



FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Máster

Título

Topologías sobre torneos

Realizado por:
Francisco Vilches Valle

Supervisado por:
Desamparados Fernández Ternero
María Trinidad Villar Liñán

19 de julio de 2023

Índice general

1. Preliminares	11
1.1. Digrafos y torneos	11
1.2. Topologías	16
1.3. Espacios finitos	18
2. Topologías sobre torneos	21
2.1. Topología gráfica	21
2.2. Topología de aristas comp. indep.	25
2.3. Topología de caminos maximales	29
3. Comparación de topologías	33
3.1. Comparación de las topologías \mathcal{T}_{ICE} y \mathcal{T}_{PM}	33
3.2. Comparación y topología gráfica	37
4. Implementación en Python	45
4.1. Digrafos y torneos en Python	45
4.2. Funciones relacionadas con las aristas de retroceso	46
4.3. Topología gráfica	48
4.4. Topología de aristas compatibles independientes	49
4.5. Topología de caminos dirigidos maximales	52
4.6. Cálculo del torneo de línea asociado a un torneo transitivo	55

4.7. Comparaciones con torneos T_5 y T_6	58
--	----

Resumen / Abstract

El objetivo principal de este trabajo es comparar tres topologías definidas sobre torneos: la topología gráfica, la topología de aristas compatibles independientes y la topología de caminos maximales. Con este fin estudiamos las siguientes cuestiones: cuándo cada una de estas topologías verifica el axioma de separación T_0 , cuándo son discretas o cuándo conexas.

Además, para poder relacionar la topología gráfica, definida sobre el conjunto de vértices del torneo, con las otras dos topologías, definidas sobre el conjunto de aristas, estableceremos una nueva noción: el torneo de línea asociado al torneo transitivo de al menos 4 vértices.

The main goal of this work is to compare three topologies defined on tournaments: the graph topology, the topology of independent compatible edges and the topology of maximal paths. To this end we study the following questions: when each of these topologies verifies the separation axiom T_0 , when they are discrete or when they are connected.

Furthermore, in order to be able to relate the graph topology, defined on the set of vertices of the tournament, with the other two topologies, defined on the set of edges, we will establish a new notion: the line tournament associated to the transitive tournament of at least 4 vertices.

Introducción

La Teoría de grafos es una de las áreas de las Matemáticas relativamente más jóvenes, pero está muy desarrollada debido a sus múltiples aplicaciones tanto dentro como fuera de las Matemáticas. La modelización de problemas es una de las aplicaciones más frecuentes de la Teoría de grafos. Para llevar a cabo el proceso de modelización, si un problema consta de una serie de objetos, estos se representan por vértices. Si existe relación entre los objetos, ésta se representa por una arista de extremos los vértices correspondientes y, si en el problema la relación tiene un sentido intrínseco entre los objetos, la arista se define como un par ordenado y se denominará dirigida. De este modo, podemos distinguir entre grafos dirigidos o no dirigidos según exista una ordenación o no de los pares de vértices que conforman las aristas.

En nuestro estudio vamos a trabajar sobre torneos, un caso particular de grafo dirigido en el que cada par de vertices define exactamente una arista dirigida. Las primeras investigaciones sobre torneos fueron realizadas por F. Harary y L. Moser en 1966 [6] y se centraban en el estudio de los torneos “round-robin”, aquellas competiciones deportivas en las que todos los participantes se enfrentan entre sí una única vez con un resultado que no puede terminar en empate. Considerando los resultados de cada enfrentamiento, se establece una relación de dominancia entre participantes. Así, podemos representar cada participante por un vértice del grafo y, si el participante A ha ganado al B, tenemos que A domina a B y esta relación se expresa con la arista dirigida de A a B, esto es, con el par ordenado (A,B) , donde A y B representan también a los vértices correspondientes. Gracias a la modelización de este tipo de competiciones como grafos dirigidos o digrafos, los digrafos resultantes reciben el nombre de torneos. La mayoría de resultados y nociones relacionadas con torneos existentes hasta 1968, fueron recogidas por J.W. Moon en la monografía [14]. En el desarrollo del estudio utilizaremos varios de los resultados recogidos en dicho libro y en el libro de Bang-Jensen y Gutin [3], centrado en grafos dirigidos.

Los objetos de estudio de la Topología son los espacios topológicos o *topologías* sobre conjuntos. Una topología definida sobre un conjunto X , es una familia de subconjuntos de X , llamados abiertos, cumpliendo que \emptyset y X son abiertos; la intersección finita de abiertos es abierto y la unión arbitraria de abiertos es

abierto.

En cuanto a una de las relaciones que se pueden establecer entre la Topología y la Teoría de grafos, cabe mencionar que existen en la literatura diversas formas de definir un espacio topológico sobre un grafo dirigido, las primeras de las cuales surgieron a partir de la segunda mitad del siglo XX ([12]). Dado un digrafo $D = (V, E)$, se pueden considerar topologías sobre su conjunto de vértices V ([7, 10]), pero también tiene sentido construir otras topologías sobre su conjunto de aristas dirigidas E . Así, se obtienen distintos espacios topológicos no triviales, en el sentido de que la familia de abiertos que constituyen la topología no está formado por todos los subconjuntos de V (o de E). En otras palabras, no necesariamente resultan ser topologías discretas.

Para esta memoria hemos elegido el análisis de tres topologías sobre torneos basándonos en algunos resultados aparecidos más recientemente. En primer lugar, como continuación del estudio previo recogido en el Trabajo Fin de Grado [16], profundizamos en las propiedades de la topología gráfica definida sobre el conjunto de vértices, (según se ve en [7, 10]). Posteriormente, iniciamos la investigación de otras topologías definidas sobre el conjunto de aristas de un torneo, concretamente son la topología de aristas compatibles independientes (según [8, 9]) y la topología de caminos maximales (a partir de [11]). Hasta donde alcanza nuestro conocimiento, esta última topología no se encuentra definida como tal en la literatura, pues en [11] se analiza la topología generalizada sobre las aristas (no se requiere que la intersección de abiertos sea abierto) y, basándonos en estas nociones, descubrimos que no hay impedimento para considerarla como topología sobre el mismo conjunto de aristas. Introducimos pues la topología de caminos maximales de forma novedosa en esta memoria.

Si bien las topologías gráfica y la de aristas compatibles independientes pueden definirse de forma natural sobre torneos infinitos localmente finitos, no tiene sentido definir la topología de caminos maximales sobre un torneo infinito en el cual no se traslada de modo natural la noción de camino maximal. Como el objetivo final es comparar las tres topologías sobre algunos torneos con ciertas particularidades, de modo general en esta memoria solo consideraremos torneos cuyo conjunto de vértices es finito, aunque algunos resultados también se enunciarán para torneos infinitos localmente finitos por su interés particular.

Una de las propiedades más inmediatas que se observan es que todos los espacios topológicos resultantes por los tres procedimientos son de Alexandroff, debido a que son finitos. Además, estudiaremos cuándo las topologías obtenidas dan lugar a espacios topológicos con la propiedad de separación T_0 , permitiéndonos así relacionarlos con los conjuntos parcialmente ordenados, *poset*.

Parte de la comparación de las topologías sobre las aristas se puede realizar de forma directa. Sin embargo, el modo de comparar las dos topologías sobre las aristas con la topología gráfica sobre los vértices requiere una serie de pasos

intermedios. Para ello, hacemos uso del digrafo de línea el cual permite codificar la información de las aristas del torneo inicial T y, posteriormente, trasladarla a un nuevo torneo T' con tantos vértices como aristas tiene T . Las topologías a comparar serán pues la gráfica de T' con las topologías de aristas compatibles independientes y de caminos maximales, ambas sobre T .

La memoria tiene la siguiente estructura: comenzaremos introduciendo en el **capítulo 1** una colección de nociones y resultados básicos con la finalidad de que la memoria sea lo más autocontenida posible. En particular, se recogen algunas nociones clave sobre digrafos y torneos, espacios topológicos y espacios finitos. Algunas de las más importantes son los torneos indescomponibles, los espacios topológicos T_0 o los conjuntos parcialmente ordenados.

Seguidamente, en el **capítulo 2** se definirán las tres topologías en las que profundizamos en esta memoria, la topología gráfica, la topología de aristas compatibles independientes y la topología de caminos maximales. Estudiaremos diversas propiedades de cada una de ellas, tales como cuándo definen un espacio topológico T_0 , cuándo la topología es discreta o cuándo es conexa.

En el **capítulo 3** llevaremos a cabo una comparación entre las 3 topologías aplicadas a una serie de torneos, teniendo que definir el torneo de línea asociado para poder relacionar la topología gráfica con las otras dos.

Para concluir, en el **capítulo 4** se añade una implementación en el software *Python*, a través de la interfaz *Jupyter*, donde se detallan una variedad de funciones sin las cuales no habría sido posible la elaboración de numerosos ejemplos de distintos torneos con sus correspondientes topologías anteriormente definidas.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se introducirán las nociones y resultados básicos sobre torneos y espacios finitos, para ampliar conocimientos sobre los primeros se puede consultar [4, 5] y para los segundos [1, 17].

1.1. Digrafos y torneos

En esta sección, hemos incorporado las nociones básicas sobre digrafos y torneos, junto con los resultados necesarios para el desarrollo del trabajo, tomando como referencias principales los libros de Bang-Jensen y Gutin [3] y Moon [14].

Definición 1.1 *Un **grafo dirigido** o **digrafo** es un par $D = (V, E)$, donde V es un conjunto no vacío, cuyos elementos se denominan **vértices**, y E es una colección de pares ordenados de vértices distintos, que denominamos **aristas dirigidas**.*

Notación 1.2 *Dado un par de vértices u y v de un digrafo, si $(u, v) \in E$ se dice que existe la arista que va de u a v o que u domina a v , dicha arista se denota por uv , siendo u el inicio de la arista y v el final de la misma. La representación gráfica del sentido de la arista uv viene dada por $u \rightarrow v$.*

Definición 1.3 *Dado un digrafo $D = (V, E)$, se define el **digrafo de línea** de D , notado como $L(D)$, como el digrafo cuyo conjunto de vértices es E y cuyo conjunto de aristas viene determinado por:*

$$\{ab \mid a, b \in E \text{ y el final de } a \text{ coincide con el inicio de } b\}.$$

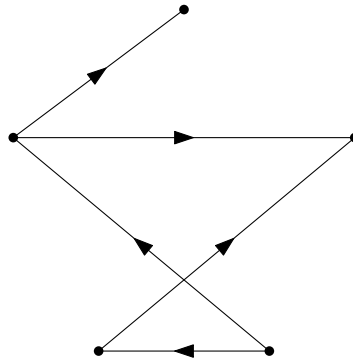


Figura 1.1: Un digrafo.

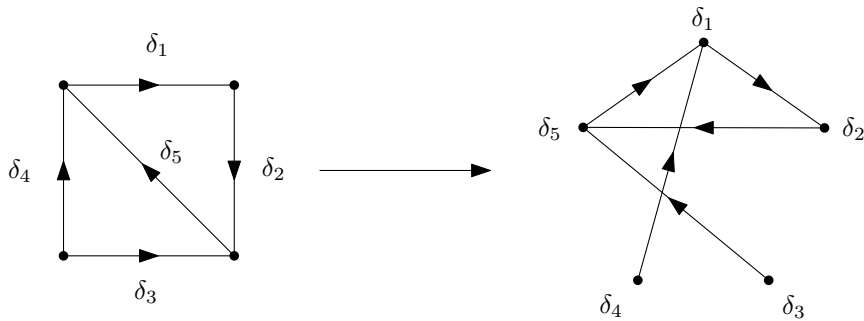


Figura 1.2: Un digrafo y su digrafo de línea asociado.

Definición 1.4 El **digrafo opuesto** de un digrafo $D = (V, E)$ es un digrafo $D' = (V', E')$ con $V = V'$, tal que la arista $uv \in E'$ si y solo si $vu \in E$.

Definición 1.5 Dados dos digrafos D y D' , se dicen **isomorfos** si existe una biyección entre sus vértices que induce una biyección sobre sus aristas.

Definición 1.6 Un **camino** P en un digrafo D es una secuencia $v_0 e_1 v_1 \dots v_{l-1} e_l v_l$ de vértices v_i distintos y aristas e_i tales que para todo $1 \leq i \leq l$, la arista e_i tiene como vértices extremos v_{i-1} y v_i . La longitud de un camino viene dada por el número de aristas que lo componen y se denota por $l(P)$.

Definición 1.7 Un **camino dirigido** en un digrafo D es una secuencia $v_0 e_1 v_1 \dots v_{l-1} e_l v_l$ de vértices v_i distintos y aristas e_i tal que para todo $1 \leq i \leq l$, la arista e_i tiene como inicio v_{i-1} y final v_i . Un camino dirigido cuyo vértice inicial es v_0 y vértice final es v_k se denomina camino dirigido de v_0 hacia v_k . Un camino dirigido es **maximal** si no está estrictamente contenido en otro camino dirigido de D . Un **ciclo dirigido** es un camino dirigido compuesto por al menos tres vértices cuyo vértice inicial y final coinciden.

Definición 1.8 Un digrafo es **acíclico** si no contiene ciclos dirigidos.

Definición 1.9 Sea v_1, \dots, v_n una ordenación de los vértices de un digrafo D , diremos que dicha ordenación es una **ordenación acíclica** si, para cada arista $v_i v_j$ de D , se verifica que $i < j$.

Proposición 1.10 (Prop. 1.4.3, [3]) Todo digrafo es acíclico si y solo si admite una ordenación acíclica de sus vértices.

En el desarrollo de esta memoria, los caminos dirigidos algunas veces serán representados como una secuencia de vértices, omitiendo así las aristas que los unen, y otras como una secuencia de aristas, prescindiendo de los vértices.

Definición 1.11 Dado $D = (V, E)$ un digrafo, se definen:

- **Conjunto de salida:** conjunto de todos los vértices dominados por x . Se denota como $N_x^+(D) = N_x^+ = \{y \in V \mid x \rightarrow y\}$.
- **Conjunto de entrada:** conjunto de todos los vértices que dominan a x . Se denota como $N_x^-(D) = N_x^- = \{y \in V \mid y \rightarrow x\}$.

- **Grado de salida:**

$$d_D^+(x) = d^+(x) = |N_x^+|.$$

- **Grado de entrada:**

$$d_D^-(x) = d^-(x) = |N_x^-|.$$

- **Mínimo de los grados de salida:**

$$\delta^+(D) = \min\{d^+(x) \mid x \in V\}.$$

- **Mínimo de los grados de entrada:**

$$\delta^-(D) = \min\{d^-(x) \mid x \in V\}.$$

- **Máximo de los grados de salida:**

$$\Delta^+(D) = \max\{d^+(x) \mid x \in V\}.$$

- **Máximo de los grados de entrada:**

$$\Delta^-(D) = \max\{d^-(x) \mid x \in V\}.$$

Además, si $D = (V, E)$ es un digrafo, dados cualesquiera $x, y \in V$, de las propias definiciones se deduce la equivalencia siguiente: $y \in N_x^+$ si y solo si $x \in N_y^-$.

Definición 1.12 Dado un digrafo $D = (V, E)$ infinito, es decir, el conjunto V es infinito, se dice que D es un digrafo **localmente finito** si todos los vértices del digrafo tienen grado de entrada finito, es decir, si $d^-(x) < \infty, \forall x \in V$.

Definición 1.13 Un **torneo** es un digrafo tal que cada par de vértices distintos u, v están unidos por una y solo una de las aristas dirigidas uv o vu .

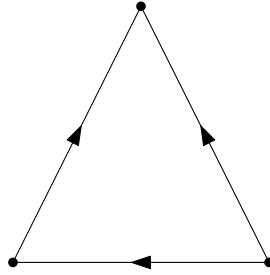


Figura 1.3: Un 3-torneo.

Definición 1.14 Dado un torneo $T = (V, E)$, un torneo $T' = (V', E')$ es un **subtorneo** de T si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$.

