



Trabajo Final de Master - Curso 2022/ 2023.

El complejo camino entre los fractales de Julia y el fractal de Mandelbrot.

Dídac Cuenca Peris.

Tutora: MARÍA DE LOS ÁNGELES JAPÓN PINEDA.

Máster Universitario en Matemáticas.
(MUM)

Índice general

1. Introducción	3
2. Conocimientos previos	6
2.1. Contracciones en un espacio métrico	6
2.2. Teoremas clásicos de Variables Compleja	8
3. Los conjuntos de Julia	10
3.1. Introducción	10
3.2. Puntos fijos y periódicos: Atractores y Repulsores	14
3.3. Conjuntos de Julia para funciones polinómicas	18
4. Conjuntos de Julia para funciones polinómicas de grado 2. El conjunto de Mandelbrot	39
4.1. Conjuntos de Julia para funciones polinómicas de grado dos	41
4.1.1. Representación de conjuntos de Julia para funciones polinómicas de grado 2	44
4.2. El camino hacia el conjunto de Mandelbrot	47
5. Relación entre los conjuntos de Julia y el conjunto de Mandelbrot	52

Abstract

El objetivo de este proyecto es demostrar la relación entre los conjuntos de Julia para funciones polinómicas de grado dos y el conjunto de Mandelbrot. Para ello, se definirán los conjuntos de Julia para funciones polinómicas y se demostrarán las propiedades más características de estos. Seguidamente, se aplicarán estas conclusiones a funciones polinómicas de grado dos de la forma $f(z) = z^2 + c$ y se definirá el conjunto de Mandelbrot a partir de las órbitas de su punto crítico. Finalmente, se demostrará el Teorema que garantiza que el conjunto de Mandelbrot es el conjunto de valores de $c \in \mathbb{C}$ para los cuales el conjunto de Julia asociado a la función $f(z) = z^2 + c$ es conexo.

The purpose of this project is to prove the relationship between Julia sets for quadratic mappings and the Mandelbrot set. To this aim, Julia sets for polynomial functions will be defined and their most characteristic properties will be proved. This analysis will be applied to quadratic mappings of the form $f(z) = z^2 + c$ and the Mandelbrot set will be defined using the orbits of its critical point. Finally, we will prove the Theorem that guarantees that the Mandelbrot set is the set of values $c \in \mathbb{C}$ for which the Julia set associated to the function $f(z) = z^2 + c$ is connected.

Capítulo 1

Introducción

En algún momento de la historia, los matemáticos se centraron en estudiar funciones y conjuntos para los cuales se pueden aplicar los métodos clásicos del cálculo. De hecho, las funciones suaves y los conjuntos que se pueden describir usando una ecuación simple son los que se estudiaron con mayor profundidad, dejando a un lado aquellos objetos y construcciones que no se consideraban lo suficientemente suaves.

Actualmente, este pensamiento ha cambiado radicalmente. Los matemáticos han observado que los conjuntos que no son suaves contienen aspectos llamativos que merecen ser estudiados y no considerados como patológicos.

De hecho, los conjuntos irregulares ofrecen una representación más precisa de los fenómenos naturales de lo que puede ofrecer la geometría clásica. Sin embargo, los métodos de geometría y cálculo clásicos no permiten describir de forma ajustada estos conjuntos irregulares. En consecuencia, se tiene que recurrir a técnicas alternativas para describirlos.

En este proyecto nos vamos a centrar en los conjuntos de Julia los cuales, en general, son conjuntos muy irregulares que se pueden englobar dentro de los conjuntos que llamamos **fractales**. Aunque no existe una definición concisa y precisa de los fractales, estos conjuntos comparten algunas propiedades:

- a) Un conjunto fractal es auto-similar. Esto quiere decir que el conjunto contiene copias de si mismo escaladas en diferentes factores.
- b) Aunque un conjunto llamado fractal pueda tener una definición analítica muy simple, su estructura geométrica puede resultar muy compleja.

Como hemos comentado, nos centraremos en los conjuntos de Julia los cuales son consi-

derados fractales por su estructura geométrica irregular. Los conjuntos de Julia, así llamados por el matemático Gaston Julia, son una familia de conjuntos fractales que se obtienen al estudiar el comportamiento de los números complejos al ser iterados por una función. Este estudio conduce a la idea de puntos atractores, que ejercen el papel de imanes que atraen puntos hacia ellos y repulsores, que empujan otros lejos de los mismos.

Los conjuntos de Julia se definen como la frontera de diferentes cuencas de atracción, que son regiones donde los puntos situados en estas alcanzan el punto atractor al ser iterados por la función de estudio.

Este estudio llevó a Julia a ganar en 1918 el premio Grand Prix des sciences mathématiques. Sin embargo, su fama se perdió por completo tras su fallecimiento en 1978.

Poco después, el matemático Benoit Mandelbrot recuperó el trabajo de Julia y lo aplicó a funciones polinómicas complejas de grado dos de la forma $f(z) = z^2 + c$ con $c \in \mathbb{C}$. Mandelbrot observó, al realizar iteraciones de esta función f con un ordenador, que para ciertos valores de la constante c el conjunto de Julia que se obtenía era conexo mientras que para otros era desconexo.

Aprovechando los estudios de Julia y Fatou, que probaron de manera independiente que para saber si el conjunto de Julia asociado a una cierta función $f_c(z) = z^2 + c$ era conexo o no simplemente hacía falta estudiar la órbita del punto crítico $z = 0$, Mandelbrot dio con el famoso conjunto de Mandelbrot o conjunto M el cual agrupa todos los valores de $c \in \mathbb{C}$ para los cuales la órbita del punto crítico $z = 0$ está acotada. Es decir:

$$M = \{c \in \mathbb{C} : \{f_c^{(k)}(0)\}_{k=1}^{\infty} \text{ está acotada}\}.$$

El objetivo del presente proyecto será la demostración del Teorema Fundamental de Mandelbrot que fue realizada por Benoit Mandelbrot en el año 1983 y que prueba que este conjunto M es igual al conjunto siguiente:

$$M = \{c \in \mathbb{C} : J(f_c) \text{ es conexo}\},$$

donde $J(f_c)$ denota el conjunto de Julia asociado a la función $f_c(z) = z^2 + c$.

Con ese objetivo, dividiremos nuestro proyecto en cuatro secciones y, a continuación, detallaremos el contenido de cada una de ellas.

En la primera sección expondremos los conocimientos previos necesarios para el correcto entendimiento del proyecto. En particular, se presentan en esta sección Teoremas clásicos de Variable Compleja que son necesarios para algunas de las pruebas que se presentan en

el documento. Estos teoremas no presentan demostración, sin embargo, se pueden encontrar en [AHL] y en [GAM].

En la segunda sección estudiaremos la teoría general de los conjuntos de Julia para funciones polinómicas de grado n . En esta sección definiremos el concepto de conjunto de Julia para una función polinómica f , $J(f)$, y lo caracterizaremos a través de una serie de propiedades. Sin embargo, para probar estas propiedades se definirá, a través del concepto de normalidad para funciones de variable compleja, un conjunto auxiliar que denotaremos por $J_0(f)$ y probaremos que las propiedades se cumplen para este conjunto. Finalmente, demostraremos que los conjuntos $J(f)$ y $J_0(f)$ son iguales y, consecuentemente, comparten las mismas propiedades.

En la tercera sección nos centraremos en la funciones polinómicas de grado dos de la forma $f(z) = z^2 + c$ con $c \in \mathbb{C}$. Calcularemos los puntos fijos de esta función y su carácter así como las órbitas periódicas de periodo 2 y su carácter, las cuales junto con los puntos críticos de f nos permitirán definir el conjunto de Mandelbrot y acotar el mismo. Además, se incluyen algunos dibujos de conjuntos de Julia para determinados valores de $c \in \mathbb{C}$.

En la cuarta sección se procederá a la demostración del Teorema Fundamental de Mandelbrot que relaciona el conjunto de Mandelbrot con los valores de $c \in \mathbb{C}$ para los cuales $J(f_c)$ es conexo. Para ello, se estudiará el comportamiento de la inversa de la función raíz cuadrada de un número complejo al aplicarla sobre curvas en el plano y se introducirán algunos conceptos básicos de topología y conexión.

Las pruebas que se encuentran en el presente documento están basadas en las demostraciones realizadas en [FAL] y [HEL].

Capítulo 2

Conocimientos previos

2.1. Contracciones en un espacio métrico

Notación 2.1.1 Si f es una función definida en un conjunto X y $x \in X$, a lo largo del presente documento denotaremos por $f^{(n)}(x)$ a la composición n veces de la función f sobre el elemento x , es decir:

$$f^{(n)}(x) = f \circ \underset{n \text{ veces}}{\dots} \circ f(x).$$

Definición 2.1.1 Si (X, d) es un espacio métrico completo, una aplicación $f : X \rightarrow X$ es una **contracción** si existe una constante $c \in [0, 1[$ tal que:

$$d(f(x), f(y)) \leq c d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Nota 2.1.1 A partir de la definición de función contractiva, se puede probar que la función f es continua.

Definición 2.1.2 Sea $x \in X$, llamamos **órbita** del elemento x bajo f a la sucesión

$$\{f^{(k)}(x)\}_{k=0}^{\infty} \text{ donde } f^{(0)}(x) = x$$

. Si se cumple que $f(x) = x$ para algún $x \in X$ diremos que x es un **punto fijo** de f .

Teorema 2.1.1 (Aplicación Contractiva de Banach) Sea (X, d) un espacio métrico completo, una contracción $f : X \rightarrow X$ tiene un único punto fijo y todas las órbitas convergen a él.

Prueba:

Sea c el factor de contracción de la función f . Sea $x \in X$ y sean dos naturales $m < n$, entonces:

$$d(f^{(m)}(x), f^{(n)}(x)) = d(f^{(m)}(x), f^{(m)}(f^{(n-m)}(x))) \leq c^m d(x, f^{(n-m)}(x)).$$

Una vez tenemos acotada la distancia entre dos elementos cualesquiera de la órbita de x podemos acotar la distancia siguiente:

$$d(x, f^{(n)}(x)) \stackrel{\text{D.T.}}{\leq} \sum_{k=1}^n d(f^{(k-1)}(x), f^{(k)}(x)) \leq \sum_{k=1}^n c^{k-1} d(x, f(x)) \leq d(x, f(x)) \sum_{k=0}^{\infty} c^k.$$

Observamos que, como $0 < c < 1$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c^k$ es una serie convergente y, además, la suma vale exactamente $\frac{1}{1-c}$. Por tanto:

$$d(x, f^{(n)}(x)) \leq d(x, f(x)) \frac{1}{1-c}.$$

Observamos que esta acotación no depende de n . Por tanto, podemos deducir a partir de la primera cadena de desigualdades y la anterior que:

$$d(f^{(m)}(x), f^{(n)}(x)) \leq \frac{c^m}{1-c} d(x, f(x)).$$

Notamos que, como el $x \in X$ está fijo, sabemos que $d(x, f(x))$ es una constante. Fijamos $\varepsilon > 0$, como la sucesión $\{c^m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente a 0 porque $0 < c < 1$ sabemos que existe un $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq m_0$ se tiene que $c^m \leq \frac{\varepsilon}{d(x, f(x))} (1-c)$.

Ahora bien, si tomamos $n > m > m_0$, por lo que hemos deducido anteriormente tenemos que:

$$d(f^{(m)}(x), f^{(n)}(x)) \leq \frac{c^m}{1-c} d(x, f(x)) < \frac{\varepsilon d(x, f(x))(1-c)}{d(x, f(x))(1-c)} = \varepsilon.$$

Por tanto, podemos deducir que la sucesión $\{f^{(k)}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy sobre X y como (X, d) es un espacio métrico completo podemos concluir que esta sucesión converge a un límite $x_f = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(x)$. También podemos observar lo siguiente:

$$f(x_f) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(x)\right) \stackrel{f \text{ continua}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k+1)}(x) = x_f.$$

Esta última afirmación nos permite concluir que el límite de la órbita de x es un punto fijo de la función contractiva f . Lo único que queda por demostrar es que este punto fijo es único. Para ello, supondremos que existe un $y \in X$ con $y \neq x_f$ tal que $f(y) = y$. Bajo este supuesto tenemos que:

$$d(x_f, y) = d(f(x_f), f(y)) \leq c d(x_f, y).$$

Como $c \in [0, 1[$ hemos llegado a una contradicción, por tanto se deduce que $y = x_f$. □

2.2. Teoremas clásicos de Variables Compleja

En esta sección incluiremos algunos de los teoremas de variable compleja que utilizaremos a lo largo del documento.

Notación 2.2.1 Sea $z \in \mathbb{C}$ y sea $\rho > 0$, denotaremos el disco cerrado de centro z y radio ρ como $B(z, \rho)$, es decir:

$$B(z, \rho) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| \leq \rho\}.$$

Del mismo modo, denotamos al disco abierto de centro z y radio ρ por $U(z, \rho)$, es decir:

$$U(z, \rho) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < \rho\}.$$

Teorema 2.2.1 (Aplicación abierta) Sea f una función holomorfa y no constante en un dominio complejo D (abierto conexo de \mathbb{C}), entonces la imagen $f(E)$ de un conjunto abierto $E \subset D$ es también un conjunto abierto.

Teorema 2.2.2 (Convergencia uniforme de funciones holomorfas) Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas definidas en un dominio complejo D que convergen uniformemente en compactos de D a una función f . Entonces, la función f también es holomorfa en D y la sucesión de derivadas $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ también converge uniformemente en los compactos de D a la función f' .

Teorema 2.2.3 (Función inversa) *Supongamos que f es una función holomorfa en un entorno del punto $z_0 \in \mathbb{C}$ y que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces existe un entorno U de z_0 , un entorno V de $w_0 = f(z_0)$ y una función g unívocamente determinada y holomorfa en V tal que $g(w_0) = z_0$ y $w = f(z)$ ($z \in U$) sii $z = g(w)$ ($w \in V$).*

Teorema 2.2.4 (Teorema de Liouville) *Toda función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ entera (derivable para todo $z \in \mathbb{C}$) y acotada es constante.*

Teorema 2.2.5 (Teorema de Prolongación Analítica) *Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica en un abierto conexo A y f se anula en un entorno de un punto $z_0 \in A$, entonces $f = 0$ en A .*

Teorema 2.2.6 (Teorema de Monodromía) *La prolongación analítica de una función holomorfa definida en un subconjunto abierto de un dominio simplemente conexo a este dominio es única.*

Definición 2.2.1 *Una sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones complejas holomorfas en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ se llama **normal** en U si toda subsucesión de $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ admite una nueva subsucesión $\{g_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge uniformemente en los conjuntos compactos $K \subset U$ ya sea a una función holomorfa g en U o hacia ∞ , es decir que satisface:*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{z \in K} |g_{n_k}(z) - g(z)| = 0 \text{ o } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{z \in K} |g_{n_k}(z)| = \infty.$$

*La sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ se llama **normal** en $w \in \mathbb{C}$ si es normal en un entorno abierto V de w .*

Teorema 2.2.7 (Teorema de Montel) *Si la sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es normal en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}$, entonces se tiene que:*

$$\text{o bien } \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n(U) = \mathbb{C},$$

$$\text{o bien } \exists w \in \mathbb{C} \text{ tal que } \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n(U) = \mathbb{C} \setminus \{w\}.$$

Capítulo 3

Los conjuntos de Julia

3.1. Introducción

En esta sección, basada en el tercer capítulo de [HEL], estudiaremos la construcción de los conjuntos de Julia y también algunas de sus propiedades. Para definir estos conjuntos usaremos las órbitas de puntos $z \in \mathbb{C}$ bajo funciones $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. En particular, estudiaremos la convergencia o la divergencia de las mismas. Ejemplificaremos el cálculo de iteradas y la convergencia de las órbitas con un ejemplo sencillo en el que calcularemos las iteradas de una función f lineal. Consideraremos la siguiente aplicación:

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto f(z) = cz + b,$$

donde $0 \neq c = c_1 + ic_2, b = b_1 + ib_2; c_1, c_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Para cualquier $z \in \mathbb{C}$, podemos calcular la órbita de la función f en z ; es decir, la sucesión $\{f^{(n)}(z)\}_{n=1}^{\infty}$. Así, los primeros términos de esta serán:

- $f^{(1)}(z) = f(z) = cz + b$
- $f^{(2)}(z) = f(f(z)) = c(cz + b) + b = c^2z + cb + b$
- $f^{(3)}(z) = c^2(cz + b) + cb + b = c^3z + c^2b + cb + b$

Por inducción se puede demostrar fácilmente que el término n -ésimo de esta sucesión es:

$$f^{(n)}(z) = c^n z + b \sum_{k=0}^{n-1} c^k.$$

De aquí, se deduce que; si $0 < |c| < 1$, entonces:

$$f^{(n)}(z) = c^n z + b \sum_{k=0}^{n-1} c^k = c^n z + b \frac{1 - c^n}{1 - c} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(z) = \frac{b}{1 - c}.$$

Sin embargo, si $|c| > 1$ es claro que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(z) = \infty$. Por tanto, la órbita de f para cualquier $z \in \mathbb{C}$ convergerá al punto fijo $z_0 = \frac{b}{1-c}$ si y solo si $0 < |c| < 1$.

Esto mismo se podría razonar también si tenemos en cuenta que si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces:

$$|f(z) - f(w)| = |cz + b - (cw + b)| = |c(z - w)| = |c||z - w|.$$

Por tanto, en el caso en que $|c| < 1$ tendremos una aplicación afín contractiva con factor de contracción $|c|$ y, por la Proposición 2.1.1, sabemos que esta aplicación f tiene un único punto fijo. Además, todas las órbitas $\{f^{(n)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ convergen a este punto fijo que hemos calculado anteriormente y vale $z_0 = \frac{b}{1-c}$.

En este capítulo nos vamos a centrar en las funciones polinómicas de grado n que son funciones de la forma siguiente:

$$f(z) = \sum_{j=0}^n c_j z^j \quad \text{donde } c_j \in \mathbb{C}, \forall j = 0, \dots, n \text{ y } c_n \neq 0.$$

Para este tipo de funciones puede resultar interesante encontrar los conjuntos de puntos que son invariantes respecto a f . Es decir, encontrar el conjunto C de puntos tales que

$$C = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = z\}.$$

Además, también puede resultar interesante encontrar puntos $z_0 \in \mathbb{C}$ cuyas órbitas $\{f^{(n)}(z_0)\}_{n=0}^{\infty}$ se vuelvan a repetir. Es decir que exista un natural $p \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(p)}(z_0) = z_0$. Estos puntos se llaman **puntos periódicos** y al menor natural p que cumple $f^{(p)}(z_0) = z_0$ se le llama **periodo** de z_0 .

