$ . Salvo paratopismo, la situación, con exactamente tres entradas, será una de las siguientes.

1					
	2				
		3			
			4	5	
				4	5
				5	4

1			5		
	2			5	
		3			5
			4		
				4	
					4

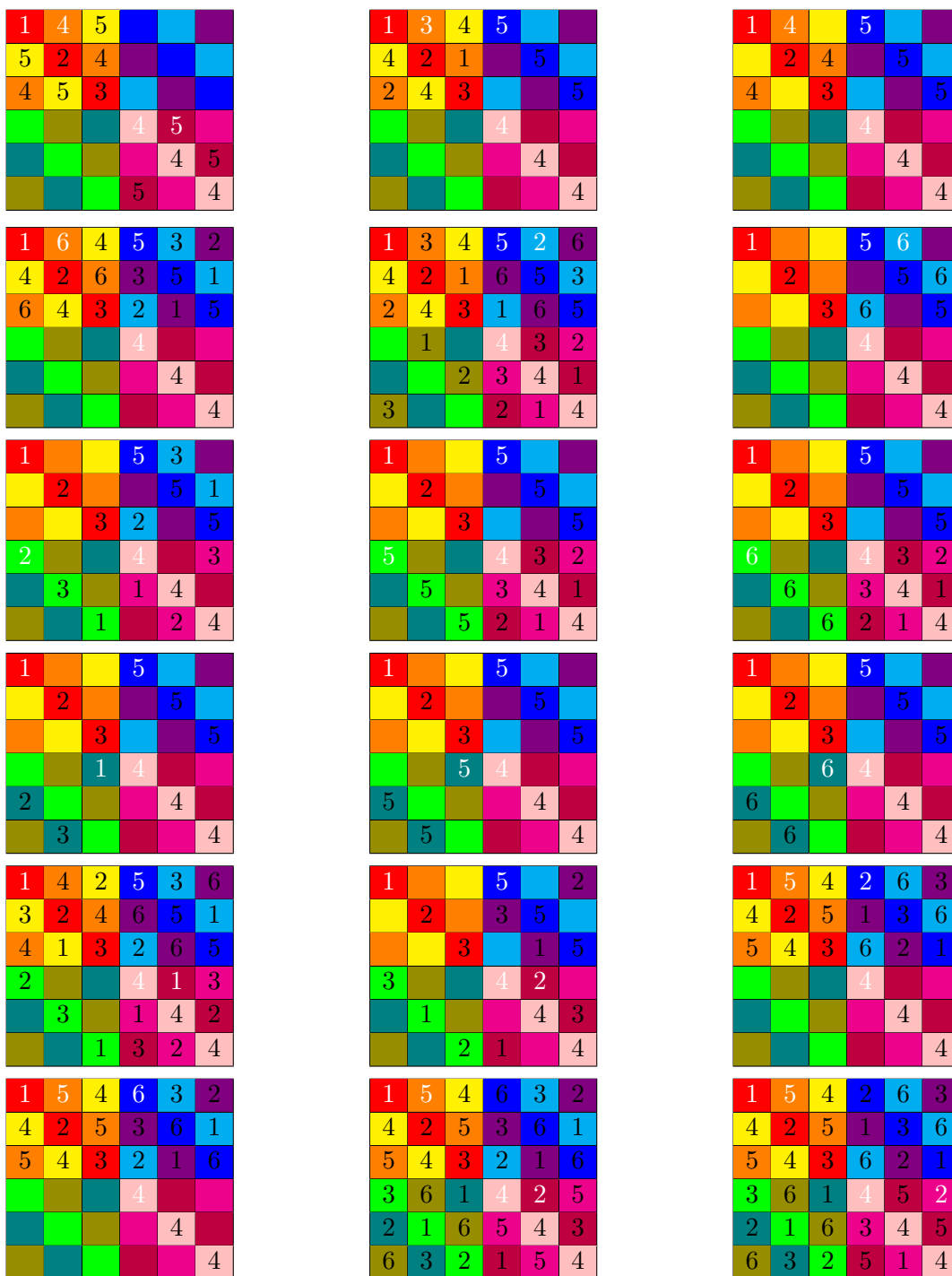
1	5	4			
4	2	5			
5	4	3			
			4		
				4	
					4

1			5		
	2			5	
		3			5
4					
	4				
		4			

Ninguno de los cuadrados latinos parciales anteriores es únicamente  $\Theta$ -completable, siendo necesario una cuarta entrada en cada uno de ellos. En particular, todo cuadrado latino



parcial únicamente  $\Theta$ -completable conteniendo al primero de los cuadrados debe incluir en el subcuadrado superior izquierdo un órbita monótona en uno de los símbolos del conjunto  $\{4, 5\}$ . Además, sin en la cuarta situación se encontrara el símbolo fijo 6 en el subcuadrado inferior derecho, podríamos reducirnos a la segunda situación, por lo que, en este caso, podemos suponer que el símbolo 6 no está contenido en dicho subcuadrado. Pero entonces nos encontraríamos obligatoriamente en el Caso 1. Así, salvo paratopismo, tendremos las siguientes situaciones.



La situación penúltima y última son los únicos dos  $\Theta$ -conjuntos críticos de **tamaño cuatro** obtenidos. Corresponden, respectivamente, a las clases principales de  $L_{6,5}$  y  $L_{6,6}$ . Añadiendo una entrada a cada una de las dos situaciones inmediatamente anteriores a ellas, se obtienen  $\Theta$ -conjuntos críticos de **tamaño cinco** de ambas clases principales.

1	5	4	6	3	2
4	2	5	3	6	1
5	4	3	2	1	6
3	6	1	4	2	5
2	1	6	5	4	3
6	3	2	1	5	4

1	5	4	2	6	3
4	2	5	1	3	6
5	4	3	6	2	1
3	6	1	4	5	2
2	1	6	3	4	5
6	3	2	5	1	4

El resto de cuadrados latinos parciales no son únicamente  $\Theta$ -completos y requieren una quinta entrada. La inclusión de dicha entrada o bien da lugar, salvo paratopismo, a una de las siguientes situaciones, o bien contempla uno de los casos ya vistos.

1	3	4	5	6	2
4	2	1	3	5	6
2	4	3	6	1	5
3			4	2	1
	1		2	4	3
		2	1	3	4

1	3	4	5	2	6
4	2	1	6	5	3
2	4	3	1	6	5
	1		4	1	2
		2	3	4	2
3			3	1	4

1	4	2	5		
3	2	4		5	
4	1	3			5
			4		
				4	
					4

1	4	6	5	3	2
6	2	4	3	5	1
4	6	3	2	1	5
			4		
				4	
					4

1	4		5	3	
	2	4		5	1
4		3	2		5
			4		
				4	
					4

1	4	2	5	6	3
3	2	4	1	5	6
4	1	3	6	2	5
		1	4	3	2
2			3	4	1
	3		2	1	4

1	4		5	3	
	2	4		5	
4		3		5	
		1	4		
2				4	
	3				4

1	4		5	3	
	2	4		5	1
4		3	2		5
2			5	4	
5	3		1	4	
	5	1		2	4

1			5	3	
	2			5	1
		3	2		5
2		5	4		3
5	3		1	4	
	5	1		2	4

1			5	3	2
	2		3	5	1
		3	2	1	5
3	5	1	4	2	6
2	1	5	6	4	3
5	3	2	1	6	4

Como puede observarse, una sexta entrada es requerida en todas las situaciones planteadas. La inclusión de la misma, o bien contiene uno de los  $\Theta$ -conjuntos críticos anteriores, o bien contempla, salvo paratopismo, una de las siguientes situaciones.

