TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

ANÁLISIS EN ESPACIOS MÉTRICOS

Autor: Raúl Filigrana Villalba
Dirigido por: Rafael Espínola García
2023

Índice general

Resumen

En la memoria expuesta a continuación, queremos hacer una revisión de las funciones de variación acotada en distintos espacios. Comenzaremos las funciones de variación acotada en un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$. A partir de ellas, podremos generalizar este concepto a funciones definidas en un abierto de $\mathbb{R}$.

En el segundo capítulo, estudiaremos las funciones de variación acotada en un abierto de $\mathbb{R}^d$. Para definirlas, nos apoyaremos en la idea de derivada débil y los espacios de Sobolev. El Teorema de Representación de Riesz nos caracterizará la derivada de estas funciones en el sentido de las distribuciones.

Esta disertación finalizará con las funciones de variación acotada en espacios métricos. Para ello, nos inspiraremos en resultados que veremos en el capítulo anterior y usaremos las funciones Lipschitz localmente. Además, a lo largo del capítulo, iremos viendo qué mínimas condiciones debemos imponer al espacio para poder definir la variación de una función en este contexto.

Abstract

In the dissertation presented below, we want to do a general study about functions of bounded variation on different spaces. We will start with functions of bounded variation on a bounded closed interval of $\mathbb{R}$. Based on this concept, we will generalise it to functions defined on an open set of $\mathbb{R}$.

In the second chapter, we will study functions of bounded variation on an open set of $\mathbb{R}^d$. In order to define them, we will use the idea of weak derivative and Sobolev spaces. Riesz' Representation Theorem will caracterise the distributional derivative of these functions.

The dissertion will end with functions of bounded variation on metric spaces. For this purpose, we will be inspired by some results we will see in the previous chapter and we will be using locally Lipschitz functions. Furthermore, we will evaluate which minimal conditions will be needed to set in order to define the variation of a function in this context.

Introducción al Análisis en Espacios Métricos

El Análisis en Espacios Métricos es un campo activo e independiente dedicado (entre otras cosas) al estudio del concepto de la diferenciabilidad en espacios métricos. Por ejemplo, inspirados el Teorema Fundamental del Cálculo, los matemáticos Heinonen y Koskela proponen la idea del gradiente superior como sustituto de la derivada de una función definida en un espacio métrico rectificablemente conexo (X, d).

Si (X, d) es un espacio métrico rectificablemente conexo y $f : X \to \mathbb{R}$ es una función, diremos que una función medible Borel $g : X \to [0, +\infty)$ es un gradiente superior de f si verifica:

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_\gamma g \, ds_\gamma,$$

para todo $x, y \in X$ y para toda curva rectificable $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $\gamma(a) = x$ y $\gamma(b) = y$, donde s_γ es la medida de longitud de arco inducida por γ.

La noción de gradiente superior generaliza la norma del gradiente de una función de clase $\mathcal{C}^1$. En el caso de funciones localmente Lipschitz en un espacio métrico (X, d), podemos definir de manera explícita una función que, bajo ciertas consideraciones sobre el espacio métrico, esta se comporta como un gradiente superior. Dados (X, d) un espacio métrico y $f \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(X)$, definimos la constante Lipschitz inferior de f como la función $\mathrm{lip}\, f : X \to [0, +\infty)$ dada por:

$$\mathrm{lip}\, f(x) = \liminf_{r \to 0^+} \frac{\sup_{y \in B(x,r)} |f(y) - f(x)|}{r}.$$

En este trabajo, pondremos especial interés en las funciones de variación acotada y la revisión de este concepto en distintos ámbitos. Comenzaremos con la definición de clásica de función de variación acotada en $\mathbb{R}$ definida en un intervalo cerrado y acotado. Estas verificarán condiciones de regularidad muy fuertes como es la diferenciabilidad en el sentido clásico. Esto motivará a estudiar el concepto de la derivada débil. Seguidamente, nos adentraremos en el estudio de las funciones de Sobolev que nos permitirá dar el paso a las funciones de variación acotada en $\mathbb{R}^d$. El Teorema de Representación de Riesz nos describirá estas funciones como aquellas cuya derivada distribucional es una medida vectorial Radon finita. Inspirados en las propiedades y resultados que se cumplen para funciones de variación acotada en $\mathbb{R}^d$, daremos la definición de función de variación acotada en espacios métricos. Es aquí donde entrarán en juego las funciones localmente Lipschitz. A lo largo del capítulo, nos interesará qué propiedades mínimas de regularidad debemos suponer sobre el espacio métrico medible para que las cosas funcionen. Esos espacios los conoceremos como espacios métricos "buenos". Al igual que en el caso de $\mathbb{R}^d$, la medida de variación será una medida Radon finita.

Existe una clase de conjuntos que tienen mucha relevancia en el estudio de las funciones de variación acotada: los conjuntos de perímetro localmente finito. Diremos que un conjunto medible Borel E es de perímetro localmente finito si la función χ_E es de variación acotada localmente. En el caso $(X, d, \mu) = \big(\mathbb{R}^d, d_e, m_d\big)$, se puede probar que la medida de variación (o medida perimetral en este caso) es la medida de Hausdorff $(d-1)$-dimensional concentrada en un conjunto de la frontera de E conocido como frontera reducida de E y se denota como $\partial^\star E$ (véase [2], Sección 5.7). Análogamente, bajo ciertas condiciones de regularidad sobre el espacio métrico medible (X, d, μ), se puede probar que la medida perimetral tiene densidad θ (una cierta función medible Borel no negativa) respecto de la medida de Hausdorff $(d-1)$-dimensional y está concentrada en la frontera reducida (véase [3], [6] ó [14]).

En este trabajo, no llegamos a desarrollar las propiedades de las funciones de variación acotada expuestas en este último párrafo ya que se pretendía entender estos espacios desde sus definiciones clásicas. A los espacios de variación acotada sobre espacios métricos, le dedicamos el último capítulo donde mostramos una de las tres formas naturales en que se han introducido en la literatura reciente (véase [6], [14] y [15]). Estas tres formas de introducir estos espacios se corresponden con las tres formas naturales de introducir los espacios de Sobolev. En [14] y [15], se probó que todas ellas son equivalentes. Se puede probar también que las funciones de $\mathcal{W}^{1,1}$ corresponden a las funciones de variación acotada cuya medida de variación es absolutamente continua respecto a la medida del espacio medible (véase [15], Sección 8.5). Para el lector que necesite revisar conceptos referentes a la Teoría de la Medida, puede acudir a [2], [7] y [11].

Capítulo 1

Funciones de variación acotada en $\mathbb{R}$

1.1. Introducción

Este capítulo versará sobre el estudio general de las aplicaciones de variación acotada de un intervalo (cerrado o abierto) en $\mathbb{R}$ o, de forma más general, en un espacio métrico (X, d).

Recordemos que dado un intervalo $[a, b]$, una partición es un subconjunto finito de puntos $\{t_i\}_{i=0}^n \subseteq [a, b]$ tal que $a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b$. Denotaremos por $\mathscr{P}([a, b])$ al conjunto de todas las particiones del intervalo $[a, b]$.

Sean (X, d) un espacio métrico, $\gamma : [a, b] \to X$ una curva (esto es, una aplicación continua) y $P = \{t_i\}_{i=0}^n \in \mathscr{P}([a, b])$. Definimos la longitud de γ respecto de la partición P como la siguiente cantidad:

$$\ell(\gamma, P) = \sum_{i=1}^{n} d\left(f(t_i), f(t_{i-1})\right)$$

Diremos que γ es una curva rectificable si se cumple que:

$$\ell(\gamma) := \sup\left\{\ell(\gamma, P) | P \in \mathscr{P}([a, b])\right\} < +\infty.$$

En cualquier caso, diremos que $\ell(\gamma)$ es la longitud de γ.

Como podemos observar, en la definición de curva rectificable, no interviene de ningún modo la continuidad de la aplicación más allá de que γ sea una curva. Esto motiva a dar una extensión natural que es el concepto de aplicación de variación acotada.

Emplearemos m^* para denotar a la medida exterior de la que proviene la medida de Lebesgue 1-dimensional la cual escribiremos como m.

En este capítulo, pondremos especial interés en funciones reales de variación acotada y veremos que estas son diferenciables en m-casi todo en el sentido clásico. Para ello, necesitaremos los conceptos de límites y derivadas superior e inferior.

1.2. El espacio $BV\left([a,b]\right)$

Empezaremos introduciendo el concepto de aplicación de variación acotada. Posteriormente, daremos algunas propiedades que verifican las mismas y finalizaremos viendo que, cuando el espacio de llegada X es un espacio de Banach, podemos dotar al espacio de aplicaciones de variación acotada de una norma que será completa.

Definición 1.1. Sean (X,d) un espacio métrico, $f:[a,b]\to X$ una aplicación y $P=\{t_i\}_{i=0}^{n}\in\mathscr{P}\left([a,b]\right)$. Se define la variación de f en $[a,b]$ respecto de la partición P como el valor:

$$V_a^b\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n} d\left(f\left(t_i\right),f\left(t_{i-1}\right)\right).$$

Además, definimos la variación de f en $[a,b]$ como sigue:

$$V_a^b\left(f\right)=\sup\left\{V_a^b\left(f,P\right)\middle|P\in\mathscr{P}\left([a,b]\right)\right\}\in[0,+\infty].$$

Otra notación para $V_a^b\left(f\right)$ es $V_{[a,b]}\left(f\right)$. Por convenio, se define $V_a^a\left(f\right)\overset{\text{def.}}{=}0$. Diremos que f es de variación acotada en $[a,b]$ si $V_a^b\left(f\right)<+\infty$.

El conjunto de aplicaciones de variación acotada en $[a,b]$ lo denotaremos como $BV\left([a,b],X\right)$. Si no hay lugar a confusión, escribiremos $BV\left([a,b]\right)$.

Proposición 1.1. Sean (X,d) un espacio métrico y $f:[a,b]\to X$ una aplicación. Se verifican las siguientes propiedades:

1. Si $[c,d]\subseteq[a,b]$, entonces $V_c^d\left(f\right)\leq V_a^b\left(f\right)$. En consecuencia, si $f\in BV\left([a,b]\right)$, entonces $f\in BV\left([c,d]\right)$.
2. Para todo $c\in(a,b)$, se tiene que $V_a^b\left(f\right)=V_a^c\left(f\right)+V_c^b\left(f\right)$.
3. Si $(X,d)=(\mathbb{R},d_e)$ y $f\in BV\left([a,b]\right)$, las funciones $g:x\in[a,b]\mapsto V_a^x\left(f\right)\in\mathbb{R}$ y $h:x\in[a,b]\mapsto V_a^x\left(f\right)-f\left(x\right)\in\mathbb{R}$ son crecientes.
4. Si $(X,d)=(\mathbb{R},d_e)$ y f es una función creciente (resp. decreciente), entonces f es una función de variación acotada y $V_a^b\left(f\right)=f\left(b\right)-f\left(a\right)$ (resp. $V_a^b\left(f\right)=f\left(a\right)-f\left(b\right)$).
5. Si (X,d) es un espacio métrico inducido por una norma $||\cdot||$ sobre X, $\alpha\in\mathbb{K}$ y $g:[a,b]\to X$ es otra aplicación, entonces $V_a^b\left(\alpha\cdot f\right)=|\alpha|\cdot V_a^b\left(f\right)$ y $V_a^b\left(f+g\right)\leq V_a^b\left(f\right)+V_a^b\left(g\right)$. En consecuencia, $BV\left([a,b]\right)$ es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y producto por escalar.

Demostración.

1. Sea $Q = \{t_i\}_{i=0}^n \in \mathscr{P}([c,d])$. Entonces $P = \{a\} \cup Q \cup \{b\} \in \mathscr{P}([a,b])$ y:

$$V_c^d(f,Q) \leq d(f(a), f(t_0)) + V_c^d(f,Q) + d(f(b), f(t_n)) = V_a^b(f,P) \leq V_a^b(f).$$

   Tomando el supremo en $Q \in \mathscr{P}([c,d])$, nos queda que $V_c^d(f) \leq V_a^b(f)$.

2. Sea $c \in (a,b)$ y $P = \{t_i\}_{i=0}^n \in \mathscr{P}([a,b])$. Entonces existe $i_0 \in \mathbb{N}_{n-1} \cup \{0\}$ tal que $t_{i_0} \leq c < t_{i_0+1}$. Luego $Q = \{t_i\}_{i=0}^{i_0} \cup \{c\} \in \mathscr{P}([a,c])$, $R = \{c\} \cup \{t_i\}_{i=i_0+1}^n \cup \in \mathscr{P}([a,c])$ y $d(f(t_{i_0}), f(t_{i_0+1})) \leq d(f(t_{i_0}), f(c)) + d(f(c), f(t_{i_0+1}))$. Luego:

$$V_a^b(f,P) \leq V_a^c(f,Q) + V_c^b(f,R) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

   Tomando el supremo en $P \in \mathscr{P}([a,b])$, nos queda que $V_a^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$.

   Sean $Q = \{t_i\}_{i=0}^n \in \mathscr{P}([a,c])$ y $R = \{s_j\}_{j=0}^m \in \mathscr{P}([c,b])$. Entonces $P = Q \cup R \in \mathscr{P}([a,b])$ y:

$$V_a^c(f,Q) + V_c^b(f,R) = V_a^b(f,P) \leq V_a^b(f).$$

   Fijado R, tomamos el supremo en $Q \in \mathscr{P}([a,c])$. Luego:

$$V_a^c(f) + V_b^c(f,R) \leq V_a^b(f).$$

   Ahora, tomamos el supremo en $R \in \mathscr{P}([c,b])$ y deducimos que:

$$V_a^c(f) + V_c^b(f) \leq V_a^b(f).$$

   Por tanto, $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$.

3. Sean $x, y \in [a,b]$ con $x \leq y$. Por 1, $g(x) = V_a^x(f) \leq V_a^y(f) = g(y)$. Luego, g es creciente. Por otro lado, usando 2, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} g(y) - g(x) = V_a^y(f) - V_a^x(f) = V_x^y(f) \geq V_x^y(f, \{x,y\}) \\ = |f(y) - f(x)| \geq f(y) - f(x). \end{aligned}$$

   En consecuencia:

$$h(x) = V_a^x(f) - f(x) = g(x) - f(x) \leq g(y) - f(y) = V_a^y(f) - f(y) = h(y).$$

   Por tanto, h es creciente.

4. Sea $P = \{t_i\}_{i=0}^n \in \mathscr{P}([a,b])$. Entonces:

$$V_a^b(f,P) = \sum_{i=0}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=0}^n (f(t_i) - f(t_{i-1})) = f(b) - f(a),$$

   donde estamos utilizando que f es creciente. Claramente, tomando el supremo en $P \in \mathscr{P}([a,b])$, se tiene que $V_a^b(f)$.

   Si f fuese decreciente, entonces $-f$ es creciente y $V_a^b(f) = V_a^b(-f)$. Por tanto, $V_a^b(f) = V_a^b(-f) = -f(b) - (-f(a)) = f(a) - f(b)$.

5. Sea $P = \{t_i\}_{i=0}^n \in \mathscr{P}([a,b])$. Si $\alpha = 0$, entonces es trivial que $V_a^b(\alpha \cdot f) = |\alpha| \cdot V_a^b(f)$. Supongamos que $\alpha \neq 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} V_a^b(\alpha \cdot f, P) &= \sum_{i=1}^n ||\alpha \cdot f(t_i) - \alpha \cdot f(t_{i-1})|| = |\alpha| \cdot \sum_{i=1}^n ||f(t_i) - f(t_{i-1})|| \\ &= |\alpha| \cdot V_a^b(f,P) \leq |\alpha| \cdot V_a^b(f) = |\alpha| \cdot V_a^b\left(\alpha^{-1} \cdot \alpha \cdot f\right) \\ &\leq |\alpha| \cdot \left(|\alpha|^{-1} \cdot V_a^b(\alpha \cdot f)\right) = V_a^b(\alpha \cdot f). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_a^b(f+g,P) =& \sum_{i=1}^n ||(f(t_i) + g(t_i)) - (f(t_{i-1}) - g(t_{i-1}))|| \\ &\leq \sum_{i=1}^n ||f(t_i) - f(t_{i-1})|| + \sum_{i=1}^n ||g(t_i) - g(t_{i-1})|| \\ &= V_a^b(f,P) + V_a^b(g,P) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g). \end{aligned}$$

   Tomando el supremo en $P \in \mathscr{P}([a,b])$, nos queda que:

$$V_a^b(\alpha \cdot f) \leq |\alpha| \cdot V_a^b(f) \leq V_a^b(\alpha \cdot f).$$

$$V_a^b(f+g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g).$$

   Por tanto, $V_a^b(\alpha \cdot f) = |\alpha| \cdot V_a^b(f)$ y $V_a^b(f+g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)$.

$\square$

Sean (X,d) un espacio métrico y $\gamma : [a,b] \to X$ una curva rectificable. Usando la Proposición 1.1, sabemos que la función $\ell_\gamma : t \in [a,b] \to \ell\left(\gamma|_{[a,t]}\right) \in [0, \ell(\gamma)]$ es creciente. El siguiente lema probará que es continua:

Lema 1.1. En las condiciones anteriores, la función ℓ_γ es continua en $[a,b]$.

Demostración. Como ℓ_γ es creciente, para todo $t_0 \in [a, b)$ y para todo $\widetilde{t_0} \in (a, b]$ existen los límites laterales que denotaremos como $\ell_\gamma\left(t_0^+\right)$ y $\ell_\gamma\left(\widetilde{t_0}^-\right)$. Por reducción al absurdo, supongamos que existe $t_0 \in [a, b)$ tal que $\ell_\gamma\left(t_0^+\right) - \ell_\gamma(t_0) > \delta > 0$. Sea $t_0 < t_1 < b$. Entonces:

$$\begin{aligned}\ell\left(\gamma|_{[t_0,t_1]}\right) &= \ell_\gamma(t_1) - \ell_\gamma(t_0)\\ &= \left(\ell_\gamma(t_1) - \ell_\gamma\left(t_0^+\right)\right) + \left(\ell_\gamma\left(t_0^+\right) - \ell_\gamma(t_0)\right)\\ &> 0 + \delta = \delta.\end{aligned}$$

Como $\ell_\gamma(t_1) - \ell_\gamma(t_0) = \ell_{\gamma|_{[t_0,t_1]}}(t_1) > \delta$, existe $P = \{s_i\}_{i=0}^n \in \mathcal{P}([t_0, t_1])$ tal que:

$$\sum_{i=1}^n d\left(\gamma(s_i), \gamma(s_{i-1})\right) > \delta.$$

Si $\sum_{i=2}^n d\left(\gamma(s_i), \gamma(s_{i-1})\right) > \delta$, sea $t_2 := s_1$. En caso contrario, supongamos que $\sum_{i=2}^n d\left(\gamma(s_i), \gamma(s_{i-1})\right) < \delta$. Sea $\{s^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (t_0, s_1)$ una sucesión decreciente a t_0. Por la continuidad de γ, obsérvese lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} d\left(\gamma(s^n), \gamma(s_1)\right) + \sum_{i=2}^n d\left(\gamma(s_i), \gamma(s_{i-1})\right) = \sum_{i=1}^n d\left(\gamma(s_i), \gamma(s_{i-1})\right) > \delta.$$

Necesariamente, existe $t_2 \in (t_0, t_1)$ tal que:

$$\delta < d\left(\gamma(t_2), \gamma(s_1)\right) + \sum_{i=2}^n d\left(\gamma(s_i), \gamma(s_{i-1})\right) \leq \ell\left(\gamma|_{[t_2,t_1]}\right).$$

Repitiendo el procedimiento con t_0 y t_2 y razonando de forma inductiva, para cada $n \in \mathbb{N}$ construimos $\{t_k\}_{k=1}^n \subseteq (t_0, b)$ con $t_k > t_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ de forma que $\ell\left(\gamma|_{[t_k,t_{k+1}]}\right) > \delta$. En consecuencia:

$$\ell\left(\gamma|_{[t_0,t_1]}\right) = \ell\left(\gamma|_{[t_0,t_n]}\right) + \sum_{i=1}^{n-1} \ell\left(\gamma|_{\left[t_{n-(i-1)},t_{n-i}\right]}\right) > n\cdot\delta \overset{n\to\infty}{\to} +\infty.$$

Hemos llegado a una contradicción con que γ sea una curva rectificable. Por tanto, $\ell_\gamma(t_0) = \ell_\gamma\left(t_0^+\right)$. De forma análoga, probamos que $\ell_\gamma\left(\widetilde{t_0}\right) = \ell_\gamma\left(\widetilde{t_0}^-\right)$ para todo $\widetilde{t_0} \in (a, b]$. Por tanto, ℓ_γ es continua. $\square$

Definimos $\ell_\gamma^{-1} : [0, \ell(\gamma)] \to [a, b]$ como sigue:

$$\ell_\gamma^{-1}(t) := \sup\{s \in [a, b] | \ell_\gamma(s) = t\} = \max\{s \in [a, b] | \ell_\gamma(s) = t\},$$

donde la última igualdad se tiene por la continuidad de ℓ_γ. Obsérvese que ℓ_γ^{-1} es continua a la derecha y sobreyectiva. Si $\lim_{t \to t_0^-} \ell_\gamma^{-1}(t) = \ell_0 < \ell_\gamma^{-1}(t_0)$, entonces γ es constante en $\left[\ell_0, \ell_\gamma^{-1}(t_0)\right]$. Luego, $\gamma_\ell : [0, \ell(\gamma)] \to X$ definida como $\gamma_\ell(s) = \gamma\left(\ell_\gamma^{-1}(s)\right)$ es la única curva que verifica:

$$\gamma(t) = \gamma_\ell(\ell_\gamma(t)), \forall t \in [a, b].$$

Se dice que γ_ℓ es la reparametrización por el parámetro arco de γ. Sea $C_\gamma := \gamma([a,b]) = \gamma_\ell([0, \ell(\gamma)]) \in \mathcal{B}_X$. Consideremos el espacio de medida $\left(C_\gamma, \mathcal{B}_{C_\gamma}, s_\gamma\right)$ donde $\mathcal{B}_{C_\gamma}$ es la σ-álgebra de Borel inducida por $\mathcal{B}_X$ en C_γ y $s_\gamma : \mathcal{B}_C \to [0, +\infty)$ la medida finita dada por la siguiente expresión:

$$s_\gamma(A) = m\left(\gamma_\ell^{-1}(A)\right).$$

Entonces s_γ es la medida imagen de la medida de Lebesgue por γ_ℓ. Se dice que s_γ es la medida de longitud de arco inducida por γ en (X, d). Por construcción, sabemos que:

$$\ell\left(\gamma_\ell|_{[c,d]}\right) = d - c, \forall [d, c] \subseteq [0, \ell(\gamma)].$$

De aquí, podemos deducir fácilmente que γ_ℓ es 1-Lipschitz. En efecto, sean $s_1, s_2 \in [0, \ell(\gamma)]$ con $s_1 \leq s_2$. Entonces:

$$|\gamma_\ell(s_1) - \gamma_\ell(s_2)| \leq \ell\left(\gamma_\ell|_{[s_1,s_2]}\right) = |s_1 - s_2|.$$

Si $g : X \to [0, +\infty]$ es una función medible Borel, se tiene que:

$$\int_{C_\gamma} g \, ds_\gamma = \int_0^{\ell(\gamma)} (g \circ \gamma_\ell) \, dm.$$

Esta misma fórmula es válida para funciones $g : X \to \mathbb{R}$ medible Borel e integrables en $\left(C_\gamma, \mathcal{B}_{C_\gamma}, s_\gamma\right)$.

Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado. La Proposición 1.1 prueba además que la aplicación $V_a^b : f \in BV([a,b]) \mapsto V_a^b(f) \in [0, +\infty)$ es una seminorma sobre $BV([a,b])$. Si $f : [a,b] \to X$ es una aplicación tal que $V_a^b(f) = 0$, entonces, para toda partición $P \in \mathscr{P}([a,b])$, se tiene que $V_a^b(f, P) = 0$. Sea $x \in (a,b)$ y $P = \{a, x, b\}$. Entonces:

$$V_a^b(f, P) = ||f(x) - f(a)|| + ||f(b) - f(x)|| = 0,$$

esto es, $f(a) = f(x) = f(b)$. Luego, f es constante.

Definimos $||\cdot||_{BV} : BV([a,b]) \to [0, +\infty)$ como sigue:

$$||f||_{BV} = ||f(a)|| + V_a^b(f).$$

Es fácil ver que el par $(BV([a,b]), ||\cdot||_{BV})$ es un espacio normado.

Teorema 1.1. En las condiciones anteriores, si $(X, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach, entonces $(BV([a,b]), ||\cdot||_{BV})$ es un espacio de Banach.

