

UNIVERSIDAD
DE
SEVILLA

FACULTAD
DE
MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO
DE
ÁLGEBRA

TESIS

Presentada por

Juan GONZÁLEZ-MENESES LÓPEZ

para obtener el título de

DOCTOR EN MATEMÁTICAS

por la Universidad de Sevilla

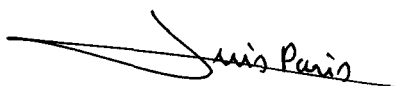
TRENZAS EN SUPERFICIES CERRADAS

El doctorando,

El director de la tesis,

Fdo: Juan González-Meneses López.

Fdo: Prof. Luis Paris.



UNIVERSIDAD DE SEVILLA
NEGOCIADO DE TESIS

Queda registrado este Título de Doctor al
folio... 84 ... número... 130 ... del libro
correspondiente.

Sevilla, 13 JUL. 2000

El Jefe del Negociado

Alvaro B. Hito

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Depositado en Departamento de Álgebra
de la Facultad de Matemáticas
de esta Universidad desde el día 14 - 7 - 2000
hasta el día 5 de Septiembre - de 2000
Sevilla 14 de Julio del 2000
EL DIRECTOR DE Dpto.

Índice General

1	Introducción	5
1.1	Definiciones	6
1.1.1	Trenzas en superficies	6
1.1.2	Sucesiones exactas de grupos de trenzas	8
1.1.3	Trenzas singulares e invariantes de Vassiliev	9
1.2	Resultados conocidos	11
1.2.1	Presentaciones de los grupos de trenzas	11
1.2.2	Invariantes de Vassiliev	13
1.3	Nuevos resultados	18
1.3.1	Nuevas presentaciones de los grupos de trenzas en superficies	18
1.3.2	Invariantes de Vassiliev de trenzas en superficies	25
2	Nuevas presentaciones	31
2.1	Método para encontrar presentaciones	31
2.2	Grupos de trenzas en superficies orientables	33
2.3	Grupos de trenzas en superficies no orientables	47
2.4	El problema de la palabra	51
3	Invariantes de Vassiliev	57
3.1	Los invariantes de Vassiliev distinguen trenzas	57
3.1.1	La filtración de Vassiliev coincide con la filtración J -ádica	57
3.1.2	De J^d a $I(K_n)^d$	59
3.1.3	La estructura de K_n	61
3.1.4	Demostración del teorema 1.3.4	66
3.2	El invariante de Vassiliev universal	68
3.2.1	Construcción de $u : \mathbb{Z}[B_n(M)] \rightarrow \hat{\mathcal{A}}_n \rtimes \mathbb{Z}[H_n]$	69

3.2.2	El isomorfismo $\chi_1 : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{Ugr}(K_n)$	71
3.2.3	El isomorfismo $\chi_2 : \mathcal{Ugr}(K_n) \rightarrow \text{gr}_I \mathbb{Z}[K_n]$	79
3.2.4	$\text{gr}v$ es el inverso de $\chi = \chi_2 \circ \chi_1$	80
3.2.5	$\text{gr}u$ es un homomorfismo	81

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo es un estudio de los objetos matemáticos llamados *trenzas en superficies*. Definidos por Fox y Neuwirth [FoN] en 1962, estos objetos están íntimamente ligados a diversas áreas en topología de baja dimensión. Para empezar, las trenzas en superficies son una generalización natural de las clásicas *trenzas de Artin* ([A],[A2]). Al mismo tiempo, las trenzas en una superficie dada, con un número fijo de cuerdas, forman un grupo que generaliza el grupo fundamental de dicha superficie. Estos grupos de trenzas en superficies son a su vez grupos fundamentales de espacios de dimensión mayor, llamados *espacios de configuración*. Por último, las trenzas en una superficie dada pueden verse como clases de isotopía de homeomorfismos de dicha superficie que fijan un número finito de puntos. Estas clases de isotopía forman un grupo, que pertenece a los llamados *mapping class groups* de la superficie, y que contiene al grupo de trenzas correspondiente como subgrupo.

Todos estos acercamientos a las trenzas en superficies muestran su interés, pues las trenzas de Artin, los espacios de configuración y los mapping class groups son áreas de investigación muy activas y ricas, con aplicaciones a muy diversos campos de las matemáticas y la física.

Este trabajo se divide en dos partes principales. En la primera damos nuevas presentaciones de los grupos de trenzas en superficies cerradas. Estas presentaciones son mucho más simples que las ya conocidas ([Sc]), y los generadores y relaciones tienen una fácil interpretación geométrica. Al final de esta parte usamos dichas presentaciones para dar una solución al problema de la palabra en los grupos de trenzas en superficies.

La segunda parte de este trabajo trata de los *invariantes de Vassiliev de las trenzas en superficies*. Aunque originariamente definidos para ser aplicados a los nudos ([V1],[V2], ver también [Vo]), el concepto de invariante de Vassiliev puede ser aplicado igualmente a diversos objetos “parecidos a los nudos”, tales como enlaces, trenzas de Artin, “tangles”, “string -links” y, como mostramos en este trabajo, trenzas en superficies. Aquí mostramos que los invariantes de Vassiliev distinguen trenzas en superficies. El enunciado análogo a este resultado es conocido para las trenzas de Artin, pero sigue siendo una conjetura para los nudos. Más tarde, definimos los *diagramas de cuerdas ponderados* para trenzas en superficies, que generalizan los diagramas análogos para las trenzas de Artin, y que nos permiten definir el *invariante de Vassiliev universal* para trenzas en superficies, con coeficientes en \mathbb{Z} . El resultado análogo existe para trenzas de Artin [P], pero sólo es conocido para invariantes con coeficientes en \mathbb{R} o \mathbb{Q} en el caso de los nudos: es el famoso teorema de Kontsevich [Kon].

En el resto de este capítulo daremos las definiciones necesarias y los enunciados de los principales resultados. El capítulo 2 contiene las demostraciones de los resultados que conciernen las nuevas presentaciones de los grupos de trenzas en superficies cerradas, así como el algoritmo para resolver el problema de la palabra en estos grupos. Los resultados que tratan de los invariantes de Vassiliev se demuestran en el capítulo 3, donde también definimos el invariante de Vassiliev universal para trenzas en superficies cerradas.

1.1 Definiciones

1.1.1 Trenzas en superficies

Sea M una superficie, no necesariamente orientable, y sea $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ un conjunto de n puntos distintos en M . Una n -trenza en M con base \mathcal{P} es una n -upla $b = (b_1, \dots, b_n)$ de caminos $b_i : [0, 1] \rightarrow M$, tales que

- (1) $b_i(0) = P_i$ para todo $i = 1, \dots, n$,
- (2) $b_i(1) \in \mathcal{P}$ para todo $i = 1, \dots, n$,
- (3) $\{b_1(t), \dots, b_n(t)\}$ son n puntos distintos en M para todo $t \in [0, 1]$.

Para todo $i = 1, \dots, n$, llamaremos a b_i la i -ésima cuerda de b .

Dos n -trenzas con base \mathcal{P} se dicen *equivalentes* si existe una homotopía que transforma (deforma) una en la otra, siempre que en todo momento tengamos una n -trenza con base \mathcal{P} . Se puede definir de forma natural el producto de dos trenzas como el inducido por el producto usual de caminos: para todo $i = 1, \dots, n$, componemos la cuerda de la primera trenza que termina en P_i , con la i -ésima cuerda de la segunda trenza. Este producto está claramente bien definido, y dota al conjunto de clases de equivalencia de n -trenzas de una estructura de grupo. Este grupo se llama *grupo de trenzas de n cuerdas en M con base \mathcal{P}* , y se denota $B_n(M, \mathcal{P})$. Este grupo no depende, salvo isomorfismo, de la elección de \mathcal{P} , sino sólo del número de cuerdas, así que podemos escribir $B_n(M)$ en vez de $B_n(M, \mathcal{P})$.

Una trenza $b = (b_1, \dots, b_n)$ se dice *pura* si $b_i(1) = P_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, es decir, si todas sus cuerdas son lazos. El conjunto de las clases de equivalencia de trenzas puras forma un subgrupo de $B_n(M, \mathcal{P})$ llamado *grupo de trenzas puras de n cuerdas en M con base \mathcal{P}* , que se denota $PB_n(M, \mathcal{P})$. De nuevo, podemos escribir $PB_n(M)$ ya que no depende de la elección de \mathcal{P} . Nótese que si $n = 1$, entonces $B_1(M) = PB_1(M) = \pi_1(M)$, por tanto los grupos de trenzas en M generalizan el grupo fundamental de M .

Los grupos de trenzas en superficies pueden definirse de forma equivalente como sigue. Definimos una n -trenza con base \mathcal{P} como una colección $b = (b_1, \dots, b_n)$ de caminos diferenciables y disjuntos en $M \times [0, 1]$, llamados *cuerdas* de b , tales que la i -ésima cuerda b_i va, de forma monótona en $t \in [0, 1]$, de $(P_i, 0)$ a algún punto $(P_j, 1)$, $P_j \in \mathcal{P}$. Una isotopía en este contexto es una deformación de trenzas que fija los extremos, y la multiplicación se define por concatenación. Las clases de isotopía de trenzas con esta multiplicación forman el grupo $B_n(M, \mathcal{P})$ o, de forma equivalente, $B_n(M)$. Nótese que si reemplazamos M por un disco cerrado D , obtenemos el grupo $B_n(D)$, que se denota normalmente B_n , y que es el clásico grupo de trenzas de Artin [A2]. En la figura 1.1 vemos un ejemplo de trenza de Artin; las trenzas en una superficie M son semejantes, sustituyendo D por M .

Existe una interpretación de los grupos de trenzas como grupos fundamentales de ciertos espacios, llamados *espacios de configuración*. Sea $F_n M$

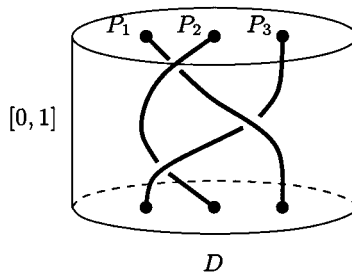


Figura 1.1: Una trenza de Artin de tres cuerdas.

el espacio de n -uplas de puntos distintos en M , es decir, $F_n M = M^n \setminus \Delta$, donde

$$\Delta = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^n / x_i = x_j \text{ para algún } i \neq j\}.$$

Claramente, se tiene que $PB_n(M) \simeq \pi_1(F_n M)$. Consideremos ahora el grupo Σ_n de permutaciones de n elementos. Este grupo actúa de forma natural sobre $F_n M$ permutando coordenadas, luego podemos considerar el *espacio de configuración*:

$$\widehat{F}_n M = F_n M / \Sigma_n,$$

que puede verse como el espacio de inmersiones de n puntos indistinguibles en M . Claramente tenemos $B_n(M) \simeq \pi_1(\widehat{F}_n M)$.

1.1.2 Sucesiones exactas de grupos de trenzas

El modo de ver las trenzas mediante los espacios de configuración nos proporciona algunas sucesiones exactas, de gran utilidad, provenientes de fibraciones. La primera procede del espacio recubridor

$$F_n M \longrightarrow \widehat{F}_n M,$$

con fibra Σ_n . éste induce la siguiente sucesión exacta:

$$1 \longrightarrow PB_n(M) \longrightarrow B_n(M) \xrightarrow{\pi} \Sigma_n \longrightarrow 1, \quad (1.1)$$

donde el homomorfismo π envía una trenza dada sobre la permutación que ésta induce en \mathcal{P} .

Consideremos ahora la fibración de Fadell-Neuwirth [FaN]: dado $1 \leq m < n$, la aplicación

$$p: \begin{array}{ccc} F_n M & \longrightarrow & F_m M \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_{n-m+1}, \dots, x_n) \end{array}$$

es una fibración localmente trivial con fibra $F_{n-m}(M \setminus \{Q_1, \dots, Q_m\})$, para cualquier elección de los puntos $\{Q_1, \dots, Q_m\}$. Sea M una superficie cerrada distinta de la esfera y del plano proyectivo (luego $\pi_2(M) = 1$), sea $\mathcal{P}' = \{P_2, \dots, P_n\}$ y tomemos $m = n - 1$. Por la sucesión exacta larga de grupos de homotopía de esta fibración, obtenemos

$$1 \longrightarrow \pi_1(M \setminus \mathcal{P}', P_1) \xrightarrow{i} PB_n(M, \mathcal{P}) \xrightarrow{e} PB_{n-1}(M, \mathcal{P}') \longrightarrow 1. \quad (1.2)$$

Si $\gamma \in \pi_1(M \setminus \mathcal{P}', P_1)$, entonces $i(\gamma) = (\gamma, e_{P_2}, \dots, e_{P_n})$, donde e_{P_i} denota el camino constante con base P_i , y dada $b = (b_1, \dots, b_n) \in PB_n(M, \mathcal{P})$, se tiene $\varrho(b) = (b_2, \dots, b_n)$.

Por último, si b es una trenza pura, cada cuerda b_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) de b es un lazo en M con punto base P_i , que determina un elemento $\mu_i \in \pi_1(M)$. Esto induce un homomorfismo $\theta: PB_n(M) \rightarrow \pi_1(M)^n$, que envía (b_1, \dots, b_n) sobre (μ_1, \dots, μ_n) . Definimos $K_n = \ker \theta$, y obtenemos la sucesión exacta:

$$1 \longrightarrow K_n \longrightarrow PB_n(M) \xrightarrow{\theta} \pi_1(M)^n \longrightarrow 1. \quad (1.3)$$

Si M es distinto de la esfera y del plano proyectivo, se sabe que K_n es el cierre normal en $PB_n(M)$ del subgrupo $PB_n(D)$, donde D es un disco en M que contiene a \mathcal{P} (ver [G]).

1.1.3 Trenzas singulares e invariantes de Vassiliev

A lo largo de esta subsección consideraremos las trenzas como una colección de caminos en el cilindro $M \times [0, 1]$.

Del mismo modo en que los grupos de trenzas de Artin fueron extendidos a los monoides de trenzas singulares ([B2],[Ba]), el grupo de trenzas $B_n(M)$ puede extenderse a $SB_n(M)$, el *monoide de trenzas singulares de n cuerdas en M* . Las cuerdas de una trenza singular se pueden cortar transversalmente, pero sólo en un número finito de puntos dobles, llamados *puntos singulares*.

Al igual que con las trenzas no singulares, una isotopía es una deformación de trenzas singulares que fija los extremos, y la multiplicación se define por concatenación. Nótese que las clases de isotopía de trenzas singulares forman un monoide y no un grupo, ya que las trenzas con un punto singular o más no son invertibles.

Un *invariante* de trenzas en M con valores en un grupo abeliano A es una aplicación conjuntista $v : B_n(M) \rightarrow A$. Como en el caso de los nudos y las trenzas de Artin, es posible extender v a las trenzas singulares mediante la fórmula recursiva

$$v \left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \blacktriangleright \quad \blacktriangleleft \end{array} \right) = v \left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \blacktriangleright \quad \blacktriangleleft \end{array} \right) - v \left(\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \blacktriangleright \quad \blacktriangleleft \end{array} \right)$$

El dibujo de la izquierda representa un pequeño entorno de un punto singular en una trenza singular. Los del lado derecho representan las trenzas obtenidas de la anterior mediante la *resolución* de ese punto singular. Es decir, modificamos la primera trenza dentro del entorno del punto singular, de modo *positivo* y *negativo*, para obtener dos trenzas singulares con un punto singular menos que la anterior.

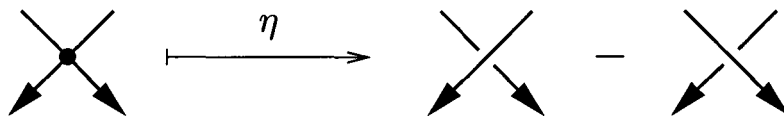
Hacemos notar que este método está bien definido al ser M orientable. En el caso no orientable, también habría dos posibles modificaciones, pero no sería posible distinguir la positiva de la negativa.

Sea d un entero. Un *Invariante de Vassiliev de tipo d* es un invariante v tal que $v(b) = 0$ para toda trenza singular b con más de d puntos singulares.

Hay una definición equivalente de invariante de Vassiliev, en términos de la llamada *filtración de Vassiliev*. En primer lugar, consideremos el anillo de grupo $\mathbb{Z}[B_n(M)]$. Podemos definir una aplicación

$$\eta : SB_n(M) \longrightarrow \mathbb{Z}[B_n(M)]$$

que “resuelve” todos los puntos singulares de una trenza dada, con los signos correspondientes. Es decir,



Esta aplicación es un morfismo multiplicativo bien definido. Nótese que una trenza singular con d puntos singulares es enviada a una suma alternada de 2^d trenzas no singulares, cada una con coeficiente $+1$ o -1 dependiendo del signo de sus resoluciones correspondientes.

Sea $S_d B_n(M)$ el conjunto de las clases de isotopía de las trenzas singulares con d puntos singulares. Denotaremos V_d al \mathbb{Z} -módulo engendrado por $\eta(S_d B_n(M))$. Se puede verificar fácilmente que V_d es un ideal bilátero de $\mathbb{Z}[B_n(M)]$ y que se tienen las inclusiones $V_{d+1} \subset V_d$ y $V_{d_1} V_{d_2} \subset V_{d_1+d_2}$, para todo $d_1, d_2, d \in \mathbb{N}$. Hemos obtenido entonces una filtración

$$\mathbb{Z}[B_n(M)] = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \cdots,$$

que se llama la *filtración de Vassiliev* de $\mathbb{Z}[B_n(M)]$.

La definición de invariante de Vassiliev en términos de la filtración de Vassiliev es como sigue. Todo invariante $v : B_n(M) \rightarrow A$ puede extenderse linealmente a un homomorfismo de \mathbb{Z} -módulos $v : \mathbb{Z}[B_n(M)] \rightarrow A$. Nótese que la anterior extensión de v a las trenzas singulares se puede expresar también de la forma: $v(b) = v(\eta(b))$, para todo $b \in SB_n(M)$. Entonces, v es un invariante de Vassiliev de tipo d si y sólo si se anula en V_{d+1} . Por tanto, el conjunto de invariantes de Vassiliev de tipo d con valores en A es igual a

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[B_n(M)]/V_{d+1}, A).$$

1.2 Resultados conocidos

1.2.1 Presentaciones de los grupos de trenzas

Los grupos de trenzas se calcularon en términos de generadores y relaciones desde el comienzo mismo de su estudio. E. Artin, en su primer artículo sobre trenzas [A], da la famosa presentación de B_n , el grupo de trenzas de Artin de n cuerdas, que es la siguiente:

Presentación de B_n

- Generadores: $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$.
- Relaciones:
 - $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ ($|i - j| \geq 2$),
 - $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ ($1 \leq i \leq n - 2$).

Igualmente se encontraron presentaciones parecidas para algunas superficies en particular. Por ejemplo, Fadell y Van Buskirk [FvB] dan la siguiente presentación para el grupo de trenzas de la esfera:

Presentación de $B_n(S^2)$

- Generadores: $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$.
- Relaciones:
 - $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ ($|i - j| \geq 2$),
 - $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ ($1 \leq i \leq n - 2$),
 - $\sigma_1 \dots \sigma_{n-1} \sigma_{n-1} \dots \sigma_1 = 1$,

y Van Buskirk [vB] demuestra que la siguiente es una presentación del grupo de trenzas del plano proyectivo:

Presentación de $B_n(P^2)$

- Generadores: $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \varrho_1, \dots, \varrho_n$
- Relaciones:
 - $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ ($|i - j| \geq 2$),
 - $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ ($1 \leq i \leq n - 2$),
 - $\sigma_i \varrho_j = \varrho_j \sigma_i$ ($j \neq i, i + 1$),
 - $\varrho_i = \sigma_i \varrho_{i+1} \sigma_i$,
 - $\varrho_{i+1}^{-1} \varrho_i^{-1} \varrho_{i+1} \varrho_i = \sigma_i^2$,
 - $\varrho_i^2 = \sigma_1 \dots \sigma_{n-1} \sigma_{n-1} \dots \sigma_1$.

Por último, Scott [Sc] da presentaciones de los grupos de trenzas de todas las superficies cerradas, pero desafortunadamente, dichas presentaciones no son tan simples como las anteriores. El propósito de la primera parte de este trabajo es encontrar presentaciones nuevas y más simples de los grupos de trenzas de todas las superficies cerradas.

1.2.2 Invariantes de Vassiliev

La pregunta más importante concerniente a los invariantes de Vassiliev es si distinguen los nudos, es decir, si para cada par de nudos no isotópicos existe un invariante de Vassiliev que toma valores diferentes para cada uno de ellos. En el caso de las trenzas de Artin, se sabe que la respuesta a esta pregunta es afirmativa:

Teorema 1.2.1. *Dadas dos trenzas de Artin b y c no equivalentes, existe un entero $N \geq 1$ y un invariante de Vassiliev v_N de tipo N tal que $v_N(b) \neq v_N(c)$. Además, se puede tomar v_N con valores en \mathbb{Z} .*

La primera afirmación del teorema 1.2.1 la demostró Kohno ([Koh], ver también [B-N2]), y la posibilidad de tomar valores en \mathbb{Z} es un resultado de Papadima [P]. Nosotros demostraremos el resultado análogo para las trenzas en superficies.

Por otra parte, el estudio de los invariantes de Vassiliev de nudos y trenzas de Artin es esencialmente equivalente al estudio de los diagramas de cuerdas. Un *diagrama de cuerdas* para nudos es una colección finita de cuerdas, con extremos disjuntos, en un círculo orientado. Dos diagramas se consideran equivalentes si existe un difeomorfismo del círculo que preserva la orientación, y que envía uno en el otro. Denotamos \mathcal{C}_m el conjunto formado por los diagramas de cuerdas que contienen exactamente m cuerdas.

Podemos asociar fácilmente un diagrama de cuerdas en \mathcal{C}_m a cualquier nudo singular con m puntos singulares, de la manera siguiente: Un nudo singular es una aplicación diferenciable $K : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde se permiten un número finito de puntos dobles. Para cada punto doble de K , consideramos la cuerda en S^1 que une sus dos preimágenes. La unión de estas cuerdas forma el diagrama de cuerdas asociado a K . Véase un ejemplo en la figura 1.2.

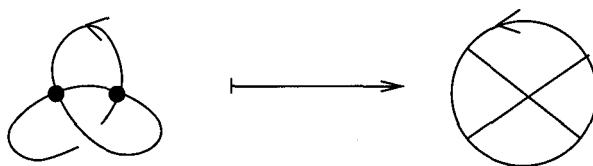


Figura 1.2: Un nudo singular y su diagrama de cuerdas asociado.

Sea $v : \mathcal{K} \rightarrow A$ un invariante de Vassiliev de tipo m , donde \mathcal{K} es el conjunto de todos los nudos y A es un grupo abeliano. V. A. Vassiliev vio que a v se le puede asociar una aplicación $W_v : \mathcal{C}_m \rightarrow A$, que se define de la siguiente manera: para todo $D \in \mathcal{C}_m$, $W_v(D) = v(K)$, donde K es cualquier nudo singular cuyo diagrama de cuerdas asociado sea D . También demostró Vassiliev que W_v verifica las dos condiciones siguientes:

1. $W_v(D) = 0$ para todo $D \in \mathcal{C}_m$ con una cuerda aislada (una cuerda disjunta de todas las demás).
2. $W_v(D_1) - W_v(D_2) = W_v(D_3) - W_v(D_4)$, donde $D_1, D_2, D_3, D_4 \in \mathcal{C}_m$ son diagramas que difieren dos a dos sólo en dos cuerdas, del modo representado en la figura 1.3 (donde sólo están dibujadas estas dos cuerdas).

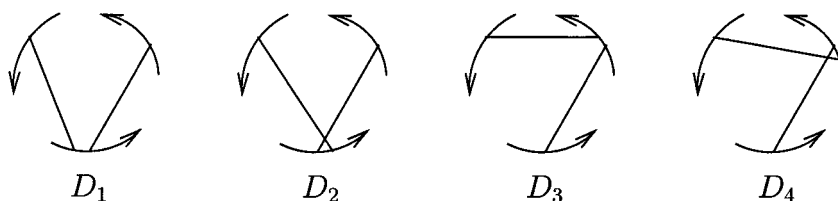


Figura 1.3: Los diagramas de cuerdas de la condición 2.

Una aplicación $W : \mathcal{C}_m \rightarrow A$ que verifica las condiciones anteriores se llama un *sistema de peso*. En el caso $A = \mathbb{R}$, M. Kontsevich [Kon] definió una aplicación $W \mapsto v(W)$, que asocia a todo sistema de peso $W : \mathcal{C}_m \rightarrow \mathbb{R}$ un invariante de Vassiliev $v(W)$ de tipo m cuyo sistema de peso asociado es W , es decir, $W_{v(W)} = W$. Además, si v es otro invariante de Vassiliev de tipo m cuyo sistema de peso asociado sea W , entonces la diferencia entre v y $v(W)$ es un invariante de Vassiliev de tipo $m - 1$.

Existe un enunciado equivalente de este resultado. Consideremos el \mathbb{Z} -módulo libre engendrado libremente por todos los diagramas de cuerdas, y denotemos \mathcal{A} el \mathbb{Z} -módulo que se obtiene del anterior imponiendo las relaciones

1. $D = 0$ para todo diagrama D con una cuerda aislada.

2. $D_1 - D_2 = D_3 - D_4$, donde D_1, D_2, D_3, D_4 son los diagramas representados en la figura 1.3.

Como todas estas relaciones son homogéneas, podemos definir \mathcal{A}_m como el submódulo de \mathcal{A} generado por los diagramas de cuerdas en \mathcal{C}_m . Por tanto, los sistemas de peso son simplemente aplicaciones lineales $W : \mathcal{A}_m \rightarrow A$.

Si $A = \mathbb{R}$, consideremos el \mathbb{R} -módulo graduado \mathcal{W} formado por los sistemas de peso con valores en \mathbb{R} . Consideremos también el \mathbb{R} -módulo \mathcal{V} formado por los invariantes de Vassiliev con valores en \mathbb{R} . Está filtrado de forma natural por los ideales \mathcal{V}_m , que consisten en los invariantes de Vassiliev de tipo m , $m \geq 0$. Por tanto, podemos considerar la \mathbb{R} -álgebra graduada $gr\mathcal{V} = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{V}_{m+1}/\mathcal{V}_m$. El resultado de Kontsevich se convierte en:

$$gr\mathcal{V} \simeq \mathcal{W}.$$

Así, para $A = \mathbb{R}$, los invariantes de Vassiliev y los sistemas de peso son esencialmente lo mismo. Este resultado fue mejorado hasta $A = \mathbb{Q}$ por Le y Murakami [LM]. No se sabe si es cierto para $A = \mathbb{Z}$.

La noción de diagramas de cuerdas se ha definido igualmente para las trenzas de Artin. Un *diagrama de cuerdas* para B_n (el grupo de trenzas de Artin de n cuerdas) es un diagrama que consta de n líneas verticales y un número finito de segmentos horizontales (“cuerdas”) que las conectan, como en la figura 1.4.

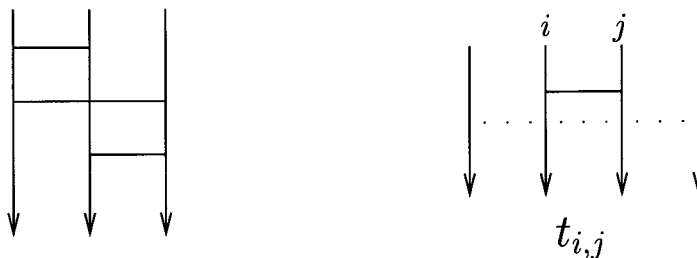


Figura 1.4: Un diagrama de cuerdas para B_3 y el generador $t_{i,j}$.

Consideremos el \mathbb{Z} -módulo libremente generado por todos los diagramas de cuerdas para B_n . Podemos definir una multiplicación de diagramas de cuerdas por concatenación de las líneas verticales respectivas, de modo que

este \mathbb{Z} -módulo se convierte en una \mathbb{Z} -álgebra. Esta \mathbb{Z} -álgebra es equivalente a $\mathbb{Z}[t_{i,j}]$, la \mathbb{Z} -álgebra de polinomios con coeficientes enteros en las indeterminadas no conmutativas $t_{i,j}$, donde para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $t_{i,j}$ representa una cuerda que une la i -ésima y la j -ésima líneas, como en la figura 1.4. Claramente, $t_{i,j} = t_{j,i}$.