1	4	2	5	3	6
3	2	4	6	5	1
4	1	3	2	6	5
2			4	1	3
	3		1	4	2
		1	3	2	4

1	4	2	5	6	3
3	2	4	1	5	6
4	1	3	6	2	5
		1	4	3	2
2			3	4	1
	3		2	1	4

1	4	2	5	3	6
3	2	4	6	5	1
4	1	3	2	6	5
2			4	1	3
	3		1	4	2
		1	3	2	4

1	4		5	3	
	2	4		5	1
4		3	2		5
2			4		3
	3		1	4	
		1		2	4

1	4		5	3	
	2	4		5	1
4		3	2		5
2		5	4		3
5	3		1	4	
	5	1		2	4

1	4		5	3	
	2	4		5	1
4		3	2		5
2		5	4		3
5	3		1	4	
	5	1		2	4

1	4	2	5	3	6
3	2	4	6	5	1
4	1	3	2	6	5
2	6	5	4	1	3
5	3	6	1	4	2
6	5	1	3	2	4

La última situación constituye un  $\Theta$ -conjunto crítico de **tamaño seis** correspondiente a la clase de equivalencia  $L_{6,5}$ . En el resto de situaciones es requerida una séptima entrada para encontrar un cuadrado latino parcialmente  $\Theta$ -completable. Salvo paratopismo, esta séptima entrada da lugar, o bien a uno de los  $\Theta$ -conjunto críticos anteriores, o bien a la siguiente situación.

1	4		5	3	
	2	4		5	1
4		3	2		5
2		5	4		3
5	3		1	4	
	5	1		2	4

Se necesita, por tanto, la inclusión de una octava entrada para dar lugar a un cuadrado latino parcialmente  $\Theta$ -completable. En todo caso, cualquier entrada que se incluya contempla uno de los  $\Theta$ -conjuntos críticos vistos anteriormente.

Atendiendo al razonamiento anterior, alcanzamos el siguiente resultado.

**Proposición 4.3.** *Sea  $L \in \mathcal{L}(6)$  con un autotopismo  $\Theta \in \text{Atop}(L)$  tal que  $z_\Theta = (3^2, 3^2, 31^3)$ . Entonces, si  $L$  es paratópico a  $L_{6,3}$ , resulta que  $\text{scs}_\Theta(L) = 3 = \text{lcs}_\Theta(L)$ . Por su parte, si  $L$  es paratópico a  $L_{6,n}$ , con  $n \in \{2, 12\}$ , resulta que  $\text{scs}_\Theta(L) = 6 \leq 7 = \text{lcs}_\Theta(L)$ . Finalmente, si  $L$  es paratópico a  $L_{6,n}$ , con  $n \in \{4, 5\}$ , resulta que  $\text{scs}_\Theta(L) = 4 \leq 6 = \text{lcs}_\Theta(L)$ .*

### 4.4- La estructura cíclica $(3^2, 3^2, 1^6)$

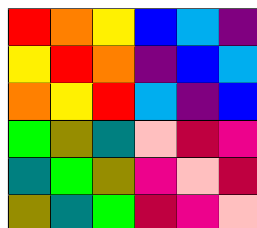
Esta estructura cíclica está vinculada a un autotopismo  $\Theta$  de las clases principales descritas por  $L_{6,2}$ ,  $L_{6,3}$  y  $L_{6,4}$ . De la misma forma, esta estructura cíclica está vinculada a cualquier cuadrado  $L \in \mathcal{L}(6)$  paratópico a la clase principal descrita por  $L_{6,12}$ . Atendiendo al Cuadro 1.3, se tiene que

$$s_{cs\Theta}(L_{6,n}) \leq 8 \leq l_{cs\Theta}(L_{6,n}),$$

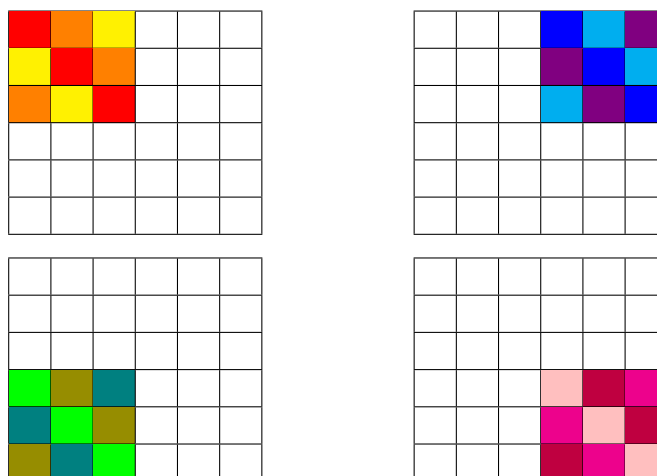
para  $n \in \{2, 3, 4, 12\}$ . Con vistas a probar que dichas cotas son óptimas, consideramos el isotopismo canónico

$$\Theta := ((123)(456), (123)(456), Id_6),$$

dando lugar a la siguiente  $\Theta$ -coloración.



Atendiendo a la estructura cíclica bajo consideración, se presentan doce órbitas secundarias monótonas por símbolos paralelas entre sí en los siguientes grupos de tres órbitas:



Por la Proposición 1.6 sabemos que el tamaño de conjunto crítico mínimo será mayor o igual a ocho, siendo estas entradas relativas a dos órbitas de cada grupo anterior. Además, puesto que todos los símbolos son puntos fijos, necesitaremos, al menos, cinco de ellos para evitar que las órbitas puedan intercambiarse entre sí. Salvo paratopismo, tenemos la siguiente situación.

1	2	4	6		
1	2	6	4		
2	1	6	4		
4	6	1	3		
4	5	1			
5	4	3	1		

Es fácil comprobar que el cuadrado únicamente  $\Theta$ -completable.

Por otra parte, cualquier conjunto de 9 entradas, con dos entradas en tres de los cuatro cuadros  $3 \times 3$  representados como grupos de órbitas y tres entradas en el cuarto cuadrado, podría reducirse a un conjunto de 8 entradas con la misma información y, por tanto, únicamente completable.

Luego, son necesarias y suficientes **ocho entradas** para que el cuadrado sea únicamente  $\Theta$ -completable.

Atendiendo al razonamiento anterior, alcanzamos el siguiente resultado.

**Proposición 4.4.** *Sea  $L \in \mathcal{L}(6)$  con un autotopismo  $\Theta \in \text{Atop}(L)$  tal que  $z_\Theta(L) = (3^2, 3^2, 1^6)$ . Entonces,  $scs_\Theta = lcs_\Theta(L) = 8$ .*

### 4.5– La estructura cíclica $(31^3, 31^3, 31^3)$

Esta estructura cíclica está vinculada a un autotopismo  $\Theta$  de las clases principales descritas por  $L_{6,2}$ ,  $L_{6,3}$  y  $L_{6,12}$ . Atendiendo al Cuadro 1.3, se tiene que

$$scs_{\Theta}(L_{6,n}) \leq 8 \leq 9 \leq lcs_{\Theta}(L_{6,n}),$$

para  $n \in \{2, 3, 12\}$ . Con vistas a probar que dichas cotas son óptimas, consideramos el isotopismo canónico

$$\Theta := ((123), (123), (123)),$$

dando lugar a la siguiente  $\Theta$ -coloración.

Red	Orange	Yellow	Blue	Cyan	Purple
Yellow	Red	Orange	Blue	Cyan	Purple
Orange	Yellow	Red	Blue	Cyan	Purple
Green	Green	Green	Pink	Red	Magenta
Teal	Teal	Teal	White	Brown	Grey
Olive	Olive	Olive	Black	Dark Grey	Light Green

Atendiendo a la estructura cíclica bajo consideración, se presentan tres órbitas secundarias paralelas monótonas por filas, tres órbitas secundarias paralelas monótonas por columnas, tres órbitas secundarias paralelas monótonas por símbolos y nueve órbitas triviales. Por la Proposición 1.6 sabemos que el tamaño de conjunto crítico mínimo será mayor o igual a 6, siendo estas entradas relativas a dos de las órbitas secundarias monótonas por filas, a dos órbitas secundarias monótonas por columnas y a dos órbitas secundarias monótonas por símbolos. Salvo paratopismo, tenemos la siguiente situación.

4	5	Yellow	1	2	Purple
Yellow	4	5	2	3	Purple
5	Yellow	4	3	1	Purple
1	2	3	Pink	Red	Magenta
2	3	1	White	Brown	Grey
Olive	Olive	Olive	Black	Dark Grey	Light Green

Teniendo en cuenta la estructura del autotopismo y las propiedades de los cuadrados latinos, puede verse que existen algunas entradas que vienen forzadas, pues al ser el símbolo 6 un punto fijo, no podrá colocarse en ninguna órbita monótona por filas o columnas. Resulta entonces la siguiente situación.

