Medidas Cónicas
y
Rangos de Medidas Vectoriales

M. Carmen Romero Moreno

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

MEDIDAS CÓNICAS Y RANGOS DE MEDIDAS VECTORIALES

Memoria presentada por
Dña. M. Carmen Romero Moreno
para optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas.

M. Carmen Romero Moreno

V° B° Directores

D. Juan Arias de Reyna Martínez.
Catedrático del Departamento de
Análisis Matemático de la
Universidad de Sevilla.

D. Luis Rodríguez Piazza.
Profesor titular del Departamento de
Análisis Matemático de la
Universidad de Sevilla.

Sevilla, Junio 1996.

A Pura

Quiero expresar mi más sincero a gradecimiento a mis directores Juan Arias de Reyna Martínez y Luis Rodríguez Piazza por hacer posible este proyecto. En particular, quiero agradecer a este último por su valiosa guía y su ingenio que han contribido muy positivamente al desarrollo de esta memoria.

También quiero hacer constar mi gratitud por J. Diestel, por el entusiasmo y constante ánimo que he recibido de su persona en mis visitas a Kent.

En el plano personal, no puedo dejar de agradecer a mis padres, mi hermana, mis hermanos y a Cristina Vega, quienes han soportado mi cambiante estado de ánimo en los últimos años. Muy especialmente quiero mencionar la ayuda de toda la familia Molera, incluido Adalberto Romero, de quienes constantemente he recibido apoyo; en especial a Pilar Molera por las lecciones vitales que he recibido de su persona.

Gracias también a mis amigos M. Isabel Castilla, John Alexopoulos, Paul Abraham y J.I. de quienes he recibido una ayuda indispensable en los últimos años.

Por último, quiero agradecer a Guillermo Curbera, Fernando León y Alfonso Montes por los empujones recibidos en los momentos más necesarios.

Índice.

Introducción. .... *ix*

CAPITULO 1. **Medidas vectoriales y medidas cónicas.** 1

Sección 1: Rangos de medidas vectoriales. 1

Sección 2: Medidas cónicas. 9

Sección 3: Medida cónica asociada a una medida vectorial. 12

CAPITULO 2. **Propiedades de una medida vectorial determinadas por su rango.** 32

Sección 1: Variación de medidas vectoriales. 32

Sección 2: Algunas normas de ideales del operador integración. 37

Sección 3: Derivabilidad Pettis. 46

Sección 4: Diferenciabilidad de la variación de una medida. 61

CAPITULO 3. **Descomposición de rangos de medidas y paralelepípedos.** 73

Sección 1: Descomposición de zonoides y zonoides definidos. 73

Sección 2: Paralelepípedos y zonoides definidos. 88

CAPITULO 4. **Normas de ideales de operadores en $\mathbf{L^p}$.** 108

Sección 1: Operadores en $L^p(\lambda)$. 108

Sección 2: Continuidad de las normas de ideales de operadores...... 120

Referencias...... 129

Introducción.

La mayor parte de esta memoria estará dedicada a temas relacionados con el rango de una medida vectorial con valores en un espacio de Banach. Por "rango de una medida vectorial" entenderemos un conjunto de la forma $\mathrm{rg}(F) = \{F(A) : A \in \Sigma\}$, donde Σ es una σ-álgebra de conjuntos y F es una medida vectorial numerablemente aditiva definida en Σ con valores en un espacio de Banach X.

En 1.991 L. Rodríguez Piazza, respondiendo a una pregunta de R. Anantharaman y J. Diestel, probó que el rango de una medida vectorial determina su variación total. Posteriormente probaba que el rango determina la σ-finitud de la variación y la existencia de una derivada Bochner. A la luz de estos resultados, nos preguntamos por la existencia de una estructura sólo dependiente del rango de la medida y que determinara estas propiedades. Esto nos daría una nueva prueba de estos hechos y ofrecería un método general de prueba para propiedades determinadas por el rango.

En el caso que F sea una medida vectorial valorada en $\mathbb{R}^n$, existe al menos una medida en la esfera unidad $\mathbb{S}^{n-1}$, μ_F, tal que

$$\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F) = \overline{\mathrm{co}}\Big\{ \int_B x d\mu_F(x) : B \text{ es un Boreliano en } \mathbb{S}^{n-1} \Big\} \qquad (1).$$

De hecho, si G es otra medida vectorial valorada en $\mathbb{R}^n$, $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F)$ es un trasladado de $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, G)$ si y sólo si las medidas simetrizadas μ_F^s y μ_G^s coinciden. Este hecho se deduce de un Teorema sobre determinación de medidas en la esfera probado por C.M. Petty en [P], N.W. Rickert en [R1] y[R2] y Matheron en [M], entre otros. Debido a esto, la medida μ_F es de utilidad a la hora de probar resultados determinados por el rango. Este proceso no es extensible a medidas valoradas en un espacio de dimensión infinita, ya que en este caso, no toda medida es diferenciable ni tiene variación finita. Usaremos en este caso dos ingredientes fundamentales: la integral de Bartle y la medida cónica asociada a una medida vectorial.

La integral de Bartle con respecto a una medida vectorial es un operador definido para funciones medibles y acotadas que permite identificar la envoltura convexa y cerrada del rango con la imagen de un intervalo acotado en cierto espacio $L^\infty(\lambda)$ mediante un operador débil*-débil continuo. Esto permite, por ejemplo, probar el clásico resultado de Bartle-Dunford-Schwartz que afirma que el rango de una medida es relativamente débil compacto.

El concepto de medida cónica fue introducido en la década de los 60 por G. Choquet para resolver problemas de representación integral en conos convexos en el contexto de espacios localmente convexos. Nosotros lo usaremos sólo en el caso de espacios de Banach.

En 1.976 I. Kluvánek introdujo en [K] el concepto de medida cónica u_F asociada a una medida vectorial F para caracterizar aquellos subconjuntos convexos y cerrados de un espacio de Banach que aparecen como el rango de una medida vectorial. Siguiendo los trabajos de Choquet y Kluvánek se puede probar que $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, F)$ es un trasladado de $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, G)$ si y sólo si $u_F^s = u_G^s$, siendo u_F^s y u_G^s las medidas cónicas simetrizadas de u_F y u_G, respectivamente. Basándonos en este hecho, usaremos la medida cónica asociada a una medida vectorial para probar que ciertas propiedades de las medidas vectoriales vienen determinadas por su rango.

El Capítulo 1 no contiene resultados originales, aunque algunos resultados tienen un nuevo tratamiento. En la primera sección comenzamos estableciendo la notación y recordando el material sobre medidas vectoriales y rangos de medidas necesario para el posterior desarrollo de la memoria. La segunda sección está dedicada a recopilar los resultados sobre medidas cónicas usados posteriormente. La última sección de este capítulo expone, entre otros, los resultados de I. Kluvánek en [K], que tendrán gran relevancia en los sucesivos capítulos. I. Kluvánek probó que dada una medida cónica u con ciertas propiedades, existe una medida vectorial valorada en un espacio de Banach X cuya medida cónica asociada es u. La prueba de este autor es puramente existencial y no muestra relación alguna entre la medida vectorial construida y la medida cónica de partida. Hace uso del hecho que, en estas condiciones, una medida cónica es una integral de Daniell. Nosotros daremos una prueba distinta de este hecho en el Teorema 1.3.13 que no hace uso de estos argumentos y muestra de manera más explícita la relación existente entre esta medida encontrada y la medida cónica de partida.

En el capítulo 2, estudiamos diversas propiedades de medidas vectoriales determinadas por su rango. Comenzamos en la primera sección caracterizando el hecho de tener variación finita y σ-finita en términos de la medida cónica asociada. Como estas caracterizaciones resultan ser invariantes bajo simetrización, resulta que dichas propiedades están determinadas por el rango (Corolarios 2.1.3 y 2.1.6). En la siguiente sección, motivados por el hecho que una medida vectorial tiene variación finita si y sólo si el operador integración es absolutamente sumante, probamos que el rango de una medida vectorial determina la norma (p, q)-sumante del operador integración (Corolario 2.2.2). Damos también una prueba del hecho que el rango determina la norma p-nuclear de este operador (Corolario 2.2.5).

En la sección 3 de este mismo capítulo, estudiamos problemas de existencia de derivadas de la medida en función de la medida cónica asociada. Comenzamos viendo en el Ejemplo 2.3.2, basado en una construcción de D. Fremlin y M. Talagrand, que el rango de una medida no determina la existencia de una derivada Pettis. No obstante, es fácil deducir del hecho que el rango determina la existencia de una derivada Bochner que el rango de una medida determina la existencia de una derivada Pettis fuertemente medible. En el caso de tener una medida vectorial de variación finita, la medida cónica asociada es "localizable" por cierta medida positiva definida en X^{**}, única bajo determinadas condiciones. Probamos también que la simetrización de esta medida está determinada por el rango (Teorema 2.3.3). En términos de esta medida caracterizamos cuándo toda medida con el mismo rango tiene una derivada Pettis y cuándo existe al menos una medida con el mismo rango con una derivada Pettis. Damos también una condición suficiente para que toda medida con el mismo rango que una derivable Pettis sea derivable Pettis (Proposición 2.3.7). De este último resultado se deduce una nueva prueba de que el rango determina la diferenciabilidad Bochner.

La última sección del Capítulo 2 estudia un problema de Radon-Nikodym para la variación de una medida. En 1.983, C. Debieve probó en [D] que para cada $\varepsilon > 0$, y para cada medida F de variación finita con valores en un espacio de Banach X existe una derivada de su variación $|F|$, con respecto a ella valorada en X^* de norma menor o igual que $1+\varepsilon$; es decir,

$$|F|(A) = \int_A f\,dF \qquad \text{para todo } A \in \Sigma.$$

Lo que no es siempre posible es encontrar tal función f con $\|f\| = 1$, $|F|$-e.c.t.. Este es un problema relacionado con la propiedad de Radon-Nikodym (ver [J]). F. Delbaen y L. Janicka estudiaron en [DJ] las medidas valoradas en c_0 y ℓ_1 que tienen una derivada normalizada de la variación con respecto a la medida. Es fácil deducir de esta caracterización para ℓ_1 que es una propiedad determinada por el rango de la medida. De nuevo, usando la medida cónica asociada, probamos que el rango determina la existencia de una derivada normalizada para cualquier medida vectorial X-valorada. Para concluir este capítulo, caracterizamos geométricamente los rangos de medidas vectoriales valoradas en $L^1(\lambda)$ para las que se tiene una derivada normalizada.

El Capítulo 3 está dedicado, fundamentalmente, a estudiar problemas de descomposiciones de zonoides. En la literatura, la palabra zonoide suele utilizarse para designar el rango de una medida vectorial no atómica en dimensión finita; o equivalentemente, la envoltura convexa y cerrada del rango de una medida vectorial. Nosotros usaremos el término zonoide para referirnos a la envoltura convexa y cerrada del rango de una medida vectorial valorada en un espacio de Banach.

El estudio de los zonoides en dimensión finita pertenece a varias disciplinas entre las cuales se encuentran la geometría de cuerpos convexos, rangos de medidas, subespacios de L^1, por mencionar algunas. Ya en el siglo pasado fueron descubiertos de manera natural en cristalografía por Fedorov. La importancia desde el punto de vista analítico fue ya señalada por Blaschke en [B]. También aparecen implícitamente en los trabajos de Aleksandrov (ver [A]) sobre proyecciones de cuerpos convexos. Han sido objeto de diferentes artículos recopilatorios (ver [Bo], [GW] y [SW]). Pero el estudio de la geometría de un zonoide en un espacio de Banach es un problema mucho menos estudiado.

Debido a la estructura aditiva del conjunto de los zonoides (con respecto a la adición de Minkowski), es natural estudiar las descomposiciones en sumandos a las que éstos dan lugar. La primera parte del Capítulo 3 está dedicada a extender un resultado de A. Neyman en [N1] sobre zonoides en $\mathbb{R}^n$ a zonoides en espacios de Banach. En general, un zonoide en $\mathbb{R}^n$ no determina la medida en la esfera que lo define como zonoide de momentos (ver (1)). Aquellos zonoides que determinan unívocamente esta medida en la esfera se llaman definidos y fueron introducidos en [N1], donde se caracterizan los zonoides definidos en términos de descomposiciones de rangos de medidas y se da una condición geométrica que los caracteriza: el menor conjunto extremal del zonoide que contiene a 0 en su interior relativo es un paralelepípedo.

Al tratar de generalizar el resultado de A. Neyman a zonoides en un espacio de Banach nos encontramos con que los conceptos que allí figuraban no son directamente generalizables a este caso. La herramienta necesaria es de nuevo la medida cónica asociada a una medida vectorial. Un zonoide en un espacio de Banach puede ser la envoltura convexa y cerrada del rango de medidas vectoriales distintas. Por tanto, puede tener asociadas medidas cónicas distintas. Llamaremos zonoide definido a aquellos para los que esta medida cónica es única. Con esta definición generalizamos, en el Teorema 3.1.9, el resultado de A. Neyman y demostramos que un zonoide Z es definido si y sólo si existe una medida vectorial F definida en (Ω, Σ) tal que toda descomposición en zonoides de Z se obtiene descomponiendo (Ω, Σ). Concluimos la primera sección del Capítulo 3 caracterizando los zonoides definidos en función de imágenes de intervalos en $L^\infty(\lambda)$ (Teorema 3.1.10). Como consecuencia probamos que si 0 es un punto extremal de Z, entonces Z es definido (Corolario 3.1.11).

La siguiente sección está dedicada a encontrar una condición geométrica que caracterice los zonoides definidos. En primer lugar consideramos una definición de paralelepípedo que generaliza la finito dimensional y que tiene la propiedad de ser un zonoide. Usando esta definición, probamos que Z es un zonoide definido si y sólo si $Z \cap (-\alpha Z)$ es un paralelepípedo para todo valor de $\alpha > 0$ (Teorema 3.2.7). Esta condición extiende la finito dimensional pero nuestra prueba es esencialmente distinta.

De paso, probamos que todo zonoide Z en un espacio de Banach se puede escribir como $Z = \overline{\bigcup_{\alpha>0} Z \cap (-\alpha Z)} + Z'$ donde tanto $\overline{\bigcup_{\alpha>0} Z \cap (-\alpha Z)}$ como Z' son zonoides y 0 es un punto extremal de Z'.

La búsqueda de la condición geométrica que caracteriza los zonoides definidos nos sugirió diversos problemas relacionados con sumandos de zonoides. Se deduce del Lema 3.2.3 que si Z es definido, entonces $Z \cap (-Z)$ es un zonoide y un sumando de Z. Finalizamos la sección segunda y el capítulo dando algunas condiciones suficientes para que $Z \cap (-Z)$ sea un sumando de Z. En concreto probamos en el Teorema 3.2.15 que si $Z \cap (-Z)$ es un zonotopo (una suma finita de segmentos) entonces $Z \cap (-Z)$ es un sumando de Z. No sabemos si el ser $Z \cap (-Z)$ zonoide implica que sea un sumando de Z.

El último Capítulo de nuestra memoria no es un capítulo sobre medidas vectoriales, aunque los problemas aquí tratados tienen su raíz en los problemas del capítulo primero sobre normas de ideales del operador integración de una medida vectorial. Los resultados obtenidos engloban este caso y los generalizan a una clase más amplia de operadores e ideales.

El estudio de los ideales de operadores comenzó con los trabajos de A. Grothendieck en los años 50. Pero fue A. Pietsch quien en 1.967 estableció muchas de sus propiedades fundamentales. Su estudio ha tenido un interés creciente desde entonces debido a sus aplicaciones a la geometría de espacios de Banach, la teoría espectral y otros campos del Análisis Matemático. El problema fundamental de ciertos ideales de operadores es establecer criterios para que un operador pertenezca a un ideal dado y en determinadas ocasiones es complicado computar su norma.

Desde la aparición del artículo "Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications" de J. Lindenstrauss y A. Pelczynski [LP], operadores definidos en $\mathcal{L}_p$-espacios han ocupado un lugar destacado en el estudio de ideales de operadores. Inspirados por los resultados del Capítulo 1, probamos que si p es un número real en $(1, +\infty)$ cuyo exponente conjugado no es un entero par mayor estricto que 2, y $T : L^p(\lambda) \longrightarrow X$ es un operador, toda norma de ideal de operador de T está determinada por la imagen de la bola unidad (Teorema 4.1.8). Este resultado es cierto para $p = \infty$ siempre que el operador sea débil*-débil continuo, que es el caso del operador integración de una medida vectorial. Para $p = 1$, probamos que se mantiene si X es un espacio de dimensión finita. Esto último es cierto también si el operador está definido en un espacio $\mathcal{C}(K)$ con valores en un espacio X de dimensión finita.

En la última sección probamos que la aplicación que asocia a la imagen de la bola unidad cualquier norma de ideal de operadores en continua con respecto a la distancia de Hausdorff (Teorema 4.2.5).

Hemos probado en el Capítulo 2 y en el Capítulo 4 que ciertas propiedades están determinadas por el rango de una medida y por la imagen de la bola unidad de un operador. Sería interesante estudiar geométricamente el rango de una medida vectorial para ver cómo determina estas propiedades, así como dar criterios en función de la estructura geométrica de la imagen de la bola unidad para que un operador pertenezca a un ideal de operadores dado.

CAPÍTULO 1: Medidas vectoriales y medidas cónicas.

Sección 1: Rangos de medidas vectoriales.

El propósito de esta sección es introducir la notación y presentar brevemente los resultados fundamentales sobre medidas vectoriales y rangos de medidas que tendrán una relevancia esencial a lo largo de esta memoria.

Un modelo próximo en cuanto a notación será la monografía "Vector measures" de J. Diestel y J.J. Uhl [DU], que será nuestra referencia habitual en conceptos acerca de medidas vectoriales y espacios de Banach no definidos explícitamente. En lo relativo a ideales de operadores, los resultados usados se encuentran básicamente en [DJT].

Para un espacio de Banach X con dual X^*, B_X denotará la bola unidad cerrada $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ y S_X la esfera unidad $\{x \in X : \|x\| = 1\}$.

Si Ω es un conjunto arbitrario y Σ es una σ-álgebra de partes de Ω, el par (Ω, Σ) se llamará un *espacio medible.* Los elementos de Σ se denominan conjuntos *medibles.* Una partición de un conjunto medible A será una familia finita $\{A_i\}_{i=1}^n$ de conjuntos medibles disjuntos cuya unión es A. Un *espacio de medida* es una terna $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ donde (Ω, Σ) es un espacio medible y λ es una medida positiva definida en Ω. Una propiedad se cumple *puntualmente en casi todo respecto de* λ si se cumple en todos los puntos de un subconjunto medible

M con $\lambda(\Omega \setminus M) = 0$; lo abreviaremos escribiendo que la propiedad se cumple λ-e.c.t.. Ocasionalmente, manejaremos subconjuntos B de Ω no medibles, cuya medida exterior está definida por

$$\lambda^*(B) = \inf\{\lambda(A) : A \in \Sigma, B \subset A\}.$$

Una *medida vectorial* F será una función definida en una σ-álgebra Σ y con valores en un espacio de Banach X tal que $F(\emptyset) = 0$ y $F(A \cup B) = F(A) + F(B)$ siempre que A y B sean conjuntos medibles y disjuntos. La medida F se dice *numerablemente aditiva* si para toda familia de conjuntos medibles disjuntos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, se tiene que la serie $\sum_n F(A_n)$ converge a $F(\bigcup_n A_n)$. Es *fuertemente aditiva* si la serie $\sum_n F(A_n)$ es convergente en X. Mientras no se especifique lo contrario, trataremos sólamente medidas vectoriales numerablemente aditivas aunque en ocasiones consideraremos medidas finitamente aditivas definidas en álgebras de conjuntos. Llamaremos medidas *escalares* a las que toman valores en el cuerpo de los números reales.

La *variación* de una medida vectorial F, que denotaremos por $|F|$, está definida para cada A medible como

$$|F|(A) = \sup\Big\{ \sum_{B \in \pi} \|F(B)\| : \pi \text{ es una partición finita de } A \text{ en } \Sigma \Big\};$$

donde se permite que el supremo de la derecha tome el valor infinito. La variación resulta ser una medida numerablemente aditiva. La *variación total* de F es la variación del conjunto Ω y que denotamos por $\|F\| = |F|(\Omega)$. Si $\|F\| < +\infty$, decimos que F tiene *variación finita*. En el caso que $\Omega = \bigcup_n A_n$ donde $|F|(A_n) < +\infty$ para todo n, se dice que F tiene *variación σ-finita*.

A pesar de que la variación de una medida vectorial no sea acotada, un resultado debido a Bartle-Dunford-Schwartz [DU, pg. 14] asegura que existe siempre una medida positiva y finita λ tal que $\lambda(A) = 0$ implica que $F(A) = 0$. De hecho, esta condición es equivalente a

$$\lim_{\lambda(A) \to 0} F(A) = 0.$$

Una medida λ en tales condiciones se llama una *medida de control* para F. Más aún, Rybakov probó que siempre se puede escoger λ como la variación $|x^*F|$ de la medida real x^*F para algún $x^* \in X^*$. Un funcional x^* en estas condiciones se llama un *funcional de Rybakov*. Se puede probar que el conjunto de funcionales de Rybakov es denso en X^* (ver [DU, pg. 269]).

Un lema técnico pero de mucha utilidad a la hora de probar propiedades de medidas vectoriales es el llamado *Lema de exhaución* que enunciamos a continuación [DU, pg. 70].

Lema 1.1.1. *Sea $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ un espacio de medida finito. Supongamos que P es una propiedad que poseen ciertos subconjuntos de Σ tal que:*

(a) Si $A \in \Sigma$ tiene la propiedad P, también la tiene cada $B \in \Sigma$ contenido en A.

(b) Cada conjunto $A \in \Sigma$ con $\lambda(A) > 0$, contiene un subconjunto B de medida estrictamente positiva tal que B tiene la propiedad P.

Entonces existe una sucesión $\{A_n\}_n$ de conjuntos de Σ que tienen la propiedad P tal que $\lambda(\Omega \setminus \bigcup_n A_n) = 0$. Además los $\{A_n\}$ se pueden tomar disjuntos dos a dos.

Usaremos este lema fundamentalmente en el caso que λ sea una medida de control para una medida vectorial.

Denotaremos por $\operatorname{rg} F$ al *rango* de F, es decir,

$$\operatorname{rg} F = \{F(A) : A \in \Sigma\}.$$

Es fácil probar que $\operatorname{rg} F$ es un subconjunto acotado de X y simétrico respecto de $x_0 = \frac{1}{2}F(\Omega)$: si $x = F(A) \in \operatorname{rg} F$, entonces $x - x_0 = x_0 - x'$ siendo $x' = F(\Omega \setminus A)$.

La mayor parte del conocimiento del rango de una medida vectorial se basa en la integral de Bartle que relaciona la Teoría de las Medidas vectoriales con el Análisis Funcional y la Teoría de Operadores. Es por ello, que vamos a recordar las propiedades básicas de este tipo de integral y los resultados relativos al rango que usaremos a lo largo de esta memoria.

Sea $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ una medida vectorial y λ una medida de control para ella. Nuestro objetivo es definir la integral de una función medible y acotada con respecto a F. Hay que hacer notar que introduciremos la integral de Bartle de forma diferente a la usual (por ejemplo la de [DU]), pero más conveniente para nuestros propósitos. Básicamente, se trata de un operador lineal y continuo T_F sobre las funciones medibles y acotadas tal que $T_F(\chi_A) = F(A)$.

Para cada $x^* \in X^*$, la medida escalar x^*F es absolutamente continua con respecto a λ, y por el Teorema de Radon-Nikodym escalar existe una función que denotamos f_{x^*} en $L^1(\lambda)$ tal que $f_{x^*} = \frac{d(x^*F)}{d\lambda}$, es decir,

$$\langle x^*, F(A) \rangle = \int_A f_{x^*} d\lambda \text{ para todo } A \in \Sigma.$$

La correspondencia $x^* \to f_{x^*}$ es claramente lineal y define un operador

$$S_F : X^* \longrightarrow L^1(\lambda).$$

Como el rango de F es acotado, sea $M = \sup_{A\in\Sigma} \|F(A)\|$. Entonces si $A = \{\omega \in \Omega : f_{x^*} \geq 0\}$ y $B = \{\omega \in \Omega : f_{x^*} < 0\}$, se obtiene para cada $x^* \in X^*$

$$\|f_{x^*}\|_1 = \int_A f_{x^*} d\lambda - \int_B f_{x^*} d\lambda = x^*F(A) - x^*F(B) \leq 2M\|x^*\|.$$

Luego S_F es un operador acotado. Entonces, si $\varphi = \chi_A$ para $A \in \Sigma$ y $x^* \in X^*$,

$$\langle S_F^*(\chi_A), x^* \rangle = \langle \chi_A, S_F(x^*) \rangle = \int \chi_A f_{x^*} d\lambda = \langle x^*, F(A) \rangle.$$

Por tanto, si φ es una función simple de la forma $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ se tiene

$$S_F^*(\varphi) = \sum_{i=1}^n \alpha_i F(A_i) \in X.$$

Debido a la densidad de las funciones simples en $L^\infty(\lambda)$, S_F^* es un operador lineal valorado en X, que denotamos por T_F, es decir, $T_F : L^\infty(\lambda) \longrightarrow X$.

Para una función φ medible y acotada escribimos

$$T_F(\varphi) = \int \varphi dF$$

y se llamará *integral de Bartle de φ con respecto a F*. Una propiedad fundamental de esta integral es que T_F resulta ser un operador débil*-débil continuo si $L^\infty(\lambda)$ se considera el dual de $L^1(\lambda)$. El resultado crucial que relaciona el rango de una medida vectorial con la integral de Bartle es el siguiente:

Teorema 1.1.2. *Si $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ es una medida vectorial con valores en X se tiene:*

(a) $\operatorname{rg} F$ *es un conjunto relativamente débil compacto en X.*

(b) $\overline{\text{co}}(\operatorname{rg} F) = \left\{ \int \varphi dF : \varphi : \Omega \longrightarrow [0,1] \quad \textit{medible} \right\}$.

DEMOSTRACIÓN. Se puede encontrar en [DU, pg. 263], vamos a recordarla brevemente. Sea λ una medida de control para F. Como la bola unidad de $L^\infty(\lambda)$ es un conjunto débil*-compacto de X y para todo conjunto medible A se tiene que $F(A) = T_F(\chi_A)$, la débil*-débil continuidad de T_F asegura que $\operatorname{rg} F$ es un conjunto relativamente débil compacto.

Por otra parte, el conjunto $H = \{\varphi \in L^\infty(\lambda) : 0 \leq \varphi \leq 1\}$ es un subconjunto débil*-compacto y convexo de $L^\infty(\lambda)$, con lo que se tiene

$$\overline{\text{co}}(\operatorname{rg} F) \subseteq T_F(H).$$

Observemos que las funciones de la forma $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ con $0 \leq \alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_n \leq 1$ y A_i disjuntos dos a dos son débil*-densas en H. Si escribimos $T_F(\varphi)$ de la forma

$$T_F(\varphi) = \sum_{i=1}^n \alpha_i F(A_i) = \sum_{j=1}^n \beta_j F(\bigcup_{i=j}^n A_i),$$

donde $\beta_1 = \alpha_1$ y $\beta_j = \alpha_j - \alpha_{j-1}$ para $j \geq 2$, dado que $0 \in F(\Sigma)$, se tiene que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F(A_i) \in \mathrm{co}(\mathrm{rg}\, F)$ y por tanto $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F) = T_F(H)$. □

La integral de Bartle da paso a un nuevo tipo de medidas vectoriales que se definen a partir de una dada $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ y que serán de vital importancia en lo sucesivo. Sea φ una función medible y acotada en Ω. Para cada $A \in \Sigma$ se define

$$\varphi F(A) = T_F(\chi_A \varphi) = \int \chi_A \varphi dF.$$

Debido a la débil*-débil continuidad de T_F, φF es una medida numerablemente aditiva para la topología débil y gracias al Teorema de Orlicz-Pettis en la topología de la norma en X. Las propiedades más usadas en nuestra memoria de estas nuevas medidas se recogen en la siguiente proposición.

Proposición 1.1.3. *Sea $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ una medida vectorial y λ una medida de control para F. Si φ y ψ son dos funciones en $L^\infty(\lambda)$ entonces:*

(a) $\psi(\varphi F) = (\psi\varphi)F$.

(b) $\|\varphi F(A)\| \leq \int_A |\varphi| d|F|$ *para todo conjunto medible A.*

(c) $|\varphi F|(A) = \int_A |\varphi| d|F|$.

Los apartados (a) y (b) siguen de la definición de integral para funciones simples y fácilmente, por densidad, para funciones de $L^\infty(\lambda)$. El apartado (c) puede encontrarse en [L1, Teorema 4.2].

El clásico Teorema de Liapunov asegura que el rango de una medida vectorial en $\mathbb{R}^n$ es compacto y convexo. Este Teorema no se mantiene para medidas valoradas en espacios de Banach. Sin embargo, el siguiente resultado asegura que la envoltura convexa y cerrada del rango de una medida vuelve a ser el rango de una medida vectorial. Este hecho se debe a E.D. Bolker (ver [Bo]) en dimensión finita y a Kluvanek-Knowles, en general (ver [DU, pg. 274]).

Teorema 1.1.4. *Si $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ es una medida vectorial, existe otra medida vectorial F' tal que $\operatorname{rg} F' = \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{rg} F)$.*

Vamos a describir brevemente la construcción de esta medida F', ya que la usaremos más adelante. Tomemos $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de conjuntos de Borel en $[0,1]$ y m la medida de Lebesgue en este intervalo. Sea $\Omega' = \Omega \times [0,1]$ y Σ' la σ-álgebra generada por $\Sigma \times \mathcal{B}$. Sea $F' : \Sigma' \longrightarrow X$ la medida vectorial definida por:

$$F'(C) = \int_\Omega m\{t \in [0,1] : (\omega, t) \in C\} dF(\omega).$$

Fácilmente se comprueba que está bien definida y es numerablemente aditiva.

Está claro que $F'(\Sigma') \subseteq \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{rg} F)$ ya que para todo $C \in \Sigma'$, $\varphi_C = m\{t \in [0,1] : (\omega, t) \in C\}$ es una función medible en Ω con valores en $[0,1]$ y $F'(C) = T_F(\varphi_C)$. Recíprocamente, sea φ una función medible en Ω, $0 \leq \varphi \leq 1$. Sea $C = \{(\omega, t) : 0 \leq t \leq \varphi(\omega)\}$, que es un elemento de Σ'. Por la propia definición de F', $F'(C) = \int \varphi dF$ lo que prueba que $\operatorname{rg}(F') = \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{rg} F)$.

Se dice que una medida vectorial $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ satisface el Teorema de Liapunov para la topología débil si para todo $A \in \Sigma$ el conjunto

$$\operatorname{rg}(\chi_A F) = \{F(A \cap E) : E \in \Sigma\}$$

es un conjunto débil compacto y convexo en X. Esto, resulta ser equivalente a que para toda medida de control λ para F y toda función φ no nula en $L^\infty(\lambda)$ exista otra función medible y acotada ψ tal que $\|\psi\varphi\|_\infty > 0$ y $T_F(\psi\varphi) = 0$ (ver [DU, pg. 263]). Se puede comprobar que la medida F' construida en el Teorema 1.1.4 satisface esta condición.

Un *zonoide* es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que es el rango de una medida vectorial no atómica [Bo]. Gracias al Teorema de Liapunov, todo zonoide es un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$. Usando la construcción de Kluvánek-Knowles, un conjunto Z es un zonoide si y sólo si es la envoltura convexa y cerrada del rango de una medida vectorial. Son muchas las definiciones equivalentes de zonoide debido a que aparecen en contextos muy diversos; por ejemplo coinciden con los cuerpos convexos que pueden ser aproximados en la métrica de Hausdorff por sumas finitas de segmentos lineales que contienen a 0. Por esto, el ejemplo más simple de zonoide es uno de la forma

$$Z = \sum_{i=1}^{N} [0, \vec{x}_i]$$

donde $\vec{x}_i$ son vectores en $\mathbb{R}^n$; como rango de una medida vectorial aparece al considerar la σ-álgebra de medibles Lebesgue en $[0, N]$ y la medida vectorial con densidad $\vec{x}_i$ en cada $[i-1, i]$, para $i = 1, \ldots, N$. A este tipo de zonoides se les llama *zonotopos.* En un espacio de Banach general consideraremos la siguiente definición de zonoide:

Definición 1.1.5. *Diremos que un subconjunto Z de un espacio de Banach X es un zonoide si coincide con la envoltura convexa y cerrada del rango de una medida vectorial F con valores en X. En este caso, diremos que F genera el zonoide Z.*

Debido a la construcción de Kluvanek-Knowles, esta definición de zonoide coincide con la finito-dimensional, pues todo zonoide es el rango de una medida vectorial con valores en X.

Un trasladado de un zonoide Z es un zonoide si y sólo si contiene a 0. En una dirección está claro ya que 0 es un punto del rango de toda medida vectorial. Recíprocamente, sea $x_0 + Z$ trasladado de Z que contenga al 0. Para ver que $x_0 + Z$ es un zonoide, sea $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ una medida vectorial tal que $Z = \operatorname{rg} F$. Como $0 \in x_0 + Z$, existe un conjunto medible C tal que $F(C) = -x_0$. Sea la medida F' definida en la misma σ-álgebra que F tal que para cada $A \in \Sigma$

está definida por $F'(A) = F(A \setminus C) - F(A \cap C)$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} F'(A) &= F(A \setminus C) - F(A \cap C) \\ &= F(A \setminus C) + F(C \setminus A) - F(C \setminus A) - F(A \cap C) \\ &= F(A \triangle C) - F(C) = F(A \triangle C) + x_0. \end{aligned}$$

Para concluir, basta observar que la aplicación $A \to A\triangle C$ es una biyección de Σ en sí misma, con lo cual el rango de F' es $x_0 + Z$.

Hay que observar que para Z y Z' zonoides se tiene que Z es un trasladado de Z' si y sólo si $Z - Z = Z' - Z'$. Una dirección está clara. Si suponemos que $Z - Z = Z' - Z'$, sean Z_0 y Z_0' trasladados de Z y Z', respectivamente, simétricos respecto de 0. Nuestra hipótesis implica que $Z_0 - Z_0 = Z_0' - Z_0'$ y por tanto, $2Z_0 = 2Z_0'$, con lo cual $Z_0 = Z_0'$, es decir, Z es un trasladado de Z'.

Sección 2: Medidas cónicas.

El concepto de medida cónica fue introducido por G. Choquet para resolver problemas de representación integral en conos convexos (ver [C]). No estudiaremos las medidas cónicas desde este punto de vista; las usaremos para el estudio de medidas vectoriales vía la medida cónica asociada a una medida vectorial que se definirá en la próxima sección. Las medidas cónicas se pueden definir en un contexto mucho más general que el de espacios de Banach X; por ejemplo, para un par dual de espacios localmente convexos. Nosotros aprovecharemos la dualidad (X, X^*) y (X^{**}, X^*) para las topologías débil y débil*, respectivamente.

Dado un espacio de Banach X, $h(X)$ denotará el menor retículo vectorial de funciones definidas en X con respecto al orden puntual y las operaciones lineales que contiene a X^*. Entonces todo elemento en $h(X)$ se escribe en la forma

$$z^* = \bigvee_{i=1}^{n} x_i^* - \bigvee_{i=n+1}^{m} x_i^* \qquad x_i^* \in X^* \text{ para } i = 1, \ldots, m \tag{1}$$

donde $\vee$ y $\wedge$ denotan el supremo e ínfimo respectivamente, y en este caso son máximo y mínimo puntual de funciones. Es un hecho general que dado un espacio vectorial de funciones (en este caso X^*) las diferencias de supremos finitos de ellas, siguen formando un espacio vectorial; observese, por ejemplo, que si A y B son subconjuntos finitos de números reales se tiene $\sup A + \sup B = \sup(A+B)$, lo cual se extiende trivialmente al orden puntual de funciones. Para ver que forman un retículo, es suficiente ver que dado z^* como en (1), el supremo puntual $z^* \vee 0$ existe y puede ser escrito de la misma forma. Y está claro que

$$z^* \vee 0 = \bigvee_{i=1}^{m} x_i^* - \bigvee_{i=n+1}^{m} x_i^*.$$

Luego los elementos en (1) forman un retículo que necesariamente coincide con $h(X)$. Como de costumbre en los retículos usaremos, para $z^* \in h(X)$, las notaciones $(z^*)^+$, $(z^*)^-$ y $|z^*|$ para designar la parte positiva, la parte negativa y el valor absoluto de x^*; es decir, $(z^*)^+ = z^* \vee 0$, $(z^*)^- = (-z^*) \vee 0$ y $|z^*| = z^* \vee (-z^*)$. Denotaremos por $h^+(X)$ al cono de los elementos positivos de $h(X)$.

Una *medida cónica* sobre X es un funcional lineal positivo en $h(X)$; es decir, una aplicación $u : h(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal tal que $u(z^*) \geq 0$ para todo $z^* \in h^+(X)$. El conjunto de todas las medidas cónicas sobre X se denotará $M^+(X)$. Es un retículo con respecto al orden $v \leq u$ si $v(z^*) \leq u(z^*)$, para cada $z^* \in h^+(X)$. De hecho, dadas dos medidas cónicas u y v, y $z^* \in h^+(X)$, se tiene

$$u \vee v(z^*) = \sup_{0 \leq w^* \leq z^*} \{u(w^*) + v(z^* - w^*)\},$$

y $u \wedge v = u + v - u \vee v$. En particular, tenemos la descomposición de Riesz [C, 10.5]: dados u_1, u_2 y v en $M^+(X)$ tales que $v \leq u_1 + u_2$, existe v_1 y v_2 en $M^+(X)$ con $v = v_1 + v_2$, $v_1 \leq u_1$ y $v_2 \leq u_2$.

En realidad, $M^+(X)$ es un retículo completo. Para ello, basta ver que una familia $\{u_i\}_{i\in I}$ contenida en $M^+(X)$ tiene un ínfimo en $M^+(X)$. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de subconjuntos finitos de I. Para cada $F \in \mathcal{F}$ sea $u_F = \inf_{i\in F} u_i$.

Si $z^* \in h^+(X)$, $u_F(z^*)$ es una red convergente a lo que definimos como $u(z^*)$. Claramente, u una vez extendida de esta forma por linealidad es $u = \inf_{i\in I} u_i$. Esto prueba que $M^+(X)$ es completo. También se tiene que

$$\sup_{i\in I}(u_i \wedge v) = (\sup_{i\in I} u_i) \wedge v \quad \text{y} \quad \inf_{i\in I} u_i \vee v = (\inf_{i\in I} u_i) \vee v.$$

Un ejemplo de medida cónica sobre un espacio de Banach X es una medida cónica u definida por

$$u(z^*) = \int z^* d\mu$$

donde μ es una medida positiva en X para la que todo funcional $x^* \in X^*$ es integrable. Se suele decir entonces que μ es una localización de u; y que u es una medida cónica localizable [C, 30.4]. Usaremos el término localización de una medida cónica en un sentido más amplio. Observemos primero que todo elemento $z^* \in h(X)$ se extiende a una función continua en X^{**}; extensión que es única por la densidad de X. De esta manera, consideraremos los elementos de $h(X)$ como funciones sobre X^{**} y podemos dar la siguiente definición de localización de una medida cónica:

Definición 1.2.1. *Una localización de la medida cónica $u \in M^+(X)$ es una medida positiva μ definida en el bidual de X para la que todo elemento de $h(X)$ es integrable y tal que $u(z^*) = \int z^*\, d\mu$ para cada $z^* \in h(X)$.*

Siempre que tengamos una localización μ definida en X, tenemos la inyección continua (por el Teorema del grafo cerrado) $X^* \longrightarrow L^1(\mu)$. Entonces $u\,|_{X^*} \in X^{**}$. Esta observación nos permite dar una medida cónica que no tiene una localización. Sea $\kappa : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal no continuo. Definimos para z^* como en (1), $\alpha(z^*) = \bigvee_{i=1}^{n} \kappa(x_i^*) - \bigvee_{i=n+1}^{m} \kappa(x_i^*)$. Es fácil comprobar que α está bien definida y es una medida cónica ya que dadas $\{x_1^*, \ldots, x_m^*\} \subseteq X^*$ existe $x \in X$ tal que $\kappa(x_i^*) = x_i^*(x)$. Como $\alpha\,|_{X^*} = \kappa$, esta medida cónica no tiene una localización.

Dada una medida cónica en X, la *simetrizada* de u se define como $u^s = \frac{1}{2}(u + \check{u})$ donde $\check{u}(z^*) = u(z^* \circ \sigma)$, siendo $\sigma(x) = -x$ para cada $x \in X$.

La *resultante* de una medida cónica u, si existe, se define como el vector $r(u)$ en X que satisface $u(x^*) = x^*(r(u))$ para todo $x^* \in X^*$. Si $r(v)$ existe siempre que $0 \leq v \leq u$, el *zonoformo* asociado a u es el subconjunto de X,

$$K_u = \{r(v) : v \in M^+(X), \quad 0 \leq v \leq u\}.$$

Es fácil ver que para $u, v \in M^+(X)$ se tiene $K_{u+v} = K_u + K_v$, ya que por la descomposición de Riesz, el intervalo en el orden $[0, u + v] = [0, u] + [0, v]$. También se tiene, si α es un real positivo, $K_{\alpha u} = \alpha K_u$.

Si dotamos $M^+(X)$ de la topología débil que hace continuas todas las aplicaciones $u \mapsto u(z^*)$ para todo $z^* \in h(X)$; entonces, para todo $u \in M^+(X)$, el intervalo $[0, u]$ es un conjunto compacto, es homeomorfo a un subconjunto cerrado del compacto $\prod_{z^* \in h^+(X)} [0, u(z^*)]$. Si K_u está definido, puesto que la aplicación resultante $r : [0, u] \to X$ es continua cuando a X lo dotamos de la topología débil, se tiene que el zonoformo asociado a una medida cónica es un subconjunto débil compacto de X. Es fácil comprobar que K_u también es convexo y tiene por centro de simetría a $r(u/2)$. Veremos en la próxima sección que todo zonoformo es un zonoide y viceversa. También veremos que si $r(v) = 0$ para todo $0 \leq v \leq u$, entonces $u = 0$.

Sección 3: Medida cónica asociada a una medida vectorial.

El punto de partida de los problemas que vamos a tratar en el Capítulo 2 es el hecho demostrado en [Ro1] que asegura que el rango de una medida vectorial determina su variación total; es decir, si dos medidas vectoriales con valores en un espacio de Banach tienen el mismo rango, o incluso sólo rangos con la misma envoltura convexa y cerrada, entonces tienen la misma variación total. En [Ro2], se probó que el rango determina la diferenciabilidad Bochner y la σ-finitud de la variación. Esto sugiere que éstas y otras propiedades determinadas por el rango dependen de cierta estructura sólo dependiente del rango. En este sentido usaremos la medida cónica asociada a una medida vectorial introducida por I. Kluvánek en [K]. Esto proveerá un método general para probar propiedades de una medida vectorial determinadas por el rango y dará un tratamiento unificado a este tipo de problemas. En el Capítulo 3, el uso de las medidas cónicas dará sus frutos al aplicarlo al estudio de descomposiciones de rangos de medidas vectoriales. Vamos a analizar primero el caso de medidas con valores en $\mathbb{R}^n$.

Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$ y $\|\cdot\|_2$ denotará la norma euclídea inducida. Para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ sea

$$H_\xi = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \xi \rangle \geq 0\}.$$

Sea μ una medida positiva de Borel en $\mathbb{R}^n$ para la que todo funcional lineal es integrable, es decir, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\int |\langle x, \xi \rangle| d\mu(x) < +\infty.$$

Podemos definir una medida vectorial M_μ en la σ-álgebra $\mathcal{B}$ de los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}^n$ computando los momentos de μ para $B \in \mathcal{B}$; es decir,

$$M_\mu(B) = \int_B x d\mu(x).$$

Sea Z_μ el zonoide generado por M_μ. A Z_μ le llamaremos *zonoide de momentos asociado a* μ.

