Trabajo Fin de Máster

Grupos de Artin Virtuales

José Gálvez Mateos

Departamento de Álgebra

María
Cumplido Cabello
Directora del trabajo

Este trabajo no hubiera sido posible
sin el cariño constante de Chema,
la confidencia y compañía de Raul,
el amor de mi querido Alonso,
y sobre todo,
sin la confianza de mi mentora María
y el apoyo incesable de mis padres.
Gracias por estar conmigo.

Resumen

El siguiente trabajo tiene como objetivo realizar un estudio de las propiedades de los grupos de Artin virtuales, los cuales representan una generalización de los grupos de Artin-Tits clásicos.

Para comenzar, proporcionaremos una introducción histórica que nos permitirá comprender la relevancia de los grupos de Artin virtuales. Exploraremos los grupos de Coxeter, los grupos de trenzas y los grupos de Artin, estableciendo su conexión y resaltando su importancia en el ámbito de la teoría de grupos.

A continuación, nos enfocaremos en el estudio de los grupos de trenzas virtuales, presentando una clasificación de ciertos homomorfismos entre estos grupos y los grupos simétricos. Este análisis nos permitirá entender las propiedades y las relaciones estructurales entre ambos tipos de grupos.

Finalmente, abordaremos la definición de los grupos de Artin virtuales y nos centraremos en el cálculo de sus centros y en dar una presentación de dos de sus subgrupos más relevantes. Este paso es fundamental para comprender la estructura y el comportamiento de estos grupos, y nos brindará una visión más completa de su naturaleza algebraica.

Abstract

The following work aims to conduct a study of the properties of virtual Artin groups, which represent a generalization of classical Artin-Tits groups.

To begin, we will provide a historical introduction that will allow us to understand the relevance of virtual Artin groups. We will explore Coxeter groups, braid groups, and Artin groups, establishing their connection and highlighting their importance in the field of group theory.

Next, we will focus on the study of virtual braid groups, presenting a classification of certain homomorphisms between these groups and symmetric groups. This analysis will enable us to understand the properties and structural relationships between both types of groups.

Finally, we will address the definition of virtual Artin groups and concentrate on calculating their centers, as well as presenting two of their most relevant subgroups. This step is essential for understanding the structure and behavior of these groups, providing us with a more comprehensive understanding of their algebraic nature.

Índice general

1 | Introducción

La estrecha relación entre el álgebra y la geometría se extiende a diversas áreas del conocimiento matemático, pero es en la Teoría Geométrica de Grupos donde esta interacción tiene un impacto especialmente relevante. Ésta podría describirse como el estudio de la interacción entre las propiedades algebraicas y geométricas de los grupos. Buen ejemplo de la esencia de esta disciplina son los grupos de Coxeter. Estos grupos encapsulan y generalizan el concepto de reflexión como veremos a continuación, e históricamente son el punto de partida para comprender, no solo la definición, sino la razón de ser de nuestro principal objeto de estudio: los Grupos de Artin virtuales.

1.1. Grupos de Coxeter

Del estudio abstracto de las reflexiones sobre politopos, el músico y matemático Harld Scott McDonald Coxeter describió los grupos que a día de hoy llevan su nombre en el artículo [7], publicado en 1934. Estos grupos tienen muchas aplicaciones en diversos campos de las matemáticas más allá de la geometría, tales como la teoría de números, álgebras de Lie, y hasta en la física teórica, pues están relacionados con los polinomios de Hermite y de Laguerre, los cuales se usan para describir estados de energía en ciertos sistemas.

Definición (Matriz de Coxeter)**.** Sea S un conjunto numerable. Definimos una matriz de Coxeter sobre S como $M = (m_{st})_{s,t \in S}$, donde:

- $m_{ss} = 1$ para todo $s \in S$.
- $m_{st} = m_{ts} \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$.

A partir de esta matriz podemos definir un grafo que nos será de gran ayuda en el estudio de los grupos de Coxeter. No hay una forma estándar de definir este grafo, pues dependiendo del objeto que se vaya a estudiar es conveniente definirlo de un modo u otro. Nosotros daremos la siguiente definición.

Definición (Grafo de Coxeter)**.** Sea S un conjunto numerable y sea $M = (m_{st})_{s,t \in S}$. Definimos el grafo de Coxeter Γ asociado a M como el grafo etiquetado que cumple:

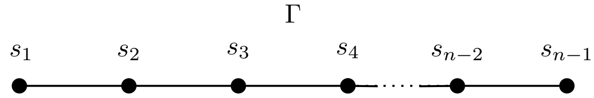
- Γ tiene por vértices los elementos de S.
- Dados $s, t \in S$ distintos, los vértices en Γ asociados a s y a t se unirán por una arista si $m_{st} \geqslant 3$, y se etiquetarán si $m_{st} \geqslant 4$.

Definición (Grupo de Coxeter)**.** Sea S un conjunto numerable, M una matriz de Coxeter sobre S y Γ el grafo de Coxeter asociado a M. Definimos el grupo de Coxeter sobre Γ como

$$W[\Gamma] := \left\langle S \;\middle|\; (st)^{m_{st}} \text{ para todo } s, t \in S \text{ si } m_{st} \neq \infty \right\rangle.$$

Un ejemplo bien conocido de grupos de Coxeter son los grupos simétricos. Podemos comprobar que, en efecto, son grupos de Coxeter gracias a la presentación dada en el Apéndice B. En este caso, la matriz de Coxeter asociada a $\mathfrak{S}_n$ vendría dada por $m_{s_i s_j} = 2$ si $|i-j| \geqslant 2$ y $m_{s_i s_j} = 3$ en caso contrario, siempre que $i \neq j$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Por lo tanto, el grafo de Coxeter asociado a $\mathfrak{S}_n$ es:



Estos grafos tienen especial relevancia dentro del estudio de los grupos de Coxeter, pues existe una clasificación de estos que puede expresarse con sorprendente simpleza. Puede encontrarse esta clasificación en [8] en el caso de los grupos de Coxeter finitos, en [6] en el caso de grupos de Coxeter afines, y en la sección 6.9 de [14] en el caso de los grupos de Coxeter hiperbólicos.

La forma histórica de definir los grupos de Coxeter no fue mediante los grafos de Coxeter, pero esta definición nos será mucho más útil en lo que sigue. Un resultado fundamental, cuya prueba puede encontrarse en la referencia adjunta, es el siguiente.

Teorema 1.1.1 (Corolario 1, [6])**.** *Sea S un conjunto numerable y sea Γ un grafo de Coxeter sobre S. Consideremos $X \subset S$ y denotemos $\Gamma_X \subset \Gamma$ al subgrafo maximal de Γ que tiene a X por vértices. Entonces $W[\Gamma_X]$ es un grupo de Coxeter y la inclusión de morfismos de grafos $i_X : \Gamma_X \longrightarrow \Gamma$ induce una inyección de grupos $i_X : W[\Gamma_X] \longrightarrow W[\Gamma]$.*

Pasemos a comprender la motivación geométrica de estos grupos.

Definición (Raíces simples)**.** Sea S un conjunto numerable. Llamaremos raíces simples de S al conjunto abstracto $\Pi = \{\alpha_s : s \in S\}$, el cual es biyectivo a S.

En caso de tener un grupo de Coxeter $W[\Gamma]$ generado por S, podemos considerar el conjunto de raíces simples asociado a S y construir un espacio vectorial real V que tenga a Π por base. Es más, podemos dotar a este espacio vectorial de una forma bilineal simétrica. Sean $\alpha_s, \alpha_t \in \Pi$, entonces definimos

$$\langle \alpha_s, \alpha_t \rangle := \begin{cases} -2\cos\left(\frac{\pi}{m_{st}}\right) & \text{si } m_{st} \neq \infty; \\ -2 & \text{si } m_{st} = \infty. \end{cases}$$

Definición (Representación lineal canónica de un grupo de Coxeter)**.** Sea S un conjunto numerable, Γ un grafo de Coxeter sobre S y $W[\Gamma]$ el grupo de Coxeter asociado a Γ. Consideremos Π el sistema de raíces simples asociado a S y sea V el espacio vectorial real que tiene a Π por base, dotado de la forma bilineal simétrica antes definida. Llamaremos representación lineal canónica al homomorfismo $\gamma : W[\Gamma] \longrightarrow GL(V)$[1] definido como

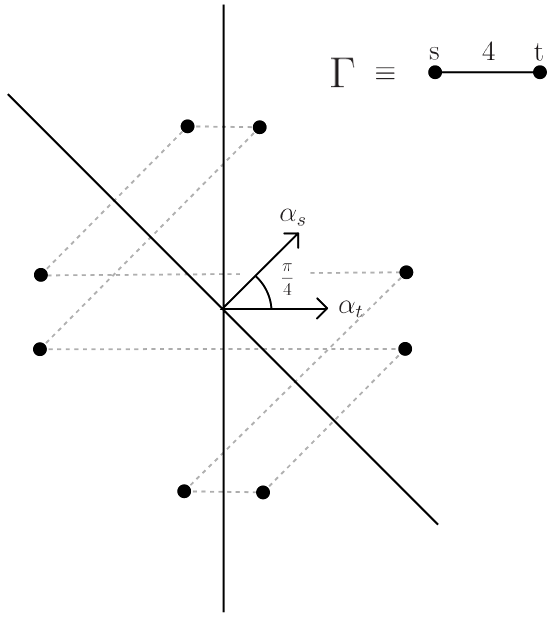
$$\gamma(s)(v) := v - \langle v, \alpha_s \rangle \, \alpha_s$$

para todo $s \in S$ y para todo $v \in V$.

Se puede apreciar que estas representaciones no son más que reflexiones sobre hiperplanos de vector normal α_s para cada $s \in S$, de forma que dados $s, t \in S$, los vectores α_s y α_t estén a un ángulo de $\frac{\pi}{m_{st}}$.

Pongamos un ejemplo para visualizar esta interpretación geométrica. Consideremos el grupo de Coxeter asociado al grafo de Coxeter Γ que aparece en la siguiente imagen. Podemos apreciar que $W[\Gamma] \cong D_4$ donde D_4 es el grupo diédrico de orden 8. Vemos que $W[\Gamma]$ está generado por s y t, por lo que tiene asociadas dos raíces simples α_s y α_t. También podemos encontrar en el siguiente dibujo dos rectas, las cuales son hiperplanos en $\mathbb{R}^2$, cuyo vector normal es, respectivamente, α_s y α_t, y donde estos están a un ángulo de $\frac{\pi}{4}$, puesto que $m_{st} = 4$. Por último, los puntos señalados representan una órbita por la acción de los elementos de $W[\Gamma]$, esto es, las reflexiones de dichos puntos respecto a los dos hiperplanos.

[1] $GL(V)$ denota el grupo lineal de V, esto es, al grupo de automorfismos de espacios vectoriales de V.



La representación anterior es una acción $W[\Gamma] \circlearrowright V$ dada por γ. Para aliviar la notación, dados $w \in W[\Gamma]$ y $v \in V$, denotaremos

$$\gamma(w)(v) := w(v).$$

Definición (Sistema de raíces)**.** Sea S un conjunto numerable, Γ un grafo de Coxeter sobre S y $W[\Gamma]$ el grupo de Coxeter asociado a Γ. Llamaremos sistema de raíces de $W[\Gamma]$ al conjunto

$$\Phi[\Gamma] := \{w(\alpha_s) : s \in S,\ w \in W[\Gamma]\}.$$

Definición (Función longitud)**.** Sea S un conjunto numerable, Γ un grafo de Coxeter sobre S y $W[\Gamma]$ el grupo de Coxeter asociado a Γ. Sea $s \in S$ y $w \in W[\Gamma]$. Llamaremos función longitud de $W[\Gamma]$ a $\ell : W[\Gamma] \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ definida tal que $\ell(w)$ será la mínima longitud de las palabras escritas en elementos de S que representen a w en $W[\Gamma]$.

Notemos que la función longitud está bien definida, pues todo generador en un grupo de Coxeter tiene orden 2, por lo que todo elemento puede escribirse como una sucesión no necesariamente única de elementos de S con potencia 1.

Teorema 1.1.2 (Teorema, Sección 5.4, [14])**.** *Sea S un conjunto numerable, Γ un grafo de Coxeter sobre S y $W[\Gamma]$ el grupo de Coxeter asociado a Γ. Sea $s \in S$ y $w \in W[\Gamma]$. Consideremos $\beta \in \Phi[\Gamma]$ tal que*

$$\beta = w(\alpha_s) = \sum_{r \in S} \lambda_r \alpha_r.$$

con $\lambda_r \in \mathbb{R}$ para todo $r \in S$. Entonces

- $\ell(ws) = \ell(w) + 1$ *si y solo si* $\lambda_r \geqslant 0$ *para todo* $r \in S$.
- $\ell(ws) = \ell(w) - 1$ *si y solo si* $\lambda_r \leqslant 0$ *para todo* $r \in S$.

Puede encontrarse la prueba completa de este teorema en el Apéndice A, dada su relevancia en lo que sigue y debido a que en la prueba dada en la referencia adjunta faltan varios detalles por cubrir.

Corolario 1.1.1. *Sea Γ un grafo de Coxeter y sea $W[\Gamma]$ el grupo de Coxeter asociado a Γ. Entonces la representación lineal canónica $\gamma : W[\Gamma] \longrightarrow GL(V)$ es inyectiva.*

Demostración. Sea $w \in W[\Gamma]$ tal que $\gamma(w) = \mathrm{id}_V$. Si $w \neq 1$, existe un $s \in S$ y $\widetilde{w} \in W[\Gamma]$ tal que $w = \widetilde{w}s$, por lo que $\ell(ws) = \ell(w) - 1$. Gracias al Teorema 1.1.2 sabemos que $\gamma(w)(\alpha_s)$ tiene todos sus coeficientes no positivos, pero esto es absurdo, pues $\gamma(w)(\alpha_s) = \mathrm{id}_V(\alpha_s) = \alpha_s$. Deducimos que $\ker(\gamma) = \{1\}$, y por ende, es inyectiva. $\square$

Corolario 1.1.2. *Sea Γ un grafo de Coxeter y sea $W[\Gamma]$ el grupo de Coxeter asociado. Entonces*

$$\Phi[\Gamma] = \Phi^+[\Gamma] \sqcup \Phi^-[\Gamma],$$

donde

$$\Phi^+[\Gamma] = \left\{ \sum_{s \in S} \lambda_s \alpha_s \in \Phi[\Gamma] : \lambda_s \geqslant 0 \text{ para todo } s \in S \right\}$$

y

$$\Phi^-[\Gamma] = \left\{ \sum_{s \in S} \lambda_s \alpha_s \in \Phi[\Gamma] : \lambda_s \leqslant 0 \text{ para todo } s \in S \right\}.$$

Demostración. Sea $w \in W[\Gamma]$ y α_s la raíz simple asociada a un cierto $s \in S$. Debido a que s es un generador de $W[\Gamma]$ y que todos los generadores tienen orden dos se tiene que ws o reduce o aumenta su longitud. Es más, por ese mismo motivo se tiene que $\ell(ws) = \ell(w) \pm 1$. Haciendo uso del Teorema 1.1.2 y de la notación del enunciado se sigue que $w(\alpha_s)$ pertenece o a $\Phi^+[\Gamma]$ o a $\Phi^-[\Gamma]$. □

1.2. Grupos de trenzas

Otra familia de grupos que nos será de gran interés son los grupos de trenzas. Los grupos de trenzas, cuyo nombre fue asignado por Emil Artin en [1], en el año 1925, han sido objeto de estudio por muchos años debido a las implicaciones geométricas y topológicas que estos grupos tienen. Estos grupos están presentes en diversas ramas de las matemáticas, apareciendo a partir del estudio tanto de espacios de configuraciones, de los *mapping class groups* del disco punzado, hasta de los automorfismos de los grupos libres de rango finito. Pueden encontrarse más información sobre estos grupos en [12], donde se introducen los grupos de trenzas desde distintos puntos de vista, y se prueban varias de sus propiedades. Pasemos a definirlos.

Definición (Grupo de trenzas)**.** Sea $n \geqslant 2$ natural. Definimos el grupo de trenzas de n cuerdas, notado por B_n, como

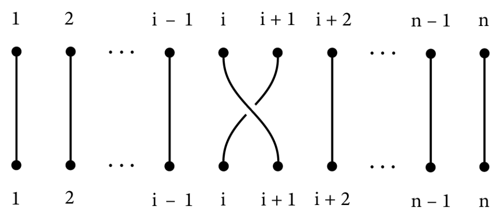
$$B_n := \left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } 1 \leqslant i < j \leqslant n-1 \text{ tal que } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & \text{si } 1 \leqslant i < n-1 \end{array} \right\rangle.$$

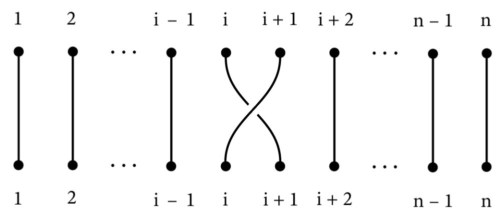
Podemos visualizar de forma geométrica cada elemento de estos grupos como cuerdas que se cruzan cumpliendo ciertas propiedades, entendiéndose por cuerda a la imagen de un punto por una homotopía de $\mathbb{C}$ en sí mismo. Por lo tanto, una trenza de n cuerdas se puede visualizar de forma geométrica como una aplicación $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}^n$ de manera que si

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t))$$

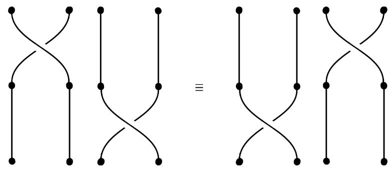
se tenga que para cada instante $t_0 \in [0,1]$, $\alpha_i(t_0) \neq \alpha_j(t_0)$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ con $i \neq j$.

Esta visualización nos puede dar una intuición de por qué este grupo tiene la presentación dada. Dado un $n \geqslant 2$, un generador σ_i de B_n y su inversa σ_i^{-1} se pueden representar respectivamente miediante las trenzas:

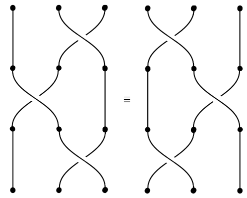




Esto quiere decir, en concreto, que toda trenza puede realizarse a partir de cruces de cuerdas consecutivas. Por otro lado, las relaciones que obtenemos se representan de la siguiente manera:

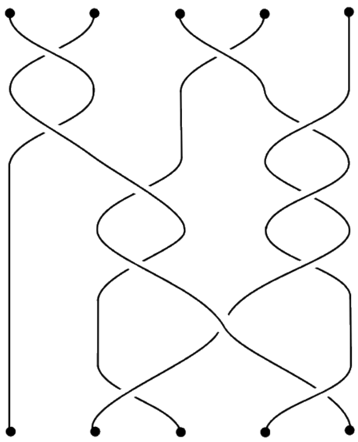


Relación $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ en el caso de que $j = i + 2$.



Relación $\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} = \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i$.

Estamos interpretando los cruces de arriba hacia abajo si leemos la palabra de izquierda a derecha. Estas equivalencias se conoce como movimientos de Reidemeister, los cuales provienen de los estudios de Kurt Reidemeister sobre equivalencias de nudos. En conclusión, una ejemplo de visualización de una trenza sería el siguiente:



Trenza que representa a $\sigma_1^2\sigma_3\sigma_4^{-3}\sigma_2^2\sigma_3\sigma_2^{-1}\sigma_4^{-1}$ en B_5.

1.3. Grupos de Artin-Tits

Para concluir esta introducción, hablaremos sobre los grupos de Artin-Tits, la familia de grupos que tendrá el mayor interés en este trabajo. Los grupos de Artin-Tits reciben su nombre de Emil Artin por sus trabajos sobre los grupos de trenzas en [1], y de Jaques Tits por el desarrollo de estos a partir del estudio de normalizadores del toro en [19], a mediados de los años sesenta.

Aunque de forma histórica se definieron a partir de los grupos de trenzas, considero más natural definir estos grupos a partir de los grupos de Coxeter. Supongamos que tenemos un grafo de Coxeter Γ y consideramos su correspondiente grupo $W[\Gamma]$. Sean $s, t \in W[\Gamma]$ dos generadores estándar de este tal que $m_{st} \neq \infty$. Entonces sabemos que

$$(st)^{m_{st}} = 1.$$

Notemos que podemos reescribir esta restricción como un producto alternado tal que

$$\underbrace{sts\ldots}_{m_{st}} = \underbrace{tst\ldots}_{m_{st}}$$

o como

$$\underbrace{\ldots sts}_{m_{st}} = \underbrace{\ldots tst}_{m_{st}}$$

dado que cada generador tiene orden 2. Esto motiva la siguiente notación:

$$\mathrm{Prod}_L(s,t,r) = \underbrace{sts\ldots}_{r} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Prod}_R(s,t,r) = \underbrace{\ldots tst}_{r}.$$

Esto es, el producto alternado de s y t de longitud r de manera que en el caso de $\mathrm{Prod}_L(s,t,r)$, comenzamos por st a la izquierda, mientras que en el caso de $\mathrm{Prod}_R(s,t,r)$ terminamos por st a la derecha. Con esta notación podemos expresar la presentación de los grupos de Coxeter tal que

$$W[\Gamma] := \left\langle S \;\middle|\; s^2 = 1,\ \mathrm{Prod}_R(s,t,m_{st}) = \mathrm{Prod}_R(t,s,m_{st}) \text{ para todo } s,t \in S \text{ si } m_{st} \neq \infty \right\rangle.$$

Definición (Grupo de Artin-Tits)**.** Sea S un conjunto numerable, $M = (m_{st})_{s,t\in S}$ una matriz de Coxeter sobre S y sea Γ el grafo de Coxeter asociado a M. Definimos el grupo de Artin-Tits sobre Γ, notado por $A[\Gamma]$, como

$$A[\Gamma] := \left\langle S \;\middle|\; \mathrm{Prod}_R(s,t,m_{st}) = \mathrm{Prod}_R(t,s,m_{st}) \text{ para todo } s,t \in S \text{ si } m_{st} \neq 1,\infty \right\rangle.$$

En lo que sigue, llamaremos a los grupos de Artin-Tits grupos de Artin. Notemos que, dado un grafo de Coxeter Γ, existe una gran similitud entre $W[\Gamma]$ y $A[\Gamma]$, pues el último tiene la misma presentación que el primero salvo la relación de orden dos de sus generadores.

Definición (Grupo de Coxeter asociado a un grupo de Artin)**.** Sea Γ un grafo de Coxeter. Llamaremos grupo de Coxeter asociado al grupo de Artin $A[\Gamma]$ al grupo de Coxeter asociado a Γ, esto es, $W[\Gamma]$.

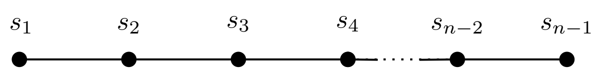
A pesar de esta notoria similitud, muchas propiedades que se conocen sobre los grupos de Coxeter no han sido aún probados para los grupos de Artin. Preguntas tales como si existe una solución para el problema de la palabra, cuál es su centro, si son libres de torsión o el problema de la intersección de los subgrupos parabólicos (el cual se trabajó en mi Trabajo de Fin de Grado), entre otras, son hoy día problemas abiertos.

Debido a las grandes dudas que se plantean sobre estos grupos y dada la similaridad nombrada con los grupos de Coxeter, se han tipificado los grupos de Artin para una mayor facilidad en su estudio. Algunos de estos tipos son los siguientes:

- **Tipo RAAG:** Diremos que $A[\Gamma]$ es de tipo RAAG (right-angled), o de ángulo recto, si para todo $a,b \in A[\Gamma]$ generadores se tiene que $m_{ab} \in \{2,\infty\}$, esto es, $A[\Gamma]$ es isomorfo a el producto directo de grupos libres.
- **Tipo esférico:** Diremos que $A[\Gamma]$ es de tipo esférico si $W[\Gamma]$ es finito.
- **Tipo afín:** Diremos que $A[\Gamma]$ es de tipo afín si $W[\Gamma]$ es de tipo afín[2].
- **Tipo grande:** Diremos que $A[\Gamma]$ es de tipo grande si para todo $a,b \in A[\Gamma]$ generadores se tiene que $m_{ab} \geqslant 3$.
- **Tipo FC:** Diremos que $A[\Gamma]$ es de tipo FC (flag-complex) si cumple que, si S es su conjunto de generadores, para todo subgrafo maximal Γ_X de Γ que tiene a $X \subset S$ por vértices que no contenga ninguna arista etiquetada por infinito cumpla que $A[\Gamma_X]$ de tipo esférico.

Cabe resaltar que los grupos de Artin pueden verse como una generalización de los grupos de trenzas. En efecto, basta considerar, dado un $n \in \mathbb{N}$, el grafo

Γ



[2]Los grupos de Coxeter afines son un tipo de grupo de Coxeter. Estos no son finitos, pero contienen un subgrupo normal abeliano de manera que el cociente del grupo de Coxeter por este subgrupo es finito. Puede encontrarse más información en [6].

Es sencillo comprobar que, por definición, $A[\Gamma] \cong B_n$. Además, los grupos de Coxeter asociados a los grupos de trenzas son los grupos simétricos, como se comprobaba en el ejemplo de la Sección 1.1, al comiendo de la página 5.

Para finalizar esta introducción, daremos un resultado fundamental para el estudio de los grupos de Artin, cuya prueba viene dada en la referencia adjunta.

Teorema 1.3.1 (Teorema de Van der Lek, Proposición 4.5 [20])**.** *Sea Γ un grafo de Coxeter, sea S el conjunto de sus vértices y $\Gamma_X, \Gamma_Y \subset \Gamma$ dos subgrafos maximales que tienen por vértices a $X, Y \subset S$. Entonces*

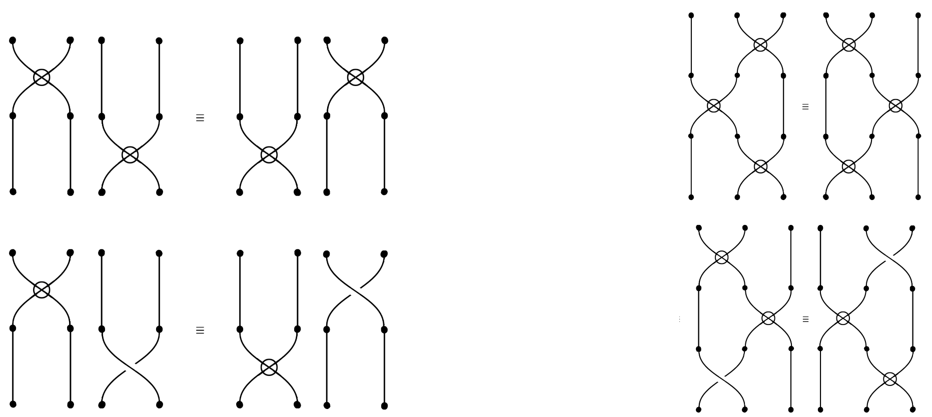
$$A[\Gamma_X] \cap A[\Gamma_Y] \cong A[\Gamma_X \cap \Gamma_Y] \cong A[\Gamma_{X \cap Y}].$$

2 | Grupo de trenzas virtuales

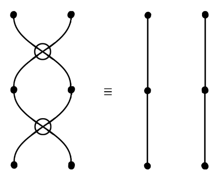
2.1. Grupo de trenzas virtuales

Es bien conocida la relación que existe entre los grupos de trenzas y la teoría de nudos, pues gran parte de esta se estudia entendiendo los nudos como trenzas. De hecho, es de la teoría de nudos de donde nacen los grupos de trenzas virtuales.

Consideremos un nudo no planar y proyectémoslo sobre un plano. Es evidente que solo observando la proyección del nudo no podemos conocer la posición relativa de sus cruces. La idea que subyace en la teoría de nudos virtuales es, en esencia, lo que ocurre en la situación anterior. Esta tiene como objeto de estudio a los nudos virtuales, los cuales son nudos convencionales a los cuales se les permite tener cruces sin posición relativa, denominados como cruces virtuales. Para poder mezclar los cruces convencionales con los cruces virtuales se le exige a los nudos virtuales que cumplan una generalización de los *movimientos de Reidemeister*. Estos son los movimientos de Reidemeister convencionales mostrados al final del anterior capítulo junto con los siguientes:



Se han representado los cruces virtuales con un círculo para que sea más sencillo poder diferenciarlos de los cruces convencionales. Además de las relaciones anteriores, podemos apreciar que si realizamos el mismo cruce virtual dos veces consecutivas, al no tener una posición relativa definida, podemos considerar que una cuerda siempre está por encima de la otra, pudiéndose deshacer los cruces. Esto puede visualizarse en el siguiente dibujo.



Al igual que de forma natural emerge el grupo de trenzas a partir del estudio de los nudos, cabría esperar que de los nudos virtuales surgiese algo similar. Así fue como Luis H. Kauffman y Sofia Lambropoulou presentan en [15] en el año 2004 los grupos de trenzas virtuales.

Definición (Grupos de trenzas virtuales)**.** Sea $n \in \mathbb{N}$ mayor o igual que 2. Definimos el grupo de trenzas virtuales de n cuerdas, notado por VB_n, como el grupo generado por $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}$ y que tiene por relaciones:

- $\tau_i^2 = 1$ para todo $1 \leqslant i \leqslant n-1$.
- Para todo $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$ tal que $|i-j| \geqslant 2$ se tiene que

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \qquad \tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i \qquad \text{y} \qquad \tau_i\sigma_j = \sigma_j\tau_i.$$

- Para todo $1 \leqslant i < n-1$ se tiene que

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \qquad \tau_i\tau_{i+1}\tau_i = \tau_{i+1}\tau_i\tau_{i+1} \qquad \text{y} \qquad \tau_i\tau_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\tau_i\tau_{i+1}.$$

Los elementos σ_i corresponden a los cruces usuales, mientras que los elementos τ_i representan los cruces virtuales. La presentación que acabamos de dar no es la presentación que se muestra en [15]. En esta presentación, cada relación refleja las equivalencias dadas por los movimientos de Reidemeister, al igual que ocurre con la presentación que se dio en el primer capítulo del grupo de trenzas convencional.

A pesar del gran interés que estos grupos generan en el estudio de la topología de baja dimensión, desde un punto de vista combinatorio poco se sabe sobre estos. Entre los pocos resultados que se conocen están la solución al problema de la palabra, dado por Paolo Bellingeri, Bruno Aarón Cisneros de la Cruz y Luis Paris en [3], y el cálculo de algunos términos de las series centrales, dado por Valerij G. Bardakov y Paolo Bellingeri en [2]; mientras que cuestiones frecuentes tales como el problema de la conjugación siguen abiertas.

En este capítulo estudiaremos los resultados dados por Paolo Bellingeri y Luis Paris en [4], donde clasifican los homomorfimos entre grupos de trenzas virtuales, de los grupos de trenzas virtuales a los grupos simétricos y viceversa.

Podemos apreciar que la presentación de los grupos de trenzas virtuales y la presentación de los grupos simétricos dada en el Teorema B.1.1 guardan ciertas similitudes. Esto motiva los siguientes homomorfismos:

$$\begin{array}{rccc} \pi_K : & VB_n & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n \\ & \sigma_i & \longmapsto & 1 \\ & \tau_i & \longmapsto & s_i \end{array} \quad , \qquad \begin{array}{rccc} \pi_P : & VB_n & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n \\ & \sigma_i & \longmapsto & s_i \\ & \tau_i & \longmapsto & s_i \end{array} \quad .$$

De las respectivas presentaciones se deduce de forma directa que ambos homomorfimos son sobreyectivos, pues envían generadores en generadores. Estos homomorfismos serán fundamentales en lo que sigue.

Definición (Grupos de trenzas virtuales kuros y puros)**.** Sea $n \in \mathbb{N}$ mayor o igual que 2. Sean π_K y π_P los homomorfismos antes descritos. Llamaremos grupo de trenza virtual kuro [1] de n cuerdas, notado por KB_n, al subgrupo $KB_n := \ker(\pi_K)$ de VB_n. Llamaremos grupo de trenza virtual puro de n cuerdas, notado por VP_n, al subgrupo $VP_n := \ker(\pi_P)$ de VB_n.

Estos subgrupos serán de especial relevancia, puesto que nos permiten poder descomponer los grupos de trenzas virtuales como un producto semidirecto.

Proposición 2.1.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$ mayor o igual a dos. Entonces podemos descomponer VB_n como*

$$VB_n \cong KB_n \rtimes \mathfrak{S}_n \qquad o \qquad VB_n \cong VP_n \rtimes \mathfrak{S}_n.$$

Demostración. Sea n un número natural mayor o igual a 2. Primero, debido a que tanto KB_n como PB_n están definidos como el kernel de un homomorfismo, son subgrupos normales, por lo que tiene sentido la descomposición anterior. Consideremos la sección[2] $\iota : \mathfrak{S}_n \longrightarrow VB_n$ definida como $\iota(s_k) = \tau_k$

[1] El nombre de *kuro* ha sido una traducción propia. El nombre original, propuesto por Bruno Aaron Cisneros de la Cruz y Luis Paris, fue *kure*, un juego de palabras entre *kernel* y *pure*.

[2] Aquí abusamos de notación, pues hablo de sección en vez de referirme a la sección de un morfismo en concreto. La sección que se define es a la vez sección de π_K y de π_P, esto es, $\pi_K \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_n}$ y $\pi_P \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_n}$.

para todo $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Podemos apreciar que $(\pi_K \circ \iota)(s_k) = s_k$ y $(\pi_P \circ \iota)(s_k) = s_k$ para todo $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Consideremos las siguientes sucesiones

$$\{1\} \longrightarrow KB_n \xrightarrow{i} VB_n \xrightarrow{\pi_K} \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{1\} \quad \text{y} \quad \{1\} \longrightarrow PB_n \xrightarrow{i} VB_n \xrightarrow{\pi_P} \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{1\}$$

donde i en ambos caso es la inclusión. Por construcción, estas dos sucesiones son exactas, y puesto que ι es una sección, se deduce que

$$VB_n \cong KB_n \rtimes \mathfrak{S}_n \qquad \text{y} \qquad VB_n \cong PB_n \rtimes \mathfrak{S}_n.$$

□

2.2. Presentación de KB_n

En esta sección nos centraremos en el subgrupo KB_n. En concreto, veremos una presentación de este, deduciendo así que tiene estructura de grupo de Artin. Para ello, usaremos el método de Reidemeister-Schreier, el cual puede encontrarse con todo detalle en el Apéndice C.

Dado un n natural mayor o igual a dos, definimos los elementos

$$\delta_{ij} = \tau_i \tau_{i+1} \cdots \tau_{j-2} \sigma_{j-1} \tau_{j-2} \cdots \tau_{i+1} \tau_i,$$

$$\delta_{ji} = \tau_i \tau_{i+1} \cdots \tau_{j-2} \tau_{j-1} \sigma_{j-1} \tau_{j-1} \tau_{j-2} \cdots \tau_{i+1} \tau_i$$

con $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Además, es sencillo ver que para cualquier δ_{ij} o δ_{ji} anterior se tiene que

$$\pi_K(\delta_{ij}) = \pi_K(\delta_{ji}) = 1,$$

por lo que son elementos de KB_n.

Como probamos en la sección anterior, $VB_n \cong KB_n \rtimes \mathfrak{S}_n$, por lo que existe una acción natural $\mathfrak{S}_n \circlearrowright KB_n$ dada por la conjugación, esto es, dado $w \in \mathfrak{S}_n$ y $g \in KB_n$, la acción se define como

$$w \cdot g := \iota(w) g \left(\iota(w)\right)^{-1}.$$

Denotaremos de forma indiferente la acción como $w \cdot g$ o como $w(g)$, siempre que no haya ambigüedad.

Lema 2.2.1. *Consideremos los elementos δ_{ij} y δ_{ji} antes definidos. Entonces para todo $w \in \mathfrak{S}_n$ se tiene que*

$$w \cdot \delta_{ij} = \delta_{w(i),w(j)} \quad y \quad w \cdot \delta_{ji} = \delta_{w(j),w(i)}.$$

Demostración. Como $\mathfrak{S}_n$ está generado por los elementos s_k para todo $k \in \{1, \dots, n-1\}$, basta probarlo para estos elementos. Podemos distinguir varios casos:

- Supongamos que $k \notin \{i-1, i, \dots, j-1, j\}$, entonces $s_k(i) = i$ y $s_k(j) = j$. Por otro lado

  $$s_k \cdot \delta_{ij} = \iota(s_k)\delta_{ij}\left(\iota(s_k)\right)^{-1} = \tau_k \delta_{ij} \tau_k = \tau_k \tau_i \tau_{i+1} \cdots \tau_{j-2} \sigma_{j-1} \tau_{j-2} \cdots \tau_{i+1} \tau_i \tau_k =$$
  $$= \tau_k^2 \tau_i \tau_{i+1} \cdots \tau_{j-2} \sigma_{j-1} \tau_{j-2} \cdots \tau_{i+1} \tau_i = \tau_i \tau_{i+1} \cdots \tau_{j-2} \sigma_{j-1} \tau_{j-2} \cdots \tau_{i+1} \tau_i = \delta_{ij}.$$

  Esto último se tiene puesto que para todo elemento $r \in \{i-1, \dots, j\}$ se tiene que $|k - r| \geqslant 2$, por lo que τ_k conmuta con cada τ_r y con σ_{j-1}. Por lo tanto $s_k \cdot \delta_{ij} = \delta_{ij} = \delta_{s_k(i), s_k(j)}$.

- Si $k = i-1$, entonces $s_{i-1}(i) = i-1$ y $s_{i-1}(j) = j$. Al hacer actuar s_{i-1} sobre δ_{ij} obtenemos

  $$s_{i-1} \cdot \delta_{ij} = \tau_{i-1} \tau_i \tau_{i+1} \cdots \tau_{j-2} \sigma_{j-1} \tau_{j-2} \cdots \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i-1} = \delta_{i-1,j} = \delta_{s_{i-1}(i), s_{i-1}(j)}.$$

- Si $k = j$, entonces $s_j(i) = i$ y $s_j(j) = j+1$. Al llevar acabo la acción, observamos que

  $$s_j \cdot \delta_{ij} = \tau_j \tau_i \tau_{i+1} \cdots \tau_{j-2} \sigma_{j-1} \tau_{j-2} \cdots \tau_{i+1} \tau_i \tau_j = \tau_i \tau_{i+1} \cdots \tau_{j-2} \tau_j \sigma_{j-1} \tau_j \tau_{j-2} \cdots \tau_{i+1} \tau_i.$$

  De nuevo, esto último es porque τ_j conmuta con todos los τ_r con $r \in \{i, \dots, j-2\}$. Por las relaciones de VB_n se tiene que $\tau_j \sigma_{j-1} \tau_j = \tau_{j-1} \sigma_j \tau_{j-1}$, por lo que

  $$s_j \cdot \delta_{ij} = \tau_i \tau_{i+1} \cdots \tau_{j-2} \tau_{j-1} \sigma_j \tau_{j-1} \tau_{j-2} \cdots \tau_{i+1} \tau_i = \delta_{i,j+1} = \delta_{s_j(i), s_j(j)}.$$

- Supongamos que $k = i$, entonces distinguimos dos casos. Si $j = i+1$, entonces $s_i(i) = i+1$ y $s_i(i+1) = i$. Podemos observar que

$$s_i \cdot \delta_{i,i+1} = \tau_i \sigma_i \tau_i = \delta_{i+1,i} = \delta_{s_i(i),s_i(i+1)}.$$

  En caso de ser $j \neq i+1$, entonces $s_i(i) = i+1$ y $s_i(j) = j$. De la misma forma, observamos que

$$s_i \cdot \delta_{ij} = \overbrace{\tau_i \tau_i}^{=1} \tau_{i+1} \cdots \tau_{j-2} \sigma_{j-1} \tau_{j-2} \cdots \tau_{i+1} \overbrace{\tau_i \tau_i}^{=1} =$$

$$= \tau_{i+1} \cdots \tau_{j-2} \sigma_{j-1} \tau_{j-2} \cdots \tau_{i+1} = \delta_{i+1,j} = \delta_{s_i(i),s_i(j)}.$$

- Si $k = j-1$, de nuevo distinguimos dos casos. Si $j = i+1$ lo hemos contemplado en el punto anterior. Si $j \neq i+1$, entonces $s_{j-1}(i) = i$ y $s_{j-1}(j) = j-1$. Ahora

$$s_{j-1} \cdot \delta_{ij} = \tau_{j-1} \tau_i \tau_{i+1} \cdots \tau_{j-2} \sigma_{j-1} \tau_{j-2} \cdots \tau_{i+1} \tau_i \tau_{j-1} = \tau_i \tau_{i+1} \cdots \tau_{j-1} \tau_{j-2} \sigma_{j-1} \tau_{j-2} \tau_{j-1} \cdots \tau_{i+1} \tau_i.$$

  Notemos que $\tau_{j-2}\sigma_{j-1}\tau_{j-2} = \tau_{j-1}\sigma_{j-2}\tau_{j-1}$, por lo que

$$\tau_{j-1}\tau_{j-2}\sigma_{j-1}\tau_{j-2}\tau_{j-1} = \tau_{j-1}^2 \sigma_{j-2} \tau_{j-1}^2 = \sigma_{j-2}.$$

  En consecuencia

$$s_{j-1} \cdot \delta_{ij} = \tau_i \tau_{i+1} \cdots \tau_{j-3} \sigma_{j-2} \tau_{j-3} \cdots \tau_{i+1} \tau_i = \delta_{i,j-1} = \delta_{s_j(i),s_j(j)}.$$

- Por último, si $k \in \{i+1, \ldots, j-2\}$, entonces $s_k(i) = i$ y $s_k(j) = j$. Siguiendo la dinámica de los casos anteriores, vemos que

$$s_k \cdot \delta_{ij} = \tau_k \tau_i \tau_{i+1} \cdots \tau_{j-2} \sigma_{j-1} \tau_{j-2} \cdots \tau_{i+1} \tau_i \tau_k =$$

$$= \tau_i \tau_{i+1} \cdots \tau_{k-2} \tau_k \tau_{k-1} \tau_k \cdots \tau_{j-2} \sigma_{j-1} \tau_{j-2} \cdots \tau_k \tau_{k-1} \tau_k \tau_{k-2} \tau \cdots \tau_{i+1} \tau_i.$$

  Como $\tau_k \tau_{k-1} \tau_k = \tau_{k-1} \tau_k \tau_{k-1}$, entonces

$$s_k \cdot \delta_{ij} = \tau_i \tau_{i+1} \cdots \tau_{k-2} \tau_{k-1} \tau_k \tau_{k-1} \cdots \tau_{j-2} \sigma_{j-1} \tau_{j-2} \cdots \tau_{k-1} \tau_k \tau_{k-1} \tau_{k-2} \tau \cdots \tau_{i+1} \tau_i.$$

  Podemos apreciar que τ_{k-1} conmuta con todo τ_r donde $k+1 \leqslant r \leqslant j-2$ y con σ_{j-1}, por lo que

$$s_k \cdot \delta_{ij} = \tau_i \tau_{i+1} \cdots \tau_{k-2} \tau_{k-1} \tau_k \cdots \tau_{j-2} \tau_{k-1}^2 \sigma_{j-1} \tau_{j-2} \cdots \tau_k \tau_{k-1} \tau_{k-2} \tau \cdots \tau_{i+1} \tau_i =$$

$$= \tau_i \tau_{i+1} \cdots \tau_{k-2} \tau_{k-1} \tau_k \cdots \tau_{j-2} \sigma_{j-1} \tau_{j-2} \cdots \tau_k \tau_{k-1} \tau_{k-2} \tau \cdots \tau_{i+1} \tau_i = \delta_{ij} = \delta_{s_k(i),s_k(j)}.$$

En el caso de considerar los elementos δ_{ji} el razonamiento es análogo. Se deduce así el resultado. $\square$

Para dar la presentación de KB_n por el método de Reidemeister-Schreier primero necesitamos un sistema de Schreier de KB_n sobre VB_n, cuya definición puede encontrarse en C.2.

Lema 2.2.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$ mayor o igual a dos. Entonces el conjunto*

$$\Lambda_n = \left\{ (\tau_{i_1}\tau_{i_1-1}\cdots\tau_{i_1-r_1})(\tau_{i_2}\tau_{i_2-1}\cdots\tau_{i_2-r_2})\cdots\left(\tau_{i_p}\tau_{i_p-1}\cdots\tau_{i_p-r_p}\right)\right\} \cup \{1\}$$

donde $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n-1$, $1 \leqslant p \leqslant n-1$ y $0 \leqslant r_j < i_j$, es un sistema de Schreier de KB_n en VB_n.

Demostración. Consideremos $\mathcal{W}$ como el conjunto de todas las palabras que pueden escribirse a partir de $\{\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}\}$. Es evidente que $\Lambda_n \subset \mathcal{W}$. Primero veamos que las palabras de Λ_n es un conjunto de palabras que representa a los elementos un sistema de representantes de KB_n sobre VB_n. Debido a que $VB_n \cong KB_n \rtimes \mathfrak{S}_n$ se tiene que $VB_n/KB_n \cong \mathfrak{S}_n$, por lo que basta probar que todo elemento de $\mathfrak{S}_n$ puede escribirse a partir de los elementos representados por las palabras de Λ_n.

Seguiremos el procedimiento usado en la demostración del Teorema B.1.1. Consideremos el subgrupo $\mathfrak{S}_n$ de VB_n generado por $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$. Abusando de notación en esta demostración, denotaremos por $\mathfrak{S}_q$ al subgrupo de $\mathfrak{S}_n$ generado por $\tau_1, \ldots, \tau_{q-1}$. En la demostración del Teorema B.1.1 se probó que dado cualquier elemento $g \in \mathfrak{S}_n$ existe un entero $r_1 \in \{0, \ldots, n-2\}$ de manera que

$$g \in \left(\tau_{(n-1)-r_1}\tau_{(n-1)-r_1+1}\cdots\tau_{(n-1)-1}\tau_{n-1}\right)\mathfrak{S}_{n-1},$$

esto es, pertenece a esa clase lateral a la izquierda de $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_{n-1}$. Por lo tanto, existe un elemento $g_1 \in \mathfrak{S}_{n-1}$ tal que

$$g \in \left(\tau_{(n-1)-r_1}\tau_{(n-1)-r_1+1}\cdots\tau_{(n-1)-1}\tau_{n-1}\right)g_1.$$

Ahora, como $g_1 \in \mathfrak{S}_{n-1}$, de nuevo, existe un $g_2 \in \mathfrak{S}_{n-2}$ y un $r_2 \in \{0, \ldots, n-3\}$ tal que

$$g_1 = \left(\tau_{(n-2)-r_2}\tau_{(n-2)-r_2+1}\cdots\tau_{(n-2)-1}\tau_{n-2}\right)g_2.$$

Siguiendo este proceso obtenemos una expresión de g tal que

$$g = \left(\tau_{(n-1)-r_1}\tau_{(n-1)-r_1+1}\cdots\tau_{(n-1)-1}\tau_{n-1}\right)\cdots\left(\tau_{(n-q)-r_q}\tau_{(n-q)-r_q+1}\cdots\tau_{(n-q)-1}\tau_{n-q}\right)g_q,$$

y este proceso finaliza cuando $g_q = 1$ para algún $q \in \{1, \ldots, n-2\}$. Ahora, solo consideramos

$$\begin{aligned} g^{-1} &= \left(\left(\tau_{(n-1)-r_1}\tau_{(n-1)-r_1+1}\cdots\tau_{(n-1)-1}\tau_{n-1}\right)\cdots\left(\tau_{(n-q)-r_q}\tau_{(n-q)-r_q+1}\cdots\tau_{(n-q)-1}\tau_{n-q}\right)\right)^{-1} = \\ &= \left(\tau_{n-q}\tau_{(n-q)-1}\cdots\tau_{(n-q)-r_q+1}\tau_{(n-q)-r_q}\right)\cdots\left(\tau_{n-1}\tau_{(n-1)-1}\cdots\tau_{(n-1)-r_1+1}\tau_{(n-1)-r_1}\right). \end{aligned}$$

Deducimos que podemos expresar elemento de $\mathfrak{S}_n$ usando los elementos que representan las palabras de Λ_n. Como esta escritura se ha realizado mediante elecciones sobre clases de equivalencia, al ser estas disjuntas, cada elemento queda representado de manera única. Deducimos que Λ_n es un sistema de representantes a de KB_n en VB_n. Es más, es un sistema de representantes de Schreier por construcción, debido a que cada $\tau_{n-q}\tau_{(n-q)-1}\cdots\tau_{(n-q)-r_q+1}\tau_{(n-q)-r_q}$ pertenece a Λ_n, por lo que es cerrado para los segmentos iniciales. □

Teorema 2.2.1 (Proposición 17, [2]). *Sea $n \in \mathbb{N}$ mayor o igual que 2. Entonces KB_n admite una presentación tal que*

$$KB_n \cong \left\langle \{\delta_{ij}, \delta_{ji}\}_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} \;\middle|\; \delta_{ab}\delta_{cd} = \delta_{cd}\delta_{ab},\ \delta_{ab}\delta_{bc}\delta_{ab} = \delta_{bc}\delta_{ab}\delta_{bc} \right\rangle$$

donde $a, b, c, d \in \{1, \ldots, n\}$ son índices distintos dos a dos.[3]

Demostración. Obtendremos esta presentación a partir del método de Reidemeister-Schreier. Sea $\mathcal{W}$ el conjunto de las palabras que se pueden crear a partir de $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}\}$ y sea Λ_n el conjunto definido en el Lema 2.2.2. En dicho lema hemos probado que $\Lambda_n \subseteq \mathcal{W}$ es un sistema de representantes de KB_n en VB_n. Usaremos la misma notación que en la sección C, de forma que dada una palabra $w \in \mathcal{W}$ denotaremos por w_{VB_n} al elemento que representa w en VB_n. Consideremos la aplicación $\overline{} : \mathcal{W} \longrightarrow \Lambda_n$ que a cada palabra de $w \in \mathcal{W}$ lo envía a la palabra $\overline{w}$ de Λ_n, de forma que $w_{VB_n} \in KB_n\overline{w}_{VB_n}$. Gracias al Teorema C.1.2 sabemos que los elementos

$$s_{k,a} := \tau\left(ka\overline{ka}^{-1}\right)$$

generan KB_n, donde $k \in \Lambda_n$ y $a \in \{\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}\}$.