4	5	6	1	2	3
6	4	5	2	3	1
5	6	4	3	1	2
1	2	3	Pink	Red	Magenta
2	3	1	White	Brown	Grey
3	1	2	Black	Dark Grey	Light Green

Puede verse que queda por completar un cuadrado latino de orden tres con nueve órbitas triviales y un conjunto de símbolos de tamaño tres. Atendiendo al Cuadro 1.2, el menor tamaño de  $\Theta$ -conjunto crítico para este caso es dos y el mayor es tres. Luego se necesitarían como mínimo **ocho entradas** y como máximo **nueve entradas** para completar únicamente el cuadrado latino anterior. Basado en todo este razonamiento, hemos probado el siguiente resultado.

**Proposición 4.5.** *Sea  $L \in \mathcal{L}(6)$  con un autotopismo  $\Theta \in \text{Atop}(L)$  tal que  $z_{\Theta} = (31^3, 31^3, 31^3)$  entonces  $scs_{\Theta}(L) = 8 \leq 9 = lcs_{\Theta}(L)$ .*

## Autotopismos de ciclo corto

Este capítulo se centra en el estudio de autotopismos cuya estructura cíclica presenta ciclos de longitud dos. En el transcurso del estudio se han identificado ciertos casos que, debido a su complejidad y la limitación de tiempo, o bien no pudieron ser abordados o bien no se ha realizado de manera exhaustiva en el presente trabajo. No obstante, se reconocen como áreas de gran interés y relevancia para futuras investigaciones. Estos casos se dejarán como tópicos de estudio en desarrollo, con el propósito de explorar y comprender más profundamente sus propiedades y relaciones matemáticas en futuros proyectos. Se confía en que la continuidad de esta investigación ampliará nuestro conocimiento sobre los conjuntos críticos asociados a autotopismos no triviales de cuadrados latinos de orden 6, contribuyendo así al avance de la teoría de grupos y la combinatoria en esta área. Algunos de los casos tratados, de forma parcial o completa, son los que siguen:

### 5.1– La estructura cíclica $(2^3, 2^3, 1^6)$

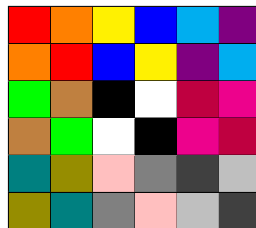
Esta estructura cíclica está vinculada a un autotopismo  $\Theta$  de las clases principales descritas por  $L_{6,n}$ , para  $n \in \{1, 2, 4, 5, 7\}$ . Atendiendo al Cuadro 1.3, se tiene que

$$scs_{\Theta}(L_{6,n}) \leq 9 \leq 10 \leq lcs_{\Theta}(L_{6,n}),$$

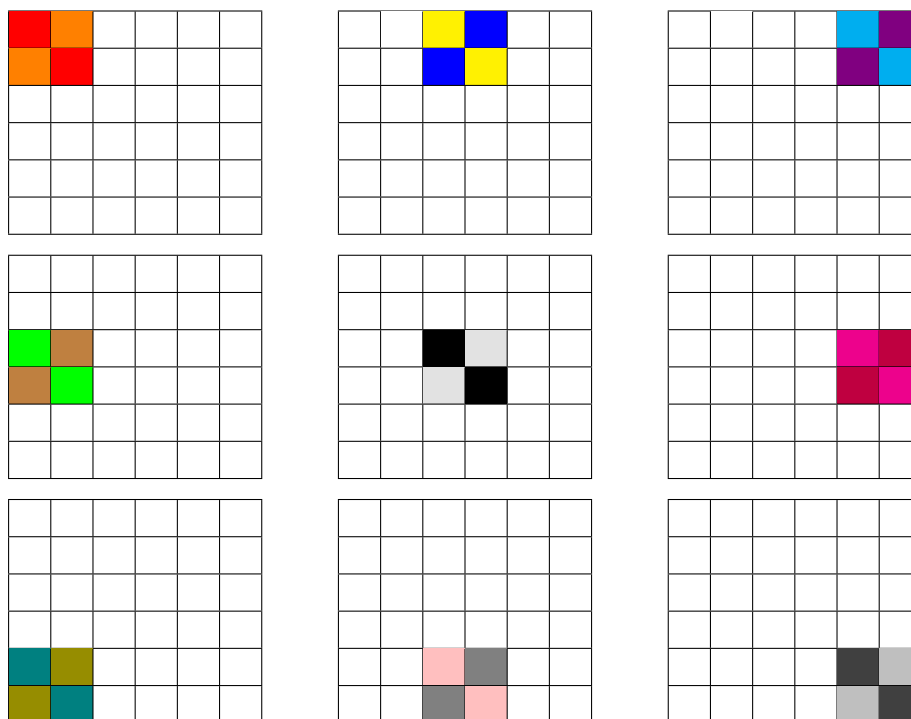
para  $n \in \{1, 2, 4, 7\}$ . Con vistas a probar que dichas cotas son óptimas, consideramos el isotopismo canónico

$$\Theta := ((12)(34)(56), (12)(34)(56), Id_6),$$

dando lugar a la siguiente  $\Theta$ -coloración.



Atendiendo a la estructura cíclica bajo consideración, se presentan 18 órbitas monótonas por símbolos. Por la Proposición 1.9 sabemos que este cuadrado está conformado por 9 intercalados y, por tanto, se necesitan como mínimo **nueve entradas** (una de cada intercalado) para que sea únicamente  $\Theta$ -completable. Esto es posible gracias a que los cuadrados  $P$  y  $Q$  pueden ser tratados en dicha proposición como iguales y, además, todos los símbolos son fijos. Los intercalados son, por tanto, los siguientes:



Es fácil ver que, independientemente de las entradas que tomemos, se cubren todos los ciclos de filas y columnas. Por tanto, la diferencia vendrá marcada por el número de símbolos distintos que se tomen en estas entradas. Puesto que sólo se tienen órbitas monótonas por símbolos es necesario que, como mínimo, se usen cinco distintos (pues si tomamos un número menor, las órbitas de los símbolos no usados podrían intercambiarse entre sí).

Comprobamos si cinco símbolos son suficientes para completar únicamente el cuadrado. Se usarán, de manera genérica, el conjunto de símbolos  $\{a, b, c, d, e\}$ . Podemos reducirlo a tres casos:

- Caso 1:  $\{a, a, a, b, b, b, c, d, e\}$

En este caso se tienen dos tripletas de símbolos iguales. Salvo paratopismos, isotopismos y/o transposiciones, suponemos la siguiente disposición en el cuadrado:

$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$a$	$a$	$b$	$c$	$c$
$d$	$a$	$a$	$b$	$b$
$b$	$d$	$a$	$a$	$b$
$b$	$e$	$a$	$a$	$a$
$b$	$e$	$e$	$a$	$a$

Es fácil comprobar que en cada entrada existe la posibilidad de colocar, al menos, dos símbolos, luego no es únicamente  $\Theta$ -completable. Esto es debido a que las tripletas nos están dando información redundante.

- Caso 2:  $\{a, a, a, b, b, c, c, d, e\}$

En este caso se tienen una tripleta y dos parejas de símbolos iguales. Salvo paratopismos, isotopismos y/o transposiciones, suponemos la siguiente disposición en el cuadrado:



a		b		c	
	a		b		c
d		a		b	
	d		a		b
c		e		a	
	c		e		a

Podemos ver que cada pareja de símbolos tendrá información suficiente como para colocar la tercera órbita con el mismo símbolo. Si completamos de manera forzada:

a		b		c	
	a		b		c
d		a	c	b	
	d	c	a		b
c	b	e		a	
b	c		e		a

Sin embargo, siguen existiendo entradas que tienen la posibilidad de colocar dos símbolos en ellas, luego el cuadrado no sería únicamente  $\Theta$ -completable.

- Caso 2:  $\{a, a, b, b, c, c, d, d, e\}$

En este caso se tienen cuatro parejas de símbolos iguales. Salvo paratopismos, isotopismos y/o transposiciones, suponemos la siguiente disposición en el cuadrado:

a		b		c	
	a		b		c
d		a		b	
	d		a		b
c		e		d	
b	c		e		d

Si completamos de manera forzada:

a		b	d	c	
	a	d	b		c
d		a	c	b	
	d	c	a		b
c	b	e	f	d	a
b	c	f	e	a	d

Sin embargo, las órbitas restantes pueden intercambiarse entre sí, luego no es únicamente  $\Theta$ -completable.