En realidad, todo zonoide Z en $\mathbb{R}^n$ es un zonoide de momentos. Si F es una medida vectorial con valores en $\mathbb{R}^n$ generando el zonoide Z, siempre tiene variación finita y es diferenciable. Si $|F|$ es la variación de F con respecto a la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$ y f es la derivada de F con respecto a $|F|$, entonces f toma valores $|F|$-e.c.t. en la esfera euclídea unidad $\mathbb{S}^{n-1}$. Esta función f induce una medida imagen $\mu_F = |F| \circ f^{-1}$ en los conjuntos de Borel de $\mathbb{S}^{n-1}$. Para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\sup_{x \in Z_{\mu_F}} \langle x, \xi \rangle = \sup_{B \in \mathcal{B}} \int_B \langle x, \xi \rangle d\mu_F(x) = \int_{H_\xi} \langle x, \xi \rangle d\mu_F(x)$$

$$= \int_{\{\langle f,\xi\rangle \geq 0\}} \langle f,\xi\rangle d|F| = \sup_{x\in Z}\langle x,\xi\rangle.$$

Esto implica que $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, M_{\mu_F}) = Z$, y por tanto Z es el zonoide de momentos asociado a μ_F.

Sin embargo, no es cierto que el rango de F determine la medida μ_F, es decir, un zonoide puede ser el zonoide de momentos asociado a distintas medidas en la esfera. Pero, si μ_F^s es la medida simetrizada de μ_F, definida por $\mu_F^s(A) = \frac{1}{2}\big(\mu_F(A) + \mu_F(-A)\big)$ para cada conjunto de Borel A de $\mathbb{S}^{n-1}$, entonces:

Teorema 1.3.1. *Si F y G son dos medidas vectoriales con valores en $\mathbb{R}^n$, entonces $\mu_F^s = \mu_G^s$ si y sólo si $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F)$ es un trasladado de $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, G)$.*

Esto es, el rango de F determina la medida μ_F^s. Este resultado es una consecuencia del Teorema 1.3.2, y del hecho de que, para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$, se tiene poniendo $Z = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F)$:

$$\begin{aligned}\sup_{x\in Z-Z}\langle \xi, x\rangle &= \int_{H_\xi}\langle \xi, x\rangle d\mu_F(x) - \int_{-H_\xi}\langle \xi, x\rangle d\mu_F(x)\\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}}|\langle \xi, x\rangle| d\mu_F(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}}|\langle \xi, x\rangle| d\mu_F^s(x).\end{aligned}$$

Teorema 1.3.2. *Si μ es una medida real simétrica definida en la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ tal que para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$*

$$\int |\langle x,\xi\rangle| d\mu(x) = 0,$$

entonces μ es la medida nula.

Este teorema se remonta (al menos) a Blaschke [B] quien lo probó para $n = 3$ en 1.916. El teorema de unicidad general fue probado por primera vez por Aleksandrov [A] en 1937, y fue reprobado por Petty [P] en 1961, Rickert en [R1] y [R2] en 1967 y Matheron [M] en 1971. Este último motivado por problemas de probabilidad, mientras que los tres primeros utilizaron esféricos armónicos. Claramente, este resultado es equivalente al hecho de que el espacio generado por las funciones $x \to |\langle x, y \rangle|$ con $y \in \mathbb{R}^n$ es denso en $\mathcal{C}_s(\mathbb{S}^{n-1})$, el espacio de las funciones continuas y simétricas definidas en $\mathbb{S}^{n-1}$ con la norma del supremo.

Para un zonoide Z en un espacio de Banach X no siempre es posible encontrar una medida μ tal que Z sea el zonoide de momentos asocido a μ. Este mismo proceso, forzaría a que la función identidad en X (o en X^{**}) fuese integrable en algún sentido. En este caso, una medida vectorial generando Z no es necesariamente de variación acotada ni diferenciable. En este sentido, la generalización de esta medida positiva al caso general de un espacio de Banach es una medida cónica.

En [K], I. Kluvánek introdujo la medida cónica asociada a una medida vectorial para caracterizar la envoltura convexa y cerrada de su rango. Si $F: \Sigma \longrightarrow X$ es una medida vectorial y λ es una medida de control para F, se puede definir una aplicación lineal de X^* en $L^1(\lambda)$ que a cada x^* le asocia la derivada de Radon–Nikodym $f_{x^*} = d(x^* \circ F)/d\lambda$. Esta aplicación se puede extender a un homomorfismo de retículos Φ_F de $h(X)$ en $L^1(\lambda)$, tal que para todo $z^* \in h(X)$ como en (1),

$$\Phi_F(z^*) = f_{z^*} = \bigvee_{i=1}^{n} f_{x_i^*} - \bigvee_{i=n+1}^{m} f_{x_i^*} \qquad (2).$$

Proposición 1.3.3. *La fórmula* (2) *define un único homomorfismo de retículos* $\Phi_F : h(X) \longrightarrow L^1(\lambda)$ *tal que* $\Phi_F(x^*) = f_{x^*}$ *para todo* $x^* \in X^*$.

DEMOSTRACIÓN. Si $\Phi_F : h(X) \longrightarrow L^1(\lambda)$ es un homomorfismo de retículos que satisface $\Phi_F(x^*) = f_{x^*}$ para todo $x^* \in X^*$, entonces (2) se verifica necesariamente y la unicidad es clara.

Hay que probar que (2) establece un homomorfismo de retículos bien definido, es decir, $\Phi_F(z^*)$ no depende de la representación de $z^* \in h(X)$ como en (1). Sea $w^* \in h(X)$ dado por

$$w^* = \bigvee_{j=1}^{p} y_j^* - \bigvee_{j=p+1}^{q} y_j^*,$$

donde $1 \leq p \leq q$ son enteros positivos y $y_j^* \in X^*$ para $1 \leq j \leq q$. Sea

$$X_0 = \Big\{x \in X : x_i^*(x) = 0, i = 1, \ldots, m; y_j^*(x) = 0, j = 1, \ldots, q\Big\}.$$

Entonces x_i^* y y_j^* son funcionales en el espacio cociente X/X_0. Si λ es una medida de control para F, como X/X_0 es un espacio de dimensión finita, existe una función $f : \Omega \longrightarrow X/X_0$ tal que

$$x_i^* F(A) = \int_A x_i^* f d\lambda \quad \text{ y } \quad y_j^* F(A) = \int_A y_j^* f d\lambda$$

para todos $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, q$ y $A \in \Sigma$. Entonces si $z^*(x) = w^*(x)$ para todo $x \in X$, se verifica $z^* f = w^* f$, λ-e.c.t. con lo que $\Phi_F(z^*) = \Phi_F(w^*)$. Con esto, $\Phi_F(z^*)$ es independiente de la representación de z^* como en (1) y Φ_F está bien definido. □

La *medida cónica* u_F *asociada a* F está definida por

$$u_F(z^*) = \int_\Omega \Phi_F(z^*)\, d\lambda\,, \qquad \text{para cada } z^* \in h(X).$$

Hay que observar que esta definición no depende de la medida de control λ; de hecho, la definición original de Kluvánek usaba la estructura reticular del conjunto de medidas reales definidas en Σ en vez de la de $L^1(\lambda)$, es decir,

$$u_F(z^*) = \Big(\bigvee_{i=1}^{n} x_i^* \circ F - \bigvee_{i=n+1}^{m} x_i^* \circ F\Big)(\Omega).$$

La medida cónica u_F tiene la siguiente propiedad de continuidad que usaremos en el Capítulo 3. Si para cada $i = 1, \ldots, n$, $(x_{i,k}^*)_k$ es una sucesión en

X^* convergente a x_i^* en norma; entonces $u_F(\bigvee_{i=1}^n x_{i,k}^*)$ converge a $u_F(\bigvee_{i=1}^n x_i^*)$. Esto puede probarse fácilmente ya que $u_F(|x_{i,k}^* - x_i^*|) = \int \Phi_F(|x_{i,k}^* - x_i^*|)d\lambda = \|T_F^*(x_{i,k}^* - x_i^*)\|$ que converge a 0. Como $|\bigvee_{i=1}^n x_{i,k}^* - \bigvee_{i=1}^n x_i^*| \leq \sum_{i=1}^n |x_{i,k}^* - x_i^*|$, se obtiene que $u_F(\bigvee_{i=1}^n x_{i,k}^*)$ converge a $u_F(\bigvee_{i=1}^n x_i^*)$. Esta propiedad no la comparten todas las medidas cónicas; por ejemplo, no la tiene la medida cónica α definida en el párrafo que sigue a la Definición 1.2.1.

Kluvánek identificó en [K] el zonoide generado por F con el zonoformo associado a u_F. En la prueba de este resultado queda implícito que para toda $0 \leq v \leq u_F$, existe una función medible $0 \leq \varphi \leq 1$, tal que

$$v(z^*) = \int \varphi \Phi_F(z^*)\, d\lambda,$$

para cada $z^* \in h(X)$. En la proposición siguiente aislamos este hecho para referencias futuras. La prueba que incluimos es diferente de la original de I. Kluvánek y hace uso de un teorema del tipo Hahn-Banach sobre extensión de funcionales definidos en retículos.

Proposición 1.3.4. *Sea F una medida vectorial definida en (Ω, Σ) y u_F su medida cónica asociada. Si v es una medida cónica tal que $0 \leq v \leq u_F$, entonces existe una función medible $\varphi: \Omega \to [0,1]$ tal que $v = u_{(\varphi F)}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea λ una medida de control para F. Es fácil ver que para cualquier función positiva y acotada φ, $u_{\varphi F}$, la medida cónica asociada a φF satisface

$$u_{\varphi F}(z^*) = \int \varphi \Phi_F(z^*) d\lambda, \qquad z^* \in h(X).$$

Sea Y el subretículo de $L^1(\lambda)$ tal que $Y = \Phi_F(h(X))$, que es un subespacio vectorial de $L^1(\lambda)$ no necesariamente cerrado en norma. Definimos en Y el funcional lineal V por

$$V(\Phi_F(z^*)) = v(z^*).$$

Veamos que V está bien definido: si $\Phi_F(z_1^*) = \Phi_F(z_2^*)$, entonces $u_F(|z_1^* - z_2^*|) = 0$ con lo cual $v(|z_1^* - z_2^*|) = 0$ y esto implica que $v(z_1^*) = v(z_2^*)$.

El funcional lineal V está dominado por la función sublineal ρ definida en $L^1(\lambda)$ por

$$\rho(f) = \int f^+ d\lambda = \int \max(f, 0) d\lambda.$$

En efecto,

$$V(\Phi_F(z^*)) = v(z^*) \leq v((z^*)^+) \leq u_F((z^*)^+) = \rho(\Phi_F(z^*)).$$

Por el Teorema de Hahn-Banach [AB, pg. 22] existe una extensión W de V a todo $L^1(\lambda)$ que sigue estando dominada por ρ. Entonces para toda f integrable y positiva,

$$W(f) \leq \int f d\lambda \quad \text{y} \quad W(-f) \leq \int 0 d\lambda;$$

es decir,

$$0 \leq W(f) \leq \int f d\lambda.$$

Esto implica que hay una función φ en $L^\infty(\lambda)$, con $0 \leq \varphi \leq 1$, que representa a W; en particular, para todo $z^* \in h(X)$, se tiene

$$u_{\varphi F}(z^*) = \int \varphi \Phi_F(z^*) d\lambda = V(\Phi_F(z^*)) = v(z^*).$$

Entonces $v = u_{\varphi F}$. □

La justificación del estudio de la medida cónica asociada a una medida vectorial en relación con problemas del rango se encuentra en el siguiente resultado, debido a I. Kluvánek, previamente anunciado y cuya prueba ha sido ya parcialmente expuesta.

Teorema 1.3.5. *Si F es una medida vectorial con valores en un espacio de Banach X y u_F es la medida cónica asociada, entonces $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, F) = K_{u_F}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Z el zonoide generado por F, es decir, $Z = \overline{\text{co}}(\text{rg}\, F)$. Sabemos que $Z = T_F\{\varphi \in L^\infty(\lambda) : 0 \leq \varphi \leq 1\}$ siendo $T_F : L^\infty(\lambda) \longrightarrow X$ el operador integración asociado a F y λ una medida de control. Si φ es una función medible tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, entonces la medida vectorial $\varphi F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ satisface que $v = u_{\varphi F} \leq u_F$ y $T_F(\varphi) = \varphi F(\Omega) = r(v)$. Por consiguiente, $T_F(\varphi) \in K_{u_F}$ y $Z \subseteq K_{u_F}$.

Sea $v \in M^+(X)$, $v \leq u_F$. Por la Proposición 1.3.4, existe φ una función medible, $0 \leq \varphi \leq 1$ tal que $v = u_{\varphi F}$. Entonces $r(v) = r(u_{\varphi F}) = T_F(\varphi)$. Esto implica que $r(v) \in \overline{\text{co}}(\text{rg}\, F)$. Luego de este hecho y lo anterior se deduce que $Z = K_{u_F}$. □

A la vista de este resultado, todo zonoide Z en un espacio de Banach es el zonoformo asociado a una medida cónica u; basta tomar una medida vectorial F que lo genere y $u = u_F$. En el caso de ser Z un zonoide en $\mathbb{R}^n$, decir que es el zonoformo asociado a una medida cónica es lo mismo que decir que es el zonoide de momentos asociado a una medida positiva y finita. Este hecho se debe a que hay una correspondencia biunívoca entre las medidas de Radon en la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ y las medidas cónicas en $\mathbb{R}^n$. Para ver esto, hay que observar que las funciones en $h(\mathbb{R}^n)$ son positivamente homogéneas, y sus restricciones a la esfera forman un subespacio denso de $\mathcal{C}(\mathbb{S}^{n-1})$ debido a la versión reticular del Teorema de Stone-Weierstrass. Luego toda medida cónica u se puede extender a una medida positiva de Radon en la esfera μ. Recíprocamente, toda medida positiva y finita en la esfera μ determina una medida cónica u mediante integración en la esfera:

$$u(z^*) = \int z^*(x)\, d\mu(x),$$

para todo $z^* \in h(\mathbb{R}^n)$.

Una extensión del Teorema 1.3.1 al caso de medidas conicas es el siguiente teorema que constituye la herramienta necesaria para probar propiedades determinadas por el rango de una medida vectorial.

Teorema 1.3.6. *Sean F y G dos medidas vectoriales con valores en el espacio de Banach X, entonces $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, F)$ es un trasladado de $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, G)$ si y sólo si $u_F^s = u_G^s$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F)$ es un trasladado de $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, G)$ y consideremos $z^* \in h(X)$ como en (1). Definimos la medida vectorial F_0 con valores en $\mathbb{R}^m$ por $F_0(A) = (x_i^* F(A))_{i=1}^m$ para cada $A \in \Sigma$. Análogamente definimos $G_0 = (x_i^* \circ G)_{i=1}^m$. Está claro que $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, G_0)$ es un trasladado de $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F_0)$ y por el Teorema 1.3.1 $\mu_{F_0}^s = \mu_{G_0}^s$.

En $h(\mathbb{R}^m)$ tomamos $z_0^* = \bigvee_{i=1}^n y_i^* - \bigvee_{i=n+1}^m y_i^*$ siendo y_i^* la i-ésima coordenada en $\mathbb{R}^m$. Es fácil ver que

$$u_F^s(z^*) = u_{F_0}^s(z_0^*) = \int z_0^* \, d\mu_{F_0}^s = \int z_0^* \, d\mu_{G_0}^s = u_{G_0}^s(z_0^*) = u_G^s(z^*).$$

Luego $u_F^s = u_G^s$.

Para probar el recíproco, es suficiente notar que $K_{\check{u}_F} = -\,\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F)$, ya que para $v \in M^+(X)$, $v \leq u_F$ equivale a que $\check{v} \leq \check{u}_F$, y $r(\check{v}) = -r(v)$. Gracias a la descomposición de Riesz $K_{u_F} + K_{\check{u}_F} = K_{u_F + \check{u}_F}$, y así se obtiene

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F) - \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F) &= K_{u_F} + K_{\check{u}_F} = K_{2u_F^s} = 2K_{u_F^s} \\ &= 2K_{u_G^s} = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, G) - \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, G). \end{aligned}$$

Entonces $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F)$ es un trasladado de $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, G)$. □

Continuamos esta sección acerca de la medida cónica asociada a una medida vectorial dando como aplicación una prueba de un resultado sobre descomposición de zonoides de [Ro2]. Este resultado será ampliamente utilizado en el Capítulo 3 donde estudiaremos más detenidamente este problema.

Teorema 1.3.7. *Supongamos que $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ es una medida vectorial con valores en un espacio de Banach X generando el zonoide Z. Si Z_1 y Z_2 son zonoides en X tales que $Z = Z_1 + Z_2$, entonces existe una función medible φ, $0 \leq \varphi \leq 1$ tal que*

$$Z_1 \text{ es un trasladado de } \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, \varphi F) \text{ y}$$
$$Z_2 \text{ es un trasladado de } \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}(1-\varphi)F).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea u_i la medida cónica asociada a F_i, siendo F_i una medida vectorial que genera Z_i, para $i = 1, 2$. Consideremos la medida vectorial $G : (\Omega \sqcup \Omega', \Sigma \oplus \Sigma') \longrightarrow X$, para Ω' y Σ' copias de Ω y Σ, respectivamente, definida por

$$G(A \sqcup A') = \frac{1}{2}(F(A) - F(A')).$$

Si λ es una medida de control para F, entonces $\lambda \oplus \lambda'$ es una medida de control para G, siendo λ' definida como λ en los medibles de Ω'. Para cada $x^* \in X^*$, sea $f_{x^*} = \frac{d(x^*F)}{d\lambda}$. Entonces

$$\frac{dx^*G}{d(\lambda \oplus \lambda')} = \frac{1}{2}(f_{x^*}\chi_\Omega - f_{x^*}\chi_{\Omega'}).$$

Entonces, es fácil comprobar que para todo $z^* \in h(X)$,

$$u_G(z^*) = \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi_F(z^*)d\lambda + \frac{1}{2}\int_{\Omega'} \Phi_F(z^* \circ \sigma)d\lambda' = u_F^s(z^*).$$

Por lo tanto $u_G = u_F^s$. Por el resultado anterior, $u_F^s = (u_1 + u_2)^s = u_1^s + u_2^s$. Entonces $u_1^s \leq u_F^s$ y por la Proposición 1.3.4 existe ϕ medible en $\Omega \sqcup \Omega'$, $0 \leq \phi \leq 1$ tal que Z_1 es un trasladado de $\overline{\text{co}}(\text{rg}\,\phi G)$. Como ϕ se puede escribir de la forma $\phi = \psi + \psi'$ con ψ con soporte en Ω y ψ' con soporte en Ω', es claro que Z_1 es un trasladado de $T_F\{\varphi : -1/2\psi' \leq \varphi \leq 1/2\psi\}$; es decir, si $\varphi = (1/2\psi' + 1/2\psi)$, Z_1 es un trasladado de $\overline{\text{co}}(\text{rg}\,\varphi F)$. El mismo razonamiento se aplica a Z_2 que será un trasladado de $\overline{\text{co}}(\text{rg}(1 - \varphi)F)$. □

Como consecuencia de una aplicación reiterada del teorema anterior, se obtiene el siguiente resultado también incluido en [Ro2].

Corolario 1.3.8. *Sea $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ una medida vectorial que genera el zonoide Z. Supongamos que $Z = \sum_n Z_n$ donde cada Z_n es un zonoide. Entonces existe una sucesión de funciones medibles en Ω, tal que $\sum_n \varphi_n = 1$ puntualmente y Z_n es un trasladado de $\overline{\text{co}}(\text{rg}\,\varphi_n F)$.*

Un resultado también debido a I. Kluvánek prueba que todo zonoformo en un espacio de Banach es un zonoide; es decir, dada una medida cónica u en un espacio de Banach cuyo zonoformo asociado K_u existe en X, se puede encontrar una medida vectorial F que genere K_u y tal que $u = u_F$. La prueba de I. Kluvánek es puramente existencial y no muestra relación alguna entre u y F. Dedicaremos lo que resta de este capítulo a dar una prueba distinta de este hecho.

Observemos que si Z es un zonoide en $\mathbb{R}^n$ que coincide con el zonoide de momentos asociado a una medida de Borel μ en $\mathbb{S}^{n-1}$, es decir, $M_\mu(B) = \int_B x d\mu(x)$, para todo conjunto de Borel B es la esfera; entonces para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\sup_{z \in Z} \langle \xi, z \rangle = \langle \xi, M_\mu(H_\xi) \rangle$$

donde $H_\xi = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle \xi, x \rangle \geq 0\}$. Usaremos este punto de vista para encontrar a partir de una medida cónica una medida vectorial que genere su zonoformo asociado.

Sea X un espacio de Banach. Si queremos que la medida vectorial esté definida en X, parece razonable incluir como conjuntos medibles, para cada $x^* \in X^*$, los conos

$$A_{x^*} = \{x \in X : \langle x^*, x \rangle > 0\} \text{ y } C_{x^*} = \{x \in X : \langle x^*, x \rangle \geq 0\}.$$

Sea $\mathcal{C} = \{A_{x^*} : x^* \in X^*\} \bigcup \{C_{x^*} : x^* \in X^*\}$ y $\mathcal{A}$ el álgebra generada por los conjuntos en $\mathcal{C}$. Entonces todo elemento en $\mathcal{A}$ se puede escribir como

$$A = \bigcup_{j \in J} B_j \tag{3}$$

donde J es un conjunto finito y B_j es intersección finita de elementos de $\mathcal{C}$; es decir,

$$B_j = (\bigcap_{i \in I_j} A_{x_i^*}) \cap (\bigcap_{i \in K_j} C_{x_i^*}) \tag{4}$$

para I_j y K_j conjuntos finitos. Los conjuntos en (4) se llamarán conos elementales. Los conjuntos B_j en (3) pueden además suponerse disjuntos dos a dos. Nuestro objetivo es definir una medida vectorial finitamente aditiva en $\mathcal{A}$ y a partir de ella una medida vectorial numerablemente aditiva cuya medida cónica asociada sea u. Para ello, usaremos varios lemas.

Lema 1.3.9. *Sea u una medida cónica en X tal que para toda $v \in M^+(X)$ con $v \leq u$, $r(v)$ existe en X. Consideremos para cada $x_0^* \in X^*$ los conjuntos $A = \{x \in X : \langle x_0^*, x\rangle > 0\}$ y $C = \{x \in X : \langle x_0^*, x\rangle \leq 0\}$. Entonces existe una única descomposición de u en la forma $u = u_A + u_C$ donde u_A y u_C son medidas cónicas tales que si $v \in M^+(X)$ y $v \leq u_A$, $r(v) \in A \cup \{0\}$; y si $v \leq u_C$, $r(v) \in C$. Además, si $v \leq u_A$ y $r(v) = 0$, entonces $v = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada $z^* \in h^+(X)$ se definen $u_A(z^*)$ y $u_C(z^*)$ como

$$\begin{aligned} u_A(z^*) &= \lim_n u\big((nx_0^* \wedge z^*)^+\big); \\ u_C(z^*) &= (u - u_A)(z^*) = \lim_n u\big(z^* - (nx_0^* \wedge z^*)^+\big). \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que u_A y u_C así definidas y extendidas por linealidad a todo $h(X)$ son medidas cónicas; por ejemplo, la aditividad de u_A en $h^+(X)$ se deduce de que para $z_1^*, z_2^* \in h^+(X)$ y para todo n natural se tienen

$$\big(nx_0^* \wedge (z_1^* + z_2^*)\big)^+ \leq (nx_0^* \wedge z_1^*)^+ + (nx_0^* \wedge z_2^*)^+ \leq \big(2nx_0^* \wedge (z_1^* + z_2^*)\big)^+;$$

lo que es fácil comprobar para números reales, y por tanto, para el orden puntual de funciones.

Observemos en primer lugar que $v \leq u_C$, implica que $r(v) \in C$. Efectivamente, $\langle r(v), x_0^*\rangle = v(x_0^*) = v((x_0^*)^+) - v((x_0^*)^-)$. Luego basta probar que $v((x_0^*)^+) = 0$. Y dado que $0 \leq v((x_0^*)^+) \leq u_C((x_0^*)^+)$, sólo hay que ver que $u_C((x_0^*)^+) = 0$. Esto es obvio ya que $(nx_0^* \wedge (x_0^*)^+)^+ = (x_0^*)^+$. Un razonamiento análogo prueba que si $v \leq u_A$, entonces $x_0^*(r(v)) \geq 0$; y para deducir que $r(v) \in A \cup \{0\}$ probaremos que si además $x_0^*(r(v)) = 0$, entonces

$v = 0$, por lo que $r(v) = 0$. Por lo visto antes, tenemos $u_A((x_0^*)^-) = 0$; por tanto, $v((x_0^*)^-) = 0$, y $0 = x_0^*(r(v)) = v(x_0^*) = v((x_0^*)^+)$. Se deduce pues que $v(|x_0^*|) = v((x_0^*)^+ + (x_0^*)^-) = 0$. Esto implica que $v_A = 0$ ya que si $z^* \in h^+(X)$, como $(nx_0^* \wedge z^*)^+ \leq n|x_0^*|$, se tiene que $v_A(z^*) = 0$. Para concluir probaremos que si $v \leq u_A$, entonces $v = v_A$. En primer lugar, $(u_A)_A = u_A$: sea $z^* \in h^+(X)$, entonces

$$\begin{aligned}(u_A)_A(z^*) &= \lim_m u_A\big((mx_0^* \wedge z^*)^+\big)\\ &= \lim_m \lim_n u\big((nx_0^* \wedge (mx_0^* \wedge z^*)^+)^+\big) = \lim_m u\big((mx_0^* \wedge z^*)^+\big);\end{aligned}$$

ya que $\big(nx_0^* \wedge (mx_0^* \wedge z^*)^+\big)^+ = (mx_0^* \wedge z^*)^+$ para todo $n \geq m$. Observemos también que $(u_A - v)_A \leq u_A - v$, y $v_A \leq v$; pero estas desigualdades han de ser igualdades ya que $u_A = (u_A)_A = ((u_A - v) + v)_A = (u_A - v)_A + v_A \leq u_A - v + v = u_A$. Se concluye que $v = v_A$.

Si tenemos la descomposición de X en los conos elementales $X = A \cup C$, entonces la existencia de la descomposición de u del lema, en este caso, se tiene con $u = u_A + u_C$. Supongamos que existe otra descomposición en estas condiciones $u = u'_A + u'_C$, $v \leq u'_A$ implica $r(v) \in A \cup \{0\}$, y $v \leq u'_C$ implica $r(v) \in C$. Podemos suponer que $u_A \leq u'_A$ tomando, si es necesario, $u''_A = u_A \vee u'_A$, $u''_C = u - u''_A = u_C \wedge u'_C$. Entonces toda medida cónica $v \leq u'_A - u_A$, necesariamente satisface que $r(v) = 0$ ya que $v \leq u'_A$ y $v \leq u_C$. Para $w = u'_A - u_A$ se tiene, por tanto, que $K_w = \{0\}$. Vamos a probar que esta condición implica que $w = 0$ y habremos concluido. Para todo $x^* \in X^*$, como $r(w_{A_{x^*}}) = 0$, se tiene que $w((x^*)^+) = w_{A_{x^*}}(x^*) = x^*(r(w_{A_{x^*}})) = 0$. Usando lo mismo con $-x^*$, concluimos que $w(|x^*|) = 0$. Si $z^* \in h^+(X)$ y se escribe $z^* = \bigvee_{i=1}^n x_i^* - \bigvee_{i=n+1}^m x_i^*$, tenemos $|z^*| \leq \sum_{i=1}^m |x_i^*|$ y por tanto $w(z^*) = 0$. Consecuentemente, $w = 0$. □

Nota. Se puede probar que u_C coincide con la medida cónica introducida en [C, vol. II, pg. 194] para cada cono cerrado C y definida para $z^* \in h^+(X)$ por

$$u_C(z^*) = \inf\big\{u(w^*) : w^* \in h^+(X), w^* \geq z^* \text{ en } C\big\}.$$

La demostración de este hecho nos desviaría de nuestros propósitos, necesitando usar además propiedades del tipo integral de Daniell para u. Estas propiedades no se usarán en nuestra demostración del Teorema 1.3.13, lo que la hacen diferente de la de I. Kluvánek.

Lema 1.3.10. *Sea u una medida cónica en X tal que para toda $v \in M^+(X)$ con $v \leq u$, $r(v)$ existe en X. Para cada cono elemental H existe una única medida cónica u_H que satisface:*

(a) $u_H \leq u$;

(b) $K_{u_H} \subseteq H \cup \{0\}$;

(c) Para toda medida cónica v con $v \leq u$, $K_v \subseteq H \cup \{0\}$, se tiene $v \leq u_H$.

Si $0 \notin H$, se tiene además que $v \leq u_H$ y $r(v) = 0$ implican $v = 0$. Si $H = \bigcup_{k=1}^{p} H_k$ es una partición de H en conos elementales, entonces $u_H = \sum_{k=1}^{p} u_{H_k}$.

DEMOSTRACIÓN. La unicidad es obvia por la condición (c). Cada cono elemental es la intersección de una familia finita de semiespacios abiertos o cerrados; es decir, para cierta familia finita $\{x_1^*, \ldots, x_m^*\}$ en X^* y cierto $n \in \{0, 1, \ldots, m\}$ podemos escribir

$$H = \bigcap_{j=1}^{n} \{x : x_j^*(x) \leq 0\} \cap \bigcap_{j=n+1}^{m} \{x : x_j^*(x) > 0\} = \bigcap_{j=1}^{n} C_{-x_j^*} \cap \bigcap_{j=n+1}^{m} A_{x_j^*}.$$

Para abreviar, pongamos $C_j^+ = A_{x_j^*}$ y $C_j^- = C_{-x_j^*}$. Si $\varepsilon \in \{+,-\}^m$ denotaremos por $H_\varepsilon = \bigcap_{j=1}^{n} C_j^{\varepsilon_j}$. Entonces $H = H_{\varepsilon^0}$ para cierto $\varepsilon^0 \in \{+,-\}^m$. Usando el lema anterior, definimos

$$u_\varepsilon = ((u_{C_1^{\varepsilon_1}})_{C_2^{\varepsilon_2}}) \ldots)_{C_m^{\varepsilon_m}}.$$

Por el mismo lema, se tiene que $\sum_\varepsilon u_\varepsilon = u$. Además, puesto que $v \leq u$ implica $v_C \leq u_C$, $v_A \leq u_A$, y siempre se tiene $u_A \leq u$, $u_C \leq u$; se deduce que $u_\varepsilon \leq u_{C_j^{\varepsilon_j}}$ para cada $j = 1, \ldots, m$. Se tiene entonces $K_{u_\varepsilon} \subseteq H_\varepsilon \cup \{0\}$ para todo ε. Si

$0 \notin H_\varepsilon$, entonces para algún j, $\varepsilon_j = +$ y $C_j^{\varepsilon_j} = A$ es abierto. Se tiene que si $v \leq u_{H_\varepsilon}$, $r(v) = 0$ que $v \leq u_A$ y $r(v) = 0$; por el lema anterior se deduce que $v = 0$.

Pongamos $H = H_{\varepsilon^0}$, $u_H = u_{\varepsilon^0}$; y veamos que satisface (c). Sea $v \leq u$ tal que $K_v \subseteq H \cup \{0\}$. Usando el Lema de Riesz, se tiene $v = \sum_\varepsilon v_\varepsilon$ con $v_\varepsilon \leq u_\varepsilon$ para cada ε. Si $\varepsilon \neq \varepsilon^0$, y como $K_{v_\varepsilon} \subseteq K_v$, se tiene $K_{v_\varepsilon} \subseteq H_\varepsilon \cup \{0\}$. Por otro lado, $v_\varepsilon \leq u_\varepsilon$ y entonces $K_{v_\varepsilon} \subseteq H_\varepsilon \cup \{0\}$. Puesto que $H \cap H_\varepsilon = \emptyset$, se tiene $K_{v_\varepsilon} = \{0\}$; lo que implica (ver la demostración del lema anterior) que $v_\varepsilon = 0$. Se concluye que $v = v_{\varepsilon^0} \leq u_H$.

Por último, si $H = \bigcup_{k=1}^p H_k$ es una partición de H en conos elementales disjuntos, podemos elegir una cierta familia finita $\{x_1^*, \ldots, x_m^*\}$ en X^* (los funcionales que definen H y todos los H_k) tal que si, como antes, ponemos $C_j^+ = A_{x_j^*}$, $C_j^- = C_{-x_j^*}$ y $C_\varepsilon = \bigcap_{j=1}^m C_j^{\varepsilon_j}$ para cada $\varepsilon \in \{+,-\}^m$ se tiene

$$H = \bigcup_{C_\varepsilon \subseteq H} C_\varepsilon; \quad H_k = \bigcup_{C_\varepsilon \subseteq H_k} C_\varepsilon, \quad k = 1, \ldots, p.$$

Es fácil comprobar, la demostración es similar a la ya vista, que la medida cónica $\sum_{C_\varepsilon \subseteq H} u_{C_\varepsilon}$ satisface (a), (b) y (c); por tanto, $u_H = \sum_{C_\varepsilon \subseteq H} u_{C_\varepsilon}$ y análogamente $u_{H_k} = \sum_{C_\varepsilon \subseteq H_k} u_{C_\varepsilon}$, para $k = 1, \ldots, p$. De aquí se deduce trivialmente que $u_H = \sum_{k=1}^p u_{H_k}$. □

Lema 1.3.11. *Si $H = \bigcap_{j=1}^n \{x : x_j^*(x) \leq 0\}$, entonces existe una constante $C > 0$ tal que para todo $x \in X$ se tiene*

$$d(x, H) \leq C \sum_{j=1}^n (x_j^*)^+(x). \tag{5}$$

donde $d(x, H) = \inf\{\|x - y\| : y \in H\}$.

DEMOSTRACIÓN. Si $x_0 \notin H$, sea $d(x_0, H) = \rho > 0$. Como la bola abierta $B(x_0, \rho) \cap H = \emptyset$, por el Teorema de Hahn-Banach, existe un funcional $x_0^* \in X^*$

tal que $x_0^*(x) \leq 0$ para todo $x \in H$, $x_0^*(x_0) = \rho$ y para todo $x \in B(x_0, \rho)$ es $x_0^*(x) > 0$. Es fácil probar que $\|x_0^*\| = 1$. Usando de nuevo el Teorema de Hahn-Banach es fácil comprobar que x_0^* está en la clausura débil* del conjunto

$$L = \Big\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j^* : \alpha_j \geq 0, j = 1, \ldots, n \Big\}.$$

Como L es finito dimensional esta clausura coincide con la clausura en norma. Probaremos que existe una constante $\delta > 0$ tal que para todo $x^* \in L$, existen $\alpha_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, n$ tales que $x^* = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^*$ y $\delta \sum_{j=1}^n \alpha_j \leq \|x^*\|$. Esto permite demostrar que L es cerrado, que, por tanto, $x_0^* \in L$; y que existen $\alpha_j \geq 0$ tales que $x_0^* = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^*$, $\sum_{j=1}^n \alpha_j \leq \frac{1}{\delta}$. Entonces

$$\rho = d(x_0, H) = x_0^*(x_0) \leq \frac{1}{\delta} \sum_{j=1}^{n} (x_j^*)^+(x_0).$$

Para probar la existencia de δ, sea $K = \text{co}\{0, x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ y $M = \{x^* \in K : tx^* \notin K, \text{ para todo } t > 1\}$. Para cada $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ no vacío, sea $C(A) = \text{co}\{x_j^* : j \in A\}$. Veamos

$$M = \bigcup_{C(A) \subseteq M} C(A) \qquad (6).$$

Una vez probado (6), como $C(A)$ es compacto para todo A y $0 \notin M$, se tiene que M es compacto y existe $\delta > 0$ tal que $\|x\| \geq \delta$ para todo $x \in M$. Cualquier elemento de L es de la forma tx^* con $t \geq 0$, $x^* \in M$ y se concluye por homogeneidad.

Para probar (6), sea $x^* \in M$ con $x^* = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^*$ con $\alpha_j \geq 0$. Obviamente $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$. Sea $A = \{j : \alpha_j > 0\}$; entonces $x^* \in C(A)$ y veamos que $C(A) \subseteq M$. Si no es así, existen $y^* \in C(A)$ y $t > 1$ tales que $ty^* \in K$. Sea $y^* = \sum_{j \in A} \beta_j x_j^*$ y $\sum_{j \in A} \beta_j = 1$. Sea $\lambda > 0$, entonces $x^* + \lambda(x^* - y^*) = \sum(\alpha_j + \lambda(\alpha_j - \beta_j))x_j^*$. Tomando λ suficientemente pequeño, podemos conseguir que $\alpha_j + \lambda(\alpha_j - \beta_j) > 0$ para todo $j \in A$; luego $x^* + \lambda(x^* - y^*) \in \text{co}(A) \subseteq K$ y $ty^* \in K$. Si $\alpha \in (0,1)$ también está en K el funcional

$$\alpha(x^* + \lambda(x^* - y^*)) + (1 - \alpha)ty^* = (\alpha + \lambda\alpha)x^* + ((1 - \alpha)t - \lambda\alpha)y^*.$$

Podemos elegir $\alpha \in (0,1)$ tal que $(1-\alpha)t-\lambda\alpha = 0$ y entonces $(\alpha+t(1-\alpha))x^* \in K$ y $\alpha + t(1-\alpha) > 1$ con lo que $x^* \notin M$. Esto supone una contradicción y prueba (6) y el lema. □

Lema 1.3.12. *Supongamos que H es un cono elemental y $z_1^*, z_2^* \in h(X)$ verifican $z_1^* = z_2^*$ en H. Entonces $u_H(z_1^*) = u_H(z_2^*)$.*

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer que $z_1^* \le z_2^*$ dado que $z_1^* \wedge z_2^* \le z_i^* \le z_1^* \vee z_2^*$ para $i = 1, 2$ y todos coinciden en H. Esto nos reduce a probar que si $z^* = 0$ en H, $z^* \ge 0$, entonces $u_H(z^*) = 0$. Si $H \ne \emptyset$ y $H = \bigcap_{j=1}^{l}\{x : x_j^*(x) < 0\} \cap \bigcap_{j=l+1}^{n}\{x : x_j^*(x) \le 0\}$, entonces $\overline{H} = \bigcap_{j=1}^{n}\{x : x_j^*(x) \le 0\}$. Si probamos el lema para $\overline{H}$, entonces será también cierto para H puesto que $u_{\overline{H}} \ge u_H$. En estas condiciones, usando el lema anterior, existe una constante $C > 0$ tal que

$$d(x, \overline{H}) \le C \sum_{j=1}^{n} (x_j^*)^+(x).$$

Como z^* es una función Lipchitziana y $z^*(x) = 0$ para todo $x \in \overline{H}$, existe una constante $K > 0$ para la que se cumple para todo $x \in X$,

$$z^*(x) \le K \sum_{j=1}^{n} (x_j^*)^+(x).$$

Como $u_{\overline{H}} \le u_{C_{-x_j^*}}$, se deduce que $u_H((x_j^*)^+) = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Se obtiene entonces que $u_H(z^*) = 0$. □

La prueba del Lema anterior podría haberse hecho usando localización de medidas cónicas en dimensión finita y observando que, en este caso, si μ es una localización de u, $\chi_H \mu$ es una localización de u_H.

Teorema 1.3.13. *Sea X un espacio de Banach. Existe un espacio medible $(\Delta, \mathcal{M})$ con la siguiente propiedad: si u es una medida cónica en X tal que $r(v)$ existe en X para toda $v \in M^+(X)$ con $v \le u$; entonces, hay una medida vectorial $\widetilde{F}_u : \mathcal{M} \longrightarrow X$ cuya medida cónica asociada coincide con u.*

DEMOSTRACIÓN. Sea u una medida cónica en X tal que existe $K_u \subseteq X$. Pongamos para cada cono elemental H en X, $F_u(H) = r(u_H)$. La aditividad de la resultante y el Lema 1.3.10 nos permiten extender F_u a todo $\mathcal{A}$, el álgebra engendrada por los conos elementales. Resulta entonces que F_u es una medida finitamente aditiva cuyo rango está contenido en K_u. Al ser K_u débilmente compacto, deducimos que la medida F_u es fuertemente aditiva.

La medida F_u no es necesariamente numerablemente aditiva; pero una técnica standard permite cambiar $\mathcal{A}$ por un álgebra en la que sí lo es [DU, pg. 11]. El Teorema de representación de Stone nos proporciona un conjunto compacto totalmente disconexo Δ y un isomorfismo de álgebras de Boole $A \leftrightarrow \widetilde{A}$ entre $\mathcal{A}$ y el álgebra $\widetilde{\mathcal{A}}$ de los "clopen" (abiertos y cerrados) de Δ. Definiendo $\widetilde{F}_u(\tilde{A}) = F_u(A)$ tenemos una medida en $\widetilde{\mathcal{A}}$ que es numerablemente aditiva (en $\widetilde{\mathcal{A}}$ toda medida finitamente aditiva es numerablemente aditiva). Sea $\mathcal{M}$ la σ-álgebra engendrada por $\widetilde{\mathcal{A}}$ en Δ. Puesto que $\widetilde{F}_u$ es fuertemente aditiva y numerablemente aditiva en $\widetilde{\mathcal{A}}$, tiene una única extensión numerablemente aditiva a $\mathcal{M}$ que seguiremos denotando $\widetilde{F}_u$. Denotemos por $\tilde{u}$ la medida cónica asociada a $\widetilde{F}_u$. Tenemos que ver que $u = \tilde{u}$. Sea $z^* \in h(X)$, $z^* = \bigvee_{i=1}^n x_i^*$. Existe una partición de X en conos elementales $X = \bigcup_{j=1}^n H_j$ de manera que $z^* = x_j^*$ en H_j para $j = 1, \dots, n$. Basta tomar

$$H_j = \{x \in X : (x_j^* - x_k^*)(x) \geq 0, \text{ para } j \geq k, (x_j^* - x_k^*)(x) > 0, \text{ para } k < j\}.$$

Por la definición de F_u, se tiene que para cada $A \in \mathcal{A}$ con $A \subseteq H_j$, $F_u(A) \in H_j \cup \{0\}$. Pasando a Δ, esto nos dice que para $k \neq j$, la medida $(x_j^* - x_k^*) \circ F_u$ es positiva en los conjuntos de $\widetilde{\mathcal{A}}$ contenidos en $\widetilde{H}_j$; y por tanto, también en los conjuntos de $\mathcal{M}$ contenidos en $\widetilde{H}_j$. Si λ es una medida de control para $\widetilde{F}_u$ y $f_{x_j^*} = \frac{dx_j^* \circ \widetilde{F}_u}{d\lambda}$, se deduce que $\bigvee_{j=1}^n f_{x_j^*}$ coincide con $f_{x_j^*}$ en $\widetilde{H}_j$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(z^*) &= \sum_{j=1}^n \int_{\widetilde{H}_j} f_{x_j^*} d\lambda = \sum_{j=1}^n \langle x_j^*, \widetilde{F}_u(\widetilde{H}_j)\rangle \\
&= \sum_{j=1}^n \langle x_j^*, r(u_{H_j})\rangle = \sum_{j=1}^n u_{H_j}(x_j^*) = \sum_{j=1}^n u_{H_j}(z^*) = u(z^*),
\end{aligned}$$

las dos últimas igualdades gracias al Lema 1.3.12 y 1.3.10, respectivamente. Observando que Δ y $\mathcal{M}$ sólo dependen de X y no de la medida cónica u, se concluye la prueba. $\square$

Nota. La misma construcción del Teorema 1.3.13 y sus lemas previos es válida en el contexto de una medida cónica en un espacio localmente convexo (observar que estos lemas tienen naturaleza finito-dimensional); nosotros sólo usaremos este resultado para espacios de Banach.

Supongamos que la medida cónica u es la medida cónica asociada a una medida vectorial $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$. Sea λ una medida de control para F. Si $H = \bigcap_{i \in I}\{x_i^* > 0\} \cap \bigcap_{i \in K}\{x_i^* \geq 0\}$ es un cono elemental, sea $\widehat{H} \in \Sigma$ el conjunto

$$\widehat{H} = (\bigcap_{i \in I}\{f_{x_i^*} > 0\}) \cap (\bigcap_{i \in K}\{f_{x_i^*} \geq 0\})$$

Entonces es obvio que $F_u(H) = F(\widehat{H})$. Esta medida no es, en general , numerablemente aditiva, lo que nos obliga en el Teorema anterior a tomar el espacio de Stone asociado. Veamoslo con un ejemplo.