Podemos apreciar que $s_{k,\tau_i} = 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ y todo $k \in \Lambda_n$, puesto que cada $\tau_i \in \Lambda_n$ y este es un sistema de Schreier, por lo que $\overline{k\tau_i} = k\tau_i$. Por otro lado, se tiene que $\overline{\sigma_i} = 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, por lo que

$$s_{k,\sigma_i} = \tau\left(k\sigma_i\overline{k\sigma_i}^{-1}\right) = \tau\left(k\sigma_i\overline{k}^{-1}\right) = \tau\left(k\sigma_i k^{-1}\right).$$

[3]Este resultado fue originalmente dado por Loïc Rabenda, en su Trabajo de Fin de Master realizado en la Universidad de Borgoña, en Dijon, en el año 2003. Desgraciadamente no se encuentra disponible.

Sea $w \in \mathfrak{S}_n$ tal que $\iota(w) = k_{VB_n}$. Como $\sigma_i = \delta_{i,i+1}$, entonces

$$\left(k\sigma_i k^{-1}\right)_{VB_n} = \iota(w)\delta_{i,i+1}\left(\iota(w)\right)^{-1} = \delta_{w(i),w(i+1)},$$

por lo que, abusando de notación, se tiene que $\tau(\delta_{w(i),w(i+1)}) = s_{k\sigma_i}$. Aquí hemos usado el Lema 2.2.1. Podemos apreciar que dado σ_i para cierto $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, siempre existe un representante $k \in \Lambda_n$ tal que $s_{k,\sigma_i} = \tau\left(\delta_{a,b}\right)$ para todo $a, b \in \{1, \ldots, n\}$ distintos. Basta tomar un cierto $w \in \mathfrak{S}_n$ tal que $w(i) = a$ y $w(i+1) = b$, y considerar el representante $k \in \Lambda_n$ tal que $\iota(w) = k_{VB_n}$. Deducimos que el conjunto

$$\{\delta_{ij}, \delta_{ji} : 1 \leqslant i < j \leqslant n-1\}$$

es un conjunto de generadores de KB_n, y que cada δ_{ij} es reescrito por algún s_{k,σ_i} para algún $k \in \Lambda_n$.

Una vez hemos obtenido los generadores pasemos a deducir las relaciones. Sabemos que las relaciones de la presentación de KB_n vendrán dadas a partir de las reescrituras de las conjugaciones de las relaciones de VB_n mediante elementos de Λ_n. Primero, podemos apreciar que como cada $s_{k,\tau_i} = 1$, las relaciones que solo involucren los elementos τ_i de VB_n resultan triviales en esta presentación de KB_n. Consideremos ahora las otras relaciones. Dado un $i \in \{1, \ldots, n-2\}$, denotemos por

$$R^i_{1,k} = \tau\left(k\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}k^{-1}\right).$$

Veamos la reescritura de $R_{1,1}$. Cabe remarcar que el primer 1 se refiere al tipo de relación, mientras que el segundo hace referencia al elemento identidad de Λ_n. Entonces

$$R^i_{1,1} = \tau\left(\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}\right) =$$

$$= \tau\Bigg(\sigma_i\overline{\sigma_i}^{-1}\overline{\sigma_i}\sigma_{i+1}\overline{\sigma_i\sigma_{i+1}}^{-1}\overline{\sigma_i\sigma_{i+1}}\sigma_i\overline{\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i}^{-1}\overline{\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i}\sigma_{i+1}^{-1}\overline{\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}}^{-1}\cdots$$

$$\cdots\overline{\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}}\sigma_i^{-1}\overline{\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}}^{-1}\overline{\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}}\sigma_{i+1}^{-1}\overline{\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}}\Bigg) =$$

$$= s_{1,\sigma_i}s_{\overline{\sigma_i},\sigma_{i+1}}s_{\overline{\sigma_i\sigma_{i+1}},\sigma_i}s^{-1}_{\overline{\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}},\sigma_{i+1}}s^{-1}_{\overline{\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}},\sigma_i}s^{-1}_{\overline{\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}},\sigma_{i+1}} =$$

$$= s_{1,\sigma_i}s_{1,\sigma_{i+1}}s_{1,\sigma_i}s^{-1}_{1,\sigma_{i+1}}s^{-1}_{1,\sigma_i}s^{-1}_{1,\sigma_{i+1}} =$$

$$= \tau\left(\delta_{i,i+1}\right)\tau\left(\delta_{i+1,i+2}\right)\tau\left(\delta_{i,i+1}\right)\tau\left(\delta_{i+1,i+2}\right)^{-1}\tau\left(\delta_{i,i+1}\right)^{-1}\tau\left(\delta_{i+1,i+2}\right)^{-1}.$$

Consideremos ahora un $k \in \Lambda_n$ y sea $w \in \mathfrak{S}_n$ tal que $\iota(w) = k_{VB_n}$. Entonces

$$\left(k\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}k^{-1}\right)_{VB_n} = \iota(w)\delta_{i,i+1}\delta_{i+1,i+2}\delta_{i,i+1}\delta^{-1}_{i+1,i+2}\delta^{-1}_{i,i+1}\delta^{-1}_{i+1,i+2}(\iota(w))^{-1} =$$

$$= \iota(w)\delta_{i,i+1}(\iota(w))^{-1}\iota(w)\delta_{i+1,i+2}(\iota(w))^{-1}\iota(w)\delta_{i,i+1}(\iota(w))^{-1}\cdots$$

$$\cdots\iota(w)\delta^{-1}_{i+1,i+2}(\iota(w))^{-1}\iota(w)\delta^{-1}_{i,i+1}(\iota(w))^{-1}\iota(w)\delta^{-1}_{i+1,i+2}(\iota(w))^{-1} =$$

$$= \delta_{w(i),w(i+1)}\delta_{w(i+1),w(i+2)}\delta_{w(i),w(i+1)}\delta^{-1}_{w(i+1),w(i+2)}\delta^{-1}_{w(i),w(i+1)}\delta^{-1}_{w(i+1),w(i+2)}.$$

Por lo tanto

$$R^i_{1,k} = \tau\left(k\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}k^{-1}\right) =$$

$$= \tau\left(\delta_{w(i),w(i+1)}\right)\tau\left(\delta_{w(i+1),w(i+2)}\right)\tau\left(\delta_{w(i),w(i+1)}\right)\tau\left(\delta_{w(i+1),w(i+2)}\right)^{-1}\tau\left(\delta_{w(i),w(i+1)}\right)^{-1}\tau\left(\delta_{w(i+1),w(i+2)}\right)^{-1}.$$

Pasemos la siguiente relación de VB_n que involucra los elementos σ_i. Dados $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que $|i-j| \geqslant 2$, sea

$$R^{i,j}_{2,k} = \tau\left(k\sigma_i\sigma_j\sigma_i^{-1}\sigma_j^{-1}k^{-1}\right).$$

Veamos primero $R_{2,1}$. Entonces

$$R^{i,j}_{2,1} = \tau\left(\sigma_i\sigma_j\sigma_i^{-1}\sigma_j^{-1}\right) = \tau\Bigg(\sigma_i\overline{\sigma_i}^{-1}\overline{\sigma_i}\sigma_j\overline{\sigma_i\sigma_j}^{-1}\overline{\sigma_i\sigma_j}\sigma_i^{-1}\overline{\sigma_i\sigma_j\sigma_i^{-1}}^{-1}\overline{\sigma_i\sigma_j\sigma_i^{-1}}\sigma_j^{-1}\overline{\sigma_i\sigma_j\sigma_i^{-1}\sigma_j^{-1}}\Bigg) =$$

$$= s_{1,\sigma_i} s_{\overline{\sigma_i},\sigma_j} s^{-1}_{\overline{\sigma_i\sigma_j\sigma_i^{-1}},\sigma_i} s^{-1}_{\overline{\sigma_i\sigma_j\sigma_i^{-1}\sigma_j^{-1}},\sigma_j} = s_{1,\sigma_i} s_{1,\sigma_j} s^{-1}_{1,\sigma_i} s^{-1}_{1,\sigma_j} = \tau\left(\delta_{i,i+1}\right)\tau\left(\delta_{j,j+1}\right)\tau\left(\delta_{i,i+1}\right)^{-1}\tau\left(\delta_{j,j+1}\right)^{-1}.$$

Siguiendo el razonamiento anterior, dado cualquier $k \in \Lambda_n$, tomemos $w \in \mathfrak{S}_n$ tal que $\iota(w) = k_{VB_n}$. Entonces

$$R^{i,j}_{2,k} = \tau\left(\delta_{w(i),w(i+1)}\right)\tau\left(\delta_{w(j),w(j+1)}\right)\tau\left(\delta_{w(i),w(i+1)}\right)^{-1}\tau\left(\delta_{w(j),w(j+1)}\right)^{-1}.$$

Pasemos a la siguiente relación. Dado $i \in \{1,\dots,n-2\}$ sea

$$R^i_{3,k} = \tau\left(k\tau_i\tau_{i+1}\sigma_i\tau_{i+1}^{-1}\tau_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}k^{-1}\right).$$

Siguiendo el mismo razonamiento anterior, veamos primero $R^i_{3,1}$. Entonces

$$R^i_{3,1} = \tau\left(\tau_i\tau_{i+1}\sigma_i\tau_{i+1}^{-1}\tau_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}\right) =$$

$$= \tau\Bigg(\tau_i\overline{\tau_i}^{-1}\overline{\tau_i}\tau_{i+1}\overline{\tau_i\tau_{i+1}}^{-1}\overline{\tau_i\tau_{i+1}}\sigma_i\overline{\tau_i\tau_{i+1}\sigma_i}^{-1}\overline{\tau_i\tau_{i+1}\sigma_i}\tau_{i+1}^{-1}\overline{\tau_i\tau_{i+1}\sigma_i\tau_{i+1}^{-1}}^{-1}\cdots$$

$$\cdots\overline{\tau_i\tau_{i+1}\sigma_i\tau_{i+1}^{-1}}\tau_i^{-1}\overline{\tau_i\tau_{i+1}\sigma_i\tau_{i+1}^{-1}\tau_i^{-1}}^{-1}\overline{\tau_i\tau_{i+1}\sigma_i\tau_{i+1}^{-1}\tau_i^{-1}}\sigma_{i+1}^{-1}\overline{\tau_i\tau_{i+1}\sigma_i\tau_{i+1}^{-1}\tau_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}}^{-1}\Bigg) =$$

$$= s_{1,\tau_i} s_{\overline{\tau_i},\tau_{i+1}} s_{\overline{\tau_i\tau_{i+1}},\sigma_i} s^{-1}_{\overline{\tau_i\tau_{i+1}\sigma_i\tau_{i+1}^{-1}},\tau_{i+1}} s^{-1}_{\overline{\tau_i\tau_{i+1}\sigma_i\tau_{i+1}^{-1}\tau_i^{-1}},\tau_i} s^{-1}_{\overline{\tau_i\tau_{i+1}\sigma_i\tau_{i+1}^{-1}\tau_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}},\sigma_{i+1}}.$$

Vimos al principio que $s_{k\tau_i} = 1$ para todo $k \in \Lambda_n$. Por lo tanto reducimos la expresión anterior a

$$R^i_{3,1} = s_{\overline{\tau_i\tau_{i+1}},\sigma_i} s^{-1}_{\overline{\tau_i\tau_{i+1}\sigma_i\tau_{i+1}^{-1}\tau_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}},\sigma_{i+1}}.$$

Podemos apreciar que $\overline{\tau_i\tau_{i+1}\sigma_i\tau_{i+1}^{-1}\tau_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}} = 1$, pues $\left(\tau_i\tau_{i+1}\sigma_i\tau_{i+1}^{-1}\tau_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}\right)_{VB_n} = 1 \in KB_n$. Por otro lado, sabemos que

$$s_{\overline{\tau_i\tau_{i+1}},\sigma_i} = \tau\left(\delta_{(s_is_{i+1})(i),(s_is_{i+1})(i+1)}\right) = \tau\left(\delta_{i+1,i+2}\right).$$

Por lo tanto

$$R^i_{3,1} = s_{\overline{\tau_i\tau_{i+1}},\sigma_i} s^{-1}_{1,\sigma_{i+1}} = \tau\left(\delta_{i+1,i+2}\right)\tau\left(\delta_{i+1,i+2}\right)^{-1} \approx 1.$$

Siguiendo el razonamiento anterior, dado $k \in \Lambda_n$ se tiene que $R^i_{3,k} \approx 1$. Por último, tomemos de nuevo $i,j \in \{1,\dots,n-1\}$ tal que $|i-j| \geqslant 2$. Sea

$$R^{i,j}_{4,k} = \tau\left(k\tau_i\sigma_j\tau_i^{-1}\sigma_j^{-1}k^{-1}\right).$$

Consideremos primero $R^{i,j}_{4,1}$. Entonces

$$R^{i,j}_{4,1} = \tau\left(\tau_i\sigma_j\tau_i^{-1}\sigma_j^{-1}\right) = \tau\left(\tau_i\overline{\tau_i}^{-1}\overline{\tau_i}\sigma_j\overline{\tau_i\sigma_j}^{-1}\overline{\tau_i\sigma_j}\tau_i^{-1}\overline{\tau_i\sigma_j\tau_i^{-1}}^{-1}\overline{\tau_i\sigma_j\tau_i^{-1}}\sigma_j^{-1}\overline{\tau_i\sigma_j\tau_i^{-1}\sigma_j}^{-1}\right) =$$

$$= \underbrace{s_{1,\tau_i}}_{=1} s_{\overline{\tau_i},\sigma_j} \underbrace{s^{-1}_{\overline{\tau_i\sigma_j\tau_i^{-1}},\tau_i}}_{=1} s^{-1}_{\overline{\tau_i\sigma_j\tau_i^{-1}\sigma_j^{-1}},\sigma_j} = s_{\overline{\tau_i},\sigma_j} s^{-1}_{\overline{\tau_i\sigma_j\tau_i^{-1}\sigma_j^{-1}},\sigma_j}.$$

De nuevo, notemos que $\overline{\tau_i\sigma_j\tau_i^{-1}\sigma_j^{-1}} = 1$. Además, se tiene que

$$s_{\overline{\tau_i},\sigma_j} = \tau\left(\delta_{s_i(j),s_i(j+1)}\right) = \tau\left(\delta_{j,j+1}\right).$$

Por lo tanto

$$R^{i,j}_{4,1} = s_{\overline{\tau_i},\sigma_j} s^{-1}_{1,\sigma_j} = \tau\left(\delta_{j,j+1}\right)\tau\left(\delta_{j,j+1}\right)^{-1} \approx 1.$$

Por lo tanto, dado $k \in \Lambda_n$ se tiene que $R^{i,j}_{4,k} \approx 1$. En resumen, el método de Reidemeister-Schreier nos asegura que

$$KB_n \cong \left\langle \{s_{k,\sigma_i}, s_{k,\tau_i}\}_{\substack{k\in\Lambda_n \\ 1\leqslant i\leqslant n-1}} \;\middle|\; s_{k,\tau_i},\ R^i_{1,k},\ R^{i,j}_{2,k} \text{ tal que } k \in \Lambda_n, 1 \leqslant i,j \leqslant n-1 \text{ con } |i-j| \geqslant 2 \right\rangle.$$

Ahora, debido a que cada s_{k,σ_i} puede identificarse con un δ_{ij} y que $s_{k,\tau_i} = 1$ se deduce que

$$KB_n \cong \left\langle \{\delta_{ij}, \delta_{ji}\}_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} \;\middle|\; \delta_{ab}\delta_{cd} = \delta_{cd}\delta_{ab},\ \delta_{ab}\delta_{bc}\delta_{ab} = \delta_{bc}\delta_{ab}\delta_{bc} \right\rangle$$

donde $a, b, c, d \in \{1, \ldots, n\}$ son índices distintos dos a dos. □

Esta presentación nos muestra algo bastante relevante.

Corolario 2.2.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ mayor o igual a dos se tiene que KB_n es un grupo de Artin.*

Demostración. Se deduce de forma directa de la presentación de KB_n dada en el Teorema 2.2.1. □

2.3. Clasificación de homomorfismos

Una vez introducidos los grupos de trenzas virtuales y dos de sus subgrupos normales de mayor relevancia, procederemos a estudiar los posibles homomorfismos que pueden darse entre grupos de trenzas virtuales, entre estos grupos y los simétricos y viceversa. La clasificación de los homomorfismos de estos grupos tiene importancia, pues nos ayuda a comprender como se pueden relacionar con otros grupos.

Definición (Homomorfismo abeliano)**.** Sean G y H dos grupos y sea $\varphi : G \longrightarrow H$ un homomorfismo. Diremos que φ es un homomorfismo abeliano si $\mathrm{Im}(\varphi) \leqslant H$ es un grupo abeliano.

Definición (Abelianización)**.** Sea G un grupo que admite una presentación $\langle S \mid R\rangle$. Llamaremos abelianización de G, notado por G^{ab} al grupo

$$G^{ab} = \langle S \mid R \cup \{ab = ba : a, b \in S\}\rangle .$$

Lema 2.3.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$ mayor o igual a dos. Entonces se tiene que*

$$\mathfrak{S}_n^{ab} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \qquad y \qquad VB_n^{ab} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Demostración. Comencemos por $\mathfrak{S}_n$. Sabemos que para todo $i \in \{1, \ldots, n-2\}$ se tiene que

$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}.$$

Por lo tanto, al añadir las relaciones de abelianización obtenemos

$$s_i^2 s_{i+1} = s_{i+1}^2 s_i,$$

y como $s_i^2 = s_{i+1}^2 = 1$ se tiene que $s_i = s_{i+1}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-2\}$. Deducimos que en $\mathfrak{S}_n^{ab}$ se tiene que $s_1 = s_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, y como $s_1^2 = 1$ deducimos que

$$\mathfrak{S}_n^{ab} \cong \left\langle s_1 \;\middle|\; s_1^2 \right\rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Pasemos ahora a VB_n. En este grupo tenemos la relación

$$\tau_i\tau_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\tau_i\tau_{i+1},$$

por lo que si abelianizamos obtenemos

$$\tau_i\tau_{i+1}\sigma_i = \tau_i\tau_{i+1}\sigma_{i+1} \;\Leftrightarrow\; \sigma_i = \sigma_{i+1}.$$

Deducimos que $\sigma_1 = \sigma_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Procediendo de manera análoga al caso de $\mathfrak{S}_n$ deducimos que $\tau_1 = \tau_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, y además $\tau_1^2 = 1$. Por lo tanto

$$VB_n^{ab} \cong \left\langle \sigma_1, \tau_1 \;\middle|\; \tau_1^2,\ \sigma_1\tau_1 = \tau_1\sigma_1 \right\rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

□

Pasemos a dar algunos resultados previos a la clasificación de los homomorfismos, al igual que algunos conceptos que nos serán necesarios.

Definición (Producto amalgamado)**.** Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos y sea A otro grupo tal que para $i \in I$ existe un homomorfismo inyectivo $f_i : A \longrightarrow G_i$. Definimos el producto amalgamado de la familia $\{G_i\}_{i\in I}$ sobre A con respecto a los homomorfimos $\{f_i\}_{i\in I}$, notado como $*_A G_i$, como el grupo que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& G_i \arrow[dr, "s_i"] & \\
A \arrow[ur, "f_i"] \arrow[dr, "f_j"'] & & *_A G_i \\
& G_j \arrow[ur, "s_j"'] &
\end{tikzcd}$$

sea conmutativo, donde los homomorfismos $s_i : G_i \longrightarrow *_A G_i$ son los homomorfismos canónicos, esto es, homomorfismos inyectivos. Además, ha de cumplir la propiedad universal, esto es, si existe otro grupo H y una familia de homomorfismos $\{h_i : G_i \longrightarrow H\}_{i\in I}$ cumpliendo las mismas propiedades, existe un único homomorfismo $h : *_A G_i \longrightarrow H$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& G_i \arrow[dr, "s_i"] \arrow[drr, bend left, "h_i"] & & \\
A \arrow[ur, "f_i"] \arrow[dr, "f_j"'] & & *_A G_i \arrow[r, dashed, "h"] & H \\
& G_j \arrow[ur, "s_j"] \arrow[urr, bend right, "h_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

En caso de que la familia de grupos sea finita, denotaremos indiferentemente al producto amalgamado como

$$G_1 *_A G_2 *_A \cdots *_A G_n := *_A G_i.$$

Además, si $A = \{1\}$ diremos que es un producto directo y se denotará omitiendo la escritura del subgrupo, esto es, $G_1 * \cdots * G_n$.

Siguiendo la notación de la definición anterior, si cada grupo de la familia tiene una presentación $G_i \cong \langle S_i \mid R_i \rangle$, es sencillo ver que una presentación del producto amalgamado es

$$*_A G_i \cong \left\langle \bigsqcup_{i\in I} S_i \;\middle|\; \left(\bigsqcup_{i\in I} R_i\right) \cup \left(\bigsqcup_{i,j\in I} \{f_i(a) = f_j(a) : a \in A\}\right) \right\rangle.$$

La estructura de producto amalgamado nos será de gran utilidad, pues todo grupo de Artin admite una descomposición de este tipo como veremos a continuación.

Definición (Palabra reducida)**.** Sea A un grupo y $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos tales que $*_A G_i$ es un producto amalgamado. Para cada $i \in I$, elegimos un conjunto W_i de representantes de las clases laterales a la derecha de G_i/A tal que $1 \in W_i$. Consideremos $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_n)$, con $n \geqslant 1$, una secuencia de elementos de I satisfaciendo que para todo $1 \leqslant m \leqslant n-1$ se tiene $i_m \neq i_{m+1}$. Llamaremos palabra reducida de tipo $\mathbf{i}$ a cualquier familia

$$m = (a; s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

con $a \in A_i$, $s_1 \in W_{i_1}, \ldots, s_n \in W_{i_n}$ y $s_j \neq 1$ para todo j.

Teorema 2.3.1 (Teorema de estructura de los productos amalgamados, Teorema 1, pg. 3, [18])**.** *Sea $G = *_A G_i$, h el homomorfismo canónico de A a G, y h_i el homomorfismo canónico de G_i a G para todo $i \in I$. Entonces, usando la notación anterior, para todo $g \in G$ existe una secuencia* $\mathbf{i}$ *satisfaciendo las condiciones anteriores, y una palabra reducida $m = (a; s_1, \ldots, s_n)$ de tipo* $\mathbf{i}$ *tal que*

$$g = h(a)h_{i_1}(s_1)\cdots h_{i_n}(s_n)$$

de manera que tanto m como $\mathbf{i}$ *son únicas. De la misma forma, podemos conseguir la expresión*

$$g = h_{i_1}(s_1)\cdots h_{i_n}(s_n)h(a).$$

La prueba de este resultado puede encontrarse en la referencia adjunta. Esta prueba fue uno de los pilares fundamentales del tema tratado en mi Trabajo de Fin de Grado.

Definición (Forma normal)**.** Sea $*_A G_i$ un producto amalgamado, y sean W_i un conjunto de representantes de clases laterales a la derecha de G_i/A tal que $1 \in W_i$. Dado $g \in *_A G_i$ llamaremos forma normal de g a la izquierda a la expresión

$$g = a s_1 s_2 \cdots s_n$$

siguiendo la notación del Teorema 2.3.1[4], la cual es única. De la misma manera, diremos que la forma normal es a la derecha si

$$g = s_1 s_2 \cdots s_n a.$$

Lema 2.3.2. *Sea Γ un grafo de Coxeter sobre un conjunto numerable S. Sean $X, Y \subset S$ dos subconjuntos y $\Gamma_X, \Gamma_Y \subset \Gamma$ los respectivos subgrafos maximales sobre X y sobre Y. Entonces, si $\Gamma_X \cup \Gamma_Y = \Gamma$ se tiene que*

$$A[\Gamma] \cong A[\Gamma_X] *_{A[\Gamma_X \cap \Gamma_Y]} A[\Gamma_Y].$$

Demostración. Consideremos la presentación $A[\Gamma] \cong \langle S \mid R \rangle$. También sabemos que $A[\Gamma_X] \cong \langle X \mid R_X \rangle$ y $A[\Gamma_Y] \cong \langle Y \mid R_Y \rangle$ para ciertos $R_X, R_Y \subset R$. Debido a que $\Gamma_X \cup \Gamma_Y = \Gamma$ se deduce que $X \cup Y = S$ y $R_X \cup R_Y = R$, pues los grafos de Coxeter encapsulan tanto los generadores como las relaciones del grupo. Haciendo uso del Teorema de Van der Lek (Teorema 1.3.1) sabemos que

$$A[\Gamma_X \cap \Gamma_Y] \cong \langle X \cap Y \mid R_X \cap R_Y \rangle.$$

Por lo tanto, si consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & A[\Gamma_X] \arrow[dr, bend left] & \\ A[\Gamma_X \cap \Gamma_Y] \arrow[ur, bend left] \arrow[dr, bend right] & & A[\Gamma] \\ & A[\Gamma_Y] \arrow[ur, bend right] & \end{tikzcd}$$

donde las flechas representan las inclusiones canónicas, se deduce por construcción que

$$A[\Gamma] \cong A[\Gamma_X] *_{A[\Gamma_X \cap \Gamma_Y]} A[\Gamma_Y].$$

□

Como probamos con anterioridad, el subgrupo KB_n de VB_n es un grupo de Artin. En lo que sigue, denotaremos por $\mathcal{S} = \{\delta_{ij} : i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j\}$ al conjunto generador de KB_n con el que hemos presentado al grupo. A su vez, denotemos por $\Gamma_{\mathcal{S}}$ el grafo de Coxeter sobre $\mathcal{S}$ tal que $A[\Gamma_{\mathcal{S}}] \cong KB_n$. Dado $X \subset \mathcal{S}$, consideremos Γ_X el subgrafo maximal de $\Gamma_{\mathcal{S}}$ que tenga a X por vértices. Denotaremos por $KB_n[\Gamma_X]$ al subgrupo de KB_n generado por X. Notemos que esta definición tiene sentido por ser KB_n un grupo de Artin.

2.3.1. Lemas técnicos

Procedemos a dar una serie de resultados técnicos que nos ayudarán en la clasificación de los homomorfismos de los grupos de trenzas virtuales.

Lema 2.3.3 (Lema 3.6 [4])**.** *Sean G_1, G_2 y H grupos tales que $G = G_1 *_H G_2$ es un producto amalgamado. Sea $\gamma \in \operatorname{Aut}(G)$ un automorfismo de orden 2 tal que $\gamma(G_1) = G_2$ y $\gamma(G_2) = G_1$. Denotemos*

$$G^\gamma := \{g \in G : \gamma(g) = g\}.$$

Entonces $G^\gamma \subset H$.

[4] Aquí abusamos de notación, puesto que en el teorema se expresa g a partir de las inclusiones canónicas de los grupos que conforman el producto amalgamado, pero por ser canónicas, no hay ambigüedad, por lo que para no cargar la notación las hemos omitido.

Demostración. Primero, notemos que, debido a que $\gamma(G_1) = G_2$ y $\gamma(G_2) = G_1$, y que $H = G_1 \cap G_2$ en G, se tiene que $\gamma(H) = H$. Consideremos $\mathcal{K}_1$ un sistema de representantes de H en G_1, y consideremos $\mathcal{K}_2 := \gamma(\mathcal{K}_1)$ un sistema de representantes de H en G_2. Consideremos $g \in G$ y sea $g = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l\beta$ la forma normal a la derecha de g. Notemos que, por elección del sistema de los sistemas de representantes se tiene que la forma normal a la derecha de $\gamma(g)$ es $\gamma(\alpha_1)\gamma(\alpha_2)\cdots\gamma(\alpha_l)\gamma(\beta)$. Supongamos que $l \geqslant 1$, entonces, sin pérdida de generalidad podemos tomar $\alpha_1 \in \mathcal{K}_1\backslash\{1\}$. Entonces $\gamma(\alpha_1) \in \mathcal{K}_2\backslash\{1\}$, por lo que $\alpha_1 \neq \gamma(\alpha_1)$, y por lo tanto $g \neq \gamma(g)$. Deducimos que si $g \in G^\gamma$ se tiene que $l = 0$, esto es, $g \in H$. Por lo tanto $G^\gamma \subset H$. $\square$

Lema 2.3.4 (Lema 3.7 [4])**.** *Sea $X \subset \mathcal{S}$ un subconjunto invariante por la acción de $s_1 \in \mathfrak{S}_n$. Consideremos el conjunto $\mathcal{S}_3 = \{\delta_{ij}, \delta_{ji} : 3 \leqslant i < j \leqslant n\}$. Entonces*

$$KB_n[\Gamma_X]^{s_1} = KB_n[\Gamma_X \cap \Gamma_{\mathcal{S}_3}],$$

donde $KB_n[\Gamma_X]^{s_1} = \{g \in KB_n : s_1(g) = g\}$.

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{\delta_{ij} \in X : (i,j) \notin \{(1,2),(2,1)\}\}$. Notemos que $KB_n[\Gamma_X]^{s_1}$ tiene sentido, puesto que $\mathfrak{S}_n$ actúa sobre KB_n por automorfismos, en particular se tiene que

$$s_1 \cdot \delta_{ij} = \tau_1\delta_{ij}\tau_1^{-1} = \delta_{s_1(i),s_1(j)}.$$

Por lo tanto, $s_1 \cdot \mathcal{U} = \mathcal{U}$. Veamos primero que $KB_n[\Gamma_X]^{s_1} \subseteq KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}}]$. Si $X \subseteq \mathcal{U}$ no hay nada que probar. En caso contrario, debido a que $X \subseteq \mathcal{S}$ y por hipótesis es invariante por la acción de s_1, se deduce que $X = \mathcal{U} \sqcup \{\delta_{12}, \delta_{21}\}$. Sea $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \sqcup \{\delta_{12}\}$ y $\mathcal{U}'' = \mathcal{U} \sqcup \{\delta_{21}\}$. Debido a que $\mathcal{U}' \cup \mathcal{U}'' = X$ y a que $\mathcal{U}' \cap \mathcal{U}'' = \mathcal{U}$, usando el Lema 2.3.2 deducimos que

$$KB_n[\Gamma_X] \cong KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}'}] *_{KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}}]} KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}''}].$$

Además, podemos notar que $s_1 \cdot \mathcal{U}' = \mathcal{U}''$ y $s_1 \cdot \mathcal{U}'' = \mathcal{U}'$. Por lo tanto, gracias al Lema 2.3.3 se deduce que $KB_n[\Gamma_X]^{s_1} \subseteq KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}}]$.

Sea $\mathcal{V}_k = \{\delta_{ij} : (i,j) \notin \{1,2\} \times \{1,2,\ldots,k\}\}$ con $2 \leqslant k \leqslant n$. Probemos por inducción en k que $KB_n[\Gamma_X]^{s_1} \subseteq KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_k}]$. Si $k = 2$, entonces $\mathcal{V}_2 = \mathcal{U}$, por lo que ya está probado. Supongamos que $k \geqslant 3$ y tomemos como hipótesis de inducción que $KB_n[\Gamma_X]^{s_1} \subseteq KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_{k-1}}]$. Si $\mathcal{V}_{k-1} = \mathcal{V}_k$ no hay nada que probar. En caso contrario, como $\mathcal{V}_k \subseteq X$, es invariante por la acción de s_1. Deducimos que $\mathcal{V}_{k-1} = \mathcal{V}_k \sqcup \{\delta_{1,k}, \delta_{2,k}\}$. Procediendo de forma análoga a lo anterior, consideremos $\mathcal{V}_k' = \mathcal{V}_k \sqcup \{\delta_{1k}\}$ y $\mathcal{V}_k'' = \mathcal{V}_k \sqcup \{\delta_{2k}\}$. Entonces $\mathcal{V}_k' \cup \mathcal{V}_k'' = \mathcal{V}_{k-1}$ y $\mathcal{V}_k' \cap \mathcal{V}_k'' = \mathcal{V}_k$. Haciendo uso del Lema 2.3.2 se deduce que

$$KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_{k-1}}] \cong KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_k'}] *_{KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_k}]} KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_k''}].$$

De nuevo, gracias al Lema 2.3.3 sabemos que $KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_{k-1}}]^{s_1} \subseteq KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_k}]$, y como por hipótesis de inducción se tiene que $KB_n[\Gamma_X]^{s_1} \subseteq KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_{k-1}}]$, entonces

$$KB_n[\Gamma_X]^{s_1} \subseteq KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_{k-1}}]^{s_1} \subseteq KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_k}].$$

Por último, consideremos $\mathcal{W}_k = \{\delta_{ij} \in X : (i,j) \notin (\{1,2\} \times \{1,\ldots,n\}) \cup (\{1,\ldots,k\} \times \{1,2\})\}$. Veamos por inducción que $KB_n[\Gamma_X]^{s_1} \subseteq KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_k}]$. Si $k = 2$, podemos apreciar que $\mathcal{W}_2 = \mathcal{V}_n$, por lo que ya está probado. Supongamos que $k \geqslant 3$, y tomemos como hipótesis de inducción que $KB_n[\Gamma_X]^{s_1} \subseteq KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_{k-1}}]$. Si $\mathcal{W}_{k-1} = \mathcal{W}_k$ no hay nada que probar. En caso contrario, debido a que $\mathcal{W}_{k-1} \subseteq X$, es invariante por la acción de s_1. Por lo tanto $\mathcal{W}_{k-1} = \mathcal{W}_k \sqcup \{\delta_{k1}, \delta_{k2}\}$. De nuevo, tomemos $\mathcal{W}_k' = \mathcal{W}_k \sqcup \{\delta_{k1}\}$ y $\mathcal{W}_k'' = \mathcal{W}_k \sqcup \{\delta_{k2}\}$. Entonces $\mathcal{W}_k' \cup \mathcal{W}_k'' = \mathcal{W}_{k-1}$ y $\mathcal{W}_k' \cap \mathcal{W}_k'' = \mathcal{W}_k$. Usando el Lema 2.3.2 sabemos que

$$KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_{k-1}}] \cong KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_k'}] *_{KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_k}]} KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_k''}],$$

y gracias al Lema 2.3.3 sabemos que $KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_{k-1}}]^{s_1} \subseteq KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_k}]$. Por lo tanto, procediendo como antes deducimos que $KB_n[\Gamma_X]^{s_1} \subseteq KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_k}]$. Ahora, notemos que $\mathcal{W}_n = X \cap \mathcal{S}_3$, por lo que

$$KB_n[\Gamma_X]^{s_1} \subseteq KB_n[\Gamma_X \cap \Gamma_{\mathcal{S}_3}].$$

Procedamos a probar la otra implicación. Debido a que $s_1 \cdot \mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_3$ se tiene que $s_1 \cdot (X \cap \mathcal{S}_3) = X \cap \mathcal{S}_3$. Se deduce entonces que

$$KB_n[\Gamma_X \cap \Gamma_{\mathcal{S}_3}] \subseteq KB_n[\Gamma_X]^{s_1}.$$

Por lo tanto, por doble inclusión, concluimos que $KB_n[\Gamma_X \cap \Gamma_{\mathcal{S}_3}] = KB_n[\Gamma_X]^{s_1}$. □

Corolario 2.3.1. *Dado $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, sea $s_k \in \mathfrak{S}_n$. Consideremos $X \subseteq \mathcal{S}$ invariante por la acción de s_k y sea $\mathcal{U}_k = \{\delta_{ij} \in \mathcal{S} : i, j \notin \{k, k+1\}\}$. Entonces*

$$KB_n[\Gamma_X]^{s_k} = KB_n[\Gamma_X \cap \Gamma_{\mathcal{U}_k}].$$

Demostración. La demostración es análoga a la prueba del Lema 2.3.4 cambiando $\mathcal{S}_3$ por $\mathcal{U}_k$ y s_1 por s_k. □

Lema 2.3.5 (Lema 3.9 [4]). *Sean G_1, G_2 y H tres grupos tales que $G = G_1 *_H G_2$ es un producto amalgamado. Sea $\gamma \in \mathrm{Aut}(G)$ de orden 2 tal que $\gamma(G_1) = G_2$ y $\gamma(G_2) = G_1$. Sea $g \in G$ tal que $\gamma(g) = g^{-1}$. Entonces existe $g' \in G$ y $\beta' \in H$ tal que $\gamma(\beta') = (\beta')^{-1}$ y*

$$g = g'\beta'\gamma(g')^{-1}.$$

Demostración. Partimos de que $\gamma(G_1) = G_2$ y $\gamma(G_2) = G_1$, por lo que debido a que $H = G_1 \cap G_2$ en G, se tiene que $\gamma(H) = H$. Consideremos $\mathcal{K}_1$ un sistema de representantes de H en G_1, y tomemos $\mathcal{K}_2 := \gamma(\mathcal{K}_1)$ como un sistema de representantes de H en G_2. Sea $g \in G$ tal que $\gamma(g) = g^{-1}$. sea

$$g = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_l\beta$$

la forma normal a la derecha de g. Probaremos por inducción en l que existen $g' \in G$ y $\beta' \in H$ tal que $\gamma(\beta') = (\beta')^{-1}$ y $g = g'\beta'\gamma(g')^{-1}$. Si $l = 0$, entonces $g = \beta \in H$. Como $\gamma(g) = g^{-1}$, entonces tomamos $\beta' = g$ y $g' = 1$ y se tiene el resultado. Supongamos que $l \geqslant 1$ y supongamos que la hipótesis de inducción es cierta hasta $l-1$. Como $\gamma(g) = g^{-1}$, entonces $1 = g\gamma(g)$. Usando la forma normal a la derecha se tiene que

$$1 = g\gamma(g) = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_l\beta\gamma(\alpha_1)\gamma(\alpha_2) \cdots \gamma(\alpha_l)\gamma(\beta).$$

Veamos que $\alpha_l\beta\gamma(\alpha_1) \in H$. Sabemos que $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_l\beta$ es la forma normal a la derecha de g, la cual es única, y por lo tanto, irreducible. Por otro lado, por elección de los sistemas de representantes, $\gamma(\alpha_1)\gamma(\alpha_2) \cdots \gamma(\alpha_l)\gamma(\beta)$ es la forma normal de $\gamma(g)$, por lo que también es única, y por ende, irreducible. Además, sabemos que $\alpha_l\beta \notin H$ y $\beta\gamma(\alpha_1) \notin H$ por lo anterior. Tomemos $\widetilde{g} = \beta\gamma(\alpha_1)\gamma(\alpha_2) \cdots \gamma(\alpha_l)$. Sea $\widetilde{\alpha}_1$ un elemento en el mismo sistema de representantes que $\gamma(\alpha_1)$ y sea $\rho_1 \in H$ tal que $\widetilde{\alpha}_1\rho_1 = \beta\gamma(\alpha_1)$. Procedemos de forma análoga tomando $\widetilde{\alpha}_r$ en el mismo sistema de representantes que $\gamma(\alpha_r)$ y tomando $\rho_r \in H$ tal que $\widetilde{\alpha}_r\rho_r = \rho_{r-1}\gamma(\alpha_r)$. Obtenemos que la forma normal de $\widetilde{g}$ es

$$\widetilde{g} = \widetilde{\alpha}_1\widetilde{\alpha}_2 \cdots \widetilde{\alpha}_l\rho_l.$$

Por lo tanto

$$1 = g\gamma(g) = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_l\widetilde{\alpha}_1\widetilde{\alpha}_2 \cdots \widetilde{\alpha}_l\rho_l\gamma(\beta).$$

Notemos que l no puede ser impar, puesto que α_l y $\widetilde{\alpha}_1$ pertenecen a sistemas de representantes distintos, por lo que esa expresión no se puede reducir. En caso de tomar l par se tiene que $\widetilde{\alpha}_1$ y α_l están en el mismo sistema de representantes. Por lo tanto, la única forma de reducir la expresión es que $\alpha_l\widetilde{\alpha}_1 \in H$. Debido a que $\widetilde{\alpha}_1 = \beta\gamma(\alpha_1)\rho_1^{-1}$ se tiene que $\alpha_1\widetilde{\alpha}_1 = \alpha_1\beta\gamma(\alpha_1)\rho_1^{-1} \in H$, y como $\rho_1 \in H$ concluimos que $\alpha_1\beta\gamma(\alpha_1) \in H$. Deducimos que $\alpha_l\beta\gamma(\alpha_1) \in H$.

Entonces existe $\beta_1 \in H$ tal que $\alpha_l\beta\gamma(\alpha_1) = \beta_1$, o lo que es lo mismo, $\alpha_l\beta = \beta_1(\gamma(\alpha_1))^{-1}$. Sustituyendo en la forma normal a la derecha de g se tiene que

$$g = \alpha_1 \cdots \alpha_{l-1}\beta_1(\gamma(\alpha_1))^{-1}.$$

Sea $g_1 = \alpha_2 \cdots \alpha_{l-1}\beta_1$. Entonces $g = \alpha_1 g_1(\gamma(\alpha_1))^{-1}$. Notemos que como $\gamma(g) = g^{-1}$ se tiene que

$$\gamma(g) = \gamma\left(\alpha_1 g_1(\gamma(\alpha_1))^{-1}\right) = \gamma(\alpha_1)\gamma(g_1)\alpha_1^{-1} = g^{-1} = \left(\alpha_1 g_1(\gamma(\alpha_1))^{-1}\right)^{-1} = \gamma(\alpha_1)g_1^{-1}\alpha_1^{-1},$$

de donde se deduce que $\gamma(g_1) = g_1^{-1}$. Como g_1 cumple las hipótesis de inducción, sabemos que existe un $g_1' \in G$ y $\beta_1' \in H$ tal que $\gamma(\beta_1') = (\beta_1')^{-1}$ y $g_1 = g_1'\beta_1' \left(\gamma\left(g_1'\right)\right)^{-1}$. Por lo tanto

$$g = \alpha_1 g_1' \beta_1' \left(\gamma\left(g_1'\right)\right)^{-1} (\gamma(\alpha_1))^{-1} = \alpha_1 g_1' \beta_1' \left(\gamma(\alpha_1 g_1')\right)^{-1}.$$

Tomando $g' = \alpha_1 g_1'$ y $\beta' = \beta_1'$ se obtiene el resultado. □

El siguiente lema nos será necesario en resultados posteriores, pero debido a las que las herramientas necesarias para probarlos difieren bastante del propósito de este trabajo no se dará la demostración, aunque esta puede encontrarse en la referencia adjunta.[5]

Lema 2.3.6 (Corolario 6.3 [11]). *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 2$. Entonces KB_n es libre de torsión.*

Lema 2.3.7 (Lema 3.10 [4]). *Tomemos $s_1 \in \mathfrak{S}_n$ y $X \subseteq \mathcal{S}$ invariante por la acción de s_1. Sea $g \in KB_n[\Gamma_X]$ tal que $s_1(g) = g^{-1}$. Entonces existe $g' \in KB_n[\Gamma_X]$ tal que $g = g'\left(s_1\left(g'\right)\right)^{-1}$.*

Demostración. Sea $g \in KB_n[\Gamma_X]$ tal que $s_1(g) = g^{-1}$. Tomemos $\mathcal{U} = \{\delta_{ij} \in X : (i,j) \notin \{(1,2),(2,1)\}\}$. Probaremos que existe $g' \in KB_n[\Gamma_X]$ y $\beta' \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}}]$ tal que $s_1(\beta') = (\beta')^{-1}$ y $g = g'\beta'\left(s_1(g')\right)^{-1}$. Si $X = \mathcal{U}$, basta tomar $g' = 1$ y $\beta' = g$. En caso contrario, como $\mathcal{U} \subseteq X$ y X es invariante por la acción de s_1 se tiene que $X = \mathcal{U} \sqcup \{\delta_{12}, \delta_{21}\}$. Tomemos $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \sqcup \{\delta_{12}\}$ y $\mathcal{U}'' = \mathcal{U} \sqcup \{\delta_{21}\}$. Podemos apreciar que $\mathcal{U}' \cup \mathcal{U}'' = X$ y $\mathcal{U}' \cap \mathcal{U}'' = \mathcal{U}$. Haciendo uso del Lema 2.3.2, como $s_1(KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}'}]) = KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}''}]$ y $s_1(KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}''}]) = KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}'}]$, se tiene que

$$KB_n[\Gamma_X] \cong KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}'}] *_{KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}}]} KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}''}],$$

y gracias al Lema 2.3.5 sabemos que existe $g' \in KB_n[\Gamma_X]$ y $\beta' \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}}]$ tal que $s_1(\beta') = (\beta')^{-1}$ y $g = g'\beta'\left(s_1(g')\right)^{-1}$.

Dado $k \in \{2,\dots,n\}$ consideremos el conjunto $\mathcal{V}_k = \{\delta_{ij} \in X : (i,j) \notin \{1,2\} \times \{1,\dots,k\}\}$. Veamos por inducción en k que existe $g' \in KB_n[\Gamma_X]$ y $\beta' \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_k}]$ tal que $s_1(\beta') = (\beta')^{-1}$ y $g = g'\beta'\left(s_1(g')\right)^{-1}$. Si $k = 2$ se tiene que $\mathcal{V}_2 = \mathcal{U}$, por lo que ta está probado. Supongamos que $k \geqslant 3$ y que se tiene la hipótesis de inducción, esto es, que existe $g_1' \in KB_n[\Gamma_X]$ y $\beta_1' \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_{k-1}}]$ tal que $s_1(\beta') = (\beta_1')^{-1}$ y $g = g_1'\beta_1'\left(s_1(g_1')\right)^{-1}$. Si $\mathcal{V}_{k-1} = \mathcal{V}_k$ no hay nada que probar. En caso contrario, como $\mathcal{V}_{k-1}$ es invariante por la acción de s_1 se tiene que $\mathcal{V}_{k-1} = \mathcal{V}_k \sqcup \{\delta_{1k}, \delta_{2k}\}$. Sea $\mathcal{V}_k' = \mathcal{V}_k \sqcup \{\delta_{1k}\}$ y $\mathcal{V}_k'' = \mathcal{V}_k \sqcup \{\delta_{2k}\}$. De nuevo vemos que $\mathcal{V}_k' \cup \mathcal{V}_k'' = \mathcal{V}_{k-1}$ y $\mathcal{V}_k' \cap \mathcal{V}_k'' = \mathcal{V}_k$, y además $s_1(KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_k'}]) = KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_k''}]$ y $s_1(KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_k''}]) = KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_k'}]$. Haciendo uso del Lema 2.3.2 se tiene que

$$KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_{k-1}}] \cong KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_k'}] *_{KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_k}]} KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_k''}],$$

y gracias al Lema 2.3.5 sabemos que existe un $g_2' \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_{k-1}}]$ y un $\beta_2' \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_k}]$ de forma que $s_1(\beta_2') = (\beta_2')^{-1}$ y $\beta_1' = g_2'\beta_2'\left(s_1(g_2')\right)^{-1}$. Entonces

$$g = g_1'\beta_1'\left(s_1(g_1')\right)^{-1} = g_1'g_2'\beta'\left(s_1(g_2')\right)^{-1}\left(s_1(g_1')\right)^{-1} = g_1'g_2'\beta'\left(s_1(g_1'g_2')\right)^{-1}.$$

Tomando $g' = g_1'g_2'$ y $\beta' = \beta_2'$ se tiene el resultado.

Tomemos ahora $k \in \{2,\dots,n\}$ y consideremos el conjunto

$$\mathcal{W}_k = \{\delta_{ij} \in X : (i,j) \notin (\{1,2\} \times \{1,\dots,n\}) \cup (\{1,\dots,k\} \times \{1,2\})\}.$$

Probaremos por inducción en k que existen $g' \in KB_n[\Gamma_X]$ y $\beta' \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_k}]$ tal que $s_1(\beta') = (\beta')^{-1}$ y que $g = g'\beta'(s_1(g'))^{-1}$. Si $k = 2$ se tiene que $\mathcal{W}_2 = \mathcal{V}_n$, por lo que ya está probado. Supongamos que $k \geqslant 3$ y supongamos que se cumple la hipótesis de inducción, esto es, que existen $g_1' \in KB_n[\Gamma_X]$ y $\beta_1' \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_{k-1}}]$ tal que $s_1(\beta_1') = (\beta_1')^{-1}$ y $g = g_1'\beta_1'\left(s_1(g_1')\right)^{-1}$. Si $\mathcal{W}_{k-1} = \mathcal{W}_k$ no hay nada que probar. En caso contrario, debido a que $\mathcal{W}_{k-1}$ es invariante por la acción de s_1 se tiene que $\mathcal{W}_{k-1} = \mathcal{W}_k \sqcup \{\delta_{k1}, \delta_{k2}\}$.

[5] En el artículo se prueba que los grupos VB_n son virtualmente libres de torsión, esto es, que todo subgrupo de índice finito es libre de torsión, y como $VB_n/KB_n \cong \mathfrak{S}_n$ y este grupo es finito, se tiene que KB_n es de índice finito, y por ende, libre de torsión.

Sea $\mathcal{W}'_k = \mathcal{W}_k \sqcup \{\delta_{k1}\}$ y $\mathcal{W}''_k = \mathcal{W}_k \sqcup \{\delta_{k2}\}$. Entonces $\mathcal{W}'_k \cup \mathcal{W}''_k = \mathcal{W}_{k-1}$ y $\mathcal{W}'_k \cap \mathcal{W}''_k = \mathcal{W}_k$. Además $s_1(KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}'_k}]) = KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}''_k}]$ y $s_1(KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}''_k}]) = KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}'_k}]$, por lo que haciendo uso del Lema 2.3.2 se tiene que

$$KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_{k-1}}] \cong KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}'_k}] *_{KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_k}]} KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}''_k}],$$

y haciendo uso del Lema 2.3.5 se deduce que existen $g'_2 \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_{k-1}}]$ y $\beta'_2 \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_k}]$ tales que $\beta'_1 = g'_2\beta'_2(s_1(g'_2))^{-1}$. Entonces

$$g = g'_1\beta'_1(s_1(g'_1))^{-1} = g'_1g'_2\beta'_2(s_1(g'_2))^{-1}(s_1(g'_1))^{-1} = g'_1g'_2\beta'_2(s_1(g'_1g'_2))^{-1}.$$

Tomando $g' = g'_1g'_2$ y $\beta' = \beta'_2$ se tiene el resultado.