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq BV([a,b])$ una sucesión de Cauchy. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $n, m \geq n_0$, se cumple lo siguiente:

$$||f_n - f_m||_{BV} = ||f_n(a) - f_m(a)|| + V_a^b(f_n - f_m) < \varepsilon.$$

Usando que $||f_n(a) - f_m(a)|| \leq ||f_n - f_m||_{BV}$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$, tenemos que $||f_n(a) - f_m(a)|| < \varepsilon$ para todo $n, m \geq n_0$. Sea $P = \{a, b\} \in \mathscr{P}([a,b])$. Como $V_a^b(f_n - f_m, P) \leq V_a^b(f_n - f_m)$, entonces:

$$||(f_n(b) - f_m(b)) - (f_n(a) - f_m(a))|| < \varepsilon, \forall n, m \geq n_0.$$

Usando la desigualdad triangular inversa, tenemos que:

$$||f_n(b) - f_m(b)|| < \varepsilon + ||f_n(a) - f_m(a)|| < 2\cdot\varepsilon, \forall n, m \geq n_0.$$

Sean $x \in (a,b)$ y $Q = \{a, x, b\} \in \mathscr{P}([a,b])$. De nuevo, como $V_a^b(f_n - f_m, P) \leq V_a^b(f_n - f_m)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} &||(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(a) - f_m(a))|| \\ &+ ||(f_n(b) - f_m(b)) - (f_n(x) - f_m(x))|| < \varepsilon, \forall n, m \geq n_0. \end{aligned}$$

De nuevo, empleando la desigualdad triangular inversa, nos queda que:

$$\begin{aligned} 2\cdot||f_n(x) - f_m(x)|| &< \varepsilon + ||f_n(a) - f_m(a)|| + ||f_n(b) - f_m(b)|| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + 2\cdot\varepsilon = 4\cdot\varepsilon, \forall n, m \geq n_0. \end{aligned}$$

Simplificando:

$$||f_n(x) - f_m(x)|| < 2\cdot\varepsilon, \forall n, m \geq n_0.$$

Por tanto, para todo $x \in [a,b]$, $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(X, ||\cdot||)$. Usando que $(X, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach, existe $f : [a,b] \to X$ tal que:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \forall x \in [a,b]\,.$$

Tenemos que ver que $f \in BV([a,b], X)$. Sea $P = \{t_i\}_{i=0}^n \in \mathscr{P}([a,b])$. Entonces:

$$\begin{aligned}
V_a^b(f,P) &= \sum_{i=1}^n ||f(t_i) - f(t_{i-1})|| \leq \sum_{i=1}^n ||f(t_i) - f_k(t_i)|| + \sum_{i=1}^n ||f_k(t_i) - f_k(t_{i-1})|| \\
&+ \sum_{i=1}^n ||f_k(t_{i-1}) - f(t_{i-1})|| \leq \sum_{i=1}^n ||f(t_i) - f_k(t_i)|| \\
&+ \sum_{i=1}^n ||f_k(t_{i-1}) - f(t_{i-1})|| + V_a^b(f_k, P)\,.
\end{aligned}$$

Por ser $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(BV([a,b]), ||\cdot||_{BV})$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq k_0$, se tiene que $V_a^b(f_k - f_{k_0}) < 1$. Usando que V_a^b es una seminorma sobre $BV([a,b])$ y la desigualdad triangular inversa, tenemos que $V_a^b(f_k) < 1 + V_a^b(f_{k_0})$ para todo $k \geq k_0$. Luego, para todo $k \in \mathbb{N}$, $V_a^b(f_k) \leq M := \text{máx}\left\{1 + V_a^b(f_{k_0}), V_a^b(f_1), ..., V_a^b(f_{k_0-1})\right\} < +\infty$. En consecuencia:

$$V_a^b(f,P) \leq \sum_{i=1}^n ||f(t_i) - f_k(t_i)|| + \sum_{i=1}^n ||f(t_{i-1}) - f_k(t_{i-1})|| + M.$$

Tomando límites cuando $k \to \infty$, tenemos que $V_a^b(f,P) \leq M$ pues $\text{lím}_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Tomando el supremo en $P \in \mathscr{P}([a,b])$, nos queda que $V_a^b(f) < +\infty$. En consecuencia, $f \in BV([a,b])$.

Falta probar que $||f_n - f||_{BV} \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Sabemos que $||f_n(a) - f(a)|| \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Luego, basta ver que $V_a^b(f_n - f) \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Fijado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k, l \in \mathbb{N}$ con $k, l \geq n_0$ y para todo $P = \{t_i\}_{i=0}^n \in \mathscr{P}([a,b])$, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
V_a^b(f_k - f_l, P) &= \sum_{i=1}^n ||(f_k(t_i) - f_l(t_i)) - (f_k(t_{i-1}) - f_l(t_{i-1}))|| \\
&\leq V_a^b(f_k - f_l) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Fijado k, tomando límites cuando $l \to \infty$, tenemos que $V_a^b(f_k - f, P) \leq \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$. Ahora, tomamos el supremo en $P \in \mathscr{P}([a,b])$ y nos queda que $V_a^b(f_k - f) \leq \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$. Por tanto, $V_a^b(f_k - f) \overset{k\to\infty}{\to} 0$ que es lo que queríamos probar.

Por tanto, $(BV([a,b]), ||\cdot||_{BV})$ es un espacio de Banach. $\square$

El siguiente teorema nos dará una caracterización sencilla para ser una función de variación acotada.

Teorema 1.2. Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada si y sólamente si es diferencia de funciones crecientes.

Demostración.

$\boxed{\Rightarrow}$ Por el apartado 4 de la Proposición 1.1, sabemos que las funciones $g : x \in [a, b] \mapsto V_a^x(f) \in \mathbb{R}$ y $h : x \in [a, b] \mapsto V_a^x(f) - f(x) \in \mathbb{R}$ son crecientes. Además, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$f(x) = (f(x) - V_a^x(f)) + V_a^x(f) = V_a^x(f) - (V_a^x(f) - f(x)) = g(x) - h(x).$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Trivial ya que las funciones crecientes son de variación acotada y $BV([a, b])$ es un espacio vectorial con las operaciones naturales de suma y producto por escalar.

$\square$

1.3. Límite superior e inferior

Antes de entrar en probar la diferenciabilidad en m-casi todo de las funciones de variación acotada, necesitamos revisar los conceptos de límite superior e inferior.

Definición 1.2. Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$, $f : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A'$. Definimos el límite superior y el límite inferior de f en a de la siguiente forma:

$$\liminf_{x \to a} f(x) = \lim_{r \to 0^+} \inf \{f(x) | x \in (A \setminus \{a\}) \cap B_d(a, r)\} \in \overline{\mathbb{R}},$$

$$\limsup_{x \to a} f(x) = \lim_{r \to 0^+} \sup \{f(x) | x \in (A \setminus \{a\}) \cap B_d(a, r)\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Es fácil ver que $\liminf_{x \to a} f(x) \leq \limsup_{x \to a} f(x)$. Sea $g : A \to \mathbb{R}$ otra función. Se pueden comprobar fácilmente las siguientes propiedades:

1. $\liminf_{x \to a}(c \cdot f(x)) = c \cdot \liminf_{x \to a} f(x), \forall c \geq 0$ (se considera $0 \cdot (-\infty) = 0$).
2. $\limsup_{x \to a}(c \cdot f(x)) = c \cdot \limsup_{x \to a} f(x), \forall c \geq 0$ (se considera $0 \cdot (+\infty) = 0$).
3. $\liminf_{x \to a}(-f(x)) = -\limsup_{x \to a} f(x)$.
4. $\limsup_{x \to a}(-f(x)) = -\liminf_{x \to a} f(x)$.
5. $\liminf_{x \to a}(f(x) + g(x)) \geq \liminf_{x \to a} f(x) + \liminf_{x \to a} g(x)$.
6. $\limsup_{x \to a}(f(x) + g(x)) \leq \limsup_{x \to a} f(x) + \limsup_{x \to a} g(x)$.

En las condiciones de la definición anterior, supongamos que $(X, d) = (\mathbb{R}, d_e)$. Sean $A_{>a} = \{x \in A | x > a\}$ y $A_{<a} = \{x \in A | x < a\}$. Si $a \in A'_{>a}$, definimos:

$$\liminf_{x \to a^+} f(x) = \liminf_{x \to a} f|_{A_{>a}}(x),$$

$$\limsup_{x\to a^+} f(x) = \limsup_{x\to a} f|_{A_{>a}}(x).$$

Análogamente, si $a \in A'_{<a}$, definimos:

$$\liminf_{x\to a^-} f(x) = \liminf_{x\to a} f|_{A_{<a}}(x),$$
$$\limsup_{x\to a^-} f(x) = \limsup_{x\to a} f|_{A_{<a}}(x).$$

Nota 1.1. En las condiciones de la definición anterior, se tiene que:

$$\liminf_{x\to a} f(x) = \sup_{r>0} \inf \{f(x) | x \in (A \setminus a) \cap B_d(a,r)\} \in \overline{\mathbb{R}},$$
$$\limsup_{x\to a} f(x) = \inf_{r>0} \sup \{f(x) | x \in (A \setminus a) \cap B_d(a,r)\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Proposición 1.2. Sean (X,d) un espacio métrico, $A \subseteq X$, $f : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A'$. Entonces existe $\lim_{x\to a} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ si y sólamente si $\liminf_{x\to a} f(x) = \limsup_{x\to a} f(x)$. En ese caso, se tiene que:

$$\liminf_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \limsup_{x\to a} f(x).$$

Demostración.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $L = \lim_{x\to a} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$. En primer lugar, supongamos que $L \in \mathbb{R}$. Entonces fijado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $x \in (A \setminus \{a\}) \cap B_d(a,\delta)$, se tiene que $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. Luego, para todo $r > 0$ con $r < \delta$ y para todo $x \in (A \setminus \{a\}) \cap B_d(a,r)$, se tiene que $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. En consecuencia, para todo $r > 0$ con $r < \delta$, tomando supremo e ínfimo en $(A \setminus \{a\}) \cap B_d(a,r)$, deducimos lo siguiente:

$$L - \varepsilon \leq \inf \{f(x) | x \in (A \setminus \{a\}) \cap B_d(a,r)\} < L + \varepsilon,$$
$$L - \varepsilon < \sup \{f(x) | x \in (A \setminus \{a\}) \cap B_d(a,r)\} \leq L + \varepsilon.$$

Por tanto:

$$\liminf_{x\to a} f(x) = L = \limsup_{x\to a} f(x).$$

Supongamos que $L = +\infty$. Entonces fijado $M > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $x \in (A \setminus \{a\}) \cap B_d(a,\delta)$, se tiene que $f(x) > M$. Luego, para todo $r > 0$ con $r < \delta$ y para todo $x \in (A \setminus \{a\}) \cap B_d(a,r)$, se tiene que $f(x) > M$. En consecuencia, para todo $r > 0$ con $r < \delta$, tomando supremo e ínfimo en $(A \setminus \{a\}) \cap B_d(a,r)$, deducimos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\text{ínf}\left\{f(x) | x \in (A\setminus\{a\}) \cap B_d(a,r)\right\} &\geq M,\\ \sup\left\{f(x) | x \in (A\setminus\{a\}) \cap B_d(a,r)\right\} &> M.\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\liminf_{x\to a} f(x) = +\infty = \limsup_{x\to a} f(x).$$

Razonando de manera análoga, se prueba el caso $L = -\infty$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $L = \liminf_{x\to a} f(x) = \limsup_{x\to a} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$. En primer lugar, supongamos que $L \in \mathbb{R}$. Entonces fijado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para todo $r > 0$ con $r < \delta$, se cumple que:

$$\begin{aligned}L - \varepsilon < \text{ínf}\left\{f(x) | x \in (A\setminus\{a\}) \cap B_d(a,r)\right\} < L + \varepsilon,\\ L - \varepsilon < \sup\left\{f(x) | x \in (A\setminus\{a\}) \cap B_d(a,r)\right\} < L + \varepsilon.\end{aligned}$$

Luego, para todo $x \in (A\setminus\{a\}) \cap B_d(a,r)$, se tiene que $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. En conclusión, existe $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Supongamos que $L = +\infty$. Entonces fijado $M > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para todo $r > 0$ con $r < \delta$, se cumple que:

$$\begin{aligned}\text{ínf}\left\{f(x) | x \in (A\setminus\{a\}) \cap B_d(a,r)\right\} &> M,\\ \sup\left\{f(x) | x \in (A\setminus\{a\}) \cap B_d(a,r)\right\} &> M.\end{aligned}$$

Luego, para todo $x \in (A\setminus\{a\}) \cap B_d(a,r)$, se tiene que $f(x) > M$. Por consiguiente, $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Razonando de manera análoga, se prueba el caso $L = -\infty$.

$\square$

Corolario 1.1. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$. Se cumple:

1. Si $a \in A'_{<a}$, existe $\lim_{x\to a^-} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ si y sólamente si $\liminf_{x\to a^-} f(x) = \limsup_{x\to a^-} f(x)$. En ese caso, se tiene que:
$$\liminf_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \limsup_{x\to a^-} f(x).$$

2. Si $a \in A'_{>a}$, existe $\lim_{x\to a^+} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ si y sólamente si $\liminf_{x\to a^+} f(x) = \limsup_{x\to a^+} f(x)$. En ese caso, se tiene que:
$$\liminf_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \limsup_{x\to a^+} f(x).$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la Proposición 1.2 y la definición de límites laterales superior e inferior. $\square$

1.4. Recubrimientos de Vitali

Para demostrar la diferenciabilidad de las funciones de variación acotada en m-casi todo, vamos a necesitar una herramienta conocida como recubrimiento de Vitali. El teorema que nos ayudará en nuestro objetivo será el Teorema de Recubrimiento de Vitali.

Definición 1.3. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$. Una colección de intervalos $\mathcal{I}$ es un recubrimiento de Vitali de E si para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $x \in E$, existe $I = I(\varepsilon) \in \mathcal{I}$ tal que $x \in I$ y $m^*(I) < \varepsilon$. Diremos que $\mathcal{I}$ recubre E en el sentido de Vitali.

Teorema 1.3 (**Teorema de Recubrimiento de Vitali**). Sea $E \subset \mathbb{R}$ con $m^*(E) < +\infty$ e $\mathcal{I}$ un recubrimiento de Vitali de E. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe una colección finita $\{I_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{I}$ de intervalos disjuntos dos a dos tales que:

$$m^*\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i\right) < \varepsilon.$$

Demostración. Sea $\overline{\mathcal{I}} = \left\{\overline{I} \middle| I \in \mathcal{I}\right\}$. Fijados $\varepsilon > 0$ y $x \in E$, existe $I \in \mathcal{I}$ tal que $x \in I$ y $m^*(I) < \varepsilon$. Entonces $\overline{I} \in \overline{\mathcal{I}}$ verifica que $x \in \overline{I}$ y $m^*\left(\overline{I}\right) = m^*(I) < \varepsilon$. Por tanto, $\overline{\mathcal{I}}$ es un recubrimiento de Vitali de E. Supongamos que hemos probado el resultado para $\overline{I}$. Entonces fijado $\varepsilon > 0$, existe una colección finita $\left\{\overline{I}_i\right\}_{i=1}^n \subseteq \overline{\mathcal{I}}$ de intervalos disjuntos dos a dos tales que:

$$m^*\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{I}_i\right) < \varepsilon.$$

Luego, $\{I_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{I}$ es una colección finita de intervalos disjuntos dos a dos tales que:

$$m^*\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i\right) = m^*\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{I}_i\right) < \varepsilon.$$

Por tanto, podemos suponer que los intervalos de $\mathcal{I}$ son cerrados.

Como $m^*(E) < +\infty$, existe un abierto $O \subseteq \mathbb{R}$ tal que $E \subseteq O$ y $m^*(O) \leq m^*(E)+1$. Sea $\mathcal{I}_O = \{I \in \mathcal{I} | I \subseteq O\} \subseteq \mathcal{I}$. Fijado $x \in E$, existe $r > 0$ tal que $(x-r, x+r) \subseteq O$. Fijado $\varepsilon > 0$, sea $I \in \mathcal{I}$ tal que $x \in I$ y $m^*(I) < \text{mín}\{r, \varepsilon\}$. Entonces $x \in I$, $m^*(I) < \varepsilon$ y, necesariamente, $I \subseteq (x-r, x+r)$. Por tanto, $I \in \mathcal{I}_O$. Por consiguiente, $\mathcal{I}_O$ es un recubrimiento de Vitali de E.

Podemos suponer entonces que $\mathcal{I}_O = \mathcal{I}$, esto es, que los intervalos de $\mathcal{I}$ estén contenidos en O.

Sea $I_1 \in \mathcal{I}$. Si $E \subseteq I_1$, entonces hemos acabado. Supongamos que existe $x \in E$ tal que $x \notin I_1$. Sea $k_1 = \sup\{m^*(I) | I \in \mathcal{I}, I \cap I_1 = \varnothing\}$. Sabemos que $k_1 < +\infty$ pues $m^*(I) \leq m^*(O) < +\infty$ para todo $I \in \mathcal{I}$. Por el Teorema de Caracterización del

Supremo, existe $I_2 \in \mathcal{I}$ con $I_2 \cap I_1 = \varnothing$ tal que $\frac{k_1}{2} < m^*(I_2)$, o, dicho de otro modo, $k_1 < 2 \cdot m^*(I_2)$.

Inductivamente, dado $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, supongamos que hemos construido la colección $\{I_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{I}$ de intervalos disjuntos dos a dos y $\{k_i\}_{i=1}^{n-1} \subseteq (0, +\infty)$ con:

$$k_i = \sup \left\{ m^*(I) \in \mathcal{I} \,\middle|\, I \cap \left(\bigcup_{j=1}^{i} I_i \right) = \varnothing \right\}, \forall i \in \mathbb{N}_n.$$

$$k_i < 2 \cdot m^*(I_{i+1}), \forall i \in \mathbb{N}_{n-1}.$$

Si $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i$, entonces hemos terminado. En caso contrario, sea k_n el siguiente valor:

$$k_n = \sup \left\{ m^*(I) \in \mathcal{I} \,\middle|\, I \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} I_i \right) = \varnothing \right\}.$$

Al igual que antes, $k_n < +\infty$ y, por el Teorema de Caracterización del Supremo, existe $I_{n+1} \in \mathcal{I}$ con $I_{n+1} \cap (\bigcup_{i=1}^n I_i) = \varnothing$ tal que $\frac{k_n}{2} < m^*(I_{n+1})$, o, equivalentemente, $k_n < 2 \cdot m^*(I_{n+1})$.

De esta forma, construimos una sucesión $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}$ de intervalos disjuntos dos a dos, y una sucesión $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0, +\infty)$ tal que $k_n < 2 \cdot m^*(I_{n+1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $E \subseteq \bigcup_{i=1}^N I_i$, hemos terminado. En caso contrario, como $\bigcup_{i=1}^N I_i \subseteq O$, tenemos que:

$$m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n) \leq m^*(O) < +\infty,$$

es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n)$ es una serie convergente de términos positivos. Entonces fijado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} m^*(I_n) < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Afirmamos que $\{I_i\}_{i=1}^N \subseteq \mathcal{I}$ es una colección finita de intervalos disjuntos dos a dos que verifica la conclusión del teorema.

Sea $x \in E \setminus \bigcup_{i=1}^N I_i$. Como $\mathcal{I}$ es un recubrimiento de Vitali de E, existe un intervalo $I \in \mathcal{I}$ tal que $x \in I$ e $I \cap \left(\bigcup_{i=1}^N I_i \right) = \varnothing$ (esto se puede hacer tomando $I \in \mathcal{I}$ con $x \in I$ tal que la longitud de I sea menor que la mitad de la distancia de x a $\bigcup_{i=1}^N I_i$).

Por reducción al absurdo, supongamos que $I \cap I_n = \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N + 1$. Entonces como $I \cap (\bigcup_{i=1}^n I_i) = \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N + 1$, se tiene que $m^*(I) \leq k_n < 2 \cdot m^*(I_{n+1}) \overset{n\to\infty}{\to} 0$, donde estamos utilizando también que $\sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n)$ es convergente. En consecuencia, $m^*(I) = 0$ lo cual es absurdo.

Sea $n_0 = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} | n \geq N+1, I \cap I_n \neq \varnothing\}$. Se tiene que $I \cap I_i = \varnothing$ para todo $i \in \mathbb{N}_{n_0-1}$ y $m^*(I) \leq k_{n_0-1} < 2 \cdot m^*(I_{n_0})$. Sea c el centro de I y c_{n_0} el centro del intervalo I_{n_0}. Entonces como $I \cap I_{n_0} \neq \varnothing$, $d(c, c_0) \leq \frac{1}{2} \cdot (m^*(I) + m^*(I_{n_0}))$ y:

$$\begin{aligned} d(x, c_0) &\leq d(x, c) + d(c, c_0) \leq \frac{1}{2} \cdot m^*(I) + \frac{1}{2} \cdot (m^*(I) + m^*(I_{n_0})) \\ &= m^*(I) + \frac{1}{2} \cdot m^*(I_{n_0}) < 2 \cdot m^*(I_{n_0}) + \frac{1}{2} \cdot (m^*(I) + m^*(I_{n_0})) \\ &= \frac{5}{2} \cdot m^*(I_{n_0}). \end{aligned}$$

Sea $5 \cdot I_{n_0}$ el intervalo de centro c_0 y cuya longitud es $5 \cdot m^*(I_{n_0})$. Entonces:

$$E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} I_i \subseteq \bigcup_{n=N+1}^{\infty} 5 \cdot I_n.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} m^*\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} I_i\right) &\leq m^*\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} 5 \cdot I_n\right) = 5 \cdot m^*\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} I_n\right) \\ &= 5 \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} m^*(I_n) < 5 \cdot \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

1.5. Diferenciabilidad

Recordemos que, por el Teorema 1.2, toda función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada si y sólamente si f es diferencia de funciones crecientes. Por otro lado, sabemos que las funciones crecientes son de variación acotada. Por tanto, para probar que toda función de variación acotada es diferenciable en m-casi todo, bastará con demostrar que las funciones crecientes son diferenciables en m-casi todo.

En primer lugar, vamos a introducir el concepto de derivada superior e inferior:

Definición 1.4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Definimos la derivada superior de f en $x \in (a, b)$ como sigue:

$$\overline{D}f(x) = \limsup_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Del mismo modo, definimos la derivada inferior de f en $x \in (a,b)$ de la siguiente forma:

$$\underline{D}f(x) = \liminf_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Es fácil ver que $\underline{D}f(x) \leq \overline{D}f(x)$ para todo $x \in (a,b)$. Además, por la Proposición 1.2, se tiene que f es derivable en $x \in (a,b)$ si y sólamente si $\overline{D}f(x) = \underline{D}f(x) \in \mathbb{R}$.

Lema 1.2. Sea f una función creciente en $[a,b]$. Entonces, para todo $\alpha > 0$ se cumple:

(a) $m^*\left(\left\{x \in (a,b) \middle| \overline{D}f(x) \geq \alpha\right\}\right) \leq \frac{1}{\alpha} \cdot (f(b) - f(a))$.

(b) $m^*\left(\left\{x \in (a,b) \middle| \overline{D}f(x) = +\infty\right\}\right) = 0$.

Demostración. Supongamos que hemos probado (a). Entonces:

$$\left\{x \in (a,b) \middle| \overline{D}f(x) = +\infty\right\} \subseteq \left\{x \in (a,b) \middle| \overline{D}f(x) > n\right\}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por monotonía, tenemos que:

$$m^*\left(\left\{x \in (a,b) \middle| \overline{D}f(x) = +\infty\right\}\right) \leq m^*\left(\left\{x \in (a,b) \middle| \overline{D}f(x) > n\right\}\right).$$

Entonces usando (a):

$$m^*\left(\left\{x \in (a,b) \middle| \overline{D}f(x) = +\infty\right\}\right) \leq \frac{1}{n} \cdot (f(b) - f(a)).$$

Tomando límites cuando $n \to \infty$, concluimos que:

$$m^*\left(\left\{x \in (a,b) \middle| \overline{D}f(x) = +\infty\right\}\right) = 0.$$

Demostremos (a). Fijado $\alpha > 0$, sea $E_\alpha = \left\{x \in (a,b) \middle| \overline{D}f(x) \geq \alpha\right\}$. Dado $\alpha' \in (0,\alpha)$, consideremos la colección de intervalos $\mathcal{I}$ dada por:

$$\mathcal{I} = \{[c,d] \subseteq (a,b) | f(d) - f(c) \geq \alpha'(d-c)\}.$$

Probemos que $\mathcal{I}$ es un recubrimiento de Vitali de E_α. Fijado $\varepsilon > 0$ y $x \in E_\alpha$, se tiene que $x \in (a,b)$ y $\overline{D}f(x) \geq \alpha > \alpha'$. Como:

$$\overline{D}f(x) = \inf_{r>0} \sup\left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \middle| 0 < |h| < r\right\} > \alpha'.$$

Luego, para todo $r > 0$, se cumple que:

$$\sup\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\middle| 0<|h|<r\right\}>\alpha'.$$

Entonces, para todo $r>0$, existe $h=h(r)$ con $0<|h|<r$ tal que:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>\alpha'.$$

Sea $r^*=\text{mín}\{x-a,b-x,\varepsilon\}$. Si $h=h(r^*)>0$, tomando $c=x$ y $d=x+h$, tenemos que $[c,d]\subseteq(a,b)$ y:

$$\frac{f(d)-f(c)}{d-c}>\alpha'.$$

Despejando, $f(d)-f(c)>\alpha'\cdot(d-c)$. Entonces $[c,d]\in\mathcal{I}$ y $d-c<\varepsilon$.

Si $h=h(r^*)<0$, tomando $c=x+h$ y $d=x$, tenemos que $[c,d]\subseteq(a,b)$ y:

$$\frac{f(c)-f(d)}{c-d}>\alpha'.$$

Luego:

$$f(d)-f(c)=-(f(c)-f(d))<\alpha'\cdot(c-d).$$

Por tanto, $f(d)-f(c)>\alpha'(d-c)$. En consecuencia, $[c,d]\in\mathcal{I}$ y $d-c<\varepsilon$. Por consiguiente, $\mathcal{I}$ es un recubrimiento de Vitali.

Usando que $m^*(E_\alpha)\leq m^*((a,b))=b-a<+\infty$, por el Teorema del Recubrimiento de Vitali, existe una colección finita $\{[c_i,d_i]\}_{i=1}^n\subseteq\mathcal{I}$ de intervalos disjuntos dos a dos tales que:

$$m^*\left(E_\alpha\setminus\bigcup_{i=1}^n[c_i,d_i]\right)<\varepsilon.$$

Por monotonía y subaditividad, como $E_\alpha\subseteq(E_\alpha\setminus\bigcup_{i=1}^n[c_i,d_i])\cup\bigcup_{i=1}^n[c_i,d_i]$, tenemos que:

$$\begin{aligned}m^*(E_\alpha)&\leq m^*\left(E_\alpha\setminus\bigcup_{i=1}^n[c_i,d_i]\right)+m^*\left(\bigcup_{i=1}^n[c_i,d_i]\right)<\varepsilon+m^*\left(\bigcup_{i=1}^n[c_i,d_i]\right)\\&=\varepsilon+\sum_{i=1}^n d_i-c_i.\end{aligned}$$

Como $\{[c_i, d_i]\}_{i=1}^{n} \in \mathcal{I}$, para todo $i \in \mathbb{N}_n$, se tiene que $f(d_i) - f(c_i) \geq \alpha' \cdot (d_k - c_k)$. Despejando, $d_i - c_i \leq \frac{1}{\alpha'} \cdot (f(d_i) - f(c_i))$ para todo $i \in \mathbb{N}_n$. Luego:

$$m^*(E_\alpha) < \varepsilon + \frac{1}{\alpha'} \cdot \sum_{i=1}^{n} (f(d_i) - f(c_i)) \leq \frac{1}{\alpha'} \cdot (f(b) - f(a)),$$

donde la última desigualdad se tiene por ser f creciente. Haciendo $\varepsilon \to 0^+$ y, posteriormente, $\alpha' \to \alpha^-$, concluimos que:

$$m^*(E_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \cdot (f(b) - f(a)).$$

□

Teorema 1.4 (**Teorema de Diferenciación de Lebesgue para Funciones Crecientes**). Si f es una función creciente en $[a, b]$, entonces f es diferenciable en m-casi todo (a, b).