Ejemplo 3.1.1 Para ejemplificar este estudio podemos empezar suponiendo que la función f es $f(z) = z^2$ con $z \in \mathbb{C}$. Si buscamos el conjunto de puntos invariantes respecto a f tenemos que este está formado por dos puntos únicamente. Es decir que $C = \{0, 1\}$ son los únicos puntos invariantes de la función f ya que son las soluciones de la ecuación $z = f(z) = z^2$.

Una vez hemos detectado los puntos fijos de la función $f(z) = z^2$ podemos estudiar las órbitas de los distintos puntos $z \in \mathbb{C}$, es decir, las sucesiones $\{f^{(n)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Observamos lo siguiente:

- $f^{(0)}(z) = z$
- $f^{(1)}(z) = z^2$
- $f^{(2)}(z) = (z^2)^2 = z^4$

Por inducción, es fácil probar que $f^{(n)}(z) = z^{2^n}$. Por tanto, en función de $|z|$, tendremos los siguientes casos:

- a) Si $z_0 = 0$, entonces $f^{(n)}(z_0) = f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, estamos en un punto fijo de la función y la órbita está formada por un solo elemento.
- b) Si $|z| < 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} |f^{(n)}(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |z|^{2^n} = 0$. Por tanto, la órbita de este punto z convergerá hacia el punto fijo $z_0 = 0$.
- c) Si $|z| = 1$, entonces la órbita se quedará girando alrededor del disco unidad debido a que $|f^{(n)}(z)| = |z|^{2^n} = 1$. Un caso particular es cuando $z = 1$. En este caso $f^{(n)}(1) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por tanto, estamos ante el otro punto fijo de la función.
- d) Si $|z| > 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} |f^{(n)}(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |z|^{2^n} = \infty$. Por consiguiente, la órbita de este punto z divergerá.

Si queremos calcular los puntos periódicos de f distintos de los puntos fijos que ya hemos encontrado, nuestro interés se centrará en encontrar puntos $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ tales que:

$$z_0^{2^k} = z_0 \quad \text{o, equivalentemente} \quad z_0^{2^k - 1} = 1. \quad (3.1)$$

Como se tiene que cumplir que $z_0^{2^k - 1} = 1$, entonces es claro que $|z_0| = 1$. Por tanto, podemos deducir que $z_0 = e^{2\pi i \theta_0}$ para algún $\theta_0 \in [0, 1[$. Substituyendo en la Expresión 3.1 el valor de z_0 obtenemos:

$$(e^{2\pi i \theta_0})^{2^p - 1} = e^{2\pi i \theta_0 (2^p - 1)} = 1.$$

Por tanto, dado un $p \in \mathbb{N}$ concluimos que los valores de θ_0 que permiten resolver la ecuación anterior son aquellos para los que $\theta_0(2^p - 1)$ es un natural n .

Con este razonamiento podemos construir los valores periódicos para un $p \in \mathbb{N}$ fijado que serán de la forma:

$$e^{2\pi i \frac{n}{2^p - 1}} \quad \text{para } n \in \{0, \dots, 2^p - 2\}.$$

De este modo, los puntos periódicos correspondientes se encuentran situados en el disco unidad y como la familia de puntos de la forma $\frac{n}{2^p-1}$ con $p \in \mathbb{N}$ y $0 \leq n \leq 2^p - 2$ son densos en $[0, 1[$ también lo serán los puntos periódicos no nulos de f sobre la esfera unidad.

Más adelante en este capítulo, discutiremos sobre el comportamiento que siguen las órbitas de los puntos $z \in \mathbb{C}$ bajo la función $f(z) = z^2$ usando las derivadas.

Si en lugar de considerar f definida en \mathbb{C} la consideramos en la esfera de Riemann, es decir, en $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, dotando el valor $f(\infty) = \infty$, tenemos que si $|z| > 1$, las órbitas $\{f^{(n)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ convergen hacia el valor $z = \infty \in \mathbb{C}^*$ que es, también, un punto fijo de la función $f(z) = z^2$. Por tanto, el disco unidad representado en la Figura 3.1 ejerce el papel de frontera entre las áreas de convergencia, bajo la iteración de f , de los puntos fijos de la esfera de Riemann $z_1 = 0$ y $z_2 = \infty$.

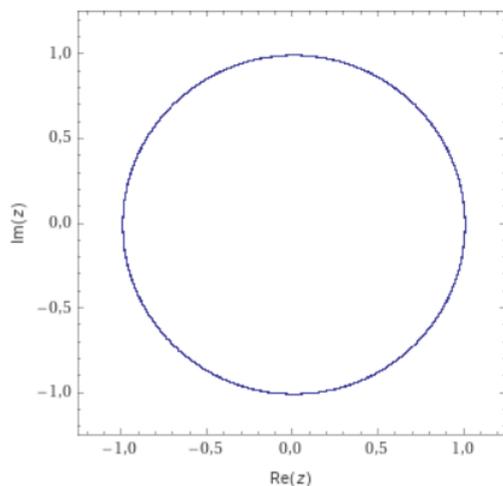


Figura 3.1: Disco Unidad como frontera entre ambas áreas.

Nota 3.1.1 Si en lugar de considerar la función $f(z) = z^2$ consideramos la función $f(z) = z^2 + c$ para un valor complejo $0 \neq c \in \mathbb{C}$, los resultados que obtenemos para el estudio de las órbitas pueden diferir en gran medida con respecto a los que hemos obtenido para $f(z) = z^2$.

En este capítulo nos centraremos en estudiar el conjunto de puntos que ejercen de frontera entre las distintas áreas de convergencia de las órbitas de puntos bajo una función f polinómica. Estos conjuntos frontera serán los que llamaremos **conjuntos de Julia**.

3.2. Puntos fijos y periódicos: Atractores y Repulsores

Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función derivable y sea $z \in \mathbb{C}$. Como hemos visto en la introducción de esta sección, estamos interesados en estudiar el comportamiento asintótico de la órbita $\{f^{(n)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$, así como de las órbitas de los puntos cercanos a z . Es decir, nos preguntaremos cuando $z, w \in \mathbb{C}$ sean puntos próximos, si las sucesiones $\{f^{(n)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{f^{(n)}(w)\}_{n=0}^{\infty}$ convergen al mismo punto cuando $n \rightarrow \infty$.

Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función derivable y $z \in \mathbb{C}$. Consideramos la órbita $\{f^{(n)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$. Pueden ocurrir las siguientes situaciones:

- a) La sucesión $\{f^{(n)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ es convergente y, por tanto, es acotada.
- b) La sucesión $\{f^{(n)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ está acotada pero no es convergente.
- c) La sucesión $\{f^{(n)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ no está acotada.

Ejemplo 3.2.1 En el ejemplo de la Sección 3.1 considerábamos la función entera $f(z) = z^2$ y deducíamos que, si $z \in \mathbb{C}$, entonces:

- a) Si $|z| < 1$, entonces $\{f^{(n)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ es convergente al origen.
- b) Si $|z| = 1$, la sucesión $\{f^{(n)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ está acotada pero no converge (excepto si $z = 1$).
- c) Si $|z| > 1$, la sucesión $\{f^{(n)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ no está acotada.

Definición 3.2.1 Sea z_0 un punto fijo de la función f

- Diremos que z_0 es un **punto atractor** si existe un $r > 0$ tal que para todo $z \in B(z_0, r)$, la sucesión $\{f^{(n)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ converge a z_0 .
- Diremos que z_0 es un **punto repulsor** si existe un $r > 0$ tal que para todo $z \in B(z_0, r)$ con $z \neq z_0$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(n)}(z) \notin B(z_0, r)$.

Teorema 3.2.1 Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ derivable y z_0 un punto fijo de f . Entonces:

- a) Si $|f'(z_0)| < 1$, z_0 es atractor.
- b) Si $|f'(z_0)| > 1$, entonces z_0 es un repulsor.

Prueba:

a) Supongamos en primer lugar que $|f'(z_0)| < 1$. Sea $\rho \in]|f'(z_0)|, 1[$, sabemos que existe un $r > 0$ tal que si $z \in B(z_0, r)$, entonces:

$$|f(z) - f(z_0)| = |f(z) - z_0| \leq \rho|z - z_0| \leq \rho r < r.$$

Como consecuencia se deduce que $f(z) \in B(z_0, r)$. Por tanto, aplicando reiteradamente la desigualdad anterior deducimos que:

$$|f^{(n)}(z) - z_0| \leq \rho^n r.$$

Ahora bien, como $\rho < 1$ se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(z) = z_0$ para todo $z \in B(z_0, r)$, es decir que el punto fijo z_0 es un atractor.

b) Consideramos ahora un $\rho \in]1, |f'(z_0)|[$ y sea $r > 0$ tal que para todo $z \in B(z_0, r)$ se cumple que

$$|f(z) - z_0| \geq \rho|z - z_0|.$$

Supongamos por reducción al absurdo que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $f^{(n)}(z) \in B(z_0, r)$. Por la desigualdad anterior aplicada recursivamente deducimos que:

$$|f^{(n)}(z) - z_0| \geq \rho^n |z - z_0|.$$

Esta desigualdad implica que el $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(z) = \infty$ lo que contradice que $f^{(n)}(z) \in B(z_0, r)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, debe existir un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(n)}(z) \notin B(z_0, r)$ y, por tanto, z_0 es un punto fijo repulsor.

□

Nota 3.2.1 En el caso en que $|f'(z_0)| = 1$ con z_0 un punto fijo de una función derivable f , entonces z_0 puede ser un punto atractor, repulsor o ninguno de los anteriores. En este último caso, se dirá que z_0 es un **punto fijo neutro**.

Ejemplo 3.2.2 En el Ejemplo 3.1.1 estudiamos de forma directa los puntos fijos de la función $f(z) = z^2$ y el comportamiento de las órbitas $\{f^{(n)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ en función del $|z|$.

Sin embargo, usando el Teorema 3.2.1 y el cálculo de derivadas podemos comprobar las conclusiones que obtuvimos en el ejemplo. Para ello, procederemos del siguiente modo:

Recordemos que los puntos fijos de la función $f(z) = z^2$ eran $z_0 = 0$ y $z_1 = 1$. Notamos que la derivada de la función $f(z)$ es $f'(z) = 2z$; por tanto, aplicando el Teorema 3.2.1 obtenemos que:

- Como $f'(z_0) = f'(0) = 0 < 1$, deducimos que el punto fijo $z_0 = 0$ es un punto fijo atractor.
- Como $f'(z_1) = f'(1) = 2 > 1$ deducimos que el punto fijo $z_1 = 1$ es un punto fijo repulsor.

Definición 3.2.2 Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ se llama ***p*-periódico** (con $p \in \mathbb{N}$) si $f^{(p)}(z_0) = z_0$. Al valor mínimo $p \in \mathbb{N}$ para el que se satisface que $f^{(p)}(z_0) = z_0$ se le llama **periodo** de z_0

Proposición 3.2.3 Sea z_0 un punto *p*-periódico de f y sea $z_n = f^{(n)}(z_0)$ para $n \in \{0, \dots, p-1\}$, entonces:

$$[f^{(p)}]'(z_0) = \prod_{n=0}^{p-1} f'(z_n).$$

Prueba:

El razonamiento de esta prueba se sigue de un proceso recursivo en el que aplicamos reiteradamente la regla de la cadena.

$$[f^{(p)}]'(z_0) = f'(f^{(p-1)}(z_0)) \cdot [f^{(p-1)}]'(z_0) \stackrel{\text{Recursivamente}}{=} \prod_{n=0}^{p-1} f'(z_n).$$

□

Nota 3.2.2 Observamos que si z_0 es un punto *p*-periódico con órbita $\{z_0, z_1, \dots, z_{p-1}\}$, entonces z_1 es también un punto periódico de periodo *p* y su órbita es la misma que la de z_0 debido a que:

$$f^{(p-1)}(z_1) = f^{(p-1)}(f(z_0)) = f^{(p)}(z_0) = z_0$$

Consecuentemente, para todo $k \in \{1, \dots, p-1\}$, se tendrá que:

$$[f^{(p)}]'(z_k) = \prod_{n=0}^{p-1} f'(z_n)$$

Observamos que si tenemos un punto *p*-periódico $z_0 \in \mathbb{C}$ se tiene que $f^{(p)}(z_0) = z_0$. Por consiguiente z_0 será un punto fijo para la función $f^{(p)}$ y, por tanto, podemos aplicar el Teorema 3.2.1 para caracterizar el carácter de este punto periódico. Esta caracterización se concreta en la siguiente definición:

Definición 3.2.4 Sea $\{z_k = f^{(k)}(z_0)\}_{k=0}^{p-1}$ una órbita periódica de periodo p . A cada uno de sus puntos z_k se llaman:

- **Atractores** si $|[f^{(p)}]'(z_0)| < 1$.
- **Repulsores** si $|[f^{(p)}]'(z_0)| > 1$.
- **Neutros** si $|[f^{(p)}]'(z_0)| = 1$.

Ejemplo 3.2.3 En el Ejemplo 3.2.2 hemos estudiado el carácter de los puntos fijos pero también resulta interesante comprobar el carácter de los puntos periódicos. En el Ejemplo 3.1.1 hemos probado que los puntos p -periódicos de la función $f(z) = z^2$ son de la forma:

$$z_n = e^{2\pi i \frac{n}{2^p-1}} \quad \text{para } n \in \{0, \dots, 2^p - 2\}.$$

Para ello, suponemos que $z_0 \in \mathbb{C}$ es un punto periódico de periodo p y denotamos por $z_j = f^{(j)}(z_0)$ con $j \in \{0, \dots, p-1\}$ a la órbita de z_0 . Estudiamos su derivada, $[f^{(p)}]'(z_0)$.

$$[f^{(p)}]'(z) = [f(f^{(p-1)})]'(z) = f'(f^{(p-1)}(z))[f^{(p-1)}]'(z) = \prod_{j=0}^{p-1} f'(f^{(j)}(z)).$$

Si nos centramos en $z = z_0$ un punto periódico de periodo p , deducimos:

$$[f^{(p)}]'(z_0) = \prod_{j=0}^{p-1} f'(f^{(j)}(z_0)) = \prod_{j=0}^{p-1} f'(z_j) = [f^{(p)}]'(z_j).$$

Por otro lado, sabemos que nuestra función es $f(z) = z^2$, por tanto su derivada vale $f'(z) = 2z$. Entonces:

$$[f^{(p)}]'(z_0) = \prod_{j=0}^{p-1} f'(f^{(j)}(z_0)) = \prod_{j=0}^{p-1} f'(z_j) = \prod_{j=0}^{p-1} (2z_j) = 2^p \prod_{j=0}^{p-1} z_j.$$

Como sabemos que $|z_j| = 1$ por estar en el disco unidad, deducimos que para todo $j \in \{0, \dots, p-1\}$ se tiene que:

$$|[f^{(p)}]'(z_j)| = 2^p > 1.$$

Consecuentemente, los puntos periódicos de la función $f(z) = z^2$ son todos puntos periódicos repulsores.

En la Nota 3.3.3 veremos que los términos introducidos en la Definición 3.2.4 de órbitas atractoras y repulsoras concuerda con la noción de atracción o repulsión para órbitas de puntos que empiezan cerca de un punto de dicha órbita periódica.

3.3. Conjuntos de Julia para funciones polinómicas

Notación 3.3.1 *A lo largo de toda esta sección supondremos que la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función polinómica. Es decir que:*

$$f(z) = \sum_{j=0}^n c_j z^j \quad \text{para algunos } c_j \in \mathbb{C} \forall j = 1, \dots, n \text{ con } c_n \neq 0.$$

Definición 3.3.1 *Se define el **conjunto de Julia** de una función polinómica f como la clausura del conjunto formado por todos los puntos periódicos repulsivos de f . Lo denotaremos por $J(f)$. Del mismo modo, al complementario de este conjunto, $F(f) = \mathbb{C} \setminus J(f)$, lo llamamos **conjunto de Fatou** de f .*

El resto de la sección se dedicará a probar algunas de las propiedades que presentan los conjuntos de Julia para funciones polinómicas.

Entre ellas probaremos que son conjuntos no vacíos, compactos, que no contienen puntos aislados, que son conjuntos nunca-densos, su cardinal es el mismo que el del continuo y que son invariantes bajo la acción de f y $f^{(-1)}$, es decir que $f(J(f)) = J(f)$ y $f^{(-1)}(J(f)) = J(f)$ donde f denota una función polinómica de grado n .

Además, realizaremos un estudio en profundidad de las órbitas periódicas bajo una función f polinómica. Respecto a las órbitas periódicas atractoras de la función f demostraremos que solo pueden existir una cantidad finita de estas las cuales se encuentran que el conjunto de Fatou $F(f)$. Por otro lado, probaremos que las órbitas periódicas repulsoras se encuentran en el conjunto de Julia.

Sin embargo, para probar estos resultados definiremos un conjunto auxiliar $J_0(f)$ a través del concepto de sucesión normal de funciones complejas introducido en la Definición 2.2.1. Mediante técnicas de variable compleja probaremos las propiedades anteriores para el conjunto auxiliar $J_0(f)$ y terminaremos el capítulo probando la igualdad $J_0(f) = J(f)$ siendo este último el conjunto de Julia de f , alcanzando así el objetivo propuesto.

Definición 3.3.2 *De acuerdo con la Definición 2.2.1 definimos los conjunto siguientes:*

$$J_0(f) = \{z \in \mathbb{C} : \{f^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \text{ no es normal en } z\},$$

$$F_0(f) = \{z \in \mathbb{C} : \{f^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \text{ es normal en } z\}.$$

Nota 3.3.1 Observamos que $\mathbb{C} = J_0(f) \cup F_0(f)$. Además, si $z_0 \in F_0(f)$ sabemos que $\{f^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ es normal en z_0 y, por la Definición 2.2.1 sabemos que existe un entorno V de z_0 tal que $\{f^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ es también normal en este entorno. Por tanto, $F_0(f)$ es un conjunto abierto y como $F_0(f) = \mathbb{C} \setminus J_0(f)$ deducimos que el conjunto $J_0(f)$ es un conjunto cerrado.

Notación 3.3.2 Para simplificar la notación en esta sección denotaremos por $J_0 = J_0(f)$ y por $F_0 = F_0(f)$ siempre que no de pie a confusión.