Notemos que $\mathcal{W}_n = X \cap \mathcal{S}_3$, usando la notación del Lema 2.3.4. Además, gracias a este lema sabemos que para todo $\beta' \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_n}] = KB_n[\Gamma_{\mathcal{S}_3} \cap \Gamma_X]$ se tiene que $s_1(\beta') = \beta'$. Por otro lado, como se ha probado en el párrafo anterior sabemos que existen $g' \in KB_n[\Gamma_X]$ y $\beta' \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_k}]$ cumpliendo que $s_1(\beta') = (\beta')^{-1}$ y que $g = g'\beta'(s_1(g'))^{-1}$. Por lo tanto, $\beta' = s_1(\beta') = (\beta')^{-1}$, o de forma equivalente, $(\beta')^2 = 1$. Gracias al Lema 2.3.6 sabemos que KB_n es libre de torsión, y como $KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_n}]$ es un subgrupo de KB_n, también es libre de torsión, por lo que como $(\beta')^2 = 1$ se deduce que $\beta' = 1$. Concluimos pues que

$$g = g'(s_1(g'))^{-1}$$

para cierto $g' \in KB_n[\Gamma_X]$. □

Lema 2.3.8 (Lema 3.11 [4]). *Sean $G_1, \cdots, G_p, H$ grupos tales que $G := G_1 *_H G_2 *_H \cdots *_H G_p$ es un producto amalgamado. Sean $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{Aut}(G)$ tal que satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *$\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \mathrm{id}_G$ y $\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1 = \gamma_2 \circ \gamma_1 \circ \gamma_2$.*
2. *Para todo $i \in \{1, 2\}$ y $j \in \{1, \ldots, p\}$ existe un $k \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $\gamma_i(G_j) = G_k$.*
3. *Para todo $j \in \{1, \ldots, p\}$ existe un $i \in \{1, 2\}$ tal que $\gamma_i(G_j) \neq G_j$.*
4. *Para todo $i \in \{1, 2\}$ se tiene que $\gamma_i(H) = H$.*
5. *Para todo $i \in \{1, 2\}$ y $\beta \in H$ tal que $\gamma_i(\beta) = \beta^{-1}$ existe un $\delta \in H$ tal que $\beta = \delta\,(\gamma_i(\delta))^{-1}$.*

Sea $g \in G$ un elemento que satisfaga la siguiente ecuación:

$$g\gamma_2(g)^{-1}(\gamma_2 \circ \gamma_1)(g)\left((\gamma_2 \circ \gamma_1 \circ \gamma_2)(g)\right)^{-1}(\gamma_1 \circ \gamma_2)(g)(\gamma_1(g))^{-1} = 1.$$

Entonces existen $g', g'' \in G$ y $\beta \in H$ tal que $g = g'\beta g''$, $\gamma_1(g') = g'$, $\gamma_2(g'') = g''$ y β satisface la ecuación anterior.

Demostración. Sea g un elemento que satisfaga la ecuación anterior. Notemos que si existiesen $g', g'' \in G$ y $\beta \in H$ tales que $g = g'\beta g''$, $\gamma_1(g') = g'$ y $\gamma_2(g'') = g''$, entonces

$$1 = g\gamma_2(g)^{-1}(\gamma_2 \circ \gamma_1)(g)\left((\gamma_2 \circ \gamma_1 \circ \gamma_2)(g)\right)^{-1}(\gamma_1 \circ \gamma_2)(g)(\gamma_1(g))^{-1} =$$

$$= g'\beta g''\gamma_2(g'\beta g'')^{-1}(\gamma_2 \circ \gamma_1)(g'\beta g'')\left((\gamma_2 \circ \gamma_1 \circ \gamma_2)(g'\beta g'')\right)^{-1}(\gamma_1 \circ \gamma_2)(g'\beta g'')(\gamma_1(g'\beta g''))^{-1} =$$

$$= g'\gamma_2(\beta)^{-1}(\gamma_2 \circ \gamma_1)(\beta)\left((\gamma_2 \circ \gamma_1 \circ \gamma_2)(\beta)\right)^{-1}(\gamma_1 \circ \gamma_2)(\beta)(\gamma_1(\beta))^{-1}(g')^{-1},$$

por lo que conjugando por g' observamos que β también cumple la ecuación. Por lo tanto, basta probar que existen dichos elementos $g', g'' \in G$ y $\beta \in H$ tales que $g = g'\beta g''$, $\gamma_1(g') = g'$ y $\gamma_2(g'') = g''$. Si $g \in H$, como por la condición (4) se tiene que $\gamma_1(H) = \gamma_2(H) = H$. Basta tomar $g' = g'' = 1$ y $\beta = g$, y obtenemos el resultado. Supongamos ahora que $g \notin H$ y sea $g = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_l$ tal que:

- Para todo $i \in \{1, \ldots, l\}$ existe un $j = j(i) \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $\alpha_i \in G_j \backslash H$.
- $j(i) \neq j(i+1)$ para todo $i \in \{1, \ldots, l-1\}$.

Notemos que siempre podemos conseguir una expresión de este tipo, puesto que $g \notin H$. Procedamos por inducción en l. Supongamos que $l = 1$ y sin pérdida de generalidad consideremos $g = \alpha_1 \in G_1 \backslash H$. Para aliviar la notación, tomemos

$$\rho_1 = g, \quad \rho_2 = (\gamma_2(g))^{-1}, \quad \rho_3 = (\gamma_2 \circ \gamma_1)(g),$$

$$\rho_4 = ((\gamma_2 \circ \gamma_1 \circ \gamma_2)(g))^{-1}, \quad \rho_5 = (\gamma_1 \circ \gamma_2)(g), \quad \text{y} \quad \rho_6 = (\gamma_1(g))^{-1}.$$

Por lo tanto, por hipótesis tenemos que $\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4\rho_5\rho_6 = 1$ y que para cada $i \in \{1, \ldots, 6\}$ existe un $j = j(i) \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $\rho_i \in G_j \backslash H$, ya que H es fijado por γ_1 y γ_2. Notemos que si $\gamma_1(G_1) \neq G_1$ y $\gamma_2(G_1) \neq G_1$, entonces $j(i) \neq j(i+1)$ para todo $i \in \{1, \ldots, 5\}$, por lo que la expresión $\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4\rho_5\rho_6$ sería irreducible, pero esta expresión es igual a 1, lo cual nos lleva a un absurdo. Por lo tanto, al menos uno de los dos automorfismos ha de fijar a G_1. Ahora, por la condición 3) sabemos que al menos uno de los dos automorfismos no puede fijar G_1, por lo que los dos posibles casos son o $\gamma_1(G_1) = G_1$ y $\gamma_2(G_1) \neq G_1$, o $\gamma_1(G_1) \neq G_1$ y $\gamma_2(G_1) = G_1$.

Supongamos que $\gamma_1(G_1) = G_1$ y $\gamma_2(G_1) \neq G_1$. La prueba en el caso contrario es análoga. Por lo tanto, es fácil comprobar que $j(1) \neq j(2)$, $j(2) = j(3)$, $j(3) \neq j(4)$, $j(4) = j(5)$ y $j(5) \neq j(6)$, puesto que por la condición 2) se tiene que $\gamma_2(G_1) = G_k$ para algún $k \in \{2, \ldots, p\}$. Como $\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4\rho_5\rho_6 = 1$, la palabra ha de poder reducirse, y debido a que cualquier elemento de $G_j \backslash H$ no tiene relaciones con cualquier otro elemento de $G_r \backslash H$ en G, pues las únicas relaciones que comparten son a través de los elementos de H, se tiene que la única posibilidad de que esa palabra pueda reducirse es que $\rho_2\rho_3 \in H$ o $\rho_4\rho_5 \in H$, pues de no pertenecer a H estos elementos quedarían en el $G_j \backslash H$ en el que estén y la palabra seguiría sin poder reducirse.

Si $\rho_2\rho_3 \in H$ significa que existe un $h_1 \in H$ tal que

$$h_1 = \rho_2\rho_3 = (\gamma_2(g))^{-1} (\gamma_2 \circ \gamma_1)(g) = \gamma_2 \left(g^{-1}\gamma_1(g)\right).$$

Tomemos $h = \gamma_2(h_1) \in H$, entonces

$$h = \gamma_2(h_1) = \gamma_2^2 \left(g^{-1}\gamma_1(g)\right) = g^{-1}\gamma_1(g).$$

Supongamos ahora que $\rho_4\rho_5 \in H$. Como antes, esto significa que existe un $h_2 \in H$ tal que

$$h_2 = \rho_4\rho_5 = ((\gamma_2 \circ \gamma_1 \circ \gamma_2)(g))^{-1} (\gamma_1 \circ \gamma_2)(g).$$

Por la condición 1) sabemos que $\gamma_2 \circ \gamma_1 \circ \gamma_2 = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1$, por lo que

$$h_2 = \rho_4\rho_5 = ((\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1)(g))^{-1} (\gamma_1 \circ \gamma_2)(g) = (\gamma_1 \circ \gamma_2) \left((\gamma_1(g))^{-1} g\right).$$

Tomemos $h = ((\gamma_2 \circ \gamma_1)(h_2))^{-1}$, entonces

$$h = ((\gamma_2 \circ \gamma_1)(h_2))^{-1} = \left((\gamma_2 \circ \gamma_1^2 \circ \gamma_2) \left((\gamma_1(g))^{-1} g\right)\right)^{-1} = g^{-1}\gamma_1(g).$$

De nuevo hemos usado que $\gamma_i^2 = \mathrm{id}_G$ para todo $i \in \{1, 2\}$, que es la condición 1). En cualquier caso, existe un $h \in H$ tal que $h = g^{-1}\gamma_1(g)$. Notemos que

$$\gamma_1(h) = (\gamma_1(g))^{-1} g = \left(g^{-1}\gamma_1(g)\right)^{-1} = h^{-1},$$

por lo que por la condición 5) existe un $\delta \in H$ tal que $h = \delta\,(\gamma_1(\delta))^{-1}$. Tomemos $g' = g\delta$, $g'' = 1$ y $\beta = \delta^{-1}$. Entonces se tiene que $g = g\delta\delta^{-1} = g'\beta g''$, que

$$\gamma_1(g') = \gamma_1(g\delta) = \gamma_1(g)\gamma_1(\delta) = gh\gamma_1(\delta) = \delta\,(\gamma_1(\delta))^{-1}\gamma_1(\delta) = g\delta = g',$$

que $\gamma_2(g'') = \gamma_2(1) = 1 = g''$ y que $\beta \in H$, pues $\delta \in H$.

Probado el caso base, supongamos que $l \geqslant 2$ y que la hipótesis de inducción es cierta. Sea $\widetilde{g} = \alpha_1 \cdots \alpha_{l-1}$, entonces $g = \widetilde{g}\alpha_l$. Como antes, para aliviar la notación sea

$$\rho_1 = \widetilde{g}, \quad \rho_2 = \alpha_l, \quad \rho_3 = (\gamma_2(\alpha_l))^{-1}, \quad \rho_4 = (\gamma_2(\widetilde{g}))^{-1}, \quad \rho_5 = (\gamma_2 \circ \gamma_1)(\widetilde{g}), \quad \rho_6 = (\gamma_2 \circ \gamma_1)(\alpha_l),$$

$$\rho_7 = \left((\gamma_2 \circ \gamma_1 \circ \gamma_2)(\alpha_l)\right)^{-1}, \quad \rho_8 = \left((\gamma_2 \circ \gamma_1 \circ \gamma_2)(\widetilde{g})\right)^{-1}, \quad \rho_9 = (\gamma_1 \circ \gamma_2)(\widetilde{g}),$$
$$\rho_{10} = (\gamma_1 \circ \gamma_2)(\alpha_l), \quad \rho_{11} = (\gamma_1(\alpha_l))^{-1} \quad \text{y} \quad \rho_{12} = (\gamma_1(\widetilde{g}))^{-1}.$$

Entonces, debido a que g cumple la ecuación del enunciado por hipótesis, se tiene que

$$\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4\rho_5\rho_6\rho_7\rho_8\rho_9\rho_{10}\rho_{11}\rho_{12} = 1.$$

Siguiendo un razonamiento análogo a los párrafos anteriores se tiene o que $\alpha_l\left(\gamma_2(\alpha_l)\right)^{-1} \in H$ o que $(\gamma_1(\alpha_l))^{-1}\alpha_l \in H$. Supongamos que $\alpha_l\left(\gamma_2(\alpha_l)\right)^{-1} \in H$, pues el otro caso se prueba de forma similar. Entonces existe un $h \in H$ tal que $\alpha_l\left(\gamma_2(\alpha_l)\right)^{-1} = h$. Notemos que

$$\gamma_2(h) = \gamma_2\left(\alpha_l\left(\gamma_2(\alpha_l)\right)^{-1}\right) = \gamma_2(\alpha_l)\alpha_l^{-1} = \left(\alpha_l\left(\gamma_2(\alpha_l)\right)^{-1}\right)^{-1} = h^{-1}.$$

Por lo tanto, gracias a la condición 5) sabemos que existe $\delta \in H$ tal que $h = \delta^{-1}\gamma_2(\delta)$. Tomemos $\alpha_l' = 1$, $\alpha_l'' = \delta\alpha_l$ y $\beta_1 = \widetilde{g}\delta^{-1}$. Entonces

$$g = \widetilde{g}\alpha_l = \widetilde{g}\delta^{-1}\delta\alpha_l = \alpha_l'\beta_1\alpha_l'',$$

y además $\gamma_1(\alpha_l') = \gamma_1(1) = 1 = \alpha_l'$ y

$$\gamma_2(\alpha_l'') = \gamma_2(\delta\alpha_l) = \gamma_2(\delta)\gamma_2(\alpha_l) = \delta h\gamma_2(\alpha_l) = \delta\alpha_l\left(\gamma_2(\alpha_l)\right)^{-1}\gamma_2(\alpha_l) = \delta\alpha_l = \alpha_l''.$$

Como $g = \alpha_l'\beta_1\alpha_l''$, $\gamma_1(\alpha_l') = \alpha_l'$ y $\gamma_2(\alpha_l'') = \alpha_l''$, como se probó al comienzo de la demostración, β_1 satisface la ecuación del enunciado. Por lo tanto, haciendo uso de la hipótesis de inducción, existen $\vartheta', \vartheta'' \in G$ y $\beta \in H$ tal que $\beta_1 = \vartheta'\beta\vartheta''$, $\gamma_1(\vartheta') = \vartheta'$, $\gamma_2(\vartheta'') = \vartheta''$ y β cumple la ecuación del enunciado. Por lo tanto, tomando $g' = \alpha_l'\vartheta'$ y $g'' = \vartheta''\alpha_l''$ se tiene que

$$g = \alpha_l'\beta_1\alpha_l'' = \alpha_l'\vartheta'\beta\vartheta''\alpha_l'' = g'\beta g''.$$

Además $\gamma_1(g') = g'$, $\gamma_2(g'') = g''$ y β cumple la ecuación del enunciado por construcción. Esto concluye la prueba. ☐

Lema 2.3.9 (Lema 3.12 [4])**.** *Dado $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 3$, sean $s_1, s_2 \in \mathfrak{S}_n$ y $X \subset \mathcal{S}$ invariante por la acción de s_1 y s_2. Sea $g \in KB_n[\Gamma_X]$ tal que*

$$g\left(s_2(g)\right)^{-1}(s_2s_1)(g)\left((s_2s_1s_2)(g)\right)^{-1}(s_1s_2)(g)\left(s_1(g)\right)^{-1} = 1.$$

Entonces existen $g', g'' \in KB_n[\Gamma_X]$ tal que $s_1(g') = g'$, $s_2(g'') = g''$ y $g = g'g''$.

Demostración. Para $k \in \{4, \ldots, n\}$ sea $\mathcal{U}_k = \{\delta_{ij} \in X : (i,j) \in \{1,2,3\} \times \{4, \ldots, k\}\}$. Tomemos también $\mathcal{U}_3 = X$. Veamos por inducción en k que existen $g', g'' \in KB_n[\Gamma_X]$ y $\beta \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}_k}]$ tal que $g = g'\beta g''$, $s_1(g') = g'$, $s_2(g'') = g''$ y con β satisfaciendo la ecuación del enunciado.

Si $k = 3$, como $\mathcal{U}_3 = X$, tomamos $\beta = g$ y $g' = g'' = 1$ y se cumple por hipótesis. Tomemos $k \in \{4, \ldots, n\}$ y supongamos que se cumple la hipótesis de inducción, esto es, existen $g_1', g_1'' \in KB_n[\Gamma_X]$ y $\beta_1 \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}_{k-1}}]$ tal que $g = g_1'\beta_1 g_1''$, $s_1(g_1') = g_1'$, $s_2(g_1'') = g_1''$ y β_1 cumple la ecuación del enunciado. Si $\mathcal{U}_{k-1} = \mathcal{U}_k$ no hay nada que probar. En caso contrario, como $\mathcal{U}_{k-1}$ es invariante por la acción de s_1 y de s_2, se tiene que $\mathcal{U}_{k-1} = \mathcal{U}_k \sqcup \{\delta_{1k}, \delta_{2k}, \delta_{3k}\}$. Tomemos

$$G_j := KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}_k \cup \{\delta_{jk}\}}]$$

para todo $j \in \{1,2,3\}$, y $H = KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}_k}]$. Haciendo uso reiterado del Lema 2.3.2 vemos que

$$KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}_{k-1}}] \cong G_1 *_H G_2 *_H G_3,$$

y podemos apreciar que

$$s_1(G_1) = G_2, \quad s_1(G_2) = G_1, \quad s_1(G_3) = G_3, \quad s_2(G_1) = G_1, \quad s_2(G_2) = G_3 \quad \text{y} \quad s_2(G_3) = G_2.$$

Además $s_1(H) = H = s_2(H)$, puesto que $\mathcal{U}_k$ es invariante por la acción de s_1 y s_2, y por el Lema 2.3.7 sabemos que tanto para s_1 como para s_2 existe un $h \in H$ tal que $s_i(h) = h^{-1}$ y $\delta \in H$ tal que $h = \delta\,(s_i(\delta))^{-1}$ para todo $i \in \{1,2\}$. Vemos que se cumplen todas las hipótesis del Lema 2.3.8, por lo que existen $g_2', g_2'' \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}_{k-1}}]$ y $\beta_2 \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}_k}]$ tal que $\beta_1 = g_2'\beta_2 g_2''$, $s_1(g_2') = g_2'$, $s_2(g_2'') = g_2''$ y β_2 satisface la ecuación del enunciado. Tomemos $g' = g_1'g_2'$, $g'' = g_1''g_2''$ y $\beta = \beta_2$, entonces

$$g = g_1'\beta_1 g_1'' = g_1'g_2'\beta_2 g_1''g_2'' = g'\beta g''.$$

Además $s_1(g') = s_1(g_1')s_1(g_2') = g_1'g_2' = g'$ y $s_2(g'') = s_2(g_1'')s_2(g_2'') = g_1''g_2'' = g''$.

Consideremos ahora los conjuntos $\mathcal{V}_k = \{\delta_{ij} \in \mathcal{U}_n : (i,j) \notin \{4,\ldots,k\} \times \{1,2,3\}\}$ donde $k \in \{4,\ldots,k\}$, y tomemos $\mathcal{V}_3 = \mathcal{U}_n$. Veamos por inducción en k que existen $g', g'' \in KB_n[\Gamma_X]$ y $\beta \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_k}]$ tal que $g = g'\beta g''$, $s_1(g') = g'$, $s_2(g'') = g''$ y β satisface la ecuación del enunciado. Si $k = 3$ se tiene que $\mathcal{V}_3 = \mathcal{U}_n$, por lo que es cierto por lo anterior. Supongamos ahora que $k \geqslant 4$ y que se cumple la hipótesis de inducción, esto es, que existen $g_1', g_1'' \in KB_n[\Gamma_X]$ y $\beta_1 \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_{k-1}}]$ tal que $g = g_1'\beta_1 g_1''$, $s_1(g_1') = g_1'$, $s_2(g_1'') = g_1''$ y β_1 cumple la ecuación del enunciado. Si $\mathcal{V}_k = \mathcal{V}_{k-1}$ no hay nada que probar. En caso contrario, debido a que $\mathcal{V}_{k-1}$ es invariante bajo la acción de s_1 y s_2 se tiene que $\mathcal{V}_{k-1} = \mathcal{V}_k \sqcup \{\delta_{k1}, \delta_{k2}, \delta_{k3}\}$. Redefinimos

$$G_j := KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_k \cup \{\delta_{kj}\}}]$$

con $j \in \{1,2,3\}$, y $H = KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_k}]$. Como antes, usando de forma reiterada el Lema 2.3.2 se deduce que

$$KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_{k-1}}] \cong G_1 *_H G_2 *_H G_3,$$

y vemos que

$$s_1(G_1) = G_2, \quad s_1(G_2) = G_1, \quad s_1(G_3) = G_3, \quad s_2(G_1) = G_1, \quad s_2(G_2) = G_3 \quad \text{y} \quad s_2(G_3) = G_2.$$

Además $s_1(H) = H = s_2(H)$, puesto que $\mathcal{V}_k$ es invariante por la acción de s_1 y s_2, y por el Lema 2.3.7 sabemos que tanto para s_1 como para s_2 existe un $h \in H$ tal que $s_i(h) = h^{-1}$ y $\delta \in H$ tal que $h = \delta\,(s_i(\delta))^{-1}$ para todo $i \in \{1,2\}$. Vemos que se cumplen todas las hipótesis del Lema 2.3.8, por lo que existen $g_2', g_2'' \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}_{k-1}}]$ y $\beta_2 \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}_k}]$ tal que $\beta_1 = g_2'\beta_2 g_2''$, $s_1(g_2') = g_2'$, $s_2(g_2'') = g_2''$ y β_2 satisface la ecuación del enunciado. Tomemos $g' = g_1'g_2'$, $g'' = g_1''g_2''$ y $\beta = \beta_2$, entonces $g = g = g'\beta g''$, $s_1(g') = g'$ y $s_2(g'') = g''$.

Definimos los conjuntos

$$\mathcal{W}_1 := \{\delta_{ij} \in X : (i,j) \in \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{W}_2 := \{\delta_{ij} \in X : (i,j) \in \{4,\ldots,n\} \times \{k,\ldots,n\}\}.$$

Notemos que $\mathcal{V}_n = \mathcal{W}_1 \sqcup \mathcal{W}_2$, por lo que por las relaciones de KB_n, los elementos de $KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_1}]$ con los de $KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_2}]$ conmutan. Por lo tanto

$$KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_n}] \cong KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_1}] \times KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_2}],$$

y además para todo $w \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_2}]$ se tiene que $s_1(w) = s_2(w) = w$. Por lo anterior, sabemos que existen $g_1', g_2' \in KB_n[\Gamma_X]$ y $\beta_1 \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_n}]$ tal que $g = g_1'\beta_1 g_1''$, $s_1(g_1') = g_1'$, $s_2(g_1'') = g_1''$ y β_1 cumple la ecuación del enunciado. Tomemos $\beta \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_1}]$ y $g_2'' \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_2}]$ tal que $\beta_1 = \beta g_2''$. Notemos que estos elementos siempre los podemos encontrar, puesto que hemos expresado $KB_n[\Gamma_{\mathcal{V}_n}]$ como producto directo de estos dos subgrupos. Tomemos $g' = g_1'$ y $g'' = g_2''g_1''$. Entonces

$$g = g_1'\beta_1 g_1'' = g_1'\beta g_2''g_1'' = g'\beta g'',$$

y además $s_1(g') = s_1(g_1') = g_1' = g'$ y $s_2(g'') = s_2(g_2'')s_2(g_1'') = g_2''g_1'' = g''$. Es más, debido a que β_1 satisface la ecuación del enunciado y g_2'' queda fijado por s_2, se tiene que:

$$1 = \beta_1\,(s_2(\beta_1))^{-1}\,(s_2s_1)(\beta_1)\,((s_2s_1s_2)(\beta_1))^{-1}\,(s_1s_2)(\beta_1)\,(s_1(\beta_1))^{-1} =$$

$$= \beta g_2''\left(s_2(\beta g_2'')\right)^{-1}(s_2s_1)(\beta g_2'')\left((s_2s_1s_2)(\beta g_2'')\right)^{-1}(s_1s_2)(\beta g_2'')\left(s_1(\beta g_2'')\right)^{-1} =$$

$$= \beta\,(s_2(\beta))^{-1}\,(s_2s_1)(\beta)\,((s_2s_1s_2)(\beta))^{-1}\,(s_1s_2)(\beta)\,(s_1(\beta))^{-1}\,,$$

por lo que β cumple la ecuación del enunciado.

Para concluir, consideremos

$$\mathcal{W}_1^1 = \{\delta_{ij} \in X : (i,j) \in \{(1,2),(2,3),(3,1)\}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{W}_1^2 = \{\delta_{ij} \in X : (i,j) \in \{(2,1),(3,2),(1,3)\}\}$$

y definimos $G_i := KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_1^i}]$ con $i \in \{1,2\}$. Debido a que $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_1^1 \sqcup \mathcal{W}_1^2$, usando el Lema 2.3.2 se tiene que

$$KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_1}] \cong G_1 * G_2.$$

Además $s_1(G_1) = s_2(G_1) = G_2$ y $s_1(G_2) = s_2(G_2) = G_1$. Haciendo uso del Lema 2.3.8 sabemos que existen $\beta', \beta'' \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_1}]$ tal que $\beta = \beta_1\beta_2$, $s_1(\beta') = \beta'$ y $s_2(\beta'') = \beta''$, puesto que en este caso $H = \{1\}$. Ahora, haciendo uso del Lema 2.3.3 y usando la notación de este, sabemos que tanto $KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_1}]^{s_1}$ como $KB_n[\Gamma_{\mathcal{W}_1}]^{s_2}$ están contenidos en $H = \{1\}$, por lo que su único punto fijo es el elemento neutro, esto es, $\beta' = \beta'' = 1$, y por lo tanto, $\beta = 1$. Deducimos que $g = g'g''$, que es lo que queríamos probar. □

2.3.2. Del grupo de trenzas virtuales al grupo simétrico

Una vez dados los resultados anteriores estamos preparados para clasificar los homomorfismos entre los grupos de trenzas virtuales y los grupos simétricos. Antes de dar el resultado de esta sección, es necesario entender el comportamiento de los homomorfismos entre los grupos simétricos.

Proposición 2.3.1. *Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n \geqslant 5$, $m \geqslant 2$ y $n \geqslant m$, y sea $\varphi : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathfrak{S}_m$ un homomorfismo. Entonces, salvo conjugación, φ cumple alguna de las siguientes posibilidades:*

1. *φ es abeliano.*
2. *$n = m$ y $\varphi = id_{\mathfrak{S}_n}$.*
3. *$n = m = 6$ y $\varphi = \nu_6$, donde ν_6 es el automorfismo exótico descrito en la prueba del Teorema B.2.1.*

Demostración. En las condiciones del enunciado, sea $\varphi : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathfrak{S}_m$ un homomorfismo. Como $n \geqslant 5$, es bien conocido que los únicos subgrupos normales de $\mathfrak{S}_n$ son $\{1\}$, $\mathfrak{S}_n$ y A_n, donde A_n es el grupo alternado, por lo que $\ker(\varphi) \in \{\{1\}, A_n, \mathfrak{S}_n\}$.

- Si $\ker(\varphi) = \{1\}$ se tiene que φ es inyectiva, y como $n \geqslant m$, esto solo puede ocurrir cuando $n = m$. Haciendo uso del Primer Teorema de Isomorfía, se deduce que

  $$\mathrm{Im}(\varphi) \cong \mathfrak{S}_n / \ker(\varphi) \cong \mathfrak{S}_n,$$

  por lo que φ es un automorfismo. Gracias a la Proposición B.2.2 y al Teorema B.2.1 sabemos que si $n \neq 6$, entonces $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n) \cong \mathrm{Inn}(\mathfrak{S}_n) \cong \mathfrak{S}_n$, por lo que φ será un homomorfismo conjugado de $\mathrm{id}_{\mathfrak{S}_n}$. En caso de ser $n = 6$ se tiene que φ será conjugado de $\mathrm{id}_{\mathfrak{S}_n}$ o de $\varphi = \nu_6$, gracias de nuevo al Teorema B.2.1.

- Supongamos que $\ker(\varphi) = A_n$. De nuevo, haciendo uso del Primer Teorema de Isomorfía sabemos que

  $$\mathrm{Im}(\varphi) \cong \mathfrak{S}_n / \ker(\varphi) \cong \mathfrak{S}_n / A_n \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

  por lo que φ es abeliano.

- Por último, supongamos que $\ker(\varphi) = \mathfrak{S}_n$. Esto solo puede ocurrir si $\varphi = 1$, por lo que $\mathrm{Im}(\varphi) = \{1\}$, y por ende, φ es abeliano.

□

Teorema 2.3.2 (Teorema 2.1 [4])**.** *Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n \geqslant 5$, $m \geqslant 2$ y $n \geqslant m$, y sea $\psi : VB_n \longrightarrow \mathfrak{S}_m$ un homomorfismo. Entonces, salvo conjugación, se tiene una de las siguientes posibilidades:*

1. ψ es abeliano.

2. $n = m$ y $\psi \in \{\pi_K, \pi_P\}$.

3. $n = m = 6$ y $\psi \in \{\nu_6 \circ \pi_K, \nu_6 \circ \pi_P\}$.

Donde π_k y π_P son los homomorfismos sobreyectivos descritos en la Sección 2.1.

Demostración. En las condiciones del enunciado, sea $\psi : VB_n \longrightarrow \mathfrak{S}_m$ un homomorfismo. Consideremos $\iota : \mathfrak{S}_n \longrightarrow VB_n$ la sección tal que $\iota(s_k) = \tau_k$ para todo $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Consideremos el homomorfismo $\psi \circ \iota : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathfrak{S}_m$. Haciendo uso de la Proposición 2.3.1 sabemos que $\psi \circ \iota$ o es abeliano, o $n = m$ y $\psi \circ \iota$ es conjugado de la identidad o $n = m = 6$ y $\psi \circ \iota$ es conjugado de ν_6.

- Supongamos que $\psi \circ \iota$ es abeliano. Gracias al Lema 2.3.1 sabemos que $\mathrm{Im}(\psi \circ \iota) \leqslant \mathfrak{S}_m^{ab} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Por lo tanto, existe un $w_1 \in \mathfrak{S}_m$ tal que $w_1 = (\psi \circ \iota)(s_i) = \psi(\tau_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Además se tiene que $w_1^2 = 1$ por lo anterior. Sea $w_2 = \psi(\sigma_1)$. Consideremos la relación $\tau_i \tau_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-2\}$, entonces, aplicando ψ se tiene que

  $$\psi(\tau_i \tau_{i+1} \sigma_i) = w_1^2 \psi(\sigma_i) = \psi(\sigma_i) = \psi(\sigma_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}) = \psi(\sigma_{i+1}) w_1^2 = \psi(\sigma_{i+1}).$$

  Por lo tanto, para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ se tiene que $w_2 = \psi(\sigma_i)$. Por último, como $\tau_1 \sigma_3 = \sigma_3 \tau_1$ se tiene que $w_1 w_2 = w_2 w_1$, por lo que ψ es abeliano.

- Supongamos que $n = m$ y $\psi \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_n}$. Entonces, para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ se tiene que $(\psi \circ \iota)(s_i) = \psi(\tau_i) = s_i$. Gracias a la relación $\sigma_1 \tau_i = \tau_i \sigma_1$ para todo $i \in \{3, \ldots, n-1\}$ se deduce que $\psi(\sigma_1)$ pertenece al centralizador de $H := \langle s_3, \ldots, s_{n-1} \rangle_{\mathfrak{S}_n}$, esto es, al conjunto de elementos de $\mathfrak{S}_n$ que conmutan con todos los posibles elementos del subgrupo H. Llamemos $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}_n}(H)$ al centralizador de H en $\mathfrak{S}_n$. Si $g \in \mathcal{C}_{\mathfrak{S}_n}(H)$, entonces para todo elemento de $w \in H$ se tiene que $gw = wg$ por definición, y como todo elemento de H está generado por $s_3, \ldots, s_{n-1}$, nos basta comprobar que g conmuta con los generadores. Sea $g = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$ un elemento de $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}_n}(H)$ escrito de forma reducida. Entonces, para todo $r \in \{3, \ldots, n-1\}$ se tiene que $g s_r = s_r g$, o lo que es lo mismo

  $$s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k} s_r = s_r s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}.$$

  Para que esto ocurra, se ha de tener que $s_{i_k} s_r = s_r s_{i_k}$, por lo que $i_k \notin \{1, \ldots, r-2, r+2, \ldots, n-1\}$. Como esto ha de ser cierto para todo $r \in \{3, \ldots, n-1\}$ se deduce que $i_k = 1$. Por lo tanto, se concluye que $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}_n}(H) = \langle s_1 \rangle_{\mathfrak{S}_n}$.

  Debido a que $\psi(\sigma_1) \in \mathcal{C}_{\mathfrak{S}_n}(H)$ se tiene que $\psi(\sigma_1) \in \{1, s_1\}$.

  - Si $\psi(\sigma_1) = 1$, debido a que en VB_n se tiene la relación $\tau_i \tau_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}$, o de forma equivalente, $\tau_i \tau_{i+1} \sigma_i \tau_{i+1} \tau_i = \sigma_{i+1}$, observamos que todos los σ_i son conjugados. Por lo tanto, $\psi(\sigma_i) = 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, por lo que $\psi = \pi_K$.
  - Supongamos que $\psi(\sigma_1) = s_1$. Veamos por inducción en i que $\psi(\sigma_i) = s_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Si $i = 1$ se tiene por hipótesis. Supongamos que es cierto hasta algún $i \geqslant 2$, entonces como $\tau_{i-1} \tau_i \sigma_{i-1} = \sigma_i \tau_{i-1} \tau_i$, se tiene que $\sigma_i = \tau_{i-1} \tau_i \sigma_{i-1} \tau_i \tau_{i-1}$ se deduce que

    $$\psi(\sigma_i) = \psi(\tau_{i-1}) \psi(\tau_i) \psi(\sigma_{i-1}) \psi(\tau_i) \psi(\tau_{i-1}) = s_{i-1} s_i s_{i-1} s_i s_{i-1} = s_i.$$

    Deducimos que $\psi(\tau_i) = \psi(\sigma_i) = s_i$, y por lo tanto, $\psi = \pi_P$.

- Por último, supongamos que $n = m = 6$ y que $\psi \circ \iota = \nu_6$. Entonces, por ser ν_6 automorfismo se tiene que $\nu_6^{-1} \circ \psi \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_6}$. Gracias al apartado anterior sabemos que $\nu_6^{-1} \circ \psi \in \{\pi_K, \pi_P\}$. Se deduce así que $\psi \in \{\nu_6 \circ \pi_K, \nu_6 \circ \pi_P\}$.

$\square$

2.3.3. Del grupo simétrico al grupo de trenzas virtuales

Procedemos a dar clasificar los homomorfismos entre los grupos simétricos y los grupos de trenzas virtuales. Para ello, nos apoyaremos en el Teorema 2.3.2 y en el siguiente lema.

Lema 2.3.10 (Lema 5.1 [4]). *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 3$, y sea $\varphi : \mathfrak{S}_n \longrightarrow VB_n$ un homomorfismo tal que $\pi_K \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_n}$. Entonces φ es un homomorfismo conjugado de ι.*

Demostración. Partimos de que $\pi_k \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_n}$, por lo que para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ha de existir un $\alpha_i \in KB_n$ tal que $\varphi(s_i) = \alpha_i \tau_i$. Probemos por inducción en k que existe un homomorfismo $\widetilde{\varphi} : \mathfrak{S}_n \longrightarrow VB_n$ conjugado con φ tal que $\pi_K \circ \widetilde{\varphi} = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_n}$ y $\widetilde{\varphi}(s_i) = \tau_i$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, esto es, se comporta como ι para estos elementos. En lo que sigue, denotemos por $\kappa_g : VB_n \longrightarrow VB_n$ al homomorfismo de conjugación por g tal que $\kappa_g(h) = ghg^{-1}$.

Supongamos que $k = 1$. Entonces

$$1 = (\varphi(s_1))^2 = \alpha_1 \tau_1 \alpha_1 \tau_1 = \alpha_1 \underbrace{\tau_1 \alpha_1 \tau_1}_{=s_1(\alpha_1)} \tau_1^2 = \alpha_1 s_1(\alpha_1).$$

Por lo que $s_1(\alpha_1) = \alpha_1^{-1}$. Gracias al Lema 2.3.7 sabemos que existe un elemento $\beta_1 \in KB_n$ tal que $\alpha_1 = \beta_1 (s_1(\beta_1))^{-1}$. Por lo tanto

$$\varphi(s_1) = \alpha_1 \tau_1 = \beta_1 (s_1(\beta_1))^{-1} \tau_1 = \beta_1 \tau_1 \beta_1^{-1} \tau_1^2 = \beta_1 \tau_1 \beta_1^{-1}.$$

Definamos $\widetilde{\varphi} := \kappa_{\beta_1^{-1}} \circ \varphi$. Entonces $\widetilde{\varphi}$ es un homomorfismo conjugado de φ, $\widetilde{\varphi}(s_1) = \tau_1$ y $\pi_k \circ \widetilde{\varphi} = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_n}$, puesto que $\beta_1 \in KB_n$.

Sea ahora $k = 2$. Podemos tomar $\varphi(s_1) = \tau_1$ gracias al párrafo anterior. Como en $\mathfrak{S}_n$ se tiene la relación $s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$, se deduce que

$$\varphi(s_1)\varphi(s_2)\varphi(s_1) = \tau_1 \alpha_2 \tau_2 \tau_1 = \varphi(s_2)\varphi(s_1)\varphi(s_2) = \alpha_2 \tau_2 \tau_1 \alpha_2 \tau_2.$$

De las relaciones de $\mathfrak{S}_n$ se tiene que $\tau_2 \tau_1 = \tau_1 \tau_2 \tau_1 \tau_2$, por lo que

$$\tau_1 \alpha_2 \tau_2 \tau_1 = \tau_1 \alpha_2 \tau_1 \tau_2 \tau_1 \tau_2 = s_1(\alpha_2) \tau_2 \tau_1 \tau_2.$$

Entonces, como $\tau_1 \alpha_2 \tau_2 \tau_1 = \alpha_2 \tau_2 \tau_1 \alpha_2 \tau_2$, multiplicando por $\tau_2 \tau_1 \tau_2$ a la derecha a ambos lados de la igualdad se deduce que

$$s_1(\alpha_2) = \alpha_2 \tau_2 \tau_1 \alpha_2 \tau_2^2 \tau_1 \tau_2 = \alpha_2 \tau_2 \tau_1 \alpha_2 \tau_1 \tau_2 = \alpha_1 (s_2 s_1)(\alpha_2).$$

Por otro lado se tiene que $(\varphi(s_2))^2 = 1 = \alpha_2 \tau_2 \alpha_2 \tau_2 = \alpha_2 s_2(\alpha_2)$, por lo haciendo uso de nuevo del Lema 2.3.7 sabemos que existe un elemento $\beta_2 \in KB_n$ tal que $\alpha_2 = \beta_2 \left(s_2(\beta_2)\right)^{-1}$. Sustituyendo en la igualdad $s_1(\alpha_2) = \alpha_1 (s_2 s_1)(\alpha_2)$ se obtiene la expresión

$$s_1 \left(\beta_2 \left(s_2(\beta_2)\right)^{-1} \right) = \beta_2 \left(s_2(\beta_2)\right)^{-1} (s_2 s_1) \left(\beta_2 \left(s_2(\beta_2)\right)^{-1} \right),$$

o de forma equivalente

$$\beta_2 (s_2(\beta_2))^{-1} (s_2 s_1)(\beta_2) ((s_2 s_1 s_2)(\beta))^{-1} (s_1 s_2)(\beta_2) (s_1(\beta_2))^{-1} = 1.$$

Podemos observar que β_2 cumple todos los requisitos del Lema 2.3.9, por lo que existen $\beta_2', \beta_2'' \in KB_n$ tales que $\beta_2 = \beta_2' \beta_2''$, $s_1(\beta_2') = \beta_2'$ y $s_2(\beta_2'') = \beta_2''$. Por lo tanto

$$\varphi(s_2) = \alpha_2 \tau_2 = \beta_2 \left(s_2(\beta_2)\right)^{-1} \tau_2 = \beta_2' \beta_2'' \left(s_2(\beta_2' \beta_2'')\right)^{-1} \tau_2 = \beta_2' \beta_2'' \left(s_2(\beta_2'')\right)^{-1} \left(s_2(\beta_2')\right)^{-1} \tau_2 =$$

$$= \beta_2' \beta_2'' (\beta_2'')^{-1} \left(s_2(\beta_2')\right)^{-1} \tau_2 = \beta_2' \tau_2 (\beta_2')^{-1} \tau_2^2 = \beta_2' \tau_2 (\beta_2')^{-1}.$$

Definamos $\widetilde{\varphi} = \kappa_{(\beta_2')^{-1}} \circ \varphi$, entonces $\widetilde{\varphi}$ es un homomorfismo conjugado de φ, $\pi_k \circ \widetilde{\varphi} = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_n}$, puesto que $\beta_2' \in KB_n$, $\widetilde{\varphi}(s_2) = \tau_2$ por construcción y

$$\widetilde{\varphi}(s_1) = (\beta_2')^{-1}\varphi(s_1)\beta_2' = (\beta_2')^{-1}\tau_1\beta_2' = (\beta_2')^{-1}\tau_1\beta_2'\tau_1\tau_1 = (\beta_2')^{-1}s_1(\beta_2')\tau_1 = \tau_1,$$

puesto que $s_1(\beta_2') = \beta_2'$.

Supongamos que $k \geqslant 3$ y que $\varphi(s_i) = \tau_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Sea $l \in \{1, \ldots, k-2\}$. Debido a que $|k-l| \geqslant 2$ se tiene que $s_k s_l = s_l s_k$, por lo que

$$\alpha_k\tau_k\tau_l = \varphi(s_k)\varphi(s_l) = \varphi(s_l)\varphi(s_l) = \tau_l\alpha_k\tau_k.$$

Debido a que $\tau_l\tau_k = \tau_k\tau_l$, podemos reescribir la relación anterior como $\tau_l\alpha_k\tau_l = \alpha_k$, o de forma equivalente $s_l(\alpha_k) = \alpha_k$. Haciendo uso del Corolario 2.3.1 sabemos que $\alpha_k \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}_l}]$, donde

$$\mathcal{U}_l = \{\delta_{ij} \in \mathcal{S} : i, j \notin \{l, l+1\}\}.$$

Definimos el conjunto $\mathcal{S}_k := \{\delta_{ij}, \delta_{ji} \in \mathcal{S} : k \leqslant i < j \leqslant n\}$. Entonces, podemos apreciar que

$$\bigcap_{1 \leqslant l \leqslant k-2} \mathcal{U}_l = \mathcal{S}_k.$$

Haciendo uso del Teorema de Van der Lek (Teorema 1.3.1) sabemos que

$$\alpha_k \in \bigcap_{1 \leqslant l \leqslant k-2} KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}_l}] = KB_n\left[\bigcap_{1 \leqslant l \leqslant k-2} \Gamma_{\mathcal{U}_l}\right] = KB_n[\Gamma_{\mathcal{S}_k}].$$

Ahora, gracias a la relación $s_{k-1}s_ks_{k-1} = s_ks_{k-1}s_k$ se tiene que

$$\tau_{k-1}\alpha_k\tau_k\tau_{k-1} = \varphi(s_{k-1})\varphi(s_k)\varphi(s_{k-1}) = \varphi(s_k)\varphi(s_{k-1})\varphi(s_k) = \alpha_k\tau_k\tau_{k-1}\alpha_k\tau_k.$$

Manipulando la expresión de forma análoga a lo anterior se obtiene $s_{k-1}(\alpha_k) = \alpha_k(s_ks_{k-1})(\alpha_k)$. Por otro lado, como antes, de la relación $(\varphi(s_k))^2 = 1$ y gracias al Lema 2.3.7 sabemos que existe $\beta_k \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{S}_k}]$ tal que $\alpha_k = \beta_k(s_k(\beta_k))^{-1}$. Por lo tanto, sustituyendo esto en la igualdad $s_{k-1}(\alpha_k) = \alpha_k(s_ks_{k-1})(\alpha_k)$ se obtiene

$$s_{k-1}\left(\beta_k(s_k(\beta_k))^{-1}\right) = \beta_k(s_k(\beta_k))^{-1}(s_ks_{k-1})\left(\beta_k(s_k(\beta_k))^{-1}\right)),$$

o de forma equivalente

$$\beta_k(s_k(\beta_k))^{-1}(s_ks_{k-1})(\beta_k)((s_ks_{k-1}s_k)(\beta_k))^{-1}(s_{k-1}s_k)(\beta_k)(s_{k-1}(\beta_k))^{-1} = 1.$$

Cabe notar que tal cual no podemos usar el Lema 2.3.9, puesto que $\mathcal{S}_k$ no es invariante por la acción de s_{k-1}. Sin embargo, $\mathcal{S}_{k-1}$ sí lo es, y $\mathcal{S}_k \subset \mathcal{S}_{k-1}$, por lo que podemos aplicar dicho lema en este contexto. Por lo tanto, gracias al Lema 2.3.9 existen $\beta_k', \beta_k'' \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{S}_{k-1}}]$ tal que $\beta_k = \beta_k'\beta_k''$, $s_{k-1}(\beta_k') = \beta_k'$ y $s_k(\beta_k'') = \beta_k''$. En resumen, se tiene que

$$\begin{aligned}\varphi(s_k) = \alpha_k\tau_k = \beta_k(s_k(\beta_k))^{-1}\tau_k &= \beta_k'\beta_k''(s_k(\beta_k'\beta_k''))^{-1}\tau_k = \beta_k'\beta_k''(s_k(\beta_k''))^{-1}(s_k(\beta_k'))^{-1}\tau_k = \\ &= \beta_k'\beta_k''(\beta_k'')^{-1}(s_k(\beta_k'))^{-1}\tau_k = \beta_k'\tau_k(\beta_k')^{-1}\tau_k^2 = \beta_k'\tau_k(\beta_k')^{-1}.\end{aligned}$$

Si definimos $\widetilde{\varphi} = \kappa_{(\beta_k')^{-1}} \circ \varphi$, obtenemos un homomorfismo conjugado de φ tal que $\widetilde{\varphi}(s_k) = \tau_k$ y $\pi_K \circ \widetilde{\varphi} = \varphi$, pues $\beta_k' \in KB_n$.

Ahora, como $s_{k-1}(\beta_k') = \beta_k'$, gracias al Corolario 2.3.1 se tiene que $\beta_k' \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}_{k-1}}]$, usando la notación del párrafo anterior. Debido a que β_k' también pertenece a $KB_n[\Gamma_{\mathcal{S}_{k-1}}]$ y $\mathcal{S}_{k-1} \cap \mathcal{U}_{k-1} = \mathcal{S}_{k+1}$, usando el Teorema de Van der Lek (Teorema 1.3.1) se deduce que $\beta_k' \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{S}_{k+1}}]$. Debido a que $\mathcal{S}_{k+1}$ es invariante por la acción de s_i para todo $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, se deduce que, dado $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ se tiene que

$$\widetilde{\varphi}(s_i) = (\beta_k')^{-1}\varphi(s_i)\beta_k' = (\beta_k')^{-1}\tau_i\beta_k' = (\beta_k')^{-1}\tau_i\beta_k'\tau_i\tau_i = (\beta_k')^{-1}s_i(\beta_k')\tau_i = (\beta_k')^{-1}\beta_k'\tau_i = \tau_i.$$

Por inducción se tiene para todo $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. El caso $k = n-1$ termina la prueba. □

Teorema 2.3.3 (Teorema 2.2 [4]). *Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant 5$, $m \geqslant 2$ y $n \geqslant n$, y sea $\varphi : \mathfrak{S}_n \longrightarrow VB_m$ un homomorfismo. Entonces, salvo conjugación, se tiene una de las siguientes posibilidades:*

1. *φ es abeliano.*
2. *$n = m$ y $\varphi = \iota$.*
3. *$n = m = 6$ y $\varphi = \iota \circ \nu_6$.*

Demostración. En las condiciones del enunciado, consideremos $\varphi : \mathfrak{S}_n \longrightarrow VB_m$ un homomorfismo. Consideremos $\pi_k \circ \varphi : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathfrak{S}_m$. Entonces, gracias a la Proposición 2.3.1 sabemos que, salvo conjugación, $\pi_k \circ \varphi$ es abeliano, o $n = m$ y $\pi_k \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_n}$, o $n = m = 6$ y $\pi_k \circ \varphi = \nu_6$.

- Supongamos que $\pi_k \circ \varphi$ es abeliano. Gracias al Lema 2.3.1 sabemos que $\mathfrak{S}_m^{ab} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, por lo que $\mathrm{Im}(\pi_k \circ \varphi)$ ha de ser un subgrupo de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Por lo tanto, existe un $w \in \mathfrak{S}_m$ tal que $w^2 = 1$ y $(\pi_k \circ \varphi)(s_i) = w$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Sea $\beta_0 = \iota(w) \in VB_m$. Ahora, como $VB_n \cong KB_n \rtimes \mathfrak{S}_n$, para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ existe $\alpha_i \in KB_n$ tal que $\varphi(s_i) = \alpha_i \beta_0$. Notemos que, como $w^2 = 1$ se tiene que $\beta_0^2 = 1$. Por lo tanto, para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ se tiene que
$$1 = \varphi(s_i) = \alpha_i \beta_0 \alpha_i \beta_0,$$
por lo que multiplicando por $\beta_0 \alpha_i^{-1}$ a la derecha se tiene que $\alpha_i \beta_0 = \beta_0 \alpha_i^{-1}$. Sea $i \in \{2, \ldots, n-1\}$. Notemos que
$$\varphi(s_1 s_i) = \alpha_1 \beta_0 \alpha_i \beta_0 = \alpha_1 \beta_0^2 \alpha_i^{-1},$$
y como tanto α_1 como α_i son elementos de KB_m, se tiene que $\alpha_1 \alpha_i^{-1} \in KB_m$. Además, debido a que $s_1 s_i$ es de orden finito, se tiene que $\alpha_1 \alpha_i^{-1}$ también lo es. Haciendo uso del Lema 2.3.6 sabemos que KB_m es libre de torsión, por lo que $\alpha_1 \alpha_i^{-1} = 1$, esto es, $\alpha_1 = \alpha_i$ para todo $i \in \{2, \ldots, n-1\}$. Se deduce que $\varphi(s_i) = \alpha_1 \beta_0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, por lo que $\mathrm{Im}(\varphi)$ es un grupo cíclico, y por ende abeliano.
- Supongamos que $n = m$ y que $\pi_K \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_m}$. Entonces, gracias al Lema 2.3.10 sabemos que φ es un homomorfismo conjugado de ι.
- Supongamos que $n = m = 6$ y que $\pi_K \circ \varphi = \nu_6$. Debido a que ν_6 es automorfismo, existe ν_6^{-1}. Componiendo por ν_6^{-1} a la derecha se tiene que $\pi_K \circ \varphi \circ \nu_6^{-1} = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_6}$. Haciendo uso del Lema 2.3.10 sabemos que $\varphi \circ \nu_6^{-1}$ es un homomorfismo conjugado de ι. Sea $g \in VB_6$ tal que $\varphi \circ \nu_6^{-1} = \kappa_g \circ \iota$, donde κ_g denota el homomorfismo conjugación por g. Entonces $\varphi = \kappa_g \circ \iota \circ \nu_6$, por lo que φ es un homomorfismo conjugado de $\iota \circ \nu_6$.