Ejemplo 1.3.14. *Una medida vectorial F de variación finita y con valores en c_0 para la cual la medida F_{u_F} definida en c_0 no es numerablemente aditiva.*

Sea m la medida de Lebesgue en $[0,1]$ y $\{r_n\}_n$ la sucesión de funciones de Rademacher. Sea $\{s_n\}_n$ la sucesión de funciones $s_1 = 1$ y $s_{n+1} = r_n$ m-e.c.t para $n \geq 1$. Definimos la medida F en los medibles Lebesgue de $[0,1]$ por

$$F(A) = \int_A s_n(t)dm(t).$$

Consideramos en c_0 el conjunto C_n para todo natural $n \geq 2$ definido por

$$C_n = \{(x_n)_n \in c_0 : x_1 > 0, |x_2| \geq x_1, \ldots, |x_n| \geq x_1\}.$$

Es fácil ver que $\bigcap_{n \geq 2} C_n = \emptyset$ pero sin embargo $\bigcap_{n \geq 2} \widehat{C}_n = [0,1]$ debido a que $|s_n| = 1$ m-e.c.t.. Por tanto, F_{u_F} no es numerablemente aditiva, ya que no lo es su primera coordenada.

La misma construcción del teorema anterior es válida si hubieramos tomado X^{**} en lugar de X, y

$$A_{x^*} = \{x^{**} \in X^{**} : \langle x^*, x^{**}\rangle > 0\} \text{ y } C_{x^*} = \{x^{**} \in X^{**} : \langle x^*, x^{**}\rangle \geq 0\}.$$

Un razonamiento similar probaría que $G_u(A) = r(u_A)$ define una medida finitamente aditiva en el álgebra correspondiente. De hecho, siempre que tomemos una medida vectorial F de variación σ-finita, G_{u_F} sí es numerablemente aditiva, lo cual será consecuencia de resultados de la sección 3 del próximo capítulo. Desafortunadamente, si la variación no es σ-finita, G_{u_F} no es en general numerablemente aditiva.

Ejemplo 1.3.15. *Existe una medida vectorial F con valores en c_0 para la que G_{u_F} no es numerablemente aditiva en ℓ_∞.*

Sea $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow c_0$ una medida vectorial con variación no σ-finita cuya existencia está garantizada en [JK]. Sea λ una medida de control para ella y $g_n = \frac{d(x_n^* F)}{d\lambda}$ donde x_n^* es la n-ésima coordenada en c_0. Entonces existe un conjunto de medida positiva $A \in \Sigma$ tal que $\sup_n |g_n| = +\infty$ λ-e.c.t. en A. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $g_1 = 1$ λ-e.c.t.. Existe una sucesión creciente de enteros positivos $(n_k)_k$ tal que si $B_k = \{\omega \in \Omega : \sup_{1\leq i\leq n_k} |g_i(\omega)| \geq k\}$ y $B = \bigcap_{k=1}^\infty B_k$ entonces $0 < \lambda(B) = x_1^* \circ F(B)$. Tomando

$$D_k = \{(x_n)_n \in \ell_\infty : x_1 > 0, \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_k}|\} \geq kx_1\}$$

cada D_k está en el álgebra engendrada por los conos elementales y $C_k = \bigcap_{l=1}^k D_l$ es una sucesión decreciente en dicha álgebra con $\bigcap_k C_k = \emptyset$ y $\bigcap_k \widehat{C}_k = \bigcap_k B_k$. Se deduce que G_{u_F} no es numerablemente aditiva.

CAPÍTULO 2: Propiedades de una medida vectorial determinadas por su rango.

En este capítulo caracterizaremos algunas propiedades de medidas vectoriales en términos de la medida cónica asociada. Estas caracterizaciones resultan ser invariables bajo simetrización, con lo cual están determinadas por el rango gracias al Teorema 1.3.6. Esto provee, por tanto, un método unificado de prueba.

En la Sección 1 comenzamos con el estudio de la variación total y caracterizamos cuando una medida vectorial tiene variación acotada y σ-finita en términos de la medida cónica asociada. Se dan, por tanto, nuevas pruebas de que estas propiedades están determinadas por el rango. En la siguiente sección, y basados en el hecho que una medida vectorial tiene variación finita si y sólo si el operador integración es absolutamente sumante, probamos que el rango de una medida vectorial determina las normas (p,q)-sumantes y p-nucleares del operador integración. En la Sección 3, estudiamos la diferenciabilidad Pettis de una medida y su relación con la medida cónica; veremos que ésta no es una propiedad determinada por el rango. Por último, estudiamos la existencia de una derivada normalizada de la variación de una medida vectorial con respecto a la medida. Concluiremos este capítulo caracterizando las medidas valoradas en $L^1(\lambda)$ que tienen esta propiedad.

Sección 1: Variación de medidas vectoriales.

Comenzamos esta sección calculando la variación de una medida vectorial

F en función de su medida cónica asociada u_F.

Teorema 2.1.1. *Una medida vectorial F tiene variación finita si y sólo si existe una constante $M > 0$ tal que para cada subconjunto finito $\{x_i^*\}_{i=1}^n \subseteq B_{X^*}$*

$$u_F(\bigvee_{i=1}^n |x_i^*|) \leq M \qquad (1).$$

En este caso, la variación total de F es el ínfimo de todas las constantes M verificando (1).

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que se tiene (1). Dada una partición de Ω en conjuntos medibles disjuntos $A_1, \ldots, A_n$ elegimos $x_1^*, \ldots, x_n^*$ tales que $\|x_j^*\| = 1$ y $\langle x_j^*, F(A_j)\rangle = \|F(A_j)\|$. Si λ es una medida de control para F y $f_{x_j^*} = d(x_j^* \circ F)/d\lambda$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \|F(A_j)\| = \sum_{j=1}^n \langle x_j^*, F(A_j)\rangle = \sum_{j=1}^n \int_{A_j} f_{x_j^*} d\lambda \\ \leq \int \sup_{1\leq j\leq n} |f_{x_j^*}| d\lambda = u_F(\bigvee_{j=1}^n |x_j^*|) \leq M.\end{aligned}$$

Consecuentemente, $\|F\| \leq M$.

Supongamos ahora que $\|F\| < +\infty$. Entonces dados $x_1^*, \ldots, x_n^*$ en B_{X^*}, se pueden elegir medibles disjuntos $\{A_j\}_{j=1}^n$ tales que

$$|f_{x_j^*}|(\omega) = \sup_{k=1,\ldots,n} |f_{x_k^*}|(\omega)$$

para cada $\omega \in A_j$. Entonces

$$\begin{aligned}u_F(\bigvee_{j=1}^n |x_j^*|) = \int \sup_{1\leq j\leq n} |f_{x_j^*}|\, d\lambda = \sum_{j=1}^n \int_{A_j} |f_{x_j^*}|(\omega) d\lambda \\ = \sum_{j=1}^n |x_j^* \circ F|(A_j) \leq \sum_{j=1}^n |F|(A_j) \leq \|F\|.\end{aligned}$$

□

A la vista del resultado anterior, daremos la siguiente definición de medida cónica de variación finita.

Definición 2.1.2. *Diremos que una medida cónica u tiene variación finita si satisface la condición (1) del último teorema. En este caso, llamaremos variación de u al número real $||u|| = \inf M$, tal que M satisface (1).*

Nótese que $u_F(\bigvee_{i=1}^n |x_i^*|) = u_F^s(\bigvee_{i=1}^n |x_i^*|)$ para cada $\{x_i^*\}_{i=1}^n \subseteq B_{X^*}$. Como consecuencia de este hecho, el Teorema 1.3.6 y el último teorema obtenemos una nueva prueba de:

Corolario 2.1.3. *Si F y G son dos medidas vectoriales con valores en un espacio de Banach X tales que $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F)$ es un trasladado de $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, G)$, entonces $||F|| = ||G||$.*

Ejemplo 2.1.4. *La variación de un intervalo débil compacto en un retículo.*

Sea L un retículo de Banach y $[0, x]$ un intervalo en el orden que sea débil compacto. Un resultado de [DS] asegura que $[0, x]$ es el rango de una medida vectorial. El funcional de Minkowski $||\cdot||_x$ de $[-x, x]$ es una norma reticular en la envoltura lineal L_x de $[-x, x]$. El completado C de L_x es un M-espacio con unidad tal que la inyección $C \to L$ es continua y lleva los elementos positivos de la bola unidad en $[0, x]$. Entonces $[0, x]$ es la envoltura convexa y cerrada del rango de la medida que representa el operador inclusión. Usando el Teorema 1.1.4 es de hecho el rango de una medida vectorial F. Es fácil comprobar que

$$||F|| = \sup\Big\{\sum_{i=1}^n ||x_i|| : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = x\Big\}.$$

Esto quiere decir que $||F|| < +\infty$ si y sólo si toda sucesión positiva y sumable en el ideal generado por x en L es absolutamente sumable. Usando un resultado en [S, pg. 242] se deduce que $||F|| < +\infty$ si y sólo si este ideal es un L-espacio.

Como ya fue observado en [Ro2], el hecho que el rango de una medida vectorial determine su variación total, no implica directamente que el rango determine la σ-finitud de la variación. Tratamos ahora de caracterizar las medidas vectoriales de variación σ–finita en función de la medida cónica asociada.

Teorema 2.1.5. *Sea F una medida vectorial con valores en un espacio de Banach X y u_F la medida cónica asociada a F. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) F tiene variación σ–finita.

(b) Existe una medida cónica $v \leq u_F$, v con variación finita y tal que para cada $w \leq u_F$, $w > 0$, se tiene $(v \wedge w) > 0$.

(b') Existe una medida cónica $v \leq u_F$, v con variación finita y tal que para cada $w \leq u_F$, y para cada $z^* \geq 0$ con $w(z^*) > 0$, tenemos $(v \wedge w)(z^*) > 0$.

(c) Existe una sucesión $\{u_n\}_n$ de medidas cónicas de variación finita tales que $u_F(z^*) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z^*)$ para cada $z^* \in h(X)$.

DEMOSTRACIÓN. (a)$\Rightarrow$(b') Si F tiene variación σ–finita, existe una función medible φ con $0 < \varphi(\omega) \leq 1$ para cada $\omega \in \Omega$ tal que $\int \varphi \, d|F| < +\infty$. La medida φF tiene variación finita, y la medida cónica $v = u_{(\varphi F)}$ satisface $v \leq u_F$ debido a que $v(z^*) = \int \varphi f_{z^*} \, d\lambda \leq u_F(z^*)$ para cada $z^* \geq 0$. Si $w \leq u_F$, por la Proposición 1.3.4, existe $\psi \in L^\infty(\lambda)$ con $0 \leq \psi \leq 1$ y $w = u_{(\psi F)}$. Si $z^* \geq 0$ es tal que $0 < w(z^*)$, entonces $0 < w(z^*) = \int \psi f_{z^*} \, d\lambda$. Esto implica que

$$u_{(\psi \wedge \varphi)F}(z^*) = \int (\varphi \wedge \psi) f_{z^*} d|F| > 0.$$

Pero, $u_{((\psi\wedge\varphi)F)} \leq u_{(\psi F)} \wedge u_{(\varphi F)} = w \wedge v$, entonces $(v \wedge w)(z^*) > 0$.

(b')$\Rightarrow$(b) Es evidente.

(b)$\Rightarrow$(a) Supongamos que $0 \leq v \leq u_F$ con v de variación finita tal que para todo $w \leq u_F$ con $w > 0$ entonces $(w \wedge v) > 0$. Si λ es una medida de control para F, vamos a probar que si $A \in \Sigma$, $\lambda(A) > 0$, existe $B \subseteq A$, $0 < \lambda(B)$ y $|F|(B) < +\infty$. Como una consecuencia fácil del Lema de Exhaución, esto implica que existe una sucesión (A_n) de conjuntos medibles disjuntos en Σ tal que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $|F|(A_n) < \infty$.

Tomando $w = u_{(\chi_A F)}$, podemos suponer que $|F|(A) > 0$ y así $w > 0$. Entonces $0 < w \wedge v \leq w = u_{(\chi_A F)}$ y de nuevo, por la Proposición 1.3.4, esta vez aplicada a la medida vectorial $\chi_A F$, existe h medible $0 \leq h \leq 1$ tal que $w \wedge v = u_{(h\chi_A F)}$. Como $0 < u_{(h\chi_A F)} \leq v$, obtenemos por el Teorema 2.1.1 que $(h\chi_A F)$ tiene variación finita y es fácil encontrar $B \subseteq A$ con $0 < |F|(B) < \infty$.

(a)$\Rightarrow$(c) Si F tiene variación σ-finita, entonces $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ disjuntos dos a dos y $|F|(A_n) < +\infty$. Si $u_n = u_{(\chi_{A_n} F)}$, es claro que la sucesión $\{u_n\}_n$ satisface (c).

(c)$\Rightarrow$(b) Sea $u_F = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_n v_n$ donde $v_n = \sum_{j=1}^{n} u_j$. Por hipótesis, existen constantes $M_n < +\infty$ tales que $v_n(\bigvee_{i=1}^{k} |x_i^*|) \leq M_n$ para cada conjunto finito $\{x_i^*\}_{i=1}^{k} \subseteq B_{X^*}$. Si $0 < w \leq u_F$, existe n tal que $w \wedge v_n > 0$ pues $w = w \wedge u_F = w \wedge (\sup_n v_n) = \sup_n (w \wedge v_n)$. Si tomamos una sucesión de números positivos $(\alpha_n)_n$ tal que $\sum_n \alpha_n \leq 1$ y $\sum_n \alpha_n M_n < +\infty$, entonces $v = \sum_n \alpha_n v_n$ satisface $v \leq u_F$ y v es de variación acotada. Si $w \wedge v = 0$, entonces $w \wedge (\alpha_n v_n) = 0$ para cada n, con lo que $w \wedge v_n = 0$, lo cual es una contradicción. $\square$

Nota. En la implicación (b)$\Rightarrow$(a) anterior, hemos hecho uso del Lema de Exhaución debido a que si ψ y φ son dos funciones medibles acotadas y positivas, $u_{\psi F} \wedge u_{\varphi F} \neq u_{(\psi \wedge \varphi)F}$, en general. Para ello, basta considerar G una medida vectorial definida en el espacio medible (Ω, Σ) y F definida en $(\Omega \sqcup \Omega', \Sigma \oplus \Sigma')$ para Ω' y Σ' copias disjuntas de Ω y Σ, respectivamente y $F(A \sqcup A') = G(A) + G(A')$. Entonces $u_{\chi_\Omega F} = u_{\chi_{\Omega'} F} = u_G$ con lo que su ínfimo coincide con u_G pero $\chi_\Omega \wedge \chi_{\Omega'} = 0$.

El último teorema proporciona una nueva prueba de que el rango de una medida vectorial determina la σ-finitud de su variación.

Corolario 2.1.6. *Sean F y G dos medidas vectoriales tales que $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, F)$ es un trasladado de $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, G)$ entonces F tiene variación σ-finita si y sólo si G tiene variación σ-finita.*

DEMOSTRACIÓN. Vamos a probar que la condición (b) del último teorema es invariable bajo simetrización. Supongamos primero que existe $v \leq u_F$, v de variación finita y tal que para todo $w \leq u_F$, $w > 0$, se tiene $(w \wedge v) > 0$. Tomemos $v^s = \frac{1}{2}(v + \check{v}) \leq u_F^s$ que obviamente tiene variación acotada. Si $w \leq u_F^s$, $w > 0$ por el Teorema de descomposición de Riesz, $w = w_1 + w_2$ con $w_1 \leq \frac{u_F}{2}$ y $w_2 \leq \frac{\check{u}_F}{2}$. O bien $w_1 > 0$ o bien $w_2 > 0$. Supongamos que $w_1 > 0$,

$$0 < \frac{1}{2}(w_1 \wedge v) \leq \frac{1}{2}(w_1 \wedge (v + \check{v})) = \frac{w_1}{2} \wedge v^s \leq w_1 \wedge v^s \leq w \wedge v^s.$$

Si $w_2 > 0$, tambien obtenemos que $w \wedge v^s > 0$ porque en este caso $w_2 \wedge \check{v} > 0$.

Recíprocamente, supongamos que existe $v \leq u_F^s$ de variación finita tal que $w \leq u_F^s$, $w > 0$, implique $w \wedge v > 0$. Si $v_1 = v \wedge \frac{u_F}{2}$, entonces para cada $w > 0$, $w \leq u_F$, tenemos $0 < \frac{w}{2} \leq \frac{u_F}{2} \leq u_F^s$, y así

$$\frac{w}{2} \wedge v_1 = \frac{w}{2} \wedge (\frac{u_F}{2} \wedge v) = \frac{w}{2} \wedge v > 0.$$

Entonces $w \wedge v_1 > 0$ y u_F satisface (b) en el último Teorema. □

Sección 2: Algunas normas de ideales del operador integración.

Hay una estrecha relación entre ciertas propiedades de una medida vectorial y las del operador integración que define. En este sentido, una medida vectorial F tiene variación finita si y sólo si el operador integración T_F es 1-sumante y en este caso $\pi_1(T_F) = \|F\|$ [DU, pg. 162]. Además, que F sea diferenciable equivale a que T_F sea nuclear. Estos hechos sugieren estudiar el caso de la normas de ideales de operadores de T_F como las (p,q)-sumantes y las p-nucleares en términos de la medida cónica asociada. Esto demostrará que el rango de F las determina. En realidad, en el Capítulo 4 se probará que el rango de una medida vectorial determina toda norma de ideal de operadores del operador integración.

Si $1 \leq q, p < +\infty$, recordemos que un operador $T: Y \longrightarrow X$ se dice que es (p,q)-sumante si existe una constante $M < +\infty$ tal que se cumple la desigualdad

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \|Ty_i\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq M \cdot \sup\Big\{\Big(\sum_{i=1}^{n} |\langle y^*, y_i\rangle|^q\Big)^{\frac{1}{q}} : y^* \in B_{Y^*}\Big\}$$

para todo entero positivo n y para todo $y_1, \ldots, y_n \in Y$. La menor de las constantes M es la norma (p,q)-sumante de T y se denota por $\pi_{(p,q)}(T)$. En el caso en que $p = q$, el operador se dice p-sumante y de norma p-sumante $\pi_p(T) = \pi_{(p,p)}(T)$.

Observese que si $Y = L^\infty(\lambda)$ y $f_1, \ldots, f_n \in L^\infty(\lambda)$, entonces

$$\sup\Big\{\Big(\sum_{i=1}^{n} |\langle y^*, f_i\rangle|^q\Big)^{\frac{1}{q}} : y^* \in B_{Y^*}\Big\} = \Big\|\Big(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q\Big)^{1/q}\Big\|_\infty. \tag{2}$$

Esta igualdad se puede encontrar en [DJT, pg. 41]. Incluimos su demostración por su importancia en el próximo resultado. Denotemos por $\big\|(f_i)_{i=1}^n\big\|_q^w$ a la cantidad $\sup\Big\{\Big(\sum_{i=1}^n |\langle y^*, f_i\rangle|^q\Big)^{\frac{1}{q}} : y^* \in B_{Y^*}\Big\}$. Entonces, si u es el operador $u: \ell_{q'}^n \longrightarrow Y$ definido por $u((a_i)_{i=1}^n) = \sum_{i \leq n} a_i f_i$, $u^*: Y^* \longrightarrow \ell_p^n$ verifica $u^*(y^*) = (\langle x^*, f_i\rangle)_{i=1}^n$. Por tanto,

$$\sup\Big\{\Big\|\sum_{i\leq n} a_i f_i\Big\| : a \in B_{\ell_{q'}^n}\Big\} = \|u\| = \|u^*\| = \big\|(f_i)_{i=1}^n\big\|_q^w.$$

Si $a \in B_{\ell_{q'}^n}$ y $\omega \in \Omega$,

$$\Big|\sum_{i\leq n} a_i f_i(\omega)\Big| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} |f_i(\omega)|^q\Big)^{1/q}$$

Por consiguiente,

$$\left\|(f_i)_{i=1}^n\right\|_q^w \leq \left\|\Big(\sum_{i=1}^n |f_i|^q\Big)^{1/q}\right\|_\infty.$$

Para cada $(a_1,\dots,a_n) \in B_{\ell_{q'}^n}$,

$$\Big|\sum_{i\leq n} a_i f_i(\omega)\Big| \leq \Big\|\sum_{i\leq n} a_i f_i\Big\|_\infty \tag{3}$$

salvo en un conjunto de medida 0. Aplicando esto a a cada elemento de un subconjunto denso y numerable D de $B_{\ell_{q'}^n}$, encontramos un conjunto de medida nula N tal que la igualdad en (3) es cierta en todo $a \in D$ y todo $\omega \in \Omega \setminus N$. Entonces,

$$\left\|\Big(\sum_{i=1}^n |f_i|^q\Big)^{1/q}\right\|_\infty \leq \sup_{\omega\in\Omega\setminus N}\Big(\sum_{i\leq n} |f_i(\omega)|^q\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \sup_{a\in D}\sup_{\omega\in\Omega\setminus N}\Big|\sum_{i\leq n} a_i f_i(\omega)\Big| \leq \sup_{a\in D}\Big\|\sum_{i\leq n} a_i f_i\Big\|_\infty = \|u\| = \left\|(f_i)_{i=1}^n\right\|_p^w,$$

lo que prueba la igualdad (2).

Un operador $T\colon L \longrightarrow X$ donde L es un retículo de Banach se dice (p,q)-cóncavo si satisface la desigualdad

$$\Big(\sum_{i=1}^n \|Ty_i\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq M\left\|\Big(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\Big)^{1/q}\right\|$$

para todo entero positivo n e $y_1,\dots,y_n \in L$. Entonces un operador T definido en un $L^\infty(\lambda)$ es un operador (p,q)-cóncavo si y sólo si es (p,q)-sumante. Usaremos este hecho en el siguiente teorema que caracteriza la norma (p,q)-sumante del operador integración T_F en términos de la medida cónica u_F. Sean p' y q' los exponentes conjugados de p y q respectivamente; esto es, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ y $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, y ℓ_p^n denotará $\mathbb{R}^n$ con la norma ℓ_p.

Teorema 2.2.1. *El operador T_F es (p,q)-sumante si y sólo si existe una constante $M < +\infty$ tal que*

$$u_F\Big(\bigvee_{j=1}^{m}\Big|\sum_{i=1}^{n} a_i^j x_i^*\Big|\Big) \leq M \tag{4}$$

siempre que $(\|x_i^*\|)_{i=1}^n \in B_{\ell_{p'}^n}$ y $(a_i^j)_{i=1}^n \in B_{\ell_q^n}$ para cada $j = 1,\ldots,m$. En este caso, $\pi_{(p,q)}(T_F) = \inf M$ tal que (4) se verifica.

DEMOSTRACIÓN. Es fácil ver que T_F es (p,q)-sumante si y sólo si existe una constante $K > 0$ tal que, para cada conjunto finito $x_1^*,\ldots,x_n^*$ en X^*,

$$\Big\|(\sum_{i=1}^{n}|f_{x_i^*}|^{q'})^{1/q'}\Big\|_1 \leq K\Big(\sum_{i=1}^{n}\|x_i^*\|^{p'}\Big)^{1/p'}. \tag{5}$$

Y $\pi_{(p,q)}(T_F) = \inf K$ tal que (5) se verifica. Para ver esto, supongamos que T_F es (p,q)-sumante, entonces por (2):

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\|T_F f_i\|^p\Big)^{1/p} \leq \pi_{(p,q)}(T_F)\Big\|\Big(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^q\Big)^{1/q}\Big\|_\infty$$

para todo $f_1,\ldots,f_n \in L^\infty(\lambda)$. Como $(L^1(\ell_{q'}^n))^* = L^\infty(\ell_q^n)$,

$$\begin{aligned}
&\Big\|(\sum_{i=1}^{n}|f_{x_i^*}|^{q'})^{1/q'}\Big\|_1 = \Big\|(\sum_{i=1}^{n}|T_F^* x_i^*|^{q'})^{1/q'}\Big\|_1 \\
&= \sup\Big\{\sum_{i=1}^{n}|\langle T_F^* x_i^*, g_i\rangle| : 1 \geq \Big\|\sum_{i=1}^{n}|g_i|^q\Big\|_\infty\Big\} \\
&\leq \sup\Big\{\sum_{i=1}^{n}\|x_i^*\|\|T_F g_i\| : 1 \geq \Big\|\sum_{i=1}^{n}|g_i|^q\Big\|_\infty\Big\} \\
&\leq \sup\Big\{\Big(\sum_{i=1}^{n}\|x_i^*\|^{p'}\Big)^{1/p'}\Big(\sum_{i=1}^{n}\|T_F g_i\|^p\Big)^{1/p} : 1 \geq \Big\|\sum_{i=1}^{n}|g_i|^q\Big\|_\infty\Big\} \\
&\leq \pi_{(p,q)}(T_F)\Big(\sum_{i=1}^{n}\|x_i^*\|^{p'}\Big)^{1/p'}.
\end{aligned}$$

Por otra parte, si

$$\Big\|\Big(\sum_{i=1}^{n}|f_{x_i^*}|^{q'}\Big)^{1/q'}\Big\|_1 \leq K\Big(\sum_{i=1}^{n}\|x_i^*\|^{p'}\Big)^{1/p'}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{i=1}^{n}\|T_F f_i\|^p\Big)^{1/p}\\
=&\sup\Big\{\sum_{1=1}^{n}\|T_F f_i\|\|x_i^*\| : \|(\|x_i^*\|)\|_{p'} \leq 1\Big\}\\
=&\sup\Big\{\sum_{i=1}^{n}|< T_F f_i, x_i^* >| : \|(\|x_i^*\|)\|_{p'} \leq 1\Big\}\\
=&\sup\Big\{\sum_{i=1}^{n}|< f_i, T_F^* x_i^* >| : x_i^* \in X^*, \|(\|x_i^*\|)\|_{p'} \leq 1\Big\}\\
\leq&\sup\Big\{\Big\|(\sum_{i=1}^{n}|f_{x_i^*}|^{q'})^{1/q'}\Big\|_1\Big\|\Big(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^q\Big)^{1/q}\Big\|_\infty : \|(\|x_i^*\|)\|_{p'} \leq 1\Big\}\\
\leq&K\Big\|\Big(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^q\Big)^{1/q}\Big\|_\infty .
\end{aligned}$$

Para concluir, es suficiente ver que

$$\Big\|(\sum_{i=1}^{n}|f_{x_i^*}|^{q'})^{1/q'}\Big\|_1 = \sup\Big\{u_F\Big(\bigvee_{j=1}^{m}|\sum_{i=1}^{n}a_i^j x_i^*|\Big) : \sum_{i=1}^{n}|a_i^j|^q \leq 1\Big\}.$$

□

Como la condición (4) es invariante bajo simetrización, obtenemos,

Corolario 2.2.2. *Si F y G son dos medidas vectoriales tales que $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F)$ es un trasladado de $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, G)$, entonces $\pi_{(p,q)}(T_F) = \pi_{(p,q)}(T_G)$.*

El resultado anterior permite estudiar otro tipo de normas de operadores estrechamente relacionadas con la norma p-sumante que vienen determinadas por el rango de una medida vectorial. Recordemos que un operador entre espacios de Banach $T : X \longrightarrow Y$ es *p-integral* $(1 \leq p < +\infty)$ si existe una probabilidad μ y operadores acotados $a : L^p(\mu) \longrightarrow Y^{**}$ y $b : X \longrightarrow L^\infty(\mu)$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{k_Y \circ T} & Y^{**} \\ {\scriptstyle b}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle a} \\ L^\infty(\mu) & \xrightarrow{j_p} & L^p(\mu) \end{array}$$

siendo j_p la identidad formal de $L^\infty(\mu)$ en $L^p(\mu)$ y $k_Y : Y \longrightarrow Y^{**}$ la inyección canónica. En este caso, la norma p-integral de T se define como

$$i_p(T) = \inf ||a|| \cdot ||b||$$

donde el ínfimo se extiende a todas las medidas μ y operadores a y b tales que existe una factorización como antes. Si $p = 1$ diremos simplemente que T es *integral.*

En el caso en que X sea un $\mathcal{C}(K)$-espacio se tiene que T es p-sumante si y sólo si es p-integral y en este caso $\pi_p(T) = i_p(T)$. Este hecho, junto con el Corolario 2.2.2 permite probar que el rango de una medida vectorial determina la norma p-integral del operador integración asociado.

Un análogo discreto al caso de operadores p-integrales es, dado $\gamma = (\gamma_n)_n$ una sucesión fija en ℓ_p, considerar un operador que factorice a través del operador diagonal

$$M_\gamma : \ell_\infty \longrightarrow \ell_p : (x_n)_n \longrightarrow (\gamma_n x_n)_n.$$

Un operador $T : X \longrightarrow Y$ donde X e Y son dos espacios de Banach se llama *p-nuclear* $(1 \leq p < +\infty)$ si existen operadores $a \in \mathcal{L}(\ell_p, Y)$ y $b \in \mathcal{L}(X, \ell_\infty)$ y una sucesión $\gamma \in \ell_p$ tal que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ {\scriptstyle b}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle a} \\ \ell_\infty & \xrightarrow{M_\gamma} & \ell_p \end{array}$$

La norma p-nuclear de T se denota $\nu_p(T)$ y está definida por

$$\nu_p(u) = \inf ||a|| \cdot ||M_\gamma|| \cdot ||b||,$$

donde el ínfimo se extiende a todas las factorizaciones del tipo anterior. En el caso $p = 1$ se dice simplemente que u es *nuclear.*

En [Ro2] se probó que el rango de una medida vectorial determina la norma nuclear. El resultado fundamental para esta prueba es un Teorema de A. Grothendieck que asegura que la composición de un operador integral con un débil compacto es un operador nuclear. En nuestro caso, el siguiente resultado, debido a A. Pietsch y A. Persson en el caso $1 < p < +\infty$ (ver [DJT, pg. 116]), nos permitirá probar que el rango determina la norma p-nuclear. En realidad, nuestra prueba sigue los mismos pasos que la del caso nuclear.

Teorema 2.2.3. *Un operador $T : X \longrightarrow Y$ es p-nuclear si y sólo si existe un espacio de Banach Z, un operador compacto $S : Z \longrightarrow Y$ y un operador p-integral $R : X \longrightarrow Z$ tal que $T = S \circ R$. En este caso,*

$$\nu_p(T) = \inf ||S|| \cdot i_p(R),$$

donde el ínfimo se extiende a todas las factorizaciones del tipo anterior.

Sea K un subconjunto cerrado acotado y absolutamente convexo de un espacio de Banach X. Sea X_K la envoltura lineal de K, es decir $X_K = \{\alpha x : x \in K, \alpha > 0\}$. Denotaremos por $|| \cdot ||_K$ el funcional de Minkowski de K. Dotado de esta norma, X_K es un espacio de Banach contenido en X. Dada una medida vectorial X-valorada F tal que $\operatorname{rg} F \subseteq X_K$, podemos considerarla valorada en X_K y la denotaremos en este caso por F_K. La medida F_K sólo es, en general, finitamente aditiva; la condición necesaria y suficiente para que F_K sea numerablemente aditiva es que el rango de F_K sea relativamente débil compacto en X_K (ver la prueba del siguiente teorema).

El siguiente resultado es una versión del Teorema 2.2.3 adaptado al caso del operador integración de una medida vectorial, que nos servirá para probar que el rango determina la norma p-nuclear.

Teorema 2.2.4. *Sea X un espacio de Banach y $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ una medida vectorial. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) T_F es un operador p-nuclear.

(b) Hay un conjunto absolutamente convexo y compacto $K \subseteq B_X$ tal que $\overline{\mathrm{co}}^X(\mathrm{rg}\, F)$ es un conjunto compacto en X_K y la medida vectorial F_K satisface que T_{F_K} es p-integral.

En estas condiciones, $\nu_p(T_F) = \inf i_p(T_{F_K})$ donde el ínfimo se extiende a todos los compactos absolutamente convexos que satisfacen (b).

DEMOSTRACIÓN. (b)$\Rightarrow$(a) Consideremos la medida F_K definida como F pero valorada en X_K. Sea $\{A_n\}_n$ una sucesión de medibles disjuntos en Ω. Debido a que $\mathrm{rg}(F_K)$ es un conjunto relativamente compacto en X_K, F_K es una medida vectorial fuertemente aditiva y entonces $\sum_n F_K(A_n)$ converge en X_K. El hecho que F sea numerablemente aditiva en X implica que

$$\sum_n F_K(A_n) = F_K\Big(\bigcup_n A_n\Big).$$

Y por tanto, F_K es una medida numerablemente aditiva.

Por hipótesis, $T_F = J_K \circ T_{F_K}$ donde J_K es la inclusión de X_K en X. Está claro que J_K es un operador compacto que envía la bola $B_{X_K} = K$ en un compacto en X. Además, como $K \subseteq B_X$, se tiene $\|J_K\| \leq 1$. Entonces, por el

Teorema 2.2.3, T_F es p-nuclear. En este caso, $\nu_p(T_F) \leq \inf i_p(T_{F_K})$, extendido este ínfimo a todos los compactos absolutamente convexos que satisfacen (b).

(a)$\Rightarrow$(b) Sea λ una medida de control para F. Si T_F es p-nuclear, para cada $\varepsilon > 0$, admite una factorización de la forma

$$\begin{array}{ccc} L^\infty(\lambda) & \xrightarrow{T_F} & X \\ {\scriptstyle R}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle S_0} \\ \ell_\infty & \xrightarrow{M_\gamma} & \ell_p \end{array}$$

donde $||R|| = 1$, $||S_0|| = 1$ y M_γ es un operador diagonal; es decir, existe una sucesión $\gamma = (\gamma_n)_n$ en ℓ_p con $M_\gamma((x_n)_n) = (\gamma_n x_n)_n$ para toda sucesión $(x_n)_n \in \ell_\infty$ y $||\gamma||_p \leq (1+\varepsilon)\nu_p(T_F)$. Entonces podemos escribir $\gamma_n = \alpha_n \cdot \tau_n$ tal que $\alpha = (\alpha_n)_n \in c_0$, $||\alpha||_\infty \leq 1$, $\tau = (\tau_n)_n \in \ell_p$, $||\tau||_p \leq (1+\varepsilon)||\gamma||_p$ y se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccc} L^\infty(\lambda) & \xrightarrow{T_F} & X \\ {\scriptstyle R}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle S} \\ \ell_\infty & \xrightarrow{M_\tau} & \ell_p \end{array}$$

donde ahora $S = S_0 \circ M_\alpha$ es un operador compacto. Sea $K = \overline{S(B_{\ell_p})}$ que es un compacto y absolutamente convexo de X contenido en B_X. Sea $T_K : \ell_p \longrightarrow X_K$ definido como S pero valorado en X_K.

Entonces

$$\begin{aligned} \overline{\text{co}}^X(\text{rg}\, F) &\subseteq T_F(B_{L^\infty(\lambda)}) = S \circ M_\tau \circ R(B_{L^\infty(\lambda)}) \\ &\subseteq S \circ M_\tau(B_{\ell_\infty}) \subseteq S(H) = T_K(H). \end{aligned}$$

para $H = M_\tau(B_{\ell_\infty})$ que es un compacto en ℓ_p. Por construcción tenemos

$$i_p(T_{F_K}) \leq \nu_p(T_{F_K}) \leq ||R|| ||M_\tau|| ||S|| \leq \nu_p(T_F)(1+\varepsilon)^2;$$

esto prueba que $\inf i_p(T_{F_K}) \leq \nu_p(T_F)$. $\square$

Corolario 2.2.5. *Si F y G son dos medidas vectoriales con valores en un espacio de Banach X tales que $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, F)$ es un trasladado de $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, G)$, entonces $\nu_p(T_F) = \nu_p(T_G)$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que T_F es p-nuclear. Sea K un compacto como en la condición (b) del teorema anterior. Observemos que $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, G) \subseteq X_K$ debido a que $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, G)$ es un trasladado de $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, F)$ y ambos contienen a 0. Como nos restringimos a compactos de X_K tenemos coincidencis de topologías y se dan

$$\overline{\text{co}}(\text{rg}\, F) = \overline{\text{co}}^{X_K}(\text{rg}\, F), \quad \text{y} \quad \overline{\text{co}}(\text{rg}\, G) = \overline{\text{co}}^{X_K}(\text{rg}\, G).$$

Entonces también se tiene que $\overline{\text{co}}^{X_K}(\text{rg}\, F)$ es un trasladado de $\overline{\text{co}}^{X_K}(\text{rg}\, G)$. Por el Corolario 2.2.2 y los comentarios que lo siguen, $i_p(T_{F_K}) = i_p(T_{G_K})$, y aplicando el Teorema 2.2.4 se deduce que que T_F es p-nuclear si y sólo si lo es T_G, y la igualdad $\nu_p(T_F) = \nu_p(T_G)$. □

Nota. En la demostración anterior nos hemos preocupado de obtener la igualdad $\nu_p(T_F) = \nu_p(T_G)$. Nos hubiera bastado comprobar que T_F es p-nuclear si y sólo si lo es T_G; ya que para un operador p-nuclear T siempre se tiene $i_p(T) = \nu_p(T)$. Esto se puede obtener siguiendo el mismo razonamiento que en [Pi, pg. 132] para $p = 1$. No hemos encontrado una referencia para este hecho, pero la prueba del caso $p = 1$ se adapta al caso general.

Sección 3: Derivabilidad Pettis.

En esta sección estudiaremos la existencia de derivada Pettis de una medida vectorial de variación acotada en términos de la medida cónica asociada; más concretamente, esto se hará en términos de una localización de la medida cónica dada en el Teorema 2.3.3.

Recordemos que una función $f\colon \Omega \to X$, donde $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ es un espacio de medida y X es un espacio de Banach, es *Pettis integrable* si $x^* f$ es λ–integrable para cada $x^* \in X^*$, y para todo $A \in \Sigma$ existe un vector $x_A \in X$ tal que

$$x^*(x_A) = \int_A x^* f \, d\lambda \qquad \text{para todo } x^* \in X^*.$$

La integral de Pettis de f en A es x_A y se denota

$$x_A = (P) - \int_A f d\lambda.$$

En este caso la aplicación $A \mapsto x_A$ es una medida vectorial llamada la *integral indefinida* de f con respecto a λ. Una medida vectorial F es *Pettis derivable* con respecto a λ si es la integral indefinida de alguna función f Pettis integrable con respecto a λ. Una tal f es una *derivada* Pettis de F con respecto a λ y se denota

$$f = \frac{dF}{d\lambda}.$$

Si la función $f : \Omega \to X$ es fuertemente medible (límite puntual λ-e.c.t. de una sucesión de funciones escalonadas) y $\|f\|$ es integrable, entonces f se dice *Bochner integrable.* Toda función Bochner integrable es Pettis integrable, y son análogos los conceptos de medida Bochner derivable y derivada Bochner. Si f es Bochner integrable, la medida $F: A \mapsto \int_A f d\lambda$ es una medida vectorial de variación acotada; de hecho, para todo $A \in \Sigma$,

$$|F|(A) = \int_A \|f\| \, d\lambda.$$

En el caso de ser F la integral indefinida de una función f integrable Pettis, no podemos utilizar la función escalar $\|f\|$ para acotar la variación de F puesto que puede ocurrir que $\|f\|$ sea no integrable o no medible. De cualquier forma, si λ es una medida finita, F tiene variación σ-finita ya que existe una función medible $\varphi_f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ verificando que $|\langle x^*, f(\omega)\rangle| \leq \varphi_f(\omega)\|x^*\|$ λ-e.c.t. y $\varphi_f(\omega) \leq \|f(\omega)\|$ λ-e.c.t. con lo que $|F|(A) \leq \int_A \varphi_f d\lambda$ para todo $A \in \Sigma$ (ver [Mu]). En el caso general, tomemos $x^* \in X^*$ un funcional de Rybakov para F. Entonces el conjunto $A = \{\omega : |x^* \circ f|(\omega) \neq 0\}$ es de medida σ-finita para λ y por ser x^* un funcional de Rybakov, $|F|(\Omega \setminus A) = 0$. Esto prueba que, también en este caso, F tiene variación σ-finita.

Si F es la integral indefinida de una función f integrable Bochner con respecto a λ se puede probar que F también es derivable con respecto a su variación y que

$$\frac{dF}{d|F|} = \frac{f(t)}{\|f(t)\|} \qquad \text{(con el convenio } \tfrac{0}{0} = 0\text{)}.$$

Recíprocamente, si F es derivable con respecto a su variación, es fácil probar que su derivada toma valores en B_X $|F|$-e.c.t. y si λ es una medida de control cualquiera para F se tiene,

$$\frac{dF}{d\lambda} = \frac{dF}{d|F|} \cdot \frac{d|F|}{d\lambda}.$$

Por tanto, para estudiar la diferenciabilidad Bochner de una medida de variación finita, basta estudiar si es derivable con respecto a su variación.

Al igual que con la diferenciabilidad Bochner, la diferenciabilidad Pettis de una medida no depende de la medida de control. Supongamos que F es Pettis derivable con respecto a $|F|$. Entonces existe una función f integrable Pettis tal que

$$F(A) = (P) - \int_A f\, d|F| \quad \text{para todo } A \in \Sigma\ .$$

Sea φ la derivada de Radon-Nikodym de $|F|$ con respecto a λ. Es fácil probar que φf es integrable Pettis respecto a λ y que φf es una derivada Pettis de F con respecto a λ.

Recíprocamente, supongamos que F es derivable Pettis con respecto a una medida de control λ con derivada f. Sea $x^* \in X^*$ un funcional de Rybakov para F. Vamos a probar que F es derivable Pettis con respecto a $|x^* \circ F|$. Sea $P = \{\omega \in \Omega : x^* f(\omega) > 0\}$, $Q = \{\omega \in \Omega : x^* f(\omega) = 0\}$ y $N = \{\omega \in \Omega : x^* f(\omega) < 0\}$. Como f es débilmente medible se tiene que P, Q y N son conjuntos medibles. Dado que x^* es un funcional de Rybakov, Q es un conjunto de $|F|$-medida nula con lo cual $F = \chi_P F + \chi_Q F$ y sólo hay que probar que existe una derivada Pettis para $\chi_P F$ y para $\chi_Q F$. Supongamos que $A \in \Sigma$, $A \subseteq P$ y que $|x^* F(A)| = x^* F(A) = 0$. Entonces $\lambda(A) = 0$. Una simple aplicación del Teorema de Radon-Nikodym escalar asegura la existencia de una función integrable ϕ tal que $\phi = \dfrac{d\lambda}{d|x^* \circ F|}$ en P. Del mismo modo, podemos encontrar $\psi = \dfrac{d\lambda}{d|x^* \circ F|}$ en N. Considerando la función $g = (\chi_P \phi + \chi_Q \psi) f$, es fácil ver que g es una derivada Pettis de F con respecto a $|x^* F|$. Como $|x^* F|$ y $|F|$ tienen los mismos conjuntos de medida nula, una nueva aplicación del Teorema de Radon-Nikodym asegura la existencia de una derivada Pettis h de F con respecto a $|F|$, de hecho

$$h = \frac{d|F|}{d|x^* F|} g.$$

Todas estas consideraciones se pueden resumir en la siguiente proposición.

Proposición 2.3.1. *Si F es una medida vectorial de variación finita y λ una medida de control para F, entonces F es Pettis derivable con respecto a λ si y sólo si lo es con respecto a su variación $|F|$.*

Hemos visto que para el estudio de las medidas vectoriales Pettis derivables, basta restringirnos a las de variación σ-finita. Más aún, en esta sección nos restringiremos a estudiar la derivabilidad de una medida vectorial sólo en el caso de variación finita. Esto no supone pérdida de generalidad alguna. El caso de variación σ-finita puede ser reducido a este usando el Corolario 1.3.8. Si F tiene variación σ-finita y $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, G)$ es un trasladado de $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, F)$, este resultado nos permite descomponer $F = \sum F_n$ y $G = \sum G_n$, donde F_n y G_n tienen variación acotada y $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, G_n)$ es un trasladado de $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, F_n)$, para cada n. F va a ser entonces Pettis derivable si y sólo si lo es cada F_n y F será Bochner derivable si y sólo si lo es cada F_n y $\|F\| < +\infty$.

En [Ro2] se probó que el rango de una medida vectorial determina su diferenciabilidad Bochner. Nosotros daremos una nueva prueba de este hecho en el Corolario 2.3.9. Esto implica fácilmente que el rango determina la existencia de una derivada Pettis fuertemente medible. Desafortunadamente, el rango no determina la existencia de una derivada Pettis para la medida, como muestra el Ejemplo 2.3.2 basado en una construcción de Fremlin y Talagrand [FT].