Lema 3.3.1 Sea $f(z) = \sum_{j=0}^n c_j z^j$ con $c_n \neq 0$ y sea $r_0(f) = \max \left\{ 1, \frac{2 + \sum_{j=0}^{n-1} |c_j|}{|c_n|} \right\}$, entonces para $|z| > r_0(f)$ se cumple que $|f(z)| > 2|z|$. Consecuentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(z) = \infty \text{ uniformemente en } V = \{z : |z| > r_0(f)\} = \mathbb{C} \setminus B(0, r_0(f)).$$

Prueba:

Para $|z| > r_0(f)$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \sum_{j=0}^n c_j z^j \right| = \left| \sum_{j=0}^{n-1} c_j z^j + c_n z^n \right| = \\ &= \left| z^{n-1} \left(c_n z + \sum_{j=0}^{n-1} c_j z^{j-n+1} \right) \right| \underset{\text{D.T}}{\geq} |z|^{n-1} \left(|c_n| |z| - \sum_{j=0}^{n-1} |c_j| |z|^{j-n+1} \right). \end{aligned}$$

Como $j \in \{0, \dots, n-1\}$ sabemos que $j - n + 1 < 0$, por tanto $-|z|^{j-n+1} > 1^{j-n+1} = 1(*)$.

Por otro lado, tenemos que $|z| > r_0(f) \geq \left\{ \frac{2 + \sum_{j=0}^{n-1} |c_j|}{|c_n|} \right\} (**)$. Por tanto:

$$|c_n| |z| - \sum_{j=0}^{n-1} |c_j| |z|^{j-n+1} \underset{*}{\geq} |c_n| |z| - \sum_{j=0}^{n-1} |c_j| \underset{**}{\geq} |c_n| \left(\frac{2 + \sum_{j=0}^{n-1} |c_j|}{|c_n|} \right) - \sum_{j=0}^{n-1} |c_j| = 2.$$

Por tanto, deducimos lo siguiente:

$$|f(z)| \geq |z|^{n-1} \left(|c_n| |z| - \sum_{j=0}^{n-1} |c_j| |z|^{j-n+1} \right) > 2|z|^{n-1} \underset{|z|>1}{>} 2|z|.$$

Por tanto, podemos deducir que para un $z \in \mathbb{C}$ con $|z| > r_0(f)$ se tiene que $|f(z)| > 2|z| > r_0(f)$, por tanto podemos volver a aplicar la cadena de desigualdades a $f(z)$ y obtener lo siguiente:

$$|f^{(2)}(z)| = |f(f(z))| > 2|f(z)| > 2^2|z| > r_0(f).$$

Razonando por inducción podemos deducir que:

$$|f^{(n)}(z)| > 2^n |z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty, \text{ es decir, } \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(z) = \infty \text{ uniformemente en } V.$$

□

Corolario 3.3.1 J_0 es un conjunto compacto.

Prueba:

Por la Definición 2.2.1 y el Lema 3.3.1 sabemos que la sucesión $\{f^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ es normal en el conjunto $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r_0(f)\}$ ya que $\{f^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a ∞ en los compactos de V . Por tanto, deducimos que $J_0 \subset B(0, r_0(f))$. Como este conjunto es acotado también lo será J_0 y, como hemos visto que J_0 es cerrado en la Nota 3.3.1, deducimos que J_0 es un conjunto compacto de \mathbb{C} .

□

Teorema 3.3.1 J_0 es un conjunto no vacío.

Prueba:

Los puntos fijos de la función f son las n posibles soluciones z_j con $j \in \{1, \dots, n\}$ de la ecuación $f(z) = z$. Consideremos $r_1 > r_0(f)$ siendo $r_0(f)$ la cota que aparece en el enunciado del Lema 3.3.1.

Es claro que el disco abierto de centro 0 y radio r_1 , $U(0, r_1)$, contiene un $z_1 \in U(0, r_1)$ tal que $|z_1| > r_0(f)$. Por tanto, siguiendo la prueba del Lema 3.3.1 deducimos que:

$$|f^{(k)}(z_1)| \geq 2^k |z_1| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty.$$

Supongamos por reducción al absurdo que $J_0 = \emptyset$, entonces la sucesión $\{f^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ debe ser normal en todo \mathbb{C} . Consideramos z_0 un punto fijo de la función f y z_1 el punto anterior y tomamos el segmento $[z_0, z_1]$.

Notamos que para cada punto $z \in [z_0, z_1]$ la sucesión $\{f^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ es normal en z . Por definición, existe un entorno abierto del punto, que denotamos por $U(z, \varepsilon_z)$, para el cual la sucesión sigue siendo normal. Así, deducimos que:

$$[z_0, z_1] \subset \bigcup_{z \in [z_0, z_1]} U(z, \varepsilon_z).$$

Como el conjunto $[z_0, z_1]$ es compacto, tenemos por la definición que existe un subrecubrimiento finito, es decir que existen $z_{n_1}, \dots, z_{n_l} \in [z_0, z_1]$ con $z_{n_1} = z_0$ y $z_{n_l} = z_1$ tales que:

$$[z_0, z_1] \subset \bigcup_{k=1}^l U(z_{n_k}, \varepsilon_{z_{n_k}}).$$

Además, el segmento $[z_0, z_1]$ también es conexo, por tanto si dividimos la unión $\bigcup_{k=1}^l U(z_{n_k}, \varepsilon_{z_{n_k}})$ en dos subfamilias:

$$\bigcup_{k=1}^{l_1} U(z_{n_k}, \varepsilon_{z_{n_k}}) \text{ y } \bigcup_{k=1}^{l_2} U(z_{n_k}, \varepsilon_{z_{n_k}}) \text{ de forma que:}$$

$$\bigcup_{k=1}^{l_1} U(z_{n_k}, \varepsilon_{z_{n_k}}) \cup \bigcup_{k=1}^{l_2} U(z_{n_k}, \varepsilon_{z_{n_k}}) = \bigcup_{k=1}^l U(z_{n_k}, \varepsilon_{z_{n_k}}),$$

entonces las dos subfamilias deben tener intersección no vacía.

Ahora bien, como la sucesión es normal en z_0 existirá subsucesión de $\{f^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ en $U(z_0, \varepsilon_{z_1})$ que convergerá uniformemente en compactos hacia una función holomorfa g_0 que será finita debido a que z_0 está en $U(z_0, \varepsilon_{z_1})$.

Como $U(z_1, \varepsilon_1) \cap U(z_{n_j}, \varepsilon_{z_{n_j}}) \neq \emptyset$ para algún $j \in \{1, \dots, l\}$ y como la sucesión es normal en z_{n_j} existirá una subsucesión de la subsucesión anterior que convergerá en compactos hacia una función holomorfa g_j o hacia ∞ . Sin embargo, como la intersección entre las dos bolas es distinta del vacío, podemos encontrar un compacto en esta intersección. En este compacto, tenemos que la diferencia $g_1 - g_j$ vale 0. Consecuentemente, por el Teorema de Prolongación Analítica (Teorema 2.2.5) tendremos que las dos funciones son iguales en la unión de los dos conjuntos.

Este proceso lo podemos iterar una cantidad finita de veces para concluir que el límite de la sucesión $\{f^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ debe ser el mismo en z_0 y en z_1 , pero esto contradice el hecho que z_0 sea un punto fijo de la función f y de que las iteradas de z_1 cumplan que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(z_1) = \infty.$$

Por tanto, se debe cumplir que $J_0 \neq \emptyset$.

□

Nota 3.3.2 De la prueba del teorema anterior se deduce que el segmento que une un punto fijo z_0 de la función f donde $\{f^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ sea normal en z_0 con un punto $z \in \mathbb{C}$ cuyas iteradas divergen hacia el infinito siempre tiene intersección no vacía con el conjunto $J_0(f)$.

Notación 3.3.3 Para evitar un sobrecargo de notación, denotaremos las sucesiones por

$$\{f^{(n)}\}_n := \{f^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}.$$

Teorema 3.3.2 Los conjuntos J_0 y F_0 son f -invariantes y $f^{(-1)}$ - invariantes. Esto es:

$$J_0 = f^{(-1)}(J_0) = f(J_0),$$

$$F_0 = f^{(-1)}(F_0) = f(F_0),$$

donde si $A \subset \mathbb{C}$, $f^{(-1)}(A)$ denota el conjunto siguiente:

$$f^{(-1)}(A) = \{z \in \mathbb{C} : \exists w \in A \text{ con } f(z) = w\}.$$

Prueba:

Supongamos que demostramos que $F_0 = f^{(-1)}(F_0) = f(F_0)$, entonces tendremos que:

$$f^{(-1)}(J_0) = f^{(-1)}(\mathbb{C} \setminus F_0) = \mathbb{C} \setminus F_0 = J_0.$$

Además, como f es sobreyectiva se tiene que para todo conjunto $A \subset \mathbb{C}$, $f(f^{(-1)}(A)) = A$. Aplicando esta relación a la igualdad anterior, se deduce que:

$$J_0 = f(f^{(-1)}(J_0)) = f(J_0).$$

- Veamos en primer lugar que $f^{(-1)}(F_0) \subset F_0$.

Para ello, fijado $z_0 \in f^{(-1)}(F_0)$ tenemos que demostrar que $\{f^{(n)}\}_n$ es normal en z_0 , es decir que existe un entorno U de z_0 tal que $\{f^{(n)}\}_n$ es normal en este entorno.

Como $z_0 \in f^{(-1)}(F_0)$ sabemos que $f(z_0) \in F_0$, por tanto sabemos que existe un entorno V de $f(z_0)$ para el cual la sucesión $\{f^{(n)}\}_n$ es normal en V . Definimos pues $U = f^{(-1)}(V)$ que es entorno de z_0 por la continuidad de la función f .

Sea $\{f^{(n')}\}_{n'}$ una subsucesión de $\{f^{(n)}\}_n$. Como la sucesión sabemos que es normal en V podemos considerar $\{f^{(n''-1)}\}_{n''}$ una subsucesión de $\{f^{(n'-1)}\}_{n'}$ uniformemente convergente en los compactos de V .

Si $K \subset U$ es un compacto sabemos que $f(K)$ también es un compacto por ser f continua y, además, tenemos que $f(K) \subset f(U) = V$, por tanto la subsucesión $\{f^{(n''-1)}\}_{n''}$ es uniformemente convergente en $f(K)$ y, consecuentemente, deducimos que la subsucesión $\{f^{(n'')}\}_{n''}$ es uniformemente convergente en U .

Finalmente, como f es sobreyectiva, al aplicar f al resultado demostrado deducimos que $F_0 \subset f(F_0)$.

- Veamos ahora que $f(F_0) \subset F_0$.

Para ello tenemos que comprobar que dado $z_0 \in F_0$ existe un entorno abierto U de $f(z_0)$ para el cual la sucesión $\{f^{(n)}\}_n$ es normal. Como $z_0 \in F_0$ sabemos que existen dos entornos abiertos acotados V_0 y V_1 tales que $z_0 \in V_1 \subset \overline{V_1} \subset V_0$ y $\{f^{(n)}\}_n$ es una sucesión normal en V_0 . Por el Teorema 2.2.1 y por la continuidad de f sabemos que $U = f(V_1)$ es un entorno abierto de $f(z_0)$.

Así, dada $\{f^{(n')}\}_{n'}$ una subsucesión de $\{f^{(n)}\}_n$ consideramos $\{f^{(n''+1)}\}_{n''}$ una subsucesión de $\{f^{(n'+1)}\}_{n'}$ que converja uniformemente en los compactos de V_0 y sea K un conjunto compacto de $U = f(V_1)$, entonces el conjunto $K_0 = f^{(-1)}(K) \cap \overline{V_1}$ es un compacto de V_0 (por ser intersección de cerrados y acotado por serlo V_1), por tanto sabemos que $\{f^{(n''+1)}\}_{n''}$ converge uniformemente en K_0 y se deduce que $\{f^{(n'')}\}_{n''}$ es uniformemente convergente en $f(K_0) = f(f^{(-1)}(K) \cap \overline{V_1}) = K$.

Esta igualdad entre conjuntos se debe a que si $u \in K$, como $K \subset f(V_1)$, entonces existe un $v_1 \in V_1$ tal que $u = f(v_1) \in K$. Por tanto, $v_1 \in f^{(-1)}(K) \cap V_1 \subset f^{(-1)}(K) \cap \overline{V_1}$. Esta inclusión implica que $u = f(v_1) \in f(f^{(-1)}(K) \cap \overline{V_1})$

Finalmente, hemos probado que $f^{(-1)}(F_0) \subset F_0 = f(F_0)$. Aplicando $f^{(-1)}$ a la inclusión $f(F_0) \subset F_0$, deducimos que:

$$F_0 \subset f^{(-1)}(f(F_0)) = f^{(-1)}(F_0),$$

que era la última inclusión de conjuntos que faltaba por probar para completar la prueba. \square

A continuación, estudiaremos con profundidad las órbitas de los puntos periódicos de periodo p . En particular, probaremos que dado un punto periódico z_0 con periodo p , toda su órbita $\{z_0, z_1, \dots, z_{p-1}\}$ se encuentra en F_0 en el caso de que z_0 sea un punto periódico

atractor y en J_0 en el caso en que z_0 sea un punto periódico repulsor.

Estos teoremas son fundamentales para probar que el conjunto de Julia $J(f)$ y el conjunto J_0 son iguales ya que nos permite demostrar una de las inclusiones.

Teorema 3.3.3 F_0 contiene todas las órbitas periódicas atractoras de f .

Prueba:

Sea p el periodo de z_0 bajo f y denotamos su órbita por $z_j = f^{(j)}(z_0)$ para $0 \leq j < p$. Es suficiente con probar el resultado para z_0 , es decir probar que $z_0 \in F_0$. Esto se debe a que, por la Proposición 3.2.3, todos los z_j con $j \in \{0, \dots, p-1\}$ son puntos periódicos atractores.

Como la órbita p -periódica es atractora sabemos que $|[f^{(p)}]'(z_0)| < 1$ por tanto podemos fijar un $s \in]|[f^{(p)}]'(z_0)|, 1[$ y un $d > \max\{|[f^{(j)}]'(z_0)| : 0 \leq j < p\}$. Fijamos un $\delta > 0$ suficientemente pequeño para que se cumpla que $\forall z \in V = U(z_0, \delta)$:

$$|f^{(j)}(z) - z_j| < d|z - z_0| \quad 0 \leq j < p.$$

$$|f^{(p)}(z) - z_0| < s|z - z_0| \underset{s < 1}{<} \delta.$$

Por tanto, tenemos que $f^{(p)}(z) \in V$ y, usando un proceso recursivo se puede probar que $f^{(mp)}(z) \in V$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Sea $\{f^{(k')}\}_{k'}$ una subsucesión de $\{f^{(k)}\}_k$. Para algún j (con $0 \leq j < p$) tiene que existir una subsucesión $\{f^{(k'')}\}_{k''}$ de $\{f^{(k')}\}_{k'}$ de modo que $k'' \equiv j \pmod{p}$. Como vamos a tomar $k'' \rightarrow \infty$ y tenemos que $k'' = pm'' + j$, entonces haremos tender $m'' \rightarrow \infty$. Así, si $z \in V$, entonces:

$$\begin{aligned} |f^{(k'')}(z) - z_j| &= |f^{(m''p+j)}(z) - z_j| = |f^{(j)}(f^{(m''p)}(z)) - z_j| < \\ &< d|f^{(m''p)}(z) - z_0| < ds^{m''}|z - z_0| \xrightarrow{m'' \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Por tanto, la subsucesión $\{f^{(k'')}\}_{k''}$ converge uniformemente en V a la función constante $f(z) \equiv z_j$. Consecuentemente, $z_0 \in F_0$. □

Nota 3.3.3 Cabe destacar que en la prueba del Teorema 3.3.3 queda intrínseco el significado de las órbitas periódicas atractoras. Supongamos, por ejemplo, que 3 es el periodo de z_0 bajo f , es decir que la órbita de z_0 será $\{z_0, f(z_0), f^{(2)}(z_0)\}$.

De la prueba se deduce que la subsucesión $\{f^{(3m)}\}_m$ converge uniformemente en V a la función constante $f(z) \equiv z_0$, mientras que la subsucesión $\{f^{(3m+1)}\}_m$ converge uniformemente en V a la función constante $f(z) \equiv z_1$ y, por último, la subsucesión $\{f^{(3m+2)}\}_m$ converge uniformemente en V a la función constante $f(z) \equiv z_2$.

Esto implica que para todo punto $w \in \mathbb{C}$ situado en un entorno suficientemente pequeño del punto periódico z_0 , la órbita $\{f^{(k)}(w)\}_k$ irá saltando entre entornos cercanos a z_0 , $f(z_0)$ y $f^{(2)}(z_0)$ y vuelta a z_0 sucesivamente.

Teorema 3.3.4 J_0 contiene todas las órbitas periódicas repulsoras de f .

Prueba:

Sea z_0 un punto repulsor periódico de f con periodo p . Vamos a probar que $\{f^{(n)}\}_n$ no es normal en z_0 . En primer lugar observamos que z_0 es un punto fijo de la función polinómica $g = f^{(p)}$.

Supongamos por reducción al absurdo que la sucesión $\{g^{(k)}\}_k$ es normal en z_0 . Por tanto, existe un entorno abierto V de z_0 y una subsucesión $\{g^{(k')}\}_{k'}$ de $\{g^{(k)}\}_k$ que converge uniformemente en los compactos de V .

Como z_0 es un punto fijo de g sabemos que la función límite g_0 de $\{g^{(k')}\}_{k'}$ debe ser finita y holomorfa en V . Esto se debe a que $g^{(k')}(z_0) = z_0$ y por tanto el límite tiene que cumplir las mismas propiedades que cumplía la función $g^{(k)}$. Por el Teorema 2.2.2 sabemos que tendremos el mismo resultado para la función $g'_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} [g^{(k')}]'$.

Ahora bien, observamos lo siguiente:

$$(g \circ \dots \circ g)'(z_0) = g'(g^{(k'-1)}(z_0))(g^{(k'-1)}(z_0))' = g'(z_0)(g^{(k'-1)}(z_0))' = \dots = (g'(z_0))^{k'}.$$

Teniendo en cuenta que z_0 es un punto fijo repulsor de la función g sabemos que $|g'(z_0)| > 1$, por tanto tenemos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [g^{(k')}]'(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} (g'(z_0))^{k'} = \infty.$$

Esto resulta en una contradicción con el hecho de que $g'_0(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} [g^{(k')}]'(z)$ debe ser finito para todo $z \in V$ y esta contradicción proviene de suponer que la sucesión $\{g^{(k)}\}_k$ es normal en z_0 . Consecuentemente, tenemos que $z_0 \in J_0$.