Demostración. El conjunto de puntos $x \in (a, b)$ para los cuales no existe $f'(x)$ viene dado por:

$$\left\{x \in (a,b) \middle| \overline{D}f(x) = +\infty\right\} \cup \left\{x \in (a,b) \middle| \underline{D}f(x) < \overline{D}f(x) < +\infty\right\}.$$

Por el Lema 1.2, sabemos que $m^*\left(\left\{x \in (a,b) \middle| \overline{D}f(x) = +\infty\right\}\right) = 0$. Sea $E = \left\{x \in (a,b) \middle| \underline{D}f(x) < \overline{D}f(x) < +\infty\right\}$. Obsérvese lo siguiente:

$$E = \bigcup_{\substack{\alpha,\beta \in \mathbb{Q} \\ \beta < \alpha}} \left\{x \in (a,b) \middle| \underline{D}f(x) < \beta < \alpha < \overline{D}f(x) < +\infty\right\}.$$

Para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ con $\beta < \alpha$, consideremos el conjunto $E_{\alpha,\beta}$ dado por:

$$E_{\alpha,\beta} = \left\{x \in (a,b) \middle| \underline{D}f(x) < \beta < \alpha < \overline{D}f(x) < +\infty\right\}.$$

Como $\mathbb{Q}$ es numberable, por subaditividad, basta ver que $m^*(E_{\alpha,\beta}) = 0$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ con $0 < \beta < \alpha$. Por ser f creciente, sabemos que $\overline{D}f(x)$ y $\underline{D}f(x)$ son no negativas. Por tanto, basta ver que $m^*(E_{\alpha,\beta}) = 0$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ y $0 < \beta < \alpha$.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ con $\beta < \alpha$ y $\varepsilon > 0$ fijos. Por la definición de m^*, existe un abierto $O' \subseteq \mathbb{R}$ con $E_{\alpha,\beta} \subseteq O'$ tal que $m^*(O') \leq m^*(E_{\alpha,\beta}) + \varepsilon$. Sea $O = O' \cap (a, b)$. Entonces O es un abierto tal que $E_{\alpha,\beta} \subseteq O \subseteq (a, b)$ y $m^*(O) \leq m^*(O') < m^*(E_{\alpha,\beta}) + \varepsilon$.

Consideremos la colección de intervalos $\mathcal{I}$ dada por:

$$\mathcal{I} = \{[c, d] \subseteq O | f(d) - f(c) < \beta \cdot (d - c)\}.$$

De manera similar a la prueba del Lema 1.2, se puede demostrar que $\mathcal{I}$ es un recubrimiento de Vitali de $E_{\alpha,\beta}$. Como $m^*(E_{\alpha,\beta}) \leq m^*((a,b)) = b-a < +\infty$, por el Teorema de Recubrimiento de Vitali, existe una colección finita $\{[c_i,d_i]\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{I}$ de intervalos disjuntos dos a dos tales que:

$$m^*\left(E_{\alpha,\beta} \setminus \bigcup_{i=1}^n [c_i,d_i]\right) < \varepsilon.$$

Por otro lado:

$$\sum_{i=1}^n (f(d_i) - f(c_i)) < \beta \cdot \sum_{i=1}^n d_i - c_i \leq \beta \cdot m^*(O) < \beta \cdot (m^*(E_{\alpha,\beta}) + \varepsilon).$$

Obsérvese que $E_{\alpha,\beta} \cap [c_i,d_i] \subseteq \left\{x \in [c_i,d_i] \middle| \overline{D}f(x) \geq \alpha\right\}$ para todo $i \in \mathbb{N}_n$. Entonces, por monotonía:

$$m^*(E_{\alpha,\beta} \cap [c_i,d_i]) \leq m^*\left(\left\{x \in [c_i,d_i] \middle| \overline{D}f(x) > \alpha\right\}\right) \leq \frac{1}{\alpha} \cdot (f(d_i) - f(c_i)), \forall i \in \mathbb{N}_n.$$

Escribiendo $E_{\alpha,\beta} = (E_{\alpha,\beta} \setminus \bigcup_{i=1}^n [c_i,d_i]) \cup (\bigcup_{i=1}^n (E_{\alpha,\beta} \cap [c_i,d_i]))$, deducimos que:

$$\begin{aligned}
m^*(E_{\alpha,\beta}) &= m^*\left(E_{\alpha,\beta} \setminus \bigcup_{i=1}^n [c_i,d_i]\right) + m^*\left(\bigcup_{i=1}^n (E_{\alpha,\beta} \cap [c_i,d_i])\right) \\
&< \varepsilon + m^*\left(\bigcup_{i=1}^n (E_{\alpha,\beta} \cap [c_i,d_i])\right) = \varepsilon + \sum_{i=1}^n m^*([c_i,d_i] \cap E_{\alpha,\beta}) \\
&\leq \varepsilon + \frac{1}{\alpha} \cdot \sum_{i=1}^n (f(d_i) - f(c_i)) < \varepsilon + \frac{\beta}{\alpha} \cdot (m^*(E_{\alpha,\beta}) + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Haciendo $\varepsilon \to 0^+$, nos queda que $m^*(E_{\alpha,\beta}) \leq \frac{\beta}{\alpha} \cdot m^*(E_{\alpha,\beta})$. Como $\frac{\beta}{\alpha} < 1$, la anterior desigualdad es cierta si y sólamente si $m^*(E_{\alpha,\beta}) = 0$.

En conclusión, f es diferenciable en m-casi todo (a,b). □

Teorema 1.5. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente. Definimos $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$f'(x) = \begin{cases} \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} & \text{si el límite existe} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Entonces $f' \in \mathcal{L}^1((a,b))$.

Demostración. Sea $x \in (a, b)$ tal que f sea derivable en x. Entonces:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{n \to \infty} \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ definida como sigue:

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} & \text{si } x + \frac{1}{n} \in (a, b) \text{ y } f \text{ es derivable en } x \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Se puede comprobar fácilmente que f_n es medible para todo $n \in \mathbb{N}$ y que la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a la función f' en (a, b).

Por tanto, f' es medible. Nótese que $f' \geq 0$ en (a, b). Aplicando el Lema de Fatou, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)\, dx &\leq \liminf_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx \\ &= \liminf_{n \to \infty} \left(n \cdot \int_a^{b - \frac{1}{n}} f\left(x + \frac{1}{n}\right) dx - n \cdot \int_a^{b - \frac{1}{n}} f(x)\, dx \right) \\ &= \liminf_{n \to \infty} \left(n \cdot \int_{a + \frac{1}{n}}^{b} f(x)\, dx - n \cdot \int_a^{b - \frac{1}{n}} f(x)\, dx \right) \\ &= \liminf_{n \to \infty} \left(n \cdot \int_{b - \frac{1}{n}}^{b} f(x)\, dx - n \cdot \int_a^{a + \frac{1}{n}} f(x)\, dx \right) \\ &\leq \liminf_{n \to \infty} \left(n \cdot \int_{b - \frac{1}{n}}^{b} f(b)\, dx - n \cdot \int_a^{a + \frac{1}{n}} f(a)\, dx \right) \\ &= \liminf_{n \to \infty} \left(n \cdot f(b) \cdot \frac{1}{n} - n \cdot f(a) \cdot \frac{1}{n} \right) = f(b) - f(a). \end{aligned}$$

En conclusión, $f' \in \mathcal{L}^1((a, b))$. □

Corolario 1.2 (Teorema de Diferenciación de Lebesgue de Funciones de Variación Acotada). Si $f \in BV([a, b])$, entonces f es diferenciable en m-casi todo (a, b). Además, si definimos $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ como en (1.1), entonces $f' \in \mathcal{L}^1((a, b))$. Diremos que f' es (salvo conjuntos de medida de Lebesgue nula) la derivada de f en (a, b).

Demostración. La prueba es directa a partir de los Teoremas 1.2, 1.4 y 1.5. □

1.6. Funciones de variación puntual acotada en $U \subseteq \mathbb{R}$

La variación de una función se puede generalizar fácilmente cuando el dominio de la misma es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$. Por motivos que veremos en el capítulo siguiente, nos conviene llamar variación puntual a lo que anteriormente llamábamos simplemente variación.

Definición 1.5. Sean (X, d) un espacio métrico, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : I \to X$ una aplicación. Definimos la variación puntual de f en I como sigue:

$$\mathrm{pV}_I(f) = \sup \left\{ V_c^d(f, P) \middle| [c, d] \subseteq I, P \in \mathscr{P}([c, d]) \right\} \in [0, +\infty].$$

Por convenio, se define $\mathrm{pV}_{\varnothing}(f) = 0$. Diremos que f es de variación puntual acotada en I si $\mathrm{pV}_I(f) < +\infty$.

En el caso $(X, d) = (\mathbb{R}, d_e)$, si f es de variación acotada en un intervalo abierto y acotado (a, b), entonces $f \in BV([c, d])$ para todo $[c, d] \subseteq (a, b)$. Por tanto, es fácil ver que f es diferenciable en m-casi todo (a, b). Si definimos $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ como en (1.1), entonces $f' \in \mathcal{L}^1((a, b))$. Diremos que f' es (salvo conjuntos de medida de Lebesgue nula) la derivada de f en (a, b).

Sea $U \subseteq \mathbb{R}$ abierto. Entonces existe una colección numerable de intervalos abiertos (pueden ser vacíos) $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ disjuntos dos a dos tales que $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Si $f : U \to X$ es una aplicación, se define la variación puntual de f en U como sigue:

$$\mathrm{pV}_U(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{pV}_{I_n}(f).$$

Diremos que f es de variación puntual acotada en U si $\mathrm{pV}_U(f) < +\infty$.

Observemos que, en el caso $(X, d) = (\mathbb{R}, d_e)$, si f es de variación puntual acotada en U, entonces $f \in BV([c, d])$ para todo $[c, d] \subseteq U$. Por tanto, es fácil ver que f es diferenciable en m-casi todo U. Además si definimos $f' : U \to \mathbb{R}$ como en (1.1) en cada componente conexa I_n de U, tenemos que $f' \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(U)$. De nuevo, diremos que f' es (salvo conjuntos de medida de Lebesgue nula) la derivada de f en U.

Capítulo 2

Funciones de variación acotada en $\mathbb{R}^d$

2.1. Introducción

El concepto de variación clásico que hemos visto en el capítulo anterior es bastante sensible a la modificación del valor de una función en un único punto. Es por ello que en este capítulo vamos buscando una medida de variación que sea igual entre funciones equivalentes (es decir, iguales salvo un conjunto de medida de Lebesgue d-dimensional nula). Si recordamos del capítulo anterior, las funciones de variación acotada en una variable eran diferenciables en el sentido clásico en m-casi todo. Esto nos conducirá a debilitar el concepto de la derivada de una función.

En este capítulo, vamos a dar la noción de derivada débil cuya definición está inspirada en el Teorema de la Divergencia de Gauss e introduciremos las funciones de Sobolev. En el caso de estas funciones, la derivada seguirá siendo una función.

Una generalización del concepto de derivada débil nos permitirá definir las funciones de variación acotada en un abierto de $\mathbb{R}^d$. Estas, gracias al Teorema de Representación de Riesz, estarán caracterizadas por que su derivada en el sentido de las distribuciones sea una medida Radon vectorial.

Para nosotros, dado $d \in \mathbb{N}$, la medida de Lebesgue d-dimensional se escribirá m_d. Además, $|\cdot|$ denotará indistintamente al valor absoluto en $\mathbb{R}$ como la norma euclídea en $\mathbb{R}^d$.

2.2. El espacio $\mathcal{W}^{1,p}(U)$

A lo largo del capítulo, $D(\cdot)$ denotará el gradiente de una función escalar y $\operatorname{div}(\cdot)$ la divergencia de una función vectorial. Además, usaremos $\cdot$ indistintamente para marcar el producto por escalar y el producto escalar de dos vectores.

Recordemos el Teorema de la Divergencia de Gauss (véase [10, Página 135] para una demostración):

Teorema 2.1 (**Teorema de la Divergencia Gauss**)**.** Sea $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un abierto acotado con frontera de clase $\mathcal{C}^1$ y $\varphi \in \mathcal{C}^1\left(\overline{U}, \mathbb{R}^d\right)$. Entonces:

$$\int_U \operatorname{div}(\varphi)\ dm_d = \int_{\partial U} \varphi \cdot \nu\, d\sigma,$$

donde se considera que U está orientada según la normal exterior ν.

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un abierto acotado con frontera de clase $\mathcal{C}^1$, $f \in \mathcal{C}^1\left(\overline{U}\right)$ y $\varphi \in \mathcal{C}^1\left(\overline{U}, \mathbb{R}^d\right)$. Entonces:

$$\operatorname{div}(f \cdot \varphi) = Df \cdot \varphi + f \cdot \operatorname{div}(\varphi).$$

Orientemos U según la normal exterior n. Integrando en U y aplicando el Teorema de la Divergencia de Gauss, tenemos lo siguiente:

$$\int_{\partial U} f \cdot \varphi \cdot \nu\, d\sigma = \int_U \operatorname{div}(f \cdot \varphi)\ dm_d = \int_U Df \cdot \varphi\, dm_d + \int_U f \cdot \operatorname{div}(\varphi)\ dm_d.$$

Si suponemos que $\operatorname{sop}(\varphi) \subseteq U$ y es compacto, deducimos que $\varphi \in \mathcal{C}_c^1\left(U, \mathbb{R}^d\right)$ y $\int_{\partial U} f \cdot \varphi \cdot \nu\, d\sigma = 0$. Despejando, nos queda que:

$$\int_U f \cdot \operatorname{div}(\varphi)\ dm_d = -\int_U Df \cdot \varphi\, dm_d.$$

Esta identidad es la que vamos a utilizar para generalizar nuestra definición de derivada.

Inspirados en el razonamiento que acabamos de ver, introducimos el concepto de derivada débil.

Definición 2.1. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto, $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(U)$ e $i \in \mathbb{N}$. Diremos que $g_i \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(U)$ es la derivada débil parcial de f respecto de x_i si para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(U)$, se cumple lo siguiente:

$$\int_U f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dm_d = -\int_U g_i \cdot \varphi\, dm_d.$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo de Variaciones, es fácil ver que la derivada débil parcial de f respecto de x_i, si existe, entonces es única salvo conjuntos de medida de Lebesgue d-dimensional nula y, por tanto, la denotaremos como $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Si, para todo $i \in \mathbb{N}_d$, existe la derivada débil parcial de f respecto de x_i, denotaremos con Df el siguiente vector:

$$Df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_d}\right)$$

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto y $p \in [1, +\infty]$. Como para todo $V \Subset U$ abierto se cumple que $m_d(V) < +\infty$, es fácil ver que $\mathcal{L}^p_{\text{loc}}(U) \subseteq \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(U)$. Esto nos lleva a la definición de los espacios y funciones de Sobolev.

Definición 2.2. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto y $p \in [1, +\infty]$. Se define el espacio de Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(U)$ como el siguiente conjunto:

$$\mathcal{W}^{1,p}(U) = \left\{ f \in \mathcal{L}^p(U) \middle| \forall i \in \mathbb{N}_d, \exists \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{L}^p(U) \right\}.$$

Ahora, presentamos la versión local del espacio $\mathcal{W}^{1,p}$:

Definición 2.3. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto y $p \in [1, +\infty]$. Se define el espacio de Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}_{\text{loc}}(U)$ como sigue:

$$\mathcal{W}^{1,p}_{\text{loc}}(U) = \left\{ f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(U) \middle| \forall V \Subset U \text{ abierto}, f \in \mathcal{W}^{1,p}(V) \right\}.$$

Obsérvese que $\mathcal{C}^k(U) \subseteq \mathcal{W}^{1,p}_{\text{loc}}(U)$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Dada $f : U \to \mathbb{R}$, diremos que f es una función de Sobolev si $f \in \mathcal{W}^{1,p}_{\text{loc}}(U)$ para algún $p \in [1, +\infty]$.

Si $p \in [1, +\infty]$, definimos $||\cdot||_{1,p;U} : \mathcal{W}^{1,p}(U) \to [0, +\infty)$ como sigue:

$$||f||_{1,p;U} = \left(\int_U \left(|f|^p + \sum_{i=1}^d \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^p \right) dm_d \right)^{1/p}, \text{ si } p < +\infty,$$

$$||f||_{\mathcal{W}^{1,\infty}(U)} = \operatorname{ess}\sup_U \left(|f| + \sum_{i=1}^d \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \right).$$

Se puede probar fácilmente que $||\cdot||_{1,p;U}$ es una seminorma sobre $\mathcal{W}^{1,p}(U)$ para todo $p \in [1, +\infty]$.

Definición 2.4. Una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{W}^{1,p}(U)$ converge a $f \in \mathcal{W}^{1,p}(U)$ en $\mathcal{W}^{1,p}(U)$ si $||f_n - f||_{1,p;U} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

Definición 2.5. Una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{W}^{1,p}_{\text{loc}}(U)$ converge a $f \in \mathcal{W}^{1,p}_{\text{loc}}(U)$ en $\mathcal{W}^{1,p}_{\text{loc}}(U)$ si, para todo $V \Subset U$ abierto, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $\mathcal{W}^{1,p}(V)$.

2.2.1. Puntos de Lebesgue

En esta sección, recordaremos el concepto de puntos de Lebesgue demostrando el Teorema de Diferenciación de Lebesgue-Besicovitch el cual emplearemos más tarde.

Sean μ una medida Borel sobre $\mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$ y $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d, \mu)$. Si $0 < \mu(B(x,r)) < +\infty$, definimos:

$$\fint_{B(x,r)} f\,d\mu := \frac{1}{\mu\left(B\left(x,r\right)\right)} \cdot \int_{B(x,r)} f\,d\mu.$$

Lema 2.1. Sea μ una medida Radon sobre un espacio métrico (X,d). Entonces, para μ-casi todo $x \in X$, $\mu\left(B\left(x,r\right)\right) > 0$.

Demostración. Consideremos el siguiente conjunto:

$$A = \left\{x \in X | \exists r_x > 0 \text{ tal que } \mu\left(B\left(x,r_x\right)\right) = 0\right\}.$$

Dado $x \in A$, es fácil ver que $B\left(x, r_x/2\right) \subseteq A$ pues, para todo $y \in B\left(x, r_x/2\right)$, $B\left(y, r_x/2\right) \subseteq B\left(x, r_x\right)$ y, por tanto, $\mu\left(B\left(y, r_x/2\right)\right) = 0$. Luego, A es abierto. Basta ver que $\mu\left(A\right) = 0$.

Como μ es Radon y A es abierto, sabemos lo siguiente:

$$\mu\left(A\right) = \sup\left\{\mu\left(K\right) | K \subseteq A \text{ compacto}\right\}.$$

Sea $K \subseteq A$ compacto. Obsérvese que $K \subseteq \bigcup_{x\in K} B\left(x, r_x\right)$. Por compacidad, existen $x_1, ..., x_N$ tales que $K \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} B\left(x_n, r_{x_n}\right)$. Por tanto:

$$\mu\left(K\right) \leq \sum_{n=1}^{N} \mu\left(B\left(x_n, r_{x_n}\right)\right) = 0.$$

Como $\mu\left(K\right) = 0$ y K era un compacto arbitrario contenido en A, deducimos que $\mu\left(A\right) = 0$. $\square$

Sean (X, Σ) un espacio medible y $\mu, \nu : \Sigma \to [0, +\infty]$ dos medidas sobre él. Diremos que ν es absolutamente continua respecto de μ, y lo escribiremos como $\nu \ll \mu$, si dado $A \in \Sigma$, $\mu\left(A\right) = 0$ implica que $\nu\left(A\right) = 0$.

Lema 2.2. Sea μ una medida Radon sobre $\mathbb{R}^d$ y $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}^d, \mu\right)$ no negativa. Entonces la aplicación $\nu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\nu\left(B\right) = \int_B f\,d\mu.$$

es una medida Radon.

Demostración. Obsérvese que ν es una medida Borel finita en compactos y $\nu \ll \mu$. Veamos que es Radon.

Fijemos $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$. Si $\nu\left(B\right) = +\infty$, claramente $\nu\left(G\right) = +\infty$ para todo $G \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto con $B \subseteq G$. Supongamos que $\nu\left(B\right) < +\infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $G_n \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto con $B \subseteq G_n$ tal que $\mu\left(G_n\right) < \mu\left(B\right) + \frac{1}{n}$. Podemos suponer que $G_{n+1} \subseteq G_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es fácil ver entonces que:

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \setminus B\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(G_n \setminus B\right) = 0.$$

Como $\nu \ll \mu$, tenemos lo siguiente:

$$\nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu\left(G_n\right) = \nu\left(B\right) + \nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \setminus B\right) = \nu\left(B\right).$$

Como $\nu\left(B\right) \leq \nu\left(G\right)$ para todo abierto $G \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto con $B \subseteq G$, el límite anterior prueba que ν es exteriormente regular.

Sea $G \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto. Entonces existe una colección de compactos $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenidos en G tales que $K_n \subseteq K_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Luego:

$$\nu\left(G\right) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu\left(K_n\right).$$

Como $\nu\left(K\right) \leq \nu\left(G\right)$ para todo $K \subseteq \mathbb{R}^d$ compacto con $K \subseteq G$, el límite anterior prueba que ν es interiormente regular en abiertos. En conclusión, ν es Radon. $\square$

Para el Teorema de Diferenciación de Lebesgue-Besicovitch haremos uso del siguiente teorema (véase [2, Sección 1.6] para una demostración):

Teorema 2.2 (**Teorema de Diferenciación de Medidas Radon**)**.** Sean μ y ν dos medidas Radon en $\mathbb{R}^d$. Entonces, para μ-casi todo $x \in \mathbb{R}^d$, existe y es finita:

$$\frac{d\nu}{d\mu}\left(x\right) := \lim_{r\to 0^+} \frac{\nu\left(B\left(x,r\right)\right)}{\mu\left(B\left(x,r\right)\right)}. \tag{2.1}$$

Además, si $f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ es una función tal que $f\left(x\right) = \frac{d\nu}{d\mu}\left(x\right)$ para μ-casi todo $x \in \mathbb{R}^d$, entonces f es medible. Más aún, si $\nu \ll \mu$, entonces $\nu = \mu \llcorner f$.

Teorema 2.3 (**Teorema de Diferenciación de Lebesgue-Besicovitch**)**.** Sea μ una medida Radon sobre $\mathbb{R}^d$ y $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}^d, \mu\right)$. Entonces, para μ-casi todo $x \in \mathbb{R}^d$, se cumple que:

$$\lim_{r\to 0} ⨍_{B(x,r)} f \, d\mu = f\left(x\right).$$

Más aún, para todo $p \in [1, +\infty)$ y para μ-casi todo $x \in \mathbb{R}^d$, se tiene que:

$$\lim_{r\to 0} ⨍_{B(x,r)} \left|f\left(y\right) - f\left(x\right)\right|^p \, d\mu\left(y\right) = 0.$$

Todo punto $x \in \mathbb{R}^d$ que verifique la igualdad anterior se dirá que es un punto de Lebesgue de f.

Demostración. Supongamos que f es no negativa. Definimos $\nu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \to [0, +\infty]$ como sigue:

$$\nu (B) = \int_B f \, d\mu.$$

Por el Lema 2.2, ν es una medida Radon. Además, usando el Teorema de Diferenciación de Medidas Radon, sabemos que para μ-casi todo $x \in \mathbb{R}^d$, $\frac{d\nu}{d\mu}(x)$ existe, es finita y

$$\frac{d\nu}{d\mu}(x) = \lim_{r \to 0^+} \frac{\nu (B (x, r))}{\mu (B (x, r))} = f (x)$$

que es lo que queríamos probar. Para el caso general, basta aplicar lo que acabamos de probar a f^+ y f^-.

Escribimos $\mathbb{Q} = \{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Por lo que acabamos de probar, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $A_n \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ con $\mu (A_n) = 0$ tal que:

$$\lim_{r \to 0^+} \fint_{B(x,r)} |f - r_n|^p \, d\mu = |f (x) - r_n| \, , \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus A_n.$$

Si tomamos $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, es fácil ver que $\mu (A) = 0$ por subaditividad y que, por tanto:

$$\lim_{r \to 0^+} \fint_{B(x,r)} |f - r_n|^p \, d\mu = |f (x) - r_n| \, , \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus A.$$

Fijados $x \in \mathbb{R}^d \setminus A$ y $\varepsilon > 0$, escogemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f (x) - r_n| < \frac{\varepsilon}{2^p}$. Usando la convexidad de $|\cdot|^p$, llegamos a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r \to 0^+} \fint_{B(x,r)} |f (y) - f (x)|^p \, d\mu \\
&\leq 2^{p-1} \cdot \left(\limsup_{r \to 0^+} \fint_{B(x,r)} |f (y) - r_n|^p \, d\mu + \limsup_{r \to 0^+} \fint_{B(x,r)} |r_n - f (x)|^p \, d\mu \right) \\
&= 2^{p-1} \cdot \left(0 + \frac{\varepsilon}{2^p} \right) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Haciendo $\varepsilon \to 0^+$, tenemos la segunda igualdad. $\square$

2.2.2. Aproximación Local por Funciones Suaves en $\mathcal{W}^{1,p}(U)$

Dados $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto y $\varepsilon > 0$, definimos el conjunto $U(\varepsilon)$ como sigue:

$$U(\varepsilon) = \{x \in U | \operatorname{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}.$$

Nótese que si $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, entonces $U(\varepsilon) \subseteq U(\varepsilon')$. Además, $U = \bigcup_{\varepsilon>0} U(\varepsilon)$. Si $V \Subset U$ es abierto, por compacidad, existen $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n > 0$ tales que $V \subseteq \bigcup_{i=1}^n U(\varepsilon_i)$. Tomando $\varepsilon_0 = \min_{1\leq i\leq n} \varepsilon_i$, tenemos que $V \subseteq U(\varepsilon)$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Consideremos la función $\eta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma:

$$\eta(x) = \begin{cases} c \cdot \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right) & \text{si } |x| < 1. \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

donde $c > 0$ es tal que:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \eta(x)\ dm_d(x) = \int_{B(0,1)} \eta(x)\ dm_d(x) = 1.$$

Se tiene que $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Sea $\eta_\varepsilon : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \dfrac{1}{\varepsilon^d} \cdot \eta\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) \in \mathbb{R}$. Se dice que η_ε es el regularizador estándar. Obsérvese que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon(x)\ dm_d(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\varepsilon^d} \cdot \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dm_d(x) \overset{y=x/\varepsilon}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\varepsilon^d} \cdot \eta(y) \cdot \varepsilon^d\, dm_d(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \eta(x)\ dm_d(x) = 1. \end{aligned}$$

Evidentemente, $\eta_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ y $\operatorname{sop}(\eta_\varepsilon) = \overline{B}(0, \varepsilon)$. Dado $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(U)$, definimos $f_\varepsilon : U \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$f_\varepsilon(x) = \int_U \eta_\varepsilon(x - y) \cdot f(y)\ dm_d(y).$$

Si $x \in U(\varepsilon)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) &= \int_U \eta_\varepsilon(x-y) \cdot f(y)\ dm_d(y) = \frac{1}{\varepsilon^d} \cdot \int_U \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \cdot f(y)\ dm_d(y) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^d} \cdot \int_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \cdot f(y)\ dm_d(y) = \left[\begin{array}{c} z = (x-y)/\varepsilon \\ dm_d(z) = 1/\varepsilon^d\, dm_d(y) \end{array} \right] \\ &= \int_{B(0,1)} \eta(z) \cdot f(x - \varepsilon \cdot z)\ dm_d(z). \end{aligned}$$

Otra propiedad interesante es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_U \eta_\varepsilon (x-y) \cdot f(x)\ dm_d(y) &= \begin{bmatrix} z = (x-y)/\varepsilon \\ dm_d(z) = 1/\varepsilon^d\, dm_d(y) \end{bmatrix} \\
&= \int_{B(0,1)} \eta(z) \cdot f(x)\ dm_d(z) \\
&= f(x) \cdot \int_{B(0,1)} \eta(z)\ dm_d(z) \\
&= f(x), \forall \varepsilon > 0, \forall x \in U(\varepsilon).
\end{aligned}$$

La regularización es una técnica que, en este caso, permite aproximar funciones de Sobolev por funciones infinitamente diferenciables, en inglés, *smooth* (suaves).