Denotemos por \mathcal{D}_n la \mathbb{Z} -álgebra cociente obtenida a partir de $\mathbb{Z}[t_{i,j}]$ imponiendo las relaciones

- $[t_{i,j}, t_{k,l}] = 0$, para $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$, distintos,
- $[t_{i,j}, t_{j,k} + t_{i,k}] = 0$, para $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, distintos,

donde el corchete $[a, b]$ significa $ab - ba$. Denotemos por $\widehat{\mathcal{D}}_n$ la completación natural de \mathcal{D}_n .

El grupo de permutaciones Σ_n actúa sobre $\widehat{\mathcal{D}}_n$ permutando los subíndices (las líneas verticales), luego podemos considerar la \mathbb{Z} -álgebra $\widehat{\mathcal{D}}_n \rtimes \mathbb{Z}[\Sigma_n]$. Este álgebra lleva la filtración inducida por la de $\widehat{\mathcal{D}}_n$, y así su álgebra graduada asociada es $\mathcal{D}_n \rtimes \mathbb{Z}[\Sigma_n]$. Por otra parte, el álgebra graduada asociada a $\mathbb{Z}[B_n]$ es $\text{gr}_V \mathbb{Z}[B_n] = \bigoplus_{d=0}^{\infty} (V_d/V_{d+1})$, donde $\{V_d\}_{d=0}^{\infty}$ es la filtración de Vassiliev de $\mathbb{Z}[B_n]$. En este caso, el resultado análogo al de Kontsevich es el siguiente.

Teorema 1.2.2. (Papadima [P]). *Existe un homomorfismo de \mathbb{Z} -módulos $M : \mathbb{Z}[B_n] \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_n \rtimes \mathbb{Z}[\Sigma_n]$ tal que el morfismo graduado correspondiente*

$$\text{gr}M : \text{gr}_V \mathbb{Z}[B_n] \longrightarrow \mathcal{D}_n \rtimes \mathbb{Z}[\Sigma_n]$$

es un isomorfismo de \mathbb{Z} -álgebras graduadas.

La analogía entre este resultado y el de Kontsevich es la siguiente: como el conjunto de invariantes de Vassiliev de tipo d con valores en A es igual a

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[B_n]/V_{d+1}, A),$$

entonces el cociente $\mathcal{V}_d/\mathcal{V}_{d-1}$ de los invariantes de Vassiliev de tipo d módulo invariantes de Vassiliev de tipo $d-1$ es igual a

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(V_d/V_{d+1}, A),$$

luego $gr\mathcal{V} \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{gr}_{\mathcal{V}}\mathbb{Z}[B_n], A)$. Por tanto, el teorema 1.2.2 implica

$$gr\mathcal{V} \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{D}_n \rtimes \mathbb{Z}[\Sigma_n], A),$$

donde el lado derecho de la ecuación es el análogo, para trenzas de Artin, de los sistemas de peso definidos para los nudos.

El isomorfismo grM es fácil de describir. Se observa que $\text{gr}_{\mathcal{V}}\mathbb{Z}[B_n]$ está generado como \mathbb{Z} -módulo por los elementos $\eta(b)$, donde $b \in SB_n$. Elijamos entonces $b \in SB_n$ con d puntos singulares (sucesivos). Para todo $r = 1, \dots, d$, sean $i_r, j_r \in \{1, \dots, n\}$ tales que el r -ésimo punto singular de b está en la intersección de la i_r -ésima y la j_r -ésima cuerda, y sea s la permutación inducida por b . Entonces $grM(\eta(b))$ se define de la siguiente forma:

$$grM(\eta(b)) = \left(\prod_{r=1}^d t_{i_r, j_r} \right) \cdot s.$$

Véase un ejemplo en la figura 1.5.

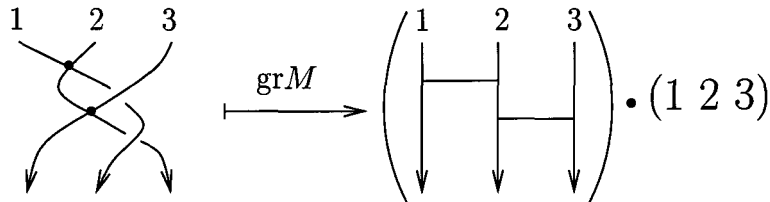


Figura 1.5: Ejemplo de la acción de grM .

Cabe mencionar aquí que J. Lieberum [L] demuestra resultados análogos para nudos en $M \times [0, 1]$, donde M es una superficie conexa, compacta y con borde, o bien el plano proyectivo. Sus resultados tratan de invariantes con coeficientes en \mathbb{Q} . Más aún, él define unos diagramas de cuerdas ponderados, pero éstos no coinciden con los que nosotros definiremos más adelante.

En este trabajo definiremos la noción de diagramas de cuerdas (ponderados) para trenzas en superficies, y probamos el análogo del teorema 1.2.2.

1.3 Nuevos resultados

1.3.1 Nuevas presentaciones de los grupos de trenzas en superficies

La primera contribución de este trabajo consiste en dar nuevas presentaciones de los grupos de trenzas en las superficies cerradas, cuya concisión sea comparable a las de B_n , $B_n(S^2)$ y $B_n(P^2)$ expuestas anteriormente. En esta sección expondremos las presentaciones, definiendo los generadores y mostrando que las relaciones propuestas se verifican. Empecemos pues por el caso de una superficie cerrada orientable distinta de la esfera.

Sea M una superficie cerrada, orientable, de género $g \geq 1$. Lo primero que necesitamos es una representación geométrica de las trenzas en M . Representemos M como un polígono L de $4g$ lados, identificados como en la figura 1.6 (ver [M], pág. 34, ejerc. 8.9).

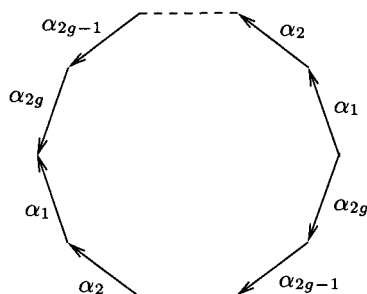


Figura 1.6: El polígono L que representa a M .

Ahora podríamos considerar el cilindro $L \times I$ ($I = [0, 1]$), y representar una trenza b en M como suele hacerse para el disco, es decir, dibujando en $L \times \{t\}$ los n puntos $b_1(t), \dots, b_n(t)$. Pero en ese caso una cuerda podría “atravesar un muro” del cilindro y aparecer por el lado contrario. Por tanto, si miramos al cilindro desde el punto de vista usual, no estaría claro cuáles son los “muros atravesados” (véase el primer dibujo de la figura 1.7).

La solución que proponemos consiste en mirar al cilindro desde arriba, como en el segundo dibujo de la figura 1.7. De este modo, nos libramos de la ambigüedad, y además, vemos las cuerdas como caminos en la superficie. Cuando dos cuerdas se crucen, aquella que llegue primero al punto de cruce

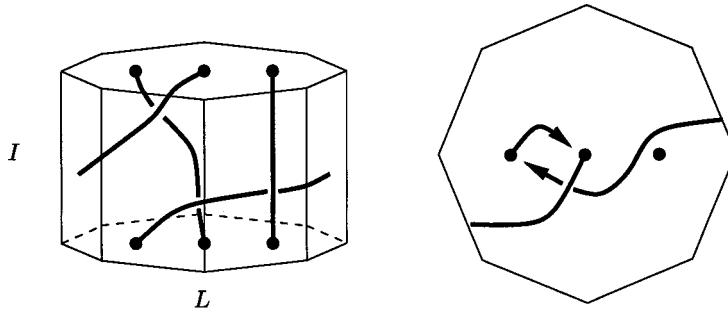


Figura 1.7: Una trenza en una superficie de género 2: dos puntos de vista diferentes.

pasará por encima. De todas formas, es bueno tener en mente que estamos mirando un cilindro, y considerar los caminos como cuerdas: de este modo podremos ver más claramente cuándo dos trenzas son equivalentes.

Pasemos pues a definir los generadores de $B_n(M)$. Elijamos los n puntos base a lo largo del diámetro horizontal de L , como se muestra en la figura 1.8. Entonces, dado r , $1 \leq r \leq 2g$, definimos la trenza a_r como sigue: su única cuerda no trivial es la primera, que atraviesa el muro r -ésimo, de la forma que muestra la figura 1.8. Es decir, la primera cuerda asciende si r es impar, y desciende si es par.

Definimos igualmente, para todo $i = 1, \dots, n - 1$, la trenza σ_i como en la figura 1.8. Nótese que $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ son los generadores clásicos del grupo de trenzas del disco: B_n .

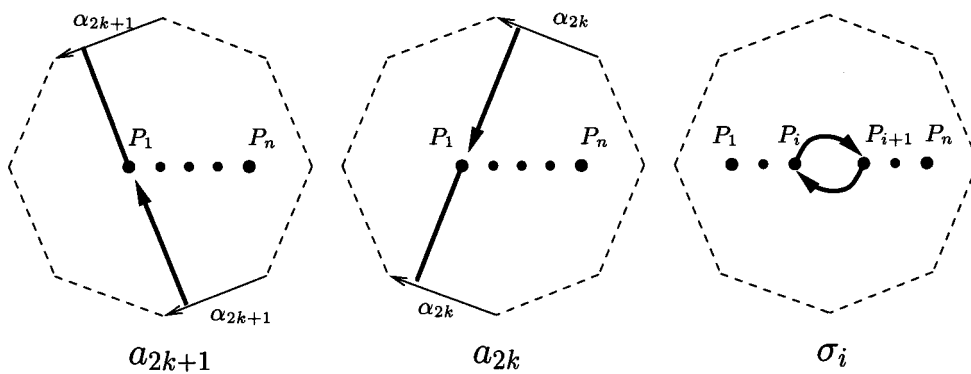


Figura 1.8: Los generadores de $B_n M$.

Más adelante veremos que el conjunto $\{a_1, \dots, a_{2g}, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$ es un sistema de generadores de $B_n(M)$. Hay dos relaciones entre estos generadores que podemos deducir de la manera siguiente: Consideremos el interior de L . Se trata de una subsuperficie D de M homeomorfa a un disco, y se tiene claramente que toda relación satisfecha en el grupo de trenzas $B_n = B_n(D)$ también lo será en $B_n(M)$ (la misma homotopía puede ser utilizada en ambos casos). De hecho, como $g \geq 1$, se sabe que B_n es un subgrupo de $B_n(M)$ (ver [PR]). Por tanto, de la presentación clásica de B_n se obtienen dos relaciones en $B_n(M)$:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad (|i - j| \geq 2),$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n - 2).$$

Por otro lado, si $i \in \{2, \dots, n - 1\}$ y $r \in \{1, \dots, 2g\}$, las cuerdas no triviales de σ_i y la única cuerda no trivial de a_r se pueden tomar disjuntas. Esto implica claramente que estas dos trenzas conmutan. Por tanto, se tiene

$$a_r \sigma_i = \sigma_i a_r \quad (1 \leq r \leq 2g; i \geq 2).$$

Para poder encontrar más relaciones entre los elementos del sistema de generadores, realizaremos la construcción siguiente. Denotemos por s_r la primera cuerda de a_r , para todo $r = 1, \dots, 2g$, y consideremos todos los caminos s_1, \dots, s_{2g} . Podemos “cortar” el polígono L a lo largo de estos caminos y “pegar” las piezas resultantes a lo largo de $\alpha_1, \dots, \alpha_{2g}$. De este modo obtenemos otro polígono de $4g$ lados, los cuales corresponden a s_1, \dots, s_{2g} (ver en la figura 1.9 el caso de una superficie de género 2; el caso general es análogo). Llamaremos a este nuevo polígono el *polígono- P_1* de M , ya que todos sus vértices representan el punto P_1 , mientras que a L lo llamaremos el *polígono inicial*. Obtenemos de este modo una nueva representación de la superficie M .

Usaremos el polígono- P_1 para mostrar tres relaciones más en $B_n(M)$. Por ejemplo, consideremos la trenza $a_1 \cdots a_{2g} a_1^{-1} \cdots a_{2g}^{-1}$. Si la observamos en el polígono- P_1 , vemos que es equivalente a la trenza de la figura 1.10. Pero ésta puede verse en el polígono inicial como una trenza que no atraviesa los muros, es decir, un elemento de B_n , el grupo de trenzas del disco. Por tanto, podemos mostrar fácilmente que es equivalente a la

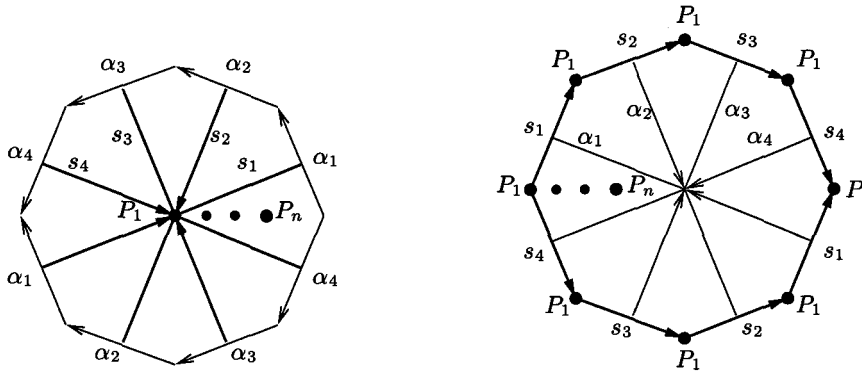


Figura 1.9: El polígono inicial y el polígono- P_1 de la superficie de género 2.

trenza $\sigma_1 \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \cdots \sigma_1$. Tenemos entonces:

$$a_1 \cdots a_{2g} a_1^{-1} \cdots a_{2g}^{-1} = \sigma_1 \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \cdots \sigma_1.$$

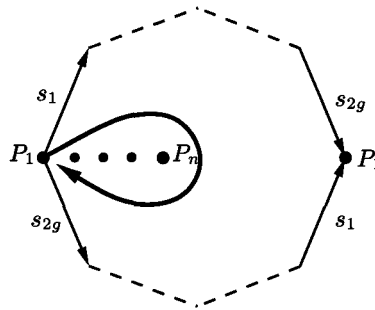


Figura 1.10: La trenza $a_1 \cdots a_{2g} a_1^{-1} \cdots a_{2g}^{-1}$.

Definamos ahora, para todo $r = 1, \dots, 2g$, la trenza

$$A_{2,r} = \sigma_1^{-1} (a_1 \cdots a_{r-1} a_{r+1}^{-1} \cdots a_{2g}^{-1}) \sigma_1^{-1}.$$

Usaremos el polígono- P_1 para ver cómo es. En el primer dibujo de la figura 1.11, podemos ver una trenza que es claramente equivalente a $A_{2,r}$ (si r es impar, siendo el otro caso análogo). Si “cortamos” y “pegamos” para ver esta trenza en el polígono- P_1 , obtenemos el segundo dibujo de la figura 1.11. Es decir, $A_{2,r}$ puede verse como una trenza cuya única cuerda no trivial es la segunda, que asciende y atraviesa una sola vez el r -ésimo muro s_r . Al

contrario que en el caso de los a_r , la trenza $A_{2,r}$ siempre va en dirección ascendente en el polígono- P_1 , sin importar la paridad de r .

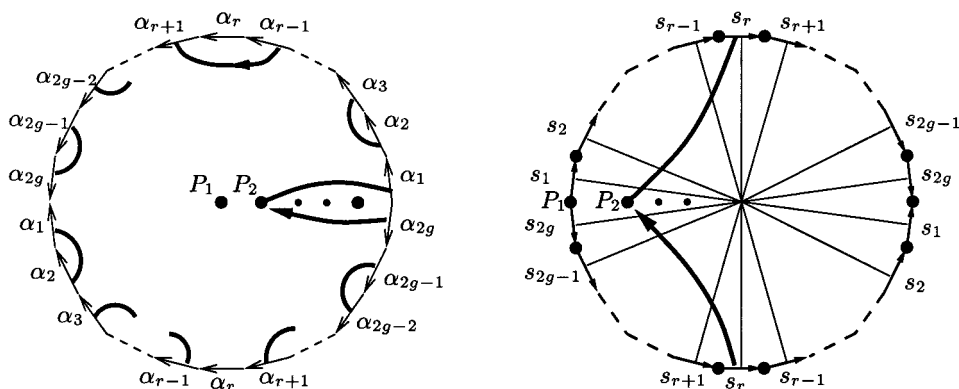


Figura 1.11: La trenza $A_{2,r}$: en el polígono inicial y en el polígono- P_1 .

Por tanto, hemos visto que la trenza $A_{2,r}$ se puede representar de manera que su única cuerda no trivial sea disjunta de todos los caminos s_t , $t \neq r$. Esto implica claramente que

$$a_t A_{2,r} = A_{2,r} a_t \quad (1 \leq t, r \leq 2g; t \neq r).$$

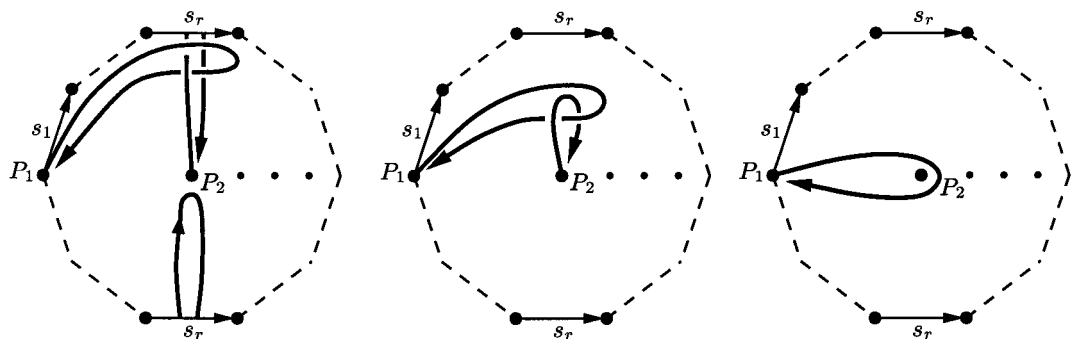


Figura 1.12: La trenza $[a_1 \cdots a_r, A_{2,r}]$.

Terminamos por fin nuestro conjunto de relaciones considerando el conmutador de las trenzas $(a_1 \cdots a_r)$ y $A_{2,r}$, para todo $r = 1, \dots, 2g$.

En la figura 1.12 podemos ver algunos pasos de la homotopía que comienza con este conmutador y lo transforma en una trenza equivalente a σ_1^2 . Por tanto, obtenemos la relación:

$$(a_1 \cdots a_r) A_{2,r} = \sigma_1^2 A_{2,r} (a_1 \cdots a_r) \quad (1 \leq r \leq 2g).$$

Llegados a este punto, podemos afirmar que las seis relaciones que hemos considerado forman un conjunto completo de relaciones que definen $B_n(M)$. En otras palabras, tenemos el resultado siguiente.

Teorema 1.3.1. *Si M es una superficie cerrada y orientable, de género $g \geq 1$, entonces $B_n(M)$ admite la siguiente presentación:*

- *Generadores:*

$$\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, a_1, \dots, a_{2g}.$$

- *Relaciones:*

$$(R1) \quad \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad (|i - j| \geq 2)$$

$$(R2) \quad \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n - 2)$$

$$(R3) \quad a_1 \cdots a_{2g} a_1^{-1} \cdots a_{2g}^{-1} = \sigma_1 \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \cdots \sigma_1$$

$$(R4) \quad a_r A_{2,s} = A_{2,s} a_r \quad (1 \leq r, s \leq 2g; \quad r \neq s)$$

$$(R5) \quad (a_1 \cdots a_r) A_{2,r} = \sigma_1^2 A_{2,r} (a_1 \cdots a_r) \quad (1 \leq r \leq 2g)$$

$$(R6) \quad a_r \sigma_i = \sigma_i a_r \quad (1 \leq r \leq 2g; \quad i \geq 2)$$

donde

$$A_{2,r} = \sigma_1^{-1} (a_1 \cdots a_{r-1} a_{r+1}^{-1} \cdots a_{2g}^{-1}) \sigma_1^{-1}.$$

Pasemos ahora al caso no orientable. Sea M una superficie cerrada no orientable de género $g \geq 2$. Para representar una trenza en M presentaremos también la superficie como un polígono, en este caso de $2g$ lados, identificados como en la figura 1.13. Esta vez haremos un corte adicional: definimos el camino e como en el primer dibujo de la figura 1.13, y cortamos el polígono a lo largo de éste. Obtenemos M representado como en el segundo dibujo de la misma figura, donde puede verse también la elección de los puntos P_1, \dots, P_n .

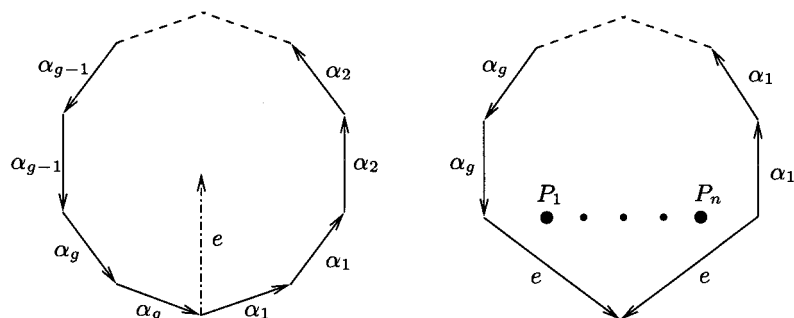


Figura 1.13: Representación de una superficie no orientable M .

Definimos ahora los generadores de $B_n(M)$. Serán similares a los de los grupos de trenzas de superficies orientables. Para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$, la trenza σ_i es igual a la del caso orientable. Para todo $r \in \{1, \dots, g\}$, la trenza a_r consiste en la primera cuerda que atraviesa el muro r -ésimo, tal y como se ve en la figura 1.14, mientras que las otras cuerdas son caminos constantes.

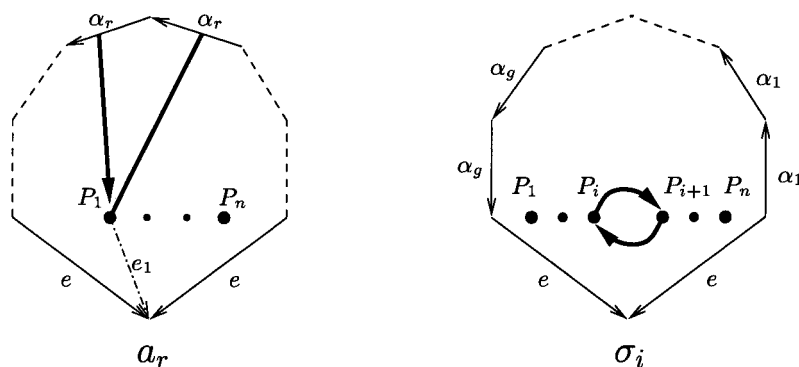


Figura 1.14: Los generadores de $B_n(M)$.

Hay seis relaciones en el grupo de trenzas de M que son análogas a las consideradas para las superficies orientables. Su veracidad se demuestra del mismo modo que en el caso orientable; la única diferencia es la construcción del polígono- P_1 . Denotamos s_1, \dots, s_g la primera cuerda de a_1, \dots, a_g , respectivamente, y en este caso definimos otro camino, e_1 , que va de P_1 al punto final de e (ver figura 1.14). Cortamos entonces a lo largo de los caminos s_1, \dots, s_g, e_1 y pegamos a lo largo de $\alpha_1, \dots, \alpha_g, e$. El resultado es

el polígono- P_1 de M , cuyos lados, leídos en el sentido de la agujas del reloj, representan a $s_1, s_1, s_2, s_2, \dots, s_g, s_g, e_1, e_1^{-1}$.

Podemos afirmar de nuevo que las seis relaciones mencionadas forman un conjunto de relaciones que define $B_n(M)$. Más precisamente, afirmamos lo siguiente.

Teorema 1.3.2. *Si M es una superficie cerrada y no orientable, de género $g \geq 2$, entonces $B_n(M)$ admite la siguiente presentación:*

- *Generadores:*

$$\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, a_1, \dots, a_g.$$

- *Relaciones:*

$$(r1) \quad \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad (|i - j| \geq 2)$$

$$(r2) \quad \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n - 2)$$

$$(r3) \quad a_1^2 \cdots a_g^2 = \sigma_1 \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \cdots \sigma_1$$

$$(r4) \quad a_r A_{2,s} = A_{2,s} a_r \quad (1 \leq r, s \leq g; r \neq s)$$

$$(r5) \quad (a_1^2 \cdots a_{r-1}^2 a_r) A_{2,r} = \sigma_1^2 A_{2,r} (a_1^2 \cdots a_{r-1}^2 a_r) \quad (1 \leq r \leq g)$$

$$(r6) \quad a_r \sigma_j = \sigma_j a_r \quad (1 \leq r \leq g; j \geq 2)$$

donde

$$A_{2,r} = \sigma_1^{-1} (a_1^2 \cdots a_{r-1}^2 a_r^{-1} a_{r-1}^{-2} \cdots a_1^{-2}) \sigma_1.$$

1.3.2 Invariantes de Vassiliev de trenzas en superficies

En nuestro estudio de los invariantes de Vassiliev de trenzas en superficies, hemos hallado dos resultados principales, análogos a los de las trenzas de Artin que detallamos en la sección anterior. El primero es el siguiente.

Teorema 1.3.3. *Sea M una superficie cerrada y orientable, de género $g \geq 1$. Dadas dos trenzas b y c en M no equivalentes, existe un entero $N \geq 1$ y un invariante de Vassiliev v_N de tipo N tal que $v_N(b) \neq v_N(c)$. Más aún, podemos tomar v_N con valores en \mathbb{Z} .*

Como dijimos antes, este resultado es cierto para las trenzas de Artin ([Koh], [B-N2], [P]), pero continúa siendo una conjetura para los nudos. Veamos que el teorema 1.3.3 es un corolario del teorema siguiente.

Teorema 1.3.4. *Sea $\{V_d\}_{d=1}^{\infty}$ la filtración de Vassiliev de $\mathbb{Z}[B_n(M)]$. Se tiene:*

1. $\bigcap_{d=0}^{\infty} V_d = \{0\}$,
2. V_d/V_{d+1} es un \mathbb{Z} -módulo libre para todo $d \geq 0$.

En efecto, si el teorema 1.3.4 es cierto, entonces dadas dos trenzas $b, c \in B_n(M)$, existe un entero N tal que $b - c \notin V_{N+1}$. Podemos tomar entonces como v_N la proyección canónica de $\mathbb{Z}[B_n(M)]$ a $\mathbb{Z}[B_n(M)]/V_{N+1}$. Además, si V_d/V_{d+1} es un \mathbb{Z} -módulo libre para todo d , entonces

$$\mathbb{Z}[B_n(M)]/V_{N+1} \simeq (\mathbb{Z}[B_n(M)]/V_1) \oplus (V_1/V_2) \oplus \cdots \oplus (V_N/V_{N+1})$$

también es un \mathbb{Z} -módulo libre, luego podemos componer la proyección anterior con una aplicación lineal de $\mathbb{Z}[B_n(M)]/V_{N+1}$ a \mathbb{Z} , de manera que la imagen de $b - c$ sea no nula. Por tanto, probando el teorema 1.3.4 conseguiremos nuestro primer propósito.

Nuestra segunda contribución a los invariantes de Vassiliev es la definición de un invariante de Vassiliev universal para $B_n(M)$, que generaliza la noción de diagramas de cuerdas para trenzas de Artin. Recordemos que un *diagrama de cuerdas* es un diagrama compuesto de n líneas verticales y un número finito de segmentos horizontales. Un *diagrama de cuerdas M -ponderado* es un diagrama de cuerdas tal que a cada cuerda le asociamos un elemento de $\pi_1(M)$ (ver la figura 1.15). El conjunto de diagramas de cuerdas M -ponderados está equipado con una multiplicación definida por concatenación. El \mathbb{Z} -módulo libre generado por los diagramas de cuerdas se convierte así en una \mathbb{Z} -álgebra que se identifica a $\mathbb{Z}[t_{i,j,\gamma}]$, la \mathbb{Z} -álgebra libre generada por las variables no conmutativas $t_{i,j,\gamma}$, donde $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, $\gamma \in \pi_1(M)$, y donde $t_{i,j,\gamma} = t_{j,i,\gamma^{-1}}$ (ver la figura 1.15).

Denotamos \mathcal{A}_n la \mathbb{Z} -álgebra cociente obtenida de $\mathbb{Z}[t_{i,j,\gamma}]$ al imponer las relaciones siguientes

- $[t_{i,j,\gamma}, t_{k,l,\delta}] = 0$, para $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$, distintos, y para todo $\gamma, \delta \in \pi_1(M)$,

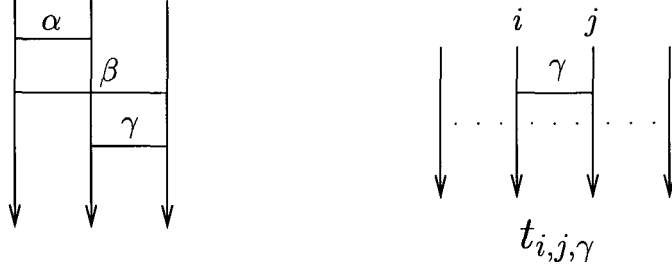


Figura 1.15: Un diagrama de cuerdas M -ponderado y el generador $t_{i,j,\gamma}$.