□

Nota 3.3.4 Por la Definición 3.3.1, el conjunto $J(f)$ se definía como la clausura del conjunto formado por todos los puntos periódicos repulsores de f . Por tanto, como conclusión del Teorema 3.3.4, se sigue que:

$$J(f) \subset \overline{J_0} \underset{\text{cerrado por Nota 3.3.1}}{=} J_0.$$

A continuación, vamos a estudiar en profundidad los puntos fijos atractores de la función f . Además, este estudio se podrá extender a las órbitas periódicas atractoras y, entre otras propiedades, nos permitirá demostrar que para una función polinómica f de grado n solo existen, como mucho, $n - 1$ órbitas periódicas atractoras distintas.

Para ello, es necesario introducir el concepto de cuenca de atracción de un punto fijo que presentamos a continuación:

Definición 3.3.3 Sea z_0 un punto fijo de la función f . Llamamos **cuenca de atracción** de z_0 al siguiente conjunto:

$$A(f, z_0) = \{z \in \mathbb{C} : \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(z) = z_0\}.$$

Nota 3.3.5 A partir de la Definición 3.3.3 se sigue de forma directa que:

$$A(f, z_0) = f^{(-1)}(A(f, z_0)) = f(A(f, z_0)).$$

Si consideramos una función polinómica $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y la extendemos a $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dando el valor $f(\infty) = \infty$ sabemos, por el Lema 3.3.1, que el valor ∞ se considera un punto fijo y será atractor si existe un $R > 0$ tal que $\forall z \in \mathbb{C}$ con $|z| > R$ se tiene que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(z) = \infty$.

Por tanto, podemos definir en este caso la cuenca de atracción como:

$$A(f, \infty) = \{z \in \mathbb{C} : \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(z) = \infty\}.$$

Observamos que, por el Lema 3.3.1, la cuenca de atracción $A(f, \infty) \neq \emptyset$ debido a que:

$$\mathbb{C} \setminus B(0, r_0(f)) \subset A(f, \infty).$$

Proposición 3.3.4 Si z_0 es un punto fijo atractor de f , entonces $A(f, z_0)$ es un conjunto abierto y, además, $A(f, z_0) \subset F_0$.

Prueba:

En primer lugar, supongamos que $z_0 \neq \infty$. Como z_0 es un punto fijo atractor sabemos que $|f'(z_0)| < 1$. Fijamos un $s > 0$ tal que $|f'(z_0)| < s < 1$. Para este valor $s > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $z \in U(z_0, \delta) = V$ se tiene que:

$$\frac{|f(z) - z_0|}{|z - z_0|} \leq s \implies |f(z) - z_0| < s\delta < \delta. \quad \text{Por tanto: } f(z) \in U(z_0, \delta).$$

$$|f^{(2)}(z) - z_0| = |f(f(z)) - z_0| < s|f(z) - z_0| < s^2\delta < \delta.$$

Aplicando el mismo razonamiento recursivamente, obtenemos

$$|f^{(n)}(z) - z_0| < s^n\delta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{Por tanto: } \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(z) = z_0.$$

A partir de esto se deduce que $z \in A(f, z_0)$ y, consecuentemente que $V \subset A(f, z_0)$.

Además, usando un argumento parecido al que hemos usado en la demostración del Teorema 3.3.3, se demuestra trivialmente que la sucesión $\{f^{(n)}\}_n$ converge uniformemente en V a z_0 , es decir que $V \subset F_0$.

Finalmente, dado $z \in A(f, z_0)$ sabemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(z) = z_0$, por tanto existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geq k_0$ se tiene que $|f^{(k)}(z) - z_0| < \delta$, es decir que $f^{(k)} \in U(z_0, \delta) = V$ para todo $k \geq k_0$ o, equivalentemente, que $z \in f^{(-k)}(V)$. Por tanto:

$$A(f, z_0) = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{(-k)}(V) \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{(-k)}(F_0) \stackrel{f^{(-1)}(F_0)=F_0}{=} F_0.$$

Además, esta cadena de inclusiones demuestra que $A(f, z_0)$ es una abierto por ser unión numerable de antimágenes de abiertos por funciones continuas.

Supongamos que $z_0 = \infty$ y escogemos $V = \{z : |z| > r_0(f)\}$ siendo $r_0(f) = \max \left\{ 1, \frac{2 + \sum_{j=0}^{n-1} |c_j|}{|c_n|} \right\}$.

En el Lema 3.3.1, se prueba que el conjunto $V \subset F_0$, por tanto, siguiendo el argumento anterior deducimos que:

$$A(f, \infty) = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{(-k)}(V) \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{(-k)}(F_0) \stackrel{f^{(-1)}(F_0)=F_0}{=} F_0.$$

□

Notación 3.3.4 Si $z \in F_0$ denotamos por $C(f, z)$ la componente conexa de F_0 que contiene a z .

Nota 3.3.6 Sea z_0 un punto p -periódico atractor con órbita $\{z_j = f^{(j)}(z_0)\}_{j=0}^{p-1}$. Se tiene que:

$$C(f, z_j) \subset A(f^{(p)}, z_j) \text{ para } j \in \{0, \dots, p-1\}.$$

En caso contrario, existiría un punto $\tilde{z} \in \partial A(f^{(p)}, z_j) \cap C(f, z_j) \subset F_0$. Para todo entono $V \subset C(f, z_0)$ de \tilde{z} la sucesión $\{f^{(kp)}(\tilde{z})\}_{k=1}^{\infty}$ convergerá a z_j en $V \cap A(f^{(p)}, z_j)$ pero queda fuera de $A(f^{(p)}, z_j)$ en $V \setminus A(f^{(p)}, z_j)$. Esto contradice el hecho que $\tilde{z} \in F_0$ debido a que, entonces, la sucesión $\{f^{(kp)}(\tilde{z})\}_{k=1}^{\infty}$ no sería normal en \tilde{z} y, consecuentemente, $\tilde{z} \notin F_0$.

Como consecuencia se tiene que $C(f, z_j) \subset A(f^{(p)}, z_j)$ y, además, las componentes conexas tienen que ser disjuntas.

A continuación, nuestro objetivo será demostrar que la cantidad de órbitas periódicas atractoras distintas es finita. Esta demostración será fundamental para probar que el conjunto de Julia $J(f)$ y el conjunto $J_0(f)$ son iguales. Sin embargo, para demostrar este resultado necesitamos la definición de punto crítico de una función polinómica así como un lema técnico que relaciona los valores críticos de la función f con las componentes conexas de puntos en F_0 .

Definición 3.3.5 Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función y $z \in \mathbb{C}$. Decimos que z es un **punto crítico** de f si se cumple que $f'(z) = 0$. Al valor $w = f(z) \in \mathbb{C}$ lo llamaremos **valor crítico**.

Lema 3.3.2 Sea z_0 un punto periódico atractor de periodo p y sea $\{z_j = f^{(j)}(z_0)\}_{j=0}^{p-1}$ su órbita. El conjunto $E = \bigcup_{j=0}^{p-1} C(f, z_j)$ contiene, al menos, un valor crítico de f .

Prueba:

En primer lugar, por la Nota 3.3.6, se tiene que:

$$E = \bigcup_{j=0}^{p-1} C(f, z_j) \subset \bigcup_{j=0}^{p-1} A(f^{(p)}, z_j) \subset F_0$$

Para cada $0 \leq j < p$ denotaremos por $j' = j + 1 \pmod{p}$. Además, el conjunto $f(C(f, z_j))$ contiene a $z_{j'}$ y, por ser f continua y $C(f, z_j)$ un conexo, sabemos que $f(C(f, z_j))$ también es un conjunto conexo. Consecuentemente, se deduce que $f(C(f, z_j)) \subset C(f, z_{j'})$. Por tanto:

$$f(E) = f\left(\bigcup_{j=0}^{p-1} C(f, z_j)\right) = \bigcup_{j=0}^{p-1} f(C(f, z_j)) \subset \bigcup_{j=0}^{p-1} C(f, z_{j'}) = E \neq \mathbb{C}.$$

Por tanto deducimos que $f(E) \subset E$.

Supongamos por reducción al absurdo que no existe un valor crítico de f en E , es decir no existe un $w = f(z) \in E$ tal que $f'(z) = 0$.

En este caso, si para algún $z \in C(f, z_j)$ se tuviera que $f'(z) = 0$, entonces $f(z) \in C(f, z_{j'}) \subset E$ y, por tanto, existiría un valor crítico de f en E . Consecuentemente, $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in C(f, z_j)$ y, como es válido para todo $j \in \{0, \dots, p-1\}$, entonces $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in E$.

A continuación, veamos que la sucesión de funciones $\{g_k\}_k := \{f^{(-kp)}\}_k$ está bien definida y que forma una familia normal en un entorno simplemente conexo de z_0 .

Por el argumento anterior, sabemos que para todo $z \in E$ y para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$[f^{(k)}]'(z) = \prod_{j=0}^{k-1} f'(f^{(j)}(z)) \neq 0.$$

Por tanto, por el teorema de la función inversa (Teorema 2.2.3) sabemos que la función $f^{(kp)} = [f^{(p)}]^{(k)}$ (con $k \in \mathbb{N}$) es localmente invertible para cada $z \in C(f, z_0)$.

Consideramos $U \subset C(f, z_0)$ un entorno simplemente conexo de z_0 . Por el Teorema 2.2.6, la función inversa de $f^{(kp)}$, g_k , obtenida partiendo de $g_k(z_0) = z_0$ y su prolongación analítica a todo U está unívocamente determinada y es analítica.

Además, por el Teorema de Montel (Teorema 2.2.7), la sucesión $\{g_k\}_k$ de funciones holomorfas en U es normal ya que:

$$g_k(U) \subset C(f, z_0) \subset E \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Notamos que z_0 es un punto fijo repulsor para la sucesión $\{g_k\}_k = \{g_1^{(k)}\}_k$ ya que sabemos que

$$g_k(z_0) = f^{(-kp)}(z_0) = [f^{(p)}]^{(-k)}(z_0) = z_0. \quad \text{Entonces, } z_0 \text{ es punto fijo.}$$

Además, es repulsor ya que

$$|g_1'(z_0)| = \frac{1}{|[f^{(p)}]'(z_0)|} > 1.$$

Sin embargo, por el Teorema 3.3.4, esto implica que $\{g_k\}_k$ no es normal en z_0 lo cual contradice el argumento anterior en el que hemos probado que esta sucesión es normal. Esta contradicción proviene de suponer que $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in E$ lo cual se deduce de que no exista un $w = f(z) \in E$ tal que $f'(z) = 0$.

□

Teorema 3.3.5 *El número de órbitas periódicas atractoras diferentes es menor igual que $n - 1$ siendo n el grado del polinomio que define la función f .*

Prueba:

Supongamos que $\{z_{1,j}\}_{j=1}^{p_1}$ y $\{z_{2,j}\}_{j=1}^{p_2}$ son dos órbitas periódicas atractoras diferentes. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $C(f, z_{1,0})$ y $C(f, z_{2,0})$ contienen los valores críticos w_1 y w_2 respectivamente de f . Si $w_1 = w_2$, entonces tenemos que $C(f, z_{1,0}) = C(f, w_1) = C(f, z_{2,0})$ lo cual implica que:

$$z_{1,0} = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(kp_1)}(z_{2,0}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(kp_1 p_2)}(z_{2,0}) = z_{2,0}.$$

Y esto nos lleva a una contradicción porque $C(f, z_{1,0}) \cap C(f, z_{2,0}) = \emptyset$.

Por tanto, diferentes órbitas atractoras periódicas deben corresponder a diferentes valores críticos de f y de estos hay a lo sumo $n - 1$ por ser valores $w = f(z)$ donde $f'(z) = 0$ y ser f una función polinómica de grado n cuya derivada es también un polinomio de grado $n - 1$.

□

Teorema 3.3.6 *La cantidad de órbitas periódicas neutras es finito.*

Prueba

La prueba de este resultado no se realizará porque excede los contenidos del proyecto. Sin embargo, se puede encontrar en [BLA1].

□

Estos dos últimos teoremas nos indican que la cantidad de órbitas periódicas correspondientes a puntos periódicos atractores y neutros es finita. A continuación, probaremos un resultado interesante que relaciona las órbitas periódicas atractoras de una función polinómica f con los puntos críticos de esta función.

Este resultado se utilizará en secciones posteriores para estudiar las órbitas periódicas de periodo 2 para funciones polinómicas de la forma $f(z) = z^2 + c$ con $c \in \mathbb{C}$.

Proposición 3.3.6 *Si las órbitas de todos los puntos críticos de f no están acotadas, entonces no existen órbitas periódicas atractoras de f .*

Prueba:

Nuestra hipótesis implica que si z es un punto crítico de f , entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(z) = \infty$. Supongamos entonces que $\{z_j\}_{j=0}^{p-1}$ es una órbita p -periódica atractora y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $C(f, z_0)$ contiene el valor crítico $w = f(z)$ de f .

Como $C(f, z_0) \subset A(f^{(p)}, z_0)$ tenemos que:

$$z_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} [f^{(p)}]^{(k)}(w) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(kp)}(w) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(kp)}(f(z)) = \lim_{k \rightarrow \infty} [f^{(p)}]^{(k+1)}(z).$$

Y esto es una contradicción con nuestra hipótesis de partida que proviene de suponer que existe una órbita p -periódica atractora. □

Proposición 3.3.7 $J_0(f^{(m)}) = J_0(f)$ para todo $m \in \mathbb{N}$

Prueba:

En realidad en esta proposición lo que vamos a demostrar es que $F_0(f^{(m)}) = F_0(f)$.

\supseteq Vamos a probar que $F_0(f) \subseteq F_0(f^{(m)})$.

Sea $z_0 \in F_0(f)$. Supongamos que $\{f^{(k)}\}_k$ es una sucesión normal en un entorno abierto U de z_0 . Notamos que la subsucesión $\{[f^{(m)}]^{(k')}\}_{k'} = \{f^{(mk')}\}_{k'}$ es una subsucesión de $\{[f^{(m)}]^{(k)}\}_k$ que es, a su vez, una subsucesión de $\{f^{(k)}\}_k$.

Por tanto sabemos que existe una subsucesión $\{f^{(mk'')}\}_{k''}$ de $\{f^{(mk')}\}_{k'}$ que converge uniformemente en los compactos de U .

\subseteq Veamos ahora que $F_0(f^{(m)}) \subset F_0(f)$.

Sea $z_0 \in F_0(f^{(m)})$. Supongamos ahora que la sucesión $\{[f^{(m)}]^{(k)}\}_k$ es normal en un entorno abierto V de z_0 y sea $\{f^{(k')}\}_{k'}$ una subsucesión de $\{f^{(k)}\}_k$. Evidentemente, para algún $0 \leq r < m$ existe una subsucesión de $\{f^{(k')}\}_{k'}$ de la forma $\{f^{(mk''+r)}\}_{k''}$.

Esta subsucesión $\{f^{(mk'')}\}_{k''}$ contiene a su vez una nueva subsucesión $\{f^{(mk''')}\}_{k'''}$ que converge uniformemente en los compactos de U y, por continuidad de la función f , $\{f^{(mk'''+r)}\}_{k'''}$ también convergerá uniformemente en los compactos de U . □

Teorema 3.3.7 Consideremos f una función polinómica de grado $n > 1$ y sean $w \in J_0$ y U un entorno abierto de w . En este caso se tiene que:

$$\text{O bien } \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(U) = \mathbb{C},$$

o bien existe un $c \in \mathbb{C}$ y un punto fijo $z_0 \in F_0(f)$ de f tales que:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(U) = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}. \text{ En este caso, } f(z) = z_0 + c(z - z_0)^n.$$

Como consecuencia de este resultado se tiene que:

$$J_0 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(U).$$

Prueba:

Como $w \in J_0$ sabemos que la sucesión $\{f^{(k)}\}_k$ no es normal en U . Supongamos que $\mathbb{C} \neq W := \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(U)$, por el teorema de Montel (Teorema 2.2.7) sabemos que existe un $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $W = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

Sean z_i con $1 \leq i \leq n$ las posibles n raíces de la ecuación $f(z) - z_0 = 0$. Si para algún $i \in \{1, \dots, n\}$ se cumple que $z_i \in W$ se tendrá que $z_0 = f(z_i) \in f(W) \subset W$ y esta posibilidad no se puede dar porque $z_0 \notin W$.

Como consecuencia se sigue que $z_i = z_0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y, entonces existe un $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) - z_0 = c(z - z_0)^n \implies f(z) = z_0 + c(z - z_0)^n.$$

Por tanto, por la construcción es claro que z_0 es un punto fijo de la función $f(z)$. Lo único que queda por probar es que $z_0 \in F_0(f)$.

Para ello fijamos $r = (2|c|)^{-\frac{1}{n-1}}$ y supongamos que $|z - z_0| < r$, entonces:

$$\begin{aligned} |f(z) - z_0| &= |c||z - z_0|^n = |c||z - z_0|^{n-1}|z - z_0| < \\ &< \frac{|c|}{2|c|}|z - z_0| < \frac{1}{2}|z - z_0| < \frac{r}{2}. \end{aligned}$$

Siguiendo un proceso recursivo se sigue finalmente que:

$$|f^{(k)}(z) - z_0| < \frac{1}{2^k}|z - z_0| < \frac{1}{2^k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Por tanto, si $z \in U(z_0, r)$ la sucesión $\{f^{(k)}\}_k$ converge uniformemente a z_0 . Como consecuencia, deducimos que $\{f^{(k)}\}_k$ es normal en z_0 . Así:

$$J_0 \subset \mathbb{C} \setminus \{z_0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(U).$$

En el caso en que $W = \mathbb{C}$ el resultado es claro. □

Corolario 3.3.2 *J_0 es nunca denso, es decir, no contiene ningún conjunto abierto.*

Prueba:

Si U fuera un conjunto abierto con $w \in U \subset J_0$, el Teorema 3.3.2 concluiría que $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(U) \subset J_0$. Sin embargo, el Teorema 3.3.7 demuestra que $J_0 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(U)$ y, además, $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(U) = \mathbb{C}$ o bien $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(U) = \mathbb{C} \setminus \{w\}$. Entonces, se deduciría que el conjunto J_0 deberá ser igual a uno de los dos anteriores, pero esto es imposible porque el conjunto J_0 es un compacto (probado en el Teorema 3.3.1). □

Los siguientes resultados serán de gran utilidad para probar algunas propiedades topológicas de los conjuntos $J_0(f)$. En particular, los utilizaremos para probar que estos conjuntos son perfectos. A continuación, recordaremos la definición topológica de conjunto perfecto y demostraremos el lema técnico. A su vez, probaremos que el cardinal de los conjuntos J_0 es el mismo que el del continuo.

Definición 3.3.8 *Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que $A \subset X$ es un **conjunto perfecto** si es no vacío, cerrado y no tiene puntos aislados.*

Como hemos demostrado con anterioridad que el conjunto J_0 es cerrado y no vacío solamente tenemos que probar que no tiene puntos aislados para probar que J_0 es un conjunto perfecto. Para ello, introducimos el siguiente lema técnico.