Teorema 2.4. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto y $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(U)$. Se cumple:

(a) Para cada $\varepsilon > 0$, $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(U(\varepsilon))$. En particular, si $\operatorname{sop}(f_\varepsilon) \subseteq U(\varepsilon)$, entonces $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(U) \cap \mathcal{W}^{1,p}_{\text{loc}}(U)$.

(b) Si $f \in \mathcal{C}(U)$, $\lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon = f$ en $\left(\mathcal{C}(V), ||\cdot||_{\infty,V}\right)$ para todo $V \Subset U$ abierto.

(c) Si $f \in \mathcal{L}^p_{\text{loc}}(U)$ para algún $p \in [1,+\infty)$, entonces $\lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon = f$ en $\mathcal{L}^p_{\text{loc}}(U)$.

(d) Si $x \in U$ es un punto de Lebesgue de f, entonces $\lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon(x) = f(x)$. En particular, $\lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon(x) = f(x)$ para m_d-casi todo $x \in \mathbb{R}^d$.

(e) Si $f \in \mathcal{W}^{1,p}_{\text{loc}}(U)$ para algún $p \in [1,+\infty]$, entonces:

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_\varepsilon (x) = \int_U \eta_\varepsilon(x-y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y_i}(y)\ dm_d(y), \forall i \in \mathbb{N}_d.$$

Además, $\lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon = f$ en $\mathcal{W}^{1,p}_{\text{loc}}(U)$ si $p \in [1,+\infty)$.

Demostración.

(a) Fijados $x \in U(\varepsilon)$ e $i \in \mathbb{N}_d$, como $U(\varepsilon)$ es abierto, existe $h_0 > 0$ tal que $x + h\cdot e_i \in U(\varepsilon)$ para todo $h \in (-h_0,h_0)\setminus\{0\}$. Si $h \in (-h_0,h_0)\setminus\{0\}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{f_\varepsilon(x+h\cdot e_i) - f_\varepsilon(x)}{h} &= \int_U \frac{\eta_\varepsilon(x+h\cdot e_i - y) - \eta_\varepsilon(x-y)}{h} \cdot f(y)\ dm_d(y) \\
&= \int_V \frac{\eta_\varepsilon(x+h\cdot e_i - y) - \eta_\varepsilon(x-y)}{h} \cdot f(y)\ dm_d(y),
\end{aligned}$$

para algún $V \Subset U$ abierto. Por el Teorema del Valor Medio de varias variables, como $\eta_\varepsilon \in \mathcal{C}^1_c\left(\mathbb{R}^d\right)$, $\eta_\varepsilon \in \operatorname{Lip}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Luego:

$$\left|\frac{\eta_\varepsilon(x+h\cdot e_i-y)-\eta_\varepsilon(x-y)}{h}\cdot f(y)\right|$$
$$\leq \frac{\mathrm{Lip}(\eta_\varepsilon)\cdot|h|}{|h|}\cdot|f(y)|=\mathrm{Lip}(\eta_\varepsilon)\cdot|f(y)|,\forall y\in V.$$

Como $|f|\in\mathcal{L}^1(V)$, podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada y, se tiene que:

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f_\varepsilon(x+h\cdot e_i)-f_\varepsilon(x)}{h}=\int_U\frac{\partial\eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y)\cdot f(y)\ dm_d(y)$$
$$=\int_{B(x,\varepsilon)}\frac{\partial\eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y)\cdot f(y)\ dm_d(y).$$

Como $\dfrac{\partial\eta_\varepsilon}{\partial x_i}\in\mathcal{C}_c^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$, deducimos por inducción que $f_\varepsilon\in\mathcal{C}^\infty(U(\varepsilon))$.

(b) Sea $V\Subset U$ compacto y $x\in V$. Entonces existe $\varepsilon_0>0$ tal que $V\subseteq U(\varepsilon)$ para todo $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. Como $\int_{B(0,1)}\eta(x)\ dm_d(x)=1$, entonces:

$$f(x)=\int_{B(0,1)}\eta(z)\cdot f(x)\ dm_d(z).$$

Luego, para todo $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, tenemos que:

$$|f_\varepsilon(x)-f(x)|=\left|\int_{B(0,1)}\eta(z)\cdot(f(x-\varepsilon\cdot z)-f(x))\ dm_d(z)\right|$$
$$\leq\int_{B(0,1)}\eta(z)\cdot|f(x-\varepsilon\cdot z)-f(x)|\ dm_d(z)$$

Por el Teorema de Heine-Cantor, f es uniformemente continua en V. Entonces existe $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tal que, para todo $u,v\in U$ con $|u-v|<\delta$, se tiene que $|f(u)-f(v)|<\varepsilon$. Luego, $|(x-\varepsilon\cdot z)-x|=\varepsilon\cdot|z|<\delta$ para todo $z\in B(0,1)$ si y sólamente si $\varepsilon<\delta/|z|$ para todo $z\in B(0,1)\setminus\{0\}$. Como $\delta/|z|\geq\delta$ para todo $z\in B(0,1)$, para todo $\varepsilon\in(0,\min\{\delta,\varepsilon_0\})$, se tiene que:

$$|f_\varepsilon(x)-f(x)|\leq\varepsilon\cdot\int_{B(0,1)}\eta(z)\ dm_d(z)=\varepsilon.$$

Esta cota es independiente del $x\in V$ escogido. Entonces:

$$||f_\varepsilon-f||_{\infty,V}\leq\varepsilon\overset{\varepsilon\to 0^+}{\to}0.$$

Por tanto, $\lim_{\varepsilon\to 0^+}f_\varepsilon=f$ en $\left(\mathcal{C}(V),||\cdot||_{\infty,V}\right)$.

(c) Sea $V \Subset U$ abierto y $x \in V$. Sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $V \subseteq U(\varepsilon)$. Para $p > 1$, por la desigualdad de Hölder, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
|f_\varepsilon(x)| &\leq \int_{B(0,1)} \eta(z) \cdot |f(x-\varepsilon \cdot z)| \, dm_d(z) \\
&= \int_{B(0,1)} \eta^{1/p}(z) \cdot |f(x-\varepsilon \cdot z)| \cdot \eta^{1-1/p}(z) \, dm_d(z) \\
&\leq \left(\int_{B(0,1)} \left(\eta^{1/p}(z)\right)^p \cdot |f(x-\varepsilon \cdot z)|^p \, dm_d(z) \right)^{1/p} \\
&\cdot \left(\int_{B(0,1)} \left(\eta^{1-1/p}(z)\right)^{p/(p-1)} \, dm_d(z) \right)^{1-1/p} \\
&= \left(\int_{B(0,1)} \left(\eta^{1/p}(z)\right)^p \cdot |f(x-\varepsilon \cdot z)|^p \, dm_d(z) \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Elevando a p, integrando en V (aquí podemos suponer ya que $p \geq 1$) y usando el Teorema de Fubini para funciones medibles no negativas, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_V |f_\varepsilon(x)|^p \, dm_d(x) &\leq \int_{B(0,1)} \eta(z) \cdot \left(\int_V |f(x-\varepsilon \cdot z)|^p \, dm_d(x) \right) dm_d(z) \\
&= \begin{bmatrix} x - \varepsilon \cdot z = y \\ dm_d(x) = dm_d(y) \end{bmatrix} \\
&= \int_{B(0,1)} \eta(z) \cdot \left(\int_{V-\varepsilon \cdot z} |f(y)|^p \, dm_d(y) \right) dm_d(z).
\end{aligned}$$

Sea $W = V - \varepsilon \cdot B(0,1)$. Entonces $W \Subset U$ y, para todo $z \in B(0,1)$, $V - \varepsilon \cdot z \subseteq W$. Luego:

$$\int_V |f_\varepsilon(x)|^p \, dm_d(x) \leq \int_W |f(y)|^p \, dm_d(y). \tag{2.2}$$

Fijemos $\delta > 0$. Como $f \in \mathcal{L}^p(W)$, existe $g \in \mathcal{C}\left(\overline{W}\right)$ tal que:

$$||f - g||_{p,W} \leq \delta.$$

Además, usando (2.2), deducimos también que:

$$||f_\varepsilon - g_\varepsilon||_{p,V} \leq ||f - g||_{p,W} \leq \delta.$$

Por tanto, usando que $V \subseteq W$, se tiene que:

$$\begin{aligned}||f_\varepsilon - f||_{p,V} &\leq ||f_\varepsilon - g_\varepsilon||_{p,V} + ||g_\varepsilon - g||_{p,V} + ||g - f||_{p,V} \\ &\leq ||f_\varepsilon - g_\varepsilon||_{p,V} + ||g_\varepsilon - g||_{p,V} + ||f - g||_{p,W} \\ &\leq 2 \cdot \delta + ||g_\varepsilon - g||_{p,V}.\end{aligned}$$

Por el apartado anterior, como $g, g_\varepsilon \in \mathcal{C}(V)$, entonces $\lim_{\varepsilon\to 0^+} g_\varepsilon = g$ en $\left(\mathcal{C}(V), ||\cdot||_{\infty,V}\right)$. Luego, $\lim_{\varepsilon\to 0^+} g_\varepsilon = g$ en $\mathcal{L}^p(V)$ ya que la clausura de V es compacta. Por tanto, existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta) > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $||g_\varepsilon - g||_{p,V} \leq \delta$. Por consiguiente:

$$||f_\varepsilon - f||_{p,V} \leq 3 \cdot \delta, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

En consecuencia, $\lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon = f$ en $\mathcal{L}^p(V)$. Por tanto, $\lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon = f$ en $\mathcal{L}^p_{\mathrm{loc}}(U)$.

(d) Sea $\varepsilon_0 > 0$ tal que $x \in U(\varepsilon_0)$. Entonces para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, se tiene que:

$$\begin{aligned}|f_\varepsilon(x) - f(x)| &\leq \int_U \eta_\varepsilon(x-y) \cdot |f(y) - f(x)|\, dm_d(y) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^d}\int_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \cdot |f(y) - f(x)|\, dm_d(y) \\ &= ||\eta||_{\infty,\mathbb{R}^d} \cdot \frac{m_d(B(x,\varepsilon))}{\varepsilon^d} \cdot \fint_{B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)|\, dm_d(y).\end{aligned}$$

Sabemos que $\widetilde{\alpha}(d) := ||\eta||_{\infty,\mathbb{R}^d} \cdot \dfrac{m_d(B(x,\varepsilon))}{\varepsilon^d}$ es independiente de ε. Por tanto, haciendo $\varepsilon \to 0^+$, como $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(U)$ y x es un punto de Lebesgue de f, tenemos por el Teorema de Diferenciación de Lebesgue-Besicovitch que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon(x) = f(x)$.

(e) Por los cálculos del apartado (a), sabemos que, fijado $i \in \mathbb{N}_d$, para todo $x \in U(\varepsilon)$, se cumple que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i}(x) &= \int_{B(x,\varepsilon)} \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y) \cdot f(y)\, dm_d(y) \\ &= -\int_{B(x,\varepsilon)} \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial y_i}(x-y) \cdot f(y)\, dm_d(y).\end{aligned}$$

Como $f \in \mathcal{W}^{1,p}_{\mathrm{loc}}(B(x,\varepsilon))$ para todo $x \in U(\varepsilon)$, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i}(x) &= -\int_{B(x,\varepsilon)} \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial y_i}(x-y)\cdot f(y)\, dm_d(y) \\
&= \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)\cdot \frac{\partial f}{\partial y_i}(y)\, dm_d(y) \\
&= \int_U \eta_\varepsilon(x-y)\cdot \frac{\partial f}{\partial y_i}(y)\, dm_d(y).
\end{aligned}
$$

Esto prueba además que $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_\varepsilon = \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i}$.

Supongamos que $p < +\infty$. Sea $V \Subset U$ abierto. Entonces:

$$
||f_\varepsilon - f||_{1,p;V}^p \leq ||f_\varepsilon - f||_{p,V}^p + \sum_{i=1}^d \left|\left|\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\right|_{p,V}^p \overset{\varepsilon\to 0^+}{\to} 0,
$$

donde estamos utilizando el apartado (c). Luego, $\lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon = f$ en $\mathcal{W}^{1,p}(V)$. Por tanto, $\lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon = f$ en $\mathcal{W}^{1,p}_{\mathrm{loc}}(U)$.

□

Corolario 2.1. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto y $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(U)$. Entonces existe $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}^\infty(U)$ convergente a f en $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(U)$.

Demostración. Sea $\widetilde{f} \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^d\right)$ definida como f en U y 0 en $\mathbb{R}^d \backslash U$. Por el Teorema 2.4, sabemos que para todo $\varepsilon > 0$, $\widetilde{f}_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^d(\varepsilon)\right) = \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ y $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \widetilde{f}_\varepsilon = \widetilde{f}$ en $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Consideremos una sucesión $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,+\infty)$ decreciente a 0 y definamos $f_n : U \to \mathbb{R}$ como la restricción de $\widetilde{f}_{\varepsilon_n}$ a U para cada $n \in \mathbb{N}$. Claramente, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}^\infty(U)$ y $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(U)$. □

Nuestro objetivo es probar que toda función $\mathcal{W}^{1,p}(U)$ con $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto se puede escribir como límite en $\mathcal{W}^{1,p}(U)$ de funciones infinitamente diferenciables. Para ello, necesitaremos el siguiente lema técnico:

Lema 2.3. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto y $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(U)$. Supongamos que existe $V \Subset U$ abierto tal que $\mathrm{sop}(f) \subseteq V$. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\mathrm{sop}(f_\varepsilon) \subseteq V$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Demostración. Por definición, sabemos que $\mathrm{sop}(f_\varepsilon) \subseteq U(\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$. Además, para todo $\varepsilon > 0$ y $x \in U(\varepsilon)$, se tenía que:

$$
f_\varepsilon(x) = \int_{B(0,1)} \eta(z)\cdot f(x - \varepsilon\cdot z)\, dm_d(z).
$$

Fijado $\varepsilon > 0$, sea $V_\varepsilon := \mathrm{sop}(f) + \varepsilon \cdot B(0,1)$. Obsérvese que V_ε es abierto:

$$V_{\varepsilon} = \bigcup_{x \in \mathrm{sop}(f)} B(x, \varepsilon).$$

Veamos que $\mathrm{sop}(f_{\varepsilon}) \subseteq \overline{V_{\varepsilon}} \subseteq V_{2\cdot\varepsilon}$. Sea $x \notin \overline{V_{\varepsilon}}$. Como $\overline{V_{\varepsilon}}$ es cerrado, existe $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus \overline{V_{\varepsilon}}$. Sea $u \in B(x, r_x)$ y lo escribimos como $u = y + \varepsilon \cdot z$ con $z \in B(0,1)$ cualquiera e $y = y(u,z) \in \mathbb{R}^d$. Necesariamente, $y = u - \varepsilon \cdot z \notin \mathrm{sop}(f)$ para todo $z \in B(0,1)$. Entonces $y \notin \mathrm{sop}(f)$ y:

$$f_{\varepsilon}(u) = \int_{B(0,1)} \eta(z) \cdot f(y(x,z))\, dm_d(z) = 0.$$

Por tanto, $f = 0$ en $B(x, r_x)$. Necesariamente, $x \notin \mathrm{sop}(f_{\varepsilon})$.

Sea $x \in \overline{V_{\varepsilon}}$. Entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V_{\varepsilon}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in \mathrm{sop}(f)$ tal que $d(x_n, y_n) < \varepsilon$. Por compacidad, existe una subsucesión $\{y_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ convergente a $y \in \mathrm{sop}(f)$. Luego, $d(x,y) = \lim_{m\to\infty} d(x_{n_m}, y_{n_m}) \leq \varepsilon < 2\cdot\varepsilon$. Por tanto, $x \in V_{2\cdot\varepsilon}$.

Obsérvese que si $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, entonces $V_{\varepsilon'} \subseteq V_{\varepsilon}$. Por tanto, tenemos que buscar $\varepsilon_0 > 0$ tal que $V_{\varepsilon_0} \subseteq V$. Por reducción al absurdo, supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in V_{1/n} \setminus V$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $y_n \in \mathrm{sop}(f)$ y $z_n \in B(0,1)$ tal que $x_n = y_n + \dfrac{1}{n} \cdot z_n$. Por ser $B(0,1)$ acotado, entonces $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \cdot z_n = 0$. Además, usando la compacidad de $\mathrm{sop}(f)$, deducimos que existe una subsucesión $\{y_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a $y \in \mathrm{sop}(f)$. Luego, $\{x_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a y. Como V es abierto y contiene a y, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq m_0$, $x_{m_n} \in V$. Hemos llegado a una contradicción. $\square$

Corolario 2.2. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto y $\varphi \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^d)$ con $V \Subset U$ abierto tal que $\mathrm{sop}(\varphi) \subseteq V$. Entonces existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_c^{\infty}(U)$ convergente a φ en $\left(\mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^d), ||\cdot||_{\infty,U}\right)$ tal que $\mathrm{sop}(\varphi_n) \subseteq V$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Usando el apartado (b) del Teorema 2.4, se tiene que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varphi_{\varepsilon} = \varphi$ en $\left(\mathcal{C}(V), ||\cdot||_{\infty,V}\right)$. Por otro lado, por el Lema 2.3, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\mathrm{sop}(\varphi_{\varepsilon}) \subseteq V$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Como $\varphi, \varphi_{\varepsilon} = 0$ en $U \setminus V$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, deducimos que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varphi_{\varepsilon} = \varphi$ en $\left(\mathcal{C}(U), ||\cdot||_{\infty,U}\right)$. Consideremos una sucesión $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0, \varepsilon_0)$ decreciente a 0 y definamos $\varphi_n : U \to \mathbb{R}$ como $\varphi_n = \varphi_{\varepsilon_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Claramente, $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_c^{\infty}(U)$, $\mathrm{sop}(\varphi_n) \subseteq V$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ en $\left(\mathcal{C}(U), ||\cdot||_{\infty,U}\right)$. $\square$

Para el teorema que veremos a continuación, emplearemos el siguiente resultado de existencia de particiones regulares de la unidad:

Teorema 2.5. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^d$ y $\mathcal{O} := \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un recubrimiento por abiertos de A. Entonces existen $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto con $A \subseteq U$ y una colección de funciones $\Phi = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}^{\infty}(U)$ con las siguientes propiedades:

- Para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \varphi_n \leq 1$ en A.
- Fijado $x \in A$, existe un entorno abierto V de x suficientemente pequeño tal que $\varphi_n = 0$ en V para casi todo $n \in \mathbb{N}$ (es decir, a excepción de una cantidad finita de funciones).
- Para todo $x \in A$, $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n = 1$ en A.
- Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{sop}(\varphi_n) \subseteq V_m$. Reindexando, podemos suponer que $n = m$.

Una colección Φ que satisfaga las tres primeras propiedades se dirá que es una partición de la unidad para A con funciones $\mathcal{C}^{\infty}$. Si verifica además la última propiedad, diremos que dicha partición de la unidad está subordinada a $\mathcal{O}$.

Demostración. Véase [10, Página 63]. □

Teorema 2.6 (**Teorema de Aproximación Local por Funciones Suaves**). Sean $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto y $f \in \mathcal{W}^{1,p}(U)$ para algún $p \in [1, +\infty)$. Entonces existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{W}^{1,p}(U) \cap \mathcal{C}^{\infty}(U)$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en $\mathcal{W}^{1,p}(U)$.

Demostración. Fijamos $\varepsilon > 0$. Sea $U_0 = \varnothing$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos U_n como sigue:

$$U_n = U\left(\frac{1}{n}\right) \cap B(0, n) \Subset U.$$

Está claro que para todo $n \in \mathbb{N}$, $U_n \subseteq U_{n+1}$ y $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $V_n = U_{n+1} \setminus \overline{U}_{n-1} \Subset U$. Veamos que $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. La contención $\supseteq$ es trivial. Sea $x \in U$. Como U es abierto, entonces $\operatorname{dist}(x, \partial U) > 0$. Luego, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n+1} < \operatorname{dist}(x, \partial U) \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1}$. Luego, $x \in V_n$ y, por tanto, $x \in U$. Queremos probar que, dados $n, k \in \mathbb{N}$, si $V_n \cap V_k \neq \varnothing$, entonces n y k son consecutivos.

Sean $n, k \in \mathbb{N}$ con $2 \leq k < n$. Por reducción al absurdo, supongamos que existe $x \in V_n \cap V_{n-k} = U_{n-k+1} \setminus \overline{U}_{n-1}$. Como $x \in B(0, n-k+1)$, entonces $x \in B(0, n-1)$. Necesariamente, tenemos que $x \notin U(1/(n-1))$, es decir:

$$\frac{1}{n-k+1} < \operatorname{dist}(x, \partial U) \leq \frac{1}{n-1}.$$

Luego, $n - 1 < n - k + 1$, esto es, $k < 2$ lo cual es absurdo.

Sean $n, l \in \mathbb{N}$ con $l \geq 2$. Por reducción al absurdo, supongamos que existe $x \in V_n \cap V_{n+l} = U_{n+1} \setminus \overline{U}_{n+l-1}$. Como $x \in B(0, n+1)$, entonces $x \in B(0, n+l-1)$. Necesariamente, tenemos que $x \notin U(1/(n+l-1))$, es decir:

$$\frac{1}{n+1} < \operatorname{dist}(x, \partial U) \leq \frac{1}{n+l-1}.$$

Luego, $n + l - 1 < n + 1$, esto es, $l < 2$ lo cual es absurdo.

Observemos además que, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, $V_{n-1} \cap V_n \cap V_{n+1} = \varnothing$. Por tanto, los abiertos de la colección $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son disjuntos tres a tres y si dos abiertos tienen intersección no vacía, entonces sus índices son consecutivos.

Consideremos una partición de la unidad para U con funciones $\mathcal{C}^\infty$ subordinada a $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, esto es, una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_c^\infty(U)$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $\operatorname{sop}(\varphi_n) \subseteq V_n$, $0 \leq \varphi_n \leq 1$ en U y $\sum_{n=1}^\infty \varphi_n = 1$ en U. Veamos que $f \cdot \varphi_n \in \mathcal{W}^{1,p}(U)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ e $i \in \mathbb{N}_d$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_U f \cdot \varphi_n \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dm_d &= \int_U f \cdot \left(\frac{\partial(\varphi_n \cdot \varphi)}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \cdot \varphi\right) dm_d \\ &= -\int_U \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \varphi_n + f \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}\right) \cdot \varphi\, dm_d.\end{aligned}$$

Luego, para todo $i \in \mathbb{N}_d$, existe $\frac{\partial(f\cdot\varphi_n)}{\partial x_i}$ en el sentido débil y pertenece a $\mathcal{L}^p(U)$. Además,

$$\frac{\partial(f \cdot \varphi_n)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \varphi_n + f \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}.$$

Por tanto, $f \cdot \varphi_n \in \mathcal{W}^{1,p}(U)$. Además, $\operatorname{sop}(f \cdot \varphi_n) \subseteq V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\partial(f\cdot\varphi_n)}{\partial x_i}$ en el sentido débil. Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(U)$ y $V \Subset U$ abierto con $\operatorname{sop}(\varphi) \subseteq V$. Entonces:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty \int_U \left| f \cdot \varphi_n \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| dm_d &= \sum_{n=1}^\infty \int_V \varphi_n \cdot |f| \cdot \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| dm_d \\ &= \int_V \left(\sum_{n=1}^\infty \varphi_n\right) \cdot |f| \cdot \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| dm_d \\ &= \int_V |f| \cdot \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| dm_d \leq \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\|_{\infty,V} \cdot \int_V |f|\, dm_d < +\infty.\end{aligned}$$

Por el Teorema de la Convergencia Dominada, podemos intercambiar suma e integral y tenemos lo siguiente:

$$\int_U f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dm_d = \sum_{n=1}^\infty \int_U (f \cdot \varphi_n) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dm_d = -\sum_{n=1}^\infty \int_U \frac{\partial(f \cdot \varphi_n)}{\partial x_i} \cdot \varphi\, dm_d.$$

Basta volver a intercambiar suma e integral. Para ello, debemos demostrar que $\sum_{n=1}^\infty \int_U \left|\frac{\partial(f\cdot\varphi_n)}{\partial x_i} \cdot \varphi\right| dm_d < +\infty$ y aplicar de nuevo el Teorema de la Convergencia Dominada. Como V tiene clausura compacta y $U = \bigcup_{n=1}^\infty V_n$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $V \subseteq \bigcup_{n=1}^N V_n$. Como los conjuntos V_n son disjuntos tres a tres, necesariamente existe

$M \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}\right| = \sum_{n=1}^{M} \left|\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}\right|$ en V. Sea $C > 0$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}\right| \leq C$ en V. Entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \int_U \left| \frac{\partial (f \cdot \varphi_n)}{\partial x_i} \cdot \varphi \right| dm_d &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_V \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \varphi_n + f \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \right| \cdot |\varphi| \; dm_d \\
&\leq ||\varphi||_{\infty,V} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \int_V \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \varphi_n + |f| \cdot \left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \right| \right) dm_d \\
&= ||\varphi||_{\infty,V} \cdot \int_V \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \right) dm_d \\
&+ ||\varphi||_{\infty,V} \cdot \int_V |f| \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \right| \right) dm_d \\
&= ||\varphi||_{\infty,V} \cdot \int_V \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| dm_d \\
&+ ||\varphi||_{\infty,V} \cdot \int_V |f| \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \right| \right) dm_d \\
&\leq ||\varphi||_{\infty,V} \cdot \left|\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|\right|_{1,V} + ||\varphi||_{\infty,V} \cdot C \cdot ||f||_{1,V} < +\infty.
\end{aligned}$$

Por el Teorema 2.4 y el Lema 2.3, para cada $n \in \mathbb{N}$, fijado $\varepsilon > 0$, existe $\varepsilon_n > 0$ tal que $\operatorname{sop}\left((f \cdot \varphi_n)_{\varepsilon_n}\right) \subseteq V_n$ y:

$$\left(\int_U \left| (f \cdot \varphi_n)_{\varepsilon_n} - f \cdot \varphi_n \right|^p dm_d \right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2^n},$$
$$\left(\sum_{i=1}^{d} \int_U \left| \frac{\partial (f \cdot \varphi_n)_{\varepsilon_n}}{\partial x_i} - \frac{\partial (f \cdot \varphi_n)}{\partial x_i} \right|^p dm_d \right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Sea $f^{\varepsilon} : U \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f^{\varepsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} (f \cdot \varphi_n)_{\varepsilon_n}.$$

Sabemos que los abiertos de la colección $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son disjuntos tres a tres. Luego, fijado $x \in U$, existe un entorno abierto de x suficientemente pequeño en el que sólo una cantidad finita de términos de la suma anterior son no nulos. Por tanto, f^{ε} está bien definida. Por el Teorema 2.4, sabemos que $(f \cdot \varphi_n)_{\varepsilon_n} \in \mathcal{C}^{\infty}(U(\varepsilon_n))$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, $\operatorname{sop}\left((f \cdot \varphi_n)_{\varepsilon_n}\right) \subseteq V_n \subseteq U_{n+1} \subseteq U\left(1/(n+1)\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomando $\varepsilon_n > 0$ de forma que $\varepsilon_n < 1/(n+1)$ y que se cumpla lo anterior, tenemos que $\operatorname{sop}\left((f \cdot \varphi_n)_{\varepsilon_n}\right) \subseteq U(\varepsilon_n)$ y, por tanto, $(f \cdot \varphi_n)_{\varepsilon_n} \in \mathcal{C}^{\infty}(U)$. Por lo que hemos razonado anteriormente, concluimos que $f^{\varepsilon} \in \mathcal{C}^{\infty}(U)$.