- $[t_{i,j,\gamma}, t_{j,k,\delta} + t_{i,k,(\gamma\delta)}] = 0$, para $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, distintos, y para todo $\gamma, \delta \in \pi_1(M)$,

y denotamos $\widehat{\mathcal{A}}_n$ su completación natural.

El grupo de permutaciones Σ_n actúa sobre $\pi_1(M)^n$ permutando coordenadas, luego podemos considerar el producto semidirecto inducido $H_n = \pi_1(M)^n \rtimes \Sigma_n$. Además, se prueba de manera automática que H_n actúa sobre $\widehat{\mathcal{A}}_n$, definiendo el producto semidirecto $\widehat{\mathcal{A}}_n \rtimes \mathbb{Z}[H_n]$. La acción viene definida por las relaciones siguientes.

- $\sigma t_{i,j,\gamma} \sigma^{-1} = t_{\sigma(i),\sigma(j),\gamma}$, para todo $\sigma \in \Sigma_n$,
- $\mu(k) t_{i,j,\gamma} \mu(k)^{-1} = t_{i,j,\gamma}$, para todo $\mu \in \pi_1(M)$ y todo $k \neq i, j$,
- $\mu(i) t_{i,j,\gamma} \mu(i)^{-1} = t_{i,j,(\mu\gamma)}$, para todo $\mu \in \pi_1(M)$,

donde $\mu(i) = (1, \dots, 1, \overset{(i)}{\mu}, 1, \dots, 1) \in \pi_1(M)^n$. Nótese que también se tiene la relación siguiente

$$\mu(j) t_{i,j,\gamma} \mu(j)^{-1} = \mu(j) t_{j,i,\gamma^{-1}} \mu(j)^{-1} = t_{j,i,(\mu\gamma^{-1})} = t_{i,j,(\gamma\mu^{-1})}.$$

La \mathbb{Z} -álgebra $\widehat{\mathcal{A}}_n \rtimes \mathbb{Z}[H_n]$ admite la filtración inducida por la de $\widehat{\mathcal{A}}_n$, luego su álgebra graduada asociada es $\mathcal{A}_n \rtimes \mathbb{Z}[H_n]$. Se tiene, además, $\text{gr}_V \mathbb{Z}[B_n(M)] = \bigoplus_{d=0}^{\infty} (V_d/V_{d+1})$. Nuestro segundo resultado principal es el siguiente:

Teorema 1.3.5. *Existe un homomorfismo de \mathbb{Z} -módulos*

$$u : \mathbb{Z}[B_n(M)] \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}_n \rtimes \mathbb{Z}[H_n]$$

tal que el morfismo graduado correspondiente

$$\text{gr}_V u : \text{gr}_V \mathbb{Z}[B_n(M)] \longrightarrow \mathcal{A}_n \rtimes \mathbb{Z}[H_n]$$

es un isomorfismo de \mathbb{Z} -álgebras graduadas.

El isomorfismo $\text{gr}_V u$ es fácil de describir. En primer lugar, el álgebra $\text{gr}_V \mathbb{Z}[B_n(M)]$ está generada como \mathbb{Z} -módulo por los elementos $\eta(b)$, donde $b \in SB_n(M)$. Tomemos $b = (b_1, \dots, b_n) \in SB_n(M)$. Fijemos un disco $D \subset M$ que contenga a \mathcal{P} y, para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, un camino $\alpha_{i,j}$ en D que vaya de P_i a P_j . Para $i \in \{1, \dots, n\}$, sea \bar{b}_i la proyección de $b_i : [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$ sobre la primera coordenada (es decir, sobre M). Sea s la permutación inducida en \mathcal{P} por b . Entonces $(\bar{b}_i \alpha_{s(i),i})$ es un lazo en M con punto base P_i que denotamos μ_i . Obtenemos entonces un elemento $(\mu_1, \dots, \mu_n)s \in H_n$.

Sean ahora x_1, \dots, x_d los puntos singulares (sucesivos) de b . Supongamos que x_r es la intersección de las cuerdas i_r y j_r de b . Sea β_r el camino en $M \times [0, 1]$ que va de $(P_{i_r}, 0)$ a x_r a lo largo de b_{i_r} , y de x_r a $(P_{j_r}, 0)$ a lo largo de $b_{j_r}^{-1}$. Como antes, el camino $(\bar{\beta}_r \alpha_{j_r, i_r})$ es un lazo en M que determina un elemento $\gamma_r \in \pi_1(M)$. Consideremos entonces el elemento $(t_{i_1, j_1, \gamma_1} \cdots t_{i_d, j_d, \gamma_d}) \in \mathcal{A}_n$. Se tiene:

$$\text{gr } u(\eta(b)) = \left(\prod_{r=1}^d t_{i_r, j_r, \gamma_r} \right) \cdot (\mu_1, \dots, \mu_n)s.$$

Intuitivamente, el elemento $t_{i,j,\gamma}$ mide cómo se mueven las cuerdas i y j por la superficie, antes de encontrarse para crear un punto singular; el elemento μ_i mide cómo se mueve la i -ésima cuerda por M , y finalmente s es la permutación inducida en \mathcal{P} .

Terminamos esta sección mostrando por qué llamamos a u un *invariante de Vassiliev universal* para $B_n(M)$.

Corolario 1.3.6. *Todo invariante de Vassiliev de $B_n(M)$ factoriza a través de u de manera única.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 1.3.4, sabemos que $\mathbb{Z}[B_n(M)]/V_{N+1}$ es un \mathbb{Z} -módulo libre para todo $N \geq 0$, luego $\mathbb{Z}[B_n(M)] \simeq (\mathbb{Z}[B_n(M)]/V_{N+1}) \oplus V_{N+1}$. Recordemos que

$$\mathrm{gr}_V \mathbb{Z}[B_n(M)] = \bigoplus_{d=0}^{\infty} (V_d/V_{d+1}) \simeq (\mathbb{Z}[B_n(M)]/V_{N+1}) \oplus \left(\bigoplus_{d>N} (V_d/V_{d+1}) \right).$$

Ahora bien, como gr_u es un isomorfismo, se concluye que para todo $N \geq 0$, $\mathcal{A}_n^{(\leq N)} \rtimes \mathbb{Z}[H_n]$ es también un \mathbb{Z} -módulo libre. Por tanto, se tiene:

$$\widehat{\mathcal{A}}_n \rtimes \mathbb{Z}[H_n] \simeq (\mathcal{A}_n^{(\leq N)} \rtimes \mathbb{Z}[H_n]) \oplus (\widehat{\mathcal{A}}_n^{(>N)} \rtimes \mathbb{Z}[H_n]),$$

y

$$\mathcal{A}_n \rtimes \mathbb{Z}[H_n] \simeq (\mathcal{A}_n^{(\leq N)} \rtimes \mathbb{Z}[H_n]) \oplus (\mathcal{A}_n^{(>N)} \rtimes \mathbb{Z}[H_n]).$$

Todo invariante de Vassiliev $v \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[B_n(M)]/V_{N+1}, A)$ puede verse por tanto como una aplicación lineal de $\mathrm{gr}_V \mathbb{Z}[B_n(M)]$ en A que se anula en $\bigoplus_{d>N} (V_d/V_{d+1})$. Vía gr_u , esto significa que v es una aplicación lineal de $\mathcal{A}_n \rtimes \mathbb{Z}[H_n]$ en A , que se anula en $\mathcal{A}_n^{(>N)} \rtimes \mathbb{Z}[H_n]$. Por tanto, si v es un invariante de Vassiliev de tipo N , se puede remontar de manera única a una aplicación lineal $\widehat{v} : \widehat{\mathcal{A}}_n \rtimes \mathbb{Z}[H_n] \rightarrow A$, que verifica $v = \widehat{v} \circ u$. \square

Capítulo 2

Nuevas presentaciones

En este capítulo demostramos los teoremas 1.3.1 y 1.3.2. Como el método utilizado es el mismo en los dos casos, y puede además ser usado más generalmente para encontrar presentaciones de otros grupos, explicamos este método en la sección 2.1. Lo aplicaremos entonces a lo largo de las secciones 2.2 y 2.3, a las superficies cerradas orientables y no orientables respectivamente. Por último, en la sección 2.4 describimos un algoritmo para resolver el problema de la palabra en los grupos de trenzas de las superficies cerradas.

2.1 Método para encontrar presentaciones

Consideremos una sucesión exacta de grupos

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 1,$$

donde suponemos que $A \subset B$, y que i es la inclusión natural. Supongamos que A y C tienen presentaciones

$$A = \langle G_A; R_A \rangle, \quad C = \langle G_C; R_C \rangle.$$

Para todo $y \in G_C$, elegimos un elemento $\tilde{y} \in B$ tal que $p(\tilde{y}) = y$, y para todo relator $r = y_1 \dots y_m \in R_C$, escribimos $\tilde{r} = \tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_m \in B$. Entonces, se tiene claramente que para todo $r \in R_C$, existe una palabra f_r sobre G_A tal que $\tilde{r} = f_r$ en B .

Por otra parte, para todo $x \in G_A$ y todo $y \in G_C$, existe una palabra $g_{x,y}$ sobre G_A tal que $\tilde{y} x \tilde{y}^{-1} = g_{x,y}$ en B .

Lemma 2.1.1. *En las condiciones anteriores, B admite la siguiente presentación:*

- *Generadores:* $\{G_A\} \cup \{\tilde{y}; y \in G_C\}$
- *Relaciones:*
 - **Tipo 1:** $r_A = 1$, para todo $r_A \in R_A$.
 - **Tipo 2:** $\tilde{r} = f_r$, para todo $r \in R_C$.
 - **Tipo 3:** $\tilde{y} x \tilde{y}^{-1} = g_{x,y}$, para todo $x \in G_A$, y todo $y \in G_C$.

Dejaremos para el lector la demostración de este lema. El plan de las demostraciones de los teoremas 1.3.1 y 1.3.2 es como sigue:

Paso 1. Definiremos un grupo abstracto, $\overline{PB_n(M)}$, dado por su presentación, y un homomorfismo

$$\overline{PB_n(M)} \xrightarrow{\varphi} PB_n(M).$$

Paso 2. Probaremos por inducción en n que φ es un isomorfismo, aplicando el lema 2.1.1 a la sucesión exacta (1.2):

$$1 \longrightarrow \pi_1(M \setminus \mathcal{P}', P_1) \xrightarrow{u} PB_n(M, \mathcal{P}) \xrightarrow{v} PB_{n-1}(M, \mathcal{P}') \longrightarrow 1.$$

Paso 3. Denotamos $\overline{B_n(M)}$ el grupo abstracto dado por la presentación del teorema 1.3.1 si M es orientable, y por la del teorema 1.3.2 si M es no orientable. Ya demostramos en la sección 1.3.1 que existe un homomorfismo bien definido

$$\overline{B_n(M)} \xrightarrow{\psi} B_n(M).$$

Aplicaremos el lema 2.1.1 a la sucesión exacta (1.1):

$$1 \longrightarrow PB_n(M) \xrightarrow{e} B_n(M) \xrightarrow{f} \Sigma_n \longrightarrow 1$$

para probar que ψ es en realidad un isomorfismo.

2.2 Grupos de trenzas en superficies orientables

En esta sección demostramos el teorema 1.3.1 siguiendo el procedimiento dado en la sección 2.1. Por tanto, a lo largo de esta sección, M será una superficie cerrada orientable de género $g \geq 1$.

Paso 1. Sea $\overline{PB_n(M)}$ el grupo dado por la presentación siguiente:

Presentación 1

• Generadores: $\{a_{i,r}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq r \leq 2g\} \cup \{T_{j,k}; 1 \leq j < k \leq n\}$.

• Relaciones:

$$(PR1) \quad a_{n,1}^{-1} a_{n,2}^{-1} \cdots a_{n,2g}^{-1} a_{n,1} a_{n,2} \cdots a_{n,2g} = \prod_{i=1}^{n-1} T_{i,n-1}^{-1} T_{i,n}.$$

$$(PR2) \quad a_{i,r} A_{j,s} = A_{j,s} a_{i,r} \quad (1 \leq i < j \leq n; 1 \leq r, s \leq 2g; r \neq s).$$

$$(PR3) \quad (a_{i,1} \cdots a_{i,r}) A_{j,r} (a_{i,r}^{-1} \cdots a_{i,1}^{-1}) A_{j,r}^{-1} = T_{i,j} T_{i,j-1}^{-1} \\ (1 \leq i < j \leq n; 1 \leq r \leq 2g).$$

$$(PR4) \quad T_{i,j} T_{k,l} = T_{k,l} T_{i,j} \quad (1 \leq i < j < k < l \leq n \text{ ó } 1 \leq i < k < l \leq j \leq n).$$

$$(PR5) \quad T_{k,l} T_{i,j} T_{k,l}^{-1} = T_{i,k-1} T_{i,k}^{-1} T_{i,j} T_{i,l}^{-1} T_{i,k} T_{i,k-1}^{-1} T_{i,l} \quad (1 \leq i < k \leq j < l \leq n).$$

$$(PR6) \quad a_{i,r} T_{j,k} = T_{j,k} a_{i,r} \quad (1 \leq i < j < k \leq n \text{ ó } 1 \leq j < k < i \leq n), \\ (1 \leq r \leq 2g).$$

$$(PR7) \quad a_{i,r} (a_{j,2g}^{-1} \cdots a_{j,1}^{-1} T_{j,k} a_{j,2g} \cdots a_{j,1}) = (a_{j,2g}^{-1} \cdots a_{j,1}^{-1} T_{j,k} a_{j,2g} \cdots a_{j,1}) a_{i,r} \\ (1 \leq j < i \leq k \leq n).$$

$$(PR8) \quad T_{j,n} = \left(\prod_{i=1}^{j-1} a_{i,2g}^{-1} \cdots a_{i,1}^{-1} T_{i,j-1} T_{i,j}^{-1} a_{i,1} \cdots a_{i,2g} \right) a_{j,1} \cdots a_{j,2g} a_{j,1}^{-1} \cdots a_{j,2g}^{-1}.$$

Donde

$$A_{j,s} = a_{j,1} \cdots a_{j,s-1} a_{j,s+1}^{-1} \cdots a_{j,2g}^{-1}.$$

Más tarde usaremos una presentación diferente de $\overline{PB_n(M)}$, basada en el siguiente lema.

Lema 2.2.1. Sea F el grupo libre con sistema libre de generadores $\{x_1, \dots, x_{2g}\}$. Sea

$$X_r = x_1 \cdots x_{r-1} x_{r+1}^{-1} \cdots x_{2g}^{-1}.$$

Entonces $\{X_1, \dots, X_{2g}\}$ es un sistema libre de generadores de F .

DEMOSTRACIÓN: Sólo necesitamos dar las fórmulas de cambio de generadores, que son las siguientes:

$$\begin{aligned} x_k &= (X_1 X_2^{-1} \cdots X_{k-2} X_{k-1}^{-1}) (X_{k+1} X_{k+2}^{-1} \cdots X_{2g-1}^{-1} X_{2g}) && \text{si } k \text{ es impar,} \\ x_k^{-1} &= (X_1 X_2^{-1} \cdots X_{k-2} X_{k-1}^{-1}) (X_{k+1}^{-1} X_{k+2} \cdots X_{2g-1} X_{2g}) && \text{si } k \text{ es par.} \end{aligned}$$

□

Una consecuencia directa de este lema es que $\overline{PB_n(M)}$ admite la presentación siguiente.

Presentación 2

- Generadores: $\{A_{i,r}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq r \leq 2g\} \cup \{T_{j,k}; 1 \leq j < k \leq n\}$.
- Relaciones: Las mismas de la presentación 1, donde

$$\begin{aligned} a_{i,k} &= (A_{i,1} A_{i,2}^{-1} \cdots A_{i,k-2} A_{i,k-1}^{-1}) (A_{i,k+1} A_{i,k+2}^{-1} \cdots A_{i,2g-1}^{-1} A_{i,2g}) && k \text{ impar,} \\ a_{i,k}^{-1} &= (A_{i,1} A_{i,2}^{-1} \cdots A_{i,k-2} A_{i,k-1}^{-1}) (A_{i,k+1}^{-1} A_{i,k+2} \cdots A_{i,2g-1} A_{i,2g}) && k \text{ par.} \end{aligned}$$

De acuerdo con el paso 1, debemos definir un homomorfismo

$$\overline{PB_n(M)} \xrightarrow{\varphi} PB_n(M).$$

Por abuso de notación, seguiremos denotando $a_{i,r}$ y $T_{i,j}$ las trenzas que serán imágenes de $a_{i,r}$ y $T_{i,j}$ respectivamente, por el homomorfismo φ . Estas trenzas se definen como sigue.

- En $a_{i,r}$, la cuerda i -ésima atraviesa el muro r -ésimo, como en la figura 2.1. Esta cuerda asciende si r es impar, y desciende si es par. Las otras cuerdas son triviales. Nótese que $a_{1,r} = a_r$ para todo r .
- En $T_{i,j}$, la cuerda i -ésima rodea los puntos P_{i+1}, \dots, P_j , como en la figura 2.1, mientras que las otras cuerdas son caminos triviales. Si $i = j$, $T_{i,j}$ será la trenza trivial.

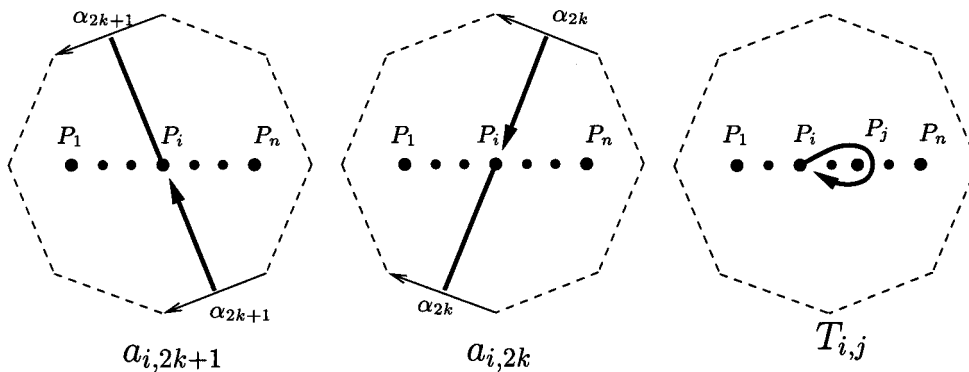


Figura 2.1: Los generadores de PB_nM .

Denotaremos $s_{i,r}$ a la cuerda i -ésima de $a_{i,r}$, y $t_{i,j}$ a la de $T_{i,j}$. Se puede probar fácilmente que para todo i , el conjunto de caminos $\{s_{i,1}, \dots, s_{i,2g}\}$ genera $\pi_1(M)$. Ahora, para todo $i \in \{2, \dots, n\}$ podemos definir el polígono- P_i como definimos el polígono- P_1 en la sección 1.3.1: cortamos L a lo largo de $s_{i,1}, \dots, s_{i,2g}$ y lo pegamos a lo largo de $\alpha_1, \dots, \alpha_{2g}$.

Definimos, para $2 \leq j \leq n$ y $1 \leq r \leq 2g$, la trenza

$$A_{j,r} = a_{j,1} \cdots a_{j,r-1} a_{j,r+1}^{-1} \cdots a_{j,2g}^{-1}.$$

Al igual que en la representación de $A_{2,r}$ en el polígono- P_1 considerada en la sección 1.3.1, podemos representar $A_{j,r}$ en el polígono- P_i (para $1 \leq i < j$) como la trenza de la figura 2.2, cuya única cuerda no trivial es la j -ésima, que asciende y cruza una vez el muro r -ésimo $s_{i,r}$. Nótese que esta representación no depende de i , aunque sólo es válida si $i < j$.

Definimos entonces φ de la manera obvia. Para demostrar que es un homomorfismo, debemos probar que las relaciones de $\overline{PB_n(M)}$ se satisfacen también en $PB_n(M)$. Las relaciones (PR4) y (PR5) se pueden verificar fácilmente, ya que se pueden ver en el cilindro como si fueran trenzas del disco (el interior de L). La relación (PR6) es obvia, una vez que hemos dibujado las trenzas correspondientes. Las relaciones (PR1), (PR2) y (PR3) son análogas a las relaciones (R3), (R4) y (R5) del teorema 1.3.1, y se verifican del mismo modo. La relación (PR7) se comprueba fácilmente en el polígono- P_j , y por último, para verificar la relación (PR8) necesitamos los polígonos- P_i , para $i = 1, \dots, j$: Si $i < j$, se ve claramente en el polígono- P_i

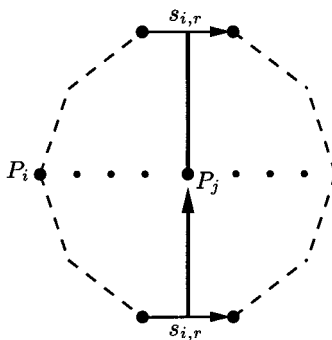


Figura 2.2: La trenza $A_{j,r}$ en el polígono- P_i ($i < j$).

que

$$a_{i,2g}^{-1} \cdots a_{i,1}^{-1} T_{i,j-1}^{-1} T_{i,j}^{-1} a_{i,1} \cdots a_{i,2g}$$

es equivalente a la primera trenza de la figura 2.3, y por tanto es equivalente a la segunda trenza de la misma figura, representada en el polígono- P_j . Entonces la relación (PR8) es clara, dibujando todos los factores en el polígono- P_j .

Por tanto, hemos demostrado que φ es un homomorfismo, y esto termina el paso 1.

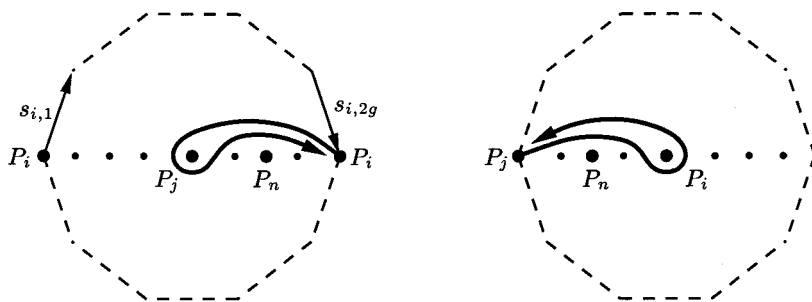


Figura 2.3: La trenza $a_{i,2g}^{-1} \cdots a_{i,1}^{-1} T_{i,j-1}^{-1} T_{i,j}^{-1} a_{i,1} \cdots a_{i,2g}$.

Paso 2. Probaremos por inducción en n que φ es un isomorfismo. El caso $n = 1$ es claro, ya que la presentación de $\overline{PB_1(M)}$ resulta ser

$$\overline{PB_1(M)} = \langle \{a_{1,1}, \dots, a_{1,2g}\} ; a_{1,1}^{-1} a_{1,2}^{-1} \cdots a_{1,2g}^{-1} a_{1,1} a_{1,2} \cdots a_{1,2g} = 1 \rangle,$$

que es también una presentación de $\pi_1(M) = PB_1(M)$. Más aún, como $n = 1$, se tiene $\varphi(a_{1,i}) = a_{1,i} = s_{1,i}$ para todo $i = 1, \dots, 2g$, y entonces $\overline{PB_1(M)} \stackrel{\varphi}{\simeq} PB_1(M)$.

Supongamos entonces que $\overline{PB_{n-1}(M)} \stackrel{\varphi}{\simeq} PB_{n-1}(M)$, y recordemos la sucesión exacta (1.2):

$$1 \longrightarrow \pi_1(M \setminus \mathcal{P}', P_1) \xrightarrow{u} PB_n(M, \mathcal{P}) \xrightarrow{v} PB_{n-1}(M, \mathcal{P}') \longrightarrow 1.$$

Para poder aplicar el lema 2.1.1 necesitamos conocer presentaciones de los grupos a ambos lados. Para el grupo de la izquierda, tenemos la presentación

$$\pi_1(M \setminus \mathcal{P}', P_1) = \langle \{s_{1,1}, \dots, s_{1,2g}, t_{1,2}, \dots, t_{1,n-1}\}; \phi \rangle.$$

Nos conviene para nuestro propósito incluir $t_{1,n}$ entre los generadores, así que añadimos una sola relación que se deduce fácilmente de los dibujos (usando el polígono- P_1):

$$\begin{aligned} \pi_1(M \setminus \mathcal{P}', P_1) = \langle \{s_{1,1}, \dots, s_{1,2g}, t_{1,2}, \dots, t_{1,n}\}; \\ t_{1,n} = s_{1,1} \cdots s_{1,2g} s_{1,1}^{-1} \cdots s_{1,2g}^{-1} \rangle. \end{aligned}$$

Conocemos también, por hipótesis de inducción, dos presentaciones de $PB_{n-1}(M)$; usaremos la presentación 2 de $\overline{PB_{n-1}(M)}$. Podemos por tanto aplicar el lema 2.1.1 a la sucesión exacta (1.2).

Nótese que $v(a_{i,r}) = a_{i-1,r}$ para $i = 2, \dots, n$, luego $v(A_{i,r}) = A_{i-1,r}$ para $i = 2, \dots, n$. Nótese también que $v(T_{i,j}) = T_{i-1,j-1}$, donde $2 \leq i \leq j \leq n$. Por tanto, conocemos preimágenes por v de los generadores de $PB_{n-1}(M, \mathcal{P}')$.

También es claro que $u(s_{1,r}) = a_{1,r}$ y $u(t_{1,j}) = T_{1,j}$ para todos los posibles r y j . Por tanto, se deduce de forma inmediata que un conjunto de generadores de $PB_n(M, \mathcal{P})$ es el siguiente:

$$\{a_{1,r}; 1 \leq r \leq 2g\} \cup \{A_{i,r}; 2 \leq i \leq n, 1 \leq r \leq 2g\} \cup \{T_{j,k}; 1 \leq j < k \leq n\}.$$

Podemos aplicar de nuevo el lema 2.2.1 para obtener un nuevo sistema de generadores,

$$\{a_{i,r}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq r \leq 2g\} \cup \{T_{j,k}; 1 \leq j < k \leq n\},$$

que es la imagen por φ del sistema de generadores de $\overline{PB_n(M)}$. En particular, φ es sobreyectivo.

Probaremos entonces que φ es un isomorfismo usando el siguiente método.

En primer lugar, denotaremos por G_A el sistema de generadores de $\pi_1(M \setminus \mathcal{P}', P_1)$, y G el sistema de generadores de $\overline{PB_n(M)}$. Consideramos la única relación de la presentación de $\pi_1(M \setminus \mathcal{P}', P_1)$, que podemos considerar, vía u , como una relación en $PB_n(M)$. Esta será la única relación de tipo 1 en la presentación de $PB_n(M)$. El método comienza demostrando que esta relación se satisface considerándola en $\overline{PB_n(M)}$, es decir, tenemos una relación en $\overline{PB_n(M)}$ que es enviada por φ a la única relación en la presentación de $\pi_1(M \setminus \mathcal{P}', P_1)$.

Una vez hecho esto, para todo relator r de $PB_{n-1}(M)$, consideramos su preimagen “canónica” por v , que denotamos \tilde{r} , del mismo modo que en el lema 2.1.1. Como $PB_n(M)$ y $\overline{PB_n(M)}$ tienen “los mismos” generadores (vía φ), podemos considerar \tilde{r} como una palabra sobre G . Encontraremos entonces una palabra U sobre G tal que la igualdad $\tilde{r} = U$ se verifique en $\overline{PB_n(M)}$, y tal que $\varphi(U)$ sea una palabra sobre G_A . Esto nos dará las relaciones de tipo 2 de la presentación de $PB_n(M)$.

Finalmente, para todo $x \in G_A$ y todo generador y de $PB_{n-1}(M)$, encontraremos una palabra V sobre G tal que la igualdad $\tilde{y}x\tilde{y}^{-1} = V$ se verifique en $\overline{PB_n(M)}$, donde \tilde{y} es la preimagen canónica por v de y , y tal que $\varphi(V)$ sea una palabra sobre G_A . Esto nos proporciona las relaciones de tipo 3 de la presentación de $PB_n(M)$.

De este modo, habremos encontrado todas las relaciones de tipos 1, 2 y 3 del lema 2.1.1 y, por tanto, una presentación de $PB_n(M)$; al mismo tiempo, habremos probado que φ es inyectiva, y consecuentemente, que φ es un isomorfismo.