Definición 1.15 Sea $T = (V, E)$ un torneo y sea $M \subseteq V$, llamamos **torneo inducido** o **generado** por M , al torneo formado por los vértices de M y cuyas aristas son todas las aristas de E que unen vértices de M . Se denota como $T|M$.

Definición 1.16 Un torneo T es **transitivo** si, para cualesquiera vértices p, q y r , si se tiene que $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow r$, entonces también se tiene $p \rightarrow r$.

Teorema 1.17 (Teor. 9, [14]) Dado un torneo $T = (V, E)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. T es transitivo.
2. La secuencia de valencias de salida de T es $(0, 1, \dots, n - 1)$.

3. T es acíclico.

Observación 1.18 Gracias a la caracterización de la secuencia de valencias de salida para los torneos transitivos, existe un único torneo transitivo con k vértices, salvo isomorfismo. Denotaremos por T_k a dicho torneo.

Definición 1.19 Un **intervalo** en un torneo $T = (V, E)$ es un subconjunto $I \subseteq V$ tal que $\forall a, b \in I$ y $\forall x \in V - I$, $(a, x) \in E$ si y solo si $(b, x) \in E$.

Observación 1.20 El conjunto vacío, V y $\{x\}$ con $x \in V$ son intervalos en cualquier torneo, a estos intervalos los llamaremos intervalos triviales.

Definición 1.21 Los torneos que solo presentan intervalos triviales se denominan torneos **indescomponibles**, en caso contrario, se dicen torneos **descomponibles**.

Definición 1.22 Dado un torneo $T = (V, E)$, decimos que es **fuertemente conexo** si para cualesquiera $x, y \in V$ existen un camino dirigido de x hacia y y de y hacia x .

Proposición 1.23 ([14]) Cualquier torneo, con al menos tres vértices, es indescomponible si y solo si es fuertemente conexo.

Definición 1.24 Sea T un torneo y (v_1, v_2, \dots, v_n) una enumeración de los vértices de T . Si $v_i v_j$ es una arista de T con $j < i$, entonces, $v_i v_j$ es una **arista de retroceso**.

Definición 1.25 Dado un torneo T , al grafo no dirigido B cuyos vértices son los vértices de T y cuyas aristas son los pares no ordenados correspondientes a las aristas de retroceso de T se le denomina el **grafo "backedge"** de T .

Observación 1.26 Si se fija una ordenación en el conjunto de vértices, el grafo backedge define de forma inequívoca el torneo.

Corolario 1.27 Si T es un torneo transitivo, el digrafo de línea asociado a T admite una ordenación acíclica.

Demostración: Sea C un ciclo dirigido de la forma $v_0 e_1 \dots e_n v_0$ contenido en T , entonces existe un ciclo dirigido C' dado por la secuencia de aristas $e_1 \dots e_n$ en el digrafo de línea asociado a T . Si T es un torneo transitivo, se tiene que T es acíclico por el Teorema 1.17. Por tanto, si T no contiene ciclos, $L(T)$ es acíclico y admite una ordenación acíclica, por la Proposición 1.10. \square

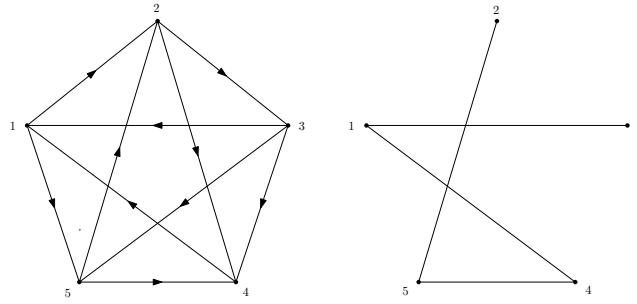


Figura 1.4: Un torneo y el grafo *backedge* correspondiente a la ordenación de los vértices del torneo indicada.

1.2. Topologías

En las siguientes líneas recordaremos las primeras definiciones de espacios topológicos, necesarias para la comprensión de las topologías que definiremos posteriormente sobre torneos, para ello seguimos el libro de Ayala, Domínguez y Quintero [2] como referencia.

Definición 1.28 Una **topología** definida sobre un conjunto X , es un conjunto \mathcal{T} de subconjuntos de X , llamados los **abiertos** de \mathcal{T} , que cumple las siguientes propiedades:

1. \emptyset y X están en \mathcal{T} .
2. La intersección finita de conjuntos de \mathcal{T} está en \mathcal{T} .
3. La unión arbitraria de conjuntos de \mathcal{T} está en \mathcal{T} .

El complementario de un conjunto abierto de la topología se denomina conjunto **cerrado**. El par (X, \mathcal{T}) se denomina **espacio topológico**. Si la segunda propiedad no se impone, el par (X, \mathcal{T}) se denomina **espacio topológico generalizado** y a \mathcal{T} se le denomina topología generalizada sobre X .

Definición 1.29 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, la **clausura** de un conjunto $A \subseteq X$ es el conjunto: $\overline{A} = \{x \in X \mid \forall G \in \mathcal{T} \text{ con } x \in G, G \cap A \neq \emptyset\}$. De forma equivalente, la clausura de A es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A .

Definición 1.30 Dado un espacio topológico (X, \mathcal{T}) , se dice que \mathcal{T} es la **topología discreta** si todos los conjuntos unitarios son abiertos. La topología discreta

dada sobre un conjunto X se corresponde con el conjunto potencia de X , notado por $\mathcal{P}(X)$, esto es, con la colección de todos los subconjuntos de X .

Definición 1.31 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, se dice que una subcolección $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ es una **base** de la topología \mathcal{T} si todo abierto de \mathcal{T} distinto del vacío es unión de abiertos de \mathcal{B} . Equivalentemente, \mathcal{B} es una base de \mathcal{T} si para cada abierto U y para cada $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Definición 1.32 Dado un espacio topológico (X, \mathcal{T}) , se dice que una subcolección $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ es una **subbase** si \mathcal{T} es la topología más pequeña que contiene a \mathcal{S} . Equivalentemente, todo conjunto abierto de \mathcal{T} puede escribirse como una unión de intersecciones finitas de elementos de \mathcal{S} .

Definición 1.33 Se dice que (X, \mathcal{T}) es un **espacio de Alexandroff** o que \mathcal{T} es una **topología de Alexandroff** si la intersección arbitraria de abiertos de \mathcal{T} es un abierto.

Definición 1.34 Un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es **conexo** si existen abiertos U, V de la topología \mathcal{T} no vacíos cumpliendo que $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Definición 1.35 Sean (V_1, \mathcal{T}_1) y (V_2, \mathcal{T}_2) dos espacios topológicos. Dada una función $f: V_1 \rightarrow V_2$, se dice que f es **continua** si $f^{-1}(O)$ es \mathcal{T}_1 para cada abierto O de \mathcal{T}_2 . Si f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son continuas, f recibe el nombre de **homeomorfismo**.

Definición 1.36 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, se dice que X es un **espacio T_0** si para dos elementos cualesquiera de X , existe un conjunto abierto que contiene solo a uno de dichos elementos.

Definición 1.37 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio de Alexandroff y $x \in X$, se conoce como **abierto minimal** de x , notado por U_x , al menor abierto que contiene a x .

Dado un elemento $x \in X$, el cálculo de U_x consiste en realizar la intersección de todos los abiertos de \mathcal{T} que contengan a x . Este cálculo tiene sentido en los espacios de Alexandroff, donde la intersección arbitraria de abiertos es un abierto.

Lema 1.38 (Lema 1.13, [13]) Si (X, \mathcal{T}) es un espacio de Alexandroff, entonces el conjunto $\mathcal{B} = \{U_x \mid x \in X\}$ es una base de \mathcal{T} .

1.3. Espacios finitos

En las siguientes líneas, se incorporan las nociones de espacios topológicos finitos T_0 y conjuntos parcialmente ordenados, usando las notas manuscritas de May [13] como referencia.

Es inmediato el siguiente resultado.

Lema 1.39 (Lema 1.3, [13]) *Todo espacio topológico finito es de Alexandroff.*

Definición 1.40 *Se dice que una relación binaria R es un **orden parcial** sobre el conjunto X si la relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Dicha relación suele notarse por \leq .*

*Al par (X, \leq) se le denomina **conjunto parcialmente ordenado** o **poset**.*

Definición 1.41 *Sea (X, \leq) un poset y $X' \subseteq X$. El par formado por X' y el orden inducido sobre X' es un **subposet** de (X, \leq) .*

Definición 1.42 *Dado el poset (X, \leq) , un elemento $x \in X$ es **minimal** si $\forall z \in X, z \leq x$ implica $x = z$.*

Observación 1.43 *Dado un espacio topológico finito (X, \mathcal{T}) , podemos definir la siguiente comparación: $x \leq y$ si $x \in U_y$, lo que da lugar a un poset si el espacio topológico finito es T_0 . Si (X, \leq) es un poset, podemos definir una topología sobre X tomando como base la colección de los conjuntos $U_x = \{y \in X \mid y \leq x\}$.*

Se establece así una correspondencia biyectiva entre los espacios topológicos finitos T_0 y los conjuntos parcialmente ordenados finitos, como se recoge en el siguiente resultado.

Proposición 1.44 ([13]) *Para un conjunto finito X , las topologías sobre X están en correspondencia biyectiva con las relaciones reflexivas y transitivas \leq sobre X . La topología correspondiente a \leq es T_0 si y solo si la relación \leq es un orden parcial.*

En muchas ocasiones se omitirá las palabras topológico y T_0 a la hora de hablar de espacios topológicos finitos T_0 , nombrándolos simplemente como espacios finitos.

Definición 1.45 Sea (X, \mathcal{T}) un espacio finito con el orden sobre X asociado a \mathcal{T} , dados $x, y \in X$ tales que $y \leq x$, se dice que y es **sucesor inmediato** de x si no existe $z \in X$ cumpliendo que $y \leq z \leq x$, lo que se denota por $y \prec x$.

Definición 1.46 Dado un poset (X, \leq) , es posible representar las relaciones entre sus elementos mediante un digrafo denominado **diagrama de Hasse** asociado a X , denotado por $\mathcal{H}(X)$, cuyos vértices son los elementos de X y cuyas aristas son los pares ordenados (x, y) tales que $y \prec x$.

El diagrama de Hasse de X , admite una descomposición por niveles al colocar los minimales en el nivel 0 y a cada $x \in X$ se le adjudica el nivel k si k es el máximo de las longitudes de los caminos dirigidos de x hacia un minimal. Dicha descomposición nos ayudará a realizar una representación gráfica de $\mathcal{H}(X)$.

Veamos ahora una serie de nociones básicas para los conjuntos parcialmente ordenados.

Definición 1.47 Dado (X, \leq) un poset, una **cadena** es un subconjunto C de X tal que si $x, y \in C$, entonces se tiene la comparación $x \leq y$ o $y \leq x$. Una **cadena maximal** es una cadena que no está estrictamente contenida en ninguna otra cadena. La **longitud** de una cadena se corresponde con $|C| - 1$. La **altura** del poset es la longitud máxima de todas las cadenas de X . La **altura de un elemento** x del poset es la altura del subposet correspondiente al subconjunto U_x de X con el orden inducido.

Definición 1.48 Sea (X, \leq) un poset, se dice que X es **homogéneo** de grado d si todas las cadenas maximales tienen longitud d .

Ejemplo 1.49 Sea $X = \{a, b, c, d\}$ un espacio finito, con la topología $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a, b, c, d\}, \{b, d\}, \{c\}, \{d\}, \{b, c, d\}, \{c, d\}\}$. Los abiertos minimales asociados a cada elemento son:

- $U_a = \{a, b, c, d\}$.
- $U_b = \{a, b, c, d\} \cap \{b, d\} \cap \{b, c, d\} = \{b, d\}$.
- $U_c = \{a, b, c, d\} \cap \{c\} \cap \{b, c, d\} \cap \{c, d\} = \{c\}$.
- $U_d = \{a, b, c, d\} \cap \{b, d\} \cap \{d\} \cap \{b, c, d\} \cap \{c, d\} = \{d\}$.

Los abiertos minimales dan lugar a las siguientes comparaciones:

$$b \leq a, c \leq a, d \leq a, d \leq b$$

Por tanto, el diagrama de Hasse asociado al espacio finito (X, \mathcal{T}) es el digrafo con conjunto de vértices X y las aristas (a, b) , (a, d) , (a, c) y (b, d) . Una representación gráfica de $\mathcal{H}(X)$ se muestra en la Figura 1.5.

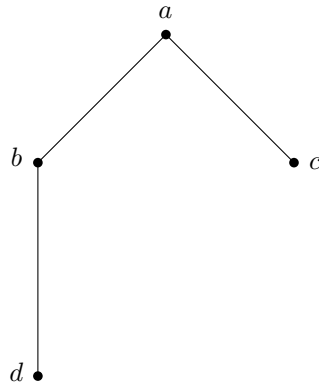


Figura 1.5: Diagrama de Hasse asociado a (X, \mathcal{T}) .

El poset (X, \leq) tiene dos cadenas maximales $\{a, c\}$ y $\{a, b, d\}$, cuyas longitudes son 1 y 2, respectivamente. Por tanto, no es un poset homogéneo al no tener todas las cadenas maximales la misma longitud.

Capítulo 2

Topologías sobre torneos

En este capítulo expondremos las tres topologías que vamos a estudiar sobre torneos: la topología gráfica, la topología de aristas compatibles independientes y la topología de caminos dirigidos maximales. Daremos tanto su definición como diversas propiedades asociadas a cada una de ellas, tales como cuando dan lugar a espacios topológicos T_0 , cuando son la topología discreta o cuando originan un espacio topológico conexo. Mientras que no se indique lo contrario, los torneos considerados son finitos.

2.1. Topología gráfica

La primera topología que vamos a considerar es la topología gráfica. Seguiremos el artículo de Dammak y Salem [7], donde se define la topología gráfica para torneos y se demuestran algunas propiedades básicas de esta topología. Previamente, esta topología había sido definida para grafos simples por Jafarian Amiri et al. en [10]. En [7] los autores intentan obtener para la topología gráfica sobre torneos resultados análogos a los obtenidos para grafos simples, aunque en algunas ocasiones no es posible, como para la compacidad, y en otras el estudio es considerablemente más complejo, como en el caso de la conexión o en la determinación de si la topología es o no la discreta.

Definición 2.1 *Dado un torneo $T = (V, E)$ indescomponible, consideramos el conjunto $\mathcal{B}_T = \{N_x^+ \mid x \in V\}$. Entonces, \mathcal{B}_T es base para una topología \mathcal{T}_T en V , llamada **topología gráfica** de T .*

Al ser T indescomponible y tener al menos 3 vértices, el conjunto N_x^- es no vacío para todo $x \in V$, porque de lo contrario, $V - \{x\}$ constituiría un intervalo no trivial de T . Veamos ahora que todo elemento de V se encuentra dentro de

algún N_x^+ : dado $y \in V$, existe $x \in N_y^-$ (al ser N_y^- no vacío) y se tiene que $y \in N_x^+$, teniendo en cuenta las definiciones. Entonces, $V = \cup_{x \in V} N_x^+$, lo que implica que \mathcal{B}_T es base de \mathcal{T}_T . En consecuencia, para que la definición anterior sea correcta, los torneos considerados a lo largo de la sección serán indescomponibles con al menos tres vértices.

Proposición 2.2 (Prop. 1.2, [7]) *Si $T = (V, E)$ es un torneo infinito localmente finito, se tiene que \mathcal{T}_T es una topología de Alexandroff.*

El siguiente lema nos proporcionará un procedimiento para calcular los abiertos minimales de la topología gráfica, U_x , $x \in V$, dado un torneo $T = (V, E)$.

