

**UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS**



**TESIS DOCTORAL**

**TÉCNICAS DE DISEÑO Y ANÁLISIS DE  
MEZCLADORES MMIC MEDIANTE SERIES  
DE VOLTERRA**

**LUIS JAVIER REINA TOSINA**

**2002**



**UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA  
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS**

**TESIS DOCTORAL**

**TÉCNICAS DE DISEÑO Y ANÁLISIS DE  
MEZCLADORES MMIC MEDIANTE SERIES  
DE VOLTERRA**

**Autor:**

**Luis Javier Reina Tosina**

Ingeniero de Telecomunicación

**Director:**

**Carlos Crespo Cadenas**

Profesor Titular del Depto. de Ingeniería Electrónica

Universidad de Sevilla

**Sevilla, 2002**



# Certificado del Director de la Tesis

D. Carlos Crespo Cadenas, Profesor Titular del Area de Teoría de la Señal y Comunicaciones del Departamento de Ingeniería Electrónica de la Universidad de Sevilla

HACE CONSTAR

Que el trabajo titulado “Análisis y diseño de mezcladores FET mediante series de Volterra”, presentado por Luis Javier Reina Tosina para optar al título de Doctor Ingeniero de Telecomunicación, ha sido realizado en el Departamento de Ingeniería Electrónica de la Universidad de Sevilla bajo su dirección y que reúne todas las condiciones exigidas a los trabajos de doctorado.

Sevilla, a 10 de septiembre de 2002

Fdo.: Prof. Dr. Carlos Crespo Cadenas



*A la memoria de mi madre*

*In practice it appears that Volterra series do not enable us to do anything that can be done otherwise. However (...) [it] has the virtue that many such problems can be treated in an orderly way . . .*

Bedrosian y Rice (1971)





# Agradecimientos

Quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que han contribuido a la realización de esta Tesis, y en especial:

Al Prof. José Ignacio Acha, Responsable del Area de Teoría de la Señal y Comunicaciones del Departamento de Ingeniería Electrónica, por el apoyo que me ha proporcionado siempre y la confianza depositada en mí durante estos años.

Al Prof. Carlos Crespo, por haber dirigido mi labor de investigación desde antes de mi llegada al Departamento, por haberme dado la oportunidad de trabajar en el Grupo de Sistemas de Radiocomunicación y de participar en las labores de investigación que en él se realizan, y por haber dirigido con paciencia, disponibilidad y eficacia el trabajo que se presenta en esta Tesis.

A la Profa. Laura M. Roa, del Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, a quien también considero responsable de la formación recibida, por haberme guiado en el conocimiento de la metodología científica, y por su inestimable ayuda y confianza en momentos especialmente difíciles.

A todos los miembros del Area de Teoría de la Señal y Comunicaciones, por las muestras de continuo apoyo y el ambiente de compañerismo en el que han transcurrido estos años.

A mi familia y de una manera muy especial a mi padre, por los momentos que hemos compartido, los valores que me ha transmitido con su actitud frente a la vida y por enseñarme a valorar cada acontecimiento de ésta en su justa medida, sin perder nunca de vista las limitaciones del ser humano.

Hago también extensivo mi agradecimiento a las siguientes instituciones y empresas:

A la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología (CICYT) por la financiación, a través de los Proyectos TIC-96-0724-C06-06 y TIC-99-1172-C02-01, del material necesario para la realización de este trabajo.

Al Departamento de Señales, Sistemas y Radiocomunicaciones de la Universidad Politécnica de Madrid, por haber tenido la deferencia de facilitar sus instalaciones y equipos para la realización de algunas medidas.

A la empresa Tecnológica Componentes Electrónicos S.A., por la colaboración prestada en la realización de microfotografías y la financiación de varios *test-fixtures*.

# Resumen

En esta Tesis se aplican distintas metodologías de análisis no lineal de mezcladores FET basadas en la expansión funcional de Volterra. Partiendo de una revisión de los modelos actuales de FET de AsGa más extendidos, y de los métodos de la entrada armónica y las corrientes no lineales, la investigación realizada incluye las series de Volterra con *kernels* variantes en el tiempo y series dobles de Volterra. Se utilizan herramientas sistemáticas de análisis y fórmulas recursivas para la determinación de las corrientes no lineales. Mediante la aplicación de propiedades de simetría, se dedica especial atención a la extensión de los métodos de análisis para la descripción de configuraciones balanceadas.

Se proponen dos estructuras de baluns activos, basadas en el par diferencial, para equilibrar las entradas a los puertos de OL y salida de un mezclador doblemente balanceado. Para el análisis de los baluns se utilizan series de Volterra junto con un modelo adecuado para los dispositivos activos, y se obtienen expresiones cerradas para la evaluación de la ganancia e IMD. Se proponen criterios para la selección de los parámetros de diseño. Los resultados de las simulaciones se comparan con métodos alternativos de análisis no lineal, mostrando una buena correspondencia.

Se aplica una descripción general sobre las series dobles de Volterra al análisis de circuitos no lineales de microondas variantes en el tiempo, poniendo especial énfasis en mezcladores FET. Se obtienen fórmulas recursivas y expresiones cerradas de las funciones de transferencia no lineales, a partir de un método de las corrientes no lineales generalizado a sistemas no lineales con dos puertos de entrada. Este enfoque también se utiliza para presentar una demostración formal de la técnica de análisis de gran señal-pequeña señal.

Se propone un diseño de banda ancha para optimización de la IMD de un mezclador MMIC, con HEMTs en una configuración basada en la célula de Gilbert. El método desarrollado está basado en el análisis mediante series de Volterra y se obtienen expresiones en forma cerrada. Los dispositivos activos se polarizan en la región subumbral, en la que la dependencia de la corriente con la tensión drenador-fuente es

aproximadamente lineal, y se presenta una aproximación exponencial para la fuente de corriente del drenador. Se incluyen en el diseño baluns activos de OL y salida para reducir el nivel de OL. La ganancia de conversión teórica, el nivel óptimo de OL, la respuesta fundamental y el nivel de salida de la IMD han sido calculados. El método de análisis ha sido validado comparando los resultados teóricos con medidas. El chip ha sido construido utilizando HEMTs de AsGa del proceso ED02AH de la fundición Philips Microwave Limeil (ahora OMMIC). Este circuito con múltiples dispositivos ha sido ampliamente caracterizado mostrando un buen comportamiento entre 0,3 y 10 GHz, con ganancia de conversión en un ancho de banda de 7 GHz y bajo consumo de potencia, y características comparables con mezcladores de más baja frecuencia.

## **Palabras clave**

Mezcladores, series de Volterra, análisis no lineal de circuitos de microondas, circuitos variantes en el tiempo, dispositivos FET de AsGa, HEMT, matrices de conversión, distorsión por intermodulación, tecnología MMIC, baluns activos.

# Abstract

In this Thesis different methodologies based on Volterra functional expansion are applied to the nonlinear analysis of FET mixers. Starting with a revision of the most up-to-date widespread GaAs FET models, and the methods of the harmonic input and nonlinear currents, the performed research includes time-varying Volterra series and double Volterra series. A systematic approach and recursive formulas are applied to obtain nonlinear currents. Special attention is focused to the extension of analysis methods to the description of balanced structures by the application of symmetry properties.

Two active-balun structures based on a differential pair are proposed to balance the LO and output port of a double balanced mixer. A Volterra series approach based on an appropriate nonlinear model for active devices is followed to analyze the baluns and closed-form expressions are obtained for the evaluation of gain and IMD. Criteria for the selection of design parameters are proposed. Simulation results are compared with alternative nonlinear analysis methods, showing a good correspondence.

A general description of double Volterra series is applied to the analysis of nonlinear time-varying microwave circuits, with special emphasis on FET mixers. Recursion formulas and closed-form expressions for nonlinear transfer functions are obtained from a generalized nonlinear current method for two-input ports systems. This approach is also developed to present a formal demonstration of the large signal-small signal analysis technique.

Design for broadband IMD optimization of an MMIC mixer with HEMTs in a Gilbert cell configuration is proposed. The developed method is based on Volterra series analysis and closed-form expressions are obtained. Active devices are biased on the subthreshold region where current dependence on the drain-to-source voltage is nearly linear and an exponential approximation for the drain current source is presented. Both LO and output active baluns are included in the design to reduce the LO level. Theoretical gain, optimum LO level and fundamental response and two-tone IMD output level have been calculated. The analysis method was validated compa-

ring the theoretical results with measured data. The chip was fabricated using GaAs HEMTs with the ED02AH process of the Philips Microwave Limeil foundry (now OM-MIC). This multidevice circuit has also been widely characterized showing a good performance from 0,3 to 10 GHz, with conversion gain in a 7 GHz bandwidth and low power consumption, and figures comparable to lower frequency mixers.

## **Keywords**

Mixers, Volterra series, nonlinear microwave circuit analysis, time-varying circuits, GaAs FET devices, HEMT, conversion matrices, intermodulation distortion, MMIC technology, active baluns.

# Lista de abreviaturas y símbolos

2-DEG	Gas electrónico bidimensional ( <i>Two-Dimensional Electron Gas</i> )
AC	Corriente alterna ( <i>Alternating Current</i> )
$A_V$	Ganancia de tensión
AsGa	Arseniuro de Galio
BJT	Transistor bipolar de unión ( <i>Bipolar Junction Transistor</i> )
CG	Célula de Gilbert
$C_{gs}$	Capacidad puerta-fuente
$C_{gd}$	Capacidad puerta-drenador
CMRR	Relación de rechazo al modo común ( <i>Common Mode Reject Ratio</i> )
$C_{pg}$	Capacidad parásita de puerta
$C_{pd}$	Capacidad parásita de drenador
D	Terminal de drenador de un FET
DC	Corriente de continua ( <i>Direct Current</i> )
$D_k$	Distorsión armónica de orden $k$
$D_T$	Distorsión armónica total
ED02AH	Proceso OMMIC tipo "A" de HEMT pseudomórfico de $0,2 \mu\text{m}$ de longitud de puerta, de enriquecimiento o depleción
$E_f$	Nivel de Fermi
FET	Transistor de efecto de campo ( <i>Field-Effect Transistor</i> )
FI	Frecuencia intermedia
$\mathcal{F}[\cdot]$	Transformada de Fourier
$F_n[\cdot]$	Coefficiente de Fourier dividido por $n!$
G	Terminal de puerta de un FET
GaAsFET	FET de AsGa
$G_C$	Ganancia de conversión
$g_d$	Conductancia de drenador de pequeña señal
$G_d$	Conductancia de drenador de gran señal
$g_{kl}$	Coefficientes de la serie de Taylor de una no-linealidad dependiente
$\mathbf{G}_{kl}$	Matriz de conversión asociada a $g_{kl}(t)$
$g_m$	Transconductancia de pequeña señal
$G_m$	Transconductancia de gran señal
$G_{m2}$	Primera derivada de la transconductancia de gran señal

$G_{m3}$	Segunda derivada de la transconductancia de gran señal
HBT	Transistor bipolar de heterounión ( <i>Heterojunction Bipolar Transistor</i> )
HEMT	Transistor de alta movilidad electrónica ( <i>High Electron Mobility Transistor</i> )
HFET	Transistor de efecto de campo de heterounión ( <i>Heterojunction FET</i> )
$H_n(\omega_n)$	Función de transferencia no lineal de orden $n$
$\overline{H_n(\omega_n)}$	Función de transferencia simetrizada no lineal de orden $n$
$H_{nm}(\omega_n, \xi_m)$	Función de transferencia no lineal de orden $n + m$
$i_{ds}$	Corriente incremental drenador-fuente
$I_{ds}$	Corriente drenador-fuente
$I_D$	Corriente de polarización de drenador en DC
IM	Intermodulación
IM <sub>3</sub>	Producto de intermodulación de tercer orden
IMD	Distorsión por intermodulación ( <i>Intermodulation Distortion</i> )
IMR	Relación señal/intermodulación o rechazo a la intermodulación ( <i>Intermodulation Reject Ratio</i> )
InP	Fosforo de Indio
$i_{NL}(t)$	Corriente no lineal
$\mathbf{i}_{NL}$	Vector de corrientes no lineales
$i_{NLn}(t)$	Componente de orden $n$ de la corriente no lineal
$\mathbf{i}_{NLn}(t)$	Vector de corrientes no lineales de orden $n$
$\mathbf{i}_{NLn}(\omega_k)$	Componentes de la corriente no lineal de orden $n$ a las frecuencias $\omega_k + m\omega_p$
$IP_3^i$	Punto de intercepto de 3 <sup>er</sup> orden a la entrada (unidades logarítmicas)
$\langle IP_3^i \rangle$	Punto de intercepto de 3 <sup>er</sup> orden a la entrada (unidades del S.I.)
$IP_3^o$	Punto de intercepto de 3 <sup>er</sup> orden a la salida (unidades logarítmicas)
$\langle IP_3^o \rangle$	Punto de intercepto de 3 <sup>er</sup> orden a la salida (unidades del S.I.)
$L_d$	Inductancia parásita de drenador
$L_g$	Inductancia parásita de puerta
$L_s$	Inductancia parásita de fuente
LNA	Amplificador de bajo ruido ( <i>Low Noise Amplifier</i> )
$\mathbf{m}$	Vector de mezcla
MBE	Crecimiento epitaxial por haz molecular ( <i>Molecular Beam Epitaxy</i> )
MESFET	Transistor de efecto de campo metal-semiconductor ( <i>Metal-semiconductor FET</i> )
MIC	Circuito integrado de microondas ( <i>Microwave Integrated Circuit</i> )
MISFET	Metal-Insulator-Semiconductor FET
MMIC	Circuito integrado monolítico de microondas ( <i>Monolithic Microwave Integrated Circuit</i> )
MOSFET	Metal-Oxide-Semiconductor FET
MOCVD	Deposición química de vapor metal-orgánico ( <i>Metal Organic Chemical Vapor Deposition</i> )



$N_d$	Densidad de impurezas donadoras
$\mu_n$	Movilidad electrónica
OL	Oscilador Local
$\hat{p}[\cdot]$	Operador diferencial $d/dt[\cdot]$
$P_{disp}$	Potencia disponible de una fuente, en unidades logarítmicas
$\langle P_{disp} \rangle$	Potencia disponible de una fuente, en unidades del S.I.
PML	Philips Microwave Limeil
$P_o(\omega)$	Potencia de salida a la frecuencia $\omega$ , en unidades logarítmicas
$\langle P_o(\omega) \rangle$	Potencia de salida a la frecuencia $\omega$ , en unidades del S.I.
$\Re[\cdot]$	Parte real
$R_d$	Resistencia parásita de drenador
$R_g$	Resistencia parásita de puerta
$R_i$	Resistencia de carga de la capacidad $C_{gs}$
$R_s$	Resistencia parásita de fuente
RF	Radiofrecuencia
RFIC	Circuito integrado de radiofrecuencia ( <i>Radiofrequency Integrated Circuit</i> )
S	Terminal de fuente de un FET
S.I.	Sistema Internacional de Medidas
$\tau$	Parámetro de dispersión de la fuente de corriente $i_{ds}$
TEGFET	Two-Dimensional Electron Gas FET
$v_{gs}$	Tensión incremental puerta-fuente
$V_{gs}$	Tensión puerta-fuente
$V_{GS}$	Tensión de polarización de puerta-fuente en DC
$v_{ds}$	Tensión incremental drenador-fuente
$V_{ds}$	Tensión drenador-fuente
$V_{DS}$	Tensión de polarización de drenador-fuente en DC
VHF	Very High Frequency
$\omega_m$	Frecuencia correspondiente a la mezcla $m$
$\boldsymbol{\omega}_m$	Vector de frecuencias correspondiente a la mezcla $m$
$\boldsymbol{\omega}_n$	Vector de frecuencias de longitud $n$
$(\omega)_\mu$	Cadena de $\mu$ argumentos $\underbrace{\omega, \omega, \dots, \omega}_\mu$
$x(t)$	Señal en el dominio del tiempo
$X(\omega)$	Espectro de la señal $x(t)$
$Z_{0e}$	Impedancia característica del modo par
$Z_{0o}$	Impedancia característica del modo impar



# Índice general

<b>Certificado del Director de la Tesis</b>	<b>I</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>V</b>
<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>Abstract</b>	<b>IX</b>
<b>Lista de abreviaturas y símbolos</b>	<b>XI</b>
<b>I. Introducción</b>	<b>1</b>
I.1. Planteamiento general . . . . .	1
I.2. Antecedentes y metodología . . . . .	4
I.3. Objetivos y estructura de la Tesis . . . . .	8
Bibliografía . . . . .	9
<b>II. Modelado y caracterización de dispositivos de AsGa</b>	<b>17</b>
II.1. Propiedades eléctricas del AsGa . . . . .	18
II.2. Contacto de barrera Schottky . . . . .	20
II.3. El transistor MESFET . . . . .	21
II.4. Heteroestructuras . . . . .	23
II.5. El transistor de alta movilidad electrónica (HEMT) . . . . .	24
II.6. Extracción de parámetros en transistores HEMT y MESFET . . . . .	26
II.6.1. Extracción de parámetros extrínsecos . . . . .	30
II.7. Modelos de gran señal . . . . .	34
II.7.1. Modelos básicos . . . . .	35
II.7.2. Modelos para la región de saturación . . . . .	38

II.7.3. Modelos para FETs resistivos o polarizados en la región lineal . . .	44
II.7.4. Modelo FET del proceso ED02AH de Philips Microwave Limeil . . .	50
Bibliografía . . . . .	53
<b>III. Series de Volterra</b>	<b>57</b>
III.1. Representación mediante Series de Volterra . . . . .	58
III.2. Análisis de entradas multitono mediante series de Volterra . . . . .	60
III.3. Determinación de las funciones de transferencia no lineales . . . . .	65
III.3.1. Método de las entradas armónicas . . . . .	68
III.3.2. Método de las corrientes no lineales . . . . .	75
III.4. Distorsión armónica e intermodulación . . . . .	80
III.5. Extracción de los coeficientes de las corrientes no lineales . . . . .	83
III.6. Etapas no lineales en cascada . . . . .	88
III.7. Series dobles de Volterra . . . . .	91
Bibliografía . . . . .	95
<b>IV. Estructuras balanceadas para mezcladores</b>	<b>99</b>
IV.1. Elementos acopladores, híbridos y baluns . . . . .	100
IV.1.1. Híbridos de 90° . . . . .	101
IV.1.2. Híbridos de 180° . . . . .	103
IV.1.3. Híbridos de elementos concentrados . . . . .	106
IV.1.4. Baluns . . . . .	107
IV.2. Propiedades de las estructuras balanceadas . . . . .	109
IV.2.1. Análisis mediante series de Volterra . . . . .	110
IV.3. Análisis de un par diferencial . . . . .	113
IV.4. Análisis sistemático de estructuras balanceadas . . . . .	117
IV.5. Aplicación al diseño de baluns activos . . . . .	118
Bibliografía . . . . .	123
<b>V. Técnicas de análisis no lineal de mezcladores</b>	<b>125</b>
V.1. Balance armónico . . . . .	127
V.2. Análisis de pequeña señal. Matrices de conversión . . . . .	136
V.3. Series de Volterra con <i>kernels</i> variantes en el tiempo . . . . .	144
V.4. Análisis de mezcladores FET mediante series dobles de Volterra . . . . .	150
Bibliografía . . . . .	154

<b>VI. Estructuras analizadas. Resultados</b>	<b>157</b>
VI.1. Mezcladores doblemente balanceados. Célula de Gilbert . . . . .	158
VI.2. Análisis de la Célula de Gilbert . . . . .	161
VI.2.1. Determinación de las componentes armónicas de $I_{12}$ . . . . .	163
VI.2.2. Análisis aproximado de pequeña señal . . . . .	165
VI.2.3. Método de diseño . . . . .	167
VI.2.4. Resultados . . . . .	168
VI.3. Análisis de un mezclador resistivo . . . . .	173
VI.3.1. Análisis de gran señal . . . . .	177
VI.3.2. Análisis de pequeña señal . . . . .	179
VI.3.3. Resultados . . . . .	184
Bibliografía . . . . .	186
<b>Conclusiones</b>	<b>191</b>
<b>A. Tecnología utilizada</b>	<b>195</b>
A.1. Estructura de capas . . . . .	196
A.2. Elementos disponibles . . . . .	198
Bibliografía . . . . .	200
<b>B. Relación de trabajos publicados</b>	<b>201</b>



# Capítulo I

## Introducción

### I.1. Planteamiento general

Durante los últimos años se está asistiendo a un crecimiento espectacular en el desarrollo de complejos sistemas de radio móvil, entre los que se incluye la telefonía celular, sistemas de posicionamiento global por satélite, o las redes de área local inalámbricas (WLAN). Este hecho ha acelerado la necesidad de diseñar equipos altamente integrados que combinen elevadas prestaciones, bajo consumo y coste, con un tamaño compacto, representando un reto para los investigadores de radiofrecuencia (RF), microondas y ondas milimétricas, la determinación de soluciones óptimas para los transceptores que operan a dichas frecuencias. Esta tendencia ha evolucionado en paralelo con la expansión de la tecnología de circuitos integrados monolíticos de microondas (MMIC). A medida que el espectro radioeléctrico disponible esté cada vez más saturado, se requerirán nuevos esquemas de control de potencia y de modulación/demodulación espectralmente eficientes [1]. Esta demanda creará oportunidades para nuevas arquitecturas de circuitos integrados de radiofrecuencia (RFIC).

Los cabezales de RF y microondas requieren numerosos tipos de circuitos pasivos y activos, lineales y no lineales. Estos últimos están basados en dispositivos de estado sólido como diodos Schottky o PIN, y transistores BJT, MOSFET, MESFET, HBT o HEMT. Los dispositivos de estado sólido han tenido un enorme impacto sobre el desarrollo de los sistemas de RF y microondas [2]. Los circuitos que hacen uso de tales elementos incluyen amplificadores, osciladores, multiplicadores, mezcladores, conmutadores, desfasadores, atenuadores, limitadores, y muchos otros, tanto en transmisión como en recepción. Dos dispositivos han centrado la atención de los investigadores en los últimos años: el transistor de alta movilidad electrónica (HEMT) y el transistor bipolar de heterounión (HBT). En la actualidad, los bloques básicos de los transceptores que se realizan con FETs de AsGa y HEMTs comprenden conmutadores [3], desfasadores [4], mezcladores [5, 6], amplificadores de bajo ruido (LNA), de potencia [7], y de ganancia variable. Se utilizan HBTs de AsGa en las etapas de ganancia variable [8] y amplificadores de potencia [9, 10].

La miniaturización de los componentes pasivos representa un aspecto fundamental en el desarrollo de circuitos de bajo coste. Esto se ha conseguido con elementos de parámetros concentrados, la tecnología MMIC y componentes cerámicos de alta constante dieléctrica, abriendo la puerta a nuevas alternativas para el desarrollo de acopladores y filtros altamente integrados [11, 12]. A bajas frecuencias, los circuitos MIC y MMIC, que utilizan bobinas y condensadores concentrados, ocupan un tamaño que es un orden de magnitud inferior a sus análogos de parámetros distribuidos. Una ventaja adicional de utilizar componentes concentrados es que se pueden utilizar técnicas y metodologías de diseño propias de aplicaciones de más baja frecuencia hasta la banda X [13]. Los circuitos MMIC son ligeros, de tamaño extremadamente pequeño, de bajo coste y susceptibles de ser procesados por lotes, y cada vez es mayor el volumen de la producción científica y comercial de RFICs multifunción [14, 15, 16].

En la reducción de los costes de diseño y desarrollo ha jugado un papel fundamental la introducción de nuevos métodos y técnicas sistemáticas de análisis y diseño, y el perfeccionamiento de un CAD comercial con una simulación circuital orientada al *layout*. La mejora de los procesos y un modelado de los componentes cada vez más exacto, por parte de las fundiciones, han sido también decisivos para la consecución de estos objetivos [17].

Uno de los subsistemas básicos en todo transceptor es el mezclador. Los moduladores, demoduladores, convertidores de frecuencia o mezcladores, son casos particulares de multiplicadores que se diseñan con restricciones de frecuencia y ruido [18]. En la Figura 1.1 se muestra la arquitectura típica del cabezal de un receptor. El mezclador de conversión descendente baja la señal de RF, procedente del LNA, a una frecuencia intermedia (FI), con ayuda de un oscilador local (OL). Esto permite que tanto la selección del canal como el control de la ganancia se realice a frecuencias más bajas, donde es menos costoso construir filtros de alto factor de calidad ( $Q$ ) y amplificadores de ganancia variable. En lugar de utilizar un filtro de FI de sintonía variable, es una práctica común dejar fija la banda de paso de FI y variar la frecuencia de OL para sintonizar el canal deseado. El LNA amplifica la señal de RF para mitigar el ruido que produce el mezclador. Los filtros de RF y de frecuencia imagen rechazan las señales fuera de banda para evitar que puedan alcanzar las etapas de FI. El mezclador es un bloque básico porque su comportamiento afecta decisivamente a las prestaciones de todo el receptor y determina las especificaciones de los subsistemas adyacentes, incluyendo las etapas de FI.

El proceso de mezcla se realiza mediante la inserción de elementos no lineales en circuitos variantes en el tiempo. Tradicionalmente los diodos Schottky se han utilizado como elementos de mezcla a frecuencias de microondas. A pesar de que todavía se siguen publicando diseños de mezcladores a diodo [19], estos dispositivos presentan uno de los comportamientos más fuertemente no lineales y ruidosos entre los componentes de microondas, y por tanto su utilización implica numerosas desventajas que pueden desaconsejar su aplicación.



La operación no lineal es difícil de describir analíticamente, y en consecuencia el desarrollo de diseños óptimos resulta extremadamente complejo. Además de los cambios de amplitud y desplazamientos de fase propios de los sistemas lineales, en los circuitos no lineales variantes en el tiempo las señales y el ruido sufren desplazamientos de frecuencia, lo que contribuye a la generación de espurias, que degradan el comportamiento del mezclador.

Una posible solución que mejora la protección frente a la generación de armónicos y productos de intermodulación consiste en utilizar dos o más diodos en estructuras balanceadas. A pesar del inconveniente de tener que añadir híbridos o baluns, generalmente implementados mediante circuitos pasivos, los mezcladores balanceados permiten la cancelación de ciertas señales espurias. Sin embargo, al aumentar el número de dispositivos, el análisis del comportamiento no lineal es aún más complicado, y existen pocas referencias que incluyan criterios de diseño óptimo para mezcladores a diodo balanceados.

Por otra parte, la aplicación de dispositivos activos en la banda de microondas permite trabajar con señales de bajo nivel a la entrada. Durante los últimos treinta años diferentes tipos de transistores FET de AsGa han sido ampliamente utilizados para la construcción de mezcladores. Los dispositivos FET ofrecen numerosas ventajas sobre los diodos, al presentar mejor factor de ruido y una elevada ganancia de conversión. No obstante, el diseño de mezcladores activos no está exento de dificultades, ya que mientras que es posible hacer excelentes predicciones de primer orden del comportamiento de los mezcladores a diodo con un análisis lineal, y es un hecho conocido que la mezcla de un diodo se realiza razonablemente bien casi con independencia del resto del circuito, estas condiciones no son ciertas en el caso de un mezclador FET. La simulación del funcionamiento requiere técnicas avanzadas de modelado y análisis no lineal. El análisis del ruido es también más complicado en este tipo de mezcladores. Esta problemática es tanto más evidente cuanto mayor es el número de dispositivos que constituyen el circuito, como ocurre por ejemplo con los mezcladores FET balanceados.

Una de las herramientas más extendidas para el análisis de sistemas no lineales es la expansión funcional en series de Volterra, con la que se han podido describir gran variedad de fenómenos ligados a las no-linealidades de circuitos de microondas, abarcando tanto amplificadores como osciladores y mezcladores. Existe una opinión gene-

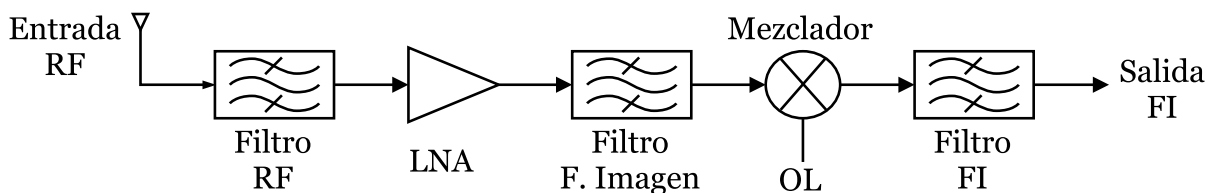


Figura 1.1: Cabezal de RF de un receptor heterodino.

realizada de que las series de Volterra sólo son adecuadas para el estudio de sistemas débilmente no lineales y el cálculo de pequeñas distorsiones, debido a la dificultad de la representación matemática de las funciones de transferencia no lineales de órdenes altos. Sin embargo, a diferencia de otros métodos de análisis, esta técnica no está basada en un algoritmo de iteración numérica, y existen procedimientos sistemáticos de análisis que permiten la determinación de componentes de alto orden a partir de fórmulas recursivas. Además, resulta muy eficiente para el estudio de circuitos excitados por señales formadas por múltiples tonos.

Las series de Volterra permiten la descripción del comportamiento no lineal mediante fórmulas cerradas, y en la mayoría de los casos se obtienen excelentes resultados considerando exclusivamente componentes hasta de tercer orden. En las funciones de transferencia no lineales está recogida toda la información que determina la respuesta del sistema, y su conocimiento supone una importante ayuda para entender un poco mejor los aspectos que pueden mejorar el comportamiento ante fenómenos no lineales. Por todas estas razones, la representación en series de Volterra constituye una herramienta idónea para el estudio de mezcladores y otros circuitos no lineales de microondas.

Con esta Tesis se pretende ofrecer una visión amplia y detallada sobre el análisis de mezcladores FET mediante series de Volterra. Partiendo de una descripción general, los métodos estudiados incluyen las series de Volterra con *kernels* variantes en el tiempo y series dobles de Volterra, constituyendo esta última una herramienta propuesta por Rice y que sin embargo no se ha visto aplicada en la bibliografía consultada reciente, y que permite la descripción elegante y formal de sistemas no lineales con dos puertos de entrada, como ocurre en el caso de un mezclador. Como aportaciones propias se presentan extensiones de los métodos aplicadas al análisis no lineal de estructuras balanceadas, incluyendo criterios de diseño para la optimización de las características no lineales. Se muestra que haciendo uso de ciertas propiedades de simetría, es posible reducir el análisis de circuitos con más de un transistor, al de un solo dispositivo. La metodología empleada ha sido aplicada al diseño y análisis de un mezclador MMIC doblemente balanceado, basado en la célula de Gilbert, que ha sido construido en la fundación Philips Microwave Limeil (ahora OMMIC), ofreciéndose como resultados estudios comparativos entre las medidas realizadas y las predicciones simuladas del comportamiento con las técnicas estudiadas.

### I.2. Antecedentes y metodología

Una exhaustiva revisión histórica sobre la evolución de los mezcladores de microondas a lo largo del último medio siglo ha sido publicada recientemente por Oxley [20]. Considerando los diseños que utilizan dispositivos FET de microondas, estos se han realizado durante las últimas tres décadas siguiendo una amplia variedad de

configuraciones circuitales. El impacto de los mezcladores MESFET se inicia en la década de 1970, destacando las contribuciones de Pucel [21] al estudio de mezcladores de puerta, utilizando una extensión del análisis lineal que se utiliza para mezcladores a diodo. Este tipo de mezclador es el más comúnmente utilizado durante esos años [22], inyectándose la señal de OL por la puerta del transistor, al igual que la de RF. La señal de FI se obtiene por el drenador mediante filtrado. La principal contribución a la conversión de frecuencia es debida a la variación de la transconductancia del FET, y de ahí que se designe a este tipo de mezcladores como de transconductancia.

La inserción del OL por el drenador o la fuente han recibido, comparativamente, mucha menos atención. Los mezcladores a drenador son adecuados cuando las frecuencias de RF y OL están próximas y no pueden ser insertadas por el mismo acceso [23]. Sin embargo, la dificultad estriba en la realización de un diplexor eficiente para la obtención de la FI y su separación de la señal de OL. No obstante, las contribuciones basadas en esta configuración han sido numerosas a lo largo de la última década [24, 25] y hasta muy recientemente [26]. En cuanto a los mezcladores de fuente [27], dado que la capacidad puerta-fuente ( $C_{gs}$ ) presenta un valor considerable, el aislamiento OL-RF es bastante pobre.

A partir de la década de 1980, los avances en los procesos tecnológicos y el desarrollo de nuevos materiales se pueden considerar suficientemente evolucionados para que los mezcladores MMIC puedan competir con tecnologías híbridas y MIC. Las ventajas de realizar una modulación directa [28] hace que la frecuencia de trabajo sea cada vez más alta, haciéndose extensiva la construcción de mezcladores para las bandas K y Q, o de banda ultraancha [29], mediante la aplicación de transistores HEMT [30] y de doble puerta [31]. Esta tendencia se ha mantenido hasta la actualidad, con diseños que llegan hasta la banda W [32, 6], y se espera que la tendencia continúe durante los próximos años.