Podemos afirmar, entonces, que si se usan únicamente nueve entradas y cinco símbolos distintos, el cuadrado no es únicamente  $\Theta$ -completable, luego necesitaremos usar seis símbolos distintos. Puesto que con los casos anteriores hemos comprobado que una tripleta de símbolos iguales no aporta información adicional, estudiaremos el caso en el que existen seis entradas relativas a símbolos distintos y tres a símbolos repetidos, por ejemplo  $\{a, a, b, b, c, c, d, e, f\}$ . Suponemos la siguiente disposición:

<i>a</i>		<i>b</i>		<i>c</i>	
	<i>a</i>		<i>b</i>		<i>c</i>
	<i>f</i>	<i>a</i>		<i>b</i>	
<i>f</i>			<i>a</i>		<i>b</i>
	<i>d</i>	<i>c</i>			<i>e</i>
<i>d</i>			<i>c</i>	<i>e</i>	

Si completamos de manera forzada:

<i>a</i>	<i>e</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>f</i>
<i>e</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>f</i>	<i>c</i>
<i>c</i>	<i>f</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>b</i>	<i>d</i>
<i>f</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>b</i>
<i>b</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>f</i>	<i>a</i>	<i>e</i>
<i>d</i>	<i>b</i>	<i>f</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>a</i>

Es fácil ver mediante un simple estudio de casos que, sea cual fuere la disposición de entradas usadas, siempre se vuelve al caso anterior. Luego, si se usan 9 entradas relativas a cada uno de los intercalados y aparecen los seis símbolos distintos, entonces el cuadrado es únicamente  $\Theta$ -completable.

Una vez hemos demostrado la cota inferior de tamaño de conjunto crítico, sería conveniente estudiar la cota superior. Resulta evidente que, al usar diez entradas (donde nueve de ellas pertenecen a cada uno de los nueve intercalados presentes), el número de símbolos empleados debe ser cinco, ya que al usar seis volveríamos al caso anterior. Existen varias posibilidades a la hora de tomar las diez entradas en función de los símbolos seleccionados:

- Caso 1:  $\{a, a, a, b, b, b, c, c, e, f\}$

En este caso se tienen dos tripletas y una pareja de símbolos iguales. Salvo paratopismos, isotopismos y/o transposiciones, suponemos la siguiente disposición en el cuadrado:

<i>a</i>		<i>b</i>		<i>c</i>	
	<i>a</i>		<i>b</i>		<i>c</i>
	<i>f</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>b</i>	
<i>f</i>		<i>e</i>	<i>a</i>		<i>b</i>
<i>b</i>		<i>c</i>		<i>a</i>	
	<i>b</i>		<i>c</i>		<i>a</i>

Si completamos de manera forzada:

<i>a</i>		<i>b</i>		<i>c</i>	
	<i>a</i>		<i>b</i>		<i>c</i>
<i>c</i>	<i>f</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>b</i>	<i>d</i>
<i>f</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>b</i>
<i>b</i>		<i>c</i>		<i>a</i>	
	<i>b</i>		<i>c</i>		<i>a</i>

Puede verse que el cuadrado no es únicamente  $\Theta$ -completable, pues las órbitas restantes pueden intercambiarse entre sí.

- Caso 2:  $\{a, a, a, b, b, c, c, d, d, f\}$

En este caso se tienen una tripleta y tres parejas de símbolos iguales. Salvo paratopismos, isotopismos y/o transposiciones, suponemos la siguiente disposición en el cuadrado:

a		b		c	
	a		b		c
	f	a		b	d
f			a	d	b
	d	c		a	
d			c		a

Si completamos de manera forzada:

a	e	b	d	c	f
e	a	d	b	f	c
c	f	a	e	b	d
f	e	e	a	d	b
b	d	c	f	a	e
d	b	f	c	e	a

Puede verse, entonces, que el cuadrado es únicamente  $\Theta$ -completable usando diez entradas y cinco símbolos distintos.

- Caso 3:  $\{a, a, b, b, c, c, d, d, f, f\}$

Esta opción no sería necesaria estudiarla pues, si fuese únicamente  $\Theta$ -completable, la cota superior para el tamaño de conjunto crítico se mantendría en diez entradas y, de no serlo, existirían dos opciones: o bien se añade una entrada que incluye un símbolo ya presente en el cuadrado (con lo que volveríamos al caso 2) o bien se añade un nuevo símbolo (con lo que se volvería al caso de nueve entradas y seis símbolos distintos).

Atendiendo al razonamiento anterior, alcanzamos el siguiente resultado.

**Proposición 5.1.** Sea  $L \in \mathcal{L}(6)$  con un autotopismo  $\Theta \in \text{Atop}(L)$  tal que  $z_\Theta = (2^3, 2^3, 1^6)$  entonces  $scs_\Theta = 9 \leq 10 = lcs_\Theta$ .

### 5.2– La estructura cíclica $(2^2 1^2, 2^2 1^2, 2^2 1^2)$

Esta estructura cíclica está vinculada a un autotopismo  $\Theta$  de las clases principales descritas por  $L_{6,1}, L_{6,2}, L_{6,4}, L_{6,5}, L_{6,6}, L_{6,7}, L_{6,8}, L_{6,10}, L_{6,11}$  y  $L_{6,12}$ . Atendiendo al Cuadro 1.3, todo cuadrado latino  $L \in \mathcal{L}(6)$  paratópico a  $L_{6,1}, L_{6,2}, L_{6,4}, L_{6,6}, L_{6,7}$  o a  $L_{6,10}$ , con un autotopismo  $\Theta \in \text{Atop}(L)$  tal que  $z_\Theta = (2^2 1^2, 2^2 1^2, 2^2 1^2)$ , verifica que

$$\text{scs}_\Theta(L) \leq 7 \leq 9 \leq \text{lcs}_\Theta(L).$$

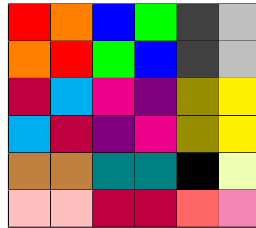
Por su parte, todo cuadrado latino  $L \in \mathcal{L}(6)$  paratópico a  $L_{6,5}, L_{6,8}, L_{6,11}$  o a  $L_{6,12}$ , con un autotopismo  $\Theta \in \text{Atop}(L)$  tal que  $z_\Theta = (2^2 1^2, 2^2 1^2, 2^2 1^2)$ , verifica que

$$\text{scs}_\Theta(L) \leq 8 \leq 9 \leq \text{lcs}_\Theta(L).$$

Con vistas a probar que todas estas cotas son óptimas, consideramos el isotopismo canónico

$$\Theta := ((12)(34), (12)(34), (12)(34)),$$

dando lugar a la siguiente  $\Theta$ -coloración.



A pesar de los esfuerzos dedicados a este caso en particular, no ha sido factible abordarlo en su totalidad en este Trabajo de Fin de Máster debido a la naturaleza intrincada de sus propiedades y relaciones. Si bien se han obtenido avances preliminares y se ha establecido una base para su estudio, la exploración completa de este caso requeriría una dedicación adicional y un análisis más profundo.

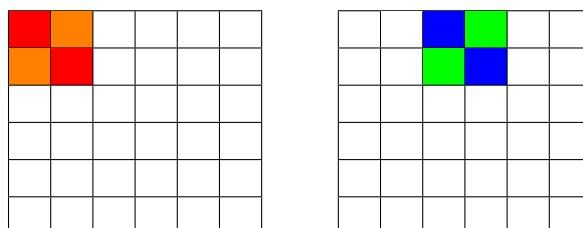
Por esta razón, se destaca este caso como un área prometedora para futuras investigaciones y trabajo en desarrollo. Se considera que un estudio minucioso de este caso podría arrojar nueva luz sobre aspectos cruciales del mismo, contribuyendo así al enriquecimiento de esta área de estudio.