Comencemos con el citado método. La única relación de la presentación de $\pi_1(M \setminus \mathcal{P}', P_1)$ corresponde a la relación (PR8) de $\overline{PB_n(M)}$ para $j = 1$,

luego se verifica en este grupo.

Las relaciones de tipo 2 son fáciles de encontrar. En primer lugar, (PR1) puede verse como sigue:

$$a_{n,1}^{-1}a_{n,2}^{-1} \cdots a_{n,2g}^{-1}a_{n,1}a_{n,2} \cdots a_{n,2g} \left(\prod_{i=2}^{n-1} T_{i,n-1}^{-1} T_{i,n} \right)^{-1} = T_{1,n-1}^{-1} T_{1,n}.$$

Nótese que el lado izquierdo de la ecuación se envía por φ a \tilde{r} , donde r es un relator de $PB_{n-1}(M)$ que corresponde a (PR1), mientras que el lado derecho se envía por φ a una palabra sobre G_A . Por tanto, U es igual al lado derecho de la ecuación, y esto nos da la primera relación de tipo 2. El resto de relaciones de tipo 2 son también preimágenes por φ de relaciones de la presentación 1, a saber: (PR2), (PR3), (PR4) y (PR5) para $i \geq 2$, (PR6) para $i \geq 2$ y $j \geq 2$, y (PR7), (PR8) para $j \geq 2$. Para todas estas relaciones, la palabra U es la palabra trivial, excepto para (PR8), donde $U = a_{1,2g}^{-1} \cdots a_{1,1}^{-1} T_{1,j-1} T_{1,j}^{-1} a_{1,1} \cdots a_{1,2g}$.

Por último, veamos las relaciones de tipo 3. Para $i = 1$, (PR2) es como sigue:

$$A_{j,s} a_{1,r} A_{j,s}^{-1} = a_{1,r} \quad (r \neq s),$$

luego $V = a_{1,r}$. A continuación, usando (PR2), la relación (PR3) resulta ser equivalente a:

$$A_{j,r} a_{1,r} A_{j,r}^{-1} = (a_{1,r-1}^{-1} \cdots a_{1,1}^{-1}) T_{1,j-1} T_{1,j}^{-1} (a_{1,1} \cdots a_{1,r}),$$

luego V es igual al lado derecho de esta ecuación. Las relaciones de la forma $T_{k,l} T_{1,j} T_{k,l}^{-1} = V$, donde V es una palabra sobre G_A , se deducen de (PR4)-(PR5), mientras que las de la forma $T_{k,l} a_{1,r} T_{k,l}^{-1} = V$ se deducen de (PR6), cuando $i = 1$. Además, si $j > k$, se obtienen de (PR6) las relaciones $A_{j,r} T_{1,k} A_{j,r}^{-1} = V$, donde V es una palabra sobre G_A .

Las únicas relaciones que quedan son las de la forma $A_{j,r} T_{1,k} A_{j,r}^{-1} = V$, donde $1 < j \leq k$, que se deducen como sigue: Por (PR7), sabemos que $a_{j,s}$ conmuta con el elemento

$$a_{1,2g}^{-1} \cdots a_{1,1}^{-1} T_{1,k} a_{1,2g} \cdots a_{1,1}$$

para $s = 1, \dots, 2g$. Esto implica que $A_{j,r}$ conmuta con el mismo elemento, luego

$$(a_{1,2g}^{-1} \cdots a_{1,1}^{-1} T_{1,k} a_{1,2g} \cdots a_{1,1}) = A_{j,r} (a_{1,2g}^{-1} \cdots a_{1,1}^{-1} T_{1,k} a_{1,2g} \cdots a_{1,1}) A_{j,r}^{-1} =$$

$$(A_{j,r}a_{1,2g}^{-1}A_{j,r}^{-1}) \cdots (A_{j,r}a_{1,1}^{-1}A_{j,r}^{-1})(A_{j,r}T_{1,k}A_{j,r}^{-1})(A_{j,r}a_{1,2g}A_{j,r}^{-1}) \cdots (A_{j,r}a_{1,1}A_{j,r}^{-1}).$$

Pero usando (PR2) y (PR3) sabemos cómo escribir todos los factores del producto anterior (excepto el del centro) como palabras sobre G_A , luego hemos acabado.

Por tanto, hemos demostrado que $\overline{PB_n(M)} \stackrel{\varphi}{\simeq} PB_n(M)$ y así, hemos probado lo siguiente:

Teorema 2.2.2. *Si M es una superficie cerrada y orientable, de género $g \geq 1$, entonces $PB_n(M)$ admite la presentación 1 (luego también la presentación 2).*

Paso 3. Queremos encontrar ahora una presentación de $B_n(M)$, para $g \geq 1$. Definimos entonces el grupo $\overline{B_n(M)}$, dado por la presentación del teorema 1.3.1.

Ésta es la presentación más reducida que hemos encontrado, pero para demostrar su validez la modificaremos, obteniendo una nueva presentación con más generadores y relaciones, pero equivalente a la anterior.

Primero cambiaremos nuestra notación, y llamaremos $a_{1,r}$ a los generadores a_r , para todo $r = 1, \dots, 2g$. Luego añadiremos simplemente a la presentación dada los generadores

$$\begin{aligned} - a_{i,r} & \quad i = 2, \dots, n; \quad r = 1, \dots, 2g, \\ - T_{j,k} & \quad 1 \leq j < k \leq n, \end{aligned}$$

y las relaciones

$$(R7) \quad a_{j+1,r} = \sigma_j a_{j,r} \sigma_j \quad (1 \leq j \leq n-1; 1 \leq r \leq 2g; r \text{ par}).$$

$$(R8) \quad a_{j+1,r} = \sigma_j^{-1} a_{j,r} \sigma_j^{-1} \quad (1 \leq j \leq n-1; 1 \leq r \leq 2g; r \text{ impar}).$$

$$(R9) \quad T_{j,k} = \sigma_j \sigma_{j+1} \cdots \sigma_{k-2} \sigma_{k-1}^2 \sigma_{k-2} \cdots \sigma_j \quad (1 \leq j < k \leq n).$$

Claramente, ambas presentaciones definen el mismo grupo, o sea, $\overline{B_n(M)}$. Definimos ahora $\psi : \overline{B_n(M)} \rightarrow B_n(M)$ del modo natural. Es un ejercicio sencillo demostrar, usando los métodos precedentes, que las

relaciones (R7), (R8) y (R9) se envían sobre relaciones en $B_n(M)$. Por tanto, ψ es un homomorfismo bien definido.

Recordemos ahora la sucesión exacta (1.1):

$$1 \longrightarrow PB_n(M) \xrightarrow{e} B_n(M) \xrightarrow{f} \Sigma_n \longrightarrow 1.$$

Conocemos por el teorema 2.2.2 una presentación de $PB_n(M)$ (digamos la presentación 1), y sabemos también que una presentación de Σ_n es

- Generadores: $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}$.

- Relaciones:

$$\begin{aligned} - \delta_i \delta_j &= \delta_j \delta_i & |i - j| \geq 2, \\ - \delta_i \delta_{i+1} \delta_i &= \delta_{i+1} \delta_i \delta_{i+1} & 1 \leq i \leq n - 2, \\ - \delta_i^2 &= 1 & 1 \leq i \leq n - 1, \end{aligned}$$

donde δ_i es la permutación $(i, i + 1)$, para todo i .

Pero σ_i es claramente una preimagen por f de δ_i , luego por el lema 2.1.1, $\overline{B_n(M)}$ y $B_n(M)$ tienen los mismos generadores, y así ψ es sobreyectiva.

Del mismo modo en que lo hicimos en el paso 2, demostramos que ψ es un isomorfismo usando el siguiente método.

En primer lugar, denotamos G_A el conjunto de generadores de $PB_n(M)$, y G el conjunto de generadores de $\overline{B_n(M)}$. Para cada relación de la presentación de $PB_n(M)$, la consideramos vía e como una relación en $B_n(M)$, y probamos que también se verifica en $\overline{B_n(M)}$.

A continuación, para todo relator r de Σ_n , consideramos su preimagen canónica por f , denotada \tilde{r} . Encontraremos entonces una palabra U sobre G tal que la igualdad $\tilde{r} = U$ se satisface en $\overline{B_n(M)}$, y tal que $\psi(U)$ sea una palabra sobre G_A .

Finalmente, para todo $x \in G_A$ y todo generador δ_i de Σ_n , encontraremos una palabra V sobre G tal que la igualdad $\sigma_i x \sigma_i^{-1} = V$ se satisface en $\overline{B_n(M)}$, y tal que $\psi(V)$ es una palabra sobre G_A .

Esto nos da las relaciones de tipos 1, 2, y 3 del lema 2.1.1 y, en consecuencia, una presentación de $B_n(M)$; de igual modo, esto prueba que ψ es inyectiva, lo que implica que es un isomorfismo.

Verifiquemos entonces en $\overline{B_n(M)}$ las relaciones de tipo 1. En el caso de (PR1), empezamos con (R3):

$$a_{1,1} \cdots a_{1,2g} a_{1,1}^{-1} \cdots a_{1,2g}^{-1} = \sigma_1 \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \cdots \sigma_1. \quad (2.1)$$

Usando (R7) y (R8), vemos que el lado izquierdo de la ecuación (2.1) equivale a

$$\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1} (a_{n,1} \cdots a_{n,2g}) \sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-2} \cdots \sigma_{n-1}^{-1} (a_{n,1}^{-1} \cdots a_{n,2g}^{-1}) \sigma_{n-1} \cdots \sigma_1.$$

Por otra parte, por (R1), (R2) (relaciones de trenzas) y (R9), obtenemos

$$T_{i,n-1}^{-1} T_{i,n} = \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{n-2}^{-1} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \cdots \sigma_i = \sigma_{n-1} \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{n-1}^{-1},$$

luego

$$\prod_{i=1}^{n-1} T_{i,n-1}^{-1} T_{i,n} = \sigma_{n-1} \cdots \sigma_1^2 \cdots \sigma_{n-1}.$$

Por tanto, la ecuación (2.1) queda de la forma:

$$a_{n,1} \cdots a_{n,2g} \left(\prod_{i=1}^{n-1} T_{i,n-1}^{-1} T_{i,n} \right)^{-1} a_{n,1}^{-1} \cdots a_{n,2g}^{-1} = 1,$$

que es claramente equivalente a (PR1).

Usaremos en lo que sigue algunas relaciones de $\overline{B_n(M)}$ deducidas fácilmente de (R1)-(R9). De (R7) y (R8), obtenemos

$$a_{i,r} = (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) a_{1,r} (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \quad \text{si } r \text{ es impar.} \quad (2.2)$$

$$a_{i,r} = (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1) a_{1,r} (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) \quad \text{si } r \text{ es par.} \quad (2.3)$$

$$A_{j,s} = (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}) A_{2,s} (\sigma_2^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) = (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) A_{1,s} (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}). \quad (2.4)$$

También, de (R1) y (R2), obtenemos

$$\sigma_j (\sigma_k \sigma_{k-1} \cdots \sigma_i) = (\sigma_k \sigma_{k-1} \cdots \sigma_i) \sigma_{j+1} \quad (i \leq j < k). \quad (2.5)$$

$$\sigma_j (\sigma_k^{-1} \sigma_{k-1}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1}) = (\sigma_k^{-1} \sigma_{k-1}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1}) \sigma_{j+1} \quad (i \leq j < k). \quad (2.6)$$

$$\sigma_i \cdots \sigma_{k-1} \sigma_k^2 \sigma_{k-1}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1} = \sigma_k^{-1} \cdots \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1} \cdots \sigma_k. \quad (2.7)$$

Usando (2.4), (2.5), (2.6) y (R6), vemos que si $1 \leq k \leq j - 2$;

$$\begin{aligned} \sigma_k A_{j,s} &= \sigma_k (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) A_{1,s} (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) \\ &= (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) \sigma_{k+1} A_{1,s} (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) \\ &= (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) A_{1,s} \sigma_{k+1} (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) = A_{j,s} \sigma_k. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Del mismo modo, usando (2.4), (R6) y (R4), se tiene

$$a_{1,r} A_{j,s} = a_{1,r} (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}) A_{2,s} (\sigma_2^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) = A_{j,s} a_{1,r},$$

si $r \neq s$ y $1 < j$.

Por tanto, si $i < j$ y $r \neq s$, por (2.2) y (2.3), $a_{i,r}$ es un producto de elementos que conmutan con $A_{j,s}$, luego obtenemos

$$a_{i,r} A_{j,s} = A_{j,s} a_{i,r},$$

lo que demuestra que (PR2) se satisface en $\overline{B_n(M)}$.

Ahora verificamos la relación (PR3). Haremos el caso en el que r es impar, siendo el otro caso análogo. Se ve claramente cuál de las relaciones de $\overline{B_n(M)}$ estamos usando en cada una de las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (a_{i,1} \cdots a_{i,r}) A_{j,r} &= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (a_{1,1} \cdots a_{1,r}) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) A_{j,r} \\ &= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (a_{1,1} \cdots a_{1,r}) A_{j,r} (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \\ &= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (a_{1,1} \cdots a_{1,r}) (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}) A_{2,r} (\sigma_2^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \\ &= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}) (a_{1,1} \cdots a_{1,r}) A_{2,r} (\sigma_2^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \\ &= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}) \sigma_1^2 A_{2,r} (a_{1,1} \cdots a_{1,r}) (\sigma_2^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \\ &= (\sigma_i \cdots \sigma_{j-2} \sigma_{j-2}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_2^{-1} A_{2,r} \sigma_2^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) (a_{1,1} \cdots a_{1,r}) \\ &\quad (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \\ &= (\sigma_i \cdots \sigma_{j-2} \sigma_{j-1}^2 \sigma_{j-2}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) A_{j,r} (a_{1,1} \cdots a_{1,r}) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) \\ &= (\sigma_i \cdots \sigma_{j-2} \sigma_{j-1}^2 \sigma_{j-2}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) A_{j,r} (a_{i,1} \cdots a_{i,r}) \\ &= T_{i,j} T_{i,j-1}^{-1} A_{j,r} (a_{i,1} \cdots a_{i,r}). \end{aligned}$$

Esto prueba el caso de (PR3). Las relaciones (PR4) y (PR5) son en realidad relaciones en el grupo de trenzas del disco, luego son consecuencia de (R1) y (R2). (PR6) se obtiene fácilmente de (R9), (2.2), (2.3) y las relaciones de trenzas (R1) y (R2). Luego podemos pasar a (PR7): Es claro que basta probar que en $B_n(M)$, $A_{i,r}$ conmuta con $(a_{j,2g}^{-1} \cdots a_{j,1}^{-1} T_{j,k} a_{j,2g} \cdots a_{j,1})$ para $1 \leq j < i \leq k < n$. Esto se demuestra como sigue (recordemos que ya podemos usar (PB1)-(PB6)):

$$\begin{aligned}
& A_{i,r} (a_{j,2g}^{-1} \cdots a_{j,1}^{-1} T_{j,k} a_{j,2g} \cdots a_{j,1}) \\
&= (a_{j,2g}^{-1} \cdots a_{j,r+1}^{-1}) A_{i,r} (a_{j,r}^{-1} \cdots a_{j,1}^{-1}) T_{j,k} a_{j,2g} \cdots a_{j,1} \\
&= (a_{j,2g}^{-1} \cdots a_{j,1}^{-1}) T_{j,i} T_{j,i-1}^{-1} A_{i,r} T_{j,k} a_{j,2g} \cdots a_{j,1} \\
&= (a_{j,2g}^{-1} \cdots a_{j,1}^{-1}) T_{j,i} T_{j,i-1}^{-1} A_{i,r} (\sigma_j \cdots \sigma_{k-1}^2 \cdots \sigma_j) a_{j,2g} \cdots a_{j,1} \\
&= (a_{j,2g}^{-1} \cdots a_{j,1}^{-1}) T_{j,i} T_{j,i-1}^{-1} A_{i,r} (\sigma_j \cdots \sigma_{k-1}^2 \cdots \sigma_1) a_{1,2g} \cdots a_{1,1} (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) \\
&\text{(usando (R3))} \\
&= (a_{j,2g}^{-1} \cdots a_{j,1}^{-1}) T_{j,i} T_{j,i-1}^{-1} A_{i,r} (\sigma_j \cdots \sigma_{k-1} \sigma_k^{-1} \cdots \sigma_{n-1}^{-2} \cdots \sigma_1^{-1}) a_{1,1} \cdots a_{1,2g} \\
&\quad (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) \\
&\text{(por (R9) y (2.8))} \\
&= a_{j,2g}^{-1} \cdots a_{j,1}^{-1} (\sigma_j \cdots \sigma_{i-1}^2 A_{i,r} \sigma_{i-1} \cdots \sigma_{k-1} \sigma_k^{-1} \cdots \sigma_{n-1}^{-2} \cdots \sigma_1^{-1}) a_{1,1} \cdots a_{1,2g} \\
&\quad (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) \\
&= a_{j,2g}^{-1} \cdots a_{j,1}^{-1} (\sigma_j \cdots \sigma_{i-1} A_{i-1,r} \sigma_i \cdots \sigma_{k-1} \sigma_k^{-1} \cdots \sigma_{n-1}^{-2} \cdots \sigma_1^{-1}) a_{1,1} \cdots a_{1,2g} \\
&\quad (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) \\
&= a_{j,2g}^{-1} \cdots a_{j,1}^{-1} (\sigma_j \cdots \sigma_{k-1} \sigma_k^{-1} \cdots \sigma_{n-1}^{-2} \cdots \sigma_i^{-1} \sigma_{i-1} \sigma_{i-2}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) A_{i,r} \\
&\quad (a_{1,1} \cdots a_{1,2g}) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) \\
&= a_{j,2g}^{-1} \cdots a_{j,1}^{-1} (\sigma_j \cdots \sigma_{k-1} \sigma_k^{-1} \cdots \sigma_{n-1}^{-2} \cdots \sigma_1^{-1}) a_{1,1} \cdots a_{1,2g} (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) A_{i,r} \\
&\text{(por (R3) de nuevo)} \\
&= a_{j,2g}^{-1} \cdots a_{j,1}^{-1} T_{j,k} (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_1 a_{1,2g} \cdots a_{1,1} \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) A_{i,r} \\
&= (a_{j,2g}^{-1} \cdots a_{j,1}^{-1} T_{j,k} a_{j,2g} \cdots a_{j,1}) A_{i,r}.
\end{aligned}$$

Por último, verificamos la relación (PR8) usando algunos resultados intermedios. El primero es evidente: por (R4) vemos que en $B_n(M)$, $A_{1,2g} A_{2,2g} = A_{2,2g} A_{1,2g}$, y además esta trenza conmuta con σ_1 , ya que

$$A_{1,2g} A_{2,2g} \sigma_1 = A_{1,2g} \sigma_1^{-1} A_{1,2g} = \sigma_1 A_{2,2g} A_{1,2g} = \sigma_1 A_{1,2g} A_{2,2g}.$$

Análogamente, se prueba que $(a_{1,2g}a_{2,2g})$ conmuta con σ_1 . El resultado siguiente es consecuencia de los anteriores y de (R5):

$$\begin{aligned} a_{1,2g}A_{2,2g}a_{1,2g}^{-1} &= (a_{1,2g-1}^{-1} \cdots a_{1,1}^{-1}) \sigma_1^2 A_{2,2g} (a_{1,1} \cdots a_{1,2g-1}) \\ &= A_{1,2g}^{-1} \sigma_1^2 A_{2,2g} A_{1,2g} = A_{1,2g}^{-1} A_{2,2g} A_{1,2g} \sigma_1^2 = A_{2,2g} \sigma_1^2, \end{aligned}$$

luego se tiene

$$a_{1,2g}^{-1} A_{2,2g} = A_{2,2g} a_{1,2g}^{-1} \sigma_1^{-2}. \quad (2.9)$$

Consideremos entonces los factores del lado derecho de (PR8), y veamos que

$$\begin{aligned} & (a_{i,2g}^{-1} \cdots a_{i,1}^{-1}) T_{i,j-1} T_{i,j}^{-1} (a_{i,1} \cdots a_{i,2g}) \\ &= (a_{i,2g}^{-1} \cdots a_{i,1}^{-1}) \sigma_i \cdots \sigma_{j-2} \sigma_{j-1}^2 \sigma_{j-2}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1} (a_{i,1} \cdots a_{i,2g}) \\ &= \sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1} (a_{1,2g}^{-1} \cdots a_{1,1}^{-1}) \sigma_1 \cdots \sigma_{j-2} \sigma_{j-1}^2 \sigma_{j-2}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1} (a_{1,1} \cdots a_{1,2g}) \\ & \quad (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) \\ & \text{(por (2.7))} \\ &= \sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1} (a_{1,2g}^{-1} \cdots a_{1,1}^{-1}) \sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-2} \sigma_2 \cdots \sigma_{j-1} (a_{1,1} \cdots a_{1,2g}) \\ & \quad (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) \\ &= \sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1} \sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_2^{-1} (a_{1,2g}^{-1} \cdots a_{1,1}^{-1}) \sigma_1^{-2} (a_{1,1} \cdots a_{1,2g}) (\sigma_2 \cdots \sigma_{j-1}) \\ & \quad (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) \\ &= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1} \sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}) a_{1,2g}^{-1} A_{1,2g}^{-1} \sigma_1^{-2} A_{1,2g} a_{1,2g} (\sigma_2 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) \\ & \text{(ya que } (A_{1,2g} A_{2,2g}) \text{ conmuta con } \sigma_1) \\ &= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1} \sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}) a_{1,2g}^{-1} A_{2,2g} \sigma_1^{-2} A_{2,2g}^{-1} a_{1,2g} (\sigma_2 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) \\ & \text{(por (2.9))} \\ &= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1} \sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}) A_{2,2g} a_{1,2g}^{-1} \sigma_1^{-2} a_{1,2g} A_{2,2g}^{-1} (\sigma_2 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) \\ & \text{(ya que } (a_{1,2g} a_{2,2g}) \text{ conmuta con } \sigma_1) \\ &= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1} \sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}) A_{2,2g} a_{2,2g} \sigma_1^{-2} a_{2,2g}^{-1} A_{2,2g}^{-1} (\sigma_2 \cdots \sigma_{j-1} \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) \\ &= (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) A_{j,2g} a_{j,2g} (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-2} \sigma_2 \cdots \sigma_{j-1}) a_{j,2g}^{-1} A_{j,2g}^{-1} (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) \\ & \text{(por (2.8))} \\ &= A_{j,2g} a_{j,2g} (\sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-2} \sigma_2 \cdots \sigma_{j-1}) (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}) a_{j,2g}^{-1} A_{j,2g}^{-1} \\ & \text{(por (2.7))} \\ &= a_{j,1} \cdots a_{j,2g} (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-2} \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{j-1}) a_{j,2g}^{-1} \cdots a_{j,1}^{-1}. \end{aligned}$$

Y de aquí se obtiene claramente (PR8):

$$\begin{aligned}
& \left(\prod_{i=1}^{j-1} a_{i,2g}^{-1} \cdots a_{i,1}^{-1} T_{i,j-1} T_{i,j}^{-1} a_{i,1} \cdots a_{i,2g} \right) a_{j,1} \cdots a_{j,2g} a_{j,1}^{-1} \cdots a_{j,2g}^{-1} \\
= & \left(\prod_{i=1}^{j-1} a_{j,1} \cdots a_{j,2g} (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-2} \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{j-1}) a_{j,2g}^{-1} \cdots a_{j,1}^{-1} \right) \\
& a_{j,1} \cdots a_{j,2g} a_{j,1}^{-1} \cdots a_{j,2g}^{-1} \\
= & a_{j,1} \cdots a_{j,2g} (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-2} \sigma_2^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) a_{j,1}^{-1} \cdots a_{j,2g}^{-1} \\
= & (\sigma_j \cdots \sigma_{n-1}) a_{n,1} \cdots a_{n,2g} (\sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-2} \cdots \sigma_{n-1}^{-1}) a_{n,1}^{-1} \cdots a_{n,2g}^{-1} (\sigma_{n-1} \cdots \sigma_j) \\
& \text{(por (R9) y (PR1))} \\
= & (\sigma_j \cdots \sigma_{n-1}) (\sigma_{n-1} \cdots \sigma_j) = T_{j,n}.
\end{aligned}$$

Hemos terminado por tanto con las relaciones de tipo 1. Consideremos ahora las de tipo 2. Para todo relator de la presentación de Σ_n , debemos encontrar la palabra U mencionada anteriormente.

El primer relator es $\delta_i \delta_j \delta_i^{-1} \delta_j^{-1}$, donde $|i - j| \geq 2$, el cual, por (R1), nos da en $\overline{B_n(M)}$ la relación

$$\sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} = 1 \quad (|i - j| \geq 2).$$

Claramente, U es la palabra trivial.

El segundo relator, $\delta_i \delta_{i+1} \delta_i \delta_{i+1}^{-1} \delta_i^{-1} \delta_{i+1}^{-1}$ nos da, por (R2),

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} = 1 \quad (i = 1, \dots, n-2),$$

luego en este caso U es también la palabra trivial.

Por último, del tercer relator δ_i^2 , se obtiene, usando (R9),

$$\sigma_i^2 = T_{i,i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1),$$

luego $U = T_{i,i+1}$.

Por tanto hemos obtenido las relaciones en $\overline{B_n(M)}$ enviadas por ψ sobre las relaciones de tipo 2.

2.3. GRUPOS DE TRENZAS EN SUPERFICIES NO ORIENTABLES 47

Terminamos la demostración del teorema 1.3.1 obteniendo las relaciones de tipo 3. Éstas son muy fáciles de deducir, utilizando (2.8), (R1), (R2), (R7), (R8) y (R9). Son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \sigma_i a_{j,r} \sigma_i^{-1} &= a_{j,r} & (j \neq i, i+1), \\
 \sigma_i a_{i,r} \sigma_i^{-1} &= a_{i+1,r} T_{i,i+1}^{-1} & \text{si } r \text{ es par,} \\
 \sigma_i a_{i,r} \sigma_i^{-1} &= T_{i,i+1} a_{i+1,r} & \text{si } r \text{ es impar,} \\
 \sigma_i a_{i+1,r} \sigma_i^{-1} &= T_{i,i+1} a_{i,r} & \text{si } r \text{ es par,} \\
 \sigma_i a_{i+1,r} \sigma_i^{-1} &= a_{i,r} T_{i,i+1}^{-1} & \text{si } r \text{ es impar,} \\
 \sigma_i T_{j,k} \sigma_i^{-1} &= T_{j,k} & (i \neq j-1, j, k), \\
 \sigma_i T_{i+1,k} \sigma_i^{-1} &= T_{i,k} T_{i,i+1}^{-1}, \\
 \sigma_i T_{i,k} \sigma_i^{-1} &= T_{i,i+1} T_{i+1,k}, \\
 \sigma_i T_{j,i} \sigma_i^{-1} &= T_{j,i-1} T_{j,i}^{-1} T_{j,i+1}.
 \end{aligned}$$

2.3 Grupos de trenzas en superficies no orientables

Esta sección está dedicada a demostrar el teorema 1.3.2, usando el método anterior. Sea entonces M una superficie cerrada, no orientable, de género $g \geq 2$.

Paso 1. Denotemos $\overline{PB}_n(M)$ el grupo definido por la siguiente presentación.

Presentación 3

- Generadores: $\{a_{i,r}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq r \leq g\} \cup \{T_{j,k}; 1 \leq j < k \leq n\}$.
- Relaciones:

$$(Pr1) \quad a_{n,1}^2 \cdots a_{n,g}^2 = \prod_{i=1}^{n-1} T_{i,n-1}^{-1} T_{i,n}.$$

$$(Pr2) \quad a_{i,r}A_{j,s} = A_{j,s}a_{i,r} \quad (1 \leq i < j \leq n; 1 \leq r, s \leq g; r \neq s).$$

$$(Pr3) \quad (a_{i,1}^2 \cdots a_{i,r-1}^2 a_{i,r}) A_{j,r} (a_{i,r}^{-1} a_{i,r-1}^{-2} \cdots a_{i,1}^{-2}) A_{j,r}^{-1} = T_{i,j} T_{i,j-1}^{-1} \\ (1 \leq i < j \leq n; 1 \leq r \leq g).$$

$$(Pr4) \quad T_{i,j} T_{k,l} = T_{k,l} T_{i,j} \quad (1 \leq i < j < k < l \leq n \text{ ó } 1 \leq i < k < l \leq j \leq n).$$

$$(Pr5) \quad T_{k,l} T_{i,j} T_{k,l}^{-1} = T_{i,k-1} T_{i,k}^{-1} T_{i,j} T_{i,l}^{-1} T_{i,k} T_{i,k-1}^{-1} T_{i,l} \quad (1 \leq i < k \leq j < l \leq n).$$

$$(Pr6) \quad a_{i,r} T_{j,k} = T_{j,k} a_{i,r} \quad (1 \leq i < j < k \leq n \text{ ó } 1 \leq j < k < i \leq n), \\ (1 \leq r \leq g).$$

$$(Pr7) \quad a_{i,r} (a_{j,g}^{-2} \cdots a_{j,1}^{-2} T_{j,k}) = (a_{j,g}^{-2} \cdots a_{j,1}^{-2} T_{j,k}) a_{i,r} \quad (1 \leq j < i \leq k \leq n).$$

$$(Pr8) \quad T_{j,n} = a_{j,1}^2 \cdots a_{j,g}^2 \left(\prod_{i=1}^{j-1} T_{j-i,j}^{-1} T_{j-i,j-1} \right).$$

Donde

$$A_{j,r} = a_{j,1}^2 \cdots a_{j,r-1}^2 a_{j,r}^{-1} a_{j,r-1}^{-2} \cdots a_{j,1}^{-2}.$$

Necesitaremos, al igual que en el caso orientable, otra presentación de $\overline{PB}_n(M)$, que es la siguiente.