Además, como para todo $x \in U$, existe un entorno abierto de x suficientemente pequeño en el que los términos de la suma que definen a f^{ε} son todos nulos excepto una cantidad finita, entonces los operadores $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ con $i \in \mathbb{N}_d$ y $\sum_{n=1}^{\infty}$ conmutan. Entonces:

$$\begin{aligned}||f^{\varepsilon} - f||_{p,U} &= \left|\left|\left(\sum_{n=1}^{\infty} (f \cdot \varphi_n)_{\varepsilon_n}\right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} f \cdot \varphi_n\right)\right|\right|_{p,U} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\left|(f \cdot \varphi_n)_{\varepsilon_n} - f \cdot \varphi_n\right|\right|_{p,U} \leq \varepsilon \overset{\varepsilon \to 0^+}{\to} 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\left|\frac{\partial f^{\varepsilon}}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\right|_{p,U} &= \left|\left|\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial (f \cdot \varphi_n)_{\varepsilon_n}}{\partial x_i}\right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial (f \cdot \varphi_n)}{\partial x_i}\right)\right|\right|_{p,U} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left|\left|\frac{\partial (f \cdot \varphi_n)_{\varepsilon_n}}{\partial x_i} - \frac{\partial (f \cdot \varphi_n)}{\partial x_i}\right|\right|_{p,U} \leq \varepsilon \overset{\varepsilon \to 0^+}{\to} 0.\end{aligned}$$

Por la desigualdad triangular inversa aplicada a las desigualdades anteriores, se deduce fácilmente que $\{f^{\varepsilon}\}_{\varepsilon > 0} \subseteq \mathcal{W}^{1,p}(U)$. Por tanto, tenemos que $\lim_{\varepsilon \to 0^+} f^{\varepsilon} = f$ en $\mathcal{W}^{1,p}(U)$. De aquí, podemos extraer una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \{f^{\varepsilon}\}_{\varepsilon > 0}$ tal que $\lim_{\varepsilon \to 0^+} f^{\varepsilon} = \lim_{n \to \infty} f_n = f$ en $\mathcal{W}^{1,p}(U)$. $\square$

2.2.3. El espacio $\mathcal{W}^{1,\infty}_{\text{loc}}(U)$ y las funciones localmente Lipschitz

Por último, vamos a ver un teorema que relaciona las funciones de $\mathcal{W}^{1,\infty}_{\text{loc}}(U)$ y las funciones localmente Lipschitz. Para este resultado, emplearemos un lema de extensión de funciones localmente Lipschitz y el Teorema de Rademacher.

Lema 2.4. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^d$ y $f : A \to \mathbb{R}^l$ una función Lipschitz. Entonces existe una función $\overline{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^l$ Lipschitz tal que $\overline{f}\big|_A = f$ y $\mathrm{Lip}\left(\overline{f}\right) \leq \sqrt{m} \cdot \mathrm{Lip}(f)$.

Demostración. En primer lugar, supondremos que $l = 1$. Sea $\overline{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definida como sigue:

$$\overline{f}(x) = \inf_{a \in A} \left(f(a) + \mathrm{Lip}(f) \cdot |x - a|\right)$$

Probemos que $\overline{f}$ está bien definida, es decir, $\overline{f}(x) > -\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Fijemos $x \in \mathbb{R}^d$ y $a_0 \in A$. Entonces para todo $a \in A$, tenemos que:

$$\begin{aligned} f(a) + \operatorname{Lip}(f) \cdot |x - a| &= f(a) - f(a_0) + f(a_0) + \operatorname{Lip}(f) \cdot |(a - a_0) - (x - a_0)| \\ &\geq f(a) - f(a_0) + \operatorname{Lip}(f) \cdot (a - a_0) \\ &+ f(a_0) - \operatorname{Lip}(f) \cdot |x - a_0| . \end{aligned}$$

Como f es Lipschitz en A, para todo $a \in A$, se tiene que $f(a) - f(a_0) \geq -\operatorname{Lip}(f) \cdot |a - a_0|$, o, dicho de otra forma, $f(a) - f(a_0) + \operatorname{Lip}(f) \cdot |a - a_0| \geq 0$. Por tanto:

$$f(a) + \operatorname{Lip}(f) \cdot |x - a| \geq f(a_0) - \operatorname{Lip}(f) \cdot |x - a_0| .$$

Tomando el ínfimo cuando $a \in A$, nos queda lo siguiente:

$$\overline{f}(x) \geq f(a_0) - \operatorname{Lip}(f) \cdot |x - a_0| > -\infty.$$

Por consiguiente, $\overline{f}$ está bien definida. Vamos a comprobar que $\overline{f}$ es Lipschitz. Si $x \in A$, entonces $\overline{f}(x) \leq f(x)$. Además, como f es Lipschitz, entonces $f(x) \leq f(a) + \operatorname{Lip}(f) \cdot |x - a|$, para todo $a \in A$. Tomando el ínfimo en $a \in A$, tenemos que $f(x) \leq \overline{f}(x)$. Por tanto, $\overline{f}\big|_A = f$.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^d$. Entonces:

$$\overline{f}(x) \leq \inf_{a \in A} \left(f(a) + \operatorname{Lip}(f) \cdot (|x - y| + |y - a|) \right) = \overline{f}(y) + \operatorname{Lip}(f) \cdot |x - y| .$$

$$\overline{f}(y) \leq \inf_{a \in A} \left(f(a) + \operatorname{Lip}(f) \cdot (|y - x| + |x - a|) \right) = \overline{f}(x) + \operatorname{Lip}(f) \cdot |x - y| .$$

Luego:

$$\left| \overline{f}(x) - \overline{f}(y) \right| \leq \operatorname{Lip}(f) \cdot |x - y| .$$

Por tanto, $\overline{f}$ es una función Lipschitz y $\operatorname{Lip}\left(\overline{f}\right) \leq \operatorname{Lip}(f)$.

Supongamos que $l > 1$ y sea $f = (f_1, ..., f_m)$. Definimos $\overline{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^l$ como $\overline{f} = \left(\overline{f}_1, ..., \overline{f}_l\right)$, donde $\overline{f}_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es la función Lipschitz que definimos al principio para $i \in \mathbb{N}_l$. Sean $x, y \in \mathbb{R}^d$. Entonces:

$$\left| \overline{f}(x) - \overline{f}(y) \right|^2 = \sum_{i=1}^{l} \left| \overline{f}_i(x) - \overline{f}_i(y) \right|^2 \leq m \cdot \operatorname{Lip}(f)^2 \cdot |x - y|^2 .$$

Luego, $\left| \overline{f}(x) - \overline{f}(y) \right| \leq \sqrt{m} \cdot \operatorname{Lip}(f) \cdot |x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$. Por tanto, $\overline{f}$ es una función Lipschitz y $\operatorname{Lip}\left(\overline{f}\right) \leq \sqrt{m} \cdot \operatorname{Lip}(f)$. $\square$

Nota 2.1. El Teorema de Kirszbraun (véase [12] y [13]) afirma que existe una extensión Lipschitz $\overline{f}$ de f tal que $\operatorname{Lip}\left(\overline{f}\right) = \operatorname{Lip}(f)$.

Lema 2.5. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto, $v \in \mathbb{R}^d$ con $|v| = 1$ y $f \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^d\right)$ una función continua. Definimos $\overline{D}_v f, \underline{D}_v f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ como sigue:

$$\begin{aligned} \overline{D}_v f(x) &= \limsup_{t \to 0} \frac{f(x + t \cdot v) - f(x)}{t}, \\ \underline{D}_v f(x) &= \liminf_{t \to 0} \frac{f(x + t \cdot v) - f(x)}{t}. \end{aligned}$$

Entonces $\overline{D}_v f$ y $\underline{D}_v f$ son medibles Borel.

Demostración. Como $\underline{D}_v f = -\overline{D}_v(-f)$, basta probar que $\overline{D}_v f$ es medible Borel. Sean $x \in \mathbb{R}^d$. Entonces:

$$\overline{D}_v f(x) = \limsup_{t \to 0} \frac{f(x + t \cdot v) - f(x)}{t} = \inf_{\delta > 0} \sup_{0 < |t| < \delta} \frac{f(x + t \cdot v) - f(x)}{t}.$$

Obsérvese que la función $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \frac{f(x+t \cdot v) - f(x)}{t} \in \mathbb{R}$ es continua y, por tanto, medible Borel. Dado $\delta > 0$, escribimos $\mathbb{Q} \cap (-\delta, \delta) \setminus \{0\} := \left\{t_m^\delta\right\}_{m \in \mathbb{N}}$. Entonces:

$$\overline{D}_v f(x) = \limsup_{t \to 0} \frac{f(x + t \cdot v) - f(x)}{t} = \inf_{\delta > 0} \sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{f\left(x + t_m^\delta \cdot v\right) - f(x)}{t_m^\delta}.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$, sea $f_m^\delta : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por:

$$f_m^\delta(x) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{f\left(x + t_m^\delta \cdot v\right) - f(x)}{t_m^\delta}.$$

Sabemos que f_m^δ es medible Borel para todo $m \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \overline{D}_v f(x) = \inf_{\delta > 0} f_n^\delta(x) \geq \alpha & \\ \Leftrightarrow \forall \delta > 0, f_m^\delta(x) \geq \alpha & \\ \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f_m^{1/n}(x) \geq \alpha. & \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\left\{\overline{D}_v f \geq \alpha\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{f_m^{1/n} \geq \alpha\right\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}.$$

En conclusión, $\overline{D}_v f$ es medible Borel. $\square$

Teorema 2.7 (Teorema de Rademacher). Sean $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}^l$ una función localmente Lipschitz. Entonces f es diferenciable (en el sentido clásico) en m_d-casi todo U.

Demostración. En primer lugar, podemos suponer que f es Lipschitz en $\mathbb{R}^d$, pues, como la diferenciabilidad es una propiedad local, dado $x \in \mathbb{R}^d$, podemos demostrar la diferenciabilidad en m_d-casi todo un entorno abierto de x relativamente compacto de U y extendemos f desde ese entorno a todo $\mathbb{R}^d$ como una función Lipschitz por el Lema 2.4. Además, basta suponer que $m = 1$.

Fijemos $v \in \mathbb{R}^d$ con $|v| = 1$. Definiendo $\overline{D}_v f$ y $\underline{D}_v f$ como en el Lema 2.5, sabemos que ambas funciones son medibles Borel. Consideremos el siguiente conjunto:

$$A_v = \left\{x \in \mathbb{R}^d \middle| \underline{D}_v f(x) < \overline{D}_v f(x)\right\} \cup \left\{\overline{D}_v f = \pm\infty\right\} \cup \left\{\underline{D}_v f = \pm\infty\right\}.$$

Claramente, $A_v \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$. Queremos probar que $m_d(A_v) = 0$. Fijado $x \in \mathbb{R}^d$, definimos $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(x + t \cdot v) \in \mathbb{R}$. Es fácil ver que φ es absolutamente continua y, en consecuencia, es diferenciable en m_d-casi todo $\mathbb{R}$. Además, $\varphi'(t) = Df_v(x + t \cdot v)$ para m_d-casi todo $t \in \mathbb{R}$. Sea r una recta en la dirección de v. Entonces $\mathcal{H}^1(A_v \cap r) = 0$. Por el Teorema de Fubini, deducimos que $m_d(A_v) = 0$. En consecuencia, para m_d-casi todo $x \in \mathbb{R}^d$, existe el gradiente de f:

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_d}(x)\right).$$

Dado $x \notin A_v$, sea:

$$D_v f(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t \cdot v) - f(x)}{t}.$$

Definimos $D_v f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ como antes en $\mathbb{R}^d \setminus A_v$ y 0 en A_v. Vamos a demostrar que para m_d-casi todo $x \in \mathbb{R}^d$, $D_v f(x) = Df(x) \cdot v$. Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(x + t \cdot v) - f(x)}{t} \cdot \varphi(x) \, dm_d(x) \overset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \cdot \frac{\varphi(x - t \cdot v) - \varphi(x)}{t} \, dm_d(x),$$

donde en $(*)$ estamos dividiendo la integral en dos partes, luego aplicamos a la primera el cambio de variable $x + t \cdot v = z$ y por último reunimos ambos términos en uno. Como f y φ son Lipschitz, y φ tiene soporte compacto, podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada y obtener:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} D_v f(x) \cdot \varphi(x)\ dm_d(x) &= -\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \cdot D_v \varphi(x)\ dm_d(x) \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \cdot D\varphi(x) \cdot v\, dm_d(x) \\
&= -\sum_{i=1}^{d} v_i \cdot \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\ dm_d(x) \\
&\overset{(**)}{=} \sum_{i=1}^{d} v_i \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \varphi(x)\ dm_d(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (Df(x) \cdot v) \cdot \varphi(x)\ dm_d(x),
\end{aligned}
$$

donde estamos utilizando el Teorema de Fubini y que f es absolutamente continua sobre rectas paralelas a los ejes. Por el Teorema Fundamental del Cálculo Variacional, se tiene que $D_v f(x) = Df(x) \cdot v$ para m_d-casi todo $x \in \mathbb{R}^d$.

Sea $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \partial B(0,1)$ un conjunto denso de $\partial B(0,1)$. Definimos:

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \middle| D_{v_n} f(x) \text{ y } Df(x) \text{ existen y } D_{v_n} f(x) = Df(x) \cdot v_n \right\}$$

y sea $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Obsérvese que A es medible ya que $m_d\left(\mathbb{R}^d \setminus A\right) = 0$. Probemos que f es diferenciable en cada punto $x \in A$.

Fijemos $x \in A$. Dados $v \in \partial B(0,1)$ y $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, escribimos:

$$Q(x,v,t) = \frac{f(x + t \cdot v) - f(x)}{t} - Df(x) \cdot v.$$

Si $v' \in \partial B(0,1)$, tenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
|Q(x,v,t) - Q(x,v',t)| &\leq \left| \frac{f(x + t \cdot v) - f(x + t \cdot v')}{t} \right| + |Df(x) \cdot (v - v')| \\
&= (\mathrm{Lip}(f) + |Df(x)|) \cdot |v - v'| \\
&\leq \left(1 + \sqrt{n}\right) \cdot \mathrm{Lip}(f) \cdot |v - v'|.
\end{aligned}
$$

Fijado $\varepsilon > 0$, escogemos $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|v - v_n| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + \sqrt{n}) \cdot \mathrm{Lip}(f)}.$$

Luego, $|Q(x,v,t) - Q(x,v',t)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por otro lado, como $\lim_{t\to 0} Q(x,v_n,t) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \in (-\delta,\delta) \setminus \{0\}$, se tiene que $|Q(x,v_n,t)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto:

$$|Q(x,v,t)| \leq |Q(x,v_n,t) - Q(x,v_n,t)| + |Q(x,v_n,t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall t \in (-\delta,\delta) \setminus \{0\}.$$

Esto prueba que para todo $v \in \partial B(0,1)$, $\text{lím}_{t\to 0} Q(x,v,t) = 0$.

Sean $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{x\}$ y $v = \frac{y-x}{|y-x|}$. Entonces $y = x + t \cdot v$ con $t = |x-y|$ y:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{f(y) - f(x) - Df(x)\cdot(y-x)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t\cdot v) - f(x)}{t} - Df(x)\cdot v \\
&= \lim_{t\to 0} Q(x,v,t) = 0.
\end{aligned}$$

En conclusión, f es diferenciable en x. □

Teorema 2.8. Sean $U \subseteq \mathbb{R}$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}$ una función. Entonces f es igual a una función localmente Lipschitz en m_d-casi todo U si y sólamente si $f \in \mathcal{W}^{1,\infty}_{\text{loc}}(U)$.

Demostración.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $V \Subset U$ abierto. Tenemos que probar que $f \in \mathcal{W}^{1,\infty}(V)$. Podemos suponer que f es Lipschitz localmente en U, ya que la pertenencia a $\mathcal{W}^{1,\infty}_{\text{loc}}(U)$ se conserva por funciones que son iguales en m_d-casi todo. Entonces f es Lipschitz en V y, por tanto, continua en V. Luego, $|f|$ está acotada en $\overline{V}$ y, en consecuencia, $f \in \mathcal{L}^\infty(V)$. Sea $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(V)$ y $W \Subset V$ abierto con $\text{sop}(\varphi) \subseteq W$. Fijado $i \in \mathbb{N}_d$, tenemos que encontrar $g_i \in \mathcal{L}^\infty(V)$ tal que:

$$\int_V f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dm_d = -\int_V g_i \cdot \varphi\, dm_d.$$

Por ser $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(V)$, $\varphi \in \text{Lip}(V)$. Sea $h_0 > 0$ tal que, para todo $h \in (-h_0, h_0)$, se cumpla que $x + h\cdot e_i \in V$ para todo $x \in W$. Si $h \in (-h_0,h_0) \setminus \{0\}$, tenemos lo siguiente:

$$\left| f(x) \cdot \frac{\varphi(x+h\cdot e_i) - \varphi(x)}{h} \right| \leq ||f||_{\infty,V} \cdot \text{Lip}(\varphi) \in \mathcal{L}^1(W), \forall x \in W.$$

Usamos el Teorema de la Convergencia Dominada y nos queda lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_V f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dm_d &= \int_W f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dm_d \\
&= \lim_{h\to 0} \int_W f(x) \cdot \frac{\varphi(x+h\cdot e_i) - \varphi(x)}{h}\, dm_d(x) \\
&= \lim_{h\to 0} \int_W f(x) \cdot \frac{\varphi(x+h\cdot e_i)}{h}\, dm_d(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \lim_{h\to 0} \int_W f(x) \cdot \frac{\varphi(x)}{h}\, dm_d(x) \\
&= \left[\begin{array}{c} z = x + h \cdot e_i \\ dm_d(z) = dm_d(x) \end{array} \right] \\
&= \lim_{h\to 0} \int_W f(z - h \cdot e_i) \cdot \frac{\varphi(z)}{h}\, dm_d(z) \\
&- \lim_{h\to 0} \int_W f(x) \cdot \frac{\varphi(x)}{h}\, dm_d(x) \\
&= \lim_{h\to 0} \int_W \frac{f(x - h \cdot e_i) - f(x)}{h} \cdot \varphi(x)\; dm_d(x).
\end{aligned}
$$

Por el Teorema de Rademacher, existe $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ en $V \setminus N$ con $m_d^*(N) = 0$. Sea $g : V \to \mathbb{R}$ dada por:

$$
g_i(x) = \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) & \text{si } x \notin N. \\ 0 & \text{si } x \in N. \end{cases}
$$

Para todo $x \in V \setminus N$, tenemos que:

$$
|g_i(x)| = \lim_{h\to 0} \left| \frac{f(x + h \cdot e_i) - f(x)}{h} \right| \leq \operatorname{Lip}\left(f|_V\right).
$$

En general, $|g_i(x)| \leq \operatorname{Lip}\left(f|_V\right)$ para todo $x \in V$. Por tanto, $g_i \in \mathcal{L}^\infty(V)$.

Por otro lado, para todo $h \in (-h_0, h_0) \setminus \{0\}$, se tiene que:

$$
\left| \frac{f(x - h \cdot e_i) - f(x)}{h} \cdot \varphi(x) \right| \leq \operatorname{Lip}\left(f|_V\right) \cdot ||\varphi||_{\infty,V} \in \mathcal{L}^1(W), \forall x \in W.
$$

Utilizando otra vez el Teorema de la Convergencia Dominada, nos queda que:

$$
\int_V f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dm_d = - \int_V g_i \cdot \varphi\, dm_d.
$$

Por tanto, $f \in \mathcal{W}^{1,\infty}(V)$. En consecuencia, $f \in \mathcal{W}^{1,\infty}_{\text{loc}}(U)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Fijemos una bola cerrada $B \subseteq U$. Tenemos que probar que f es igual en m_d-casi todo U a una función localmente Lipschitz en B. Sea $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B \subseteq U(\varepsilon_0)$. Entonces, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(B)$. Dados $x, y \in B$, tenemos que:

$$
f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y) = \int_0^1 Df_\varepsilon(t \cdot x + (1-t) \cdot y)\; dt \cdot (x - y).
$$

Por el apartado (e) del Teorema 2.4, sabemos que $Df_\varepsilon = (Df)_\varepsilon$. Sean $x \in B$ e $i \in \mathbb{N}_d$. Entonces:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f_\varepsilon (x)}{\partial x_i}\right| &= \left|\int_{B(0,1)} \eta (z) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} (x - \varepsilon \cdot z) \ dm_d (z)\right| \\ &\leq \left|\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\right|_{\infty, B(x,\varepsilon)} \cdot \int_{B(0,1)} \eta (z) \ dm_d (z) = \left|\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\right|_{\infty, B(x,\varepsilon)} \\ &\leq \left|\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\right|_{\infty, B(x,\varepsilon_0)} \leq \left|\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\right|_{\infty, B_{\varepsilon_0}} =: M \in [0, +\infty] ,\end{aligned}$$

donde $B_{\varepsilon_0} = \bigcup_{x \in B} B (x, \varepsilon_0) \Subset U (\varepsilon_0)$. Como B_{ε_0} es compacto, se tiene que $M < +\infty$.

Esto demuestra que:

$$\sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} ||Df_\varepsilon||_{\infty, B} < +\infty.$$

Entonces existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $x, y \in B$, se cumple:

$$|f_\varepsilon (x) - f_\varepsilon (y)| \leq C \cdot |x - y| .$$

Entonces, dados $x, y \in B$ puntos de Lebesgue de f, tomamos límites cuando $\varepsilon \to 0^+$ y concluimos que:

$$|f (x) - f (y)| \leq C \cdot |x - y| .$$

Sean L el conjunto de puntos de Lebesgue de f en U y $g_B : B \to \mathbb{R}$ la extensión Lipschitziana de $f|_{L \cap B}$ a B. Definimos $g : U \to \mathbb{R}$ tal que $g|_B = g_B$ para toda bola cerrada $B \subseteq U$. Se tiene que g está bien definida, pues si $B_1, B_2 \subseteq U$ son bolas cerradas tales que $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$, entonces $g_{B_1} = g_{B_2} = f$ en m_d-casi todo $B_1 \cap B_2$. Por continuidad, $g_{B_1} = g_{B_2}$ en $B_1 \cap B_2$. Nótese que $g \in \mathrm{Lip}(B)$ para toda bola cerrada $B \subseteq U$ y, por tanto, $g \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(U)$. Como $f = g$ en m_d-casi todo U, tenemos el resultado.

□

2.3. El espacio $BV(U)$

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto y $f \in \mathcal{W}^{1,1}(U)$. Entonces, para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^1 \left(U, \mathbb{R}^d\right)$, se tiene que:

$$\int_U f \cdot \mathrm{div} (\varphi) \ dm_d = - \int_U Df \cdot \varphi \, dm_d = - \int_U \varphi \, [Df],$$

donde $[Df] = m_d \llcorner Df$ es la medida vectorial en $\mathcal{B}_U$ con densidad Df respecto de m_d. Si $||\varphi||_{\infty,U} \leq 1$, entonces:

$$\int_U f \cdot \operatorname{div}(\varphi)\, dm_d \leq \left| \int_U Df \cdot \varphi \, dm_d \right| \leq \int_U |Df| \cdot |\varphi|\, dm_d \leq \int_U |Df|\, dm_d < +\infty.$$

El supremo de los valores $\int_U f \cdot \operatorname{div}(\varphi)\, dm_d$ con $\varphi \in \mathcal{C}_c^1\left(U, \mathbb{R}^d\right)$ y $||\varphi||_{\infty,U} \leq 1$ es finito. Este supremo lo vamos a conocer como variación y nos permitirá generalizar el concepto de funciones de variación acotada en $\mathbb{R}^d$.

Definición 2.6. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto y $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(U)$. Definimos la variación de f en U como sigue:

$$V_U(f) = \sup \left\{ \int_U f \cdot \operatorname{div}(\varphi)\, dm_d \middle| \varphi \in \mathcal{C}_c^1(U), ||\varphi||_{\infty,U} \leq 1 \right\} \in [0, +\infty].$$

Definición 2.7. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto y $f \in \mathcal{L}^1(U)$. Diremos que f es de variación acotada en U si $V_U(f) < +\infty$. Denotaremos por $BV(U)$ al conjunto de funciones de variación acotada en U.