Recordemos que un espacio de medida finito $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ se dice *perfecto* si para cada función medible $\varphi: \Omega \to \mathbb{R}$ y para cada $A \subset \mathbb{R}$ tal que $\varphi^{-1}(A) \in \Sigma$, existe un conjunto de Borel B en $\mathbb{R}$ tal que $B \subset A$ y $\lambda(\varphi^{-1}(A)) = \lambda(\varphi^{-1}(B))$. Lo mismo se mantiene si cambiamos $\mathbb{R}$ por cualquier espacio métrico separable. El ejemplo más representativo de espacio de medida perfecto es un espacio topológico compacto con una medida de Radon (ver [T, 1-3] para más detalles).

Ejemplo 2.3.2. *Existen dos medidas vectoriales de variacion acotada con valores en ℓ_∞ y con el mismo rango, una de ellas derivable Pettis y la otra no derivable Pettis.*

En [FT] se construye un ejemplo de una función Pettis integrable cuya integral indefinida tiene rango no relativamente compacto. Vamos a describir brevemente este ejemplo (ver [T, 4-2-5 y 13-2-1]). Consideremos el compacto $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{B}$ la σ–álgebra de conjuntos de Borel de Ω y μ la probabilidad $\mathcal{B}$ producto de tomar en cada factor $\{0,1\}$ la medida $\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$.

Existe una σ–álgebra Σ en Ω que contiene a $\mathcal{B}$, una probabilidad $\overline{\mu}$ en Σ que extiende a μ y una función acotada $f: \Omega \to \ell_\infty$ que es Pettis integrable con respecto a $\overline{\mu}$ tal que si F es la integral indefinida de f, entonces $\operatorname{rg} F$ no es relativamente compacto en norma. F tiene variación finita ya que f es una función acotada y $\overline{\mu}$ es una probabilidad.

Más aún, todo conjunto en Σ es $\overline{\mu}$-equivalente a un conjunto en $\mathcal{B}$; es decir, para cada conjunto $M \in \Sigma$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $\overline{\mu}(B \triangle M) = 0$; esto implica, puesto que $\overline{\mu}$ es una medida de control para F, que $F(M) = F(B)$. Entonces, si G es la restricción de F a $\mathcal{B}$, tenemos $\operatorname{rg} F = \operatorname{rg} G$.

F es Pettis derivable pero G no lo es. En realidad la variación de G es una medida finita en la σ-álgebra de Borel de un espacio métrico completo y por tanto es una medida de Radon; con esto $(\Omega, \mathcal{B}, |G|)$ es un espacio de medida perfecto. Gracias a un resultado de Stegall [T, 4-1-6], si G fuera Pettis derivable con respecto a $|G|$, entonces su rango sería relativamente compacto.

Nota. En las referencias dadas en el ejemplo previo, la función f está definida en $\Omega \times \Omega$. Esto no es relevante, dado que hay un homeomorfismo de $\Omega \times \Omega$ en Ω que envía $\mu \otimes \mu$ en μ y la descripción anterior es el ejemplo en [T, 4-2-5] vía este homeomorfismo.

El anterior ejemplo muestra que no podemos caracterizar la diferenciabilidad Pettis en términos de la medida cónica. Ambas medidas en el ejemplo anterior tienen la misma medida cónica asociada. No obstante, en términos de esta medida cónica podemos caracterizar la diferenciabilidad Bochner, la existencia de al menos una medida vectorial derivable Pettis teniendo el mismo rango, y el caso en el que toda medida con el mismo rango tiene una derivada Pettis. Todas estas caracterizaciones se harán en términos de de una localización de la medida cónica cuya existencia y unicidad se garantizan en el siguiente teorema.

La menor σ-álgebra en un espacio topológico T que hace medibles todas las funciones reales y continuas se llama la σ-álgebra de Baire de T. Es en general más pequeña que la σ-álgebra de Borel de T. En el caso que consideremos la topología débil en X o la topología débil* en X^{**}, las σ-álgebras, denotadas respectivamente por $Ba(X, w)$ y $Ba(X^{**}, w^*)$, resultan ser las σ-álgebras generadas respectivamente en X y en X^{**} por los funcionales en X^* [T, 2-2-4].

El próximo teorema garantiza una localización de u_F que está definida en

$Ba(X^{**}, w^*)$. Hay que hacer notar que en general la bola unidad de X^{**} no es Baire medible para la topología débil*, por lo que tenemos que considerar para una medida μ definida en $Ba(X^{**}, w^*)$ la medida exterior $\mu^*(B_{X^{**}})$. Si μ es una medida en $Ba(X^{**}, w^*)$, μ^s denotará su simetrización $\mu^s(A) = \frac{1}{2}\big(\mu(A)+\mu(-A)\big)$ para cada $A \in Ba(X^{**}, w^*)$.

Teorema 2.3.3. *Sea F una medida vectorial X-valorada de variación finita. Existe una única medida positiva μ_F definida en $Ba(X^{**}, w^*)$ tal que:*

(*a*) $\|F\| = \mu_F(X^{**}) = \mu_F{}^*(B_{X^{**}})$.

(*b*) *Para cada $z^* \in h(X)$,*

$$u_F(z^*) = \int_{X^{**}} z^*(x^{**})\, d\mu_F(x^{**})\,.$$

Más aún, si G es otra medida vectorial X−valorada de variación acotada, entonces $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, F)$ es un trasladado de $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, G)$ si y sólo si $\mu_F^s = \mu_G^s$.

DEMOSTRACIÓN. La existencia de μ_F se podría probar usando un resultado de E. Thomas [Th, Teorema 16] sobre localización de medidas cónicas; pero para nuestros propósitos será más conveniente usar una densidad débil* medible. Podemos suponer que F está definida en (Ω, Σ) y que $(\Omega, \Sigma, |F|)$ es un espacio de medida completo; si no es así, podemos considerar su completado.

El uso de un "lifting" en $L^\infty(|F|)$ asegura la existencia de una densidad débil* medible para F (ver [T, 7-1-2] y recuerdese que el operador integación de una medida de variación finita se puede extender a $L^1(|F|)$); es decir, existe una aplicación $f\colon \Omega \to B_{X^{**}}$ tal que

$$x^* \circ f = \frac{d(x^* \circ F)}{d|F|} \quad |F|\text{-e.c.t., para cada } x^* \in X^*. \qquad (6).$$

La función f es entonces medible de (Ω, Σ) en $Ba(X^{**}, w^*)$, y μ_F será la medida imagen de $|F|$ mediante f: $\mu_F(A) = |F|\big(f^{-1}(A)\big)$ para cada $A \in Ba(X^{**}, w^*)$.

Claramente, como f toma valores en $B_{X^{**}}$ tenemos (a). Para probar (b), considerando $|F|$ como medida de control para F, tomemos $z^* \in h(X)$ de la forma $z^* = \bigvee_{i=1}^n x_i^* - \bigvee_{i=n+1}^m x_i^*$. Entonces tenemos, gracias a (6),

$$u_F(z^*) = \int (\bigvee_{i=1}^{n} x_i^* \circ f - \bigvee_{i=n+1}^{m} x_i^* \circ f)\, d|F| = \int z^* \circ f\, d|F| = \int z^*\, d\mu_F.$$

Para probar la unicidad, supongamos que μ_1 y μ_2 son dos medidas que satisfacen (a) y (b). Sea $\mathcal{B}$ la σ–álgebra de Baire de $B_{X^{**}}$ para la topología débil*; esta σ-álgebra es la traza en $B_{X^{**}}$ de la σ–álgebra $Ba(X^{**}, w^*)$; es decir, para todo $A \in \mathcal{B}$, existe $A' \in Ba(X^{**}, w^*)$ tal que $A = A' \cap B_{X^{**}}$. Como $B_{X^{**}}$ tiene medida exterior $\|F\|$ para μ_1 y μ_2, si ponemos $\nu_j(A) = \mu_j(A')$, $j = 1, 2$, obtenemos dos medidas bien definidas en $\mathcal{B}$ que aún satisfacen para cada $z^* \in h(X)$,

$$u_F(z^*) = \int_{B_{X^{**}}} z^*\, d\nu_1 = \int_{B_{X^{**}}} z^*\, d\nu_2 \qquad (7).$$

Si probamos que $\nu_1 = \nu_2$, tendremos $\mu_1 = \mu_2$.

Para ver que $\nu_1 = \nu_2$, es suficiente probar que $\int \varphi\, d\nu_1 = \int \varphi\, d\nu_2$ para cada función continua en $B_{X^{**}}$, y esto ha de verificarse sólamente en un conjunto denso en $\mathcal{C}(B_{X^{**}})$. Gracias a (7) y al Teorema de la convergencia dominada, es claro que tenemos $\int \varphi\, d\nu_1 = \int \varphi\, d\nu_2$ para toda función continua φ que sea $(\nu_1 + \nu_2)$-e.c.t. límite de funciones en $h(X)$ uniformemente acotadas. El conjunto E de estas funciones es un subretículo de $\mathcal{C}(B_{X^{**}})$ que contiene a $h(X)$, en particular separa los puntos de $B_{X^{**}}$. Si probamos que E contiene a las constantes, por el teorema de Stone–Weierstrass reticular, será denso en $\mathcal{C}(B_{X^{**}})$.

Recordemos que $\nu_1(B_{X^{**}}) = \nu_2(B_{X^{**}}) = \|F\|$ y usamos el Teorema 2.1.1 para obtener, para cada ε positivo un conjunto finito $x_1^*, \ldots, x_k^*$ en la bola unidad X^* tal que $u_F(\bigvee_{j=1}^k |x_j^*|) \geq \|F\| - \varepsilon$. Esto nos da una función z^* en $h(X)$ tal que $0 \leq z^* \leq 1$ en $B_{X^{**}}$ y $\int z^*\, d\nu_j \geq \int 1\, d\nu_j - \varepsilon$. Podemos entonces construir una sucesión creciente (z_n^*) en $h(X)$ tal que $0 \leq z_n^* \leq 1$ en $B_{X^{**}}$ para todo n, y

$$\lim_{n\to\infty} \int z_n^* \, d(\nu_1 + \nu_2) = \int 1 \, d(\nu_1 + \nu_2).$$

Esto implica que la función constante 1 pertenece a E lo que finaliza la prueba de la unicidad.

Para probar la última afirmación, está claro que $u_F^s(z^*) = \int z^* \, d\mu_F^s$ para todo $z^* \in h(X)$. Entonces $\mu_F^s = \mu_G^s$ implica $u_F^s = u_G^s$ y es suficiente usar el Teorema 1.3.6 para deducir que $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, F)$ es un trasladado de $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, G)$. Para la implicación contraria, el mismo teorema nos da que $u_F^s = u_G^s$; para probar que $\mu_F^s = \mu_G^s$ usamos los mismos argumentos que en la prueba de la unicidad de μ_F. $\square$

Nota. La última afirmación de este Teorema podría haberse probado viendo que para cada $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ y cada conjunto de Borel B en $\mathbb{R}^n$, se tiene que $\mu_F^s\{x^{**} \in X^{**} : (x_j^*(x^{**}))_j \in B\} = \mu_G^s\{x^{**} \in X^{**} : (x_j^*(x^{**}))_j \in B\}$. Y esto, usando la transformada de Fourier en $\mathbb{R}^n$, es equivalente a probar que, para todo $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$\int e^{i\langle \vec{y}, (x_j^*(x^{**}))_j \rangle} \, d\mu_F^s = \int e^{i\langle \vec{y}, (x_j^*(x^{**}))_j \rangle} \, d\mu_G^s.$$

Esto nos remite a comprobar

$$\int e^{i\langle x^{**}, x^* \rangle} \, d\mu_F^s = \int e^{i\langle x^{**}, x^* \rangle} \, d\mu_G^s, \qquad \text{para todo } x^* \in X,$$

lo cual quedará probado si

$$\mu_F\{x^{**} \in X^{**} : |\langle x^*, x^{**} \rangle| \leq a\} = \mu_G\{x^{**} \in X^{**} : |\langle x^*, x^{**} \rangle| \leq a\}$$

para todo $x^* \in X^*$ y $a \in \mathbb{R}^+$. Esto se obtiene usando el Teorema 1.3.7 y que para todo $A \in \Sigma$, son equivalentes $A \subseteq \{\omega \in \Omega : |f_{x^*}| \leq a\}$, y $|x^* F(B)| \leq a|F|(B)$, para todo $B \subseteq A$, $B \in \Sigma$. El mismo tipo de argumentos permite probar que si

0 es un punto extremal de $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, F) = \overline{\text{co}}(\text{rg}\, G)$, entonces $\mu_F = \mu_G$. Sobre esto, volveremos en el siguiente capítulo.

Nuestra definición de localización contempla medidas definidas en X^{**}. El teorema anterior nos asegura la existencia de tal localización para medidas cónicas asociadas a medidas vectoriales de variación finita. No es siempre posible encontrar una localización de u_F definida en X para una medida vectorial F de variación finita. Para ello, basta considerar la medida vectorial del Ejemplo 1.3.14. En este caso, $\|\cdot\|$ es integrable con respecto a cualquier localización y debería ser $\mu_F\{x \in c_0 : \|x\| > |x_n|\} \neq 0$ para algún n natural, lo cual contradice que para cualquier localización se tiene que $\int |x_n| d\mu_F = \int \|x\| d\mu_F$.

Hemos definido μ_F como la medida imagen de $|F|$ mediante la densidad débil* f. Si consideramos otra densidad débil* g, incluso tomando valores fuera de $B_{X^{**}}$, producirá la misma medida imagen μ_F debido a que $x^* \circ f = x^* \circ g$ $|F|$-e.c.t. en Ω para todo $x^* \in X^*$, y esto implica que $f^{-1}(A)$ y $g^{-1}(A)$ son conjuntos $|F|$-equivalentes para todo $A \in Ba(X^{**}, w^*)$. Si existe una derivada Pettis de F, se puede usar como tal función g.

Tomando la medida imagen por la misma densidad f podemos transferir no sólo la variación de F sino también la medida. Así podemos definir la medida vectorial R_F como $R_F(A) = F\big(f^{-1}(A)\big)$ para cada $A \in Ba(X^{**}, w^*)$. Está claro que

$$\langle x^*, R_F(A)\rangle = \int_A x^*\, d\mu_F \qquad \text{para cada } A \in Ba(X^{**}, w^*) \text{ y } x^* \in X^*.$$

Entonces se puede entender R_F como la integral débil* de la función identidad en X^{**} con respecto a μ_F.

Se tiene que el zonoide generado por F coincide con el generado por R_F.

En realidad para cada $x^* \in X^*$ tenemos, si $A_{x^*} = \{x^* \geq 0\}$,

$$\sup\{x^*(F(A)) : A \in \Sigma\} = \int_{\{x^* f \geq 0\}} x^* f \, d\|F| =$$

$$\int_{A_{x^*}} x^* \, d\mu_F = \sup\{x^*(R_F(A)) : A \in Ba(X^{**}, w^*)\},$$

lo que prueba que $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, F) = \overline{\text{co}}(\text{rg}\, R_F)$.

Además la variación de R_F es μ_F. Para todo $A \in Ba(X^{**}, w^*)$, se tiene

$$\|R_F(A)\| = \|F(f^{-1}(A))\| \leq |F|(f^{-1}(A)) = \mu_F(A)$$

lo cual implica que $|R_F|(A) \leq \mu_F(A)$, para todo A. Sabemos que $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, F) = \overline{\text{co}}(\text{rg}\, R_F)$ con lo que, por el Corolario 2.1.3, $|R_F|(X^{**}) = \|F\| = \mu_F(X^{**})$. Entonces $|R_F|$ y μ_F coinciden en el conjunto total, como μ_F es siempre mayor o igual deben coincidir en todos los conjuntos medibles. Las consideraciones anteriores prueban la siguiente proposición.

Proposición 2.3.4. *Sea F una medida vectorial X-valorada de variación finita. Existe una única medida vectorial R_F definida en $Ba(X^{**}, w^*)$ tal que*

$$\langle x^*, R_F(A)\rangle = \int_A x^* \, d\mu_F \qquad \text{para cada } A \in Ba(X^{**}, w^*) \text{ y } x^* \in X^*.$$

Además, $|R_F| = \mu_F$ y $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, R_F) = \overline{\text{co}}(\text{rg}\, F)$.

En los dos resultados siguientes usamos las medidas μ_F y R_F para estudiar la diferenciabilidad Pettis; el primero caracteriza la existencia de una medida Pettis diferenciable con el mismo rango que F, y el segundo caracteriza cuándo toda medida con el mismo rango es derivable.

Proposición 2.3.5. *Sea F una medida vectorial X-valorada de variación finita. Existe una medida vectorial G con una derivada Pettis tal que $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, G)$ es un trasladado de $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, F)$ si y sólo si ${\mu_F}^*(X) = \|F\|$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que G es derivable Pettis y que $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, G)$ es un trasladado de $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, F)$. Entonces si g es una derivada Pettis de G con respecto a $|G|$, como mencionamos antes, se puede usar g para definir μ_G y entonces $g^{-1}(A)$ es el conjunto total para cada $A \in Ba(X^{**}, w^*)$ que contenga a X. Así $\mu_G{}^*(X) = \|G\| = \|F\|$. Dado que X es un conjunto simétrico, y como $\mu_F^s = \mu_G^s$, tenemos $\mu_F{}^*(X) = \|F\|$.

Para la implicación contraria, si X tiene medida exterior $\|F\|$ para μ_F, como $Ba(X, w)$ es la traza en X de $Ba(X^{**}, w^*)$, si escribimos $G(A \cap X) = R_F(A)$ y $\nu(A \cap X) = \mu_F(A)$, para cada $A \in Ba(X^{**}, w^*)$, definimos una medida vectorial G y una medida positiva ν en $Ba(X, w)$. G tiene el mismo rango que R_F, con lo que $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, G) = \overline{\text{co}}(\text{rg}\, F)$. Es fácil ver que $\nu = |G|$ pues $|R_F| = \mu_F$. Finalmente la función identidad en X es la derivada Pettis de G con respecto a ν puesto que se tiene

$$\int_{A \cap X} x^*\, d\nu = \int_X \chi_A x^*\, d\nu = \int_{X^{**}} \chi_A x^*\, d\mu_F = \langle x^*, R_F(A)\rangle = \langle x^*, G(A \cap X)\rangle$$

para todo $A \in Ba(X^{**}, w^*)$ y todo $x^* \in X^*$. □

Proposición 2.3.6. *Sea F una medida vectorial X-valorada de variación finita. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) *Toda medida vectorial G tal que $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, G)$ es un trasladado de $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, F)$ tiene una derivada Pettis.*

(b) *R_F tiene una derivada Pettis.*

(c) *Existe una función $h: X^{**} \to X$ tal que, para cada $x^* \in X^*$, $x^* \circ h = x^*$ μ_F-e.c.t. en X^{**}.*

DEMOSTRACIÓN. Evidentemente (a) implica (b) puesto que $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, F)$ coincide con $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, R_F)$. Es fácil ver que ($b$) y ($c$) son equivalentes: una derivada Pettis de R_F con respecto a su variación μ_F es exactamente una función h como en (c) ya que, para cada $x^* \in X^*$, se tiene $x^* = d(x^* \circ R_F)/d\mu_F$.

Para probar que (c) implica (a), probamos primero que (c) implica que F es Pettis derivable. Tomamos $f\colon \Omega \to X^{**}$ la densidad débil* usada para definir μ_F y R_F, entonces $h \circ f$ es una derivada Pettis de F con respecto a $|F|$ pues $x^* \circ h = x^*$ μ_F-e.c.t. en X^{**} implica

$$x^* \circ h \circ f = x^* \circ f = \frac{d(x^* \circ F)}{d|F|} \quad |F|\text{-e.c.t., para todo } x^* \in X^*.$$

Lo único que hay que probar es que (c) para μ_F implica (c) para μ_G siempre que $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, G)$ sea un trasladado de $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, F)$. Por el Teorema 2.3.3 sabemos que $\mu_F^s = \mu_G^s$. Como todo conjunto de medida 0 para μ_G^s tiene medida 0 para μ_G es suficiente probar que (c) para μ_F implica (c) para μ_F^s. Tomamos $\varphi\colon X^{**} \to [0,2]$ una derivada de Radon-Nikodym de μ_F con respecto a μ_F^s. Sea $B = \{h = 0\}$, $C = B \setminus (B \cap -B)$, y definimos $h_1(x^{**}) = h(x^{**})$, if $x^{**} \in X^{**} \setminus C$, y $h_1(x^{**}) = -h(-x^{**})$, if $x^{**} \in C$. Se tiene, para $x^* \in X^*$, $x^* \circ h_1 = x^*$ μ_F^s-e.c.t. dado que μ_F y μ_F^s son medidas equivalentes en $X \setminus C$, y coinciden exactamente en $-C$. □

En el ejemplo 2.3.2 el espacio en el que está definida la medida no derivable no es perfecto. Se puede pensar que la existencia de espacios de medida no perfectos, con σ-álgebras grandes, es la razón por la que el rango no determina la derivada Pettis. Esto plantea el siguiente problema: si restringimos nuestra atención a medidas vectoriales definidas en espacios de medida perfectos (medidas vectoriales con una medida de control perfecta), ¿determina el rango la diferenciabilidad Pettis?.

Nótese que μ_F es una medida definida en un espacio de medida perfecto ya que es la restricción a la σ-álgebra de Baire de una medida de Radon definida en los Borel de (X^{**}, w^*) soportada por $B_{X^{**}}$: la medida de Radon que representa el funcional $f \mapsto \int f\, d\mu_F$ en $\mathcal{C}(B_{X^{**}})$. Debido a esto y a la Proposición 2.3.6, el problema antes citado se reduce a la siguiente cuestión: si F es la integral indefinida de una función integrable Pettis definida en un espacio de medida perfecto, nos preguntamos si toda medida con el mismo rango que F posee una derivada Pettis. La siguiente proposición es una respuesta parcial a esta cuestión; implica, por ejemplo, que si el espacio de Banach donde toman valores las medidas es ℓ_∞, la respuesta es positiva.

Si A es un subconjunto de un espacio de Banach X, y S es un subconjunto de X^*, decimos que S separa los puntos de A si dados dos puntos distintos a, b en A, existe x^* en S tal que $x^*(a) \neq x^*(b)$. En ℓ_∞, los funcionales coordenadas forman una sucesión que separa los puntos de todo el espacio.

Proposición 2.3.7. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finito y perfecto, $f: \Omega \to X$ una función integrable Pettis y F su integral indefinida. Supongamos que F tiene variación acotada y que existe una sucesión $\{x_n^*\}$ en X^* que separa los puntos de la envoltura lineal de $f(\Omega)$; entonces toda medida vectorial G tal que $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, G)$ sea un trasladado de $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, F)$ es Pettis derivable.*

DEMOSTRACIÓN. Podemos reducir la prueba al caso $\mu = |F|$, pues $|F|$ es una medida perfecta y la derivada Pettis de F con respecto a $|F|$ es el producto de una función escalar y f. En el caso $\mu = |F|$ podemos usar f para definir μ_F. Usando la Proposición 2.3.6 sólo tenemos que construir una función $h: X^{**} \to X$ que satisfaga la condición (c) de esta proposición.

Definimos $T: X^{**} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ por $Tx^{**} = (\langle x_n^*, x^{**}\rangle)_{n=1}^{\infty}$. T es continuo si consideramos en X^{**} la topología débil* y en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la topología producto. La aplicación $T \circ f$ es medible del espacio de medida perfecto $(\Omega, \Sigma, |F|)$ en el espacio métrico separable $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Por tanto, dado el conjunto $A = T \circ f(\Omega)$, como $\Omega = (T \circ f)^{-1}(A)$, existe un conjunto de Borel B en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que $B \subset A$ y $|F|\big((T \circ f)^{-1}(B)\big) = |F|(\Omega) = \|F\|$.

Si $B_0 = T^{-1}(B)$, entonces $B_0 \in Ba(X^{**}, w^*)$, $\mu_F(B_0) = |F|\big(f^{-1}(B_0)\big) = \|F\|$, y $Tx^{**} \in T \circ f(\Omega)$ para cada $x^{**} \in B_0$. Así $X^{**} \setminus B_0$ es un conjunto de medida nula y para cada $x^{**} \in B_0$, existe un punto $y \in f(\Omega) \subset X$ tal que

$Tx^{**} = Ty$. Este punto y es necesariamente único pues la sucesión $\{x_n^*\}$ separa puntos de $f(\Omega)$, y nos permite definir $h(x^{**}) = y$. Si $x^{**} \in X^{**} \setminus B_0$ definimos $h(x^{**}) = 0$.

Veamos que h satisface (c) de la Proposición 2.3.6. Tomemos x_0^* en X^*. Para ver que $x_0^* \circ h = x_0^*$, μ_F-e.c.t. en X^{**}, definimos $S: X^{**} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ por $Sx^{**} = (\langle x_{n-1}^*, x^{**}\rangle)_{n=1}^{\infty}$. Usando los mismos argumentos que antes se deduce la existencia de un conjunto $B_1 \in Ba(X^{**}, w^*)$, tal que $X^{**} \setminus B_1$ es de medida nula y para cada $x^{**} \in B_1$, existe un punto $y \in f(\Omega)$ tal que $Sx^{**} = Sy$, lo cual implica que $Tx^{**} = Ty$ y $x_0^*(x^{**}) = x_0^*(y)$. Si además $x^{**} \in B_0$, tenemos entonces $y = h(x^{**})$ y $x_0^*(x^{**}) = x_0^*(y)$, así que hemos probado $x_0^* \circ h(x^{**}) = x_0^*(x^{**})$ para cada $x^{**} \in B_0 \cap B_1$. Como $X^{**} \setminus (B_1 \cap B_0)$ es de medida nula para μ_F, esto acaba la prueba. □

La siguiente proposición es un resultado de Edgar [E], y también se puede encontrar en [T, 3-4-1]. Nosotros la probaremos usando la proposición anterior.

Proposición 2.3.8. *Sea F una medida vectorial X-valorada de variación finita. Entonces F tiene una derivada Bochner si y sólo si existe un subespacio separable H de X tal que $\mu_F{}^*(H) = \|F\|$.*

DEMOSTRACIÓN. Una derivada Bochner toma valores esencialmente en un subespacio separable. Entonces si F es derivable Bochner existe un subespacio separable H de X y una función $f: \Omega \to H$ que puede ser usada para definir μ_F como la medida imagen de $|F|$ mediante f, y $\mu_F{}^*(H) = \|F\|$.

Para la implicación contraria, observar como en la prueba de la Proposición 2.3.5, que si H tiene medida exterior para μ_F la medida del conjunto total, podemos definir una medida positiva ν en $Ba(H, w)$ tal que la identidad en H sea Pettis integrable con respecto a ν y su integral indefinida genere el zonoide $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F)$. Como H es separable tenemos que $Ba(H, w)$ es la σ-álgebra de conjuntos de Borel para la topología de la norma en H [T, 2-2-5] y como H es un espacio Polaco, ν es una medida de Radon, y por tanto perfecta.

Evidentemente existe una sucesión en X^* que separa los puntos de H, y podemos usar la Proposición 2.3.7 para obtener que F tiene una derivada Pettis f. Más aún, en la prueba de esta Proposición se puede ver que podemos encontrar f que tome valores en H. Como f es débilmente medible y con valores en un espacio separable, por el Teorema de Pettis es fuertemente medible, y su integral indefinida F tiene variación acotada; entonces f es Bochner integrable. $\square$

Como una consecuencia de la última afirmación en la Proposición 2.3.3 y el último resultado obtenemos una nueva prueba de que la diferenciabilidad Bochner está determinada por el rango, pues la condición ${\mu_F}^*(H) = \|F\|$ es invariante si cambiamos μ_F por su simetrizada ya que H es un conjunto simétrico. Entonces tenemos

Corolario 2.3.9. *Si Fy G son dos medidas vectoriales X-valoradas tales que $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, G)$ sea un trasladado de $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, F)$, entonces F tiene una derivada Bochner si y sólo si G la tiene.*

Sección 4: Diferenciabilidad de la variación de una medida.

Sea $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ una medida vectorial de variación finita. Denotamos por $L^1(|F|, X^*)$ el espacio de Banach de funciones Bochner integrables con respecto a $|F|$ y con valores en X^*. Existe un único funcional lineal y continuo φ en $L^1(|F|, X^*)$, tal que para toda función simple $f = \sum_{i=1}^n x_i^* \chi_{A_i}$, donde cada $x_i^* \in X^*$ y $A_i \in \Sigma$, está definido por

$$\varphi(f) = \sum_{i=1}^n \langle x_i^*, F(A_i) \rangle.$$

La aditividad de F prueba que $\varphi(f)$ está bien definido. Escribiremos para $f \in$

$L^1(|F|, X^*)$

$$\varphi(f) = \int f dF$$

y se llamará *integral en el sentido de Dinculeanu de f con respecto a F*. Es fácil comprobar a partir de la definición que

$$|\int f dF| \leq \int ||f|| d|F|.$$

C. Debieve consideró el problema de representar la variación de F como una integral en el sentido de Dinculeanu con respecto a F, es decir, si existe f integrable en el sentido de Dinculeanu tal que

$$|F|(A) = \int_A f\, dF \text{ para todo } A \in \Sigma.$$

Este problema fue resuelto de manera positiva en [D] donde en concreto se probó el siguiente resultado:

Teorema 2.4.1. *Si $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ es una medida vectorial de variación finita y $\varepsilon > 0$, existe una función $f : \Omega \longrightarrow X^*$ integrable en el sentido de Dinculeanu, tal que $1 \leq ||f|| \leq 1 + \varepsilon$ y $|F|(A) = \int_A f dF$ para todo $A \in \Sigma$.*

En [J] L. Janicka probó que no siempre es posible elegir $||f|| = 1$ $|F|$- e.c.t.. Así podemos definir la siguiente propiedad para una medida vectorial:

Definición 2.4.2. *Se dice que $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ de variación finita tiene la propiedad (D) si existe $f : \Omega \longrightarrow X^*$ que es integrable en el sentido de Dinculeanu, $||f|| = 1$ $|F|$-e.c.t. y*

$$|F|(A) = \int_A f\, dF, \text{ para todo } A \in \Sigma.$$

Hay medidas de variación acotada que no tienen la propiedad (D). El siguiente ejemplo puede encontrarse en [J]; lo incluimos para una mayor comprensión de lo que sigue.

Ejemplo 2.4.3. *Una medida vectorial con valores en c_0 que no tiene la propiedad (D).*

Consideremos $\{r_n\}_n$ la sucesión de funciones de Rademacher en $[0,1]$ y m la medida de Lebesgue en este intervalo. Sea Σ la σ-álgebra de medibles Lebesgue en $[0,1]$. Para cada $A \in \Sigma$ sea

$$F(A) = \Big(\int_A \frac{n}{n+1} r_n(t) dm(t) \Big)_n .$$

Entonces es fácil comprobar que F es una medida vectorial valorada en c_0 y debido a que

$$\sup_n \Big| \frac{n}{n+1} r_n(t) \Big| = 1 \ m\text{-e.c.t.},$$

se tiene que $|F| = m$. Supongamos que existe una función medible $f(t) = (f_n(t))_n$, $f : [0,1] \longrightarrow \ell_1$ tal que $\|f(t)\| = 1$ m-e.c.t. y $|F|(A) = \int_A f dF$ para cada conjunto medible A. Entonces

$$|F|(A) = \int_A \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \frac{n}{n+1} r_n(t) \Big) dm(t).$$

Tomando $A = [0,1]$, deberíamos tener

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \frac{n}{n+1} r_n(t) \quad m\text{-e.c.t.}$$

pero esto es imposible debido a que

$$f_n(t) \frac{n}{n+1} r_n(t) \leq \Big| f_n(t) \frac{n}{n+1} r_n(t) \Big| < |f_n(t)|.$$

L. Janicka y F. Delbaen dieron una caracterización en [DJ] de las medidas con valores en c_0 y ℓ_1 que tienen la propiedad (D). De esta caracterización para

ℓ_1 se deduce fácilmente que esto no depende más que del rango de la medida vectorial, es decir, F valorada en ℓ_1 tiene la propiedad (D) si y sólo si su rango es de la forma

$$\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F) = \sum_{j=1}^{\infty} K_j$$

donde para todo $x, x' \in K_j$, $e_n^*(x) \cdot e_n^*(x') \geq 0$ siendo e_n^* la n-ésima coordenada en ℓ_∞. Este hecho sugiere que la propiedad (D) está determinada por el rango de la medida vectorial. En el siguiente resultado damos una condición equivalente a que una medida vectorial tenga esta propiedad en función de la medida cónica asociada, la cual nos responderá a la cuestión mencionada.

Recordemos que para una medida cónica u se define la variación de u como

$$\|u\| = \sup_{\{x_i^*\}_{i=1}^n \subseteq B_{X^*}} u\Big(\bigvee_{i=1}^{n} |x_i^*|\Big).$$

Teorema 2.4.4. *Sea $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ una medida vectorial de variación finita y $f_{x^*} = \frac{d(x^*F)}{d|F|}$ para cada $x^* \in X^*$. Son equivalentes:*

(A) F tiene la propiedad (D).

(B) Para todo conjunto medible B con $|F|(B) > 0$ existe A medible, $A \subseteq B$ tal que $|F|(A) > 0$ y un compacto $K \subseteq B_{X^*}$ tal que, tomando supremo en el retículo $L^1(|F|)$,

$$\sup_{x^* \in K} |f_{x^*}| = 1 \qquad |F|\text{-e.c.t. en } A.$$

(C) Para toda medida cónica $v \leq u_F$ tal que $\|v\| > 0$, existe una medida cónica $w \leq v$, $\|w\| > 0$, un compacto $K \subseteq B_{X^*}$ y una sucesión z_n^* en $h(X)$ con $z_n^* = \bigvee_{i=1}^{N(n)} |x_{i,n}^*|$ donde $x_{i,n}^* \in K$ y

$$\lim_n w(z_n^*) = \|w\|.$$

DEMOSTRACIÓN. (B)$\Rightarrow$(A) Usando el Lema de Exhaución, basta probar que para todo $B \in \Sigma$, con $|F|(B) > 0$, existe un conjunto medible $A \subseteq B$, $|F|(A) > 0$ y $\chi_A F$ verifica la propiedad (D). Por hipótesis, existe un conjunto medible $A \subseteq B$ tal que cumple para un subconjunto compacto K de B_{X^*}

$$\sup_{x^* \in K} |f_{x^*}| = 1 \qquad |F|\text{-e.c.t. en } A.$$

Como $K \cup (-K)$ es un compacto, existe un conjunto finito I_1 y K_i^1 compactos en B_{X^*} tales que $K \cup (-K) = \bigcup_{i \in I_1} K_i^1$ y $\operatorname{diam}(K_i^1) \leq \frac{1}{2}$ (tomando $K_i^1 = (K \cup (-K)) \cap \overline{B}(x_i^*, \frac{1}{4})$ para unos x_i^* adecuados). Consideremos $\{A_i^1\}_{i \in I_1}$ una partición finita de A tal que

$$\sup_{x^* \in K_i^1} f_{x^*} = 1 \qquad |F|\text{-e.c.t. en } A_i^1.$$

Como $\operatorname{diam}(K_i^1) < \frac{1}{2}$, se tiene que para todo $x^*, y^* \in K_i^1$, $\|f_{x^*} - f_{y^*}\|_\infty \leq \frac{1}{2}$ y por tanto, $f_{x^*} \geq \frac{1}{2}$ $|F|$-e.c.t. en A_i^1. Sea $x_{i,1}^* \in K_i^1$ cualquiera. Definimos f_1 por

$$f_1 = \sum_{i \in I_1} x_{i,1}^* \chi_{A_i^1}.$$

Para todo $E \subseteq A$,

$$\begin{aligned}\int_E f_1 dF = \int_E \Big(\sum_{i \in I_1} \chi_{A_i^1} x_{i,1}^*\Big) dF &= \sum_{i \in I_1} \int_{E \cap A_i^1} f_{x_{i,1}^*} d|F| \\ &\geq \Big(1 - \frac{1}{2}\Big)|F|(E).\end{aligned}$$

Supongamos construida la función f_k tal que $f_k = \sum_{i \in I_k} x_{i,k}^* \chi_{A_i^k}$ con $x_{i,k}^* \in K_i^k$ un subconjunto compacto de B_{X^*}, $\operatorname{diam}(K_i^k) < \frac{1}{2^k}$ y tal que

$$\sup_{x^* \in K_i^k} f_{x^*} = 1 \qquad |F|\text{-e.c.t. en } A_i^k.$$

Supongamos además que para todo $E \subseteq A$,

$$\int_E f_k dF \geq \Big(1 - \frac{1}{2^k}\Big)|F|(E).$$

Para todo $i \in I_k$, $K_i^k = \bigcup_{j \in I_i^k} K_j^{k+1}$ con $\operatorname{diam}(K_j^{k+1}) < \frac{1}{2^{k+1}}$ y una partición $\{A_j^{k+1}\}_{j \in I_i^k}$ de cada A_i^k tal que

$$\sup_{x^* \in K_j^{k+1}} f_{x^*} = 1 \quad |F|\text{-e.c.t. en } A_j^{k+1}.$$

Sea $I_{k+1} = \bigcup_{i \in I_k} I_i^k$. Para todo $x^* \in K_i^{k+1}$, se tiene que $f_{x^*} \geq 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$. Sea $x_{j,k+1}^* \in K_j^{k+1}$ cualquiera y definimos f_{k+1} por

$$f_{k+1} = \sum_{j \in I_{k+1}} x_{j,k+1}^* \chi_{A_j^{k+1}}$$

Para todo $E \subseteq A$, se puede probar de la misma forma que

$$\int_E f_{k+1} dF \geq (1 - \frac{1}{2^{k+1}})|F|(E).$$

Hemos construido una sucesión $\{f_k\}_k$ de funciones en $L^1(|F|, X^*)$ que verifica $||f_k - f_{k+1}||_\infty \leq \frac{1}{2^k}$ debido a que $\operatorname{diam}(K_i^k) < \frac{1}{2^k}$. Entonces existe una función $f \in L^1(|F|, X^*)$ valorada en B_{X^*} y tal que $f = \lim_k f_k$. Para todo $E \subseteq A$,

$$\int_E f dF \geq |F|(E).$$

Como $||f|| \leq 1$ $|F|$-e.c.t., se obtiene que para todo $E \in \Sigma$, $E \subseteq A$,

$$\int_E f dF = |F|(E).$$

Por tanto, F tiene la propiedad (D) en A.

(A)$\Rightarrow$(B) Supongamos F tiene la propiedad (D). Entonces existe una función $f \in L^1(|F|, X^*)$, $||f|| = 1$ $|F|$-e.c.t. tal que para todo $A \in \Sigma$,

$$|F|(A) = \int_A f\, dF.$$

Para todo $\delta > 0$ existe un conjunto medible A_δ tal que $|F|(\Omega \backslash A_\delta) < \delta$ y $\operatorname{rg}(\chi_{A_\delta} f)$ es un subconjunto relativamente compacto de B_{X^*}. Escribimos entonces $K_\delta =$

$\overline{\mathrm{rg}(\chi_{A_\delta} f)}$. Si $\sup_{x^* \in K_\delta} |f_{x^*}| \neq 1$ en A_δ, entonces existe $\varepsilon > 0$ y un subconjunto medible B de A_δ tal que $|F|(B) > 0$ y

$$\sup_{x^* \in K_\delta} |f_{x^*}| \leq 1 - \varepsilon \quad |F|\text{-e.c.t. en } B.$$

La medibilidad de $\chi_B f$ permite construir una sucesión $\{f_n\}_n$ de funciones simples y valoradas en K_δ que converge uniformemente a $\chi_B f$. Sea

$$f_n = \sum_{i=1}^{J(n)} x^*_{n,i} \chi_{A_i^n}$$

con $\{A_i^n\}_{i=1}^{J(n)}$ una partición de B. Como

$$\left| \int_B (f_n - f) dF \right| \leq \int_B \|f_n - f\| d|F|$$

se tiene que

$$\lim_n \int_B f_n dF = \int_B f dF = |F|(B).$$

Hay que observar que

$$\int_B f_n dF = \int_B \sum_{i=1}^{J(n)} x^*_{n,i} \chi_{A_i^n} dF$$
$$= \sum_{i=1}^{J(n)} x^*_{n,i} \int_B \chi_{A_i^n} dF = \sum_{i=1}^{J(n)} \int_B f_{x^*_{n,i}} \chi_{A_i^n} \leq (1-\varepsilon)|F|(B)$$

y esto es una contradicción.

(B)$\Rightarrow$(C) Usando el Lema de Exhaución existe una sucesión de compactos $K_n \subseteq B_{X^*}$ y una sucesión de conjuntos medibles $\{A_n\}_n$ tal que $|F|(\Omega \setminus \bigcup_n A_n) = 0$ y

$$\sup_{x^* \in K_n} |f_{x^*}| = 1, \quad |F| \text{-e.c.t. en } A_n.$$

Supongamos que v es una medida cónica en las condiciones de (C). Entonces existe una función medible $\varphi : \Omega \longrightarrow [0,1]$ tal que $v = u_{\varphi F}$. Como $\|v\| =$

$|\varphi F|(\Omega) > 0$, existe n tal que $|\varphi F|(A_n) > 0$. Sea $B = \{\omega \in \Omega : \varphi(\omega) \neq 0\}$. Para cada $x^* \in X^*$ sea $g_{x^*} = \frac{dx^*(\varphi F)}{d|\varphi F|}$. Entonces $g_{x^*} = \chi_B f_{x^*}$. Por tanto,

$$\sup_{x^* \in K_n} |g_{x^*}| = 1, \quad |\varphi F| \text{ -e.c.t. en } A_n.$$

Si $\{x_n^*\}$ es una sucesión densa en K, tomando $g_n = \bigvee_{i=1}^n |g_{x_n^*}|$, se tiene

$$\lim_n g_n = 1 \quad |\varphi F| \text{-e.c.t. en } A_n.$$

Sea $\psi = \varphi \chi_{A_n}$ y $w = u_{\psi F}$. Está claro que w verifica (C).

(C)$\Rightarrow$(B) Sea $B \in \Sigma$ tal que $|F|(B) > 0$. Sea $v = u_{\chi_B F}$. Entonces $\|v\| = |F|(B) > 0$. De acuerdo con (C), existe $w \leq v$ tal que $\|w\| > 0$, un compacto $K \subseteq B_{X^*}$ y una sucesión z_n^* en $h(X)$ con $z_n^* = \bigvee_{i=1}^{N(n)} |x_{i,n}^*|$ donde $x_{i,n}^* \in K$ y

$$\lim_n w(z_n^*) = \|w\|.$$

Como $w \leq u_{\chi_B F}$ existe una función medible φ en Ω tal que $\varphi \leq \chi_B$ y $w = u_{\varphi F}$. Igual que en la implicación anterior, se prueba que si $A = \{\omega \in \Omega : \varphi(\omega) \neq 0\}$, entonces $\sup_{x^* \in K} f_{x^*} = 1$ $|F|$-e.c.t. en A. □

Corolario 2.4.5. *Sean F y G dos medidas vectoriales tales que $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, F)$ es un trasladado de $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, G)$. Entonces F verifica la propiedad (D) si y sólo si G la verifica.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos que la condición (C) del teorema anterior es invariante por simetrización. Supongamos que se tiene (C) para la medida cónica u_F. Sea $v \in M^+(X)$, $v \leq u_F^s$ y $\|v\| > 0$. Entonces $v = \frac{v_1}{2} + \frac{v_2}{2}$ donde $v_1 \leq u_F$ y $v_2 \leq \check{u}_F$. O bien $\|v_1\| > 0$, o bien $\|v_2\| > 0$. Si es $\|v_1\| > 0$, entonces existe $w \leq v_1$, un compacto $K \subseteq B_{X^*}$ y una sucesión z_n^* en $h(X)$ tal que $z_n^* = \bigvee_{i=1}^{N(n)} |x_{i,n}^*|$ donde $x_{i,n}^* \in K$ y

$$\lim_n w(z_n^*) = \|w\|.$$

Sólo hay que observar que $w^s \leq u_F^s$ y

$$\lim_n w^s(z_n^*) = \lim_n w(z_n^*) = \|w\| = \|w^s\|.$$

Si es $\|v_2\| > 0$, observemos que entonces $\breve{v}_2 \leq u$ y el razonamiento es análogo con $\breve{v}_2$. Por tanto, u_F^s verifica (C).