□

2.3.4. Del grupo de trenzas virtuales en sí mismo

Ya estamos preparados para dar una clasificación de los homomorfismos entre los grupos de trenzas virtuales. Para ello, necesitaremos varios resultados, comenzando por un teorema de gran relevancia dentro de la combinatoria de los grupos de Artin[6], del cual no daremos la prueba, pues esta difiere del contexto de este trabajo. Pueden encontrarse todos los detalles en la referencia adjunta.

Teorema 2.3.4 (Teorema 1 [9]). *Sea Γ un grafo de Coxeter sobre el conjunto S. Para cada $s \in S$, sea $\eta_s \in \mathbb{N}$ tal que $\eta_s \geqslant 2$ y $q_s = s^{\eta_s}$, y consideremos $\Omega = \{q_s : s \in S\}$. Entonces el subgrupo de $A[\Gamma]$ generado por Ω admite una presentación*
$$\langle \Omega \mid q_s q_t = q_t q_s \text{ si } m_{st} = 2 \rangle .$$

Lema 2.3.11 (Lema 6.1 [4]). *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 3$ y tomemos $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ distintos dos a dos. Consideremos $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{Z}$. Entonces $\delta_{ij}^{\eta_1} \delta_{jk}^{\eta_2} = 1$ si y solo si $\eta_1 = \eta_2 = 0$. De forma similar, se tiene que $\delta_{ji}^{\eta_1} \delta_{kj}^{\eta_2} = 1$ si y solo si $\eta_1 = \eta_2 = 0$.*

[6]Este resultado no solo resuelve, sino que generaliza la conjetura de Tits sobre los subgrupos de un grupo de Artin generados por potencias de los generadores.

Demostración. Supongamos que $\eta_1 = \eta_2 = 0$, entonces es evidente que $\delta_{ij}^{\eta_1}\delta_{jk}^{\eta_2} = 1$. Supongamos ahora que $\delta_{ij}^{\eta_1}\delta_{jk}^{\eta_2} = 1$. Consideremos $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ y $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0, 1\}$ tal que $\eta_1 = 2t_1 + \varepsilon_1$ y $\eta_2 = 2t_2 + \varepsilon_2$. Recordemos que $\pi_P(\sigma_i) = \pi_P(\tau_i) = s_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Por lo tanto, si $i < j$ se tiene que

$$\pi_P(\delta_{ij}) = \pi_P(\tau_i)\pi_P(\tau_{i+1})\cdots\pi_P(\tau_{j-2})\pi_P(\sigma_{j-1})\pi_P(\tau_{j-2})\cdots\pi_P(\tau_{i+1})\pi_P(\tau_i) =$$
$$= s_i s_{i+1}\cdots s_{j-2}s_{j-1}s_{j-2}\cdots s_{i+1}s_i = (i, j),$$

y por otro lado

$$\pi_P(\delta_{ji}) = \pi_P(\tau_i)\pi_P(\tau_{i+1})\cdots\pi_P(\tau_{j-1})\pi_P(\sigma_{j-1})\pi_P(\tau_{j-1})\cdots\pi_P(\tau_{i+1})\pi_P(\tau_i) =$$
$$= s_i s_{i+1}\cdots s_{j-1}s_{j-1}s_{j-1}\cdots s_{i+1}s_i = s_i s_{i+1}\cdots s_{j-2}s_{j-1}s_{j-2}\cdots s_{i+1}s_i = (i, j).$$

Entonces

$$1 = \pi_P\left(\delta_{ij}^{\eta_1}\delta_{jk}^{\eta_2}\right) = (i, j)^{2t_1+\varepsilon_1}(j, k)^{2t_2+\varepsilon_2} = (i, j)^{\varepsilon_1}(j, k)^{\varepsilon_2},$$

puesto que las trasposiciones son de orden 2. Ahora, debido a que i, j y k son distintos dos a dos, se tiene que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Por lo tanto $\left(\delta_{ij}^2\right)^{t_1}\left(\delta_{jk}^2\right)^{t_2} = 1$. Notemos que, gracias a la presentación dada en el Teorema 2.2.1 sabemos que δ_{ij} y δ_{jk} tiene relación 3 en KB_n, el cual es un grupo de Artin. Sea $A_{ijk} = \{\delta_{ij}, \delta_{jk}\}$ y consideremos el subgrupo $KB_n[\Gamma_{A_{ijk}}]$ de KB_n. Haciendo uso del Teorema 2.3.4, sabemos que el subgrupo de $KB_n[\Gamma_{A_{ijk}}]$ generado por $\{\delta_{ij}^2, \delta_{jk}^2\}$ es el grupo libre de rango 2 generado por $\{\delta_{ij}^2, \delta_{jk}^2\}$. Por lo tanto, $\left(\delta_{ij}^2\right)^{t_1}\left(\delta_{jk}^2\right)^{t_2} = 1$ si y solo si $t_1 = t_2 = 0$. Deducimos que $\eta_1 = \eta_2 = 0$. El caso $\delta_{ij}^{\eta_1}\delta_{kj}^{\eta_2} = 1$ si y solo si $\eta_1 = \eta_2 = 0$ se deduce de forma análoga. □

Lema 2.3.12 (Lema 6.2 [4]). *Consideremos el automorfismo exótico ν_6 de $\mathfrak{S}_6$, y para cada $s_i \in \mathfrak{S}_6$ sea $u_i = \nu_6(s_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, 5\}$. Sea H un subgrupo de $\mathfrak{S}_6$ y definamos*

$$KB_6^H := \{g \in KB_6 : w(g) = g \text{ para todo } w \in H\}.$$

Entonces, si tomamos $H = \langle u_3, u_4, u_5\rangle_{\mathfrak{S}_6}$ se tiene que $KB_6^H = \{1\}$.

Demostración. Recordemos que

$$u_3 = \nu_6(s_3) = (1, 3)(2, 4)(5, 6), \quad u_4 = \nu_6(s_4) = (1, 2)(3, 5)(4, 6) \quad \text{y} \quad u_5 = \nu_6(s_5) = (2, 3)(1, 4)(5, 6).$$

Sea $U = \{u_3, u_4, u_5, u_3u_4u_3, u_4u_5u_4, u_3u_4u_5u_4u_3\}$. De forma explícita, estos elementos son los tres anteriores junto con

$$u_3u_4u_3 = (1, 6)(2, 5)(3, 4), \quad u_4u_5u_4 = (1, 5)(2, 6)(3, 4), \quad u_3u_4u_5u_4u_3 = (1, 2)(3, 6)(4, 5).$$

Sean i, j tal que $1 \leqslant i < j \leqslant 6$ y tomemos $\mathcal{U}_{ij} := \mathcal{S}\backslash\{\delta_{ij}, \delta_{ji}\}$. Si consideramos $\mathcal{U}'_{ij} = \mathcal{U}_{ij} \cup \{\delta_{ij}\}$ y $\mathcal{U}''_{ij} = \mathcal{U}_{ij} \cup \{\delta_{ji}\}$ se tiene que $\mathcal{U}'_{ij} \cup \mathcal{U}''_{ij} = \mathcal{S}$ y $\mathcal{U}'_{ij} \cap \mathcal{U}''_{ij} = \mathcal{U}_{ij}$. Haciendo uso del Lema 2.3.2 se tiene que

$$KB_6 \cong KB_6[\Gamma_{\mathcal{U}'_{ij}}] *_{KB_6[\Gamma_{\mathcal{U}_{ij}}]} KB_6[\Gamma_{\mathcal{U}''_{ij}}].$$

Por otro lado, es sencillo observar que para cualquier (i, j) existe al menos un elemento $w \in U$ que lo contiene como ciclo en su descomposición en ciclos disjuntos. Para dicho w se tiene que $w(\delta_{ij}) = \delta_{ji}$ y $w(\delta_{ji}) = \delta_{ij}$, por lo que $w(\mathcal{U}'_{ij}) = \mathcal{U}''_{ij}$ y $w(\mathcal{U}''_{ij}) = \mathcal{U}'_{ij}$. Haciendo uso del Lema 2.3.3 sabemos que $KB_6^w \subseteq KB_6[\Gamma_{\mathcal{U}_{ij}}]$, y por otro lado es evidente que $KB_6^H \subseteq KB_6^w$, pues $w \in H$.

Ahora, esto ha de ser cierto para cada par (i, j) tal que $1 \leqslant i < j \leqslant 6$, y

$$\bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant 6} \mathcal{U}_{ij} = \varnothing.$$

Haciendo uso del Teorema de Van der Lek (Teorema 1.3.1) y de lo anterior se deduce que

$$KB_6^H \subseteq \bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant 6} KB_6[\Gamma_{\mathcal{U}_{ij}}] \cong KB_6\left[\bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant 6} \Gamma_{\mathcal{U}_{ij}}\right] \cong KB_6[\varnothing] = \{1\},$$

por lo que $KB_6^H = \{1\}$. □

Lema 2.3.13. *Sean $\delta_{ij}, \delta_{ji} \in KB_n$ tal que $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Consideremos $F_2 = \langle x, y \mid \ \rangle$ el grupo libre de rango 2 generado por x, y y sea $\varphi_{ij} : F_2 \longrightarrow KB_n$ el homomorfismo dado por $\varphi_{ij}(x) = \delta_{ij}$ y $\varphi_{ij}(y) = \delta_{ji}$. Dado $w \in F_2$, definamos $w_{ij} := \varphi_{ij}(w)$. Entonces, dados $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ distintos dos a dos y siguiendo la notación anterior se tiene lo siguiente:*

1. *Supongamos que*
$$w_{ij}w_{ik}w_{jk} = w_{jk}w_{ik}w_{ij},$$
entonces $w = 1$.

2. *Supongamos que*
$$w_{ij}w_{jk}w_{ij} = w_{jk}w_{ij}w_{jk},$$
entonces $w \in \{x, x^{-1}, y, y^{-1}, 1\}$.

Demostración. Sean $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ dos a dos distintos. Definimos los conjuntos:

$$W = \{\delta_{ij}, \delta_{ji}, \delta_{ik}, \delta_{ki}, \delta_{jk}, \delta_{kj}\}, \quad W_1 = \{\delta_{ij}, \delta_{ki}, \delta_{jk}\} \quad \text{y} \quad W_2 = \{\delta_{ji}, \delta_{ik}, \delta_{kj}\}.$$

Entonces $W_1 \cup W_2 = W$ y $W_1 \cap W_2 = \varnothing$. Haciendo uso del Lema 2.3.2 se tiene que

$$KB_n[\Gamma_W] \cong KB_n[\Gamma_{W_1}] * KB_n[\Gamma_{W_2}].$$

Por lo tanto, los elementos de $KB_n[\Gamma_{W_1}]$ no comparten relaciones con los elementos de $KB_n[\Gamma_{W_2}]$. Sea $w \in F_2$. Entonces existen $r_k, t_k \in \mathbb{Z}$ para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que

$$w = x^{r_1}y^{t_1}x^{r_2}y^{t_2}\cdots x^{r_{m-1}}y^{t_{m-1}}x^{r_m}y^{t_m}$$

de forma reducida. Tomemos $g = x^{r_2}y^{t_2}x^{r_3}y^{t_3}\cdots x^{r_{m-2}}y^{t_{m-2}}x^{r_{m-1}}y^{t_{m-1}}$, de forma que $w = x^{r_1}y^{t_1}gx^{r_m}y^{t_m}$. Fijada la notación, procedemos por inducción en m en ambos casos.

1. Supongamos que $w_{ij}w_{ik}w_{jk} = w_{jk}w_{ik}w_{ij}$, entonces
$$w_{ij}w_{ik}w_{jk}w_{ij}^{-1}w_{ik}^{-1}w_{jk}^{-1} = 1.$$
Si $m = 1$, entonces $w = x^{r_1}y^{r_1}$, por lo tanto
$$1 = w_{ij}w_{ik}w_{jk}w_{ij}^{-1}w_{ik}^{-1}w_{jk}^{-1} = \delta_{ij}^{r_1}\underbrace{\delta_{ji}^{t_1}\delta_{ik}^{r_1}}_{X_1}\underbrace{\delta_{ki}^{t_1}\delta_{jk}^{r_1}}_{X_2}\underbrace{\delta_{kj}^{t_1}\delta_{ji}^{-t_1}}_{X_3}\underbrace{\delta_{ij}^{-r_1}\delta_{ki}^{-t_1}}_{X_4}\underbrace{\delta_{ik}^{-r_1}\delta_{kj}^{-t_1}}_{X_5}\delta_{jk}^{-r_1} =$$
$$= \delta_{ij}^{r_1}X_1X_2X_3X_4X_5\delta_{jk}^{-r_1}.$$
Podemos apreciar que $\delta_{ij}^{r_1}, X_2, X_4, \delta_{jk}^{-r_1} \in KB_n[\Gamma_{W_1}]$ y $X_1, X_3, X_5 \in KB_n[\Gamma_{W_2}]$, por lo que no tienen relaciones entre sí como vimos al comienzo de la prueba. Por lo tanto, debido a que la expresión anterior es igual a 1 se deduce que
$$\delta_{ij}^{r_1} = X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = \delta_{jk}^{-r_1} = 1,$$
en concreto, $\delta_{ij}^{r_1} = 1$, por lo que $r_1 = 0$. Por otro lado, debido a que $X_1 = 1$ se tiene que
$$1 = X_1 = \delta_{ji}^{t_1}\delta_{ik}^{r_1} = \delta_{ji}^{t_1},$$
por lo que $t_1 = 0$. Concluimos que $w = 1$.

   Supongamos que el resultado es cierto hasta un cierto $m - 1$. Entonces, reemplazando obtenemos
$$1 = w_{ij}w_{ik}w_{jk}w_{ij}^{-1}w_{ik}^{-1}w_{jk}^{-1} =$$
$$= \delta_{ij}^{r_1}\delta_{ji}^{t_1}g_{ij}\delta_{ij}^{r_m}\delta_{ji}^{t_m}\delta_{ik}^{r_1}\delta_{ki}^{t_1}g_{ik}\delta_{ik}^{r_m}\delta_{ki}^{t_m}\delta_{jk}^{r_1}\delta_{kj}^{t_1}g_{jk}\delta_{jk}^{r_m}\delta_{kj}^{tm}\delta_{ji}^{-t_m}\cdots$$
$$\cdots\delta_{ij}^{-r_m}g_{ij}^{-1}\delta_{ji}^{-t_1}\delta_{ij}^{-r_1}\delta_{ki}^{-t_m}\delta_{ik}^{-r_m}g_{ik}^{-1}\delta_{ki}^{-t_1}\delta_{ik}^{-r_1}\delta_{kj}^{-t_m}\delta_{jk}^{-r_m}g_{jk}^{-1}\delta_{kj}^{-t_1}\delta_{jk}^{-r_1}.$$

Para aliviar la notación, consideremos

$$Z_1 = \delta_{ji}^{t_1} g_{ij} \delta_{ij}^{r_m}, \quad Z_2 = \delta_{ki}^{t_1} g_{ik} \delta_{ik}^{r_m}, \quad Z_3 = \delta_{kj}^{t_1} g_{jk} \delta_{jk}^{r_m},$$

$$X_1 = \delta_{ji}^{t_m} \delta_{ik}^{r_1}, \quad X_2 = \delta_{ki}^{t_m} \delta_{jk}^{r_1}, \quad X_3 = \delta_{kj}^{tm} \delta_{ji}^{-t_m}, \quad X_4 = \delta_{ij}^{-r_1} \delta_{ki}^{-t_m}, \quad \text{y} \quad X_5 = \delta_{ik}^{-r_1} \delta_{kj}^{-t_m}.$$

Así, podemos reescribir la expresión anterior como

$$1 = \delta_{ij}^{r_1} Z_1 X_1 Z_2 X_2 Z_3 X_3 Z_1^{-1} X_4 Z_2^{-1} X_5 Z_3^{-1} \delta_{jk}^{-r_1}.$$

De nuevo, notemos que $X_2, X_4 \in KB_n[\Gamma_{W_1}]$ y $X_1, X_3, X_5 \in KB_n[\Gamma_{W_2}]$. Además podemos apreciar que cada Z_i con $i \in \{1, 2, 3\}$ lo conforman elementos alternados de $KB_n[\Gamma_{W_1}]$ y $KB_n[\Gamma_{W_2}]$, por lo que son irreducibles. Como la expresión anterior da como resultado la unidad, se tiene que

$$\delta_{ij}^{r_1} = Z_1 = Z_2 = Z_3 = X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = \delta_{jk}^{-r_1} = 1.$$

Debido a que $\delta_{ij}^{r_1} = 1$ se tiene que $r_1 = 0$. Por otro lado se tiene que $1 = X_1 = \delta_{ji}^{t_m} \delta_{ik}^{r_1} = \delta_{ji}^{t_m}$ de donde se deduce que $t_m = 0$. Ahora, también sabemos que $1 = Z_1 = \delta_{ji}^{t_1} g_{ij} \delta_{ij}^{r_m}$, o de forma equivalente, $\delta_{ij}^{r_m} \delta_{ji}^{t_1} g_{ij} = 1$. Esto se consigue multiplicando primero a la derecha por $\delta_{ij}^{-r_m}$ y luego a la izquierda por $\delta_{ij}^{r_m}$. Haciendo uso de la hipótesis de inducción se tiene que $r_m = t_1 = 0$ y que $r_k = t_k = 0$ para todo $k \in \{2, \ldots, m-1\}$. Por lo tanto $w = 1$.

2. Pasemos al caso en el que $w_{ij} w_{jk} w_{ij} = w_{jk} w_{ij} w_{jk}$ y procedemos con un razonamiento similar. Primero, expresamos la relación anterior como

$$w_{ij} w_{jk} w_{ij} w_{jk}^{-1} w_{ij}^{-1} w_{jk}^{-1} = 1,$$

y razonamos por inducción en m. Supongamos que $m = 1$, entonces

$$1 = w_{ij} w_{jk} w_{ij} w_{jk}^{-1} w_{ij}^{-1} w_{jk}^{-1} = \underbrace{\delta_{ij}^{r_1} \delta_{ji}^{t_1} \delta_{jk}^{r_1} \delta_{kj}^{t_1} \delta_{ij}^{r_1}}_{Z_1} \underbrace{\delta_{ji}^{t_1} \delta_{kj}^{-t_1}}_{X_1} \underbrace{\delta_{jk}^{-r_1} \delta_{ji}^{-t_1} \delta_{ij}^{-r_1} \delta_{kj}^{-t_1} \delta_{jk}^{-r_1}}_{Z_2} = Z_1 X_1 Z_2.$$

Notemos que tanto Z_1 como Z_2 son palabras formadas por elementos alternados de $KB_n[\Gamma_{W_1}]$ y $KB_n[\Gamma_{W_2}]$, por lo que son irreducibles. Por otro lado, vemos que $X_1 \in KB_n[\Gamma_{W_2}]$. Supongamos que $|t_1| \geqslant 2$, entonces gracias al Teorema 2.3.4 sabemos que el subgrupo de $KB_n[\Gamma_{W_2}]$ generado por $\left\{\delta_{ji}^{|t_1|}, \delta_{kj}^{|t_1|}\right\}$ es libre, y por ende, no tiene relaciones. Debido a que Z_1 y Z_2 son irreducibles y por lo anterior, X_1 también, se tiene que $Z_1 X_1 Z_2 \neq 1$, lo cual es absurdo. Se deduce que $|t_1| \leqslant 1$, esto es, $t_1 \in \{-1, 0, 1\}$, puesto que t_1 es un entero.

- Si $t_1 = 0$, entonces $X_1 = 1$, por lo que $Z_1 Z_2 = 1$. Desarrollando obtenemos que

$$1 = Z_1 Z_2 = \delta_{ij}^{r_1} \delta_{jk}^{r_1} \delta_{ij}^{r_1} \delta_{jk}^{-r_1} \delta_{ij}^{-r_1} \delta_{jk}^{-r_1}.$$

  Usando de nuevo el Teorema 2.3.4 se tiene que si $|r_1| \geqslant 2$, el subgrupo generado por $\left\{\delta_{ij}^{|r_1|}, \delta_{jk}^{|r_1|}\right\}$ es libre, por lo que $Z_1 Z_2 \neq 1$, por lo que este caso no puede darse. Por lo tanto $r_1 \in \{-1, 0, 1\}$. Si $r_1 = 0$ la relación se tiene de forma evidente. Si $r_1 = 1$, gracias a las relaciones de KB_n se tiene que $\delta_{ij} \delta_{jk} \delta_{ij} = \delta_{jk} \delta_{ij} \delta_{jk}$, por lo que la se obtiene que $Z_1 Z_2$ en efecto es igual a 1. Si $r_1 = -1$ se sigue el mismo razonamiento. Concluimos que si $t_1 = 0$ se tiene que $r_1 \in \{-1, 0, 1\}$, por lo que $w \in \{1, x, x^{-1}\}$.
- Si $t_1 = 1$ obtenemos la expresión

$$1 = \delta_{ij}^{r_1} \delta_{ji} \delta_{jk}^{r_1} \delta_{kj} \delta_{ij}^{r_1} \delta_{ji} \delta_{kj}^{-1} \delta_{jk}^{-r_1} \delta_{ji}^{-1} \delta_{ij}^{-r_1} \delta_{kj}^{-1} \delta_{jk}^{-r_1}.$$

  Multiplicando a la derecha por el inverso de $\delta_{kj}^{-1} \delta_{jk}^{-r_1} \delta_{ji}^{-1} \delta_{ij}^{-r_1} \delta_{kj}^{-1} \delta_{jk}^{-r_1}$ y luego a la izquierda por esta expresión sin invertir se obtiene que

$$1 = \underbrace{\delta_{kj}^{-1} \delta_{jk}^{-r_1} \delta_{ji}^{-1} \delta_{ij}^{-r_1} \delta_{kj}^{-1}}_{A_1} \underbrace{\delta_{jk}^{-r_1} \delta_{ij}^{r_1}}_{X_2} \underbrace{\delta_{ji} \delta_{jk}^{r_1} \delta_{kj} \delta_{ij}^{r_1} \delta_{ji}}_{A_2} = A_1 X_2 A_2.$$

Siguiendo los mismos razonamientos que antes se deduce que $r_1 \in \{-1, 0, 1\}$. Si $r_1 = 0$, gracias a las relaciones de KB_n se cumple la igualdad. En caso de ser $r_1 \neq 0$, para que se cumpla la relación se ha de dar que $\delta_{ij}^{r_1} A_2 = \delta_{jk}^{r_1} A_1^{-1}$, pero esto es imposible, puesto que $\delta_{ij}^{r_1} A_2$ es un producto alternado de elementos de $KB_n[\Gamma_{W_1}]$ y $KB_n[\Gamma_{W_2}]$, por lo que no comparten relaciones, y por ende, no puede transformarse en $\delta_{jk}^{r_1} A_1^{-1}$. Concluimos que si $t_1 = 1$ se tiene que $r_1 = 0$, y por lo tanto, $w = y$.

- Para terminar, si $t_1 = -1$ se sigue un razonamiento análogo el del apartado anterior, donde se obtiene que $r_1 = 0$, por lo que $w = y^{-1}$.

En resumen, $w \in \{1, x, x^{-1}, y, y^{-1}\}$. Veamos que para que se tenga la relación que hemos supuesto es necesario que $m = 1$. Supongamos que $m = 2$, entonces

$$1 = w_{ij} w_{jk} w_{ij} w_{jk}^{-1} w_{ij}^{-1} w_{jk}^{-1} =$$

$$= \underbrace{\delta_{ij}^{r_1} \delta_{ji}^{t_1} \delta_{ij}^{r_2} \delta_{ji}^{t_2} \delta_{jk}^{r_1} \delta_{kj}^{t_1} \delta_{jk}^{r_2} \delta_{kj}^{t_2} \delta_{ij}^{r_1} \delta_{ji}^{t_1} \delta_{ij}^{r_2}}_{Z_1} \underbrace{\delta_{ji}^{t_2} \delta_{kj}^{-t_2}}_{X_1} \underbrace{\delta_{jk}^{-r_2} \delta_{kj}^{-t_1} \delta_{jk}^{-r_1} \delta_{ji}^{-t_2} \delta_{ij}^{-r_2} \delta_{ji}^{-t_1} \delta_{ij}^{-r_1} \delta_{kj}^{-t_2} \delta_{jk}^{-r_2} \delta_{kj}^{-t_1} \delta_{jk}^{-r_1}}_{Z_2} =$$

$$= Z_1 X_1 Z_2.$$

Como antes, Z_1 y Z_2 son irreducibles y $X_1 \in KB_n[\Gamma_{W_2}]$. Además, razonando de forma similar sabemos que $t_2 \in \{-1, 0, 1\}$. Si $t_2 \neq 0$, entonces se ha de tener que $Z_1 \delta_{ji}^{t_2} = Z_2^{-1} \delta_{kj}^{t_2}$, pero esto es imposible, puesto que Z_1 es irreducible y δ_{ji} no comparte relaciones con Z_1, por lo que no podemos transformarlo en $Z_2^{-1} \delta_{kj}^{t_2}$. Se deduce que $t_2 = 0$. Sustituyendo $t_2 = 0$ en la expresión anterior obtenemos

$$1 = \underbrace{\delta_{ij}^{r_1} \delta_{ji}^{t_1} \delta_{ij}^{r_2} \delta_{jk}^{r_1} \delta_{kj}^{t_1} \delta_{jk}^{r_2} \delta_{ij}^{r_1} \delta_{ji}^{t_1}}_{Z_3} \underbrace{\delta_{ij}^{r_2} \delta_{jk}^{-r_2}}_{X_2} \underbrace{\delta_{kj}^{-t_1} \delta_{jk}^{-r_1} \delta_{ij}^{-r_2} \delta_{ji}^{-t_1} \delta_{ij}^{-r_1} \delta_{jk}^{-r_2} \delta_{kj}^{-t_1} \delta_{jk}^{-r_1}}_{Z_4} = Z_3 X_2 Z_4.$$

Razonando de la misma manera se obtiene que $r_2 = 0$, por lo que llegamos a una expresión donde $m = 1$. Supongamos la hipótesis de inducción hasta un cierto $m - 1$. Entonces reemplazando obtenemos

$$1 = w_{ij} w_{jk} w_{ij} w_{jk}^{-1} w_{ij}^{-1} w_{jk}^{-1} =$$

$$= \delta_{ij}^{r_1} \delta_{ji}^{t_1} g_{ij} \delta_{ij}^{r_m} \delta_{ji}^{t_m} \delta_{jk}^{r_1} \delta_{kj}^{t_1} g_{jk} \delta_{jk}^{r_m} \delta_{kj}^{t_m} \delta_{ij}^{r_1} \delta_{ji}^{t_1} g_{ij} \delta_{ij}^{r_m} \delta_{ji}^{t_m} \cdots$$

$$\cdots \delta_{kj}^{-t_m} \delta_{jk}^{-r_m} g_{jk}^{-1} \delta_{kj}^{-t_1} \delta_{jk}^{-r_1} \delta_{ji}^{-t_m} \delta_{ij}^{-r_m} g_{ij}^{-1} \delta_{ji}^{-t_1} \delta_{ij}^{-r_1} \delta_{kj}^{-t_m} \delta_{jk}^{-r_m} g_{jk}^{-1} \delta_{kj}^{-t_1} \delta_{jk}^{-r_1}.$$

Tomemos

$$Z_1 = \delta_{ij}^{r_1} \delta_{ji}^{t_1} g_{ij} \delta_{ij}^{r_m} \delta_{ji}^{t_m} \delta_{jk}^{r_1} \delta_{kj}^{t_1} g_{jk} \delta_{jk}^{r_m} \delta_{kj}^{t_m} \delta_{ij}^{r_1} \delta_{ji}^{t_1} g_{ij} \delta_{ij}^{r_m},$$

$$Z_2 = \delta_{jk}^{-r_m} g_{jk}^{-1} \delta_{kj}^{-t_1} \delta_{jk}^{-r_1} \delta_{ji}^{-t_m} \delta_{ij}^{-r_m} g_{ij}^{-1} \delta_{ji}^{-t_1} \delta_{ij}^{-r_1} \delta_{kj}^{-t_m} \delta_{jk}^{-r_m} g_{jk}^{-1} \delta_{kj}^{-t_1} \delta_{jk}^{-r_1},$$

$$\text{y} \quad X_1 = \delta_{ji}^{t_m} \delta_{kj}^{-t_m}.$$

Entonces $1 = Z_1 X_1 Z_2$. Usando esta descomposición y razonando como en el párrafo anterior se deduce que $t_m = 0$, y repitiendo este proceso una vez sustituido $t_m = 0$ se obtiene que $r_m = 0$. Se obtiene así una palabra con índices hasta $m - 1$. Por hipótesis de inducción, se tiene que $m = 1$. En conclusión, $w \in \{1, x, x^{-1}, y, y^{-1}\}$.

□

Teorema 2.3.5 (Teorema 2.3 [4]). *Sean $n.m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant 5$, $m \geqslant 2$ y $n \geqslant m$. Sea $\psi : VB_n \longrightarrow VB_m$ un homomorfismo. Entonces, salvo conjugación se tiene una de las siguientes posibilidades:*

1. *ψ es abeliano.*

2. *$n = m$ y $\psi \in \{\iota \circ \pi_K, \iota \circ \pi_P\}$.*

3. *$n = m = 6$ y $\psi \in \{\iota \circ \nu_6 \circ \pi_K, \iota \circ \nu_6 \circ \pi_P\}$.*

4. $n = m$ *y* $\psi \in \{\mathrm{id}_{VB_n}, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_1 \circ \zeta_2\}$.

donde ζ_1 *y* ζ_2 *son los homomorfismos definidos por*

$$\zeta_1(\sigma_i) = \tau_i\sigma_i\tau_i, \qquad \zeta_1(\tau_i) = \tau_i, \qquad \zeta_2(\sigma_i) = \sigma_i^{-1} \qquad y \qquad \zeta_2(\tau_i) = \tau_i$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Demostración. En las condiciones del enunciado sea $\psi : VB_n \longrightarrow VB_m$ un homomorfismo. Consideremos el homomorfismo $\psi \circ \iota : \mathfrak{S}_n \longrightarrow VB_m$. Gracias al Teorema 2.3.3 sabemos que, salvo conjugación, o $\psi \circ \iota$ es abeliano, o $n = m$ y $\psi \circ \iota = \iota$, o $n = m = 6$ y $\psi \circ \iota = \iota \circ \nu_6$.

- Supongamos que $\psi \circ \iota$ es abeliano. Gracias al Lema 2.3.2 sabemos que $VB_m^{ab} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, por lo que $\mathrm{Im}(\psi \circ \iota) \leqslant \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Sea $\beta_1 = (\psi \circ \iota)(s_1) = \psi(\tau_1)$. Por la abelianidad de $\psi \circ \iota$ y de la relación $s_is_{i+1}s_i = s_{i+1}s_is_{i+1}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-2\}$ se deduce que $\beta_1 = \psi(\tau_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Sea $\beta_2 = \psi(\sigma_1)$. Usando la relación $\tau_i\tau_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\tau_i\tau_{i+1}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-2\}$ se tiene que

$$\psi(\tau_i)\psi(\tau_{i+1})\psi(\sigma_i) = \beta_1^2\psi(\sigma_i) = \psi(\sigma_{i+1})\psi(\tau_i)\psi(\tau_{i+1}) = \psi(\sigma_{i+1})\beta_1^2.$$

  Por ser β_1 la imagen de s_1 se tiene que $\beta_1^2 = 1$, por lo que $\psi(\sigma_i) = \beta_2$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Ahora, de la relación $\tau_1\sigma_3 = \sigma_3\tau_1$ se obtiene que $\beta_1\beta_2 = \beta_2\beta_1$. Se deduce que ψ es abeliano.

- Supongamos que $n = m$ y $\psi \circ \iota = \iota$. Notemos que para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ se tiene que

$$(\psi \circ \iota)(s_i) = \psi(\tau_i) = \iota(s_i) = \tau_i.$$

  Debido a que $VB_n \cong KB_n \rtimes \mathfrak{S}_n$ sabemos que para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ existen $\alpha_i \in KB_n$ y $w_i \in \mathfrak{S}_n$ tal que $\psi(\sigma_i) = \alpha_i\iota(w_i)$. Notemos que para todo $i \in \{3, \ldots, n-1\}$ se tiene que

$$s_iw_1 = (\pi_k \circ \psi)(\tau_i\sigma_1) = (\pi_k \circ \psi)(\sigma_1\tau_i) = w_1s_i,$$

  por lo que w_1 es un elemento del centralizador de $\langle s_3, \ldots, s_{n-1}\rangle_{\mathfrak{S}_n}$, el cual comprobamos que era $\{1, s_1\}$ en la prueba del Teorema 2.3.2.

  - Supongamos que $w_1 = s_1$, esto es, $\psi(\sigma_1) = \alpha_1\tau_1$. Notemos que para cada $k \in \{3, \ldots, n-1\}$ se tiene que

$$\alpha_1\tau_1\tau_k = \psi(\sigma_1\tau_k) = \psi(\tau_k\sigma_1) = \tau_k\alpha_1\tau_1.$$

    Debido a que $\tau_1\tau_k = \tau_k\tau_1$, multiplicando a la derecha por τ_1 se obtiene que $\alpha_1\tau_k = \tau_k\alpha_k$, o lo que es lo mismo, $\tau_k\alpha_1\tau_k = \alpha_1$, por lo que $s_k(\alpha_1) = \alpha_1$. Haciendo uso del Corolario 2.3.1 sabemos que $\alpha_1 \in KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}_k}]$ donde $\mathcal{U}_k = \{\delta_{ij} \in \mathcal{S} : i, j \notin \{k, k+1\}\}$. Debido a que esto es cierto para todo $k \in \{3, \ldots, n-1\}$ y puesto que

$$\bigcap_{3 \leqslant k \leqslant n-1} \mathcal{U}_k = \{\delta_{12}, \delta_{21}\},$$

    haciendo uso del Teorema de Van der Lek (Teorema 1.3.1) se tiene que $\alpha_1 \in KB_n[\Gamma_{\{\delta_{12},\delta_{21}\}}]$, el cual es un grupo libre de rango 2. Sea F_2 el grupo libre de rango 2 generado por x, y y consideremos $\varphi_{12} : F_2 \longrightarrow KB_n[\Gamma_{\{\delta_{12},\delta_{21}\}}]$ dado por $\varphi_{12}(x) = \delta_{12}$ y $\varphi_{12}(y) = \delta_{21}$. Siguiendo la notación del Lema 2.3.13, dado $w \in F_2$, denotemos $w_{12} := \varphi_{12}(w)$. Entonces, debido a que $KB_n[\Gamma_{\{\delta_{12},\delta_{21}\}}]$ es un grupo libre de rango 2 existe un único elemento $w \in F_2$ tal que $\alpha_1 = w_{12}$. Notemos que tenemos la relación $\tau_2\tau_1\sigma_2 = \tau_1\tau_2\sigma_1$ en KB_n, o de forma equivalente, $\sigma_2 = \tau_1\tau_2\sigma_1\tau_2\tau_1$, por lo que

$$\psi(\sigma_2) = \psi(\tau_1)\psi(\tau_2)\psi(\sigma_1)\psi(\tau_2)\psi(\tau_1) = \tau_1\tau_2\psi(\sigma_1)\tau_2\tau_1 = \tau_1\tau_2\alpha_1\tau_1\tau_2\tau_1.$$

    Debido a que $\alpha_1 = w_{12}$ y a que $\tau_1\tau_2\tau_1 = \tau_2\tau_1\tau_2$ se tiene que

$$\psi(\sigma_2) = \tau_1\tau_2w_{12}\tau_2\tau_1\tau_2 = (s_1s_2)(w_{12})\tau_2.$$

Debido a que w_{12} está definido por los elementos δ_{12} y δ_{21} se tiene que $(s_1s_2)(w_{12}) = w_{23}$. Obtenemos que $\psi(\sigma_2) = w_{23}\tau_2$. Haciendo uso de la relación $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$ se tiene que

$$\psi(\sigma_1)\psi(\sigma_2)\psi(\sigma_1) = w_{12}\tau_1w_{23}\tau_2w_{12}\tau_1 = \psi(\sigma_2)\psi(\sigma_1)\psi(\sigma_2) = w_{23}\tau_2w_{12}\tau_1w_{23}\tau_2.$$

Trabajemos la parte izquierda la igualdad. Notemos que

$$w_{12}\tau_1w_{23}\tau_2w_{12}\tau_1 = w_{12}\tau_1w_{23}\tau_1\tau_1\tau_2w_{12}\tau_2\tau_2\tau_1.$$

Como $\tau_2\tau_1 = \tau_1\tau_2\tau_1\tau_2$ obtenemos

$$w_{12}\tau_1w_{23}\tau_1\tau_1\tau_2w_{12}\tau_2\tau_1\tau_2\tau_1\tau_2 = w_{12}s_1(w_{23})(s_1s_2)(w_{12})\tau_2\tau_1\tau_2 = w_{12}w_{13}w_{23}\tau_2\tau_1\tau_2.$$

Realicemos un tratamiento similar en la parte derecha de la igualdad:

$$w_{23}\tau_2w_{12}\tau_1w_{23}\tau_2 = w_{23}\tau_2w_{12}\tau_2\tau_2\tau_1w_{23}\tau_1\tau_1\tau_2.$$

Debido a que $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1\tau_2\tau_1$ se tiene que

$$w_{23}\tau_2w_{12}\tau_2\tau_2\tau_1w_{23}\tau_1\tau_2\tau_1\tau_2\tau_1 = w_{23}s_2(w_{12})(s_2s_1)(w_{23})\tau_1\tau_2\tau_1 = w_{23}w_{13}w_{12}\tau_1\tau_2\tau_1.$$

Multiplicando ambas expresiones por $\tau_1\tau_2\tau_1$ a la derecha y debido a que $\tau_1\tau_2\tau_1 = \tau_2\tau_1\tau_2$, obtenemos la igualdad

$$w_{12}w_{13}w_{23} = w_{23}w_{13}w_{12}.$$

Gracias al Lema 2.3.13 sabemos que el único elemento de F_2 que satisface las propiedades anteriores es $w = 1$, por lo que $\alpha_1 = 1$, y por ende, $\psi(\sigma_1) = \tau_1$. Veamos que $\psi(\sigma_i) = \tau_i$ por inducción en i. Para todo $i \in \{1, \ldots, n-2\}$ se tiene que $\sigma_{i+1} = \tau_i\tau_{i+1}\sigma_i\tau_{i+1}\tau_i$. El caso $i = 1$ está probado. Supongámoslo cierto hasta un cierto i, entonces, por la relación anterior sabemos que

$$\psi(\sigma_{i+1}) = \psi(\tau_i)\psi(\tau_{i+1})\psi(\sigma_i)\psi(\tau_{i+1})\psi(\tau_i) = \tau_i\tau_{i+1}\tau_i\tau_{i+1}\tau_i = \tau_{i+1}.$$

Por lo tanto $\psi = \iota \circ \pi_P$.

- Supongamos que $w_1 = 1$, esto es, $\psi(\sigma_1) = \alpha_1$. Notemos que para cada $k \in \{3, \ldots, n-1\}$ se tiene que

$$\alpha_1\tau_k = \psi(\sigma_1\tau_k) = \psi(\tau_k\sigma_1) = \tau_k\alpha_1,$$

por lo que $s_k(\alpha_1) = \alpha_1$. Siguiendo paso a paso el razonamiento del apartado anterior obtenemos que $\alpha_1 \in KB_n[\Gamma_{\{\delta_{12},\delta_{21}\}}]$. Sea $w \in F_2$ el único elemento tal que $\alpha_1 = w_{12}$. De la relación $\sigma_2 = \tau_1\tau_2\sigma_1\tau_2\tau_1$ obtenemos

$$\psi(\sigma_2) = \psi(\tau_1)\psi(\tau_2)\psi(\sigma_1)\psi(\tau_2)\psi(\tau_1) = \tau_1\tau_2\psi(\sigma_1)\tau_2\tau_1 = \tau_1\tau_2w_{12}\tau_2\tau_1 = (s_1s_2)(w_{12}) = w_{23}.$$

Ahora, como $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$ se tiene que

$$\psi(\sigma_1)\psi(\sigma_2)\psi(\sigma_1) = w_{12}w_{23}w_{12} = \psi(\sigma_2)\psi(\sigma_1)\psi(\sigma_2) = w_{23}w_{12}w_{23}.$$

Gracias al Lema 2.3.13 sabemos que los únicos elementos de F_2 que cumplen la igualdad anterior son 1, x, x^{-1}, y o y^{-1}. Además, como vimos antes se tiene que $\psi(\sigma_i) = w_{i,i+1}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

  - Si $w = 1$, entonces $\psi(\sigma_i) = 1$ y $\psi(\tau_i) = \tau_i$, por lo que $\psi = \iota \circ \pi_K$.
  - Si $w = x$, entonces $\psi(\sigma_i) = \sigma_i$ y $\psi(\tau_i) = \tau_i$, por lo que $\psi = \mathrm{id}_{VB_n}$.
  - Si $w = x^{-1}$, entonces $\psi(\sigma_i) = \sigma_i^{-1}$ y $\psi(\tau_i) = \tau_i$, por lo que $\psi = \zeta_2$.
  - Si $w = y$ se tiene que $\psi(\sigma_i) = \tau_i\sigma_i\tau_i$ y $\psi(\tau_i) = \tau_i$, por lo que $\psi = \zeta_1$.
  - Si $w = y^{-1}$ se tiene que $\psi(\sigma_i) = \tau_i\sigma_i^{-1}\tau_i$ y $\psi(\tau_i) = \tau_i$, por lo que $\psi = \zeta_1 \circ \zeta_2$.

- Para concluir, supongamos que $n = m = 6$ y $\psi \circ \iota = \iota \circ \nu_6$. Para cada $i \in \{1, \dots, 5\}$ sea $u_i = \nu_6(s_i)$ y $\beta_i = \iota(u_i)$. Notemos que
$$(\psi \circ \iota)(s_i) = \psi(\tau_i) = (\iota \circ \nu_6)(s_i) = \beta_i$$
para todo $i \in \{1, \dots, 5\}$. Sabemos que para cada $i \in \{1, \dots, 5\}$ existen $\alpha_i \in KB_6$ y $w_i \in \mathfrak{S}_6$ tal que $\psi(\sigma_i) = \alpha_i \iota(w_i)$. Tomemos $i \in \{3, 4, 5\}$, entonces
$$u_i w_1 = (\pi_K \circ \psi)(\tau_i \sigma_1) = (\pi_K \circ \psi)(\sigma_1 \tau_i) = w_1 u_i,$$
por lo que w_1 es un elemento del centralizador de $\langle u_3, u_4, u_5 \rangle_{\mathfrak{S}_6}$. Debido a que ν_6 es un automorfismo y que u_3, u_4 y u_5 son las imágenes por ν_6 de s_3, s_4 y s_5, se tiene que el centralizador de $\langle u_3, u_4, u_5 \rangle_{\mathfrak{S}_6}$ será isomorfo al centralizador de $\langle s_3, s_4, s_5 \rangle_{\mathfrak{S}_6}$, del cual sabemos que sus elementos son $\{1, s_1\}$, como vimos con anterioridad. Por lo tanto, el centralizador de $\langle u_3, u_4, u_5 \rangle_{\mathfrak{S}_6}$ estará formado por los elementos $\{1, \nu_6(s_1)\} = \{1, u_1\}$.

  Por otro lado, sabemos que para todo $i \in \{3, 4, 5\}$ se tiene que
$$\alpha_1 \iota(w_1) \beta_i = \psi(\sigma_1 \tau_i) = \psi(\tau_i \sigma_1) = \beta_i \alpha_1 \iota(w_1)$$
y que
$$\iota(w_1) \beta_i = \iota(w_1 u_i) = \iota(u_i w_1) = \beta_i \iota(w_1).$$
Por lo tanto, multiplicando por $(\iota(w_1))^{-1}$ a la derecha de la igualdad, obtenemos $\alpha_1 \beta_i = \beta_i \alpha_1$, o lo que es lo mismo, $\beta_i \alpha_1 \beta_i^{-1} = \alpha_1$. Como $\beta_i = \iota(u_i)$ se tiene que $u_i(\alpha_1) = \alpha_1$. Haciendo uso del Lema 2.3.12 se tiene que $\alpha_1 = 1$. En resumen, $\psi(\sigma_1)$ será igual a β_1 si $w_1 = u_1$ o a 1 si $w_1 = 1$. Además, gracias a la relación $\sigma_{i+1} = \tau_i \tau_{i+1} \sigma_i \tau_{i+1} \tau_i$ se sigue que $\psi(\sigma_i) = \beta_i$ si $w_1 = u_1$ o $\psi(\sigma_i) = 1$ si $w_1 = 1$, para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. En caso de que $w_1 = 1$, entonces $\psi(\sigma_i) = 1$ y $\psi(\tau_i) = \beta_i$, por lo que $\psi = \iota \circ \nu_6 \circ \pi_K$. Si $w_1 = u_1$ se tiene que $\psi(\sigma_i) = \beta_i = (\iota \circ \nu_6)(s_i)$ y $\psi(\tau_i) = \beta_i$, por lo que $\psi = \iota \circ \nu_6 \circ \pi_P$.

$\square$

2.3.5. El caso de VB_2

En las secciones anteriores hemos estudiado la clasificación de los homomorfismos entre VB_n y $\mathfrak{S}_n$ donde el grupo de partida siempre cumple que $n \geqslant 5$, pues así son los resultados que se dan en el artículo [4]. En esta sección completaremos los resultados de este artículo dando los resultados anteriores para VB_2, esto es, clasificaremos los homomorfismos de $\mathfrak{S}_2$ a VB_2, de VB_2 a $\mathfrak{S}_2$ y de VB_2 en sí mismo. Los casos de VB_3 y VB_4 resultan bastante más complejos, y a fecha de publicación de este trabajo, seguimos trabajando en ello.

Comencemos con el estudio de los homomorfismos entre VB_2 y $\mathfrak{S}_2$. Podemos apreciar que
$$VB_2 = \left\langle \sigma_1, \tau_1 \mid \tau_1^2 \right\rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$
por lo que es evidente que hay exactamente cuatro homomorfismos de VB_2 a $\mathfrak{S}_2$, a saber:
$$\begin{array}{rccc} \mathbf{1}: & VB_2 & \longrightarrow & \mathfrak{S}_2 \\ & \sigma_1 & \longmapsto & 1 \\ & \tau_1 & \longmapsto & 1 \end{array}, \qquad \begin{array}{rccc} \hat{\pi}: & VB_2 & \longrightarrow & \mathfrak{S}_2 \\ & \sigma_1 & \longmapsto & s_1 \\ & \tau_1 & \longmapsto & 1 \end{array},$$
$$\begin{array}{rccc} \pi_K: & VB_2 & \longrightarrow & \mathfrak{S}_2 \\ & \sigma_1 & \longmapsto & 1 \\ & \tau_1 & \longmapsto & s_1 \end{array}, \qquad \begin{array}{rccc} \pi_P: & VB_2 & \longrightarrow & \mathfrak{S}_2 \\ & \sigma_1 & \longmapsto & s_1 \\ & \tau_1 & \longmapsto & s_1 \end{array},$$
pues estas son las únicas posibles imágenes para los generadores de VB_2.

Teorema 2.3.6. *Sea $\varphi : \mathfrak{S}_2 \longrightarrow VB_2$, entonces, salvo conjugación, $\varphi = \mathbf{1}$ o $\varphi = \iota$, donde $\mathbf{1}$ denota la aplicación trivial.*

Demostración. Sea $\varphi : \mathfrak{S}_2 \longrightarrow VB_2$. Entonces $\pi_K \circ \varphi : \mathfrak{S}_2 \longrightarrow \mathfrak{S}_2$, y como solo existen dos endomorfismos de $\mathfrak{S}_2$ se tiene que $\pi_K \circ \varphi = \mathbf{1}$ o $\pi_K \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_2}$. Por otro lado, como $VB_2 \cong KB_2 \rtimes \mathfrak{S}_2$, podemos tomar $\varphi(s_1) = \alpha\iota(w)$ con $\alpha \in KB_2$ y $w \in \mathfrak{S}_2$.

Si $\pi_K \circ \varphi = \mathbf{1}$, entonces

$$1 = (\pi_K \circ \varphi)(s_1) = \pi_K(\alpha\iota(w)) = (\pi_K \circ \iota)(w) = w,$$

por lo que $\varphi(s_1) = \alpha$. Ahora, $s_1^2 = 1$, por lo que $\alpha^2 = 1$. Gracias al Lema 2.3.6 sabemos que KB_2[7] es libre de torsión, de donde se obtiene que $\alpha = 1$. Concluimos que $\varphi = \mathbf{1}$.