Definición 2.8. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto y $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(U)$. Diremos que f es de variación acotada localmente en U si $f \in BV(V)$ para todo $V \Subset U$ abierto. Denotaremos por $BV_{\mathrm{loc}}(U)$ al conjunto de funciones de variación acotada loclamente en U.

El Teorema de Representación de Riesz (véase [9, Teorema 4.14] para una demostración) nos ayudará en el Teorema de Estructura para funciones de BV_{loc} a entender que la derivada de estas funciones en el sentido de las distribuciones se comportará como una medida vectorial Radon.

Teorema 2.9 (Teorema de Representación de Riesz). Sean X un espacio topológico Hausdorff localmente compacto y $L : \mathcal{C}_c\left(X, \mathbb{R}^l\right) \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal que verifica lo siguiente:

$$\sup \left\{ L(\varphi) \middle| \varphi \in \mathcal{C}_c\left(X, \mathbb{R}^l\right), ||\varphi||_{\infty,X} \leq 1, \operatorname{sop}(\varphi) \subseteq K \right\} < +\infty,$$

para todo $K \subseteq X$ compacto. Entonces existe una medida Radon $\mu : \mathcal{B}_X \to [0, +\infty]$ y una aplicación medible $\sigma : X \to \mathbb{R}^l$ con $|\sigma| = 1$ en X tal que:

$$L(\varphi) = \int_X \varphi \cdot \sigma \, d\mu, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c\left(X, \mathbb{R}^l\right).$$

Además, μ y σ (salvo conjuntos de medida nula) son únicas.

Teorema 2.10 (Teorema de Estructura para funciones de BV_{loc}). Sean $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto y $f \in BV_{\mathrm{loc}}(U)$. Entonces existe una medida Radon $\mu : \mathcal{B}_U \to [0, +\infty]$ y una aplicación medible $\sigma : U \to \mathbb{R}^d$ con $|\sigma| = 1$ en $\mathbb{R}^d$ tal que:

$$\int_U f \cdot \operatorname{div}(\varphi)\ dm_d = -\int_U \varphi \cdot \sigma\, d\mu, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1\left(U, \mathbb{R}^d\right).$$

Demostración. Consideremos la aplicación lineal $L : \mathcal{C}_c^1\left(U, \mathbb{R}^d\right) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$L(\varphi) = -\int_U f \cdot \operatorname{div}(\varphi)\ dm_d.$$

Sea $V \Subset U$ abierto. Entonces, para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^1\left(U, \mathbb{R}^d\right)$ con $||\varphi||_{\infty,U} \leq 1$ y $\operatorname{sop}(\varphi) \subseteq V$, se cumple que:

$$-L(\varphi) = \int_U f \cdot \operatorname{div}(\varphi)\ dm_d = \int_V f \cdot \operatorname{div}(\varphi)\ dm_d \leq V_V(f).$$

$$L(\varphi) = -L(-\varphi) = \int_U f \cdot \operatorname{div}(-\varphi)\ dm_d = \int_V f \cdot \operatorname{div}(-\varphi)\ dm_d \leq V_V(f).$$

Luego, para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^1\left(U, \mathbb{R}^d\right)$ con $||\varphi||_{\infty,U} \leq 1$ y $\operatorname{sop}(\varphi) \subseteq V$, se tiene que:

$$|L(\varphi)| \leq C(V),$$

donde $C(V) > V_V(f)$ es una constante fija cualquiera. Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^1\left(U, \mathbb{R}^d\right) \setminus \{0\}$ con $\operatorname{sop}(\varphi) \subseteq V$. Aplicando la desigualdad anterior a $\frac{\varphi}{||\varphi||_{\infty,U}}$ y usando la linealidad de L, se obtiene lo siguiente:

$$|L(\varphi)| \leq C(V) \cdot ||\varphi||_{\infty,U}.$$

Sean $K \subseteq U$ compacto, $\varphi \in \mathcal{C}_c\left(U, \mathbb{R}^d\right)$ y $V \Subset U$ abierto tal que $\operatorname{sop}(\varphi) \subseteq K \subseteq V$. Entonces, usando el Corolario 2.2, existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_c^1\left(U, \mathbb{R}^d\right)$ con $\operatorname{sop}(\varphi_n) \subseteq V$ para todo $n \in \mathbb{N}$ convergente a φ en $\left(\mathcal{C}_c\left(U, \mathbb{R}^d\right), ||\cdot||_{\infty,U}\right)$. Veamos que $\{L(\varphi_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Usando la desigualdad anterior, para todo $n, m \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$|L(\varphi_n) - L(\varphi_m)| = |L(\varphi_n - \varphi_m)| \leq C(V) \cdot ||\varphi_n - \varphi_m||_{\infty,U},$$

donde estamos utilizando que $\varphi_n - \varphi_m \in \mathcal{C}_c^1\left(U, \mathbb{R}^d\right)$ y $\operatorname{sop}(\varphi_n - \varphi_m) \subseteq V$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Fijado $\varepsilon > 0$, sea $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $n, m \geq n_0$, se cumpla que $||\varphi_n - \varphi_m||_{\infty,U} < \frac{\varepsilon}{C(V)}$. Entonces, para todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $n, m \geq n_0$, se tiene que:

$$|L(\varphi_n) - L(\varphi_m)| < \varepsilon.$$

Como $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es un espacio de Banach, existe $\overline{L}(\varphi) \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\overline{L}(\varphi) = \lim_{n\to\infty} L(\varphi_n).$$

Veamos que $\overline{L}(\varphi)$ no depende de la sucesión escogida. Sea $\{\varphi'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_c^1(U, \mathbb{R}^d)$ otra sucesión con $\operatorname{sop}(\varphi'_n) \subseteq V$ para todo $n \in \mathbb{N}$ convergente a φ en $\left(\mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^d), ||\cdot||_{\infty,U}\right)$. Denotemos por $\widehat{L}(\varphi) = \lim_{n\to\infty} L(\varphi'_n) \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned}\left|\overline{L}(\varphi) - \widehat{L}(\varphi)\right| &= \lim_{n\to\infty} |L(\varphi_n) - L(\varphi'_n)| = \lim_{n\to\infty} |L(\varphi_n - \varphi'_n)| \\ &\leq C(V) \cdot \lim_{n\to\infty} ||\varphi_n - \varphi'_n||_{\infty,U} = 0.\end{aligned}$$

Por tanto, $\overline{L}(\varphi) = \widehat{L}(\varphi)$.

Obsérvese lo siguiente:

$$\left|\overline{L}(\varphi)\right| = \lim_{n\to\infty} |L(\varphi_n)| \leq C(V) \cdot \lim_{n\to\infty} ||\varphi_n||_{\infty,U} = C(V) \cdot ||\varphi||_{\infty,U}.$$

En consecuencia, para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^d)$ con $||\varphi||_{\infty,U} \leq 1$ y $\operatorname{sop}(\varphi) \subseteq K$, se verifica que $\left|\overline{L}(\varphi)\right| \leq C(V)$ y, por tanto:

$$\sup\left\{L(\varphi) \middle| \varphi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}^l), ||\varphi||_{\infty,U} \leq 1, \operatorname{sop}(\varphi) \subseteq K\right\} < +\infty.$$

Consideremos la aplicación $\overline{L} : \varphi \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^d) \mapsto \overline{L}(\varphi) \in \mathbb{R}$. Probemos que $\overline{L}$ es lineal. Sean $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^d)$, $K \subseteq U$ compacto, $V \Subset U$ abierto tales que $\operatorname{sop}(\varphi), \operatorname{sop}(\psi) \subseteq K \subseteq V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sean $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_c^1(U, \mathbb{R}^d)$ sucesiones con $\operatorname{sop}(\varphi_n), \operatorname{sop}(\psi_n) \subseteq V$ para todo $n \in \mathbb{N}$ convergentes a φ y ψ respectivamente en $\left(\mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^d), ||\cdot||_\infty\right)$. Entonces la sucesión $\{\alpha \cdot \varphi_n + \beta \cdot \psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\alpha \cdot \varphi + \beta \cdot \psi$ en $\left(\mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^d), ||\cdot||_\infty\right)$. Sea $x \notin K$. Entonces $x \notin \operatorname{sop}(\varphi_n) \cup \operatorname{sop}(\psi_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $\varphi_n(x) = \psi_n(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, $\operatorname{sop}(\alpha \cdot \varphi_n + \beta \cdot \psi_n) \subseteq K \subseteq V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia:

$$\begin{aligned}\overline{L}(\alpha \cdot \varphi + \beta \cdot \psi) &= \lim_{n\to\infty} L(\alpha \cdot \varphi_n + \beta \cdot \psi_n) = \lim_{n\to\infty} (\alpha \cdot L(\varphi_n) + \beta \cdot L(\psi_n)) \\ &= \alpha \cdot \overline{L}(\varphi) + \beta \cdot \overline{L}(\psi).\end{aligned}$$

Por tanto, $\overline{L}$ es lineal. Basta usar el Teorema de Representación de Riesz. □

En las condiciones del teorema anterior, denotaremos por $||Df|| := \mu$ a la medida de variación de f. Por la construcción de $||Df||$ en el Teorema de Representación de Riesz, es fácil ver que:

$$||Df||(V) = \sup\left\{\int_V f \cdot \operatorname{div}(\varphi)\, dm_d \middle| \varphi \in \mathcal{C}_c^1(V), ||\varphi||_{\infty,V} \leq 1\right\},$$

para todo $V \subseteq U$ abierto, es decir, $||Df||(V) = V_V(f)$ para todo $V \subseteq U$ abierto. Por tanto, como $f \in BV_{\text{loc}}(U)$, entonces $||Df||$ es una medida finita sobre $\mathcal{B}_V$ para todo $V \Subset U$ abierto. Más aún, si $f \in BV(U)$, entonces $||Df||$ es una medida finita sobre $\mathcal{B}_U$.

Definiremos $||\cdot||_{BV(U)} : BV(U) \to [0, +\infty)$ como sigue:

$$||f||_{BV(U)} = ||f||_{1,U} + ||Df||(U).$$

Definición 2.9. Una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq BV(U)$ converge a $f \in BV(U)$ en $BV(U)$ si $||f_n - f||_{BV(U)} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

Definición 2.10. Una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq BV(U)$ converge a $f \in BV_{\text{loc}}(U)$ en $BV(U)$ si, para todo $V \Subset U$ abierto, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $BV(V)$.

Fijemos $V \Subset U$ abierto. Denotemos por $[Df] := ||Df|| \llcorner \sigma$ a la medida vectorial con densidad σ respecto de $||Df||$ sobre $(V, \mathcal{B}_V)$. Sea $\mu^i = ||Df|| \llcorner \sigma^i$ para todo $i \in \mathbb{N}_d$. Entonces $[Df] = \left(\mu^1, ..., \mu^d\right)$. Para cada $i \in \mathbb{N}_d$, por el Teorema de Descomposición de Lebesgue aplicado al espacio de medida $(V, \mathcal{B}_V, m_d)$ y a la medida real μ^i sobre $(V, \mathcal{B}_V)$, deducimos que existe un único par de medidas reales μ^i_{ac} y μ^i_{sing} sobre $(V, \mathcal{B}_V)$ tales que:

$$\mu^i = \mu^i_{\text{ac}} + \mu^i_{\text{sing}}, \qquad \mu^i_{\text{ac}} \ll m_d, \qquad \mu^i_{\text{sing}} \perp m_d.$$

Ahora, aplicamos el Teorema de Radon-Nikodym para medidas reales deduciéndose que existe una función $f_i \in \mathcal{L}^1(V)$ (única salvo conjuntos de medida nula) tal que $\mu^i_{\text{ac}} = m_d \llcorner f_i$. Consideremos la siguiente notación:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := f_i, \forall i \in \mathbb{N}_d,$$

$$Df := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_d}\right),$$

$$[Df]_{\text{ac}} := \left(\mu^1_{\text{ac}}, ..., \mu^d_{\text{ac}}\right) = m_d \llcorner Df,$$

$$[Df]_{\text{sing}} := \left(\mu^1_{\text{sing}}, ..., \mu^d_{\text{sing}}\right).$$

Luego, $[Df] = [Df]_{\text{ac}} + [Df]_{\text{sing}} = m_d \llcorner Df + [Df]_{\text{sing}}$, donde $Df \in \left[\mathcal{L}^1(V)\right]^d$ es la función vectorial de densidad de la parte absolutamente continua de $[Df]$.

El mismo razonamiento se puede hacer cuando $f \in BV(U)$ sustituyendo V por U.

Ejemplo 2.1. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto y $f \in \mathcal{W}^{1,1}_{\text{loc}}(U)$. Entonces, para todo $V \Subset U$ abierto y $\varphi \in \mathcal{C}^1_c\left(V, \mathbb{R}^d\right)$ con $||\varphi||_{\infty,V} \leq 1$, se tiene que:

$$\int_V f \cdot \operatorname{div}(\varphi)\, dm_d = -\int_V Df \cdot \varphi\, dm_d \leq \int_V |Df \cdot \varphi|\, dm_d \leq \int_V |Df|\, dm_d < +\infty.$$

Tomando el supremo en $\varphi \in \mathcal{C}^1_c\left(V, \mathbb{R}^d\right)$ con $||\varphi||_{\infty,V} \leq 1$, se tiene que $V_V(f) < +\infty$. Por tanto, $f \in BV_{\text{loc}}(U)$.

Sean $||Df|| = m_d \llcorner\ |Df|$ y $\sigma : U \to \mathbb{R}^d$ está definida como sigue:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \dfrac{Df(x)}{|Df(x)|} & \text{si } Df(x) \neq 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Entonces:

$$\int_V f \cdot \operatorname{div}(\varphi)\, dm_d = -\int_V Df \cdot \varphi\, dm_d = -\int_V \varphi \cdot \sigma\, d\,||Df||.$$

Esto prueba que $\mathcal{W}^{1,1}_{\text{loc}}(U) \subseteq BV_{\text{loc}}(U)$. Además, como para todo $p \in (1, +\infty]$, sabemos que $\mathcal{W}^{1,p}_{\text{loc}}(U) \subseteq \mathcal{W}^{1,1}_{\text{loc}}(U)$, se tiene que:

$$\mathcal{W}^{1,p}_{\text{loc}}(U) \subseteq BV_{\text{loc}}(U), \forall p \in [1, +\infty].$$

Análogamente, se demuestra que $\mathcal{W}^{1,1}(U) \subseteq BV(U)$.

2.3.1. Aproximación Local por Funciones Suaves en $BV(U)$

Al igual que hicimos para el caso de las funciones de $\mathcal{W}^{1,p}(U)$ con $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto en el Teorema 2.6, queremos demostrar que toda función de $BV(U)$ se puede escribir como límite de funciones infinitamente diferenciables de $BV(U)$. Antes de pasar al teorema, vamos a probar dos resultado previos que utilizaremos.

Teorema 2.11 (Semicontinuidad Inferior de la Medida de Variación). Sean $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(U)$ una sucesión convergente a $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(U)$ en $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(U)$. Entonces:

$$||Df||(U) \leq \liminf_{n\to\infty} ||Df_n||(U).$$

Demostración. Si $\liminf_{n\to\infty} ||Df_n||(U) = +\infty$, entonces la desigualdad es trivial. Supongamos que $\liminf_{n\to\infty} ||Df_n||(X) < +\infty$. Sin pérdida de generalidad, tomando subsucesiones si es necesario, podemos suponer lo siguiente:

$$\liminf_{n\to\infty} ||Df_n||\,(X) = \limsup_{n\to\infty} ||Df_n||\,(X) = \lim_{n\to\infty} ||Df_n||\,(X),$$

Entonces $||Df_n||\,(X) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^1\left(U, \mathbb{R}^d\right)$ con $||\varphi||_{\infty,U} \leq 1$. Luego:

$$\begin{aligned}\int_U f \cdot \operatorname{div}(\varphi)\; dm_d &= \lim_{n\to\infty} \int_U f_n \cdot \operatorname{div}(\varphi)\; dm_d = \liminf_{n\to\infty} \overbrace{\int_U f_n \cdot \operatorname{div}(\varphi)\; dm_d}^{\leq ||Df_n||(U)} \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} ||Df_n||\,(U).\end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned}||Df||\,(U) &= \sup\left\{\int_U f \cdot \operatorname{div}(\varphi)\; dm_d \middle| \varphi \in \mathcal{C}_c^1\left(U, \mathbb{R}^d\right), |\varphi| \leq 1 \text{ en } U\right\} \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} ||Df_n||\,(U).\end{aligned}$$

□

Para el siguiente teorema, conviene recordar de la Sección 2.2.2 la notación de f_ε para $\varepsilon > 0$ y una función $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(U)$ con $U \subseteq \mathbb{R}^d$. Antes de enunciar el teorema, vamos a probar un lema que utilizaremos en varias ocasiones durante la demostración.

Lema 2.6. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto y $f, g \in \mathcal{L}^1(U)$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, se tiene:

$$\int_U f_\varepsilon \cdot g\, dm_d = \int_U f \cdot g_\varepsilon\, dm_d.$$

Demostración. Fijado $\varepsilon > 0$, se tiene:

$$\begin{aligned}\int_U f_\varepsilon \cdot g\, dm_d &= \int_U \int_U \eta_\varepsilon(x-y) \cdot f(y)\; dm_d(y) \cdot g(x)\; dm_d(x) \\ &= \int_U \int_U \eta_\varepsilon(x-y) \cdot f(y) \cdot g(x)\; dm_d(y)\, dm_d(x) \\ &\overset{(*)}{=} \int_U \int_U \eta_\varepsilon(y-x) \cdot g(x) \cdot f(y)\; dm_d(x)\, dm_d(y) \\ &= \int_U f(y) \cdot \int_U \eta_\varepsilon(y-x) \cdot g(x)\; dm_d(x)\, dm_d(y) \\ &= \int_U f \cdot g_\varepsilon\, dm_d,\end{aligned}$$

donde $(*)$ se tiene como consecuencia del Teorema de Tonelli. □

Teorema 2.12 (Teorema de Aproximación Local por Funciones Suaves). Sean $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto y $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(U)$. Entonces existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}^\infty(U)$ tal que:

(a) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(U)$.

(b) $\lim_{n\to\infty} ||Df_n||(U) = ||Df||(U)$.

Si $f \in BV(U)$, podemos conseguir que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq BV(U)$ y que la convergencia de (a) sea en $\mathcal{L}^1(U)$.

Demostración. Si $||Df||(U) = +\infty$, el resultado es consecuencia directa del Corolario 2.1 y el Teorema 2.11.

Supongamos entonces que $f \in BV(U)$, es decir, $||Df||(U) < +\infty$. Para cada $n, m \in \mathbb{N}$, definimos el siguiente conjunto:

$$U_{n,m} = U(1/(n+m)) \cap B(0, n+m).$$

Observemos que $U = \bigcup_{m=1}^\infty U_{1,m}$ y $U_{1,m} \subseteq U_{1,m+1}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por ser $||Df||$ una medida Radon finita, entonces $||Df||(U \setminus U_{1,m}) < +\infty$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y, en consecuencia:

$$0 = ||Df||(\varnothing) = \lim_{m\to\infty} ||Df||(U \setminus U_{1,m}).$$

Fijado $\varepsilon > 0$, sea $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||Df||(U \setminus U_{1,m_0}) < \varepsilon$. Sea $U_0 = \varnothing$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $U_n = U_{n,m_0}$ y $V_n = U_{n+1} \setminus \overline{U_{n-1}}$. De manera análoga al Teorema 2.2.2, se puede probar que $U = \bigcup_{n=1}^\infty V_n$ y que los abiertos de la colección $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son disjuntos tres a tres y si dos abiertos tienen intersección no vacía, entonces sus índices son consecutivos.

Consideremos una partición de la unidad para U con funciones $\mathcal{C}^\infty$ subordinada a $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, esto es, una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}^\infty_c(U)$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $\operatorname{sop}(\varphi_n) \subseteq V_n$, $0 \leq \varphi_n \leq 1$ en U y $\sum_{n=1}^\infty \varphi_n = 1$ en U.

Usando el Teorema 2.4 y el Lema 2.3, fijado $\varepsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\varepsilon_n > 0$ tal que $\operatorname{sop}\left((f \cdot \varphi_n)_{\varepsilon_n}\right) \subseteq V_n$ y:

$$\int_U \left|(f \cdot \varphi_n)_{\varepsilon_n} - f \cdot \varphi_n\right| \, dm_d < \frac{\varepsilon}{2^n},$$

$$\sum_{i=1}^d \int_U \left| \left(f \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}\right)_{\varepsilon_n} - f \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \right| dm_d < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Podemos suponer que $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $f^\varepsilon : U \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f^\varepsilon = \sum_{n=1}^\infty (f \cdot \varphi_n)_{\varepsilon_n}.$$

Sabemos que los abiertos de la colección $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son disjuntos tres a tres. Luego, fijado $x \in U$, existe un entorno abierto de x suficientemente pequeño en el que sólo una cantidad finita de términos de la suma anterior son no nulos. Por tanto, f^ε está bien definida. Por el apartado (a) del Teorema 2.4, sabemos que $(f \cdot \varphi_n)_{\varepsilon_n} \in \mathcal{C}^\infty(U(\varepsilon_n), \mathbb{R})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Nosotros sabemos que $\operatorname{sop}\left((f\cdot\varphi_n)_{\varepsilon_n}\right) \subseteq V_n \subseteq U_{n+1} \subseteq U(1/((n+1)+m_0))$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomando $\varepsilon_n > 0$ de forma que $\varepsilon_n < 1/((n+1)+m_0)$ y que se cumpla lo anterior, tenemos que $\operatorname{sop}\left((f\cdot\varphi_n)_{\varepsilon_n}\right) \subseteq U(\varepsilon_n)$ y, por tanto, $(f\cdot\varphi_n)_{\varepsilon_n} \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Por lo que hemos razonado anteriormente, concluimos que $f^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(U) \subseteq \mathcal{W}^{1,1}(U)$.

Además, como para todo $x \in U$, existe un entorno abierto de x suficientemente pequeño en el que los términos de la suma que definen a f^ε son todos nulos excepto una cantidad finita, por lo que los operadores $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ con $i \in \mathbb{N}_d$ y $\sum_{n=1}^\infty$ conmutan. Entonces:

$$\begin{aligned}||f^\varepsilon - f||_{1,U} &= \left|\left|\left(\sum_{n=1}^\infty (f\cdot\varphi_n)_{\varepsilon_n}\right) - \left(\sum_{n=1}^\infty f\cdot\varphi_n\right)\right|\right|_{1,U} \\ &\leq \sum_{n=1}^\infty \left|\left|(f\cdot\varphi_n)_{\varepsilon_n} - f\cdot\varphi_n\right|\right|_{1,U} \leq \varepsilon \overset{\varepsilon\to 0^+}{\to} 0.\end{aligned}$$

Por tanto, $\lim_{\varepsilon\to 0^+} f^\varepsilon = f$ en $\mathcal{L}^1(U)$.

Por el Teorema de Semicontinuidad Inferior de la Medida de Variación, sabemos que $||Df||(U) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0^+} ||Df^\varepsilon||(U)$. Vamos a utilizar la siguiente propiedad:

Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(U, \mathbb{R}^d)$ con $||\varphi||_{\infty,U} \leq 1$. Por el Lema 2.6:

$$\begin{aligned}\int_U f^\varepsilon \cdot \operatorname{div}(\varphi)\, dm_d &\overset{(*)}{=} \sum_{n=1}^\infty \int_U (f\cdot\varphi_n)_{\varepsilon_n} \cdot \operatorname{div}(\varphi)\, dm_d \\ &\overset{(**)}{=} \sum_{n=1}^\infty \int_U f\cdot\varphi_n \cdot \operatorname{div}(\varphi_{\varepsilon_n})\, dm_d \\ &= \sum_{n=1}^\infty \int_U f\cdot \operatorname{div}(\varphi_n\cdot\varphi_{\varepsilon_n})\, dm_d - \sum_{n=1}^\infty \int_U f\cdot D\varphi_n\cdot\varphi_{\varepsilon_n}\, dm_d \\ &\overset{(***)}{=} \overbrace{\sum_{n=1}^\infty \int_U f\cdot \operatorname{div}(\varphi_n\cdot\varphi_{\varepsilon_n})\, dm_d}^{:=I_1^\varepsilon} \\ &\quad \overbrace{-\sum_{n=1}^\infty \int_U \left((f\cdot D\varphi_n)_{\varepsilon_n} - f\cdot D\varphi_n\right)\cdot\varphi\, dm_d}^{:=-I_2^\varepsilon} = I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon.\end{aligned}$$

Tenemos que probar $(*)$, $(**)$ y $(***)$. Para probar $(*)$, sólo tenemos que demostrar que $\sum_{n=n_0}^{\infty}\int_U \left|(f\cdot\varphi_n)_{\varepsilon_n}\cdot \operatorname{div}(\varphi)\right|\, dm_d<+\infty$ para cierto $n_0\in\mathbb{N}$ y aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada. Sea $V\Subset U$ abierto con $\operatorname{sop}(\varphi)\subseteq V$. Entonces existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $V\subseteq U(\varepsilon_n)$ para todo $n\geq n_0$ (por esto, necesitábamos que la sucesión $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fuese decreciente) y, por tanto:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=n_0}^{\infty}\int_U \left|(f\cdot\varphi_n)_{\varepsilon_n}\cdot \operatorname{div}(\varphi)\right|\, dm_d=\sum_{n=n_0}^{\infty}\int_V \left|(f\cdot\varphi_n)_{\varepsilon_n}\cdot \operatorname{div}(\varphi)\right|\, dm_d\\
&\overset{(\star)}{\leq}\|\operatorname{div}(\varphi)\|_{\infty,V}\cdot\int_V\int_U \eta_\varepsilon(x-y)\cdot|f(y)|\cdot\left(\sum_{n=n_0}^{\infty}\varphi_n(y)\right)dm_d(y)\,dm_d(x)\\
&\overset{(\star\star)}{\leq}\|\operatorname{div}(\varphi)\|_{\infty,V}\cdot\int_V |f|_\varepsilon(x)\; dm_d(x)<+\infty,
\end{aligned}
$$

donde en $(\star)$ estamos utilizando el Teorema de Beppo-Levi y en $(\star\star)$ que $0\leq\sum_{n=n_0}^{\infty}\varphi_n\leq\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n=1$.