Lema 2.3 (Lem 1.6, [7]) *Sea $T = (V, E)$ un torneo infinito localmente finito. Para cualquier $x \in V$, se tiene que $U_x = \bigcap_{y \in N_x^-} N_y^+$.*

Ejemplo 2.4 *Vamos a obtener la topología gráfica asociada al torneo indescomponible Q_6 .*

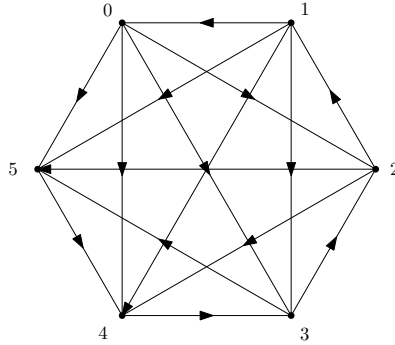


Figura 2.1: Torneo indescomponible Q_6 .

Comenzamos calculando los conjuntos de salida de cada uno de los vértices,

$$\begin{aligned} N_0^+ &= \{2, 3, 4, 5\}, N_1^+ = \{0, 3, 4, 5\}, N_2^+ = \{1, 4, 5\}, \\ N_3^+ &= \{2, 5\}, N_4^+ = \{3\}, N_5^+ = \{4\}. \end{aligned}$$

Usando el Lema 2.3, los abiertos minimales de la topología gráfica son:

$$\begin{aligned} U_0 &= N_1^+ = \{0, 3, 4, 5\}, & U_1 &= N_2^+ = \{1, 4, 5\}, \\ U_2 &= N_0^+ \cap N_3^+ = \{2, 5\}, & U_3 &= N_0^+ \cap N_1^+ \cap N_4^+ = \{3\}, \\ U_4 &= N_0^+ \cap N_1^+ \cap N_2^+ \cap N_5^+ = \{4\}, & U_5 &= N_0^+ \cap N_1^+ \cap N_2^+ \cap N_3^+ = \{5\}. \end{aligned}$$

Una representación gráfica del diagrama de Hasse del poset asociado a la topología gráfica se encuentra en la Figura 2.2.

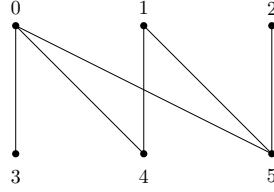


Figura 2.2: El diagrama de Hasse asociado a la topología gráfica de Q_6 .

Podemos concluir también que el poset asociado a Q_6 es homogéneo, ya que todas las cadenas maximales tienen longitud 1.

Enunciaremos ahora las principales propiedades de la topología gráfica, que nos permitirán determinar de forma efectiva algunos de los abiertos de la topología.

Proposición 2.5 (Prop. 2.2 y 2.3, [7]) Dado un torneo $T = (V, E)$ infinito localmente finito, los siguientes conjuntos son abiertos de \mathcal{T}_T :

$$M = \{x \in V \mid d^-(x) = \Delta^-\} \text{ y } M' = \{x \in V \mid d^+(x) = \delta^+\}.$$

Corolario 2.6 (Cor. 1.9, [7]) Sea $T = (V, E)$ un torneo infinito localmente finito. Para $x, z \in V$, si $U_x = U_z$, entonces $x = z$.

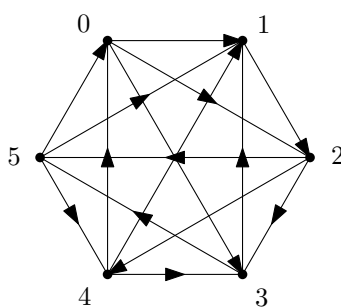
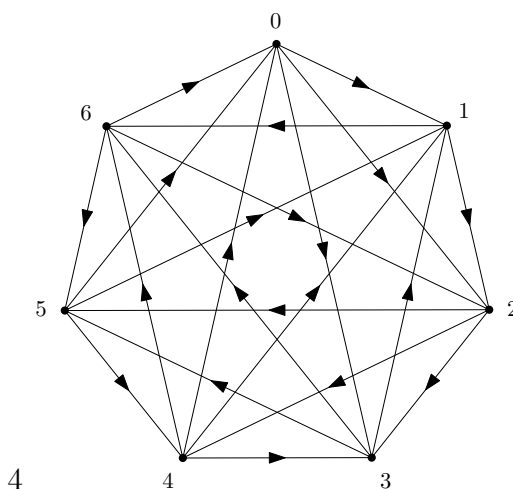
Observación 2.7 Como consecuencia del corolario anterior, la topología \mathcal{T}_T siempre es T_0 .

Lema 2.8 (Lema 1.4, [7]) Dado $T = (V, E)$ un torneo infinito localmente finito con al menos 5 vértices, entonces si $\delta^-(T) = 1$, la topología \mathcal{T}_T no es discreta.

El recíproco del Lema 2.8 no es cierto en general, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.9 Sea T el torneo de la Figura 2.3. Se tiene que $\delta^-(T) = 2$, pero la topología \mathcal{T}_T no es discreta, puesto que $U_0 = \{0, 1\}$ y $U_5 = \{4, 5\}$.

Ejemplo 2.10 Si consideramos T el torneo de la Figura 2.4, se tiene que $\delta^-(T) = 3$ y la topología \mathcal{T}_T es discreta, ya que todos los abiertos minimales son unitarios.

Figura 2.3: Torneo con $\delta^-(T) = 2$.Figura 2.4: Torneo con $\delta^-(T) = 3$.

Observación 2.11 *Observando los dos anteriores ejemplos, parece que no basta con el mínimo grado de entrada del torneo para poder dar una condición necesaria y suficiente para que la topología gráfica sea discreta. Quedaría como una cuestión abierta la obtención de una caracterización de los torneos para los que la topología gráfica es discreta.*

Los siguientes resultados nos aseguran la desconexión de la topología gráfica.

Proposición 2.12 (Prop. 3.3, [7]) *Sea $T = (V, E)$ un torneo con n vértices x_1, \dots, x_n tal que*

$$x_1 \rightarrow V - \{x_1, x_{n-1}, x_n\} \rightarrow x_{n-1} \leftarrow x_1.$$

Entonces, el conjunto $\{x_n\}$ es a la vez abierto y cerrado. Por tanto, (V, \mathcal{T}_T) es un espacio topológico desconexo.

Proposición 2.13 (Prop. 3.4, [7]) Dado un torneo $T = (V, E)$ con n vértices x_1, \dots, x_n tal que

$$x_n \rightarrow x_1 \rightarrow V - \{x_1, x_2, x_n\} \rightarrow x_n, \text{ con } x_1 \rightarrow x_2 \leftarrow x_n.$$

Se tiene que el conjunto $\{x_n\}$ es a la vez abierto y cerrado. En consecuencia, (V, \mathcal{T}_T) es un espacio topológico desconexo.

Observación 2.14 La Proposición 2.12 y la Proposición 2.13 son resultados que nos dan condiciones muy particulares sobre un torneo bajo las cuales la topología gráfica es desconexa. Estos resultados, en conjunto, se pueden ver como el análogo al Corolario 6.3 de [10]. Quedaría como cuestión abierta ver si es posible obtener resultados análogos al resto de resultados obtenidos para la topología gráfica sobre grafos simples en [10] en relación a la propiedad de conexión. Un paso previo a este estudio sería la obtención de la caracterización de los abiertos minimales de la topología gráfica.

2.2. Topología de aristas compatibles independientes

En esta sección se define la topología de aristas compatibles independientes al igual que se muestran varias propiedades de dicha topología para digrafos, de acuerdo con los trabajos recientes de Hassan y Zainy [8, 9].

Definición 2.15 Sea $D = (V, E)$ un digrafo, se define la **topología de aristas compatibles independientes** asociada, notada por \mathcal{T}_{ICE} , a partir de la subbase \mathcal{S}_{ICE} construida de la siguiente forma:

1. Generamos el conjunto \mathcal{S}' formado por los pares de aristas $\{a, b\}$ cumpliendo que ab y ba no son caminos dirigidos y que $\exists c \in E$ tal que $a \rightarrow c \rightarrow b$ es un camino dirigido.
2. Si la unión de todos los elementos de \mathcal{S}' es igual a E , concluimos que $\mathcal{S}_{ICE} = \mathcal{S}'$. En caso contrario, $\forall a \in E \setminus \bigcup_{A \in \mathcal{S}'} A$, añadimos el conjunto $\{a\}$ a \mathcal{S}' . Se tiene entonces que $\mathcal{S}_{ICE} = \mathcal{S}' \cup \mathcal{S}''$.

Una vez obtenida la subbase \mathcal{S}_{ICE} , para determinar \mathcal{T}_{ICE} es necesario calcular las intersecciones finitas de elementos de \mathcal{S}_{ICE} y posteriormente, obtener todas las posibles uniones.

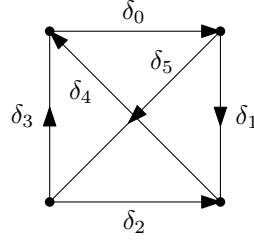


Figura 2.5: Torneo de 4 vértices.

Ejemplo 2.16 *Estudiamos la topología de aristas compatibles independientes asociada al torneo $T = (V, E)$ descrito en la Figura 2.5.*

La subbase de la topología \mathcal{T}_{ICE} es el conjunto $\mathcal{S}_{ICE} = \mathcal{S}' = \{\{\delta_0, \delta_2\}, \{\delta_3, \delta_1\}, \{\delta_5, \delta_4\}\}$, ya que \mathcal{S}'' es vacío al ser la unión de todos los elementos de \mathcal{S}' igual a E . Como las intersecciones de los elementos de la subbase son vacías, se tiene que $\mathcal{B}_{ICE} = \mathcal{S}_{ICE} \cup \{\emptyset\}$. Por tanto, tomando todas las uniones posibles, obtenemos que

$$\mathcal{T}_{ICE} = \{\emptyset, E, \{\delta_0, \delta_2\}, \{\delta_3, \delta_1\}, \{\delta_5, \delta_4\}, \{\delta_0, \delta_2, \delta_3, \delta_1\}, \{\delta_0, \delta_2, \delta_5, \delta_4\}, \{\delta_3, \delta_1, \delta_5, \delta_4\}\}.$$

Definición 2.17 *Sea $D = (V, E)$ un digrafo, para cada $a \in E$, se define el **conjunto de aristas compatibles independientes** de a , denotado por $A_{IC}(a)$, como el conjunto de aristas $b \in E$, distintas de a , que no forman un camino dirigido con a y para las que $\exists c \in E$ tal que $a c b$ es un camino dirigido.*

Estudiamos ahora varias propiedades de la topología de aristas compatibles independientes.

Proposición 2.18 *Dado un digrafo $D = (V, E)$ y la topología \mathcal{T}_{ICE} asociada, se cumple que dada cualquier arista $a \in E$, si $|A_{IC}(a)| \geq 2$ o $|A_{IC}(a)| = 0$, entonces el conjunto unitario $\{a\}$ es un abierto de \mathcal{T}_{ICE} . De modo inmediato, se deduce que, si $\forall a \in E$ se verifica que $|A_{IC}(a)| \geq 2$ o $|A_{IC}(a)| = 0$, entonces \mathcal{T}_{ICE} es discreta.*

Demostración: Sea $a \in E$, si $|A_{IC}(a)| \geq 2$, entonces $\exists b, b' \in E$ distintas tales que los conjuntos $\{a, b\}$ y $\{a, b'\}$ son abiertos de \mathcal{S}_{ICE} . Por tanto, la intersección de ambos conjuntos pertenece a \mathcal{T}_{ICE} , es decir, $\{a\}$ es un abierto de la topología \mathcal{T}_{ICE} . Si $|A_{IC}(a)| = 0$, por la construcción de la subbase \mathcal{S}_{ICE} , el conjunto $\{a\} \in \mathcal{S}''$ y, por tanto, $\{a\}$ es abierto de \mathcal{T}_{ICE} . \square

Proposición 2.19 *La topología de aristas compatibles independientes asociada a un torneo es una topología de Alexandroff.*

Demostración: Debemos demostrar que la intersección arbitraria de abiertos es un abierto. Al ser una topología generada a partir de la subbase \mathcal{S}_{ICE} , solo es necesario probar dicha propiedad con los elementos de \mathcal{S}_{ICE} .

Sea $\mathcal{S}_{ICE} = \{V_i \mid i \in J\}$ y sea $I \subseteq J$ un subconjunto no finito. Veamos que $\bigcap_{i \in I} V_i \in \mathcal{T}_{ICE}$. Para intersecciones finitas se tiene por definición de topología.

La intersección arbitraria de V_i da lugar a 2 casos diferentes:

1. Si $\bigcap_{i \in I} V_i = \emptyset$, entonces es abierta, al tratarse del conjunto vacío.
2. Si $\bigcap_{i \in I} V_i \neq \emptyset$, entonces $\exists a \in E$ tal que $a \in \bigcap_{i \in I} V_i$ y, en consecuencia, $a \in V_i, \forall i \in I$. Por la definición de \mathcal{S}_{ICE} , cada V_i es de la forma $\{a\}$ o $\{a, b_i\}$ para algún $b_i \neq a$. Al ser I infinito, hay más de 3 conjuntos en la intersección, suponemos que son $V_{i_1}, V_{i_2}, V_{i_3}$, así que dos de ellos son de la forma $\{a, b\}$ y $\{a, b'\}$ con $b \neq b'$. Por tanto, $\{a\} = \bigcap_{i \in I} V_i$, ya que $\{a\} = V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap V_{i_3} \supseteq \bigcap_{i \in I} V_i \supseteq \{a\}$. Entonces, $\bigcap_{i \in I} V_i = V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap V_{i_3} \in \mathcal{T}_{ICE}$, al ser la intersección de 3 abiertos. \square

Observación 2.20 *Para torneos finitos, se tiene directamente que \mathcal{T}_{ICE} es una topología de Alexandroff.*

Al ser \mathcal{T}_{ICE} una topología de Alexandroff, tiene sentido considerar el cálculo de los abiertos minimales. Para ello, usando la definición de \mathcal{S}_{ICE} , se tiene el siguiente resultado inmediato.

Lema 2.21 *Dado $a \in E$, se tiene que $U_a = \{a\}$ si $\exists b, b' \in E$ tales que $\{a, b\}$ y $\{a, b'\}$ están en \mathcal{S}' o si $\{a\} \in \mathcal{S}''$. Además, si $\exists! b$ tal que $\{a, b\} \in \mathcal{S}'$, entonces $U_a = \{a, b\}$.*

Ejemplo 2.22 *Aplicando el lema anterior, es fácil calcular los abiertos minimales de la topología de aristas compatibles independiente para el torneo representado en la Figura 2.5.*

$$U_{\delta_0} = U_{\delta_2} = \{\delta_0, \delta_2\}, U_{\delta_1} = U_{\delta_3} = \{\delta_3, \delta_1\}, U_{\delta_4} = U_{\delta_5} = \{\delta_4, \delta_5\}.$$

Observando los abiertos minimales, es inmediato deducir que \mathcal{T}_{ICE} no es T_0 , ni discreta.

Proposición 2.23 *El espacio topológico (E, \mathcal{T}_{ICE}) no es un espacio T_0 si y solo si $\exists a, b \in E$ distintas, tales que $A_{IC}(a) = \{b\}$ y $A_{IC}(b) = \{a\}$.*

Demostración: Si (E, \mathcal{T}_{ICE}) no es un espacio T_0 , existen dos elementos distintos de E cumpliendo que todo abierto que contiene a uno, también contiene al otro, es decir, $\exists a, b \in E$ distintas tales que $\{a, b\} \subseteq U_a \cap U_b$. Por el Lema 2.21, los abiertos minimales son de cardinal a lo sumo 2, entonces $U_a = U_b = \{a, b\}$. Al no ser conjuntos unitarios los abiertos minimales de a y b , se tiene que $\exists! c \in E$ tal que $\{a, c\}$ es abierto y que $\exists! c' \in E$ tal que $\{b, c'\}$ es abierto, pero al ser $U_a = U_b$, se deduce que $c = b$ y $c' = a$. Por tanto, $A_{IC}(a) = \{b\}$ y $A_{IC}(b) = \{a\}$.