Recíprocamente, supongamos que u_F^s verifica la condición (C) del Teorema anterior. Entonces si $v \leq u_F$ es $\|v\| > 0$, entonces $\frac{1}{2}v \leq u_F^s$ y existen una medida cónica $w \leq \frac{1}{2}v \leq v$, un compacto $K \subseteq B_{X^*}$ y una sucesión z_n^* en $h(X)$ tal que $z_n^* = \bigvee_{i=1}^{N(n)} |x_{i,n}^*|$ donde $x_{i,n}^* \in K$ y

$$\lim_n w(z_n^*) = \|w\| > 0.$$

Esto prueba que u_F satisface (C). □

Del último Corolario y el Teorema 2.4.4 es fácil deducir lo siguiente:

Corolario 2.4.6. *Sea F una medida vectorial X-valorada tal que tenemos $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, F) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}}(\text{rg}\, F_n)$; siendo F_n una sucesión de medidas vectoriales que verifica nla propiedad (D). Entonces F verifica la propiedad (D).*

Generalizamos ahora el resultado de L. Janicka y F. Delbaen para caracterizar las medidas valoradas en $L^1(\mu)$ que tienen la propiedad (D) en función de su rango.

Teorema 2.4.7. *Una medida vectorial $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow L^1(S, \Delta, \mu)$ verifica la propiedad (D) si y sólo si $Z = \overline{\text{co}}(\text{rg}\, F)$ se puede escribir de la forma*

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n$$

donde Z_n son zonoides en $L^1(\mu)$ y para todo n existe una partición de S, $\{A_n, B_n\}$, tal que si $g \in Z_n$, $g \geq 0$ en A_n y $g \leq 0$ en B_n.

DEMOSTRACIÓN. Probaremos en primer lugar la suficiencia de esta condición. Usando el Corolario 2.4.6, nos reducimos al caso en que existe una partición $\{A, B\}$ de S tal que $F(E)$ es positiva en A y negativa en B. Sea x^* en $L^\infty(\mu)$ $x^* = \chi_A - \chi_B$. Para todo $E \in \Sigma$ se tiene $\langle x^*, F(E)\rangle = \|F(E)\|$. Luego si $f : \Omega \longrightarrow L^\infty(\mu)$ vale constantemente x^* se deduce

$$\int_E f\,dF = \|F(E)\|,$$

para todo $E \in \Sigma$, y por tanto, también

$$\int_E f\,dF = |F|(E), .$$

Esto es, F verifica la propiedad (D).

Supongamos ahora que $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow L^1(S, \Delta, \mu)$ verifica la propiedad (D). Usando el Lema de Exhaución y el Teorema 2.4.4, $Z = \sum_{n=1}^\infty Z_n$ donde cada $Z_n = \overline{\text{co}}(\text{rg}\,\chi_{A_n} F)$ y

$$\sup_{x^* \in K_n} |f_{x^*}| = 1, \quad |F| \text{ -e.c.t. en } A_n \tag{1}$$

y $\operatorname{diam}(K_n) \leq \frac{1}{3}$ para cada n natural. Podemos suponer entonces, tomando χ_{A_n} por F, que F verifica (1) $|F|$-e.c.t. para cierto compacto K en $B_{L^\infty(\mu)}$ con $\operatorname{diam}(K) \leq \frac{1}{3}$. Existe, siguiendo la prueba del Teorema 2.4.4, una función $f \in L^1(|F|, L^\infty(\mu))$ tal que $\|f\| = 1$ $|F|$-e.c.t., valorada en K y para todo $E \in \Sigma$,

$$|F|(E) = \int_E f dF.$$

Sea $g_0 \in L^\infty(\mu)$, $g_0 \in f(\Omega)$. Consideremos los conjuntos $A_1 = \{s \in S : g_0(s) \geq \frac{1}{2}\}$, $A_2 = \{s \in S : -\frac{1}{2} \geq g_0(s)\}$ y $A_3 = \{s \in S : -\frac{1}{2} < g_0(s) < \frac{1}{2}\}$. Hay que observar que si $g \in K$ entonces $g \geq \frac{1}{6}$ en A_1, $|g| \leq \frac{5}{6}$ en A_3 y $g \leq -\frac{1}{6}$ en A_2 puesto que $\operatorname{diam}(K) \leq \frac{1}{3}$.

Sea $P_i : L^1(\mu) \longrightarrow L^1(\mu)$ la proyección definida por $P_i(\varphi) = \chi_{A_i}\varphi$; y F_i la medida vectorial definida en un conjunto $E \in \Sigma$ por $F_i(E) = P_i F(E)$, para

$i = 1, 2, 3$. Es fácil probar que $|F| = |F_1| + |F_2| + |F_3|$. Para todo $E \in \Sigma$,

$$|F|(E) = \sum_{i=1}^{3} |F_i|(E) = \sum_{i=1}^{3} \int_E f dF_i = \sum_{i=1}^{3} \int_E P_i^* f dF_i.$$

Como $\int_E P_i^* f dF_i \leq |F_i|(E)$, se tiene necesariamente $\int_E P_i^* f dF_i = |F_i|(E)$, para $i = 1, 2, 3$. Pero $||P_3^* g_0|| \leq \frac{1}{2}$ implica que $||P_3^* g|| \leq \frac{5}{6} < 1$ para todo $g \in K$, y por tanto, debe ser $|F_3| = 0$. Podemos suponer que $f(\omega)(s) \geq \frac{1}{6}$ en A_1; $f(\omega)(s) \leq -\frac{1}{6}$ en A_2 y $A_2 = A_1^c$.

En estas condiciones, probamos que para todo $E \in \Sigma$, $F_1(E) \geq 0$ μ-e.c.t. en A_1. Si esto no fuera cierto, un argumento similar al anterior muestra que sin pérdida de generalidad se puede suponer que para cierto $B \in \Sigma$, $F_1(B) \leq 0$ en S, ya que si no es así se toma $F_1' = PF_1$ siendo $P(\varphi) = \chi_A \varphi$ con $A = \{s \in S : F_1(B)(s) < 0\}$. Sea h una función simple valorada en K tal que $\frac{1}{2}|F_1|(B) < \int_B h dF_1$. Sea $\{B_k\}_{k=1}^p$ una partición de B tal que h es constante en cada conjunto B_k. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_B h dF_1 =& \sum_{k=1}^{p} \langle x_k^*, F_1(B_k) \rangle = \sum_{k=1}^{p} \langle x_k^*, F_1(B_k)^+ \rangle - \sum_{k=1}^{p} \langle x_k^*, F_1(B_k)^- \rangle \\
\leq& \sum_{k=1}^{p} \int F_1(B_k)^+ d\mu - \int \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} F_1(B_k)^- d\mu \\
=& \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} \int F_1(B_k)^+ d\mu + \frac{1}{2} \int F_1(B) d\mu \\
\leq& \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} ||F_1(B_k)|| \leq \frac{1}{2} |F_1|(B).
\end{aligned}$$

Esto supone una contradicción y por tanto, $F(B) \geq 0$ en A_1. Del mismo modo, se prueba que $F(B) \leq 0$ en A_2. $\square$

Para terminar esta sección veamos que el hecho que una medida vectorial F tenga la propiedad (D) depende del espacio ambiente. Si F es una medida X-valorada que tiene la propiedad (D) y Y es un subespacio cerrado tal que

$\operatorname{rg} F \subseteq Y$, entonces también tiene la propiedad (D) cuando lo consideramos Y-valorada; (basta considerar $Q \circ F$ donde $Q : X^* \longrightarrow Y^*$ es el operador cociente natural y $f : \Omega \longrightarrow B_{X^*}$ es una derivada de Dinculeanu de $|F|$ con respecto a F). Sin embargo, el recíproco no es cierto como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4.8. *Una medida vectorial F valorada en ℓ_2^2 con la propiedad (D) pero que no tiene la propiedad (D) si la consideramos valorada en $\mathcal{C}(B_{\ell_2^2})$.*

Consideremos la función $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Sea F la medida con densidad f con respecto a la medida de Lebesgue en $[0, 2\pi]$. Puesto que $\|f\|_2 = 1$, para todo $t \in [0, 2\pi]$, se tiene $|F| = m$. F tiene la propiedad (D) como cualquier medida con rango finito dimensional. De hecho, haciendo la identificación natural de ℓ_2^2 con su dual y tomando $g : [0, 2\pi] \to (\ell_2^2)^*$ la misma función f, se tiene para cada $A \subseteq [0, 2\pi]$ medible,

$$m(A) = \int_A \langle f(t), g(t) \rangle \, dt = \int_A g \, dF.$$

Esta misma identificación del dual de ℓ_2^2 permite considerar ℓ_2^2 como un subespacio de $X = \mathcal{C}(B_{\ell_2^2})$. F no tiene la propiedad (D) en X. Sea $h : [0, 2\pi] \to B_{X^*}$ Bochner integrable; se tiene

$$\int h \, dF = \int_0^{2\pi} \langle h(t), f(t) \rangle dm.$$

Como $|\langle h(t), f(t) \rangle| \leq 1$, si queremos $\int h \, dF = 2\pi$ se ha de tener necesariamente $\langle h(t), f(t) \rangle = 1$ e.c.t.. Esto implica que $h(t) = \delta_{f(t)}$ e.c.t. y h no sería fuertemente medible al no tener rango esencialmente separable.

CAPÍTULO 3: Descomposición de rangos de medidas y paralelepípedos.

Un problema general en la teoría de cuerpos convexos (conjuntos con interior no vacío, compactos y convexos en $\mathbb{R}^n$) es el estudio de las descomposiciones en sumandos a las que éstos dan lugar. Nosotros vamos a estudiar este problema en el contexto de zonoides en un espacio de Banach y generalizaremos un resultado de A. Neyman sobre descomposición de zonoides en $\mathbb{R}^n$ a zonoides en un espacio de Banach.

Hemos visto en el capítulo anterior que todo zonoide es el zonoformo asociado a una medida cónica. Sin embargo, un zonoide puede ser el zonoformo asociado a dos medidas cónicas distintas. La mayor parte de este capítulo estará dedicada al estudio de aquellos zonoides que determinan unívocamente la medida cónica asociada y a estudiar su relación con las descomposiciones de zonoides.

Sección 1: Descomposición de zonoides y zonoides definidos.

Recordemos que un subconjunto de un espacio de Banach es un zonoide si coincide con la envoltura convexa y cerrada del rango de una medida vectorial. Es fácil probar que la suma de Minkowski de zonoides es de nuevo un zonoide. Supongamos que Z_1 y Z_2 son zonoides generados por las medidas vectoriales F_1 y F_2, respectivamente. Basta considerar la medida F definida en la unión disjunta de los espacios de medida donde están definidas F_1 y F_2 y cuya restricción a cada uno de ellos coincida con la correspondiente F_j. Es claro que F genera $Z = Z_1 + Z_2$.

Dado un zonoide Z generado por la medida vectorial F, estamos interesados fundamentalmente en estudiar la relación entre F y las descomposiciones en sumandos a las que da lugar Z . Las descomposiciones más naturales aparecen al restringir la medida a un subconjunto medible E y a su complementario, E^c; es decir,

$$Z = \overline{\text{co}}\{F(A) : A \subseteq E,\ A \text{ medible}\} + \overline{\text{co}}\{F(A) : A \subseteq E^c,\ A \text{ medible}\} \qquad (1).$$

Otro tipo de descomposiciones que surgen de manera natural son las de la forma

$$Z = \overline{\text{co}}(\text{rg}\,\varphi F) + \overline{\text{co}}(\text{rg}(1-\varphi)F) \qquad (2)$$

para una función medible $0 \leq \varphi \leq 1$.

Una *descomposición en zonoides* de Z es una representación de Z como $Z = Z_1 + Z_2$ donde Z_i son zonoides para $i = 1, 2$. En este caso, decimos que cada Z_i es un *zonoide sumando* de Z. Hay que observar que $Z = Z_1 + L$ para Z y Z_1 zonoides no implica que L sea un zonoide. Para ello, usamos una construcción de R. Schneider (ver [Sc2]) donde se da un ejemplo de un cuerpo convexo y simétrico L en $\mathbb{R}^3$ que no es un zonoide cuyo funcional soporte viene dado por

$$h_L(x) = \sup_{y \in L} |\langle x, y \rangle| = \int |\langle x, y \rangle| d\mu(y) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^3,$$

donde μ es una medida signada en la esfera $\mathbb{S}^2$. Es claro que si $\mu = \mu^+ - \mu^-$ es la descomposición de Jordan de μ, Z el zonoide de momentos asociado a μ^+ y Z_1 el asociado a μ^-, entonces $Z = Z_1 + L$.

Si $Z = \text{rg}\,F$, $Z = Z_1 + Z_2$ es una *descomposición en zonoides con respecto a* F si existe un conjunto medible A tal que $Z_1 = \text{rg}\,\chi_A F$ y $Z_2 = \text{rg}\,\chi_{A^c} F$. En el caso que $Z = \operatorname{rg} F$, no es cierto que toda descomposición en zonoides de Z sea una descomposición con respecto a F. En general, no siempre es posible expresar una descomposición en zonoides en la forma (2) ni siquiera para una función con valores reales φ (Ejemplo 3.1.4). Este problema fue estudiado en [Ro2], cuyo resultado en esta dirección es el Teorema 1.3.7 que redemostramos en el Capítulo 1, viendo que salvo traslaciones, sí es posible expresar toda descomposición en zonoides de esta forma: si $Z = \overline{\mathrm{co}}(\operatorname{rg} F) = Z_1 + Z_2$ es una descomposición en zonoides de Z, existe una función medible $\varphi : \Omega \longrightarrow [0,1]$, tal que Z_1 es un trasladado de $\overline{\mathrm{co}}(\operatorname{rg} \varphi F)$ y Z_2 es un trasladado de $\overline{\mathrm{co}}(\operatorname{rg}(1-\varphi)F)$.

Un intervalo en $L^\infty(\lambda)$ es un subconjunto de la forma

$$H = \{\varphi \in L^\infty(\lambda) : \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\}$$

donde $\varphi_i \in L^\infty(\lambda)$ son fijos para $i = 1, 2$. Lo denotaremos por $[\varphi_1, \varphi_2]$. Es un subconjunto débil*-compacto y convexo de $L^\infty(\lambda)$. Para nuestros propósitos es conveniente usar la siguiente caracterización de zonoides y de descomposiciones de zonoides en términos de intervalos en $L^\infty(\lambda)$.

Proposición 3.1.1. *Z es un zonoide si y sólo si existe una medida positiva y finita λ, un intervalo H en $L^\infty(\lambda)$ que contiene la función 0 y un operador débil*-débil continuo $T : L^\infty(\lambda) \longrightarrow X$ tal que $Z = T(H)$. En este caso, $Z = Z_1 + Z_2$ es una descomposición en zonoides de Z si y sólo si $Z_1 = T(H_1)$ y $Z_2 = T(H_2)$ donde H_i es un intervalo en $L^\infty(\lambda)$ que contiene a la función 0 para $i = 1, 2$ y $H_1 + H_2$ es un trasladado de H que satisface $Z = T(H_1 + H_2)$.*

DEMOSTRACIÓN. Está claro que si F es una medida vectorial que genera el zonoide Z y λ es una medida de control para F, entonces $Z = T_F[0,1]$ para T_F el operador integración. Recíprocamente, supongamos que

$$Z = T\{\varphi \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \lambda) : \psi' \leq \varphi \leq \psi\}$$

siendo ψ y ψ' dos funciones medibles tales que $\psi' \leq 0 \leq \psi$. Sean Ω' y Σ' copias de Ω y Σ, respectivamente. La medida vectorial $\tilde{F}$, definida en $(\Omega \sqcup \Omega', \Sigma \oplus \Sigma')$

mediante
$$\tilde{F}(A \sqcup A') = T(\chi_A \psi) + T(\chi_{A'} \psi'),$$
genera Z.

Supongamos que $Z = Z_1 + Z_2$ es una descomposición en zonoides de Z. Por el Teorema 1.3.7 aplicado a la medida $\tilde{F}$ definida arriba, existe una función medible $\varphi_0 : \Omega \sqcup \Omega' \longrightarrow [0,1]$ tal que Z_1 es un trasladado de $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, \varphi_0 \tilde{F})$ y Z_2 es un trasladado de $\overline{\text{co}}(\text{rg}(1-\varphi_0)\tilde{F})$. Podemos escribir $\varphi_0 = \phi_0 + \phi_0'$ siendo ϕ_0 una función con soporte contenido en Ω y ϕ_0' con soporte en Ω'. Es fácil probar que Z_1 es un trasladado de $T(I_1)$ para $I_1 = [\psi'\phi_0', \psi\phi_0]$ y Z_2 es un trasladado de $T(I_2)$ para $I_2 = [\psi'(1-\phi_0'), \psi(1-\phi_0)]$ y $I_1 + I_2 = H$. Entonces existen x_1 y x_2 tales que $Z_1 = x_1 + T(I_1)$ y $Z_2 = x_2 + T(I_2)$. Como Z_i contiene a 0, $x_i = T(-\varphi_i)$ para φ_i funciones medibles en I_i, $i = 1, 2$. Está claro que $Z_1 = T(H_1)$ y $Z_2 = T(H_2)$ con
$$H_1 = [\psi'\phi_0' - \varphi_1, \psi\phi_0 - \varphi_1] \quad \text{y} \quad H_2 = [\psi'(1-\phi_0') - \varphi_2, \psi(1-\phi_0) - \varphi_2].$$
El recíproco es obvio. □

Un problema relacionado con el estudio de las descomposiciones en zonoides a las que da lugar Z es el estudio del m-rango de descomposición de una medida, que definimos a continuación.

Definición 3.1.2. *Sea $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ una medida vectorial con valores en X. El m-rango de descomposición de F es el subconjunto de X^m definido por*
$$\mathcal{R}_m(F) = \Big\{ \Big(F(A_1), \ldots, F(A_m)\Big) : \bigcup_{i=1}^{m} A_i = \Omega, A_i \in \Sigma, A_i \cap A_j = \emptyset \text{ for } i \neq j \Big\}.$$

Observemos que si $Z = \text{rg}\, F$, debido a que el centro de simetría de Z es $x_0 = \frac{1}{2}F(\Omega)$, $\mathcal{R}_2(F) = \{(z, 2x_0 - z) : z \in Z\}$. Con esto, $\mathcal{R}_2(F)$ está determinado una vez conocido $\text{rg}\, F$. No ocurre así con $\mathcal{R}_m(F)$ para $m \geq 3$.

El próximo resultado es una generalización a dimensión infinita del Teorema 4 en [DWW].

Lema 3.1.3. *Sea F una medida vectorial y λ una medida de control para F. Entonces para cada $m \geq 1$, $\overline{\text{co}}(\mathcal{R}_m(F)) = \mathcal{H}_m(F)$ donde*

$$\mathcal{H}_m(F) = \Big\{ \Big(\int \varphi_1 dF, \ldots, \int \varphi_m dF \Big) : \varphi_i \in L^\infty(\lambda), \sum_{i=1}^{m} \varphi_i = 1, 0 \leq \varphi_i \leq 1 \Big\}.$$

Si además F satisface el Teorema de Liapunov para la topología débil, $\mathcal{R}_m(F) = \mathcal{H}_m(F)$ para todo $m \geq 1$.

DEMOSTRACIÓN. Probaremos la segunda afirmación primero. Supongamos que F satisface el Teorema de Liapunov para la topología débil y que el punto $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{H}_m(F)$. Como

$$\mathcal{L}_m = \Big\{ (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in (L^\infty(\lambda))^m : 0 \leq \varphi_i \leq 1, \sum_{i=1}^{m} \varphi_i = 1, (x_1, \ldots, x_m) =$$

$$\Big(\int \varphi_1 dF, \ldots, \int \varphi_m dF \Big) \Big\}$$

es un conjunto no vacío débil*−compacto y convexo en $(L^\infty(\lambda))^m$, tiene un punto extremal $(\varphi_1^0, \ldots, \varphi_m^0)$. Todo lo que tenemos que probar es que $\varphi_i^0 = \chi_{A_i}$ λ-e.c.t. para $i = 1, \ldots, m$ porque en este caso $\{A_1, \ldots, A_m\}$ sería λ-equivalente a una partición de Ω. Si esto no es cierto, existen $\varepsilon > 0$, $E_0 \in \Sigma$ con $\lambda(E_0) > 0$, φ_i^0 y φ_j^0 para $j \neq i$ tales que

$$0 \leq \varphi_i^0 \pm \varepsilon \chi_{E_0} \leq 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq \varphi_j^0 \pm \varepsilon \chi_{E_0} \leq 1.$$

Debido a que F satisface el Teorema de Liapunov para la topología débil por [DU, pg. 263], existe $\phi \in L^\infty(\lambda)$ que se anula fuera de E_0, $1 \geq \|\phi\|_\infty > 0$ y $\int_{E_0} \phi dF = 0$. Entonces $(\varphi_1, \ldots, \varphi_i + \varepsilon\chi_{E_0}\phi, \ldots, \varphi_j - \varepsilon\chi_{E_0}\phi, \ldots, \varphi_m)$ y $(\varphi_1, \ldots, \varphi_i - \varepsilon\chi_{E_0}\phi, \ldots, \varphi_j + \varepsilon\chi_{E_0}\phi, \ldots, \varphi_m)$ están en $\mathcal{L}_m$ y su punto medio es $(\varphi_1^0, \ldots, \varphi_m^0)$, lo que supone una contradicción con su extremalidad.

Supongamos ahora que F es una medida vectorial cualquiera. Para probar que $\overline{\text{co}}(\mathcal{R}_m(F)) = \mathcal{H}_m(F)$, observemos que $\mathcal{H}_m(F)$ es un conjunto débil-compacto y convexo en X^m, luego por el Teorema de Krein-Milman, coincide con la envoltura convexa y cerrada de sus puntos extremales. Es una consecuencia inmediata del Teorema de Krein-Milman y la débil*−débil continuidad de T_F que cualquier punto extremal en $\mathcal{H}_m(F)$ es la imagen de un punto extremal en

$$\Big\{(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in (L^\infty(\lambda))^m : 0 \leq \varphi_i \leq 1, \sum_{i=1}^{m} \varphi_i = 1\Big\}.$$

Un razonamiento análogo al anterior, incluso más sencillo, prueba que las imágenes de estos puntos extremales mediante el operador integración pertenecen a $\mathcal{R}_m(F)$ y esto finaliza la prueba. □

Dado un zonoide Z generado por la medida vectorial F y una descomposición en zonoides de él, $Z = Z_1 + Z_2$, hemos señalado que no siempre es posible encontrar una función medible $0 \leq \varphi \leq 1$ tal que esta descomposición en zonoides se escriba como en (2). Ni siquiera tiene que existir una medida F que genere Z y que esta descomposición se escriba como en (1). Vamos a estudiar aquellos zonoides para los cuales toda descomposición en zonoides se escribe como en (2). A. Neyman caracterizó geométricamente aquellos zonoides Z en $\mathbb{R}^n$ para los que toda descomposición se escribe de esta forma. Estos zonoides resultan ser aquellos que determinan unívocamente $\overline{\text{co}}(\mathcal{R}_m(F))$ para cualquier medida que los genere. Además dio una condición equivalente sobre la unicidad de la medida en la esfera que determina Z como zonoide de momentos.

En el capítulo anterior vimos que todo zonoide en $\mathbb{R}^n$ es el zonoide de momentos asociado a una medida positiva de Radon en la esfera. Sin embargo, un mismo zonoide puede ser el zonoide de momentos asociado a distintas medidas en la esfera. Aquellos zonoides Z en $\mathbb{R}^n$ que determinan unívocamente la medida μ para la que $Z = \overline{\text{co}}(\text{rg}\, M_\mu)$ se llaman zonoides definidos y fueron introducidos en [N1]. El siguiente ejemplo (ver [Ro2]) muestra un zonotopo que no es definido.

Ejemplo 3.1.4. *El hexágono no es un zonoide definido.*

Para simplificar la notación es conveniente identificar $\mathbb{R}^2$ con el plano complejo $\mathbb{C}$. Sea α la primera raíz cúbica de la unidad, es decir, $\alpha = \exp(2\pi i/3)$. Sea μ la medida en la esfera $\mathbb{S}^1$ concentrada en los puntos 1, α y α^2 y con masa 1 en cada uno de ellos. El zonoide de momentos Z asociado a esta medida es el hexágono regular inscrito en la circunferencia $\mathbb{S}^1$. Sea ν la medida en $\mathbb{S}^1$ concentrada en las raíces sextas de la unidad β^j para $j = 1, \ldots, 6$ y con masa $\frac{1}{2}$ en cada una de ellas (β primera raíz sexta de la unidad). Es fácil comprobar que ν también genera el mismo zonoide de momentos Z. Por tanto, no es un zonoide definido ya que $\mu \neq \nu$. Evidentemente, gracias al Teorema 1.3.1, $\mu^s = \nu^s$. Sean

$$Z_1 = \frac{\sqrt{3}i}{4} + \frac{1}{2}Z, \quad \text{y} \quad Z_2 = \frac{-\sqrt{3}i}{4} + \frac{1}{2}Z.$$

Se tiene que $Z = Z_1 + Z_2$ es una descomposición en zonoides de Z. Pero esta descomposición en zonoides $Z = Z_1 + Z_2$ no se puede expresar como en (2) con respecto a M_μ. Si Z_1 fuera de la forma $Z_1 = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, \varphi M_\mu)$, para alguna función medible en la esfera, $0 \leq \varphi \leq 1$, debería ser $\varphi(\alpha^2) = 0$ ya que Z_1 está contenido en el semiplano superior. Pero entonces Z_1 sería un paralelepípedo, lo cual es una contradicción.

La razón por la que el hexágono no es un zonoide definido queda de manifiesto en el siguiente resultado que es el resultado fundamental en [N1].

Teorema 3.1.5. *Sea Z un zonoide en $\mathbb{R}^n$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(A) Z es un zonoide definido.

(B) Existe una medida vectorial $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ no atómica tal que $\mathrm{rg}\, F = Z$ y toda descomposición en zonoides de Z es una descomposición con respecto a F.

(C) Para cualesquiera medidas vectoriales F y G no atómicas que generen Z, $\mathcal{R}_m(F) = \mathcal{R}_m(G)$ para todo $m \geq 1$.

(D) El conjunto extremal de Z que contiene a 0 en su interior relativo es un paralelepípedo.

Nuestro objetivo es generalizar este teorema a zonoides en espacios de Banach. Aparte de la condición geométrica (D), tropezamos con varios obstáculos. En primer lugar, el Teorema de Liapunov no se cumple en dimensión infinita. Pero esto no supone ningún problema debido a que según el Teorema 1.1.4 todo zonoide está generado por una medida cuyo rango es convexo compacto en la topología débil. En segundo lugar, tenemos que determinar qué entendemos por zonoide definido en un espacio de Banach X pues en general Z no es el zonoide de momentos asociado a una medida positiva. Con objeto de extender este concepto a un espacio de Banach, vamos a usar una vez más la medida cónica asociada a una medida vectorial que ya fue probada de gran utilidad en el capítulo anterior. Hemos visto que todo zonoide coincide con el zonoformo asociado a una medida cónica. Usamos este punto de vista para extender la definición de zonoide definido a un espacio de Banach. El rango de una medida vectorial no determina la medida cónica asociada, en general, ya que no la determina ni siquiera en dimensión finita la medida en la esfera que lo genera.

Definición 3.1.6. *Decimos que un zonoide Z en un espacio de Banach X es un **zonoide definido** si dadas dos medidas vectoriales F y G generando Z, las medidas cónicas asociadas coinciden; es decir, $u_F = u_G$.*

Como para cada medida cónica u tal que para toda medida cónica $v \leq u$, la resultante de v exista en X, existe una medida vectorial G tal que $u = u_G$, se tiene que Z es un zonoide definido si y sólo si hay una única medida cónica u tal que $K_u = Z$. En $\mathbb{R}^n$, debido a la biyección natural entre medidas cónicas y medidas positivas de Borel en $\mathbb{S}^{n-1}$, nuestra definición de zonoide definido coincide con la finito-dimensional dada en [N1].

Recordemos que un punto x_0 de un subconjunto K de un espacio de Banach X es un punto expuesto de K si existe $x_0^* \in X^*$ tal que $x_0^*(x_0) > x_0^*(x)$ para todo

$x \in K \setminus \{x_0\}$. Evidentemente, un punto expuesto de K es un punto extremal de K. Si F es una medida vectorial y Z es el zonoide que genera, los funcionales x^* que exponen a Z en algún punto son exactamente los funcionales de Rybakov para F (ver [DU, pg. 271]). Como consecuencia del Teorema 1.3.1, obtenemos el primer ejemplo de zonoides definidos, aquellos en los que 0 es un punto expuesto.

Lema 3.1.7. *Si F y G son dos medidas vectoriales con valores en un espacio de Banach X tales que 0 es un punto expuesto de $Z = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, G)$; entonces $u_F = u_G$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x_0^* \in X^*$ un funcional exponiendo Z en 0, es decir, para cada $x \in Z \setminus \{0\}$, $x_0^*(x) > 0$. Entonces x_0^* es un funcional de Rybakov, y de hecho tenemos que $F \ll |x_0^* F| = x_0^* F$. Tomemos $\lambda = x_0^* F$ como medida de control para F. Esto implica que $f_{x_0^*} = 1$ λ-e.c.t.. Sea $z^* \in h(X)$, $z^* \geq 0$. Vamos a probar que

$$u_F(z^*) = \lim_n 2u_F^s(z^* \wedge (nx_0^* \vee 0)) \qquad (3).$$

Para ver esto, observemos que el hecho $z^* \geq 0$ implica $f_{z^*} = \lim_n f_{z^*} \wedge (nf_{x_0^*} \vee 0)$ puntualmente, con lo que, por el Teorema de la convergencia monótona, $u_F(z^*) = \lim_n u_F\big(z^* \wedge (nx_0^* \vee 0)\big)$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \breve{u}_F\big(z^* \wedge (nx_0^* \vee 0)\big) &\leq \breve{u}_F(nx_0^* \vee 0) \\ &= u_F\big((nx_0^* \vee 0) \circ \sigma\big) = u_F(-nx_0^* \vee 0) = 0. \end{aligned}$$

Esto significa que

$$\begin{aligned} &\lim_n 2u_F^s\big(z^* \wedge (nx_0^* \vee 0)\big) \\ &= \lim_n u_F\big(z^* \wedge (nx_0^* \vee 0)\big) + \lim_n \breve{u}_F\big(z^* \wedge (nx_0^* \vee 0)\big) = u_F(z^*). \end{aligned}$$

Como $u_F^s = u_G^s$, y (3) también se tiene para G, $u_F(z^*) = u_G(z^*)$ para todo $z^* \geq 0$, con lo que $u_F = u_G$. □

Nota. Se podría haber dado una prueba del último resultado análoga a la del Teorema 1.3.6. Tomando $z^* \in h(X)$ tal que

$$z^* = \bigvee_{i=1}^{n} x_i^* - \bigvee_{i=n+1}^{m} x_i^*$$

$x_i^* \in X^*$ para $i = 1, \ldots, m$ y $x_0^* \in X^*$ un funcional que exponga a Z. Se consideran las medidas vectoriales $F_0 = (x_0^*, x_1^*, \cdots, x_m^*) \circ F$ y $G_0 = (x_0^*, x_1^*, \cdots, x_m^*) \circ G$ que satisfacen $Z_0 = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F_0) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, G_0)$, y 0 es un punto expuesto de Z_0 por el funcional y_0^* que es la primera coordenada en $\mathbb{R}^{n+1}$. Se puede probar que las correspondientes medidas en la esfera μ_{F_0} y μ_{G_0} tienen soporte contenido en $\{y \in \mathbb{R}^{m+1} : y_0^*(y) > 0\}$ y dado que $\mu_{F_0}^s = \mu_{G_0}^s$, se tiene $\mu_{F_0} = \mu_{G_0}$. De aquí se concluye de la misma forma que $u_F(z^*) = u_G(z^*)$.

Probaremos más tarde que la condición que 0 sea un punto extremal de Z implica que Z es un zonoide definido. Esto será el Corolario 3.1.11 que es estrictamente más fuerte que el resultado anterior debido a que existen zonoides con puntos extremales no expuestos.

Ejemplo 3.1.8. *Un zonoide con un punto extremal no expuesto.*

Como todo conjunto compacto y convexo con centro de simetría de $\mathbb{R}^2$ es un zonoide, basta considerar el círculo unidad C que contiene al 0 situado en el semiplano superior en $\mathbb{R}^2$ y el segmento $L = [0, \vec{x}_0]$ donde $\vec{x}_0 = (1, 0)$. El zonoide $Z = C + L$ tiene a 0 como punto extremal no expuesto.

En el teorema siguiente se establece la relación entre zonoides definidos, el m-rango de descomposición de una medida vectorial y las descomposiciones de zonoides. La prueba sigue los mismos pasos que la de el Teorema principal en [N1].

Teorema 3.1.9. *Sea Z un zonoide en un espacio de Banach X. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(A) Z es un zonoide definido.

(B) Existe una medida vectorial $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$, tal que $\mathrm{rg}\, F = Z$ y toda descomposición en zonoides de Z es una descomposición con respecto a F.

(B') Existe una medida vectorial $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ generando Z, tal que toda descomposición en zonoides de Z tiene la forma $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\,\varphi F) + \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}(1-\varphi)F)$ para alguna función medible φ, $0 \leq \varphi \leq 1$.

(B") Para cada medida vectorial $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ que genere Z, toda descomposición en zonoides de Z tiene la forma $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\,\varphi F) + \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}(1-\varphi)F)$ para alguna función medible φ, $0 \leq \varphi \leq 1$.

(C) Para cualesquiera medidas vectoriales F y G que generen Z, $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{R}_m(F)) = \overline{\mathrm{co}}(\mathcal{R}_m(G))$ para todo $m \geq 1$.

DEMOSTRACIÓN.

(A)$\Rightarrow$ (B") Sea Z un zonoide definido y F una medida vectorial definida en (Ω, Σ) generando Z. Sea $Z = Z_1 + Z_2$ una descomposición en zonoides de Z. Entonces $Z = K_{u_F} = K_{u_1} + K_{u_2} = K_{u_1+u_2}$ donde $Z_i = K_{u_i}$ y u_i es una medida cónica para $i = 1, 2$. Como Z es un zonoide definido, $u_F = u_1 + u_2$. Consecuentemente, $u_1 \leq u_F$ y por la Proposición 1.3.4 existe una función medible φ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ y $u_1 = u_{(\varphi F)}$; entonces $Z_1 = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\,\varphi F)$ y $Z_2 = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}(1-\varphi)F)$.

(B")$\Rightarrow$ (B') Es obvio.

(B')$\Rightarrow$(B) Sea $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ una medida vectorial que satisface (B') y m la medida de Lebesgue en $\mathcal{B}$ los conjuntos de Borel de $[0, 1]$. En la prueba de Teorema 1.1.4 se usa la medida vectorial $F \otimes m$ definida en $(\Omega \times [0, 1], \Sigma \otimes \mathcal{B})$ por

$$(F \otimes m)(E) = \int_\Omega m\{t \in [0, 1] : (\omega, t) \in E\} dF(\omega).$$

Entonces $F \otimes m$ satisface el Teorema de Liapunov para la topología débil y genera Z. Si $Z = Z_1 + Z_2$, entonces $Z_1 = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\,\varphi F)$ para alguna función medible $\varphi : \Omega \longrightarrow [0, 1]$. Si $E = \{(\omega, t) : \omega \in \Omega, 0 \leq t \leq \varphi(\omega)\}$, entonces E es un conjunto medible en $\Sigma \otimes \mathcal{B}$ y se prueba fácilmente que $\mathrm{rg}(\chi_E(F \otimes m)) = Z_1$.

Así $F \otimes m$ satisface (B).

(B)$\Rightarrow$ (A) Supongamos que $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ satisface (B). Sea G otra medida vectorial definida en (Ω', Σ') tal que $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, G) = Z$ y $x_0^* \in X^*$ un funcional de Rybakov para Z. Tomemos $\lambda = |x_0^* G|$ como medida de control para G, y $g_{x_0^*} = \frac{d(x_0^* G)}{d\lambda}$. Sean

$$A = \{\omega' \in \Omega' : g_{x_0^*}(\omega') = 1\} \quad \text{y} \quad B = \{\omega' \in \Omega' : g_{x_0^*}(\omega') = -1\}.$$

Como $G = \chi_A G + \chi_B G$, $u_G = u_{\chi_A G} + u_{\chi_B G}$. Entonces $Z = K_{u_F} = K_{u_G} = K_{u_{\chi_A G}} + K_{u_{\chi_B G}}$. Observemos que 0 es un punto expuesto de $K_{u_{\chi_A G}}$ pues para $C \subseteq A$, y $\lambda(C) > 0$, $x_0^* G(C) = \lambda(C)$. Por hipótesis, existe $P \in \Sigma$ tal que $K_{u_{\chi_A G}} = rg(\chi_P F)$ y $K_{u_{\chi_B G}} = rg(\chi_{P^c} F)$. Como 0 es un punto expuesto de $K_{u_{\chi_A G}}$, éste es un zonoide definido gracias al Lema 3.1.7 y $u_{\chi_A G} = u_{\chi_P F}$; se puede probar también que $u_{\chi_B G} = u_{\chi_{P^c} F}$. Esto implica que $u_F = u_G$, por lo que Z es un zonoide definido.

(A)$\Rightarrow$ (C) Supongamos que Z es un zonoide definido y que F y G son dos medidas vectoriales generando el zonoide Z definidas en (Ω, Σ) y (Ω', Σ'), respectivamente. Sean $(x_1, \ldots, x_m) \in \overline{\mathrm{co}}(\mathcal{R}_m(F))$ y $\{\psi_i\}_{i=1}^m$ funciones medibles en Ω tales que $0 \leq \psi_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^m \psi_i = 1$ y $T_F(\psi_i) = x_i$. Sea u_F la medida cónica asociada a F y $u_i = u_{\psi_i F}$, entonces $u_F = \sum_{i=1}^m u_i$. Como Z es un zonoide definido, $u_F = u_G$. Usando la Proposición 1.3.4 inductivamente, podemos encontrar funciones medibles φ_i definidas en Ω', $0 \leq \varphi_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^m \varphi_i = 1$, y $u_{\varphi_i G} = u_i$. Así $T_G(\varphi_i) = r(u_i) = x_i$ y esto implica que $(x_1, \ldots, x_m) \in \overline{\mathrm{co}}(\mathcal{R}_m(G))$.

(C)$\Rightarrow$ (A) Supongamos que Z no es un zonoide definido. Entonces existen dos medidas cónicas u_F y u_G asociadas a dos medidas vectoriales $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ y $G : (\Omega', \Sigma') \longrightarrow X$ tales que $K_{u_F} = K_{u_G} = Z$ pero $u_F \neq u_G$. Sea x_0^* un funcional de Rybakov para Z y

$$A = \{\omega : f_{x_0^*}(\omega) > 0\}, \quad B = \{\omega' : g_{x_0^*}(\omega') > 0\};$$

donde $f_{x_0^*} = \frac{d(x_0^* F)}{d\lambda_F}$ y $g_{x_0^*} = \frac{d(x_0^* G)}{d\lambda_G}$ para λ_F y λ_G medidas de control para F y G, respectivamente. Sea $\overline{u}_F = u_{\chi_A F}$ y $\overline{u}_G = u_{\chi_B G}$. Entonces x_0^* expone $K_{\overline{u}_F}$, $K_{\overline{u}_G}$, $K_{u_F - \overline{u}_F}$ y $K_{u_G - \overline{u}_G}$. Usando el Lema 3.1.7 si $u_F \neq u_G$, ó bien $K_{\overline{u}_F} \neq K_{\overline{u}_G}$ ó bien $K_{u_F - \overline{u}_F} \neq K_{u_G - \overline{u}_G}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $x \in K_{\overline{u}_F} \setminus K_{\overline{u}_G}$. Entonces $x = \int \varphi dF$ para una función medible que satisface $0 \leq \varphi \leq \chi_A$. Esto implica que $(x, F(A) - x, F(\Omega \setminus A)) \in \overline{\text{co}}(\mathcal{R}_3(F))$. Como $F(\Omega \setminus A)$ es un punto expuesto de Z, el hecho $\int \psi dG = F(\Omega \setminus A)$ para $0 \leq \psi \leq 1$ implica $\psi = \chi_{\Omega' \setminus B}$ λ_G-a.e.. Por hipótesis, $(x, F(A) - x, F(\Omega \setminus A)) \in \overline{\text{co}}(\mathcal{R}_3(G))$, pero esto forzaría a que $x = \int \psi dG$ con $0 \leq \psi \leq \chi_B$. Por tanto, $x \in K_{\overline{u}_G}$, lo que supone una contradicción. □

Observaciones.

(1) La condición (C) del último teorema es equivalente a que para cualesquiera medidas vectoriales F y G que generen Z y que satisfagan el Teorema de Liapunov para la topología débil, $\mathcal{R}_m(F) = \mathcal{R}_m(G)$ para todo $m \geq 1$. Siguiendo la prueba del Teorema 3.1.9 esta condición es de hecho equivalente a que $\mathcal{R}_3(F) = \mathcal{R}_3(G)$.

(2) Es fácil ver que la condición (B") es equivalente a la siguiente: Si $Z = T(H)$ para un intervalo H y una aplicación T como la de la Proposición 3.1.1, todo sumando zonoide Z' de Z se puede obtener como $Z' = T(H')$ donde H' es un intervalo que contiene a 0 y contenido en H. Efectivamente, esta condición implica la condición (B"). Recíprocamente, si se cumple la condición (B") y $Z = T(H)$ en las condiciones anteriores basta considerar la medida vectorial $\tilde{F}$ considerada en la Proposición 3.1.1 y aplicar (B"). Así, siguiendo la prueba de esta proposición, cualquier conjunto de la forma $T_{\tilde{F}}[0, \varphi]$ coincide con $T(H')$ para algún intervalo H' contenido en H.

(3) Siguiendo la prueba del último teorema se puede ver que Z es un zonoide definido si y sólo si existe un funcional (para cada funcional) x^* que exponga a

Z, existe una única descomposición en zonoides de Z, $Z = Z_1 + Z_2$, tal que Z_1 está contenido $\{x \in X : x^*(x) \geq 0\}$ y Z_2 está contenido en $\{x \in X : x^*(x) \leq 0\}$. Esto no es más que la equivalencia (A)$\Leftrightarrow$(C).

Las últimas observaciones muestran que el describir los zonoides en términos de imágenes de intervalos por aplicaciones débil*-débil continuas de $L^\infty(\lambda)$ en X puede dar sus frutos a la hora de un mayor entendimiento de los zonoides definidos. En el próximo resultado caracterizaremos los zonoides definidos en este sentido. Esto será una herramienta útil a la hora de encontrar una condición geométrica que los identifique.

Teorema 3.1.10. *Z es un zonoide definido si y sólo si existe una medida positiva y finita λ, un operador débil*-débil continuo $T : L^\infty(\lambda) \longrightarrow X$ y un intervalo H que contiene a 0 tales que $Z = T(H)$ y para cada $\varphi \in H \setminus \{0\}$, $T(\varphi) \neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que $Z = T(H)$ y para cada $\varphi \in H \setminus \{0\}$, $T(\varphi) \neq 0$. Sea $Z = Z_1 + Z_2$ una descomposición en zonoides de Z. Por la Proposición 3.1.1, $Z_1 = T(H_1)$ y $Z_2 = T(H_2)$, donde $H_1 + H_2 = H'$ es un trasladado de H, es decir $H' = \varphi_0 + H$. Debido a que $0 \in H'$, $-\varphi_0 \in H$. Tenemos por una parte que $T(H') = T(\varphi_0) + T(H)$ pero por otra parte, $Z = Z_1 + Z_2$ implica que $T(H') = T(H)$. Entonces $T(\varphi_0) = 0$. Como $-\varphi_0 \in H$, se tiene que $\varphi_0 = 0$ y esto implica que $H = H'$. Una aplicación de la Observación (2) al último teorema nos dice que Z satisface (B") y por tanto Z es un zonoide definido.