Presentación 4

- Generadores: $\{A_{i,r}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq r \leq g\} \cup \{T_{j,k}; 1 \leq j < k \leq n\}$.
- Relaciones: las mismas que en la presentación 3, donde

$$a_{i,r} = A_{i,1}^2 \cdots A_{i,r-1}^2 A_{i,r}^{-1} A_{i,r-1}^{-2} A_{i,1}^{-2}.$$

Claramente, las presentaciones 3 y 4 son equivalentes, de la misma forma en que lo eran las presentaciones 1 y 2. Debemos definir ahora el homomorfismo

$$\overline{PB}_n(M) \xrightarrow{\varphi} PB_n(M),$$

dando la imagen de los generadores. Éstas serán similares a las de las superficies orientables. Para todo i y j tales que $1 \leq i \leq j \leq n$, la trenza $T_{i,j}$ será la misma que en la sección 2.2. Para todo i y r , tales que $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq r \leq g$, la trenza $a_{i,r}$ representa a la cuerda i -ésima atravesando el

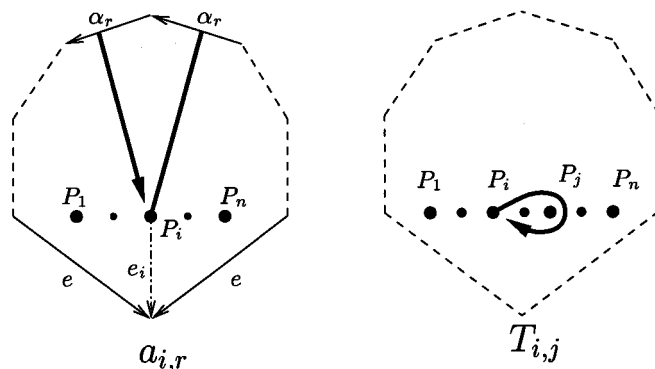


Figura 2.4: Los generadores de $PB_n(M)$.

muro r -ésimo, como en la figura 2.4. Definimos también los caminos e_i ($i = 1, \dots, n$), que van de P_i al punto final de e , como en la figura 2.4.

Dado $i \in \{1, \dots, n\}$, denotemos $s_{i,r}$ la i -ésima cuerda de $a_{i,r}$. Podemos proceder como hicimos con el polígono- P_1 en la sección 1.3.1 para obtener el polígono- P_i : Cortamos a lo largo de los caminos e_i y $s_{i,1}, \dots, s_{i,g}$, y pegamos a lo largo de e y $\alpha_1, \dots, \alpha_g$. En el polígono- P_i resultante, los lados se leen

$$s_{i,1}, s_{i,1}, s_{i,2}, s_{i,2}, \dots, s_{i,g}, s_{i,g}, e_i, e_i^{-1},$$

en el sentido de la agujas del reloj. Podemos entonces repetir el proceso de la sección 1.3.1 y ver que para $1 \leq i < j$, la trenza

$$A_{j,r} = a_{j,1}^2 \cdots a_{j,r-1}^2 a_{j,r}^{-1} a_{j,r-1}^{-2} \cdots a_{j,1}^{-2}$$

se puede representar en el polígono- P_i como en la figura 2.5.

Lo que queda del paso 1, es decir, demostrar que φ es un homomorfismo bien definido, es análogo al caso orientable. Esto es, las relaciones (Pr4), (Pr5) y (Pr6) son obvias; las relaciones (Pr1), (Pr2) y (Pr3) son análogas a las relaciones (r3), (r4) y (r5) del teorema 1.3.2; y podemos comprobar fácilmente las relaciones (Pr7) y (Pr8) en el polígono- P_j .

Paso 2. Este paso es idéntico, salvo las substituciones evidentes, al paso correspondiente de la sección 2.2, con lo que se demuestra el teorema siguiente:

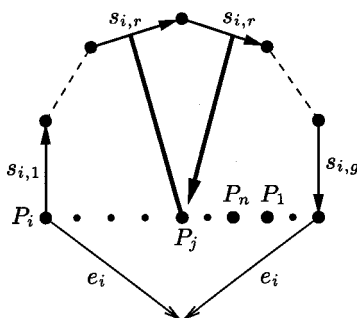


Figura 2.5: La trenza $A_{j,r}$ en el polígono- P_i ($i < j$).

Teorema 2.3.1. *Si M es una superficie cerrada, no orientable, de género $g \geq 2$, entonces $PB_n(M)$ admite la presentación 3 (luego también la presentación 4).*

Paso 3. Denotemos $\overline{B_n(M)}$ el grupo definido por la presentación del teorema 1.3.2. Llamemos $a_{1,r}$ a los elementos a_r para $r = 1, \dots, g$, y añadamos entonces los generadores

- $a_{i,r} \quad i = 2, \dots, n; \quad r = 1, \dots, g,$
- $T_{j,k} \quad 1 \leq j < k \leq n,$

y las relaciones

$$(r7) \quad a_{j+1,r} = \sigma_j^{-1} a_{j,r} \sigma_j \quad (1 \leq j \leq n-1; 1 \leq r \leq g).$$

$$(r8) \quad T_{j,k} = \sigma_j \sigma_{j+1} \cdots \sigma_{k-2} \sigma_{k-1}^2 \sigma_{k-2} \cdots \sigma_j \quad (1 \leq j < k \leq n).$$

Esto nos proporciona una presentación equivalente de $\overline{B_n(M)}$, y la función definida de forma natural

$$\psi : \overline{B_n(M)} \longrightarrow B_n(M),$$

que se demuestra fácilmente que es un homomorfismo bien definido.

Ahora sólo queda aplicar el lema 2.1.1 a la sucesión exacta (1.1), y encontrar relaciones en $\overline{B_n(M)}$ enviadas por ψ a las de tipos 1, 2 y 3, como hicimos en la sección 2.2. Para las de tipo 1 correspondientes a (Pr1)-(Pr6), podemos usar prácticamente los mismos cálculos que en la sección anterior.

La relación enviada sobre (Pr7) se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned}
& a_{1,r} (a_{j,g}^{-2} \cdots a_{j,1}^{-2} T_{j,k}) \\
= & a_{i,r} (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1} a_{1,g}^{-2} \cdots a_{1,1}^{-2} \sigma_1 \cdots \sigma_{k-1}) \sigma_{k-1} \cdots \sigma_j \\
& \text{(por (r3))} \\
= & a_{i,r} (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{n-1}^{-1}) (\sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_k^{-1}) (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_j) \\
= & (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-2}^{-1}) a_{i,r} \sigma_{i-1}^{-1} (\sigma_i^{-1} \cdots \sigma_{n-1}^{-1}) (\sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_k^{-1}) \\
& (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_j) \\
= & (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-2}^{-1}) \sigma_{i-1}^{-1} a_{i-1,r} (\sigma_i^{-1} \cdots \sigma_{n-1}^{-1}) (\sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_k^{-1}) \\
& (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_j) \\
= & (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{n-1}^{-1}) (\sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_k^{-1}) (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_i) a_{i-1,r} \\
& (\sigma_{i-1} \sigma_{i-2} \cdots \sigma_j) \\
= & (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{n-1}^{-1}) (\sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_k^{-1}) (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_j) a_{i,r} \\
= & (a_{j,g}^{-2} \cdots a_{j,1}^{-2} T_{j,k}) a_{i,r},
\end{aligned}$$

y la relación enviada sobre (Pr8), se deduce del cálculo siguiente:

$$\begin{aligned}
a_{j,1}^2 \cdots a_{j,g}^2 \left(\prod_{i=1}^{j-1} T_{j-i,j}^{-1} T_{j-i,j-1} \right) &= a_{j,1}^2 \cdots a_{j,g}^2 (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-2} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}) \\
&\text{(por (9))} \\
&= \sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1} a_{1,1}^2 \cdots a_{1,g}^2 \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1} \\
&\text{(por (r3))} \\
&= \sigma_j \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_j = T_{j,n}.
\end{aligned}$$

Finalmente, las relaciones enviadas por ψ sobre las de tipo 2, son idénticas a las del caso orientable, y las relaciones de tipo 3 son igualmente fáciles de deducir. Terminamos así la demostración del teorema 1.3.2.

2.4 El problema de la palabra

En esta sección damos un algoritmo para resolver el problema de la palabra en el grupo de trenzas de una superficie cerrada, usando nuestras nuevas

presentaciones. Trataremos solamente el caso orientable, ya que el mismo método se puede utilizar para el caso no orientable.

Sea ω una palabra sobre los generadores de $B_n(M)$, es decir, sobre $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, a_1, \dots, a_{2g}$ y sus inversos. El algoritmo que proponemos nos dará como resultado una palabra equivalente a ω ,

$$\omega' = \omega_1 \cdots \omega_n s,$$

donde ω_i es una palabra sobre $\{a_{i,1}, \dots, a_{i,2g}, T_{i,i+1}, \dots, T_{i,n-1}\}$, y s es una palabra sobre $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$ que representa la permutación inducida por ω en las cuerdas. Más aún, demostraremos que esta expresión es única, luego $\omega = 1$ si y sólo si ω' es la palabra trivial. Este algoritmo es análogo al clásico peinado de trenzas del grupo de trenzas del disco.

En primer lugar necesitamos algunos resultados previos. Consideremos el homomorfismo π de la sucesión exacta (1.1); éste envía ω sobre su permutación correspondiente. Por otra parte, para todo elemento de Σ_n podemos elegir una forma normal, es decir, una palabra sobre $\{\delta_1, \dots, \delta_{n-1}\}$ que lo representa. Por ejemplo, podemos usar las formas normales definidas en [H], donde todo elemento de Σ_n se escribe como un producto

$$t_{1,k_1} t_{2,k_2} \cdots t_{n-1,k_{n-1}},$$

donde $t_{m,0} = 1$ y $t_{m,k} = \delta_m \delta_{m-1} \cdots \delta_{m-k+1}$. Si sustituimos en esta forma normal δ_i por σ_i para $i = 1, \dots, n-1$, obtenemos una aplicación $g : \Sigma_n \rightarrow W$, donde W es el conjunto de palabras sobre $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$ y sus inversos.

Consideremos entonces la composición $\varepsilon = g \circ \pi$:

$$\varepsilon : B_n(M) \xrightarrow{\pi} \Sigma_n \xrightarrow{g} W.$$

Esta aplicación envía cualquier trenza sobre una palabra que induce la misma permutación de las cuerdas. Más aún, la imagen de ε es finita, ya que Σ_n también lo es.

Para poder aplicar el algoritmo, necesitamos elaborar un “diccionario”, como sigue: para toda palabra p en la imagen de ε , consideremos todas las trenzas de la forma

$$p a_r^{\pm 1} p^{-1}, \quad p \sigma_i^{\pm 1} \varepsilon(p \sigma_i)^{-1}.$$

Claramente, sólo hay un número finito de ellas, y son todas trenzas puras. No es difícil escribir estas trenzas como palabras sobre $\{a_{i,r}, T_{j,k}\}$ usando las relaciones de nuestra presentación de $B_n(M)$. Estas serán las primeras palabras de nuestro diccionario.

Ahora, para $j = 1, \dots, n$, definimos los conjuntos siguientes:

$$W_j = \{a_{i,r}^{\pm 1}; i = 1, \dots, j, r = 1, \dots, 2g\} \\ \cup \{T_{i,k}^{\pm 1}; i = 1, \dots, j, k = i + 1, \dots, n - 1\},$$

$$V_j = \{A_{j,r}^{\pm 1}; r = 1, \dots, 2g\} \cup \{T_{j,k}^{\pm 1}; k = j + 1, \dots, n - 1\}.$$

Para todo $x \in W_i$ y todo $y \in V_j$, $i < j$, queremos añadir a nuestro diccionario una expresión de la forma

$$y x y^{-1} = Z,$$

donde Z es una palabra sobre W_i . Si y es una letra positiva, esta expresión es simplemente una relación de tipo 3. Puede ocurrir que en Z exista una letra de la forma $T_{l,n}^{\pm 1}$ ($l \leq i$), pero podemos reemplazarla por una palabra sobre W_i usando (PR8). Si y es una letra negativa, podemos deducir la expresión anterior del mismo modo en que lo hicimos para las relaciones de tipo 3. Así que, de cualquier modo, podemos añadir todas ellas a nuestro diccionario.

Necesitamos aún un último resultado: Denotemos $S_{n,r}$ a la n -ésima cuerda de $A_{n,r}$. Como $s_{n,1}, \dots, s_{n,2g}$ genera $\pi_1(M, P_n)$, el lema 2.2.1 implica claramente que $\{S_{n,1}, \dots, S_{n,2g}\}$ es otro sistema de generadores. Además, aplicando las fórmulas del lema 2.2.1, se tiene

$$s_{n,1}^{-1} s_{n,2}^{-1} \cdots s_{n,2g}^{-1} s_{n,1} s_{n,2} \cdots s_{n,2g} \\ = (S_{n,2g}^{-1} S_{n,2g-1}^{-1} S_{n,2g-2}^{-1} \cdots S_{n,1}) (S_{n,2g} S_{n,2g-1}^{-1} S_{n,2g-2} \cdots S_{n,1}^{-1}).$$

Por tanto, obtenemos:

$$\pi_1(M, P_n) = \\ \langle \{S_{n,1}, \dots, S_{n,2g}\}; (S_{n,2g}^{-1} S_{n,2g-1}^{-1} \cdots S_{n,2}^{-1} S_{n,1}) (S_{n,2g} S_{n,2g-1}^{-1} \cdots S_{n,2} S_{n,1}^{-1}) = 1 \rangle.$$

Podemos ya por tanto comenzar con el algoritmo. Sea pues ω una palabra sobre los generadores de $B_n(M)$. Definamos la palabra $s = \varepsilon(\omega)$.

Como las formas normales en Σ_n son únicas, también lo es s . Obtenemos una palabra $\bar{\omega} = \omega s^{-1} \in PB_n(M)$ tal que $\omega = \bar{\omega}s$.

Queremos escribir entonces $\bar{\omega}$ como una palabra sobre $\{a_{i,r}, T_{j,k}\}$ (donde i, r, j y k toman todos los valores posibles). Supongamos que $\bar{\omega}$ tiene longitud m , es decir, $\bar{\omega} = x_1 \cdots x_m$ donde cada x_i es un generador de $B_n(M)$ o su inverso. Para todo $i = 1, \dots, m$ definamos $\bar{\omega}_i = x_1 \cdots x_i$. Como $\bar{\omega} \in PB_n(M)$, entonces $\varepsilon(\bar{\omega}_m) = \varepsilon(\bar{\omega}) = 1$, luego se tiene:

$$\bar{\omega} = x_1 \cdots x_m = (1 x_1 \varepsilon(\bar{\omega}_1)^{-1})(\varepsilon(\bar{\omega}_1) x_2 \varepsilon(\bar{\omega}_2)^{-1}) \cdots (\varepsilon(\bar{\omega}_{m-1}) x_m \varepsilon(\bar{\omega}_m)^{-1}).$$

Pero todos los factores del lado derecho de la ecuación están incluidos en nuestro diccionario, luego podemos usarlo para escribirlos todos, y en consecuencia también $\bar{\omega}$, como palabras sobre los generadores de $PB_n(M)$.

El siguiente paso consiste en sustituir en $\bar{\omega}$ todas las letras de la forma $a_{n,r}^{\pm 1}$ usando la fórmula de la presentación 2,

$$a_{n,r}^{(-1)^{r+1}} = (A_{n,1} A_{n,2}^{-1} A_{n,3} \cdots A_{n,r-1}^{\pm 1}) (A_{n,r+1}^{\mp 1} \cdots A_{n,2g-1}^{-1} A_{n,2g}),$$

y todas las letras de la forma $T_{j,n}^{\pm 1}$, usando (PR8). De este modo obtenemos $\bar{\omega}$ escrito como una palabra sobre $W_{n-1} \cup V_n$. Usamos de nuevo el diccionario para “mover” hacia la derecha de $\bar{\omega}$ todas las letras de V_n . Obtendremos de ese modo $\bar{\omega} = X Y$, donde X es una palabra sobre W_{n-1} e Y es una palabra sobre V_n .

Consideremos ahora la siguiente sucesión exacta, que proviene también de la fibración de Fadell-Neuwirth (ver [B]).

$$1 \longrightarrow PB_{n-1}(M \setminus \{P_n\}) \xrightarrow{u} PB_n(M) \xrightarrow{v} \pi_1(M, P_n) \longrightarrow 1,$$

donde para todo $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in PB_n(M)$, $v(\Gamma) = \gamma_n$. Nótese que $v(\bar{\omega}) = Y \in \pi_1(M)$. Ahora, en $\pi_1(M)$ podríamos aplicar el algoritmo de Dehn (ver [LS]) para obtener una forma normal de Y . A cada paso del algoritmo de Dehn, una subpalabra de Y sería reemplazada por otra más corta, usando la relación

$$(S_{n,2g}^{-1} S_{n,2g-1} S_{n,2g-2}^{-1} \cdots S_{n,1}) (S_{n,2g} S_{n,2g-1}^{-1} S_{n,2g-2} \cdots S_{n,1}^{-1}) = 1.$$

En lugar de hacer esto, realizaremos un proceso similar en $PB_n(M)$: cada vez que el algoritmo de Dehn reemplace una subpalabra de Y en $\pi_1(M)$,

reemplazaremos la correspondiente subpalabra de $\bar{\omega} = XY \in PB_n(M)$ usando

$$(A_{n,2g}^{-1}A_{n,2g-1}A_{n,2g-2}^{-1}\cdots A_{n,1}) (A_{n,2g}A_{n,2g-1}^{-1}A_{n,2g-2}\cdots A_{n,1}^{-1}) = \prod_{i=1}^{n-1} T_{i,n-1}^{-1}T_{i,n},$$

que es una relación equivalente a (PR1); quitamos entonces los $T_{i,n}^{\pm 1}$ usando (PR8), y movemos de nuevo las letras de V_n hacia la derecha de nuestra palabra.

Al final de este proceso, obtendremos $\bar{\omega} = X_{n-1} \omega_n$, donde ω_n es la forma normal de $v(\bar{\omega})$ en $\pi_1(M)$, luego es única, y X_{n-1} es una palabra sobre W_{n-1} .

El algoritmo finalizará en $n - 1$ pasos: En cada paso, tendremos una palabra X_m sobre W_m , reemplazaremos las letras de la forma $a_{m,r}^{\pm 1}$ por letras en V_m , y entonces moveremos las letras de V_m hacia la derecha, usando el diccionario. Después, quitaremos las subpalabras de la forma xx^{-1} o $x^{-1}x$, y obtendremos $X_m = X_{m-1}\omega_m$, donde X_{m-1} es una palabra sobre W_{m-1} y ω_m es una palabra reducida sobre V_m . Si probamos que la palabra ω_m es única, tendremos la factorización única $\omega = \omega_1 \cdots \omega_n s$ como “output” de nuestro algoritmo.

Definamos $M_{n-m} = M \setminus \{P_{m+1}, \dots, P_n\}$ para todo $m = 1, \dots, n - 1$. En [B] podemos encontrar la siguiente sucesión exacta, análoga a la anterior.

$$1 \longrightarrow PB_{m-1}(M_{n-m+1}) \xrightarrow{f} PB_m(M_{n-m}) \xrightarrow{g} \pi_1(M_{n-m}) \longrightarrow 1.$$

Sólo hay que darse cuenta de que $X_m \in PB_m(M_{n-m})$, y $g(X_m) = \omega_m$. Pero como $\pi_1(M_{n-m})$ es un grupo libre con sistema libre de generadores $\{a_{m,r}; 1 \leq r \leq 2g\} \cup \{T_{m,j}; m+1 \leq j \leq n-1\}$, y como ω_m es una palabra reducida, entonces es única, como queríamos probar.

Capítulo 3

Invariantes de Vassiliev

El propósito de este capítulo es probar los teoremas 1.3.4 y 1.3.5, definiendo al mismo tiempo el invariante de Vassiliev universal (denotado u en el teorema 1.3.5) para trenzas de superficies cerradas y orientables.

3.1 Los invariantes de Vassiliev distinguen trenzas

Nuestra estrategia para demostrar el teorema 1.3.4 es la siguiente. En una primera subsección, definimos un ideal J de $\mathbb{Z}[B_n(M)]$ dado por sus generadores y probamos que $V_d = J^d$ para todo $d \geq 0$. En una segunda subsección, consideramos una sucesión exacta $1 \rightarrow K_n \rightarrow B_n(M) \rightarrow H_n \rightarrow 1$, y probamos que J^d es igual, en cierto sentido, a $I(K_n)^d \otimes \mathbb{Z}[H_n]$, donde $I(K_n)$ denota al ideal de aumentación de K_n . En una tercera subsección, demostramos que K_n se puede expresar como un producto semidirecto iterado de grupos libres (de rango infinito). Finalmente, en la cuarta subsección, usamos los resultados de las anteriores para demostrar el teorema 1.3.4.

3.1.1 La filtración de Vassiliev coincide con la filtración J -ádica

El objeto de esta subsección es definir un ideal J de $\mathbb{Z}[B_n(M)]$ mediante sus generadores, y demostrar que la filtración de Vassiliev coincide con la filtración J -ádica (es decir, $V_d = J^d$ para todo $d \in \mathbb{N}$).

Recordemos que $\{a_{i,r}; i = 1, \dots, n, r = 1, \dots, 2g\} \cup \{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$ es un sistema de generadores de $B_n(M)$. Para todo $i = 1, \dots, n-1$, definimos la trenza singular $\tau_i \in S_1 B_n(M)$ como en la figura 3.1. Esta trenza singular tiene un único punto singular donde se cortan las cuerdas i e $i+1$. La i -ésima cuerda va de $(P_i, 0)$ a $(P_{i+1}, 1)$ y la $(i+1)$ -ésima va de $(P_{i+1}, 0)$ a $(P_i, 1)$. El resto de las cuerdas son triviales.

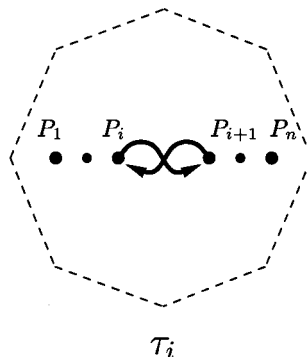


Figura 3.1: La trenza singular τ_i .

Mediante una isotopía adecuada, toda trenza singular $b \in S_k B_n(M)$ se puede escribir bajo la forma

$$b = c_1 \tau_{j_1} c_2 \tau_{j_2} \cdots c_k \tau_{j_k} c_{k+1},$$

donde $c_i \in B_n(M)$. Luego el siguiente conjunto genera $SB_n(M)$ (como monoide).

$$\{a_{i,r}^{\pm 1}; i = 1, \dots, n, r = 1, \dots, 2g\} \cup \{\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}\} \cup \{\tau_1, \dots, \tau_{n-1}\}.$$

El morfismo $\eta : SB_n(M) \rightarrow \mathbb{Z}[B_n(M)]$ envía $\sigma_i^{\pm 1}$ sobre $\sigma_i^{\pm 1}$, $a_{i,r}^{\pm 1}$ sobre $a_{i,r}^{\pm 1}$ y τ_i sobre $\sigma_i - \sigma_i^{-1}$. Recordemos que V_d denota el \mathbb{Z} -módulo de $\mathbb{Z}[B_n(M)]$ generado por $\eta(S_d B_n(M))$. Por las consideraciones anteriores, se obtiene de forma inmediata:

Proposición 3.1.1. *Sea J el ideal bilátero de $\mathbb{Z}[B_n(M)]$ generado por $\{\sigma_i - \sigma_i^{-1}; i = 1, \dots, n-1\}$. Entonces $V_d = J^d$ para todo $d \in \mathbb{N}$.*

3.1.2 De J^d a $I(K_n)^d$

Recordemos que H_n denota el producto semidirecto $\pi_1(M)^n \rtimes \Sigma_n$. Definamos un homomorfismo $\varphi : B_n(M) \rightarrow H_n$ como sigue: fijemos un disco D sumergido en M que contenga a \mathcal{P} y, para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, un camino $\alpha_{i,j}$ en D que vaya de P_i a P_j . Tomemos una trenza $b = (b_1, \dots, b_n)$, $b_i : [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$, basada en \mathcal{P} . Sea $s \in \Sigma_n$ la permutación inducida por b . Sea $\bar{b}_i : [0, 1] \rightarrow M$ la proyección de b_i sobre la primera coordenada, y sea μ_i el lazo basado en P_i definido por $\mu_i = \bar{b}_i \alpha_{s(i),i}$. Entonces definimos

$$\varphi(b) = (\mu_1, \dots, \mu_n)s \in \pi_1(M)^n \rtimes \Sigma_n = H_n.$$

Se puede verificar fácilmente que $\varphi : B_n(M) \rightarrow H_n$ es un homomorfismo bien definido, y que esta definición depende de la elección de D pero no de la elección de los caminos $\alpha_{i,j}$.

Sea K_n el núcleo de φ . Es un resultado clásico que una sección conjuntista $\sigma : H_n \rightarrow B_n(M)$ de φ determina un \mathbb{Z} -isomorfismo $\Phi : \mathbb{Z}[B_n(M)] \rightarrow \mathbb{Z}[K_n] \otimes \mathbb{Z}[H_n]$ definido por

$$\Phi(b) = b(\sigma \circ \varphi)(b)^{-1} \otimes \varphi(b).$$

Fijemos pues una sección conjuntista como la referida.

Recordemos que el *ideal de aumentación* de un grupo G se define como el ideal bilátero $I(G)$ de $\mathbb{Z}[G]$ generado por el conjunto $\{1 - g; g \in G\}$. En esta subsección demostramos lo siguiente.

Proposición 3.1.2. *El isomorfismo $\Phi : \mathbb{Z}[B_n(M)] \rightarrow \mathbb{Z}[K_n] \otimes \mathbb{Z}[H_n]$ envía J^d sobre $I(K_n)^d \otimes \mathbb{Z}[H_n]$ para todo $d \in \mathbb{N}$.*

Nótese que la proposición 3.1.2 implica que, para probar el teorema 1.3.4, es suficiente con probar las dos condiciones siguientes.

1. $\bigcap_{d=0}^{\infty} I(K_n)^d = \{0\}$,
2. $I(K_n)^d / I(K_n)^{d+1}$ es un \mathbb{Z} -módulo libre para todo $d \geq 1$.

Para probar la proposición 3.1.2, haremos uso de algunas sucesiones exactas clásicas que implican grupos de trenzas (ver [B]). La primera

proviene del homomorfismo π que envía una trenza dada sobre la permutación que induce en \mathcal{P} . El núcleo de este homomorfismo es el subgrupo de $B_n(M)$ denotado $PB_n(M)$, cuyos elementos se llaman *trenzas puras*. Se tiene:

$$1 \longrightarrow PB_n(M) \longrightarrow B_n(M) \xrightarrow{\pi} \Sigma_n \longrightarrow 1.$$

Por otra parte, existe un homomorfismo $\varrho : PB_n(M) \rightarrow PB_{n-1}(M)$ que envía (b_1, \dots, b_n) sobre (b_2, \dots, b_n) . Si definimos $\mathcal{P}_{n-1} = \{P_2, \dots, P_n\}$, entonces el núcleo de ϱ puede verse como el grupo $\pi_1(M \setminus \mathcal{P}_{n-1})$. Esto nos da:

$$1 \longrightarrow \pi_1(M \setminus \mathcal{P}_{n-1}) \longrightarrow PB_n(M) \xrightarrow{\varrho} PB_{n-1}(M) \longrightarrow 1.$$

Por último, si b es una trenza pura, la proyección de cada cuerda b_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) sobre M , denotada por \bar{b}_i , es un lazo en M con punto base P_i , que determina un elemento $\mu_i \in \pi_1(M)$. Esto nos da un homomorfismo $\theta : PB_n(M) \rightarrow \pi_1(M)^n$, que envía (b_1, \dots, b_n) sobre (μ_1, \dots, μ_n) . Se puede verificar fácilmente que $K_n = \ker \theta$, y que la sucesión exacta

$$1 \longrightarrow K_n \longrightarrow PB_n(M) \xrightarrow{\theta} \pi_1(M)^n \longrightarrow 1$$

se extiende a la sucesión exacta

$$1 \longrightarrow K_n \longrightarrow B_n(M) \xrightarrow{\varphi} H_n \longrightarrow 1.$$

Más aún, K_n es el cierre normal en $PB_n(M)$ del subgrupo $PB_n(D)$, donde D es un disco en M que contiene a \mathcal{P} (ver [B]).