Recíprocamente, si $\exists a, b \in E$ distintas, tales que $A_{IC}(a) = \{b\}$ y $A_{IC}(b) = \{a\}$, entonces a y b están contenidas en un único camino dirigido de longitud 3 de la forma acb o bca . Por ende, $U_a = U_b = \{a, b\}$ y la topología \mathcal{T}_{ICE} no es T_0 , al no poder encontrar un abierto que contenga solo una de las aristas a o b . \square

Observación 2.24 *Si $|A_{IC}(a)| \geq 2$ o $|A_{IC}(a)| = 0 \forall a \in E$, el espacio topológico (E, \mathcal{T}_{ICE}) es T_0 , al ser un espacio topológico discreto.*

Proposición 2.25 *La topología \mathcal{T}_{ICE} es disconexa para cualquier digrafo.*

Demostración: Para probar que la topología \mathcal{T}_{ICE} es disconexa, veamos que existen dos abiertos disjuntos tales que su unión es E .

Sea $E' = \{a \in E \mid |U_a| = 1 \text{ y } \nexists b \text{ con } a \in U_b\}$. Definimos ahora los conjuntos

$$H_1 = \bigcup_{a \in E, |U_a|=2} U_a \quad H_2 = \bigcup_{a \in E'} U_a,$$

observando que son conjuntos abiertos de la topología \mathcal{T}_{ICE} al ser uniones de abiertos minimales y que $E = H_1 \cup H_2$. Entonces, si se verificara que $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, tendríamos probado que \mathcal{T}_{ICE} es disconexa. Estudiamos las siguientes 3 situaciones:

1. Si $H_1 = \emptyset$ y $H_2 \neq \emptyset$, se deduce que que la topología es discreta y, por tanto, disconexa.
2. Si $H_1 \neq \emptyset$ y $H_2 = \emptyset$, se tiene que $\forall a \in E, |U_a| = 2$. Tomamos $\tilde{a} \in E$ con $U_{\tilde{a}} = \{\tilde{a}, \tilde{b}\}$. Entonces, obtenemos que

$$E = H_1 \sqcup U_{\tilde{a}} = \left(\bigcup_{\substack{a \neq \tilde{a}, \tilde{b} \\ |U_a|=2}} U_a \right) \sqcup U_{\tilde{a}},$$

y, en consecuencia, \mathcal{T}_{ICE} es disconexo.

3. Si $H_1 \neq \emptyset$ y $H_2 \neq \emptyset$, entonces $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ y, en consecuencia, (E, \mathcal{T}_{ICE}) es desconexo, ya que los abiertos minimales que componen H_2 son disjuntos a los abiertos minimales definidos en H_1 , por construcción. \square

Observación 2.26 En [9], los autores afirman que dado un digrafo $D = (V, E)$, el espacio topológico (E, \mathcal{T}_{ICE}) es conexo si y solo si las intersecciones dos a dos de los conjuntos de \mathcal{S}_{ICE} son no vacías. Esta condición no se verifica nunca, veamos por qué.

Dado un digrafo $D = (V, E)$, si consideramos los abiertos V_i que conforman la subbase \mathcal{S}_{ICE} , veamos que $\exists i \neq j$ con $V_i \cap V_j = \emptyset$. Al tener los abiertos V_i cardinal 1 o 2, supongamos primero que todos los V_i son unitarios. Entonces, se tiene que $\forall i \neq j$, la intersección $V_i \cap V_j$ es vacía. Si suponemos que existe $V_1 = \{a, c\}$, entonces $\exists b$ formando el camino dirigido abc . Sea V_2 tal que $b \in V_2$, por consiguiente, se tiene que $a, c \notin V_2$, ya que tanto ab como bc son caminos dirigidos, entonces se deduce que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

2.3. Topología de caminos maximales

Para finalizar el capítulo, introduciremos la topología de caminos dirigidos maximales presentando algunas de sus propiedades. Partimos del trabajo de Laping y Balingit [11], donde se define la topología generalizada de caminos dirigidos maximales.

Definición 2.27 Sea $D = (V, E)$ un digrafo y sea $\{P_1, \dots, P_n\}$ el conjunto de todos los caminos dirigidos maximales de D . Se define la **topología de caminos dirigidos maximales**, notada por \mathcal{T}_{PM} , a partir de la subbase $\mathcal{S}_{PM} = \{M_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$, donde M_i es el conjunto de las aristas que conforman el camino maximal P_i .

Ejemplo 2.28 Al igual que hicimos con la topología \mathcal{T}_{ICE} , obtendremos los abiertos de la topología \mathcal{T}_{PM} para el torneo representado en la Figura 2.5.

Primero debemos considerar todos los caminos dirigidos maximales del torneo, que son los siguientes:

- $P_1 = \delta_0 \delta_5 \delta_2 \longrightarrow M_1 = \{\delta_0, \delta_5, \delta_2\}$.
- $P_2 = \delta_3 \delta_0 \delta_1 \longrightarrow M_2 = \{\delta_3, \delta_0, \delta_1\}$.
- $P_3 = \delta_1 \delta_4 \longrightarrow M_3 = \{\delta_1, \delta_4\}$.

- $P_4 = \delta_2 \delta_4 \delta_0 \longrightarrow M_4 = \{\delta_2, \delta_4, \delta_0\}$.
- $P_5 = \delta_5 \delta_3 \longrightarrow M_5 = \{\delta_5, \delta_3\}$.

Entonces, la subbase es el conjunto $\mathcal{S}_{PM} = \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\}$. Para obtener la base de la topología, hay que calcular las intersecciones finitas de elementos de \mathcal{S}_{PM} , y se tiene que $\mathcal{B}_{PM} = \mathcal{S}_{PM} \cup \{\emptyset, \{\delta_0\}, \{\delta_1\}, \{\delta_0, \delta_2\}, \{\delta_3\}, \{\delta_4\}, \{\delta_5\}\}$. Una vez obtenida la base \mathcal{B}_{PM} , la topología \mathcal{T}_{PM} se consigue tomando todas las uniones posibles de elementos de la base.

Definición 2.29 Sea $D = (V, E)$ un digrafo, para cada $a \in E$, se define la **familia de conjuntos de caminos dirigidos maximales** de a , denotado por $PM_P(a)$, como la colección de caminos dirigidos maximales que contienen a la arista a , es decir, $PM_P(a) = \{P_i \mid a \in P_i\}$. A partir del conjunto $PM_P(a)$, se define la **familia de conjuntos de aristas de caminos dirigidos maximales** de a como $PM(a) = \{M_i \mid P_i \in PM_P(a)\}$.

Observación 2.30 La topología \mathcal{T}_{PM} es una topología de Alexandroff para los digrafos finitos que vamos a considerar a lo largo de esta sección. Omitiremos en lo que sigue la palabra dirigido a la hora de considerar los caminos maximales.

El siguiente resultado inmediato nos proporciona los abiertos minimales de \mathcal{T}_{PM} .

Lema 2.31 Para un digrafo $D = (V, E)$ cualquiera, si $a \in E$, se tiene que $U_a = \bigcap_{M_i \in PM(a)} M_i$.

Proposición 2.32 La topología \mathcal{T}_{PM} no es discreta si y solo si $\exists a, b \in E$ distintas tales que todos los caminos maximales que contienen a la arista a , también contienen a la arista b .

Demostración: Si \mathcal{T}_{PM} no es discreta, entonces $\exists a \in E$ tal que $|U_a| \geq 2$. Por el Lema 2.31, se deduce que $|U_a| \geq 2$ si y solo si $\exists b \in E$ distinta de a tal que $b \in M_i$, para todo $M_i \in PM(a)$, es decir, b está contenida en todos los caminos maximales donde a está contenida. \square

Proposición 2.33 Dado un digrafo $D = (V, E)$, la topología \mathcal{T}_{PM} no es T_0 si y solo si existen dos aristas distintas tales que todo camino maximal que contiene a una, también contiene a la otra.

Demostración: Si (E, \mathcal{T}_{PM}) no es un espacio T_0 si existen $a, b \in E$ distintas tales que no pueden ser separadas por un abierto. En consecuencia, se tiene que $\{a, b\} \subseteq U_a \cap U_b$. Usando el Lema 2.31, como $b \in U_a \cap U_b \subseteq U_a$, se deduce que $b \in M_i$ para todo $M_i \in PM(a)$. Para la arista a se tendría el mismo resultado.

Recíprocamente, si existen $b, c \in E$ distintas tales que b está contenida en todos los caminos que contienen a c y todos los caminos donde b está contenida también contienen a c , entonces $\{b, c\} \subseteq U_b \cap U_c$, por el Lema 2.31. Por tanto, el espacio topológico (E, \mathcal{T}_{PM}) no es T_0 , pues no podemos encontrar un abierto que contenga solo a una de estas aristas. \square

Observación 2.34 Aunque la Proposición 2.32 y la Proposición 2.33 puedan parecer equivalentes, dado un digrafo $D = (V, E)$, si el espacio topológico (E, \mathcal{T}_{PM}) es T_0 , no se tiene necesariamente que \mathcal{T}_{PM} es la topología discreta. Para ilustrar este hecho, observamos en el Ejemplo 2.28 que el espacio (E, \mathcal{T}_{PM}) es T_0 , ya que no existen dos aristas distintas verificando que todos los caminos maximales que contienen a una de las aristas, también contienen a la otra. En cambio, la topología \mathcal{T}_{PM} no es discreta, ya que todos los caminos que contienen a δ_2 , también contienen a δ_0 y, por tanto, $\{\delta_2\}$ no pertenece a \mathcal{T}_{PM} .

Proposición 2.35 Si un torneo $T = (V, E)$ es transitivo, el espacio topológico (E, \mathcal{T}_{PM}) es disconexo.

Demostración: Dado T_k , el torneo transitivo de k vértices, por el Teorema 1.17, es posible encontrar una enumeración de sus vértices verificando que la secuencia de valencias de salida es $(0, 1, \dots, k - 1)$. Sea a la arista con inicio el vértice con grado de salida $k - 1$ y final el vértice con grado de salida 0. Entonces, a está contenida solo en el camino maximal $P = a$ y, por tanto, $U_a = \{a\}$. Si consideramos el abierto $W = E \setminus \{a\} = \cup \{M_i \mid M_i \in PM(b), b \in E, b \neq a\}$, se tiene que $E = W \cup U_a$ y $W \cap U_a = \emptyset$. En conclusión, (E, \mathcal{T}_{PM}) es un espacio topológico disconexo. \square

Observación 2.36 Quedaría como cuestión abierta obtener una caracterización de los torneos para los que la topología de caminos maximales es disconexa. Al ser los abiertos en esta topología uniones de caminos, podrían ser útiles los resultados sobre la noción de arboricidad lineal. Recordemos que la arboricidad lineal de un digrafo D , es el número mínimo de dibosque lineales en los que se pueden dividir el conjunto de aristas de D . Los dibosques lineales son digrafos cuyas componentes conexas son caminos. Algunas resultados relacionados con la arboricidad lineal pueden encontrarse en [15]

Capítulo 3

Comparación de topologías

En el transcurso de este capítulo que relacionarán las tres topologías definidas en el capítulo anterior. Además de los resultados obtenidos, presentaremos numerosos ejemplos.

3.1. Comparación de las topologías \mathcal{T}_{ICE} y \mathcal{T}_{PM}

En esta sección compararemos la topología de aristas compatibles independientes y la topología de caminos dirigidos maximales. Para ello, se obtendrán en primer lugar, los espacios topológicos sobre los cuatro torneos de cuatro vértices no isomorfos. Posteriormente, demostraremos algunos resultados que relacionan dichas topologías.

Ejemplo 3.1 *Calculemos las topologías \mathcal{T}_{ICE} y \mathcal{T}_{PM} de los 4 torneos no isomorfos de 4 vértices, notados por $F_i = (V_i, E_i)$ con $i \in \{1, \dots, 4\}$, recogidos en el apéndice de [14], cuyas representaciones gráficas se encuentran en la Figura 3.1.*

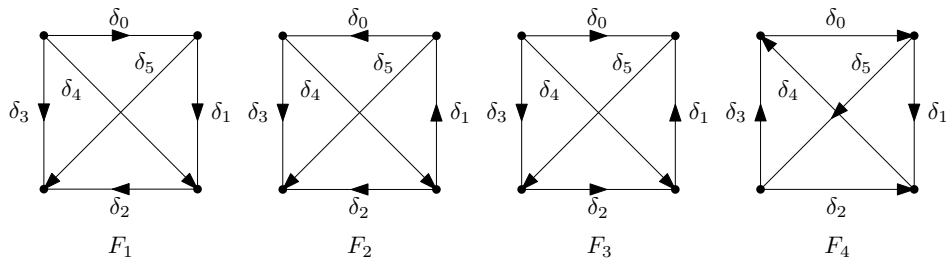


Figura 3.1: Torneos de 4 vértices no isomorfos.

Torneo $F_1 = (V_1, E_1)$ La subbase de la topología \mathcal{T}_{ICE} es el conjunto \mathcal{S}_{ICE} que se forma a partir de la unión de los conjuntos $\mathcal{S}' = \{\{\delta_0, \delta_2\}\}$ y $\mathcal{S}'' = \{\{\delta_1\}, \{\delta_3\}, \{\delta_4\}, \{\delta_5\}\}$. La base \mathcal{B}_{ICE} , calculada a partir de \mathcal{S}_{ICE} tomando las intersecciones finitas, coincide con \mathcal{S}_{ICE} añadiendo el conjunto vacío, ya que todos los elementos de la subbase son disjuntos dos a dos. Por la Proposición 2.23, como $A_{IC}(\delta_0) = \{\delta_2\}$ y $A_{IC}(\delta_2) = \{\delta_0\}$, se tiene que (E_1, \mathcal{T}_{ICE}) no es un espacio T_0 y, en consecuencia, \mathcal{T}_{ICE} no es discreta. Recordamos que la topología \mathcal{T}_{ICE} es siempre desconexa, por la Proposición 2.25.

Los caminos maximales P_i y los correspondientes conjuntos de aristas M_i son:

- $P_1 = \delta_0 \delta_1 \delta_2 \longrightarrow M_1 = \{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$.
- $P_2 = \delta_0 \delta_5 \longrightarrow M_2 = \{\delta_0, \delta_5\}$.
- $P_3 = \delta_4 \delta_2 \longrightarrow M_3 = \{\delta_4, \delta_2\}$.
- $P_4 = \delta_3 \longrightarrow M_4 = \{\delta_3\}$.

Se tiene que la subbase de la topología \mathcal{T}_{PM} es el conjunto $\mathcal{S}_{PM} = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$. Entonces, $\mathcal{B}_{PM} = \{\emptyset, \{\delta_0\}, \{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}, \{\delta_2\}, \{\delta_3\}, \{\delta_4, \delta_2\}, \{\delta_0, \delta_5\}\}$. Por la Proposición 2.33, la topología \mathcal{T}_{PM} es T_0 , ya que no existen dos aristas distintas verificando que todo camino maximal que contiene a una, también contiene a la otra. Por la Proposición 2.32, la topología \mathcal{T}_{PM} no es discreta, dado que todos los caminos maximales que contienen a δ_4 , también contienen a δ_2 y, por tanto, $U_{\delta_4} = \{\delta_2, \delta_4\}$. Al ser F_1 el torneo transitivo de 4 vértices, T_4 , la topología \mathcal{T}_{PM} es desconexa, por la Proposición 2.35.