Lema 3.3.3 Sea U un entorno abierto cumpliendo que $U \cap J_0 \neq \emptyset$ y sea $w \in \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(U)$, entonces $f^{(-k)}(w) \cap U \neq \emptyset$ para una cantidad infinita de $k \in \mathbb{N}$

Prueba:

Supongamos que $W = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(U) \neq \mathbb{C}$ y definimos $z_0 \in \mathbb{C}$ como en el Teorema 3.3.7. Fijamos $k_1 = \min\{k \in \mathbb{N} : w \in f^{(k)}(U)\}$. Esto implica que existe un $w_1 \in U$ tal que $w = f^{(k_1)}(w_1)$.

Como $W \neq \mathbb{C}$ sabemos que $w_1 \neq z_0$ ya que $f^{(k_1)}(z_0) = z_0 \neq w$, consecuentemente tenemos que $w_1 \in W$.

Como $w_1 \in W$ podemos fijar $k'_2 = \min\{k \in \mathbb{N} : w_1 \in f^{(k)}(U)\}$, por tanto existe un $w_2 \in U$ tal que $w_1 = f^{(k'_2)}(w_2)$. Así, tenemos que:

$$w = f^{(k_1)}(w_1) = f^{(k_1)}(f^{(k'_2)}(w_2)) = f^{(k_1 k'_2)}(w_2).$$

Fijando $k_2 = k_1 k'_2$ tenemos que $w_2 \in f^{(-k_2)}(w) \cap U$ y además, $w_2 \in W$.

Finalmente, por inducción podemos construir una sucesión $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ y una sucesión $\{w_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ cumpliendo que

$$w_j \in f^{(-k_j)}(w) \cap U \quad \text{con } j \in \mathbb{N}.$$

El caso en que $W = \mathbb{C}$ se demuestra de forma análoga. □

Corolario 3.3.3 Para todo $w \in J_0$ se tiene que:

$$J_0 = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{(-k)}(w)}.$$

Prueba:

Si $w \in J_0$ sabemos por el Teorema 3.3.2 que $f^{(-k)}(w) \subset J_0$, por tanto:

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{(-k)}(w)} \subseteq J_0.$$

Sea ahora U un entorno abierto cualquiera de J_0 , por el Teorema 3.3.7 sabemos que $w \in \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(U)$. Consecuentemente, por el Lema 3.3.3 tenemos que:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{(-k)}(w) \cap U \neq \emptyset. \quad \text{Y, por tanto, } J_0 \subseteq \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{(-k)}(w)}.$$

□

Teorema 3.3.8 *El conjunto J_0 no tiene puntos aislados, es decir, es un conjunto perfecto.*

Prueba:

Sea U un entorno abierto de $w_0 \in J_0$ y queremos demostrar que existe en U otro punto $w \in J_0$ distinto de w_0 . Estudiamos los diferentes casos que se pueden dar:

(1) Supongamos que w_0 no es un punto periódico de f . Entonces el conjunto $f^{(-1)}(w_0)$ está formado por elementos distintos. Sea $w_1 \in f^{(-1)}(w_0)$, es decir que $w_0 = f(w_1)$, entonces $w_1 \neq w_0$.

Por el Teorema 3.3.2 y el Teorema 3.3.7 sabemos que

$$w_1 \in J_0 \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(U) \quad \text{Y, además } w_0 \notin f^{(-k)}(w_1) \text{ para ningún } k \in \mathbb{N}.$$

Esto último se debe a que, en caso contrario, $w_1 = f^{(k)}(w_0) = f^{(k+1)}(w_1)$ y, por tanto w_1 sería un punto periódico y, por consiguiente, también lo sería w_0 .

Sin embargo, por el Lema 3.3.3 sabemos que $f^{(-k)}(w_1) \cap U \neq \emptyset$ para una cantidad infinita de k , por tanto en este conjunto podemos encontrar puntos en J_0 (debido a que $f^{(-k)}(w_1) \subset J_0$) que son distintos de w_0 y que pertenecen a U .

(2) Supongamos que $w_0 = f(w_0)$ es un punto fijo de f . Si el conjunto $f^{(-1)}(w_0)$ coincide con w_0 , siguiendo la prueba del Teorema 3.3.7, se tendrá que $f(z) = w_0 + c(z - w_0)^n$ para algún $c \in \mathbb{C}$. Sin embargo, en ese caso se tendría que $w_0 \in F_0$ y esto es imposible porque estamos suponiendo que $w_0 \in J_0$.

Por tanto, podemos tomar un $w_1 \in \mathbb{C}$ con $w_1 \neq w_0$ tal que $w_0 = f(w_1)$ y, como en el caso (1), tendremos que $w_0 \notin f^{(-k)}(w_1) \subset J_0$ y $f^{(-k)}(w_1) \cap U \neq \emptyset$ para una cantidad infinita de $k \in \mathbb{N}$

(3) Si $w_0 = f^{(p)}(w_0)$ (para $p > 1$) podemos aplicar el mismo razonamiento que en (2) para la función polinómica $f^{(p)}$ y como $J_0 = J_0(f^{(p)})$ por la Proposición 3.3.7, deducimos el resultado que queríamos.

□

Corolario 3.3.4 *Dada f una función polinómica de grado n , el conjunto $J_0(f)$ tiene el cardinal del continuo.*

Prueba:

Recordemos que \mathbb{C} es un espacio métrico completo y separable. Por un resultado clásico de Topología, cuya prueba se puede encontrar en el Teorema 6.2 de [KEC], se tiene que si X es un conjunto perfecto en un espacio métrico completo y separable, entonces el conjunto de Cantor $2^{\mathbb{N}}$ es homeomorfo a un subconjunto de X . Consecuentemente, el conjunto X tiene el cardinal del continuo.

Como el Teorema 3.3.8 demuestra que los conjuntos J_0 son perfectos, se tiene que su cardinal será siempre infinito no numerable. □

Hasta el momento hemos deducido propiedades del conjunto J_0 pero nuestro objetivo es deducir las propiedades de los conjuntos de Julia $J(f)$ definidos en 3.3.1 como la clausura de las órbitas de los puntos periódicos repulsores a partir de las propiedades del conjunto J_0 .

Anteriormente hemos deducido que $J(f) \subset J_0$, sin embargo, el siguiente teorema nos garantiza que ambos conjuntos son iguales y, por tanto, las propiedades que hemos deducido para J_0 también serán ciertas para $J(f)$.

Para demostrar este resultado necesitaremos gran parte de los resultados previos que hemos ido introduciendo a lo largo de la sección. Entre ellos, conviene recordar que el número de órbitas periódicas atractoras y neutras es finito y que J_0 es un conjunto que no tiene puntos aislados.

Teorema 3.3.9 $J_0 = J(f)$

Prueba:

Hemos visto anteriormente en la Nota 3.3.4, $J(f) \subset J_0$. Veamos la inclusión contraria. Como nuestra función es polinómica de grado n sabemos que solo puede tener una cantidad finita de puntos fijos y puntos críticos de f . Eliminando estos puntos obtenemos el conjunto J_1 siguiente:

$$J_1 = \{w \in J_0 : (f(w) \neq w) \text{ y a la vez } (f'(z) \neq 0 \forall z \in f^{(-1)}(w))\}.$$

Como J_0 no tiene puntos aislados (Teorema 3.3.8) tenemos que $\overline{J_1} = J_0$, por tanto lo único que tenemos que demostrar es que $J_1 \subset J(f) = \overline{J(f)}$.

Sea $w_0 \in J_1$. Queremos demostrar que para todo entorno W' de w_0 se tiene que $W' \cap J(f) \neq \emptyset$. Por la construcción del conjunto tenemos que $\exists z_0 \in J_0 \setminus \{w_0\}$ tal que $f(z_0) = w_0$ con $f'(z_0) \neq 0$. Por el Teorema 2.2.3 sabemos que existen dos entornos disjuntos U de z_0 y W de w_0 con $W \subset W'$, que se pueden tomar tan pequeños como se desee, tales que $f : U \rightarrow W$ es biyectiva. Denotaremos por \tilde{f} a esta biyección.

Teniendo en cuenta que la unión (que denotaremos por P) de las órbitas periódicas no repulsoras es finita (Teoremas 3.3.5 y 3.3.6), podemos escoger los conjuntos V y W disjuntos de P . Definimos la sucesión de funciones h_k holomorfas en W como:

$$h_k(w) := \frac{f^{(k)}(w) - w}{\tilde{f}^{(-1)}(w) - w} \quad \text{para } w \in W \text{ y } k \in \mathbb{N}.$$

Si la sucesión $\{h_k\}$ es normal en W , entonces la sucesión $\{f^{(k)}\}_k$ también debería serlo en W pero esto no puede ocurrir debido a que $w_0 \in W \cap J_0$.

Por el Teorema 2.2.7, el conjunto $\bigcup_{k=1}^{\infty} h_k(W)$ contiene al menos uno de los números en el conjunto $\{0, 1\}$. Como consecuencia, existe un $w_1 \in W$ y un $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $h_{k_1}(w_1) = 0$ o bien un $w_2 \in W$ y un $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $h_{k_2}(w_2) = 1$.

- En el primer caso tendremos que $f^{(k_1)}(w_1) = w_1$.
- En el segundo caso tendremos que:

$$\begin{aligned} \frac{f^{(k_2)}(w_2) - w_2}{\tilde{f}^{(-1)}(w_2) - w_2} = 1 &\iff f^{(k_2)}(w_2) - w_2 = \tilde{f}^{(-1)}(w_2) - w_2 \iff \\ &\iff f^{(k_2+1)}(w_2) = w_2. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que, o bien w_1 o bien w_2 (cada uno en su respectivo caso) son puntos periódicos con periodo k_1 y $k_2 + 1$ respectivamente y como hemos eliminado todas las órbitas periódicas atractoras o neutras entonces estas órbitas deberán ser órbitas periódicas repulsoras y, por tanto $w_1 \in J(f) \cap W \subset J(f) \cap W'$ o $w_2 \in J(f) \cap W \subset J(f) \cap W'$.

En cualquier caso, se deduce que para todo entorno W' de w_0 se tiene que $W' \cap J(f) \neq \emptyset$ y, consecuentemente, $J_1 \subset \overline{J(f)}$. □

Finalmente y como conclusión de la sección, demostraremos que se pueden definir los conjuntos de Julia de una función polinómica de grado n usando las cuencas de atracción de los puntos fijos atractores de f . Este resultado será fundamental en secciones posteriores ya que nos permitirá crear un algoritmo para dibujar los conjuntos de Julia para estas funciones.

Teorema 3.3.10 *Si z_0 es un punto fijo atractor de f , entonces $\partial A(f, z_0) = J(f)$. En particular:*

$$\partial A(f, \infty) = J(f).$$

Prueba:

En cualquiera de las inclusiones que vamos a estudiar se tiene que $z_0 \notin J(f)$.

Veamos en primer lugar que $J(f) \subseteq \partial A(f, z_0)$.

Sea $z \in J(f)$, como $J(f) = J_0$ sabemos que la órbita de z , $\{f^{(k)}(z)\}_k$ está contenida en $J(f)$; y, por tanto, no puede ser convergente a z_0 . Es decir que $z \notin A(f, z_0)$.

Ahora bien, sea U un entorno abierto de z . Por el Teorema 3.3.7 sabemos que $A(f, z_0) \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(U) \neq \emptyset$ y, por tanto:

$$U \cap f^{(-k)}(A(f, z_0)) = U \cap A(f, z_0) \neq \emptyset \quad \text{para algún } k \in \mathbb{N}.$$

De hecho, esta última propiedad se cumple para infinitos valores de k , por tanto tenemos que $z \in \partial A(f, z_0)$.

Veamos ahora que $\partial A(f, z_0) \subseteq J(f)$

Supongamos por reducción al absurdo que existe un $z \in \partial A(f, z_0) \setminus J_0$. Entonces, existe un entorno abierto V de z y una subsucesión $\{f^{(k')}\}_{k'}$ convergente uniformemente en los compactos de V ya sea a $z_0 = \infty$ o a una función holomorfa g .

En el conjunto abierto $V \cap A(f, z_0) \neq \emptyset$, la subsucesión $\{f^{(k')}\}_{k'}$ debe converger a z_0 , por tanto en todo el conjunto V tiene que converger a este valor, incluyendo para $z \in V$. Por tanto, $z \in A(f, z_0)$ pero esto contradice la hipótesis que $z \in \partial A(f, z_0)$. □

En el siguiente capítulo nos centraremos en aplicar todos los resultados obtenidos a funciones polinómicas cuadráticas, es decir para funciones $f_c(z) = z^2 + c$ con $c \in \mathbb{C}$ teniendo como objetivo definir el conjunto de Mandelbrot M como:

$$M = \{c \in \mathbb{C} : \{f_c^{(k)}(0)\}_{k=1}^{\infty} \text{ está acotada}\}.$$

Sin embargo, los conjuntos de Julia no solo se pueden definir para funciones polinómicas sino que este concepto se puede extender a funciones $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ enteras manteniendo algunas de las propiedades que se han demostrado para funciones polinómicas.

Capítulo 4

Conjuntos de Julia para funciones polinómicas de grado 2. El conjunto de Mandelbrot

En esta sección nos centraremos especialmente en las funciones $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que sean polinómicas de grado dos, es decir que funciones f de la forma:

$$f(w) = c_2 w^2 + c_1 w + c_0 \quad \text{con } c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{C} \text{ y } c_2 \neq 0.$$

Nuestro interés será obtener los puntos fijos de estas funciones y caracterizar el carácter de estos; i.e, determinar si los puntos fijos son atractores, repulsores o neutros.

Seguidamente, estudiaremos las posibles órbitas periódicas de periodo 2 de estas funciones. Estas nos ayudarán a definir y a acotar el conjunto de Mandelbrot con el que cerraremos la sección.

Sin embargo, para simplificar el estudio transformaremos las funciones polinómicas $g(w) = c_2 w^2 + c_1 w + c_0$ en funciones polinómicas del tipo $f(z) = z^2 + c$ con $c \in \mathbb{C}$ bajo la condición de que para cada $z \in \mathbb{C}$ las órbitas $\{g^{(k)}(z)\}_{k=0}^{\infty}$ y $\{f^{(k)}(z)\}_{k=0}^{\infty}$ se comporten del mismo modo. Para ello, usaremos el siguiente argumento:

Sea $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función polinómica de grado dos, es decir $g(w) = c_2 w^2 + c_1 w + c_0$ con $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ y $c_2 \neq 0$ y consideremos la aplicación siguiente:

$$h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto h(z) = az + b$$

Con $a, b \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$. Esta aplicación es una composición de una homotecia con una traslación, por tanto se trata de una semejanza en el plano complejo con aplicación inversa

$$\begin{aligned} h^{(-1)}: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ w &\longmapsto h^{(-1)}(w) = \frac{w-b}{a}. \end{aligned}$$

Si consideramos $g \circ h(z) = g(h(z))$, obtenemos:

$$\begin{aligned} g \circ h(z) &= c_2(az + b)^2 + c_1(az + b) + c_0 = c_2(a^2z^2 + 2abz + b^2) + c_1(az + b) + c_0 = \\ &= c_2a^2z^2 + a(2bc_2 + c_1)z + c_2b^2 + c_1b + c_0. \end{aligned}$$

Si componemos por la izquierda con $h^{(-1)}$ obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} h^{(-1)} \circ g \circ h(z) &= \frac{c_2a^2z^2 + a(2bc_2 + c_1)z + c_2b^2 + c_1b + c_0 - b}{a} = \\ &= c_2az^2 + (2bc_2 + c_1)z + \frac{c_2b^2 + c_1b + c_0 - b}{a}. \end{aligned}$$

Si escogemos $a = \frac{1}{c_2} \neq 0$ y $b = -\frac{c_1}{2c_2}$ y llamamos c al valor:

$$c = \frac{c_2b^2 + (c_1 - 1)b + c_0}{a}.$$

Entonces se tiene que $ac_2 = 1$ y $2bc_2 + c_1 = 0$. Así, si denotamos por $f(z) := h^{(-1)} \circ g \circ h(z)$, tendremos que $f(z) = z^2 + c$ con $c \in \mathbb{C}$ y además, se tiene que para cada $k \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= (h^{(-1)} \circ g \circ h)^{(k)}(z) = \\ &= ((h^{(-1)} \circ g \circ h) \circ (h^{(-1)} \circ g \circ h) \circ \dots \circ (h^{(-1)} \circ g \circ h))(z) = h^{(-1)} \circ g^{(k)} \circ h(z). \end{aligned}$$

Por tanto, a través de una transformación hemos conseguido un polinomio $f(z)$ de la forma $f(z) = z^2 + c$ de modo que el estudio de las órbitas para todo $z \in \mathbb{C}$ bajo la función polinómica g es equivalente al estudio de las órbitas bajo la función polinómica f .

Nota 4.0.1 Trabajaremos entonces con polinomios de la forma $f(z) = z^2 + c$ con $c \in \mathbb{C}$ ya que estos nos permiten obtener rápidamente los puntos fijos, valores críticos de la función y puntos periódicos de periodo 2.

4.1. Conjuntos de Julia para funciones polinómicas de grado dos

Notación 4.1.1 A partir de este momento f denotará una función polinómica de grado dos de la forma $f(z) = z^2 + c$ con $c \in \mathbb{C}$.