En lo que sigue, escribiremos $I = I(K_n)$ y consideraremos $\mathbb{Z}[K_n]$ como un subanillo de $\mathbb{Z}[B_n(M)]$. El lema siguiente es un resultado preliminar para la demostración de la proposición 3.1.2.

Lema 3.1.3. *Sea $B = \mathbb{Z}[B_n(M)]$. Para todo $d \geq 1$, se tiene*

$$J^d = B I^d B = B I^d = I^d B.$$

DEMOSTRACIÓN: Como K_n es un subgrupo normal de $B_n(M)$, se demuestra de manera mecánica que $B I^d B = B I^d = I^d B$. Por tanto, basta demostrar que $J = B I B$.

La inclusión $J \subset BIB$ es obvia, ya que $\sigma_i^2 \in K_n$ y $\sigma_i - \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1}(\sigma_i^2 - 1) \in BIB$. Para la otra inclusión, debemos probar que para todo $p \in K_n$ se tiene $p-1 \in J$. Supongamos que $p = p_1 p_2$, con $p_1, p_2 \in K_n$; entonces $p-1 = p_1(p_2-1) + (p_1-1)$, luego basta probarlo para un conjunto de generadores de K_n . Como dijimos antes, K_n es el cierre normal de $PB_n(D)$ en $PB_n(M)$, luego un conjunto de generadores de K_n consiste en los elementos de la forma $\alpha b \alpha^{-1}$, donde $\alpha \in PB_n(M)$ y $b \in PB_n(D)$.

Tomemos un elemento $\alpha b \alpha^{-1}$ como antes. Se tiene: $\alpha b \alpha^{-1} - 1 = \alpha (b-1) \alpha^{-1}$, luego sólo tenemos que probar que $b-1 \in J$ para $b \in PB_n(D)$. Se sabe ([St], Lema 1.2) que $b-1$ pertenece al ideal de $\mathbb{Z}[B_n(D)]$ generado por $\{\sigma_i - \sigma_i^{-1}; i = 1, \dots, n-1\}$. Pero la extensión de este ideal a $\mathbb{Z}[B_n(M)] \supset \mathbb{Z}[B_n(D)]$ es precisamente J , luego $b-1 \in J$. \square

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 3.1.2. En primer lugar, demostramos que $\Phi(J^d) \subset I^d \otimes \mathbb{Z}[H_n]$ para todo $d \geq 1$. Por el lema 3.1.3 sabemos que $J^d = I^d B$, luego J^d está generado como \mathbb{Z} -módulo por los elementos de la forma $(k_1-1) \cdots (k_d-1)b$, donde $b \in B_n(M)$ y $k_i \in K_n$ para $i = 1, \dots, d$. Pero la imagen por Φ de un elemento como el anterior es $(k_1-1) \cdots (k_d-1)b' \otimes \varphi(b)$, donde $b' = b(\sigma \circ \varphi)(b)^{-1}$, que claramente pertenece a $I^d \otimes \mathbb{Z}[H_n]$.

La inclusión $I^d \otimes \mathbb{Z}[H_n] \subset \Phi(J^d)$ es consecuencia de que $I^d \otimes \mathbb{Z}[H_n]$ está generado como \mathbb{Z} -módulo por los elementos de la forma $(k_1-1) \cdots (k_d-1)k \otimes \beta$, donde $k_1, \dots, k_d, k \in K_n$ y $\beta \in H_n$, y que un elemento de este tipo es la imagen por Φ de $(k_1-1) \cdots (k_d-1)k \sigma(\beta) \in I^d B = J^d$. \square

3.1.3 La estructura de K_n

En esta sección demostraremos lo siguiente:

Proposición 3.1.4. *Para $n \geq 2$, existe un grupo libre F_n tal que $K_n = F_n \rtimes K_{n-1}$. Más aún, la acción de K_{n-1} sobre el abelianizado de F_n es trivial.*

Notas.

- (i) La notación F_n puede conducir a error; de hecho, F_n no es un grupo libre de rango n , sino de rango infinito.

- (ii) Una consecuencia directa de la proposición 3.1.4 es que K_n se puede expresar como un producto semidirecto iterado de grupos libres (de generación infinita)

$$K_n = F_n \rtimes (F_{n-1} \rtimes (\cdots \rtimes (F_3 \rtimes F_2) \cdots)).$$

Recordemos las sucesiones exactas definidas en la subsección anterior. Como K_n es un subgrupo de $PB_n(M)$, podemos considerar la imagen por ϱ de K_n . Por definición, es igual a K_{n-1} . Si denotamos $F_n = \ker \varrho \cap K_n$, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo, donde todas las filas y columnas son exactas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 1 \rightarrow & \pi_1(M, P_1) & \rightarrow & \pi_1(M)^n & \rightarrow & \pi_1(M)^{n-1} & \rightarrow 1 \\
 & \uparrow & & \uparrow \theta & & \uparrow \theta & \\
 1 \rightarrow & \pi_1(M \setminus \mathcal{P}_{n-1}) & \rightarrow & PB_n(M) & \xrightarrow{\varrho} & PB_{n-1}(M) & \rightarrow 1 \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 1 \rightarrow & F_n & \rightarrow & K_n & \xrightarrow{\varrho} & K_{n-1} & \rightarrow 1 \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & 1 & & 1 & & 1 &
 \end{array}$$

Nótese que F_n es un grupo libre, ya que es un subgrupo de $\pi_1(M \setminus \mathcal{P}_{n-1})$, que es libre. Estamos especialmente interesados en la fila inferior del diagrama. En concreto, para probar la proposición 3.1.4, demostraremos que existe un homomorfismo $s : K_{n-1} \rightarrow K_n$ que es una sección de ϱ , y tal que K_{n-1} actúa trivialmente sobre el abelianizado de F_n . Pasemos primero a encontrar un sistema libre de generadores de F_n .

Sea $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_{2g}\}$ un conjunto de $2g$ letras. Se sabe que una presentación de $\pi_1(M)$ es la siguiente:

$$\pi_1(M) = \langle \Omega; (\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_{2g} \omega_1^{-1} \omega_2^{-1} \cdots \omega_{2g}^{-1}) = 1 \rangle.$$

Para todo elemento $\gamma \in \pi_1(M)$ elegimos una única palabra $\tilde{\gamma}$ sobre $\Omega \cup \Omega^{-1}$ que representa a γ . Llamamos a esta palabra la *forma normal* de γ . Las formas normales se eligen de modo que todo prefijo de una forma normal sea una forma normal, es decir, si $\omega_1 \omega_2$ es una forma normal, entonces ω_1

también lo es. Para toda palabra ω sobre $\Omega \cup \Omega^{-1}$, denotaremos por $\omega_{(i)}$ la palabra sobre $\{a_{i,1}^{\pm 1}, \dots, a_{i,2g}^{\pm 1}\}$ obtenida de ω al sustituir $\omega_j^{\pm 1}$ por $a_{i,j}^{\pm 1}$, para todo $j = 1, \dots, 2g$.

Recordemos la definición de las trenzas $T_{i,j} \in PB_n(M)$, y la relación

$$T_{1,n} = a_{1,1} \cdots a_{1,2g} a_{1,1}^{-1} \cdots a_{1,2g}^{-1}.$$

Lema 3.1.5. *El siguiente es un sistema libre de generadores de F_n .*

$$\mathcal{B} = \{\tilde{\gamma}_{(1)} T_{1,j} \tilde{\gamma}_{(1)}^{-1}; 2 \leq j \leq n \text{ y } \gamma \in \pi_1(M)\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos el grafo de Cayley de $\pi_1(M)$, que se define como sigue: Sus vértices son elementos de $\pi_1(M)$, y sus aristas se nombran con elementos de Ω . Para todo vértice $\gamma \in \pi_1(M)$ y para todo $i \in 1, \dots, 2g$, hay exactamente una arista con nombre ω_i , de origen γ y destino $\gamma\omega_i$.

En este grafo, la forma normal de un elemento $\gamma \in \pi_1(M)$ corresponde a un único camino que va de 1 a γ . Por la condición de los prefijos mencionada anteriormente, el conjunto de las formas normales de $\pi_1(M)$ define un árbol maximal T del grafo de Cayley.

El grafo de Cayley de $\pi_1(M)$ puede verse como el “esqueleto” de dimensión 1 de un enlosado del plano. Para todo vértice γ , el camino que empieza en γ y que se lee $\omega_1 \dots \omega_{2g} \omega_1^{-1} \dots \omega_{2g}^{-1}$ rodea una región fundamental R_γ de este enlosado, y todas las regiones fundamentales se obtienen de este modo. Por tanto hay una correspondencia biunívoca entre los vértices del grafo de Cayley y sus regiones fundamentales. En conclusión, el grupo fundamental del grafo de Cayley de $\pi_1(M)$ es el grupo libre con sistema libre de generadores

$$\{\tilde{\gamma} (\omega_1 \dots \omega_{2g} \omega_1^{-1} \dots \omega_{2g}^{-1}) \tilde{\gamma}^{-1}; \gamma \in \pi_1(M, P_1)\}.$$

Definimos entonces un grafo Γ como sigue. Tomemos el grafo de Cayley de $\pi_1(M)$ y reemplacemos los nombres ω_i por $a_{1,i}$. Entonces, para todo vértice γ , añadamos $n - 2$ aristas con fuente y destino γ , y nombre $T_{1,2}, \dots, T_{1,n-1}$, respectivamente. Nótese que el grupo fundamental de Γ es el grupo libre con sistema libre de generadores \mathcal{B} , donde $T_{1,n} = a_{1,1} \cdots a_{1,2g} a_{1,1}^{-1} \cdots a_{1,2g}^{-1}$.

Recordemos la sucesión exacta

$$1 \longrightarrow F_n \longrightarrow \pi_1(M \setminus \mathcal{P}_{n-1}) \xrightarrow{\theta} \pi_1(M, P_1) \longrightarrow 1.$$

Se puede verificar fácilmente que $\pi_1(M \setminus \mathcal{P}_{n-1})$ está generado libremente por el conjunto

$$\{a_{1,1}, \dots, a_{1,2g}, T_{1,2}, \dots, T_{1,n-1}\},$$

y que θ envía $a_{1,i}$ sobre ω_i para todo $i = 1, \dots, 2g$, y envía $T_{1,j}$ sobre 1 para todo $j = 2, \dots, n-1$. Usando métodos geométricos clásicos (ver [LS]), se sigue que el grupo F_n es el grupo fundamental del grafo Γ , por tanto \mathcal{B} es un sistema libre de generadores de F_n , como queríamos probar. \square

Lema 3.1.6. *Existe un homomorfismo $\sigma : K_{n-1} \rightarrow K_n$ que es una sección de $\varrho : K_n \rightarrow K_{n-1}$.*

DEMOSTRACIÓN: Como $K_1 = \ker(\pi_1(M) \xrightarrow{\theta} \pi_1(M)) = 1$, el caso $n = 2$ es trivial, luego $K_2 = F_2$ es un grupo libre de rango infinito. Supongamos entonces que $n > 2$.

Se sabe que el núcleo del homomorfismo $\theta_2 : PB_n(M) \rightarrow \pi_1(M, P_2)$ es $PB_{n-1}(M \setminus \{P_2\})$ (ver [B]). Más aún, se puede ver fácilmente que K_n está contenido en este núcleo, es decir, $K_n \subset PB_{n-1}(M \setminus \{P_2\})$. De igual modo, se tiene $K_{n-1} \subset PB_{n-2}(M \setminus \{P_2\})$. El homomorfismo $\varrho_n : PB_{n-1}(M \setminus \{P_2\}) \rightarrow PB_{n-2}(M \setminus \{P_2\})$ que envía (b_1, b_3, \dots, b_n) sobre (b_3, \dots, b_n) es la restricción de ϱ a $PB_{n-1}(M \setminus \{P_2\})$. En particular, envía K_n sobre K_{n-1} .

Consideremos una inmersión $f : M \setminus \{P_2\} \rightarrow M \setminus \{P_2\}$ que satisfaga:

- $f(P_i) = P_i$ para $i = 3, \dots, n$;
- P_1 no está en la imagen de f ;
- f es una equivalencia de homotopía relativa a $\{P_3, \dots, P_n\}$.

Entonces, la función f induce un homomorfismo $\sigma : PB_{n-2}(M \setminus \{P_2\}) \rightarrow PB_{n-1}(M \setminus \{P_2\})$, que envía (b_3, \dots, b_n) sobre $(1_{P_1}, (f \times \text{id})b_3, \dots, (f \times \text{id})b_n)$.

Por la tercera condición, este homomorfismo es una sección de ϱ_n . Claramente, la imagen de K_{n-1} por este homomorfismo está incluida en K_n .

□

El grupo K_{n-1} actúa sobre F_n del siguiente modo: Dado $b \in K_{n-1}$, la acción inducida por b envía $f \in F_n$ sobre $\sigma(b)f\sigma(b)^{-1}$. Esta acción induce a su vez una acción de K_{n-1} sobre el abelianizado $F_n/[F_n, F_n]$ de F_n (aquí $[F_n, F_n]$ denota el subgrupo conmutador de F_n). La demostración de la proposición 3.1.4 se deduce finalmente del resultado siguiente:

Lema 3.1.7. *La acción de K_{n-1} sobre el abelianizado de F_n es trivial.*

DEMOSTRACIÓN: Sólo necesitamos comprobar que la acción de los generadores de K_{n-1} sobre los generadores de F_n es trivial después de abelianizar. Más aún, veamos que es suficiente probar el resultado para la acción definida por cualquier sección conjuntista s de ϱ .

En efecto, si s es una sección de ϱ , entonces para todo $b \in K_{n-1}$ existe un elemento $\hat{b} \in F_n$ tal que $\sigma(b) = \hat{b}s(b)$. Por tanto, si K_{n-1} actúa trivialmente sobre $F_n/[F_n, F_n]$ vía s , obtenemos, para todo $f \in F_n$,

$$\sigma(b) f \sigma(b)^{-1} \equiv \hat{b} (s(b) f s(b)^{-1}) \hat{b}^{-1} \equiv \hat{b} f \hat{b}^{-1} \equiv f \pmod{[F_n, F_n]}.$$

Como dijimos en la subsección 3.1.2, un conjunto de generadores de K_{n-1} consiste en los elementos de la forma $\alpha b \alpha^{-1}$, donde $\alpha \in PB_{n-1}(M)$ y $b \in PB_{n-1}(D)$. Por otra parte, se sabe que $T = \{T_{i,j} \mid 2 \leq i < j \leq n\}$ es un conjunto de generadores de $PB_{n-1}(D)$, donde $T_{i,j}$ denota la trenza definida en la subsección 3.1.1. Por tanto, el siguiente es un conjunto de generadores de K_{n-1} :

$$\{\alpha T_{i,j} \alpha^{-1}; 2 \leq i < j \leq n, \alpha \text{ palabra sobre } \{a_{k,r}^{\pm 1}; 2 \leq k \leq n, 1 \leq r \leq 2g\}\}.$$

Tomamos s tal que $s(\alpha T_{i,j} \alpha^{-1}) = \alpha T_{i,j} \alpha^{-1} \in K_n$. En otras palabras, añadimos simplemente la cuerda trivial con base P_1 a todo elemento del conjunto de generadores de K_{n-1} . Hacemos notar que s es una sección conjuntista de ϱ , pero no es un homomorfismo.

Ahora, F_n es por definición un subgrupo normal de $PB_n(M)$. Por tanto, si demostramos que cada $T_{i,j}$ ($i \geq 2$) actúa trivialmente sobre $F_n/[F_n, F_n]$

por conjugación, habremos terminado la demostración, ya que en este caso:

$$\begin{aligned} (\alpha T_{i,j} \alpha^{-1}) f (\alpha T_{i,j}^{-1} \alpha^{-1}) &\equiv \alpha T_{i,j} (\alpha^{-1} f \alpha) T_{i,j}^{-1} \alpha^{-1} \\ &\equiv \alpha (\alpha^{-1} f \alpha) \alpha^{-1} \equiv f \quad (\text{mod } [F_n, F_n]). \end{aligned}$$

Recordemos que por el lema 3.1.5

$$\mathcal{B} = \{\tilde{\gamma}_{(1)} T_{1,k} \tilde{\gamma}_{(1)}^{-1}; 2 \leq k \leq n \text{ y } \gamma \in \pi_1(M)\}$$

es un sistema libre de generadores de F_n , donde $\tilde{\gamma}_{(1)}$ es una palabra sobre $\{a_{1,1}^{\pm 1}, \dots, a_{1,2g}^{\pm 1}\}$ para todo $\gamma \in \pi_1(M)$. Se puede verificar (simplemente dibujando las trenzas correspondientes) que en $PB_n(M)$ se tienen las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} T_{i,j} a_{1,r} T_{i,j}^{-1} &= a_{1,r}, \\ T_{i,j} T_{1,k} T_{i,j}^{-1} &= T_{1,k} \quad (k < i \text{ ó } k \geq j), \\ T_{i,j} T_{1,k} T_{i,j}^{-1} &= T_{1,i-1} T_{1,i}^{-1} T_{1,k} T_{1,i}^{-1} T_{1,i} T_{1,i-1}^{-1} T_{1,j} \equiv T_{1,k} \quad (\text{mod } [F_n, F_n]) \\ &\quad (i \leq k < j), \end{aligned}$$

donde $2 \leq i < j \leq n$, $r \in \{1, \dots, 2g\}$ y $k \in \{2, \dots, n\}$.

Por tanto, en $F_n/[F_n, F_n]$, se tiene:

$$T_{i,j} (\tilde{\gamma}_{(1)} T_{1,k} \tilde{\gamma}_{(1)}^{-1}) T_{i,j}^{-1} = \tilde{\gamma}_{(1)} (T_{i,j} T_{1,k} T_{i,j}^{-1}) \tilde{\gamma}_{(1)}^{-1} \equiv \tilde{\gamma}_{(1)} T_{1,k} \tilde{\gamma}_{(1)}^{-1} \quad (\text{mod } [F_n, F_n]),$$

como queríamos probar. \square

3.1.4 Demostración del teorema 1.3.4

Sean A y C dos grupos tales que C actúa sobre A . Para todo $a \in A$ y $c \in C$, denotamos a^c la acción de c sobre a . Entonces, el \mathbb{Z} -módulo $\mathbb{Z}[A] \otimes \mathbb{Z}[C]$ admite una estructura natural de \mathbb{Z} -álgebra, donde la multiplicación viene definida por

$$(a_1 \otimes c_1) \cdot (a_2 \otimes c_2) = (a_1 a_2^{c_1}) \otimes (c_1 c_2).$$

Además, este álgebra es naturalmente isomorfa a $\mathbb{Z}[A \rtimes C]$ vía un isomorfismo que envía $a \otimes c$ sobre ac para todo $a \in A$ y todo $c \in C$.

Recordemos que el ideal de aumentación de un grupo G se denota $I(G)$. Usaremos el siguiente lema para demostrar el teorema 1.3.4. Su demostración puede encontrarse en [P, Lema 3.1].

Lema 3.1.8. *Sean A y C dos grupos. Supongamos dada una acción de C sobre A , la cual induce la acción trivial sobre el abelianizado de A . Entonces se tiene*

$$I(A \times C)^m = \sum_{k=0}^m I(A)^k \otimes I(C)^{m-k}$$

para todo $m \geq 0$. \square

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.3.4. Como señalamos en la subsección 3.1.2, basta probar las dos condiciones siguientes:

1. $\bigcap_{d=0}^{\infty} I(K_n)^d = \{0\}$,
2. $I(K_n)^d/I(K_n)^{d+1}$ es un \mathbb{Z} -módulo libre para todo $d \geq 0$.

Procedemos por inducción en n . El caso $n = 1$ es trivial, ya que $I(K_1) = I(\{1\}) = 0$. Supongamos entonces que $n \geq 2$ y que las condiciones 1 y 2 se verifican para K_p , con $p < n$.

El grupo F_n es libre, luego, por [F], se tiene

1. $\bigcap_{d=0}^{\infty} I(F_n)^d = \{0\}$,
2. $I(F_n)^d/I(F_n)^{d+1}$ es un \mathbb{Z} -módulo libre para todo $d \geq 0$.

Estas dos propiedades implican que $I(F_n)^d$ es un \mathbb{Z} -módulo libre y que

$$I(F_n)^d \simeq \bigoplus_{k=d}^{\infty} I(F_n)^k/I(F_n)^{k+1}$$

para todo $d \geq 0$. Elijamos una \mathbb{Z} -base \mathcal{B}_d de $I(F_n)^d/I(F_n)^{d+1}$ para todo $d \geq 0$. Por el isomorfismo anterior, se tiene que $\mathcal{B}_{\geq d} = \coprod_{k=d}^{\infty} \mathcal{B}_k$ es una \mathbb{Z} -base de $I(F_n)^d$.

Por hipótesis de inducción, también tenemos

1. $\bigcap_{d=0}^{\infty} I(K_{n-1})^d = \{0\}$,

2. $I(K_{n-1})^d/I(K_{n-1})^{d+1}$ es un \mathbb{Z} -módulo libre para todo $d \geq 0$.

Esto implica que $I(K_{n-1})^d$ es un \mathbb{Z} -módulo libre y que

$$I(K_{n-1})^d \simeq \bigoplus_{k=d}^{\infty} I(K_{n-1})^k / I(K_{n-1})^{k+1}$$

para todo $d \geq 0$. Elijamos entonces una \mathbb{Z} -base \mathcal{C}_d de $I(K_{n-1})^d/I(K_{n-1})^{d+1}$ para todo $d \geq 0$. Entonces $\mathcal{C}_{\geq d} = \coprod_{k=d}^{\infty} \mathcal{C}_k$ será una \mathbb{Z} -base de $I(K_{n-1})^d$.

Ahora, por la proposición 3.1.4, F_n y K_{n-1} verifican las hipótesis del lema 3.1.8. Por tanto, tenemos la igualdad

$$I(K_n)^m = \sum_{d=0}^m I(F_n)^d \otimes I(K_{n-1})^{m-d}$$

para todo $m \geq 0$. De esta igualdad se deduce fácilmente que el conjunto

$$\mathcal{D}_{\geq m} = \{b \otimes c \in \mathbb{Z}[F_n] \otimes \mathbb{Z}[K_{n-1}]; \quad b \in \mathcal{B}_i, \quad c \in \mathcal{C}_j, \quad i + j \geq m\}$$

es un sistema de generadores de $I(K_n)^m$. Como este conjunto es linealmente independiente, $I(K_n)^m$ es un \mathbb{Z} -módulo libre cuya base es $\mathcal{D}_{\geq m}$. De ahí se deduce que $I(K_n)^m/I(K_n)^{m+1}$ es un \mathbb{Z} -módulo libre con base

$$\mathcal{D}_m = \mathcal{D}_{\geq m} \setminus \mathcal{D}_{\geq m+1} = \{b \otimes c \in \mathbb{Z}[F_n] \otimes \mathbb{Z}[K_{n-1}]; \quad b \in \mathcal{B}_i, \quad c \in \mathcal{C}_j, \quad i + j = m\},$$

y que $\bigcap_{d=0}^{\infty} I(K_n)^d = \{0\}$, ya que $\mathcal{D}_{\geq 0}$ es una base de $\mathbb{Z}[K_n]$. \square

3.2 El invariante de Vassiliev universal

La demostración del teorema 1.3.5 se divide en cinco pasos. En lo que sigue, cada subsección corresponde a cada uno de ellos.

La primera subsección está dedicada a la definición de una aplicación lineal

$$u : \mathbb{Z}[B_n(M)] \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}_n \rtimes \mathbb{Z}[H_n].$$

Recordemos que $\mathbb{Z}[B_n(M)]$ es isomorfo a $\mathbb{Z}[K_n] \otimes \mathbb{Z}[H_n]$ como \mathbb{Z} -módulo (ver la subsección 3.1.2), y notemos que $\widehat{\mathcal{A}}_n \rtimes \mathbb{Z}[H_n]$ es igual, como \mathbb{Z} -módulo,

a $\widehat{\mathcal{A}}_n \otimes \mathbb{Z}[H_n]$. Por tanto, sólo necesitamos definir una aplicación lineal $v : \mathbb{Z}[K_n] \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}_n$.

Recordemos que los subgrupos G_i de la *sucesión central descendente* de un grupo G se definen de forma recursiva por $G_1 = G$ y $G_{i+1} = [G, G_i]$ para $i \geq 1$. El *álgebra de Lie asociada a G* se define por $\text{gr}(G) = \bigoplus_{i \geq 1} G_i/G_{i+1}$. Es un álgebra de Lie graduada sobre \mathbb{Z} , cuya álgebra envolvente se denota $\mathcal{U}\text{gr}(G)$. En la subsección 3.2.2 construimos un homomorfismo $\chi_1 : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{U}\text{gr}(K_n)$ de \mathbb{Z} -álgebras y probamos que este homomorfismo es en realidad un isomorfismo.

Sea $I = I(K_n)$. En la subsección 3.2.3 construimos un isomorfismo $\chi_2 : \mathcal{U}\text{gr}(K_n) \rightarrow \text{gr}_I \mathbb{Z}[K_n]$ de \mathbb{Z} -álgebras utilizando algunos resultados de Quillen.

En la subsección 3.2.4 consideramos el isomorfismo $\chi = \chi_2 \circ \chi_1 : \mathcal{A}_n \rightarrow \text{gr}_I \mathbb{Z}[K_n]$ y probamos que $\text{gr}_I v$ es el inverso de χ . Se sigue de forma inmediata que $\text{gr}_I v : \text{gr}_I \mathbb{Z}[K_n] \rightarrow \mathcal{A}_n$ es un isomorfismo de \mathbb{Z} -álgebras, y que $\text{gr}_I v : \text{gr}_I \mathbb{Z}[B_n(M)] \rightarrow \mathcal{A}_n \rtimes \mathbb{Z}[H_n]$ es un isomorfismo de \mathbb{Z} -módulos.

Por último, en la subsección 3.2.5 demostramos que $\text{gr}_I v$ es un homomorfismo de \mathbb{Z} -álgebras, lo que termina la demostración del teorema 1.3.5.

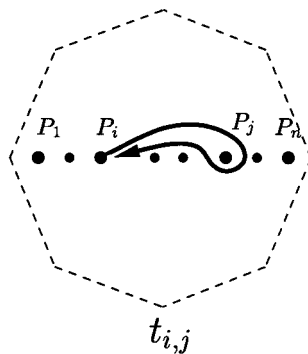
3.2.1 Construcción de $u : \mathbb{Z}[B_n(M)] \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}_n \rtimes \mathbb{Z}[H_n]$

De ahora en adelante, fijamos una sección conjuntista $\sigma : H_n \rightarrow B_n(M)$ de $\varphi : B_n(M) \rightarrow H_n$. Como señalamos en la subsección 3.1.2, esta sección conjuntista induce un isomorfismo $\Phi : \mathbb{Z}[B_n(M)] \longrightarrow \mathbb{Z}[K_n] \otimes \mathbb{Z}[H_n]$ de \mathbb{Z} -módulos.