Supongamos que $\pi_K \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_2}$. Entonces, usando la notación anterior se tiene que $w = s_1$, y por lo tanto $\varphi(s_1) = \alpha\iota(s_1) = \alpha\tau_1$. De nuevo, puesto que $s_1^2 = 1$ se tiene que $\alpha\tau_1\alpha\tau_1 = 1$, esto es, $s_1(\alpha) = \alpha^{-1}$. Por el Lema 2.3.7 sabemos que existe un $\widetilde{\alpha} \in KB_2$ tal que $\alpha = \widetilde{\alpha}(s_1(\widetilde{\alpha}))^{-1} = \widetilde{\alpha}\tau_1\widetilde{\alpha}^{-1}\tau_1$. Por lo tanto

$$\varphi(s_1) = \alpha\tau_1 = \widetilde{\alpha}\tau_1\widetilde{\alpha}^{-1} = (\kappa_{\widetilde{\alpha}} \circ \iota)(s_1).$$

Concluimos que φ es un homomorfismo conjugado de ι. □

Corolario 2.3.2. *Todo subgrupo de VB_2 de orden 2 es conjugado de $\mathfrak{S}_2$ por elementos de KB_2, donde identificamos $\mathfrak{S}_2$ con su imagen por ι en VB_2.*

Demostración. Se deduce de forma directa a partir del Teorema 2.3.6. □

Teorema 2.3.7. *Sea $\psi : VB_2 \longrightarrow VB_2$, entonces, salvo conjugación, se tienen los siguientes casos:*

- *ψ es abeliano.*
- *$\psi(\tau_1) = \tau_1$ y $\psi(\sigma_1) \in VB_2\backslash\{1, \tau_1\}$.*
- *Si ψ es automorfismo, entonces $\psi \in \{\mathrm{id}_{VB_2}, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_1 \circ \zeta_2\}$, donde*

$$\zeta_1(\sigma_1) = \sigma_1\tau_1, \qquad \zeta_1(\tau_1) = \tau_1, \qquad \zeta_2(\sigma_1) = \sigma_1^{-1} \qquad y \qquad \zeta_2(\tau_1) = \tau_1.$$

Demostración. Sea $\psi : VB_2 \longrightarrow VB_2$. Gracias al Corolario 2.3.5 sabemos que $\psi(\tau_1) = g\tau_1g^{-1}$ para algún $g \in KB_2$, puesto que su imagen será un subgrupo de orden 2 de VB_2. Debido a que trabajamos salvo conjugación, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\psi(\tau_1) = \tau_1$ en lo que sigue. Podemos apreciar que, puesto que σ_1 y τ_1 no tienen relaciones entre sí, la imagen de σ_1 puede ser cualquier elemento de VB_2.

Veamos que ψ es abeliano si y solo si $\psi(\sigma_1) \in \{1, \tau_1\}$. Sea $\psi(\sigma_1) = g$ para algún $g \in VB_2$ tal que $g\tau_1 = \tau_1g$. Sea $g = \alpha\iota(w)$ con $\alpha \in KB_2$ y $w \in \mathfrak{S}_2$. Supongamos que $w = 1$, entonces $g = \alpha \in KB_2$. Como $g\tau_1 = \tau_1g$ se tiene que $s_1(g) = g$. Del Teorema 2.2.1 observamos que

$$KB_2 \cong \langle \delta_{12}, \delta_{21} \mid \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z},$$

y como $s_1(\delta_{12}) = \delta_{21}$, $s_1(\delta_{21}) = \delta_{12}$ y s_1 tiene orden dos, haciendo uso del Lema 2.3.3 deducimos que $g = 1$. Supongamos ahora que $w = s_1$, entonces $g = \alpha\tau_1$, por lo tanto, como $g\tau_1 = \tau_1g$, se obtiene de nuevo que $\alpha = \tau_1\alpha\tau_1 = s_1(\alpha)$. Repitiendo el razonamiento anterior se deduce que $\alpha = 1$, y por ende, se obtiene que $g = \tau_1$. Concluimos que ψ será abeliano si y solo si $\psi(\sigma_1) \in \{1, \tau_1\}$.

Pasemos a comprobar que ζ_1 y ζ_2 son automorfismos. Notemos que $\zeta_1^2 = \zeta_2^2 = \mathrm{id}_{VB_2}$, por lo que ambos homomorfismos son inyectivos. Por otro lado, notemos que $\zeta_1(\sigma_1\tau_1) = \sigma_1$ y $\sigma_1(\tau_1) = \tau_1$, por lo que los generadores de VB_2 están la imagen de ζ_1, y por ende, ζ_1 es sobreyectiva. De la misma forma, $\zeta_2\left(\sigma_1^{-1}\right) = \sigma_1$ y $\zeta_2(\tau_1) = \tau_1$, de donde se obtiene que ζ_2 también es sobreyectiva. Al ser inyectivas y sobreyectivas, concluimos que ζ_1 y ζ_2 son automorfismos. Ahora, puede comprobarse que si ψ es un automorfismo que resulte de alguna composición de ζ_1 y ζ_2, se tiene que $\psi(\tau_1) = \tau_1$ y $\psi(\sigma_1) = \tau_1^{\varepsilon_1}\sigma_1^{\eta}\tau_1^{\varepsilon_2}$ donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0, 1\}$ y $\eta \in \{\pm 1\}$.

[7] De hecho, como conocemos la presentación de KB_2, se observa que $KB_2 \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Veamos que si $\widetilde{\psi}$ es un automorfismo, entonces ha de ser de la forma anterior. Por la discusión al comienzo de la prueba sabemos que $\widetilde{\psi}(\tau_1) = \tau_1$, pues trabajamos salvo conjugación. Supongamos que la imagen de σ_1 por $\widetilde{\psi}$ no es de la forma $\tau_1^{\varepsilon_1}\sigma_1^{\eta}\tau_1^{\varepsilon_2}$, entonces podemos asumir que $\widetilde{\psi}(\sigma_1) = \sigma_1 w \sigma_1$ o $\widetilde{\psi}(\sigma_1) = \sigma_1 w \sigma_1^{-1}$ donde w es un elemento de VB_2 no trivial que contiene algún τ_1. En efecto, en caso de no ser así, podemos ir componiendo por ζ_1 o ζ_2 hasta conseguir una expresión de esta forma. Entonces $\sigma_1 \notin \mathrm{Im}\left(\widetilde{\psi}\right)$ en cualquiera de los dos casos, puesto que σ_1 y τ_1 no tienen relaciones entre ellos. Concluimos que si ψ es automorfismo, salvo conjugación, resulta de la composición de ζ_1 y ζ_2. Por último, veamos que $\zeta_1 \circ \zeta_2 = \zeta_2 \circ \zeta_1$. Podemos apreciar que $(\zeta_1 \circ \zeta_2)(\sigma_1) = \tau_1\sigma_1^{-1}$ y que $(\zeta_2 \circ \zeta_1)(\sigma_1) = \sigma_1^{-1}\tau_1$, por lo tanto $\zeta_1 \circ \zeta_2 = \kappa_{\tau_1} \circ \zeta_2 \circ \zeta_1$, y puesto que son conjugados pertenecen a la misma clase. □

2.3.6. Consecuencias

En uso de la clasificación de los homomorfismos ente los grupos de trenzas virtuales, probaremos algunas de las propiedades de estos.

Definición (Grupo hopfiano y co-hopfiano)**.** Sea G un grupo.

- Diremos que G es hopfiano si todo homomorfismo $\psi : G \longrightarrow G$ que sea sobreyectivo es también inyectivo.
- Diremos que G es co-hopfiano si todo homomorfismo $\psi : G \longrightarrow G$ que sea inyectivo es también sobreyectivo.

Proposición 2.3.2 (Corolario 2.4 [4])**.** *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 5$. Entonces VB_n es hopfiano y co-hopfiano.*

Demostración. Gracias al Teorema 2.3.5 sabemos que, salvo conjugación, los únicos homomorfismos sobreyectivos de VB_n en sí mismo son $\{\mathrm{id}_{VB_n}, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_1 \circ \zeta_2\}$. Además, es sencillo comprobar que

$$\zeta_1^2 = \zeta_2^2 = \mathrm{id}_{VB_n} \qquad \text{y} \qquad \zeta_1 \circ \zeta_2 = \zeta_2 \circ \zeta_1,$$

por lo que el conjunto $\{\mathrm{id}_{VB_n}, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_1 \circ \zeta_2\}$ es en realidad un subgrupo de $\mathrm{Aut}(VB_n)$ generado por ζ_1 y ζ_2. Debido a que estos elementos son automorfismo, son también inyectivos, por lo que VB_n es hopfiano. Un razonamiento similar pero en sentido inverso prueba que VB_n también es co-hopfiano. □

Gracias a la clasificación de los homomorfismos de VB_2 podemos comprobar que, a diferencia de los casos anteriores, este grupo no es co-hopfiano.

Proposición 2.3.3. *El grupo VB_2 es hopfiano y no es co-hopfiano.*

Demostración. Veamos que VB_2 es hopfiano. Gracias al Teorema 2.3.7 sabemos que los únicos homomorfismos $\psi : VB_2 \longrightarrow VB_2$ que pueden ser sobreyectivos cumplen que $\psi(\tau_1) = \tau_1$ y $\psi(\sigma_1) \in VB_2 \backslash \{1, \tau_1\}$. Es más, en la demostración del Teorema 2.3.7 y en uso de la notación de este teorema, se prueba que si $\psi \notin \{\mathrm{id}_{VB_2}, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_1 \circ \zeta_2\}$, entonces $\sigma_1 \notin \mathrm{Im}(\psi)$. Deducimos que ψ será sobreyectivo si y solo si es automorfismo, por lo que VB_2 es hopfiano.

Veamos ahora que VB_2 no es co-hopfiano. Consideremos $\psi : VB_2 \longrightarrow VB_2$ definido como $\psi(\tau_1) = \tau_1$ y $\psi(\sigma_1) = \sigma_1^2$. Comprobemos que ψ es inyectivo. Por reducción al absurdo supongamos que no lo es, entonces existe $g \in VB_2$ no trivial tal que $\psi(g) = 1$. Puesto que $VB_2 \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, podemos expresar g de forma única como

$$g = \tau_1^{\varepsilon_1}\sigma_1^{\eta_1}\tau_1 \cdots \sigma_1^{\eta_r}\tau_1^{\varepsilon_2},$$

donde $\eta_1, \ldots, \eta_r \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ y $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$. Entonces

$$1 = \psi(g) = \psi\left(\tau_1^{\varepsilon_1}\sigma_1^{\eta_1}\tau_1 \cdots \sigma_1^{\eta_r}\tau_1^{\varepsilon_2}\right) = \tau_1^{\varepsilon_1}\sigma_1^{2\eta_1}\tau_1 \cdots \sigma_1^{2\eta_r}\tau_1^{\varepsilon_2}.$$

Puesto que σ_1 y τ_1 no tienen relaciones entre sí, esto es absurdo. Concluimos que ψ es inyectivo. Ahora, podemos apreciar que $\sigma_1 \notin \mathrm{Im}(\psi)$, por lo que ψ no es sobreyectivo. Concluimos que VB_2 no es co-hopfiano. □

También podemos deducir cual es el subgrupo de automorfismos externos para los grupos de trenzas con $n \geqslant 5$.

Lema 2.3.14 (Lema 2.6 [4])**.** *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 5$. Entonces $\zeta_1 \notin \operatorname{Inn}(VB_n)$.*

Demostración. Supongamos que ζ_1 es un automorfismo interno, esto es, que existe un $g \in VB_n$ tal que $\zeta_1 = \kappa_g$, siendo κ_g el homomorfismo de conjugación por g. Notemos que $g \neq 1$, puesto que $\zeta_1 \neq \mathrm{id}_{VB_n}$. Debido a que $g \in VB_n$, existen $\alpha \in KB_n$ y $w \in \mathfrak{S}_n$ tal que $g = \alpha\iota(w)$. Podemos apreciar que para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ se tiene que $\zeta_1(\tau_i) = \tau_i$ por definición, y por otro lado

$$s_i = \pi_K(\tau_i) = (\pi_K \circ \zeta_1)(\tau_i) = (\pi_K \circ \kappa_g)(\tau_i) = \pi_K\left(g\tau_i g^{-1}\right) = w s_i w^{-1},$$

puesto que $\pi_K(g) = \pi_K(\alpha\iota(w)) = w$, ya que $\alpha \in KB_n$. Por lo tanto, $ws_i = s_i w$, de donde se deduce que $w \in Z(\mathfrak{S}_n)$. Haciendo uso de la Proposición B.2.1, como $n \neq 2$ se tiene que $Z(\mathfrak{S}_n) = \{1\}$, por lo que $w = 1$. Deducimos que $g = \alpha \in KB_n$.

Podemos apreciar que dados $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ con $i < j$, por definición de ζ_1 se tiene que

$$\zeta_1(\delta_{ij}) = \zeta_1(\tau_i\tau_{i+1}\cdots\tau_{j-2}\sigma_{j-1}\tau_{j-2}\cdots\tau_{i+1}\tau_i) = \tau_i\tau_{i+1}\cdots\tau_{j-2}\zeta_1(\sigma_{j-1})\tau_{j-2}\cdots\tau_{i+1}\tau_i =$$

$$= \tau_i\tau_{i+1}\cdots\tau_{j-2}\tau_{j-1}\sigma_{j-1}\tau_{j-1}\tau_{j-2}\cdots\tau_{i+1}\tau_i = \delta_{ji}.$$

De forma análoga se tiene que $\zeta_1(\delta_{ji}) = \delta_{ij}$. Sea $\mathcal{U}_{ij} := \mathcal{S}\backslash\{\delta_{ij}, \delta_{ji}\}$, donde $\mathcal{S}$ es el conjunto de generadores de KB_n. Tomemos $\mathcal{U}'_{ij} = \mathcal{U}_{ij} \cup \{\delta_{ij}\}$ y $\mathcal{U}''_{ij} = \mathcal{U}_{ij} \cup \{\delta_{ji}\}$. Entonces $\mathcal{U}'_{ij} \cup \mathcal{U}''_{ij} = \mathcal{S}$ y $\mathcal{U}'_{ij} \cap \mathcal{U}''_{ij} = \mathcal{U}_{ij}$. Haciendo uso del Lema 2.3.2 se tiene que

$$KB_n \cong KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}'_{ij}}] *_{KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}_{ij}}]} KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}''_{ij}}].$$

Además, por lo anterior vemos que $\zeta_1(KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}'_{ij}}]) = KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}''_{ij}}]$ y $\zeta_1(KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}''_{ij}}]) = KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}'_{ij}}]$. Por lo tanto, del Lema 2.3.3 se sigue que $KB_n^{\zeta_1} \subseteq KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}_{ij}}]$. Notemos que esto ha de ser cierto para todo $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que $i < j$. Debido a que

$$\bigcap_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} \mathcal{U}_{ij} = \varnothing$$

y en uso del Teorema de Van der Lek (Teorema 1.3.1), se tiene que

$$KB_n^{\zeta_1} \subseteq \bigcap_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} KB_n[\Gamma_{\mathcal{U}_{ij}}] = KB_n\left[\bigcap_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} \Gamma_{\mathcal{U}_{ij}}\right] = KB_n[\varnothing] = \{1\}.$$

Ahora, $\zeta_1(g) = \kappa_g(g) = g$, por lo que $g \in KB_n^{\zeta_1} = \{1\}$, y por ende $g = 1$, lo cual es absurdo, puesto que $\zeta_1 \neq \mathrm{id}_{VB_n}$. Concluimos que $\zeta_1 \notin \operatorname{Inn}(VB_n)$. □

Lema 2.3.15. *Sea G un grupo y sea $\pi_{ab} : G \longrightarrow G^{ab}$ el homomorfismo que envía cada generador a su clase en el grupo abelianizado. Entonces, si $\varphi \in \operatorname{Inn}(G)$ se tiene que $\pi_{ab} \circ \varphi = \pi_{ab}$.*

Demostración. Supongamos que $\varphi \in \operatorname{Inn}(G)$, entonces existe un $g \in G$ tal que $\varphi = \kappa_g$, donde κ_g es el homomorfismo de conjugación por g. Sea $h \in G$, entonces

$$(\pi_{ab} \circ \varphi)(h) = \pi_{ab}\left(ghg^{-1}\right) = \pi_{ab}(g)\pi_{ab}(h)(\pi_{ab}(g))^{-1} = \pi_{ab}(g)(\pi_{ab}(g))^{-1}\pi_{ab}(h) = \pi_{ab}(h),$$

por lo que $\pi_{ab} \circ \varphi = \pi_{ab}$. □

Proposición 2.3.4 (Corolario 2.5 [4])**.** *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 5$. Entonces*

$$\operatorname{Out}(VB_n) = \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle_{\operatorname{Aut}(VB_n)} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Demostración. Primero notemos que en la demostración de la Proposición 2.3.2 se ha probado que $\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle_{\mathrm{Aut}(VB_n)} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Por otro lado, gracias al Teorema 2.3.5 sabemos que, salvo conjugación, los únicos automorfismos de VB_n son $\{\mathrm{id}_{VB_n}, \zeta_1, \zeta_1, \zeta_1 \circ \zeta_2\}$, y como consideramos los elementos salvo conjugación se tiene que

$$\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle_{\mathrm{Aut}(VB_n)} \cong \mathrm{Aut}(VB_n)/\mathrm{Inn}(VB_n) = \mathrm{Out}(VB_n).$$

Para comprobar que $\mathrm{Out}(VB_n)$ es, en efecto, $\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle_{\mathrm{Aut}(VB_n)}$, nos basta comprobar que sus elementos no son automorfismos internos, salvo la identidad.

Gracias al Lema 2.3.14 sabemos que $\zeta_1 \notin \mathrm{Inn}(VB_n)$. Supongamos que ζ_2 es un automorfismo interno. Entonces, haciendo uso del Lema 2.3.15 sabemos que $\pi_{ab} \circ \zeta_2 = \pi_{ab}$. Por el Lema 2.3.1 sabemos que $VB_n^{ab} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donde $\mathbb{Z}$ está generado por algún σ_i y $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ está generado por algún τ_j donde $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ tales que $|i - j| \geqslant 2$. Sin pérdida de generalidad, consideremos $i = 1$ y $j = 3$, esto es, $VB_n^{ab} \cong \langle \sigma_1, \tau_3 \mid \tau_3^2, \sigma_1\tau_3 = \tau_3\sigma_1 \rangle$. Entonces π_{ab} estará definido como $\pi_{ab}(\sigma_i) = \sigma_1$ y $\pi_{ab}(\tau_i) = \tau_3$ donde $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Por lo tanto, dado $i \in \{1, \dots, n-1\}$ se ha de tener que

$$(\pi_{ab} \circ \zeta_2)(\sigma_i) = \sigma_1^{-1} = \pi_{ab}(\sigma_i) = \sigma_1,$$

por lo que $\sigma_1^2 = 1$, lo cual es absurdo, puesto que σ_1 no tiene orden positivo. Concluimos que ζ_2 no es un automorfismo interno. Razonando de forma análoga, supongamos que $\zeta_1 \circ \zeta_2$ es un automorfismo interno. Notemos que

$$(\zeta_1 \circ \zeta_2)(\sigma_i) = \tau_i\sigma_i^{-1}\tau_i \qquad \text{y} \qquad (\zeta_1 \circ \zeta_2)(\tau_i) = \tau_i.$$

Por lo tanto, dado $i \in \{1, \dots, n-1\}$ se ha de tener que

$$(\pi_{ab} \circ \zeta_1 \circ \zeta_2)(\sigma_i) = \tau_3\sigma_1^{-1}\tau_3 = \sigma_1^{-1} = \pi_{ab}(\sigma_i) = \sigma_1.$$

Llegamos al mismo absurdo anterior, por lo que $\zeta_1 \circ \zeta_2$ no puede ser un automorfismo interior. Concluimos que $\mathrm{Out}(VB_n) = \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle_{\mathrm{Aut}(VB_n)}$. □

Proposición 2.3.5. *Se tiene que* $\mathrm{Out}(VB_2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Demostración. Consecuencia directa del Teorema 2.3.7. □

Notemos que en el caso de VB_2 no podemos afirmar que los automorfismo externos estén generados por los automorfismos ζ_1 y ζ_2 definidos en el Teorema 2.3.7. A pesar de que estos automorfismos son externos, lo cual puede verificarse gracias al Lema 2.3.15, se tiene que $\zeta_1 \circ \zeta_2 \neq \zeta_2 \circ \zeta_1$, aunque ambos pertenecen a la misma clase en $\mathrm{Out}(VB_2)$.

Para concluir este capítulo, veremos la relevancia de los subgrupos VP_n y KB_n.

Definición (Subgrupo característico)**.** Sea G un grupo y sea $H \leqslant G$ un subgrupo. Diremos que H es un subgrupo característico de G si para todo $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ se tiene que $\varphi(H) = H$.

Proposición 2.3.6. *Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant 5$. Entonces VP_n y KB_n son ambos subgrupos característicos de VB_n.*

Demostración. Sea $\psi \in \mathrm{Aut}(VB_n)$. Si $\psi \in \mathrm{Inn}(VB_n)$, debido a que tanto KB_n como VP_n son normales se tiene que $\psi(KB_n) = KB_n$ y $\psi(VP_n) = VP_n$. Si $\psi \notin \mathrm{Inn}(VB_n)$ se tiene que $\psi \in \mathrm{Out}(VB_n)$, puesto que $\mathrm{Aut}(VB_n) \cong \mathrm{Inn}(VB_n) \rtimes \mathrm{Out}(VB_n)$. Gracias la Proposición 2.3.4 sabemos que

$$\mathrm{Out}(VB_n) = \{\mathrm{id}_{VB_n}, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_1 \circ \zeta_2\}.$$

Entonces solo hemos de comprobar que estos automorfismos fijan VP_n y KB_n. El caso id_{VB_n} es evidente. Además, si es cierto para ζ_1 y para ζ_2, entonces también lo es para $\zeta_1 \circ \zeta_2$, por lo que basta probarlo para ζ_1 y ζ_2.

Comencemos comprobándolo para KB_n. En la demostración del Lema 2.3.14 ya comprobamos que $\zeta_1(\delta_{ij}) = \delta_{ji}$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $i \neq j$. Por lo tanto, $\zeta_1(KB_n) = KB_n$, pues llevamos generadores en generadores. Supongamos que $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $i < j$. Entonces

$$\zeta_2(\delta_{ij}) = \zeta_2(\tau_i\tau_{i+1}\cdots\tau_{j-2}\sigma_{j-1}\tau_{j-2}\cdots\tau_{i+1}\tau_i) = \tau_i\tau_{i+1}\cdots\tau_{j-2}\zeta_2(\sigma_{j-1})\tau_{j-2}\cdots\tau_{i+1}\tau_i =$$

$$= \tau_i\tau_{i+1}\cdots\tau_{j-2}\sigma_{j-1}^{-1}\tau_{j-2}\cdots\tau_{i+1}\tau_i = (\tau_i\tau_{i+1}\cdots\tau_{j-2}\sigma_{j-1}\tau_{j-2}\cdots\tau_{i+1}\tau_i)^{-1} = \delta_{ij}^{-1}.$$

De forma similar, $\zeta_2(\delta_{ji}) = \delta_{ji}^{-1}$. Por el mismo motivo, $\zeta_2(KB_n) = KB_n$.

Pasemos a comprobarlo para VP_n. En la Sección 5 del [2] Valerij G. Bardakov y Paolo Bellingeri dan una presentación de VP_n. Es este artículo se prueba que VP_n está generado por

$$\lambda_{i,i+1} = \tau_i\sigma_i; \quad \lambda_{i+1,i} = \sigma_i\tau_i, \quad \lambda_{ij} = \tau_{j-1}\tau_{j-2}\cdots\tau_{i+1}\lambda_{i,i+1}\tau_{i+1}\cdots\tau_{j-2}\tau_{j-1},$$

$$\lambda_{ji} = \tau_{j-1}\tau_{j-2}\cdots\tau_{i+1}\lambda_{i+1,i}\tau_{i+1}\cdots\tau_{j-2}\tau_{j-1},$$

donde $i, j \in \{1, \ldots. n-1\}$ y $i < j$. Sea $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Entonces

$$\zeta_1(\lambda_{i,i+1}) = \zeta_1(\tau_i\sigma_i) = \tau_i^2\sigma_i\tau_i = \sigma_i\tau_i = \lambda_{i+1,i}, \quad \zeta_1(\lambda_{i+1,i}) = \zeta_1(\sigma_i\tau_i) = \tau_i\sigma_i\tau_i^2 = \tau_i\sigma_i = \lambda_{i,i+1},$$

$$\zeta_2(\lambda_{i,i+1}) = \zeta_2(\tau_i\sigma_i) = \tau_i\sigma_i^{-1} = (\sigma_i\tau_i)^{-1} = \lambda_{i+1,i}^{-1}, \quad \zeta_2(\lambda_{i+1,i}) = \zeta_1(\sigma_i\tau_i) = \sigma_i^{-1}\tau_i = (\tau_i\sigma_i)^{-1} = \lambda_{i,i+1}^{-1}.$$

Por lo que dados $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que $i \neq j$ se tiene que $\zeta_1(\lambda_{ij}) = \lambda_{ji}$ y $\zeta_2(\lambda_{ij}) = \lambda_{ji}^{-1}$. Debido a que envía generadores en generadores se tiene que $\zeta_1(VP_n) = VP_n$ y $\zeta_2(VP_n) = VP_n$. Concluimos que VP_n y KB_n son subgrupos característicos. □

Proposición 2.3.7. *Los subgrupos VP_2 y KB_2 no son subgrupos característicos de VB_2.*

Demostración. Veamos que VP_2 no es un subgrupo característico. Notemos que $\sigma_1\tau_1 \in VP_2$, pues $\pi_P(\sigma_1\tau_1) = s_1^2 = 1$. Sin embargo $\zeta_1(\sigma_1\tau_1) = \sigma_1 \notin VP_2$. Razonando de forma análoga, podemos comprobar que $\sigma_1 \in KB_2$, pero $\zeta_1(\sigma_1) = \sigma_1\tau_1 \notin KB_2$. □

3 | Grupos de Artin virtuales

3.1. Grupos de Artin virtuales

Al igual que los grupos de Artin han sido históricamente la generalización natural de los grupos de trenzas, los grupos de Artin virtuales serán una generalización de los grupos de trenzas virtuales. Esta generalización, definida en 2021 por Paollo Bellingeri, Luis Paris y Anne-Laure Thiel en [5], pretende imitar la acción que tienen los cruces virtuales sobre los cruces convencionales en los grupos de trenzas virtuales, permitiendo extender varios de los resultados que se han obtenido para estos grupos a si generalización. En la fecha en la que se está escribiendo este trabajo, este es el único artículo escrito sobre estos grupos, por lo que se tiene poca aunque muy relevante información sobre estos.

En este capítulo definiremos y estudiaremos la estructura de estos grupos, observando la fuerte relación que tienen con los grupos de Coxeter y su relevancia en el estudio de los grupos de Artin.

Definición (Grupos de Artin virtuales)**.** Sea Γ un grafo de Coxeter sobre un conjunto S. Consideremos los conjuntos $\mathcal{S} = \{\sigma_s : s \in S\}$ y $\mathcal{T} = \{\tau_s : s \in S\}$, los cuales serán biyectivos a S. Llamaremos grupo de Artin virtual asociado a Γ, notado por $VA[\Gamma]$, al grupo generado por $\mathcal{S} \sqcup \mathcal{T}$ y que tiene por relaciones:

- $\mathrm{Prod}_R(\sigma_t, \sigma_s, m_{st}) = \mathrm{Prod}_R(\sigma_s, \sigma_t, m_{st})$ para todo $s, t \in S$ tal que $s \neq t$ y $m_{st} \neq \infty$.
- $\mathrm{Prod}_R(\tau_t, \tau_s, m_{st}) = \mathrm{Prod}_R(\tau_s, \tau_t, m_{st})$ para todo $s, t \in S$ tal que $s \neq t$ y $m_{st} \neq \infty$.
- $\tau_s^2 = 1$ para todo $s \in S$.
- $\mathrm{Prod}_R(\tau_s, \tau_t, m_{st} - 1)\sigma_s = \sigma_x \mathrm{Prod}_R(\tau_s, \tau_t, m_{st} - 1)$ para todo $s, t \in S$ tal que $s \neq t$ y $m_{st} \neq \infty$, y donde
  - $x = s$ si m_{st} es par.
  - $x = t$ si m_{st} es impar.

Hemos usado la notación introducida en el Capítulo 1. Al igual que ocurre con los grupos de trenzas virtuales, la primera relación representa al grupo de Artin asociado a Γ, mientras que la segunda y la tercera representa al grupo de Coxeter asociado a Γ. También podemos definir dos proyecciones que serán relevantes para el estudio de estos grupos.

Definición (Grupo de Artin virtual kuro y puro)**.** Sea Γ un grafo de Coxeter sobre un conjunto S, y sean $VA[\Gamma]$ y $W[\Gamma]$ el grupo de Artin virtual y el grupo de Coxeter asociado a Γ. Consideremos los homomorfismos

$$\begin{array}{cccc} \pi_K : & VA[\Gamma] & \longrightarrow & W[\Gamma] \\ & \sigma_s & \longmapsto & 1 \\ & \tau_s & \longmapsto & s \end{array} \quad , \quad \begin{array}{cccc} \pi_P : & VA[\Gamma] & \longrightarrow & W[\Gamma] \\ & \sigma_s & \longmapsto & s \\ & \tau_s & \longmapsto & s \end{array} .$$

Llamaremos grupo de Artin virtual kuro asociado a Γ, notado por $KVA[\Gamma]$, a $KVA[\Gamma] := \ker(\pi_K)$. Llamaremos grupo de Artin virtual puro asociado a Γ, notado por $PVA[\Gamma]$, a $PVA[\Gamma] := \ker(\pi_P)$.

Análogo al caso de los grupos de trenzas virtuales, estos subgrupos nos permiten descomponer los grupos de Artin virtuales como un producto semidirecto.

Proposición 3.1.1. *Proposición* 2.1, *[5] Sea* Γ *un grafo de Coxeter sobre un conjunto* S*. Entonces podemos descomponer* $VA[\Gamma]$ *como un producto semidirecto tal que*

$$VA[\Gamma] \cong KVA[\Gamma] \rtimes W[\Gamma] \qquad o \qquad VA[\Gamma] \cong PVA[\Gamma] \rtimes W[\Gamma].$$

Demostración. Consideremos $\iota_W : W[\Gamma] \longrightarrow VA[\Gamma]$ dada por $\iota_W(s) = \tau_s$ para todo $s \in S$. Por la definición tanto de π_K como de π_P se tiene que $\pi_K \circ \iota_W = \pi_P \circ \iota_W = \mathrm{id}_{W[\Gamma]}$, por lo que ι_W es una sección de ambos homomorfismos. Consideremos las siguientes sucesiones

$$\{1\} \longrightarrow KVA[\Gamma] \xrightarrow{i} VA[\Gamma] \xrightarrow{\pi_K} W[\Gamma] \longrightarrow \{1\}\ ,$$

$$\{1\} \longrightarrow PVA[\Gamma] \xrightarrow{i} VA[\Gamma] \xrightarrow{\pi_P} W[\Gamma] \longrightarrow \{1\}\ ,$$

donde i denota la inclusión en ambos casos. Por como se han definido los subgrupos $KVA[\Gamma]$ y $PVA[\Gamma]$, esta sucesión es exacta, y debido a que existe una sección en cada caso, de la primera sucesión deducimos que $VA[\Gamma] \cong KVA[\Gamma] \rtimes W[\Gamma]$, mientras que de la segunda se obteiene que $VA[\Gamma] \cong PVA[\Gamma] \rtimes W[\Gamma]$. □

En uso de esta descomposición, debido a que los grupos de Coxeter son bien conocidos, nos centraremos en estudiar los subgrupos $KVA[\Gamma]$ y $PVA[\Gamma]$ para poder estudiar el grupo $VA[\Gamma]$. Por poder descomponerse en un producto semidirecto, en ambos casos tenemos una acción natural de $W[\Gamma]$ sobre ambos subgrupos dada por la conjugación. Esta acción será de gran importancia, pues será la clave para comprender tanto los generadores como las relaciones de $KVA[\Gamma]$ y de $PVA[\Gamma]$.

Recordemos de la Sección 1.1 del Capítulo 1 que dado un grafo de Coxeter Γ sobre un conjunto S existe un espacio vectorial real V generado por un conjunto abstracto $\Pi_S = \{\alpha_s : s \in S\}$, al que llamamos raíces simples, y sobre el cual se puede definir un producto escalar que hace que $W[\Gamma]$ se inyecte sobre $GL(V)$ mediante el homomorfismo γ definido por

$$\gamma(s)(v) = v - \langle v, \alpha_s \rangle \alpha_s$$

para todo $v \in V$ y $s \in S$. Además, podíamos definir el sistema de raíces $\Phi[\Gamma]$, que no es más que el conjunto formado por todas las posibles acciones de los elementos de $W[\Gamma]$ sobre las raíces simples.

Notemos que hemos definido dos acciones de $W[\Gamma]$, a saber, sobre los subgrupos kuro y puro del grupo de Artin virtual asociado a Γ, actuando por conjugación; y sobre el sistema de raices simples asociada a Γ mediante el homomorfismo γ. Para evitar confusión, denotaremos la acción de $W[\Gamma]$ sobre los elementos de $KVA[\Gamma]$ y $PVA[\Gamma]$ por $\cdot$, mientras que si este actúa sobre el sistema de raíces simples, denotaremos la acción con paréntesis.

Lema 3.1.1. *Sea* Γ *un conjunto de Coxeter sobre* S*. Consideremos* $\ell : W[\Gamma] \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ *la función longitud sobre* S*. Entonces se tienen los siguientes resultados:*

- *Sea* $w \in W[\Gamma]$ *y* $s, t \in S$ *con* $s \neq t$ *tal que* $\ell(ws) = \ell(wt) = \ell(w) - 1$*. Entonces* $m_{st} \neq \infty$ *y* $\ell\left(w\mathrm{Prod}_R(t, s, m_{st})^{-1}\right) = \ell(w) - m_{st}$*.*
- *Sean* $s, t \in S$ *con* $s \neq t$ *y tal que* $m_{st} \neq \infty$*. Entonces* $\mathrm{Prod}_R(s, t, m_{st} - 1)(\alpha_s) = \alpha_x$*, donde* $x = s$ *si* m_{st} *es par o* $x = t$ *si* m_{st} *es impar.*

Demostración. Supongamos que dado $w \in W[\Gamma]$ y $s, t \in S$ con $s \neq t$ se tiene que $\ell(ws) = \ell(wt) = \ell(w) - 1$. Debido a que tanto s como t reducen la longitud de w, existen $\widetilde{w} \in W[\Gamma]$ y un cierto $q \in \mathbb{N}$ con $q \leqslant m_{st}$ tal que $w = \widetilde{w}\mathrm{Prod}_R(s, t, q)$ de forma que $\widetilde{w}$ no termine ni en s ni en t. Entonces

$$\ell(w) = \ell(\widetilde{w}) + \ell(\mathrm{Prod}_R(s, t, q)).$$

Notemos que del hecho de que tanto con s como con t reduzca la longitud de la palabra se deduce de forma directa que $m_{st} \neq \infty$, pues en caso contrario o ws o wt aumentaría de longitud. Por otro lado tenemos que $\ell(ws) = \ell(wt) = \ell(w) - 1$, por lo que

$$\ell(\widetilde{w}) + \ell(\mathrm{Prod}_R(s, t, q)s) = \ell(\widetilde{w}) + \ell(\mathrm{Prod}_R(s, t, q)t) = \ell(\widetilde{w}) + \ell(\mathrm{Prod}_R(s, t, q)) - 1.$$

De forma equivalente

$$\ell(\mathrm{Prod}_R(s,t,q)s) = \ell(\mathrm{Prod}_R(s,t,q)t) = \ell(\mathrm{Prod}_R(s,t,q)) - 1,$$

por lo que $q = m_{st}$. Deducimos que

$$\ell\left(w\mathrm{Prod}_R(s,t,m_{st})^{-1}\right)\right) = \ell(\widetilde{w}) = \ell(\widetilde{w}) + \ell(\mathrm{Prod}_R(s,t,m_{st})) - \ell(\mathrm{Prod}_R(s,t,m_{st})) = \ell(w) - m_{st}.$$

Supongamos ahora $s,t \in S$ tal que $s \neq t$ y $m_{st} \neq \infty$. Haciendo uso de las representaciones matriciales dadas en la prueba del Teorema 1.1.2 sabemos que si m_{st} es par, entonces $\mathrm{Prod}_R(s,t,m_{st})(\alpha_s) = -\alpha_s$, mientras que si m_{st} es impar se tiene que $\mathrm{Prod}_R(s,t,m_{st})(\alpha_s) = -\alpha_t$. Supongamos que m_{st} es par, entonces

$$\mathrm{Prod}_R(s,t,m_{st}-1)(\alpha_s) = \left(s\mathrm{Prod}_R(s,t,m_{st})\right)(\alpha_s) = -s(\alpha_s) = \alpha_s.$$

Por último, si suponemos que m_{st} es impar obtenemos que

$$\mathrm{Prod}_R(s,t,m_{st}-1)(\alpha_s) = \left(t\mathrm{Prod}_R(s,t,m_{st})\right)(\alpha_s) = -t(\alpha_t) = \alpha_t.$$

□

Lema 3.1.2 (Lema 2.2, [5]). *Sea Γ un grafo de Coxeter sobre S. Consideremos $u,v \in W[\Gamma]$ y $s,t \in S$. Si $u(\alpha_s) = v(\alpha_t)$ entonces $u \cdot \sigma_s = v \cdot \sigma_t$ en $KVA[\Gamma]$ y $u \cdot (\tau_s\sigma_s) = v \cdot (\tau_t\sigma_t)$ en $PVA[\Gamma]$.*

Demostración. Probaremos la igualdad $u \cdot \sigma_s = v \cdot \sigma_t$, puesto que la otra relación se deduce de forma análoga. En las condiciones del enunciado podemos tomar $v = 1$, pues siempre podemos actuar por v^{-1} en ambos lados de la igualdad. Entonces, supongamos que $u(\alpha_s) = \alpha_t$. Vamos a probar que $u \cdot \sigma_s = \sigma_t$ por inducción en la longitud de u. Si $\ell(u) = 0$, entonces $u = 1$, por lo que $\alpha_s = \alpha_t$, de donde se obtiene que $s = t$, y por ende, $\sigma_s = \sigma_t$. Supongamos que es cierto para $\ell(u) \geqslant 1$ y que se cumple la hipótesis de inducción. Como $u(\alpha_s) = \alpha_t$, se tiene que $usu^{-1} = t$, por lo que $us = tu$. Es más, debido a que α_t tiene coeficientes positivos, gracias al Teorema 1.1.2 se tiene que $\ell(us) = \ell(u) + 1$.

Consideremos $w = us = tu$ y tomemos $x \in S$ tal que $\ell(ux) = \ell(u) - 1$. Podemos apreciar que $x \neq s$, puesto que $\ell(ux) = \ell(u) - 1$ por elección, mientras que $\ell(us) = \ell(u) + 1$. Ahora, notemos que

$$\ell(ws) = \ell(u) = \ell(w) - 1 \quad \text{y} \quad \ell(wx) = \ell(tux) = \ell(tu) - 1 = \ell(w) - 1.$$

Haciendo uso del primer apartado del Lema 3.1.1 sabemos que $m_{sx} \neq \infty$ y que $\ell(\widetilde{w}) = \ell(w) - m_{sx}$ donde $\widetilde{w} = w\mathrm{Prod}_R(s,x,m_{sx})^{-1}$. Tomemos $q = s$ si m_{xs} es par y $q = x$ si m_{xs} es impar. Notemos que,

$$w = us = \widetilde{w}\mathrm{Prod}_R(s,x,m_{sx}-1)s,$$

por lo que $u = \widetilde{w}\mathrm{Prod}_R(s,x,m_{sx}-1)$. Entonces

$$\alpha_t = u(\alpha_s) = (\widetilde{w}\mathrm{Prod}_R(s,x,m_{sx}-1)))(\alpha_s) = \widetilde{w}(\alpha_q),$$

lo cual es cierto gracias al segundo apartado del Lema 3.1.1. Ahora

$$\ell(\widetilde{w}) = \ell(w) - m_{xs} \leqslant \ell(w) - 2 < \ell(w) - 1 = \ell(u),$$

por lo que gracias a la hipótesis de inducción se tiene que $\widetilde{w} \cdot \sigma_x = \sigma_s$. Por otro lado se tiene que

$$\mathrm{Prod}_R(s,x,m_{sx}-1) \cdot \sigma_s = \mathrm{Prod}_R(\tau_s,\tau_x,m_{sx}-1)\sigma_s\mathrm{Prod}_R(\tau_s,\tau_x,m_{sx}-1)^{-1} = \sigma_q,$$

lo cual es cierto gracias a las relaciones en $VA[\Gamma]$. Por lo tanto

$$u \cdot \sigma_s = \widetilde{w}\mathrm{Prod}_R(s,x,m_{xs}-1) \cdot \sigma_s = \widetilde{w} \cdot \sigma_q = \sigma_t.$$

□

Este lema nos permite definir uno de los objetos que mayor relevancia tendrá en este capítulo, pues el resto de los resultados se basan en él. En concreto, el lema asegura la buena definición de este.

Definición (Grafo gorrito asociado a un grafo de Coxeter)**.** Sea Γ un grafo de Coxeter sobre un conjunto S, y sea $\Phi[\Gamma]$ el sistema de raíces asociado a Γ. Consideremos la matriz de Coxeter $\widehat{M} = (\widehat{m}_{\beta,\gamma})_{\beta,\gamma\in\Phi[\Gamma]}$ definida como sigue:

- $\widehat{m}_{\beta,\beta} = 1$ para todo $\beta \in \Phi[\Gamma]$.
- Dados $\beta, \gamma \in \Phi[\Gamma]$ distintos, si existe $w \in W[\Gamma]$ y $s, t \in S$ tal que $\beta = w(\alpha_s)$, $\gamma = w(\alpha_t)$ y $m_{st} \neq \infty$, tomamos $\widehat{m}_{\beta,\gamma} = m_{s,t}$. En caso contrario, tomamos $\widehat{m}_{\beta,\gamma} = \infty$.

Definimos el grafo gorrito[1] asociado a Γ, notado por $\widehat{\Gamma}$, como el grafo de Coxeter asociado a $\widehat{M}$.

Proposición 3.1.2. *Sea Γ un grafo de Coxeter sobre un conjunto S. Entonces $\widehat{\Gamma}$ está bien definido.*

Demostración. Para comprobar que la definición es correcta basta ver que dados $\beta, \gamma \in \Phi[\Gamma]$ distintos, $\widehat{m}_{\beta,\gamma}$ no depende de la elección de w, s o de t. Sean $w, w' \in W[\Gamma]$ y $s, t, s', t' \in S$ tal que $m_{st} \neq \infty$, $m_{s't'} \neq \infty$, $\beta = w(\alpha_s) = w'(\alpha_{s'})$ y $\gamma = w(\alpha_t) = w'(\alpha_{t'})$. Entonces

$$\langle \beta, \gamma \rangle = -2\cos\left(\frac{\pi}{m_{st}}\right) = -2\cos\left(\frac{\pi}{m_{s't'}}\right),$$

por lo que $m_{st} = m_{s't'}$, puesto que estos coeficientes son positivos. Se tiene así que la definición es correcta. □

Debido a que $\widehat{\Gamma}$ es un grafo de Coxeter podemos definir tanto el grupo de Coxeter como el grupo de Artin asociado a este grafo. Denotaremos por $\left\{\widehat{\delta}_\beta : \beta \in \Phi[\Gamma]\right\}$ el conjunto generador estándar de $A[\widehat{\Gamma}]$.

Teorema 3.1.1 (Teorema 2.3, [5])**.** *Sea Γ un grafo de Coxeter sobre un conjunto S. Para cada $\beta \in \Phi[\Gamma]$ tomemos $w \in W[\Gamma]$ y $s \in S$ tal que $\beta = w(\alpha_s)$. Definimos $\delta_\beta = w \cdot \sigma_s$. Entonces la aplicación*

$$\left\{\widehat{\delta}_\beta : \beta \in \Phi[\Gamma]\right\} \longrightarrow \{\delta_\beta : \beta \in \Phi[\Gamma]\}$$

definida como $\widehat{\delta}_\beta \longmapsto \delta_\beta$ induce un isomorfismo $\varphi : A[\widehat{\Gamma}] \longrightarrow KVA[\Gamma]$.

Demostración. La prueba consistirá en varios pasos. Primero veremos que $\{\delta_\beta : \beta \in \Phi[\Gamma]\}$ es un sistema generador de $KVA[\Gamma]$. Acto seguido veremos que la aplicación definida en el enunciado induce un homomorfismo entre $A[\widehat{\Gamma}]$ y $KVA[\Gamma]$, para concluir con que dicho homomorfismo es un isomorfismo.

Procedamos a comprobar que $\{\delta_\beta : \beta \in \Phi[\Gamma]\}$ es un sistema generador de $KVA[\Gamma]$. Sea $g \in KVA[\Gamma]$, entonces existen $w_0, \dots, w_p \in W[\Gamma]$, $s_1, \dots, s_p \in S$ y $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p \in \{\pm 1\}$ tal que

$$g = \iota_W(w_0)\sigma_{s_1}^{\varepsilon_1}\iota_W(w_1)\cdots\sigma_{s_p}^{\varepsilon_p}\iota_W(w_p),$$

donde ι_W es la sección definida en la Proposición 3.1.1. De hecho, esto es cierto para cualquier elemento de $VA[\Gamma]$. Para cada $i \in \{1, \dots, p\}$ tomemos $\beta_i := (w_0 w_1 \cdots w_{i-1})(\alpha_{s_i})$ y sea $w = w_0 w_1 \cdots w_p$. Entonces

$$g = \iota_W(w_0)\sigma_{s_1}^{\varepsilon_1}\iota_W(w_1)\cdots\sigma_{s_p}^{\varepsilon_p}\iota_W(w_p) = \iota_W(w_0)\sigma_{s_1}^{\varepsilon_1}(\iota_W(w_0))^{-1}\iota_W(w_0 w_1)\cdots\sigma_{s_p}^{\varepsilon_p}\iota_W(w_p) =$$

$$= \delta_{\beta_1}^{\varepsilon_1}\iota_W(w_0 w_1)\cdots\sigma_{s_p}^{\varepsilon_p}\iota_W(w_p) = \cdots = \delta_{\beta_1}^{\varepsilon_1}\delta_{\beta_2}^{\varepsilon_2}\cdots\delta_{\beta_p}^{\varepsilon_p}\iota_W(w).$$

Ahora, debido a que $g \in KVA[\Gamma]$, por definición se tiene que

$$1 = \pi_K(g) = \pi_K\left(\delta_{\beta_1}^{\varepsilon_1}\delta_{\beta_2}^{\varepsilon_2}\cdots\delta_{\beta_p}^{\varepsilon_p}\iota_W(w)\right) = (\pi_K \circ \iota_W)(w) = w.$$

Podemos apreciar que $\pi_K(\delta_{\beta_i}) = 1$, puesto que es una conjugación de σ_{s_i}, el cual está en $KVA[\Gamma]$. Concluimos que $w = 1$ y por lo tanto $g = \delta_{\beta_1}^{\varepsilon_1}\delta_{\beta_2}^{\varepsilon_2}\cdots\delta_{\beta_p}^{\varepsilon_p}$. Esto prueba que $KVA[\Gamma]$ es generado por el conjunto $\{\delta_\beta : \beta \in \Phi[\Gamma]\}$.

[1]El nombre de "grafo gorrito" ha sido puesto por mí, puesto que en el artículo este grafo no tiene nombre.

Pasemos a probar que existe un homomorfismo $\varphi : A[\widehat{\Gamma}] \longrightarrow KVA[\Gamma]$ tal que $\varphi(\widehat{\delta}_\beta) = \delta_\beta$ para todo $\beta \in \Phi[\Gamma]$. Tomemos $\beta, \gamma \in \Phi[\Gamma]$ distintos tal que $\widehat{m}_{\beta,\gamma} \neq \infty$. Entonces, por definición, existe $w \in W[\Gamma]$ y $s, t \in S$ tal que $w(\alpha_s) = \beta$, $w(\alpha_t) = \gamma$ y $\widehat{m}_{\beta,\gamma} = m_{st}$. Por lo tanto

$$\mathrm{Prod}_R(\delta_\gamma, \delta_\beta, \widehat{m}_{\beta,\gamma}) = \mathrm{Prod}_R\left(\iota_W(w)\sigma_s(\iota_W(w))^{-1}, \iota_W(w)\sigma_t(\iota_W(w))^{-1}, m_{st}\right) =$$

$$= \iota_W(w)\mathrm{Prod}_R\left(\sigma_s, \sigma_t, m_{st}\right)\iota_W(w)^{-1}.$$

Por las relaciones de $VA[\Gamma]$ sabemos que $\mathrm{Prod}_R\left(\sigma_s, \sigma_t, m_{st}\right) = \mathrm{Prod}_R\left(\sigma_t, \sigma_s, m_{st}\right)$, por lo que

$$\iota_W(w)\mathrm{Prod}_R\left(\sigma_s, \sigma_t, m_{st}\right)\iota_W(w)^{-1} = \iota_W(w)\mathrm{Prod}_R\left(\sigma_t, \sigma_s, m_{st}\right)\iota_W(w)^{-1} = \mathrm{Prod}_R(\delta_\beta, \delta_\gamma, \widehat{m}_{\beta,\gamma}).$$

Concluimos que φ es un homomorfismo. Notemos que este es sobreyectivo, puesto que sabemos que los elementos δ_β generan $KVA[\Gamma]$.

Pasemos a probar que es inyectivo, concluyendo que φ es un isomorfismo. Consideremos la acción de $W[\Gamma]$ sobre $\left\{\widehat{\delta}_\beta : \beta \in \Phi[\Gamma]\right\}$ definida como $w \cdot \widehat{\delta}_\beta := \widehat{\delta}_{w(\beta)}$. Esta acción se extiende a $A[\widehat{\Gamma}]$, puesto que los elementos sobre los que $W[\Gamma]$ actúa son un sistema generador de $A[\widehat{\Gamma}]$. Debido a que tenemos una acción de $W[\Gamma]$ sobre $A[\widehat{\Gamma}]$, podemos tomar el grupo $G = A[\widehat{\Gamma}] \rtimes W[\Gamma]$ dado por la acción que acabamos de definir. De la misma manera, podemos definir un homomorfismo $\widetilde{\varphi} : G \longrightarrow VA[\Gamma]$ inducido por φ y por ι_W. En efecto, sea $w \in W[\Gamma]$ y $\widehat{\delta}_\beta \in A[\widehat{\Gamma}]$. Definimos $\widetilde{\varphi}(w) = \iota_W(w)$ y $\widetilde{\varphi}(\widehat{\delta}_\beta) = \varphi(\widehat{\delta}_\beta)$. Para comprobar la buena definición nos basta ver que $\varphi(w \cdot \widehat{\delta}_\beta) = \iota_W(w)\varphi(\widehat{\delta}_\beta)(\iota_W(w))^{-1}$. Notemos que $w \cdot \widehat{\delta}_\beta = \widehat{\delta}_{w(\beta)}$, por lo que

$$\varphi(w \cdot \widehat{\delta}_\beta) = \varphi(\widehat{\delta}_{w(\beta)}) = \delta_{w(\beta)} = \iota_W(w)\delta_{w(\beta)}(\iota_W(w))^{-1} = \delta_{w(\beta)} = \iota_W(w)\varphi(\widehat{\delta}_{w(\beta)})(\iota_W(w))^{-1}.$$

Se tiene así la buena definición de $\widetilde{\varphi}$.