Otro aspecto que ha cobrado una importancia decisiva para la evolución de los mezcladores MMIC durante la última década, ha sido la implementación monolítica de los baluns y estructuras acopladoras, haciendo más flexible la construcción de mezcladores simple y doblemente balanceados. Además de favorecer la miniaturización, se pretende minimizar las pérdidas, ofrecer una respuesta de banda ancha y buscar la compatibilidad e integración del conjunto en un mismo circuito. Entre los ejemplos revisados destacan los basados en elementos concentrados [33], baluns de Marchand para mezcladores en estrella [34], o baluns espirales para mezcladores en anillo [35]. Sin embargo todavía son relativamente escasas las contribuciones sobre baluns activos [36], a pesar de su potencial utilidad para reducir el nivel de OL.

La consolidación de la tecnología MMIC y la posibilidad de realizar RFICs multifunción, incluyendo amplificadores y mezcladores, junto con la tendencia a reducir el consumo de potencia y los niveles de alimentación, han relanzado nuevamente el interés por los mezcladores pasivos en los últimos años. Sin embargo, en lugar de utilizar

diodos como elementos de mezcla, numerosos estudios han mostrado que se pueden conseguir prestaciones muy superiores en cuanto a características de IM y ruido, con un transistor FET operado como una conductancia variable. El mezclador resistivo, inicialmente introducido por Maas [37] utilizando MESFET, ha sido implementado en distintas tecnologías, incluyendo MISFET [38] y HEMT [39]. Las configuraciones estudiadas comprenden, además del mezclador simplemente terminado [40], distintas estructuras simplemente balanceadas con uno [41] o varios dispositivos [42], y doblemente balanceadas [43, 44]. Se han publicado mezcladores resistivos operando a una frecuencia de 110 GHz con transistores HEMT [45].

En cuanto a la metodología utilizada, al igual que sucede con otros circuitos de microondas, las técnicas de análisis no lineal de mezcladores se pueden clasificar en cuatro grandes grupos [46]: métodos de integración directa, funciones descriptivas, balance armónico y series de Volterra. Los métodos de integración directa operan en el dominio del tiempo y su uso ha venido potenciado por la existencia de herramientas comerciales de simulación. A pesar de que estos simuladores se aplican extensivamente al análisis de circuitos de baja frecuencia, el tiempo de cómputo para alcanzar la respuesta en régimen permanente es considerable cuando aparecen estructuras de parámetros distribuidos, como es común en circuitos de microondas. Además, cuando intervienen frecuencias altas la resolución temporal debe ser fina, debido a la disparidad entre las frecuencias de interés. Por las razones expuestas, no es aconsejable utilizar este método para el análisis de mezcladores.

La técnica de funciones descriptivas trata de extender el concepto de respuesta en frecuencia a los sistemas no lineales [47]. La precisión de este tipo de análisis depende del nivel de filtrado que tengan los armónicos superiores a la salida. Al proporcionar sólo una aproximación al armónico fundamental, este método pierde el resto de la información armónica del sistema.

Aunque durante los últimos años se han analizado mezcladores con distintas técnicas que operan en el dominio de la frecuencia [48, 49], sin duda los métodos más extendidos son el balance armónico [50] y el análisis mediante series de Volterra. El balance armónico es un método iterativo que se aplica principalmente a circuitos fuertemente no lineales excitados por una señal de alto nivel, mientras que las series de Volterra se utilizan generalmente con circuitos débilmente no lineales excitados por múltiples tonos de pequeña amplitud. La popularidad del balance armónico ha crecido en paralelo con el desarrollo de modelos de gran señal para dispositivos FET [51, 52, 53] y HBT [54]. Sin embargo, a pesar de la proliferación de simuladores comerciales basados en esta técnica, y de que se conocen algoritmos que permiten abordar razonablemente bien el análisis de IM en mezcladores excitados por entradas multitono mediante balance armónico [55], el tiempo de simulación y la convergencia se degradan a medida que aumenta el número de señales de entrada.

Como solución, se han explorado otras alternativas enfocadas hacia la descripción

del mezclador como un circuito variante en el tiempo. De hecho, los primeros trabajos teóricos sobre el análisis de mezcladores a diodo describen el proceso de conversión de frecuencia mediante matrices de conversión [56]. Swerdlow aplica una serie de Volterra con *kernels* variantes en el tiempo, al análisis de la intermodulación en un varactor, asumiendo que la forma de onda de la corriente en el diodo bombeado se puede describir mediante una señal sinusoidal [57]. Teniendo en cuenta que el OL hace trabajar al mezclador en un régimen fuertemente no lineal, se han obtenido excelentes resultados mediante la técnica conocida como análisis de gran señal-pequeña señal, estudiando primero el FET bombeado por el OL mediante balance armónico, y a continuación el proceso de mezcla con la señal de RF aplicando un análisis lineal con matrices de conversión [58, 59]. Sin embargo, este método no permite la descripción de fenómenos de segundo o tercer orden, al resolver el problema de pequeña señal mediante un análisis puramente lineal. La aplicación de las series de Volterra al método de gran señal-pequeña señal es introducida por Maas para la descripción de la IM en mezcladores a diodo [60]. Más adelante Peng y cols. la extienden al análisis de mezcladores FET [61], convirtiéndose en un de los métodos más populares para la caracterización de la IMD de diferentes tipos de mezcladores.

Las series de Volterra se han utilizado en los últimos años para el análisis de una gran variedad de fenómenos no lineales en circuitos de microondas, incluyendo el análisis de la distorsión por intermodulación (IMD) de RFICs excitados por señales multitono [62], la fase relativa de la característica de transferencia de la intermodulación de tercer orden ( $IM_3$ ) en amplificadores [63], o el comportamiento de la IMD y el ruido en mezcladores [64] y amplificadores [65]. La aplicación de esta técnica se ha extendido también al estudio de la modulación cruzada en amplificadores [66], el efecto de las terminaciones de fuente y carga sobre la intermodulación en amplificadores [67, 68] o el modelado del “recrecimiento” espectral [69].

A pesar de que está ampliamente aceptado que la fuente de corriente  $I_{ds}(V_{gs}, V_{ds})$  es la principal responsable del comportamiento no lineal en un FET, y que se conoce un gran número de modelos empíricos para describir esta no-linealidad, los métodos empleados para el análisis de mezcladores no utilizan toda esta información. Otros descubrimientos recientes han puesto de manifiesto algunas limitaciones de las aproximaciones utilizadas en el análisis. Así, García y cols. han mostrado la contribución de las capacidades  $C_{gs}$  y  $C_{gd}$  al comportamiento no lineal del FET [70], e innovadores métodos de caracterización experimental permiten la extracción de nuevos parámetros y coeficientes para la simulación mediante series de Volterra [71]. Sin embargo en la bibliografía referenciada a lo largo de esta Tesis pueden encontrarse numerosos ejemplos en los que se utilizan hipótesis simplificadoras como la unilateralidad del FET o el modelado de la corriente como una conductancia no lineal en paralelo con una fuente dependiente, sin atender a los términos cruzados ( $g_{kl}$ ). Por último, salvo excepciones [72], el análisis se extiende sólo a configuraciones de mezcladores de un solo FET.

### I.3. Objetivos y estructura de la Tesis

A la vista de los antecedentes, el objetivo fundamental de la presente Tesis consiste en aportar soluciones encaminadas a facilitar el análisis de mezcladores FET de microondas mediante series de Volterra. Este objetivo general se puede desglosar en los siguientes objetivos preferentes:

- Herramientas de análisis con un enfoque sistemático y una metodología independiente de la configuración circuital.
- Extensión de los métodos a estructuras balanceadas.
- Inclusión de los coeficientes de los términos cruzados de la no-linealidad dependiente y eliminación de otras hipótesis simplificadoras cuando impliquen pérdida de generalidad.
- Obtención de criterios de diseño que permitan la optimización de las características no lineales.

Teniendo en cuenta que un gran proporción de los mezcladores comentados en esta Introducción emplean configuraciones equilibradas, se dedicará especial atención al tratamiento de las estructuras balanceadas. Entre otros objetivos secundarios, pueden citarse:

- Análisis y diseño de baluns activos MMIC basados en el par diferencial, incluyendo características no lineales.
- Diseño de un mezclador activo MMIC doblemente balanceado basado en la célula de Gilbert.
- Análisis de un mezclador FET resistivo simplemente terminado.

Estos objetivos se desarrollan a lo largo de cinco capítulos, estructurados de la siguiente manera:

Tras esta Introducción, el Capítulo II presenta una revisión de los dispositivos FET de AsGa y sus modelos. En las primeras secciones se exponen nociones básicas sobre los principios de funcionamiento del MESFET y HEMT. A continuación, se resumen las técnicas de extracción de parámetros para la caracterización de los FETs mediante modelos de pequeña señal. La última parte está dedicada a los modelos de gran señal, agrupados según se apliquen a dispositivos polarizados en saturación o en la zona lineal.

El Capítulo III trata sobre la descripción de sistemas no lineales excitados por señales multitono mediante series de Volterra. Se revisan los métodos de la entrada armónica y las corrientes no lineales, que son ilustradas con algunos ejemplos. Se incluye

una sección sobre la extracción de coeficientes de las corrientes no lineales. Los conceptos de distorsión armónica e intermodulación son también objeto de estudio de este capítulo, que continúa con el análisis no lineal de etapas en cascada y concluye con un apartado dedicado a las series dobles de Volterra.

El análisis no lineal de las estructuras balanceadas se desarrolla en el Capítulo IV. La primera parte resume los circuitos que se utilizan como elementos acopladores para equilibrar las entradas y salidas de los mezcladores. Tras presentar las propiedades de simetría de las componentes acopladas por estas estructuras, como aportaciones de esta Tesis se describe un método sistemático para el análisis de baluns activos, partiendo del material expuesto en el Capítulo III. La última parte de este capítulo es una aplicación de dicho método al diseño de los baluns de OL y FI de un mezclador MMIC.

En el Capítulo V se detallan los principales métodos de análisis para mezcladores FET. Sin olvidar las técnicas de balance armónico y el método de gran señal-pequeña señal, se pone especial énfasis en el análisis mediante series de Volterra con *kernels* variantes en el tiempo. Otra aportación de este capítulo es la descripción de mezcladores mediante series dobles de Volterra, ofreciéndose expresiones cerradas para las funciones de transferencia no lineales de un mezclador FET. Asimismo, se utiliza este enfoque para presentar una demostración formal del método de gran señal-pequeña señal.

Los métodos expuestos son aplicados en el Capítulo VI al diseño y análisis de un mezclador MMIC doblemente balanceado basado en la célula de Gilbert. Se analiza detalladamente este mezclador, derivándose criterios de diseño, y se comparan los resultados de las simulaciones con medidas a un MMIC. La segunda parte de este capítulo presenta el análisis de un mezclador FET resistivo utilizando series de Volterra con *kernels* variantes en el tiempo.

Por último, las conclusiones y líneas de investigación propuestas se recogen al final de la memoria.

## Bibliografía

- [1] L. M. Burns, "Applications for GaAs and silicon integrated circuits in next generation wireless communication systems," *IEEE J. Solid State Circuits*, Vol. 30, No. 10, pp. 1088–1095, oct. 1995.
- [2] G. I. Haddad y R. J. Trew, "Microwave solid-state active devices," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 50, No. 3, pp. 760–779, mar. 2002.
- [3] M. Hieda, K. Nakahara, K. Miyaguchi, H. Kurusu, Y. Iyama, T. Takagi, y S. Urasaki, "High-isolation series-shunt FET SPDT switch with a capacitor cancelling

- FET parasitic inductance," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 49, No. 12, pp. 2453–2458, dic. 2001.
- [4] D. Viveiros, D. Consonni, y A. K. Jastrzebski, "A tunable all-pass MMIC active phase shifter," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 50, No. 8, pp. 1885–1889, ago. 2002.
- [5] B. M. Frank, A. P. Freundorfer, y M. M. Antar, "A novel common-gate mixer for wireless applications," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 50, No. 5, pp. 1433–1435, mayo 2002.
- [6] Y.-J. Hwang, C.-H. Lien, H. Wang, M. W. Sinclair, R. G. Gough, H. Kanoniuk, y C. Tah-Hsiung, "A 78-114 GHz monolithic subharmonically pumped GaAs-based HEMT diode mixer," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, Vol. 12, No. 6, pp. 201–203, jun. 2002.
- [7] H. Kobayashi, J. M. Hinrichs, y P. M. Asbeck, "Current-mode class-D power amplifiers for high-efficiency RF applications," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 49, No. 12, pp. 2480–2485, dic. 2001.
- [8] V. T. S. Vintola, M. J. Matilainen, S. J. K. Kalajo, y E. A. Jarvinene, "Variable-gain power amplifier for mobile WCDMA applications," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 49, No. 12, pp. 2464–2471, dic. 2001.
- [9] W. Kim, S. Kang, K. Lee, M. Chung, J. Kang, y B. Kim, "Analysis of nonlinear behavior of power HBTs," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 50, No. 7, pp. 1714–1722, jul. 2002.
- [10] M. Iwamoto, A. Williams, P.-F. Chen, A. G. Metzger, L. E. Larson, y P. M. Asbeck, "An extended Doherty amplifier with high efficiency over a wide power range," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 49, No. 12, pp. 2472–2479, dic. 2001.
- [11] I. Aoki, S. D. Kee, D. B. Rutledge, y A. Hajimiri, "Distributed active transformer: A new power-combining and impedance-transformation technique," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 50, No. 1, pp. 316–331, ene. 2002.
- [12] Y.-S. Lin y C. H. Chen, "Novel lumped-element uniplanar transitions," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 49, No. 12, pp. 2322–2330, dic. 2001.
- [13] J. Reina-Tosina y C. Crespo-Cadenas, "Diseño de un amplificador operacional MMIC de alta velocidad con HEMT de GaAs," en *Actas XIV Simposium Nacional de la URSI*, pp. 479–480, sep. 1999, Santiago de Compostela.
- [14] T. H. Lee, H. Samavati, y H. R. Rategh, "5-GHz CMOS wireless LANs," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 50, No. 1, pp. 268–280, ene. 2002.



- [15] H. Sangwoo, N. Lal, C. H. Lee, B. Matinpour, J. Laskar, y D. J. Blumenthal, "Single-MMIC four-channel transmitter module for multichannel RF/optical subcarrier multiplexed communications applications," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 50, No. 4, pp. 1173–1179, abr. 2002.
- [16] B. Matinpour, N. Lal, J. Laskar, R. E. Leoni, y C. S. Whelan, "K-band receiver front-ends in a GaAs metamorphic HEMT process," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 49, No. 12, pp. 2459–2463, dic. 2001.
- [17] M. Mahfoudi, *Técnicas de Diseño de Circuitos MMIC para la Generación de Señales con Diferencia de Fase Constante*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, 1996.
- [18] G. Han y E. Sánchez-Sinencio, "CMOS transconductance multipliers: A tutorial," *IEEE Trans. Circuits and Systems II*, Vol. 45, No. 12, pp. 1550–1563, dic. 1998.
- [19] A. Cidronali, G. Collodi, M. R. Deshpande, N. el Zein, V. Nair, G. Marnes, y H. Goronkin, "A highly linear single balanced mixer based on heterojunction interband tunneling diode," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 49, No. 12, pp. 2437–2445, dic. 2001.
- [20] T. H. Oxley, "50 years development of the microwave mixer for heterodyne reception," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 50, No. 3, pp. 867–876, mar. 2002.
- [21] R. A. Pucel, D. Massé, y R. Bera, "Performance of GaAs MESFET mixers at X band," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-24, No. 6, pp. 351–360, jun. 1976.
- [22] O. Kurita y K. Morita, "Microwave MESFET mixer," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-24, No. 6, pp. 361–366, jun. 1976.
- [23] M. L. de la Fuente, J. Portilla, y E. Artal, "Low noise Ku-band drain mixer using P-HEMT technology," en *Proc. 1998 IEEE Int. Conf. Electronics, Circuits and Systems*, Vol. 1, pp. 175–178, 1998.
- [24] J. C. Cayrou, J. Gayral, M. and Graffeuil, y J. F. Sautereau, "Simple expression for conversion gain of MESFET drain mixers," *Electronics Letters*, Vol. 29, No. 17, pp. 1514–1516, ago. 1993.
- [25] F. Cardinal, A. Hongming, I. Mag, y R. Smith, "A high-performance broadband MMIC PHEMT resistive drain mixer for 28-40 GHz band PCN applications," en *Proc. IEEE Microwave and Millimeter-Wave Monolithic Circuits Symposium*, pp. 47–50, 1996.
- [26] K.-L. Deng y H. Wnag, "A 3-33 GHz PHEMT MMIC distributed drain mixer," en *Proc. IEEE 2002 RFIC Symp.*, pp. 151–154, 2002.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [27] S.-W. Lee, H.-Y. Kim, y H.-G. Cho, "Design and implementation of a single bias FET source mixer," en *Proc. 1998 URSI International Symposium on Signals, Systems and Electronics (ISSSE 98)*, pp. 68–73, 1998.
- [28] A. Boveda, F. Ortigoso, y J. I. Alonso, "A 0.7-3 GHz GaAs QPSK/QAM direct modulator," *IEEE J. Solid State Circuits*, Vol. 28, No. 12, pp. 1340–1348, dic. 1993.
- [29] W. Titus y M. Miller, "2-26 GHz MMIC frequency converter," en *Proc. 10th Annual IEEE GaAs IC Symp.*, pp. 181–184, 1988.
- [30] S. A. Maas, "Design and performance of a 45-GHz HEMT mixer," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-34, No. 7, pp. 799–803, jul. 1986.
- [31] K. Kanazawa, M. Kazumura, y G. Kano, "A 15 GHz single stage GaAs dual-gate FET monolithic analog frequency divider with reduced input threshold power," en *Proc. IEEE 1998 Microwave and Millimeter-Wave Monolithic Circuits Symposium*, pp. 47–49, 1998.
- [32] R. S. Virk, L. Tran, M. Matloubian, M. Le, M. G. Case, y C. Ngo, "A comparison of W-band MMIC mixers using InP HEMT technology," en *Proc. 1997 MTT-S International Microwave Symposium Digest*, 1997.
- [33] J. Putnam y R. Puente, "A monolithic image-rejection mixer on GaAs using lumped elements," *Microwave J.*, pp. 107–116, nov. 1987.
- [34] S. A. Maas y K. W. Chang, "A broadband, planar, doubly balanced monolithic Ka-band diode mixer," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 41, No. 12, pp. 2330–2335, dic. 1993.
- [35] S. A. Maas, M. Kintis, F. Fong, y M. Tan, "A broadband planar monolithic ring mixer," en *Proc. 1996 MTT-S International Microwave Symposium Digest*, 1996.
- [36] K. Sulaksono, M. H. Budirahardjo, A. Wiseso, y B. R. Alam, "C-band down converter realization with GaAsFET active balun and balanced mixing structures," en *Proc. 2000 Asia-Pacific Microwave Conference*, pp. 1147–1149, 2000.
- [37] S. A. Maas, "A GaAs MESFET mixer with very low intermodulation," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-35, No. 4, pp. 425–429, abr. 1987.
- [38] K. W. Chang, B. R. Epstein, E. J. Denlinger, y P. D. Gardner, "Zero bias GaInAs MISFET mixers," en *Proc. 1989 MTT-S International Microwave Symposium Digest*, pp. 1027–1030, 1989.
- [39] T. Kashiwa, T. Katoh, T. Ishida, *et al.*, "A V-band monolithic InP HEMT resistive mixer with low LO-power requirement," en *Proc. 1997 Int. Conf. Indium Phosphide and Related Materials*, pp. 369–372, 1997.

- [40] J. J. Kucera y U. Lott, "A zero DC-power low-distortion mixer for wireless applications," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, Vol. 9, No. 4, pp. 157–159, abr. 1999.
- [41] K. Yhland, N. Rorsman, y H. H. G. Zirath, "Novel single device balanced resistive HEMT mixers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 43, No. 12, pp. 2863–2867, dic. 1995.
- [42] S. A. Maas, "A GaAs MESFET balanced mixer with very low intermodulation," en *Proc. 1987 MTT-S International Microwave Symposium Digest*, pp. 895–898, 1987.
- [43] S. Weiner, D. Neuf, y S. Spohrer, "2 to 8 GHz balanced MESFET mixer with +30 dBm input 3rd order intercept," en *Proc. 1988 MTT-S International Microwave Symposium Digest*, pp. 1097–1100, 1988.
- [44] K. W. Chang, T. H. Chen, S. B. T. Bui, L. C. T. Liu, y L. Nguyen, "High performance resistive EHF mixers using InGaAs HEMTs," en *Proc. 1992 MTT-S International Microwave Symposium Digest*, pp. 1409–1412, 1992.
- [45] I. Angelov, H. Zirath, N. Rorsman, C. Karlsson, y R. M. Weikle, "An F-band resistive mixer based on heterostructure field effect transistor technology," en *Proc. 1993 MTT-S International Microwave Symposium Digest*, pp. 787–790, 1993.
- [46] M. L. de la Fuente Rodríguez, *Diseño de Mezcladores de Microondas en Tecnología Monolítica*. Tesis Doctoral, Universidad de Cantabria, 1997.
- [47] J. Verspecht, D. Schreurs, A. Barel, y B. Nauwelaers, "Black box modeling of hard nonlinear behavior in the frequency domain," en *Proc. 1996 MTT-S International Microwave Symposium Digest*, pp. 1735–1738, 1996.
- [48] G. W. Rhine, M. B. Steer, y B. D. Bates, "Frequency domain nonlinear circuit analysis using generalized power series," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 36, No. 2, pp. 379–387, feb. 1988.
- [49] T. Narhi, "Analysis of strongly nonlinear circuits with a frequency-domain Method coupled with a consistent large-signal model," en *Proc. 1993 MTT-S International Microwave Symposium*, pp. 633–636, 1993.
- [50] C. Camacho-Peñalosa, "Numerical steady-state analysis of nonlinear microwave circuits," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-31, No. 9, pp. 724–730, sep. 1983.
- [51] W. R. Curtice y M. Ettenberg, "A nonlinear GaAs FET model for use in the design of output circuits for power amplifiers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-33, No. 12, pp. 1383–1394, dic. 1985.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [52] I. Angelov, H. Zirath, y N. Rorsman, "A new empirical nonlinear model for HEMT and MESFET devices," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 40, No. 12, pp. 2258–2266, dic. 1992.
- [53] J. A. García, J. C. Pedro, M. L. de la Fuente, N. B. de Carvalho, A. Mediavilla Sánchez, y A. Tazón Puente, "Resistive FET mixer conversion loss and IMD optimization by selective drain bias," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 47, No. 12, pp. 2382–2391, dic. 1999.
- [54] M. S. Shirokov, S. Cherepko, D. Xiaohang, J. C. M. Kwang, y D. A. Teeter, "Large-signal modeling and characterization of high-current effects in InGaP/GaAs HBTs," *IEEE Trans. Microwave theory Tech.*, Vol. 50, No. 4, pp. 1084–1094, abr. 2002.
- [55] W. R. Curtice, "Nonlinear analysis of GaAs MESFET amplifiers, mixers, and distributed amplifiers using the harmonic balance technique," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-35, No. 4, pp. 441–447, jul. 1987.
- [56] S. Egami, "Nonlinear, linear analysis and computer-aided design of resistive mixers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-22, No. 3, pp. 270–275, mar. 1973.
- [57] R. B. Swerdlow, "Analysis of intermodulation noise in frequency converters by Volterra series," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-26, No. 4, pp. 305–313, abr. 1978.
- [58] S. A. Maas, "Theory and analysis of GaAs MESFET mixers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-32, No. 10, pp. 1402–1406, oct. 1984.
- [59] C. Camacho-Peñalosa y C. S. Aitchison, "Analysis and design of MESFET gate mixers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-35, No. 7, pp. 643–652, jul. 1987.
- [60] S. A. Maas, "Two-tone intermodulation in diode mixers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-35, No. 3, pp. 307–314, mar. 1987.
- [61] S. Peng, P. J. McCleer, y G. I. Haddad, "Nonlinear models for the intermodulation analysis of FET mixers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 43, No. 5, pp. 1037–1044, mayo 1995.
- [62] R. C. Melville, P. Feldman, y J. Roychowdhury, "Efficient multi-tone distortion analysis of analog integrated circuits," en *Proc. IEEE 1995 Custom Integrated Circuits Conference*, pp. 241–244, 1995.
- [63] N. Suematsu, Y. Iyama, y O. Ishida, "Transfer characteristic of IM3 relative phase for a GaAs FET amplifier," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 45, No. 12, pp. 2509–2514, dic. 1997.

- 
- [64] W. Yu y B. Leung, "Distortion and noise performance of bottom-plate sampling mixers," en *Proc. 1998 Int. Symp. Circuits and Systems (ISCAS'98)*, Vol. 4, pp. 401–404, 1998.
- [65] N. B. de Carvalho y J. C. Pedro, "Large- and small-signal IMD behavior of microwave power amplifiers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 47, No. 12, pp. 2364–2374, dic. 1999.
- [66] F.-S. Lai, C. K. Liu, y J.-J. Jou, "Analyses of distortions and cross modulations in erbium-doped fiber amplifiers," *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol. 11, No. 5, pp. 545–547, mayo 1999.
- [67] R. Nagy, J. Bartholic, y B. Modlic, "GaAs MESFET small signal amplifier intermodulation distortion improvement by the second harmonic termination," en *Proc. 1998 Mediterranean Electrotechnical Conference (MELECON 98)*, Vol. 1, pp. 358–361, 1998.
- [68] K.-H. Ahn, Y.-H. Jeong, y S.-H. Lee, "Effects of source and load impedance on the intermodulation products of GaAs FETs," en *Proc. 2000 MTT-S International Microwave Symposium Digest*, pp. 469–472, 2000.
- [69] W. V. Moer, Y. Rolain, y A. Geens, "Measurement-based nonlinear modeling of spectral regrowth," *IEEE Trans. Instrumentation and Measurement*, Vol. 50, No. 6, pp. 1711–1716, dic. 2001.
- [70] J. A. García, A. Mediavilla Sánchez, J. C. Pedro, N. B. de Carvalho, A. Tazón Puente, y J. L. García, "Characterizing the gate-to-source nonlinear capacitor role on GaAs FET IMD performance," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 46, No. 12, pp. 2344–2354, dic. 1998.
- [71] J. H. K. Vuolevi y T. Rahkonen, "Extraction of a nonlinear AC FET model using small-signal S-parameters," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 50, No. 5, pp. 1311–1315, mayo 2002.
- [72] J. Kim y Y. Kwon, "Intermodulation analysis of dual-gate fet mixers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 50, No. 6, pp. 1544–1555, jun. 2002.

**BIBLIOGRAFÍA**

---

## Capítulo II

# Modelado y caracterización de dispositivos de AsGa

Desde que se presentó el primer transistor MESFET el interés por los dispositivos basados en sustrato de AsGa ha experimentado un crecimiento continuo. Entre las causas que motivan este interés pueden citarse, por un lado, su alta movilidad electrónica, y por otro, su elevada resistividad. La posibilidad de extender su operación a frecuencias extremadamente elevadas hace que sea preferido al silicio en aplicaciones de microondas y milimétricas. Además su carácter dieléctrico permite integrar componentes activos y pasivos sobre el mismo sustrato, lo que ha supuesto un decisivo impulso para el desarrollo de la tecnología MMIC.

Una vez que el transistor MESFET ha alcanzado su maduración, la demanda de mejores prestaciones ha estimulado la investigación de nuevos materiales semiconductores y procesos industriales. La evolución de técnicas como el método de encapsulado líquido de Czochralsky, el crecimiento epitaxial por haz molecular (MBE) o la deposición química de vapor metal-orgánico (MOCVD) ha contribuido a la mejora de las tecnologías semiconductoras y ha hecho posible una nueva generación de dispositivos basados en heteroestructuras entre compuestos de los grupos III-V aluminio-galio-arsénico (AlAsGa) y el AsGa. Se ha comprobado que el salto de banda prohibida aumenta con la concentración de aluminio, lo que conduce a una discontinuidad en el diagrama de bandas de energía de las heteroestructuras AsGa/AlAsGa. La habilidad para controlar la estructura de bandas de los semiconductores ha abierto nuevas posibilidades en el desarrollo de transistores, que se manifiesta en una explosión de dispositivos basados en heteroestructuras, entre los que destacan el transistor de alta movilidad electrónica (HEMT) y el transistor bipolar de heterounión (HBT). El principio del HEMT se halla en un MESFET sofisticado (análogo al MOSFET de silicio) basado en el transporte lateral unipolar, en tanto que el HBT es análogo al transistor bipolar de silicio.

De estos dos dispositivos el HEMT ha recibido mayor atención, debido a que resulta más sencillo de fabricar y a su bajo factor de ruido. Su mejora con respecto al

## II. MODELADO Y CARACTERIZACIÓN DE DISPOSITIVOS DE ASGA

---

MESFET se desprende del mecanismo de separación de los electrones de sus átomos donadores en la heterounión AlAsGa/AsGa, que elimina virtualmente las impurezas ionizadas como mecanismo de dispersión de los portadores [1, p. 28].

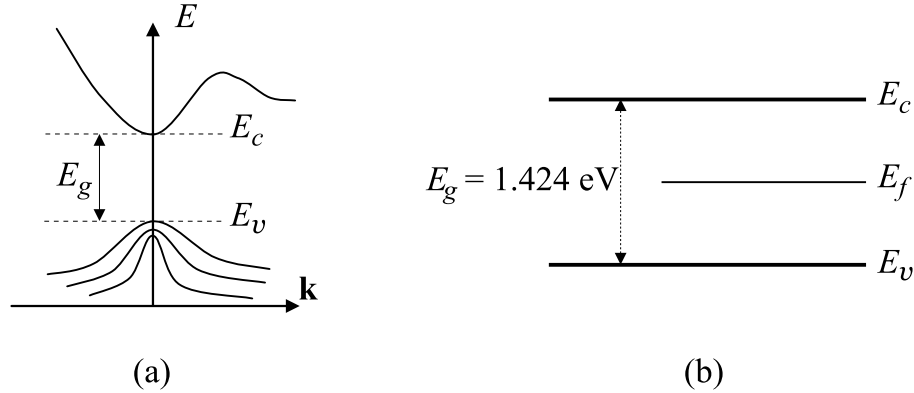
En la actualidad el desarrollo de circuitos de microondas exige modelos que proporcionen una descripción realista del comportamiento de los dispositivos. El empleo de modelos requiere una caracterización exhaustiva que permita extraer sus parámetros. Este capítulo se ocupará detalladamente de los transistores MESFET y HEMT. Tras presentar los fundamentos teóricos de ambos dispositivos, se describirán las principales técnicas empleadas para la extracción de parámetros y los modelos de gran señal más extendidos.

### II.1. Propiedades eléctricas del AsGa

Los semiconductores que intervienen en la fabricación de los transistores MESFET y HEMT son estructuras cristalinas que se repiten periódicamente en una dirección del espacio. Las propiedades eléctricas de los sólidos cristalinos se estudian generalmente a partir de la relación energía-momento que resulta de resolver la ecuación de Schrodinger. En el caso de los materiales semiconductores esta relación predice una banda de estados energéticos, completamente llena a la temperatura cero, que se separa de otra totalmente vacía al cero absoluto por medio de una región angosta de energías prohibidas [2]. A temperaturas más altas algunos electrones pueden adquirir la suficiente energía térmica aleatoria para excitarse a través de la banda prohibida pasando a la banda superior o de conducción. Los estados vacíos que quedan en la banda inferior o de valencia pueden contribuir también a la conductividad comportándose como huecos positivamente cargados. El salto de energía de la banda prohibida es una de las características más importantes de un material semiconductor. En la Figura 2.1a se muestra el diagrama de bandas de energía del AsGa. Es evidente que la complejidad de esta estructura es fruto de la solución de la ecuación de Schrodinger, aunque por conveniencia se acostumbra a representar la energía del mínimo de la banda de conducción y el máximo de la banda de valencia ante la dirección de simetría del material, y no ante el momento, con lo que adopta la forma más sencilla indicada en la Figura 2.1b, donde también se ha representado el nivel de Fermi,  $E_f$ , que matemáticamente representa el nivel de energía en el que la probabilidad de encontrar un electrón es 0.5.