Definiremos ahora un homomorfismo lineal $v : \mathbb{Z}[K_n] \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}_n$, y tendremos

$$u = (v \otimes \text{id}) \circ \Phi : \mathbb{Z}[B_n(M)] \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}_n \rtimes \mathbb{Z}[H_n] = \widehat{\mathcal{A}}_n \otimes \mathbb{Z}[H_n].$$

Recordemos que, para todo $\gamma \in \pi_1(M)$ y todo $i \in \{1, \dots, n\}$, denotamos por $\widetilde{\gamma}_{(i)}$ la forma normal de γ en los generadores $\{a_{i,1}^{\pm 1}, \dots, a_{i,2g}^{\pm 1}\}$ de $\pi_1(M, P_i)$. Para $1 \leq i < j \leq n$, escribimos $t_{i,j} = t_{j,i} = T_{i,j} T_{i,j-1}^{-1}$, que es la trenza dibujada en la figura 3.2. Estas trenzas son los generadores clásicos de $PB_n(D)$. Entonces, para $i \neq j$, denotamos $f_{i,j,\gamma}$ a los elementos $\widetilde{\gamma}_{(i)} t_{i,j} \widetilde{\gamma}_{(i)}^{-1}$

Figura 3.2: La trenza $t_{i,j}$.

de $B_n(M)$. Del lema 3.1.5 se sigue que $F_{(n+1)-i}$ es el grupo libre generado libremente por

$$\mathcal{F}_{i,n} = \{f_{i,j,\gamma} ; j = i + 1, \dots, n, \gamma \in \pi_1(M)\}.$$

Además, se demostró en la subsección 3.1.3 que $K_n = (F_n \rtimes (F_{n-1} \rtimes (\dots \rtimes (F_3 \rtimes F_2) \dots)))$. Por tanto, todo elemento $k \in K_n$ puede escribirse de manera única de la forma $k = k_1 \cdots k_{n-1}$, donde k_i es una palabra reducida sobre $\mathcal{F}_{i,n} \cup \mathcal{F}_{i,n}^{-1}$. Ahora, para $i \in \{1, \dots, n-1\}$, existe un homomorfismo multiplicativo inyectivo $u_i : F_{(n+1)-i} \rightarrow \mathbb{Z}[[t_{i,j,\gamma}]]$, donde $\mathbb{Z}[[t_{i,j,\gamma}]]$ denota el anillo de series de potencias formales no conmutativas, en las variables no conmutativas $t_{i,j,\gamma}$, definidas por

$$u_i(f_{i,j,\gamma}) = 1 + t_{i,j,\gamma}$$

$$u_i(f_{i,j,\gamma}^{-1}) = 1 - t_{i,j,\gamma} + t_{i,j,\gamma}^2 - \dots$$

Este homomorfismo, bien conocido, se conoce como la *expansión de Magnus* de $F_{(n+1)-i}$ (ver [MKS]). Denotamos por v_i la composición de u_i con la proyección canónica $\mathbb{Z}[[t_{i,j,\gamma}]] \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}_n$, y finalmente definimos la aplicación lineal $v : \mathbb{Z}[K_n] \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}_n$ como

$$v(k) = v_1(k_1)v_2(k_2) \cdots v_{n-1}(k_{n-1}),$$

donde $k = k_1 k_2 \cdots k_{n-1}$ es la descomposición de $k \in K_n$ definida anteriormente.

3.2.2 El isomorfismo $\chi_1 : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{Ugr}(K_n)$

El propósito de esta subsección es probar lo siguiente.

Proposición 3.2.1. *Existe un isomorfismo de \mathbb{Z} -álgebras bien definido, $\chi_1 : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{Ugr}(K_n)$ que envía $t_{i,j,\gamma}$ sobre $f_{i,j,\gamma}$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ y todo $\gamma \in \pi_1(M)$.*

Consideremos el álgebra de Lie graduada L_n dada por la siguiente presentación:

- **Generadores:** $\{t_{i,j,\gamma}; 1 \leq i, j \leq n, i \neq j, \gamma \in \pi_1(M)\}$.
- **Relaciones:**
 - (L1) $t_{i,j,\gamma} = t_{j,i,\gamma^{-1}}$, para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, y todo $\gamma \in \pi_1(M)$,
 - (L2) $[t_{i,j,\gamma}, t_{k,l,\delta}] = 0$, para $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$, distintos, y todo $\gamma, \delta \in \pi_1(M)$,
 - (L3) $[t_{i,j,\gamma}, t_{j,k,\delta} + t_{i,k,(\gamma\delta)}] = 0$, para $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, distintos, y todo $\gamma, \delta \in \pi_1(M)$,

donde $[-, -]$ denota al corchete de Lie

Se tiene $\mathcal{U}L_n = \mathcal{A}_n$, luego, para probar la proposición 3.2.1, basta con probar lo siguiente:

Proposición 3.2.2. *Existe un isomorfismo bien definido de álgebras de Lie, $\psi_n : L_n \rightarrow \text{gr}(K_n)$, que envía $t_{i,j,\gamma}$ sobre $f_{i,j,\gamma}$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, y todo $\gamma \in \pi_1(M)$.*

Los lemas siguientes, de 3.2.3 a 3.2.7, son resultados preliminares para la demostración de la proposición 3.2.2.

Lema 3.2.3. *Sea ω una palabra sobre $\Omega^{\pm 1}$. Entonces existe $W_\omega \in (K_n)_2 = [K_n, K_n]$ tal que*

$$\omega_{(j)} t_{i,j} \omega_{(j)}^{-1} = (\omega_{(i)}^{-1} t_{i,j} \omega_{(i)}) W_\omega.$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $i < j$. Supongamos primero que ω es una sola letra. Si $\omega_{(j)} = a_{j,r}$ y r es impar,

entonces se puede probar fácilmente mediante dibujos que en $PB_n(M)$ se verifican las siguientes igualdades:

$$a_{j,r} t_{i,j} a_{j,r}^{-1} = (t_{i,j-1} \cdots t_{i,i+1}) a_{i,r}^{-1} t_{i,j} a_{i,r} (t_{i,i+1}^{-1} \cdots t_{i,j-1}^{-1}).$$

Por tanto,

$$a_{j,r} t_{i,j} a_{j,r}^{-1} = (a_{i,r}^{-1} t_{i,j} a_{i,r}) W_\omega,$$

donde

$$W_\omega = [a_{i,r}^{-1} t_{i,j}^{-1} a_{i,r}, t_{i,j-1} \cdots t_{i,i+1}] \in (K_n)_2.$$

Si $\omega_{(j)} = a_{j,r}$ y r es par, entonces se tiene

$$a_{j,r} t_{i,j} a_{j,r}^{-1} = a_{i,r}^{-1} (t_{i,i+1}^{-1} \cdots t_{i,j-1}^{-1} t_{i,j} \cdots t_{i,i+1}) a_{i,r}.$$

Luego

$$a_{j,r} t_{i,j} a_{j,r}^{-1} = (a_{i,r}^{-1} t_{i,j} a_{i,r}) W_\omega,$$

donde

$$W_\omega = [a_{i,r}^{-1} t_{i,j}^{-1} a_{i,r}, a_{i,r}^{-1} (t_{i,i+1}^{-1} \cdots t_{i,j-1}^{-1}) a_{i,r}] \in (K_n)_2.$$

Los cálculos para $\omega_{(j)} = a_{j,r}^{-1}$ son los mismos que para $\omega_{(j)} = a_{j,r}$ cambiando el caso r impar con el caso r par.

Supongamos ahora que ω es una palabra de longitud k , $k > 1$, y que el resultado es cierto para palabras de longitud menor que k . Escribiremos $\omega = \alpha \beta$, con $|\alpha|, |\beta| < k$. Consideremos

$$\begin{aligned} W' &= \alpha_{(j)}^{-1} W_\beta \alpha_{(j)}, \\ W'' &= [\beta_{(i)}^{-1} \alpha_{(j)} t_{i,j}^{-1} \alpha_{(j)}^{-1} \beta_{(i)}, [\alpha_{(j)}, \beta_{(i)}^{-1}]] W', \\ W &= \beta_{(i)}^{-1} W_\alpha \beta_{(i)} W''. \end{aligned}$$

La hipótesis $i \neq j$ implica que $[\alpha_{(j)}, \beta_{(i)}^{-1}] \in K_n$. Además, tanto K_n como $(K_n)_2$ son subgrupos normales de $PB_n(M)$, luego $W \in (K_n)_2$. Por último, un calculo directo muestra que

$$\omega_{(j)} t_{i,j} \omega_{(j)}^{-1} = (\omega_{(i)}^{-1} t_{i,j} \omega_{(i)}) W,$$

como queríamos probar. \square

Lema 3.2.4. Sean $i, j \in \{2, \dots, n\}$, $i \neq j$, sea $\gamma \in \pi_1(M)$, y sea ω una palabra sobre $\Omega^{\pm 1}$. Entonces existe $W \in (K_n)_2$ tal que

$$f_{i,j,\gamma} \omega_{(1)} f_{i,j,\gamma}^{-1} = W \omega_{(1)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Recordemos el epimorfismo $\varrho : PB_n(M) \rightarrow PB_{n-1}(M)$. Se tiene $\varrho(\tilde{\gamma}_{(i)}^{-1} \omega_{(1)} \tilde{\gamma}_{(i)}) = 1$, luego $\tilde{\gamma}_{(i)}^{-1} \omega_{(1)} \tilde{\gamma}_{(i)} = b$, donde b es una palabra sobre $\mathcal{B} = \{a_{1,1}^{\pm 1}, \dots, a_{1,2g}^{\pm 1}, t_{1,2}^{\pm 1}, \dots, t_{1,n}^{\pm 1}\}$.

Dibujando las trenzas, vemos que $t_{i,j} a_{1,r}^{\pm 1} t_{i,j}^{-1} = a_{1,r}^{\pm 1}$, para $r = 1, \dots, 2g$. Además, como $t_{i,j}, t_{1,k} \in K_n$, se tiene $t_{i,j} t_{1,k}^{\pm 1} t_{i,j}^{-1} = W t_{1,k}^{\pm 1}$, donde $W \in (K_n)_2$, para todo $k = 2, \dots, n$. Por tanto, como b es una palabra sobre \mathcal{B} , tenemos: $t_{i,j} b t_{i,j}^{-1} = W_b b$, donde $W_b \in (K_n)_2$. Por tanto,

$$\begin{aligned} f_{i,j,\gamma} \omega_{(1)} f_{i,j,\gamma}^{-1} &= \left(\tilde{\gamma}_{(i)} t_{i,j} \tilde{\gamma}_{(i)}^{-1} \right) \omega_{(1)} \left(\tilde{\gamma}_{(i)} t_{i,j}^{-1} \tilde{\gamma}_{(i)}^{-1} \right) \\ &= \tilde{\gamma}_{(i)} t_{i,j} b t_{i,j}^{-1} \tilde{\gamma}_{(i)}^{-1} \\ &= \tilde{\gamma}_{(i)} W_b b \tilde{\gamma}_{(i)}^{-1} \\ &= W \tilde{\gamma}_{(i)} b \tilde{\gamma}_{(i)}^{-1} \\ &= W \omega_{(1)}, \end{aligned}$$

donde $W = \tilde{\gamma}_{(i)} W_b \tilde{\gamma}_{(i)}^{-1} \in (K_n)_2$, como queríamos probar. \square

Lema 3.2.5. Sea ω una palabra sobre $\Omega^{\pm 1}$, y sean $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, todos distintos. Entonces existe $W \in (K_n)_2$ tal que

$$\omega_{(i)} t_{j,k} \omega_{(i)}^{-1} = W t_{j,k}.$$

DEMOSTRACIÓN: Claramente, basta probar el lema cuando ω sea una única letra. Además, podemos suponer que $j < k$. Entonces el resultado es consecuencia de las relaciones siguientes en $PB_n(M)$.

$$a_{i,r} t_{j,k} a_{i,r}^{-1} = t_{j,k} \quad a_{i,r}^{-1} t_{j,k} a_{i,r} = t_{j,k}, \quad \text{si } i < j \text{ o } i > k.$$

$$a_{i,r} t_{j,k} a_{i,r}^{-1} = t_{j,i}^{-1} t_{j,k} t_{j,i}, \quad a_{i,r}^{-1} t_{j,k} a_{i,r} = \alpha t_{j,k} \alpha^{-1}, \quad \text{si } j < i < k, r \text{ impar.}$$

$$a_{i,r} t_{j,k} a_{i,r}^{-1} = \alpha t_{j,k} \alpha^{-1}, \quad a_{i,r}^{-1} t_{j,k} a_{i,r} = t_{j,i}^{-1} t_{j,k} t_{j,i}, \quad \text{si } j < i < k, r \text{ par,}$$

donde $\alpha = (a_{j,r}^{-1} t_{j,j+1}^{-1} \cdots t_{j,i-1}^{-1} t_{j,i} \cdots t_{j,j+1} a_{j,r}) \in K_n$. Estas relaciones se verifican fácilmente mediante dibujos. \square

Lema 3.2.6. Sean $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$, todos distintos. Se tiene:

$$[t_{i,j}, t_{k,l}] \equiv 0 \quad (\text{mod } (K_n)_3),$$

$$[t_{i,j}, t_{i,k}] \equiv [t_{j,k}, t_{i,j}] \quad (\text{mod } (K_n)_3).$$

DEMOSTRACIÓN: Este lema es consecuencia de las congruencias siguientes, bien conocidas:

$$[t_{i,j}, t_{k,l}] \equiv 0 \quad (\text{mod } (PB_n(D))_3),$$

$$[t_{i,j}, t_{i,k}] \equiv [t_{j,k}, t_{i,j}] \quad (\text{mod } (PB_n(D))_3),$$

(ver, por ejemplo, [B-N3]), junto con la inclusión $(PB_n(D))_3 \subset (K_n)_3$. \square

Lema 3.2.7. Existe un homomorfismo bien definido de álgebras de Lie, $\psi_n : L_n \rightarrow \text{gr}(K_n)$, que envía $t_{i,j,\gamma}$ sobre $f_{i,j,\gamma}$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, y todo $\gamma \in \pi_1(M)$.

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que probar que se verifican las congruencias siguientes:

$$(R1) \quad f_{i,j,\gamma} \equiv f_{j,i,\gamma^{-1}} \quad (\text{mod } (K_n)_2),$$

para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$,
y todo $\gamma \in \pi_1(M)$;

$$(R2) \quad [f_{i,j,\gamma}, f_{k,l,\delta}] \equiv 0 \quad (\text{mod } (K_n)_3),$$

para $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$, distintos,
y todo $\gamma, \delta \in \pi_1(M)$;

$$(R3) \quad [f_{i,j,\gamma}, f_{j,k,\delta}] \equiv [f_{i,k,(\gamma\delta)}, f_{i,j,\gamma}] \quad (\text{mod } (K_n)_3),$$

para $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, distintos,
y todo $\gamma, \delta \in \pi_1(M)$.

Nótese que (R1) es consecuencia del lema 3.2.3. Quedan entonces por probar (R2) y (R3). Procedemos por inducción en n . Al ser las condiciones

(R2) y (R3) vacías si $n = 2$, podemos suponer que $n > 2$, que (R2) se verifica si $i, j, k, l \in \{2, \dots, n\}$ (por inducción), y que (R3) se verifica si $i, j, k \in \{2, \dots, n\}$ (por inducción).

Pasemos ahora a probar (R2) para $k = 1$. Por el lema 3.2.4, existe $W_1 \in (K_n)_2$ tal que

$$f_{i,j,\gamma} \tilde{\delta}_{(1)} f_{i,j,\gamma}^{-1} = W_1 \tilde{\delta}_{(1)}.$$

Del mismo modo, por el lema 3.2.5, existe $W_2 \in (K_n)_2$ tal que

$$\tilde{\gamma}_{(i)}^{-1} t_{1,l} \tilde{\gamma}_{(i)} = W_2 t_{1,l}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} f_{i,j,\gamma} f_{1,l,\delta} f_{i,j,\gamma}^{-1} &= \left(f_{i,j,\gamma} \tilde{\delta}_{(1)} f_{i,j,\gamma}^{-1} \right) f_{i,j,\gamma} t_{1,l} f_{i,j,\gamma}^{-1} \left(f_{i,j,\gamma} \tilde{\delta}_{(1)}^{-1} f_{i,j,\gamma}^{-1} \right) \\ &= W_1 \left(\tilde{\delta}_{(1)} f_{i,j,\gamma} t_{1,l} f_{i,j,\gamma}^{-1} \tilde{\delta}_{(1)}^{-1} \right) W_1^{-1} \\ &\equiv \tilde{\delta}_{(1)} f_{i,j,\gamma} t_{1,l} f_{i,j,\gamma}^{-1} \tilde{\delta}_{(1)}^{-1} \pmod{(K_n)_3} \\ &= \tilde{\delta}_{(1)} \left(\tilde{\gamma}_{(i)} t_{i,j} \tilde{\gamma}_{(i)}^{-1} \right) t_{1,l} \left(\tilde{\gamma}_{(i)}^{-1} t_{i,j}^{-1} \tilde{\gamma}_{(i)} \right) \tilde{\delta}_{(1)}^{-1} \\ &= \tilde{\delta}_{(1)} \tilde{\gamma}_{(i)} t_{i,j} W_2 t_{1,l} t_{i,j}^{-1} \tilde{\gamma}_{(i)}^{-1} \tilde{\delta}_{(1)}^{-1} \\ &\equiv \tilde{\delta}_{(1)} \tilde{\gamma}_{(i)} W_2 t_{i,j} t_{1,l} t_{i,j}^{-1} \tilde{\gamma}_{(i)}^{-1} \tilde{\delta}_{(1)}^{-1} \pmod{(K_n)_3} \\ &\equiv \tilde{\delta}_{(1)} \tilde{\gamma}_{(i)} W_2 t_{1,l} \tilde{\gamma}_{(i)}^{-1} \tilde{\delta}_{(1)}^{-1} \pmod{(K_n)_3} \\ &\hspace{10em} \text{(por el lema 3.2.6)} \\ &= \tilde{\delta}_{(1)} t_{1,l} \tilde{\delta}_{(1)}^{-1} = f_{1,l,\delta}. \end{aligned}$$

Por tanto, (R2) se verifica para $k = 1$.

La congruencia (R2) se verifica tanto para $i = 1$, como para $j = 1$, o $l = 1$, a causa del caso anterior y de la relación (R1).

Pasemos entonces a probar (R3) para $i = 1$. Por el lema 3.2.4, existe $W_1 \in (K_n)_2$ tal que

$$f_{j,k,\delta} \tilde{\gamma}_{(1)} f_{j,k,\delta}^{-1} = W_1 \tilde{\gamma}_{(1)}.$$

Igualmente, por el lema 3.2.3, existe $W_2 \in (K_n)_2$ tal que

$$\tilde{\delta}_{(j)}^{-1} t_{1,j} \tilde{\delta}_{(j)} = \tilde{\delta}_{(1)} t_{1,j} \tilde{\delta}_{(1)}^{-1} W_2.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
f_{j,k,\delta} f_{1,j,\gamma} f_{j,k,\delta}^{-1} &= (f_{j,k,\delta} \tilde{\gamma}_{(1)} f_{j,k,\delta}^{-1}) (f_{j,k,\delta} t_{1,j} f_{j,k,\delta}^{-1}) (f_{j,k,\delta} \tilde{\gamma}_{(1)}^{-1} f_{j,k,\delta}^{-1}) \\
&= W_1 \left(\tilde{\gamma}_{(1)} f_{j,k,\delta} t_{1,j} f_{j,k,\delta}^{-1} \tilde{\gamma}_{(1)}^{-1} \right) W_1^{-1} \\
&\equiv \tilde{\gamma}_{(1)} f_{j,k,\delta} t_{1,j} f_{j,k,\delta}^{-1} \tilde{\gamma}_{(1)}^{-1} \pmod{(K_n)_3} \\
&= \tilde{\gamma}_{(1)} \left(\tilde{\delta}_{(j)} t_{j,k} \tilde{\delta}_{(j)}^{-1} \right) t_{1,j} \left(\tilde{\delta}_{(j)} t_{j,k}^{-1} \tilde{\delta}_{(j)}^{-1} \right) \tilde{\gamma}_{(1)}^{-1} \\
&= \tilde{\gamma}_{(1)} \tilde{\delta}_{(j)} t_{j,k} \tilde{\delta}_{(1)} t_{1,j} \tilde{\delta}_{(1)}^{-1} W_2 t_{j,k}^{-1} \tilde{\delta}_{(j)}^{-1} \tilde{\gamma}_{(1)}^{-1} \\
&\equiv \tilde{\gamma}_{(1)} \tilde{\delta}_{(j)} \left(t_{j,k} \tilde{\delta}_{(1)} t_{1,j} \tilde{\delta}_{(1)}^{-1} t_{j,k}^{-1} \right) W_2 \tilde{\delta}_{(j)}^{-1} \tilde{\gamma}_{(1)}^{-1} \\
&\hspace{15em} \pmod{(K_n)_3} \\
&= \tilde{\gamma}_{(1)} \tilde{\delta}_{(j)} \left[t_{j,k}, \tilde{\delta}_{(1)} t_{1,j} \tilde{\delta}_{(1)}^{-1} \right] \left(\tilde{\delta}_{(1)} t_{1,j} \tilde{\delta}_{(1)}^{-1} \right) W_2 \tilde{\delta}_{(j)}^{-1} \tilde{\gamma}_{(1)}^{-1} \\
&= \tilde{\gamma}_{(1)} \tilde{\delta}_{(j)} \left[t_{j,k}, \tilde{\delta}_{(1)} t_{1,j} \tilde{\delta}_{(1)}^{-1} \right] \tilde{\delta}_{(j)}^{-1} t_{1,j} \tilde{\gamma}_{(1)}^{-1}.
\end{aligned}$$

Como $\tilde{\delta}_{(1)}$ conmuta con $t_{j,k}$, se deduce:

$$\begin{aligned}
f_{j,k,\delta} f_{1,j,\gamma} f_{j,k,\delta}^{-1} &\equiv \tilde{\gamma}_{(1)} \tilde{\delta}_{(j)} \tilde{\delta}_{(1)} [t_{j,k}, t_{1,j}] \tilde{\delta}_{(1)}^{-1} \tilde{\delta}_{(j)}^{-1} t_{1,j} \tilde{\gamma}_{(1)}^{-1} \pmod{(K_n)_3} \\
&\equiv \tilde{\gamma}_{(1)} \tilde{\delta}_{(j)} \tilde{\delta}_{(1)} [t_{1,j}, t_{1,k}] \tilde{\delta}_{(1)}^{-1} \tilde{\delta}_{(j)}^{-1} t_{1,j} \tilde{\gamma}_{(1)}^{-1} \pmod{(K_n)_3} \\
&\hspace{15em} \text{(por el lema 3.2.6)} \\
&= \tilde{\gamma}_{(1)} [\tilde{\delta}_{(j)}, \tilde{\delta}_{(1)}] \left(\tilde{\delta}_{(1)} \tilde{\delta}_{(j)} [t_{1,j}, t_{1,k}] \tilde{\delta}_{(j)}^{-1} \tilde{\delta}_{(1)}^{-1} \right) [\tilde{\delta}_{(1)}, \tilde{\delta}_{(j)}] t_{1,j} \tilde{\gamma}_{(1)}^{-1}.
\end{aligned}$$

Nótese que $[\tilde{\delta}_{(j)}, \tilde{\delta}_{(1)}] \in K_n$ y $[t_{1,j}, t_{1,k}] \in (K_n)_2$, luego

$$\begin{aligned}
f_{j,k,\delta} f_{1,j,\gamma} f_{j,k,\delta}^{-1} &\equiv \tilde{\gamma}_{(1)} \left(\tilde{\delta}_{(1)} \tilde{\delta}_{(j)} [t_{1,j}, t_{1,k}] \tilde{\delta}_{(j)}^{-1} \tilde{\delta}_{(1)}^{-1} \right) t_{1,j} \tilde{\gamma}_{(1)}^{-1} \pmod{(K_n)_3} \\
&\equiv \tilde{\gamma}_{(1)} \left[t_{1,j}, \tilde{\delta}_{(1)} t_{1,k} \tilde{\delta}_{(1)}^{-1} \right] t_{1,j} \tilde{\gamma}_{(1)}^{-1} \pmod{(K_n)_3} \\
&\hspace{15em} \text{(por los lemas 3.2.3 y 3.2.5)} \\
&= \left[\tilde{\gamma}_{(1)} t_{1,j} \tilde{\gamma}_{(1)}^{-1}, \tilde{\gamma}_{(1)} \tilde{\delta}_{(1)} t_{1,k} \tilde{\delta}_{(1)}^{-1} \tilde{\gamma}_{(1)}^{-1} \right] \left(\tilde{\gamma}_{(1)} t_{1,j} \tilde{\gamma}_{(1)}^{-1} \right).
\end{aligned}$$

Sea $k = \tilde{\gamma}_{(1)} \tilde{\delta}_{(1)} \tilde{\gamma}_{(1)}^{-1}$. Tenemos $k \in K_n$, luego

$$f_{j,k,\delta} f_{1,j,\gamma} f_{j,k,\delta}^{-1} \equiv \left[\tilde{\gamma}_{(1)} t_{1,j} \tilde{\gamma}_{(1)}^{-1}, k (\widetilde{\gamma\delta})_{(1)}^{-1} t_{1,k} (\widetilde{\gamma\delta})_{(1)} k^{-1} \right] \left(\tilde{\gamma}_{(1)} t_{1,j} \tilde{\gamma}_{(1)}^{-1} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \text{(mod } (K_n)_3 \text{)} \\
 & = [f_{1,j,\gamma}, k f_{1,k,(\gamma\delta)} k^{-1}] f_{1,j,\gamma} \\
 & \equiv [f_{1,j,\gamma}, f_{1,k,(\gamma\delta)}] f_{1,j,\gamma} \quad \text{(mod } (K_n)_3 \text{)}.
 \end{aligned}$$

Esto prueba que (R3) se verifica para $i = 1$.

Para $j = 1$, (R3) se verifica a causa del caso anterior y de (R1), ya que se tiene:

$$[f_{i,1,\gamma}, f_{1,k,\delta}] \equiv [f_{1,i,\gamma^{-1}}, f_{1,k,\delta}] \equiv [f_{i,k,(\gamma\delta)}, f_{1,i,\gamma^{-1}}] \equiv [f_{i,k,(\gamma\delta)}, f_{i,1,\gamma}].$$

Por último, (R3) también es cierta para $k = 1$, pues en este caso:

$$[f_{i,j,\gamma}, f_{j,1,\delta}] \equiv [f_{j,i,\gamma^{-1}}, f_{j,1,\delta}] \equiv [f_{i,1,(\gamma\delta)}, f_{j,i,\gamma^{-1}}] \equiv [f_{i,1,(\gamma\delta)}, f_{i,j,\gamma}]. \square$$

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 3.2.2: Basta probar que el homomorfismo $\psi_n : L_n \rightarrow \text{gr}(K_n)$ del lema 3.2.7 es un isomorfismo. Procedemos por inducción en n .

Si $n = 2$, $K_2 = F_2$ es un grupo libre, generado libremente por $\mathcal{F}_{1,2} = \{f_{1,2,\gamma}; \gamma \in \pi_1(M)\}$, luego $\text{gr}(K_2)$ es el álgebra de Lie libre generada por $\mathcal{F}_{1,2}$. Por otra parte, L_2 es por definición el álgebra de Lie libre generada por $\{t_{1,2,\gamma}; \gamma \in \pi_1(M)\}$. Por tanto, ψ_2 es un isomorfismo de álgebras de Lie.

Supongamos entonces que ψ_m es un isomorfismo para $m < n$. Recordemos que $K_n = F_n \rtimes K_{n-1}$, y que tenemos la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccccc}
 1 & \longrightarrow & F_n & \longrightarrow & K_n & \xrightarrow{q} & K_{n-1} & \longrightarrow & 1 \\
 & & f_{1,j,\gamma} & \longmapsto & f_{1,j,\gamma} & \longmapsto & 1 & & \\
 & & & & f_{i+1,j+1,\gamma} & \longmapsto & f_{i,j,\gamma} & &
 \end{array}$$

Como K_{n-1} actúa trivialmente sobre el abelianizado de F_n , podemos aplicar un resultado de [FR] que afirma que la sucesión graduada asociada a la anterior también es exacta, es decir,

$$1 \longrightarrow \text{gr}(F_n) \xrightarrow{i} \text{gr}(K_n) \xrightarrow{\text{gr}q} \text{gr}(K_{n-1}) \longrightarrow 1,$$

donde i es la inclusión natural. Además, como $\text{gr}(F_m)$ es un álgebra de Lie libre para todo $m \geq 2$, la sucesión anterior implica, por inducción, que $\text{gr}(K_n)$ es un \mathbb{Z} -módulo libre. Este hecho será utilizado más adelante.

Definamos ahora el siguiente homomorfismo de álgebras de Lie:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\varrho}_n : & L_n & \longrightarrow L_{n-1} \\ & t_{1,j,\gamma} & \longmapsto 0 \\ & t_{i+1,j+1,\gamma} & \longmapsto t_{i,j,\gamma}. \end{array}$$

Mirando a las relaciones (L1), (L2) y (L3), vemos que $\tilde{\varrho}_n$ es un epimorfismo de álgebras bien definido. Notaremos $Q_n = \ker \tilde{\varrho}_n$. De este modo, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \text{gr}(F_n) & \xrightarrow{i} & \text{gr}(K_n) & \xrightarrow{\text{gr}(\varrho)} & \text{gr}(K_{n-1}) & \longrightarrow & 1 \\ & & \uparrow \eta_n & & \uparrow \psi_n & & \uparrow \psi_{n-1} & & \\ 1 & \longrightarrow & Q_n & \xrightarrow{\tilde{i}} & L_n & \xrightarrow{\tilde{\varrho}_n} & L_{n-1} & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

donde η_n es la restricción de ψ_n a Q_n .