Definimos ahora la aplicación $\psi : \mathcal{S} \sqcup \mathcal{T} \longrightarrow G$, como $\psi(\sigma_s) = \widehat{\delta}_{\alpha_s}$ y $\psi(\tau_s) = s$ para todo $s \in S$, donde $\mathcal{S} \sqcup \mathcal{T}$ es el conjunto de generadores de $VA[\Gamma]$. Veamos que esta aplicación induce un homomorfismo $\psi : VA[\Gamma] \longrightarrow G$. Para ello, basta comprobar que se cumplen las relaciones. Sean $s, t \in S$ distintos tal que $m_{st} \neq \infty$. Entonces

$$\mathrm{Prod}_R(\psi(\sigma_t), \psi(\sigma_s), m_{st}) = \mathrm{Prod}_R\left(\widehat{\delta}_{\alpha_t}, \widehat{\delta}_{\alpha_s}, \widehat{m}_{\alpha_s,\alpha_t}\right) =$$

$$= \mathrm{Prod}_R\left(\widehat{\delta}_{\alpha_s}, \widehat{\delta}_{\alpha_t}, \widehat{m}_{\alpha_s,\alpha_t}\right) = \mathrm{Prod}_R(\psi(\sigma_s), \psi(\sigma_t), m_{st}).$$

También se tiene que

$$\mathrm{Prod}_R(\psi(\tau_t), \psi(\tau_s), m_{st}) = \mathrm{Prod}_R\left(t, s, m_{st}\right) = \mathrm{Prod}_R\left(s, t, m_{st}\right) = \mathrm{Prod}_R(\psi(\tau_s), \psi(\tau_t), m_{st}).$$

Es evidente que $(\psi(\tau_s))^2 = s^2 = 1$ para todo $s \in S$. Nos queda por comprobar la relación que mezcla los σ_s con los τ_t. Sean $s, t \in S$ distintos tal que $m_{st} \neq \infty$. Fijemos $x = s$ si m_{st} es par y $x = t$ si m_{st} es impar. Tomemos $w = \mathrm{Prod}_R(s, t, m_{st} - 1) \in W[\Gamma]$. Sabemos gracias al Lema 3.1.1 que $w(\alpha_s) = \alpha_x$. Entonces

$$\mathrm{Prod}_R(\psi(\tau_s), \psi(\tau_t), m_{st} - 1)\psi(\sigma_s) = \mathrm{Prod}_R(s, t, m_{st} - 1)\widehat{\delta}_{\alpha_s} = w\widehat{\delta}_{\alpha_s} = \widehat{\delta}_{w(\alpha_s)}w =$$

$$= \widehat{\delta}_{\alpha_x}\mathrm{Prod}_R(s, t, m_{st} - 1) = \psi(\sigma_x)\mathrm{Prod}_R(\psi(\tau_s), \psi(\tau_t), m_{st} - 1).$$

Concluimos que ψ induce un homomorfismo entre $VA[\Gamma]$ y G.

Veamos que $\psi \circ \widetilde{\varphi} = \mathrm{id}_G$. Sea $s \in S$. Entonces $(\psi \circ \widetilde{\varphi})(s) = \psi(\tau_s) = s$. Ahora, sea $\beta \in \Phi[\Gamma]$. Tomemos $w \in W[\Gamma]$ y $s \in S$ tal que $\beta = w(\alpha_s)$. Entonces

$$(\psi \circ \widetilde{\varphi})(\widehat{\delta}_\beta) = \psi(\delta_\beta) = \psi(\delta_{w(\alpha_s)}) = \psi(\iota_W(w)\sigma_s(\iota_W(w))^{-1}) = w\widehat{\delta}_{\alpha_s}w^{-1} =$$

$$= w \cdot \widehat{\delta}_{\alpha_s} = \widehat{\delta}_{w(\alpha_s)} = \widehat{\delta}_\beta.$$

Debido a que $S \cup \left\{\widehat{\delta}_\beta : \beta \in \Phi[\Gamma]\right\}$ genera a G por construcción, se tiene que $\psi \circ \widetilde{\varphi} = \mathrm{id}_G$. Notemos que esto implica que $\widetilde{\varphi}$ es inyectiva, y por ser este homomorfismo una extensión de φ, se deduce que φ es inyectiva. En resumen, φ es inyectiva y sobreyectiva, por lo que es isomorfismo. $\square$

Este resultado prueba que $KVA[\Gamma]$ es un grupo de Artin. En lo que sigue identificaremos $KVA[\Gamma]$ con $A[\widehat{\Gamma}]$. Sin embargo $KVA[\Gamma] \ncong A[\Gamma]$ salvo en el caso trivial, pues para cada vértice s de Γ se tiene que $\alpha_s \in \Phi[\Gamma]$ y puesto que $s(\alpha_s) = -\alpha_s$ se tiene que $-\alpha_s \in \Phi[\Gamma]$, por lo que $\widehat{\Gamma}$ contendrá más del doble de vértices de los que tiene Γ.

Aunque $KVA[\Gamma]$ no sea isomorfo a $A[\widehat{\Gamma}]$, siguiendo el razonamiento anterior podemos observar que Γ puede inyectarse como grafo en $\widehat{\Gamma}$, puesto que la orbita de la identidad de $W[\Gamma]$ es isomorfo a Γ. Esto motiva el siguiente resultado.

Corolario 3.1.1 (Corolario 2.4, [5]). *Sea Γ un grafo de Coxeter sobre S. Entonces el homomorfismo $\iota_A : A[\Gamma] \longrightarrow VA[\Gamma]$ definido como $\iota_A(s) = \sigma_s$ es inyectivo.*

Demostración. Sea Γ un grafo de Coxeter sobre un conjunto S. Dado $X \subset S$ denotaremos por Γ_X al subgrafo maximal de Γ que tenga a X por vértices. Gracias al Teorema de Van der Lek se tiene que el homomorfismo $\iota_X : A[\Gamma_X] \longrightarrow A[\Gamma]$ inducido por la inclusión es inyectivo.

Sea $\Pi = \{\alpha_s : s \in S\}$ el conjunto de las raíces simples de Γ. Notemos que la aplicación $S \longrightarrow \Pi$ definida como $s \longmapsto \alpha_s$ induce un isomorfismo entre Γ y $\widehat{\Gamma}_\Pi$, y por el Teorema de Van der Lek, induce también un isomorfismo entre $A[\Gamma]$ y $A[\widehat{\Gamma}_\Pi]$. Considerando la siguiente composición de homomorfismos

$$A[\Gamma] \xrightarrow{\cong} A[\widehat{\Gamma}_\Pi] \xrightarrow{\iota_\Pi} A[\widehat{\Gamma}] \xrightarrow{\cong} KVA[\Gamma] \xrightarrow{i} VA[\Gamma]$$

donde i es la inclusión canónica, se obtiene que $A[\Gamma]$ se inyecta en $VA[\Gamma]$ mediante ι_A, homomorfismo que resulta de las composiciones anteriores. ☐

Pasemos a dar una presentación de $PVA[\Gamma]$. Para ello definiremos la siguiente notación. Consideremos el conjunto abstracto $\left\{\widehat{\zeta}_\beta : \beta \in \Phi[\Gamma]\right\}$, que será biyectivo a $\Phi[\Gamma]$. Tomemos $\beta, \gamma \in \Phi[\Gamma]$ distintos tal que $\widehat{m}_{\beta,\gamma} \neq \infty$, y sea $m = \widehat{m}_{\beta,\gamma} \neq \infty$ para aliviar la notación. Definimos las raíces $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \Phi[\Gamma]$ de la siguiente tal que $\beta_1 = \beta$, y para todo $k \in \{2, \ldots, m\}$ tomamos

$$\beta_k = \begin{cases} \mathrm{Prod}_R\left(r_\gamma, r_\beta, k-1\right)(\gamma) & \text{si } k \text{ es par,} \\ \mathrm{Prod}_R\left(r_\beta, r_\gamma, k-1\right)(\beta) & \text{si } k \text{ es impar,} \end{cases}$$

donde $r_q(v) := v - \langle v, q\rangle\, q$ para todo $q, v \in \{\beta, \gamma\}$, y donde abusamos de notación denotando por producto a la composición de estos automorfismos. Una vez definidos los elementos β_k, sea

$$Z(\gamma, \beta, \widehat{m}_{\beta,\gamma}) = \widehat{\zeta}_{\beta_m} \cdots \widehat{\zeta}_{\beta_2} \widehat{\zeta}_{\beta_1},$$

elemento que entenderemos como una palabra sobre el conjunto $\left\{\widehat{\zeta}_\beta : \beta \in \Phi[\Gamma]\right\}$.

Denotaremos por $\widehat{PVA}[\Gamma]$ al grupo generado por $\left\{\widehat{\zeta}_\beta : \beta \in \Phi[\Gamma]\right\}$ y que tiene por relaciones

$$Z(\gamma, \beta, \widehat{m}_{\beta,\gamma}) = Z(\beta, \gamma, \widehat{m}_{\beta,\gamma})$$

para todo $\beta, \gamma \in \Phi[\Gamma]$ distintos tal que $\widehat{m}_{\beta,\gamma} \neq \infty$. Este grupo nos ayudará a dar una presentación de $PVA[\Gamma]$.

Teorema 3.1.2 (Teorema 2.6, [5]). *Sea Γ un grafo de Coxeter sobre un conjunto S. Para cada raíz $\beta \in \Phi[\Gamma]$ sea $w \in W[\Gamma]$ y $s \in S$ tal que $\beta = w(\alpha_s)$. Definimos $\zeta_\beta = w \cdot (\tau_s\sigma_s)$. Entonces la aplicación $\left\{\widehat{\zeta}_\beta : \beta \in \Phi[\Gamma]\right\} \longrightarrow \{\zeta_\beta : \beta \in \Phi[\Gamma]\}$ definida como $\widehat{\zeta}_\beta \longmapsto \zeta_\beta$ induce un isomorfismo entre $\widehat{PVA}[\Gamma]$ y el grupo de Artin virtual puro $PVA[\Gamma]$.*

Demostración. Esta prueba será similar a la prueba del Teorema 3.1.1. La haremos también en tres pasos. Primero, probaremos que el conjunto $\{\zeta_\beta : \beta \in \Phi[\Gamma]\}$ es un conjunto de generadores de $PVA[\Gamma]$. Acto seguido probaremos que la aplicación del enunciado induce un homomorfismo, y por último comprobaremos que dicho homomorfismo es un isomorfismo.

Procedemos a comprobar que $\{\zeta_\beta : \beta \in \Phi[\Gamma]\}$ es un conjunto de generadores de $PVA[\Gamma]$. Tomemos $g \in PVA[\Gamma]$, entonces existen $w_0, \dots, w_p \in W[\Gamma]$, $s_1, \dots, s_p \in S$ y $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p \in \{\pm 1\}$ tal que

$$g = \iota_W(w_0)\,(\tau_{s_1}\sigma_{s_1})^{\varepsilon_1}\,\iota_W(w_1)\cdots\left(\tau_{s_p}\sigma_{s_p}\right)^{\varepsilon_p}\,\iota_W(w_p),$$

donde ι_W es la sección definida en la Proposición 3.1.1. De nuevo, cualquier elemento de $VA[\Gamma]$ puede escribirse de esta forma. Para cada $i \in \{1, \dots, p\}$ tomemos $\beta_i := (w_0 \cdots w_{i-1})(\alpha_{s_i})$ y $w = w_0 \cdots w_p$. Entonces

$$\begin{aligned} g &= \iota_W(w_0)\,(\tau_{s_1}\sigma_{s_1})^{\varepsilon_1}\,\iota_W(w_1)\cdots\left(\tau_{s_p}\sigma_{s_p}\right)^{\varepsilon_p}\,\iota_W(w_p) = \\ &= \iota_W(w_0)\,(\tau_{s_1}\sigma_{s_1})^{\varepsilon_1}\,(\iota_W(w_0))^{-1}\iota_W(w_0w_1)\cdots\left(\tau_{s_p}\sigma_{s_p}\right)^{\varepsilon_p}\,\iota_W(w_p) = \\ &= \zeta_{\beta_1}^{\varepsilon_1}\iota_W(w_0w_1)\cdots\left(\tau_{s_p}\sigma_{s_p}\right)^{\varepsilon_p}\,\iota_W(w_p) = \cdots = \zeta_{\beta_1}^{\varepsilon_1}\cdots\zeta_{\beta_p}^{\varepsilon_p}\iota_W(w). \end{aligned}$$

Como $g \in PVA[\Gamma]$ se tiene que

$$1 = \pi_P(g) = \pi_P\left(\zeta_{\beta_1}^{\varepsilon_1}\cdots\zeta_{\beta_p}^{\varepsilon_p}\iota_W(w)\right) = (\pi_P \circ \iota_W)(w) = w,$$

por lo que $w = 1$. Obtenemos que $g = \zeta_{\beta_1}^{\varepsilon_1}\cdots\zeta_{\beta_p}^{\varepsilon_p}$, y por la arbitrariedad de g deducimos que $\{\zeta_\beta : \beta \in \Phi[\Gamma]\}$ es un conjunto de generadores de $PVA[\Gamma]$.

Veamos que la aplicación definida en el enunciado induce un homomorfismo $\varphi : \widehat{PVA}[\Gamma] \longleftarrow PVA[\Gamma]$. Sean $\beta, \gamma \in \Phi[\Gamma]$ distintos tal que $\widehat{m}_{\beta,\gamma} \neq \infty$. Entonces existe $w \in W[\gamma]$ y $s, t \in S$ tal que $\beta = w(\alpha_s)$, $\gamma = w(\alpha_t)$ y $\widehat{m}_{\beta,\gamma} = m_{st}$. Para aliviar la notación sea $m = m_{st} = \widehat{m}_{\beta,\gamma}$. Tomemos las raíces $\beta_1, \dots, \beta_m \in \Phi[\Gamma]$ tal que $\beta_1 = \beta$ y para todo $k \in \{2, \dots, m\}$ sea

$$\beta_k = \begin{cases} \mathrm{Prod}_R\left(r_\gamma, r_\beta, k-1\right)(\gamma) & \text{si } k \text{ es par,} \\ \mathrm{Prod}_R\left(r_\beta, r_\gamma, k-1\right)(\beta) & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

Entonces $Z(\gamma, \beta, \widehat{m}_{\beta,\gamma}) = \widehat{\zeta}_{\beta_m}\cdots\widehat{\zeta}_{\beta_1}$, pues es la definición que dimos antes del comiendo de esta prueba. Podemos apreciar que $r_\beta(\alpha_q) = (wsw^{-1})(\alpha_q)$ y $r_\gamma(\alpha_q) = (wtw^{-1})(\alpha_q)$ para todo $q \in S$, pues $\beta = w(\alpha_s)$ y $\gamma = w(\alpha_t)$.

Sea $k \in \{1, \dots, m\}$. Si k es impar, entonces

$$\begin{aligned} \beta_k &= \mathrm{Prod}_R\left(r_\beta, r_\gamma, k-1\right)(\beta) = \mathrm{Prod}_R\left(wsw^{-1}, wtw^{-1}, k-1\right)(w(\alpha_s)) = \\ &= \left(w\mathrm{Prod}_R(s,t,k-1)w^{-1}w\right)(\alpha_s) = \left(w\mathrm{Prod}_R(s,t,k-1)\right)(\alpha_s). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \zeta_{\beta_k} &= ((w\mathrm{Prod}_R(s,t,k-1))\cdot\zeta_{\alpha_s} = \\ &= \iota_W(w)\mathrm{Prod}_R(\tau_s,\tau_t,k-1)(\tau_s\sigma_s)\mathrm{Prod}_R(\tau_s,\tau_t,k-1)^{-1}(\iota_W(w))^{-1} = \\ &= \iota_W(w)\mathrm{Prod}_R(\tau_t,\tau_s,k)\sigma_s\mathrm{Prod}_R(\tau_s,\tau_t,k-1)^{-1}(\iota_W(w))^{-1}. \end{aligned}$$

De forma análoga, se prueba que si k es par se tiene que

$$\zeta_{\beta_k} = \iota_W(w)\mathrm{Prod}_R(\tau_s,\tau_t,k)\sigma_t\mathrm{Prod}_R(\tau_t,\tau_s,k-1)^{-1}(\iota_W(w))^{-1}.$$

Por lo tanto

$$Z(\gamma,\beta,\widehat{m}_{\beta,\gamma}) = \zeta_{\beta_m}\cdots\zeta_{\beta_2}\zeta_{\beta_1} = \iota_W(w)\mathrm{Prod}_L(\tau_s,\tau_t,m)\mathrm{Prod}_R(\sigma_t,\sigma_s,m)(\iota_W(w))^{-1}.$$

Siguiendo el mismo procedimiento con $Z(\beta,\gamma,\widehat{m}_{\beta,\gamma})$ se obtiene que

$$Z(\beta,\gamma,\widehat{m}_{\beta,\gamma}) = \zeta_{\gamma_m}\cdots\zeta_{\gamma_2}\zeta_{\gamma_1} = \iota_W(w)\mathrm{Prod}_L(\tau_s,\tau_t,m)\mathrm{Prod}_R(\sigma_t,\sigma_s,m)(\iota_W(w))^{-1}.$$

Concluimos que $Z(\beta,\gamma,\widehat{m}_{\beta,\gamma}) = Z(\gamma,\beta,\widehat{m}_{\beta,\gamma})$, por lo que φ es un homomorfismo.

Procedamos a comprobar que es un isomorfismo. Por la forma de φ sabemos que es sobreyectiva, puesto que el conjunto $\{\zeta_\beta : \beta \in \Phi[\Gamma]\}$ genera a $PVA[\Gamma]$. Definimos la acción de $W[\Gamma]$ sobre el conjunto

$\left\{\widehat{\zeta}_\beta : \beta \in \Phi[\Gamma]\right\}$ como $w \cdot \widehat{\zeta}_\beta := \widehat{\zeta}_{w(\beta)}$. Esta acción se extiende a una acción de $W[\Gamma]$ sobre $\widehat{PVA}[\Gamma]$. Gracias a esta acción, podemos construir el grupo $G = \widehat{PVA}[\Gamma] \rtimes W[\Gamma]$. Veamos que los homomorfismos $\varphi : \widehat{PVA}[\Gamma] \longrightarrow PVA[\Gamma] \subset VA[\Gamma]$ e $\iota_W : W[\Gamma] \longrightarrow VA[\Gamma]$ inducen un homomorfismo $\widetilde{\varphi} : G \longrightarrow VA[\Gamma]$. Notemos que basta verificar que $\varphi\left(w \cdot \widehat{\zeta}_\beta\right) = \iota_W(w)\varphi(\widehat{\zeta}_\beta)(\iota_W(w))^{-1}$ para cualquier $\beta \in \Phi[\Gamma]$ y $w \in W[\Gamma]$. En efecto

$$\varphi\left(w \cdot \widehat{\zeta}_\beta\right) = \varphi\left(\widehat{\zeta}_{w(\beta)}\right) = \zeta_{w(\beta)} = \iota_W(w)\zeta_\beta(\iota_W(w))^{-1} = \iota_W(w)\varphi\left(\widehat{\zeta}_\beta\right)(\iota_W(w))^{-1}.$$

Consideremos la aplicación $\psi : \mathcal{S} \sqcup \mathcal{T} \longrightarrow G$ definida como $\psi(\sigma_s) = s\widehat{\zeta}_{\alpha_s}$ y $\psi(\tau_s) = s$ para todo $s \in S$. Veamos que ψ induce un homomorfismo $\psi : VA[\Gamma] \longrightarrow G$. Sea $s, t \in S$ distintos tal que $m_{st} \neq \infty$. Entonces

$$\mathrm{Prod}_R\left(\psi(\tau_s), \psi(\tau_t), m_{st}\right) = \mathrm{Prod}_R\left(s, t, m_{st}\right) = \mathrm{Prod}_R\left(t, s, m_{st}\right) = \mathrm{Prod}_R\left(\psi(\tau_t), \psi(\tau_s), m_{st}\right).$$

De la misma forma $\psi(\tau_s)^2 = s^2 = 1$ para todo $s \in S$. Para las últimas dos relaciones tomemos $m = m_{st}$ y $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \Phi[\Gamma]$ definidos como $\beta_1 = \alpha_s$ y para todo $k \in \{2, \ldots, m\}$ consideramos

$$\beta_k = \begin{cases} \mathrm{Prod}_R(t, s, k-1)(\alpha_t) & \text{si } k \text{ es par,} \\ \mathrm{Prod}_R(s, t, k-1)(\alpha_s) & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{Prod}_R\left(\psi(\sigma_s), \psi(\sigma_t), m_{st}\right) &= \cdots s\widehat{\zeta}_{\alpha_s} t\widehat{\zeta}_{\alpha_t} s\widehat{\zeta}_{\alpha_s} = \mathrm{Prod}_R(t, s, m_{st})\widehat{\zeta}_{\beta_m} \cdots \widehat{\zeta}_{\beta_1} = \\ &= \mathrm{Prod}_R(t, s, m_{st}) Z(\alpha_t, \alpha_s, \widehat{m}_{\alpha_s, \alpha_t}). \end{aligned}$$

De forma análoga se comprueba que

$$\mathrm{Prod}_R\left(\psi(\sigma_t), \psi(\sigma_s), m_{st}\right) = \mathrm{Prod}_R(s, t, m_{st}) Z(\alpha_s, \alpha_t, \widehat{m}_{\alpha_s, \alpha_t}).$$

Por la definición de $\widehat{PVA}[\Gamma]$ sabemos que $Z(\alpha_t, \alpha_s, \widehat{m}_{\alpha_s, \alpha_t}) = Z(\alpha_s, \alpha_t, \widehat{m}_{\alpha_s, \alpha_t})$, y por las relaciones de $W[\Gamma]$ se tiene que $\mathrm{Prod}_R(s, t, m_{st}) = \mathrm{Prod}_R(t, s, m_{st})$, por lo que

$$\mathrm{Prod}_R\left(\psi(\sigma_t), \psi(\sigma_s), m_{st}\right) = \mathrm{Prod}_R\left(\psi(\sigma_s), \psi(\sigma_t), m_{st}\right).$$

Por último, sea $w = \mathrm{Prod}_R(t, s, m_{st})$. Además, tomemos $x = s$ si m_{st} es par o $x = t$ si m_{st} es impar. Entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{Prod}_R(\psi(\tau_s), \psi(\tau_t), m_{st} - 1)\psi(\sigma_s) &= \mathrm{Prod}_R(s, t, m_{st} - 1)s\widehat{\zeta}_{\alpha_s} = w\widehat{\zeta}_{\alpha_s} = \\ &= \widehat{\zeta}_{w(\alpha_s)} w = \widehat{\zeta}_{w(\alpha_s)}\mathrm{Prod}_R(t, s, m_{st}) = \widehat{\zeta}_{w(\alpha_s)} x\mathrm{Prod}_R(s, t, m_{st} - 1) = \\ &= x\widehat{\zeta}_{(xw)(\alpha_s)}\mathrm{Prod}_R(s, t, m_{st} - 1) = \psi(\sigma_x)\mathrm{Prod}_R(\psi(\tau_s), \psi(\tau_t), m_{st} - 1). \end{aligned}$$

Aquí hemos usado el Lema 3.1.1, pues

$$(xw)(\alpha_s) = \mathrm{Prod}_R(s, t, m_{st} - 1)(\alpha_s) = \alpha_x.$$

Concluimos que ψ induce un homomorfismo entre $VA[\Gamma]$ y G. Por último, un cálculo análogo al de la prueba del Teorema 3.1.1 muestra que $\psi \circ \widetilde{\varphi} = \mathrm{id}_G$. Por lo tanto, $\widetilde{\varphi}$ es inyectiva, y por ser este homomorfismo una extensión de φ, se deduce que φ es inyectivo, y por ende, un isomorfismo. $\square$

3.2. Trivialidad del centro

En esta sección probaremos, como el título sugiere, que el centro de los grupos de Artin virtuales es trivial. Este resultado tiene bastante relevancia, pues el cálculo del centro para los grupos de Artin en general es un problema abierto y, sin embargo, para su generalización virtual se ha podido calcular. Comencemos dando algunos resultados sobre los grupos de Coxeter.

Proposición 3.2.1 (Lema 4.6.1, [10]). *Sea Γ un grafo de Coxeter sobre un conjunto S. Entonces existe un elemento $w_0 \in W[\Gamma]$ tal que las siguientes condiciones con equivalentes:*

- *Para todo $u \in W[\Gamma]$ se tiene que $\ell(w_0) = \ell(u) + \ell(u^{-1}w_0)$.*
- *Para todo $s \in S$ se tiene que $\ell(w_0) > \ell(sw_0)$.*

Es más, este elemento w_0 existe si y solo si $W[\Gamma]$ es un grupo finito, y en caso de existir cumple las siguientes propiedades:

- *w_0 es único.*
- *$w_0^2 = 1$.*
- *$w_0 S w_0 = S$.*
- *Para todo $s \in S$ se tiene que $w_0(\alpha_s) = -\alpha_s$.*

Puede encontrarse la prueba de esta proposición en la referencia adjunta.

Definición. Palabra de mayor longitud en un grupo de Coxeter Sea Γ un grafo de Coxeter sobre un conjunto S. Si $W[\Gamma]$ es finito, llamaremos palabra de mayor longitud al único elemento que cumple las propiedades de la Proposición 3.2.1.

Proposición 3.2.2 (Teorema 2.3, [13]). *Sea Γ un grafo de Coxeter conexo sobre un conjunto S. Entonces:*

- *Si $W[\Gamma]$ es infinito se tiene que $Z(W[\Gamma]) = \{1\}$.*
- *Si $W[\Gamma]$ es finito, sea $w_0 \in W[\Gamma]$ la palabra de mayor longitud. Entonces $Z(W[\Gamma]) = \{1, w_0\}$ si w_0 es central o $Z(W[\Gamma]) = \{1\}$ en caso contrario.*

De nuevo, puede encontrarse la prueba de este resultado en la referencia adjunta. Procedemos a probar la trivialidad del centro. Para ello, el siguiente resultado será esencial.

Teorema 3.2.1 (Teorema 3.3, [5]). *Sea Γ un grafo de Coxeter sobre un conjunto S. Consideremos el $W[\Gamma]$ como subgrupo de $VA[\Gamma]$ mediante la inmersión $\iota_W : W[\Gamma] \hookrightarrow VA[\Gamma]$. Entonces*

$$\mathcal{C}_{VA[\Gamma]}(W[\Gamma]) \cong Z(W[\Gamma]),$$

donde $\mathcal{C}_{VA[\Gamma]}(W[\Gamma])$ denota al centralizador de $W[\Gamma]$ en $VA[\Gamma]$.

Demostración. En esta prueba, dado $X \subset \Phi[\Gamma]$ denotaremos por $\widehat{\Gamma}_X$ al subgrafo maximal de $\widehat{\Gamma}$ que tiene a X por vértices. Por el Teorema de Van der Lek sabemos que $A[\widehat{\Gamma}_X]$ es un subgrupo de $A[\widehat{\Gamma}]$, y gracias al Teorema 3.1.1 sabemos que $A[\widehat{\Gamma}] \cong KVA[\Gamma]$, por lo que podemos identificar $A[\widehat{\Gamma}_X]$ como un subgrupo de $KVA[\Gamma]$ generado por $\{\delta_\beta : \beta \in X\}$ usando la notación definida en el Teorema 3.1.1. Es más, de nuevo, gracias al Teorema de Van der Lek, dada cualquier familia $\{X_i\}_{i\in I}$ tal que $X_i \subset \Phi[\Gamma]$ se tiene que

$$\bigcap_{i\in I} A[\widehat{\Gamma}_{X_i}] \cong A\left[\bigcap_{i\in I} \widehat{\Gamma}_{X_i}\right] \cong A\left[\widehat{\Gamma}_{\bigcap_{i\in I} X_i}\right].$$

Procedamos con la prueba. Lo probaremos por doble inclusión. Notemos que $Z(W[\Gamma]) \subseteq \mathcal{C}_{VA[\Gamma]}(W[\Gamma])$, pues si un elemento es central en $W[\Gamma]$ conmutará con los elementos en su imagen por cualquier homomorfismo. Veamos la inclusión contraria. Sea $g \in \mathcal{C}_{VA[\Gamma]}(W[\Gamma])$. Como $VA[\Gamma] \cong KVA[\Gamma] \rtimes W[\Gamma]$ existirán $h \in KVA[\Gamma]$ y $w \in W[\Gamma]$ tal que $g = hw$. Como g es un elemento del centralizador de $W[\Gamma]$ en $VA[\Gamma]$ y $\pi_K(g) = w$, w estará en el centro de $W[\Gamma]$, por lo que $h \in \mathcal{C}_{VA[\Gamma]}(W[\Gamma])$.

Dado $\beta \in \Phi^+[\Gamma]$, consideremos $X_\beta^+ := \Phi[\Gamma]\backslash\{-\beta\}$, $X_\beta^- := \Phi[\Gamma]\backslash\{\beta\}$ e $Y_\beta = \Phi[\Gamma]\backslash\{\beta, -\beta\}$. Podemos apreciar que $X_\beta^+ \cup X_\beta^- = \Phi[\Gamma]$ y $X_\beta^+ \cap X_\beta^- = Y_\beta$, por lo que gracias al Lema 2.3.2 sabemos que

$$KVA[\Gamma] \cong A[\widehat{\Gamma}] \cong A[\widehat{\Gamma}_{X_\beta^+}] *_{A[\widehat{\Gamma}_{Y_\beta}]} A[\widehat{\Gamma}_{X_\beta^-}].$$

Recordemos que dado $\beta \in \Phi[\Gamma]$ denotamos por r_β al homomorfismo de espacios vectoriales dado por $r_\beta(v) = v - \langle v, \beta\rangle \beta$. En particular, $r_\beta(\beta) = -\beta$ y $r_\beta(-\beta) = \beta$. Por lo tanto, podemos apreciar que $r_\beta\left(X_\beta^+\right) = X_\beta^-$, $r_\beta\left(X_\beta^-\right) = X_\beta^+$ y $r_\beta(Y_\beta) = Y_\beta$. Debido a que podemos identificar r_β con un elemento w' de $W[\Gamma]$ y que h es un elemento del centralizador de $W[\Gamma]$ en $VA[\Gamma]$, se tiene que w' y h conmutan, por lo que $w' \cdot h = h$, pues $W[\Gamma]$ actúa sobre $VA[\Gamma]$ por conjugación. Haciendo uso del Lema 2.3.3 sabemos que $h \in A[\widehat{\Gamma}_{Y_\beta}]$. Notemos que

$$\bigcap_{\beta\in\Phi^+[\Gamma]} Y_\beta = \varnothing,$$

por lo que haciendo uso del Teorema de Van der Lek se deduce que

$$h \in \bigcap_{\beta\in\Phi^+[\Gamma]} A[\widehat{\Gamma}] \cong A\left[\bigcap_{\beta\in\Phi^+[\Gamma]} Y_\beta\right] \cong A[\varnothing] = \{1\}.$$

Por lo tanto $g = w \in Z(W[\Gamma])$. Se concluye que $\mathcal{C}_{VA[\Gamma]}(W[\Gamma]) \cong Z(W[\Gamma])$. □

Corolario 3.2.1 (Corolario 3.4, [5]). *Sea Γ un grafo de Coxeter sobre un conjunto S. Entonces*

$$Z(VA[\Gamma]) = \{1\}.$$

Demostración. En las condiciones del enunciado sean $\Gamma_1, \dots, \Gamma_l$ las componentes conexas de Γ. Por como hemos definido las relaciones a partir de Γ se tiene que

$$VA[\Gamma] = VA[\Gamma_1] \times \cdots \times VA[\Gamma_l],$$

por lo que

$$Z(VA[\Gamma]) = Z(VA[\Gamma_1]) \times \cdots \times Z(VA[\Gamma_l]).$$

Por lo tanto podemos estudiar el caso en el que Γ es conexo sin pérdida de generalidad. Notemos que $Z(VA[\Gamma])$ está contenido en el centralizador de cualquier subconjunto de $VA[\Gamma]$, en concreto, está contenido en $\mathcal{C}_{VA[\Gamma]}(W[\Gamma])$. Haciendo uso del Teorema 3.2.1 y de la Proposición 3.2.2 se tiene que $Z(VA[\Gamma]) = \{1\}$ si $W[\Gamma]$ es infinito o si es finito pero su palabra de máxima longitud no es central.

Supongamos que $W[\Gamma]$ es finito y que el elemento de máxima longitud del grupo, que denotaremos por w_0, es central. Entonces $Z(VA[\Gamma]) \subseteq \{1, w_0\}$. De nuevo, gracias a la Proposición 3.2.2 sabemos que para todo $s \in S$ se tiene que $w_0(\alpha_s) = -\alpha_s$. Por lo tanto $w_0 \cdot \delta_{\alpha_s} = \delta_{-\alpha_s} \neq \delta_{\alpha_s}$, donde observamos que w_0 y $\delta_{\alpha_s} = \sigma_s$ no conmutan. Concluimos que $Z(VA[\Gamma]) = \{1\}$. □

Lema 3.2.1 (Corolario 4.5, [16]). *Sean G_1, G_2 y H tres grupos tal que $G = G_1 *_H G_2$ es un producto amalgamado. Entonces*

$$Z(G) = Z(G_1) \cap Z(G_2) \cap H,$$

donde entendemos G_1 y G_2 como subgrupos de G.

Demostración. Procederemos por doble inclusión. Sea $g \in Z(G_1) \cap Z(G_2) \cap H$ y consideremos $\widetilde{g} \in G$. Haciendo uso del Teorema 2.3.1 sabemos que $\widetilde{g} = g_1 g_2 \cdots g_n h$ donde si $g_i \in G_1 \backslash H$ entonces $g_{i+1} \in G_2 \backslash H$ y viceversa, y $h \in H$. Debido a que g conmuta con los elementos de G_1 y de G_2, y que $G_1 \cap G_2 = H$ por ser un producto amalgamado, se tiene que $g\widetilde{g} = \widetilde{g}g$. Por lo tanto, $g \in Z(G)$.

Sea $g \in Z(G)$. Como consecuencia directa del Teorema 2.3.1 se deduce que $g \in H$, pues g ha de conmutar con todo elemento de $G_i \backslash H$ con $i \in \{1, 2\}$, lo cual ocurre si y solo si $g \in H$. Ahora, debido a que H es subgrupo de G_1 y de G_2, y que $g \in H$ conmuta con los elementos de ambos grupos, se tiene que $g \in Z(G_1) \cap Z(G_2) \cap H$. Concluimos que $Z(G) = Z(G_1) \cap Z(G_2) \cap H$. □

Corolario 3.2.2 (Proposición 3.5, [5]). *Sea Γ un grafo de Coxeter sobre un conjunto S. Entonces*

$$Z(KVA[\Gamma]) = \{1\}.$$

Demostración. Consideremos $\beta \in \Phi^+[\Gamma]$. Tomemos los conjuntos $X_\beta^+ := \Phi[\Gamma]\backslash\{-\beta\}$, $X_\beta^- := \Phi[\Gamma]\backslash\{\beta\}$ e $Y_\beta = \Phi[\Gamma]\backslash\{\beta, -\beta\}$. Podemos apreciar que $X_\beta^+ \cup X_\beta^- = \Phi[\Gamma]$ y $X_\beta^+ \cap X_\beta^- = Y_\beta$, por lo que gracias al Lema 2.3.2 sabemos que

$$KVA[\Gamma] \cong A[\widehat{\Gamma}] \cong A[\widehat{\Gamma}_{X_\beta^+}] *_{A[\widehat{\Gamma}_{Y_\beta}]} A[\widehat{\Gamma}_{X_\beta^-}].$$

Haciendo uso del Lema 3.2.1 se tiene que $Z(KVA[\Gamma]) \subseteq A[\widehat{\Gamma}_{Y_\beta}]$. Por lo tanto, por el Teorema de Van der Lek se concluye que

$$Z(KVA[\Gamma]) \subseteq \bigcap_{\beta\in\Phi^+[\Gamma]} A[\widehat{\Gamma}_{Y_\beta}] \cong A\left[\bigcap_{\beta\in\Phi^+[\Gamma]} \widehat{\Gamma}_{Y_\beta}\right] = A[\varnothing] = \{1\}.$$

□

Notemos que este corolario es, quizás, el resultado de mayor peso de este capítulo. Recordemos que el problema del cálculo del centro para los grupos de Artin en general sigue abierto, pero acabamos de mostrar que, dado un grafo de Coxeter cualquiera el grupo de Artin que resulta de su grafo gorrito asociado tiene centro trivial.

En el artículo que hemos trabajado en este capítulo ([5]), se dan más resultados sobre los grupos de Artin virtuales los cuales tienen un gran peso en el estudio de los grupos de Artin. Entre estos, se ha probado que dado un grafo de Coxeter Γ de tipo esférico, entonces $A[\widehat{\Gamma}]$ satisface la conjetura $K(\pi, 1)$[2] (Teorema 6.3, [5]), problema que sigue abierto para el caso de los grupos de Artin de tipo esférico. También se ha probado si Γ es de tipo afín, entonces $VA[\Gamma]$ es virtualmente libre de torsión (Teorema 6.6, [5]), por lo tanto, debido a que $VA[\Gamma]/KVA[\Gamma] \cong W[\Gamma]$ y que $KVA[\Gamma] \cong A[\widehat{\Gamma}]$ se deduce que $A[\widehat{\Gamma}]$ es libre de torsión si Γ es de tipo afín. Por último, si Γ es de tipo esférico o afín, se resuelve el problema de la palabra para $VA[\Gamma]$ (Teorema 5.1, [5]) a partir de la caracterización de los elementos de $KVA[\Gamma]$. Es cierto que este último no resuelve el problema de la palabra para $A[\widehat{\Gamma}]$, al menos de forma directa, aunque quizás sea un punto de partida para obtener dicho resultado.

[2]Puede encontrarse más información sobre esta conjetura en [17].

A | Sobre grupos de Coxeter

En esta sección daremos la prueba completa del Teorema 1.1.2. Será relevante mostrar la prueba de este, dada la importancia que tiene a lo largo de este trabajo.

Teorema A.0.1 (Teorema, Sección 5.4, [14]). *Sea S un conjunto numerable, Γ un grafo de Coxeter sobre S y $W[\Gamma]$ el grupo de Coxeter asociado a Γ. Sea $s \in S$ y $w \in W[\Gamma]$. Consideremos $\beta \in \Phi[\Gamma]$ tal que*

$$\beta = w(\alpha_s) = \sum_{r \in S} \lambda_r \alpha_r.$$

con $\lambda_r \in \mathbb{R}$ para todo $r \in S$. Entonces

- *$\ell(ws) = \ell(w) + 1$ si y solo si $\lambda_r \geqslant 0$ para todo $r \in S$.*
- *$\ell(ws) = \ell(w) - 1$ si y solo si $\lambda_r \leqslant 0$ para todo $r \in S$.*

Demostración. Supongamos que $\ell(ws) = \ell(w) + 1$ para algún $s \in S$ y veamos que los anteriores $\lambda_r \geqslant 0$ para todo $r \in S$. Procederemos por inducción sobre la longitud de w. Supongamos que $\ell(w) = 0$, entonces $w = 1$, por lo que dado $s \in S$, se tiene que $\ell(ws) = \ell(s) = 1 = \ell(w) + 1$, y a su vez $w(\alpha_s) = \alpha_s$, por lo que el resultado es cierto.

Supongamos que $\ell(w) > 0$. Consideremos $\widetilde{s} \in S$ tal que $\ell(w\widetilde{s}) = \ell(w) - 1$. Notemos que siempre podemos encontrar dicho $\widetilde{s}$, pues basta considerar una expresión reducida de w escrita en elementos de S y tomar $\widetilde{s}$ como el último de estos elementos, lo cual cumple las hipótesis, pues tiene orden 2. Por otro lado, $\ell(ws) = \ell(w) + 1$ por hipótesis, por lo que $s \neq \widetilde{s}$. Sea $X = \{s, \widetilde{s}\} \subset S$ y consideremos el subgrupo $W[\Gamma_X]$ de $W[\Gamma]$. Tomemos

$$A = \left\{v \in W[\Gamma] : v^{-1}w \in W[\Gamma_X] \text{ y } \ell(v) + \ell\left(v^{-1}w\right) = \ell(w)\right\}.$$

Notemos que $w \in A$, puesto que $w^{-1}w = 1 \in W[\Gamma_X]$ y

$$\ell(w) + \ell\left(w^{-1}w\right) = \ell(w) + \ell(1) = \ell(w).$$

Tomemos $v \in A$ tal que $\ell(v) \leqslant \ell(a)$ para todo $a \in A$, y definimos $v_X := v^{-1}w \in W[\Gamma_X]$. Entonces se tiene que $w = vv_X$, y por construcción, $\ell(w) = \ell(v) + \ell(v_X)$. Por otro lado, podemos observar que $w\widetilde{s} \in A$, puesto que $(w\widetilde{s})^{-1} w = \widetilde{s}w^{-1}w = \widetilde{s} \in W[\Gamma_X]$ y

$$\ell\left(w\widetilde{s}\right) + \ell\left((w\widetilde{s})^{-1} w\right) = \ell(w) - 1 + \ell(\widetilde{s}) = \ell(w) - 1 + 1 = \ell(w),$$

donde hemos usado que $\widetilde{s}$ tiene orden 2 por ser un elemento de S y que $\ell\left(w\widetilde{s}\right) = \ell(w) - 1$ por elección. Ahora, por como hemos tomado v, se tiene que $\ell(v) \leqslant \ell(w\widetilde{s}) = \ell(w) - 1$. La elección de v junto con los elementos s y $\widetilde{s}$ serán la base para llevar a cabo a inducción.

Procedamos a comparar $\ell(v)$ con $\ell(vs)$. Supongamos que $\ell(vs) < \ell(v)$, esto es, $\ell(vs) = \ell(v) - 1$. Entonces

$$\ell(w) = \ell\left(vs(vs)^{-1}w\right) \leqslant \ell(vs) + \ell\left((vs)^{-1}w\right) = \ell(v) - 1 + \ell\left(sv^{-1}w\right).$$

Notemos que $\ell(sv^{-1}w) \leqslant \ell(v^{-1}w) + 1$, pues $\ell(s) = 1$. Por lo tanto

$$\ell(w) \leqslant \ell(v) - 1 + \ell(v^{-1}w) + 1 = \ell(v) + \ell(v^{-1}w) = \ell(w).$$

Esto implica que las desigualdades anteriores han de ser igualdades, y por lo tanto se obtiene que $\ell(w) = \ell\left(vs\right) + \ell((vs)^{-1}w\right)$, por lo que $vs \in A$, lo cual es absurdo, pues v lo hemos tomado de longitud mínima, y $\ell(vs) < \ell(v)$. Entonces, se tiene que $\ell(vs) > \ell(v)$, esto es, $\ell(vs) = \ell(v) + 1$. Haciendo uso de la hipótesis de inducción, pues $\ell(v) < \ell(w)$, si

$$v(\alpha_s) = \sum_{r \in S} \mu_r \alpha_r,$$

entonces $\mu_r \geqslant 0$ para todo $r \in S$. Repitiendo el mismo argumento anterior con el elemento $\widetilde{s}$ se demuestra que $\ell(v\widetilde{s}) = \ell(v) + 1$, y, de nuevo, gracias a la hipótesis de inducción, si

$$v(\alpha_{\widetilde{s}}) = \sum_{r \in S} \delta_r \alpha_r,$$

entonces $\delta_r \geqslant 0$ para todo $r \in S$.

Recordemos que $w = vv_X$, por lo que resta probar que v_X envía a α_s a una combinación con coeficientes no negativos. Notemos que $\ell(v_X s) \geqslant \ell(v_X)$, pues en caso contrario tendríamos que

$$\ell(ws) = \ell\left(vv^{-1}ws\right) \leqslant \ell(v) + \ell\left(v^{-1}ws\right) = \ell(v) + \ell\left(v_X s\right) \leqslant \ell(v) + \ell\left(v_X\right) = \ell(w),$$

y esto es falso por hipótesis. Por lo tanto, cualquier forma reducida de v_X en $W[\Gamma_X]$ ha de terminar en $\widetilde{s}$, pues $\ell(v_X s) \geqslant \ell(v_X)$ y los elementos de $W[\Gamma_X]$ no son más que productos alternados de s y $\widetilde{s}$.

Podemos discutir ahora qué ocurre con $v_X(\alpha_s)$, lo cual solo dependerá de $m_{s\widetilde{s}}$.

- Si $m_{s\widetilde{s}} = \infty$, veamos por inducción en la longitud de $q \in W[\Gamma_X]$ que $q(\alpha_s) = a\alpha_s + b\alpha_{\widetilde{s}}$ con $a, b \geqslant 0$ y $|a-b| = 1$, si la expresión reducida de q termina en $\widetilde{s}$. Recordemos que, en este caso, $\langle \alpha_s, \alpha_{\widetilde{s}} \rangle = -2$. Consideremos q en su forma reducida y supongamos que $\ell(q) = 1$. Por elección, se tiene que $q = \widetilde{s}$, por lo que

  $$q(\alpha_s) = \widetilde{s}(\alpha_s) = \alpha_s + 2\alpha_{\widetilde{s}},$$

  por lo que se verifica el resultado. Supongámoslo cierto para todo elemento terminado en $\widetilde{s}$ de longitud menor o igual a $n-1$ y sea q tal que $\ell(q) = n$. Si n es par, entonces $q = sh$ con $\ell(h) = n-1$. Usando la hipótesis de inducción, obtenemos que $h(\alpha_s) = a\alpha_s + b\alpha_{\widetilde{s}}$ con $a, b \geqslant 0$ y $|a - b| = 1$. Por lo tanto

  $$q(\alpha_s) = (sh)\left(\alpha_s\right) = as\left(\alpha_s\right) + bs(\alpha_{\widetilde{s}}) = a\left(\alpha_s + 2\alpha_{\widetilde{s}}\right) + b\left(\alpha_{\widetilde{s}} + 2\alpha_s\right) = (a + 2b)\alpha_s + (2a + b)\alpha_{\widetilde{s}}.$$

  Como $a, b \geqslant 0$, se tiene que $a + 2b, 2a + b \geqslant 0$, y además, $|2a + b - (a + 2b)| = |a - b| = 1$, por lo que se deduce el resultado. Ahora, como v_X es un elemento de $W[\Gamma_X]$ cuya expresión reducida termina en $\widetilde{s}$, se deduce que $v_X(\alpha_s)$ tiene todos sus coeficientes no negativos.