Teorema 4.1.1 Los puntos fijos de la función f son:

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2} \quad y \quad z_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}.$$

Prueba:

Buscamos valores de $z \in \mathbb{C}$ de modo que $f(z) = z^2 + c = z$, es decir que $z^2 - z + c = 0$. Así:

$$z^2 - z + c = 0 \iff z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2}.$$

Por tanto, los puntos fijos de la función f serán, efectivamente:

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2} \quad y \quad z_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}.$$

□

Recordemos que, por el Teorema 3.3.10, sabemos que si z_0 es un punto fijo atractor de la función f , entonces el conjunto de Julia $J(f)$ será $\partial A(f, z_0)$. Por tanto, nuestro objetivo será encontrar los puntos fijos atractores. Para ello, tenemos que recurrir a la derivada de la función $f(z) = z^2 + c$ que será $f'(z) = 2z$. Así:

$$|f'(z_1)| = |1 + \sqrt{1 - 4c}| \quad y \quad |f'(z_2)| = |1 - \sqrt{1 - 4c}|.$$

Sabemos por el Teorema 3.3.5 que solo pueden existir, como mucho, un punto fijo atractor. Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que uno de los dos puntos fijos de la función $f(z) = z^2 + c$ cumple que el módulo de su derivada es mayor o igual a uno. Supongamos que:

$$|f'(z_1)| = |1 + \sqrt{1 - 4c}| \geq 1.$$

En primer lugar, podemos establecer los valores de $c \in \mathbb{C}$ tales que $|1 - \sqrt{1 - 4c}| = 1$. En este caso tendremos que:

$$f'(z_2) = 1 - \sqrt{1 - 4c} = e^{i\theta} \quad \text{para algún } \theta \in [-\pi, \pi[.$$

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{1 - 4c} = e^{i\theta} &\iff \sqrt{1 - 4c} = 1 - e^{i\theta} \iff 1 - 4c = 1 - 2e^{i\theta} + e^{2i\theta} \iff -4c = e^{2i\theta} - 2e^{i\theta} \\ &\iff 4c = 2e^{i\theta} - e^{2i\theta} \iff c = \frac{2e^{i\theta} - e^{2i\theta}}{4}. \end{aligned}$$

Notamos que si $\theta \in [-\pi, \pi[$, los puntos de la función $w(\theta)$ definida por:

$$w(\theta) = \frac{1}{2}e^{i\theta} - \frac{1}{4}e^{2i\theta} = \left(\frac{1}{2}\cos(\theta) - \frac{1}{4}\cos(2\theta), \frac{1}{2}\sin(\theta) - \frac{1}{4}\sin(2\theta) \right)$$

representan una curva en el plano complejo conocida como la curva cardioide:

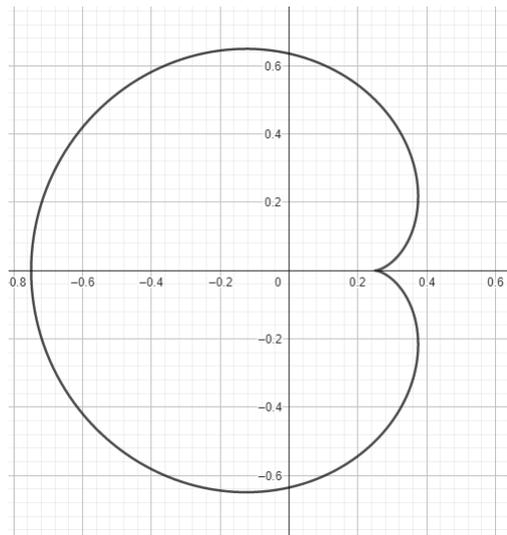


Figura 4.1: Curva cardioide.

La curva representada en la Figura 4.1 se puede generar también como el camino que describe el punto $1/4$ de la circunferencia de centro $1/2$ y radio $1/4$ al rodar envolviendo a otra circunferencia de centro 0 y radio $1/4$.

Los valores que buscamos son aquellos que vienen dados por $c = w(\theta)$. Estos valores de c ejercen un papel de frontera entre los puntos que cumplen $|f'(z_2)| = |1 - \sqrt{1 - 4c}| < 1$ y los valores que satisfacen $|f'(z_2)| = |1 - \sqrt{1 - 4c}| > 1$.

Ahora bien, como el valor $c = 0$ está situado dentro de la curva cardioide y proporciona un valor $|f'(z_2)| = |1 - \sqrt{1 - 4 \cdot 0}| = 1 - 1 = 0$, la función p dada por:

$$p(c) := f'(z_2(c)) = 1 - \sqrt{1 - 4c}.$$

lleva el interior de la curva cardioide $C_0 = \{w(\theta) : \theta \in [0, 2\pi[]$ en el interior del disco unidad $D(0, 1)$. Por tanto, podemos concluir que:

- Si $c \in C_0$, entonces $|f'(z_2)| = 1$ y, por tanto, z_2 será un punto fijo neutro.
- Si $c \in \mathbb{C}$ se encuentra en el interior de la curva C_0 , entonces z_2 será un punto fijo atractor.
- Si $c \in \mathbb{C}$ se encuentra en el exterior de la curva C_0 , entonces z_2 será un punto fijo repulsor.

Ahora bien, como los puntos $f'(z_1) = 1 + \sqrt{1 - 4c}$ y $f'(z_2) = 1 - \sqrt{1 - 4c}$ recaen en puntos simétricos respecto al punto 1 del disco unidad se tiene que, si $z_2 \neq 1$ recae en el disco unidad, entonces z_1 tiene que caer en el exterior de este y, consecuentemente, $|f'(z_1)| > 1$ concluyendo que z_1 será un punto fijo repulsor. Notamos que esto ocurre siempre que $\sqrt{1 - 4c} \neq 0$, es decir cuando $c \neq 1/4$.

Todos estos argumentos que hemos realizado en esta parte se condensan en el siguiente teorema:

Teorema 4.1.2 *La función $f(z) = z^2 + c$ admite un punto fijo atractor $z_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}$ sii c recae en el interior de la curva cardioide $C_0 = \{\frac{1}{4}(2e^{i\theta} - e^{2i\theta}) : \theta \in [0, 2\pi[]$ y un **punto fijo neutro** $z_2 = \frac{e^{i\theta}}{2}$ con $f'(z_2) = e^{i\theta}$ sii $c = \frac{1}{4}(2e^{i\theta} - e^{2i\theta})$ para algún $\theta \in [0, 2\pi[$.*

En cualquiera de los dos casos (excepto cuando $c = \frac{1}{4}$ y $\theta = 0$) el punto fijo $z_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}$ es un punto repulsor y pertenece al conjunto de Julia $J(f)$.

4.1.1. Representación de conjuntos de Julia para funciones polinómicas de grado 2

En esta sección, representaremos algunos conjuntos de Julia interesantes para funciones polinómicas de la forma $f(z) = z^2 + c$ siendo $c \in \mathbb{C}$.

Para ello, usaremos el Teorema 3.3.10 que nos indica que el conjunto de Julia para la función f es la frontera de la cuenca de atracción para los puntos fijos atractores de f . Sin embargo, sabemos por el Teorema 4.1.2 que esta función tiene un único punto fijo atractor de la forma $z = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}$ si el valor $c \in \mathbb{C}$ recae en el interior de la curva cardioide C_0 .

Para calcular la cuenca de atracción y el correspondiente conjunto de Julia usaremos el software Mathematica. Con el comando `JuliaSetPlot[c]` implementado en el código base de Mathematica se realiza una aproximación de los puntos que pertenecen al conjunto de Julia para la función $f(z) = z^2 + c$ y se dibuja la frontera de la cuenca de atracción de los puntos fijos atractores de dicha función.

Para cada valor de c incluiremos dos gráficas. En la primera de ellas, dibujaremos únicamente el conjunto de Julia como frontera y en la segunda incluiremos colores a esta gráfica. El color negro representará los puntos que se encuentran dentro de la cuenca de atracción del punto fijo atractor mientras que los puntos azules son los que se encuentran en la cuenca de atracción del punto fijo $z = \infty$ y en la frontera que separa estas dos cuencas de atracción se encuentra el conjunto de Julia.

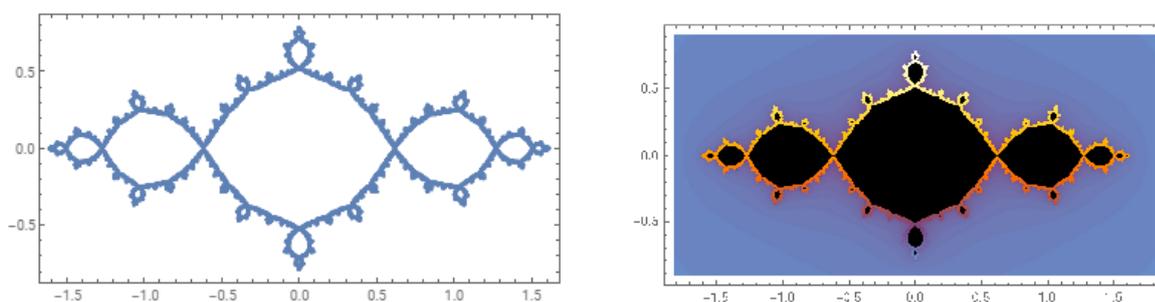


Figura 4.2: Conjunto de Julia para $c = -1$.

La Figura 4.2 representa el conjunto de Julia para el valor de $c = -1$. Este conjunto de Julia J contiene al el punto fijo repulsor $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ y $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

La parte en negro representa una aproximación del complementario de la cuenca de atracción del punto $z = \infty$. Por otro lado, el área representada en azul indica los puntos de plano cuyas órbitas divergen hacia ∞ , es decir que forman parte de la cuenca de atracción del punto fijo $z = \infty$.

Consecuentemente, la frontera entre estos dos conjuntos será el conjunto de Julia de la función $f(z) = z^2 - 1$.

A continuación incluiremos algunos dibujos de conjuntos de Julia para distintos c que nos han parecido interesantes.

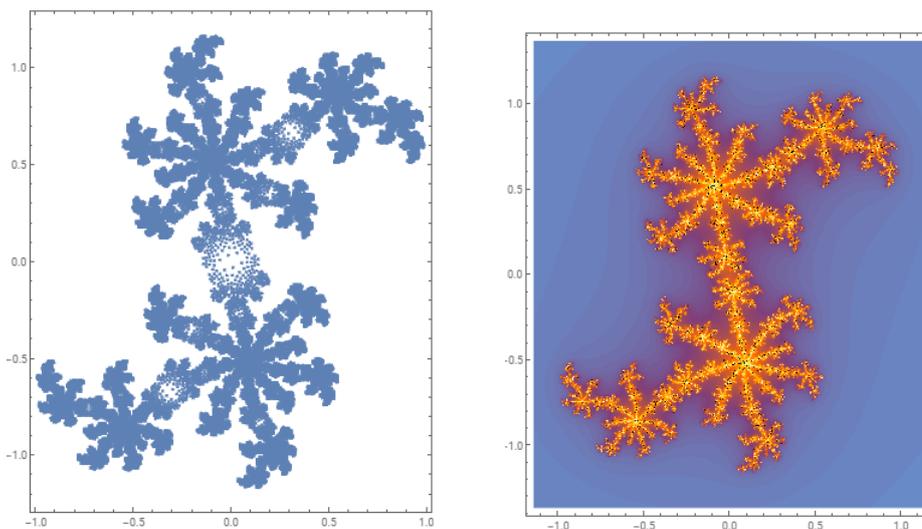


Figura 4.3: Conjunto de Julia para $c \approx 0,357 - 0,423i$.

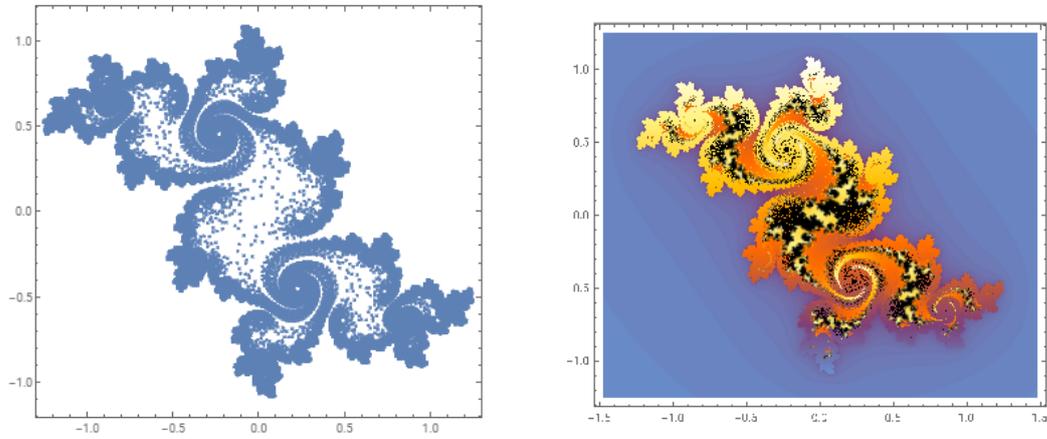


Figura 4.4: Conjunto de Julia para $c \approx -0,076 + 0,660i$.

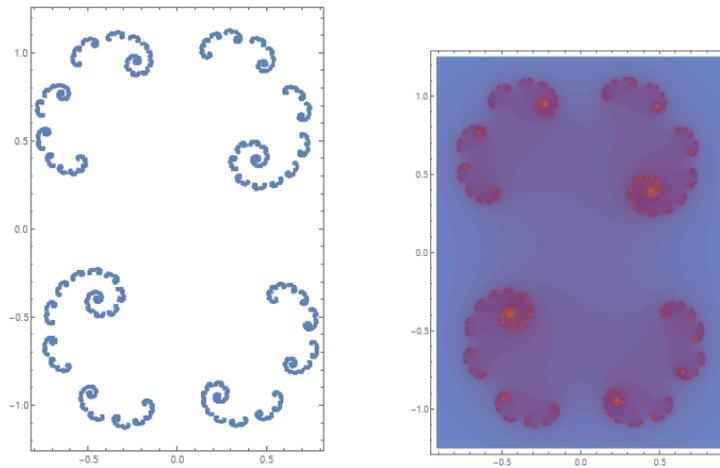


Figura 4.5: Conjunto de Julia para $c \approx 0,404 - 0,041i$.

Si observamos, para algunos valores de $c \in \mathbb{C}$ el conjunto de Julia está formado por un conjunto de puntos conexos como podría ser el caso de la Figura 4.2 mientras que otros son simplemente nubes de puntos como es el caso de la Figura 4.5. En el siguiente capítulo, demostraremos que existe una razón para este hecho relacionada con el famoso conjunto de Mandelbrot que definimos en la siguiente sección.

4.2. El camino hacia el conjunto de Mandelbrot

En la sección anterior hemos estudiado los puntos fijos y el carácter de los mismos para funciones polinómicas de grado dos de la forma $f(z) = z^2 + c$ con $c \in \mathbb{C}$. Sin embargo, también es relativamente sencillo estudiar los puntos periódicos de periodo 2 que son aquellos valores $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen la ecuación:

$$f^{(2)}(z) - z = 0.$$

Teorema 4.2.1 *Para la función polinómica $f(z) = z^2 + c$ existe una única órbita periódica $\{z_3, z_4\}$ de periodo 2 con $z_3 = \frac{1 + \sqrt{-4c - 3}}{2}$ y $z_4 = \frac{1 - \sqrt{-4c - 3}}{2}$. Además, la órbita es atractora sii $|1 + c| < \frac{1}{4}$.*

Prueba:

Como hemos comentado en la introducción de esta sección, los puntos periódicos de periodo 2 deben satisfacer la ecuación $f^{(2)}(z) = z$ donde:

$f^{(2)}(z) = f(z^2 + c) = (z^2 + c)^2 + c = z^4 + 2cz^2 + c^2 + c$. Entonces buscamos $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$0 = f^{(2)}(z) - z = z^4 + 2cz^2 - z + c^2 + c.$$

Ahora bien, como los puntos fijos de la función f también son puntos periódicos de periodo 2, podemos descomponer el polinomio anterior en dos polinomios de grado dos. Es decir que:

$$z^4 + 2cz^2 - z + c^2 + c = (z^2 - z + c)(z^2 + z + 1 + c).$$

Esto implica que, efectivamente, existe una órbita periódica con periodo 2 formada por las raíces z_3 y z_4 del polinomio $z^2 + z + 1 + c$, es decir:

$$z^2 + z + 1 + c = 0 \iff z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1 + c)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-4c - 3}}{2}.$$

Como hemos visto en la Definición 3.2.4 el carácter de esta órbita depende del valor del $|[f^{(2)}]'(z_3)|$. Sin embargo, por la Nota 3.2.2 sabemos que $|[f^{(2)}]'(z_3)| = |f'(z_3)||f'(z_4)|$. Como $f'(z) = 2z$ tenemos que:

$$\begin{aligned} |[f^{(2)}]'(z_3)| &= |f'(z_3)||f'(z_4)| = 4|z_3z_4| = 4 \left| \left(\frac{1 + \sqrt{-4c - 3}}{2} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{-4c - 3}}{2} \right) \right| = \\ &= |1 - (-4c - 3)| = |4c + 4| = 4|1 + c|. \end{aligned}$$

Por tanto, la órbita $\{z_3, z_4\}$ será atractora sii $4|1 + c| < 1$ sii $|1 + c| < \frac{1}{4}$.

□

Nota 4.2.1 Observamos que la desigualdad $|1+c| < \frac{1}{4}$ solo se satisface cuando c se encuentra dentro del disco centrado en -1 y de radio $\frac{1}{4}$ que únicamente toca la curva cardioide C_0 en el punto $\frac{-3}{4}$.

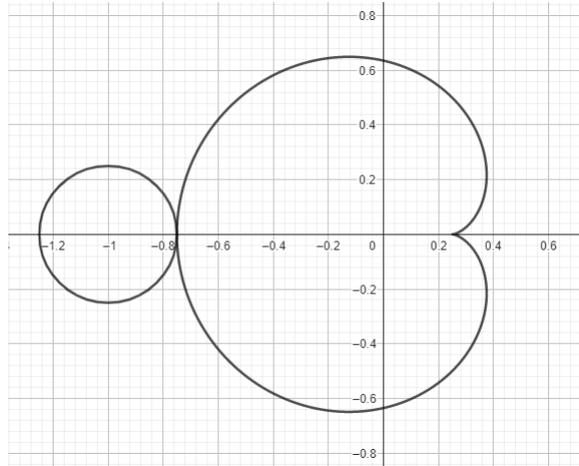


Figura 4.6: Curva cardioide con la circunferencia centrada en -1 y de radio $1/4$.

Como conclusión de esta sección deducimos que la función $f(z) = z^2 + c$ tiene una órbita periódica de periodo 2. Además, si $c \in \mathbb{C}$ se encuentra en el interior del disco centrado en -1 y de radio $1/4$, entonces la órbita 2-periódica será atractora.

Si en lugar de estudiar las órbitas 2-periódicas estudiáramos las órbitas p -periódicas de la función f construiríamos una serie de bulbos que cortarían la curva cardioide en un único punto.

Observamos que la función $f(z) = z^2 + c$ tiene un único punto crítico en $z = 0$ con valor crítico $f(0) = c$ y, por el estudio que hemos realizado en la sección anterior, sabemos que la función f tiene dos puntos fijos. Además, si $c \in \mathbb{C}$ se encuentra en el interior de la curva cardioide C_0 , entonces el punto fijo z_2 es atractor. Por el Lema 3.3.2 se tiene que $C(f, z_2)$ contiene al menos un valor crítico de f , es decir que $f(0) = c \in C(f, z_2)$.