Nótese que $t_{1,j,\gamma} \in Q_n$ para todo $j = 2, \dots, n$ y todo $\gamma \in \pi_1(M)$. Nótese también que $\eta_n(t_{1,j,\gamma}) = f_{1,j,\gamma}$, y que $\text{gr}(F_n)$ es el álgebra de Lie libre generada por $\mathcal{F}_{1,n}$. Por tanto, si mostramos que Q_n está generada (como álgebra de Lie) por $\mathcal{B}_{1,n} = \{t_{1,j,\gamma}; j = 2, \dots, n; \gamma \in \pi_1(M)\}$, entonces Q_n será el álgebra de Lie libre generada por $\mathcal{B}_{1,n}$, y η_n será un isomorfismo. En este caso, como ψ_{n-1} es un isomorfismo por hipótesis de inducción, ψ_n también será un isomorfismo de álgebras de Lie, como queremos probar.

Sea $l = \sum_{i=1}^k l_i$ un elemento de Q_n , donde cada l_i es un corchete de Lie en los generadores de L_n . Podemos descomponer $l = (\sum_{i=1}^r l_i) + (\sum_{i=r+1}^k l_i)$, donde $\{l_1, \dots, l_r\}$ son corchetes de Lie donde aparece algún $t_{1,j,\gamma}$, y $\{l_{r+1}, \dots, l_k\}$ son corchetes de Lie en $\{t_{i,j,\gamma}; 2 \leq i < j \leq n, \gamma \in \pi_1(M)\}$.

Para todo $i = 1, \dots, r$, $l_i \in Q_n$, luego $\sum_{i=r+1}^k l_i \in Q_n$. Pero si $\tilde{\varrho}_n(\sum_{i=r+1}^k l_i) = 0$ en L_{n-1} , entonces $\sum_{i=r+1}^k l_i = 0$ en L_n , ya que las relaciones en L_{n-1} son imágenes por $\tilde{\varrho}_n$ de las mismas relaciones en L_n , las cuales no implican ningún $t_{1,j,\gamma}$. Por tanto, $l = \sum_{i=1}^r l_i$, donde cada l_i contiene algún $t_{1,j,\gamma}$. Debemos probar entonces que cada l_i se puede escribir como suma de corchetes en $\mathcal{B}_{1,n}$.

Si l_i es un corchete de longitud 2, el resultado es consecuencia directa de (L1), (L2) y (L3). Supongamos que el resultado es cierto para corchetes de longitud $d-1$, y consideremos $l_i = [a, b]$, un corchete de longitud $d > 2$.

Podemos suponer que a contiene algún $t_{1,j,\gamma}$, y por inducción, que es un corchete en $\mathcal{B}_{1,n}$.

Si $\text{long}(a) \geq 2$, entonces $a = [a_1, a_2]$, donde a_1, a_2 son corchetes en $\mathcal{B}_{1,n}$. Por la identidad de Jacobi,

$$l_i = [[a_1, a_2], b] = -[[a_2, b], a_1] - [[b, a_1], a_2],$$

donde $[a_2, b]$ y $[b, a_1]$ se pueden escribir, por hipótesis de inducción, como suma de corchetes en $\mathcal{B}_{1,n}$, de donde se sigue el resultado.

Si $\text{long}(a) = 1$, entonces $\text{long}(b) \geq 2$, luego $b = [b_1, b_2]$. Por tanto,

$$[a, [b_1, b_2]] = [b_1, [b_2, a]] - [b_2, [a, b_1]],$$

y nos reducimos al caso anterior. Por tanto, \mathcal{Q}_n está generado por $\mathcal{B}_{1,n}$, y así ψ_n es un isomorfismo de álgebras de Lie. \square

3.2.3 El isomorfismo $\chi_2 : \mathcal{Ugr}(K_n) \rightarrow \text{gr}_I \mathbb{Z}[K_n]$

Comenzaremos esta subsección enunciando un resultado de Quillen.

Teorema 3.2.8. (Quillen [Q]).

Sea G un grupo. Sea $I = I(G)$ el ideal de aumentación de G , sea $\text{gr}_I \mathbb{Z}[G]$ el anillo graduado asociado a la filtración I -ádica, y sea $G = G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_i \supset \cdots$ la sucesión central descendente de G . Entonces las aplicaciones $\kappa_i : G_i \rightarrow I^i$, $g \mapsto g - 1$ inducen un homomorfismo de \mathbb{Z} -álgebras sobreyectivo, $\kappa : \mathcal{Ugr}(G) \rightarrow \text{gr}_I \mathbb{Z}[G]$. Además, $\kappa \otimes \mathbb{Q}$ es un isomorfismo de \mathbb{Q} -álgebras. \square

Nótese que, si $\text{gr}(G)$ es un \mathbb{Z} -módulo libre, entonces $\mathcal{Ugr}(G)$ es también un \mathbb{Z} -módulo libre. Por tanto:

Corolario 3.2.9. Si $\text{gr}(G)$ es un \mathbb{Z} -módulo libre, entonces las aplicaciones $\kappa_i : G_i \rightarrow I^i$, $g \mapsto g - 1$ inducen un isomorfismo de \mathbb{Z} -álgebras $\kappa : \mathcal{Ugr}(G) \rightarrow \text{gr}_I \mathbb{Z}[G]$. \square

Ya probamos en la demostración de la proposición 3.2.2 que $\text{gr}(K_n)$ es un \mathbb{Z} -módulo libre. Por tanto:

Proposición 3.2.10. *Existe un isomorfismo bien definido $\chi_2 : \mathcal{U}gr(K_n) \rightarrow \text{gr}_I \mathbb{Z}[K_n]$ que envía $f_{i,j,\gamma}$ sobre $f_{i,j,\gamma} - 1$, para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, y todo $\gamma \in \pi_1(M)$.*

3.2.4 grv es el inverso de $\chi = \chi_2 \circ \chi_1$

En las subsecciones 3.2.2 y 3.2.3, demostramos que existe un isomorfismo bien definido $\chi = \chi_2 \circ \chi_1 : \mathcal{A}_n \rightarrow \text{gr}_I \mathbb{Z}[K_n]$ que envía $t_{i,j,\gamma}$ sobre $f_{i,j,\gamma} - 1$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, y todo $\gamma \in \pi_1(M)$. Pasemos ahora a probar lo siguiente:

Proposición 3.2.11. *El homomorfismo grv es el inverso de χ , luego es un isomorfismo de \mathbb{Z} -álgebras graduadas.*

DEMOSTRACIÓN: Sólo necesitamos probar que grv es el inverso de χ como homomorfismo de \mathbb{Z} -módulos. Si $d \geq 1$, sea $\mathcal{A}_n^{(d)} = \widehat{\mathcal{A}}_n^{(\geq d)} / \widehat{\mathcal{A}}_n^{(\geq d+1)}$ el submódulo de \mathcal{A}_n formado por los polinomios homogéneos de grado d . Consideremos también $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$, donde $i < j$, $k < l$ e $i < k$. Por las relaciones (L1), (L2) y (L3), vistas como relaciones en el álgebra envolvente \mathcal{A}_n de L_n , se tiene:

$$t_{k,l,\delta} t_{i,j,\gamma} = \begin{cases} t_{i,j,\gamma} t_{k,l,\delta} & i, j, k, l \text{ distintos.} \\ t_{i,j,\gamma} t_{k,l,\delta} + t_{i,j,\gamma} t_{i,l,(\gamma\delta)} - t_{i,l,(\gamma\delta)} t_{i,j,\gamma} & \text{si } j = k \\ t_{i,j,\gamma} t_{k,l,\delta} + t_{i,j,\gamma} t_{i,k,(\gamma\delta^{-1})} - t_{i,k,(\gamma\delta^{-1})} t_{i,j,\gamma} & \text{si } j = l \end{cases}$$

Por tanto, un conjunto de generadores de $\mathcal{A}_n^{(d)}$ como \mathbb{Z} -módulo consiste en los elementos de la forma

$$R = t_{i_1,j_1,\gamma_1} t_{i_2,j_2,\gamma_2} \cdots t_{i_d,j_d,\gamma_d},$$

donde $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_d$ y $i_k < j_k$ para todo $k = 1, \dots, d$. Pero

$$\chi(R) = (f_{i_1,j_1,\gamma_1} - 1)(f_{i_2,j_2,\gamma_2} - 1) \cdots (f_{i_d,j_d,\gamma_d} - 1),$$

luego, por definición de grv , y como $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_d$, se tiene $\text{grv}(\chi(R)) = R$. Esto es cierto para todo $d \geq 1$, luego tenemos que $\text{grv} \circ \chi = \text{id}_{\mathcal{A}_n}$. Por tanto, como χ es un isomorfismo, grv es su inverso, como queríamos probar.

□

Este resultado implica el siguiente:

Teorema 3.2.12. *gru es un isomorfismo de \mathbb{Z} -módulos.*

DEMOSTRACIÓN: Recordemos que, por la proposición 3.1.2, el ideal $V_d = J^d$ de $\mathbb{Z}[B_n(M)]$ es isomorfo a $I_n^d \otimes \mathbb{Z}[H_n]$ vía Φ , para todo $d \geq 0$. Además, como $\mathbb{Z}[H_n]$ es un \mathbb{Z} -módulo libre, se tiene:

$$V_d/V_{d+1} \simeq (I_n^d/I_n^{d+1}) \otimes \mathbb{Z}[H_n].$$

Por tanto, $\text{gr}_V \mathbb{Z}[B_n(M)] \simeq (\text{gr}_I \mathbb{Z}[K_n]) \otimes \mathbb{Z}[H_n]$ vía $\text{gr}\Phi$. Ahora, $\text{gr}u = (\text{gr}v \otimes \text{id}) \circ \text{gr}\Phi$ y tanto $\text{gr}\Phi$ como $\text{gr}v \otimes \text{id}$ son isomorfismos de \mathbb{Z} -módulos, luego $\text{gr}u$ es un isomorfismo de \mathbb{Z} -módulos. \square

3.2.5 gru es un homomorfismo

En esta subsección terminamos la demostración del teorema 1.3.5 probando que $\text{gr}u$ es un homomorfismo.

Empezamos por definir una estructura de álgebra en $\text{gr}_I \mathbb{Z}[K_n] \otimes \mathbb{Z}[H_n]$. Consideremos la acción de $B_n(M)$ obre K_n por conjugación: un elemento $b \in B_n(M)$ envía $k \in K_n$ en $bkb^{-1} \in K_n$. Esta acción se extiende de forma natural a $\mathbb{Z}[K_n]$ y preserva la filtración I -ádica, luego define una acción de $B_n(M)$ sobre $\text{gr}_I \mathbb{Z}[K_n]$. Esta acción restringida a K_n es trivial, ya que si $k, k' \in K_n$,

$$k(k' - 1)k^{-1} = k k' k^{-1} - 1 = [k, k'] k' - 1,$$

luego, en $\text{gr}_I \mathbb{Z}[K_n]$,

$$k(k' - 1)k^{-1} \equiv ([k, k'] - 1)k' + (k' - 1) \equiv (k' - 1).$$

Por tanto, la acción inducida sobre $\text{gr}_I \mathbb{Z}[K_n]$ por un elemento $b \in B_n(M)$ sólo depende de $\varphi(b) \in H_n$. Recordemos la sección conjuntista $\sigma : H_n \rightarrow B_n(M)$. Definamos entonces la multiplicación en $\text{gr}_I \mathbb{Z}[K_n] \otimes \mathbb{Z}[H_n]$ por

$$(k_1 \otimes \beta_1)(k_2 \otimes \beta_2) = (k_1 \sigma(\beta_1) k_2 \sigma(\beta_1)^{-1}) \otimes \beta_1 \beta_2.$$

Por el razonamiento anterior, este producto no depende de σ , y dota a $\text{gr}_I \mathbb{Z}[K_n] \otimes \mathbb{Z}[H_n]$ de una estructura de \mathbb{Z} -álgebra.

Ahora, para probar que $\text{gr}u = (\text{gr}v \otimes \text{id}) \circ \text{gr}\Phi$ es un homomorfismo de \mathbb{Z} -álgebras graduadas, probaremos que tanto $\text{gr}\Phi$ como $(\text{gr}v \otimes \text{id})$ son homomorfismos de \mathbb{Z} -álgebras graduadas.

Lema 3.2.13. $\text{gr}\Phi : \text{gr}_V \mathbb{Z}[B_n(M)] \rightarrow \text{gr}_I \mathbb{Z}[K_n] \otimes \mathbb{Z}[H_n]$ es un homomorfismo de \mathbb{Z} -álgebras graduadas.

DEMOSTRACIÓN: Sean $b_1, b_2 \in B_n(M)$. Llamamos $\beta_i = \varphi(b_i)$ y $k_i = b_i(\sigma \circ \varphi)(b_i)^{-1}$ para $i = 1, 2$. Entonces

$$\text{gr}\Phi(b_1) \text{gr}\Phi(b_2) = (k_1 \otimes \beta_1)(k_2 \otimes \beta_2) = (k_1 \sigma(\beta_1) k_2 \sigma(\beta_1)^{-1}) \otimes \beta_1 \beta_2,$$

$$\text{gr}\Phi(b_1 b_2) = (k_1 \sigma(\beta_1) k_2 \sigma(\beta_2) \sigma(\beta_1 \beta_2)^{-1}) \otimes \beta_1 \beta_2.$$

Luego, para probar que $\text{gr}\Phi(b_1 b_2) = \text{gr}\Phi(b_1) \text{gr}\Phi(b_2)$, basta probar que

$$\sigma(\beta_1) \sigma(\beta_2) \equiv \sigma(\beta_1 \beta_2) \pmod{V_1}.$$

Pero $\varphi(\sigma(\beta_1) \sigma(\beta_2)) = \beta_1 \beta_2 = \varphi(\sigma(\beta_1 \beta_2))$, luego existe $k \in K_n$ tal que $\sigma(\beta_1) \sigma(\beta_2) = k \sigma(\beta_1 \beta_2)$ con $k \in K_n$; por tanto, en $\mathbb{Z}[B_n(M)]$,

$$\sigma(\beta_1) \sigma(\beta_2) - \sigma(\beta_1 \beta_2) = (k - 1) \sigma(\beta_1 \beta_2) \in V_1,$$

ya que $k - 1 \in V_1$, como queríamos probar. \square

Lema 3.2.14. $\text{gr}_V \otimes \text{id} : \text{gr}_I \mathbb{Z}[K_n] \otimes \mathbb{Z}[H_n] \rightarrow \mathcal{A}_n \rtimes \mathbb{Z}[H_n]$ es un homomorfismo de \mathbb{Z} -álgebras graduadas.

DEMOSTRACIÓN: Escribiremos $g = \text{gr}_V$ y $g' = \text{gr}_V \otimes \text{id} = g \otimes \text{id}$, para simplificar la notación. Notaremos también $\beta'_1 = \sigma(\beta_1)$. Sabemos que g es un isomorfismo de \mathbb{Z} -álgebras, luego

$$\begin{aligned} g'((k_1 \otimes \beta_1)(k_2 \otimes \beta_2)) &= g'((k_1 \beta'_1 k_2 \beta_1'^{-1}) \otimes \beta_1 \beta_2) \\ &= g(k_1 \beta'_1 k_2 \beta_1'^{-1}) \otimes \beta_1 \beta_2 \\ &= g(k_1) g(\beta'_1 k_2 \beta_1'^{-1}) \otimes \beta_1 \beta_2. \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} g'(k_1 \otimes \beta_1) g'(k_2 \otimes \beta_2) &= (g(k_1) \otimes \beta_1) (g(k_2) \otimes \beta_2) \\ &= g(k_1) (\beta_1 g(k_2) \beta_1^{-1}) \otimes \beta_1 \beta_2. \end{aligned}$$

Por tanto, necesitamos probar que, en \mathcal{A}_n ,

$$g(\sigma(\beta_1) k_2 \sigma(\beta_1)^{-1}) = \beta_1 g(k_2) \beta_1^{-1}.$$

Como la acción por conjugación no depende de σ , sólo tenemos que verificar la fórmula anterior cuando β_1 sea un generador de H_n . Además, como g es un homomorfismo de \mathbb{Z} -álgebras, basta verificarla cuando k_2 sea un generador de $\text{gr}_I \mathbb{Z}[K_n]$ como \mathbb{Z} -álgebra, es decir, cuando $k_2 = f_{i,j,\gamma} - 1$, $i < j$. Por tanto, sólo hay que probar el lema 3.2.15, que damos a continuación.

□

Lema 3.2.15. *En $\text{gr}_I \mathbb{Z}[K_n]$ se tienen las relaciones siguientes, para todo $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ y todo $\gamma \in \pi_1(M)$.*

- $\sigma_k f_{i,j,\gamma} \sigma_k^{-1} = f_{s_k(i), s_k(j), \gamma}$, donde s_k es la trasposición $(k \ k+1)$,
- $a_{k,r} f_{i,j,\gamma} a_{k,r}^{-1} = f_{i,j,\gamma}$, si $k \neq i, j$,
- $a_{i,r} f_{i,j,\gamma} a_{i,r}^{-1} = f_{i,j,(\omega_r \gamma)}$,

donde $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$ y $\{a_{i,r}; 1 \leq i \leq n \text{ y } 1 \leq r \leq 2g\}$ son las trenzas descritas en la subsección 3.1.1.

DEMOSTRACIÓN: La primera ecuación es consecuencia de las siguientes relaciones en $B_n(M)$, que se verifican fácilmente.

$$\sigma_k a_{i,r} \sigma_k^{-1} = \begin{cases} a_{i,r} & \text{si } k \neq i-1, i. \\ a_{i+1,r} t_{i,i+1}^{-1} & \text{si } k = i \quad \text{y } r \text{ es par.} \\ t_{i,i+1} a_{i+1,r} & \text{si } k = i \quad \text{y } r \text{ es impar.} \\ t_{i-1,i} a_{i-1,r} & \text{si } k = i-1 \quad \text{y } r \text{ es par.} \\ a_{i-1,r} t_{i-1,i}^{-1} & \text{si } k = i-1 \quad \text{y } r \text{ es impar.} \end{cases}$$

$$\sigma_k t_{i,j} \sigma_k^{-1} = \begin{cases} t_{i-1,j} & \text{si } k = i-1. \\ t_{i,i+1} t_{i+1,j} t_{i,i+1}^{-1} & \text{si } k = i. \\ t_{i,j-1} & \text{si } k = j-1. \\ t_{i,j}^{-1} t_{i,j+1} t_{i,j} & \text{si } k = j. \\ t_{i,j} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La segunda ecuación se deduce del lema 3.2.5, y de las relaciones siguientes, donde $i \neq k$ y hemos denotado $b_{l,m} = a_{l,m}$ si m es impar, y $b_{l,m} = a_{l,m}^{-1}$

si m es par.

$$b_{k,r} b_{i,s} b_{k,r}^{-1} = \begin{cases} t_{i,k}^{-1} b_{i,s} & \text{si } s < r \quad \text{y } i < k. \\ b_{i,s} (b_{i,r}^{-1} t_{i,k} b_{i,r}) & \text{si } s > r \quad \text{y } i < k. \\ b_{i,s} (b_{i,r}^{-1} t_{k,i}^{-1} b_{i,r}) & \text{si } s < r \quad \text{y } i > k. \\ t_{k,i} b_{i,s} & \text{si } s > r \quad \text{y } i > k. \\ b_{i,s} & \text{si } s = r. \end{cases}$$

En efecto, en este caso,

$$b_{k,r} f_{i,j,\gamma} b_{k,r}^{-1} \equiv b_{k,r} \tilde{\gamma}_{(i)} t_{i,j} \tilde{\gamma}_{(i)}^{-1} b_{k,r}^{-1} \equiv \tilde{\gamma}_{(i)} b_{k,r} t_{i,j} b_{k,r}^{-1} \tilde{\gamma}_{(i)}^{-1},$$

que, por el lema 3.2.5, es equivalente a $f_{i,j,\gamma}$.

Por último, la tercera ecuación se verifica como sigue:

$$a_{i,r} f_{i,j,\gamma} a_{i,r}^{-1} \equiv a_{i,r} \tilde{\gamma}_{(i)} t_{i,j} \tilde{\gamma}_{(i)}^{-1} a_{i,r}^{-1} \equiv k \widetilde{(\omega_r \gamma)}_{(i)} t_{i,j} \widetilde{(\omega_r \gamma)}_{(i)}^{-1} k^{-1},$$

donde $k \in K_n$, luego es equivalente a $f_{i,j,(\omega_r \gamma)}$. \square

Bibliografía

- [A] E. ARTIN, *Theorie der Zöpfe*, Hamburg abh. **4**, 47-72.
- [A2] E. ARTIN, *Theory of braids*, Annals of Math. **48** (1946) 101-126.
- [Ba] J. C. BAEZ, *Link invariants of finite type and perturbation theory*, Lett. Math. Phys. **26** (1992), no. 1, 43-51.
- [B-N] D. BAR-NATAN, *On the Vassiliev knot invariants*, Topology **34** (1995) 423-472.
- [B-N2] D. BAR-NATAN, *Vassiliev homotopy string links invariants*, Journal of Knot Theory and its Ramifications **4**, no. 1 (1995) 13-32.
- [B-N3] D. BAR-NATAN, *Vassiliev and quantum invariants of braids*, Proc. of Symp. in Appl. Math. **51** (1996) 129-144, "The interface of knots and physics" (L. H. Kauffman, ed.), Amer. Math. Soc., Providence.
- [B] J. S. BIRMAN, "Braids, Links and Mapping Class Groups", Annals of Math. Studies **82** (Princeton University Press, 1973).
- [B2] J. S. BIRMAN, *New points of view in knot theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **28** (1993) 253-287.
- [FaN] E. FADELL and L. NEUWIRTH, *Configuration spaces*, Math. Scand. **10** (1962) 111-118.
- [FvB] E. FADELL and J. VAN BUSKIRK, *The braid groups of E^2 and S^2* , Duke Math. J. **29** (1962) 243-258.
- [FR] M. FALK and R. RANDELL, *The lower central series of a fiber type arrangement*, Invent. Math. **82** (1985) 77-88.

- [F] R. H. FOX, *Free Differential Calculus I: Derivation in the Free Group Ring*, *Annals of Math.* **57** (1953), no. 3, 547-560.
- [FoN] R. H. FOX and L. NEUWIRTH, *The braid groups*, *Math. Scand.* **10** (1962) 119-126.
- [G] C. H. GOLDBERG, *An exact sequence of braid groups*, *Math. Scand.* **33** (1973) 69-82.
- [G-M] J. GONZÁLEZ-MENESES, *New presentations of surface braid groups*, Prépublication n. 194 du Laboratoire de Topologie. Université de Bourgogne. Dijon, 1999.
- [G-MP] J. GONZÁLEZ-MENESES and L. PARIS, *Vassiliev invariants for braids on surfaces*, Prépublication n. 218 du Laboratoire de Topologie. Université de Bourgogne. Dijon, 2000.
- [H] P. DE LA HARPE, *An invitation to Coxeter groups*, "Group theory from a geometrical viewpoint" (eds E. Ghys, Haefliger and Verjovsky), World Scientific Publishers, Singapore, 1991.
- [Koh] T. KOHNO, *Vassiliev invariants and de-Rahm complex on the space of knots*, *Symplectic geometry and quantization* (Sanda and Yokohama, 1993), 123-138, *Contemp. Math.* **179**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [Kon] M. KONTSEVICH, *Vassiliev's Knots Invariants*, *Adv. in Sov. Math.* **16** (1993), no. 2, 137-150.
- [LM] T. Q. T. LE and J. MURAKAMI, *Representations of the category of tangles by Kontsevich's iterated integrals*, *Comm. Math. Phys.* **168** (1995) 535-563.
- [L] J. LIEBERUM, "Invariants de Vassiliev pour les entrelacs dans S^3 et dans les variétés de dimension trois", Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur (Strasbourg I), 1998.
- [LS] R. C. LYNDON and P. E. SCHUPP, "Combinatorial Group Theory", (Springer-Verlag, 1977).

- [MKS] W. MAGNUS, A. KARRAS and D. SOLITAR, “Combinatorial group theory: Presentation of groups in terms of generators and relations”, (Dover Publications Inc., New York, 1976).
- [M] W. S. MASSEY, “Algebraic Topology: An Introduction”, (Harcourt, Brace and World Inc., 1967).
- [P] Ş. PAPADIMA, *The universal finite-type invariant for braids, with integer coefficients*. *Topology and its Applications*, to appear.
- [PR] L. PARIS and D. ROLFSEN, *Geometric subgroups of surface braid groups*, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, **49** (1999), no. 2, 101-156.
- [Q] D. QUILLEN, *On the associated graded ring of a group ring*, *J. of Algebra* **10** (1968) 411-418.
- [Sc] G. P. SCOTT, *Braid groups and the group of homeomorphisms of a surface*, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **68** (1970) 605-617.
- [Se] J. P. SERRE, “Lie algebras and Lie groups”, 1964 lectures given at Harvard University, Second edition, *Lecture Notes in Math.* **1500**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [St] T. STANFORD, *Braid commutators and Vassiliev invariants*, *Pacific J. of Math.* **174** (1996), no. 1, 269-276.
- [vB] J. VAN BUSKIRK, *Braid groups of compact 2-manifolds with elements of finite order*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **122** (1966) 81-97.
- [V1] V. A. VASSILEV, *Cohomology of knot spaces*, *Theory of Singularities and its Applications* (Providence), V. I. Arnold ed., Amer. Math. Soc., Providence, 1990.
- [V2] V. A. VASSILIEV, “Complements of discriminants of smooth maps: topology and applications”, *Trans. of Math. Mono.* **98**, Amer. Math. Soc., Providence, 1992.
- [Vo] P. VOGEL, *Invariants de Vassiliev des nœuds (d’après D. Bar-Natan, M. Kontsevich et V. A. Vassiliev)*, *Séminaire Bourbaki* **769** (1993), 1-17, *Astérisque* **216** (1993), 213-232.

Resumen

En este trabajo estudiamos las *trenzas en superficies cerradas*. En primer lugar, damos nuevas presentaciones de los grupos de trenzas en superficies cerradas, que son mucho más simples que las ya conocidas, y que tienen una fácil interpretación geométrica. Utilizamos además estas presentaciones para dar una solución del problema de la palabra en estos grupos. Seguidamente estudiamos los *invariantes de Vassiliev* de trenzas en superficies cerradas orientables, y demostramos que estos invariantes distinguen las trenzas en superficies. Finalmente, definimos los *diagramas de cuerdas ponderados* para las trenzas en superficies, que nos permiten encontrar un invariante de Vassiliev universal para estas trenzas, con coeficientes en \mathbb{Z} .

Résumé

Dans ce travail, on étudie les *tresses des surfaces fermées*. On donne d'abord des nouvelles présentations pour les groupes des tresses des surfaces fermées, qui sont beaucoup plus simples que celles déjà connues, et qui peuvent être directement interprétées de façon géométrique. On utilise aussi ces présentations pour donner une solution du problème du mot dans ces groupes. Ensuite, on étudie les *invariants de Vassiliev* des tresses des surfaces fermées orientables. On montre alors que ces invariants distinguent les tresses des surfaces. Finalement, on introduit les *diagrammes de cordes pondérés* pour les tresses des surfaces, qui nous permettent de trouver un invariante de Vassiliev universel pour ces tresses, à coefficients dans \mathbb{Z} .

Abstract

In this work we study the *braids on closed surfaces*. First, we give new presentations for the braid groups on closed surfaces, which are much simpler than those which were known before, and have an easy geometric interpretation. We also use these presentations to give a solution to the word problem on these groups. Then, we study *Vassiliev invariants* for braids on closed, orientable surfaces. We show that these invariants separate braids on surfaces. Finally, we introduce the concept of *labeled chord diagrams* for braids on surfaces, which allow us to define an universal Vassiliev invariant for these braids, with coefficients in \mathbb{Z} .

Juan González-Meneses López
Trenzas en superficies cerradas

con unanimidad

Sobresaliente cum laude

20

Octubre

2000

El Vocal



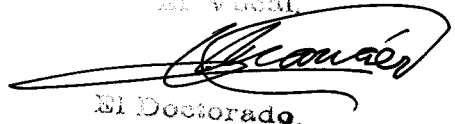
El Presidente



El Secretario,



El Vocal



El Doctorado,