- Supongamos que $m_{s\widetilde{s}} \leqslant \infty$. Como $W[\Gamma]$ actúa sobre V mediante aplicaciones lineales, la acción de cada elemento del grupo queda representada mediante una matriz. Como nos interesan los elementos de $W[\Gamma_X]$ y estos solo actúan sobre el subespacio vectorial de V generado por $\{\alpha_s, \alpha_{\widetilde{s}}\}$, podemos representar las acciones de los elementos de $W[\Gamma_X]$ como matrices 2×2 con coeficientes reales. Por aliviar la notación, sea $m := m_{s\widetilde{s}}$. Entonces, como

  $$s(\alpha_s) = -\alpha_s, \quad s(\alpha_{\widetilde{s}}) = 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\alpha_s + \alpha_{\widetilde{s}}, \quad \widetilde{s}(\alpha_s) = \alpha_s + 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\alpha_{\widetilde{s}}, \quad \widetilde{s}(\alpha_{\widetilde{s}}) = -\alpha_{\widetilde{s}},$$

  tomando coordenadas, vemos α_s y $\alpha_{\widetilde{s}}$ como los vectores de la base canónica respectivamente, obteniendo así las matrices

  $$s = \begin{pmatrix} -1 & 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \widetilde{s} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) & -1 \end{pmatrix}.$$

  En lo que sigue de la prueba, abusaremos de notación identificando los elementos de $W[\Gamma_X]$ con su matriz asociada. Notemos que todo elemento de $W[\Gamma_X]$ puede expresarse como $(\widetilde{s})^{\varepsilon}\left(s\widetilde{s}\right)^{n}$, con

$n \geqslant 0$ y $\varepsilon \in \{0,1\}$, por lo que nos interesaría saber cual es la expresión de las potencias de la matriz $s\widetilde{s}$. Por comodidad, sea
$$\zeta_m := \cos\left(\frac{\pi}{m}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{m}\right).$$
Notemos que
$$s\widetilde{s} = \begin{pmatrix} 4\cos^2\left(\frac{\pi}{m}\right) - 1 & -2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) \\ 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\overline{\zeta}_m^3 - \zeta_m^3}{\overline{\zeta}_m - \zeta_m} & -\frac{\overline{\zeta}_m^2 - \zeta_m^2}{\overline{\zeta}_m - \zeta_m} \\ \frac{\overline{\zeta}_m^2 - \zeta_m^2}{\overline{\zeta}_m - \zeta_m} & -1 \end{pmatrix}.$$
Es sencillo comprobar que esta matriz es diagonalizable, por lo que podemos expresar $s\widetilde{s} = PDP^{-1}$, donde D es una matriz diagonal y P es una matriz de paso. En este caso, obtendríamos las matrices
$$P = \begin{pmatrix} \overline{\zeta}_m & \zeta_m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \overline{\zeta}_m^2 & 0 \\ 0 & \zeta_m^2 \end{pmatrix} \text{ y } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\overline{\zeta}_m - \zeta_m} & -\frac{\zeta_m}{\overline{\zeta}_m - \zeta_m} \\ -\frac{1}{\overline{\zeta}_m - \zeta_m} & \frac{\overline{\zeta}_m}{\overline{\zeta}_m - \zeta_m} \end{pmatrix}.$$
Por lo tanto, como
$$(s\widetilde{s})^n = \left(PDP^{-1}\right)^n = PD^nP^{-1},$$
y del hecho de que
$$D^n = \begin{pmatrix} \overline{\zeta}_m^{2n} & 0 \\ 0 & \zeta_m^{2n} \end{pmatrix}$$
obtenemos que
$$(s\widetilde{s})^n = \begin{pmatrix} \frac{\overline{\zeta}_m^{2n+1} - \zeta_m^{2n+1}}{\overline{\zeta}_m - \zeta_m} & -\frac{\overline{\zeta}_m^{2n} - \zeta_m^{2n}}{\overline{\zeta}_m - \zeta_m} \\ \frac{\overline{\zeta}_m^{2n} - \zeta_m^{2n}}{\overline{\zeta}_m - \zeta_m} & -\frac{\overline{\zeta}_m^{2n-1} - \zeta_m^{2n-1}}{\overline{\zeta}_m - \zeta_m} \end{pmatrix}.$$
Simplifiquemos estas expresiones. Para ello, podemos apreciar que todas las expresiones son cocientes de una expresión ciclotómica. En el caso de tener un exponente impar, se tiene que
$$\frac{\overline{\zeta}_m^{2n+1} - \zeta_m^{2n+1}}{\overline{\zeta}_m - \zeta_m} = \sum_{k=0}^{2n} \overline{\zeta}_m^{2n-k}\zeta_m^k = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\zeta}_m^{2n-k}\zeta_m^k + \overline{\zeta}_m^n\zeta_m^n + \sum_{k=n+1}^{2n} \overline{\zeta}_m^{2n-k}\zeta_m^k.$$
Podemos simplificar esta expresión teniendo en cuenta que $\zeta_m\overline{\zeta}_m = |\zeta_m|^2 = 1$, siendo $|\zeta_m|$ el módulo de ζ_m, y reindexando la segunda suma desde $k = 0$ hasta $n-1$. Entonces
$$\sum_{k=0}^{n-1} \overline{\zeta}_m^{2n-k}\zeta_m^k + \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\zeta}_m^k\zeta_m^{2n-k} + 1.$$
Por último, como sumamos desde $k = 0$ hasta $k = n-1$, se tiene que $2n - k \geqslant k$, por lo que
$$\overline{\zeta}_m^{2n-k}\zeta_m^k = \overline{\zeta}_m^{2(n-k)}\overline{\zeta}_m^k\zeta_m^k = \overline{\zeta}_m^{2(n-k)}.$$
Por lo tanto, podemos seguir reduciendo las expresiones de las sumas, puesto que la segunda suma es la conjugada de la primera. Obtenemos así que
$$\frac{\overline{\zeta}_m^{2n+1} - \zeta_m^{2n+1}}{\overline{\zeta}_m - \zeta_m} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\overline{\zeta}_m^{2(n-k)} + \zeta_m^{2(n-k)}\right) + 1 = \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{\zeta}_m^{2k} + \zeta_m^{2k}\right) + 1 = .$$
$$= 2\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) + 1.$$

Simplifiquemos ahora las expresiones con exponentes pares. Siguiendo el razonamiento anterior, obtenemos

$$\frac{\overline{\zeta}_m^{2n}-\zeta_m^{2n}}{\overline{\zeta}_m-\zeta_m}=\sum_{k=0}^{2n-1}\overline{\zeta}_m^{2n-1-k}\zeta_m^k=\sum_{k=0}^{n-1}\overline{\zeta}_m^{2n-1-k}\zeta_m^k+\sum_{k=n}^{2n-1}\overline{\zeta}_m^{2n-1-k}\zeta_m^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\overline{\zeta}_m^{2n-1-k}\zeta_m^k+\sum_{k=0}^{n-1}\overline{\zeta}_m^{k}\zeta_m^{2n-1-k}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\overline{\zeta}_m^{2(n-k)-1}+\zeta_m^{2(n-k)-1}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{\zeta}_m^{2k-1}+\zeta_m^{2k-1}\right)=2\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right).$$

Ambas expresiones son sumas de cosenos, y podemos encontrar una expresión cerrada para estas, puesto que podemos expresarlas como sumas geométricas. En efecto:

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\Re\left(\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}\right)=\Re\left(e^{ix}\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}\right)=\Re\left(e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\frac{e^{\frac{inx}{2}}-e^{-\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}}\right)=\frac{\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Aquí hemos denotado por $\Re(z)$ a la parte real de z. Ahora, usando la expresión trigonométrica

$$\sin(\alpha)-\sin(\beta)=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right),$$

podemos expresar

$$\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)=\cos\left(\frac{\frac{2n+1}{2}x+\frac{x}{2}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{2n+1}{2}x-\frac{x}{2}}{2}\right)=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2}.$$

Por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}-\frac{1}{2}.$$

Pasemos a ver que tiene coeficientes positivos.

- Supongamos que m es par. Entonces la longitud máxima de una palabra en $W[\Gamma_X]$ será de m, puesto que $(s\widetilde{s})^m=1$, por lo que

$$(s\widetilde{s})^{\frac{m}{2}}=(s\widetilde{s})^{-\frac{m}{2}}=(\widetilde{s}s)^{\frac{m}{2}}.$$

  Por lo tanto, cualquier $w\in W[\Gamma_X]$ cumpliendo que $\ell(ws)=\ell(w)+1$ ha de tener longitud menor que m, y como en nuestro caso estamos considerando las potencias de $s\widetilde{s}$, la mayor potencia que cumple nuestras hipótesis será $\frac{m}{2}-1$. Consideremos n tal que $0\leqslant n\leqslant\frac{m}{2}-1$. Haciendo uso de la expresión matricial anterior, comprobar que $(s\widetilde{s})^n(\alpha_s)$ tiene coeficientes positivos es equivalente a comprobar si los elementos de la primera columna de la matriz son positivos para $0\leqslant n\leqslant\frac{m}{2}-1$. Entonces, por lo anterior sabemos que

$$\frac{\overline{\zeta}_m^{2n+1}-\zeta_m^{2n+1}}{\overline{\zeta}_m-\zeta_m}=2\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right)+1=\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{2\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}.$$

  Como $0\leqslant n\leqslant\frac{m}{2}-1$, entonces $1\leqslant 2n+1\leqslant m-1$, por lo que $0<\frac{(2n+1)\pi}{m}<\pi$, y por ende, ambos senos son positivos. Un razonamiento análogo se tiene en el caso restante.
  Resta comprobar el caso $\widetilde{s}(s\widetilde{s})^n$ con $n\leqslant\frac{m}{2}-2$. Notemos que

$$\left(\widetilde{s}(s\widetilde{s})^n\right)(\alpha_s)=\widetilde{s}(\lambda_s\alpha_s+\lambda_{\widetilde{s}}\alpha_{\widetilde{s}})=\lambda_s\alpha_s+\left(2\lambda_s\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)-\lambda_{\widetilde{s}}\right)\alpha_{\widetilde{s}}.$$

  Ya conocemos λ_s y $\lambda_{\widetilde{s}}$, y sabemos que son positivos. Además, como $m\geqslant 2$ sabemos que $\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\geqslant 0$. Una simple comparación muestra que, si $n\leqslant\frac{m}{2}-2$ se tiene el resultado.

- En caso de ser m impar, todo lo anterior sigue siendo cierto, solo que la cota de n será hasta $\frac{m-1}{2}$.

En cualquier caso, $v_X(\alpha_s)$ tendrá todos sus coeficientes no negativos, y por lo tanto, $w(\alpha_s)$ también.

Probemos la otra implicación por reducción al absurdo. Recordemos que dado $s \in S$ y $w \in W[\Gamma]$, consideramos

$$w(\alpha_s) = \sum_{r \in S} \lambda_r \alpha_r$$

con $\lambda_r \in \mathbb{R}$ para todo $r \in S$. Supongamos que $\lambda_r \geqslant 0$ para todo $r \in S$ y que $\ell(ws) \neq \ell(w) + 1$. Puesto que $\ell(s) = 1$, necesariamente se tiene que $\ell(ws) < \ell(w)$. Como al multiplicar por s a la derecha se reduce la longitud de la palabra, existe una expresión reducida de w que tiene a s por letra final. Sea $\widetilde{w} \in W[\Gamma]$ una palabra reducida tal que $w = \widetilde{w}s$ y tomemos

$$\widetilde{w}(\alpha_s) = \sum_{r \in S} \widetilde{\lambda}_r \alpha_r$$

con $\widetilde{\lambda}_r \in \mathbb{R}$ para todo $r \in S$. Entonces

$$\sum_{r \in S} \lambda_r \alpha_r = w(\alpha_s) = (\widetilde{w}s)(\alpha_s) = -\widetilde{w}(\alpha_s) = -\sum_{r \in S} \widetilde{\lambda}_r \alpha_r.$$

Aquí hemos usado que $s(\alpha_s) = -\alpha_s$. Por lo tanto $\lambda_r = -\widetilde{\lambda}_r$ para todo $r \in S$, y puesto que cada $\lambda_r \geqslant 0$ por hipótesis, se tiene que $\widetilde{\lambda}_r \leqslant 0$. Por otro lado, podemos apreciar que $\ell(\widetilde{w}s) = \ell(w) \geqslant \ell(\widetilde{w})$, puesto que $\widetilde{w}$ es una subpalabra de w. Por lo tanto, $\ell(\widetilde{w}s) = \ell(\widetilde{w}) + 1$. Hemos encontrado un elemento $\widetilde{w} \in W[\Gamma]$ tal que $\ell(\widetilde{w}s) = \ell(\widetilde{w}) + 1$ de forma que los coeficientes de $\widetilde{w}(\alpha_s)$ son no positivos, y esto es absurdo por las deducciones anteriores.

Sea ahora $w \in W[\Gamma_X]$ tal que $\ell(ws) = \ell(w) - 1$, entonces $\ell((ws)s) = \ell(ws) + 1$. Por lo anterior, sabemos que $(ws)(\alpha_s)$ tiene todos sus coeficientes no negativos, y como $s(\alpha_s) = -\alpha_s$, se tiene que $w(\alpha_s)$ ha de tener todos sus coeficientes no positivos. Razonando de forma análoga en el sentido contrario y puesto que todo elemento $w \in W[\Gamma_X]$ cumple que $\ell(ws) = \ell(w) \pm 1$, hemos probado el resultado. $\square$

B | Grupos simétricos

En esta sección probaremos algunos resultados sobre los grupos simétricos que se han usado en este trabajo y que son bien conocidos, aunque no del todo obvios de probar. Daremos una presentación de estos grupos y veremos la estructura de sus grupos de automorfismos.

B.1. Presentación de los grupos simétricos

Definición (Grupo simétrico)**.** Sea X un conjunto. Definimos el grupo simétrico sobre X, notado $\mathfrak{S}_X$, como el grupo formado por todas las biyecciones de X en sí mismo junto con la operación de composición usual.

Proposición B.1.1. *Dado un conjunto X, $\mathfrak{S}_X$ está bien definido y tiene estructura de grupo.*

Demostración. Sean $f, g \in \mathfrak{S}_X$ dos biyecciones, entonces, tanto $f \circ g$ como $g \circ f$ son biyecciones, por lo que $f \circ g, g \circ f \in \mathfrak{S}_X$. Es evidente que la aplicación identidad $\mathrm{id}_X \in \mathfrak{S}_X$ y además conmuta con cualquier otra biyección. Por otro lado, por ser biyecciones, para todo $f \in \mathfrak{S}_X$ existe f^{-1} tal que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$, por lo que $f^{-1} \in \mathfrak{S}_X$. Por último, como la operación es la composición de aplicaciones, esta es asociativa. Se deduce de lo anterior que $\mathfrak{S}_X$ está bien definido y tiene estructura de grupo. □

Proposición B.1.2. *Sean X e Y dos conjuntos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una biyección. Entonces $\mathfrak{S}_X \cong \mathfrak{S}_Y$.*

Demostración. Sea $\varphi : \mathfrak{S}_X \longrightarrow \mathfrak{S}_Y$ definido como $\varphi(g) = f \circ g \circ f^{-1}$. Notemos que por ser f una biyección, φ está bien definido, y además es un homomorfismo de grupos, pues es una conjugación. Veamos que es φ es un isomorfismo. Primero, veamos que es inyectiva. Sea $g \in \ker(\varphi)$, entonces

$$\varphi(g) = f \circ g \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y.$$

Componiendo a la izquierda con f^{-1} y a la derecha con f deducimos que $g = \mathrm{id}_Y$. Por lo tanto $\ker(\varphi) = \{\mathrm{id}_Y\}$, de donde se deduce que φ es inyectiva. Consideremos ahora $h \in \mathfrak{S}_Y$. Podemos apreciar que tomando $g = f^{-1} \circ h \circ f \in \mathfrak{S}_X$ se tiene que $\varphi(g) = h$, por lo que φ es sobreyectiva, y por ende, isomorfismo. □

En lo que sigue nos centraremos en los casos en los que X sea finito. Si $|X| = n \geqslant 1$, donde $|X|$ denota el cardinal de X; notaremos el grupo por $\mathfrak{S}_n$. Además, en el caso de que $|X| = n$, podemos considerar $X = \{1, \ldots, n\}$, lo cual no afecta al grupo gracias a la Proposición B.1.2.

En lo que sigue, todo elemento de $\mathfrak{S}_n$ será escrito en forma de ciclos y usaremos la notación multiplicativa por aliviar la notación.

Lema B.1.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\mathfrak{S}_n$. Consideremos $s_i = (i, i+1) \in \mathfrak{S}_n$ para todo $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Entonces los elementos s_i generan a $\mathfrak{S}_n$.*

Demostración. Partimos de que todo elemento $g \in \mathfrak{S}_n$ puede expresarse como $g = c_1 c_2 \cdots c_r$ donde cada c_k es un ciclo y de manera que $c_i c_j = c_j c_i$ para todo dos a dos. Sea g un ciclo, entonces $g = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$. Es sencillo comprobar que

$$g = (a_1, a_2)(a_2, a_3) \cdots (a_{r-2}, a_{r-1})(a_{r-1}, a_r),$$

pues solo hay que multiplicar. Vemos así que todo elemento puede ser expresado como producto de trasposiciones. Consideremos una trasposición (i, j), entonces

$$(i, j) = s_i s_{i+1} \cdots s_{j-2} s_{j-1} s_{j-2} \cdots s_{i+1} s_i.$$

Esto, de nuevo, es una simple comprobación. Por lo tanto, todo elemento $g \in \mathfrak{S}_n$ puede expresarse a partir de los elementos s_i, y por ende, $\{s_i\}_{i=1}^{n-1}$ genera a $\mathfrak{S}_n$. $\square$

Lema B.1.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces $|\mathfrak{S}_n| = n!$.*

Demostración. Consideremos $f \in \mathfrak{S}_n$, entonces $f(1)$ tiene n posibles imágenes que puede tomar, esto es, $f(1) \in \{1, \ldots, n\}$. Ahora, como $f(2) \neq f(1)$ por ser una biyección, tiene $n-1$ posibles imágenes que tomar. Siguiendo el mismo razonamiento, dadas las imágenes hasta $k-1 \leqslant n$, el elemento k va a tener $n-k+1$ posibles imágenes por f. Por lo tanto, la cantidad de biyecciones que se pueden crear serán:

$$|\mathfrak{S}_n| = \prod_{k=1}^{n} (n-k+1) = n!.$$

$\square$

Teorema B.1.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\mathfrak{S}_n \cong \left\langle s_1, \ldots, s_{n-1} \;\middle|\; s_i^2,\ (s_i s_{i+1})^3,\ (s_i s_j)^2 \textit{ si } |i-j| \geqslant 2 \textit{ para todo } 1 \leqslant i, j \leqslant n-1 \right\rangle.$$

Demostración. Procederemos por inducción en n. Si $n = 1$, solo hay una posible biyección, por lo que $\mathfrak{S}_1 = \left\{\mathrm{id}_{\{1\}}\right\} \cong \{1\}$. Tomemos nuestro caso base con $n = 2$. Notemos que si $n = 2$, entonces solo podemos obtener dos biyecciones, $\mathrm{id}_{\{1,2\}}$ y $(1, 2) = s_1$. Además $s_1^2 = \mathrm{id}_{\{1,2\}}$. En consecuencia, $\mathfrak{S}_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, y por lo tanto $\mathfrak{S}_2 \cong \langle s_1 \mid s_1^2 \rangle$. Tomemos por hipótesis de inducción que el resultado es cierto hasta n, esto es, que

$$\mathfrak{S}_n \cong \left\langle s_1, \ldots, s_{n-1} \;\middle|\; s_i^2,\ (s_i s_{i+1})^3,\ (s_i s_j)^2 \text{ si } |i-j| \geqslant 2 \text{ para todo } 1 \leqslant i, j \leqslant n-1 \right\rangle,$$

y consideremos $\mathfrak{S}_{n+1}$. Sabemos que $\mathfrak{S}_{n+1}$ está generado por $\{s_1, \ldots, s_n\}$ y, además, podemos apreciar que $s_n^2 = \mathrm{id}_{\{1,\ldots,n+1\}}$, $s_n s_k = s_k s_n$ si $|k-n| \geqslant 2$ y $s_n s_{n-1} s_n = s_{n-1} s_n s_{n-1}$, o de forma análoga,

$$(s_{n-1} s_n)^3 = (s_k s_n)^2 = s_n^2 = \mathrm{id}_{\{1,\ldots,n+1\}}$$

si $|k-n| \geqslant 2$.

Llamemos R_n a las relaciones de la presentación de $\mathfrak{S}_n$ que tenemos a partir de la hipótesis de inducción, y consideremos

$$R := R_n \cup \left\{s_n^2,\ (s_{n-1} s_n)^3,\ (s_k s_n)^2 \text{ si } |k-n| \geqslant 2\right\}.$$

Sea $G := \langle s_1, \ldots s_n \mid R \rangle$ y sea el homomorfismo de grupos $\varphi : G \longrightarrow \mathfrak{S}_{n+1}$ definido como $\varphi(s_i) = s_i$ para todo $1 \leqslant i \leqslant n$. Debido a que las trasposiciones s_i generan a $\mathfrak{S}_{n+1}$ el homomorfismo es sobreyectivo. Veamos que es inyectivo. Notemos que por el Lema B.1.2 sabemos que $|\mathfrak{S}_{n+1}| = (n+1)!$ y por el Primer Teorema de Isomorfía es $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\ker(\varphi) \cong \mathfrak{S}_{n+1}$. Asumamos que G es finito, entonces, haciendo uso del Teorema de Lagrange se tiene que

$$|\mathrm{Im}(\varphi)| = |\mathfrak{S}_{n+1}| = (n+1)! = \frac{|G|}{|\ker(\varphi)|},$$

por lo que para ver que φ es inyectiva nos basta comprobar que $|G| = (n+1)!$.

Primero, sabemos que G tiene un subgrupo $H \cong \mathfrak{S}_n$, que es el generado por $\{s_i\}_{i=1}^{n-1}$ por construcción. Consideremos las clases laterales a la izquierda de G sobre H. Veamos que

$$G/H = \{H, s_n H, (s_{n-1} s_n)H, \ldots, (s_1 \cdots s_n)H\}.$$

Primero comprobemos que estas clases son distintas. Supongamos que existen dos elementos $(s_k s_{k+1} \cdots s_n)$ y $(s_r s_{r+1} \cdots s_n)$ distintos que representan a la misma clase, entonces existe un $h \in H$ tal que

$$s_k s_{k+1} \cdots s_n = s_r s_{r+1} \cdots s_n h.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $k < r$, pues en caso contrario solo multiplicamos por h^{-1} a la derecha. Ahora, podemos reescribir la igualdad como

$$(s_n s_{n-1} \cdots s_{r+1} s_r)(s_k s_{k+1} \cdots s_{n-1} s_n) = h.$$

Como $h \in H$ se tiene que $\varphi(h)(n+1) = n+1$. Entonces, si vemos la imagen de esa igualdad por φ y evaluamos como permutación $\varphi(h)$ en $(n+1)$, podemos apreciar que

$$\varphi(h)(n+1) = [(s_n s_{n-1} \cdots s_{r+1} s_r)(s_k s_{k+1} \cdots s_{n-1} s_n)](n+1) =$$

$$= [s_n s_{n-1} \cdots s_{r+1} s_r](k) = k.$$

Esto último se tiene porque $k < r$. Por lo tanto $\varphi(h) \notin \varphi(H)$, y por ser φ sobreyectiva, $h \notin H$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, las cases son distintas. Veamos que, en efecto, no hay más clases. Para ello veamos que todo elemento $g \in \mathfrak{S}_n$ o está en H o puede escribirse como $g = s_r s_{r+1} \cdots s_n h$ para cierto $r \in \{1, \ldots, n\}$ y un $h \in H$. Veámoslo de manera algorítmica. Supongamos que tenemos $g \in G$ tal que $g = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}$, entonces:

1. Si $g \in H$ hemos terminado.

2. En caso contrario, sea $k = \max\{q : i_q = n\}$. Entonces, podemos escribir $g = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{k-1}} s_n h_1$, donde $h_1 = s_{i_{k+1}} \cdots s_{i_r} \in H$ por como se ha tomado k. Llamaremos bloque a s_n y cadena a $s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{k-1}}$. Por lo tanto
$$g = \underbrace{s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{k-1}}}_{\text{Cadena}} \underbrace{s_n}_{\text{Bloque}} h_1.$$
La idea será ir comprobando el último elemento de la cadena y e ir añadiendo lo que sea posible al bloque de manera que quede en la forma deseada.

3. Consideremos el último elemento de la cadena, esto es, $s_{i_{k-1}}$. Tenemos tres posibilidades:

   a) Si $i_{k-1} = n$, entonces $s_{i_{k-1}} s_n = 1$, por lo que g se reduce. En este caso, volvemos al paso 1).

   b) Si $i_{k-1} = n-1$, introducimos el elemento en el bloque y pasamos al paso 4).

   c) En caso contrario, por las relaciones de G, $s_{i_{k-1}}$ conmuta con s_n, por lo que tomamos el elemento $h_2 = s_{i_{k-1}} h_1$ y reescribimos $g = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{k-2}} s_n h_2$. Una vez reescrito, volvemos al paso 3).

4. Llegados a este punto, procedemos de forma iterativa hasta que no nos queden más elementos en la cadena. En el paso m, supongamos que tenemos por bloque $s_r s_{r+1} \cdots s_n$. Entonces tenemos g reescrito como
$$g = \underbrace{s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m}}_{\text{Cadena}} \underbrace{s_r s_{r+1} \cdots s_n}_{\text{Bloque}} h_m.$$
Consideremos el último elemento de la cadena s_{i_m}, entonces tenemos las siguientes posibilidades:

   a) Si $i_m = r$, entonces reducimos tanto la cadena como el bloque y seguimos.

   b) Si $i_m = q$ con $r+1 \leqslant q \leqslant n$, entonces
   $$s_q s_r s_{r+1} \cdots s_n = s_r s_{r+1} \cdots s_{q-2} \overbrace{s_q s_{q-1} s_q}^{=s_{q-1} s_q s_{q-1}} s_{q+1} \cdots s_n =$$
   $$= s_r s_{r+1} \cdots s_{q-2} s_{q-1} s_q s_{q-1} s_{q+1} \cdots s_n = s_r s_{r+1} \cdots s_n s_{q-1}.$$
   Definimos $h_{m+1} = s_{q-1} h_m$ y seguimos.

c) Si $i_m = r-1$, añadimos s_{i_m} al bloque y seguimos.

d) En caso contrario, s_{i_m} conmuta con el bloque, por lo que definimos $h_{m+1} = s_{i_m} h_m$ y seguimos.

Notemos que el algoritmo es finito, pues g está expresado con una cantidad finita de generadores, y se obtiene como resultado una expresión de g tal que, o $g \in H$ o $g = s_r \cdots s_n h$ para un cierto $r \in \{1, \dots, n\}$ y $h \in H$.

Por lo tanto, todo elemento de H está en una única clase de $\{H, s_n H, (s_{n-1}s_n)H, \dots, (s_1 \cdots s_n)H\}$, de donde se deduce que, en efecto, $G/H = \{H, s_n H, (s_{n-1}s_n)H, \dots, (s_1 \cdots s_n)H\}$. Ahora, debido a que H es finito, al igual que las clases laterales a la izquierda, se deduce que G es finito. Usando el Teorema de Lagrange, tenemos que $|G| = [G : H]|H|$, donde $[G : H]$ indica el índice de H en G, y sabemos que $|H| = n!$ y $[G : H] = n+1$, pues hemos calculado las clases laterales. Por lo tanto $|G| = (n+1)n! = (n+1)!$. Concluimos que φ es inyectiva, y por ende, isomorfismo. Se deduce así que G es una presentación de $\mathfrak{S}_{n+1}$. □

Cabe notar que en la anterior prueba se ha hecho un abuso de notación, pues estamos representando por s_i de igual manera tanto a los generadores de $\mathfrak{S}_n$ como a los generadores de la presentación.

En caso que se desee, puede implementarse el algoritmo anterior en SageMath mediante el siguiente código:

```
def Clase(L,N):
    n = N-1
    if (L.count(n) == 0):
        return []
    else:
        s = len(L)-1
        while (-1 < s):
            if (L[s] == n):
                break
            else:
                s = s-1
        if (s == 0):
            return [n]
        else:
            C = []
            B = [n]
            for k in [0..s-1]:
                C = C + [L[k]]
            while (0 < len(C)):
                a = C[-1]
                if (len(B) == 1):
                    if (a == n):
                        C.pop(-1)
                        Clase(C,n)
                        continue
                    if (a == n-1):
                        C.pop(-1)
                        B = [a] + B
                        continue
                    else:
                        C.pop(-1)
                else:
                    if (a == B[0]):
                        C.pop(-1)
                        B.pop(0)
```

```
                       continue
                   if (a+1 == B[0]):
                       C.pop(-1)
                       B = [a] + B
                       continue
                   else:
                       C.pop(-1)
   return B
```

Este algoritmo toma como entrada una lista L, donde se introducirán los subíndices i_k en los que se ha escrito g, y la segunda entrada indica en qué grupo simétrico estamos trabajando. Para mayor comodidad, si tuviésemos una permutación f, dejo el código para poder calcular la lista que requiere la el código *Clase*. Este algoritmo tiene como entradas a una permutación f y n indica en qué grupo simétrico estamos trabajando; y devuelve una lista con los índices de los s_i en los que se descompone f en orden.

```
def Indices(f,n):
   L = [1..n]
   P = []
   x = L[0]
   Q = []
   s = x
   while (len(L) > 0):
       if (f(s) == x):
           if (len(Q) > 0):
               L.pop(L.index(s))
               Q = Q + [s]
               P = P + [Q]
               Q = []
               if (len(L) > 0):
                   x = L[0]
                   s = x
               else:
                   break
           else:
               L.pop(L.index(s))
               Q = []
               if (len(L) > 0):
                   x = L[0]
                   s = x
               else:
                   break
       else:
           L.pop(L.index(s))
           Q = Q + [s]
           s = f(s)
   def EnPermu(L):
       def DivideTras(L):
           Q = []
           q = len(L)-1
           for k in [0..q-1]:
               Q = Q + [[L[k],L[k+1]]]
           return Q
       def Acomoda(L):
           Q = []
           for R in L:
```

```
                i = min(R[0],R[1])
                j = max(R[0],R[1])
                if (i+1 == j):
                    Q = Q + [i]
                else:
                    C = [i..j-2]
                    C.reverse()
                    Q = Q + [i..j-1] + C
            return Q
        P = []
        for R in L:
            P = P + Acomoda(DivideTras(R))
        return P
    return EnPermu(P)
```

B.2. Automorfismos de los grupos simétricos

En esta sección discutiremos la estructura de los automorfismos de $\mathfrak{S}_n$, resultado bien conocido.

Lema B.2.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos $\mathfrak{S}_n$. Definimos*

$$T_k^n := \{g \in \mathfrak{S}_n : g \text{ puede escribirse como } k \text{ trasposiciones disjuntas}\},$$

Entonces

$$|T_k^n| = \frac{n!}{2^k(n-2k)!k!}.$$

Demostración. Notemos que la primera trasposición podemos tomarla de $\binom{n}{2}$ formas si no tenemos en cuenta el orden, la segunda, de $\binom{n-2}{2}$ formas, y en general, la $r-$ésima, de $\binom{n-2r}{2}$ formas, puesto que en cada trasposición anterior hemos fijado dos elementos. Ahora, al no haber tenido en cuenta el orden, estamos considerando como distintas cualquier permutación de las trasposiciones de cada palabra, por lo que hemos de dividir entre $k!$, esto es, el total de las posibles posiciones de más que hemos tomado. Por lo tanto

$$|T_k^n| = \frac{1}{k!}\prod_{r=0}^{k}\binom{n-2r}{2} = \frac{1}{k!}\prod_{r=0}^{k}\frac{(n-2r)!}{2(n-2r-2)!} = \frac{1}{2^k k!}\prod_{r=0}^{k}\frac{(n-2r)!}{(n-2r-2)!} =$$

$$= \frac{1}{2^k k!}\prod_{r=0}^{k}(n-2r)(n-2r-1) = \frac{n!}{2^k(n-2k)!k!}.$$

□

Lema B.2.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces, si $n \neq 6$, $|T_1^n| = |T_k^n|$ si y solo si $k = 1$. Si $n = 6$, entonces se tiene también para $k = 3$.*

Demostración. Haciendo uso del Lema B.2.1, basta ver cuando

$$\frac{n!}{2(n-2)!} = \frac{n!}{2^k(n-2k)!k!}.$$

Supongamos que $k \neq 1$. Si reescribiendo la expresión, obtenemos

$$2^{k-1}k! = \frac{(n-2)!}{(n-2k)!} = \frac{(n-2)!}{((n-2)-(2k-2))!} = (2k-2)!\binom{n-2}{2k-2}.$$

De nuevo, podemos seguir reescribiendo tal que

$$2^{k-1} = \frac{(2k-2)!}{k!}\binom{n-2}{2k-2} = \frac{(2k-2)!}{((2k-2)-(k-2))!}\binom{n-2}{2k-2} = (k-2)!\binom{2k-2}{k-2}\binom{n-2}{2k-2}.$$

Hemos obtenido un producto de tres números enteros que operados igualan 2^{k-1}, por lo que existen $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $q_1 + q_2 + q_3 = k - 1$ y de manera que $(k-2)! = 2^{q_1}$, $\binom{2k-2}{k-2} = 2^{q_2}$ y $\binom{n-2}{2k-2} = 2^{q_3}$.

Primero, notemos que $(k-2)! = 2^{q_1}$, entonces $k = 2, 3, 4$.

- Supongamos que $k = 2$, entonces $q_1 = 0$. Por otro lado, tenemos $\binom{4-2}{2-2} = \binom{2}{0} = 1$, por lo que $q_2 = 0$. Obtenemos que
$$2^{2-1} = 2 = \binom{n-2}{4-2} = \binom{n-2}{2} = \frac{(n-2)(n-3)}{2},$$
lo cual es imposible, pues n es natural.
- Supongamos que $k = 3$, entonces $q_1 = 0$. Por otro lado, $\binom{6-2}{3-2} = \binom{4}{1} = 4$, por lo tanto $q_2 = 2$. Esto nos deja con la única posibilidad de que
$$1 = \binom{n-2}{6-2} = \binom{n-2}{4},$$
y esto ocurre si y solo si $n - 2 = 4$, o lo que es lo mismo, si $n = 6$.
- Supongamos que $k = 4$, entonces $\binom{8-2}{4-2} = \binom{6}{2} = 15$, pero esto es absurdo, pues 15 no es una potencia de 2. Por lo tanto este caso no puede darse.

Deducimos que, si $n \neq 6$, la igualdad se da solo si $k = 1$, mientras que en el caso de que $n = 6$, la igualdad se da cuando $k = 1$ y $k = 3$. □

Lema B.2.3. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos $g, r \in \mathfrak{S}_n$. Sea $h = rgr^{-1}$, entonces h y g tienen la misma estructura de ciclos disjuntos, esto es, las representaciones de estos elementos como ciclos tienen la misma cantidad de ciclos de la misma longitud.*

Demostración. Primero, si $h = rgr^{-1}$, entonces $hr = rg$, por lo que dado $i \in \{1, \ldots, n\}$, si $g(i) = j$, entonces $(hr)(i) = r(j)$. Se deduce que g y h tienen la misma estructura de ciclos. □

Proposición B.2.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces $Z(\mathfrak{S}_n) = \{1\}$ si $n \neq 2$ y $Z(\mathfrak{S}_2) = \mathfrak{S}_2$, donde $Z(\mathfrak{S}_n)$ denota el centro de $\mathfrak{S}_n$.*

Demostración. Si $n = 1$ el resultado es obvio. Si $n = 2$, entonces $\mathfrak{S}_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, que es abeliano, por lo que $Z(\mathfrak{S}_2) = \mathfrak{S}_2$. Supongamos que $n \geqslant 3$ y sea $X = \{1, \ldots, n\}$. Tomemos $h \in Z(\mathfrak{S}_n)$, entonces $gh = hg$ para todo $g \in \mathfrak{S}_n$. Dado un $x \in X$, tomemos $g \in (\mathfrak{S}_n)_x$, donde $(\mathfrak{S}_n)_x$ denota el estabilizador de x respecto a la acción natural de $\mathfrak{S}_n$ sobre X. Notemos que, al tenerse $h \in Z(\mathfrak{S}_n)$, se tiene que
$$g\left(h(x)\right) = (gh)(x) = (hg)(x) = h\left(g(x)\right) = h(x).$$
Deducimos que $g \in (\mathfrak{S}_n)_{h(x)}$, y por lo tanto $(\mathfrak{S}_n)_x \leqslant (\mathfrak{S}_n)_{h(x)}$ para todo $x \in X$. Sea $g \in (\mathfrak{S}_n)_{h(x)}$ con $n \geqslant 3$, entonces $g(h(x)) = h(x)$, pero como h es un elemento del centro se tiene que
$$h(x) = (gh)(x) = (hg)(x)$$
por lo que $g(x) = x$. Deducimos que $(\mathfrak{S}_n)_x = (\mathfrak{S}_n)_{h(x)}$ para todo $x \in X$, esto es, $h(x) = x$ para todo $x \in X$. Puesto que la única permutación que fija todos los elementos de X es la identidad, se concluye que $h = 1$. □

Proposición B.2.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathrm{Inn}(\mathfrak{S}_n) \cong \mathfrak{S}_n$ si $n \neq 2$ y $\mathrm{Inn}(\mathfrak{S}_2) \cong \{1\}$, donde $\mathrm{Inn}(\mathfrak{S}_n)$ denota el grupo de los automorfismos internos de $\mathfrak{S}_n$.*

Demostración. Primero, si $n = 1$ el resultado es evidente. Si $n = 2$, entonces $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_2) = \{\mathrm{id}_{\mathfrak{S}_2}\}$, pues $\mathfrak{S}_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Como $\mathrm{Inn}(\mathfrak{S}_2) \leqslant \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_2)$, se tiene que $\mathrm{Inn}(\mathfrak{S}_2) \cong \{1\}$. Supongamos ahora que $n \geqslant 3$. Dado $r \in \mathfrak{S}_n$, denotemos φ_r al automorfismo definido como $\varphi_r(g) = rgr^{-1}$ para todo $g \in \mathfrak{S}_n$. Entonces, $\mathrm{Inn}(\mathfrak{S}_n) = \{\varphi_r : r \in \mathfrak{S}_n\}$. Sea $\psi : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathrm{Inn}(\mathfrak{S}_n)$ el homomorfismo definido como $\psi(r) = \varphi_r$. Notemos que este, en efecto, ψ es un homomorfismo, pues dados $r_1, r_2 \in \mathfrak{S}_n$ se tiene que $\psi(r_1 r_2) = \varphi_{r_1 r_2}$, y tomando $g \in \mathfrak{S}_n$ podemos observar que

$$\varphi_{r_1 r_2}(g) = (r_1 r_2) g (r_1 r_2)^{-1} = r_1 \left(r_2 g r_2^{-1} \right) r_1^{-1} = r_1 \varphi_{r_2}(g) r_1^{-1} = (\varphi_{r_1} \circ \varphi_{r_2})(g),$$

por lo que $\psi(r_1 r_2) = \psi(r_1) \circ \psi(r_2)$, de donde se concluye que está bien definido.

Por la definición de $\mathrm{Inn}(\mathfrak{S}_n)$ es evidente que ψ es sobreyectivo. Veamos que es inyectivo. Sea $r \in \mathfrak{S}_n$ tal que $\psi(r) = \varphi_r = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_n}$. Entonces, para todo $g \in \mathfrak{S}_n$ ha de ser $\varphi_r(g) = rgr^{-1} = g$, por lo que $rg = gr$, y por lo tanto $r \in Z(\mathfrak{S}_n)$. Gracias a la Proposición B.2.1 sabemos que, si $n \geqslant 3$, entonces $Z(\mathfrak{S}_n) = \{1\}$, de donde se concluye que $r = 1$, y por ende, ψ es inyectiva. Deducimos que $\mathrm{Inn}(\mathfrak{S}_n) \cong \mathfrak{S}_n$ si $n \geqslant 3$. □

Teorema B.2.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n) \cong \begin{cases} \{1\} & \text{si } n = 2 \\ \mathfrak{S}_n & \text{si } n \neq 2, 6 \\ \mathfrak{S}_6 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n = 6 \end{cases}$$

donde $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$ *denota el grupo de automorfismos de* $\mathfrak{S}_n$*.*

Demostración. Es evidente que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_1) \cong \{1\}$, y puesto que $\mathfrak{S}_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, se tiene que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_2) \cong \{1\}$. Supongamos en lo que sigue que $n \geqslant 3$. Para obtener los automorfismos de $\mathfrak{S}_n$ haremos uso de los conjuntos T_k^n definidos en el Lema B.2.1. Veamos por inducción que si $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$ entonces $\psi(T_1^n) = T_k^n$ para algún k. Recordemos que T_1^n es el conjunto de todas las trasposiciones. Supongamos que $\psi(s_1) \in T_k^n$ para un cierto k. Entonces, puesto que en $\mathfrak{S}_n$ se tiene la relación $s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$, se ha de dar la igualdad

$$\psi(s_1)\psi(s_2)\psi(s_1) = \psi(s_2)\psi(s_1)\psi(s_2).$$

Gracias al Lema B.2.3 sabemos que $\psi(s_1)$ y $\psi(s_2)\psi(s_1)\psi(s_2)$ tienen la estructura en ciclos disjuntos, pues son conjugados. De la igualdad anterior y puesto que $\psi(s_2)$ es conjugado de $\psi(s_1)\psi(s_2)\psi(s_1)$, se deduce que $\psi(s_1)$ y $\psi(s_2)$ tienen la misma estructura de ciclos disjuntos, y por lo tanto, $\psi(s_2) \in T_k^n$. Repitiendo este proceso iterativamente deducimos que $\psi(s_i) \in T_k^n$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Por último, como se muestra en la demostración del Lema B.1.1, toda trasposición es conjugada de algún s_i para cierto $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, por lo que, de nuevo, gracias al Lema B.2.3 sabemos que la imagen por ψ de cualquier trasposición estará en T_k^n. Concluimos que $\psi(T_1^n) = T_k^n$. Ahora, puesto que ψ es un automorfismo se ha de tener que $|T_1^n| = |T_k^n|$. Gracias a esto podemos distinguir dos casos.

- Supongamos que $n \in \mathbb{N} \backslash \{1, 2, 6\}$. Entonces gracias al Lema B.2.2 sabemos que $|T_1^n| = |T_k^n|$ si y solo si $k = 1$, esto es, cualquier automorfismo ψ envía trasposiciones en trasposiciones. Puesto que se preserva la estructura de ciclos disjuntos, estos automorfismos son conjugados de la identidad, y por lo tanto $\psi \in \mathrm{Inn}(\mathfrak{S}_n)$. Deducimos que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n) = \mathrm{Inn}(\mathfrak{S}_n)$, y por la Proposición B.2.2 sabemos que $\mathrm{Inn}(\mathfrak{S}_n) \cong \mathfrak{S}_n$.

- Supongamos que $n = 6$. De nuevo, por el Lema B.2.2 sabemos que $|T_1^n| = |T_k^n|$ si y solo si $k = 1$ o $k = 3$. Sea ψ un automorfismo tal que $\psi(T_1^6) = T_1^6$, entonces razonando de forma análoga a la anterior se deduce que $\psi \in \mathrm{Inn}(\mathfrak{S}_6)$. Supongamos ahora que ψ es un automorfismo tal que $\psi(T_1^6) = T_3^6$. Notemos que existe al menos un automorfismo que cumple esta condición. Basta considerar el automorfismo ν_6 definido por

$$\nu_6(s_1) = (1,2)(3,4)(5,6), \quad \nu_6(s_2) = (2,3)(1,5)(4,6),$$
$$\nu_6(s_3) = (1,3)(2,4)(5,6), \quad \nu_6(s_4) = (1,2)(3,5)(4,6),$$
$$\nu_6(s_5) = (2,3)(1,4)(5,6).$$

  Se puede verificar que es, en efecto, un automorfismo. Es más, se puede comprobar que es el único automorfismo, salvo conjugación, con estas características. También podemos apreciar que $\nu_6 \notin \mathrm{Inn}(\mathfrak{S}_6)$, puesto que no puede ser conjugado de la identidad por el Lema B.2.2. Deducimos que $\nu_6 \in \mathrm{Out}(\mathfrak{S}_6)$[1]. Veamos que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6) \cong \mathrm{Inn}(\mathfrak{S}_6) \rtimes \mathrm{Out}(\mathfrak{S}_6)$. Recordemos que, por definición, $\mathrm{Out}(\mathfrak{S}_6) \cong \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6)/\mathrm{Inn}(\mathfrak{S}_6)$. Consideremos la sucesión

$$\{1\} \longrightarrow \mathrm{Inn}(\mathfrak{S}_6) \xrightarrow{i} \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Out}(\mathfrak{S}_6) \longrightarrow \{1\}$$

donde i denota la inclusión canónica y π la proyección natural. Por construcción, es inmediato comprobar que esta sucesión es exacta. Por otro lado, tomemos $\rho : \mathrm{Out}(\mathfrak{S}_6) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6)$ definido como $\rho(\psi) = \psi$ para todo $\psi \in \mathrm{Out}(\mathfrak{S}_6)$. Notemos que estamos abusando de notación, puesto que $\psi \in \mathrm{Out}(\mathfrak{S}_6)$ denota el representante de la clase de equivalencia al que pertenece. Entonces se tiene que $\pi \circ \rho = \mathrm{id}_{\mathrm{Out}(\mathfrak{S}_6)}$, esto es, ρ es una sección de π. Como hemos obtenido una sucesión exacta corta y una sección, se deduce que

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6) \cong \mathrm{Inn}(\mathfrak{S}_6) \rtimes \mathrm{Out}(\mathfrak{S}_6).$$

Por último, gracias a la Proposición B.2.2 sabemos que $\mathrm{Inn}(\mathfrak{S}_6) \cong \mathfrak{S}_6$. Haciendo uso de los resultados previos sabemos que $\mathrm{Out}(\mathfrak{S}_6)$ está generado por ν_6, y puesto que $\nu_6^2 = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_6}$ deducimos que $\mathrm{Out}(\mathfrak{S}_6) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Se concluye que

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6) \cong \mathfrak{S}_6 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

$\square$

[1] Al automorfismo externo ν_6 se le conoce como el automorfismo exótico de $\mathfrak{S}_6$.

C | Método de Reidemeister-Schreier

En esta sección estudiaremos varios métodos que nos permiten dar presentaciones de grupos. En concreto, si tenemos un grupo G del cual conocemos una presentación, y un subgrupo H de G, deduciremos formas de obtener una presentación del subgrupo H a partir de la presentación de G.

C.1. Procesos de reescritura

Definición (Elementos libremente iguales)**.** Sea G un grupo generado por S y sea $\mathcal{W}$ el conjunto de todas las palabras que se puedan crear a partir de elementos de S. Sean $g_1, g_2 \in \mathcal{W}$. Diremos que g_1 y g_2 son libremente iguales, notado por $g_1 \approx g_2$, si podemos obtener la palabra g_2 a partir de la palabra g_1 añadiendo o eliminando expresiones de la forma ss^{-1} o $s^{-1}s$ donde $s \in S$.

Notemos que si g_1 y g_2 son dos palabras escritas a partir de elementos de S tal que $g_1 \approx g_2$, entonces g_1 y g_2 representan el mismo elemento en G. La siguiente definición será fundamental para comprender la sección.

Definición (Proceso de reescritura)**.** Sea G un grupo generado por $\{a_\nu\} = \{a_1, a_2, \dots\}$, y sea $H \leqslant G$. Supongamos que $\{j_i\}$ es un conjunto tal que $\langle\{j_i\}\rangle_G = H$, donde cada j_i es un elemento representado por una palabra escrita en términos de $\{a_\nu\}$. Llamaremos proceso de reescritura de H sobre G a una aplicación $\tau : \{j_i\} \longrightarrow \{s_i\}$ tal que $\tau(j_i) = s_i$, donde s_i son símbolos, no necesariamente en H, de manera que s_i y j_i representen al mismo elemento en H para todo i.

Lema C.1.1. *Sea G un grupo con una presentación $\langle S \mid R\rangle$. Sea $a_{n_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{n_r}^{\varepsilon_r} = 1$ en G, donde cada $a_i \in S$ y $\varepsilon_i = \pm 1$ para todo i. Entonces existen elementos $w_1, \dots, w_t \in G$ y $\eta_1, \dots, \eta_t \in \mathbb{Z}$ tales que*

$$a_{n_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{n_r}^{\varepsilon_r} = \left(w_1 R_{\mu_1} w_1^{-1}\right)^{\eta_1} \cdots \left(w_t R_{\mu_t} w_t^{-1}\right)^{\eta_t},$$

donde $R_k \in R$ es una relación de G.

Demostración. Sea F el grupo libre generado por S. Entonces sabemos que $G \cong F/\langle R\rangle_F^{\triangleleft}$, donde $\langle R\rangle_F^{\triangleleft}$ indica el subgrupo normal de F generado por R. Sea $g = a_{n_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{n_r}^{\varepsilon_r} \in F$. Como $g = 1$ en G se tiene que $g \in \langle R\rangle_F^{\triangleleft}$, y como este es un subgrupo normal de F, podemos expresar g como

$$g = a_{n_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{n_r}^{\varepsilon_r} = \left(w_1 R_{\mu_1} w_1^{-1}\right)^{\eta_1} \cdots \left(w_t R_{\mu_t} w_t^{-1}\right)^{\eta_t}.$$

Se deduce así el resultado. □

Para aliviar la notación, dado un grupo G que admite una presentación $\langle S \mid R\rangle$, denotaremos por $\mathcal{W}_S$ al conjunto de todas las palabras que se pueden escribir a partir de elementos de S. Para diferenciar las palabras de $\mathcal{W}_S$ de los elementos en G, dada una palabra $w \in \mathcal{W}_S$ denotaremos por w_G al elemento que representa w en G. Además, entenderemos las relaciones $R_\mu \in R$ como una palabra $R_\mu \in \mathcal{W}_S$ tal que $(R_\mu)_G = 1$. Por último, dados $h, h' \in \mathcal{W}_S$ entenderemos por hh' a la palabra que resulta de concatenar h con h', y por h^{-1} a una palabra tal que $hh^{-1} \approx h^{-1}h \approx 1$.

Teorema C.1.1 (Teorema 2.6 [16]). *Sea G un grupo con una presentación $\langle S \mid R\rangle$ y sea $H \leqslant G$ generado por $\mathcal{I} = \{j_i\}_{i\in I}$ para cierto conjunto de índices I, donde cada j_i es un elemento representado por una palabra escrita en términos de S. Sea τ un proceso de reescritura de H sobre G de manera que $\tau(j_i) = s_i$. Entonces podemos encontrar una presentación de H que tenga por generadores a los símbolos $\{s_i\}_{i\in I}$ y por relaciones las siguientes ecuaciones:*

1. *$s_i = \tau(j_i)$ para todo $i \in I$.*
2. *$\tau(h) = \tau(h')$ para todo $h, h' \in \mathcal{W}_{\mathcal{I}}$ tal que $h \approx h'$.*
3. *Dados $h_i, h_j \in \mathcal{W}_{\mathcal{I}}$ cualesquiera se tiene que $\tau(h_ih_j)_H = \tau(h_i)_H\tau(h_j)_H$.*
4. *$(\tau(wR_\mu w^{-1}))_H = 1$ para todo $w \in \mathcal{W}_S$ y para todo $R_\mu \in R$.*

Demostración. La prueba se realizará en dos pasos. Primero, veremos que, en efecto, las ecuaciones anteriores son relaciones de H, y para concluir deduciremos que toda relación de H deriva de las ecuaciones anteriores.

Comencemos viendo que estas ecuaciones son relaciones de H:

1. $s_i = \tau(s_i)$ es una relación para todo $i \in I$ por ser τ una reescritura.
2. Notemos que dados $h, h' \in \mathcal{W}_{\mathcal{I}}$ tal que $h \approx h'$, se tiene que $h_H = h'_H$ en H. Dado que tanto h como $\tau(h)$ representan el mismo elemento en H, se tiene que $\tau(h)_H = \tau(h')_H$.
3. Sean $h_i, h_j \in \mathcal{W}_{\{j_i\}}$. Por los mismos razonamientos que en (2) se obtiene que $\tau(h_ih_j)_H = \tau(h_i)_H\tau(h_j)_H$.
4. Notemos que, dado $R_\mu \in R$ se tiene que $(R_\mu)_G = 1$ en G, por lo que para todo $w \in \mathcal{W}_S$ se tiene que $(wR_\mu w^{-1})_G = 1$ en G, y por lo tanto, también en H. Como $\tau(wR_\mu w^{-1})$ representa el mismo elemento que $wR_\mu w^{-1}$, se tiene que $(\tau(wR_\mu w^{-1}))_H = 1$.