Supongamos ahora que Z es un zonoide definido. Sea $x_0^* \in X^*$ un funcional que exponga a Z en el punto x_0. Consideremos $Z_0 = Z - x_0$ un trasladado de Z contenido en $\{x \in X : x_0^*(x) \geq 0\}$. Como Z_0 es un trasladado de Z que contiene a 0, Z_0 es un zonoide. Sea $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ una medida vectorial tal que $Z_0 = \overline{\text{co}}(\text{rg}\, F)$. Entonces x_0^* es un funcional de Rybakov para F y por tanto $\lambda = |x_0^* F| = x_0^* F$ es una medida de control para F. Para cada funcional de

Rybakov $x^* \in X^*$, sea A_{x^*} el conjunto

$$A_{x^*} = \{\omega \in \Omega : f_{x^*}(\omega) > 0\}$$

siendo $f_{x^*} = T_F^*(x^*)$. Sea $\hat{\Sigma}$ la σ-álgebra generada por los conjuntos A_{x^*} y los conjuntos de λ-medida nula. Entonces

$$Z_0 = T_F\{\varphi \in L^\infty(\Omega, \hat{\Sigma}, \lambda) : 0 \leq \varphi \leq 1\}$$

puesto que $\sup_{x \in Z_0} x^*(x) = x^*(T_F(\chi_{A_{x^*}}))$ para cada funcional de Rybakov. Observando que el conjunto de funcionales de Rybakov es denso en X^*, podemos suponer que $\Sigma = \hat{\Sigma}$.

Aserto. *En las condiciones anteriores, si φ y ψ son dos funciones medibles $0 \leq \varphi, \psi \leq 1$, tales que $T_F[0,\varphi] = T_F[0,\psi]$, entonces $\varphi = \psi$ λ-e.c.t..*

Para probar esta afirmación, observemos que $T_F[0,\varphi] = T_F[0,\psi]$ implica $T_F(\varphi) = T_F(\psi)$ pues $\frac{1}{2}T_F(\varphi)$ es el centro de simetría de $T_F[0,\varphi]$ y lo mismo ocurre con $T_F[0,\psi]$. Como 0 es un punto expuesto de $K_{u_{(\varphi F)}} = K_{u_{(\psi F)}}$, $u_{(\varphi F)} = u_{(\psi F)}$. Supongamos que $\bar{\varphi} = \varphi - \psi \neq 0$. La condición $u_{(\varphi F)} = u_{(\psi F)}$ es equivalente a $\int \bar{\varphi} f_{z^*} d\lambda = 0$ para cada $z^* \in h(X)$. Si $\bar{\varphi} \neq 0$, entonces existe C en el álgebra generada por los conjuntos de la forma A_{x^*} tales que $\int_C \bar{\varphi} d\lambda \neq 0$. Como para cada funcional de Rybakov x^* el conjunto $\{\omega : f_{x^*}(\omega) = 0\}$ es de medida nula, A_{x^*} es λ-equivalente a el complementario de A_{-x^*}, C es λ-equivalente a un conjunto de la forma

$$C' = \bigcup_{j \in J} \Big(\bigcap_{i_j \in I_j} \{\omega : f_{x^*_{i_j}}(\omega) > 0\}\Big)$$

donde J e I_J son conjuntos finitos. Entonces $C' = \{\omega \in \Omega : f_{z^*}(\omega) > 0\}$ para $z^* = \bigvee_{j \in J}(\bigwedge_{i_j \in I_J} f_{x^*_{i_j}})$. Como $\chi_{C'} = \lim_n((nf_{z^*} \wedge 1) \vee 0)$, y $1 = \frac{d|x_0^* F|}{d\lambda}$, $((nf_{z^*} \wedge 1) \vee 0) = f_{w^*}$ para algún $w^* \in h(X)$. Si $\int \bar{\varphi} \chi_C d\lambda \neq 0$, por el Teorema de la convergencia dominada existe $v^* \in h(X)$ tal que $\int \bar{\varphi} f_{v^*} d\lambda \neq 0$. Esto supone una contradicción y obtenemos que $\varphi = \psi$, con lo que el aserto está probado.

Dado que Z es un trasladado de Z_0 que contiene a 0, existe una función medible φ_0 tal que $0 \le \varphi_0 \le 1$ y $Z = T(H)$ para $H = \{\varphi \in L^\infty(\lambda) : \varphi_0 - 1 \le \varphi \le \varphi_0\}$.

Para finalizar la prueba del teorema, debemos probar que para cada $\varphi \in H \setminus \{0\}$, $T(\varphi) \neq 0$. Por reducción al absurdo, supongamos que existe $\varphi \in H$ tal que $T_F(\varphi) = 0$. Observemos que tenemos las siguientes descomposiciones en zonoides de Z:

$$\begin{aligned} Z &= T_F[\varphi_0 - 1, 0] + T_F[0, \varphi_0] \\ &= T_F[\varphi_0 - 1 - \varphi, 0] + T_F[0, \varphi_0 - \varphi]. \end{aligned}$$

Tanto $T_F[\varphi_0 - 1, 0] + T_F[0, \varphi_0]$ como $T_F[\varphi_0 - 1 - \varphi, 0] + T_F[0, \varphi_0 - \varphi]$ son descomposiciones de Z en zonoides con 0 como punto expuesto por x_0^*. Una aplicación de la observación (3) al último teorema nos dice que $T_F[\varphi_0 - 1, 0] = T_F[\varphi_0 - 1 - \varphi, 0]$ y que $T_F[0, \varphi_0] = T_F[0, \varphi_0 - \varphi]$. Por el aserto, $\varphi = 0$. □

Corolario 3.1.11. *Si 0 es un punto extremal del zonoide Z, entonces Z es un zonoide definido.*

DEMOSTRACIÓN. Sea F una medida vectorial que genere a Z y λ una medida de control para ella; entonces $Z = T_F\{\varphi \in L^\infty(\lambda), 0 \le \varphi \le 1\}$. Que 0 sea un punto extremal de Z es equivalente a que $T_F(\varphi) = 0$, implique $\varphi = 0$ [DU, pg. 270]. Sólo queda aplicar el teorema anterior. □

Sección 2: Paralelepípedos y zonoides definidos.

Recordemos que un subconjunto convexo E de un conjunto convexo K es un conjunto extremal de K si $\alpha x + (1 - \alpha)y \in E$ para $x, y \in K$ y $0 < \alpha < 1$ implica que $x \in E$. No supondremos que un conjunto extremal sea necesariamente cerrado; sin embargo, conjuntos extremales de compactos en $\mathbb{R}^n$ resultan ser cerrados. De hecho, cuando K sea un convexo cerrado llamaremos caras a los conjuntos extremales cerrados de K. Cuando se trata de un zonoide, sus caras resultan ser trasladados de zonoides sumandos de Z. Si F es una medida vectorial que genera Z, C es una cara y λ una medida de control de F; entonces $W = \{\varphi \in L^\infty(\lambda) : 0 \leq \varphi \leq 1, T_F(\varphi) \in C\}$ es una cara para la topología débil* del intervalo $[0,1]$ en $L^\infty(\lambda)$. Se tiene que existen entonces dos conjuntos medibles A, B disjuntos tales que

$$W = \{\varphi \in L^\infty(\lambda) : \varphi = 1 \text{ en } A,\ \varphi = 0 \text{ en } B\ ,\ 0 \leq \varphi \leq 1 \text{ en } \Omega \setminus (A \cup B)\}.$$

Tomando $\varphi_0 = \chi_{\Omega \setminus (A \cup B)}$, y $Z_1 = T_F[0, \varphi_0]$, Z_1 es un zonoide sumando de Z y $C = T_F \chi_A + Z_1$.

Como ya hemos mencionado, Neyman probó en [N1] que un zonoide Z en $\mathbb{R}^n$ es un zonoide definido si y sólo si el conjunto extremal E de Z conteniendo a 0 en su interior relativo es un paralelepípedo. Se puede ver que E es el menor conjunto extremal que contiene a 0.

Un paralelepípedo que contenga a 0 puede ser visto como la suma de Minkowski

$$P = \sum_{k=1}^{m} [-\alpha_k, \beta_k] \vec{x}_k$$

donde α_k, β_k son números reales no negativos y $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^m$ vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$. Considerando

$$T : \ell_\infty^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

definido en la base canónica por $T(\vec{e}_k) = \vec{x}_k$, entonces T es un operador inyectivo tal que $P = T(H)$ siendo H el intervalo en ℓ_∞^m, $H = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \ell_\infty^m : -\alpha_k \leq x_k \leq \beta_k, k = 1, \ldots, m\}$. Usaremos este punto de vista para definir el concepto de paralelepípedo en dimensión infinita. De nuestra definición se deducirá que un paralelepípedo que contenga a 0 es un zonoide.

Definición 3.2.1. *Decimos que un subconjunto K de un espacio de Banach es un paralelepípedo si existe una medida positiva y finita λ y un operador débil*-débil continuo e inyectivo $T : L^\infty(\lambda) \longrightarrow X$ tal que $K = T(H)$ y H es un intervalo en $L^\infty(\lambda)$.*

Está claro a partir de la definición y el Teorema 3.1.10 que un paralelepípedo que contenga a 0 es un zonoide definido. Como en el caso finito dimensional, el recíproco también es cierto para zonoides simétricos; de hecho, se tiene

Proposición 3.2.2. *Si Z es un zonoide simétrico, entonces Z es definido si y sólo si es un paralelepípedo.*

DEMOSTRACIÓN. Sólo hay que probar que un zonoide definido y simétrico es un paralelepípedo. Existe un operador débil*-débil continuo $T : L^\infty(\Omega, \lambda) \longrightarrow X$ tal que $Z = T(H)$ para un intervalo $H = \{\varphi \in L^\infty(\lambda) : \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\}$ que contiene a 0 y para cada $\varphi \in H \setminus \{0\}$, $T(\varphi) \neq 0$. Como Z es simétrico, $T(\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)) = 0$, con lo que $\varphi_1 = -\varphi_2$ λ-e.c.t.. Sea Ω_1 el conjunto $\Omega_1 = \{\omega \in \Omega : \varphi_2(\omega) \neq 0\}$ y $\mu = \lambda\ |_{\Omega_1}$. Si $S : L^\infty(\Omega_1, \mu) \longrightarrow X$ está definido por $S(\varphi) = T(\varphi_2\varphi)$, entonces S es un operador inyectivo y $Z = S[-1, 1]$, un paralelepípedo. □

Del último resultado se deduce que Z es un paralelepípedo si y sólo si todo trasladado de Z que contenga a 0 es un zonoide definido. Además, todo sumando zonoide de un paralelepípedo es un paralelepípedo.

Sea $E_Z(0)$ el subconjunto de Z siguiente:

$$E_Z(0) = \bigcup_{\alpha>0} Z \cap (-\alpha Z).$$

Entonces $x \in E_Z(0)$ si y sólo si $x \in Z$ y existen $x' \in Z$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tales que $x + \alpha x' = 0$. Esto implica que $E_Z(0)$ es un conjunto extremal de Z: si $x \in E_Z(0)$, $x = \alpha_1 x_1 + (1 - \alpha_1)x_2$ para $0 < \alpha_1 < 1$ y $x_1, x_2 \in Z$, entonces $x_1 + \beta y' = 0$ con

$$\beta = \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} + \frac{\alpha}{\alpha_1},\ y' = \frac{1 - \alpha_1}{\beta\alpha_1}x_2 + \frac{\alpha}{\beta\alpha_1}x';$$

puesto que $y' \in Z$, se tiene que $x_1 \in E_Z(0)$. $E_Z(0)$ es el menor conjunto extremal que contiene a 0, ya que para todo $x \in E_Z(0)$ existen $x' \in Z$ y $\alpha > 0$ tales que

$$0 = \frac{1}{\alpha + 1}x + \frac{\alpha}{\alpha + 1}x'.$$

Además es el único conjunto extremal que contiene a 0 en su interior relativo en el sentido siguiente: si $x \in E_Z(0)$, existe $\alpha > 0$ tal que $-\alpha x \in E_Z(0)$; es decir, para cada $x \in E_Z(0)$, el segmento que une x con 0 se puede prolongar dentro de $E_Z(0)$ dejando a 0 en su interior. En el caso finito-dimensional, $Z \cap (-Z)$ es un entorno de 0 en la topología relativa de la envoltura lineal de $E_Z(0)$. La compacidad de $E_Z(0)$ nos permite encontrar un número positivo α_0 tal que $E_Z(0) \subseteq \alpha_0(Z \cap (-Z))$, y por tanto $E_Z(0) = Z \cap (-\alpha_0 Z)$.

Lema 3.2.3. *Si Z es un zonoide definido, entonces para cada $\alpha > 0$, $Z \cap (-\alpha Z)$ es un paralelepípedo y un zonoide sumando de Z.*

DEMOSTRACIÓN. Si Z es un zonoide definido, existe un operador débil *-débil continuo

$$T : L^\infty(\lambda) \longrightarrow X$$

tal que $Z = T(H)$ siendo $H = [\varphi_1, \varphi_2]$ para dos funciones medibles y acotadas $\varphi_1 \leq 0 \leq \varphi_2$, y para cada $\varphi \in H \setminus \{0\}$, $T(\varphi) \neq 0$. Veamos que $Z \cap (-\alpha Z) = T(H \cap (-\alpha H))$. Si $x \in Z \cap (-\alpha Z)$, existen φ y φ' dos funciones en H tales que $x = T(\varphi) = T(-\alpha\varphi')$. Entonces

$$0 = T\Big(\frac{1}{\alpha+1}(\varphi + \alpha\varphi')\Big) \text{ y } \frac{1}{\alpha+1}(\varphi + \alpha\varphi') \in H,$$

lo cual implica que $\varphi + \alpha\varphi' = 0$, y así $x \in T(H \cap (-\alpha H))$. Como

$$H \cap (-\alpha H) = \{\varphi \in L^\infty(\lambda) : (\varphi_1) \vee (-\alpha\varphi_2) \leq \varphi \leq \varphi_2 \wedge (-\alpha\varphi_1)\},$$

$Z \cap (-\alpha Z)$ es un sumando zonoide de Z debido a la Proposición 3.1.1.

Para $\alpha = 1$, se tiene $H \cap (-H) = [-\psi_0, \psi_0]$ donde $\psi_0 = \varphi_2 \wedge (-\varphi_1)$. Si

$$\Omega_1 = \{\omega : \varphi_1(\omega)\varphi_2(\omega) \neq 0\},$$

entonces $Z \cap (-Z) = S(B_{L^\infty(\mu)})$ para $\mu = \lambda|_{\Omega_1}$ y $S : L^\infty(\Omega_1, \mu) \longrightarrow X$, definida por $S(\varphi) = T(\psi_0\varphi)$ es un operador débil *−débil continuo e inyectivo. Así que

$Z\cap(-Z)$ es un paralelepípedo. Como $Z\cap(-\alpha Z) = T(H\cap(-\alpha H))$, y $H\cap(-\alpha H)$ es un intervalo contenido en $\alpha(H\cap(-H))$ si $\alpha > 1$ (contenido en $H\cap(-H)$ si $\alpha < 1$), se obtiene que $Z\cap(-\alpha Z)$ es un sumando zonoide del paralelepípedo $\alpha(Z\cap(-Z))$ (de $Z\cap(-Z)$) y esto implica que $Z\cap(-\alpha Z)$ es un paralelepípedo. $\square$

En busca de una condición que caracterice a los zonoides definidos, hay que observar que no es suficiente con que $Z\cap(-Z)$ sea un paralelepípedo incluso para zonoides en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 3.2.4. *Un zonoide Z en $\mathbb{R}^2$ que no es definido pero $Z\cap(-Z)$ es un paralelepípedo.*

Basta considerar los puntos en $\mathbb{R}^2$, $\vec{x}_1 = (1,0)$, $\vec{x}_2 = (0,1)$ y $\vec{x}_3 = (1,1)$ y $Z = [-1,1]\vec{x}_1 + [-1,1]\vec{x}_2 + [0,1]\vec{x}_3$. Está claro que Z no es un zonoide definido pues no es paralelepípedo y $Z = Z\cap(-2Z)$, pero $Z\cap(-Z)$ es el cuadrado unidad que es un sumando zonoide de Z y un paralelepípedo.

Tampoco se tiene, en general, que $Z\cap(-Z)$ sea un zonoide ni un sumando de Z, con lo cual la condición necesaria dada en el Lema 3.2.3 no es superflua.

Ejemplo 3.2.5. *Un zonoide Z tal que $Z\cap(-Z)$ no es un zonoide ni un sumando de Z.*

Consideremos el zonotopo en $\mathbb{R}^3$,

$$L = [0,1]\vec{x}_1 + [0,1]\vec{x}_2 + [0,1]\vec{x}_3 + [0,1]\vec{x}_4$$

donde $\vec{x}_1 = (1,0,1)$, $\vec{x}_2 = (0,1,1)$, $\vec{x}_3 = (-1,0,1)$ y $\vec{x}_4 = (0,-1,1)$. Sea $\vec{x}_0 = (0,0,1)$; como $\vec{x}_0$ es un elemento de L, $Z = L - \vec{x}_0$ es un zonoide. Sea $H_0 = \{(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3 : a_3 \leq 0\}$. Se puede ver que $Z\cap H_0 = \{(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3 : a_3 \leq 0, |a_1| + |a_2| + |a_3| \leq 1\}$. A partir de aquí es fácil deducir que $Z\cap(-Z)$ es el octaedro, la bola unidad de $\mathbb{R}^3$con la norma $\|\cdot\|_1$, que no es un zonoide puesto que sus caras dos dimensionales son triangulares y por tanto carecen de centro de simetría (ver [Bo]). Un cálculo fácil muestra que el funcional $\xi = (1,1,0)$ expone Z en el punto $(1,1,1)$ pero ξ no expone a $Z \cap (-Z)$. Esto implica que $Z \cap (-Z)$ no puede ser un conjunto sumando de Z.

Para encontrar el contraejemplo anterior era necesario buscar al menos en $\mathbb{R}^3$. En $\mathbb{R}^2$, todo zonoide Z tiene a $Z \cap (-Z)$ como sumando zonoide. Que $Z \cap (-Z)$ es un zonoide es consecuencia de que todo compacto convexo y simétrico en el plano lo es. Que es un zonoide sumando de Z puede verse aplicando [Sc1] y que el otro sumando aparecido es $\bigcap_{z \in Z \cap (-Z)}(Z - z)$ que vuelve a ser compacto convexo y simétrico. No conocemos ningún ejemplo de zonoide Z tal que $Z \cap (-Z)$ sea un zonoide pero no un sumando de Z. Volveremos sobre este tema al final de este capítulo.

Ya hemos señalado con anterioridad que para un zonoide Z en dimensión finita, $E_Z(0)$ es un conjunto cerrado e incluso un sumando zonoide de Z. Desafortunadamente, para un zonoide en un espacio de Banach, $E_Z(0)$ no es, en general, un conjunto cerrado y consecuentemente no es un zonoide (ver Ejemplo 3.2.8). En el teorema próximo se prueba que la clausura de este conjunto extremal es un sumando zonoide de Z.

Teorema 3.2.6. *Para todo zonoide Z, $\overline{E_Z(0)}$ es un sumando zonoide de Z. Más aún, para cada medida vectorial F que genere Z, $\overline{E_Z(0)} = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, \chi_C F)$ para algún conjunto medible C. Además, Z es un zonoide definido si y sólo si $\overline{E_Z(0)}$ es un zonoide definido.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $F : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ una medida vectorial generando Z y λ una medida de control para F. Si $x \in Z \cap (-\alpha Z)$ para algún número positivo α, $x = T_F(\varphi) = T_F(-\alpha\psi)$ siendo φ y ψ dos funciones de $H = [0,1] \subseteq L^\infty(\lambda)$. Entonces, $T_F(\bar{\varphi}) = 0$, donde $\bar{\varphi} = \varphi + \alpha\psi \geq \varphi$. Recíprocamente, si $\bar{\varphi} \in L^\infty(\lambda)$ es tal que $\bar{\varphi} \geq \varphi$ y $T_F(\bar{\varphi}) = 0$, entonces $\varphi - \bar{\varphi} \in -\alpha H$ para algún $\alpha > 0$ y

$T_F(\varphi - \bar{\varphi}) = T_F(\varphi)$, con lo que $T_F(\varphi) \in E_Z(0)$. Esto significa que $x \in E_Z(0)$ si y sólo si $x = T_F(\varphi)$ con $0 \leq \varphi \leq 1$ y existe una función medible y acotada $\bar{\varphi} \geq \varphi$ tal que $T_F(\bar{\varphi}) = 0$. Es entonces claro que si $\varphi \in H$, $T_F(\varphi) \in E_Z(0)$ y $\psi \in H$ con $\psi \leq \varphi$, entonces $T_F(\psi) \in E_Z(0)$.

Si $\varphi, \psi \in [0,1]$ y $T_F(\varphi), T_F(\psi) \in E_Z(0)$, entonces $T_F(\varphi \vee \psi) \in E_Z(0)$. Para probar esta afirmación, observemos que $T_F(\overline{\varphi} + \overline{\psi}) = 0$ siempre que $\overline{\varphi} \geq \varphi$ y $\overline{\psi} \geq \psi$ sean funciones medibles y acotadas tales que $T_F(\overline{\varphi}) = 0$, $T_F(\overline{\psi}) = 0$. Como $\overline{\varphi} + \overline{\psi} \geq \varphi \vee \psi$, esto nos da $T_F(\varphi \vee \psi) \in E_Z(0)$.

Consideremos el subconjunto $\mathcal{F}$ de $L^\infty(\lambda)$ dado por

$$\mathcal{F} = \{\varphi \in [0,1] : T_F(\varphi) \in E_Z(0)\}.$$

Hemos probado que $\mathcal{F}$ es una familia filtrante en $L^\infty(\lambda)$. Si tomamos una sucesión creciente φ_k tal que

$$\lim_k \int \varphi_k = \sup_{\varphi \in \mathcal{F}} \Big\{ \int \varphi d\lambda \Big\},$$

entonces φ_k tiene un límite puntual φ_0 y φ_0 es necesariamente $\varphi_0 = \sup_{\varphi \in \mathcal{F}} \varphi$. Esto da lugar a que $T_F(H') = \overline{E_Z(0)}$ con $H' = [0, \varphi_0]$, ya que para cada $\psi \in H'$, se tiene $\psi = \lim_k \psi \wedge \varphi_k$ en la topología débil* de $L^\infty(\lambda)$. Si $H'' = [0, 1 - \varphi_0]$, y $Z^* = T_F(H'')$ entonces $Z = \overline{E_Z(0)} + Z^*$ es una descomposición en zonoides de Z.

Más aún, para cada medida vectorial F que genere Z, la descomposición en zonoides $Z = \overline{E_Z(0)} + Z^*$ es una descomposición que puede ser obtenida descomponiendo el espacio de medida en el que F esté definida: existe un conjunto medible $C \in \Sigma$ tal que $\overline{E_Z(0)} = \overline{\text{co}}(\text{rg}(\chi_C F))$. Sólo tenemos que probar que $\varphi_0 = \chi_C$ λ-e.c.t. para un medible $C \in \Sigma$. Por reducción al absurdo, supongamos que existe un conjunto $A \in \Sigma$ con $\lambda(A) > 0$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$1 - \varepsilon > \varphi_0 > \varepsilon \ \lambda\text{-e.c.t. en } A.$$

Entonces existe un conjunto medible $B \subseteq A$, con $\lambda(B) > 0$ y un cierto k tal que $\varphi_k \geq \frac{\varepsilon}{2}\chi_B$. Se tendrá entonces $T_F(\frac{\varepsilon}{2}\chi_B) \in E_Z(0)$, lo que implica que $\chi_B \in \mathcal{F}$. Entonces $\chi_B \leq \varphi_0$, lo que es una contradicción. Tenemos ya

$$\overline{E_Z(0)} = \overline{\text{co}}(\text{rg}(\chi_C F)) \text{ y } Z^* = \overline{\text{co}}(\text{rg}(\chi_{\Omega\setminus C} F)).$$

Como para cada función medible $\varphi \in [0, \chi_{\Omega\setminus C}]$, $T_F(\varphi) = 0$ implica $\varphi = 0$ λ-e.c.t., 0 es un punto extremal de Z^*.

Si Z es un zonoide definido, entonces $\overline{E_Z(0)}$ es zonoide definido pues todo sumando de un zonoide definido es un zonoide definido, como consecuencia de el Teorema 3.1.9 y la Observación 2 que le sigue. Recíprocamente, supongamos que $\overline{E_Z(0)}$ es un zonoide definido. Como 0 es un punto extremal de Z^*, Z^* es definido. Para cada medida vectorial F generando Z, $u_F = u_1 + u_2$ para $K_{u_1} = \overline{E_Z(0)}$ y $K_{u_2} = Z^*$. Dado que u_2 está univocamente determinado por Z por el Corolario 3.1.11, u_F es única. □

Teorema 3.2.7. *Z es un zonoide definido si y sólo si $Z \cap (-\alpha Z)$ es un paralelepípedo para cada número positivo α.*

DEMOSTRACIÓN. La necesidad fue probada en el Lema 3.2.3. Para la suficiencia, sólo hace falta suponer que existe $\alpha_0 > 0$ tal que $Z_\alpha = Z \cap (-\alpha Z)$ es un paralelepípedo para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Por el teorema previo,

$$Z = \overline{E_Z(0)} + Z^*$$

y Z es definido si y sólo si $\overline{E_Z(0)}$ lo es. Además, $\overline{E_Z(0)} \cap \Big(- \alpha\overline{E_Z(0)}\Big) = Z \cap (-\alpha Z)$. Podemos, por tanto, ciertamente suponer que $Z = \overline{E_Z(0)}$.

Por hipótesis existen operadores débil *−débil continuos e inyectivos

$$T_\alpha : L^\infty(\Omega_\alpha, \Sigma_\alpha, \lambda_\alpha) \longrightarrow X$$

tales que $Z_\alpha = Z \cap (-\alpha Z) = T_\alpha(H_\alpha)$ para intervalos H_α en $L^\infty(\lambda_\alpha)$. Dado que T_α es un operador inyectivo y $Z \cap (-Z) = Z_\alpha \cap (-Z_\alpha)$ para $\alpha \geq 1$, se tiene

$Z \cap (-Z) = T_\alpha(H_\alpha \cap (-H_\alpha))$. Esto implica que Z_α es un sumando zonoide de $\alpha(Z \cap (-Z))$ pues H_α es un intervalo contenido en $\alpha(H_\alpha \cap (-H_\alpha))$. Por la Proposición 3.1.1 aplicada a T_1, Z_α es la imagen de un intervalo I_α in $L^\infty(\lambda_1)$ que es único debido a que T_1 es inyectivo. Entonces, $Z \cap (-\alpha Z) = T_1\{\varphi : \psi_\alpha \leq \varphi \leq \varphi_\alpha\}$.

En resumen, hemos reducido nuestras hipotesis a sólo un operador inyectivo

$$T_1 : L^\infty(\Omega_1, \Sigma_1, \lambda_1) \longrightarrow X$$

e intervalos $I_\alpha = [\psi_\alpha, \varphi_\alpha]$ en $L^\infty(\lambda_1)$ tales que $T_1(I_\alpha) = Z_\alpha$. Siguiendo un razonamiento análogo al de la prueba del Lema 3.2.3 podemos incluso suponer que $Z \cap (-Z) = T_1[-1, 1]$.

Sea F la medida vectorial definida por $F(A) = T_1(\chi_A)$ para todo $A \in \Sigma_1$ y sea x_0^* un funcional de Rybakov para F. Esto implica que $T_1^*(x_0^*)$ es una función en $L^1(\lambda_1)$ y $T_1^*(x_0^*)(\omega) \neq 0$ λ_1-e.c.t.. Observemos que para cada $g \in L^\infty(\lambda_1)$ tal que $g \in [0,1]$, $T_1(g\varphi_n) \in Z$. Sea

$$M = \sup_{z \in Z} |\langle x_0^*, z\rangle|.$$

Para $A_1 = \{\omega \in \Omega_1 : T_1^*(x_0^*)(\omega) > 0\}$ y $A_2 = \{\omega \in \Omega_1 : T_1^*(x_0^*)(\omega) < 0\}$, se tiene

$$\begin{aligned}\int \varphi_n |T_1^* x_0^*| d\lambda_1 &= \int \chi_{A_1} \varphi_n T_1^* x_0^* d\lambda_1 - \int \chi_{A_2} \varphi_n T_1^* x_0^* d\lambda_1 \\ &= \langle x_0^*, T_1(\chi_{A_1}\varphi_n)\rangle - \langle x_0^*, T_1(\chi_{A_2}\varphi_n)\rangle \leq 2M.\end{aligned}$$

Una aplicación del Teorema de la convergencia monótona y dado que $T_1^*(x_0^*) \neq 0$ λ_1-e.c.t. muestran que $\varphi_\infty = \sup \varphi_n$ es finito λ_1-e.c.t. El mismo argumento muestra que $\varphi_\infty |T_1^*(x^*)| \in L^1(\lambda_1)$ para todo $x^* \in X^*$. Exactamente de la misma manera se obtiene que $\psi_\infty = \inf_n \psi_n$ es finita λ_1-e.c.t. y $\psi_\infty |T_1^*(x^*)|$ es integrable con respecto a λ_1, para cada $x^* \in X^*$.

Para toda función $g \in B_{L^\infty(\lambda_1)}$ y $x^* \in X^*$, el teorema de la convergencia dominada nos dice que

$$\lim_n \langle x^*, T_1(g\varphi_n)\rangle = \lim_{n\to\infty} \int g\varphi_n T_1^*(x^*) d\lambda_1 = \int g\varphi_\infty T_1^*(x^*) d\lambda_1.$$

La débil compacidad de $Z - Z$ implica que existe $x_g \in Z - Z$ tal que para cada $x^* \in X^*$,

$$\int g\varphi_\infty T_1^*(x^*)d\lambda_1 = \langle x^*, x_g\rangle.$$

El mismo proceso puede ser aplicado a ψ_∞, y nos permite definir

$$S : L^\infty(\Omega_1, \lambda_1) \longrightarrow X$$

tal que para cada $g \in L^\infty(\Omega_1, \lambda_1)$ y $x^* \in X^*$,

$$\langle x^*, S(g)\rangle = \langle g(\varphi_\infty - \psi_\infty), T_1^* x^*\rangle = \langle g, (\varphi_\infty - \psi_\infty)T_1^* x^*\rangle.$$

Entonces, S es un operador débil *−débil continuo que satisface la condición siguiente: si $(\varphi_\infty - \psi_\infty)g \in L^\infty(\lambda_1)$, entonces $S(g) = T_1((\varphi_\infty - \psi_\infty)g)$. Esto implica que

$$Z = \overline{\cup_{n>0} Z_n} = \overline{\bigcup_n S\Big[\frac{\psi_n}{\varphi_\infty - \psi_\infty}, \frac{\varphi_n}{\varphi_\infty - \psi_\infty}\Big]} = S\Big[\frac{\psi_\infty}{\varphi_\infty - \psi_\infty}, \frac{\varphi_\infty}{\varphi_\infty - \psi_\infty}\Big].$$

Sea H el intervalo

$$H = \{g \in L^\infty(\Omega_1, \lambda_1) : \frac{\psi_\infty}{\varphi_\infty - \psi_\infty} \leq g \leq \frac{\varphi_\infty}{\varphi_\infty - \psi_\infty}\}.$$

Veamos que para cada $g \in H \setminus \{0\}$, $S(g) \neq 0$; si $(\varphi_\infty - \psi_\infty)g \in L^\infty(\lambda_1)$, es una consecuencia de la inyectividad de T_1; si $(\varphi_\infty - \psi_\infty)g$ no es una función acotada, podemos escribir $g = g_1 + g_2$ donde g_1 y g_2 están en H y $g_1(\varphi_\infty - \psi_\infty) \in L^\infty(\lambda_1) \setminus B_{L^\infty(\lambda_1)}$. Si $S(g) = 0$, tendríamos que $T_1(g_1(\varphi_\infty - \psi_\infty)) \in Z \cap (-Z)$ pero esto es una contradicción debido a que $Z \cap (-Z) = T_1(B_{L^\infty(\lambda_1)})$ y T_1 es un operador inyectivo. Usando el Teorema 3.1.10 tenemos que Z es definido. □

Observaciones.

(1) De hecho, hemos probado que el intervalo $[\psi_0, \varphi_0]$ está contenido en $L^1(F)$, el espacio de las funciones reales integrables con respecto a la medida vectorial F (ver [L2]).

(2) Este resultado incluye la caracterización de A. Neyman dado que en dimensión finita $Z_\alpha = Z_{\alpha_0} = E_Z(0)$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$.

Ejemplo 3.2.8. *Un zonoide definido tal que el menor conjunto extremal cerrado que contiene a 0 no es un paralelepípedo y un zonoide definido tal que el menor conjunto extremal que contiene a 0 no es cerrado.*

Consideremos el espacio $L^1[0,1]$ de funciones integrables con respecto a la medida de Lebesgue m en $[0,1]$ y S el subespacio de $L^1[0,1]$ de funciones constantes en $[0,1]$. sea $Y = L^1[0,1]/S$ el espacio cociente y $q : L^1[0,1] \longrightarrow Y$ la aplicación cociente, así que $q(\varphi) = q(\psi)$ si y sólo si existe una constante k tal que $\varphi = \psi + k$ m-e.c.t.. Definimos la medida vectorial F con valores en Y en la σ-álgebra Σ de los conjuntos medibles Lebesgue en $[0,1]$ por $F(A) = q(\chi_A)$. Como $F([0,1]) = q(\chi_{[0,1]}) = 0$, 0 es el centro de simetría de $Z = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, F)$. Entonces el menor conjunto extremal de Z que contiene a 0 es Z. Como Z es un conjunto simétrico, probar que Z no es un paralelepípedo es equivalente a probar que no es un zonoide definido. Aplicaremos el Teorema 3.1.9 y encontraremos una descomposición de Z que no se puede escribir en la forma $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}(1-\varphi)F) + \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\,\varphi F)$ para ninguna función medible $0 \leq \varphi \leq 1$.

Sean $x = F(\chi_{[0,1/3]})$ e $y = F(\chi_{[1/3,2/3]})$. Si

$$Z_1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x + y + Z) \quad \text{y} \quad Z_2 = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}x - y + Z),$$

entonces $Z = Z_1 + Z_2$ es una descomposición en zonoides de Z. Está claro que

$$Z_1 = \left\{q(\varphi) : -\frac{1}{4} \leq \chi_{[0,1/3]}\varphi \leq \frac{1}{4}, 0 \leq \chi_{[1/3,2/3]}\varphi \leq \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \leq \chi_{[2/3,1]}\varphi \leq 0\right\}$$

Supongamos que $Z_1 = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\,\varphi_0 F)$ para una función medible φ_0 tal que $0 \leq \varphi_0 \leq 1$. Si $h = \frac{1}{2}\chi_{[1/3,2/3]} - \frac{1}{2}\chi_{[2/3,1]}$, entonces $q(h) \in Z_1$. Debería existir una función $g \in [0,1]$ tal que $q(h) = q(g\varphi_0)$. Entonces hay una constante k tal que $h + k = \varphi_0 g$ m-e.c.t.. Esto implica que $h + k \in [0,1]$ y esto es sólo posible si $k = 1/2$. Entonces $g\varphi_0 = \frac{1}{2}\chi_{[0,1/3]} + \chi_{[1/3,2/3]}$ y así $\varphi_0 = 1$ m-e.c.t. en $[1/3,2/3]$; pero esto implicaría que $q(\chi_{[1/3,2/3]})$ pertenece a Z_1, lo cual es una contradicción. Luego Z no es un zonoide definido.

Sea $\psi_0(t) = t$ para todo $t \in [0,1]$ y $Z' = q(\psi_0) + Z$. Entonces

$$Z' = \{q(\varphi) : \psi_0 - 1 \leq \varphi \leq \psi_0\}.$$

Si $H' = \{\varphi \in L^\infty(\lambda) : \psi_0 - 1 \leq \varphi \leq \psi_0\}$, se tiene $Z' = q(H')$ y está claro que $\varphi \in H' \setminus \{0\}$, $q(\varphi) \neq 0$. Hay que hacer notar que la restricción de q a $L^\infty(m)$ es un operador débil *-débil continuo que coincide con T_F. Por el Teorema 3.1.10, esto implica que Z' es un zonoide definido. En este caso, Z' es el menor conjunto extremal cerrado de Z' que contiene a 0 pues $E_{Z'}(0)$ es denso en Z'. Esto es una consecuencia de que $\bigcup_{\alpha>0} H' \cap (-\alpha H')$ es débil*-denso en H'. Z' no es un paralelepípedo pues Z no lo es y Z' es un trasladado de Z.

Consideremos ahora la función η_0 tal que $\eta_0 = 1$ en $[0, 1/2]$ y $\eta_0(t) = 2 - 2t$ en $[1/2, 1]$. Sea $Z'' = q(H'')$ para $H'' = \{\varphi : \eta_0 - 1 \leq \varphi \leq \eta_0\}$; entonces $\overline{E_{Z''}(0)} = q(I)$ donde $I = \{\varphi \in H'' : \varphi\chi_{[0,1/2]} = 0\}$. Si $\varphi + \alpha\psi = C$; una constante, con $\alpha > 0$, $\varphi, \psi \in H''$; entonces examinando $\varphi + \alpha\psi$ en $[0, \frac{1}{2})$ se tiene que $C \geq 0$ y examinandola en $(1-\varepsilon, 1]$ se tiene $C \leq 2\varepsilon(1+\alpha)$ para todo $\varepsilon > 0$. Por tanto, $C = 0$ y $\varphi\chi_{[0,\frac{1}{2}]} = 0$. Vamos a ver que $\overline{E_{Z''}(0)}$ no es un conjunto extremal de Z''. Esto implica que $\overline{E_{Z''}(0)} \neq E_{Z''}(0)$ y por tanto $E_{Z''}(0)$ no es cerrado. Es fácil ver que $q(\frac{1}{2}\chi_{[0,1/2]}) \notin q(I)$; pero $q(\frac{1}{2}\chi_{[0,1/2]})$ y $q(\eta_0\chi_{[1/2,1]})$ están en Z'' y su punto medio es $q(\frac{1}{4}\chi_{[0,1/2]} + \frac{1}{2}\eta_0\chi_{[1/2,1]}) = q((\frac{1}{2}\eta_0 - \frac{1}{4})\chi_{[1/2,1]}) \in q(I)$. Así, $\overline{E_{Z''}(0)}$ no es un conjunto extremal de Z''.

En el último ejemplo queda de manifiesto que si consideramos conjuntos extremales y cerrados, la condición finito-dimensional para que un zonoide sea definido no se extiende a zonoides en espacios de Banach. La caracterización finito-dimensional de zonoides definidos se puede generalizar si introducimos la siguiente generalización del concepto de paralelepípedo que no requiere que un paralelepípedo sea un conjunto cerrado.

Definición 3.2.9. *Decimos que un subconjunto K de un espacio de Banach X es un **paralelepípedo generalizado** si $K = T(L)$ donde $T : L^\infty(\lambda) \longrightarrow X$ es un operador débil *-débil continuo e inyectivo y L un subconjunto de $L^\infty(\lambda)$ con $0 \in L$ y para cada φ, ψ en L, $[\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi] \subseteq L$.*

Es fácil ver que un subconjunto L en las condiciones de la definición anterior es una unión creciente de intervalos que contienen a 0. Con esta definición en mente, se puede dar la siguiente caracterización de zonoide definido que generaliza la dada por A. Neyman.

Corolario 3.2.10. *Z es un zonoide definido si y sólo si $E_Z(0)$, el menor conjunto extremal de Z que contiene a 0, es un paralelepípedo generalizado.*

DEMOSTRACIÓN. Una dirección sigue directamente de la prueba del Teorema 3.2.7. Efectivamente, si Z es un zonoide definido, tomamos el operador T_1 dado en la prueba del teorema mencionado y $L = \bigcup_n [\psi_n, \varphi_n]$.

Recíprocamente, supongamos que $Z = T(L)$ con L y T en las condiciones de la Definición 3.2.9. Al ser T inyectivo, para cada $\alpha > 0$, $Z \cap (-\alpha Z) = T(L \cap (-\alpha L))$. Vamos a probar que $L \cap (-\alpha L)$ es un intervalo en $L^\infty(\lambda)$. Sea x_0^* un funcional de Rybakov para $T[-1,1]$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $T^*(x_0^*)$ es una función positiva λ-e.c.t., ya que podriamos sustituir T por T compuesto con un operador de multiplicación por una función con valores en 1 y -1. Es decir, podemos suponer que $\langle x_0^*, T(\varphi)\rangle > 0$ para toda función medible y acotada que verifique $\varphi \geq 0$, φ no nula en casi todo. Es claro que $L \cap (-\alpha L)$ verifica la misma propiedad que L.

Sean $x_0, y_0 \in Z \cap (-\alpha Z)$ tales que

$$\langle x_0^*, x_0\rangle = \sup_{x \in Z \cap (-\alpha Z)} \langle x_0^*, x\rangle = N, \qquad \text{y} \quad \langle x_0^*, y_0\rangle = \inf_{x \in Z \cap (-\alpha Z)} \langle x_0^*, x\rangle.$$

Como T es un operador inyectivo, existe una única función $\varphi_0 \in L \cap (-\alpha L)$ tal que $x_0 = T(\varphi_0)$, y una única ψ_0 tal que $T(\psi_0) = y_0$. Entonces si existe $\varphi \in L \cap (-\alpha L)$ con $\varphi > \varphi_0$ en un conjunto medible A con $\lambda(A) > 0$, $T(\varphi \vee \varphi_0) \in Z \cap (-\alpha Z)$ y $\langle x_0^*, T(\varphi)\rangle > N$, lo que contradice la elección de x_0. Por tanto, $\varphi \leq \varphi_0$ para toda $\varphi \in L \cap (-\alpha L)$ y análogamente $\varphi \geq \psi_0$, para toda $\varphi \in L \cap (-\alpha L)$. De aquí se deduce que $L \cap (-\alpha L) = [\psi_0, \varphi_0]$, y por tanto,

$Z \cap (-\alpha Z)$ es un paralelepípedo para todo $\alpha > 0$. Z es definido por el Teorema 3.2.7. $\square$

Para concluir este capítulo, vamos a dar algunas condiciones suficientes para que $Z \cap (-Z)$ sea un sumando zonoide de Z.