Por otro lado, $(**)$ es consecuencia del Lema 2.6 y el apartado (d) del Teorema 2.4.

En $(***)$, de nuevo, hemos utilizamos el Lema 2.6 junto al apartado (d) del Teorema 2.4 y hemos añadido el término $-f\cdot D\varphi_n\cdot\varphi$ en la segunda integral ya que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_i}=0$ para todo $i\in\mathbb{N}_d$ y, además, el mismo argumento de intercambio de derivada y serie para f^ε es válido para $1=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n$. Habría que demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}\int_U|f\cdot D\varphi_n\cdot\varphi|\,dm_d<+\infty$ para aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada y poder intercambiar serie e integral. Sea $V\Subset U$ abierto tal que $\operatorname{sop}(\varphi)\subseteq V$. Como V tiene clausura compacta y $U=\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $V\subseteq\bigcup_{n=1}^{N}V_n$. Como los conjuntos V_n son disjuntos tres a tres, necesariamente, existe $M\in\mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty}|D\varphi_n|=\sum_{n=1}^{M}|D\varphi_n|$ en V. Sea $C>0$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty}|D\varphi_n|\leq C$ en V. Entonces:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\int_U|f\cdot D\varphi_n\cdot\varphi|\,dm_d&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_V|f|\cdot|D\varphi_n|\cdot|\varphi|\,dm_d\\
&\leq\|\varphi\|_{V,\infty}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\int_V|f|\cdot|D\varphi_n|\,dm_d\\
&=\|\varphi\|_{V,\infty}\cdot\int_V|f|\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}|D\varphi_n|\right)\cdot\,dm_d\\
&\leq\|\varphi\|_{V,\infty}\cdot C\cdot\|f\|_{1,V}<+\infty.
\end{aligned}
$$

Claramente, para todo $n\in\mathbb{N}$, $\varphi_n\cdot\varphi_{\varepsilon_n}\in\mathcal{C}_c^1\left(U,\mathbb{R}^d\right)$ y $\operatorname{sop}(\varphi_n\cdot\varphi_\varepsilon)\subseteq V_n$. Veamos que $\|\varphi_n\cdot\varphi_{\varepsilon_n}\|_{\infty,U}\leq 1$ para todo $n\in\mathbb{N}$:

$$
|\varphi_n(x)\cdot\varphi_{\varepsilon_n}(x)|\leq|\varphi_n(x)|\cdot\int_{B(0,1)}\eta(z)\cdot|\varphi(x-\varepsilon\cdot z)|\,dm_d(z)
$$

$$\leq \int_{B(0,1)} \eta(z)\, dm_d(z) = 1.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
I_1^{\varepsilon} &\leq ||Df||(U) + \sum_{n=2}^{\infty} ||Df||(V_n) \\
&= ||Df||(U) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(||Df||(V_n \setminus V_{n-1}) + ||Df||(V_n \cap V_{n-1})\right) \\
&= ||Df||(U) + ||Df|| \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} (V_n \setminus V_{n-1})\right) + ||Df|| \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} (V_n \cap V_{n-1})\right) \\
&\leq ||Df||(U) + 2 \cdot ||Df|| \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} V_n\right) \\
&\overset{(\star\star\star)}{\leq} ||Df||(U) + 2 \cdot ||Df||(U \setminus U_1) < ||Df||(U) + 2 \cdot \varepsilon.
\end{aligned}$$

Para probar $(\star\star\star)$, basta con ver que $\bigcup_{n=2}^{\infty} V_n \subseteq U \setminus U_1$. En efecto, si $x \in U_1$, como $U_1 \subseteq U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $V_n + 1 = U_{n+2} \setminus \overline{U}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, necesariamente $x \notin V_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado:

$$\begin{aligned}
I_2^{\varepsilon} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_U \left|(f \cdot D\varphi_n)_{\varepsilon_n} - f \cdot D\varphi_n\right| \cdot |\varphi|\, dm_d \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_U \left|(f \cdot D\varphi_n)_{\varepsilon_n} - f \cdot D\varphi_n\right| dm_d \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{d} \int_U \left| \left(f \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}\right)_{\varepsilon_n} - f \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \right| dm_d \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\int_U f^{\varepsilon} \cdot \operatorname{div}(\varphi)\, dm_d \leq ||Df||(U) + 3 \cdot \varepsilon.$$

Tomando el supremo en las funciones $\varphi \in \mathcal{C}_c^1\left(U, \mathbb{R}^d\right)$ con $||\varphi||_{\infty,U} \leq 1$, tenemos que $||Df^{\varepsilon}||(U) \leq ||Df||(U) + 3 \cdot \varepsilon$. De aquí, tenemos que $\{f^{\varepsilon}\}_{\varepsilon>0} \subseteq BV(U)$. Tomando el límite inferior cuando $\varepsilon \to 0^+$, nos queda que:

$$\liminf_{\varepsilon \to 0^+} ||Df^{\varepsilon}||(U) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0^+} (||Df||(U) + 3 \cdot \varepsilon) = ||Df||(U) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0^+} ||Df^{\varepsilon}||(U).$$

Por tanto, $\liminf_{\varepsilon\to 0^+} ||Df^\varepsilon||(U) = ||Df||(U)$. De aquí, podemos extraer una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{f^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ tal que $\liminf_{\varepsilon\to 0^+} ||Df^\varepsilon||(U) = \lim_{n\to\infty} ||Df_n||(U) = ||Df||(U)$. $\square$

Nota 2.2. Nótese que no hemos probado que $\lim_{n\to\infty} ||D(f_n - f)||(U) = 0$.

Capítulo 3

Funciones de variación acotada en espacios métricos

3.1. Introducción

En espacios métricos, hemos perdido las buenas propiedades que teníamos en $\mathbb{R}^d$. Entre ellas, encontrábamos la regularidad. Si recordamos la definición de variación de una función $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(U)$ donde $U \subseteq \mathbb{R}^d$ es abierto:

$$V_U(f) = \sup \left\{ \int_U f \cdot \operatorname{div}(\varphi)\, dm_d \middle| \varphi \in \mathcal{C}^1_c(U), ||\varphi||_{\infty,U} \leq 1 \right\},$$

nos damos cuenta de que esta depende muy fuertemente de las funciones infinitamente diferenciables. Para definir la variación de una función f en un espacio métrico (X, d), deberemos prescindir de dichas funciones. En su lugar, utilizaremos las funciones Lipschitz localmente y su constante de Lipschitz inferior.

En este contexto, podemos definir un "sustituto" del gradiente: el gradiente superior. Veremos que, bajo ciertas condiciones del espacio métrico, la constante de Lipschitz inferior de una función Lipschitz localmente un gradiente superior de la misma.

El espacio métrico tendrá asignada una medida Borel que deberá verificar unas condiciones con el fin de que las funciones Lipschitz localmente sean densas en el espacio de funciones localmente integrables en el espacio métrico respecto de dicha en medida.

Con todos estos ingredientes, estaremos preparados para definir la variación de una función localmente integrable respecto a la medida que estemos considerando. Para ello, nos basaremos en el Teorema de Aproximación Local por Funciones Suaves del Capítulo 2.

3.2. Primeras definiciones

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto conexo, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ una curva de clase $\mathcal{C}^1$ y $f \in \mathcal{C}^1(U)$. Entonces:

$$\int_\gamma Df\, ds = \int_a^b Df\left(\gamma(t)\right) \cdot \gamma'(t)\; dt = \int_a^b \frac{d\left(f \circ \gamma\right)}{dt}(t)\; dt = f\left(\gamma(b)\right) - f\left(\gamma(a)\right).$$

Tomando valores absolutos, nos queda lo siguiente:

$$\left|f\left(\gamma(b)\right) - f\left(\gamma(a)\right)\right| \leq \int_a^b \left|Df\left(\gamma(t)\right)\right| \cdot \left|\gamma'(t)\right|\; dt = \int_{C_\gamma} |Df|\; ds_\gamma.$$

Esta desigualdad da pie al concepto de gradiente superior.

Definición 3.1. Sean (X,d) un espacio métrico rectificablemente conexo y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Un gradiente superior de f es una función $g : X \to [0,+\infty]$ medible Borel tal que para todo $x,y \in X$ y para toda curva rectificable $\gamma : [a,b] \to X$ en (X,d) con $\gamma(a) = x$ y $\gamma(b) = y$ se verifica:

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_{C_\gamma} g\, ds_\gamma,$$

donde s_γ es la medida de longitud de arco inducida por γ en (X,d).

Para más información sobre s_γ, acuda al Capítulo 1, páginas 9 y 10.

Para la funciones Lipschitz localmente, conocemos gradientes superiores:

Definición 3.2. Sean (X,d) un espacio métrico y $f \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(X)$. Definimos la constante Lipschitz inferior de f como la función $\mathrm{lip}\; f : X \to [0,+\infty)$ dada por:

$$\mathrm{lip}\; f(x) = \liminf_{r \to 0^+} \frac{\sup_{y \in B(x,r)} |f(y) - f(x)|}{r}.$$

Obsérvese que esta función está bien definida, ya que, como $f \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(X)$, fijado $x \in U$, existe $r_0 = r_0(x) > 0$ suficientemente pequeño tal que para todo $r \in (0, r_0)$, $f|_{B(x,r)} \in \mathrm{Lip}\left(B(x,r)\right)$ y, en consecuencia, para todo $r \in (0,r_0)$ se cumple que:

$$\sup_{y \in B(x,r)} |f(y) - f(x)| \leq \sup_{y \in B(x,r)} \mathrm{Lip}\left(f|_{B(x,r)}\right) \cdot d(x,y) \leq \mathrm{Lip}\left(f|_{B(x,r)}\right) \cdot r < +\infty.$$

Para poder trabajar, necesitamos hacer consideraciones geométricas sobre nuestro espacio métrico. Nosotros queremos probar en primer lugar que la constante de Lipschitz inferior para funciones Lipschitz localmente son funciones medibles Borel. Para ello, deberemos imponer una cierta regularidad a las bolas.

Definición 3.3 (**Espacio métrico Menger convexo**)**.** Un espacio métrico (X, d) se dirá Menger convexo (ó métricamente convexo) si verifica:

$$\forall x, y \in X, \forall r, s > 0, d(x, y) < r + s \Leftrightarrow B(x, r) \cap B(y, s) \neq \varnothing.$$

Teorema 3.1. Sean (X, d) un espacio métrico Menger convexo y $f \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(X)$. Entonces $\mathrm{lip}\, f$ es medible Borel.

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha < 0$, es evidente que $\{\mathrm{lip}\, f \leq \alpha\} = \varnothing$. Supongamos que $\alpha \geq 0$. Fijado $x \in X$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathrm{lip}\, f(x) &= \liminf_{r \to 0^+} \frac{\sup_{y \in B(x,r)} |f(y) - f(x)|}{r} \\
&= \sup_{\delta > 0} \inf_{0<r<\delta} \frac{\sup_{y \in B(x,r)} |f(y) - f(x)|}{r} \leq \alpha \\
&\Leftrightarrow \forall \delta > 0, \inf_{0<r<\delta} \frac{\sup_{y \in B(x,r)} |f(y) - f(x)|}{r} \leq \alpha \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \inf_{0<r<\frac{1}{n}} \frac{\sup_{y \in B(x,r)} |f(y) - f(x)|}{r} \leq \alpha
\end{aligned}$$

Como el ínfimo es decreciente en n, la desigualdad basta tenerla a partir de un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$. Tomamos $n_0 = n_0(x) \in \mathbb{N}$ de forma que f es Lipschitz en $B(x, 1/n_0)$. Entonces f es uniformemente continua $B(x, 1/n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$. Fijado $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$, queremos probar lo siguiente:

$$\inf_{0<r<\frac{1}{n}} \frac{\sup_{y \in B(x,r)} |f(y) - f(x)|}{r} = \inf_{\substack{0<r<\frac{1}{n} \\ r \in \mathbb{Q}}} \frac{\sup_{y \in B(x,r)} |f(y) - f(x)|}{r}.$$

Definimos $\widetilde{f} : (0, 1/n) \to [0, +\infty)$ como sigue:

$$\widetilde{f}(r) = \sup_{y \in B(x,r)} |f(y) - f(x)|.$$

Como f es Lipschitz en $B(x, 1/n)$, $\widetilde{f}$ está bien definida, esto es, el supremo siempre va a ser finito. Tenemos que probar que $\widetilde{f}$ es continua. Sea $r_0 \in (0, 1/n)$. Se tiene fácilmente que:

$$\lim_{r \to r_0^-} \widetilde{f}(r) = \sup_{0<r<r_0} \sup_{y \in B(x,r)} |f(y) - f(x)| = \sup_{y \in B(x,r_0)} |f(y) - f(x)| = \widetilde{f}(r_0).$$

Por otro lado:

$$\lim_{r \to r_0^+} \widetilde{f}(r) = \inf_{r_0<r<1/n} \sup_{y \in B(x,r)} |f(y) - f(x)| \geq \sup_{y \in B(x,r_0)} |f(y) - f(x)| = \widetilde{f}(r_0).$$

Tenemos que probar la desigualdad $\leq$. Como f es uniformemente continua en $B\left(x,1/n\right)$, fijado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que para todo $y,z\in B\left(x,1/n\right)$ con $d\left(y,z\right)<\delta$, entonces $\left|f\left(y\right)-f\left(z\right)\right|<\varepsilon$.

Para $r\in\left(r_0,1/n\right)$, dados $y\in B\left(x,r\right)$ y $z\in B\left(x,r_0\right)$, se tiene:

$$\left|f\left(y\right)-f\left(x\right)\right|\leq\left|f\left(y\right)-f\left(z\right)\right|+\left|f\left(z\right)-f\left(x\right)\right|\leq\widetilde{f}\left(r_0\right)+\left|f\left(y\right)-f\left(z\right)\right|.$$

Buscamos $r\in\left(r_0,1/n\right)$ suficientemente cercano a r_0 tal que para cada $y\in B\left(x,r\right)$ exista $z\in B\left(x,r_0\right)$ de forma que $d\left(y,z\right)<\delta$, esto es, $B\left(y,\delta\right)\cap B\left(x,r_0\right)\neq\varnothing$ y, como $\left(X,d\right)$ es un espacio métrico Menger convexo, lo anterior equivale a que $d\left(y,x\right)<\delta+r_0$. En general, fijado $y\in B\left(x,r\right)$, se tiene que $d\left(y,x\right)\leq r=r-r_0+r_0$. Basta tomar $r\in\left(r_0,\text{mín}\left\{1/n,\delta\right\}\right)$. Esto prueba que $\text{lím}_{r\to r_0^-}\widetilde{f}\left(r\right)=\widetilde{f}\left(r_0\right)$. Por tanto, $\widetilde{f}$ es continua.

Dado $n\in\mathbb{N}$, sea $\left\{r_k^n\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ una enumeración de $\left(0,1/n\right)\cap\mathbb{Q}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
&\text{lip}\, f\left(x\right)\leq\alpha\\
&\qquad\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ \inf_{\substack{0<r<\frac{1}{n}\\ r\in\mathbb{Q}}}\frac{\sup_{y\in B\left(x,r\right)}\left|f\left(y\right)-f\left(x\right)\right|}{r}\leq\alpha\\
&\qquad\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N},\forall m\in\mathbb{N},\exists k\in\mathbb{N}|\frac{\sup_{y\in B\left(x,r_k^n\right)}\left|f\left(y\right)-f\left(x\right)\right|}{r_k^n}<\overbrace{\alpha+\frac{1}{m}}^{=:\alpha_m}\\
&\qquad\Leftrightarrow\forall n,m\in\mathbb{N},\exists k\in\mathbb{N}|\sup_{y\in B\left(x,r_k^n\right)}\left|f\left(y\right)-f\left(x\right)\right|<\overbrace{\alpha_m\cdot r_k^n}^{=:\alpha_{m,k}^n}\\
&\qquad\Leftrightarrow\forall n,m\in\mathbb{N},\exists k,l\in\mathbb{N}|\forall y\in B\left(x,r_k^n\right),\left|f\left(y\right)-f\left(x\right)\right|\leq\overbrace{\alpha_{m,k}^n-\frac{1}{l}}^{=:\alpha_{m,k,l}^n}.
\end{aligned}$$

Sean $x\in X$ y $n,m,k,l\in\mathbb{N}$ fixed. Entonces $\left|f\left(y\right)-f\left(x\right)\right|\leq\alpha_{m,k,l}^n$ para todo $y\in B\left(x,r_k^n\right)$ si y sólamente si $f\left(y\right)-f\left(x\right),f\left(x\right)-f\left(y\right)\leq\alpha_{m,l,k}^n$ lo que equivale a que $\sup_{y\in B\left(x,r_k^n\right)}f\left(y\right)-f\left(x\right),f\left(x\right)-\text{ínf}_{y\in B\left(x,r_k^n\right)}f\left(y\right)\leq\alpha_{m,l,k}^n$. Para cada $n,k\in\mathbb{N}$, definimos $g_{n,k},h_{n,k}:X\to[0,+\infty]$ como sigue:

$$g_{n,k}\left(x\right)=\sup_{y\in B\left(x,r_k^n\right)}f\left(y\right),\qquad h_{n,k}\left(x\right)=\inf_{y\in B\left(x,r_k^n\right)}f\left(y\right).$$

Entonces:

$$\left\{\text{lip}\, f\leq\alpha\right\}=\bigcap_{n,m=1}^{\infty}\bigcup_{k,l=1}^{\infty}\left\{g_{n,k}-f\leq\alpha_{m,k,l}^n\right\}\cap\left\{f-h_{n,k}\leq\alpha_{m,k,l}^n\right\}.$$

Fijados $n, k \in \mathbb{N}$, tenemos que probar que $g_{n,k}$ y $h_{n,k}$ son medibles Borel. Por analogía, sólo lo veremos para $g_{n,k}$. Sea $\beta \in \mathbb{R}$. Dado $x \in X$, se tiene que $x \in \{g_{n,k} > \beta\}$ si y sólamente si existe $y_x \in B(x, r_k^n)$ tal que $f(y_x) > \beta$. Fijado $x \in \{g_{n,k} > \beta\}$, tenemos que encontrar $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que para todo $z \in B(x, \delta)$, $d(y_x, z) < r_k^n$, esto es $y_x \in B(z, r_{k_n})$. Por reducción al absurdo, supongamos que para todo $\delta > 0$, existe $z_\delta \in B(x, \delta)$ tal que $d(y_x, z_\delta) \geq r_k^n$. Obsérvese que $\lim_{\delta \to 0^+} z_\delta = x$. Luego, $d(y_x, x) = \lim_{\delta \to 0^+} d(y_x, z) \geq r_k^n$. Hemos llegado a una contradicción. Por tanto, existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subseteq \{g_{n,k} > \beta\}$. Por definición, $\{g_{n,k} > \beta\}$ es abierto y, en consecuencia, medible Borel. De aquí, deducimos que lip f es medible Borel. $\square$

En espacios métricos Menger convexos y rectificablemente conexos, la constante Lipschitz inferior de una función Lipschitz localmente es un gradiente superior de la misma.

Teorema 3.2. Sean (X, d) un espacio métrico Menger convexo y rectificablemente conexo, y $f \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(X)$. Entonces lip f es un gradiente superior de f.

Demostración. Por el teorema anterior, sabemos que lip f es medible Borel. Sean $x, y \in X$ y $\gamma : [a, b] \to X$ una curva rectificable tal que $\gamma(a) = x$ y $\gamma(b) = y$. Sea $f_\gamma : [0, \ell(\gamma)] \to \mathbb{R}$ definida como $f_\gamma = f \circ \gamma_\ell$. Sean $s_1, s_2 \in [0, \ell(\gamma)]$ con $s_1 \leq s_2$. Por ser C_γ compacto, se tiene que:

$$\begin{aligned} |f_\gamma(s_1) - f_\gamma(s_2)| &\leq \mathrm{Lip}_{C_\gamma}(f) \cdot |\gamma_\ell(s_1) - \gamma_\ell(s_2)| \leq \mathrm{Lip}_{C_\gamma}(f) \cdot \ell\left(\gamma|_{[s_1, s_2]}\right) \\ &= \mathrm{Lip}_{C_\gamma}(f) \cdot |s_1 - s_2|. \end{aligned}$$

Por definición, f_γ es una función Lipschitz en $[a, b]$. En particular, f_γ es absolutamente continua, derivable en m-casi todo punto de $(0, \ell(\gamma))$ y:

$$f_\gamma(s_2) - f_\gamma(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} f'_\gamma \, dm,$$

para todo $s_1, s_2 \in [0, \ell(\gamma)]$ con $s_1 \leq s_2$. Dado $s \in [0, \ell(\gamma)]$ tal que existe $f'_\gamma(s)$, tenemos que probar que $\left|f'_\gamma(s)\right| \leq \mathrm{lip}\, f(\gamma_\ell(s))$. Fijemos $s \in (0, \ell(\gamma))$ tal que existe $f'_\gamma(s)$. Sea $r > 0$ fijo. Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{|f_\gamma(s + r) - f_\gamma(s)|}{r} &= \frac{|f(\gamma_\ell(s + r)) - f(\gamma_\ell(s))|}{r} \\ &\leq \frac{\sup_{z \in B(\gamma(s), r)} |f(z) - f(\gamma(s))|}{r}. \end{aligned}$$

Tomando límites inferiores cuando $r \to 0^+$, obtenemos la desigualdad deseada. Por tanto:

$$|f(x) - f(y)| = |f_\gamma(0) - f_\gamma(\ell(\gamma))| = \left| \int_0^{\ell(\gamma)} f'_\gamma \, dm \right| \leq \int_0^{\ell(\gamma)} |f'_\gamma| \, dm$$
$$\leq \int_0^{\ell(\gamma)} (\operatorname{lip} f \circ \gamma_\ell) \, dm = \int_{C_\gamma} \operatorname{lip} f \, ds_\gamma.$$

□

3.3. Funciones de variación acotada en espacios métricos

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto y $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(U)$. Por el Teorema de Aproximación Local por Funciones Suaves, existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}^\infty(U)$ convergente a f en $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(U)$ tal que:

$$||Df||(U) = \lim_{n\to\infty} ||Df_n||(U) = \liminf_{n\to\infty} ||Df_n||(U) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_U |Df_n| \, dm_d. \tag{3.1}$$

Nuestra intención en cierta forma es sustituir el gradiente por la constante de Lipschitz inferior de una función Lipschitz localmente.

Definición 3.4. Un espacio métrico medible es una tupla (X, d, μ) donde (X, d) es un espacio métrico y $\mu : \mathcal{B}_X \to [0, +\infty]$ es una medida Borel.

Sea (X, d, μ) un espacio métrico medible de medida finita en compactos. Es fácil ver que $\operatorname{Lip}_{\text{loc}}(X) \subseteq \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X, \mu)$. Además, si (X, d) es σ-compacto, podemos construir sobre $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X, \mu)$ una métrica compatible con la convergencia en este espacio a partir de una familia total de seminormas.

Con estas hipótesis, demostraremos que el espacio $\operatorname{Lip}(X)$ es denso en $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X, \mu)$.

Antes de ello, veamos el siguiente lema clásico de diagonalización de límites iterados en espacios métricos.

Lema 3.1. Sea (U, ρ) un espacio métrico. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos una sucesión $\{u^n_m\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a $u_n \in U$ en (U, ρ). Si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $u \in U$ en (U, ρ), para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $m^n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\{u^n_{m^n_0}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u en (U, ρ).

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe m^n_0 tal que $\rho\left(u^n_{m^n_0}, u_n\right) < \frac{1}{n}$. Además, fijado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\rho(u_n, u) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, para todo $n \geq n_0$, tenemos que:

$$\rho\left(u^n_{m^n_0}, u\right) \leq \rho\left(u^n_{m^n_0}, u_n\right) + \rho(u_n, u) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por definición, $\left\{u^n_{m_0^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u en (U,ρ). $\square$

Lema 3.2. Sea (X,d,μ) un espacio métrico medible σ-compacto y de medida finita en compactos. Entonces dada $f\in\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X,\mu)$, existe $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq \operatorname{Lip}(X)$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X,\mu)$.

Demostración. Sea $B\in\mathcal{B}_X$. Por ser μ una medida finita en compactos, entonces $\chi_B\in\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X,\mu)$. Además, $\operatorname{Lip}(X)\subseteq\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X,\mu)$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, definimos $f_n: U\to\mathbb{R}$ como $f_n(x)=(1-n\cdot d(x,B))^+$. Por composición de funciones continuas, f_n es continua (y, en consecuencia medible) para todo $n\in\mathbb{N}$. Por otro lado, $0\le f_n\le 1$ en X para todo $n\in\mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} f_n=\chi_B$ en X. Como $1\in\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X,\mu)$, usando el Teorema de la Convergencia Dominada, $\lim_{n\to\infty} f_n=\chi_B$ en $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X,\mu)$.

Fijado $n\in\mathbb{N}$, probemos que f_n es Lipschitz. Sean $x,y\in U$. Si $f_n(x)=1-n\cdot d(x,B)>0$ y $f_n(y)=1-n\cdot d(x,B)>0$, entonces:

$$|f_n(x)-f_n(y)| = n\cdot|d(x,B)-d(y,B)|\le n\cdot d(x,y).$$

Si $f_n(x), f_n(y)=0$, claramente $|f_n(x)-f_n(y)|\le n\cdot d(x,y)$. Supongamos que $f_n(x)=1-n\cdot d(x,B)>0$ y $f_n(y)=0$. Entonces $n\cdot d(y,B)\ge 1$ y:

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_n(y)| = |f_n(x)| = 1-n\cdot d(x,B) &\le n\cdot d(y,B)-n\cdot d(x,B)\\ &= n\cdot(d(y,B)-d(x,B))\le n\cdot d(y,x).\end{aligned}$$

Por tanto, f_n es Lipschitz.

Sea $\varphi=\sum_{i=1}^m a_i\cdot\chi_{B_i}$ una función simple y medible. Para cada $i\in\mathbb{N}_m$, existe $\{f_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\operatorname{Lip}(X)$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n^i=\chi_{B_i}$ en $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X,\mu)$. Definimos $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq \operatorname{Lip}(X)$ como $f_n=\sum_{i=1}^m a_i\cdot\chi_{B_i}$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Por linealidad, se tiene que $\lim_{n\to\infty} f_n=\varphi$ en $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X,\mu)$.