Por la Nota 3.3.6 sabemos que $C(f, z_2) \subset A(f, z_2)$. Consecuentemente,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(w) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k+1)}(0) = z_2.$$

Esto implica que si c se encuentra en el interior de la curva cardioide, entonces se tiene que la órbita $\{f^{(k)}(0)\}_{k=1}^{\infty}$ es una órbita acotada.

Con las órbitas dos periódicas ocurre lo mismo. Si c se encuentra en el disco de centro -1 y radio $1/4$, entonces f admite una órbita 2-periódica atractora $\{z_3, z_4\}$.

Por el Lema 3.3.2 se tiene que, o bien $c = f(0)$ se encuentra en $C(f, z_3)$ o se encuentra en $C(f, z_4)$. En cualquier caso, de la Nota 3.3.6 se sigue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(w) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k+1)}(0) = z_3, \text{ o bien, } \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(w) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k+1)}(0) = z_4.$$

De aquí se deduce que si c se encuentra en el interior del conjunto $U(-1, 1/4)$, entonces la órbita $\{f^{(k)}(0)\}_{k=1}^{\infty}$ es acotada.

Por tanto, ya hemos encontrado algunos valores para los cuales la órbita en $z = 0$ es finita. El siguiente teorema nos permite acotar el conjunto de valores de $c \in \mathbb{C}$ para los cuales la órbita $\{f^{(k)}(0)\}_{k=1}^{\infty}$ es no acotada.

Teorema 4.2.2 *Si $|z| = 2 + \varepsilon > 2$ y $|z| \geq |c|$, entonces:*

$$|f(z)| \geq (1 + \varepsilon)|z| \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(z) = \infty.$$

Consecuentemente, si $|c| > 2$ la órbita $\{f^{(k)}(0)\}_{k=1}^{\infty}$ no está acotada.

Prueba:

Si $|z| \geq |c|$ deducimos que:

$$|f(z)| = |z^2 + c| = \left| z \left(z + \frac{c}{z} \right) \right| = |z| \left| z + \frac{c}{z} \right| \geq |z| \left[|z| - \frac{|c|}{|z|} \right].$$

Como $|z| \geq |c|$ sabemos que $\frac{|c|}{|z|} \leq 1$ y, por tanto, $-\frac{|c|}{|z|} \geq -1$ y como $|z| = 2 + \varepsilon$, deducimos:

$$|f(z)| \geq |z| \left[|z| - \frac{|c|}{|z|} \right] \geq |z|(2 + \varepsilon - 1) = |z|(1 + \varepsilon).$$

Del mismo modo, aplicando otra vez la función f obtenemos:

$$|f^{(2)}(z)| = |f(f(z))| \geq |f(z)|(1 + \varepsilon) \geq (1 + \varepsilon)^2 |z|.$$

Finalmente, por un proceso recursivo es trivial demostrar que $|f^{(k)}(z)| \geq (1 + \varepsilon)^k |z|$ para todo $k \in \mathbb{N}$, Haciendo tender $k \rightarrow \infty$ y teniendo en cuenta que $(1 + \varepsilon) > 1$, obtenemos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f^{(k)}(z)| \geq |z| \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + \varepsilon)^k = \infty.$$

Ahora bien, si $|c| > 2$, es decir si $|c| \geq 2 + \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$ tenemos que:

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(0)| &= |f^{(k-1)}(f(0))| = |f^{(k-1)}(c)| = \\ &= (1 + \varepsilon)^{k-1} |c| \underset{|c| \geq 2 + \varepsilon}{\geq} (1 + \varepsilon)^{k-1} (2 + \varepsilon) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty. \end{aligned}$$

Por tanto, la órbita $\{f^{(k)}(0)\}_{k=1}^{\infty}$ no está acotada en el caso en que $|c| > 2$.

□

Nota 4.2.2 Observamos que si $c = -2$, es decir si $f(z) = z^2 - 2$, tenemos que $f(2) = 2^2 - 2 = 2$. Por tanto, $z = 2$ es un punto fijo de la función $f(z) = z^2 - 2$ y también se tiene que $f^{(k)}(0) = 2$ para todo $k \geq 1$ lo que implica que la órbita $\{f^{(k)}(0)\}_{k=1}^{\infty}$ está acotada. En el Anexo 1 se calcula el conjunto de Julia para esta función $f(z) = z^2 - 2$. Como caso excepcional, el conjunto de Julia para esta función es el intervalo $[-2, 2]$.

Además, los valores de c en el intervalo $[-2, \frac{1}{4}]$ también cumplen esta condición. Para verlo, fijamos c en el intervalo anterior y sea $r = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}$ el punto fijo real de mayor valor. En este caso, se tiene que $c < r$ y es fácil comprobar que $f([c, r]) \subset [c, r]$ donde $f(z) = z^2 + c$. Por tanto, en este caso se tiene también que $\{f^{(k)}(0)\}_{k=1}^{\infty}$ es también acotada. Esto nos permite decir que:

$$\inf\{Re(c) < 0 : \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(0) < \infty\} = -2.$$

Con el siguiente teorema estableceremos una cota para el siguiente conjunto.

$$\{Re(c) > 0 : \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(0) = \infty\}.$$

Teorema 4.2.3 Si $\operatorname{Re}(c) > 1$, entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(0) = \infty$.

Prueba:

Supongamos que $\operatorname{Re}(c) > 1$ y que $|c| \leq 2$, entonces:

$$|f^{(2)}(0)| = |f(-c)| = |c^2 + c| = |c||c + 1| > 1 \cdot 2.$$

Esto implica que $|f^{(2)}(0)| = 2 + \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$, entonces:

$$|f^{(k)}(0)| = |f^{(k-2)}(f^{(2)}(0))| \leq (1 + \varepsilon)^{k-2}(2 + \varepsilon) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty.$$

□

Los Teoremas 4.2.2 y 4.2.3 establecen una acotación para el famoso conjunto de Mandelbrot que definimos a continuación:

Definición 4.2.1 El conjunto M de todos los posibles parámetros c para los cuales la órbita $\{f^{(k)}(0)\}_{k=1}^{\infty}$ está acotada recibe el nombre de **conjunto de Mandelbrot**. Así:

$$M = \{c \in \mathbb{C} : \{f_c^{(k)}(0)\}_{k=1}^{\infty} \text{ está acotada}\}.$$

Por los comentarios que hemos realizado a lo largo de esta sección ya sabemos que el conjunto de Mandelbrot es no vacío. En particular, los valores de c incluidos en el interior de la cardioide C_0 y en el disco $U(-1, 1/4)$ forman parte del conjunto de Mandelbrot. Además, el intervalo $[-2, 1/4]$ también está contenido en este.

Finalmente, también hemos probado que el conjunto de Mandelbrot lo podemos acotar por el disco de centro 0 y radio 2 y por la recta $x = 1$.

Capítulo 5

Relación entre los conjuntos de Julia y el conjunto de Mandelbrot

En este capítulo, al igual que en el capítulo anterior, nos centraremos en funciones polinómicas de la forma $f_c(z) = z^2 + c$ donde $c \in \mathbb{C}$. El objetivo de esta sección es presentar y demostrar la relación que existe entre los conjuntos de Julia que hemos presentado en el Capítulo 3 y el conjunto de Mandelbrot que hemos definido en el Capítulo 4.

Para ello, en primer lugar, tenemos que notar que si $f_c(z) = z^2 + c$ y queremos calcular su inversa $f_c^{(-1)}(z)$ para algún $z \in \mathbb{C}$ podemos hacer lo siguiente:

$$w = z^2 + c \iff w - c = z^2 \iff z = \pm(w - c)^{\frac{1}{2}}.$$

Por tanto, dado $z \in \mathbb{C}$, $f_c^{(-1)}(z) := (z - c)^{\frac{1}{2}}$ puede tomar dos valores distintos que llamamos **ramas** de $f_c^{(-1)}(z)$ excepto en el caso en que $z = c$. A lo largo de esta sección resultará importante conocer el funcionamiento de la función raíz cuadrada compleja al aplicarla a curvas cerradas. Para ello, pondremos un ejemplo básico:

Ejemplo 5.0.1 Consideremos la función $f_0(z) = z^2$ cuya función inversa será $f_0^{(-1)}(z) = \pm z^{\frac{1}{2}}$. Observamos que si $z \in \mathbb{C}$ lo podemos expresar como $z = |z|e^{i\theta}$ para algún $\theta \in [0, 2\pi[$, entonces:

$$f_0^{(-1)}(z) = \pm z^{\frac{1}{2}} = \pm |z|^{1/2} e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Observamos que si consideramos una curva $C \subset \mathbb{C}$, el conjunto $f_0^{(-1)}(C)$ variará en función de si el valor $c = 0$ se encuentra dentro de la curva, fuera de la curva o en la curva.

- Si consideramos la circunferencia centrada en 0 y de radio 2, $C_1 = 2e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi[$, se tiene que el valor $c = 0$ se encuentra en el interior de esta curva y, al unir los dos conjuntos $f_0^{(-1)}(C_1)$ (el positivo y el negativo) obtenemos la circunferencia de centro 0 y radio $\sqrt{2}$.
- Si consideramos la circunferencia centrada en -2 y de radio 1, es decir $C_2 = -2 + e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi[$, se tiene que el valor de $c = 0$ no se encuentra en el interior de la curva y, consecuentemente, cada uno de los conjuntos $f_0^{(-1)}(C_2)$ (el positivo y el negativo) formará su propia curva cerrada.
- Si consideramos la circunferencia centrada en -1 y de radio 1, es decir $C_3 = -1 + e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi[$, se tiene que el valor de $c = 0$ se encuentra en la curva. Por tanto, los conjuntos preimagenes $f_0^{(-1)}(C_3)$ creará una forma de 8 debido a que $f_0^{(-1)}(0) = 0$ tiene una raíz doble.

Más adelante en este capítulo, demostraremos que esta relación es cierta. Además, en la Figura 5.1 se puede observar el efecto de la función $f_0^{(-1)}(z)$ para una curva que no contenga a $c = 0$, una que contenga al $c = 0$ en su interior y una que contiene a $c = 0$ en su recorrido. Estos gráficos han sido extraídos de [DEV].

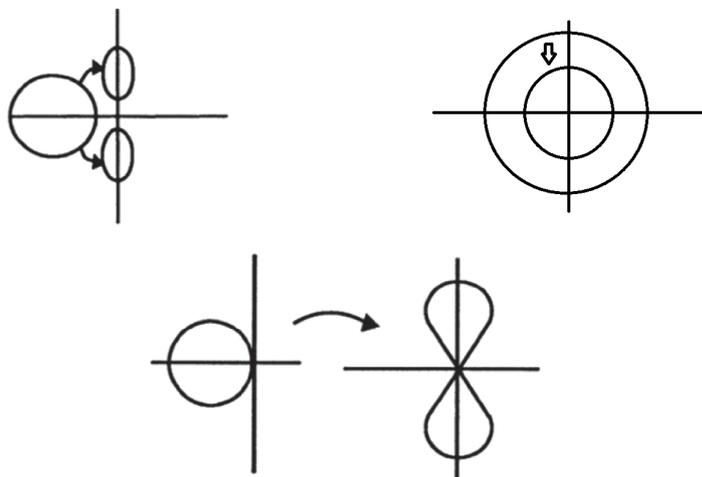


Figura 5.1: Conjuntos $f_0^{(-1)}(C)$ en función de la posición del $c = 0$.

Como hemos definido en el Capítulo 4, el conjunto de Mandelbrot se define como:

$$M = \{c \in \mathbb{C} : \{f_c^{(k)}(0)\}_{k=1}^{\infty} \text{ está acotada}\}.$$

Aun así, existe una relación más profunda entre los conjuntos de Julia de funciones polinómicas de la forma $f_c(z) = z^2 + c$ y el conjunto de Mandelbrot M . La demostración de esta relación es el objetivo principal de este proyecto el cual establece una dicotomía entre los valores de $c \in \mathbb{C}$ para los cuáles el conjunto de Julia asociado a f_c es conexo y para los que no lo son.

Sin embargo, para entender la prueba de este resultado es necesario conocer un poco mejor el efecto de la función $f_c^{(-1)}$ sobre curvas suaves e introducir un resultado topológico previo relacionado con la conexión.

Definición 5.0.1 *Sea (X, τ) el espacio topológico y sea $Y \subset X$. Decimos que Y es conexo si para todo $A, B \in \tau$ con $A \cap B = \emptyset$ y $Y \subset A \cup B$ se tiene que o bien $Y \subset A$ o bien $Y \subset B$.*

Teorema 5.0.1 *Sean $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de conjuntos compactos de \mathbb{C} con $K_{n+1} \subset K_n$ y con ∂K_n conexo para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, entonces ∂K es un conjunto conexo.*

Prueba:

Paso 1: En primer lugar comprobaremos que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que:

$$\partial K_n \subset \bigcup_{a \in \partial K} U(a, \varepsilon).$$

Para ello, supongamos por reducción al absurdo que existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe un $n \geq n_0$ tal que

$$\partial K_n \not\subset \bigcup_{a \in \partial K} U(a, \varepsilon).$$

Esto implica que podemos encontrar una sucesión $\{n_k\}_k$ de modo que:

$$\partial K_{n_k} \not\subset \bigcup_{a \in \partial K} U(a, \varepsilon).$$

Tomamos $x_{n_k} \in \partial K_{n_k} \subset K_{n_k} \subset K_1$ tal que $x_{n_k} \notin \bigcup_{a \in \partial K} U(a, \varepsilon)$. Por compacidad, podemos suponer que la sucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es convergente hacia $x_0 \in K$. Este límite debe estar en K debido a que es una intersección de una familia decreciente de compactos.

Como $d(x_{n_k}, a) \geq \varepsilon$ para todo $a \in \partial K$ sabemos que $d(x_0, a) > \varepsilon/2 \forall a \in \partial K$ de donde se deduce que $x_0 \in K \setminus \partial K$. Es decir, $x_0 \in \text{int}(K)$.

Sin embargo, como $x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x_0$, se tiene que $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$, $x_{n_k} \in \text{int}(K) \subset \text{int}(K_{n_k})$ lo que contradice el hecho que $x_{n_k} \in \partial K_{n_k}$.

Paso 2: Veamos que ∂K es un conjunto conexo.

Observamos que ∂K es un conjunto compacto (por ser cerrado y acotado en \mathbb{C}). Supongamos por reducción al absurdo que $\partial K = A \cup B$ con A y B cerrados para la topología relativa a ∂K cumpliendo que $A \cap B = \emptyset$, $\partial K \cap A \neq \emptyset$ y $\partial K \cap B \neq \emptyset$.

Como A y B son conjuntos cerrados en la topología relativa a ∂K y este es cerrado, se tiene que A y B son cerrados también en \mathbb{C} y, por tanto, compactos. Consecuentemente, se tiene que:

$$r = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} > 0.$$

Sea $\varepsilon < r/2$, entonces $A \subset \bigcup_{a \in A} U(a, \varepsilon)$ y $B \subset \bigcup_{b \in B} U(b, \varepsilon)$. Por compacidad, podemos asumir que:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n U(a_i, \varepsilon) =: A_0 \quad \text{y} \quad B \subset \bigcup_{j=1}^m U(b_j, \varepsilon) =: B_0.$$

Es trivial comprobar que los conjuntos A_0 y B_0 son abiertos con $A_0 \cap B_0 = \emptyset$.

Por el Paso 1, se tiene que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$

$$\partial K_n \subset \bigcup_{a \in \partial K} U(a, \varepsilon) \subset A_0 \cup B_0.$$

Sin pérdida de generaliad, podemos suponer que para una cantidad infinita de valores de n se tiene que $\partial K_n \subset A_0$ y, en particular, para una cantidad infinita de n se tiene que $\partial K_n \subset U(a_{i_0}, \varepsilon)$.

Si $\partial K_n \subset U(a_{i_0}, \varepsilon)$ por la conexión de ∂K_n se tiene que $K_n \subset U(a_{i_0}, \varepsilon)$. Por tanto:

$$K \subset K_n \subset U(a_{i_0}, \varepsilon) \implies K \subset U(a_{i_0}, \varepsilon) \implies \partial K \subset B(a_{i_0}, \varepsilon) \implies \partial K \subset A_0.$$

Habíamos supuesto que $\partial K = A \cup B$. Sin embargo, acabamos de probar que $\partial K \subset A_0$ y como $A_0 \cap B = \emptyset$ concluimos que $\partial K \cap B = \emptyset$, lo cual no es posible ya que hemos supuesto que ∂K era disconexo. \square

Definición 5.0.2 Llamaremos **bucle** a una curva en el plano complejo diferenciable, cerrada y que no tiene autointersecciones. Además, nos referimos con **interior** y **exterior** del bucle a las partes de \mathbb{C} que se encuentran dentro y fuera de esta curva respectivamente.

Lema 5.0.1 Sea C un bucle en el plano complejo y $f_c(z) = z^2 + c$ para algún $c \in \mathbb{C}$ una función polinómica de grado dos.

- a) Si c está en el interior de C , entonces $f_c^{(-1)}(C)$ es un bucle. Además, f_c lleva el interior de $f_c^{(-1)}(C)$ en el interior de C y el exterior de $f_c^{(-1)}(C)$ en el exterior de C .
- b) Si c está en el exterior de C , entonces $f_c^{(-1)}(C)$ son dos bucles disjuntos ninguno de ellos contenido en el otro. Además, f_c lleva el interior de cada bucle de $f_c^{(-1)}(C)$ en el interior de C y la región de fuera de ambos bucles en el exterior de C .

Prueba:

Notemos que $f_c^{(-1)}(z) = \pm(z - c)^{\frac{1}{2}}$ y $[f_c^{(-1)}]'(z) = \pm\frac{1}{2}(z - c)^{-\frac{1}{2}}$ la cual es finita y no nula siempre que $z \neq c$. Por tanto, siempre que $c \notin C$, si seleccionamos una de las dos raíces de $f_c^{(-1)}(z)$, el conjunto $f_c^{(-1)}(C)$ es localmente una curva suave (y por tanto, diferenciable). Supongamos que c no recae en C y escogemos un punto inicial w en el bucle C y sean z_0 y $-z_0$ los dos posibles valores para $f_c^{(-1)}(w)$. Empezando en w , a medida que z se mueva por el bucle C , los dos valores de $f_c^{(-1)}(z)$ variarán de forma continua con z creando dos curvas C^+ y C^- que serán las imágenes inversas y serán también simétricas respecto al origen de coordenadas, es decir que si $z \in C^+$ entonces $-z \in C^-$.