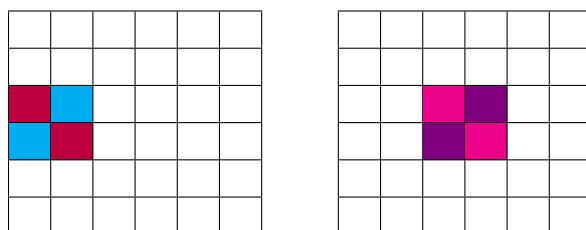
Exponemos, entonces, los avances obtenidos hasta el momento:

Se presentan cuatro órbitas secundarias monótonas por filas, cuatro órbitas secundarias monótonas por columnas, cuatro órbitas secundarias monótonas por símbolos, cuatro órbitas triviales y cuatro órbitas principales.

La Proposición 2.1 establece que cada ciclo de tamaño mayor o igual a dos del autotopismo fijado debe ser alcanzado por alguna órbita.

Sabemos que el cuadrado latino contiene cuatro intercalados. Si atendemos a la estructura cíclica propuesta para estudio, llegamos a la conclusión de que estos intercalados estarán conformados bien por una órbita secundaria monótona por símbolos y una órbita principal cada uno, o bien dos estarán formados por dos órbitas monótonas por símbolos y los otros dos por órbitas principales. Los intercalados presentes en el cuadrado son:





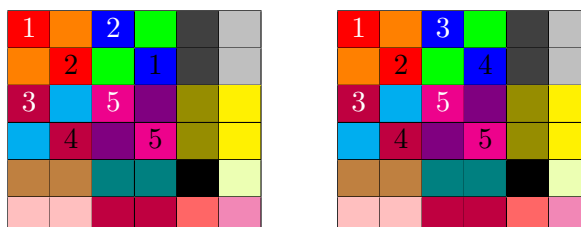
En cuanto a las órbitas secundarias monótonas, podemos afirmar que, tras un sencillo estudio de casos, existen dos posibilidades: que las órbitas monótonas, bien por filas o por columnas, sean paralelas dos a dos, pero nunca de manera simultánea, o bien, que ninguna órbita secundaria monótona sea paralela. Luego, en función del caso en el que nos encontremos, se requerirán (o no) dos entradas adicionales relativas a órbitas secundarias monótonas por filas o columnas.

Por último, es fácil ver que las entradas triviales conforman un cuadrado latino de orden dos. Por (Falcón y cols., 2021) sabemos que para que ese caso sea únicamente  $\Theta$ -completable se precisa de una única entrada relativa a una de las órbitas triviales.

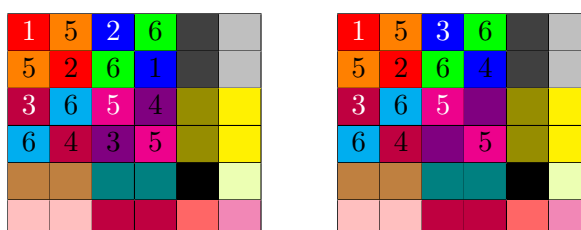
Estudiamos los distintos casos posibles, en función de las órbitas tomadas y teniendo en cuenta los requisitos anteriores. Comenzaremos estudiando los casos en los que cada intercalado contiene una órbita principal y una monótona por símbolos. Puesto cada intercalado está conformado por una una órbita principal y una secundaria monótona por símbolos, estas órbitas podrían intercambiarse entre si, luego tomaremos inicialmente una entrada de cada intercalado:

- **Tomar tres entradas relativas a órbitas principales y una de una órbita secundaria monótona por símbolos**

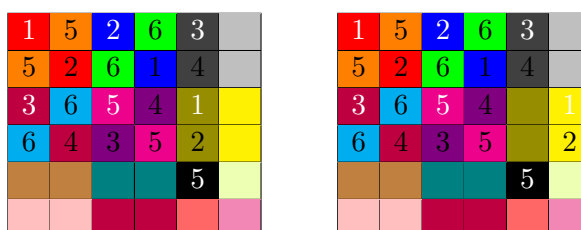
Salvo isotopismo, paratopismo y/o transposición, las únicas soluciones factibles son:



Estas entradas fuerzan las siguientes:



Continuamos, entonces, añadiendo las entradas relativas a órbitas monótonas paralelas por columnas (de manera análoga, por filas) y la entrada de la órbita trivial. Salvo isotopismo, paratopismo y/o transposición, las únicas soluciones factibles son:



1	5	3	6	2	
5	2	6	4	1	
3	6	5			1
6	4		5		2
				5	

1	5	3	6	2	
5	2	6	4	1	
3	6	5		4	
6	4		5	3	
				5	

Estas entradas fuerzan otras, dando lugar a un mismo resultado:

1	5	2	6	3	4
5	2	6	1	4	3
3	6	5	4	1	2
6	4	3	5	2	1
				5	6
				6	5

1	5	2	6	3	4
5	2	6	1	4	3
3	6	5	4	1	2
6	4	3	5	2	1
				5	6
				6	5

1	5	3	6	2	4
5	2	6	4	1	3
3	6	5	2	4	1
6	4	1	5	3	2
				5	6
				6	5

1	5	3	6	2	4
5	2	6	4	1	3
3	6	5		4	
6	4		5	3	
				5	6
				6	5

Es fácil ver que las entradas monótonas por filas restantes podrían intercambiarse entre sí, por tanto, debemos incluir, al menos, una entrada relativa a estas:

1	5	2	6	3	4
5	2	6	1	4	3
3	6	5	4	1	2
6	4	3	5	2	1
4	3			5	6
				6	5

1	5	2	6	3	4
5	2	6	1	4	3
3	6	5	4	1	2
6	4	3	5	2	1
4	3			5	6
				6	5

1	5	3	6	2	4
5	2	6	4	1	3
3	6	5	2	4	1
6	4	1	5	3	2
4	3			5	6
				6	5

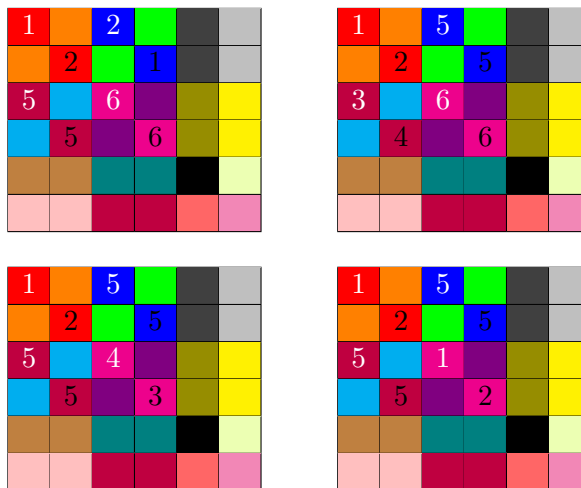
1	5	3	6	2	4
5	2	6	4	1	3
3	6	5		4	
6	4		5	3	
4	3			5	6
				6	5

Es fácil ver que, a excepción del cuadrado parcial situado en la esquina inferior derecha, el resto son únicamente  $\Theta$ -completos y puede comprobarse que, en el caso superior izquierdo, no existe ningún subconjunto de entradas de menor tamaño incluido en él que haga que el cuadrado siga siendo únicamente  $\Theta$ -completable, luego precisa de **ocho entradas**. Sin embargo, en el caso superior derecho e inferior izquierdo, se podrían eliminar una entrada de cada uno, a saber (1,3,2) para el superior derecho y la (1,5,2) para el inferior izquierdo, de manera que el cuadrado seguiría siendo únicamente  $\Theta$ -completable, precisando, por tanto, sólo **siete entradas**.

Si atendemos al caso inferior derecho, se necesitaría una entrada más para que fuese únicamente  $\Theta$ -completable. Mediante un estudio de casos, podemos ver que independientemente de la órbita tomada, nos encontraremos ante conjuntos críticos de tamaño siete y ocho.

- **Tomar dos entradas relativas a órbitas principales y dos a órbitas secundarias monótonas por símbolos**

Salvo isotopismo y/o transposición, las únicas soluciones factibles son:



Se puede comprobar que al añadir las entradas relativas a las órbitas monótonas por columnas (análogamente filas) y la entrada de la órbita trivial, nos encontraremos en alguno de los casos anteriores. Luego se precisan **siete u ocho entradas** para que el cuadrado sea únicamente  $\Theta$ -completable.