Lema 3.2.11. *Si Z es un zonoide en $\mathbb{R}^n$ tal que $Z \cap (-Z) = B_{\ell_\infty^n}$, entonces $Z \cap (-Z)$ es un zonoide sumando de Z.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero que para cada $k = 1, \ldots, n$ existe $\varepsilon_k \in \{-1, 1\}$ tal que si $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in Z$ entonces $x_k \varepsilon_k \leq 1$. Supongamos que esto no es así para $k = 1$, entonces existen $\vec{x}$ e $\vec{y}$ en Z tales que $x_1 > 1$ e $y_1 < -1$. Sea γ un número positivo suficientemente pequeño como para que $\gamma \leq \frac{1}{2}$ y $|\gamma x_2|, \ldots, |\gamma x_n| \leq \frac{1}{2}$. Sea $\vec{z}$ tal que $z_1 = 1$ y $z_k = \frac{-\gamma}{1-\gamma} x_k$ para $k = 2, \ldots, n$. El punto $(\alpha, 0, \ldots, 0)$, con $\alpha = \gamma x_1 + (1 - \gamma) > 1$, está en Z, pues es combinación convexa de $\vec{x}$ y $\vec{z}$. Igualmente se prueba que existe $(\beta, 0, \ldots, 0)$ en Z con $\beta < -1$. Entonces $Z \cap (-Z) \neq B_{\ell_\infty^n}$ pues $(\min(\alpha, |\beta|), 0, \ldots, 0) \in Z \cap (-Z)$, lo cual es una contradicción. No hay pérdida de generalidad en suponer que $\varepsilon_k = 1$ para todo k. Podemos suponer, entonces, que

$$Z \subseteq \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_k \leq 1, k = 1, \ldots, n\}.$$

Sea $\vec{x}_0 = (0, 1, \ldots, 1)$ y $Z_0 = Z - \vec{x}_0$. Si η_0 es el funcional definido por $\eta_0(x_1, \ldots, x_n) = x_2 + \cdots + x_n$, entonces $Z_0 \subseteq \{\vec{x} : \eta_0(\vec{x}) \leq 0\}$. Sean μ y μ_0 medidas en la esfera de $\mathbb{R}^n$ tales que $Z = \overline{\text{co}}(\text{rg}\, M_\mu)$ y $Z_0 = \overline{\text{co}}(\text{rg}\, M_{\mu_0})$. En virtud del Teorema 1.3.1, $\mu_0^s = \mu^s$. Consideremos el hiperplano $H = \{\vec{x} : \eta_0(\vec{x}) = 0\}$. Un simple cálculo muestra que $Z_0 \cap H = [-\alpha \vec{e_1}, \vec{e_1}]$ para cierto $\alpha \geq 1$. Sea $\{\vec{e}_k\}$ la base canónica en ℓ_∞^n. Entonces la restricción de μ_0 a H es $\mu_0 \mid H = \delta_{\vec{e_1}} + \alpha \delta_{-\vec{e_1}}$ con lo que $\mu^s \geq \beta \delta_{\vec{e_1}} + \beta \delta_{-\vec{e_1}}$ para algún $\beta \geq 1$. Haciendo lo mismo para todo $j = 1, \ldots, n$, $\mu^s \geq \sum_j \delta_{\vec{e_j}} + \delta_{-\vec{e_j}}$ que es la medida que genera $B_{\ell_\infty^n}$. Por tanto, $B_{\ell_\infty^n}$ es un sumando de Z' donde Z' es un trasladado de Z con

0 como centro de simetría. Entonces $Z = B_{\ell_\infty^n} + L - \vec{z}_0$ siendo L un zonoide. Para todo funcional $\eta \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\sup_{\vec{z}\in Z} \eta(\vec{z}) = \sup_{\vec{x}\in B_{\ell_\infty^n}} \eta(\vec{x}) + \sup_{\vec{x}\in L-\vec{z}_0} \eta(\vec{x})$$

con lo que $\sup_{\vec{x}\in L-\vec{z}_0} \eta(\vec{x}) \geq 0$. Esto implica que $0 \in L - \vec{z}_0$ y por tanto $L - \vec{z}_0$ es un zonoide. □

Proposición 3.2.12. *Sea λ una medida finita; si Z es un zonoide en $L^1(\Omega,\lambda)$ tal que $Z \cap (-Z) = B_{L^\infty(\lambda)}$, entonces $Z \cap (-Z)$ es un zonoide sumando de Z.*

DEMOSTRACIÓN. Usando el mismo razonamiento que en el Teorema 3.2.7, podemos suponer que $Z = \overline{E_Z(0)}$ sin que esto suponga pérdida de generalidad alguna. También podemos suponer que $\varphi \geq -1$ λ-e.c.t. para toda $\varphi \in Z$. Para ello, probaremos que existe B medible tal que, para toda función $\varphi \in Z$, $\varphi \geq -1$ en casi todo B, y $\varphi \leq 1$ en casi todo $\Omega \setminus B$. Nos reduciremos al caso anunciado cambiando Z por $S(Z)$ donde S es el operador de multiplicación por $\chi_B - \chi_{\Omega\setminus B}$. Si no existiera un conjunto B medible con tal propiedad, existirían A medible con $\lambda(A) > 0$, $\varepsilon > 0$ y dos funciones φ, φ' en $E_Z(0)$ tales que $\varphi \geq 1 + \varepsilon$ en A, y $\varphi' \leq -1 - \varepsilon$ en A. Vamos a probar que existe $\beta > 1$ tal que $\beta\chi_A \in Z \cap (-Z)$. Sea γ un número positivo que satisfaga $|\gamma\varphi| \leq 1/2$; esto es posible porque

$$E_Z(0) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} n(Z \cap (-Z)) = L^\infty(\lambda)\,.$$

Evidentemente se tiene que $\gamma \leq \frac{1}{2}$. Sea $\psi = \frac{-\gamma\varphi}{1-\gamma}$ en A^c, entonces

$$|\psi| \leq \frac{1/2}{1-\gamma} \leq 1 \text{ e.c.t. en } A^c.$$

Y sea $\psi = \frac{\beta-\gamma\varphi}{1-\gamma}$ en A. Como $\beta \geq 1$ y $\gamma\varphi \leq 1/2$, $\psi\chi_A \geq 0$. Eligiendo β que satisfaga $1 \leq \beta \leq 1 + \gamma\varepsilon$, se tendría $\psi \leq 1$ en A. Por tanto, $\psi \in B_{L^\infty(\lambda)} \subseteq Z$ y se obtiene $\beta\chi_A = (1-\gamma)\psi + \gamma\varphi \in Z$. Análogamente usando φ' obtendríamos $-\beta\chi_A \in Z$, lo que supone una contradicción ya que $Z \cap (-Z) = B_{L^\infty(\lambda)}$.

Sean u y v medidas cónicas en $L^1(\lambda)$ tales que $Z\cap(-Z) = K_v$, $Z = K_u$. Al igual que en la prueba del lema anterior, basta probar que $v^s \leq u^s$ para tener que $Z\cap(-Z)$ es un sumando de Z. Sea π una partición finita de Ω, Σ_π la σ-álgebra generada por π y P_π la esperanza condicionada respecto de Σ_π. Como para toda función $\varphi \in Z$, se tiene que $\varphi \geq -1$ λ-e.c.t., $P_\pi(Z\cap(-Z)) = P_\pi(Z)\cap P_\pi(-Z)$. Entonces $P_\pi(Z\cap(-Z))$ es un sumando de $P_\pi(Z)$ porque estamos en condiciones de aplicar el lema anterior. Entonces las medidas cónicas simetrizadas asociadas verifican que $v^s_\pi \leq u^s_\pi$. Hay que observar que para todo $z^* \in h(X)$, $z^* = \bigvee_{i=1}^n x_i^* - \bigvee_{i=n+1}^m x_i^*$ con $x_i^* \in X^*$ para $i = 1,\ldots,m$, se tiene

$$u_\pi(z^*) = u_\pi\Big(\bigvee_{i=1}^n x_i^* - \bigvee_{i=n+1}^m x_i^*\Big) = u\Big(\bigvee_{i=1}^n P_\pi^*(x_i^*) - \bigvee_{i=n+1}^m P_\pi^*(x_i^*)\Big).$$

Como P_π^* es la misma esperanza condicionada, pero en $L^\infty(\lambda)$, podemos elegir una sucesión (π_k) de particiones tales que $(P^*_{\pi_k}x_j^*)_k$ converja en $L^\infty(\lambda)$ a x_j^* para $j = 1,\ldots m$. Entonces se tiene que $\lim_{k\to\infty} u_{\pi_k}(z^*) = u(z^*)$ y lo mismo ocurre con $\check{u}, v$ y $\check{v}$. Se deduce entonces $u^s(z^*) \geq v^s(z^*)$ si $z^* \geq 0$, lo que implica que $Z\cap(-Z)$ es un zonoide sumando de Z. $\square$

Probaremos que también $Z\cap(-Z)$ es un sumando si es un zonotopo. Para ello, necesitaremos dos lemas previos. Para un conjunto convexo y cerrado K, denotemos por $\mathrm{ext}(K)$ el conjunto de puntos extremales de K.

Lema 3.2.13. *Si Z es un zonoide en $\mathbb{R}^n$, existe $x \in \mathrm{ext}(Z)\cap(-Z)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea K un trasladado de Z cuyo centro de simetría es 0 y $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto tal que $Z = \vec{x}_0 + K$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $Z\cap(-Z)$ tiene interior no vacío ya que $E_Z(0)$ contiene a 0 en su interior relativo y $\mathrm{ext}(E_Z(0)) \subseteq \mathrm{ext}(Z)$ al ser $E_Z(0)$ una cara de Z. Si $\vec{x}_0 = 0$, no hay nada que probar; luego supondremos que $\vec{x}_0 \neq 0$. Denotemos por $\|\cdot\|_K$ el funcional de Minkowski de K. Sea ξ un funcional de norma 1 tal que $\xi(\vec{x}_0) = \|\vec{x}_0\|_K$. Observemos que $\|\vec{x}_0\|_K < 1$ pues en caso contrario, $Z\cap(-Z) \subseteq \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \xi(\vec{x}) = 0\}$ y esto implicaría que $Z\cap(-Z)$ tiene interior vacío.

Como $Z \cap (-Z) = -\vec{x}_0 + \big(K \cap (2\vec{x}_0 + K)\big)$, basta probar que existe $x \in \mathrm{ext}(K) \cap (2\vec{x}_0 + K)$. Vamos a probar el resultado por inducción sobre la dimensión de K. Para $n = 1$ es cierto ya que se reduce a la intersección de dos intervalos compactos no disjuntos. Supongamoslo cierto para $n-1$. Sea $\vec{y}_0 = \frac{2\vec{x}_0}{\|\vec{x}_0\|_K}$; se tiene $\xi(\vec{y}_0) = 2 = \|\vec{y}_0\|_K$. Observemos que $(\vec{y}_0 + K) \cap K$ es no vacío ya que $\frac{\vec{y}_0}{2} \in (\vec{y}_0 + K) \cap K$. Además $(\vec{y}_0 + K) \cap K \subseteq \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \xi(\vec{x}) = 1\}$. Observemos que

$$(\vec{y}_0 + K) \cap \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \xi(\vec{x}) = 1\} = \vec{y}_0 + \big(K \cap \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \xi(\vec{x}) = -1\}\big).$$

Si $L = K \cap \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \xi(\vec{x}) = 1\}$, L es una cara de K y por tanto el trasladado de un zonoide $Z_0 = -\frac{\vec{y}_0}{2} + L$ de dimensión menor o igual que $n-1$. Tenemos pues, $K \cap (\vec{y}_0 + K) = L \cap (\vec{y}_0 - L) = \frac{\vec{y}_0}{2} + (Z_0 \cap (-Z_0))$. Por inducción $\mathrm{ext}(Z_0) \cap (-Z_0) \neq \emptyset$, luego existe $\vec{x} \in \mathrm{ext}(L) \subseteq \mathrm{ext}(K)$ con $\vec{x} \in \vec{y}_0 - L \subseteq \vec{y}_0 + K$. Basta ver que $\vec{x} \in 2\vec{x}_0 + K$, es decir, $\|\vec{x} - 2\vec{x}_0\|_K \leq 1$. Esto se deduce de ser $\|\vec{y}_0 - \vec{x}\|_K \leq 1$, $\|\vec{x}\|_K \leq 1$ y $2\vec{x}_0 = \alpha \vec{y}_0$ con $\alpha \in (0,1)$. □

Hay que hacer notar que el resultado anterior no es cierto para cuerpos convexos y simétricos ya que no es cierto para el octaedro en $\mathbb{R}^3$. La intersección de un octaedro con cierto trasladado suyo se reduce a la intersección de dos triángulos que no se cortan en puntos extremales. La simetría de todas las caras, por tanto, juega un papel esencial en el resultado anterior.

Lema 3.2.14. *Sea Z un zonoide en $\mathbb{R}^n$ tal que $Z \cap (-Z)$ es un zonoide y $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ una dirección tal que $[-\vec{v}, \vec{v}]$ es un sumando de $Z \cap (-Z)$. Si $P_{\vec{v}}$ es la proyección ortogonal sobre el hiperplano ortogonal a $\vec{v}$, se tiene que $P_{\vec{v}}(Z \cap (-Z)) = P_{\vec{v}}(Z) \cap P_{\vec{v}}(-Z)$.*

DEMOSTRACIÓN. Una contención es obvia. Supongamos que existe $\vec{y}_0 \in P_{\vec{v}}(Z) \cap P_{\vec{v}}(-Z)$ pero $\vec{y}_0 \notin P_{\vec{v}}(Z \cap (-Z))$. Sea $\alpha_0 = \max\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \vec{y}_0 \in P_{\vec{v}}(Z \cap (-Z))\}$ y $\vec{x}_0 = \alpha_0 \vec{y}_0$. Se tiene que $\alpha_0 \in [0,1)$. Puesto que $[-\vec{v}, \vec{v}]$ es un sumando de $Z \cap (-Z)$ y $\vec{x}_0 \in P_{\vec{v}}(Z \cap (-Z))$ se tiene que han de existir $a, b \in \mathbb{R}$ con $b - a \geq 2$ tales que para todo $t \in [a,b]$, $\vec{x}_0 + t\vec{v} \in Z \cap (-Z)$. También existen $\mu, \mu' \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{y}_0 + \mu\vec{v} \in Z, \vec{y}_0 + \mu'\vec{v} \in -Z$. De la convexidad de Z y de $-Z$ se deduce que el triángulo de vértices $\vec{x}_0 + a\vec{v}$, $\vec{x}_0 + b\vec{v}$, $\vec{y}_0 + \mu\vec{v}$ está incluido en Z, y el de vértices $\vec{x}_0 + a\vec{v}$, $\vec{x}_0 + b\vec{v}$, $\vec{y}_0 + \mu'\vec{v}$ está incluido en $-Z$. La intersección de los interiores de estos triángulos es no vacía. Cualquier punto $\vec{z}$ de esta intersección está en $Z \cap (-Z)$ y su proyección $P_{\vec{v}}(\vec{z})$ es $\alpha\vec{y}_0$ con $\alpha > \alpha_0$. Esto es una contradicción y por tanto, $P_{\vec{v}}(Z \cap (-Z)) = P_{\vec{v}}(Z) \cap P_{\vec{v}}(-Z)$. □

Teorema 3.2.15. *Si Z es un zonoide en un espacio de Banach tal que $Z \cap (-Z)$ es un zonotopo, entonces $Z \cap (-Z)$ es un sumando de Z.*

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer que estamos en dimensión finita, ya que $Z \cap (-Z) = \overline{E_Z(0)} \cap (-\overline{E_Z(0)})$ y $E_Z(0)$ está incluido en el espacio engendrado por $Z \cap (-Z)$ y todo sumando de $\overline{E_Z(0)}$ lo es de Z. Supondremos por tanto, que Z es un zonoide en $\mathbb{R}^n$. Sean $\vec{v} \in \mathbb{S}^{n-1}$ una dirección y $\lambda > 0$ tales que $[-\lambda\vec{v}, \lambda\vec{v}]$ es un sumando de $Z \cap (-Z)$. Entonces $P_{\vec{v}}(Z)$ es un zonoide y aplicando el Lema 3.2.13 existe $\vec{x}_0 \in \operatorname{ext}\big(P_{\vec{v}}(Z)\big) \cap P_{\vec{v}}(-Z)$. $(P_{\vec{v}})^{-1}(\vec{x}_0)$ es una cara de Z y por tanto, el trasladado de un zonoide sumando de Z. Se tiene $(P_{\vec{v}})^{-1}(\vec{x}_0) = \vec{x}_0 + [a, b]\vec{v}$; pero como $\vec{x}_0 \in P_{\vec{v}}(Z) \cap P_{\vec{v}}(-Z) = P_{\vec{v}}(Z \cap (-Z))$ y $[-\lambda\vec{v}, \lambda\vec{v}]$ es un sumando de $Z \cap (-Z)$, se ha de tener $b - a \geq 2\lambda$. Se deduce que hay un sumando de Z de la forma $[a, b]\vec{v}$ con $b - a \geq 2\lambda$. Si μ es una medida en la esfera tal que $Z = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{rg}\, M_\mu)$ se deduce que $\mu^s \geq \lambda(\delta_{\vec{v}} + \delta_{-\vec{v}})$. Repitiendo el razonamiento para todos los sumandos de $Z \cap (-Z)$ se obtiene el resultado, al igual que en la prueba del Lema 3.2.11. □

A la vista de los resultados anteriores, queda planteado el siguiente problema: estudiar si el hecho $Z \cap (-Z)$ es un zonoide implica $Z \cap (-Z)$ es un sumando de Z. Lo que siempre es cierto es que $Z \cap (-Z)$ es la unión de todos los zonoides simétricos que son sumandos de Z. Efectivamente, si $Z = T[0, 1]$ para un operador débil*-débil continuo de $L^\infty(\lambda)$ con valores en X y $T(\varphi) \in Z \cap (-Z)$, existe $\psi \in [\varphi, \varphi + 1]$ tal que $T(\psi) = 0$. Entonces $Z' = T[(\psi - 1) \vee 0, \psi \wedge 1]$ es un zonoide simétrico sumando de Z, pues $\psi/2 = \frac{1}{2}\big((\psi - 1) \vee 0 + \psi \wedge 1\big)$ y $0 = T(\frac{\psi}{2}) \in Z'$ es su centro de simetría.

El próximo resultado es una generalización del Lema 3.2.13, que no usaremos pero que incluimos por ser una versión más general y podría ser de utilidad a la hora de resolver el problema antes mencionado.

Proposición 3.2.16. *Si Z es un zonoide en un espacio de Banach X, existe $x \in \mathrm{ext}(Z) \cap (-Z)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea μ una medida de probabilidad en (Ω, Σ) y

$$T : L^\infty(\mu) \longrightarrow X$$

un operador débil*-débil continuo tal que $Z = T(H)$ siendo H el intervalo $[0,1]$ en $L^\infty(\mu)$. Si $L = H \cap \mathrm{Ker}(T)$, entonces L es un conjunto convexo y débil*-compacto, por tanto, existe $\varphi_0 \in L$ tal que si $\|\cdot\|_2$ denota la norma en $L^2(\mu)$,

$$\left\|\varphi_0 - \frac{1}{2}\chi_\Omega\right\|_2 \leq \left\|\varphi - \frac{1}{2}\chi_\Omega\right\|_2 \text{ para toda } \varphi \in L \qquad (4).$$

Sean $A = \{\omega \in \Omega : \varphi_0(\omega) > \frac{1}{2}\}$, $B = \{\omega \in \Omega : \varphi_0(\omega) < \frac{1}{2}\}$ y

$$K = \{\varphi \in L^\infty(\mu) : \varphi \in H, \varphi\,|_A = 1, \varphi\,|_B = 0\}.$$

K es un conjunto débil*-compacto y convexo en $L^\infty(\lambda)$.

Veamos que $T(K)$ es un conjunto extremal débil-compacto de Z. La compacidad es una consecuencia de la continuidad de T y la compacidad de K. Sean z_1 y z_2 puntos en Z y $\alpha \in (0,1)$ tales que $\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2 \in T(K)$. Existirán φ_1 y φ_2 en H tales que $z_1 = T(\varphi_1)$ y $z_2 = T(\varphi_2)$. Luego existe $\psi \in K$ tal que $\varphi = \psi - \alpha\varphi_1 - (1-\alpha)\varphi_2 \in \mathrm{Ker}(T)$ y $-1 \leq \varphi \leq 1$. Evidentemente, como $0 \leq \varphi_i \leq 1$ y $\psi = 1$ en A, se tiene que $\varphi \geq 0$ en A y del mismo modo debido a que $\psi = 0$ en B, $\varphi \leq 0$ en B. Sea $\lambda \in [-\frac{1}{2}, 0]$. Como $\varphi_0 > \frac{1}{2}$ en A, $0 \leq \varphi_0 + \lambda\varphi \leq 1$ en A. Así mismo, dado que $\varphi_0 < \frac{1}{2}$ en B, $0 \leq \varphi_0 + \lambda\varphi \leq 1$ en B. Y en $\Omega \setminus (A \cup B)$, $0 \leq \varphi_0 + \lambda\varphi \leq 1$ pues $\varphi_0 = \frac{1}{2}$. Esto significa que $\varphi_0 + \lambda\varphi \in H$ para $\lambda \in [-\frac{1}{2}, 0]$. Por (4),

$$\int (\varphi_0 - \frac{1}{2})^2 d\mu \leq \int (\varphi_0 + \lambda\varphi - \frac{1}{2})^2 d\mu \quad \text{para todo } \lambda \in [-\frac{1}{2}, 0].$$

Entonces

$$0 \leq 2\lambda \int (\varphi_0 - \frac{1}{2})\varphi d\mu + \lambda^2 \int \varphi^2 d\mu \quad \text{para todo } \lambda \in [-\frac{1}{2}, 0].$$

Por tanto, $\int(\varphi_0 - \frac{1}{2})\varphi d\mu \leq 0$ pero $(\varphi_0 - \frac{1}{2})\varphi \geq 0$. Luego $\varphi = 0$ en $A \cup B$. Esto implica que $\alpha\varphi_1 + (1-\alpha)\varphi_2 = 1$ en A y $\alpha\varphi_1 + (1-\alpha)\varphi_2 = 0$ en B, es decir, $\varphi_i \in K$, para $i = 1, 2$ y por tanto, $z_i \in T(K)$. Esto es, $T(K)$ es un conjunto extremal de Z.

Veamos $T(K) \subseteq -Z$: Si $\psi \in K$, entonces es fácil probar que $-1 \leq \psi - 2\varphi_0 \leq 0$. Entonces $T(\psi - 2\varphi_0) \in -Z$ pero $\varphi_0 \in \mathrm{Ker}(T)$ y por tanto, $T(\psi - 2\varphi_0) = T(\psi)$ y se tiene que $T(K) \subseteq -Z$. Hemos probado que existe un conjunto extremal débil compacto de Z incluido en $-Z$, por tanto cualquier punto extremal suyo será un punto extremal de Z contenido en $-Z$. □

CAPÍTULO 4: Normas de ideales de operadores en L^p.

En este capítulo extendemos algunos de los resultados del Capítulo 2 sobre normas de ideales de operadores determinadas por el rango de una medida vectorial. En concreto probaremos en la Sección 1 que, bajo determinadas condiciones, para un operador de $L^p(\lambda)$ en X, la imagen de la bola unidad determina cualquier norma de ideal de operador. En la Sección 2 probaremos que la aplicación que asocia a la imagen de la bola unidad la norma de ideal de un operador con valores en dimensión finita, es continua con respecto a la métrica de Hausdorff.

Sección 1: Operadores en $L^p(\lambda)$.

Para X e Y dos espacios de Banach, usaremos la notación habitual $\mathcal{L}(X,Y)$ para designar a la colección de todos los operadores $T : X \longrightarrow Y$ con respecto a la norma $\|T\| = \sup_{x\in B_X} \|Tx\|$. Denotaremos por $\mathcal{L}$ la clase de todos los operadores entre espacios de Banach arbitrarios.

Un *ideal de operadores* $\mathcal{A}$ es una subclase de $\mathcal{L}$ tal que para cada par de espacios de Banach (X, Y), $\mathcal{A}(X,Y) = \mathcal{A} \cap \mathcal{L}(X,Y)$ satisface las dos condiciones siguientes:

(A1) $x^*\otimes y \in \mathcal{A}(X,Y)$, para todo $x^* \in X^*$ e $y \in Y$; donde $(x^*\otimes y)(x) = \langle x^*, x\rangle \cdot y$, para todo $x \in X$.

(A2) Si X_0 e Y_0 son espacios de Banach, entonces $R \circ T \circ S \in \mathcal{A}(X_0, Y_0)$ siempre que $R \in \mathcal{L}(Y, Y_0)$, $T \in \mathcal{A}(X, Y)$ y $S \in \mathcal{L}(X_0, X)$.

Si además para cada par (X, Y), $\mathcal{A}(X, Y)$ está dotado de una norma $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ tal que:

(N1) $\|x^* \otimes y\|_{\mathcal{A}} = \|x^*\| \cdot \|y\|$, para todo $x^* \in X^*$ e $y \in Y$;

(N2) $\|R \circ T \circ S\|_{\mathcal{A}} \leq \|R\| \cdot \|T\|_{\mathcal{A}} \cdot \|S\|$ siempre que $R \in \mathcal{L}(Y, Y_0)$, $T \in \mathcal{A}(X, Y)$ y $S \in \mathcal{L}(X_0, X)$;

(N3) $[\mathcal{A}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{A}}]$ es un espacio de Banach;

entonces $\mathcal{A}$ se llamará ***un ideal normado*** y $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ una ***norma de ideal de operadores.*** Como consecuencia inmediata de la estructura lineal de $\mathcal{A}(X, Y)$ y de (A1), se obtiene que $\mathcal{A}(X, Y)$ contiene a los operadores de rango finito. Ejemplos clásicos de ideales de operadores de Banach normados son el ideal $[\mathcal{L}, \|\cdot\|]$ de todos los operadores lineales y acotados, $[\mathcal{V}, \|\cdot\|]$ de operadores completamente continuos, $[\Pi_p, \pi_p]$ de operadores p-sumantes, entre otros.

Si X_1, X_2 e Y son tres espacios de Banach, de la propia definición de norma de un operador se deduce que, si tenemos dos operadores $T_1 : X_1 \longrightarrow Y$ y $T_2 : X_2 \longrightarrow Y$ tales que $T_1(B_{X_1}) = T_2(B_{X_2})$, entonces $\|T_1\| = \|T_2\|$. Una pregunta natural que surge de esta observación es el estudio de aquellos ideales de operadores y de aquellas normas de ideales de operadores que están determinadas por la imagen de la bola unidad. El siguiente ejemplo muestra que las normas p-integrales y p-sumantes no están determinadas por la imagen de la bola unidad, en general.

Ejemplo 4.1.1. *Existen dos operadores $T_1 : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$ y $T_2 : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ tales que $T_1(B_{\ell_1}) = T_2(B_{\ell_2})$ pero T_1 es p-sumante para $1 \leq p < +\infty$ y sin embargo T_2 no es p-sumante para ningún p.*

Sea T_1 el operador cociente de ℓ_1 en ℓ_2 dado por la separabilidad de ℓ_2. Entonces $T_1(B_{\ell_1}) = B_{\ell_2}$. Sea T_2 el operador identidad en ℓ_2. Por el Teorema de Grothendieck [DJT, pg. 15], T_1 es 1-sumante y, por tanto, p-sumante para todo $p \in (1, +\infty)$. Como $\mathcal{L}(\ell_1, \ell_2) = \mathcal{I}_p(\ell_1, \ell_2)$ [DHT, pg. 100] para todo $1 < p < +\infty$, se tiene que T_1 es p-integral. El Teorema de Dvoretzky-Rogers muestra sin embargo que T_2 no es p-sumante para ningún $p \in [1, +\infty)$, lo que implica que tampoco p-integral.

A pesar del ejemplo anterior, si imponemos condiciones sobre el espacio de Banach donde está definido el operador o sobre su rango, se puede avanzar en el estudio de este problema. Un resultado positivo en este sentido es el siguiente teorema de A. Grothendieck (ver [G]). Recordemos que un subconjunto K de $L^1(\lambda)$ es ***equimedible*** si para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto medible Ω_ε tal que $\lambda(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) \leq \varepsilon$ y $\{f\chi_{\Omega_\varepsilon} : f \in K\}$ es un subconjunto relativamente compacto de $L^\infty(\lambda)$.

Teorema 4.1.2. *Un operador $T : X \longrightarrow L^1(\lambda)$ es 1-integral si y sólo si es orden acotado y en este caso $i_1(T) = \left\| \sup_{x \in B_X} |T(x)| \right\|_1$. Además, T es nuclear si y sólo si $T(B_X)$ es orden acotado y equimedible.*

Una primera pregunta a la luz de este resultado es qué normas de ideales de operadores valorados en el espacio $L^1(\lambda)$ están determinadas por la imagen de la bola unidad. Desafortunadamente, las clases de ideales de operadores más representativas no verifican esta propiedad. Basta considerar para T_1 y T_2 del Ejemplo 4.1.1 los operadores $S_1 = i \circ T_1$ y $S_2 = i \circ T_2$ siendo i la inclusión isométrica de ℓ_2 en $L^1(\lambda)$. S_1 es p-sumante por la propiedad de ideal de estas normas, pero como i es una isometría, si T_2 no es p-sumante, tampoco lo es S_2.

Observación 4.1.3. *Sean X_1, X_2 e Y tres espacios de Banach. Dos operadores $T_1 : X_1 \longrightarrow Y$ y $T_2 : X_2 \longrightarrow Y$ satisfacen $\overline{T_1(B_{X_1})} = \overline{T_2(B_{X_2})}$ si y sólo si para cada $y^* \in Y^*$, se tiene que $\|T_1^* y^*\| = \|T_2^* y^*\|$.*

En efecto,

$$
\begin{aligned}
\overline{T_1(B_{X_1})} = \overline{T_2(B_{X_2})} &\Leftrightarrow \text{ para todo } y^* \in Y^*, \sup_{x \in B_{X_1}} \langle y^*, T_1 x\rangle = \sup_{x \in B_{X_2}} \langle y^*, T_2 x\rangle \\
&\Leftrightarrow \text{ para todo } y^* \in Y^*, \sup_{x \in B_{X_1}} \langle T_1^* y^*, x\rangle = \sup_{x \in B_{X_2}} \langle T_2^* y^*, x\rangle \\
&\Leftrightarrow \text{ para todo } y^* \in Y^*, \|T_1^* y^*\| = \|T_2^* y^*\|.
\end{aligned}
$$

En realidad, si para algún i con $i = 1, 2$ es X_i es reflexivo, o X_i es un dual y el operador T_i es débil*-débil continuo, se tiene que $\overline{T_i(B_{X_i})} = T_i(B_{X_i})$. Este será fundamentalmente el caso que trataremos más adelante con los espacios L^p.

En el Capítulo 1 vimos que si $T_F : L^\infty(\lambda) \longrightarrow X$ es el operador integración asociado a una medida vectorial F, entonces $\overline{\text{co}}(\text{rg}\, F) - \overline{\text{co}}(\text{rg}\, F) = T_F(B_{L^\infty(\lambda)})$ determina la norma (p,q)-sumante, p-integral y p-nuclear de T_F. Esto quiere decir que $T(B_{L^\infty(\lambda)})$ determina la norma (p,q)-sumante, p-integral y p-nuclear de cualquier operador $T : L^\infty(\lambda) \longrightarrow X$ débil*-débil continuo. Todas estas normas resultan ser normas de ideales de operadores. Vamos a generalizar este hecho a un caso más general de operadores definidos en $L^p(\lambda)$. Para ello, necesitaremos el siguiente resultado, generalización del Teorema 1.3.1 cuya prueba puede encontrarse en [K], [N2] y [Li].

Teorema 4.1.4. *Sea q un número real en $[1, +\infty)$ que no es un entero par. Si μ y ν son dos medidas finitas, positivas y simétricas en $\mathbb{S}^{n-1}$ tales que, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$,*

$$\int |\langle x, \xi\rangle|^q d\mu(x) = \int |\langle x, \xi\rangle|^q d\nu(x);$$

entonces $\mu = \nu$.

Este resultado no es cierto para q un entero par, ya que en este caso, el espacio generado por las funciones $|\langle\cdot,\xi\rangle|^q$, con $\xi\in\mathbb{R}^n$, en el espacio de funciones continuas y simétricas en la esfera es de dimensión finita.

Vamos a analizar primero el caso de operadores con valores en un espacio de dimensión finita. Veamos que en este caso nos podemos reducir a operadores definidos en $L^p(\mu)$ para μ una medida finita en la esfera. Sea $T : L^p(\lambda) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $p\in(1,+\infty]$ (débil* continuo si $p=\infty$). En lo que sigue p' será el exponente conjugado de p ($\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$). Entonces existen n funciones $f_1,\dots,f_n$ en $L^{p'}(\lambda)$ tales que

$$T(\varphi)=\int\varphi(f_1,\dots,f_n)\,d\lambda$$

para toda función $\varphi\in L^p(\lambda)$. Sea $f=(f_1,\dots,f_n)$ y $\|\cdot\|$ la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$; tomemos

$$h=\frac{f}{\|f\|}\qquad(\text{con el convenio } \frac{0}{0}=0).$$

Como cada f_i es una función en $L^{p'}(\lambda)$, la medida ν con densidad $\|f\|^{p'}$ con respecto a λ es finita. Entonces h toma valores en $\mathbb{S}^{n-1}$ ν-e.c.t.. Sea μ_T la medida imagen de ν mediante la función h en los conjuntos de Borel de $\mathbb{S}^{n-1}$. Definimos el operador $S_T : L^p(\mu_T)\longrightarrow\mathbb{R}^n$ de la siguiente forma:

$$S_T(\psi)=\int\psi\cdot\vec{x}\,d\mu_T(\vec{x})\qquad\text{para toda } \psi\in L^p(\mu_T).$$

Observemos que para todo $\xi\in\mathbb{R}^n$, $T^*\xi=\langle\xi,f\rangle$ y $S_T^*\xi=\xi$. Como

$$\begin{aligned}\|\xi\|_{L^{p'}(\mu_T)}=\int|\langle\xi,\vec{x}\rangle|^{p'}d\mu_T(\vec{x})&=\int|\langle\xi,h\rangle|^{p'}d\nu\\&=\int|\langle\xi,f\rangle|^{p'}d\lambda=\|T^*\xi\|_{L^{p'}(\lambda)},\end{aligned}$$

se obtiene que $T(B_{L^p(\lambda)})=S(B_{L^p(\mu_T)})$.

Recíprocamente, para toda medida positiva y finita μ en $\mathbb{S}^{n-1}$ denotaremos por S_μ^p el operador $S_\mu^p : L^p(\mu)\longrightarrow\mathbb{R}^n$ definido por

$$S_\mu^p(\psi)=\int\psi\cdot\vec{x}d\mu(\vec{x})\text{ para toda }\psi\in L^p(\mu).$$

El siguiente lema prueba que la norma de ideal de T coincide siempre con la del operador S_T.

Lema 4.1.5. *Fijada una norma en $\mathbb{R}^n$, para cualquier operador $T : L^p(\lambda) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $p \in (1, +\infty]$ (débil* continuo si $p = +\infty$) y cualquier ideal normado $\mathcal{A}$, se tiene que $||T||_{\mathcal{A}} = ||S_T||_{\mathcal{A}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Para probar esta afirmación, observemos que el operador $R : L^p(\mu_T) \longrightarrow L^p(\lambda)$ definido por

$$R(\psi) = (\psi \circ h)||f||^{p'-1}$$

es una isometría. En efecto,

$$\begin{aligned} ||R(\psi)||_{L^p(\lambda)} &= \Big(\int |\psi \circ h|^p \cdot ||f||^{(p'-1)p} d\lambda\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= \Big(\int |\psi \circ h|^p \cdot ||f||^{p'} d\lambda\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\int |\psi|^p d\mu_T\Big)^{\frac{1}{p}} = ||\psi||_{L^p(\mu_T)}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} S_T(\psi) = \int \psi \cdot \vec{x} d\mu_T(\vec{x}) &= \int (\psi \circ h)||f||^{p'} h d\lambda \\ &= \int (\psi \circ h) \cdot ||f||^{p'-1} f d\lambda = (T \circ R)(\psi), \end{aligned}$$

y por tanto, $S_T = T \circ R$. Entonces $||S_T||_{\mathcal{A}} \leq ||R|| \cdot ||T||_{\mathcal{A}} \leq ||T||_{\mathcal{A}}$. De igual forma se prueba que $Q : L^{p'}(\mu_T) \longrightarrow L^{p'}(\lambda)$ definido por

$$Q(\psi) = (\psi \circ h) \cdot ||f||$$

es una isometría tal que $T^* = Q \circ S_T^*$. Por tanto, $T = S_T \circ Q^*$ y $||T||_{\mathcal{A}} \leq ||Q^*|| \cdot ||S_T||_{\mathcal{A}} \leq ||S_T||_{\mathcal{A}}$. Entonces $||T||_{\mathcal{A}} = ||S_T||_{\mathcal{A}}$. □

Teorema 4.1.6. *Fijemos una norma $|| \cdot ||$ en $\mathbb{R}^n$. Sean $T_1 : L^p(\lambda_1) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $T_2 : L^p(\lambda_2) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dos operadores tales que $T_1(B_{L^p(\lambda_1)}) = T_2(B_{L^p(\lambda_2)})$ y $p \in (1, +\infty]$ con $p' \neq 4, 6, 8, \ldots$ (débil* continuo si $p = +\infty$) y sea $\mathcal{A}$ un ideal normado de operadores. Entonces $||T_1||_{\mathcal{A}} = ||T_2||_{\mathcal{A}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea μ una medida positiva y finita en $\mathbb{S}^{n-1}$. Para todo A subconjunto de Borel de $\mathbb{S}^{n-1}$ sea $\check{\mu}(A) = \mu(-A)$. De la misma manera, para una función $\varphi : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$, denotamos por $\check{\varphi}$ a la función $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Denotamos por μ^s la medida simetrizada de μ, es decir, $\mu^s = \frac{1}{2}(\mu + \check{\mu})$. Sea $\mu \oplus \mu$ la medida definida en los Borelianos de $\mathbb{S}^{n-1} \sqcup \mathbb{S}^{n-1}$ cuya restricción a cada esfera coincide con μ. Para una función φ definida en $\mathbb{S}^{n-1} \sqcup \mathbb{S}^{n-1}$, escribimos $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ donde φ_i es la restricción de φ a cada esfera. Definimos el operador $R_\mu : L^p(\mu \oplus \mu) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$R_\mu(\varphi) = \frac{1}{2^{1/p'}} \int \varphi_1 \cdot \vec{x} d\mu(\vec{x}) + \frac{1}{2^{1/p'}} \int \varphi_2 \cdot \vec{x} d\mu(\vec{x})$$

y el operador $P_\mu : L^p(\mu \oplus \check{\mu}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$P_\mu(\varphi) = \frac{1}{2^{1/p'}} \int \varphi_1 \cdot \vec{x} d\mu(\vec{x}) + \frac{1}{2^{1/p'}} \int \varphi_2 \cdot \vec{x} d\check{\mu}(\vec{x})$$

Observemos que $Q : L^p(\mu \oplus \mu) \longrightarrow L^p(\mu \oplus \check{\mu})$ definida para $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ por $Q(\varphi) = \varphi_1 - \check{\varphi}_2$, es una isometría sobreyectiva tal que $R_\mu = P_\mu \circ Q$. Esto implica que para cualquier ideal normado de operadores $\mathcal{A}$, se tiene que $||R_\mu||_\mathcal{A} = ||P_\mu||_\mathcal{A}$. Como $S_{R_\mu} = S^p_\mu$ y $S_{P_\mu} = S^p_{\mu^s}$, se tiene que $||S^p_\mu||_\mathcal{A} = ||S^p_{\mu^s}||_\mathcal{A}$.

Si ahora tenemos dos operadores $T_1 : L^p(\lambda_1) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $T_2 : L^p(\lambda_2) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tales que $T_1(B_{L^p(\lambda_1)}) = T_2(B_{L^p(\lambda_2)})$ con $p' \neq 2, 4, 6, 8, ...$ y $\mathcal{A}$ es un ideal normado de operadores, entonces, usando el Teorema 4.1.4 y el lema anterior se obtiene

$$||T_1||_\mathcal{A} = ||S^p_{\mu_{T_1}}||_\mathcal{A} = ||S^p_{\mu^s_{T_1}}||_\mathcal{A} = ||S^p_{\mu^s_{T_2}}||_\mathcal{A} = ||S^p_{\mu_{T_2}}||_\mathcal{A} = ||T_2||_\mathcal{A}.$$

El caso $p = p' = 2$ es aún más simple que los anteriores, ya que en este caso, todo subespacio de $L^2(\lambda_i)$ está complementado por una proyección de norma 1. Por la Observación 4.1.3, se tiene que $||T_1^*\xi|| = ||T_2^*\xi||$; es decir, hay una isometría S_1 de $T_1^*(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\lambda_1)$ dada por $S_1(T_1^*\xi) = T_2^*\xi$. Sea $P_1 : L^2(\lambda_1) \longrightarrow T_1^*(\mathbb{R}^n)$ una proyección de norma 1. Como $T_2^* = S_1 \circ P_1 \circ T_1^*$, se tiene $T_2 = T_1 \circ P_1^* \circ S_1^*$ y por tanto, $||T_1||_\mathcal{A} \geq ||T_2||_\mathcal{A}$; se concluye por simetría $||T_1||_\mathcal{A} = ||T_2||_\mathcal{A}$. $\square$

Del resultado anterior se deduce que si X es un espacio de Banach y $T : L^p(\lambda) \longrightarrow X$ es un operador (débil*-débil continuo si $p = +\infty$) con $p' \neq 4, 6, 8, ...$ y $\mathcal{A}$ es un ideal normado de operadores con naturaleza finito-dimensional (determinado por las restricciones o proyecciones a subespacios de dimensión finita) entonces la imagen de la bola unidad determina $\|T\|_{\mathcal{A}}$. Esto ocurre por ejemplo en el caso de operadores (p, q)-sumantes.

El resultado anterior es también cierto para cualquier ideal de operadores valorados en cualquier espacio de Banach. Hemos aislado la demostración en el caso de dimensión finita ya que es más explícita y aclara las ideas usadas en el caso general que se esconden tras el resultado del Teorema 4.1.8. Además, el transferirnos a medidas en $\mathbb{S}^{n-1}$ nos será de utilidad en la próxima sección. Para operadores valorados en espacios de Banach de dimensión infinita usaremos el siguiente resultado que permite hacer una demostración similar a la del caso $p = 2$ de antes. Este resultado es debido a W. Lusky [Lu] para espacios L^q complejos; hace uso de un resultado de equimedibilidad de W. Rudin [Ru] para funciones complejas. La versión real del resultado de Rudin fue dada por W. Linde en [Li] con posterioridad al artículo de Lusky. La misma demostración proporciona, sin cambios, el caso real.

Teorema 4.1.7. *Sea $1 \leq q < +\infty$, $q \neq 4, 6 \ldots$ y E un subespacio de $L^q(\mu)$, $S_0 : E \longrightarrow L^q(\nu)$ una isometría. Entonces existe una extensión de S_0, $S : L^q(\mu) \longrightarrow L^q(\nu)$ tal que $\|S\| = 1$.*

Como consecuencia obtenemos

Teorema 4.1.8. *Sean $T_1 : L^p(\lambda_1) \longrightarrow X$ y $T_2 : L^p(\lambda_2) \longrightarrow X$ dos operadores con valores en un espacio de Banach X tales que $T_1(B_{L^p(\lambda_1)}) = T_2(B_{L^p(\lambda_2)})$ (débil*-débil continuo si $p = \infty$) con $p' \neq 4, 6, 8, ...$ y sea $\mathcal{A}$ un ideal de operadores. Entonces $T_1 \in \mathcal{A}(L^p(\lambda_1), X)$ si y sólo si $T_2 \in \mathcal{A}(L^p(\lambda_2), X)$. Si además $\mathcal{A}$ es un ideal normado, entonces $\|T_1\|_{\mathcal{A}} = \|T_2\|_{\mathcal{A}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos $T_1^* : X^* \longrightarrow L^{p'}(\lambda_1)$ y $T_2^* : X^* \longrightarrow L^{p'}(\lambda_2)$ tales que $T_1(B_{L^p(\lambda_1)}) = T_2(B_{L^p(\lambda_2)})$. Por la observación 4.1.3, para cada $x^* \in X^*$ tenemos $\|T_1^* x^*\| = \|T_2^* x^*\|$. Tomando $E = T_1^*(X^*)$ tenemos una isometría $S_0 : E \longrightarrow L^{p'}(\lambda_2)$ que por el Teorema 4.1.7 se extiende a $S : L^{p'}(\lambda_1) \longrightarrow L^{p'}(\lambda_2)$. Entonces $T_2^* = S \circ T_1^*$ y, por tanto, $T_2 = T_1 \circ S^*$ con $\|S^*\| \leq 1$. Esto implica que, si $\mathcal{A}$ es un ideal de operadores tal que $T_1 \in \mathcal{A}(L^p(\lambda_1), X)$, entonces $T_2 \in \mathcal{A}(L^p(\lambda_2), X)$. Si $\mathcal{A}$ es un ideal normado, entonces $\|T_2\|_{\mathcal{A}} \leq \|T_1\|_{\mathcal{A}}$. De manera simétrica se obtiene, si $T_2 \in \mathcal{A}(L^p(\lambda_2), X)$, que $T_1 \in \mathcal{A}(L^p(\lambda_1), X)$ y $\|T_1\|_{\mathcal{A}} \leq \|T_2\|_{\mathcal{A}}$. □

El Teorema 4.1.7 también es cierto para $q = \infty$ debido a que L^∞ es un espacio inyectivo. Sin embargo, como veremos más adelante en el Ejemplo 4.1.11, no es cierto el Teorema 4.1.8 para $p = 1$. Al intentar reproducir la prueba, si $T_1 : L^1(\lambda_1) \to X$ y $T_1 : L^1(\lambda_2) \to X$ satisfacen $T_1(B_{L^1(\lambda_1)}) = T_2(B_{L^1(\lambda_2)})$, se obtiene que $\|T_1^{**}\|_{\mathcal{A}} = \|T_2^{**}\|_{\mathcal{A}}$. Igualmente ocurre si $p = \infty$ y suprimimos la condición de ser operadores débil*-débil continuos. O incluso, más generalmente para operadores definidos en espacios $\mathcal{C}(K)$ debido a que su dual es un espacio L^1. Usando el Teorema 4.1.7 para $q = 1$, tenemos que, si $T_1 : \mathcal{C}(K_1) \to X$ y $T_2 : \mathcal{C}(K_2) \to X$ satisfacen $T_1(B_{\mathcal{C}(K_1)}) = T_2(B_{\mathcal{C}(K_2)})$, entonces $\|T_1^{**}\|_{\mathcal{A}} = \|T_2^{**}\|_{\mathcal{A}}$.