Al añadir pequeñas cantidades de impurezas apropiadas a un cristal semiconductor, la conductividad del material puede experimentar drásticas alteraciones. La introducción de átomos donadores en el AsGa, como el Si, produce un semiconductor tipo- $n$ , caracterizado por la existencia de electrones en exceso en la banda de conducción, disponibles para la corriente. La concentración de portadores  $n$  en la mayoría de los MESFET y HEMT de microondas está en el rango entre  $10^{14}$  y  $10^{19}$   $\text{cm}^{-3}$  [3].





**Figura 2.1:** Diagrama de bandas de energía del AsGa.

Cuando se aplica un campo eléctrico sobre un semiconductor tipo- $n$ , los electrones libres de la banda de conducción son acelerados en dirección opuesta al sentido del campo. Las partículas se desplazan hasta que se produce la colisión con una impureza ionizada o discontinuidades locales del campo dentro del semiconductor. Estas colisiones tienen el efecto de aleatorizar temporalmente la dirección de movimiento. Sin embargo, en promedio se produce un flujo neto de portadores en la dirección determinada por el campo eléctrico. La densidad de corriente debida al arrastre de los portadores se puede expresar como:

$$J_{arr} = qnv \quad (2.1)$$

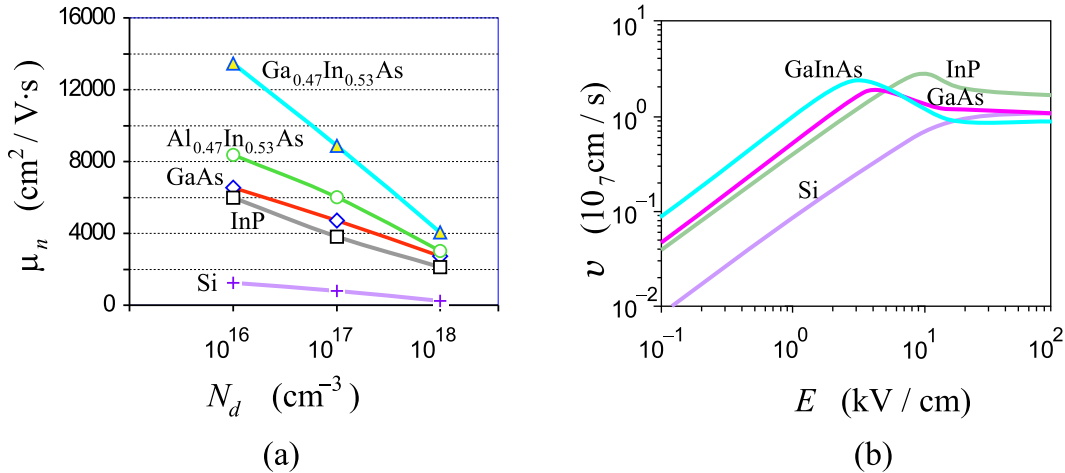
donde  $q$  es la carga de los electrones,  $n$  la densidad de electrones libres en la banda de conducción, y  $v$  la velocidad promedio de los portadores. Para bajas intensidades de campo eléctrico esta velocidad es proporcional al campo, pudiéndose escribir:

$$v = \mu_n E \quad (2.2)$$

siendo  $E$  la intensidad del campo y  $\mu_n$  la constante de proporcionalidad, que recibe el nombre de movilidad electrónica y es una medida de lo rápido que una carga puede desplazarse dentro de un semiconductor. La movilidad electrónica del AsGa y de otros semiconductores es significativamente más grande que la de los huecos. Por este motivo el material tipo- $n$  se utiliza más a menudo que el tipo- $p$  en la fabricación de los dispositivos de microondas.

La movilidad electrónica depende del dopado del material y de la intensidad de campo aplicada. Aunque para valores bajos de la densidad de impurezas donadoras,  $N_d$ , la movilidad no acusa una dependencia fuerte, a medida que se aumenta el dopado el incremento de la tasa de colisiones se traduce en un descenso de la movilidad. Este comportamiento no es exclusivo del AsGa, sino que ocurre en todos los semiconductores, como se muestra en la Figura 2.2a. Por otra parte, cuando la intensidad de campo aplicada es alta, se produce una saturación en la velocidad de los portadores. En la Figura 2.2b se ilustra este comportamiento en distintos semiconductores tipo- $n$

## II. MODELADO Y CARACTERIZACIÓN DE DISPOSITIVOS DE ASGA



**Figura 2.2:** (a) Movilidad electrónica de distintos semiconductores frente a la densidad de impurezas. (b) Velocidad de los portadores ante la intensidad de campo eléctrico.

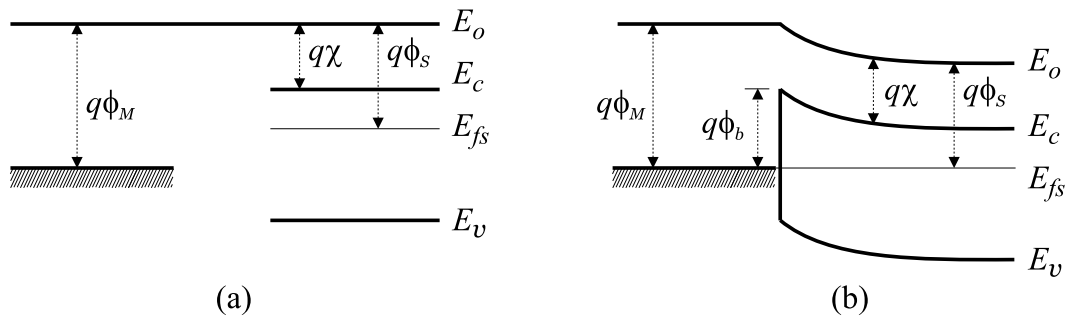
con un dopado de  $10^{17} \text{ cm}^{-3}$ . Es importante destacar la existencia de un pico en la curva con velocidad superior a la de saturación, que se alcanza con un valor relativamente bajo de la intensidad de campo, y por tanto, la existencia de una región de pendiente negativa. Este fenómeno, que también ocurre en otros semiconductores de los grupos III-V, da lugar al efecto Gunn, que se utiliza para conseguir dispositivos de resistencia dinámica negativa.

### II.2. Contacto de barrera Schottky

La unión rectificadora metal-semiconductor consiste en una delgada capa de metal sobre la superficie de un semiconductor. En la Figura 2.3a se representan los diagramas de bandas del metal y del semiconductor por separado, pero con un nivel de referencia común: la energía del electrón libre,  $E_o$ . La diferencia  $E_o - E_f = q\phi$  se denomina función de trabajo, y en el caso del semiconductor depende del dopado del material, mientras que la diferencia  $E_o - E_c = q\chi$ , denominada afinidad electrónica, es independiente del nivel de impurezas. Para el caso representado en la figura, el hecho de ser  $\phi_S < \phi_M$  indica que, en promedio, los electrones tienen más energía en el semiconductor que en el metal. Por tanto, cuando metal y semiconductor se ponen en contacto, se produce una transferencia de electrones del semiconductor al metal, que queda cargado negativamente. Como el metal se supone buen conductor, los electrones transferidos se consideran dispuestos en una capa muy delgada de la superficie metálica de la unión. Esta presencia de carga produce un campo eléctrico que atrae a los electrones en sentido opuesto, hasta que se alcanza el equilibrio térmico. La carga en el semiconductor se debe a iones de impurezas donadoras que han perdido su electrón, tratándose de una carga ligada. En esta región de carga espacial la densidad

de electrones libres es muy inferior a la densidad de impurezas donadoras, pudiendo despreciarse, y su anchura es función de la densidad de dopado.

La Figura 2.3b representa el diagrama de bandas de la unión en equilibrio térmico, y en ella se aprecia una discontinuidad en los estados permitidos de energía, cuya magnitud es la barrera de energía  $q\phi_b$  necesaria para igualar los niveles de Fermi, y que se opone al paso de electrones desde el metal al semiconductor. La altura de esta barrera se puede controlar mediante polarización externa. Cuando el metal está polarizado positivamente con respecto al semiconductor se reduce la barrera, y la probabilidad de que un electrón supere la barrera y pase al metal aumenta de forma exponencial con la tensión de polarización. Por el contrario, bajo polarización inversa la barrera de energía aumenta, reduciéndose así el flujo de electrones desde el semiconductor al metal.



**Figura 2.3:** Diagrama de bandas de energía de una unión metal-semiconductor.  
(a) Por separado. (b) En contacto.

Cuando el semiconductor está fuertemente dopado ( $N_d > 10^{19} \mu\text{m}^{-3}$ ) la anchura de la zona de depleción se hace extremadamente delgada (unas pocas decenas de angstroms). En estas condiciones es posible que electrones sin la energía suficiente atraviesen la barrera de potencial. Este fenómeno es conocido como *efecto túnel*. La circulación de corriente es elevada en ambos sentidos de la unión y la resistencia del dispositivo muy baja, tratándose de una unión óhmica.

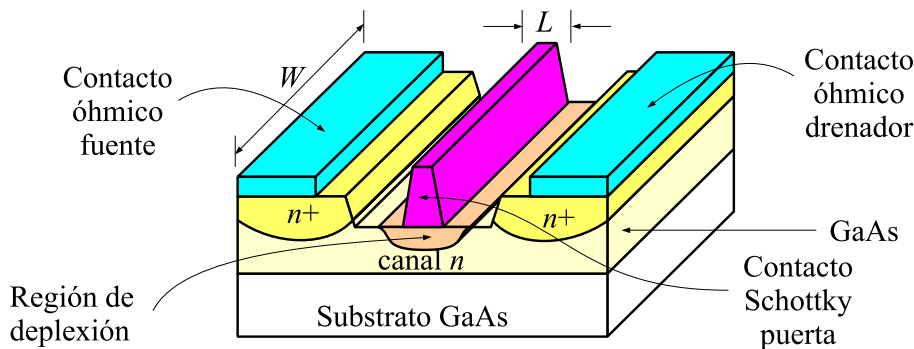
### II.3. El transistor MESFET

En la Figura 2.4 se muestra la sección transversal de un transistor MESFET. Los terminales de drenador y fuente forman un contacto óhmico con regiones semiconductoras de AsGa fuertemente dopadas. El canal tipo- $n$  comprendido entre ambas regiones constituye la región activa de este dispositivo, y se encuentra bajo la unión de barrera Schottky que forma el terminal de puerta. El canal activo, que descansa sobre un substrato de AsGa semiaislante, se obtiene bien por crecimiento epitaxial o por implantación de iones. Aunque el perfil del dopado es crítico para el funcionamiento del MESFET, como el crecimiento epitaxial es una opción tecnológicamente

## II. MODELADO Y CARACTERIZACIÓN DE DISPOSITIVOS DE ASGA

más costosa, su uso se reserva a la realización de perfiles que son difíciles de obtener por implantación.

Las dimensiones más importantes que caracterizan la estructura física del MESFET son la longitud ( $L$ ) y la anchura ( $W$ ) de la puerta. Los MESFETs de microondas presentan longitudes de puerta comprendidas entre 0.1 y 1  $\mu\text{m}$ , aunque se tiende a conseguir longitudes cada vez más pequeñas, ya que esta dimensión determina la máxima frecuencia de operación. La anchura de la puerta puede variar significativamente entre 100 y 2000 veces la dimensión  $L$ , siendo la corriente proporcional a  $W$ .



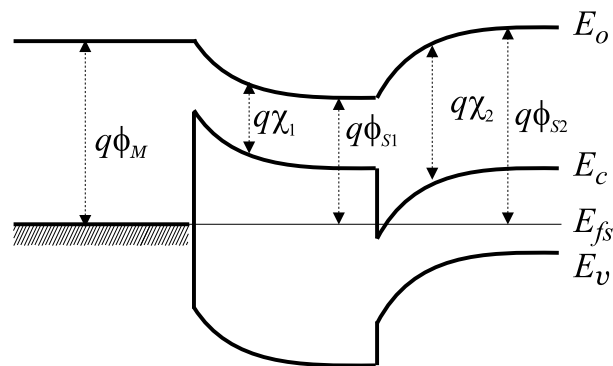
**Figura 2.4:** Sección transversal de un transistor MESFET.

La mayoría de los MESFETs de microondas son dispositivos de depleción. Esto significa que la corriente puede fluir entre los terminales de drenador y fuente en ausencia de polarización negativa aplicada en la puerta. Los dispositivos de enriquecimiento, por el contrario, requieren una polarización positiva en el terminal de puerta para conducir. Cuando en un MESFET de depleción se aplica una pequeña diferencia de potencial entre los terminales de drenador y fuente, una corriente proporcional a la tensión de polarización fluye a través del canal. En este caso el comportamiento del transistor es similar al de una resistencia lineal. A medida que aumenta la diferencia de potencial, los electrones del semiconductor alcanzan su máxima velocidad, y se produce la saturación de la corriente del canal. A su vez, la unión Schottky del contacto de puerta produce una región de carga espacial que está completamente libre de portadores, y que se extiende por la parte superior del canal. Por tanto, la sección transversal disponible para la corriente entre drenador y fuente queda reducida por la existencia de esta zona de depleción. Si el terminal de puerta se polariza negativamente, la región de carga espacial se extiende penetrando más aún en el canal. Esta polarización actúa como mecanismo de control, limitador de la corriente entre drenador y fuente, pudiendo incluso llegar a obturar completamente el canal con una polarización negativa suficientemente alta. La tensión necesaria para alcanzar esta condición, que supone ausencia de corriente, recibe el nombre de tensión de *pinch-off*.

## II.4. Heteroestructuras

Una heteroestructura o heterounión se produce cuando se hace contacto entre dos materiales semiconductores con diferentes saltos de energía de la banda prohibida. Las heteroestructuras formadas entre AsGa y AlAsGa y entre InAsGa y AlAsGa son de particular interés en el diseño de transistores HEMT.

El proceso de fabricación de una heteroestructura no está exento de dificultades tecnológicas, ya que tanto la densidad del dopado como el espesor de las capas y la composición de los materiales deben ser alterados abruptamente durante el crecimiento de la estructura, lo que requiere un control muy firme de todo el proceso. Además, los dispositivos basados en heteroestructuras requieren capas extremadamente delgadas (del orden de 50 Å de espesor e incluso menos).

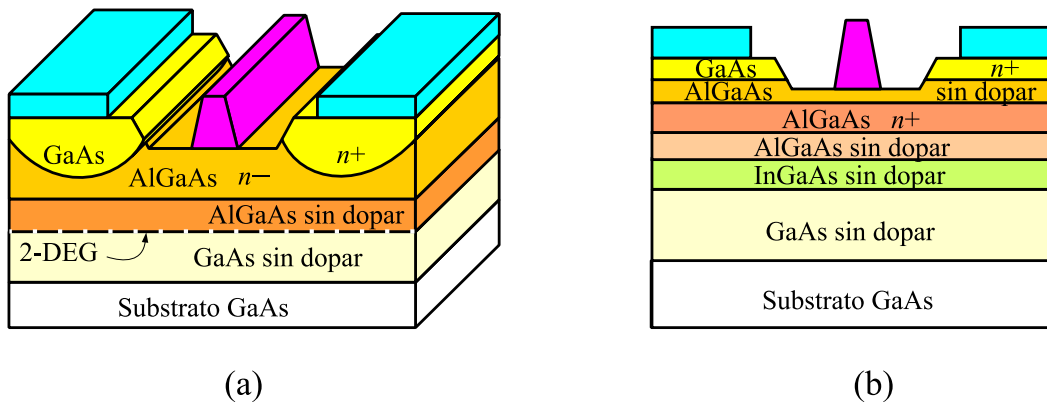


**Figura 2.5:** Diagrama de bandas de energía de una unión metal-semiconductor sobre heteroestructura.

En la Figura 2.5 se representa el diagrama de bandas de energía de una unión de barrera Schottky sobre una heteroestructura. Como puede apreciarse, al otro lado de la interfaz metal-semiconductor se encuentra el material de mayor anchura de salto de energía, en este caso con dopado tipo- $n$ . Debido a la relación entre las funciones de trabajo del metal y del semiconductor (véase la Sección II.2), es posible ajustar el espesor de esta capa de manera que se encuentre completamente libre de portadores de carga en ausencia de polarización. El semiconductor con salto de energía más estrecho no está dopado, o éste es ligeramente tipo- $p$ . Para igualar los niveles de Fermi y alcanzar el equilibrio térmico las bandas de energía adoptan la forma mostrada. Nótese la discontinuidad en la heterointerfaz y la existencia de una región muy estrecha en la que la banda de conducción del semiconductor con menor salto de energía cae por debajo del nivel de Fermi. Esto implica que la concentración de portadores libres en esta región es muy alta. Esta propiedad es ampliamente explotada en su aplicación al transistor HEMT.

### II.5. El transistor de alta movilidad electrónica (HEMT)

También conocido como HFET, es un transistor de efecto de campo basado en heteroestructuras. La forma más sencilla de un dispositivo HEMT se corresponde con la Figura 2.6a. Como ocurre con el MESFET tres contactos metálicos (drenador, fuente y puerta) se realizan sobre la superficie de la estructura semiconductor. Los contactos de drenador y fuente son óhmicos, mientras que la puerta es un contacto de barrera Schottky. Sin embargo, es difícil señalar otro parecido entre el MESFET y el HEMT, puesto que tanto la estructura como el principio de funcionamiento son esencialmente diferentes. Si se atiende a la Figura 2.6 del HEMT y se compara con la Figura 2.4 del MESFET, es evidente que la estructura del primero es significativamente más compleja. Esta complejidad está asociada a dificultades en la fabricación y costes añadidos. En particular, se requieren técnicas avanzadas de crecimiento de materiales, como el crecimiento epitaxial por haz molecular, para producir capas dotadas de heterointerfaces atómicamente suaves. La principal motivación para construir tales dispositivos se encuentra en las significativas mejoras que se pueden alcanzar en el funcionamiento a alta frecuencia, así como en el factor de ruido.



**Figura 2.6:** Estructura de capas de un HEMT. (a) Heteroestructura AsGa/AlAsGa. (b) HEMT pseudomórfico.

Al igual que sucede con el MESFET, la dimensión más importante que caracteriza la estructura física de un HEMT es su longitud de puerta. Esta dimensión es crítica en la determinación de la frecuencia máxima de operación. La anchura de puerta y otras dimensiones geométricas afectan al comportamiento del HEMT de manera similar a como ocurre con el MESFET. Análogamente, los valores típicos de las dimensiones de longitud y anchura de puerta coinciden con los utilizados en la fabricación del MESFET. No obstante, la diferencia entre el MESFET y el HEMT es notable en cuanto al material de arranque. Una secuencia típica de crecimiento para un HEMT convencional consiste en una capa de  $1 \mu\text{m}$  de AsGa no dopado crecida directamente sobre sustrato de AsGa, seguida de  $400 \text{ \AA}$  de AlAsGa, de los cuales los primeros  $50 \text{ \AA}$  se dejan sin dopar y el resto se dopa con una densidad del orden de  $10^{18} \text{ cm}^{-3}$ . Los espe-

sores de estas capas de AlAsGa son críticos en el comportamiento del dispositivo. Finalmente se deja crecer una capa fuertemente dopada de varios cientos de angstroms para prevenir la oxidación del AlAsGa y facilitar los contactos óhmicos de drenador y fuente. La fabricación del dispositivo una vez conseguido el crecimiento de las capas es similar al de un MESFET. Se desarrolla una etapa de aislamiento, los contactos se fabrican y se define la puerta.

Atendiendo a la Figura 2.6a, la capa de AlAsGa presenta una anchura del salto de energía de banda prohibida superior a la del AsGa, de manera que la estructura de bandas de energía del contacto Schottky de puerta es similar a la mostrada en la Figura 2.5. La capa de AlAsGa con dopado tipo- $n$  contribuye con electrones que se mueven libremente por la estructura cristalina hasta que resultan atrapados por los estados más bajos de energía, que en el caso de un HEMT se hallan justo en la heterointerfaz, por el lado que corresponde al AsGa. Como resultado los electrones se acumulan en una estrecha lámina por la que se mueven libremente, y de ahí que se acuda al término de gas electrónico bidimensional (2-DEG) para describir la conducción de electrones en este dispositivo, que por este motivo también se conoce como TEGFET. La separación espacial de estos electrones con respecto a las impurezas donadoras por una capa de AlAsGa carente de dopado (denominada *spacer layer*) reduce los procesos de dispersión y recombinación, lo que produce movilidades electrónicas muy elevadas (véase la Figura 2.2 para ilustrar esta propiedad). Para valores bajos de la polarización drenador-fuente la corriente fluye entre ambos contactos a través del gas electrónico. A medida que aumenta esta polarización, la velocidad de los electrones y la corriente se saturan, estando determinados los niveles de saturación fundamentalmente por la densidad de portadores del 2-DEG. Esta densidad se controla con la polarización de puerta. Es posible ajustar el espesor de la capa de AlAsGa para que la región de carga especial de la unión Schottky de puerta se extienda por toda ella y quede completamente libre de portadores de carga bajo condiciones normales de operación. Una polarización negativa de puerta reduce la profundidad del pozo de potencial en la frontera AlAsGa/AsGa. En un dispositivo de depleción esto equivale a reducir la densidad del gas electrónico, y con ello la corriente.

Con independencia de las favorables propiedades que se han descrito, los transistores basados en la heteroestructura AsGa/AlAsGa presentan serias limitaciones. La presencia de centros de recombinación en el AlAsGa limita la composición del aluminio al 25-30%. Además, la heterointerfaz AsGa/AlAsGa tiene tan sólo un pequeño desplazamiento en la banda de conducción, y por tanto el confinamiento de los electrones en la lámina 2-DEG es limitado. Como alternativas, las prestaciones del HEMT convencional se han visto superadas por las siguientes estrategias:

- Heterounión de AlInAs/InAsGa sobre sustrato de InP.
- HEMT pseudomórfico de AlAsGa/InAsGa sobre sustrato de AsGa.
- HEMT múltiple.

## II. MODELADO Y CARACTERIZACIÓN DE DISPOSITIVOS DE ASGA

---

De las tres alternativas propuestas, tan sólo mencionaremos la segunda por coincidir con el proceso que realiza la fundición escogida para la realización de esta Tesis. En la Figura 2.6b se muestra la sección transversal de un HEMT pseudomórfico. La estructura de este transistor es similar a la de un HEMT convencional, pero incluye una capa adicional de InAsGa no dopado. La principal ventaja del HEMT pseudomórfico es que consigue un mejor confinamiento de los portadores en el canal, lo que repercute de forma notable en mejorar las prestaciones del dispositivo.

### II.6. Extracción de parámetros en transistores HEMT y MESFET

El proceso de determinación de los parámetros de un modelo está íntimamente ligado tanto a la propia estructura del modelo utilizado como a la técnica empleada para la adquisición de los datos a partir de medidas experimentales. Para el diseño de mezcladores es imprescindible disponer de un buen modelo de gran señal que relacione la corriente drenador-fuente y las capacidades del dispositivo con las tensiones de polarización. A pesar de que las medidas en DC no son suficientes, por sí solas, para describir el comportamiento de RF, y por tanto no se pueden extraer conclusiones acerca de las capacidades del modelo, la fácil ejecución de este tipo de medidas hace que se utilicen para determinar algunos parámetros importantes del dispositivo, como por ejemplo la corriente. No obstante los valores de los elementos del modelo de pequeña señal sólo se pueden determinar con ayuda de medidas de RF. Generalmente el circuito equivalente de pequeña señal se obtiene optimizando los valores de los componentes que mejor se ajustan a la medida de parámetros  $S$  realizada con un analizador de redes. Para extraer información de gran señal la caracterización experimental se extiende a un amplio rango de tensiones de polarización [4]. La dependencia de cada elemento del modelo de pequeña señal con la polarización se determina mediante un proceso de optimización que opera sobre cada conjunto de parámetros extraídos, correspondientes a los distintos niveles de polarización.

La medida de los parámetros  $S$  puede ser extremadamente precisa, aunque esto depende de la posibilidad de calibrar el analizador adecuadamente. Para la caracterización de dispositivos *en chip* se puede acudir a una estación de puntas de microondas equipada con sondas coplanares. Una estrategia más económica, válida también para transistores discretos, consiste en construir un soporte de medida (*test-fixture*) adecuado a las dimensiones del dispositivo [5]. En la Figura 2.7 se muestra un prototipo de soporte universal para la caracterización no destructiva de circuitos de microondas, realizado en el Grupo de Sistemas de Radiocomunicación de la Universidad de Sevilla [6]. El *test-fixture* se conecta al analizador mediante conectores coaxiales, mientras que estos hacen contacto con el dispositivo a través de líneas microstrip. En este caso se requiere además el diseño y construcción de un conjunto de patrones de calibración, que permitan la eliminación de errores sistemáticos en el analizador [7]. La



**Figura 2.7:** Soporte de medida realizado en el GSR de la Universidad de Sevilla.

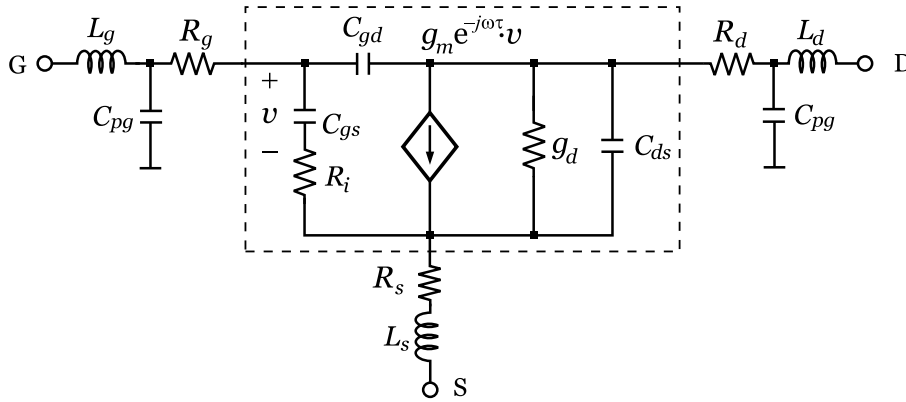
técnica de calibración más extendida con patrones microstrip se conoce bajo las siglas TRL (*through-reflect-line*) [8].

En la Figura 2.8 se muestra el circuito equivalente convencional del modelo de pequeña señal de un transistor FET. Aunque otras topologías que incorporan elementos adicionales han sido descritas en la literatura, el modelo indicado es capaz de proporcionar un excelente ajuste con medidas de parámetros  $S$  en un amplísimo rango de frecuencias. Se distinguen en él dos tipos de elementos:

1. Los elementos del circuito intrínseco ( $g_m$ ,  $g_d$ ,  $C_{gs}$ ,  $C_{ds}$ ,  $C_{gd}$ ,  $R_i$  y  $\tau$ ), que dependen de las condiciones de polarización.
2. Las resistencias, inductancias y capacidades de acceso ( $R_g$ ,  $R_s$ ,  $R_d$ ,  $L_s$ ,  $L_g$ ,  $L_d$ ,  $C_{pg}$ ,  $C_{pd}$ ), elementos parásitos que se pueden suponer constantes.

Las inductancias parásitas aparecen fundamentalmente como consecuencia de los contactos metálicos depositados sobre la superficie del dispositivo. Al depender de la geometría superficial del transistor, sus valores son muy similares en MESFET y HEMT, oscilando entre 1 y 10 pH. En el caso de transistores discretos, el encapsulado también introduce inductancias parásitas, pero en este caso con un valor sensiblemente superior, del orden de 0,1 a 0,3  $\mu$ H. Las resistencias  $R_s$  y  $R_d$  modelan los contactos óhmicos de drenador y fuente. La metalización del contacto Schottky de puerta se modela mediante la resistencia  $R_g$ . Las tres resistencias toman valores alrededor de 1  $\Omega$ .

## II. MODELADO Y CARACTERIZACIÓN DE DISPOSITIVOS DE ASGA



**Figura 2.8:** Circuito equivalente de pequeña señal de un transistor FET. El recuadro encierra los elementos del circuito intrínseco.

Las capacidades  $C_{gs}$  y  $C_{gd}$  modelan los cambios de carga en la región de depleción con respecto a las tensiones puerta-fuente y puerta-drenador, respectivamente. Bajo las condiciones de polarización típicas,  $C_{gs}$  es la capacidad dominante, salvo cuando  $V_{ds} = 0$ , en cuyo caso  $C_{gd}$  y  $C_{gs}$  son iguales. La capacidad  $C_{ds}$  se incluye en el circuito equivalente para modelar los efectos capacitivos entre los terminales de drenador y fuente, y su valor es también considerablemente inferior al de  $C_{gs}$ .

La transconductancia  $g_m$  es una medida del cambio incremental que experimenta la corriente de salida  $I_{ds}$  para una variación dada en la tensión  $V_{ds}$ . Es el mecanismo intrínseco de ganancia en un FET, ligeramente superior en tecnología HEMT que en MESFET. Es directamente proporcional a la anchura de puerta e inversamente proporcional a su longitud, y por debajo de 1 MHz varía con la frecuencia. La transconductancia es incapaz de responder instantáneamente a cambios en la tensión de puerta. Este retraso se puede modelar por medio del parámetro  $\tau$ , que físicamente representa el tiempo que transcurre durante una redistribución de cargas posterior a una fluctuación en la tensión de puerta. Los valores típicos de  $\tau$  son del orden de 1 ps en MESFET y HEMT, y tienden a disminuir cuando se reduce la longitud de puerta.

La conductancia  $g_d$  es una medida del cambio incremental de la corriente de salida  $I_{ds}$  con la tensión de salida  $V_{ds}$ . Tiende a aumentar cuando se reduce la longitud de puerta y presenta características dispersivas a baja frecuencia más acusadas que la transconductancia  $g_m$ , pudiendo incluso llegar a ser un 100% superior que en DC.

La resistencia de carga  $R_i$  se incluye en el circuito equivalente para mejorar el ajuste del parámetro  $s_{11}$ . Sin embargo, en muchos dispositivos, la presencia de  $R_g$  es más que suficiente para ajustar la parte real de  $s_{11}$ . Es un parámetro difícil de extraer, y su significado físico es cuestionable.

Dado que la parte intrínseca presenta una topología en "PI", la extracción de parámetros se facilita si se calculan los elementos de la matriz de admitancias [9]:

$$y_{11} = \frac{R_i C_{gs}^2 \omega^2}{D} + j\omega \left( \frac{C_{gs}}{D} + C_{gd} \right) \quad (2.3a)$$

$$y_{12} = -j\omega C_{gd} \quad (2.3b)$$

$$y_{21} = \frac{g_m \exp(-j\omega\tau)}{1 + jR_i C_{gs}\omega} - j\omega C_{gd} \quad (2.3c)$$

$$y_{22} = g_d + j\omega(C_{ds} + C_{gd}), \quad (2.3d)$$

siendo  $D = 1 + \omega^2 C_{gs}^2 R_i^2$ .

Las expresiones anteriores se pueden simplificar si se admite que  $\omega\tau \ll 1$  y que el término  $\omega^2 C_{gs}^2 R_i^2$  también es despreciable frente a la unidad. En efecto, tomar  $D = 1$  constituye una buena aproximación en dispositivos de bajo ruido para frecuencias inferiores a 5 GHz. En este supuesto, se tiene:

$$y_{11} = R_i^2 C_{gs}^2 \omega^2 + j\omega(C_{gs} + C_{gd}) \quad (2.4a)$$

$$y_{12} = -j\omega C_{gd} \quad (2.4b)$$

$$y_{21} = g_m - j\omega(C_{gd} + g_m(R_i C_{gs} + \tau)) \quad (2.4c)$$

$$y_{22} = g_d + j\omega(C_{ds} + C_{gd}), \quad (2.4d)$$

y así los elementos intrínsecos del modelo de pequeña señal se pueden extraer resolviendo el sistema de ecuaciones anterior en función de los parámetros de admitancia:

$$g_m = \Re[y_{21}] \quad (2.5a)$$

$$g_d = \Re[y_{22}] \quad (2.5b)$$

$$C_{gd} = -\frac{\Im[y_{12}]}{\omega} \quad (2.5c)$$

$$C_{gs} = \frac{1}{\omega} (\Im[y_{11}] + \Im[y_{12}]) \quad (2.5d)$$

$$C_{ds} = \frac{1}{\omega} (\Im[y_{22}] + \Im[y_{12}]) \quad (2.5e)$$

$$R_i = \frac{\Re[y_{11}]}{(\Im[y_{11}] + \Im[y_{12}])^2} \quad (2.5f)$$

$$\tau = \frac{\Im[y_{21}] + \Im[y_{12}]}{\omega \Re[y_{21}]} - \frac{\Re[y_{11}]}{\omega (\Im[y_{11}] + \Im[y_{12}])} \quad (2.5g)$$

Cuando se evalúan los parámetros de admitancia a distintas frecuencias, es muy probable que se obtengan diferentes valores de los elementos del circuito equivalente. En el caso de  $g_m$  y  $g_d$ , las partes reales de  $y_{21}$  e  $y_{22}$  permanecen razonablemente constantes, sobre todo a frecuencias bajas, por lo que basta con hacer un promedio de los valores obtenidos. En el caso de las capacidades, las expresiones (2.5c)–(2.5e) muestran que las partes imaginarias de  $y_{12}$ ,  $y_{11}$  e  $y_{22}$  deberían presentar una dependencia lineal con la frecuencia. Si se traza la recta de regresión que mejor ajusta a la nube de puntos de  $-\Im[y_{12}]$  ante  $\omega$ , entonces se puede asignar a  $C_{gd}$  el valor de la pendiente de esta recta. El resto de las capacidades se determinan de forma completamente análoga.