- **Tomar tres entradas relativas órbitas secundarias monótonas por símbolos y una de una órbita principal**

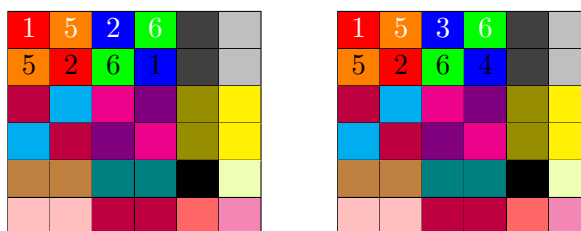
Este caso es análogo al estudiado en el primer punto, luego volveríamos a encontrarnos con conjuntos críticos de tamaño siete y ocho.

- **Tomar cuatro entradas relativas a órbitas principales o cuatro secundarias monótonas por símbolos.**

Este caso daría lugar a un cuadrado latino parcial que no sería únicamente  $\Theta$ -completable pues las órbitas monótonas por símbolos (análogamente, las órbitas principales) podrían intercambiarse entre sí. El estudio de este caso nos conduce a uno de los anteriores.

Hasta el momento hemos logrado demostrar que el tamaño mínimo de conjunto crítico oscilará entre siete y ocho entradas si se respetan los requisitos expuestos al comienzo de este estudio. Si bien es cierto que en el caso de siete entradas existía un intercalado completamente vacío, sería conveniente estudiar qué sucedería al dejar dos o más intercalados vacíos.

- **Dejamos dos intercalados vacíos** Salvo isotopismos, paratopismos y/o transposiciones, encontramos las siguientes soluciones factibles:



1	5				
5	2				
		1	5		
		5	2		

1	5				
5	2				
		3	5		
		5	4		

Añadimos la entrada relativa a la órbita trivial e incluimos aquellas entradas que puedan ser forzadas:

1	5	2	6		
5	2	6	1		
				5	6
				6	5

1	5	3	6		
5	2	6	4		
				5	6
				6	5

1	5				
5	2				
		1	5		
		5	2		
				5	6
				6	5

1	5				
5	2				
		3	5		
		5	4		
				5	6
				6	5

Puesto que los cuadrados parciales anteriores no son únicamente  $\Theta$ -completables, añadiremos entradas relativas a órbitas monótonas por filas o columnas según corresponda. Salvo isotopismos, paratopismos y/o transposiciones, las soluciones factibles son las siguientes:

1	5	2	6	3	
5	2	6	1	4	
				5	6
				6	5

1	5	3	6	2	
5	2	6	4	1	
				5	6
				6	5

1	5			2	
5	2			1	
		1	5		
		5	2		
				5	6
				6	5

1	5			3	
5	2			4	
		1	5		
		5	2		
				5	6
				6	5

1	5			2	
5	2			1	
		3	5		
		5	4		
				5	6
				6	5

1	5			3	
5	2			4	
		3	5		
		5	4		
				5	6
				6	5

Completamos con entradas forzadas en aquellos casos que lo permitan:

1	5	2	6	3	4
5	2	6	1	4	3
				5	6
				6	5

1	5	3	6	2	4
5	2	6	4	1	3
				5	6
				6	5

1	5			2	
5	2			1	
		1	5		
		5	2		
				5	6
				6	5



1	5			3	
5	2			4	
		1	5	2	
		5	2	1	
				5	6
				6	5

1	5			2	
5	2			1	
		3	5	4	
		5	4	3	
				5	6
				6	5

1	5			3	
5	2			4	
		3	5		
		5	4		
				5	6
				6	5

Debido a que los cuadrados parciales anteriores siguen sin ser únicamente  $\Theta$ -completables, añadiremos una nueva entrada relativa a una órbita secundaria monótona por filas o columnas, así como las entradas forzadas que surjan. Salvo isotopismos, paratopismos y/o transposiciones, las soluciones factibles son las siguientes:

1	5	2	6	3	4
5	2	6	1	4	3
				1	2
				2	1
				5	6
				6	5

1	5	2	6	3	4
5	2	6	1	4	3
2	1			5	6
				6	5

1	5	2	6	3	4
5	2	6	1	4	3
3	4	1	2	5	6
				6	5

1	5	3	6	2	4
5	2	6	4	1	3
				3	1
				4	2
				5	6
				6	5

1	5	3	6	2	4
5	2	6	4	1	3
2	1	4	3	5	6
				6	5

1	5	3	6	2	4
5	2	6	4	1	3
3	4			5	6
				6	5

1	5			2	3
5	2			1	4
		1	5	4	2
		5	2	3	1
				5	6
				6	5

1	5			2	
5	2			1	
		1	5	3	2
		5	2	4	1
				5	6
				6	5

1	5			2	
5	2			1	
		1	5		2
		5	2		1
				5	6
				6	5

1	5			2	
5	2			1	
		1	5		2
		5	2		1
3	4	2	1	5	6
2	1			6	5

1	5			2	
5	2			1	
		1	5		2
		5	2		1
		2	1	5	6
				6	5

1	5			2	
5	2			1	
		1	5		2
		5	2		1
2	1	3	4	5	6
		2	1	6	5

1	5			3	2
5	2			4	1
		1	5	2	
		5	2	1	
				5	6
				6	5

1	5			3	2
5	2			4	1
		1	5	2	
		5	2	1	
2	1			5	6
				6	5

1	5			3	2
5	2			4	1
		1	5	2	
		5	2	1	
3	4	2	1	5	6
2	1			6	5

1	5	4	6	2	3	
5	2	6	3	1	4	
		3	5	4		
		5	4	3		
				5	6	
				6	5	

1	5			2		
5	2			1		
		3	5	4		
		5	4	3		
3	4			5	6	
				6	5	

1	5	4	6	3	2	
5	2	6	3	4	1	
		3	5		4	
		5	4		3	
				5	6	
				6	5	

1	5			3	4	
5	2			4	3	
		3	5			
		5	4			
				5	6	
				6	5	

1	5			3		
5	2			4		
		3	5	1		
		5	4	2		
				5	6	
				6	5	

1	5			3	2	
5	2			4	1	
		3	5		4	
		5	4		3	
				5	6	
				6	5	

1	5			3		
5	2			4		
		3	5			
		5	4			
2	1	4	3	5	6	
				6	5	

1	5			3		
5	2			4		
		3	5	1		
		5	4	2		
3	4			5	6	
				6	5	

1	5			3		
5	2			4		
		3	5			
		5	4			
		1	2	5	6	
				6	5	

1	5			3		
5	2			4		
		3	5			
		5	4			
2	1	4	3	5	6	
				6	5	

Como puede verse, los cuadrados siguen sin ser únicamente  $\Theta$ -completos. En función del caso, deberemos añadir de una a dos entradas adicionales relativas a órbitas monótonas por filas o columnas para conseguir que lo fuese.

Como se mencionó al comienzo de este apartado, se trata de un estudio en desarrollo. Si bien es cierto que la mayoría de cuadrados parciales mostrados anteriormente tienden a contener conjuntos críticos con siete u ocho entradas, no podemos asegurar que esto se cumpla para todos los casos. De hecho, mediante el uso del código desarrollado en (González-Regadera, 2022), sabemos que existe, al menos, un conjunto crítico con **nueve entradas**. Este conjunto es:  $\{(1,3,2), (1,6,4), (3,3,3), (3,4,6), (3,6,2), (5,1,4), (5,5,5), (6,1,2), (6,3,4)\}$ .

---

### Conclusiones y desarrollos futuros

---

El presente Trabajo de Fin de Máster ha sido un viaje de descubrimiento y avance en la teoría de autotopismos de cuadrados latinos de orden seis, así como en la construcción y optimización de conjuntos críticos asociados. A lo largo de esta investigación, se ha logrado proporcionar una contribución sustancial al campo, abordando un área previamente inexplorada y ofreciendo resultados novedosos que enriquecen los existentes.

El objetivo principal de este trabajo ha sido demostrar, de manera rigurosa, la optimalidad de las cotas establecidas en el Trabajo Fin de Grado (González-Regadera, 2022) relativas al tamaño de los conjuntos críticos asociados a autotopismos no triviales de cuadrados latinos de orden seis. A través de un estudio computacional estadístico exhaustivo, previamente realizado por el autor del presente manuscrito, se habían obtenido cotas para el menor y mayor tamaño posible de dichos conjuntos críticos.