Torneo $F_2 = (V_2, E_2)$ La subbase de la topología \mathcal{T}_{ICE} es el conjunto $\mathcal{S}_{ICE} = \mathcal{S}' = \{\{\delta_0, \delta_2\}, \{\delta_1, \delta_3\}, \{\delta_4, \delta_5\}\}$. Si tomamos las intersecciones finitas entre elementos de \mathcal{S}_{ICE} , obtenemos que $\mathcal{B}_{ICE} = \mathcal{S}_{ICE} \cup \{\emptyset\}$, al ser todos los elementos de \mathcal{S}_{ICE} disjuntos dos a dos. Como $A_{IC}(\delta_1) = \{\delta_3\}$ y $A_{IC}(\delta_3) = \{\delta_1\}$, por la Proposición 2.23, (E_2, \mathcal{T}_{ICE}) no es un espacio T_0 y, por tanto, \mathcal{T}_{ICE} no es discreta.

Los caminos maximales P_i y los correspondientes conjuntos de aristas M_i son:

- $P_1 = \delta_1 \delta_0 \delta_3 \longrightarrow M_1 = \{\delta_1, \delta_0, \delta_3\}$.
- $P_2 = \delta_0 \delta_4 \delta_2 \longrightarrow M_2 = \{\delta_0, \delta_4, \delta_2\}$.
- $P_3 = \delta_4 \delta_1 \delta_5 \longrightarrow M_3 = \{\delta_4, \delta_1, \delta_5\}$.

Se tiene que $\mathcal{S}_{PM} = \{M_1, M_2, M_3\}$. Entonces, $\mathcal{B}_{PM} = \{\emptyset, \{\delta_0\}, \{\delta_1\}, \{\delta_0, \delta_4, \delta_2\}, \{\delta_1, \delta_0, \delta_3\}, \{\delta_4\}, \{\delta_4, \delta_1, \delta_5\}\}$. Por la Proposición 2.32 y la Proposición 2.33, concluimos que (E_2, \mathcal{T}_{PM}) es un espacio T_0 y \mathcal{T}_{PM} no es discreta.

Si observamos \mathcal{B}_{PM} , no es posible encontrar dos abiertos disjuntos que recubran el conjunto de aristas, por tanto, la topología \mathcal{T}_{PM} es conexa para el torneo F_2 .

Torneo $F_3 = (V_3, E_3)$ La subbase de la topología \mathcal{T}_{ICE} es el conjunto $\mathcal{S}_{ICE} = \{\{\delta_0, \delta_2\}, \{\delta_4, \delta_5\}, \{\delta_3, \delta_1\}\}$. Para calcular la base \mathcal{B}_{ICE} tomamos las intersecciones finitas entre elementos de \mathcal{S}_{ICE} . Se tiene que $\mathcal{B}_{ICE} = \mathcal{S}_{ICE} \cup \{\emptyset\}$, al ser todos los elementos de \mathcal{S}_{ICE} disjuntos dos a dos. De la Proposición 2.23, se deduce que (E_3, \mathcal{T}_{ICE}) no es un espacio T_0 , ya que $A_{IC}(\delta_4) = \{\delta_5\}$ y $A_{IC}(\delta_5) = \{\delta_4\}$ y, en consecuencia, la topología \mathcal{T}_{ICE} no es discreta. Los caminos maximales P_i y los correspondientes conjuntos de aristas M_i son:

- $P_1 = \delta_0 \delta_5 \delta_2 \longrightarrow M_1 = \{\delta_0, \delta_5, \delta_2\}$.
- $P_2 = \delta_4 \delta_1 \delta_5 \longrightarrow M_2 = \{\delta_4, \delta_1, \delta_5\}$.
- $P_3 = \delta_3 \delta_2 \delta_1 \longrightarrow M_3 = \{\delta_3, \delta_2, \delta_1\}$.

Se tiene que la subbase de \mathcal{T}_{PM} es $\mathcal{S}_{PM} = \{M_1, M_2, M_3\}$. Entonces, $\mathcal{B}_{PM} = \{\emptyset, \{\delta_0, \delta_5, \delta_2\}, \{\delta_1\}, \{\delta_2\}, \{\delta_3, \delta_2, \delta_1\}, \{\delta_1, \delta_4, \delta_5\}, \{\delta_5\}\}$. Por la Proposición 2.32 y la Proposición 2.33, se tiene que (E_3, \mathcal{T}_{PM}) es un espacio T_0 y \mathcal{T}_{PM} no es discreta. La topología \mathcal{T}_{PM} es conexa para el torneo F_3 , ya que no es posible encontrar dos abiertos disjuntos que cubran el conjunto de aristas de F_3 .

Torneo $F_4 = (V_4, E_4)$ Se corresponde con el torneo de la Figura 2.5, para el que ya hemos estudiado las topologías \mathcal{T}_{ICE} y \mathcal{T}_{PM} resultantes. Veamos ahora que propiedades verifican cada una de ellas.

Por la Proposición 2.23, el espacio topológico (E_4, \mathcal{T}_{ICE}) no es T_0 ya que $A_{IC}(\delta_3) = \{\delta_1\}$ y $A_{IC}(\delta_1) = \{\delta_3\}$. Por consiguiente, \mathcal{T}_{ICE} no es la topología discreta.

Ya se ha probado que el espacio topológico (E_4, \mathcal{T}_{PM}) es T_0 , además \mathcal{T}_{PM} no es discreta (Observación 2.34). Por último, \mathcal{T}_{PM} es desconexa, ya que los abiertos $W_1 = \{\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ y $W_2 = \{\delta_4, \delta_5\}$ son disjuntos y $W_1 \cup W_2 = E_4$.

En resumen, hemos obtenido que para todos los torneos de la familia $\{F_i \mid i \in 1, \dots, 4\}$, la topología \mathcal{T}_{ICE} no es T_0 , no es discreta y tampoco es conexa. Mientras que la topología \mathcal{T}_{PM} es T_0 y no discreta para todo F_i , $i = 1, \dots, 4$, y conexa para F_2 y F_3 .

Los siguientes resultados nos ayudan a relacionar las topologías \mathcal{T}_{ICE} y \mathcal{T}_{PM} ya que, aunque \mathcal{T}_{ICE} no sea discreta, buena parte de sus abiertos básicos serán conjuntos unitarios.

Proposición 3.2 *Sea $D = (V, E)$ un digrafo y sea $a \in E$, entonces el conjunto $\{a\} \in \mathcal{S}_{ICE}$ si y solo si se verifica alguno de estos dos casos:*

1. $\forall P_i \in PM_P(a)$ se tiene que $l(P_i) \leq 2$.
2. $\max\{l(P) \mid P \in PM_P(a)\} = 3$ y si $P \in PM_P(a)$ verifica que $l(P) = 3$, $\exists b, c \in E$ distintas con $P = bac$.

Demostración: Dada $a \in E$, el conjunto unitario $\{a\} \in \mathcal{S}_{ICE}$ si y solo si $\{a\} \in \mathcal{S}''$. Por la construcción de \mathcal{S}_{ICE} , esto ocurre únicamente si no existe $b \in E$ distinta de a tal que $\{a, b\} \in \mathcal{S}'$, lo que es equivalente a que $A_{IC}(a) = \emptyset$. El conjunto $A_{IC}(a)$ es vacío si y solo si o bien todos los caminos maximales donde a está contenida son de longitud a lo sumo 2 o bien el máximo de la longitud de los caminos maximales que contienen a la arista a es 3, y, en este último caso todos los caminos maximales que tengan dicha longitud son de la forma bac , con $b, c \in E$ distintas. \square

Proposición 3.3 *Sea $D = (V, E)$ un digrafo y sea $a \in E$, entonces el conjunto $\{a\} \in \mathcal{B}_{ICE}$ si y solo si se verifica alguno de estos tres casos:*

1. $\forall P_i \in PM_P(a)$ se tiene que $l(P_i) \leq 2$.
2. $\max\{l(P) \mid P \in PM_P(a)\} = 3$ y si $P \in PM_P(a)$ verifica que $l(P) = 3$, $\exists b, c \in E$ distintas con $P = bac$.
3. $\exists P_1, P_2 \in PM_P(a)$ distintos con $l(P_i) \geq 3$, $i = 1, 2$.

Demostración: Dada $a \in E$, el conjunto unitario $\{a\} \in \mathcal{B}_{ICE}$ si y solo si $|A_{IC}(a)| = 0$ o $|A_{IC}(a)| \geq 2$, por la Proposición 2.18. Los dos primeros casos se verifican si y solo si $|A_{IC}(a)| = 0$, y ya han sido probados en la Proposición 3.2. Veamos que ocurre si $|A_{IC}(a)| \geq 2$. El cardinal del conjunto $A_{IC}(a)$ es mayor o igual que 2 si y solo si $\exists b, c \in E$ distintas tales que $\{a, b\}$ y $\{a, c\}$ son abiertos de \mathcal{S}_{ICE} . Recordemos que los conjuntos de cardinal 2 de la subbase \mathcal{S}_{ICE} definen caminos de longitud 3, con extremos los elementos del conjunto. Por tanto, $\{a, b\}$ y $\{a, c\}$ son abiertos de \mathcal{S}_{ICE} si y solo si existen $d, d' \in E$, no necesariamente distintas, formando dos caminos de la siguiente forma: $P_b = adb$ y $P_c = ad'c$. Los caminos P_b y P_c están contenidos en dos caminos maximales diferentes P_1 y P_2 , con al menos 3 aristas cada uno y conteniendo la arista a , como queríamos probar.

Recíprocamente, partiendo de dos caminos maximales de longitud al menos tres que contengan a la arista a y sean diferentes, obtenemos dos caminos de longitud tres diferentes comenzando en a , lo que prueba que $|A_{IC}(a)| \geq 2$. \square

Para comparar ambas topologías, utilizaremos la relación “ser más fina” que podemos considerar sobre las topologías definidas sobre un mismo conjunto.

Definición 3.4 Sean \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 dos topologías definidas sobre un conjunto X , se dice que \mathcal{T}_1 es más **fina** que \mathcal{T}_2 si $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$, es decir, todos los abiertos de \mathcal{T}_2 son abiertos de \mathcal{T}_1 .

Observación 3.5 Intuitivamente tiene más sentido, estudiar si la topología \mathcal{T}_{PM} es más fina que la topología \mathcal{T}_{ICE} y no al revés, ya que la condición para que \mathcal{T}_{ICE} sea \mathcal{T}_0 es más restrictiva que para la topología \mathcal{T}_{PM} .

Ejemplo 3.6 Veamos para qué torneos del Ejemplo 3.1 se tiene que la topología \mathcal{T}_{PM} es más fina que la topología \mathcal{T}_{ICE} , para ello observamos la base de cada una de las topologías.

Torneo F₁ El abierto $\{\delta_0, \delta_2\}$ de \mathcal{T}_{ICE} no es abierto de \mathcal{T}_{PM} y, por tanto, \mathcal{T}_{PM} no es más fina que \mathcal{T}_{ICE} . También se tiene que $\mathcal{T}_{PM} \not\subseteq \mathcal{T}_{ICE}$, ya que el abierto $\{\delta_0, \delta_5\}$ de \mathcal{T}_{PM} no es abierto de \mathcal{T}_{ICE} .

Torneo F₂ El conjunto $\{\delta_4, \delta_5\}$ es abierto de \mathcal{T}_{ICE} pero no es abierto de \mathcal{T}_{PM} . En consecuencia, \mathcal{T}_{PM} y \mathcal{T}_{ICE} no son comparables tampoco para F_2 .

Torneo F₃ Se tiene que el abierto $\{\delta_3, \delta_1\}$ de \mathcal{T}_{ICE} no es abierto de \mathcal{T}_{PM} . Por ende, \mathcal{T}_{PM} y \mathcal{T}_{ICE} tampoco son comparables en este caso.

Torneo F₄ Todos los abiertos de \mathcal{T}_{ICE} son abiertos de \mathcal{T}_{PM} . Por tanto, \mathcal{T}_{PM} es más fina que \mathcal{T}_{ICE} .

Observación 3.7 Queda como cuestión abierta estudiar para torneos de mayor tamaño qué condiciones deben cumplir para que la topología \mathcal{T}_{PM} sea más fina que la topología \mathcal{T}_{ICE} es una de la posibles continuaciones que da pie esta memoria.

3.2. Comparación de la topología gráfica con \mathcal{T}_{ICE} y \mathcal{T}_{PM}

En un torneo, para poder comparar la topología gráfica, definida sobre el conjunto de vértices, y las topologías de aristas compatibles independientes y de caminos dirigidos maximales, definidas sobre el conjunto de aristas, es necesario realizar alguna transformación en el torneo que nos permita considerar sus aristas como vértices de otro torneo sobre el que definir la topología gráfica.

Una primera aproximación consiste en considerar el digrafo de línea de un torneo, es decir, el digrafo cuyo conjunto de vértices es el conjunto de aristas del torneo y cuyo conjunto de aristas viene determinado por los caminos de longitud 2 del torneo. La construcción del digrafo de línea para un torneo concreto puede observarse en la Figura 3.2.

Además, dado un torneo $T = (V, E)$, si es posible encontrar una ordenación de E tal que $L(T)$ es el grafo *backedge* de otro torneo T' (Observación 1.26), obtendríamos un torneo cuyos vértices son las aristas de T .

Ejemplo 3.8 Consideramos el torneo F_1 de la Figura 3.1 y el digrafo de línea asociado $L(F_1)$.

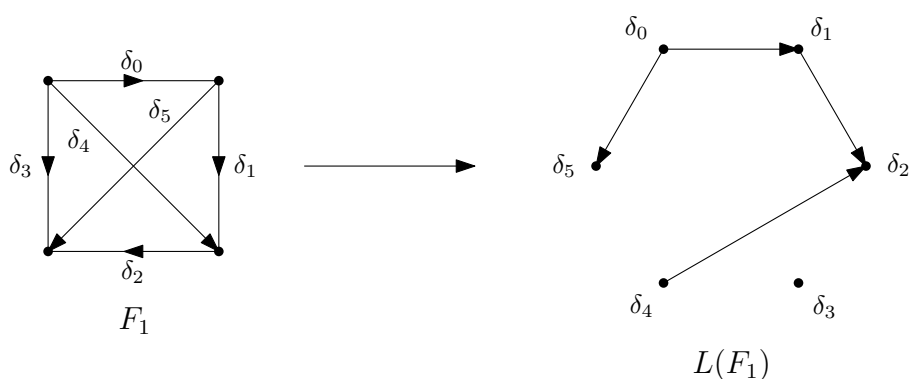


Figura 3.2: Digrafo de línea asociado a F_1 .

Si cambiamos la enumeración de los vértices de $L(F_1)$ por la enumeración propuesta en la Figura 3.3, el digrafo de línea asociado es el grafo *backedge* de un nuevo torneo.

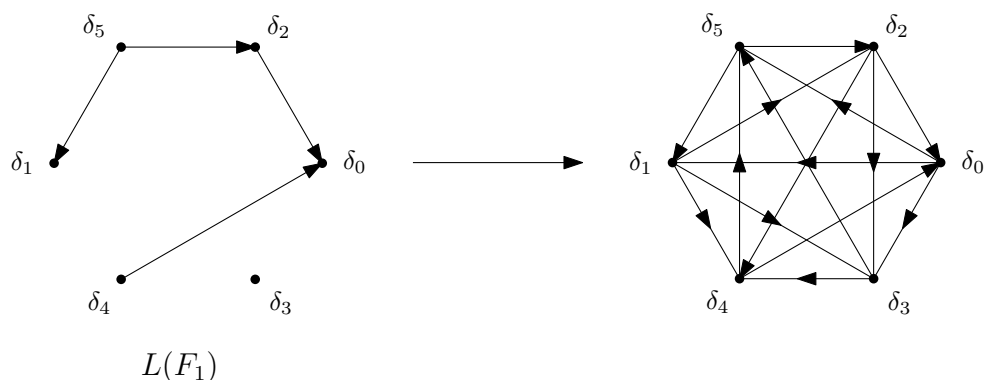


Figura 3.3: Torneo asociado al grafo *backedge* $L(F_1)$.

La pregunta que debemos responder en este momento es la siguiente: ¿cuándo es posible encontrar una ordenación de las aristas del torneo de modo que el digrafo de línea dé lugar al grafo *backedge* de un torneo?