Sea $f\in\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X,\mu)$ no negativa. Por el Teorema de Aproximación por Funciones Simples y Medibles, existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples y medibles con $0\le\varphi_n\le\varphi_{n+1}\le f$ en X para todo $n\in\mathbb{N}$ tal que $\lim_{n\to\infty}\varphi_n=f$ en X. Usando el Teorema de la Convergencia Monótona, $\lim_{n\to\infty}\varphi_n=f$ en $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X,\mu)$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $\{f_m^n\}_{m\in\mathbb{N}}\subseteq\operatorname{Lip}(X)$ tal que $\lim_{m\to\infty} f_m^n=\varphi_n$ en $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X,\mu)$. Por el lema anterior, para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $m_0^n\in\mathbb{N}$ tal que $\lim_{n\to\infty} f^n_{m_0^n}=f$ en $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X,\mu)$.

Si $f\in\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X,\mu)$, existen $\{f_n^1\}_{n\in\mathbb{N}},\{f_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\operatorname{Lip}(X)$ tales que $\lim_{n\to\infty} f_n^1=f^+$ y $\lim_{n\to\infty} f_n^2=f^-$ en $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X,\mu)$. Definimos $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\operatorname{Lip}(X)$ como $f_n=f_n^1-f_n^2$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Por linealidad, $\lim_{n\to\infty} f_n=f$ en $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X,\mu)$. $\square$

Sea (X,d,μ) un espacio métrico medible. Para definir la variación de una $f\in\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X,\mu)$ debemos asegurarnos de dos cosas:

1. Para toda función $f \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(X)$, lip f es medible Borel.

2. Toda función en $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(X,\mu)$ es límite en $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(X,\mu)$ de funciones de $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(X)$.

Para el primer apartado, necesitábamos por el Teorema 3.1 que (X,d) fuese un espacio métrico Menger convexo. Para el apartado 2, era indispensable que nuestro espacio métrico fuese σ-compacto y que μ fuese finita en compactos. Con estas hipótesis e inspirados en (3.1), ya estamos preparados para dar la definición de variación.

Definición 3.5. Sean (X,d,μ) un espacio métrico medible Menger convexo, σ-compacto y de medida finita en compactos, y $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(X,\mu)$. Definimos la variación de f en X como sigue:

$$V_X(f) = \mathrm{ínf}\left\{ \liminf_{n\to\infty} \int_X \mathrm{lip}\ f_n\, d\mu \,\middle|\, \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(X),\ \lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ en } \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(X,\mu) \right\}.$$

Lema 3.3. Sean (X,d,μ) un espacio métrico medible Menger convexo, σ-compacto y de medida finita en compactos, y $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(X,\mu)$. Se cumple:

1. Si $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}_d$, entonces $||Df||\left(\bigcup_{n=1}^\infty V_n\right) \le \sum_{n=1}^\infty ||Df||(V_n)$.

2. Si $V_1, V_2 \subseteq X$ son abiertos disjuntos, entonces $||Df||(V_1 \cup V_2) = ||Df||(V_1) + ||Df||(V_2)$.

Demostración.

1. Denotemos por $V = \bigcup_{n=1}^\infty V_n$. Si $\sum_{n=1}^\infty ||Df||(V_n) = +\infty$, se tiene trivialmente que $||Df||(V) \le \sum_{n=1}^\infty ||Df||(V_n)$. Supongamos que $\sum_{n=1}^\infty ||Df||(V_n) < +\infty$ y, por tanto, $||Df||(V_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijado $\varepsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una sucesión $\{f^n_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(V_n)$ convergente a f en $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(V_n,\mu)$ tal que:

   $$\liminf_{m\to\infty} \int_{V_n} \mathrm{lip}\ f^n_m\, d\mu < ||Df||(V_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

   Sin pérdida de generalidad, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos suponer tomando subsucesiones si fuese necesario que:

   $$\liminf_{m\to\infty} \int_{V_n} \mathrm{lip}\ f^n_m\, d\mu = \limsup_{m\to\infty} \int_{V_n} \mathrm{lip}\ f^n_m\, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_{V_n} \mathrm{lip}\ f^n_m\, d\mu.$$

   Entonces:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} ||Df|| (V_n) + \varepsilon &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} \int_{V_n} \operatorname{lip} f_m^n \, d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lim_{m\to\infty} \int_{V_n} \operatorname{lip} f_m^n \, d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{V_n} \operatorname{lip} f_m^n \, d\mu.\end{aligned}$$

Sea $W_1 = V_1$. Dado $n \in \mathbb{N}$, inductivamente, definido W_n, definimos $W_{n+1} = V_{n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} V_k$. Es fácil ver que $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección numerable de conjuntos disjuntos dos a dos tal que $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$.

Dado $m \in \mathbb{N}$, definimos $f_m : V \to \mathbb{R}$ como $f_m = f_m^n$ en W_n. Es fácil ver que $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{Lip}_{\text{loc}}(V)$ es una sucesión convergente a f en $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(V, \mu)$. Luego:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} ||Df|| (V_n) + \varepsilon &\geq \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{V_k} \operatorname{lip} f_m^k \, d\mu \\ &= \liminf_{n\to\infty} \liminf_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{V_k} \operatorname{lip} f_m^k \, d\mu \\ &\geq \liminf_{n\to\infty} \liminf_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{W_k} \operatorname{lip} f_m^k \, d\mu \\ &= \liminf_{n\to\infty} \liminf_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{W_k} \operatorname{lip} f_m \, d\mu \\ &\geq \liminf_{n\to\infty} \liminf_{m\to\infty} \int_{\bigcup_{k=1}^{n} W_k} \operatorname{lip} f_m \, d\mu \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{i\geq n} \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{j\geq m} \int_{\bigcup_{k=1}^{i} W_k} \operatorname{lip} f_j \, d\mu \\ &\overset{(*)}{\geq} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{i\geq n} \inf_{j\geq m} \int_{\bigcup_{k=1}^{i} W_k} \operatorname{lip} f_j \, d\mu \\ &= \sup_{m\in\mathbb{N}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{j\geq m} \inf_{i\geq n} \int_{\bigcup_{k=1}^{i} W_k} \operatorname{lip} f_j \, d\mu \\ &= \sup_{m\in\mathbb{N}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{j\geq m} \int_{\bigcup_{k=1}^{n} W_k} \operatorname{lip} f_j \, d\mu \\ &\overset{(**)}{=} \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{j\geq m} \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k} \operatorname{lip} f_j \, d\mu \\ &= \liminf_{m\to\infty} \int_{V} \operatorname{lip} f_m \, d\mu \geq ||Df|| (V).\end{aligned}$$

Haciendo $\varepsilon \to 0^+$ tenemos el resultado. En $(*)$, estamos utilizando que, si A, B son dos conjuntos y $g : A \times B \to \mathbb{R}$ es una función entonces:

$$\sup_{b\in B}\inf_{a\in A} g(a,b) \leq \inf_{a\in A}\sup_{b\in B} g(a,b).$$

Para demostrar $(**)$, tenemos que ver que si $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles Borel no negativas, la aplicación $\eta : \mathcal{B}_X \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\eta(A) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \int_A g_n \, d\mu,$$

es una medida. Evidentemente, $\eta(\varnothing) = 0$. Consideremos una colección de conjuntos $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}_X$ disjuntos dos a dos. Sea $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$. Claramente, se tiene que:

$$\eta(A) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \int_A g_n \, d\mu = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{A_m} g_n \, d\mu \geq \sum_{m=1}^{\infty} \inf_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_m} g_n \, d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \eta(A_m).$$

Si $\sum_{m=1}^{\infty} \eta(A_m) = +\infty$, claramente $\eta(A) = \sum_{m=1}^{\infty} \eta(A_m)$. Supongamos que $\sum_{m=1}^{\infty} \eta(A_m) < +\infty$ y, por tanto, $\eta(A_m) < +\infty$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Fijado $\varepsilon > 0$, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $n_m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\int_{A_m} g_{n_m} \, d\mu < \eta(A_m) + \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Entonces:

$$\eta(A) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \int_A g_n \, d\mu = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{A_m} g_n \, d\mu \leq \sum_{m=1}^{\infty} \int_{A_m} g_{n_m} \, d\mu \leq \sum_{m=1}^{\infty} \eta(A_m) + \varepsilon.$$

Haciendo $\varepsilon \to 0^+$, obtenemos que $\eta(A) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \eta(A_m)$. Por tanto:

$$\eta(A) = \sum_{m=1}^{\infty} \eta(A_m).$$

Por definición, η es una medida.

2. Por subaditividad, $||Df||(V_1 \cup V_2) \leq ||Df||(V_1) + ||Df||(V_2)$. Consideremos una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(V_1 \cup V_2)$ convergente a f en $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(V_1 \cup V_2, \mu)$. Entonces $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(V_1) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(V_2)$ converge a f en $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(V_1, \mu)$ y en $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(V_2, \mu)$. Luego:

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{V_1\cup V_2} \mathrm{lip}\ f_n \, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \left(\int_{V_1} \mathrm{lip}\ f_n \, d\mu + \int_{V_2} \mathrm{lip}\ f_n \, d\mu \right)$$

$$\geq \liminf_{n\to\infty} \int_{V_1} \operatorname{lip} f_n \, d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_{V_2} \operatorname{lip} f_n \, d\mu$$
$$\geq ||Df|| \, (V_1) + ||Df|| \, (V_2) \, .$$

Tomando el ínfimo en las sucesiones de $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(V_1 \cup V_2)$ que convergen a f en $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(V_1 \cup V_2, \mu)$, tenemos que $||Df|| \, (V_1 \cup V_2) \geq ||Df|| \, (V_1) + ||Df|| \, (V_2)$.

□

Definición 3.6. Sean (X, d, μ) un espacio métrico medible Menger convexo, σ-compacto y de medida finita en compactos, y $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$. Diremos que f es de variación acotada en X si $V_X(f) < +\infty$. Denotaremos por $BV(X)$ al conjunto de funciones de variación acotada en X.

Definición 3.7. Sean (X, d, μ) un espacio métrico medible Menger convexo, σ-compacto y de medida finita en compactos, y $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(X, \mu)$. Diremos que f es de variación acotada localmente en X si $f \in BV(V)$ para todo $V \Subset X$ abierto. Denotaremos por $BV_{\mathrm{loc}}(X)$ al conjunto de funciones de variación acotada localmente en X.

Al igual que en el capítulo anterior, podemos construir la medida de variación de f.

Lema 3.4. Sean (X, d) un espacio métrico, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ con $\varnothing \in \mathcal{E}$ y $d : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ una función que verifica $d(\varnothing) = 0$. Entonces la aplicación $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ dada por:

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} d(E_n) \, \middle| \, \{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right\}$$

es una medida exterior. Se entiende que $\inf \varnothing = +\infty$.

Demostración. Como $d(\varnothing) = 0$, evidentemente $\mu^*(\varnothing) = 0$. Sean $A, B \subseteq X$ con $A \subseteq B$. Si $\mu^*(B) = +\infty$, se tiene trivialmente que $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. Supongamos que $\mu^*(B) < +\infty$. Dado $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$ con $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y, por tanto:

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} d(E_n).$$

Tomando el ínfimo en los recubrimientos de B por elementos de $\mathcal{E}$, deducimos que $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. Sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ y $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = +\infty$, claramente, tenemos que $\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) < +\infty$ y, por tanto, $\mu^*(A_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijado $\varepsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\{E^n_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$ con $A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ tal que:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(E^n_m) < \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Claramente, $\{E_m^n\}_{n,m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$ y $A \subseteq \bigcup_{n,m=1}^{\infty} E_m^n$. Luego:

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(E_m^n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

Haciendo $\varepsilon \to 0^+$, concluimos que:

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Por definición, μ^* es una medida exterior. $\square$

Teorema 3.3. Sean (X, d, μ) un espacio métrico medible propio Menger convexo, σ-compacto y de medida finita en compactos, y $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X, \mu)$. Dado $V \in \mathcal{T}_d$, definimos $||Df||(V) := V_V(f)$. Sea $||Df||^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ dada por:

$$||Df||^*(A) = \operatorname{ínf}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} ||Df||(V_n) \,\middle|\, \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}_d, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n\right\}.$$

Se cumple:

1. $||Df||^*$ es una medida exterior métrica.
2. Si $V \subseteq X$ es abierto, entonces $||Df||(V) = ||Df||^*(V)$.

Más aún, por el procedimiento de Carathéodory $||Df||^*$ define una medida Borel que denotaremos como $||Df||$.

Demostración.

1. $||Df||^*$ es una medida exterior por el lema anterior. Sean $A, B \subseteq X$ tales que $\operatorname{dist}(A, B) > 0$. Por subaditividad, $||Df||^*(A \cup B) \leq ||Df||^*(A) + ||Df||^*(B)$. Vamos a probar que $||Df||^*(A) + ||Df||^*(B) \leq ||Df||^*(A \cup B)$. Sea $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}_d$ tal que $A \cup B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. Como $\operatorname{dist}(A, B) > 0$, existen $V_1, V_2 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ abiertos disjuntos tales que $A \subseteq V_1$ y $B \subseteq V_2$. Entonces:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} ||Df||(V_n) \geq ||Df||\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n\right) &\geq ||Df||(V_1 \cup V_2) \\ &= ||Df||(V_1) + ||Df||(V_2) \geq ||Df||^*(A) + ||Df||^*(B).\end{aligned}$$

   Tomando el ínfimo en los recubrimientos por abiertos de $A \cup B$, llegamos a que $||Df||^*(A \cup B) \geq ||Df||^*(A) + ||Df||^*(B)$. Por tanto, $||Df||^*(A \cup B) = ||Df||^*(A) + ||Df||^*(B)$. Por definición, $||Df||^*$ es una medida exterior métrica.

2. Por definición, sabemos que $||Df||^*(V) \leq ||Df||(V)$. Tenemos que probar que $||Df||^*(V) \geq ||Df||(V)$. Sea $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}_d$ con $V \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. Por monotonía, podemos suponer que $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. Por el apartado 2, tenemos lo siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||Df||(V_n) \geq ||Df|| \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \right) = ||Df||(V).$$

Tomando el ínfimo en los recubrimientos por abiertos de V, deducimos que $||Df||^*(V) \geq ||Df||(V)$. Por tanto, $||Df||(V) = ||Df||^*(V)$.

□

3.3.1. Semicontinuidad inferior de la medida de variación

Teorema 3.4 (**Semicontinuidad Inferior de la Medida de Variación**). Sean (X, d, μ) un espacio métrico medible σ-compacto y de medida finita en compactos. Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X, \mu)$ es una sucesión convergente a $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X, \mu)$ en $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X, \mu)$, entonces:

$$||Df||(X) \leq \liminf_{n\to\infty} ||Df_n||(X).$$

Demostración. Si $\liminf_{n\to\infty} ||Df_n||(X) = +\infty$, entonces la desigualdad es trivial. Supongamos que $\liminf_{n\to\infty} ||Df_n||(X) < +\infty$. Sin pérdida de generalidad, tomando subsucesiones si fuese necesario, podemos suponer lo siguiente:

$$\liminf_{n\to\infty} ||Df_n||(X) = \limsup_{n\to\infty} ||Df_n||(X) = \lim_{n\to\infty} ||Df_n||(X) < +\infty.$$

Entonces $||Df_n||(X) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijado $\varepsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una sucesión $\{f_m^n\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \text{Lip}_{\text{loc}}(X)$ convergente a f_n en $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X, \mu)$ tal que:

$$\liminf_{m\to\infty} \int_X \text{lip } f_m^n \, d\mu < ||Df_n||(X) + \varepsilon.$$

Tomando subsucesiones si fuese necesario, podemos suponer de nuevo que:

$$\liminf_{m\to\infty} \int_X \text{lip } f_m^n \, d\mu = \limsup_{m\to\infty} \int_X \text{lip } f_m^n \, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_X \text{lip } f_m^n \, d\mu$$

Fijado $n \in \mathbb{N}$, sean $m_n^1, m_n^2 \in \mathbb{N}$ tales que $d_{\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X,\mu)}(f_m^n, f_n) < \frac{1}{n}$ para todo $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq m_n^1$ y $\int_X \text{lip } f_{m_n^2}^n \, d\mu < \lim_{m\to\infty} \int_X \text{lip } f_m^n \, d\mu + \frac{1}{n}$ para tdo $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq m_n^2$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $m_n = \max\{m_n^1, m_n^2\}$. Claramente, se tiene que $\{f_{m_n}^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \text{Lip}_{\text{loc}}(X)$ converge a f en $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(X, \mu)$ y:

$$\int_X \text{lip } f_{m_n}^n \, d\mu < \lim_{m\to\infty} \int_X \text{lip } f_m^n \, d\mu + \frac{1}{n} < ||Df_n||(X) + \varepsilon + \frac{1}{n}.$$

Entonces:

$$||Df||(X) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X \operatorname{lip} f_{m_n}^n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} ||Df_n||(X) + \varepsilon.$$

Haciendo $\varepsilon \to 0^+$, tenemos el resultado. □

3.3.2. Condiciones naturales sobre el espacio métrico

Sea (X, d, μ) un espacio métrico medible Menger convexo σ-compacto y de medida finita en compactos. Es fácil ver que, en espacios métricos localmente compactos, la σ-compacidad, la separabilidad y el tener una base numerable son conceptos equivalentes. El siguiente resultado nos asegura que, con estas hipótesis, μ es una medida Radon.

Teorema 3.5. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico Hausdorff localmente compacto con una base numerable y μ una medida sobre $(X, \mathcal{B}_X)$ que es finita en conjuntos compactos. Entonces μ es una medida Radon.

Demostración. Véase [7, Sección 7.2]. □

Imponiendo estas condiciones, la medida de variación de funciones de variación acotada localmente también es Radon.

Corolario 3.1. Sean (X, d, μ) un espacio métrico medible Menger convexo, σ-compacto, localmente compacto y de medida Radon, y $f \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(X)$. Entonces $||Df||$ es una medida Radon.

Demostración. Por el teorema anterior, $||Df||$ es una medida sobre $(X, \mathcal{B}_X)$ finita en conjuntos acotados y, por tanto, en conjuntos compactos contenidos en X. Como (X, d) define un espacio topológico Hausdorff localmente compacto con una base numerable y $||Df||$ es finita en conjuntos compactos, usando el Teorema 3.5, tenemos que $||Df||$ es una medida Radon. □

Sean (X, d, μ) un espacio métrico medible Menger convexo, σ-compacto, localmente compacto y de medida Radon, y $f \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(X)$. Entonces, para todo $V \subseteq X$ abierto, se tiene que:

$$||Df||(V) \leq \int_V \operatorname{lip} f \, d\mu. \tag{3.2}$$

Claramente, si $\mu(V) = 0$, entonces $||Df||(V) = 0$. Sea $A \in \mathcal{B}_X$ con $\mu(A) = 0$. Como μ es Radon, entonces μ es exteriormente regular. Dado $n \in \mathbb{N}$, existe $V_n \subseteq X$ abierto con $A \subseteq V_n$ tal que $\mu(V_n) < \frac{1}{n}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sustituyendo V_n por $\bigcap_{i=1}^n V_i$, podemos suponer que $V_n \supseteq V_{n+1}$. Luego:

$$||Df||\,(A) \leq ||Df||\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right).$$

Ahora bien, si $f \in \mathrm{Lip}\,(X)$, entonces $\mathrm{lip}\, f$ está acotada por la constante $\mathrm{Lip}\,(f)$. Por tanto:

$$\begin{aligned}||Df||\,(A) &\leq ||Df||\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right) \leq ||Df||\,(V_n) \leq \int_{V_n} \mathrm{lip}\, f\, d\mu \leq \mathrm{Lip}\,(f)\cdot\mu\,(V_n)\\ &< \mathrm{Lip}\,(f)\cdot\frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

Por tanto, $||Df||\,(A) = 0$. Hemos demostrado que si $f \in \mathrm{Lip}\,(X)$, entonces $||Df|| \ll \mu$. Por el Teorema de Radon-Nikodym, existe $g : X \to [0, +\infty]$ medible tal que $||Df|| = \mu \llcorner g$, es decir:

$$||Df||\,(A) = \int_A g\, d\mu, \forall A \in \mathcal{B}_X.$$

Nos gustaría al menos que $\mathrm{Lip}\,(X) \subseteq \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}\,(X)$. Por (3.2), es fácil ver que eso lo tendríamos si suponemos que el espacio métrico es propio.

Definición 3.8 (**Espacio métrico propio**)**.** Un espacio métrico (X, d) es propio si todo conjunto cerrado y acotado es compacto.

Si (X, d) es un espacio métrico propio, directamente se tiene que es un espacio métrico localmente compacto y σ-compacto.

Diremos que un espacio métrico medible propio, Menger convexo y de medida Radon es un "buen" espacio métrico medible.

Bibliografía

[1] Stein, Elias M., y Rami Shakarchi. *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*. Princeton Lectures in Analysis, v. 3. Princeton, N.J: Princeton University Press, 2005.

[2] Evans, Lawrence C., y Ronald F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions. Studies in Advanced Mathematics*. Boca Raton: CRC Press, 1992.

[3] Eriksson-Bique, Sylvester, James T. Gill, Panu Lahti, y Nageswari Shanmugalingam. *Asymptotic Behavior of BV Functions and Sets of Finite Perimeter in Metric Measure Spaces*. Transactions of the American Mathematical Society 374, n.º 11 (23 de agosto de 2021): 8201-47.

[4] Heinonen, Juha, Pekka Koskela, Nageswari Shanmugalingam, y Jeremy T Tyson. *Sobolev Spaces on Metric Measure Spaces*.

[5] Cheeger, J. *Differentiability of Lipschitz Functions on Metric Measure Spaces*. Geometric And Functional Analysis 9, n.º 3 (1 de agosto de 1999): 428-517.

[6] Miranda, Michele. *Functions of Bounded Variation on "Good" Metric Spaces*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 82, n.º 8 (agosto de 2003): 975-1004.

[7] Cohn, Donald L. *Measure Theory*: Second Edition. Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher. New York, NY: Springer New York, 2013.

[8] Gupta, Ajit Kumar, y Saikat Mukherjee. *Menger Convexity and Hausdorff Metric*. arXiv, 28 de marzo de 2023.

[9] Simon, Leon. *Introduction to Geometric Measure Theory.*

[10] Spivak, Michael. *Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus*. Mathematics Monograph Series. Boca Raton London New York: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2018.

[11] Rudin, Walter. *Real and Complex Analysis*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1987.

[12] Valentine, F. A. *A Lipschitz condition preserving extension for a vector function*. Amer. J. Math. 67 (1945), 83–93.

[13] Valentine, F. A. *On the extension of a vector function so as to preserve a Lipschitz condition*. Bull. Amer. Math. Soc. 49 (1943), 100–108.

[14] Ambrosio, Luigi, y Roberta Ghezzi. *Sobolev and Bounded Variation Functions on Metric Measure Spaces*. 1.ª ed., 211-73. EMS Press, 2016.

[15] Ambrosio, Luigi, Nicola Gigli, y Giuseppe Savaré. *Density of Lipschitz Functions and Equivalence of Weak Gradients in Metric Measure Spaces*. Revista Matemática Iberoamericana 29, n.º 3 (2013): 969-96.

Notación

Conjuntos

$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales
$\mathbb{N}_0$	Conjunto de los números naturales con el 0
$\mathbb{N}_N$	Conjunto de los N primeros números naturales
$\mathbb{Z}$	Conjunto de los números enteros
$\mathbb{Q}$	Conjunto de los números racionales
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales
$\mathscr{P}([a,b])$	Conjuto de particiones del intervalo $[a,b]$
$V \Subset U$	V tiene clausura compacta contenida en U

Teoría de la medida

m	Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$
s_γ	Medida de longitud de arco inducida por γ
m^*	Medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}$
m_d	Medida de Lebesgue d-dimensional
$\mathcal{B}_X$	σ-álgebra de Borel engendrada por el espacio topológico X
$\mathcal{L}^p(X,\mu)$	Espacio de funciones p-integrables en X respecto de μ con $p \in [1,+\infty)$
$\mathcal{L}^p_{\text{loc}}(X,\mu)$	Espacio de funciones p-integrables localmente en X respecto de μ con $p \in [1,+\infty)$

$\mu \llcorner f$	Medida con densidad f respecto de μ

Espacios de Sobolev

$\operatorname{sop}(f)$	Soporte de f
$\mathcal{C}^k(U)$	Funciones de k-veces diferenciables con continuidad ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$)
$\mathcal{C}^k_c(U)$	Funciones de $\mathcal{C}^k(U)$ y de soporte compacto
$\mathcal{W}^{1,p}(U)$	Espacio de funciones de $\mathcal{L}^p(U)$ con derivada débil en $\mathcal{L}^p(U)$
$\mathcal{W}^{1,p}_{\mathrm{loc}}(U)$	Espacio de funciones que pertenecen a $\mathcal{W}^{1,p}(V)$ para todo $V \Subset U$
$U(\varepsilon)$	$\{x \in U \mid \operatorname{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$
η_ε	Función definida en la página 31
f_ε	Convolución de $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(U)$ con η_ε en U

Funciones de variación acotada

$BV([a,b], X)$	Espacio de aplicaciones de variación acotada en $[a,b]$ con valores en un espacio métrico (X,d)
$BV((a,b), X)$	Espacio de aplicaciones de variación acotada en (a,b) con valores en un espacio métrico (X,d)
$BV(U, X)$	Espacio de aplicaciones de variación acotada en $U \subseteq \mathbb{R}$ abierto con valores en un espacio métrico (X,d)
$BV(U)$	Espacio de funciones de variación acotada en $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto
$BV_{\mathrm{loc}}(U)$	Espacio de funciones de variación acotada localmente en $U \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto
$V_a^b(f)$	Variación de f en $[a,b]$ o (a,b)
$V_U(f)$	Variación de f en U
$\lvert\lvert Df \rvert\rvert$	Medida de variación
$\lvert\lvert Df \rvert\rvert^*$	Medida exterior de variación

Funciones Lipschitz

$\mathrm{Lip}\,(X)$	Espacio de funciones Lipschitz
$\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}\,(X)$	Espacio de funciones Lipschitz localmente
$\mathrm{lip}\ f$	Constante Lipschitz inferior de f

Derivadas de funciones

$\overline{D}f$	Derivada superior de una función real de variable real
$\underline{D}f$	Derivada inferior de una función real de variable real
$(\cdot)'$	Derivada clásica para funciones reales de variable real
$D\,(\cdot)$	Gradiente o matriz jacobiana de una función (escalar o vectorial resp.)
$\mathrm{div}\,(\cdot)$	Divergencia de una función vectorial
$\overline{D}_v f$	Derivada superior direccional con dirección v
$\underline{D}_v f$	Derivada inferior direccional con dirección v
$[Df]$	$\|\|Df\|\| \llcorner \sigma$
$[Df]_{\mathrm{ac}}$	Parte absolutamente continua de $[Df]$
$[Df]_{\mathrm{sing}}$	Parte singular de $[Df]$