En total, de los 17 casos distintos presentes en el Cuadro 6.1, se ha logrado un análisis detallado y demostración completa para 13 de ellos, hecho que ha permitido validar gran parte de las cotas previamente obtenidas mediante el estudio estadístico. Estos resultados representan un hito significativo en el estudio de conjuntos críticos y autotopismos no triviales de cuadrados latinos de orden seis, ya que, hasta la fecha, no existía literatura previa que abordara de manera exhaustiva esta temática. Destacaremos las estructuras cíclicas estudiadas de manera exhaustiva marcandolas en **negrita** sobre el Cuadro 1.3 en la siguiente página del documento.

Sin embargo, durante el transcurso de esta investigación, se han identificado ciertos casos que, debido a su complejidad y la limitación de tiempo, bien no pudieron ser abordados o bien no se hizo de manera exhaustiva. No obstante, se reconocen como áreas de gran interés y relevancia para futuras investigaciones. Estos casos se dejarán como tópicos de estudio en desarrollo, con el propósito de explorar y comprender más profundamente sus propiedades y relaciones matemáticas en un futuro trabajo. Se confía en que la continuidad de esta investigación ampliará nuestro conocimiento sobre los conjuntos críticos asociados a autotopismos no triviales de cuadrados latinos de orden 6, contribuyendo así al avance de la teoría de grupos y la combinatoria en esta área.

En resumen, este trabajo ha logrado consolidar y demostrar la optimalidad de varias cotas establecidas para conjuntos críticos asociados a autotopismos no triviales de cuadrados latinos de orden seis. El estudio exhaustivo de 13 casos y la obtención de resultados representan un aporte novedoso y relevante en esta área de investigación. Se espera que este trabajo inspire futuras investigaciones y brinde una base sólida para futuros avances en la teoría de autotopismos y conjuntos críticos de cuadrados latinos de orden seis y superiores, estableciendo así un precedente para el desarrollo de este campo.

Cuadro 6.1: Estructuras cíclicas estudiadas exhaustivamente en el presente trabajo.  
(González-Regadera, 2022)

$n$	$\Theta \in \text{Atop}(L_{6,n})$	$z_\Theta$	Cota superior $\text{scs}_\Theta(L_{6,n})$	Cota inferior $\text{lcs}_\Theta(L_{6,n})$	Referencia		
1	$(\text{Id}_6, \text{Id}_6, \text{Id}_6)$	$(1^6, 1^6, 1^6)$	11	17	(Adams y cols., 2003)		
	$((36)(45), (36)(45), (36)(45))$	$(2^2 1^2, 2^2, 1^2, 2^2 1^2)$	7	9			
	$((12)(35)(46), (12)(34)(56), \text{Id}_6)$	$(2^3, 2^3, 1^6)$	9	10			
	$((12)(34)(56), (12)(35)(46), (36)(45))$	$(2^3, 2^3, 2^2 1^2)$	7	8			
2	$(\text{Id}_6, \text{Id}_6, \text{Id}_6)$	$(1^6, 1^6, 1^6)$	12	18	(Adams y cols., 2003)		
	$((23)(45), (23)(45), (23)(45))$	$(2^2 1^2, 2^2 1^2, 2^2 1^2)$	7	9			
	$((14)(25)(36), (14)(26)(35), \text{Id}_6)$	$(2^3, 2^3, 1^6)$	9	10			
	$((14)(26)(35), (14)(25)(36), (23)(56))$	$(2^3, 2^3, 2^2 1^2)$	7	8			
	$((456), (456), (456))$	$(31^3, 31^3, 31^3)$	8	9			
	$((123)(456), (15)(26)(34), (163524))$	$(3^2, 2^3, 6)$	4	4			
	$((132)(465), (123)(456), \text{Id}_6)$	$(3^2, 3^2, 1^6)$	8	8			
	$((123)(456), (132)(456), (465))$	$(3^2, 3^2, 31^3)$	6	7			
	$((142635), (153426), (13)(46))$	$(6, 6, 2^2 1^2)$	4	4			
	$((142536), (143526), (456))$	$(6, 6, 31^3)$	3	3			
	3	$(\text{Id}_6, \text{Id}_6, \text{Id}_6)$	$(1^6, 1^6, 1^6)$	11		16	(Adams y cols., 2003)
		$((456), (123), (123))$	$(31^3, 31^3, 31^3)$	8		9	
$((14)(26)(35), (15)(26)(34), (12)(45))$		$(2^3, 2^3, 2^2 1^2)$	6	8			
$((123)(465), (132)(465), \text{Id}_6)$		$(3^2, 3^2, 1^6)$	8	8			
$((123)(456), (123)(465), (132))$		$(3^2, 3^2, 31^3)$	6	6			
$((153624), (152634), (13)(45))$		$(6, 6, 2^2 1^2)$	4	4			
$((142635), (153624), \text{Id}_6)$		$(6, 6, 1^6)$	5	5			
4	$(\text{Id}_6, \text{Id}_6, \text{Id}_6)$	$(1^6, 1^6, 1^6)$	9	17	(Adams y cols., 2003)		
	$((23)(45), (23)(45), (23)(45))$	$(2^2 1^2, 2^2 1^2, 2^2 1^2)$	7	9			
	$((16)(25)(34), (16)(25)(34), \text{Id}_6)$	$(2^3, 2^3, 1^6)$	9	10			
	$((14)(25)(36), (15)(26)(34), (23)(45))$	$(2^3, 2^3, 2^2 1^2)$	6	8			
	$((123)(465), (16)(25)(34), (153624))$	$(3^2, 2^3, 6)$	4	4			
	$((123)(465), (132)(456), \text{Id}_6)$	$(3^2, 3^2, 1^6)$	8	8			
	$((123)(465), (123)(465), (132)(456))$	$(3^2, 3^2, 3^2)$	4	5			
	$((142635), (153624), \text{Id}_6)$	$(6, 6, 1^6)$	5	5			
	$((142635), (142635), (123)(465))$	$(6, 6, 3^2)$	3	3			
	$((142635), (142635), (123)(465))$	$(6, 6, 3^2)$	3	3			
5	$(\text{Id}_6, \text{Id}_6, \text{Id}_6)$	$(1^6, 1^6, 1^6)$	10	17	(Adams y cols., 2003)		
	$(\text{Id}_6, (15)(24)(36), (15)(24)(63))$	$(1^6, 2^3, 2^3)$	9	10			
	$((12)(45), (23)(46), (12)(45))$	$(2^2 1^2, 2^2 1^2, 2^2 1^2)$	8	9			
	$((345), (123)(465), (123)(465))$	$(31^3, 3^2, 3^2)$	4	6			
	$((345), (143526), (143526))$	$(31^3, 6, 6)$	3	3			
	$((12)(45), (15)(26)(34), (14)(25)(36))$	$(2^2 1^2, 3^2, 3^2)$	6	8			
	$((12)(45), (15)(26)(34), (14)(25)(36))$	$(2^2 1^2, 3^2, 3^2)$	6	8			
6	$(\text{Id}_6, \text{Id}_6, \text{Id}_6)$	$(1^6, 1^6, 1^6)$	11	17	(Adams y cols., 2003)		
	$((23), (12)(34)(56), (12)(34)(56))$	$(21^4, 2^3, 2^3)$	7	9			
	$((25)(34), (25)(34)(25)(34))$	$(2^2 1^2, 2^2 1^2, 2^2 1^2)$	7	9			
	$((354), (124)(365), (124)(365))$	$(31^3, 3^2, 3^2)$	4	6			
	$((2453), (2453), (2453))$	$(41^2, 41^2, 41^2)$	5	6			
	$((354)(12), (164325), (134526))$	$(321, 6, 6)$	2	3			
	$((12345), (26543), (12345))$	$(51, 51, 51)$	3	4			
	$((12345), (26543), (12345))$	$(51, 51, 51)$	3	4			
7	$(\text{Id}_6, \text{Id}_6, \text{Id}_6)$	$(1^6, 1^6, 1^6)$	11	17	(Adams y cols., 2003)		
	$((12)(56), (14)(35), (24)(36))$	$(2^2 1^2, 2^2 1^2, 2^2 1^2)$	7	9			
	$((15)(26)(34), (15)(26)(34), \text{Id}_6)$	$(2^3, 2^3, 1^6)$	9	10			
	$((14)(26)(35), (15)(24)(36), (13)(45))$	$(2^3, 2^3, 2^2 1^2)$	6	8			
	$((123)(456), (164)(235), (136)(254))$	$(3^2, 3^2, 3^2)$	4	5			
	$((142536), (136542), (163)(245))$	$(6, 6, 3^2)$	3	3			
	$((142536), (136542), (163)(245))$	$(6, 6, 3^2)$	3	3			
8	$(\text{Id}_6, \text{Id}_6, \text{Id}_6)$	$(1^6, 1^6, 1^6)$	10	17	(Adams y cols., 2003)		
	$((12)(34), (14)(36), (24)(56))$	$(2^2 1^2, 2^2 1^2, 2^2 1^2)$	8	9			
	$((1234), (2653), (1234))$	$(41^2, 41^2, 41^2)$	5	6			
	$((24), (14)(23)(56), (14)(23)(56))$	$(21^4, 2^3, 2^3)$	7	9			
9	$(\text{Id}_6, \text{Id}_6, \text{Id}_6)$	$(1^6, 1^6, 1^6)$	10	17	(Adams y cols., 2003)		
	$((13)(24)(56), (12)(34)(56), (16)(23))$	$(2^3, 2^3, 2^2 1^2)$	6	8			
10	$(\text{Id}_6, \text{Id}_6, \text{Id}_6)$	$(1^6, 1^6, 1^6)$	10	17	(Adams y cols., 2003)		
	$((34), (14)(23)(56), (14)(23)(56))$	$(21^4, 2^3, 2^3)$	7	9			
	$((12)(34), (25)(36), (12)(34))$	$(2^2 1^2, 2^2 1^2, 2^2 1^2)$	7	9			
11	$(\text{Id}_6, \text{Id}_6, \text{Id}_6)$	$(1^6, 1^6, 1^6)$	10	17	(Adams y cols., 2003)		
	$((12)(35), (12)(56), (16)(34))$	$(2^2 1^2, 2^2 1^2, 2^2 1^2)$	8	9			
12	$(\text{Id}_6, \text{Id}_6, \text{Id}_6)$	$(1^6, 1^6, 1^6)$	11	17	(Adams y cols., 2003)		
	$(\text{Id}_6, (126)(345), (126)(345))$	$(1^6, 3^2, 3^2)$	8	8			
	$((34), (13)(24)(56), (13)(24)(56))$	$(21^4, 2^3, 2^3)$	7	9			
	$((45), (132465), (132465))$	$(21^4, 6, 6)$	4	5			
	$((345), (345), (345))$	$(31^3, 31^3, 31^3)$	8	9			
	$((345), (126)(354), (126)(354))$	$(31^3, 3^2, 3^2)$	6	7			
	$((12)(35), (26)(34), (12)(35))$	$(2^2 1^2, 2^2 1^2, 2^2 1^2)$	8	9			
	$((354)(12), (132564), (142365))$	$(321, 6, 6)$	3	3			