Lema 3.9 *Si $T = (V, E)$ es un torneo transitivo, entonces es posible encontrar una ordenación de las aristas de T tal que el digrafo de línea asociado es el grafo *backedge* de un torneo T' . Es más, T' no depende de la ordenación elegida.*

Demostración: Dado un torneo transitivo $T = (V, E)$, por el Corolario 1.27, el digrafo de línea admite una ordenación acíclica, es decir, una ordenación e_1, \dots, e_m de $E = V(L(T))$ tal que todas las aristas $e_i e_j$ cumplen que $i < j$. De forma equivalente, se puede considerar una ordenación tal que las aristas del digrafo de línea $e_i e_j$ verifiquen que $i > j$. Entonces, $L(T)$ es el grafo *backedge* de un torneo T' .

Para demostrar que el torneo T' no depende de la ordenación elegida, consideramos $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$ y $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m\}$ dos ordenaciones de E . Sean B' y B'' los grafos *backedge* asociados a dichas ordenaciones y sean T' y T'' los torneos correspondientes a los grafos B' y B'' , respectivamente. Veamos que T' y T'' son isomorfos. Para ello, demostraremos que toda arista de $E(T')$ es arista de $E(T'')$ y que el recíproco también es cierto. Se pueden dar dos casos: $\delta_i \delta_j \in E(T')$ con $i > j$ y $\delta_i \delta_j \in E(T')$ con $i < j$.

Supongamos que $\delta_i \delta_j \in E(T')$ con $i > j$, entonces $\delta_i \delta_j \in E(B')$ y, por tanto, $\delta_i \delta_j \in E(L(T))$. Sin pérdida de generalidad, considerando la otra ordenación de E , se tiene que $\delta_i \delta_j = \xi_p \xi_q$ para ciertos p, q . Entonces, $\xi_p \xi_q \in E(B'')$ con $p > q$. Por tanto, $\xi_p \xi_q \in E(T'')$, esto es, $\delta_i \delta_j \in E(T'')$.

Si $\delta_i \delta_j \in E(T')$ con $i < j$, entonces $\delta_i \delta_j \notin E(B')$ y se tiene que $\delta_i \delta_j \notin E(L(T))$. Al igual que ocurre cuando $i > j$, $\delta_i \delta_j = \xi_p \xi_q$ para ciertos p, q . Entonces, $\xi_p \xi_q \notin E(B'')$ con $p < q$. Por ende, $\delta_i \delta_j = \xi_p \xi_q \in E(T'')$.

Para probar que toda arista de T'' es arista de T' , basta con cambiar el papel de las ordenaciones. En consecuencia, los torneos T' y T'' son isomorfos. \square

Este resultado nos garantiza que la siguiente definición es correcta.

Definición 3.10 *Dado T_k , el torneo transitivo de k vértices, se define el **torneo de línea asociado** a T_k , notado por L_k , como el torneo obtenido a partir del digrafo de línea asociado a T_k , considerando $L(T_k)$ como el grafo *backedge* de dicho torneo.*

Para definir la topología gráfica de un torneo es necesario que dicho torneo sea indescomponible, pero todo torneo transitivo es descomponible ya que su

secuencia de valencias de salida es de la forma $(0, 1, \dots, n-1)$, lo que implica que tiene un vértice u con grado de salida $n-1$ y otro v con grado de salida 0 y, en consecuencia, $V - \{u, v\}$ constituye un intervalo no trivial. No obstante, aunque T_k sea descomponible, este hecho no implica que L_k también lo sea, como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.11 *El torneo obtenido en la Figura 3.3, que se corresponde con L_4 , es indescomponible y, por tanto, tiene sentido considerar su topología gráfica. Los conjuntos de salida asociados a cada vértice de L_4 son:*

$$\begin{aligned} N_{\delta_0}^+ &= \{\delta_1, \delta_3, \delta_5\}, N_{\delta_1}^+ = \{\delta_2, \delta_3, \delta_4\}, N_{\delta_2}^+ = \{\delta_0, \delta_3, \delta_4\}, \\ N_{\delta_3}^+ &= \{\delta_4, \delta_5\}, N_{\delta_4}^+ = \{\delta_0, \delta_5\}, N_{\delta_5}^+ = \{\delta_1, \delta_2\}. \end{aligned}$$

Calculamos los abiertos minimales usando el Lema 2.3.

$$U_{\delta_0} = \{\delta_0\}, U_{\delta_1} = \{\delta_1\}, U_{\delta_2} = \{\delta_2\}, U_{\delta_3} = \{\delta_3\}, U_{\delta_4} = \{\delta_4\}, U_{\delta_5} = \{\delta_5\}.$$

Al ser todos los abiertos minimales conjuntos unitarios, se deduce que la topología \mathcal{T}_T es discreta sobre el torneo L_4 . Recordemos que las topologías \mathcal{T}_{ICE} y \mathcal{T}_{PM} no eran discretas para T_4 y, por tanto, la topología \mathcal{T}_T es más fina que \mathcal{T}_{ICE} y \mathcal{T}_{PM} .

La pregunta que surge tras el ejemplo es la siguiente: para cualquier k , ¿es siempre L_k indescomponible? Para responder a la pregunta, debemos recordar las nociones de ciclo hamiltoniano y digrafo hamiltoniano.

Definición 3.12 *Sea C un ciclo dirigido de un digrafo D , se dice que C es un **ciclo hamiltoniano** si todos los vértices de D están contenidos en C . Un digrafo D es un **digrafo hamiltoniano** si contiene un ciclo hamiltoniano.*

Por la Proposición 1.23, un torneo T es indescomponible si y solo si es fuertemente conexo. Entonces, si todos los torneos de la familia de torneos L_k son fuertemente conexos, también son indescomponibles. El siguiente teorema establece la equivalencia entre los torneos fuertemente conexos y los torneos hamiltonianos.

Teorema 3.13 (Teor 1.5.2, [3]) *Todo torneo fuertemente conexo es hamiltoniano.*

Llegados a este punto, podemos enunciar y demostrar la siguiente proposición.

Proposición 3.14 *Todo torneo L_k es indescomponible, para $k \geq 4$.*

Demostración: Para probar que L_k es indescomponible, por el Teorema 3.13, es suficiente probar que L_k es hamiltoniano, es decir, que L_k contiene un ciclo hamiltoniano. Para ello, demostraremos de forma constructiva la existencia de dicho ciclo. En primer lugar, dado el torneo transitivo T_k , fijamos una ordenación $\{\delta_0, \dots, \delta_{m-1}\}$ de sus aristas con el orden contrario al orden lexicográfico, siendo $m = \frac{k(k-1)}{2}$ el número de aristas del torneo T_k . Una vez fijada dicha ordenación, el digrafo de línea asociado a T_k es el grafo *backedge* del torneo L_k .

La arista del torneo T_k que tiene como vértice inicial el de valencia de salida máxima $k-1$ y vértice final el vértice de valencia de salida mínima 0, solo está contenida en un camino (formado únicamente por ella misma) y, por tanto, es un vértice aislado en $L(T_k)$. El subíndice h de la arista aislada viene dado por $h = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$. Vamos a probar que el ciclo $\delta_{h-1} \delta_h \delta_{h+1} \delta_0 \dots \delta_{h-2} \delta_{h+2} \dots \delta_{m-1} \delta_{h-1}$ está contenido en L_k , para $k \geq 5$. Es posible dividir el ciclo en los tres arcos siguientes $\delta_{h-1} \delta_h \delta_{h+1}$, $\delta_0 \dots \delta_{h-2}$ y $\delta_{h+2} \dots \delta_{m-1}$, que pueden ser estudiados por separado.

Las aristas $\delta_{h-1} \delta_h$ y $\delta_h \delta_{h+1}$ pertenecen a $E(L_k)$ al ser δ_h el vértice aislado de $L(T_k)$ y $h-1 < h < h+1$. Veamos que ocurre con las aristas que componen el arco $\delta_0 \dots \delta_{h-2}$. La arista $\delta_i \delta_{i+1}$, con $i \in \{0, \dots, h-3\}$, pertenece a $E(L_k)$, ya que $i < i+1$ y las aristas δ_i y δ_{i+1} no están conectadas en $L(T_k)$, al encontrarse siempre en unos de los 3 casos siguientes: comparten el vértice inicial o comparten el vértice final o no tienen ningún vértice en común. Por último, las aristas que componen el arco $\delta_{h+2} \dots \delta_{m-1}$ están contenidas en $E(L_k)$ al compartir todas las aristas δ_i y δ_{i+1} , con $i \in \{h+2, \dots, m-2\}$, el vértice inicial, concretamente el vértice de valencia de salida máxima $k-1$.

Para probar que los tres arcos forman un ciclo, debemos comprobar que las aristas $\delta_{h+1} \delta_0$, $\delta_{h-2} \delta_{h+2}$ y $\delta_{m-1} \delta_{h-1}$ están contenidas en $E(L_k)$. La primera arista $\delta_{h+1} \delta_0$ pertenece a $E(L_k)$, dado que el vértice final de δ_{h+1} coincide con el vértice inicial de δ_0 y es el vértice con valencia de salida igual a 1. La arista $\delta_{h-2} \delta_{h+2}$ también está contenida en $E(L_k)$, veamos por qué. La arista δ_{h-2} tiene como vértice inicial el de valencia de salida máxima $k-1$ y vértice final el vértice de valencia de salida 2, mientras que δ_{h+2} tiene como vértice inicial el de valencia de salida $k-2$ y vértice final de valencia de salida $k-4$. Para $k \neq 6$, los vértices iniciales y finales de ambas aristas son distintos y, por tanto, δ_{h-2} no está conectada con δ_{h+2} en $L(T_k)$ y $h-2 < h+2$, entonces se tiene que $\delta_{h-2} \delta_{h+2} \in E(L_k)$. Si $k = 6$, las aristas δ_{h-2} y δ_{h+2} comparten el vértice final, debido a que $k-4 = 2$, y, por tanto, $\delta_{h-2} \delta_{h+2} \in E(L_k)$. Finalmente, la arista $\delta_{m-1} \delta_{h-1}$ también pertenece a $E(L_k)$ ya que el vértice final de δ_{m-1} coincide con el vértice inicial de δ_{h-1} y es el vértice con valencia de salida $k-2$.

Para $k = 4$, no podemos considerar el ciclo propuesto anteriormente, pero igualmente el torneo L_4 contiene un ciclo hamiltoniano: el ciclo $\delta_0 \delta_1 \delta_3 \delta_4 \delta_5 \delta_2 \delta_0$.

En conclusión, si $k \geq 4$, el torneo L_k es indescomponible al ser hamiltoniano. \square

Ejemplo 3.15 Para la ilustrar la construcción del ciclo hamiltoniano del resultado anterior, representamos en la Figura 3.4 los torneos T_6 y T_7 con el correspondiente ciclo hamiltoniano en $L(T_6)$ y $L(T_7)$.

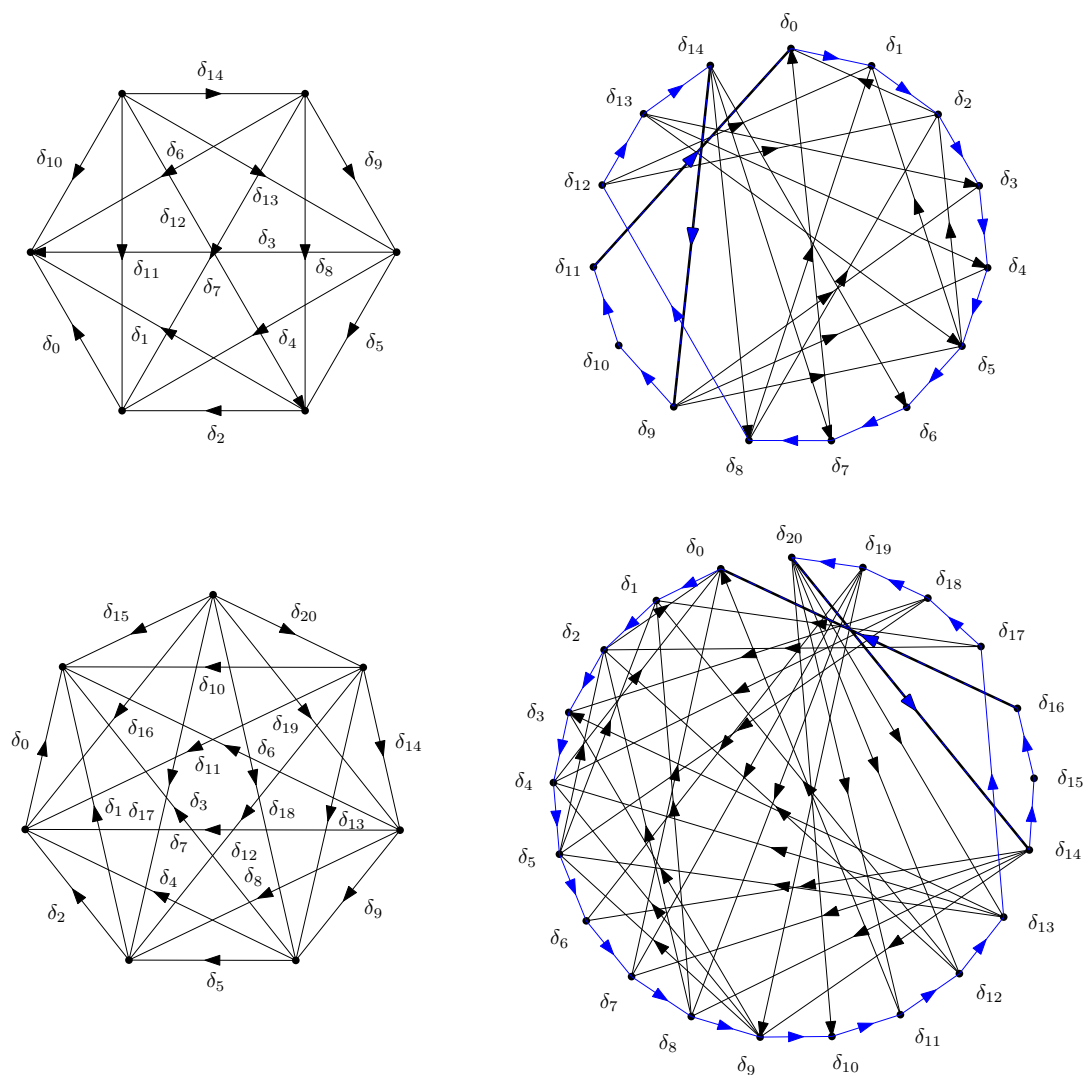


Figura 3.4: Ciclos hamiltonianos en $L(T_6)$ y $L(T_7)$.

Ejemplo 3.16 Gracias a la implementación realizada en Python, cuyas principales funciones incluimos en el del capítulo 4, podemos comparar de forma rápida las tres topologías estudiadas en la memoria sobre los torneos transitivos. Para T_4 ya han sido comparadas en el Ejemplo 3.11. Veamos que sucede con T_5 . Recordemos que la topología gráfica se define sobre L_5 . Obtenemos que la topología

gráfica es discreta, mientras que \mathcal{T}_{ICE} y \mathcal{T}_{PM} no lo son, por tanto, \mathcal{T}_T es más fina que \mathcal{T}_{ICE} y \mathcal{T}_{PM} .

Si estudiamos ahora el torneo T_6 , la topología \mathcal{T}_T asociada a L_6 ya no es discreta y además el abierto $\{\delta_{14}\}$ de \mathcal{T}_{ICE} y \mathcal{T}_{PM} no es abierto de \mathcal{T}_T , por tanto, \mathcal{T} no es más fina que \mathcal{T}_{ICE} y \mathcal{T}_{PM} .

Observación 3.17 *Queda como posible continuación de este trabajo estudiar en que situaciones se pueden comparar las tres topologías para un torneo transitivo con un número de vértices arbitrario.*

Capítulo 4

Implementación en Python

En este capítulo añadimos una implementación en el software *Python*, donde se definen numerosas funciones que nos permiten calcular las tres topologías estudiadas en el trabajo. Gracias a esta implementación, ha sido posible elaborar la mayoría de ejemplos estudiados en los capítulos anteriores.