A frecuencias más altas los únicos parámetros que requieren un esfuerzo de extracción adicional son  $R_i$  y  $\tau$ . La dispersión de los valores de  $R_i$  es más acusada en

## II. MODELADO Y CARACTERIZACIÓN DE DISPOSITIVOS DE ASGA

transistores MESFET que en HEMT, debido a las peores características del ruido en los primeros [3]. Para estos casos en que en que la aproximación  $D \ll 1$  deja de ser válida, las ecuaciones (2.3a)-(2.3d) admiten la siguiente solución [10]:

$$C_{gd} = -\frac{\Im[y_{12}]}{\omega} \quad (2.6a)$$

$$C_{ds} = \frac{1}{\omega} (\Im[y_{22}] + \Im[y_{12}]) \quad (2.6b)$$

$$C_{gs} = \frac{1}{\omega} (\Im[y_{11}] + \Im[y_{12}]) \left[ 1 + \left( \frac{\Re[y_{11}]}{\Im[y_{11}] + \Im[y_{12}]} \right)^2 \right] \quad (2.6c)$$

$$R_i = \frac{\Re[y_{11}]}{(\Im[y_{11}] + \Im[y_{12}])^2 + (\Re[y_{11}])^2} \quad (2.6d)$$

$$g_m = \sqrt{((\Re[y_{21}])^2 + (\Im[y_{21}] - \Im[y_{12}])^2) (1 + \omega^2 C_{gs}^2 R_i^2)} \quad (2.6e)$$

$$g_{ds} = \Re[y_{22}] \quad (2.6f)$$

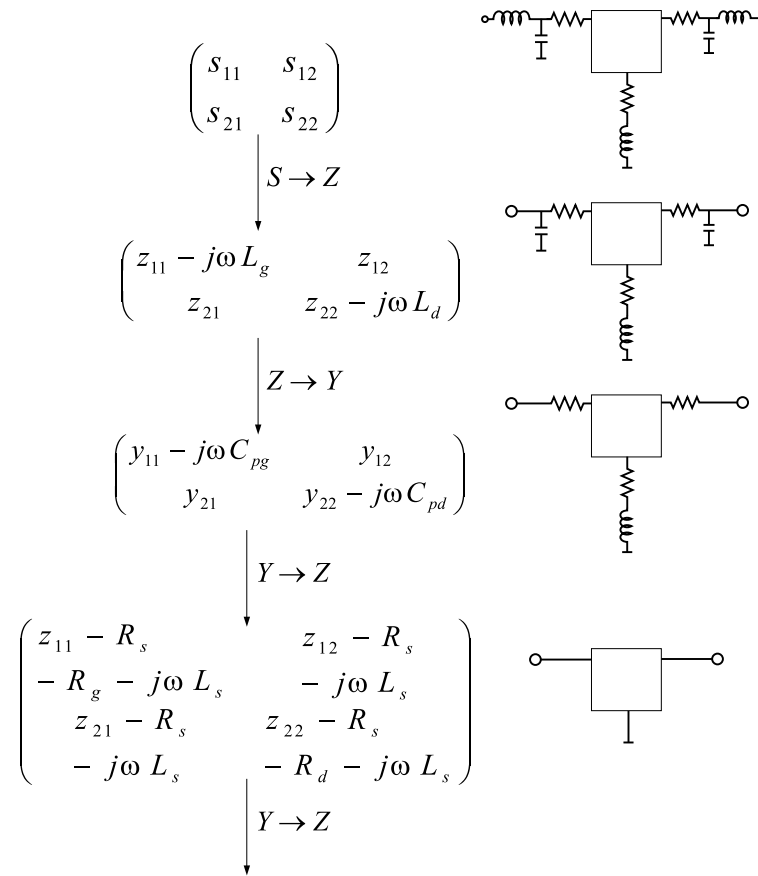
$$\tau = \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \left( \frac{\Im[y_{12}] - \Im[y_{21}] - \omega C_{gs} R_i \Re[y_{21}]}{g_m} \right) \quad (2.6g)$$

Estas expresiones son válidas en todo el rango de frecuencias y para tensiones de drenador superiores a 0 Volts. Por tanto, el problema se reduce a la determinación de la matriz de admitancias de la parte intrínseca a partir de las medidas. Suponiendo que se conocen todos los elementos de la parte extrínseca, Dambrine y col. [11] han propuesto una manera elegante de extraer los elementos de esta matriz consistente en aplicar la siguiente secuencia de transformaciones (véase la Figura 2.9):

1. Efectuar la medida de los parámetros  $S$  del dispositivo.
2. Transformar los parámetros  $S$  a parámetros de impedancia  $Z$  y substraer las inductancias  $L_g$  y  $L_d$ , que se hallan conectadas en serie.
3. Transformar los nuevos parámetros  $Z$  a parámetros de admitancia  $Y$  y substraer las capacidades  $C_{pg}$  y  $C_{pd}$ , que están en paralelo.
4. Transformar los nuevos parámetros  $Y$  en  $Z$  y substraer las resistencias de acceso  $R_g$ ,  $R_s$ ,  $R_d$  y la inductancia  $L_s$ , conectadas en serie.
5. Por último, transformar los parámetros  $Z$  en  $Y$  para obtener la representación adecuada de la parte intrínseca.

### II.6.1. Extracción de parámetros extrínsecos

A la vista del procedimiento indicado para la determinación de los elementos de la parte intrínseca, no se puede conocer la matriz de admitancias si no se han extraído previamente las resistencias, inductancias y capacidades de acceso. Los valores de las



**Figura 2.9:** Método de extracción de la matriz de admitancias de la parte intrínseca.

resistencias parásitas  $R_g$ ,  $R_s$ ,  $R_d$  se pueden estimar con medidas en DC de la característica corriente-tensión bajo polarización directa. El método de Fukui [12] está basado en la medida de la corriente de puerta en función de la tensión DC de puerta aplicada bajo tres condiciones diferentes:

1. Se termina el drenador en circuito abierto y la fuente en cortocircuito. La resistencia que se mide se puede expresar como:  $R_I = R_g + R_s$ .
2. Se termina el drenador en cortocircuito y la fuente en circuito abierto, volviéndose a medir la resistencia, que ahora se corresponde con:  $R_{II} = R_g + R_d$ .
3. Los terminales de drenador y fuente se dejan en cortocircuito. La nueva resistencia equivalente es:  $R_{III} = R_g + R_d R_s / (R_d + R_s)$ .

Con estas tres medidas se tiene un sistema de ecuaciones que permite extraer las resistencias parásitas a partir de las expresiones:

$$R_g = R_{III} - \sqrt{R_{III}^2 - R_{III}(R_I + R_{II}) + R_I R_{II}} \quad (2.7a)$$

$$R_s = R_I - R_g \quad (2.7b)$$

$$R_d = R_{II} - R_g \quad (2.7c)$$

## II. MODELADO Y CARACTERIZACIÓN DE DISPOSITIVOS DE ASGA

Dado que los valores resultantes pueden ser sensibles a las condiciones de polarización, es conveniente que las medidas de  $R_I$ ,  $R_{II}$  y  $R_{III}$  vayan acompañadas de un análisis de regresión lineal para un mejor ajuste de los datos.

Para la extracción de las inductancias parásitas se distinguen dos técnicas, dependiendo de que hagan uso de medidas de RF realizadas *en caliente* o de datos obtenidos bajo  $V_{ds} = 0$  (FET *frío*). El primer método tiene la ventaja de que opera sobre el mismo conjunto de medidas que se utilizan para la caracterización de la parte intrínseca [13], aunque no sirve para extraer las capacidades parásitas. Consiste en un método iterativo que ajusta los valores de las inductancias hasta que se produce la convergencia entre los parámetros de impedancia medidos y los del modelo. Si se dispone de medidas de los elementos de la matriz de impedancias ( $Z_{ij}$ ) a un conjunto de frecuencias lo suficientemente altas como para que la reactancia de las inductancias parásitas no sea despreciable, pero lo bastante bajas para despreciar el efecto de las capacidades de acceso, entonces los elementos de la matriz de impedancias de la parte intrínseca ( $z_{ij}$ ) pueden expresarse según:

$$z_{11} = Z_{11} - (R_g + R_s) - j\omega(L_g + L_s) \quad (2.8a)$$

$$z_{12} = Z_{12} - j\omega L_s \quad (2.8b)$$

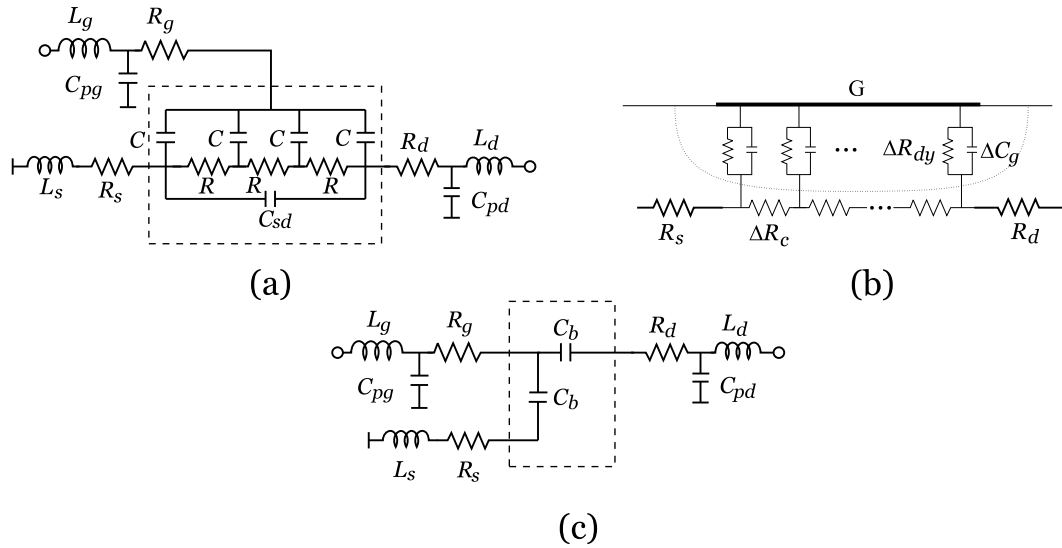
$$z_{21} = Z_{21} - j\omega L_s \quad (2.8c)$$

$$z_{22} = Z_{22} - (R_d + R_s) - j\omega(L_d + L_s) \quad (2.8d)$$

El análisis de las partes imaginarias permite la extracción de las inductancias a partir de las pendientes de las rectas de regresión lineal de las diferencias  $\Delta Z_{ij} = \Im[Z_{ij}] - \Im[z_{ij}]$ . Nótese que las resistencias parásitas pueden extraerse también, ya sea por el método de Fukui o mediante las diferencias entre las partes reales de las impedancias. El proceso arrancaríase haciendo cero las inductancias en la primera iteración y calculando  $\Delta Z_{ij}$ . Con los nuevos valores de  $L_k$  se recalculan los elementos de la parte intrínseca y se halla su matriz de impedancias, volviéndose a evaluar a continuación  $\Delta Z_{ij}$  antes de actualizar las inductancias. La convergencia es rápida, y generalmente basta con un par de iteraciones para que el error sea inferior al 5% en todos los elementos del modelo.

La segunda técnica tiene el inconveniente de que requiere un esfuerzo adicional en la caracterización del dispositivo en RF, aunque Diamond y Laviron [14] han señalado que la medida de parámetros  $S$  con  $V_{ds} = 0$  permite una extracción más precisa de los elementos parásitos, debido a que la estructura del circuito equivalente es más simple. Siguiendo esta idea, Curtice y Camisa [15] han propuesto un método de extracción de parásitos que optimiza una función de error construida a partir del circuito equivalente del FET *frío* mostrado en la Figura 2.10a, si bien los valores óptimos para los componentes son sensibles a los valores iniciales y al método de optimización.

Cuando  $V_{ds} = 0$ , el canal bajo la puerta se puede modelar mediante una red RC distribuida cuyos parámetros son la resistencia del canal ( $R_c$ ) y la impedancia equi-



**Figura 2.10:** Circuitos equivalentes para FET frío. (a) Modelo para  $V_{gs} > V_p$ .  
 (b) Modelo distribuido del canal bajo la puerta. (c) Modelo para  $V_{gs} < V_p$ .

valente de la barrera Schottky ( $Z_{dy}$ ) (véase la Figura 2.10b). Cuando la puerta está fuertemente polarizada la dependencia exponencial de  $I_g$  con  $V_{gs}$  hace que el efecto capacitivo de la puerta desaparezca y que  $Z_{dy}$  pueda sustituirse por una resistencia. Asimismo pueden despreciarse las capacidades parásitas  $C_{pg}$  y  $C_{pd}$ , expresándose los parámetros  $Z$  como sigue [11, 16]:

$$Z_{11} = R_s + R_g + \frac{R_c}{3} + R_{dy} + j\omega(L_s + L_d) \quad (2.9a)$$

$$Z_{12} = Z_{21} = R_s + \frac{R_c}{2} + j\omega L_s \quad (2.9b)$$

$$Z_{22} = R_s + R_d + R_c + j\omega(L_s + L_d) \quad (2.9c)$$

Obsérvese que las partes imaginarias de los parámetros de impedancia varían linealmente con la frecuencia, facilitando así la extracción de las inductancias. Las resistencias parásitas pueden extraerse mediante el análisis de las partes reales, si se añade una condición adicional, como podría ser el valor de la suma  $R_s + R_d$  hallado mediante el método de Fukui, y advirtiendo que la parte real de  $Z_{11}$  crece como  $1/I_g$ .

En cuanto a las capacidades parásitas interesa polarizar la puerta por debajo de la tensión de *pinch-off* para que el canal quede cortado y pueda representarse por una capacidad de borde ( $C_b$ ) que modele la región de deplexión a ambos lados de la puerta (véase la Figura 2.10c). En este caso, las resistencias e inductancias no influyen en la parte imaginaria de los parámetros de admitancia, que adoptan las expresiones siguientes:

$$\Im[y_{11}] = j\omega(C_{pg} + 2C_b) \quad (2.10a)$$

$$\Im[y_{12}] = \Im[y_{21}] = -j\omega C_b \quad (2.10b)$$

$$\Im[y_{22}] = j\omega(C_b + C_{pd}) \quad (2.10c)$$

## II. MODELADO Y CARACTERIZACIÓN DE DISPOSITIVOS DE ASGA

Las tres incógnitas se pueden determinar a partir de las pendientes de las rectas de regresión lineal.

Recientes avances realizados por Camacho [17] han puesto de manifiesto algunas limitaciones de los modelos cuasi-estáticos en la caracterización de los dispositivos FET.

### II.7. Modelos de gran señal

A lo largo de las últimas décadas son numerosos los modelos empíricos que han sido publicados en la literatura y que describen las características de gran señal de transistores MESFET y HEMT. Dado un dispositivo y una aplicación concretas, la selección óptima de un modelo depende de muchos factores, incluyendo la simplicidad, eficiencia computacional, y la precisión. Para la elaboración de un modelo empírico, la estrategia habitual parte del estudio de las características del dispositivo, extraídas a partir de medidas, y se propone una función matemática que se comporte de la misma manera. Estas funciones incluyen parámetros que se escogen convenientemente para ajustar el modelo a las características medidas. Estas características no lineales se corresponden con elementos del circuito equivalente. En la Figura 2.11 se pueden localizar los principales elementos no lineales que aparecen en los modelos de gran señal:

- La corriente drenador-fuente  $I_{ds}$ , función de las tensiones  $V_{gs}$  y  $V_{ds}$ , y de la que dependen la transconductancia  $G_m$  y la conductancia de salida  $G_{ds}$ .
- La capacidad puerta-fuente  $C_{gs}$ .
- La capacidad puerta-drenador  $C_{gd}$ .
- Los diodos  $D_{gs}$  y  $D_{gd}$ , que modelan la corriente de puerta bajo polarización directa de la unión puerta-fuente, y la corriente de avalancha drenador-puerta, res-

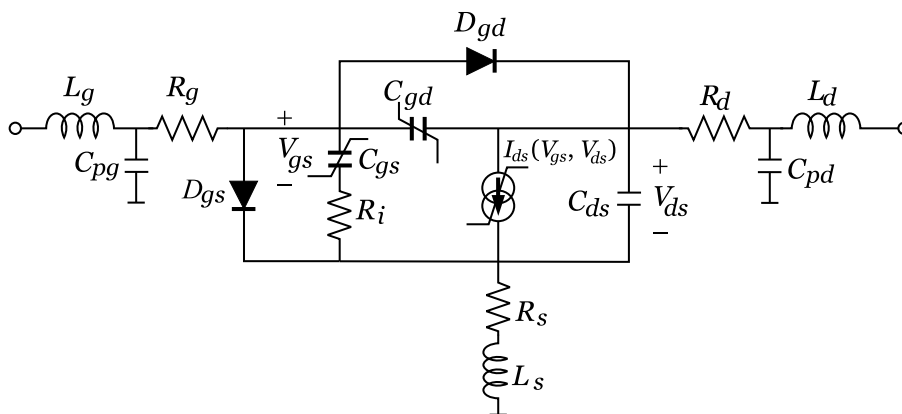


Figura 2.11: Circuito equivalente para el modelo de gran señal de un FET.



pectivamente.

Teniendo en cuenta que los diodos se pueden modelar fácilmente por medio de la ecuación de Shockley:

$$I_f = I_s \left[ \exp \left( \frac{qV_j}{nkT} \right) - 1 \right] \quad (2.11)$$

donde  $V_j$  es la tensión a través de la unión, y que está generalmente aceptado que la no-linealidad dominante en transistores HEMT y MESFET es la fuente de corriente  $I_{ds}(V_{gs}, V_{ds})$ , el siguiente estudio se centra en los tres primeros parámetros de la lista. Partiendo de modelos clásicos de propósito general, se dedicará especial atención a aquellos modelos que se han utilizado con éxito para el análisis de mezcladores activos. Dado que la mayoría de estos modelos no se comportan suficientemente bien para describir las características de los transistores bajo  $V_{ds} = 0$ , se comentarán algunos modelos que se han utilizado para el análisis de mezcladores resistivos. Por último, se concluirá esta sección con el modelo propuesto por la fundición con la que se ha trabajado para la realización de esta Tesis. Aunque constituyen una ayuda valiosa para el diseño de nuevos dispositivos, no se discutirán aquí los modelos basados en características físicas [18], debido a que su uso no está tan extendido entre la mayoría de las aplicaciones de diseño de circuitos.

### II.7.1. Modelos básicos

#### Modelo de Curtice cuadrático

La estructura del modelo propuesto en [19] es similar a la Figura 2.11, con la ausencia del diodo  $D_{gd}$ . Los únicos elementos no lineales que contempla son la fuente de corriente  $I_{ds}(V_{gs}, V_{ds}, \tau)$  y la capacidad  $C_{gs}$ . Para la descripción de la corriente se propone la siguiente función analítica:

$$I_{ds}(V_{gs}, V_{ds}) = \beta(V_{gs} - V_T)^2 \cdot (1 + \lambda V_{ds}) \tanh(\alpha V_{ds}) \quad (2.12)$$

Por tanto, el modelo comprende cuatro parámetros que deben ser ajustados:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  y  $V_T$ . Cada uno de los factores que constituyen la ecuación (2.12) resalta un aspecto diferente de la característica  $I/V$ . Así,  $\beta(V_{gs} - V_T)^2$  modela la dependencia aproximadamente cuadrática de la corriente de drenador con respecto a la tensión  $V_{gs}$ . El siguiente término se utiliza para describir la conductancia de salida, que depende del parámetro  $\lambda$ . Finalmente, la saturación de la característica  $I/V$  se modela por medio de una función  $\tanh$ . Mientras mayor es el parámetro  $\alpha$ , los efectos de saturación se aprecian más rápido.

La transconductancia y la conductancia de salida se obtienen derivando (2.12) con respecto a  $V_{gs}$  y  $V_{ds}$ , respectivamente:

$$G_m = \frac{\partial I_{ds}}{\partial V_{gs}} = 2\beta(V_{gs} - V_T) \cdot (1 + \lambda V_{ds}) \tanh(\alpha V_{ds}) = \frac{2}{V_{gs} - V_T} I_{ds} \quad (2.13)$$

## II. MODELADO Y CARACTERIZACIÓN DE DISPOSITIVOS DE ASGA

$$G_{ds} = \frac{\partial I_{ds}}{\partial V_{ds}} = \beta(V_{gs} - V_T)^2 \cdot \left[ \frac{\alpha(1 + \lambda V_{ds})}{\cosh^2(\alpha V_{ds})} + \lambda \tanh(\alpha V_{ds}) \right] \quad (2.14)$$

Obsérvese que el modelo predice que todas las derivadas de la transconductancia son cero a partir de orden 3, siendo ésta una de las principales limitaciones del modelo de cara a su aplicación a circuitos fuertemente no lineales, como ocurre con los mezcladores.

Para la inclusión de los efectos del retardo de tránsito, se sugiere que la dependencia de la corriente con  $V_{gs}$  sea de la forma  $I_{ds}[V_{gs}(t - \tau), V_{ds}]$ . Una forma sencilla de introducir este parámetro consiste en calcular la derivada temporal de la corriente aproximándola por un cociente incremental:

$$\frac{dI_{ds}(V)}{dt} \approx \frac{I_{ds}(V) - I_{ds}(V - \tau)}{\tau} \rightarrow I_{ds}(V - \tau) \approx I_{ds}(V) - \tau \frac{dI_{ds}(V)}{dt} \quad (2.15)$$

Para evaluar la derivada se utiliza la regla de la cadena:

$$\frac{dI_{ds}(V)}{dt} = \left. \frac{\partial I_{ds}(V)}{\partial V_{gs}} \right|_{V_{ds}} \cdot \frac{dV_{gs}}{dt} \quad (2.16)$$

En cuanto a la capacidad puerta-fuente, se sugiere una expresión analítica derivada de la capacidad de una unión metal semiconductor ideal:

$$C_{gs}(V_{gs}) = \frac{C_{gs0}}{\sqrt{1 - \frac{V_{gs}}{V_{bi}}}} \quad (2.17)$$

donde  $C_{gs0}$  es el valor de la capacidad en ausencia de polarización, y  $V_{bi}$  el potencial de contacto de la barrera Schottky. La capacidad puerta-drenador puede describirse con ayuda de la misma expresión analítica, si bien su valor es mucho más pequeño en condiciones normales de polarización.

Una variante de este modelo es la propuesta de Statz y col. [20], que critican la dependencia cuadrática de la corriente con  $V_{gs}$  para valores elevados de la diferencia  $V_{gs} - V_T$ , sosteniendo que este comportamiento es aproximadamente lineal:

$$I_{ds} = \frac{\beta(V_{gs} - V_T)^2}{1 + b(V_{gs} - V_T)} (1 + \lambda V_{ds}) \tanh(\alpha V_{ds}) \quad (2.18)$$

Obsérvese que tanto (2.12) como (2.18) describen la corriente como una función separable en las variables  $V_{ds}$ ,  $V_{gs}$ , esto es,  $I_{ds} = F_1(V_{ds})F_2(V_{gs})$ .

### Modelo de Materka-Kacprzac

El circuito equivalente del modelo de Materka-Kacprzac [21] se corresponde con la Figura 2.11, incluyendo los diodos  $D_{gs}$  y  $D_{gd}$ , para los que se asume una característica corriente-tensión similar a la ecuación (2.11), con dos parámetros de ajuste. La

capacidad puerta fuente se determina con la expresión (2.17) cuando  $V_{gs} < 0,8V_{bi}$ . Para valores superiores de la tensión, se aproxima la capacidad por una recta de pendiente igual a la derivada  $dC_{gs}/dV_{gs}$  evaluada en  $V_{gs} = 0,8V_{bi}$ .

La diferencia más significativa de este modelo con respecto al de Curtice se encuentra en la expresión de la corriente, y en una modificación de la tensión de *pinch-off* que contempla la dependencia de este voltaje con  $V_{ds}$ :

$$I_{ds}(V_{gs}, V_{ds}) = I_{dss} \left(1 - \frac{V_{gs}}{V_T}\right)^2 \tanh\left(\frac{\alpha V_{ds}}{V_{gs} - V_T}\right) \quad (2.19)$$

donde

$$V_T = V_p + \gamma V_{ds} . \quad (2.20)$$

El parámetro  $I_{dss}$  es la corriente de saturación para  $V_{gs} = 0$ , y  $V_p$  es la tensión de *pinch-off* de un dispositivo ideal de ley cuadrática para la corriente. El parámetro  $\alpha$  se utiliza como en el modelo de Curtice, mientras que  $\gamma$  es otra constante de ajuste del modelo que se utiliza para definir la tensión de *pinch-off* efectiva. Para tener en cuenta el retardo de tránsito la corriente instantánea se calcula a partir de (2.19) sustituyendo  $V_{gs}(t)$  por  $V_{gs}(t - \tau)$ . Las expresiones de la transconductancia y de la conductancia de salida se obtienen por derivación de la corriente:

$$G_m = \frac{-2I_{dss}}{V_T} \left(1 - \frac{V_{gs}}{V_T}\right) \tanh\left(\frac{\alpha V_{ds}}{V_{gs} - V_T}\right) - \frac{\alpha V_{ds} I_{dss}}{V_T^2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\alpha V_{ds}}{V_{gs} - V_T}\right) \quad (2.21)$$

$$G_{ds} = \frac{2\gamma V_{gs} I_{dss}}{V_T^2} \left(1 - \frac{V_{gs}}{V_T}\right) \tanh\left(\frac{\alpha V_{ds}}{V_{gs} - V_T}\right) + \frac{\alpha I_{dss}}{V_T^2} [(V_{gs} - V_T) + \gamma V_{ds}] \operatorname{sech}^2\left(\frac{\alpha V_{ds}}{V_{gs} - V_T}\right) \quad (2.22)$$

Este modelo ha sido mejorado por Fernández, Newport, Zamanillo y col. para corregir ciertas desviaciones respecto del comportamiento real de los FETs, que se ponen de manifiesto cuando se utilizan medidas pulsadas de la característica  $I/V$  [22]. Es el caso de la dispersión a baja frecuencia de la transconductancia y la conductancia de salida (desde DC hasta varios centenares de kHz), o las variaciones del punto de trabajo por calentamiento y de la resistencia del canal en función de las tensiones de puerta y drenador.

### Modelo de Curtice-Ettenberg

Curtice y Ettenberg [23] modificaron el modelo original de Curtice para conseguir un mejor ajuste en la relación entre la corriente de drenador como función de la tensión puerta-fuente. El modelo original asumía que esta relación se comportaba siguiendo

## II. MODELADO Y CARACTERIZACIÓN DE DISPOSITIVOS DE ASGA

una ley cuadrática. Una aproximación cúbica en esta relación proporciona un grado de libertad adicional para el ajuste de las características del dispositivo:

$$I_{ds} = (A_0 + A_1V_1 + A_2V_1^2 + A_3V_1^3) \cdot \tanh(\gamma V_{ds}) \quad (2.23)$$

donde  $V_1$  es la tensión de entrada. Los coeficientes  $A_i$  se extraen a partir de medidas en la región de saturación minimizando el error cuadrático medio. Para incluir el fenómeno de incremento de la tensión de *pinch-off* con el aumento de la tensión  $V_{ds}$ , se considera:

$$V_1 = V_{gs}(t - \tau) \cdot [1 + \beta (V_{ds}^0 - V_{ds}(t))] \quad (2.24)$$

donde  $\beta$  es el parámetro que controla el cambio en la tensión de *pinch-off* y  $V_{ds}^0$  es la tensión drenador-fuente (en saturación) a la que se han extraído los coeficientes  $A_i$ . El retardo de tránsito se asume también proporcional a la tensión  $V_{ds}$ :

$$\tau = A_5 \cdot V_{ds}(t) \quad (2.25)$$

La conductancia de salida es una función que depende fuertemente de  $V_{gs}$  y  $V_{ds}$ . Hallando la derivada de la corriente del modelo se obtiene el siguiente resultado para la conductancia de salida de pequeña señal en RF:

$$G_{ds} = \frac{1}{R_{ds}} - G_{m0}\beta V_{gs} + \frac{\gamma I_{ds} \cdot \operatorname{sech}^2[\gamma V_{ds}(t)]}{\tanh[\gamma V_{ds}(t)]} \quad (2.26)$$

donde

$$G_{m0} = (A_1 + 2A_2V_1 + 3A_3V_1^2) \cdot \tanh[\gamma V_{ds}(t)] \quad (2.27)$$

Los tres términos que comprende  $G_{ds}$  se pueden interpretar como: una conductancia fija; una conductancia de substrato que provoca el cambio en la tensión de *pinch-off* con  $V_{ds}$ ; y una conductancia de canal que sólo es importante por debajo de la región de saturación. El resultado es que la conductancia de salida en RF depende de  $V_{ds}$  y  $V_{gs}$ .

En cuanto a la transconductancia, su expresión viene dada por:

$$G_m = G_{m0} [1 + \beta (V_{ds}^0 - V_{ds}(t))] \quad (2.28)$$

El coeficiente  $\beta$  provoca un descenso de la transconductancia cuando aumenta la tensión  $V_{ds}$ , fenómeno consistente con el comportamiento de los FETs de AsGa.

### II.7.2. Modelos para la región de saturación

#### Modelo de Maas-Neilson

Todos los modelos anteriores se justifican por su fidelidad en la reproducción de las características  $I/V$  y  $Q/V$  de los dispositivos FET. No obstante, salvo en contadas

excepciones, los modelos no tienen en cuenta la aproximación de las derivadas de dichas características, aun cuando éstas son realmente críticas en la determinación de los niveles de intermodulación. Expresiones de  $I_{ds}(V_{gs}, V_{ds})$  como (2.23) resultan adecuadas para el análisis no lineal de ciertos circuitos de microondas, cuando es suficiente con una buena predicción de la transconductancia. Sin embargo, (2.23) es incapaz de producir estimaciones válidas de los niveles de intermodulación, debido a que la forma funcional de las derivadas no se corresponde con la del dispositivo real. Los coeficientes del desarrollo en series de Taylor de  $I_{ds}$  varían con  $V_{gs}$  en una dependencia progresivamente más compleja a medida que aumenta el orden, mientras que las derivadas de (2.23) son cada vez de estructura más simple, llegando incluso a desaparecer cuando  $n$  excede el orden del polinomio.

La expresión propuesta por Maas y Neilson [24] modela la característica  $I/V$  como una función lineal más una desviación de la linealidad representada por una serie de Fourier:

$$I_{ds}(V_{gs}, V_{ds}) = [a_0x + a_1 \text{sen}(x) + a_2 \text{sen}(2x) + a_3 \text{sen}(3x) + a_4 \text{sen}(4x)] \cdot \tanh(\alpha V_{ds}) \quad (2.29)$$

donde

$$x = \pi \frac{V_{gs} - V_T}{V_M - V_T} \quad V_T < V_{gs} < V_M, \quad V_{ds} > 0 \quad (2.30)$$

siendo  $V_M$  la máxima tensión de puerta para la que el modelo es válido. Nótese que el rango de tensiones comprendido entre  $V_T$  y  $V_M$  está escalado para que  $x \in (0, \pi)$ . En la mayoría de los dispositivos es suficiente con incluir en el modelo los tres primeros armónicos.

Para obtener una representación adecuada de la característica  $I/V$ , se ajusta este modelo a la corriente  $I_{ds}(V_{gs}, V_{ds})$  medida y sus derivadas mediante el método de descomposición en valores singulares (SVD) para resolver la ecuación:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (2.31)$$

donde  $\mathbf{I}$  es un vector con medidas de  $I_{ds}(V_{gs}, V_{ds})$  y sus derivadas,  $\mathbf{A} = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4]^T$ , y  $\mathbf{D}$  una matriz de diseño con las funciones base y sus derivadas evaluadas a distintos valores de  $V_{gs}$ .