---

## Glosario de símbolos

---

$\text{Atop}(L)$	El grupo de autotopismos de un cuadrado latino $L$ .
$\mathcal{C}_\Theta$	El $\Theta$ -conjunto crítico que buscamos en cada caso de estudio.
$d_\ell^\pi$	El número de ciclos de longitud $\ell$ en la descomposición en ciclos disjuntos de una permutación $\pi$ .
$\text{lcs}_\Theta(L)$	El tamaño mayor de todo $\Theta$ -conjunto crítico de un cuadrado latino $L$ .
$\mathcal{L}(n)$	El conjunto de cuadrados latinos con entradas en el conjunto $[n]$ .
$[n]$	El conjunto $\{1, \dots, n\}$ .
$\text{Orb}_\Theta((i, j, k))$	La $\Theta$ -órbita de una entrada $(i, j, k)$ .
$\text{scs}_\Theta(L)$	El tamaño menor de todo $\Theta$ -conjunto crítico de un cuadrado latino $L$ .

---

## Índice de cuadros

---

1.1	Número de cuadrados latinos en función de su tamaño $n$ . . . . .	3
1.2	Menor y mayor tamaño de $\Theta$ -conjuntos críticos de cuadrados latinos de orden $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ . . . . .	9
1.3	Cotas del menor y mayor tamaño de $\Theta$ -conjuntos críticos en $\mathcal{L}(6)$ . . . . .	11
6.1	Estructuras cíclicas estudiadas exhaustivamente en el presente trabajo. . . . .	53

---

## Índice de figuras

---

1.1	(a) Cuadrado latino de Ahmad al-Buni (Fuente: (al Buni, 1980)). (b) Cuadrado latino de por Ramón Llull (Fuente: Ars Demonstrativa de la edición latina de Maguncia, 1722, vol.III). . . . .	2
1.2	Cuadrado greco-latino (Fuente: Wikipedia) . . . . .	2

---

## Referencias

---

- Adams, P., Bean, R., y Khodkar, A. (2003, 08). A census of critical sets in the latin squares of order at most six. *Ars Combinatoria*, 68.
- al Buni, A. (1980). *Shams al-ma'arif al-kubra wa-lataif al-'awarif*. al-Maktabat al-Sha'biyah. Descargado de <https://books.google.es/books?id=eSclwAEACAAJ>
- Bose, R., Parker, E., y Shrikhande, S. (1960). Further results on the construction of mutually orthogonal latin squares and the falsity of euler's conjecture. *Canadian Journal of Mathematics*, 12, 189–203.
- Colbourn, C. J. (1984). The complexity of completing partial Latin squares. *Discrete Appl. Math.*, 8(1), 25–30. Descargado de [https://doi.org/10.1016/0166-218X\(84\)90075-1](https://doi.org/10.1016/0166-218X(84)90075-1) doi: 10.1016/0166-218X(84)90075-1
- Colbourn, C. J., Colbourn, M. J., y Stinson, D. R. (1984). The computational complexity of recognizing critical sets. En *Graph theory, Singapore 1983* (Vol. 1073, pp. 248–253). Springer, Berlin. Descargado de <https://doi.org/10.1007/BFb0073124> doi: 10.1007/BFb0073124
- Curran, D., y Van Rees, G. H. J. (1979). Critical sets in Latin squares. En *Proceedings of the Eighth Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing (Univ. Manitoba, Winnipeg, Man., 1978)* (pp. 165–168). Utilitas Math., Winnipeg, Man.
- Donovan, D., y Howse, A. (1998). Critical sets for Latin squares of order 7. En (Vol. 28, pp. 113–123). (Papers in honour of Anne Penfold Street)
- Falcón, R. M. (2006). Latin squares associated to principal autotopisms of long cycles. application in cryptography. *Proceedings of Transgressive Computing 2006: a conference in honor of Jean Della Dora.*, 213–230.
- Falcón, R. M. (2011). The set of autotopisms of partial latin squares. *Discrete Math.*, 313, 1150–1161.
- Falcón, R. M., Johnson, L., y Perkins, S. (2021). A census of critical sets based on non-trivial autotopisms of latin squares of order up to five. *AIMS Math.*, 6, 261–295.
- González-Regadera, M. (2022). *Estudio de cuadrados latinos para su aplicación en un protocolo criptográfico de compartición de secretos*. Trabajo Fin de Grado de Ingeniería Informática - Tecnologías Informáticas. Universidad de Sevilla.
- Hulpke, A., Kaski, P., y Östergård, P. (2011). The number of Latin squares of order 11. *J. Math. Comp.*, 80, 1197–1219.
- Ibáñez, P. (2015). *Cuadrados latinos, matemáticas y arte abstracto*. Cuaderno de Cultura Científica. Descargado de <https://culturacientifica.com/2015/01/14/cuadrados-latinos-matematicas-y-arte-abstracto/>
- Kolesova, G., Lam, C. W. H., y Thiel, L. (1990). On the number of  $8 \times 8$  Latin squares. *J. Combin. Theory Ser. A*, 54(1), 143–148.
- McKay, B. D., Meynert, A., y Myrvold, W. (2007). Small Latin squares, quasigroups, and loops. *J. Combin. Des.*, 15(2), 98–119.
- Nelder, J. (1977). Critical sets in latin squares. *J. Combin. Des.*.
- Smetaniuk, B. (1979). On the minimal critical set of a Latin square. *Utilitas Math.*, 16, 97–100.