Para trabajar con torneos en Python, debemos cargar las librerías necesarias.

```
[1]: from sage.graphs.connectivity import *
      from sage.combinat.posets.hasse_diagram import *
```

4.1. Digrafos y torneos en Python

En la siguiente celda se muestra como definir un torneo a partir de los conjuntos de salida de cada vértice y como ver una representación gráfica del mismo.

```
[2]: Q6=DiGraph({0:[2,3,4,5],1:[0,3,4,5],2:[1,4,5],3:[2,5],4:[3],5:
      →[4]})
      Q6.show(vertex_size = 500)
```

Construimos una función que nos permite definir un torneo de n vértices con un input, indicando en cada paso los conjuntos de salida de cada vértice.

```
[3]: def crea_Torneo(n):
      T=DiGraph()
      for i in range(n):
          conjunto_de_salida=[]
          pares_de_aristas=[]
```

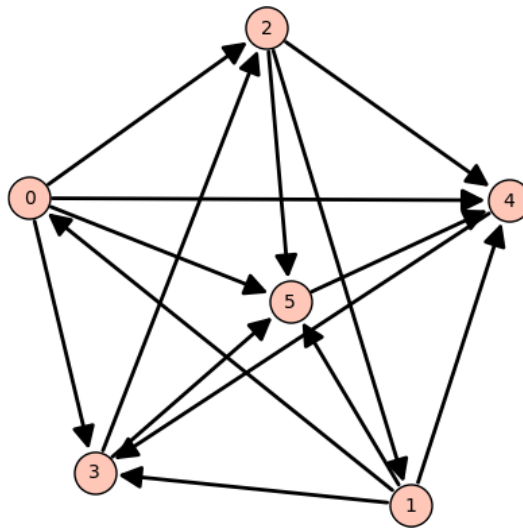


Figura 4.1: Representación gráfica del torneo Q_6 en *Python*.

```

conjunto_de_salida=list(map(int,list((input('¿Qué_
↪vértices domina ' + str(i) + '?:').replace(",","")))))
for a in conjunto_de_salida:
    pares_de_aristas.append((i,a))
T.add_edges(pares_de_aristas)
return T

```

Etiquetaremos con la siguiente función las aristas de los torneos estudiados usando el orden lexicográfico, para que sea más fácil comprender la salida.

```

[4]: def etiquetar_aristas(torneo):
    i = 0
    for arista in torneo.edge_iterator(labels=False):
        torneo.set_edge_label(arista[0],arista[1],"d_"+str(i))
        i = i+1
    return torneo.edges()

```

4.2. Funciones relacionadas con las aristas de retroceso

Las siguientes funciones nos permitirán calcular las aristas de retroceso de un torneo, fijada una enumeración, y también el grafo *backedge* asociado.

4.2. FUNCIONES RELACIONADAS CON LAS ARISTAS DE RETROCESO47

```
[5]: def aristas_retroceso(torneo):  
    lista_de_aristas=[]  
    for a in range(torneo.order()):  
        for b in torneo.neighbors_in(a):  
            if b > a:  
                lista_de_aristas.append((b,a))  
    return lista_de_aristas
```

```
[6]: aristas_retroceso(Q6)
```

```
[6]: [(1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4)]
```

```
[7]: def grafo_backedge(torneo):  
    lista_de_aristas=aristas_retroceso(torneo)  
    g = Graph()  
    for a in lista_de_aristas:  
        g.add_edge(a)  
    return show(g, vertex_size = 500)
```

```
[8]: grafo_backedge(Q6)
```

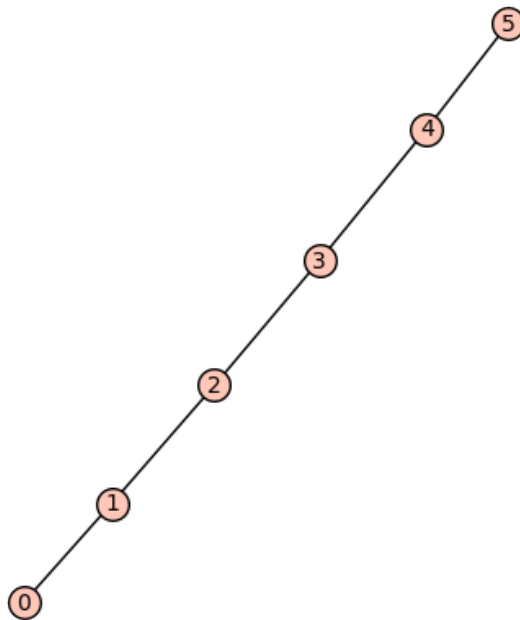


Figura 4.2: Representación gráfica del grafo *backedge* asociado al torneo Q_6 .

4.3. Topología gráfica

Las siguientes funciones nos ayudarán con el estudio de la topología gráfica. Antes, debemos comprobar que los torneos considerados son indescomponibles. Para ello, comprobaremos si es fuertemente conexo mediante una función ya definida en *Python*, ya que ambas nociones son equivalentes.

```
[9]: def es_indescomponible(torneo):
      return torneo.is_strongly_connected()
```

```
[10]: es_indescomponible(Q6)
```

```
[10]: True
```

La próxima función nos permite calcular los abiertos minimales de cada vértice de un torneo indescomponible.

```
[11]: def abiertos_minimales(torneo):
      lista_de_abiertos = {}
      for a in range(torneo.order()):
          elementos_del_abierto=[]
          for b in torneo.neighbors_in(a):
              elementos_del_abierto.append(set(torneo.
      ↪neighbors_out(b)))
          lista_de_abiertos[a] = list(set.
      ↪intersection(*elementos_del_abierto))
      return lista_de_abiertos
```

```
[12]: abiertos_minimales(Q6)
```

```
[12]: {0: [0, 3, 4, 5], 1: [1, 4, 5], 2: [2, 5], 3: [3], 4: [4], 5:
      ↪[5]}
```

Al ser (V, \mathcal{T}_T) un espacio topológico T_0 , es posible considerar el poset asociado a dicho espacio. Varias de las nociones sobre conjuntos parcialmente ordenados definidas en la memoria se estudian con las siguientes funciones.

```
[13]: def preparar_cadenas(torneo):
      poset = HasseDiagram(abiertos_minimales(torneo))
      lista_de_cadenas=list(poset.chains())
      lista_de_cadenas.pop(0)
      lista_de_cadenas=list(map(set, lista_de_cadenas))
      return lista_de_cadenas
```



```
[14]: def cadenas_maximales(torneo):
    cadenas = preparar_cadenas(torneo)
    cadenas_maximales = []
    for cadena1 in cadenas:
        subconjunto = False
        for cadena2 in cadenas:
            if cadena1.issubset(cadena2) and cadena1 != cadena2:
                subconjunto = True
                break
        if not subconjunto:
            cadenas_maximales.append(list(cadena1))
    return cadenas_maximales
```

```
[15]: cadenas_maximales(Q6)
```

```
[15]: [[0, 3], [0, 4], [0, 5], [1, 4], [1, 5], [2, 5]]
```

```
[16]: def altura(torneo):
    cadenasmax = cadenas_maximales(torneo)
    maxlong = len(max(cadenasmax, key = len)) - 1
    return maxlong
```

```
[17]: altura(Q6)
```

```
[17]: 1
```

```
[18]: def homoganeo(torneo):
    poset = HasseDiagram(abiertos_minimales(torneo))
    return all(len(a) - 1 == altura(poset) for a in
    ↪cadenas_maximales(poset))
```

```
[19]: homoganeo(Q6)
```

```
[19]: True
```

4.4. Topología de aristas compatibles independientes

En esta sección definiremos una serie de funciones que nos ayudan con el estudio de la topología de aristas compatibles independientes. Para empezar a trabajar con la topología \mathcal{T}_{ICE} , debemos calcular todos los caminos posibles de longitud tres, ya que los elementos de \mathcal{S}' de la subbase \mathcal{S}_{ICE} serán los conjuntos

de cardinal dos cuyas aristas son los extremos del camino. Para ello, definimos una función que nos calcule todos los caminos posibles de un torneo dado.

```
[20]: def todos_caminos_etiq(torneo):
        lista_de_caminos = list()
        for vertice1 in torneo.vertex_iterator():
            for vertice2 in torneo.vertex_iterator():
                if vertice1 != vertice2:
                    lista_de_caminos.append(torneo.
↪all_paths(vertice1,vertice2,report_edges=True,labels=True))
        return lista_de_caminos
```

El torneo que usamos como ejemplo en esta sección es el torneo F_1 , definido en la siguiente celda.

```
[21]: F1 = DiGraph({0:[1,2,3],1:[2,3],2:[3],3:[]})
        etiquetar_aristas(F1)
```

```
[21]: [(0, 1, 'd_0'), (0, 2, 'd_1'), (0, 3, 'd_2'), (1, 2, 'd_3'), (1,
↪3, 'd_4'), (2,
3, 'd_5')]
```

Si ya tenemos almacenados todos los caminos de un torneo en una lista, definimos una función para cribar la lista y quedarnos con los caminos de longitud 3.

```
[22]: def caminos_3(torneo):
        lista_de_caminos = todos_caminos_etiq(torneo)
        caminos_longitud_3 = list()
        caminos_final = list()
        for caminos in lista_de_caminos:
            for camino in caminos:
                if len(camino) == 3:
                    caminos_longitud_3.append(camino)
        for camino in caminos_longitud_3:
            caminos_final.append(list(camino))
        return caminos_final
```

```
[23]: def sprima(torneo):
        caminos_longitud_3 = caminos_3(torneo)
        for camino in caminos_longitud_3:
            del(camino[1])
        conjuntos = list(map(set,caminos_longitud_3))
        caminos_unicos = [set(conjunto) for conjunto in
↪set(map(frozenset, conjuntos))]
```

```
return caminos_unicos
```

Con el conjunto \mathcal{S}' ya calculado, debemos añadir, como conjuntos unitarios, las aristas del torneo que no estén en \mathcal{S}' .

```
[24]: def ssegunda(torneo):
    S1 = sprima(torneo)
    S2 = list()
    for e in torneo.edge_iterator(labels = True):
        vacio = set()
        prop = False
        for pares in S1:
            if e in pares:
                prop = True
                continue
        if prop == False:
            vacio.add(e)
            S2.append(vacio)
    return S2
```

```
[25]: sprima(F1)
```

```
[25]: [(0, 1, 'd_0'), (2, 3, 'd_5')]
```

```
[26]: ssegunda(F1)
```

```
[26]: [{(0, 2, 'd_1')}, {(0, 3, 'd_2')}, {(1, 2, 'd_3')}, {(1, 3, 'd_4')}]
```

La subbase de la topología \mathcal{T}_{ICE} es el conjunto $\mathcal{S}_{ICE} = \mathcal{S}' \cup \mathcal{S}''$.

```
[27]: def subbaseICE(torneo):
    S1 = sprima(torneo)
    S2 = ssegunda(torneo)
    return (S1+S2)
```

```
[28]: subbaseICE(F1)
```

```
[28]: [(0, 1, 'd_0'), (2, 3, 'd_5')],
      [(0, 2, 'd_1')},
      {(0, 3, 'd_2')},
      {(1, 2, 'd_3')},
      {(1, 3, 'd_4')}]
```

Una vez calculada la subbase \mathcal{S}_{ICE} , la base \mathcal{B}_{ICE} se obtiene tomando las intersecciones de elementos de la subbase.

```
[29]: def baseICE_etiq(torneo):
    subbase = subbaseICE(torneo)
    base = list()
    base_etiq = list()
    for elemento1 in subbase:
        for elemento2 in subbase:
            base.append(elemento1.intersection(elemento2))
    base_top = [set(conjunto) for conjunto in set(map(frozenset,
→base))]
    for conjun in base_top:
        base_min = set()
        for elem in conjun:
            base_min.add(torneo.edge_label(elem[0],elem[1]))
            base_etiq.append(base_min)
    base_fin = [set(conjunto) for conjunto in set(map(frozenset,
→base_etiq))]
    base_fin.append(set())
    return base_fin
```

```
[30]: baseICE_etiq(F1)
```

```
[30]: [{'d_1'}, {'d_0', 'd_5'}, {'d_3'}, {'d_2'}, {'d_4'}, set()]
```

Añadimos también una función que determine de forma rápida si la topología \mathcal{T}_{ICE} es discreta.

```
[31]: def es_discretaICE(torneo):
    base = baseICE_etiq(torneo)
    lista_de_unitarios = list()
    for conjunto in base:
        if len(conjunto) == 1:
            lista_de_unitarios.append(conjunto)
    return len(lista_de_unitarios) == torneo.size()
```

```
[32]: es_discretaICE(F1)
```

```
[32]: False
```

4.5. Topología de caminos dirigidos maximales

Para la construcción de la topología \mathcal{T}_{PM} de cualquier torneo, es necesario considerar todos los caminos dirigidos maximales del torneo. Una de las formas más sencillas de implementar el cálculo de caminos maximales de un torneo es

considerar el digrafo de línea asociado, ya que los caminos de un torneo cualquiera también son caminos en el digrafo de línea asociado.

Para calcular el digrafo de línea, necesitamos obtener la lista de aristas adyacentes a cada arista del torneo. Dicha lista se calcula usando la función `todos_caminos_etiq()` y cribando la lista de todos los posibles caminos para quedarnos con aquellos de longitud 2.

```
[33]: def todos_caminos_etiq(torneo):
        lista_de_caminos = list()
        for vertice1 in torneo.vertex_iterator():
            for vertice2 in torneo.vertex_iterator():
                if vertice1 != vertice2:
                    lista_de_caminos.append(torneo.
→all_paths(vertice1,vertice2,report_edges=True,labels = True))
        return lista_de_caminos
```

```
[34]: def caminos_2(torneo):
        lista_de_caminos = todos_caminos_etiq(torneo)
        caminos_longitud_2 = list()
        arista_de_caminos = list()
        for caminos in lista_de_caminos:
            for camino in caminos:
                if len(camino) == 2:
                    caminos_longitud_2.append(camino)
        for camino in caminos_longitud_2:
            for arista in camino:
                arista_de_caminos.append(arista[2])
        return agrupar_en_tuplas(arista_de_caminos)
```

Previa a la función que obtiene la lista de aristas adyacentes a una arista dada del torneo, se definen dos funciones para estructurar los resultados obtenidos.

```
[35]: def agrupar_en_tuplas(lista):
        return list(zip(lista[::2], lista[1::2]))
```

```
[36]: def obtener_lista_total(sublistas):
        return [elemento for sublista in sublistas for elemento in_
→sublista]
```

```
[37]: def aristas_adyacentes(arista_etiq, torneo):
        lista_de_adyacentes = list()
        lista_caminos = caminos_2(torneo)
        for par in lista_caminos:
            pares = list(par)
```

```

    if arista_etiq in par:
        pares.remove(arista_etiq)
        lista_de_adyacentes.append(pares)
    return obtener_lista_total(lista_de_adyacentes)

```

Con la siguiente función se puede calcular el digrafo de línea asociado a cualquier torneo, cuyas aristas hayan sido previamente etiquetadas con la función `etiquetar_aristas()`.

```

[38]: def digrafo_linea(torneo):
    L = DiGraph()
    for e in torneo.edge_iterator():
        L.add_vertex(e[2])
    for e1 in torneo.edge_iterator():
        subindex1 = int(e1[2].split("_")[1])
        for e2 in aristas_adyacentes(e1[2],torneo):
            subindex2 = int(e2.split("_")[1])
            if subindex1 < subindex2:
                L.add_edge(e1[2],e2)
    return L