### Modelo de Angelov (Universidad de Chalmers)

Los modelos de la Sección II.7.1 están concebidos para describir el comportamiento de gran señal de dispositivos MESFET. A pesar de que también se pueden ajustar a la característica  $I/V$  de transistores HEMT, existen ciertas propiedades de estos últimos que no quedan realizadas cuando se hace uso de dichos modelos. Entre las no-linealidades involucradas en el comportamiento de los dispositivos FET, la transconductancia es una de las más críticas al influir decisivamente en la predicción de

## II. MODELADO Y CARACTERIZACIÓN DE DISPOSITIVOS DE ASGA

importantes efectos de gran señal. La diferencia más significativa entre las transconductancias de dispositivos HEMT y MESFET es la existencia de un pico en los primeros, a partir del cual la transconductancia se degrada. Uno de los primeros modelos en que aparece explícitamente la caracterización de este fenómeno se debe a Miller y col. [25], en el que se corrige la transconductancia de modelos clásicos de gran señal para MESFET con un término que tiene en cuenta el pico de la transconductancia:

$$G_m = G_{m\text{FET}} - f(V_{ds})\xi (V_{gs} - V_{pk})^\psi \quad (2.32)$$

donde  $f(V_{ds})$  es una función no lineal separable en  $V_{ds}$ , propia de cada modelo<sup>1</sup>,  $V_{pk}$  la tensión  $V_{gs}$  en la que se alcanza el máximo de la transconductancia, y  $\xi$ ,  $\psi$  dos parámetros de ajuste.

En el modelo de Angelov [26] la corriente se expresa mediante el producto de dos funciones separables en  $V_{gs}$  y  $V_{ds}$ , esto es:  $I_{ds}(V_{gs}, V_{ds}) = I_{dA}(V_{gs}) \cdot I_{dB}(V_{ds})$ . El término  $I_{dB}(V_{ds})$  es el mismo que se utiliza en el modelo de Curtice. Sin embargo, para  $I_{dA}(V_{gs})$  se propone una función cuya primera derivada tenga el comportamiento característico en forma de campana, propio de dispositivos HEMT:

$$I_{ds} = I_{pk} (1 + \tanh(\psi)) \cdot (1 + \lambda V_{ds}) \tanh(\alpha V_{ds}) \quad (2.33)$$

donde  $I_{pk}$  es la corriente de drenador en el punto de máxima transconductancia y  $\psi$  una serie de potencias centrada en  $V_{pk}$  que varía con  $V_{gs}$  según:

$$\psi = P_1(V_{gs} - V_{pk}) + P_2(V_{gs} - V_{pk})^2 + P_3(V_{gs} - V_{pk})^3 + \dots \quad (2.34)$$

El modelo es lo suficientemente preciso incluso cuando se aproxima  $\psi$  por medio de una función lineal. En una primera aproximación los diferentes parámetros del modelo pueden ser determinados por inspección de las medidas de la corriente efectuadas en saturación. Así,  $\lambda$  se extrae de la pendiente de la característica  $I_{ds}/V_{ds}$ ,  $I_{pk}$  y  $V_{pk}$  se determinan en el pico de la transduconductancia  $G_{mpk}$ , que a su vez se obtiene a partir de la transconductancia medida  $G_{mpkm}$  teniendo en cuenta el efecto de realimentación debido a la resistencia de fuente  $R_s$ , que puede obtenerse a partir de medidas en DC:

$$G_{mpk} = \frac{G_{mpkm}}{1 - R_s G_{mpkm}} \quad (2.35)$$

El parámetro  $P_1$  se puede expresar como

$$P_1 = \frac{G_{mpk}}{I_{pk}(1 + \lambda V_{ds})} \approx \frac{G_{mpk}}{I_{pk}}. \quad (2.36)$$

En algunos HEMTs  $V_{pk}$  depende débilmente de  $V_{ds}$  en la región de saturación. Para tener en cuenta este efecto puede tomarse  $V_{pk} = V_{pk0} + \gamma V_{ds}$ .

<sup>1</sup>Por ejemplo, en el modelo de Curtice puede tomarse  $f(V_{ds}) = (1 + \lambda V_{ds}) \tanh(\alpha V_{ds})$ .

El mismo tipo de funciones se utiliza para modelar las no-linealidades de las capacidades  $C_{gs}$  y  $C_{gd}$ :

$$C_{gs} = C_{gs0} [1 + \tanh(\psi_1)] \cdot [1 + \tanh(\psi_2)] \quad (2.37a)$$

$$C_{gd} = C_{gd0} [1 + \tanh(\psi_3)] \cdot [1 - \tanh(\psi_4)] \quad (2.37b)$$

donde

$$\psi_1 = P_{0gsg} + P_{1gsg}V_{gs} + P_{2gsg}V_{gs}^2 + P_{3gsg}V_{gs}^3 + \dots \quad (2.38a)$$

$$\psi_2 = P_{0gsd} + P_{1gsd}V_{ds} + P_{2gsd}V_{ds}^2 + P_{3gsd}V_{ds}^3 + \dots \quad (2.38b)$$

$$\psi_3 = P_{0gdg} + P_{1gdg}V_{gs} + P_{2gdg}V_{gs}^2 + P_{3gdg}V_{gs}^3 + \dots \quad (2.38c)$$

$$\psi_4 = P_{0gdd} + (P_{1gdd} + P_{1cc}V_{gs})V_{ds} + P_{2gdd}V_{ds}^2 + P_{3gdd}V_{ds}^3 + \dots \quad (2.38d)$$

El término  $P_{1cc}V_{gs}V_{ds}$  refleja el acoplamiento de  $V_{gs}$  y  $V_{gd}$  en  $C_{gd}$ . Cuando basta con una precisión del 5–10 %, las funciones  $\psi_i$  pueden ser aproximadas por sus términos lineales:

$$C_{gs} = C_{gs0} [1 + \tanh(P_{1gsg}V_{gs})] \cdot [1 + \tanh(P_{1gsd}V_{gd})] \quad (2.39a)$$

$$C_{gd} = C_{gs0} [1 + \tanh(P_{1gdg}V_{gs})] \cdot [1 - \tanh(P_{1gdd}V_{ds} + P_{1cc}V_{gs}V_{ds})] \quad (2.39b)$$

Si además se asume despreciable el acoplamiento entre  $V_{gs}$  y  $V_{ds}$  en  $C_{gd}$ , entonces resulta:

$$C_{gd} = C_{gs0} [1 + \tanh(P_{1gdg}V_{gs})] \cdot [1 - \tanh(P_{1gdd}V_{ds})] . \quad (2.40)$$

### Modelo de Pedro

Se trata de un modelo empírico que ajusta la relación  $G_m(V_{gs})$  partiendo de consideraciones sobre el comportamiento físico del canal [27]. En lugar de modelar la región activa del dispositivo como un canal conductor uniforme sobre un sustrato aislante ideal, se contempla el efecto de la profundidad de la región de depleción,  $d(V)$ , función del potencial puerta-canal,  $V$ , suponiendo diferentes perfiles de dopado,  $N(y) = N_0y^n$  (véase la Figura 2.12). Mediante la ecuación de Poisson se llega a la siguiente ecuación integral:

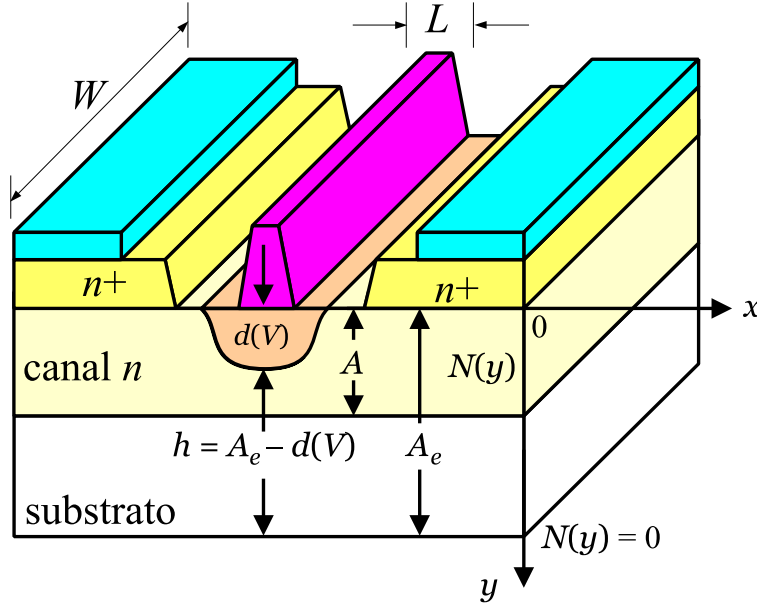
$$V = -\frac{q}{\epsilon} \int_0^{d(V)} yN(y) dy + V_{bi} . \quad (2.41)$$

El exceso de carga en la región de depleción se puede expresar como:

$$Q_g = qLW \int_0^{d(V)} N(y) dy , \quad (2.42)$$

y la corriente  $I_{ds}$  está determinada por la carga restante en la parte activa del canal, que se extiende desde  $d(V)$  hasta una profundidad  $A_e$ , y se desplaza a una velocidad  $v_s$ :

$$I_{ds} = qv_sW \int_{d(V)}^{A_e} N(y) dy . \quad (2.43)$$



**Figura 2.12:** Sección transversal sencilla de un FET de AsGa para el modelado basado en características físicas.

la evaluación de la transconductancia  $G_m(V)$  y de la capacidad  $C_{gs}$  es inmediata a partir de (2.43) y (2.42).

Tras evaluar  $d(V)$  resolviendo (2.41) y simular el comportamiento de  $I_{ds}(V_{gs})$  y  $G_m(V_{gs})$  para los distintos perfiles de dopado, se concluye que existen características similares que indican que a pesar de la diversidad de dispositivos FET de AsGa, todos presentan una dependencia común de  $I_{ds}$  con  $V_{gs}$ , lo que justifica la idoneidad de construir un modelo empírico. En particular, es posible distinguir dos regiones diferentes en la característica  $G_m(V_{gs})$ : para pequeñas profundidades de depleción bajo alta polarización  $V_{gs}$ , y la correspondiente al efecto de *roll-off* en el dopado canal-sustrato. Para la primera región el perfil de dopado se puede representar por  $N_o y^n$  ( $n > -2$ ), y la dependencia de la profundidad de la zona de depleción con  $V_{gs}$  se obtiene analíticamente a partir de (2.41):

$$d(V_{gs}) = \left[ \frac{\epsilon V_{bi}}{q N_o} (n + 2) \left( 1 - \frac{V_{gs}}{V_{bi}} \right) \right]^{\frac{1}{n+2}}, \quad (2.44)$$

y la transconductancia se expresa como:

$$G_m(V_{gs}) = v_s W \epsilon \left[ \frac{\epsilon V_{bi}}{q N_o} (n + 2) \left( 1 - \frac{V_{gs}}{V_{bi}} \right) \right]^{-\frac{1}{n+2}} = G_{m0} \left( 1 - \frac{V_{gs}}{V_{bi}} \right)^{-\frac{1}{n+2}}. \quad (2.45)$$

Para la otra región no es posible obtener una solución analítica de (2.41), de ahí que se acuda a una expresión empírica de la forma  $G_{m0}[1 + \tanh(u)]$ , siendo  $u$  es una función monótona de  $V_{gs}$ . Para generar  $I_{ds}(V_{gs}, V_{ds})$ ,  $G_m$  debe ser integrable e incluir la dependencia con  $V_{ds}$ . La forma elegida es:

$$G_m(V_{gs}, V_{ds}) = G_{m0} \left( 1 - \frac{V_{gs}}{V_{bi}} \right)^{-\frac{1}{n+2}} [1 + \tanh(u)] \tanh(\alpha V_{ds}), \quad (2.46)$$



donde

$$u = \frac{1}{2} \left[ C - A \left( \frac{V_b - V_{gs}}{V_T} \right)^{\frac{1}{n+2}} \right] \quad (2.47)$$

tiene una correspondencia análoga con la altura de la región activa del canal,  $h = A_e - d(V_{gs})$ , y  $V_b$ ,  $A$  y  $C$  son parámetros de ajuste. Para tomar en consideración la variación de la tensión umbral  $V_T$  con  $V_{ds}$ , se modela esta dependencia como en (2.20). La expresión resultante para la corriente  $I_{ds}$  es, por tanto:

$$I_{ds}(V_{gs}, V_{ds}) = \beta \{u + \ln [\exp(u) + \exp(-u)]\} \tanh(\alpha V_{ds}), \quad (2.48)$$

y para garantizar la consistencia entre  $G_m(V_{gs})$  y  $C_{gs}(V_{gs})$  se toma:

$$C_{gs}(V_{gs}) = C_{g0} \left( \frac{V_b - V_{gs}}{V_T} \right)^{-\frac{1}{n+2}} [1 + \tanh(u)] + C_{pg}, \quad (2.49)$$

siendo  $C_{pg}$  la componente parásita de  $C_{gs}$  medida con el dispositivo al corte.

El ajuste de los parámetros del modelo se realiza a partir de medidas de microondas de  $G_m$ ,  $G_{ds}$  y  $C_{gs}$ , para evitar los efectos dispersivos a baja frecuencia.

### Modelo de Allam (Universidad de Lille)

En lugar de seguir las técnicas convencionales, basadas en la caracterización (generalmente en DC) de la corriente  $I_{ds}(V_{gs}, V_{ds})$  para distintas condiciones de polarización, el modelo de Allam y col. [28] propone el ajuste de los parámetros  $G_m$ ,  $G_{ds}$  y  $C_{gs}$  extraídos a partir de medidas en RF a través de procedimientos como los descritos en la sección anterior. Se trata de un modelo válido en la zona de saturación, ya que se asume que los elementos no lineales dependen exclusivamente de  $V_{gs}$ , hipótesis que sólo se puede justificar en aplicaciones en las que  $V_{ds}$  permanezca próximo al valor de reposo  $V_{DS0}$ .

La descripción de  $G_m$ ,  $G_{ds}$  y  $C_{gs}$  se basa en expresiones polinómicas de orden adecuado para proporcionar el mejor ajuste con los valores medidos:

$$G_m(V_{gs}, V_{DS0}) = (a_0 + a_1 V_{gs} + a_2 V_{gs}^2 + \dots + a_n V_{gs}^n) \cdot F(V_{gs}) \quad (2.50a)$$

$$G_{ds}(V_{gs}, V_{DS0}) = (b_0 + b_1 V_{gs} + b_2 V_{gs}^2 + \dots + b_n V_{gs}^n) \cdot F(V_{gs}) \quad (2.50b)$$

$$C_{gs}(V_{gs}, V_{DS0}) = (c_0 + c_1 V_{gs} + c_2 V_{gs}^2 + \dots + c_n V_{gs}^n) \cdot F(V_{gs}) \quad (2.50c)$$

donde  $F(V_{gs})$  es una función no lineal que se escoge para que la representación de los parámetros del modelo sea aproximadamente constante por debajo de la tensión de *pinch-off*:

$$F(V_{gs}) = 0,5 \{1 + \tanh[40(V_p - V_{gs})]\} \quad (2.51)$$

La corriente de drenador y la carga de la capacidad puerta-fuente se obtienen por integración:

$$I_{ds} = \int_{V_p}^{V_{gs}} G_m(V'_{gs}, V_{DS0}) dV'_{gs} + G_{ds}(V_{gs}, V_{DS0}) \cdot (V_{ds} - V_{DS0}) \quad (2.52a)$$

## II. MODELADO Y CARACTERIZACIÓN DE DISPOSITIVOS DE ASGA

$$Q_{gs} = \int_{V_p}^{V_{gs}} C_{gs}(V'_{gs}, V_{DS0}) dV'_{gs} + K V_{gs} \quad (2.52b)$$

donde  $K$  es el valor constante de la capacidad  $C_{gs}$  por debajo de *pinch-off*.

### Modelo de Peng (Universidad de Michigan)

En conformidad con Maas y Neilson, Peng y col. destacan el papel crítico de las derivadas de la corriente para la descripción de productos de intermodulación, por lo que proponen un modelo directo de la segunda derivada [29]. La expresión analítica de  $G_{m2}$  se compone de una función gaussiana más un término lineal dependiente de  $V_{gs}$ :

$$G_{m2} = G'_{mx} \exp \left[ - \left( \frac{V_{gs} - V_{gp}}{V_{g\sigma}} \right)^2 \right] + G''_{m0} (V_{gs} - V_{g\gamma}) \quad (2.53)$$

Los coeficientes  $G'_{mx}$ ,  $G''_{m0}$ ,  $V_{gp}$ ,  $V_{g\sigma}$  y  $V_{g\gamma}$  son parámetros de ajuste. Estrictamente todos ellos son función de  $V_{ds}$ , aunque la variación de estos parámetros puede ser ignorada si el FET está polarizado en saturación. Teniendo en cuenta que  $G_{m2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I_{ds}}{\partial V_{gs}^2}$  la transconductancia  $G_m$  y la tercera derivada  $G_{m3}$  se pueden obtener respectivamente por integración y derivada de (2.53):

$$G_m = G'_{mx} V_{g\sigma} \sqrt{\pi} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{V_{gs} - V_{gp}}{V_{g\sigma}} \right) \right] + G''_{m0} (V_{gs} - V_{g\gamma})^2 \quad (2.54a)$$

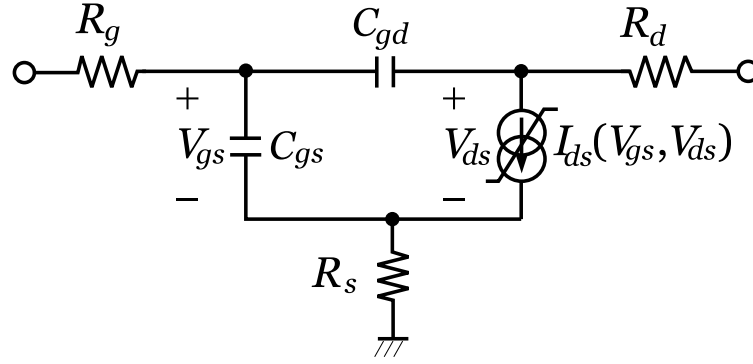
$$G_{m3} = - \frac{2G'_{mx}}{3V_{g\sigma}^2} (V_{gs} - V_{gp}) \exp \left[ - \left( \frac{V_{gs} - V_{gp}}{V_{g\sigma}} \right)^2 \right] + \frac{1}{3} G''_{m0} \quad (2.54b)$$

### II.7.3. Modelos para FETs resistivos o polarizados en la región lineal

#### Modelo de Virk-Maas

En un FET resistivo, el canal se utiliza como una conductancia controlada por la tensión de puerta, y su característica  $I/V$  es necesariamente una función de las tensiones  $V_{ds}$  y  $V_{gs}$ . Es necesario que el modelo reproduzca no sólo las derivadas de la corriente respecto de las tensiones de control, sino además las derivadas parciales con respecto a ambas tensiones. La mayoría de los modelos que son capaces de reproducir las derivadas de la transconductancia en la región de saturación no se comportan bien en la zona lineal. La dificultad fundamental radica en modelar con suficiente precisión todos los términos de una expansión bidimensional en series de Taylor de la corriente.

La formulación del modelo de Virk-Maas [30] está basada en medidas de la conductancia no lineal del canal, y cómo estas medidas se relacionan con los coeficientes de expansión de la serie de Taylor. En la Figura 2.13 se muestra el circuito equivalente de un FET al que no se le aplica polarización de drenador. La corriente se ajusta a las medidas de los coeficientes de Taylor por medio de la siguiente expresión analítica:



**Figura 2.13:** Circuito equivalente de un FET resistivo. Modelo de Virk-Maas.

$$I_{ds}(V_{gs}, V_{ds}) = I_0 \left\{ 3\beta \frac{V_{ds}}{V_p} - 2 \left[ \left( \frac{\beta V_{ds} - V_{gs} + \phi}{V_p} \right)^{3/2} + \left( \frac{-V_{gs} + \phi}{V_p} \right)^{3/2} \right] \cdot F(V_{gs}, V_{ds}) + \gamma V_{ds} + \delta V_{ds}^2 + \epsilon V_{ds}^3 \right\} \quad (2.55)$$

donde

$$F(V_{gs}, V_{ds}) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \tan^{-1} [\alpha (V_{gs} - V_{ds} + V_p - \phi)] \right\}. \quad (2.56)$$

Teniendo en cuenta que no existe polarización aplicada al terminal de drenador, la capacidad puerta-canal se divide aproximadamente a partes iguales entre las capacidades  $C_{gs}$  y  $C_{gd}$ , que se modelan como capacidades ideales de barrera Schottky con dopado epitaxial uniforme:

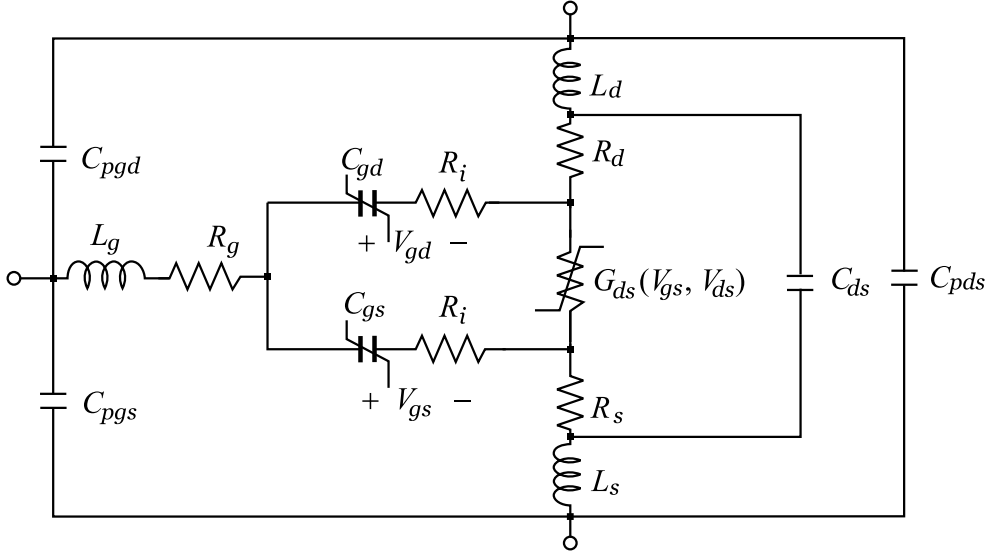
$$C_{gs} = C_{gd}(V_{gs}, V_{ds} = 0) = \frac{C_{g0}}{\sqrt{1 - \frac{V_{gs}}{\phi}}}, \quad C_{g0} \approx C_{gs0} \approx C_{gd0}. \quad (2.57)$$

### Modelo de Fujii

El cálculo numérico de las derivadas a partir de la medida de  $I_{ds}(V_{gs}, V_{ds})$  resulta poco práctico para valores bajos de  $V_{ds}$ , debido a que la corriente que se mide es pequeña y a menudo las tolerancias del proceso de medida enmascaran las no-linealidades que se desean caracterizar. En lugar de centrarse en la corriente  $I_{ds}$ , Fujii y col. proponen un modelo para la conductancia  $G_{ds}(V_{gs}, V_{ds})$  [31, 32]. El circuito equivalente de este modelo se muestra en la Figura 2.14, destacando por su estructura completamente simétrica. A excepción de la conductancia y las capacidades  $C_{gs}$  y  $C_{gd}$ , el resto de los elementos se asumen lineales.

La expresión analítica de  $G_{ds}(V_{gs}, V_{ds})$  comparte cierto parecido con el modelo de Angelov, si bien no se construye mediante el producto de dos funciones completamente separables en  $V_{ds}$  y  $V_{gs}$ . Teniendo en cuenta que la pendiente de la curva de  $G_{ds}$

## II. MODELADO Y CARACTERIZACIÓN DE DISPOSITIVOS DE ASGA



**Figura 2.14:** Circuito equivalente para el modelo de gran señal de un FET resistivo.

frente a  $V_{ds}$  depende de  $V_{gs}$  se prefiere escribir:

$$G_{ds}(V_{gs}, V_{ds}) = F_1(V_{gs}) \cdot F_2(V_{gs}, V_{ds}) \quad (2.58)$$

Para  $F_1$ , la dependencia de  $G_{ds}$  con  $V_{gs}$  cuando  $V_{ds} = 0$  se representa suficientemente bien por medio de la función *tanh*:

$$F_1(V_{gs}) = F_{cnt} [1 + \tanh(\psi)] \quad (2.59)$$

donde  $F_{cnt}$  es la pendiente de la curva de  $F_1$  frente a  $V_{gs}$  evaluada en un punto de  $V_{gs} = V_{cnt}$  correspondiente al centro de la zona lineal, y  $\psi$  la siguiente serie de potencias:

$$\psi = P_1(V_{gs} - V_{cnt}) + P_2(V_{gs} - V_{cnt})^2 + P_3(V_{gs} - V_{cnt})^3 + \dots \quad (2.60)$$

siendo  $P_n$  parámetros de ajuste.

La función  $F_2$  representa la dependencia de  $G_{ds}$  y sus derivadas con  $V_{ds}$ :

$$F_2(V_{gs}, V_{ds}) = 1 - [A_1(V_{gs})|V_{ds}| + A_2(V_{gs})|V_{ds}|^2 + A_3(V_{gs})|V_{ds}|^3 + \dots] \quad (2.61)$$

donde  $A_n$  son coeficientes de ajuste dependientes de  $V_{gs}$ . Para alcanzar una aproximación aceptable es suficiente con incluir en el modelo  $A_1$  y  $A_3$  (según las medidas realizadas por Fujii  $A_2$  es prácticamente cero). El primer coeficiente se puede ajustar por medio de una ecuación similar a (2.59), mientras que para  $A_3(V_{gs})$  se propone la siguiente función:

$$F_1(V_{gs}) = F_{cnt} [(1 + \lambda V_{gs}) + \tanh(\psi)] \quad (2.62)$$

donde  $\lambda$  es un parámetro de modulación similar al que aparece en el modelo de Cur-tice.

En cuanto a la capacidad  $C_{gs}$ , para expresar la dependencia con  $V_{gs}$  se construye la siguiente expresión:

$$C_{gs}(V_{gs}) = F_{cnt} [1 + C_{fs} \tanh(\psi)] \quad (2.63)$$

donde

$$C_{fs} = 1 - \frac{C_{gmin}}{F_{cnt}} \quad (2.64)$$

y  $C_{gmin}$  es el valor de  $C_{gs}$  cuando  $V_{gs} \ll V_p$ .

### Modelo de García (Universidad de Cantabria)

En un intento por reproducir las derivadas de la corriente en la región lineal, García y col. [33] acuden al modelo de Shockley para la operación de un dispositivo JFET en zona lineal:

$$I_{ds} = G_0 \left\{ V_{ds} - \frac{2}{3} \left[ \frac{(V_{ds} + \phi - V_{gs})^{3/2} - (\phi - V_{gs})^{3/2}}{(\phi - V_p)^{1/2}} \right] \right\}, \quad \begin{array}{l} V_p < V_{ds} < \phi \\ V_p < V_{gd} < \phi \end{array} \quad (2.65)$$

Dado que está ampliamente aceptado que la tensión de control efectiva de la región de depleción está limitada por  $V_p$  y el potencial interno  $\phi$ , se puede sustituir  $V_{ds}$  en (2.65) por  $V_{gs} - V_{gd}$  y transformar las tensiones  $V_{gs}$  y  $V_{gd}$  en magnitudes efectivas. Para asegurar una transición continua y diferenciable en el intervalo entre  $V_p$  y  $\phi$ , se propone la siguiente transformación:

$$V_{gxef} = \phi + \frac{1}{2\beta_x} \{ \beta_x (V_{gxaux} - \phi) - \ln(2 \cosh[\beta_x (V_{gxaux} - \phi)]) \} \quad (2.66a)$$

$$V_{gxaux} = V_{p0} + \frac{1}{2\alpha_x} \{ \alpha_x (V_{gx} - V_{px}) + \ln(2 \cosh[\alpha_x (V_{gx} - V_{px})]) \} \quad (2.66b)$$

donde  $x = s$  para  $V_{gs}$  y  $x = d$  para  $V_{gd}$ .

Los parámetros  $\beta_s$  y  $\beta_d$  están relacionados con la transición del potencial interno y no son críticos en la reproducción de las derivadas de la corriente. Todo lo contrario sucede con  $\alpha_s$  y  $\alpha_d$ , ya que definen la transición continua del valor de *pinch-off*. Este efecto de modulación está incluido en algunos de los modelos anteriores, si bien sólo se describe en ellos su dependencia con  $V_{gs}$  bajo operación normal con  $V_{ds} > 0$ . La región de corte y la frontera entre la zona lineal y de saturación contribuyen significativamente al comportamiento de las derivadas de la corriente. Ambas regiones pueden quedar definidas por medio de la transición de la tensión de *pinch-off* según  $V_{gs}$  (corte) y  $V_{gd}$  (lineal-saturación).

$V_{p0}$  es la tensión de *pinch-off* para  $V_{ds} = 0$ , mientras que  $V_{px}$  representa la modulación de *pinch-off* con  $V_{gx}$ . En el caso de  $V_{gd}$  esta modulación provoca una desviación en la frontera entre las regiones lineal y de saturación para un valor constante de  $V_{gd}$ . Una forma simple de representar el efecto de modulación de *pinch-off* es la expresión:

$$V_{px} = V_{p0} + \gamma_x (V_{gs} - V_{gd}) \quad (2.67)$$

El máximo de las segundas derivadas de la corriente está determinado por la brusquedad de esta transición. Existen dos valores para este máximo que se alcanzan respectivamente cuando la transición de  $V_{gx}$  define la región de corte y la frontera entre

## II. MODELADO Y CARACTERIZACIÓN DE DISPOSITIVOS DE ASGA

las zonas lineal y de saturación. La siguiente ecuación define  $\alpha_s$  y  $\alpha_d$  dependientes de la otra tensión de control:

$$\alpha_x = \frac{1}{2} \{ (\alpha_{x_c} + \alpha_{x_{ls}}) + (\alpha_{x_c} + \alpha_{x_{ls}}) \tanh [\mu(V_{gy} - V_{p0})] \} \quad (2.68)$$

Si  $x = s, d$  entonces  $y = d, s$ .  $\alpha_{s_c}$  y  $\alpha_{d_c}$  definen los valores en la región de corte para las transiciones de  $V_{gs}$  y  $V_{gd}$ , mientras que  $\alpha_{s_{ls}}$  y  $\alpha_{d_{ls}}$  los definen en la frontera entre las regiones lineal y de saturación.  $\mu$  controla una transición suave en la evolución del máximo entre los dos valores mencionados.

El exponente de 3/2 en (2.65) es inadecuado para conseguir una buena reproducción de las derivadas de la corriente. Para tener la posibilidad de representar los ceros de la tercera derivada que aparecen en los dispositivos FET en las regiones de alta transconductancia y conductancia de salida, los autores del modelo proponen un exponente de ajuste empírico, quedando la expresión de la corriente de la siguiente forma:

$$I_{ds} = G_0 \left\{ V_{gsef} - V_{gdef} - \frac{2}{3} \left[ \frac{(\phi - V_{gdef})^{E+K_e V_{gdef}} - (\phi - V_{gsef})^{E+K_e V_{gsef}}}{(\phi - V_{p0})^{1/2}} \right] \right\} . \quad (2.69)$$

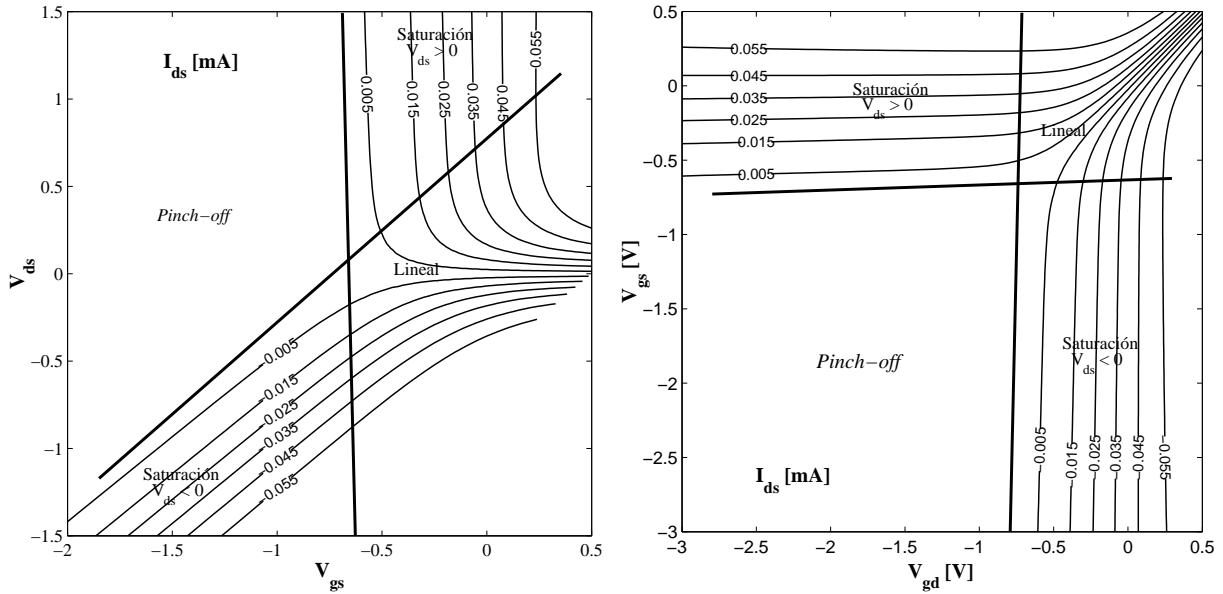
### Modelo de Yhland (Universidad de Chalmers)

Con el objeto predecir la corriente  $I_{ds}$ , tanto para valores positivos como negativos de  $V_{ds}$ , Yhland y col. proponen un modelo capaz de cubrir las regiones de operación lineal y de saturación, basado en la simetría de la parte intrínseca del FET con respecto al intercambio de los terminales de drenador y fuente [34]. El circuito equivalente del modelo es muy similar al mostrado en la Figura 2.14, si bien se sustituye la conductancia no lineal por la fuente de corriente  $I_{ds}$  para extender también el modelo a otras regiones diferentes de la resistiva.