Deducimos así que todas las ecuaciones anteriores son relaciones de H. Antes de ver que toda relación de H deriva de las ecuaciones anteriores notemos lo siguiente. Podemos apreciar que $\tau(1)_H = \tau(1 \cdot 1)_H = \tau(1)_H\tau(1)_H$ gracias a la ecuación (3). Entonces

$$1 = \tau(1)_H^{-1}\tau(1)_H = \tau(1)_H^{-1}\tau(1)_H\tau(1)_H = \tau(1)_H,$$

por lo que $\tau(1)_H = 1$. Procediendo de forma similar, dado $h \in \mathcal{W}_{\mathcal{I}}$ se tiene que

$$1 = \tau(hh^{-1})_H = \tau(h)_H\tau(h^{-1})_H.$$

De nuevo, multiplicando a la izquierda por $\tau(h)_H^{-1}$ se obtiene que $\tau(h^{-1})_H = \tau(h)_H^{-1}$. A consecuencia de esto, se deduce que dada una palabra $h_1^{\varepsilon_1} \cdots h_r^{\varepsilon_r}$ donde $\varepsilon_i = \pm 1$ para todo i se tiene que

$$\tau\left(h_1^{\varepsilon_1} \cdots h_r^{\varepsilon_r}\right)_H = \tau(h_1)_H^{\varepsilon_1} \cdots \tau(h_r)_H^{\varepsilon_r}.$$

Tomemos una palabra en los símbolos $\{s_i\}_{i\in I}$ tal que $(s_{n_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{n_r}^{\varepsilon_r})_H = 1$ con $\varepsilon_i = \pm 1$ para todo i. Usando las deducciones anteriores, se tiene que

$$(s_{n_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{n_r}^{\varepsilon_r})_H = \tau(j_{n_1})_H^{\varepsilon_1} \cdots \tau(j_{n_r})_H^{\varepsilon_r} = \tau\left(j_{n_1}^{\varepsilon_1} \cdots j_{n_r}^{\varepsilon_r}\right)_H.$$

Haciendo uso del Lema C.1.1, podemos expresar

$$(j_{n_1}^{\varepsilon_1} \cdots j_{n_r}^{\varepsilon_r})_H = \left(w_1R_{\mu_1}w_1^{-1}\right)_H^{\eta_1} \cdots \left(w_tR_{\mu_t}w_t^{-1}\right)_H^{\eta_t},$$

por lo que

$$(s_{n_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{n_r}^{\varepsilon_r})_H = \tau\left(j_{n_1}^{\varepsilon_1} \cdots j_{n_r}^{\varepsilon_r}\right)_H = \tau\left(\left(w_1R_{\mu_1}w_1^{-1}\right)^{\eta_1} \cdots \left(w_tR_{\mu_t}w_t^{-1}\right)^{\eta_t}\right)_H =$$

$$= \tau\left(w_1R_{\mu_1}w_1^{-1}\right)_H^{\eta_1} \cdots \tau\left(w_tR_{\mu_t}w_t^{-1}\right)_H^{\eta_t}.$$

Gracias a la ecuación (4) sabemos que para todo i se tiene que $\tau\left(w_iR_{\mu_i}w_i^{-1}\right)_H = 1$, por lo que podemos reducir $s_{n_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{n_r}^{\varepsilon_r}$ usando las ecuaciones anteriores. Deducimos que H admite una presentación que tiene por generadores a $\{s_i\}_{i\in I}$ y por relaciones las ecuaciones anteriores. $\square$

Hemos comprobado que con una reescritura somos capaces de dar una presentación de cualquier subgrupo del cual conocemos los generadores. El problema está en que la presentación obtenida no es muy manejable. En lo que sigue, se pretenderá reducir la presentación del subgrupo intentando reducir la cantidad de relaciones. Para ello, como veremos a continuación, usaremos las clases de equivalencia.

Definición (Función de representantes a la derecha)**.** Sea G un grupo generado por S, H un subgrupo de G y $\mathcal{K}$ un conjunto de palabras escritas a partir de S que representan a los elementos de un sistema de representantes a la derecha de G/H que contenga a 1. Llamaremos función de representantes a la derecha a la aplicación $^{-} : \mathcal{W}_S \longrightarrow \mathcal{K}$, de manera que dada una palabra $w \in \mathcal{W}_S$, lo envía a $\overline{w} \in \mathcal{K}$ tal que el elemento que representa w en G pertenece a la clase lateral representada por el elemento $\overline{w}$.

Lema C.1.2. *Sea G un grupo, $H \leqslant G$ y $\mathcal{K}$ un conjunto de palabras escritas a partir de S que representan a los elementos de un sistema de representantes a la derecha de G/H que contenga al 1. Entonces, dados $w, v \in \mathcal{W}_S$, se tiene que:*

1. $\overline{w} = 1$ *si y solo si* $w_G \in H$.
2. *Si* $w \approx v$, *entonces* $\overline{w} = \overline{v}$.
3. $\overline{\overline{w}} = \overline{w}$.
4. $\overline{wv} = \overline{\overline{w}v}$.

Demostración. 1. Supongamos que $\overline{w} = 1$, entonces, $w_G \in H\overline{w}_G = H$, por lo que w representa a un elemento en G que pertenece a H. Supongamos ahora que $w_G \in H$. Debido a que $w_G \in H\overline{w}_G$ se tiene que $w_G \in H \cap H\overline{w}_G$, pero estas son clases de equivalencia, por lo que esa intersección o es vacía o ambas clases laterales son la misma. Debido a que en esa intersección está w_G, esta no es vacía, por lo que $H = H\overline{w}_G$, y como la palabra que representa a la clase lateral H en $\mathcal{K}$ es 1 se deduce que $\overline{w} = 1$.

2. Supongamos que $w \approx v$, entonces $w_G = v_G$, por lo que $Hw_G = Hv_G$. En consecuencia, se tiene que $H\overline{w}_G = Hw_G = Hv_G = H\overline{v}_G$, de donde se deduce que $\overline{w} = \overline{v}$.

3. Por definición, $\overline{w}_G \in H\overline{\overline{w}}_G$, y por otro lado $\overline{w}_G \in H\overline{w}_G$. Por lo tanto $\overline{w}_G \in H\overline{w}_G \cap H\overline{\overline{w}}_G$, y por ser clases de equivalencia, siguiendo le mismo razonamiento que en apartado anterior se deduce que $H\overline{w}_G = H\overline{\overline{w}}_G$. Por lo tanto $\overline{w} = \overline{\overline{w}}$.

4. Por definición, $w_G \in H\overline{w}_G$. Si multiplicando a la derecha por v_G se tiene que $w_Gv_G \in H\overline{w}_Gv_G$, y a la misma vez $w_Gv_G \in H(\overline{wv})_G$. Ahora, como $w_Gv_G \in H\overline{w}_Gv_G$, entonces $\overline{w}_Gv_G \in H\overline{w}_Gv_G$, y a la misma vez $\overline{w}_Gv_G \in H(\overline{\overline{w}v})_G$, por lo que $H\overline{w}_Gv_G = H(\overline{\overline{w}v})_G$ siguiendo los mismos razonamientos anteriores. Igualando todo lo anterior, se deduce que $H(\overline{wv})_G = H(\overline{\overline{w}v})_G$, y por lo tanto, $\overline{wv} = \overline{\overline{w}v}$. □

Teorema C.1.2 (Teorema 2.7 [16])**.** *Sea G un grupo generado por S, $H \leqslant G$ y $\mathcal{K}$ un conjunto de palabras escritas a partir de S que representan a los elementos de un sistema de representantes a la derecha de G/H que contenga al 1. Entonces H está generado por*

$$\mathcal{S} = \left\{ka_i\overline{ka_i}^{-1} : k \in \mathcal{K}, a_i \in S\right\}.$$

Demostración. Primero, notemos que $\mathcal{S}_G \subset H$, pues dados $k \in \mathcal{K}$ y $a_i \in S$, por definición se tiene que $H(ka_i)_G = H(\overline{ka_i})_G$, y por lo tanto, $H(ka_i\overline{ka_i}^{-1})_G = H$. Esto es, $(ka_i\overline{ka_i}^{-1})_G \in H$. Antes de proceder con la prueba, es conveniente comprobar que $ka_i^{-1}\overline{ka_i^{-1}}^{-1}$ representa al elemento inverso de $\overline{ka_i^{-1}}a_i\overline{\overline{ka_i^{-1}}a_i}^{-1}$ en H. Veamos esto. Haremos uso del apartado (4) del Lema C.1.2:

$$\overline{ka_i^{-1}}a_i\underbrace{\overline{\overline{ka_i^{-1}}a_i}^{-1}}_{\text{Lema}} = \overline{ka_i^{-1}}a_i\overline{ka_i^{-1}a_i}^{-1} = \overline{ka_i^{-1}}a_i\overline{k}^{-1}.$$

Notemos que $k \in \mathcal{K}$, por lo que $\overline{k} = k$. Entonces

$$\overline{ka_i^{-1}}a_i\overline{k}^{-1} = \overline{ka_i^{-1}}a_ik^{-1} \approx \left(ka_i^{-1}\overline{ka_i^{-1}}^{-1}\right)^{-1}.$$

Por lo tanto

$$\left(\overline{ka_i^{-1}}a_i\overline{\overline{ka_i^{-1}}a_i}^{-1}\right)_H = \left(\left(ka_i^{-1}\overline{ka_i^{-1}}^{-1}\right)^{-1}\right)_H.$$

Esto prueba toda palabra de la forma $ka_i^{-1}\overline{ka_i^{-1}}^{-1}$ es libremente equivalente al inverso de algún elemento de $\mathcal{S}$.

Procedamos a probar que $\mathcal{S}$ genera a H. Sea $h \in \mathcal{W}_S$ tal que $h_G \in H$ y $h = a_{n_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{n_r}^{\varepsilon_r}$, con $a_{n_i} \in S$ y $\varepsilon_i = \pm 1$ para todo i. Nuestro objetivo será encontrar $W_1, \ldots, W_r \in \mathcal{W}_S$ de manera que

$$h_G = \left(\overline{W}_1a_{n_1}^{\varepsilon_1}\overline{W_1a_{n_1}^{\varepsilon_1}}^{-1}\overline{W}_2a_{n_2}^{\varepsilon_2}\overline{W_2a_{n_2}^{\varepsilon_2}}^{-1}\cdots\overline{W}_ra_{n_r}^{\varepsilon_r}\overline{W_2a_{n_r}^{\varepsilon_r}}^{-1}\right)_G.$$

Notemos que $\overline{W}_ia_{n_i}^{\varepsilon_i}\overline{W_ia_{n_i}^{\varepsilon_i}}^{-1} \in \mathcal{S}$ para todo i, pues haciendo uso del Lema C.1.2 se tiene que

$$\overline{W}_ia_{n_i}^{\varepsilon_i}\overline{W_ia_{n_i}^{\varepsilon_i}}^{-1} = \overline{W}_ia_{n_i}^{\varepsilon_i}\overline{\overline{W_i}a_{n_i}^{\varepsilon_i}}^{-1}.$$

Tomemos $W_1 = 1$ y para todo $i \in \{2, \ldots, r\}$ sea $W_i = a_{n_1}^{\varepsilon_1}a_{n_2}^{\varepsilon_2}\cdots a_{n_{i-1}}^{\varepsilon_{i-1}}$. Entonces

$$\overline{W}_1a_{n_1}^{\varepsilon_1}\overline{W_1a_{n_1}^{\varepsilon_1}}^{-1}\overline{W}_2a_{n_2}^{\varepsilon_2}\overline{W_2a_{n_2}^{\varepsilon_2}}^{-1}\cdots\overline{W}_ra_{n_r}^{\varepsilon_r}\overline{W_2a_{n_r}^{\varepsilon_r}}^{-1} =$$

$$= \overline{1}\cdot a_{n_1}^{\varepsilon_1}\overline{1\cdot a_{n_1}^{\varepsilon_1}}^{-1}\overline{a_{n_1}^{\varepsilon_1}}a_{n_2}^{\varepsilon_2}\overline{a_{n_1}^{\varepsilon_1}a_{n_2}^{\varepsilon_2}}^{-1}\cdots\overline{a_{n_1}^{\varepsilon_1}a_{n_2}^{\varepsilon_2}\cdots a_{n_{r-1}}^{\varepsilon_{r-1}}}a_{n_r}^{\varepsilon_r}\overline{a_{n_1}^{\varepsilon_1}a_{n_2}^{\varepsilon_2}\cdots a_{n_{r-1}}^{\varepsilon_{r-1}}a_{n_r}^{\varepsilon_r}}^{-1}.$$

Podemos apreciar que $\overline{1} = 1$, por lo que

$$a_{n_1}^{\varepsilon_1}\overline{a_{n_1}^{\varepsilon_1}}^{-1}\overline{a_{n_1}^{\varepsilon_1}}a_{n_2}^{\varepsilon_2}\overline{a_{n_1}^{\varepsilon_1}a_{n_2}^{\varepsilon_2}}^{-1}\cdots\overline{a_{n_1}^{\varepsilon_1}a_{n_2}^{\varepsilon_2}\cdots a_{n_{r-1}}^{\varepsilon_{r-1}}}a_{n_r}^{\varepsilon_r}\overline{a_{n_1}^{\varepsilon_1}a_{n_2}^{\varepsilon_2}\cdots a_{n_{r-1}}^{\varepsilon_{r-1}}a_{n_r}^{\varepsilon_r}}^{-1} \approx$$

$$\approx \underbrace{a_{n_1}^{\varepsilon_1}a_{n_2}^{\varepsilon_2}\cdots a_{n_{r-1}}^{\varepsilon_{r-1}}a_{n_r}^{\varepsilon_r}}_{h}\underbrace{\overline{a_{n_1}^{\varepsilon_1}a_{n_2}^{\varepsilon_2}\cdots a_{n_{r-1}}^{\varepsilon_{r-1}}a_{n_r}^{\varepsilon_r}}}_{h}{}^{-1} = h\overline{h}^{-1}.$$

Como $h_G \in H$, entonces $\overline{h} = \overline{1} = 1$, y por lo tanto $h\overline{h}^{-1} = h$. Se deduce así que $\mathcal{S}$ genera a H. □

Corolario C.1.1. *Sea G un grupo finitamente generado y sea $H \leqslant G$ un subgrupo de índice finito. Entonces H es finitamente generado.*

Demostración. Notemos que un sistema de representantes de G/H tiene tantos elementos como clases de equivalencias distintas haya en G/H. Si H es de índice finito en G, entonces cualquier sistema de representantes será finito también. Haciendo uso de la notación del Teorema anterior, como $\mathcal{S}$ se define a partir de los generadores de G y de los elementos del sistema de representantes elegido, y ambos son finitos, se tiene que $\mathcal{S}$ es un conjunto finito, y como este genera a H, se tiene que H es finitamente generado. □

Definición (Segmentos iniciales)**.** Sea G un grupo generado por S y sea $H \leqslant G$. Tomemos $h \in \mathcal{W}_S$ de manera que $h_G \in H$ y $h = a_{n_1}^{\varepsilon_1}\cdots a_{n_r}^{\varepsilon_r}$ con $a_{n_i} \in S$ y $\varepsilon_i = \pm 1$ para todo i. Tomemos $\{W_i\} \subset \mathcal{W}_S$ tal que $W_1 = 1$ y para todo $i \in \{2, \ldots, r\}$ sea

$$W_i = a_{n_1}^{\varepsilon_1}\cdots a_{n_{i-1}}^{\varepsilon_{i-1}}.$$

Llamaremos segmentos iniciales de h_G sobre S a cada W_i.

Podemos apreciar que los segmentos iniciales no son únicos, pues la forma de representar h_G a partir de los generadores de G no es única.

C.2. Método de Reidemeister-Schreier

En lo que sigue vamos a desarrollar dos formas de presentar un subgrupo de un grupo cuya presentación es conocida usando procesos de reescritura específicos para reducir la cantidad de relaciones.

Definición (Proceso de reescritura de Reidemeister)**.** Sea G un grupo generado por S, $H \leqslant G$ y $\mathcal{K}$ un conjunto de palabras escritas a partir de S que representan a los elementos de un sistema de representantes a la derecha de G/H que contenga al 1. Consideremos $h \in \mathcal{W}_S$ de manera que $h_G \in H$ y $h = a_{n_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{n_r}^{\varepsilon_r}$, donde $a_{n_i} \in S$ y $\varepsilon_i = \pm 1$ para todo i. Definimos el proceso de reescritura de Reidemeister τ como

$$\tau(h) = s_{k_1,a_{n-1}} \cdots s_{k_r,a_{n_r}},$$

donde $s_{k_i,a_{n_i}} := \tau\left(k_i a_{n_i} \overline{k_i a_{n_i}}^{-1}\right)$ con $k_i \in \mathcal{K}$ para todo i, tal que

$$k_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \text{ y } \varepsilon_1 = 1 \\ \overline{a_{n_1}^{-1}} & \text{si } i = 1 \text{ y } \varepsilon_1 = -1 \\ \overline{a_{n_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{n_{i-1}}^{\varepsilon_{i-1}}} & \text{si } i > 1 \text{ y } \varepsilon_i = 1 \\ \overline{a_{n_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{n_{i-1}}^{\varepsilon_{i-1}} a_{n_i}^{-1}} & \text{si } i > 1 \text{ y } \varepsilon_i = -1 \end{cases}$$

Lema C.2.1. *El proceso de reescritura de Reidemeister es, en efecto, un proceso de reescritura.*

Demostración. Para comprobar que la definición es correcta hemos de ver que, dado $h \in \mathcal{W}_S$ tal que $h_G \in H$, tanto h como $\tau(h)$ representan al mismo elemento en H. En la prueba del Teorema C.1.2 se probó que podemos expresar

$$h = \overline{W}_1 a_{n_1}^{\varepsilon_1} \overline{W_1 a_{n_1}^{\varepsilon_1}}^{-1} \overline{W}_2 a_{n_2}^{\varepsilon_2} \overline{W_2 a_{n_2}^{\varepsilon_2}}^{-1} \cdots \overline{W}_r a_{n_r}^{\varepsilon_r} \overline{W_2 a_{n_r}^{\varepsilon_r}}^{-1},$$

donde $W_1 = 1$ y para todo $i \in \{2, \ldots, r\}$, $W_i = a_{n_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{n_{i-1}}^{\varepsilon_{i-1}}$. Notemos que, si $\varepsilon_1 = 1$, entonces se tiene que $s_{k_1,a_{n_1}} = \tau\left(\overline{W_1} a_{n_1} \overline{W_1 a_{n_1}}^{-1}\right)$. Si $\varepsilon_1 = -1$, entonces

$$s_{k_1,a_{n_1}}^{-1} = \tau\left(\left(\overline{a_{n_1}^{-1}} a_{n_1} \overline{\overline{a_{n_1}^{-1}} a_{n_1}}^{-1}\right)^{-1}\right) = \tau\left(\overline{\overline{a_{n_1}^{-1}} a_{n_1}} a_{n_1}^{-1} \overline{a_{n_1}^{-1}}^{-1}\right).$$

Haciendo uso del Lema C.1.2 obtenemos

$$\overline{\overline{a_{n_1}^{-1}} a_{n_1}} a_{n_1}^{-1} \overline{a_{n_1}^{-1}}^{-1} = \overline{a_{n_1}^{-1} a_{n_1}} a_{n_1}^{-1} \overline{a_{n_1}^{-1}}^{-1} = a_{n_1}^{-1} \overline{a_{n_1}^{-1}}^{-1} = \overline{W}_1 a_{n_1}^{-1} \overline{W_1 a_{n_1}^{-1}}^{-1},$$

por lo que $s_{k_1,a_{n_1}}^{-1} = \tau\left(\overline{W}_1 a_{n_1}^{-1} \overline{W_1 a_{n_1}^{-1}}^{-1}\right)$. Consideremos ahora $i > 1$. Si $\varepsilon_i = 1$, entonces

$$s_{k_i,a_{n_i}} = \tau\left(k_i a_{n_i} \overline{k_i a_{n_i}}^{-1}\right) = \tau\left(\overline{W}_i a_{n_i} \overline{W_i a_{n_i}}^{-1}\right).$$

Si $\varepsilon_i = -1$, entonces

$$s_{k_i,a_{n_i}}^{-1} = \tau\left(\left(k_i a_{n_i} \overline{k_i a_{n_i}}^{-1}\right)^{-1}\right) = \tau\left(\left(\overline{W_i a_{n_i}^{-1}} a_{n_i} \overline{\overline{W_i a_{n_i}^{-1}} a_{n_i}}^{-1}\right)^{-1}\right).$$

Haciendo uso de la igualdad probada en la prueba del Teorema C.1.2 se tiene que

$$\left(\overline{W_i a_{n_i}^{-1}} a_{n_i} \overline{\overline{W_i a_{n_i}^{-1}} a_{n_i}}^{-1}\right)^{-1} \approx \overline{W_i} a_{n_i}^{-1} \overline{W_i a_{n_i}^{-1}}^{-1}.$$

Deducimos que para todo i se tiene que

$$s_{k_i,a_{n_i}}^{\varepsilon_i} = \tau\left(\overline{W}_i a_{n_i}^{\varepsilon_i} \overline{W_i a_{n_i}^{\varepsilon_i}}^{-1}\right).$$

Por lo tanto

$$\tau(h) = \tau\left(\overline{W}_1 a_{n_1}^{\varepsilon_1} \overline{W_1 a_{n_1}^{\varepsilon_1}}^{-1} \cdots \overline{W}_r a_{n_r}^{\varepsilon_r} \overline{W_2 a_{n_r}^{\varepsilon_r}}^{-1}\right) = s_{k_1,a_{n_1}}^{\varepsilon_1} \cdots s_{k_r,a_{n_r}}^{\varepsilon_r}.$$

Concluimos que h y $\tau(h)$ representan al mismo elemento en H, y por ende, se tiene la buena definición de τ. □

Teorema C.2.1 (Método de Reidemeister, Teorema 2.8 [16]). *Sea G un grupo que admite una presentación $\langle S \mid R\rangle$ y sea $H \leqslant G$ un subgrupo. Consideremos un conjunto de palabras escritas a partir de S que representan a los elementos de un sistema de representantes a la derecha $\mathcal{K}$ de G/H que contenga al 1, y sea τ un proceso de reescritura de Reidemeister. Entonces H admite una presentación*

$$H \cong \left\langle \{s_{k,a_i}\} \;\middle|\; s_{k,a_i} = \tau\left(k a_i \overline{k a_i}^{-1}\right), \tau\left(k R_\mu k^{-1}\right) \text{ para todo } k \in \mathcal{K},\ a_i \in S,\ R_\mu \in R \right\rangle.$$

Demostración. Considerando los datos del enunciado, como τ es un proceso de reescritura de Reidemeister, sabemos gracias al Lema C.2.1 que es un proceso de reescritura y por el Teorema C.1.2, que el conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{k a_i \overline{k a_i}^{-1} : k \in \mathcal{K}, a_i \in S\right\}$$

genera a H. Haciendo uso del Teorema C.1.1 sabemos que

$$H \cong \left\langle \{s_{k,a_i}\} \;\middle|\; s_{k,a_i} = \tau\left(k a_i \overline{k a_i}^{-1}\right), \tau(h) = \tau(h'), \tau(h_i h_j) = \tau(h_i)\tau(h_j), \tau(w R_\mu w^{-1}) \right\rangle$$

donde $h, h', h_i, h_j \in \mathcal{W}_S$, $h \approx h'$, $a_i \in S$, $R_\mu \in R$ y $k \in \mathcal{K}$. Nuestro objetivo será comprobar que la segunda y la tercera relación derivan de la primera, y que la ultima puede reducirse.

Veamos la segunda condición. Notemos que basta probar que $\tau(w_1 w_2) = \tau(w_1 a_i^{\varepsilon} a_i^{-\varepsilon} w_2)$ donde $a_i \in S$, $w_1, w_2 \in \mathcal{W}_S$ tal que $(w_1)_G, (w_2)_G \in H$ y $\varepsilon = \pm 1$, pues si dos palabras son libremente iguales, podemos transformar una en la otra a partir de una cantidad finita de estos pasos. Supongamos que $\varepsilon = 1$, entonces

$$\tau\left(w_1 a_i a_i^{-1} w_2\right) = \tau\Big(w_1 \overline{w}_1^{-1}\Big) \underbrace{\tau\Big(\overline{w}_1 a_i \overline{w_1 a_i}^{-1}\Big)}_{s_{\overline{w}_1,a_i}} \tau\Big(\overline{w_1 a_i} a_i^{-1} \underbrace{\overline{w_1 a_i a_i^{-1}}}_{\overline{w}_1^{-1}}{}^{-1}\Big) \tau\Big(\underbrace{\overline{w_1 a_i a_i^{-1}}}_{\overline{w}_1} w_2\Big) =$$

$$= \tau\left(w_1 \overline{w}_1^{-1}\right) s_{\overline{w}_1,a_i} \tau\left(\overline{w_1 a_i} a_i^{-1} \overline{w_1}^{-1}\right) \tau\left(\overline{w}_1 w_2\right).$$

Notemos que

$$\tau\left(\overline{w_1 a_i} a_i^{-1} \overline{w_1}^{-1}\right) = \tau\left(\left(\overline{w_1} a_i \overline{w_1 a_i}^{-1}\right)^{-1}\right) = s_{\overline{w}_1,a_i}^{-1},$$

por lo que

$$\tau\left(w_1 \overline{w}_1^{-1}\right) s_{\overline{w}_1,a_i} \tau\left(\overline{w_1 a_i} a_i^{-1} \overline{w_1}^{-1}\right) \tau\left(\overline{w}_1 w_2\right) = \tau\left(w_1 \overline{w}_1^{-1}\right) s_{\overline{w}_1,a_i} s_{\overline{w}_1,a_i}^{-1} \tau\left(\overline{w}_1 w_2\right) =$$

$$= \tau\left(w_1 \overline{w}_1^{-1}\right) \tau\left(\overline{w}_1 w_2\right) = \tau(w_1 w_2).$$

Concluimos que $\tau\left(w_1 a_i a_i^{-1} w_2\right) = \tau(w_1 w_2)$ se deduce a partir de la primera relación. En caso de ser $\varepsilon = -1$, podemos modificar lo anterior tal que

$$\tau\left(w_1 a_i^{-1} a_i w_2\right) = \left(\tau\left(w_2^{-1} a_i a_i^{-1} w_1^{-1}\right)\right)^{-1} = \left(\tau\left(w_2^{-1} \overline{w_2^{-1}}^{-1}\right) s_{\overline{w_2^{-1}},a_i} s_{\overline{w_2^{-1}},a_i}^{-1} \tau\left(\overline{w_2^{-1}} w_1^{-1}\right)\right)^{-1} =$$

$$= \tau\left(w_1 \overline{w_2^{-1}}^{-1}\right) \tau\left(\overline{w_2^{-1}} w_2\right) = \tau\left(w_1 w_2\right),$$

deduciéndose lo mismo.

Consideremos $h_1, h_2 \in \mathcal{W}_S$ de manera que $(h_1)_G, (h_2)_G \in H$ y $h_1 = a_{n_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{n_r}^{\varepsilon_r}$ y $h_2 = a_{m_1}^{\gamma_1} \cdots a_{m_q}^{\gamma_q}$, donde $a_{n_i}, a_{m_i} \in S$ y $\varepsilon_i, \gamma_i = \pm 1$ para todo i. Entonces $h_1 h_2 = a_{n_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{n_r}^{\varepsilon_r} a_{m_1}^{\gamma_1} \cdots a_{m_q}^{\gamma_q}$. Siguiendo el proceso de reescritura de Reidemeister sabemos que

$$\tau(h_1h_2) = s_{\overline{W}_1, a_{n_1}}^{\varepsilon_1} s_{\overline{W}_2, a_{n_2}}^{\varepsilon_2} \cdots s_{\overline{W}_r, a_{n_r}}^{\varepsilon_r} s_{\overline{W}_{r+1}, a_{m_1}}^{\gamma_1} s_{\overline{W}_{r+2}, a_{m_2}}^{\gamma_2} \cdots s_{\overline{W}_{r+q}, a_{m_q}}^{\gamma_q},$$

donde cada W_i son los segmentos iniciales de $h_1 h_2$. Podemos apreciar que para todo $i \in \{1, \ldots, q\}$ se tiene que

$$\overline{W}_{r+i} = \overline{\underbrace{a_{n_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{n_r}^{\varepsilon_r}}_{h_1} a_{m_1}^{\gamma_1} \cdots a_{m_{i-1}}^{\gamma_{i-1}}} = \overline{h_1 a_{m_1}^{\gamma_1} \cdots a_{m_{i-1}}^{\gamma_{i-1}}},$$

y como $(h_1)_G \in H$, para cualquier $g \in \mathcal{W}_S$ se tiene que $\overline{h_1 g} = \overline{g}$, pues hemos tomado las clases a la derecha. Deducimos que

$$\overline{W}_{r+i} = \overline{a_{n_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{n_r}^{\varepsilon_r} a_{m_1}^{\gamma_1} \cdots a_{m_{i-1}}^{\gamma_{i-1}}} = \overline{a_{m_1}^{\gamma_1} \cdots a_{m_{i-1}}^{\gamma_{i-1}}} =: \overline{Q}_i,$$

por lo que podemos reescribir la expresión anterior como

$$\tau(h_1h_2) = s_{\overline{W}_1, a_{n_1}}^{\varepsilon_1} s_{\overline{W}_2, a_{n_2}}^{\varepsilon_2} \cdots s_{\overline{W}_r, a_{n_r}}^{\varepsilon_r} s_{\overline{Q}_1, a_{m_1}}^{\gamma_1} s_{\overline{Q}_2, a_{m_2}}^{\gamma_2} \cdots s_{\overline{Q}_q, a_{m_q}}^{\gamma_q}.$$

Debido a que W_i son los segmentos iniciales de h_1 y Q_i son los segmentos iniciales de h_2, se tiene que $\tau(h_1h_2) = \tau(h_1)\tau(h_2)$, lo cual deriva de forma directa de la primera relación.

Por último, consideremos $R_\mu \in R$ y $w \in \mathcal{W}_S$. Por las relación de la presentación de H que obtenemos a partir del Teorema C.1.1 sabemos que $\tau\left(wR_\mu w^{-1}\right) = 1$ en H. Entonces

$$1 = \tau\left(wR_\mu w^{-1}\right) = \tau\left(w\overline{w}^{-1}\overline{w}R_\mu\left(w\overline{w}^{-1}\overline{w}\right)^{-1}\right) = \tau\left(\left(w\overline{w}^{-1}\right)\overline{w}R_\mu\overline{w}^{-1}\left(w\overline{w}^{-1}\right)^{-1}\right).$$

Haciendo uso de que $\tau(h_1h_2) = \tau(h_1)\tau(h_2)$ se deduce que

$$1 = \tau\left(\left(w\overline{w}^{-1}\right)\overline{w}R_\mu\overline{w}^{-1}\left(w\overline{w}^{-1}\right)^{-1}\right) = \tau\left(w\overline{w}^{-1}\right)\tau\left(\overline{w}R_\mu\overline{w}^{-1}\right)\tau\left(w\overline{w}^{-1}\right)^{-1},$$

lo cual ocurre si y solo si $\tau\left(\overline{w}R_\mu\overline{w}^{-1}\right) = 1$, por lo que podemos reducir la cuarta relación a partir de la primera. Concluimos que

$$H \cong \left\langle \{s_{k,a_i}\} \;\middle|\; s_{k,a_i} = \tau\left(ka_i\overline{ka_i}^{-1}\right), \tau\left(kR_\mu k^{-1}\right) \text{ para todo } k \in \mathcal{K},\ a_i \in S,\ R_\mu \in R \right\rangle.$$

□

Corolario C.2.1. *Sea G un grupo finitamente presentado y $H \leqslant G$ un subgrupo de índice finito en G. Entonces H es finitamente presentado.*

Demostración. Como G es finitamente presentado tiene una cantidad finita de generadores y de relaciones, y como el índice de H en G es finito, cualquier sistema de representantes de G/H tiene una cantidad finita de elementos. Haciendo uso del Teorema C.2.1 se deduce que H admite una presentación finita, puesto que tanto los generadores como las relaciones dependen de los generadores y las relaciones de G y de los elementos de un sistema de representantes de G/H, los cuales son finitos. □

Podemos notar que la presentación obtenida mediante el método de Reidemeister es más amena que la dada en el Teorema C.1.1, pero aún podemos seguir reduciendo la cantidad de relaciones. Notemos que la idea para reducir la presentación ha sido hacer una elección de los generadores. La idea para reducirlo aún más será hacer una elección del sistema de representantes.

Definición (Sistema de representantes de Schreier)**.** Sea G un grupo generado por S, $H \leqslant G$ un subgrupo y $\mathcal{K}$ un conjunto de palabras escritas a partir de S que representan a los elementos de un sistema de representantes de G/H que contiene al 1. Diremos que $\mathcal{K}$ es un sistema de representantes de Schreier de G/H si es cerrado para los segmentos iniciales. Esto es, cualquier segmento inicial de un representante es de nuevo un representante.

Definición (Longitud de una clase)**.** Sea G un grupo generado por S y $H \leqslant G$ un subgrupo. Consideremos la aplicación $\ell : \mathcal{W}_S \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ longitud en G. Dado $g \in G$, llamaremos longitud de la clase Hg a

$$\ell(Hg) := \text{mín}\{\ell(w) : w \in \mathcal{W}_S \text{ tal que } w_G \in Hg\}.$$

Lema C.2.2 (Lema 2.2 [16])**.** *Sea G un grupo y $H \leqslant G$ un subgrupo. Entonces existe un sistema de representantes de Schreier de G/H.*

Demostración. Supongamos que G está generado por un conjunto de elementos S. Procederemos por inducción en la longitud de las clases. Primero, como $1_G \in H$ visto como clase, entonces $\ell(H) = \ell(1) = 0$, pues es el que tiene longitud mínima. Tomamos como representante de H a 1. Supongamos que H_1 es una clase de G/H tal que $\ell(H_1) = 1$, entonces tomamos como representante a cualquier elemento de longitud 1.

Sea H_2 una clase de G/H tal que $\ell(H_2) = 2$. Tomemos $x_1, x_2 \in \mathcal{W}_S$ tal que $(x_1x_2)_G \in H_2$ de manera que x_1 y x_2 sean generadores de G o el inverso de alguno de estos. Como $(x_1x_2)_G \in H_2$, entonces $(\overline{x_1x_2})_G \in H_2$. Haciendo uso del Lema C.1.2 se tiene que $(\overline{\overline{x}_1x_2})_G \in H_2$, y por lo tanto $(\overline{x}_1x_2)_G \in H_2$. Debido a que $\ell(H_2) = 2$ se tiene que $\ell(\overline{x}_1x_2) \geqslant 2$. Ahora, por la aditividad de ℓ se tiene que

$$2 \leqslant \ell(\overline{x}_1x_2) = \ell(\overline{x}_1) + \ell(x_2) = \ell(\overline{x}_1) + 1,$$

por lo que $\ell(\overline{x}_1) \geqslant 1$. Por otro lado, como $\ell(x_1) = 1$, se tiene que $\ell(\overline{x}_1) \leqslant \ell(x_1) = 1$. Deducimos que $\ell(\overline{x}_1) = 1$, y por lo tanto, $\ell(\overline{x}_1x_2) = 2$. Como $\ell(\overline{x}_1) = 1$, ya es representante de alguna clase de longitud 1, pues las hemos tomado con anterioridad, y vemos que $(\overline{x}_1x_2)_G \in H_2$ tiene longitud 2, por lo que tomamos este elemento como representante de H_2, pues cumple las condiciones de un sistema de representantes de Schreier.

Como hipótesis de inducción, supongamos que podemos escoger un representante de cada clase de la misma longitud de la clase de manera que formen un sistema de representantes de Schreier hasta clases de longitud $n-1$, y sea H_n una clase tal que $\ell(H_n) = n$. Tomemos $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{W}_S$ de manera que $(x_1x_2\cdots x_n)_G \in H_n$ y tal que x_i es un generador de G o la inversa de uno de estos para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $(x_1x_2\cdots x_n)_G \in H_n$, también estará $(\overline{x_1x_2\cdots x_n})_G \in H_n$. Haciendo de nuevo uso del Lema C.1.2 se deduce que $(\overline{\overline{x_1x_2\cdots x_{n-1}}x_n})_G \in H_n$, y por ende, $(\overline{x_1x_2\cdots x_{n-1}}x_n)_G \in H_n$. Como $\ell(H_n) = n$, se tiene que

$$n \leqslant \ell(\overline{x_1x_2\cdots x_{n-1}}x_n) = \ell(\overline{x_1x_2\cdots x_{n-1}}) + \ell(x_n) = \ell(\overline{x_1x_2\cdots x_{n-1}}) + 1.$$

Por lo tanto $\ell(\overline{x_1x_2\cdots x_{n-1}}) \geqslant n-1$, pero por otro lado $\ell(\overline{x_1x_2\cdots x_{n-1}}) \leqslant \ell(x_1x_2\cdots x_{n-1}) = n-1$ por aditividad. Deducimos que $\ell(\overline{x_1x_2\cdots x_{n-1}}) = n-1$. Por hipótesis de inducción ya hemos elegido $\overline{x_1x_2\cdots x_{n-1}}$ y es un representante en el sistema de representantes de Schreier. Por otro lado, como $\ell(\overline{x_1x_2\cdots x_{n-1}}) = n-1$ se tiene que $l(\overline{x_1x_2\cdots x_{n-1}}x_n) = n$, por lo que podemos tomar $\overline{x_1x_2\cdots x_{n-1}}x_n$ como representante de H_n. Deducimos que existe un sistema de representantes de Schreier de G/H. □

Definición (Proceso de reescritura de Reidemeister-Schreier)**.** Sea G un grupo y $H \leqslant G$ un subgrupo. Llamaremos proceso de reescritura de Reidemeister-Schreier de H sobre G al proceso de reescritura de Reidemeister de H sobre G obtenido a partir de un sistema de representantes de Schreier de G/H.

Teorema C.2.2 (Método de Reidemeister-Schreier, Teorema 2.9 [16])**.** *Sea G un grupo con una presentación $\langle S \mid R\rangle$, y sea $H \leqslant G$ un subgrupo. Sea $\mathcal{K}$ un sistema de representantes de Schreier de G/H. Si τ es un proceso de reescritura de Reidemeister-Schreier de H sobre G, entonces H admite una presentación tal que*

$$H \cong \left\langle \{s_{k,a_i}\} \;\middle|\; s_{m,a_\lambda}, \tau\left(kR_\mu k^{-1}\right) \right\rangle,$$

donde $k \in \mathcal{K}$, $a_i \in S$, $R_\mu \in R$ y $m \in \mathcal{K}$ y $a_\lambda \in S$ tales que $ma_\lambda \approx \overline{ma_\lambda}$.

Demostración. Primero, como τ es un proceso de reescritura de Reidemeister-Schreier, en concreto es un proceso de reescritura de Reidemeister. Haciendo uso del Teorema C.2.1, sabemos que H admite una presentación tal que

$$H \cong \left\langle \{s_{k,a_i}\} \;\middle|\; s_{k,a_i} = \tau\left(ka_i\overline{ka_i}^{-1}\right), \tau\left(kR_\mu k^{-1}\right) \text{ para todo } k \in \mathcal{K},\ a_i \in S,\ R_\mu \in R \right\rangle.$$

Consideremos $m \in \mathcal{K}$ y $a_\lambda \in S$ tal que $ma_\lambda \approx \overline{ma_\lambda}$. Entonces $ma_\lambda\overline{ma_\lambda}^{-1} \approx 1$, por lo que

$$s_{m,a_\lambda} = \tau\left(ma_\lambda\overline{ma_\lambda}^{-1}\right) = \tau(1) = 1.$$

Supongamos que tenemos ahora $k \in \mathcal{K}$ y $a_i \in S$ cualesquiera. Entonces, procediendo de forma análoga que en la prueba del Teorema C.2.1 sabemos que podemos expresar $\tau\left(ka_i\overline{ka_i}^{-1}\right)$ como producto de elementos de la forma s_{m,a_λ} o $s^{-1}_{ma_\lambda^{-1},a_\lambda}$, donde m es un segmento inicial de k. En el primer caso, como m es un segmento inicial de k, también lo será ma_λ, y como $\mathcal{K}$ es un sistema de representantes de Schreier se tiene que $ma_\lambda = \overline{ma_\lambda}$. Para el segundo caso, siguiendo el mismo razonamiento se tiene que

$$\overline{ma_\lambda^{-1}a_\lambda} = \overline{m} = m \approx ma_\lambda^{-1}a_\lambda.$$

Deducimos que la relación $s_{k,a_i} = \tau\left(ka_i\overline{ka_i}^{-1}\right)$ se deduce de $s_{k,a_i} = s_{k,a_i}$, la cual, por razones obvias, no se incluye. $\square$

Para ver el método en práctica, veamos un ejemplo sencillo. Consideremos D_4 el grupo diédrico de orden 8, esto es, el grupo de simetrías del cuadrado. Es bien conocido que este grupo admite una presentación

$$D_4 \cong \left\langle a, b \mid a^4, b^2, (ab)^2 \right\rangle.$$

Es fácil ver que D_4 es un grupo finito, de hecho

$$D_4 = \{1, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\}.$$

Consideremos $V \leqslant D_4$ el grupo de Klein, que tiene por elementos

$$V = \{1, a^2, b, ba^2\}.$$

Haciendo uso del método de Reidemeister-Schreier vamos a obtener una presentación de V. Primero necesitamos conocer las clases de equivalencia de D_4/V. Gracias al Teorema de Lagrange sabemos que $[D_4 : V] = 2$, y un simple cálculo muestra que

$$D_4/V = \left\{\{1, a^2, b, ba^2\}, \{a, a^3, ba, ba^3\}\right\}.$$

Para no sobrecargar la notación, abusaremos de esta denotando de la misma forma en este caso a los elementos de G como a las palabras que podemos escribir a partir de $\{a, b\}$, puesto que no hay ambigüedad. Notemos que $\ell\left(\{1, a^2, b, ba^2\}\right) = 0$, pues contiene a 1. Tomamos 1 como representante de dicha clase. Por otro lado $\ell\left(\{a, a^3, ba, ba^3\}\right) = 1$, donde el elemento de longitud mínima es a, por lo que tomaremos a como representante de esta clase. Deducimos que un sistema de representantes de Schreier es $\mathcal{K} = \{1, a\}$.

Consideremos los símbolos $s_{1,a}$, $s_{1,b}$, $s_{a,a}$ y $s_{a,b}$, los cuales se obtienen del proceso de reescritura de Reidemeister-Schreier. Buscamos ahora elementos de $m \in \mathcal{K}$ tales que $ma \approx \overline{ma}$ o $mb \approx \overline{mb}$. Podemos apreciar que

$$1 \cdot a = a = \overline{a} = \overline{1 \cdot a}, \quad 1 \cdot b = b \neq \overline{b} = 1, \text{ y } aa = a^2 \neq \overline{a^2} = 1.$$

En el caso de ab, haciendo uso de las relaciones de D_4 sabemos que

$$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba^3,$$

por lo que $ba^3 \neq \overline{ba^3} = a$. Las igualdades que hemos usado se refieren a igualdad como elemento del grupo. Notemos que si dos elementos no son iguales como elemento del grupo, no pueden ser libremente iguales. Por último, nos falta calcular las relaciones que se obtienen de conjugar las restricciones de la presentación de D_4:

$$1 = \tau\left(1 \cdot a^4 \cdot 1^{-1}\right) = \tau\left(a^4\right) = \tau\left(a^2\right)^2 = \tau\left(1 \cdot a \cdot \overline{1 \cdot a}^{-1} \cdot \overline{1 \cdot a} \cdot a \cdot \overline{1 \cdot a \cdot a}^{-1}\right)^2 = \left(s_{1,a}s_{a,a}\right)^2.$$

$$1 = \tau\left(1 \cdot b^2 \cdot 1^{-1}\right) = \tau\left(b^2\right) = \tau\left(b\right)^2 = \tau\left(1 \cdot b \cdot \overline{1 \cdot b}^{-1}\right)^2 = s_{1,b}^2.$$

$$1 = \tau\left(1 \cdot (ab)^2 \cdot 1^{-1}\right) = \tau\left((ab)^2\right) = \tau\left(abab\right) =$$
$$= \tau\left(1 \cdot a \cdot \overline{1 \cdot a}^{-1} \cdot \overline{1 \cdot a} \cdot b \cdot \overline{1 \cdot a \cdot b}^{-1} \cdot \overline{1 \cdot a \cdot b} \cdot a \cdot \overline{1 \cdot a \cdot b \cdot a}^{-1} \cdot \overline{1 \cdot a \cdot b \cdot a} \cdot b \cdot \overline{1 \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b}^{-1}\right) =$$
$$= s_{1,a}s_{a,b}s_{a,a}s_{1,b}.$$

$$1 = \tau\left(a \cdot a^4 \cdot a^{-1}\right) = \tau\left(a^4\right) = \left(s_{1,a}s_{a,a}\right)^2.$$

$$1 = \tau\left(a \cdot b^2 \cdot a^{-1}\right) = \tau\left(abba^{-1}\right) =$$
$$= \tau\left(1 \cdot a \cdot \overline{1 \cdot a}^{-1} \cdot \overline{1 \cdot a} \cdot b \cdot \overline{1 \cdot a \cdot b}^{-1} \cdot \overline{1 \cdot a \cdot b} \cdot b \cdot \overline{1 \cdot a \cdot b \cdot b}^{-1} \cdot \overline{1 \cdot a \cdot b \cdot b} \cdot a^{-1} \cdot \overline{1 \cdot a \cdot b \cdot b \cdot a^{-1}}^{-1}\right) =$$
$$= s_{1,a}s_{a,b}s_{a,b}s_{1,a}^{-1} = s_{1,a}s_{a,b}^2s_{1,a}^{-1}.$$

$$1 = \tau\left(a \cdot (ab)^2 \cdot a^{-1}\right) = \tau(aababa^{-1}) =$$
$$= \tau\left(1 \cdot a \cdot \overline{1 \cdot a}^{-1} \cdot \overline{1 \cdot a} \cdot a \cdot \overline{1 \cdot a^2}^{-1} \cdot \overline{1 \cdot a^2} \cdot b \cdot \overline{1 \cdot a^2 \cdot b}^{-1} \cdot \overline{1 \cdot a^2 \cdot b} \cdot a \cdot \overline{1 \cdot a^2 \cdot b \cdot a}^{-1} \cdots\right.$$
$$\left.\cdots \overline{1 \cdot a^2 \cdot b \cdot a} \cdot b \cdot \overline{1 \cdot a^2 \cdot b \cdot a \cdot b}^{-1} \cdot \overline{1 \cdot a^2 \cdot b \cdot a \cdot b} \cdot a^{-1} \cdot \overline{1 \cdot a^2 \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a^{-1}}^{-1}\right) =$$
$$= s_{1,a}s_{a,a}s_{1,b}s_{1,a}s_{a,b}s_{1,a}^{-1}.$$

Por lo tanto, una presentación de V vendría dada por

$$V \cong \left\langle s_{1,a}, s_{1,b}, s_{a,a}, s_{a,b} \mid s_{1,a}, \left(s_{1,a}s_{a,a}\right)^2, s_{1,b}^2, s_{1,a}s_{a,b}s_{a,a}s_{1,b}, s_{1,a}s_{a,b}^2s_{1,a}^{-1}, s_{1,a}s_{a,a}s_{1,b}s_{1,a}s_{a,b}s_{1,a}^{-1}\right\rangle.$$

Ahora solo basta con eliminar expresiones redundantes. Primero, como $s_{1,a} = 1$ podemos eliminar dicho generador, pues es trivial. Eso nos deja con la expresión

$$V \cong \left\langle s_{1,b}, s_{a,a}, s_{a,b} \mid s_{a,a}^2, s_{1,b}^2, s_{a,b}s_{a,a}s_{1,b}, s_{a,b}^2, s_{a,a}s_{1,b}s_{a,b}\right\rangle.$$

Pare terminar, basta notar que, como $s_{a,b}s_{a,a}s_{1,b} = 1$, entonces $s_{1,b} = s_{a,a}^{-1}s_{a,b}^{-1}$, por lo que el generador $s_{1,b}$ es redundante. En conclusión, obtenemos la presentación

$$V \cong \left\langle s_{a,a}, s_{a,b} \mid s_{a,a}^2, \left(s_{a,a}s_{a,b}\right)^2, s_{a,b}^2\right\rangle \cong \left\langle x, y \mid x^2, y^2, (xy)^2\right\rangle.$$

Bibliografía

[1] E. Artin, *Theory of braids*, Annals of Mathematics, 48 (1947), pp. 101–126.

[2] V. G. Bardakov and P. Bellingeri, *Combinatorial properties of virtual braids*, 2006.

[3] P. Bellingeri, B. A. C. de La Cruz, and L. Paris, *A simple solution to the word problem for virtual braid groups*, 2016.

[4] P. Bellingeri and L. Paris, *Virtual braids and permutations*, 2018.

[5] P. Bellingeri, L. Paris, and A.-L. Thiel, *Virtual artin groups*, 2021.

[6] N. Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras: Chapters 4-6*, no. partes 4-6 in Elements de mathematique [series], Springer Berlin Heidelberg, 2008.

[7] H. S. M. Coxeter, *Discrete groups generated by reflections*, Annals of Mathematics, 35 (1934), pp. 588–621.

[8] H. S. M. Coxeter, *The complete enumeration of finite groups of the form ri2=(rirj)kij=1*, Journal of the London Mathematical Society, s1-10 (1935), pp. 21–25.

[9] J. Crisp and L. Paris, *The solution to a conjecture of tits on the subgroup generated by the squares of the generators of an artin group*, Inventiones Mathematicae, 145 (2001), pp. 19–36.

[10] M. Davis, *The Geometry and Topology of Coxeter Groups*, L.M.S. monographs, Princeton University Press, 2008.

[11] E. Godelle and L. Paris, $k(\pi, 1)$ *and word problems for infinite type artin-tits groups, and applications to virtual braid groups*, 2010.

[12] J. Gonzalez-Meneses, *Basic results on braid groups*, 2010.

[13] T. Hosaka, *On the center of a coxeter group*, 2005.

[14] J. E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1990.

[15] L. H. Kauffman and S. Lambropoulou, *Virtual braids*, 2004.

[16] W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar, *Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations*, Dover books on mathematics, Dover Publications, 2004.

[17] L. Paris, $k(\pi, 1)$ *conjecture for artin groups*, 2012.

[18] J. Stilwell and J. Serre, *Trees*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 2002.

[19] J. Tits, *Normalisateurs de tores i. groupes de coxeter étendus*, Journal of Algebra, 4 (1966), pp. 96–116.

[20] H. van der Lek, *The homotopy type of complex hyperplane complements*, Katholieke Universiteit te Nijmegen, 1983.