```

Una vez obtenido el digrafo de línea asociado a un torneo, se pueden calcular los caminos maximales del mismo con la siguiente función.

```

[39]: def caminos_maximales(torneo):
    digrafo_linea1 = digrafo_linea(torneo)
    lista_de_caminos = digrafo_linea1.all_simple_paths(trivial =_
↪True)
    lista_de_caminos_maximales = list()
    for i in lista_de_caminos:
        esta_contenido = False
        for j in lista_de_caminos:
            if i!=j and all(elemento in j for elemento in i):
                esta_contenido = True
                break
        if not esta_contenido:
            lista_de_caminos_maximales.append(i)
    return lista_de_caminos_maximales

```

```

[40]: caminos_maximales(F1)

```

```

[40]: [['d_2'], ['d_0', 'd_4'], ['d_1', 'd_5'], ['d_0', 'd_3', 'd_5']]

```

La subbase \mathcal{S}_{PM} viene dada por la siguiente función.

```
[41]: def subbasePM(torneo):
       return list(map(set, caminos_maximales(torneo)))
```

```
[42]: subbasePM(F1)
```

```
[42]: [{ 'd_2' }, { 'd_0', 'd_4' }, { 'd_1', 'd_5' }, { 'd_0', 'd_3', 'd_5' }]
```

Por último, la base \mathcal{B}_{PM} de la topología \mathcal{T}_{PM} se calcula con la función siguiente.

```
[43]: def basePM(torneo):
       subbase = subbasePM(torneo)
       lista_final = list()
       for a in subbase:
           for b in subbase:
               interseccion = a & b
               lista_final.append(interseccion)
       base_fin = [set(conjunto) for conjunto in set(map(frozenset,
       ↪ lista_final))]
       return base_fin
```

```
[44]: basePM(F1)
```

```
[44]: [{ 'd_0' },
       { 'd_5' },
       { 'd_0', 'd_3', 'd_5' },
       set(),
       { 'd_2' },
       { 'd_0', 'd_4' },
       { 'd_1', 'd_5' }]
```

4.6. Cálculo del torneo de línea asociado a un torneo transitivo

En esta sección se definen varias funciones para calcular el torneo de línea asociado al torneo transitivo T_k . Como se ha visto en el Capítulo 3, para calcular el torneo L_k , primero hay que definir una función que etiquete el conjunto de aristas de un torneo con el orden contrario al orden lexicográfico. Tomaremos el torneo transitivo de 4 vértices (T_4) como ejemplo.

```
[45]: def etiquetar_aristas_contr(torneo):
       i = torneo.size()-1
```

```

for arista in torneo.edge_iterator(labels=False):
    torneo.set_edge_label(arista[0],arista[1],"d_"+str(i))
    i = i-1
return torneo.edges()

```

```
[46]: T4 = DiGraph({0:[1,2,3],1:[2,3],2:[3],3:[]})
etiquetar_aristas_contr(T4)
```

```
[46]: [(0, 1, 'd.5'), (0, 2, 'd.4'), (0, 3, 'd.3'), (1, 2, 'd.2'), (1,
↪3, 'd.1'), (2,
3, 'd.0')]
```

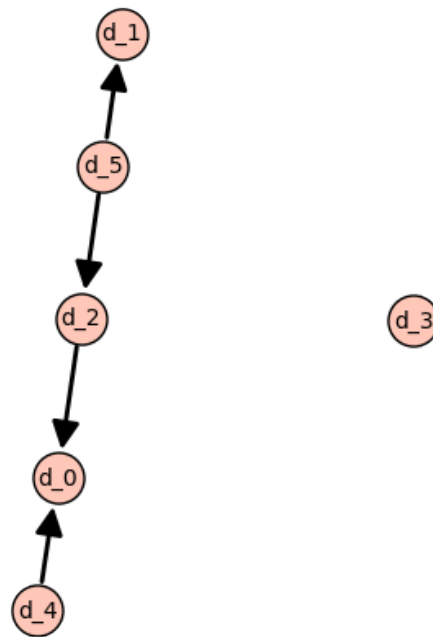
También definimos una función que calcula directamente el torneo transitivo T_k para cada k .

```
[47]: def torneo_transitivo(k):
torneo = DiGraph()
torneo.add_vertices(range(k))
for i in range(k):
    for j in range(i + 1, k):
        torneo.add_edge(i, j)
return torneo
```

Tal y como se ha descrito en el Capítulo 3, el primer paso para calcular L_k , es hallar el digrafo de línea asociado a un torneo transitivo. Las funciones relacionadas con el digrafo de línea ya han sido definidas en la sección anterior, pero necesitamos modificar la función `digrafo_linea()` para que el digrafo de línea obtenido sea el grafo *backedge*. Después, solo queda definir la función que calcula el torneo de línea asociado a un torneo transitivo.

```
[48]: def digrafo_linea_back(torneo):
L = DiGraph()
for e in torneo.edge_iterator():
    L.add_vertex(e[2])
for e1 in torneo.edge_iterator():
    subindex1 = int(e1[2].split("_")[1])
    for e2 in aristas_adyacentes(e1[2],torneo):
        subindex2 = int(e2.split("_")[1])
        if subindex1 > subindex2:
            L.add_edge(e1[2],e2)
return L
```

```
[49]: digrafo_linea_back(T4).show(vertex_size = 500)
```


Figura 4.3: Representación gráfica de $L(T_4)$.

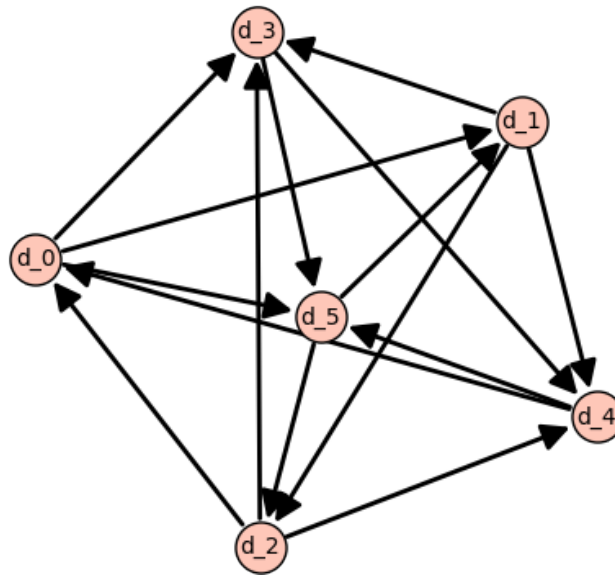
```

[50]: def torneo_linea(torneo_transitivo):
    L = digrafo_linea_back(torneo_transitivo)
    T = DiGraph()
    for e in L.edges():
        T.add_edge(e)
    for v1 in L.vertices():
        index1 = v1.split("_")[1]
        for v2 in L.vertices():
            index2 = v2.split("_")[1]
            if (v1,v2) not in L.edges(labels=False) and (v2,v1)
→not in L.edges(labels=False) and index1 < index2:
                T.add_edge(v1,v2)
    return T
  
```

```

[51]: L4 = torneo_linea(T4)
    L4.show(vertex_size = 500)
  
```

Si intentamos calcular directamente los abiertos minimales del torneo L_4 con la función `abiertos_minimales()` definida para la topología gráfica, obtendremos un error, ya que los vértices de L_4 están etiquetados con cadenas de texto. Definimos ahora una nueva función `abiertos_minimales_etiq()` que permita calcular los abiertos minimales en este caso.

Figura 4.4: Representación gráfica de L_4 .

```
[52]: def abiertos_minimales_etiq(torneo):
    lista_de_abiertos = {}
    for a in torneo.vertices():
        a_etiq = int(a.split("_")[1])
        elementos_del_abierto=[]
        for b in torneo.neighbors_in(a):
            elementos_del_abierto.append(set(torneo.
↪neighbors_out(b)))
        lista_de_abiertos[a_etiq] = list(set.
↪intersection(*elementos_del_abierto))
    return lista_de_abiertos
```

```
[53]: abiertos_minimales_etiq(L4)
```

```
[53]: {0: ['d_0'], 1: ['d_1'], 2: ['d_2'], 3: ['d_3'], 4: ['d_4'], 5:
↪ ['d_5']}
```

4.7. Comparaciones con torneos T_5 y T_6

Se muestran en esta sección los cálculos de las tres topologías en los torneos T_5 y T_6 , utilizados para justificar las comparaciones del Ejemplo 3.16.

```
[54]: T5 = torneo_transitivo(5)
      etiquetar_aristas_contr(T5)
      L5 = torneo_linea(T5)
```

```
[55]: T5.edges()
```

```
[55]: [(0, 1, 'd_9'), (0, 2, 'd_8'), (0, 3, 'd_7'), (0, 4, 'd_6'), (1,
      ↪ 2, 'd_5'), (1,
      3, 'd_4'), (1, 4, 'd_3'), (2, 3, 'd_2'), (2, 4, 'd_1'), (3, 4,
      ↪ 'd_0')]
```

```
[56]: abiertos_minimales_etiq(L5)
```

```
[56]: {0: ['d_0'],
      1: ['d_1'],
      2: ['d_2'],
      3: ['d_3'],
      4: ['d_4'],
      5: ['d_5'],
      6: ['d_6'],
      7: ['d_7'],
      8: ['d_8'],
      9: ['d_9']}
```

```
[57]: baseICE_etiq(T5)
```

```
[57]: [{'d_0'},
      {'d_6'},
      {'d_1', 'd_9'},
      {'d_0', 'd_5'},
      {'d_2', 'd_9'},
      {'d_7'},
      {'d_0', 'd_9'},
      {'d_0', 'd_8'},
      {'d_3'},
      {'d_9'},
      {'d_4'},
      set()]
```

```
[58]: basePM(T5)
```

```
[58]: [{'d_0', 'd_2', 'd_5', 'd_9'},
      {'d_0'},
      {'d_6'},
```

```

{'d_1', 'd_8'},
{'d_8'},
{'d_1'},
{'d_0', 'd_2', 'd_8'},
{'d_1', 'd_5', 'd_9'},
{'d_3', 'd_9'},
{'d_0', 'd_9'},
set(),
{'d_9'},
{'d_0', 'd_2'},
{'d_5', 'd_9'},
{'d_0', 'd_7'},
{'d_0', 'd_4', 'd_9'}]

```

```
[59]: T6 = torneo_transitivo(6)
      etiquetar_aristas_contr(T6)
      L6 = torneo_linea(T6)
```

```
[60]: abiertos_minimales_etiq(L6)
```

```
[60]: {0: ['d_0'],
      1: ['d_1'],
      10: ['d_9', 'd_14', 'd_10', 'd_13', 'd_6', 'd_3'],
      11: ['d_4', 'd_9', 'd_14', 'd_7', 'd_13', 'd_11', 'd_2', 'd_6', 'd_3'],
      12: ['d_9', 'd_14', 'd_8', 'd_5', 'd_13', 'd_12', 'd_6', 'd_3'],
      13: ['d_9', 'd_14', 'd_13', 'd_6', 'd_3'],
      14: ['d_14', 'd_3', 'd_6', 'd_9'],
      2: ['d_2'],
      3: ['d_3'],
      4: ['d_4'],
      5: ['d_5'],
      6: ['d_6'],
      7: ['d_7'],
      8: ['d_8'],
      9: ['d_9']}
```

```
[61]: baseICE_etiq(T6)
```

```
[61]: [{'d_14'},
      {'d_11'},
      {'d_1', 'd_14'},
      {'d_1', 'd_9'},
      {'d_5'}]
```

```

{'d_10'},
{'d_13', 'd_2'},
{'d_2', 'd_9'},
{'d_14', 'd_4'},
{'d_9'},
{'d_1', 'd_13'},
{'d_14', 'd_5'},
{'d_0'},
{'d_1'},
{'d_14', 'd_2'},
{'d_14', 'd_3'},
{'d_13'},
{'d_0', 'd_8'},
{'d_2'},
{'d_0', 'd_9'},
{'d_0', 'd_14'},
{'d_6'},
{'d_0', 'd_12'},
{'d_0', 'd_5'},
{'d_0', 'd_13'},
{'d_7'},
set()]

```

```
[62]: basePM(T6)
```

```

[62]: [{'d_14'},
{'d_0', 'd_14', 'd_9'},
{'d_1', 'd_14'},
{'d_12'},
{'d_5'},
{'d_0', 'd_14', 'd_2', 'd_5', 'd_9'},
{'d_10'},
{'d_1', 'd_12'},
{'d_0', 'd_14', 'd_2'},
{'d_13', 'd_3'},
{'d_0', 'd_14', 'd_2', 'd_8'},
{'d_1', 'd_13', 'd_5'},
{'d_0', 'd_13', 'd_2', 'd_5'},
{'d_0', 'd_14', 'd_4', 'd_9'},
{'d_0', 'd_13', 'd_4'},
{'d_0', 'd_2', 'd_5'},
{'d_1', 'd_14', 'd_5', 'd_9'},
{'d_14', 'd_5', 'd_9'},
{'d_1', 'd_5'}]

```

```
{'d_0'},
{'d_0', 'd_14', 'd_7'},
{'d_1'},
{'d_13'},
{'d_14', 'd_3', 'd_9'},
{'d_3'},
{'d_14', 'd_8'},
{'d_0', 'd_14'},
{'d_13', 'd_5'},
{'d_14', 'd_9'},
{'d_14', 'd_6'},
{'d_0', 'd_12', 'd_2'},
{'d_0', 'd_13'},
{'d_1', 'd_14', 'd_8'},
set(),
{'d_0', 'd_4'},
{'d_0', 'd_11'},
{'d_0', 'd_2'}]
```

Bibliografía

- [1] F. G. Arenas, Alexandroff spaces, *Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.)* **68**(1), 17-25, 1999.
- [2] R. Ayala, E. Domínguez, A. Quintero, *Elementos de la topología general*, Pearson Addison-Wesley, 1996.
- [3] J. Bang-Jensen, G.Z. Gutin, *Digraphs*, Springer London, 2008.
- [4] G. Chartrand, *Tournaments*, §27.2 in *Introductory Graph Theory*, New York: Dover, 155-161, 1985.
- [5] F. Harary, *Tournaments* In *Graph Theory*, Reading, MA: Addison-Wesley, 204-208, 1994.
- [6] F. Harary and L. Moser, *The theory of round robin tournaments*, *Amer. Math. Monthly*, **73**(3), 231–246, 1966.
- [7] J. Dammak and R. Salem, Graphic topology on tournaments, *Adv. Pure Appl. Math.* **9**(4) , 279–285, 2018.
- [8] A. F. Hassan, Z. R. R. Zainy, *The independent compatible edges topology of directed graphs*, *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, vol. 25, n^o 8, 2683-2695, 2022.
- [9] A. F. Hassan, Z. R. R. Zainy, *Properties of independent compatible edges topology on directed graphs*, *AIP Conference Proceedings*, 2023.
- [10] S. M. Jafarian Amiri, A. Jafarzadeh and H. Khatibzadehan, *Alexandroff topology on graphs*, *Bull. Iranian Math. Soc.* **39**(4), 647–662, 2013.
- [11] D. D. Laping, C. M. R. Balingit, *A Generalized Topology from the Edge Set of Maximal Paths of Directed Graphs*, *Asian Research Journal of Mathematics*, **18**(10):11-21, 2022.
- [12] R. N. Lieberman, *Topologies on Directed Graphs*, 1972
- [13] J. P. May, *Finite topological spaces*, Notes, University of Chicago, 2008.
<http://math.uchicago.edu/~may/MISC/FiniteSpaces.pdf>

- [14] J. W. Moon, *Topics on Tournament*, University of Alberta, 1968.
- [15] A. Nakayama, B. Peroche, *Linear arboricity of digraphs*, *Networks*, **17**: 39-53, 1987.
- [16] A. B. Sánchez, *La topología gráfica sobre torneos*, Trabajo Fin de Grado, Universidad de Sevilla, 2020. <https://idus.us.es/handle/11441/115202>.
- [17] R. Stong, *Finite topological spaces*, *Transactions of the American Mathematical Society*, 123, 325-340, 1966.