Dado que los dispositivos FET tienen tres terminales, es posible representar  $I_{ds}$  como una función de cualesquiera dos tensiones entre estos terminales. Aunque la elección común es escoger  $V_{gs}$  y  $V_{ds}$ , la Figura 2.15 muestra que se puede explotar la simetría de la corriente si se escoge un sistema de coordenadas que tenga por variables independientes  $V_{gs}$  y  $V_{gd}$ . En esta misma Figura puede apreciarse como el plano queda dividido en cuatro regiones: una en la que el dispositivo se comporta linealmente, dos en la que el transistor está saturado, y una región de *pinch-off*. Obsérvese que en la región lineal  $I_{ds}$  es prácticamente proporcional a  $V_{ds}$ . En la región de saturación, con  $V_{ds} > 0$  la corriente depende esencialmente de  $V_{gs}$ , mientras que cuando  $V_{ds} < 0$ , de  $V_{gd}$ . Además, se puede suponer que  $I_{ds}$  es perfectamente antisimétrica respecto de la diagonal  $V_{gd} = V_{gs}$  si el canal es simétrico ante el intercambio del drenador con la fuente. Bajo este supuesto se puede escribir:  $I_{ds}(V_{gs}, V_{gd}) = -I_{ds}(V_{gd}, V_{gs})$ .

El modelo está definido por los parámetros  $a, b, c, d, g$  y  $\phi$  como sigue:

$$I_{ds} = g [f_1(U_{gd}^+, U_{gs}^+) \cdot f_2(V_{gs} - V_{gd}) - f_1(U_{gs}^-, U_{gd}^-) \cdot f_2(V_{gd} - V_{gs})] \quad (2.70)$$



**Figura 2.15:** Gráfico de contornos de  $I_{ds}$  de un FET ante  $V_{gd}$ ,  $V_{gs}$  y  $V_{ds}$ .

donde

$$f_1(x, y) = (1 + ax) \cdot \{1 - \tanh \exp[-b(y + c)]\} \quad (2.71)$$

y

$$f_2(z) = 1 - \tanh \exp(-d \cdot z) \quad (2.72)$$

El primer sumando de (2.15) es dominante para  $V_{ds} > 0$ , y el segundo término para  $V_{ds} < 0$ . Las variables  $U_{gs}^+$  y  $U_{gd}^+$  definen un sistema de coordenadas obtenido por rotación del plano  $V_{gd}, V_{gs}$  un ángulo  $\phi$  en el sentido antihorario:

$$\begin{bmatrix} U_{gd}^+ \\ U_{gs}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{gd} \\ V_{gs} \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Teniendo en cuenta la simetría del modelo,  $U_{gs}^-$  y  $U_{gd}^-$  definen un sistema de coordenadas obtenido por rotación del plano  $V_{gd}, V_{gs}$  el mismo ángulo  $\phi$  en el sentido horario:

$$\begin{bmatrix} U_{gd}^- \\ U_{gs}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ \text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{gd} \\ V_{gs} \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

En la región de saturación, donde  $V_{ds} > 0$  ( $V_{ds} < 0$ ),  $\phi$  modela la modulación de la tensión de *pinch-off* con  $V_{gd}$  ( $V_{gs}$ ). Cuando los valores de la corriente son elevados,  $a$  y  $\phi$  modelan el ligero efecto de  $V_{gd}$  ( $V_{gs}$ ) sobre  $I_{ds}$ .

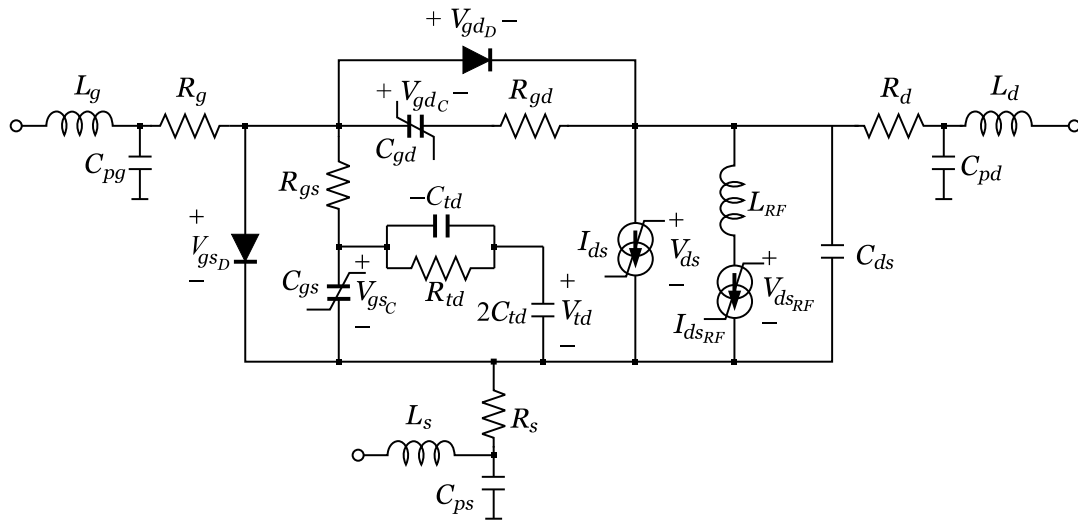
El ajuste de los parámetros del modelo se debe realizar preferentemente con medidas de RF, dada su capacidad para reproducir las derivadas de la corriente. Los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $g$  y  $\phi$  permiten ajustar la transconductancia a las medidas de  $G_m$ . Estas medidas se pueden realizar cubriendo las regiones de saturación y *pinch-off* con  $V_{ds} > 0$ . El parámetro  $c$  afecta a la tensión de *pinch-off*;  $b$  y  $g$  determinan el máximo de  $G_m$ ;  $a$  controla la dependencia de este máximo con  $V_{gd}$ . Una vez determinados estos

## II. MODELADO Y CARACTERIZACIÓN DE DISPOSITIVOS DE ASGA

parámetros, se utiliza  $d$  para ajustar la conductancia de salida  $G_{ds}$  de un conjunto de medidas realizadas en la zona lineal con  $V_{ds} = 0$ .

### II.7.4. Modelo FET del proceso ED02AH de Philips Microwave Limeil

Para el desarrollo de los prototipos MMIC que se presentan en esta memoria, así como algunas simulaciones, se ha hecho uso de transistores HEMT de la *foundry* Philips Microwave Limeil (PML, desde enero de 2000 OMMIC). Los detalles del proceso ED02AH, como se conoce la tecnología utilizada, se resumen en el Anexo 1. Para el diseño de circuitos con simuladores no lineales, OMMIC propone un modelo basado en ecuaciones propietarias que describen la corriente y capacidades no lineales de un FET. El circuito equivalente de gran señal del modelo de 1998 se muestra en la Figura 2.16. Si se compara con la Figura 2.11, la diferencia más significativa se encuentra en una segunda fuente de corriente  $I_{dsRF}$  y en la red RC en paralelo con  $C_{gs}$ , que modela el retardo de tránsito  $\tau$  transformando la tensión  $V_{gsC}$  en  $V_{td}$ . Obsérvese que la capacidad en paralelo con  $R_{td}$  toma un valor negativo  $-C_{td}$ .



**Figura 2.16:** Modelo de gran señal proceso ED02AH (*release* 1998).

Para modelar la dependencia de la corriente de drenador con la frecuencia, el modelo de la corriente se divide en dos fuentes.  $I_{ds}$  tiene el mismo comportamiento en RF que en DC, mientras que  $I_{dsRF}$  modela la diferencia entre las corrientes de RF y DC. La frecuencia  $f_{TRF}$  a la que se alcanza el valor de RF se ajusta mediante la inductancia  $L_{RF}$ :

$$f_{TRF} = 10 \frac{R_{ds}}{2\pi L_{RF}} \quad (2.75)$$

donde  $R_{ds}$  es el inverso de la conductancia de salida en RF.  $f_{TRF}$  se ha establecido en 50 kHz para  $V_{gs}$  próximo a la tensión umbral  $V_T$ .

La corriente total  $I_{dsTOT} = I_{ds} + I_{dsRF}$ , donde:

$$I_{ds} = I_1(V_{ds}) \cdot I_2(V_{gs}) + \alpha I_3(V_{ds}) \cdot I_4(V_{gs}) \quad (2.76a)$$



$$I_{ds_{RF}} = (1 - \alpha)I_3(V_{ds_{RF}}) \cdot I_4(V_{gs}) \quad (2.76b)$$

$I_1$  representa la saturación de  $I_{ds}$  con  $V_{ds}$ :

$$I_1 = \tanh(KV_{ds}) \quad (2.77)$$

$I_2$  representa la variación de  $I_{ds}$  con  $V_{gs}$ :

$$I_2 = K_a (V_{ef1} - V_T) + K_b (V_{ef1} - V_T)^2 + K_c (V_{ef1} - V_T)^3 + K_d (V_{ef1} - V_T)^4 + K_e (V_{ef1} - V_T)^5 \quad (2.78)$$

donde  $V_{ef1}$  es una función suave que controla el valor de  $I_2$  fuera del intervalo entre la tensión umbral y el potencial de puerta  $V_b$ :

$$V_{ef1} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(V_{td} - V_T)^2 + \Delta i^2} - \sqrt{(V_{td} - V_b)^2 + \Delta i^2} + (V_T + V_b) \right] \quad (2.79)$$

$I_3$  representa la variación de la conductancia de salida con  $V_{ds}$ :

$$I_3 = \begin{cases} \frac{1}{b} \ln(1 + bV_{ds}) & , V_{ds} \geq 0 \\ V_{ds} & , V_{ds} < 0 \end{cases} \quad (2.80)$$

$I_4$  representa la variación de la conductancia de salida con  $V_{ds}$ :

$$I_4 = \frac{G_{ds0}}{1 + \exp\left(\frac{V_{tg} - V_{td}}{V_a}\right)} \quad (2.81)$$

donde  $V_{tg} = V_T + \Delta V_{tg}$  refleja el desplazamiento de la tensión umbral con  $V_{gs}$  y  $V_a$  es un factor de forma para  $G_{ds}(V_{gs})$ .

La única diferencia entre  $I_{ds}$  e  $I_{ds_{RF}}$  es la adición de un coeficiente  $(1 - \alpha)$  y que la tensión de control de  $I_3$  es  $V_{ds_{RF}}$  en lugar de  $V_{ds}$ . Los valores recomendados de los parámetros de los transistores ON y OFF se resumen en el Cuadro 2.1.

Las corrientes de los diodos se expresan mediante la diferencia  $I_{gx} = I_{gx_{fwd}} - I_{gx_{rev}}$ , con  $x = s, d$ , y siendo:

$$I_{gx_{fwd}} = \begin{cases} I_S \left[ \exp\left(\frac{qV_{gx_D}}{nKT}\right) - 1 \right] & , V_{gx_D} \leq V_{bf} \\ I_S \left[ \left(1 + (V_{gx_D} - V_{bf})\frac{q}{nKT}\right) \exp\left(\frac{qV_{gx_D}}{nKT}\right) - 1 \right] & , V_{gx_D} > V_{bf} \end{cases} \quad (2.82a)$$

$$I_{gx_{rev}} = I_0 \exp\left(\frac{\mp V_{ds} - A_{br}V_{gx_D} - V_{br}}{V_0}\right) - G_{dg}V_{gx_D} \quad \begin{cases} -V_{ds} \text{ para } I_{gs} \\ +V_{ds} \text{ para } I_{gd} \end{cases} \quad (2.82b)$$

La descripción de los parámetros y sus valores recomendados se resumen en el Cuadro 2.2.

Los modelos de las capacidades no lineales ( $C_{gs}$  y  $C_{gd}$ ) pueden ser descritos bien por las cargas o por ecuaciones de capacidad. En el primer caso, se propone:

$$Q_{gs} = -C_{gs0} (1 + L_{bgd}V_{gd_{ref}}) \frac{V_b}{N} \left[ 1 - \frac{V_{ef2}(V_{gsC})}{V_b} \right]^N + (C_{bs} + C_{gse}Nb_d)V_{gsC} \quad (2.83a)$$

## II. MODELADO Y CARACTERIZACIÓN DE DISPOSITIVOS DE ASGA

PARÁM.	DESCRIPCIÓN	FET ON	FET OFF	ESCALADO†
$K$	Coeficiente de saturación	5.29	6.00	–
$K_a$	Coeficiente $I_2$	0	0	$\times W$
$K_b$	Coeficiente $I_2$	1.67756	3.15119	$\times W$
$K_c$	Coeficiente $I_2$	-1.54147	-3.99293	$\times W$
$K_d$	Coeficiente $I_2$	0.02744	0.48516	$\times W$
$K_e$	Coeficiente $I_2$	0.30044	0.00000	$\times W$
$V_T$	Tensión umbral	$V_{T_{pcm}} + 0,36071$	$V_{T_{pcm}} + 0,13586$	–
$V_{T_{pcm}}$	Tensión umbral nominal	-0.9 V	+0.1 V	–
$V_b$	Potencial de puerta	0.4 V	1.0 V	
$\Delta i$	Suavizado de $I_2$	0.04050	0.05084	–
$b$	Coeficiente de $I_3$	0.1500	0.0959	–
$G_{ds0}$	Conductancia de salida	0.003970 S	0.03037 S	$\times W$
$\Delta V_{tg}$	Desplazamiento umbral	+0.00765 V	-0.00086 V	–
$V_a$	Factor de forma $G_{ds}(V_{gs})$	0.1200	0.07545	–
$\alpha$	Relación $G_{ds}$ DC/RF	1.5378	1.400	–
$L_{RF}$	Inductancia baja frec.	0.006 H	0.006 H	/ $W$

†  $W$ , anchura total de puerta en mm.

**Cuadro 2.1:** Parámetros recomendados por PML para el modelo de la corriente.

$$Q_{gd} = -C_{gd0} \frac{V_b}{N} \left[ 1 - \frac{V_{ef2}(V_{gdC})}{V_b} \right]^N + (C_{bd} + C_{gde} N b_d) V_{gdC} \quad (2.83b)$$

donde

$$V_{ef2} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\left(V - \frac{V_s}{2} - V_{tc}\right)^2 + \Delta c^2} - \sqrt{\left(V - \frac{V_s}{2} - V_b\right)^2 + \Delta c^2} + (V_{tc} + V_b) \right] \quad (2.84)$$

y  $V_{tc} = V_T + \Delta V_{tc}$  refleja el desplazamiento de la tensión umbral con  $V$ .

La única diferencia entre las ecuaciones de carga y de capacidad se encuentra en  $C_{gs}$ , al utilizarse el valor dinámico de la tensión  $V_{gdC}$  en lugar del valor fijo  $V_{gdref}$  en la ecuación de  $Q_{gs}$ . Esto permite un mejor ajuste de  $C_{gs}$  frente a  $V_{ds}$ , dado que la forma de la zona de depleción es dependiente de  $V_{ds}$ .  $C_{gd}$  es simplemente la derivada de  $Q_{gd}$ .

$$C_{gs}(V_{gsC}, V_{gdC}) = C_{gs0} (1 + L_{bgd} V_{gdC}) \left[ 1 - \frac{V_{ef2}(V_{gsC})}{V_b} \right]^{N-1} \Delta V_{ef2}(V_{gsC}) + (C_{bs} + C_{gse} N b_d) \quad (2.85a)$$

$$C_{gd}(V_{gdC}) = C_{gd0} \left[ 1 - \frac{V_{ef2}(V_{gdC})}{V_b} \right]^{N-1} \Delta V_{ef2}(V_{gdC}) + (C_{bd} + C_{gde} N b_d) \quad (2.85b)$$

donde

$$\Delta V_{ef2}(V) = \frac{\partial V_{ef2}(V)}{\partial V} \quad (2.86)$$

PARÁM.	DESCRIPCIÓN	FET ON	FET OFF	ESCALADO <sup>†</sup>
$I_S$	Corriente de saturación	2.044 pA	0.484 pA	$\times W$
$nKT/q$	Voltaje térmico	$1.208 \cdot 10^{-4}T$	$1.208 \cdot 10^{-4}T$	$T$ en °K
$I_0$	Corriente inversa	0.5 mA	0.5 mA	$\times W$
$V_0$	Factor de forma	0.33 V	0.35 V	–
$A_{br}$	Factor de forma	0.704	0.746	–
$V_{br}$	Factor de forma	5.63 V	5.97 V	–
$G_{dg}$	Conductancia inversa	$1.3 \mu S$	$1.3 \mu S$	$\times W$
$V_{bf}$	Potencial interno	0.780 V	0.853 V	–

<sup>†</sup>  $W$ , anchura total de puerta en mm.

**Cuadro 2.2:** Parámetros recomendados por PML para el modelo de los diodos.

La descripción de los parámetros del modelo y sus valores recomendados se resumen en el Cuadro 2.3.

El modelo descrito por las ecuaciones anteriores (*release* 1998) puede ser utilizado con una buena precisión para la mayoría de las aplicaciones, con las limitaciones siguientes:

- El modelo no es simétrico y debe ser empleado con  $V_{ds} > 0$ . Es posible convertirlo en simétrico añadiendo una nueva red de retardo  $RC$  entre los terminales de puerta y drenador.
- No se contemplan las variaciones de  $C_{gs}$  y  $C_{gd}$  con  $V_{ds}$  por debajo de la zona de saturación. Por este motivo, el comportamiento en RF de estas capacidades es sólo aproximado en la región óhmica. La respuesta en DC es correcta en todo el rango de valores de  $V_{ds}$ .
- Las variaciones de  $R_{gs}$ ,  $R_{gd}$  y el retardo de tránsito con la polarización se consideran despreciables, por simplicidad.
- No se tiene en cuenta la dependencia de  $G_m$  con  $V_{ds}$  por encima de saturación.

Tres de las anteriores limitaciones han sido superadas ya en las últimas versiones del modelo (OMMIC).

## Bibliografía

- [1] A. A. Rezazadeh y C. Sansom, *Active Devices and Fabrication Technology*, Cap. 2, p. 28. IEE Circuits and Systems Series, 1995.
- [2] J. P. McKelvey, *Física del estado sólido y de semiconductores*. Limusa, 1996.

PARÁM.	DESCRIPCIÓN	FET ON	FET OFF	ESCALADO <sup>†</sup>
$C_{gs0}$	Capacidad G–S	84.19 fF	963.9 fF	$\times W$
$C_{gd0}$	Capacidad G–D	51.63 fF	622 fF	$\times W$
$C_{gse}$	Capacidad/dedo <sup>‡</sup>	1.2 fF	1.2 fF	–
$C_{gde}$	Capacidad/dedo <sup>‡</sup>	1.2 fF	1.2 fF	–
$L_{bgd}$	Variación $C_{gs}(V_{gd})$	-0.267 V <sup>-1</sup>	-0.230 V <sup>-1</sup>	–
$V_{gdref}$	Tensión promedio $V_{gd}$	-3.3 V	-2.5 V	–
$C_{bs}$	Capacidad de borde G–S	201 fF	247 fF	$\times W$
$C_{bd}$	Capacidad de borde G–D	160 fF	160 fF	$\times W$
$N$	Exponente capacidad	-0.65490	1.14459	–
$\Delta V_{tc}$	Desplazamiento umbral	-0.46345	-0.07136	–
$\Delta c$	Parámetro suavizado	0.2460	0.1618	–
$V_s$	Tensión de saturación	-1.6560	0.0923	–

<sup>†</sup>  $W$ , anchura total de puerta en mm. <sup>‡</sup>  $N_{bd}$ , número de dedos.

**Cuadro 2.3:** Parámetros recomendados por PML para el modelo de las capacidades.

- [3] J. M. Golio, *Microwave MESFETs and HEMTs*. Artech House, 1993.
- [4] H. A. Willing, C. Rauscher, y P. de Santis, "A technique for predicting large-signal performance of a GaAs MESFET," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-26, No. 12, pp. 1017–1023, dic. 1978.
- [5] A. Technologies, "In-fixture measurements using vector network analyzers," Tech. Rep. Application Note 1287-9, Agilent Technologies, 2000.
- [6] J. Reina-Tosina, A. Pettenghi-Roldán, A. Campoy-Naranjo, y C. Crespo-Cadenas, "Construcción de soportes para la caracterización no destructiva de componentes de microondas," en *Actas XVII Simposium Nacional de la URSI*, pp. 203–204, sep. 2002, Madrid.
- [7] A. Technologies, "Applying error correction to network analyzer measurements," Tech. Rep. Application Note 1287-3, Agilent Technologies, 2000.
- [8] A. Technologies, "In-fixture microstrip device measurements using TRL calibration," Tech. Rep. Product Note 8720-2, Agilent Technologies, 2000.
- [9] R. A. Minasian, "Simplified GaAs MESFET model to 10 GHz," *Electronics Letters*, Vol. 13, No. 8, pp. 549–541, jun. 1977.
- [10] M. Berroth y R. Bosch, "Broad band determination of the FET small-signal equivalent circuit," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 38, No. 7, pp. 891–895, jul. 1990.

- 
- [11] G. Dambrine, A. Cappy, F. Heliodore, y E. Playez, "A new method for determining the FET small-signal equivalent circuit," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 36, No. 7, pp. 1151–1159, jul. 1988.
- [12] H. Fukui, "Determination of the basic parameters of a GaAs MESFET," *The Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 58, No. 3, pp. 771–795, mar. 1979.
- [13] E. Arnold, M. Golio, M. Miller, y B. Beckwith, "Direct extraction of GaAs MESFET intrinsic element and parasitic inductance values," en *Proc 1990 MTT-S International Microwave Symposium Digest*, pp. 359–362, mayo 1990.
- [14] F. Diamond y M. Laviron, "Measurement of the extrinsic series elements of a microwave MESFET under zero current conditions," en *Proc. 12th European Microwave Conf.*, pp. 451–456, sep. 1982.
- [15] W. R. Curtice y R. L. Camisa, "Self-consistent GaAs FET models for amplifier design and device diagnostics," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-32, No. 12, pp. 1573–1578, dic. 1984.
- [16] N. Rorsman, M. García, C. Karlsson, y H. Zirath, "Accurate small-signal modeling of HFET's for millimeter-wave applications," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 44, No. 3, pp. 432–437, mar. 1996.
- [17] C. Camacho Peñalosa, T. M. Martín Guerrero, B. Castillo Vázquez, y J. Esteban Marzo, "Circuitos equivalentes para MESFETs y HEMTs bajo condiciones de "FET frío": "T" versus "II"," en *Actas XVII Simposium Nacional de la URSI*, pp. 97–98, sep. 2002, Madrid.
- [18] A. Madjar y F. J. Rosenbaum, "A practical AC large-signal model for GaAs microwave MESFETs," en *Proc. 1979 MTT-S International Microwave Symposium Digest*, pp. 399–401, 1979.
- [19] W. R. Curtice, "A MESFET model for use in the design of GaAs integrated circuits," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-28, No. 5, pp. 448–455, mayo 1980.
- [20] H. Statz, P. Newman, I. Smith, R. Pucel, y H. Haus, "GaAs FET device and circuit simulation in SPICE," *IEEE Trans. Electron Devices*, Vol. 34, pp. 160–169, 1987.
- [21] A. Materka y T. Kacprzak, "Computer calculation of large-signal GaAs FET amplifier characteristics," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-33, No. 2, pp. 129–135, feb. 1985.
- [22] T. Fernández, Y. Newport, J. M. Zamanillo, A. Tazón, y A. Mediavilla, "Extracting a bias-dependent large signal MESFET model from pulsed I/V measurements," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 44, No. 3, pp. 372–378, mar. 1996.

- [23] W. R. Curtice y M. Ettenberg, "A nonlinear GaAs FET model for use in the design of output circuits for power amplifiers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-33, No. 12, pp. 1383–1394, dic. 1985.
- [24] S. A. Maas y D. Neilson, "Modeling MESFET's for intermodulation analysis of mixers and amplifiers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 38, No. 12, pp. 1964–1971, dic. 1990.
- [25] M. Miller, M. Golio, B. Beckwith, E. Arnold, D. Halchin, S. Ageno, y S. Dorn, "Choosing an optimum large signal model for GaAs MESFETs and HEMTs," en *Proc. 1990 MTT-S International Microwave Symposium Digest*, pp. 1279–1282, 1990.
- [26] I. Angelov, H. Zirath, y N. Rorsman, "A new empirical nonlinear model for HEMT and MESFET devices," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 40, No. 12, pp. 2258–2266, dic. 1992.
- [27] J. C. Pedro, "A physics-based MESFET empirical model," en *Proc. 1994 MTT-S International Microwave Symposium Digest*, pp. 973–976, 1994.
- [28] A. Allam, Kolanowski, D. Theron, y Y. Crosnier, "Large signal model for analysis and design of HEMT gate mixer," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, Vol. 4, No. 12, pp. 405–407, dic. 1994.
- [29] S. Peng, P. J. McCleer, y G. I. Haddad, "Simplified nonlinear model for the intermodulation analysis of MESFET mixers," en *Proc. 1994 MTT-S International Microwave Symposium Digest*, pp. 1575–1578, 1994.
- [30] R. S. Virk y S. A. Maas, "Modeling MESFETs for intermodulation analysis of resistive FET mixers," en *Proc. 1995 MTT-S International Microwave Symposium Digest*, pp. 1247–1250, 1995.
- [31] K. Fujii, Y. Hara, T. Yakabe, y H. Yabe, "Nonlinear FET model for intermodulation distortion analysis of resistive mixers," en *Proc. 1999 MTT-S International Microwave Symposium Digest*, 1999.
- [32] K. Fujii, Y. Hara, T. Yakabe, y H. Yabe, "A large-signal switching MESFET model for intermodulation distortion analysis," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 48, No. 3, pp. 431–436, mar. 2000.
- [33] J. A. García, J. C. Pedro, M. L. de la Fuente, N. B. de Carvalho, A. Mediavilla Sánchez, y A. Tazón Puente, "Resistive FET mixer conversion loss and IMD optimization by selective drain bias," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 47, No. 12, pp. 2382–2391, dic. 1999.
- [34] K. Yhland, N. Rorsman, M. García, y H. F. Merkel, "A symmetrical nonlinear HFET/MESFET model suitable for intermodulation analysis of amplifiers and resistive mixers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 48, No. 1, pp. 15–21, ene. 2000.

## Capítulo III

# Series de Volterra

La expansión funcional conocida bajo la denominación de *serie de Volterra* es una de las herramientas más extendidas para el análisis de circuitos no lineales, como se pone de manifiesto por la multitud de artículos que aparecen en la literatura, desde los más antiguos de Wiener [1] o Narayanan [2], hasta los más recientes de García [3] o Ahmed [4].

Volterra mostró que todo funcional  $G[x]$  continuo en el espacio de las funciones continuas puede ser representado por medio de la expansión:

$$G[x] = \sum_{n=0}^{\infty} F_n[x] \quad (3.1)$$

donde  $F_n[x]$  es un funcional regular homogéneo de la forma:

$$F_n[x] = \int_a^b \cdots \int_a^b h_n(\xi_1, \dots, \xi_n) x(\xi_1) x(\xi_2) \cdots x(\xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n . \quad (3.2)$$

y  $n$  es el orden del funcional.

Fue Wiener el primero en aplicar esta expansión en series de funcionales al análisis de sistemas no lineales [1]. Si la salida  $y(t)$  de un sistema se puede expresar mediante un funcional de su entrada  $x(t)$ , entonces ambas se pueden relacionar por medio de una serie de funcionales. El método de análisis trabaja esencialmente en el dominio de la frecuencia y utiliza una descripción adecuada de los dispositivos no lineales mediante modelos como los descritos en el capítulo anterior. Dos de los documentos de importancia decisiva, por el impulso que suponen para las series de Volterra como forma de análisis de circuitos no lineales, son el artículo de Bedrosian y Rice [5] y el extenso trabajo de Bussgang, Ehrman y Graham [6], destacando este último por su esfuerzo de compilación y la presentación de procedimientos sistemáticos de análisis. La representación de Volterra ha sido aplicada con éxito al análisis de circuitos con FETs de AsGa, destacando las contribuciones de Minasian [7] y Lambrianou [8] al estudio de la intermodulación en amplificadores MESFET. Aunque se sigue aceptando ampliamente que la fuente de corriente  $i_{ds}$  es la principal responsable de la respuesta

no lineal en estos circuitos, las hipótesis simplificadoras de los métodos de análisis se han ido superando a medida que se dispone de nuevos métodos para la caracterización de la fuente de corriente [9] y la incidencia de otros elementos de circuito, como las capacidades [10], sobre el comportamiento no lineal. Durante los últimos años, gracias a la disponibilidad de medios de computación más potentes, la atención se ha desplazado hacia el análisis con entradas multitono [11], señales de espectro continuo, o el fenómeno de “recrecimiento” espectral [12, 3].

En las primeras secciones de este capítulo se presentarán los fundamentos de la representación en series de Volterra, dedicando especial atención a entradas multitono, y siguiendo el enfoque de Weiner y Spina [13], Bedrosian y Rice [5], Bussgang y col. [6] y Maas [14]. Posteriormente se revisarán los métodos más comunes para la determinación de las funciones de transferencia no lineales. Tras revisar los conceptos de intermodulación y distorsión armónica, la extracción de las derivadas y coeficientes de las series de potencias de los elementos no lineales será objeto de estudio en la siguiente sección de este capítulo, que prosigue con el análisis de Volterra para sistemas en cascada. El último apartado está dedicado a las series dobles de Volterra, que se describen partiendo del material expuesto por Rice [15].

#### III.1. Representación mediante Series de Volterra

Considérese un sistema no lineal con entrada  $x(t)$  y salida  $y(t)$ , y que la entrada puede ser aproximada por una sucesión de pulsos rectangulares  $p(t)$  de anchura  $\Delta\tau$ , cuyos flancos de subida ocurren en los instantes  $k\Delta\tau$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  y con altura  $x_k = x(k\Delta\tau)$ , como se indica en la Figura 3.1:

$$x(t) \approx \sum_{k=0}^{\infty} x(k\Delta\tau)\Delta\tau p(t - k\Delta\tau). \quad (3.3)$$

Sea  $K$  el número de pulsos rectangulares que transcurren entre 0 y el instante  $t$ . Es razonable esperar que la respuesta sea una función de las  $K + 1$  variables de entrada  $x_0, x_1, \dots, x_K$ , de manera que puede escribirse:

$$y(t) = f(x_0, x_1, \dots, x_K) \quad (3.4)$$

donde  $f(\cdot)$  es una función no lineal de  $K + 1$  variables.

Supuesto que  $f(\cdot)$  admite un desarrollo en series de Taylor  $(K + 1)$ -dimensional, y agrupando términos del mismo orden, la respuesta  $y(t)$  puede expresarse como:

$$y(t) \approx \sum_{k_1=0}^K a_{k_1} x_{k_1} + \sum_{k_1=0}^K \sum_{k_2=0}^K a_{k_1 k_2} x_{k_1} x_{k_2} + \sum_{k_1=0}^K \sum_{k_2=0}^K \sum_{k_3=0}^K a_{k_1 k_2 k_3} x_{k_1} x_{k_2} x_{k_3} + \dots \quad (3.5)$$

Alternativamente puede escribirse:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \quad (3.6)$$



donde el  $n$ -ésimo término se aproxima por:

$$y_n(t) \approx \sum_{k_1=0}^K \sum_{k_2=0}^K \cdots \sum_{k_n=0}^K a_{k_1 k_2 \cdots k_n} x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_n} . \quad (3.7)$$

Se dice que  $y_n(t)$  es de orden  $n$  en el sentido de que si la entrada  $x(t)$  está multiplicada por una constante  $A$ ,  $y_n(t)$  depende de  $A$  como  $A^n$ .