También veremos, en el Ejemplo 4.1.12, que no es cierto en general el Teorema 4.1.8 para espacios $\mathcal{C}(K)$; ni siquiera para operadores débiles compactos definidos en espacios L^∞ (ver Ejemplo 4.1.13). Sin embargo, el siguiente lema y la observación que acabamos de hacer, nos prueban que el Teorema 4.1.6 es cierto para $p = 1$ y para el caso de espacios $\mathcal{C}(K)$, lo que aislaremos en el Corolario 4.1.10.

Lema 4.1.9. *Sea $Y = \mathcal{C}(K)$ o $Y = L^1(\lambda)$. Para un operador $T : Y \longrightarrow \mathbb{R}^n$, y para cualquier ideal normado de operadores $\mathcal{A}$, se tiene que $\|T^{**}\|_{\mathcal{A}} = \|T\|_{\mathcal{A}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Está claro que $\|T\|_{\mathcal{A}} \leq \|T^{**}\|_{\mathcal{A}}$, ya que $T = T^{**} \circ k_Y$, siendo $k_Y : Y \longrightarrow Y^{**}$ la inyección canónica.

Para probar la desigualdad inversa usaremos que Y^* tiene la propiedad de aproximación métrica. Sean $\varphi_j \in Y^*$, $j = 1, \ldots, n$ tales que $Ty = (\langle y, \varphi_j \rangle)_{j=1}^n$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe un operador $Q : Y^* \longrightarrow Y^*$ de rango finito tal que $Q\varphi_j = \varphi_j$ y $\|Q\| \leq 1+\varepsilon$ (ver [Pi, 10.2.4]). También $Q^* : Y^{**} \longrightarrow Y^{**}$ es un operador de rango finito. Sea $E = Q^*(Y^{**})$. Por el principio de reflexividad local [DJT, pg. 178], para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $R : E \longrightarrow Y$ tal que $\|R\| \leq 1 + \varepsilon$, y $\langle Ry^{**}, \varphi_j \rangle = \langle y^{**}, \varphi_j \rangle$, para todo $y^{**} \in E$ y $j = 1, \ldots, n$. Entonces se tiene, para todo $y^{**} \in Y^{**}$,

$$\begin{aligned} T^{**}y^{**} &= (\langle \varphi_j, y^{**} \rangle)_j = (\langle Q\varphi_j, y^{**} \rangle)_j \\ &= (\langle \varphi_j, Q^* y^{**} \rangle)_j = (\langle \varphi_j, R \circ Q^{**} y^{**} \rangle)_j = T \circ R \circ Q^{**} y^{**}. \end{aligned}$$

Se deduce de esto que $T^{**} = T \circ R \circ Q^{**}$, y $\|T^{**}\|_{\mathcal{A}} \leq \|T\|_{\mathcal{A}}(1+\varepsilon)^2$ para todo $\varepsilon > 0$. Con esto $\|T^{**}\|_{\mathcal{A}} = \|T\|_{\mathcal{A}}$. □

Corolario 4.1.10. *Sean $Y_1 = L^1(\lambda_1)$ e $Y_2 = L^1(\lambda_2)$, o $Y_1 = \mathcal{C}(K_1)$ e $Y_2 = \mathcal{C}(K_2)$. Fijada una norma en $\mathbb{R}^n$, si $T_1 : Y_1 \to \mathbb{R}^n$ y $T_2 : Y_2 \to \mathbb{R}^n$ son dos operadores tales que $\overline{T_1(B_{\mathcal{C}(K_1)})} = \overline{T_2(B_{\mathcal{C}(K_2)})}$ y $\mathcal{A}$ es un ideal normado de operadores, entonces $\|T_1\|_{\mathcal{A}} = \|T_2\|_{\mathcal{A}}$.*

Hemos probado que para un operador $T : L^p(\lambda) \longrightarrow X$ con $p' \neq 4, 6, \ldots$ se tiene que $T(B_{L^p(\lambda)})$ determina el que T pertenezca a un ideal $\mathcal{A}$ de operadores y su norma de ideal. Surge entonces la pregunta natural de caracterizar geométricamente $T(B_{L^p(\lambda)})$ para que T pertenezca a un ideal de operadores. Respuestas totales o parciales a esta pregunta podrían ser de interés. Otro problema que surge es si el Teorema 4.1.8 es cierto para $p' = 2k$ con $k > 1$ un entero. Es conocido que en este caso el Teorema 4.1.7 no lo es (ver [Lu]). Concluimos esta sección con los ejemplos anunciados.

Ejemplo 4.1.11. *Existen dos operadores $T_1 : L^1[0,1] \longrightarrow L^1[0,1]$ y $T_2 : \ell_1 \longrightarrow L^1[0,1]$ tales que $T_1(B_{L^1[0,1]}) = T_2(B_{\ell_1})$ pero T_2 es completamente continuo mientras que no lo es T_1.*

Basta considerar T_1 el operador identidad en $L^1[0,1]$ y T_2 un cociente de ℓ_1 en $L^1[0,1]$. Por la propiedad de Schur de ℓ_1, T_2 es completamente continuo (transforma conjuntos débiles compactos en conjuntos compactos en norma); pero no así T_1, ya que existen conjuntos débilmente compactos en $L^1[0,1]$ que no son compactos.

Ejemplo 4.1.12. *Existen dos operadores $T_1 : \mathcal{C}(K_1) \to \ell_2$ y $T_2 : \mathcal{C}(K_2) \to \ell_2$ y un ideal de operadores $\mathcal{A}$ tales que $\overline{T_1(B_{\mathcal{C}(K_1)})} = \overline{T_2(B_{\mathcal{C}(K_2)})}$, $T_1 \in \mathcal{A}$ pero $T_2 \notin \mathcal{A}$.*

Sea $\Delta = \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ el grupo de Cantor. Entonces es fácil ver que la clase de todos los operadores que factorizan a través de $\mathcal{C}(\Delta)$ forman un ideal de operadores $\mathcal{A}$. Sea $\{r_n\}_n$ la sucesión de funciones de Rademacher en Δ (las funciones coordenadas $r_n\big((\varepsilon_k)_{k=1}^{\infty}\big) = \varepsilon_n$), μ la medida de Haar en Δ (la probabilidad producto de considerar en cada factor $\{-1,1\}$ la que asigna $1/2$ a cada punto), y el operador $T_1 : \mathcal{C}(\Delta) \longrightarrow \ell_2$ definido por

$$T_1(h) = \Big(\int h r_n \, d\mu\Big)_n, \qquad \text{para toda } h \in \mathcal{C}(\Delta).$$

Sea $T_2 : L^\infty(\mu) \longrightarrow \ell_2$ el operador definido por

$$T_2(g) = \Big(\int g r_n \, d\mu\Big)_n, \qquad \text{para toda } g \in L^\infty(\mu).$$

Dado que $B_{\mathcal{C}(\Delta)}$ es débil* densa en $B_{L^\infty(\mu)}$, ya que T_2 es débil*-débil continuo, se tiene que $\overline{T_1(B_{\mathcal{C}(\Delta)})} = T_2(B_{L^\infty(\mu)})$. Recuerdese que $L^\infty(\mu)$ es isométrico a $\mathcal{C}(K_2)$ para cierto compacto K_2.

Es obvio que $T_1 \in \mathcal{A}$. Veamos que $T_2 \notin \mathcal{A}$. Si T_2 factorizara a través de $\mathcal{C}(\Delta)$, existirían $A : L^\infty(\mu) \longrightarrow \mathcal{C}(\Delta)$ y $B : \mathcal{C}(\Delta) \longrightarrow \ell_2$ tales que $T_2 = B \circ A$. El operador A es débil compacto pues, al ser $\mathcal{C}(\Delta)$ separable, no puede fijar ninguna copia de ℓ_∞ (ver [DU, Corolario IV.1.3]), y B es es completamente continuo al ser débilmente compacto y tener $\mathcal{C}(\Delta)$ la propiedad de Dunford-Pettis. Esto forzaría a que T_2 fuera compacto, una contradicción.

Ejemplo 4.1.13. *Dos operadores $T_1 : L^\infty(\mu_1) \to \ell_2(\mathbb{R})$ y $T_2 : L^\infty(\mu_2) \to \ell_2(\mathbb{R})$, y un ideal de operadores $\mathcal{A}$ tales que $\overline{T_1(B_{L^\infty(\mu_1)})} = T_2(B_{L^\infty(\mu_2)})$, $T_1 \in \mathcal{A}$, pero $T_2 \notin \mathcal{A}$.*

Es un hecho conocido que el espacio no separable $\ell_1(\mathbb{R})$ es isométrico a un subespacio de ℓ_∞. Existe un operador cociente de $\ell_1(\mathbb{R})$ sobre el Hilbert no separable $\ell_2(\mathbb{R})$. Por el teorema de Grothendieck, este operador cociente es 1–sumante, luego 2–sumante, y tiene una extensión 2–sumante a un operador definido en ℓ_∞. En conclusión existe un operador sobreyectivo $T_1 \colon \ell_\infty \to \ell_2(\mathbb{R})$ que es 2–sumante, y tal que $B_{\ell_2(\mathbf{R})} \subseteq T_1(B_{\ell_\infty})$.

Tomaremos como $L^\infty(\mu_1) = \ell_\infty$, y como ideal de operadores $\mathcal{A}$ el de los que factorizan a través de ℓ_∞. Evidentemente T_1 pertenece a este ideal. Si consideramos ahora ℓ_∞ como el espacio $\mathcal{C}(\beta\mathbb{N})$; por el teorema de factorización de Pietsch, existe una probabilidad de Radon μ_2 en $\beta\mathbb{N}$, y un operador $S \colon L^2(\mu_2) \to \ell_2(\mathbb{R})$ tal que $T_1\psi = S\psi$, para toda $\psi \in \mathcal{C}(\beta\mathbb{N})$. Nuestro operador T_2 será la restricción de S a $L^\infty(\mu_2)$ que es débil*–débil continuo. Al igual que en el ejemplo anterior se tiene

$$\overline{T_1(B_{L^\infty(\mu_1)})} = \overline{T_1(B_{\mathcal{C}(\beta\mathbf{N})})} = T_2(B_{L^\infty(\mu_2)})\,.$$

Nos queda por ver que T_2 no factoriza a través de ℓ_∞, esto será lo más arduo. Si suponemos que $T_2 = A \circ B$ con $B \colon L^\infty(\mu_2) \to \ell_\infty$, y $A \colon \ell_\infty \to \ell_2(\mathbb{R})$; existe una sucesión $(x_n^*)_n$ en $L^\infty(\mu_2)^*$ con $Bh = \big(x_n^*(h)\big)_n$, para todo $h \in L^\infty(\mu_2)$. Probaremos que podemos encontrar $h_0 \in L^\infty(\mu_2)$, con $T_2 h_0 \neq 0$, y $x_n^*(h_0) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto contradirá que $T_2 = A \circ B$.

Cada x_n^* se descompone de la forma $x_n^* = f_n + y_n^*$, con $f_n \in L^1(\mu_2)$ e y_n^* un funcional puramente finitamente aditivo, que verifica que, para todo $\varepsilon_n > 0$, existe un conjunto D_n medible con $\mu_2(D_n) \geq 1 - \varepsilon_n$, e $y_n^*\big(h\chi_{D_n}\big) = 0$, para todo $h \in L^\infty(\mu_2)$. Tomando $\varepsilon_n = \varepsilon/2^n$, para cierto $\varepsilon > 0$, encontraríamos un mismo conjunto medible D, con $\mu_2(D) \geq 1-\varepsilon$, y $y_n^*(h\chi_D) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $h \in L^\infty(\mu_2)$.

Existe una familia $(g_t)_{t\in\mathbf{R}}$ acotada en $L^2(\mu_2)$ tal que

$$T_2 h = \left(\int h g_t \, d\mu_2\right)_{t\in\mathbf{R}}, \qquad \text{para todo } h \in L^\infty(\mu_2),.$$

Puesto que $B_{\ell_2(\mathbf{R})} \subseteq T_1(B_{\ell_\infty})$, se tiene para $s \neq t$, que $\|g_t - g_s\|_1 \geq 1$. Usando la desigualdad de Cauchy–Schwartz, tenemos que

$$\|\chi_D g_t - g_t\|_1 \leq \|\chi_D - 1\|_2 \|g_t\|_2 \leq \sqrt{\varepsilon} M\,.$$

Si ε es suficientemente pequeño, tendremos entonces, para $s, t \in \mathbb{R}$, $s \neq t$,

$$\|\chi_D g_s - \chi_D g_t\|_1 \geq 1/2\,.$$

El subespacio lineal cerrado Y engendrado por la sucesión $(f_n \chi_D)$ en $L^1(\mu_2)$ es separable, y no puede contener entonces a toda las funciones $\chi_D g_t$. Hay entonces un $t_0 \in \mathbb{R}$, tal que $\chi_D g_{t_0}$ no pertenece a Y; y por el teorema de Hanh-Banach, existe $h_1 \in L^\infty(\mu_2)$ tal que

$$\int h_1 \chi_D g_{t_0} \, d\mu_2 \neq 0, \quad \text{y} \quad \int h_1 \chi_D f_n \, d\mu_2 = 0, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

La función $h_0 = h_1 \chi_D$ es la buscada, puesto que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n^*(h_0) = \int f_n h_0 \, d\mu_2 + y_n^*(h_1 \chi_D) = 0\,.$$

Sección 2: Continuidad de las normas de ideales de operadores.

Sea $\mathcal{K}$ la colección de todos los subconjuntos no vacíos compactos y convexos de $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{K}$ es un espacio métrico completo si se dota de la métrica de Hausdorff d definida para $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ por

$$d(K_1, K_2) = \inf\{\varepsilon : K_1 \subseteq K_2 + \varepsilon B_{\ell_2^n}, K_2 \subseteq K_1 + \varepsilon B_{\ell_2^n}\}.$$

El *funcional soporte* de $K \in \mathcal{K}$ se define para $\xi \in \mathbb{R}^n$ como

$$\Psi_K(\xi) = \sup\{\langle x, \xi\rangle : x \in K\}.$$

Sea $p \in [1, +\infty]$. Denotemos por $\mathcal{K}_p$ al subconjunto de $\mathcal{K}$ formado por aquellos K para los cuales existe un operador $T : L^p(\lambda) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ para el que $\overline{T(B_{L^p(\lambda)})} = K$. Para $p = 1$, $\mathcal{K}_1$ coincide con todo $\mathcal{K}$. $\mathcal{K}_2$ es el conjunto de los elipsoides en $\mathbb{R}^n$. Para $p = \infty$, $\mathcal{K}_p$ coincide con el conjunto de zonoides en $\mathbb{R}^n$ simétricos respecto de 0, y con el conjunto de aquellos $K \in \mathcal{K}$, para los que existe un compacto Hausdorff Ω y un operador T de $\mathcal{C}(\Omega)$ en $\mathbb{R}^n$ con $\overline{T(B_{\mathcal{C}(\Omega)})} = K$. En efecto, si $K = \overline{T(B_{\mathcal{C}(\Omega)}}$, existe una medida de Radon μ en Ω, y $f_1, \ldots, f_n$ en $L^1(\mu)$ tales que

$$T(g) = \left(\int g f_k \, d\mu\right)_{k=1}^n, \qquad \text{para todo } g \in \mathcal{C}(\Omega);$$

puesto que $B_{\mathcal{C}(\Omega)}$ es débil* densa en $B_{L^\infty(\mu)}$, y el operador T tiene una extensión trivial $\tilde{T} : L^\infty(\mu) \to \mathbb{R}^n$ débil* continua, K es un zonoide que coincide con $\tilde{T}(B_{L^\infty(\mu)})$.

Sea $\mathcal{A}$ un ideal normado de operadores; el Teorema 4.1.6 y el Corolario 4.1.10 nos permiten definir, para $p \in [1, +\infty]$, con $p' \neq 4, 6, 8, \ldots$, la aplicación $\|\cdot\|_{\mathcal{A}} : \mathcal{K}_p \to \mathbb{R}$ como $\|K\|_{\mathcal{A}} = \|T\|_{\mathcal{A}}$, para un operador $T : L^p(\lambda) \to \mathbb{R}^n$ para el que $\overline{T(B_{L^p(\lambda)})} = K$. Vamos a probar que esta aplicación así definida es continua con respecto a la distancia de Hausdorff. Comenzaremos con dos lemas en los que separamos los casos $p = 1$ y $p = 2$. Luego continuaremos con la demostración del resto de los casos donde se usan las ideas del Teorema 4.1.6.

Lema 4.2.1. *Fijada una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$ y un ideal normado de operadores $\mathcal{A}$, la aplicación $\|\cdot\|_{\mathcal{A}} : \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua para la distancia de Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_1$ tales que $d(K_1, K_2) \leq \delta$. Tomemos dos sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ tales $\{x_n\}$ es que densa en K_1 e $\{y_n\}$ es densa en K_2.

Sea $\{x'_n\}$ una sucesión de puntos en K_2 tal que $||x_n - x'_n|| \leq \delta$, $\{y'_n\}$ en K_1 con $||y_n - y'_n|| \leq \delta$. Si $T_i : \ell_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$ son operadores tales que $T_1 e_{2n-1} = x_n$ y $T_1 e_{2n} = y'_n$, $T_2 e_{2n} = y_n$ y $T_2 e_{2n-1} = x'_n$, con $(e_n)_n$ la base canónica de ℓ_1; entonces se tienen $K_1 = \overline{T_1(B_{\ell_1})}$, $K_2 = \overline{T_2(B_{\ell_1})}$, y $||T_1 - T_2|| \leq \delta$. Sea $C > 0$ una constante tal que $||T||_{\mathcal{A}} \leq C||T||$ para todo operador $T : \ell_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\big| ||T_1||_{\mathcal{A}} - ||T_2||_{\mathcal{A}} \big| \leq ||T_1 - T_2||_{\mathcal{A}} \leq C||T_1 - T_2|| \leq C\delta,$$

con lo que se obtiene la continuidad. □

Lema 4.2.2. *Fijada una norma $||\cdot||$ en $\mathbb{R}^n$ y un ideal normado de operadores $\mathcal{A}$, la aplicación $||\cdot||_{\mathcal{A}} : \mathcal{K}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua para la distancia de Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos en primer lugar que $E_0 \in \mathcal{K}_2$ es un elipsoide de dimensión n. Entonces $E_0 = T(B_{\ell_2^n})$ para cierto operador biyectivo de ℓ_2^n en $\mathbb{R}^n$. Puesto que la métrica d es equivalente a d' definida para $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ por

$$d'(K_1, K_2) = \inf\{\varepsilon : K_1 \subseteq K_2 + \varepsilon E_0, K_2 \subseteq K_1 + \varepsilon E_0\},$$

un entorno V de E_0 para la distancia de Hausdorff en $\mathcal{K}_2$ será de la forma $V = \{C \in \mathcal{K}_2 : \frac{1}{\tau} E_0 \subseteq C \subseteq \tau E_0\}$, con $\tau > 1$. Si $C \in V$, existe un operador biyectivo S de ℓ_2^n en $\mathbb{R}^n$ tal que $S(B_{\ell_2^n}) = C$. Sea $R = S^{-1} \circ T$. Entonces se tiene que $\frac{1}{\tau} \leq ||R|| \leq \tau$. Dado que $S \circ R = T$ y $T \circ R^{-1} = S$, se obtiene que $||T||_{\mathcal{A}} \leq \tau ||S||_{\mathcal{A}}$ y $||S||_{\mathcal{A}} \leq \tau ||T||_{\mathcal{A}}$. Tomando τ suficientemente cercano a 1, se obtiene la continuidad de $||\cdot||_{\mathcal{A}}$ en E_0.

Para probar el lema en el caso general, sea Y el espacio lineal engendrado por E_0 y P_Y la proyección ortogonal sobre Y. Si $d(C, E_0) \leq \delta$ entonces $d(\vec{x}, Y) \leq \delta$ para todo $\vec{x} \in C$. Si $C = S(B_{\ell_2^n})$, se tiene por tanto,

$$||S\vec{t} - P_Y \circ S\vec{t}|| < \delta \text{ para todo } \vec{t} \in B_2^n.$$

Entonces $\big| ||S||_{\mathcal{A}} - ||P_Y \circ S||_{\mathcal{A}} \big| \leq ||S - P_Y \circ S||_{\mathcal{A}} \leq C||S - P_Y \circ S|| \leq C \cdot \delta$. Por otra parte, $d(P_Y(C), E_0) \leq \delta$. Esto nos reduce al caso anterior, luego si $\varepsilon > 0$, podemos escoger δ suficientemente pequeño tal que $\big| \|E_0\|_{\mathcal{A}} - \|P_Y(C)\|_{\mathcal{A}} \big| \leq \varepsilon$ y $C\delta \leq \varepsilon$. Se concluye que $\big| \|E_0\|_{\mathcal{A}} - \|C\|_{\mathcal{A}} \big| \leq 2\varepsilon$ si δ es suficientemente pequeño. Esto finaliza la prueba del lema. $\square$

Siguiendo los argumentos de la demostración del Teorema 4.1.6 y la notación allí usada, si $p \in (1, +\infty]$ y $p' \neq 2, 4, 6, \ldots$, dado $K \in \mathcal{K}_p$, existe una única medida μ simétrica, finita, definida en $\mathbb{S}^{n-1}$ tal que $K = K_\mu$, siendo $K_\mu = S^p_\mu(B_{L^p(\mu)})$. Denotemos por $\mathcal{M}$ el cono cerrado formado por las medidas positivas finitas y simétricas en $\mathbb{S}^{n-1}$ como subconjunto de $\mathcal{C}(\mathbb{S}^{n-1})^*$ con la topología débil*. Tenemos así bien definida una aplicación biyectiva H_p de $\mathcal{K}_p$ en $\mathcal{M}$ tal que $\mu = H_p(K_\mu)$.

El siguiente lema puede encontrarse en [Bo] para $p = \infty$; nosotros hemos adaptado su demostración al caso general $p \in (1, \infty]$, $p' \neq 2, 4, 6 \ldots$.

Lema 4.2.3. *Supongamos que $p \in (1, +\infty]$ es un número real tal que $p' \neq 2, 4, 6, \ldots$. Entonces $H_p : (\mathcal{K}_p, d) \longrightarrow \mathcal{M}$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la red μ_α converge a μ en la topología débil* de $\mathcal{M}$. Probaremos que K_{μ_α} converge a K_μ. Es suficiente probar existe una subred μ_γ para la que K_{μ_γ} converge a K_μ. Como μ_α converge a μ en la topología débil*, se tiene que $\|\mu_\alpha\| = \int 1 d\mu_\alpha$ converge a $\|\mu\| = \int 1 d\mu$. Por tanto, tomando si es necesario una subred, podemos suponer que $\{\|\mu_\alpha\|\}$ es acotada. Sea Ψ_{μ_α} el funcional soporte de K_{μ_α} y $\rho_\alpha = \sup\{\|x\| : x \in K_\alpha\}$. Es claro que $\rho_\alpha = \sup\{\Psi_{\mu_\alpha}(\xi) : \|\xi\| = 1\}$. Como

$$\Psi_{\mu_\alpha}(\xi) = \Big(\int |\langle x, \xi \rangle|^{p'} d\mu_\alpha(x) \Big)^{\frac{1}{p'}},$$

se tiene que $\rho_\alpha \leq (\mu_\alpha(\mathbb{S}^{n-1}))^{1/p'}$. Por tanto $\{\rho_\alpha\}$ es acotada y por el Principio de selección de Blaschke [DJT, pg. 425], existe una subred μ_γ y un conjunto $K \in \mathcal{K}$ para el que K_{μ_γ} converge a K. Entonces Ψ_{μ_γ} converge puntualmente a Ψ_K. Para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$, la función $h_\xi(x) = |\langle x, \xi \rangle|^{p'}$ es una función continua en

$\mathbb{S}^{n-1}$, por lo que

$$\Psi_{\mu_\gamma}(\xi) = \Big(\int |\langle x, \xi\rangle|^{p'} d\mu_\gamma(x)\Big)^{\frac{1}{p'}} \to \Big(\int |\langle x, \xi\rangle|^{p'} d\mu(x)\Big)^{\frac{1}{p'}} = \Psi_\mu(\xi)$$

con lo que $\Psi_\mu = \Psi_K$ y por tanto, $K = K_\mu$. Esto prueba que la aplicación H_p^{-1} que a cada μ le asocia K_μ es continua e inyectiva.

Sea ahora $K_0 \in \mathcal{K}_p$, si probamos que existe $C > 0$ y un entorno V de K_0 en $\mathcal{K}_p$ tal que $\|H_p(K)\| \leq C$ para todo $K \in V$, tendremos que H_p^{-1} establece un homeomorfismo entre el compacto $\{\mu \in \mathcal{M} : \|\mu\| \leq C\}$ y un compacto de $\mathcal{K}_p$ que contiene a K_0 en su interior; H_p será entonces continua en K_0. Sea $r > 0$ tal que $K_0 \subseteq rB_{\ell_2^n}$. El conjunto $V = \{K \in \mathcal{K}_p : K \subseteq (r+1)B_{\ell_2^n}\}$ es un entorno de K_0. Si $K \in V$ y $\mu = H_p(K)$,

$$\begin{aligned}\|\mu\| &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|\vec{x}\|_2 \, d\mu(\vec{x}) \leq n^{1/2} \int \|\vec{x}\|_{p'} \, d\mu(\vec{x}) \\ &\leq n^{1/2} \Big(\int \|\vec{x}\|_{p'}^{p'} \, d\mu(\vec{x})\Big)^{1/p'} \|\mu\|^{1/p},\end{aligned}$$

la última desigualdad por la desigualdad por Hölder. Luego despejando,

$$\|\mu\| \leq n^{p'/2} \sum_{i=1}^{n} \int |\langle \vec{x}, e_i\rangle|^{p'} \, d\mu(\vec{x}) \leq n^{p'/2} n (r+1)^{p'}.$$

□

El siguiente lema, de carácter técnico, es el último ingrediente que necesitamos para probar el Teorema n.n. con el que concluiremos nuestra memoria.

Lema 4.2.4. *Sea μ una medida positiva y finita en $\mathbb{S}^{n-1}$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición π de $\mathbb{S}^{n-1}$ tal que $\pi = \{A_i\}_{i=1}^k \cup \{C_i\}_{i=1}^k$ donde cada A_i es abierto para $i = 1, \ldots, k$, $\operatorname{diam}(E) < \varepsilon$ para todo $E \in \pi$, y además $\mu(C_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, k$.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un conjunto finito $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^k$ de puntos en $\mathbb{S}^{n-1}$ tal que $\mathbb{S}^{n-1} = \bigcup_{i=1}^k B(\vec{x}_i, \frac{\varepsilon}{4})$. Sea $C_r(x_i) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}_i - \vec{x}\| = r\}$. Como μ es una medida finita, existen conjuntos de la forma $C_{r_i}(x_i)$ con $r_i \in [\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{2}]$ tal que $\mu(C_{r_i}) = 0$, para $i = 1, \ldots, k$. Sea $A_1 = B(x_1, r_1)$ y $C_1 = C_{r_1}(x_1)$. Una vez encontrado $A_1, \ldots, A_i$ y $C_1, \ldots C_i$ para $i = 1, \ldots, k-1$, tomamos $A_{i+1} = B(x_{i+1}, r_{i+1}) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^i \overline{B(\vec{x}_j, r_j)}\right)$ y $C_{i+1} = C_{r_{i+1}}(x_{i+1}) \setminus \bigcup_{j=1}^i \overline{B(\vec{x}_j, r_j)}$. Es obvio que se verifican todas las conclusiones del lema. □

Teorema 4.2.5. *Fijemos una norma en $\mathbb{R}^n$, un ideal normado de operadores $\mathcal{A}$, y $p \in [1, +\infty]$ tal que $p' \neq 4, 6, \ldots$. La aplicación $\|\cdot\|_{\mathcal{A}} : \mathcal{K}_p \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua para la distancia de Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN. Los casos $p = 1$ y $p = 2$ ya han sido probados. Supongamos ahora que $p \in (1, +\infty]$ y $p' \neq 2, 4, 6 \ldots$. En virtud del Lema 4.2.3, basta probar que la aplicación $N_{\mathcal{A}} \colon \mu \mapsto \|S_\nu^p\|_{\mathcal{A}}$ es continua de $\mathcal{M}$ en $\mathbb{R}$. Podemos encontrar una constante $C > 0$ tal que, para todo Banach X, y todo $T \colon X \to \mathbb{R}^n$, se tiene $\|T\|_{\mathcal{A}} \leq C\|T\|$, donde $\|T\|$ indica la norma como operador de X en ℓ_2^n, basta tomar como C la norma en $\mathcal{A}$ de la identidad de ℓ_2^n en $\mathbb{R}^n$ con la norma fijada.

Para comprobar la continuidad de $N_{\mathcal{A}}$ en $\mu = 0$, basta observar que $\|S_\nu^p\| \leq \nu(\mathbb{S}^{n-1})^{1/p'}$ como en la demostración del Lema 4.2.3; por tanto,

$$N_{\mathcal{A}}(\nu) \leq C\|\nu\|^{1/p'} < \varepsilon$$

si $\|\nu\|$ es suficientemente pequeño, lo que se tiene en algún entorno de $\mu = 0$ en $\mathcal{M}$.

Supongamos, pues, que $\mu \neq 0$ y probemos que $N_{\mathcal{A}}$ es continua en μ. Fijemos $\delta > 0$, y para $\varepsilon = \delta^2/2$, tomemos una partición π de $\mathbb{S}^{n-1}$ como en el Lema 4.2.4. Sean $C = \bigcup_{i=1}^k C_i$, y $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$. Elegimos $\varepsilon_i > 0$, para $i = 1, \ldots, k$, tales que, si $\mu(A_i) > 0$ entonces $0 < \varepsilon_i < \mu(A_i)/2$, y

$$\sigma = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \leq \min\left\{\frac{1}{2}\delta^2, \frac{1}{2}\delta \min\{\mu(A_i) : \mu(A_i) > 0\}\right\}.$$

Como para cada conjunto G abierto en $\mathbb{S}^{n-1}$ se tiene,

$$\mu(G) = \sup\left\{\int \varphi d\mu : \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^{n-1}), \quad 0 \leq \varphi \leq \chi_G\right\},$$

y puesto que C es un cerrado con $\mu(C) = 0$ podemos encontrar un entorno U_δ de μ en $\mathcal{M}$ de forma que, para todo $\nu \in U_\delta$, se dan las tres condiciones siguientes:

(a) $\nu(A_i) > \mu(A_i) - \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, k$;

(b) $\nu(C) < \varepsilon$;

(c) $|\nu(\mathbb{S}^{n-1}) - \mu(\mathbb{S}^{n-1})| = \left|\int 1\, d\mu - \int 1\, d\nu\right| < \varepsilon$.

Entonces, siempre que $\mu(A_i) > 0$,

$$\frac{\mu(A_i)}{\nu(A_i)} \leq 1 + \frac{\varepsilon_i}{\nu(A_i)} \leq 1 + \frac{2\varepsilon_i}{\mu(A_i)} \leq 1 + \frac{2\sigma}{\mu(A_i)} \leq 1 + \delta. \tag{1}$$

Para $\nu \in U_\delta$, sean $\mathbb{E}_\nu$ y $\mathbb{E}_\mu$ las esperanzas condicionadas en $L^{p'}(\nu)$ y $L^{p'}(\mu)$, respectivamente, respecto de la σ-álgebra engendrada por la partición π. Sean $X_\nu = \mathbb{E}_\nu(L^{p'}(\nu))$ y $X_\mu = \mathbb{E}_\mu(L^{p'}(\mu))$. Definimos $R_\nu : X_\nu \longrightarrow X_\mu$ para $\psi \in X_\nu$, por $R_\nu(\psi) = \psi$. Es fácil comprobar, debido a (1), que $\|R_\nu\| \leq (1+\delta)^{\frac{1}{p'}}$.

Sea $I = \{i \in \{1,\dots,k\} : \mu(A_i)(1+\delta) > \nu(A_i)\}$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned}\mu(\mathbb{S}^{n-1}) + \varepsilon \geq \nu(\mathbb{S}^{n-1}) &\geq \sum_{i=1}^{k} \nu(A_i) \geq \sum_{i\in I} \nu(A_i) + (1+\delta)\sum_{i\notin I} \mu(A_i)\\ &\geq \sum_{i\in I} \mu(A_i) - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i + \sum_{i\notin I} \mu(A_i) + \delta\mu(\bigcup_{i\notin I} A_i)\\ &= \mu(\mathbb{S}^{n-1}) - \sigma + \delta\mu(\bigcup_{i\notin I} A_i).\end{aligned}$$

Por lo que se concluye que

$$\mu(\bigcup_{i\notin I} A_i) \leq \frac{\varepsilon+\sigma}{\delta} \leq \delta.$$

También se obtiene de lo anterior

$$\begin{aligned}\nu(\bigcup_{i\in I} A_i) \geq \mu(\bigcup_{i\in I} A_i) - \sigma &= \mu(\mathbb{S}^{n-1}) - \mu(\bigcup_{i\notin I} A_i) - \sigma\\ &\geq \nu(\mathbb{S}^{n-1}) - \varepsilon - \delta - \sigma \geq \nu(\mathbb{S}^{n-1}) - \delta^2 - \delta.\end{aligned}$$

Es decir,

$$\nu(\bigcup_{i\notin I} A_i) \leq \delta + \delta^2.$$

Sea $\widetilde{A} = \bigcup_{i\in I} A_i$ y $R_\mu : X_\mu \longrightarrow X_\nu$ definido para $\psi \in X_\mu$, por $R_\mu(\psi) = \psi\chi_{\widetilde{A}}$. Es entonces claro, por elección del conjunto I, que $\|R_\mu\| \leq (1+\delta)^{\frac{1}{p'}}$.

Sea I_μ la inyección de X_μ en $L^{p'}(\mu)$, e igualmente I_ν la de X_ν en $L^{p'}(\nu)$. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}\mathbb{R}^n & \xrightarrow{(S_\nu^p)^*} & L^{p'}(\nu) & \xrightarrow{\mathbb{E}_\nu} & X_\nu & \xrightarrow{I_\nu} & L^{p'}(\nu)\\ & & & & {\scriptstyle R_\nu}\downarrow\uparrow{\scriptstyle R_\mu} & & \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{(S_\mu^p)^*} & L^{p'}(\mu) & \xrightarrow{\mathbb{E}_\mu} & X_\mu & \xrightarrow{I_\mu} & L^{p'}(\mu)\end{array}$$

Dado que $\mathrm{diam}(E) < \varepsilon$, para todo $E \in \pi$, se tiene para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\|\xi - E_\nu\xi\|_{L^\infty(\nu)} \leq \varepsilon\|\xi\|.$$

Y como $\nu(A_i) = 0$ implica que $\mu(A_i) = 0$, y $R_\nu(\chi_{A_i}) = \chi_{A_i}$, también se tiene

$$\left\|(\xi - R_\nu \circ E_\nu \xi)\chi_{A_i}\right\|_{L^\infty(\mu)} \leq \varepsilon\|\xi\|.$$

Para todo $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\|(S^p_\mu)^*\xi - (I_\mu \circ R_\nu \circ \mathbb{E}_\nu \circ (S^p_\nu)^*)\xi\right\|^{p'}_{L^{p'}(\mu)} &= \left\|\xi - (I_\mu \circ R_\nu \circ \mathbb{E}_\nu)\xi\right\|^{p'}_{L^{p'}(\mu)} \\
&= \left\|\xi - (R_\nu \circ \mathbb{E}_\nu)\xi\right\|^{p'}_{L^{p'}(\mu)} = \sum_{i=1}^{k} \int_{A_i} \left|\xi - R_\nu \circ \mathbb{E}_\nu)\xi\right|^{p'} d\mu \\
&\leq \varepsilon^{p'}\mu(A) = \varepsilon^{p'}\mu(\mathbb{S}^{n-1})
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\left\|(S^p_\mu)^* - (I_\mu \circ R_\nu \circ \mathbb{E}_\nu \circ (S^p_\nu)^*)\right\| \leq \varepsilon\mu(\mathbb{S}^{n-1})^{\frac{1}{p'}}.$$

Luego trasponiendo, $\left\|S^p_\mu - S^p_\nu \circ \mathbb{E}^*_\nu \circ R^*_\nu \circ I^*_\mu\right\|_{\mathcal{A}} \leq C\varepsilon\mu(\mathbb{S}^{n-1})^{\frac{1}{p'}}$, y usando las propiedades de ideal normado,

$$N_{\mathcal{A}}(\mu) \leq C\varepsilon\mu(\mathbb{S}^{n-1})^{\frac{1}{p'}} + (1+\delta)^{\frac{1}{p'}} N_{\mathcal{A}}(\nu) \leq C'\delta + (1+\delta)^{\frac{1}{p'}} N_{\mathcal{A}}(\nu). \qquad (2)$$

Recíprocamente, si $i \in I$ y puesto que entonces $\mu(A_i) > 0$, se tiene, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\left\|(\xi - R_\mu \circ \mathbb{E}_\nu \xi)\chi_{A_i}\right\|_{L^\infty(\nu)} \leq \varepsilon\|\xi\|.$$

Se obtiene ahora, para todo $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$\begin{aligned}
\left\|(S^p_\nu)^*\xi - (I_\nu \circ R_\mu \circ \mathbb{E}_\mu \circ (S^p_\mu)^*)\xi\right\|^{p'}_{L^{p'}(\nu)} &= \left\|\xi - (R_\mu \circ \mathbb{E}_\mu)\xi\right\|^{p'}_{L^{p'}(\nu)} \\
&= \sum_{i\in I} \int_{A_i} \|\xi - (R_\mu \circ \mathbb{E}_\mu)\xi\|^{p'} d\nu + \sum_{i \notin I} \int_{A_i} \|\xi\|^{p'} d\nu + \sum_{i=1}^{k} \int_{C_i} \|\xi\|^{p'} d\nu \\
&\leq \varepsilon^{p'}\nu(\widetilde{A}) + \nu(A \setminus \widetilde{A}) + \nu(C) \\
&\leq \varepsilon^{p'}(\mu(\mathbb{S}^{n-1}) + \varepsilon) + (\delta + \delta^2) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Y se deduce, análogamente al caso anterior,

$$N_{\mathcal{A}}(\nu) \leq \eta(\delta) + (1+\delta)^{\frac{1}{p'}} N_{\mathcal{A}}(\mu), \qquad (3)$$

con $\eta(\delta) \to 0^+$ cuando $\delta \to 0^+$. De (2) y (3) se deduce la continuidad de $N_{\mathcal{A}}$ en μ. $\square$

Referencias.

[A] Aleksandrov, A.D., *Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Korpern. II. Neue Ungleichungen zwischen den gemischten Volumina und ihre Anwendungen. (Ruso),* Mat. Sbornik N. S. **2** (1937), 1205–1238.

[AB] Aliprantis, B. y Burkinshaw, O., "Positive operators," Academic Press, New York, 1985.

[B] Blaschke, W., "Kreis und Kugel," Veit, Leipzig, 1916.

[Bo] Bolker, E. D., *A class of convex bodies,* Trans. Amer. Math. Soc. **145** (1969), 323–345.

[C] Choquet, C. H., "Lectures on Analysis Vols. I, II, III,," Benjamin, New York, 1969.

[D] Debieve, C., *On a Radon-Nikodym problem for vector-valued measures,* Pac. J. Math. **107** (1983), 335–339.

[DJ] Delbaen, F. y Janicka, L., *Radon-Nikodym type representation for the variation of vector measure,* Simon Stevin **64** (1990), 299–307.

[DWW] Dvoretzky, A., Wald, A. and Wolfowitz, J., *Relations among certain ranges of vector measures,* Pac. J. Math. **1** (1951), 59–74.

[DJT] Diestel, J., Jarchow, H. y Tonge, A., "Absolutely summing operators," Cambridge studies in advance mathematics 43, Cambridge, 1995.

[DS] Diestel, J. y Seifert, J., *An averaging property of the range of a vector measure*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), 907–909.

[DU] Diestel, J. and Uhl Jr., J.J., "Vector Measures," Amer. Math. Soc. Surveys 15, Providence, R. I., 1977.

[E] Edgar, G., *Measurability in a Banach space*, Indiana Math. J. **26** (1977), 663–677.

[FT] Fremlin, D. and Talagrand, M., *A decomposition theorem for additive set functions and applications to Pettis integral and ergodic means*, Math. Z. **168** (1979), 117–142.

[G] Grothendieck, A., *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. **16 Providence, R. I.** (1955).

[GW] Goodey, P. y Weil, W., *Zonoids and generalisations*, Handbook of convex geometry (1993), 1294–1326, eds. P. Gruber y J.M. Willis, Birkhauser, Basel.

[J] Janicka, L., *Radon-Nikodym problem for the variation of a vector measure*, Pac. J. Math. **144** (1990), 293–297.

[JK] Janicka, L. y Kalton, N.J., *Vector measures of infinite variation*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astron. et Phys. **25** (1977), 232–234.

[K] Kanter, M., *The L_p-norm of sums of translates of a function*, Trans. Amer. Math. Soc. **179** (1973), 35–47.

[Kl] Kluvánek, I., *Characterization of the closed convex hull of the range of a* *vector measure*, J. of Functional Analysis **21** (1976), 316–329.

[L1] Lewis, D. R., *On integrability and summability in vector spaces*, Illinois J. Math. **16** (1972), 294–307.

[L2] Lewis, D.R., *Integration with respect to vector measures*, Pac. J. Math. **33** (1970), 157–165.

[Li] Linde, D.R., *Moments of measures in Banach spaces measures*, Math. Ann. **258** (1982), 277–287.

[LP] Lindenstrauss, J. and Pelczynski, A., *Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications*, Studia Math. **29** (1968), 275–326.

[Lu] Lusky, W., *Some consequences on Rudin's paper "L^p-isometries and equimeasurability"*, Indiana University Math. J. **27** (1978), 859–867.

[M] Matheron, G., *Un théoréme d'unicité pour les hyperplans poissoniens*, J. Appl. Prob. **11** (1974), 184–189.

[Mu] Musial, K., *The weak Radon-Nikodym property in Banach spaces*, Studia Math. **64** (1979), 151–174.

[N1] Neyman, A., *Decomposition of ranges of vector measures*, Israel J. Math. **40** (1981), 54–64.

[N2] Neyman, A., *Representation of L_p-norms and isometric embedding in L_p-spaces*, Israel J. Math. **48** (1984), 129–138.

[P] Petty, C.M., *Centroid surfaces,* Pac. J. Math. **11** (1961), 1535–1547.

[Pi] Pietsch, A., "Operator ideals," North-Holland, Amsterdam, 1980.

[R1] Rickert, N.W., *Measures whose range is a ball,* Pac. J. Math. **23** (1967), 361–371.

[R2] Rickert, N.W., *The range of a measure,* Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 560–563.

[Ro1] Rodríguez-Piazza, L., *The range of a vector measure determines its total variation,* Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), 205–214.

[Ro2] Rodríguez-Piazza, L., *Derivability, variation and range of a vector measure,* Stud. Math. **112** (1995), 165–187.

[Ru] Rudin, W., *L^p-isometries and equimeasurability,* Indiana University Math. J. **25** (1976), 215–228.

[S] Schaefer, H. H., "Banach lattices and positive operators," Springer Verlag, Berlin, New-York, 1974.

[Sc1] Schneider, R., "Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory," Encyclopedia of Mathematics and its applications 44, Cambridge, 1993.

[Sc2] Schneider, R., *Über eine Integralgleichung in der Theorie der konvexen Körper,* Math. Nachr. **44** (1970), 55–75.

[SW] Schneider, R. y Weil, W., *Zonoids and related topics,* Convexity and its applications (1983), 296–317, eds. P. Gruber y J.M. Willis, Birkhauser, Basel.

[T] Talagrand, M., "Pettis integral and measure theory," Memoirs Amer. Math. Soc. 307, Providence, R. I., 1984.

[Th] Thomas, E., *Integral representations in convex cones*, Groningen University Report **ZW-7703** (1977),.

M. Carmen Romero Moreno

MEDIDAS CÓNICAS Y RANGOS DE MEDIDAS VECTORIALES

Apto "CUM LAUDE" por unanimidad

10 septiembre 1996

Joseph Diestel

El Doctorando,

P. Cembranos

M.ª Carmen Romero