Cuando z complete el bucle C y vuelva al punto w , las curvas imágenes inversas C^+ y C^- terminarán en los dos posibles valores para $f_c^{(-1)}(w)$, es decir, en z_0 o en $-z_0$ en algún orden. Tendremos entonces dos opciones:

- a) La curva imagen inversa C^+ empieza en z_0 y termina en $-z_0$ mientras que la curva imagen inversa C^- empieza en $-z_0$ y termina en z_0 . Uniendo las dos curvas C^+ y C^- obtenemos un único bucle que abarca todo $f_c^{(-1)}(C)$. Como f_c es una función continua que lleva el bucle $f_c^{(-1)}(C)$ y ningún otro punto más en el bucle C , entonces la función polinómica f_c lleva el interior y el exterior de $f_c^{(-1)}(C)$ en el interior y el exterior de C respectivamente.

Como las dos curvas C^+ y C^- son simétricas respecto al origen $z = 0$, este valor debe quedar dentro de $f_c^{(-1)}(C)$ y, por tanto $c = f_c(0)$ se encuentra en el interior de C .

b) La curva imagen inversa C^+ empieza y termina en z_0 mientras que la curva imagen inversa C^- empieza y termina en $-z_0$. En ese caso, C^+ y C^- son dos bucles cerrados que son ambos disjuntos y simétricos respecto $z = 0$. Por la continuidad de la función f_c , esta lleva el interior de cada bucle en el interior de C y la región fuera de C^+ y C^- la lleva fuera de C .

Observamos que el origen de coordenadas no puede estar en el interior de C^+ ni en el interior de C^- ya que en este caso se encontraría en el interior de ambos a la vez y esto no es posible porque son disjuntos. Por tanto $c = f_c(0)$ debe quedar en el exterior de C . □

A continuación, presentaremos y demostraremos el teorema fundamental del conjunto de Mandelbrot que representa el objetivo final del presente proyecto y relaciona todos los conceptos que se han presentado en el mismo.

Teorema 5.0.2 (Teorema Fundamental del conjunto de Mandelbrot) *Para $c \in \mathbb{C}$, el conjunto de Julia $J(f_c)$ es conexo si y solo si la sucesión de iteradas $\{f_c^{(k)}(0)\}_{k=1}^{\infty}$ está acotada, es decir si $c \in M$. En otro caso, el conjunto de Julia es desconexo en otro caso. Así:*

$$= \{c \in \mathbb{C} : \{f_c^{(k)}(0)\}_{k=1}^{\infty} \text{ está acotada}\} \quad (5.1)$$

$$= \{c \in \mathbb{C} : J(f_c) \text{ es conexo}\} \quad (5.2)$$

Prueba:

a) En primer lugar vamos que si $\{f_c^{(k)}(0)\}_{k=1}^{\infty}$ está acotada, entonces $J(f_c)$ es un conjunto conexo.

Recordemos que por el Teorema 4.2.2, si $|z| \geq |c| > 2$ entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} f_c^{(k)}(z) = \infty$. Además, como $\{f_c^{(k)}(0)\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada podemos tomar $C \subset \mathbb{C}$ un círculo centrado en 0 y de radio suficientemente grande (como mínimo mayor que 2) de modo que los puntos $\{f_c^{(k)}(0)\}_{k=1}^{\infty}$ queden dentro del círculo, $f_c^{(-1)}(C)$ esté en el interior de C y los puntos de fuera de C cumplan que $\lim_{k \rightarrow \infty} f_c^{(k)}(z) = \infty$. Veamos que la sucesión de bucles $\{f_c^{(-k)}(C)\}_{k=1}^{\infty}$ se va aproximando hacia el conjunto de Julia $J(f_c)$.

Como $c = f_c^{(1)}(0)$ está en el interior de C sabemos por el Lema 5.0.1 a) que $f_c^{(-1)}(C)$ es un bucle que se encuentra en el interior de C y que además c se encuentra también en el interior de $f_c^{(-1)}(C)$ ya que, en caso contrario, $f_c(c) = f_c(f_c(0)) = f_c^{(2)}(0)$ estaría fuera de C lo cual estamos suponiendo imposible.

Por tanto, podemos aplicar el mismo lema al bucle $f_c^{(-1)}(C)$ para garantizar que $f_c^{(-2)}(C)$ es también un bucle que se encuentra en el interior del bucle $f_c^{(-1)}(C)$ de modo que c queda en el interior del bucle $f_c^{(-2)}(C)$.

Procediendo recursivamente, $\{f_c^{(-k)}(C)\}_{k=1}^{\infty}$ consiste en una sucesión de bucles donde cada bucle se encuentra en el interior de su predecesor. Si denotamos por $C_k = f_c^{(-k)}(C)$ y al interior de este bucle por $\text{int}(C_k)$. Si $\tilde{C}_k = C_k \cup \text{int}(C_k)$, podemos definir K como el conjunto cerrado siguiente:

$$K = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k \cup \text{int}(C_k) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \tilde{C}_k.$$

Observamos que si $z \in K$, entonces $f_c^{(k)}(z)$ se encuentra en el interior de C para todo $k \in \mathbb{N}$ mientras que si $z \notin K$, existe un bucle $f_c^{(-k)}(C)$ de modo que z quedará fuera de este bucle y, por tanto $f_c^{(k)}(z)$ queda fuera de C y, consecuentemente, $\lim_{k \rightarrow \infty} f_c^{(k)}(z) = \infty$.

Esto implica que $\mathbb{C} \setminus K = A(f, \infty)$ la cual por el Teorema 3.3.10 vimos que era igual a $J(f_c) = \partial A(f, \infty)$. Por tanto, $\partial(\mathbb{C} \setminus K) = J(f_c)$.

Finalmente, por el Teorema 5.0.1 deducimos que ∂K es un conjunto conexo debido a que, por construcción, $\partial \tilde{C}_k = C_k$ son conjuntos conexos. Consecuentemente, tendremos que:

$$\partial K = \partial(\mathbb{C} \setminus K) = J(f_c),$$

de donde deducimos que el conjunto de Julia $J(f_c)$ es conexo.

b) Supongamos ahora que $\{f_c^{(k)}(0)\}_{k=1}^{\infty}$ no está acotada, veamos que $J(f_c)$ no es conexo usando un argumento similar al realizado en a). Sea C un círculo lo suficientemente grande para que $f_c^{(-1)}(C)$ esté en el interior de C , ninguna de las iteradas $\{f_c^{(k)}(0)\}_{k=1}^{\infty}$ recaiga en la curva C y los puntos que se encuentren fuera de C cumplan que $\lim_{k \rightarrow \infty} f_c^{(k)}(z) = \infty$. Sea p el natural más pequeño para el cual $f_c^{(p)}(0)$ esté en el exterior de C .

Siguiendo un argumento parecido al del apartado a) podemos construir una sucesión de bucles $\{f_c^{(-k)}(C)\}$ de modo que cada uno de ellos esté contenido en el interior del anterior. Sin embargo, este argumento falla cuando llegamos al bucle $f_c^{(1-p)}(C)$ debido a que $c = f_c(0)$ está fuera del bucle $f_c^{(1-p)}(C)$ y por tanto, para este bucle tenemos que aplicar apartado b) del Lema 5.0.1 en lugar del apartado a). Consecuentemente, $f_c^{(-p)}(C)$ serán dos bucles disjuntos contenidos en el interior de $f_c^{(1-p)}(C)$ de modo que f_c lleva el interior de cada uno de estos dos bucles en el interior de $f_c^{(1-p)}(C)$.

Observamos que el conjunto de Julia $J(f_c)$ recae dentro de estos bucles debido a que fuera de ellos las iteradas divergen hacia ∞ . Como $J(f_c)$ es invariante bajo $f_c^{(-1)}$ sabemos que si $z \in J(f_c)$, entonces $f_c^{(-1)}(z) \in J(f_c)$ y esta antiimagen llevará la parte positiva de la raíz en un bucle y la parte negativa de la raíz en el otro pero ambos serán puntos de $J(f_c)$. Por tanto, parte del conjunto de Julia $J(f_c)$ debe estar contenida en cada uno de los dos bucles. Consecuentemente, el conjunto $J(f)$ no será conexo porque tendremos parte del mismo incluida en los dos bucles que son disjuntos.

□

En la Figura 5.2 extraída de [FAL] podemos ver gráficamente este procedimiento iterativo que ilustra la prueba del Teorema 5.0.2.

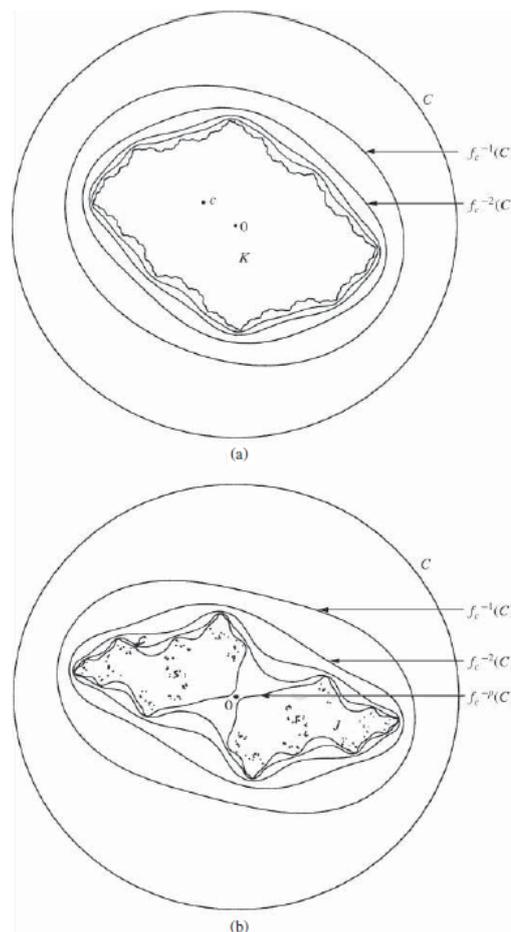


Figura 5.2: Iteradas inversas para el círculo C bajo f_c para ilustrar las dos partes de la prueba del Teorema 5.0.2. Apartado a con $c = -0,3 + 0,3i$ y apartado b con $c = -0,9 + 0,5i$.

Nota 5.0.1 El Teorema 5.0.2 nos garantiza que si $c \notin M$ entonces el conjunto de Julia asociado a $f_c = z^2 + c$ es desconexo. Sin embargo, se puede probar que no solo es desconexo sino que es completamente desconexo. La prueba de este hecho se puede consultar en [BLA2]. Además, por un teorema clásico de Topología cuya prueba se puede encontrar en la Sección 7 de [KEC], se tiene que el conjunto de Julia $J(f_c)$ es homeomorfo al conjunto de Cantor $2^{\mathbb{N}}$ debido a que se trata de un conjunto compacto, perfecto y totalmente desconexo.

La definición del conjunto de Mandelbrot $M = \{c \in \mathbb{C} : \{f_c^{(k)}(0)\}_{k=1}^{\infty} \text{ está acotada}\}$ es la base para dibujar el conjunto de Mandelbrot. Para hacerlo se escoge un valor de $r > 2$ y un k_0 de orden grande (como mínimo 100). Para cada $c \in \mathbb{C}$ se evalúan iteradas de la sucesión $\{f_c^{(k)}(0)\}_{k=1}^{\infty}$ hasta que $|f_c^{(k)}(0)| > r$ o bien hasta que $k = k_0$. En el primer caso se decide que $c \notin M$ mientras que en el segundo caso se asume que $c \in M$. Repetimos este proceso para valores de c dentro de una región para dibujar este conjunto de Mandelbrot.

En ocasiones, se representa con colores el conjunto M dependiendo del primer natural k para el cual $|f_c^{(k)}(0)| > r$. Sin embargo, este aspecto excede los contenidos del proyecto y, consecuentemente, no lo estudiaremos con detalle. Sin embargo, no podemos resistirnos a ofrecer una representación aproximada del conjunto de Mandelbrot extraída de [FAL]. Se puede observar en la Figura 5.3.

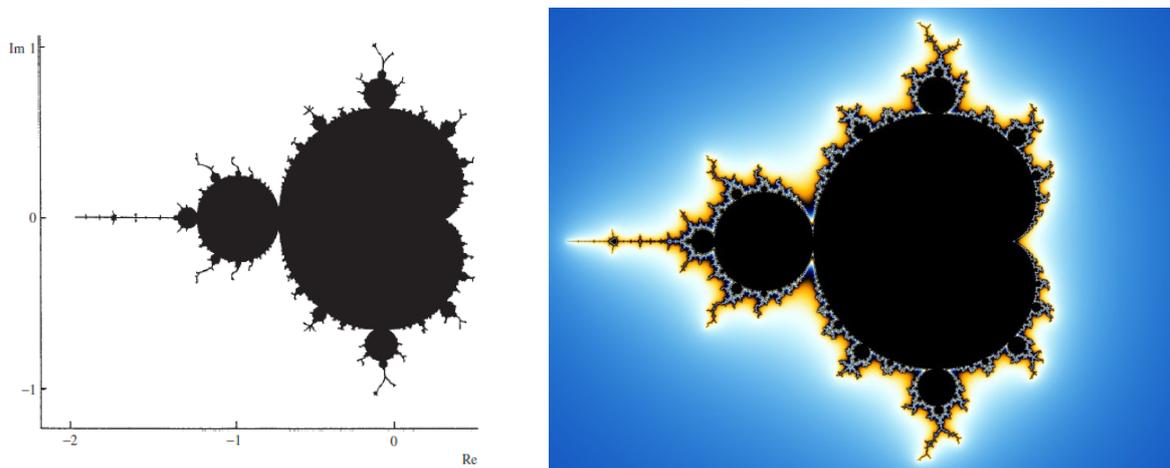


Figura 5.3: Conjunto de Mandelbrot en el plano complejo con el algoritmo de escape

Bibliografía

- [AHL] AHLFORS, L. *Complex Analysis*, third edition. McGraw-Hill, Inc. 1979.
- [BLA1] BLANCHARD, P. *Complex Analytic Dynamics on the Riemann Sphere*, American Mathematical Society, Volumen 11 (1), pág. 85 - 141, 1984.
- [BLA2] BLANCHARD, P. *Chaotic Dynamics and Fractals*, American Mathematical Society, pág. 181 - 2001, 1986.
- [DEV] DEVANEY, R. L. *A first Course in Chaotic Dynamical Systems*, second edition. CRC Press, 2020.
- [FAL] FALCONER, K. J. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, third edition. University of St Andrews, UK, 2014.
- [GAM] GAMELIN, T. W. *Complex Analysis*, Springer 2001.
- [HEL] HELMBERG, G. *Getting Acquainted with Fractals*, Walter de Gruyter, 2007.
- [KEC] KECHRIS, S. *Classical Descriptive Theory*, graduate Texts in Mathematics 156. Springer, 1995.
- [MAN] MANDELBROT, BENOIT B. *On the quadratic Mapping $z \rightarrow z^2 - \mu$ for complex μ and z : the fractal structure of its M set, and scaling*, North-Holland Publishing Company, Volumen 7, pág. 224-239, 1983.
- [VAL] VARONA, J. L. *Representación gráfica de fractales mediante un programa de cálculo simbólico*, La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, Volumen 6, pág. 214-230, 2003.

Anexos

Anexo 1: Conjunto de Julia para $f(z) = z^2 - 2$

Teorema 5.0.3 Consideremos la función $f(z) = z^2 - 2$. Si $z \notin [-2, 2]$, entonces la órbita $\{f^{(k)}(z)\}_{k=1}^{\infty}$ tiende a infinito.

Prueba:

En primer lugar, definimos por $R := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Sobre esta región definimos la función siguiente:

$$\begin{aligned} H: R \subset \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto H(z) = z + \frac{1}{z} \end{aligned}$$

Esta función es una función inyectiva en R ya que si tomamos $H(z) = H(w)$, entonces:

$$= \frac{z^2 + 1}{z} = z + \frac{1}{z} = w + \frac{1}{w} \iff \frac{z^2 + 1}{z} = \frac{w^2 + 1}{w} \iff w(z^2 + 1) = z(w^2 + 1) \iff$$

$$\iff wz(z + 1/z) = zw(w + 1/w) \iff zw = 1$$

Consecuentemente, si $|z| > 1$ se tendrá que $|w| = \frac{1}{|z|} < 1$ por tanto $w \notin R$. Por tanto, la única forma que $H(z) = H(w)$ con $z, w \in R$ es que $z = w$. Eso implica que, efectivamente, H es inyectiva en R .

En particular, se tiene que $H(R) = \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$. Para probar esto, tomamos $w \in \mathbb{C}$. Si planteamos y resolvemos la ecuación $H(z) = w$ obtenemos:

$$z + \frac{1}{z} = w \implies z^2 + 1 = zw \implies z^2 - zw + 1 = 0 \text{ Resolviendo la ecuación:}$$

$$z_{\pm} = \frac{w \pm \sqrt{w^2 - 4}}{2}$$

Observamos que

$$z_+ z_- = \frac{1}{4}(w^2 - (w^2 - 4)) = 1$$

. Por tanto, tendremos las siguientes opciones.

- O bien uno de los z_+ o z_- está en R y el otro está en el disco unidad $U(0, 1)$.
- O bien ambos se encuentran en el disco unidad.

En este último caso, se tendrá que $H(z_+) = H(z_-) \in [-2, 2]$. De aquí se deduce que H lleva la región R a $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ de forma inyectiva.

Notamos que $H(f_0(z)) = f_{-2}(H(z))$ para todo $z \in \mathbb{C}$ debido a que:

$$f_{-2}(H(z)) = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} - 2 = z^2 + \frac{1}{z^2} = H(z^2)$$

Por tanto, $f_0(z) = (H^{-1} \circ f_{-2} \circ H)(z)$ para todo $z \in R$. Como las órbitas de $z \in R$ bajo f_0 tienden a ∞ , entonces las órbitas $z \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ bajo f_{-2} también tenderán a infinito. □

Corolario 5.0.1 *El conjunto de Julia para $f_{-2}(z) = z^2 - 2$ es el intervalo $[-2, 2]$.* .

Como $J(f_{-2}) = \partial A(f_{-2}, \infty)$ y hemos probado en el Teorema 5.0.3 que $A(f_{-2}, \infty) = \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$, deducimos que:

$$J(f_{-2}) = \partial A(f_{-2}, \infty) = \partial(\mathbb{C} \setminus [-2, 2]) = [-2, 2].$$

□

En la Figura 5.4 comprobamos que el conjunto de Julia es efectivamente el propuesto en el Corolario 5.0.1.

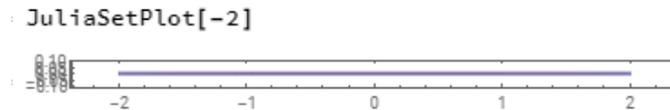


Figura 5.4: Conjunto de Julia para $f_{-2}(z) = z^2 - 2$.