Si el sistema fuera lineal, la representación en series de Taylor quedaría reducida al primer término del desarrollo. En este caso se podría aplicar el principio de superposición y la respuesta total sería la suma de las respuestas individuales a cada uno de los pulsos. Para valores suficientemente pequeños de  $\Delta\tau$ , el pulso  $p(t)$  es una adecuada aproximación de la función impulso  $\delta(t)$ , de manera que la respuesta a  $p(t)$  puede ser aproximada por la respuesta impulsiva  $h(t)$ . De aquí sigue que en el instante  $t$  la respuesta lineal se expresa según:

$$y_1(t) \approx \sum_{k=0}^K x(k\Delta\tau)h(t - k\Delta\tau)\Delta\tau \quad (3.8)$$

Obsérvese que también puede escribirse:

$$y_1(t) \approx \sum_{k=0}^K a_k x_k \quad (3.9)$$

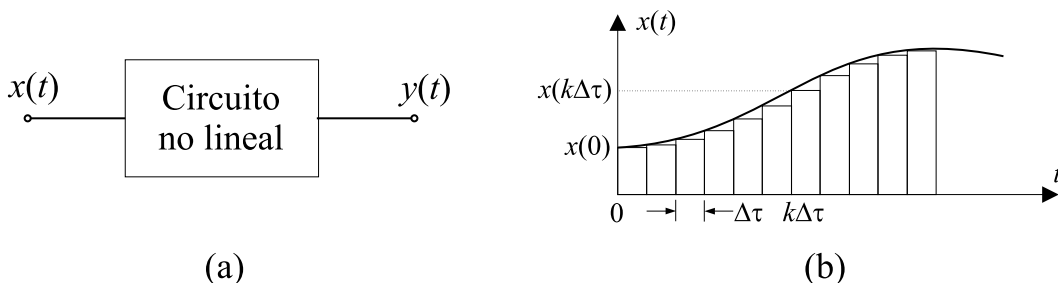
donde

$$x_k = x(k\Delta\tau) \quad (3.10a)$$

$$a_k = h(t - k\Delta\tau)\Delta\tau \quad (3.10b)$$

La aproximación es tanto más precisa cuanto menor es la anchura  $\Delta\tau$ . En particular, a medida que  $\Delta\tau \rightarrow 0$ , el producto  $k\Delta\tau$  tiende a una variable continua ( $\tau$ ), y en el límite,  $\Delta\tau \rightarrow d\tau$ , de manera que el sumatorio se convierte en una integral y en el instante  $t$  se tiene:

$$y_1(t) = \int_0^t x(\tau)h(t - \tau) d\tau \quad (3.11)$$



**Figura 3.1:** (a) Circuito no lineal con entrada  $x(t)$  y salida  $y(t)$ . (b) Aproximación de  $x(t)$  por una sucesión de pulsos rectangulares.

### III. SERIES DE VOLTERRA

La respuesta impulsiva es, por tanto, una completa caracterización de la parte lineal, dado que su conocimiento es suficiente para permitir la determinación de la respuesta a cualquier entrada.

El término general de la aproximación de  $y_n(t)$ , dado por  $a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_n}$  puede interpretarse como la respuesta a  $n$  pulsos rectangulares aplicados en los instantes  $k_1 \Delta\tau, k_2 \Delta\tau, \dots, k_n \Delta\tau$ . Empleando el mismo razonamiento que para el desarrollo de la integral de convolución de la parte lineal, se puede escribir:

$$a_{k_1 k_2 \dots k_n} = h_n(t - k_1 \Delta\tau, t - k_2 \Delta\tau, \dots, t - k_n \Delta\tau) (\Delta\tau)^n. \quad (3.12)$$

De aquí sigue:

$$y_n(t) \approx \sum_{k_1=0}^K \sum_{k_2=0}^K \dots \sum_{k_n=0}^K h_n(t - k_1 \Delta\tau, t - k_2 \Delta\tau, \dots, t - k_n \Delta\tau) x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_n} (\Delta\tau)^n. \quad (3.13)$$

Si ahora se considera el límite cuando  $\Delta\tau$  tiende a cero, las variables discretas  $k_j \Delta\tau$  tienden a variables continuas  $\tau_j$  y los sumatorios se convierten en integrales:

$$y_n(t) = \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t h_n(t - \tau_1, t - \tau_2, \dots, t - \tau_n) x(\tau_1) x(\tau_2) \dots x(\tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n. \quad (3.14)$$

Los límites de integración se pueden extender desde  $-\infty$  hasta  $+\infty$  si se considera que no se aplica entrada antes del instante  $t = 0$  y que el sistema es causal. Una forma alternativa de  $y_n(t)$  se obtiene a través del cambio de variables  $\tau_j \leftarrow t - \tau_j$ :

$$y_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) \dots x(t - \tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n. \quad (3.15)$$

Las ecuaciones (3.6)-(3.15) permiten expresar la respuesta  $y(t)$  mediante una serie de funcionales, llamados de Volterra por equivalencia con (3.2), o simplemente serie de Volterra. Los núcleos o *kernels* de estos funcionales son las respuestas impulsivas no lineales de orden  $n$ . Se puede demostrar que la serie (3.6) es convergente y que la magnitud de cada término sucesivo es inferior a la del término previo.

La mayor utilidad de esta representación se produce cuando la respuesta puede ser aproximada por los primeros  $N$  términos de la serie. En este caso puede escribirse:

$$y(t) \approx \sum_{n=1}^N y_n(t) \quad (3.16)$$

donde se omiten los términos de orden superior a  $N$  debido a que no contribuyen significativamente a la salida.

### III.2. Análisis de entradas multitono mediante series de Volterra

Aunque las respuestas impulsivas no lineales permiten caracterizar la respuesta de un sistema respecto de cualquier tipo de entrada, es de particular interés el estudio de los sistemas no lineales cuando están excitados por las entradas de estructura

más simple. Entre ellas destaca por su importancia la excitación puramente sinusoidal. Considérese una entrada formada por una combinación lineal de  $Q$  señales sinusoidales:

$$x(t) = \sum_{q=1}^Q |V_q| \cos(\omega_q t + \theta_q) = \frac{1}{2} \sum_{q=-Q}^Q V_q \exp(j\omega_q t) \quad (3.17)$$

donde  $V_q = |V_q| \exp(\theta_q)$  es la amplitud compleja de la  $q$ -ésima senoide, y se supone  $V_{-q} = V_q^*$ , con  $V_0 = 0$ . Si se sustituye (3.17) en (3.15), se obtiene:

$$y_n(t) = \frac{1}{2^n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \sum_{q_1=-Q}^Q V_{q_1} \exp[j\omega_{q_1}(t - \tau_1)] \cdot \sum_{q_2=-Q}^Q V_{q_2} \exp[j\omega_{q_2}(t - \tau_2)] \cdots \sum_{q_n=-Q}^Q V_{q_n} \exp[j\omega_{q_n}(t - \tau_n)] d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_n. \quad (3.18)$$

Intercambiando la posición de los sumatorios y las integrales, se pueden reagrupar los términos como sigue:

$$y_n(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{q_1=-Q}^Q \sum_{q_2=-Q}^Q \cdots \sum_{q_n=-Q}^Q V_{q_1} V_{q_2} \cdots V_{q_n} \exp[j(\omega_{q_1} + \omega_{q_2} + \cdots + \omega_{q_n})t] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \exp[-j(\omega_{q_1}\tau_1 + \omega_{q_2}\tau_2 + \cdots + \omega_{q_n}\tau_n)] d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_n. \quad (3.19)$$

Identificando en esta última expresión la transformada de Fourier  $n$ -dimensional del kernel de Volterra  $h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ , puede escribirse:

$$y_n(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{q_1=-Q}^Q \sum_{q_2=-Q}^Q \cdots \sum_{q_n=-Q}^Q V_{q_1} V_{q_2} \cdots V_{q_n} H_n(\boldsymbol{\omega}_n) \exp[j(\omega_{q_1} + \omega_{q_2} + \cdots + \omega_{q_n})t] \quad (3.20)$$

donde  $\boldsymbol{\omega}_n = [\omega_{q_1}, \omega_{q_2}, \dots, \omega_{q_n}]^T$  y  $H_n(\boldsymbol{\omega}_n)$  es la función de transferencia no lineal de orden  $n$ , que relaciona la salida a la frecuencia  $(\omega_{q_1} + \omega_{q_2} + \cdots + \omega_{q_n})$  con  $n$  entradas a frecuencias  $\omega_{q_1}, \omega_{q_2}, \dots, \omega_{q_n}$ :

$$H_n(\boldsymbol{\omega}_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \exp[-j(\omega_{q_1}\tau_1 + \omega_{q_2}\tau_2 + \cdots + \omega_{q_n}\tau_n)] d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_n. \quad (3.21)$$

De esta manera,  $y_n(t)$  contiene componentes de frecuencia que se expresan como  $(\omega_{q_1} + \omega_{q_2} + \cdots + \omega_{q_n})$ , donde los índices  $q_1, q_2, \dots, q_n$  varían entre  $-Q$  y  $Q$ . Como  $\omega_{-q} = -\omega_q$ , aparecen también frecuencias negativas y diferencias de frecuencias en (3.20). Dado que cada sumatorio incluye  $2Q$  términos distintos de cero, el número total de términos distintos de cero en (3.20) es  $(2Q)^n$ . Este número crece rápidamente a medida que aumentan los valores de  $Q$  y  $n$ .

Una propiedad importante de las funciones de transferencia no lineales es que se trata de funciones simétricas respecto de sus argumentos. Esta simetría se puede justificar observando que no existe ningún orden preestablecido en (3.20) para componer

### III. SERIES DE VOLTERRA

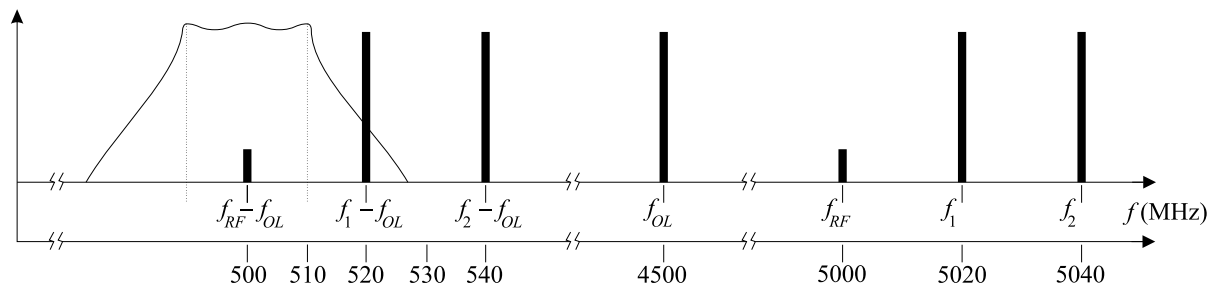
la respuesta de orden  $n$  a una excitación multitono, así que debe ser posible permutar las frecuencias sin que cambie la respuesta. Por extensión, la respuesta impulsiva no lineal de orden  $n$  es simétrica respecto de sus argumentos, dado que  $H_n(\omega_n)$  lo es.

En el caso particular en que la entrada sea una señal sinusoidal pura a una frecuencia  $\omega_q$ , i.e.  $x(t) = V_q \cos(\omega_q t)$ , la componente  $y_n(t)$  de la salida contiene todos los armónicos de la entrada hasta de orden  $n$ . Debido a la invariancia de las funciones de transferencia no lineales ante permutaciones de sus argumentos, el término general se puede expresar tomando  $Q = 1$  en (3.20) y agrupando las mezclas que producen la misma frecuencia de salida:

$$y_n(t) = \left(\frac{V_q}{2}\right)^n \sum_{\mu=0}^n \frac{n!}{(n-\mu)!\mu!} H_n [(\omega_q)_{n-\mu}, (-\omega_q)_\mu] \exp[j(n-2\mu)\omega_q t] \quad (3.22)$$

La notación  $(\omega)_\mu$  indica una cadena de  $\mu$  argumentos  $\underbrace{\omega, \omega, \dots, \omega}_\mu$ .

Las componentes de intermodulación que se generan en un circuito no lineal son de considerable interés, debido a que pueden caer dentro de la banda de paso del sistema, incluso cuando las excitaciones originales se encuentran fuera de banda. En la Figura 3.2 se muestra el espectro de frecuencias a la entrada y salida de un mezclador con conversión descendente. El oscilador local de 4.5 GHz convierte la señal de RF a frecuencia intermedia, que se extiende a una banda de 20 MHz centrada en 500 MHz. Obsérvense las frecuencias  $f_1$  y  $f_2$ , separadas de RF respectivamente 20 y 40 MHz. Es evidente que la conversión de estas frecuencias cae fuera de la banda de paso. Sin embargo, el producto de intermodulación  $2f_1 - f_2 - f_{OL}$  genera una componente a 500 MHz que puede causar una interferencia significativa, sobre todo cuando el nivel de la intermodulación es suficientemente alto comparado con la señal deseada.



**Figura 3.2:** Espectro de frecuencias a la entrada y salida de un mezclador, con una frecuencia intermedia de 500 MHz y una anchura de banda de 20 MHz.

En la Figura 3.3 se representan todos los productos de intermodulación que pueden aparecer en un circuito excitado por dos tonos de frecuencias inconmensurables<sup>1</sup>, de 16 y 18 MHz, considerando no-linealidades hasta de tercer orden. Si la entrada consta de  $Q$  sinusoides, es conveniente conocer la respuesta a una determinada frecuencia de

<sup>1</sup>Se dice que dos frecuencias  $\omega_p$  y  $\omega_q$  son inconmensurables si su cociente es un número racional. Por este motivo, las posibles mezclas de  $\omega_p$  con  $\omega_q$  aparecen en frecuencias diferentes, que no se repiten.

mezcla. En lo que se refiere a las mezclas, el orden en el que aparecen las frecuencias es insustancial. Una mezcla se caracteriza por el número de veces que intervienen las diferentes frecuencias. Todas las posibles mezclas pueden representarse por medio de un vector  $\mathbf{m} = [m_{-Q}, \dots, m_{-1}, m_1, \dots, m_Q]^T$ , donde  $m_k$  representa el número de veces que la frecuencia  $\omega_k$  está incluida en la mezcla. La correspondiente frecuencia de intermodulación es:

$$\omega_{\mathbf{m}} = \sum_{\substack{k=-Q \\ k \neq 0}}^Q m_k \omega_k = (m_1 - m_{-1})\omega_1 + \dots + (m_Q - m_{-Q})\omega_Q. \quad (3.23)$$

En cada mezcla contenida en  $y_n(t)$  intervienen exactamente  $n$  frecuencias. Por tanto, los coeficientes  $m_k$  deben obedecer la restricción:

$$\sum_{\substack{k=-Q \\ k \neq 0}}^Q m_k = m_{-Q} + \dots + m_{-1} + m_1 + \dots + m_Q = n. \quad (3.24)$$

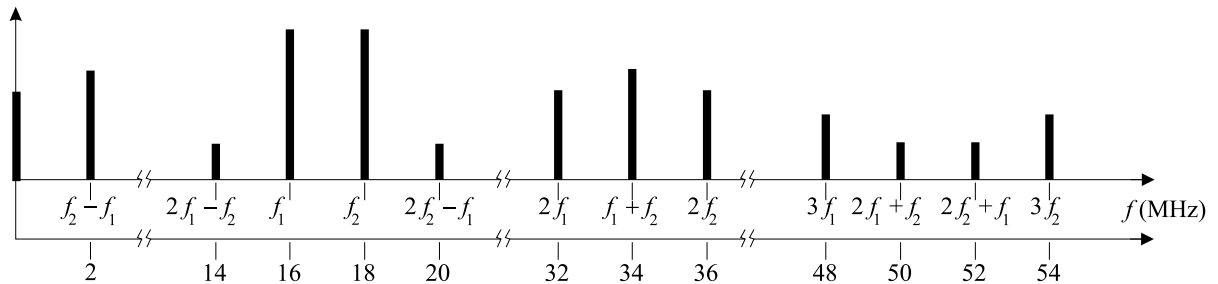
Volviendo a la expresión (3.20), al no importar el orden en el que aparecen las frecuencias en una mezcla, dado un vector  $\mathbf{m}$  particular, el número de términos de  $y_n(t)$  que contienen dicha mezcla  $\mathbf{m}$  equivale al número de particiones que se pueden establecer con los índices  $q_1, \dots, q_n$  de manera que  $-Q$  aparezca  $m_{-Q}$  veces,  $\dots$ ,  $-1$  aparezca  $m_{-1}$  veces,  $1$  aparezca  $m_1$  veces,  $\dots$ , y  $Q$  aparezca  $m_Q$  veces, y viene dado por las permutaciones de los  $n$  índices agrupados en clases de  $m_k$  elementos:

$$(n; \mathbf{m}) = \frac{(n!)}{(m_{-Q}!) \dots (m_{-1}!)(m_1!) \dots (m_Q!)} \quad (3.25)$$

Cada una de las  $(n; \mathbf{m})$  realizaciones da lugar a la misma respuesta, así que denotando su suma por  $y_n(t; \mathbf{m})$  se tiene:

$$y_n(t; \mathbf{m}) = \frac{(n; \mathbf{m})}{2^n} (V_Q^*)^{m_{-Q}} \dots (V_{-1}^*)^{m_{-1}} (V_1)^{m_1} \dots (V_Q)^{m_Q} H_n(\omega_{\mathbf{m}}) \exp(j\omega_{\mathbf{m}} t) \quad (3.26)$$

donde  $\omega_{\mathbf{m}} = [(\omega_{-Q})_{m_{-Q}}, \dots, (\omega_{-1})_{m_{-1}}, (\omega_1)_{m_1}, \dots, (\omega_Q)_{m_Q}]^T$ . Adviértase la diferencia entre la notación  $\omega_{\mathbf{m}}$ ,  $\omega_n$  y  $\omega_m$ . En los dos primeros casos se trata de vectores de frecuencias, de longitud  $n$ , representando respectivamente las frecuencias que participan



**Figura 3.3:** Productos de intermodulación a la salida de un circuito no lineal, excitado por dos tonos de 16 y 18 MHz. No se muestran las componentes de frecuencia negativa.

### III. SERIES DE VOLTERRA

en la mezcla  $\mathbf{m}$  y el vector que define cada uno de los sumandos de (3.20). El tercer caso representa la frecuencia de intermodulación correspondiente a la mezcla  $\mathbf{m}$  (véase (3.23)). Como  $y_n(t)$  viene dada por la suma de todas las posibles mezclas de orden  $n$ , con esta notación puede escribirse:

$$y_n(t) = \sum_{\mathbf{m}} y_n(t; \mathbf{m}), \quad (3.27)$$

donde la suma se extiende a:

$$\sum_{\mathbf{m}} = \sum_{m_{-Q}=0}^n \cdots \sum_{m_{-1}=0}^n \sum_{m_1=0}^n \cdots \sum_{m_Q=0}^n, \text{ con } m_{-Q} + \cdots + m_{-1} + m_1 + \cdots + m_Q = n. \quad (3.28)$$

Se puede demostrar que el número de diferentes mezclas contenidas en  $y_n(t)$  viene dado por:

$$M = \frac{(2Q + n - 1)!}{n!(2Q - 1)!} \quad (3.29)$$

Aunque  $y_n(t; \mathbf{m})$  es una señal compleja,  $y_n(t)$  es real. Por tanto, las distintas frecuencias de mezcla contenidas en (3.27) se pueden agrupar en pares complejos conjugados<sup>2</sup>. De hecho, el vector de mezclas  $\mathbf{m}' = [m_Q, \dots, m_1, m_{-1}, \dots, m_{-Q}]^T$  produce la frecuencia de salida  $-\omega_{\mathbf{m}'}$ , de modo que si se tiene en cuenta que  $(n; \mathbf{m}) = (n; \mathbf{m}')$  y que  $y_n(t; \mathbf{m}') = y_n^*(t; \mathbf{m})$ , la suma de ambos términos da lugar a la componente de salida:

$$\begin{aligned} \hat{y}_n(t; \mathbf{m}) &= y_n(t; \mathbf{m}) + y_n(t; \mathbf{m}') = 2\Re[y_n(t; \mathbf{m})] = \\ &= \frac{(n; \mathbf{m})}{2^{n-1}} |V_1|^{(m_1+m_{-1})} \dots |V_Q|^{(m_Q+m_{-Q})} |H_n(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{m}})| \cos(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{m}} t + \psi_n(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{m}}) + \theta_{\mathbf{m}}) \end{aligned} \quad (3.30)$$

siendo  $\psi_n(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{m}}) = \angle H_n(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{m}})$  y  $\theta_{\mathbf{m}} = \sum_{k \neq 0}^{Q} m_k \theta_k$ .

Si la entrada  $x(t)$  presenta una dependencia temporal arbitraria, también se puede expresar la salida de orden  $n$  en función de  $H_n(\boldsymbol{\omega}_n)$  a través del espectro de frecuencias  $X(\omega)$ :

$$y_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\boldsymbol{\omega}_n) \prod_{k=1}^n X(\omega_k) \exp(j\boldsymbol{\omega}_k t) \frac{d\omega_k}{2\pi} \quad (3.31)$$

Dado que distintas mezclas de diferentes órdenes pueden dar lugar a la misma frecuencia de intermodulación, la respuesta total a una frecuencia particular se obtiene sumando todas las componentes que contribuyen a ella. Así, por ejemplo, si un sistema no lineal está excitado por dos tonos de amplitudes  $V_1$  y  $V_2$ , la salida a  $2f_2 - f_1$  es la suma resultante de combinar las mezclas dadas por  $\mathbf{m} = [0, 1, 0, 2]^T$ ,  $\mathbf{m} = [1, 1, 0, 3]^T$ ,  $\mathbf{m} = [0, 2, 1, 2]^T$ , etc. En otras palabras:

<sup>2</sup>A excepción de  $\omega_{\mathbf{m}} = 0$ , que por sí sola da lugar a una respuesta real. Para esta frecuencia los vectores  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{m}'$  son idénticos, y por tanto, sólo uno de ellos debe estar incluido en (3.27).

$$\begin{aligned}
 y(t; 2\omega_1 - \omega_2) &= \hat{y}_3 \left( t; [0, 1, 0, 2]^T \right) + \hat{y}_5 \left( t; [1, 1, 0, 3]^T \right) + \hat{y}_5 \left( t; [0, 2, 1, 2]^T \right) + \dots = \\
 &= \frac{3}{4} |V_1| \cdot |V_2|^2 \cdot |H_3(-\omega_1, \omega_2, \omega_2)| \cdot \cos [(2\omega_2 - \omega_1)t + \psi_3(-\omega_1, \omega_2, \omega_2) + 2\theta_2 - \theta_1] + \\
 &\quad + \frac{5}{4} |V_1| \cdot |V_2|^4 \cdot |H_5(-\omega_2, -\omega_1, \omega_2, \omega_2, \omega_2)| \cdot \cos [(2\omega_2 - \omega_1)t + 2\theta_2 - \theta_1 + \\
 &\quad + \psi_5(-\omega_2, -\omega_1, \omega_2, \omega_2, \omega_2)] + \frac{15}{8} |V_1|^3 \cdot |V_2|^2 \cdot |H_5(-\omega_1, -\omega_1, \omega_1, \omega_2, \omega_2)| \cdot \\
 &\quad \cdot \cos [(2\omega_2 - \omega_1)t + \psi_5(-\omega_1, -\omega_1, \omega_1, \omega_2, \omega_2) + 2\theta_2 - \theta_1] + \dots \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

En la práctica, la respuesta total a una frecuencia particular se puede aproximar suficientemente bien ignorando los términos correspondientes a los órdenes más altos.

### III.3. Determinación de las funciones de transferencia no lineales

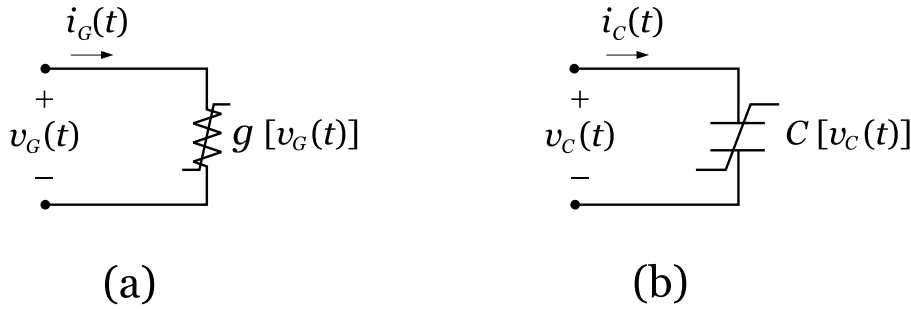
Los desarrollos anteriores se han realizado en términos generales y a la vista de las expresiones obtenidas, la respuesta de un sistema no lineal está determinada por las funciones de transferencia no lineales, en el sentido de que el conocimiento de  $H_n(\omega_n)$  es suficiente para hallar la respuesta a cualquier entrada. En este apartado se describen las dos técnicas que se utilizan para la determinación de las funciones de transferencia no lineales. A pesar de que, en general, no es fácil obtener una expresión analítica en forma cerrada de las funciones de transferencia, sobre todo para órdenes elevados, el carácter recursivo de estos métodos hace posible que resulte sencillo programarlos y efectuar el cálculo eficiente de las funciones de transferencia con ayuda de un ordenador.

Las no-linealidades inherentes a los dispositivos electrónicos son fuentes potenciales de comportamiento no lineal en los circuitos que los contienen. El análisis no lineal de un circuito electrónico requiere que cada dispositivo sea reemplazado por un modelo equivalente. En el caso particular de dispositivos de AsGa se ha visto en el Capítulo II que los modelos de gran señal presentan en común elementos de circuito que pueden ser representados por medio de conductancias no lineales, capacidades no lineales o fuentes controladas no lineales. En todos estos casos la corriente depende no linealmente de una tensión, y los elementos pueden ser adecuadamente caracterizados por una serie de potencias alrededor del punto de polarización.

En la Figura 3.4a se muestra una conductancia no lineal cuya relación tensión-corriente se puede expresar como:

$$i_G(t) = g[v_G(t)] \quad (3.33)$$

donde  $g[\cdot]$  es un funcional sin memoria. Si se admite que la conductancia está polarizada de tal manera que sean  $V_G$  e  $I_G$  la tensión y corriente en el punto de trabajo, respectivamente, la expansión de  $g[\cdot]$  en serie de potencias alrededor del punto de



**Figura 3.4:** Elementos de circuito no lineales. (a) Conductancia. (b) Capacidad.

polarización permite escribir:

$$i_G(t) = I_G + \sum_{k=1}^{\infty} g_k [v_G(t) - V_G]^k, \quad (3.34)$$

donde  $g_k$  es el  $k$ -ésimo coeficiente de la serie de potencias. Para simplificar la notación, sean  $i_g(t)$  y  $v_g(t)$  la corriente y tensión incrementales, dadas por:

$$i_g(t) = i_G(t) - I_G \quad \text{y} \quad v_g(t) = v_G(t) - V_G. \quad (3.35)$$

La ecuación (3.34) se reduce a:

$$i_g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k v_g^k(t). \quad (3.36)$$

En el caso de la capacidad no lineal mostrada en la Figura 3.4b, la aplicación de la regla de la cadena permite escribir la corriente en función de la carga:

$$i_C(t) = \frac{dq_C(t)}{dt} = \frac{dq_C(t)}{dv_C(t)} \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (3.37)$$

La capacidad incremental se define como:

$$C[v_C(t)] = \frac{dq_C(t)}{dv_C(t)} \quad (3.38)$$

y así se tiene:

$$i_C(t) = C[v_C(t)] \frac{dv_C(t)}{dt}. \quad (3.39)$$

Suponiendo que la capacidad no lineal admite un desarrollo en serie de potencias alrededor del punto de polarización, puede escribirse:

$$C[v_C(t)] = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k [v_C(t) - V_C]^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k v_c^k(t) \quad (3.40)$$

donde  $v_c(t) = v_C(t) - V_C$  es la tensión incremental. En términos de esta serie de potencias, la corriente se expresa como:

$$i_C(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k v_c^k(t) \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (3.41)$$



### III.3. Determinación de las funciones de transferencia no lineales

Para pasar a tensiones y corrientes incrementales basta con reescribir la expresión anterior de la forma equivalente:

$$i_c(t) - I_C = \sum_{k=0}^{\infty} c_k v_c^k(t) \frac{d[v_c(t) + V_C]}{dt} \quad (3.42)$$

Teniendo en cuenta que  $I_C = 0$ , pues se trata de una corriente en DC, y que  $V_C$  es constante, se concluye:

$$i_c(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k v_c^k(t) \frac{dv_c(t)}{dt} \quad (3.43)$$

Una formulación alternativa a (3.43) consiste en desarrollar la característica carga-tensión en serie de potencias:

$$q_C(t) = q[v_C(t)] \rightarrow q_c(t) = q_C(t) - Q_C = \sum_{h=1}^{\infty} q_h [v_C(t) - V_C]^h = \sum_{h=1}^{\infty} q_h v_c^h(t) \quad (3.44)$$

La corriente se expresa como la derivada de la carga:

$$i_c(t) = \frac{dq_c(t)}{dt} = \sum_{h=1}^{\infty} h q_h v_c^h(t) \frac{dv_c(t)}{dt} \quad (3.45)$$

Haciendo el cambio de variable  $k = h - 1$ , se tiene:

$$i_c(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) q_{k+1} v_c^k(t) \frac{dv_c(t)}{dt} \quad (3.46)$$

Finalmente, al comparar (3.46) con (3.43) resulta:

$$c_k = (k+1) q_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.47)$$

En resumen, los elementos de circuito no lineales de una red admiten representaciones incrementales en serie de potencias. Los casos de interés en dispositivos de AsGa se resumen en los siguientes puntos:

- Conductancia no lineal:

$$i_g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n v^n(t) \quad (3.48)$$

- Capacidad no lineal:

$$i_c(t) = \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} q_n v^n(t) = \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{n-1}}{n} v^n(t) \quad (3.49)$$

- Fuente controlada no lineal:

$$i[u(t)] = \sum_{m=1}^{\infty} g_m u^m(t) \quad (3.50)$$

- No linealidad dependiente:

$$i[v(t), u(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} g_{kl} v^k(t) u^l(t), \quad k + l \geq 1 \quad (3.51)$$

Aunque se han analizado con éxito circuitos no lineales basados en dispositivos FET, modelando la fuente de corriente  $i_{ds}[v_{gs}, v_{ds}]$  como una conductancia no lineal en paralelo con una fuente controlada no lineal [8, 7], numerosos artículos han mostrado la importancia de los términos cruzados  $g_{kl}$  del desarrollo en series de potencias de la fuente de corriente [9]. En adelante, se acudirá a la expresión (3.51) para describir la no-linealidad dominante en FETs de AsGa. Obsérvese que los coeficientes  $g_{k0}$  están ligados a la fuente controlada no lineal dependiente de  $v_{gs}$ , mientras que  $g_{0l}$  son los coeficientes de la conductancia no lineal de salida.

#### III.3.1. Método de las entradas armónicas

La esencia de este método no es muy diferente del proceso que se sigue para hallar la función de transferencia de un circuito lineal  $H(\omega)$  en el dominio de la frecuencia: se considera que sobre el circuito se aplica la forma de excitación más simple, se halla la respuesta, sustituyendo ambas en la ecuación entrada-salida, y finalmente se determina algebraicamente  $H_n(\omega_n)$ . De esta manera, puede hallarse la función de transferencia de un circuito lineal, suponiendo que la tensión de entrada es  $1 \cdot \exp(j\omega t)$ , expresando la salida para que quede de la forma  $H(\omega) \exp(j\omega t)$ . El cociente entre la entrada y la salida es precisamente  $H(\omega)$ .

En el caso de un circuito no lineal se considera la entrada  $x(t)$  como una suma de exponenciales complejas de frecuencias inconmensurables:

$$x(t) = \exp(j\omega_1 t) + \exp(j\omega_2 t) + \cdots + \exp(j\omega_n t) \quad (3.52)$$

La transformada de Fourier de esta entrada es un tren de funciones impulso:

$$X(\omega) = \delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega - \omega_2) + \cdots + \delta(\omega - \omega_n) \quad (3.53)$$

Teniendo en cuenta (3.26), las distintas mezclas  $\mathbf{m}$  entre las exponenciales complejas de la entrada contribuyen a la salida de orden  $n$  con términos de la forma:

$$y_n(t; \mathbf{m}) = (n; \mathbf{m}) H_n(\omega_{\mathbf{m}}) \exp(j\omega_{\mathbf{m}} t) \quad (3.54)$$

De todas estas mezclas interesa particularmente aquella en la que  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  aparecen una sola vez en las  $n$  entradas del vector  $\omega_{\mathbf{m}}$ . La respuesta de orden  $n$  de esta componente tiene la siguiente forma:

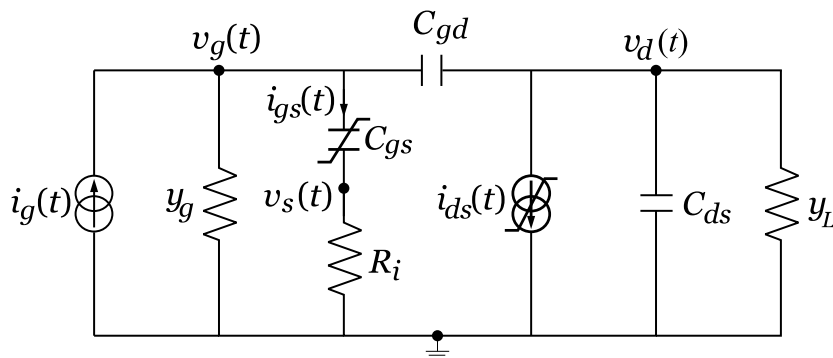
$$y_n(t; \omega = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n) = n! H_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \exp[j(\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n)t] \quad (3.55)$$

### III.3. Determinación de las funciones de transferencia no lineales

Por tanto, la función de transferencia no lineal de orden  $n$  se puede obtener analíticamente como el coeficiente que multiplica a  $n! \exp[j(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)t]$  en la salida cuando la entrada viene dada por la suma de exponenciales complejas (3.52).

Se puede apreciar que la función de transferencia no lineal de orden  $n$  depende de las funciones de transferencia de órdenes inferiores a  $n$ . Así, es necesario excitar primero con  $x(t) = \exp(j\omega_1 t)$  para obtener  $H_1(\omega_1)$ ; a continuación, con  $x(t) = \exp(j\omega_1 t) + \exp(j\omega_2 t)$  se puede hallar  $H_2(\omega_1, \omega_2)$  en función de  $H_1(\omega_1)$  y de  $H_1(\omega_2)$ ; a su vez,  $H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  depende de  $H_1(\omega_1)$ ,  $H_1(\omega_2)$ ,  $H_1(\omega_3)$ , y de  $H_2(\omega_1, \omega_2)$ ,  $H_2(\omega_1, \omega_3)$ ,  $H_2(\omega_2, \omega_3)$ . Esta observación sugiere la aplicación de un método recursivo para la determinación de las funciones de transferencia no lineales.

Dado que la expresión analítica de  $H_n$  depende de todas las permutaciones de las funciones de órdenes inferiores a  $n$  y sus productos, es preferible introducir el operador simetrización  $\overline{A_n}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ , que representa la media aritmética de las  $n!$  permutaciones de las  $n$  frecuencias  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . Con esta notación,  $\overline{H_n}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  es el coeficiente de  $n! \exp[j(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)t]$  de la respuesta a una entrada armónica de  $n$  frecuencias inconmensurables.



**Figura 3.5:** Circuito equivalente simplificado de un amplificador FET.

Cuando se analizan redes complicadas es deseable tener métodos sistemáticos para formular las ecuaciones de la red. En general, éstos están basados en las matrices de incidencia, de mallas y de corte, que se derivan de consideraciones topológicas. Como los circuitos electrónicos presentan, generalmente, muchas más mallas que nudos, es una práctica común recurrir a la técnica de análisis nodal. A continuación se aplica el método de la entrada armónica al análisis nodal. A modo de ejemplo se muestra en la Figura 3.5 una red de tres nodos que representa el circuito equivalente simplificado de un FET trabajando como amplificador de pequeña señal. Los únicos elementos de circuito que se consideran no lineales son la fuente de corriente y la capacidad puerta-fuente, de manera que el modelo puede considerarse válido para un FET polarizado en la región de saturación.

Al estar interesados en el análisis incremental no lineal de este circuito, todas las tensiones y corrientes se asumen variables incrementales. Para aplicar el análisis nodal

### III. SERIES DE VOLTERRA

es preciso que cada elemento de circuito tenga una representación de admitancia en la que la corriente se exprese como una función de la tensión. De la aplicación de la ley de Kirchhoff de las corrientes sobre cada uno de los nodos se derivan las tres ecuaciones siguientes:

$$y_g v_g(t) + i_{gs}(t) + \hat{p}C_{gd} [v_g(t) - v_d(t)] = i_g(t) \quad (3.56a)$$

$$-i_{gs}(t) + R_i^{-1} v_s(t) = 0 \quad (3.56b)$$

$$-\hat{p}C_{gd} [v_g(t) - v_d(t)] + i_{ds}(t) + \hat{p}C_{ds} v_d(t) + y_L v_d(t) = 0 \quad (3.56c)$$

donde  $\hat{p}$  es el operador diferencial  $d/dt$ .

A continuación se desarrollan en series de potencias las corrientes a través de los elementos de circuito no lineales. De acuerdo con (3.49) y (3.51) se tiene:

$$i_{gs}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k [v_g(t) - v_s(t)]^k \hat{p} [v_g(t) - v_s(t)] \quad (3.57a)$$

$$i_{ds}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} g_{kl} [v_g(t) - v_s(t)]^k v_d^l(t), \quad k + l \geq 1 \quad (3.57b)$$

La forma de (3.57) sugiere que cada elemento de circuito no lineal puede ser reemplazado por una fuente de corriente controlada por tensión, no lineal, en paralelo con un elemento de circuito lineal. De esta manera, se puede construir un circuito lineal aumentado en el que los elementos no lineales actúan como fuentes de corriente sobre la parte lineal, como se muestra en la Figura 3.6. Una vez sustituidas las expansiones en series de potencias en (3.56), las ecuaciones se pueden agrupar de manera que solamente los términos que dependen linealmente de las tensiones de los nudos aparezcan en la parte de la izquierda.

$$\begin{aligned} [y_g + \hat{p}(C_{gd} + C_0)] v_g(t) - \hat{p}C_{gd} v_d(t) - \hat{p}C_0 v_s(t) = \\ = i_s(t) - \sum_{k=1}^{\infty} C_k [v_g(t) - v_s(t)]^k \hat{p} [v_g(t) - v_s(t)] \end{aligned} \quad (3.58a)$$

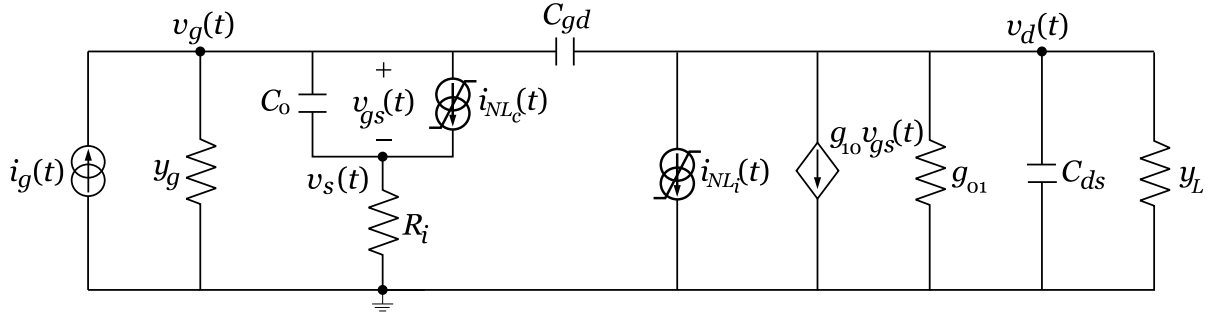
$$-\hat{p}C_0 v_g(t) + [R_i^{-1} + \hat{p}C_0] v_s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k [v_g(t) - v_s(t)]^k \hat{p} [v_g(t) - v_s(t)] \quad (3.58b)$$

$$\begin{aligned} [g_{10} - \hat{p}C_{gd}] v_g(t) + [g_{01} + y_L + \hat{p}(C_{gd} + C_{ds})] v_d(t) - g_{10} v_s(t) = \\ = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} g_{kl} [v_g(t) - v_s(t)]^k v_d^l(t) \end{aligned} \quad (3.58c)$$

Utilizando como variable la tensión puerta-fuente  $v_{gs}(t)$  las ecuaciones anteriores quedan de la siguiente forma:

$$[y_g + \hat{p}C_{gd}] v_g(t) - \hat{p}C_{gd} v_d(t) + \hat{p}C_0 v_{gs}(t) = i_s(t) - \sum_{k=1}^{\infty} C_k v_{gs}^k(t) \hat{p} v_{gs}(t) \quad (3.59a)$$

$$R_i^{-1} v_g(t) - [R_i^{-1} + \hat{p}C_0] v_{gs}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k v_{gs}^k(t) \hat{p} v_{gs}(t) \quad (3.59b)$$



**Figura 3.6:** Representación alternativa del circuito de la Fig. 3.5, en la que se han reemplazado los elementos de circuito no lineales por elementos lineales en paralelo con fuentes de corriente no lineales.

$$-\hat{p}C_{gd}v_g(t) + [g_{o1} + y_L + \hat{p}(C_{ds} + C_{gd})]v_d(t) + g_{10}v_{gs}(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} g_{kl}v_{gs}^k(t)v_d^l(t) \quad (3.59c)$$

En notación matricial puede escribirse:

$$\mathbf{Y}(\hat{p})\mathbf{v}(t) = \mathbf{i}_s(t) + \mathbf{i}_{NL}(t) \quad (3.60)$$

donde:

$$\mathbf{Y}(\hat{p}) = \begin{bmatrix} y_g + \hat{p}C_{gd} & -\hat{p}C_{gd} & \hat{p}C_0 \\ R_i^{-1} & 0 & -(R_i^{-1} + \hat{p}C_0) \\ -\hat{p}C_{gd} & g_{o1} + y_L + \hat{p}(C_{ds} + C_{gd}) & g_{10} \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} v_g(t) \\ v_d(t) \\ v_{gs}(t) \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

$$\mathbf{i}_{NL}(t) = \begin{bmatrix} -\sum_{k=1}^{\infty} C_k v_{gs}^k(t) \hat{p} v_{gs}(t) \\ +\sum_{k=1}^{\infty} C_k v_{gs}^k(t) \hat{p} v_{gs}(t) \\ -\sum_{\substack{k=0 \\ k+l>1}}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} g_{kl} v_{gs}^k(t) v_d^l(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{i}_s(t) = \begin{bmatrix} i_s(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.62)$$

siendo  $\mathbf{Y}(\hat{p})$  la matriz de admitancias de la parte lineal *augmentada*;  $\mathbf{v}(t)$  el vector de tensiones incógnita;  $\mathbf{i}_s(t)$  el vector de fuentes de corriente independientes (excitaciones); e  $\mathbf{i}_{NL}(t)$  un vector que incluye todas las no-linealidades del circuito, al que se denominará en adelante vector de corrientes no lineales.

Siguiendo el método de la entrada armónica, primero se determinan las funciones de transferencia lineales seleccionando el vector de fuentes de corriente independientes de la siguiente manera:

$$\mathbf{i}_s(t) = \begin{bmatrix} \exp(j\omega_1 t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

### III. SERIES DE VOLTERRA

Dado que las tensiones en los nodos admiten un desarrollo en series de Volterra, se pueden expresar como sigue:

$$\begin{aligned} v_g(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_{gn}(t) \\ v_d(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_{dn}(t) \\ v_{gs}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_{gsn}(t) \end{aligned} \quad (3.64)$$

donde las componentes de orden  $n$  vienen dadas por:

$$\begin{aligned} v_{gn}(t) &= H_{gn}(\omega_1, \dots, \omega_1) \exp(jn\omega_1 t) \\ v_{dn}(t) &= H_{dn}(\omega_1, \dots, \omega_1) \exp(jn\omega_1 t) \\ v_{gsn}(t) &= H_{gsn}(\underbrace{\omega_1, \dots, \omega_1}_n) \exp(jn\omega_1 t) \end{aligned} \quad (3.65)$$

Una vez sustituidas (3.63)-(3.65) en (3.60), tras aplicar el operador diferencial  $\hat{p}$  e igualar los coeficientes de  $\exp(j\omega_1 t)$ , las funciones de transferencia lineales satisfacen la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} H_g(\omega_1) \\ H_d(\omega_1) \\ H_{gs}(\omega_1) \end{bmatrix} = \mathbf{Y}^{-1}(j\omega_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Como las componentes a  $\omega_1$  sólo pueden aparecer en los términos de primer orden, el vector de corrientes no lineales  $\mathbf{i}_{NL}(t)$  no contribuye a la respuesta lineal, pudiendo ser ignorado en este orden.

Para determinar las funciones de transferencia no lineales de segundo orden, se considera el siguiente vector de fuentes de corriente independientes:

$$\mathbf{i}_s(t) = \begin{bmatrix} \exp(j\omega_1 t) + \exp(j\omega_2 t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Aunque las tensiones en los nodos se siguen expresando según (3.64), al contener ahora dos tonos la entrada, las componentes de orden  $n$  responden a la expresión:

$$v_{gn}(t) = \sum_{q_1=1}^2 \cdots \sum_{q_n=1}^2 H_{gn}(\omega_{q_1}, \dots, \omega_{q_n}) \exp[j(\omega_{q_1} + \cdots + \omega_{q_n})t] \quad (3.68a)$$

$$v_{dn}(t) = \sum_{q_1=1}^2 \cdots \sum_{q_n=1}^2 H_{dn}(\omega_{q_1}, \dots, \omega_{q_n}) \exp[j(\omega_{q_1} + \cdots + \omega_{q_n})t] \quad (3.68b)$$

$$v_{gsn}(t) = \sum_{q_1=1}^2 \cdots \sum_{q_n=1}^2 H_{gsn}(\omega_{q_1}, \dots, \omega_{q_n}) \exp[j(\omega_{q_1} + \cdots + \omega_{q_n})t] \quad (3.68c)$$

A continuación se sustituyen (3.64), (3.67) y (3.68) en (3.60) y se identifican aquellos términos que varían con  $t$  como  $\exp[j(\omega_1 + \omega_2)t]$ . Como las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se suponen positivas e inconmensurables, los términos con dependencia de tipo  $\omega_1 + \omega_2$  sólo pueden aparecer en las componentes de segundo orden. Desarrollando cualquiera de los términos de (3.68) para  $n = 2$ , se tiene:

$$v_{k2}(t) = H_{k2}(\omega_1, \omega_1) \exp(j2\omega_1 t) + 2!H_{k2}(\omega_1, \omega_2) \exp[j(\omega_1 + \omega_2)t] + H_{k2}(\omega_2, \omega_2) \exp(j2\omega_2 t) \quad (3.69)$$

donde  $H_{k2}$  es la función de transferencia no lineal de segundo orden del nodo  $k$ . Nótese que existen tantos términos idénticos con salida en  $\omega_1 + \omega_2$  como posibles permutaciones de los índices  $q_1, q_2$  donde  $\omega_1$  y  $\omega_2$  aparecen una sola vez. Analizando los restantes términos de la ecuación matricial, mientras que  $\mathbf{i}_s(t)$  no presenta términos en  $\omega_1 + \omega_2$ , el vector  $\mathbf{i}_{NL}(t)$  puede contribuir a esta frecuencia, debido a su naturaleza no lineal. Cada uno de los elementos de este vector admite también una expansión funcional en series de Volterra que se puede escribir como:

$$i_{NLk}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} i_{NLkn}(t), \quad (3.70)$$

donde

$$i_{NLkn}(t) = \sum_{q_1=1}^2 \cdots \sum_{q_n=1}^2 F_{kn}(\omega_{q_1}, \dots, \omega_{q_n}) \exp[j(\omega_{q_1} + \cdots + \omega_{q_n})t] \quad (3.71)$$

Al igual que sucede en (3.69), el número de términos de  $i_{NLkn}(t)$  que dependen de  $t$  como  $\exp[j(\omega_1 + \omega_2)t]$  equivale a las posibles permutaciones de los índices  $q_1, \dots, q_n$ , de manera que  $\omega_1$  y  $\omega_2$  aparecen una sola vez, en otras palabras:

$$i_{NLk}(t; \omega_1 + \omega_2) = 2!F_{k2}(\omega_1, \omega_2) \exp[j(\omega_1 + \omega_2)t] \quad (3.72)$$

Al cancelar los factores  $2!$  en ambos miembros de la ecuación matricial, se pueden despejar las funciones de transferencia no lineales de segundo orden:

$$\begin{bmatrix} H_g(\omega_1, \omega_2) \\ H_d(\omega_1, \omega_2) \\ H_{gs}(\omega_1, \omega_2) \end{bmatrix} = \mathbf{Y}^{-1}[j(\omega_1 + \omega_2)] \begin{bmatrix} F_{g2}(\omega_1, \omega_2) \\ F_{d2}(\omega_1, \omega_2) \\ F_{gs2}(\omega_1, \omega_2) \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Las funciones  $F_{k2}(\omega_1, \omega_2)$  dependen a su vez de las funciones de transferencia de órdenes inferiores. Atendiendo al primero de los elementos del vector  $\mathbf{i}_{NL}(t)$ , al sustituir (3.64) y (3.65) en la expresión de  $i_{NLg}(t)$ , se obtiene:

$$i_{NLg}(t) = - \sum_{k=1}^{\infty} C_k v_{gs}^k(t) \hat{p} v_{gs}(t) = - \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q_1=1}^2 \cdots \sum_{q_n=1}^2 H_{gsn}(\omega_{q_1}, \dots, \omega_{q_n}) \times \right. \\ \left. \times \exp[j(\omega_{q_1} + \cdots + \omega_{q_n})t] \right\}^k \hat{p} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r_1=1}^2 \cdots \sum_{r_m=1}^2 H_{gsm}(\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_m}) \exp[j(\omega_{r_1} + \cdots + \omega_{r_m})t] \right\} \quad (3.74)$$

### III. SERIES DE VOLTERRA

De acuerdo con las consideraciones indicadas previamente, sólo pueden encontrarse términos con dependencia temporal  $\exp[j(\omega_1 + \omega_2)t]$  entre las componentes de segundo orden. Esto equivale a particularizar  $k = 1$ ,  $n = 1$  y  $m = 1$  en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} i_{NLg2}(t) &= -C_1 \sum_{q=1}^2 \sum_{r=1}^2 H_{gs1}(\omega_q) H_{gs1}(\omega_r) j\omega_r \exp[j(\omega_q + \omega_r)] = \\ &= -\frac{C_1}{2} \{ j2\omega_1 H_{gs1}^2(\omega_1) \exp(j2\omega_1 t) + 2!j(\omega_1 + \omega_2) H_{gs1}(\omega_1) H_{gs1}(\omega_2) \exp[j(\omega_1 + \omega_2)t] + \\ &\quad + j2\omega_2 H_{gs1}^2(\omega_2) \exp(j2\omega_2 t) \} \quad (3.75) \end{aligned}$$

Al comparar con (3.72) resulta:

$$F_{g2}(\omega_1, \omega_2) = -j(\omega_1 + \omega_2) \frac{C_1}{2} H_{gs1}(\omega_1) H_{gs1}(\omega_2) \quad (3.76)$$

Obsérvese que  $F_{g2}(\omega_1, \omega_2)$  se puede interpretar como el coeficiente de Fourier de  $i_{NLg2}(t)$ , evaluado en  $\omega_1 + \omega_2$ , dividido por  $2!$ .

Debido a la similitud entre  $i_{NLg}(t)$  e  $i_{NLd}(t)$ , se tiene:

$$F_{d2}(\omega_1, \omega_2) = j(\omega_1 + \omega_2) \frac{C_1}{2} H_{gs1}(\omega_1) H_{gs1}(\omega_2) \quad (3.77)$$

En cuanto a la no-linealidad dependiente de  $i_{NLgs}(t)$ , las componentes de segundo orden están contenidas en la expresión:

$$i_{NLgs2}(t) = -g_{20}v_{gs}^2(t) - g_{11}v_{gs}(t)v_d(t) - g_{02}v_d^2(t) \quad (3.78)$$

La estructura de estos tres sumandos es similar, así que sólo se estudiará el segundo de ellos:

$$\begin{aligned} v_{gs}(t)v_d(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{q_1=1}^2 \cdots \sum_{q_n=1}^2 \sum_{r_1=1}^2 \cdots \sum_{r_m=1}^2 H_{gsn}(\omega_{q_1}, \dots, \omega_{q_n}) H_{dm}(\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_m}) \times \\ &\quad \times \exp[j(\omega_{q_1} + \cdots + \omega_{q_n} + \omega_{r_1} + \cdots + \omega_{r_m})t] \quad (3.79) \end{aligned}$$

Sólo se pueden localizar componentes con dependencia del tipo  $\exp[j(\omega_1 + \omega_2)t]$  en los términos que resultan de tomar  $n = 1$ ,  $m = 1$ , esto es:

$$\begin{aligned} v_{gs1}(t)v_{d1}(t) &= \sum_{q=1}^2 \sum_{r=1}^2 H_{gs1}(\omega_q) H_{d1}(\omega_r) \exp[j(\omega_q + \omega_r)] = H_{gs1}(\omega_1) H_{d1}(\omega_1) \exp(j2\omega_1 t) + \\ &+ [H_{gs1}(\omega_1) H_{d1}(\omega_2) + H_{gs1}(\omega_2) H_{d1}(\omega_1)] \exp[j(\omega_1 + \omega_2)t] + H_{gs1}(\omega_2) H_{d1}(\omega_2) \exp(j2\omega_2 t) \quad (3.80) \end{aligned}$$

Finalmente:

$$F_{gs2}(\omega_1, \omega_2) = -g_{20} H_{gs1}(\omega_1) H_{gs1}(\omega_2) - g_{11} \overline{H_{gs1}(\omega_1) H_{d1}(\omega_2)} - g_{02} H_{d1}(\omega_1) H_{d1}(\omega_2) \quad (3.81)$$

donde:

$$\overline{H_{gs1}(\omega_1) H_{d1}(\omega_2)} = \frac{1}{2} [H_{gs1}(\omega_1) H_{d1}(\omega_2) + H_{gs1}(\omega_2) H_{d1}(\omega_1)] \quad (3.82)$$



En general, para el cálculo de las funciones de transferencia no lineales de orden  $n$  se considerará un vector de corrientes independientes del tipo:

$$\mathbf{i}_s(t) = \begin{bmatrix} \exp(j\omega_1 t) + \exp(j\omega_2 t) + \cdots + \exp(j\omega_n t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.83)$$

y se trata de identificar en ambos miembros de la ecuación matricial (3.60) aquellos términos con dependencia temporal  $\exp[j(\omega_1 + \cdots + \omega_n)t]$ , que sólo pueden ser debidos a componentes de orden  $n$ , y que aparecen  $n!$  veces como corresponde al número de permutaciones de los índices  $q_1, \cdots, q_n$  tomados de 1 en 1. Las funciones de transferencia no lineales satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{bmatrix} H_g(\omega_1, \dots, \omega_n) \\ H_d(\omega_1, \dots, \omega_n) \\ H_{gs}(\omega_1, \dots, \omega_n) \end{bmatrix} = \mathbf{Y}^{-1}[j(\omega_1 + \cdots + \omega_n)] \begin{bmatrix} F_{gn}(\omega_1, \dots, \omega_n) \\ F_{dn}(\omega_1, \dots, \omega_n) \\ F_{gsn}(\omega_1, \dots, \omega_n) \end{bmatrix}, \quad (3.84)$$

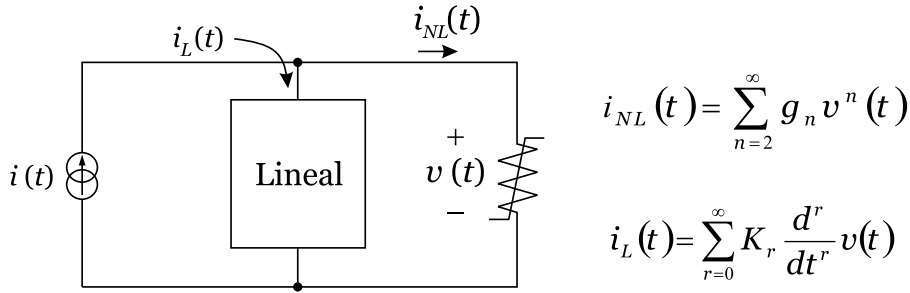
siendo  $F_{kn}(\omega_1, \dots, \omega_n)$  el coeficiente de Fourier de la componente de orden  $n$  de la corriente no lineal  $i_{NLk}(t)$  evaluado en  $\omega_1 + \dots + \omega_n$  y dividido por  $n!$ .

Los  $n!$  términos contenidos en cada fila del vector de corrientes no lineales  $\mathbf{i}_{NL}(t)$  son, en general, diferentes, y su evaluación puede ser un proceso bastante complicado para órdenes superiores a tres. El método general para determinar la respuesta de un sistema caracterizado por un comportamiento no lineal que puede ser descrito por una serie de potencias se discute en la siguiente sección.

#### III.3.2. Método de las corrientes no lineales

Con ayuda del ejemplo anterior, se acaba de mostrar que las componentes de orden  $n$  de la respuesta de un circuito no lineal se pueden obtener como soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Estas ecuaciones lineales son parte de las ecuaciones no lineales originales, a las que se le aplican unas excitaciones particulares que se conocen como corrientes no lineales. Las corrientes no lineales de orden  $n$  se determinan a partir de componentes de tensión de orden inferior a  $n$ . Una vez conocidas las corrientes de orden  $n$ , las componentes de tensión del mismo orden se calculan a partir de aquéllas, y así se pueden hallar las componentes de corriente de órdenes más altos. Sólo es necesario tener en cuenta las componentes de frecuencia que contribuyen a una componente de interés de alto orden.

Este método se deriva del estudio de las respuestas de orden sucesivamente creciente de un circuito caracterizado por un sistema de ecuaciones diferenciales en el que las no-linealidades adoptan la forma de una serie de potencias. Sin pérdida de generalidad, para simplificar la notación, considérese un circuito de un solo nodo descrito por una conductancia no lineal. Sea  $v(t)$  la salida cuando se aplica una entrada



**Figura 3.7:** Circuito de un nodo con conductancia no lineal.

$i(t)$  al circuito, de manera que se cumple la ecuación diferencial:

$$i(t) = \sum_{r=0}^{\infty} K_r \frac{d^r}{dt^r} v(t) + \sum_{n=2}^{\infty} g_n v^n(t) . \quad (3.85)$$

Los dos sumandos de la ecuación diferencial separan completamente la dependencia lineal y no lineal, como se muestra en la Figura 3.7. Supóngase que la excitación es de la forma  $x(t) = \alpha i(t)$ , donde  $\alpha$  es una variable *muda* que se utilizará para llevar la cuenta del orden de los diferentes términos. Según la expansión funcional de Volterra (véase (3.31)), la respuesta de orden  $n$  a la entrada  $x(t)$  viene dada por:

$$y_n(t) = \alpha^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\omega_n) \prod_{k=1}^n I(\omega_k) \exp(j\omega_k t) \frac{d\omega_k}{2\pi} \quad (3.86)$$

En este sentido, es evidente que cualquier término con dependencia de tipo  $\alpha^n$  es de orden  $n$  en  $i(t)$ , de manera que  $y_n(t) = \alpha^n v_n(t)$ , y además:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n v_n(t) \quad (3.87)$$

Sustituyendo  $x(t)$  e  $y(t)$  en la ecuación diferencial (3.85) en función de  $i(t)$  y  $v_n(t)$ , resulta:

$$\alpha i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \left[ \sum_{r=0}^{\infty} K_r \frac{d^r}{dt^r} v_n(t) \right] + \sum_{n=2}^{\infty} g_n \left[ \sum_{s=1}^{\infty} \alpha^s v_s(t) \right]^n \quad (3.88)$$

La introducción de la variable muda  $\alpha$  es un útil artificio que permite resolver las componentes de órdenes sucesivamente crecientes. Para determinar  $v_1(t)$ , se derivan ambos miembros de (3.88) respecto de  $\alpha$  y se particulariza a continuación  $\alpha = 0$ , obteniéndose la siguiente ecuación diferencial para  $v_1(t)$ :

$$i(t) = \sum_{r=0}^{\infty} K_r \frac{d^r}{dt^r} v_1(t) , \quad (3.89)$$

que se corresponde con la parte lineal de (3.85) como si el elemento no lineal representado por la serie de potencias en  $v^n(t)$  fuese eliminado del circuito y la fuente de corriente  $i(t)$  se aplicara sólo a la parte lineal.

### III.3. Determinación de las funciones de transferencia no lineales

Las respuestas no lineales de orden superior se obtienen repitiendo el proceso de derivación de ambos miembros de (3.88) con respecto a  $\alpha$ , tomando después  $\alpha = 0$ . Derivando por segunda vez se obtiene la ecuación diferencial que satisface  $v_2(t)$ :

$$0 = \sum_{r=0}^{\infty} K_r \frac{d^r}{dt^r} v_2(t) + g_2 v_1^2(t) . \quad (3.90)$$

Al comparar esta expresión con (3.89) puede considerarse  $v_2(t)$  como la respuesta a la parte lineal del circuito cuando se excita con una corriente no lineal  $-i_{NL2}(t)$  dada por:

$$i_{NL2}(t) = g_2 v_1^2(t) \quad (3.91)$$

Repitiendo el proceso una vez más resulta:

$$0 = \sum_{r=0}^{\infty} K_r \frac{d^r}{dt^r} v_3(t) + 2g_2 v_1(t)v_2(t) + g_3 v_1^3(t) . \quad (3.92)$$

Nuevamente la componente de tercer orden es la respuesta de la parte lineal excitada por una corriente no lineal  $-i_{NL3}(t)$  de orden 3:

$$i_{NL3}(t) = 2g_2 v_1(t)v_2(t) + g_3 v_1^3(t) . \quad (3.93)$$

Este proceso se puede reiterar sucesivamente hasta alcanzar la respuesta no lineal del orden deseado. En general, la corriente no lineal de orden  $n$  se expresa como:

$$i_{NLn}(t) = \sum_{m=2}^{\infty} g_m \left\{ \frac{d}{d\alpha^n} \left[ \sum_{s=1}^{\infty} \alpha^s v_s(t) \right]^m \right\} \Big|_{\alpha=0} \quad (3.94)$$

Puesto que  $m > 1$ ,  $i_{NLn}(t)$  no puede depender de respuestas no lineales de órdenes superiores a  $n$ , sino exclusivamente de las  $n - 1$  respuestas  $v_1(t), \dots, v_{n-1}(t)$ , que ya han sido calculadas. Por tanto, este método es claramente recursivo, ya que se requiere la determinación de todas las componentes de órdenes más bajos antes de hallar la siguiente componente de orden superior.

El procedimiento para la determinación de las corrientes no lineales puede sistematizarse a partir de la siguiente recursión, que se demuestra en [13]. En el caso en que la corriente  $i_{NL}(t)$  sea debida a una conductancia no lineal (o a una fuente de corriente controlada por la tensión  $u(t)$ ):

$$i_{NL}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} g_n u^n(t) , \quad (3.95)$$

la componente de corriente de orden  $n$  generada por  $u(t)$  se puede expresar como sigue:

$$i_{NLn}(t) = \sum_{m=2}^n g_m u_{n,m} , \quad (3.96)$$

### III. SERIES DE VOLTERRA

donde

$$u_{n,m} = \sum_{i=1}^{n-m+1} u_i(t) u_{n-i,m-1}, \quad n \geq m, \quad (3.97)$$

siendo  $u_{n,1} = u_n(t)$ . Una expresión similar se utiliza para la componente de orden  $n$  debida a una no-linealidad dependiente (véase [6]):

$$i_{NL}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_{mn} u^m(t) v^n(t). \quad (3.98)$$

En este caso se cumple:

$$i_{NLn}(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-k} g_{lk} \Phi_{l,k,n} \quad (3.99)$$

donde

$$\Phi_{l,k,n} = \sum_{j=1}^{n-1} u_{j,l} v_{n-j,k}, \quad \text{siendo } u_{j,l} = \sum_{i=1}^{j-l+1} u_i(t) u_{j-i,l-1}, \quad j \geq m. \quad (3.100)$$

Si la corriente  $i_{NL}(t)$  es debida a una no-linealidad capacitiva (véanse (3.43)-(3.46)), realmente nos encontramos ante un caso particular de (3.95), en el que  $u(t) = dv(t)/dt$ .

El método de las corrientes no lineales se puede combinar eficientemente con el de la entrada armónica para asistir en el cálculo de las funciones de transferencia no lineales, reemplazando la entrada  $i(t)$  por sumas de exponenciales complejas de frecuencias inconmensurables, como en (3.52). Al trabajar en el dominio de la frecuencia, para evaluar la función de transferencia de orden  $n$  hay que calcular la transformada de Fourier de las corrientes no lineales del mismo orden. Dado que  $H_n(\omega_n)$  es el coeficiente de  $n! \exp[j(\omega_1 + \dots + \omega_n)t]$ , de todo el espectro  $\mathcal{F}[i_{NLn}(t)]$  sólo interesa conocer el coeficiente  $F_n[i_{NLn}(t)]$  cuya componente espectral es  $n! \delta[\omega - (\omega_1 + \dots + \omega_n)]$ . Este coeficiente se puede expresar en términos de productos simetrizados de funciones de transferencia no lineales de órdenes más bajos. Así, puede escribirse por ejemplo:

$$F_n[v_{k_1}^r(t) v_{k_2}^s(t)] = \frac{\overline{H_{k_1}(\omega_1, \dots, \omega_{k_1}) \cdot \dots \cdot H_{k_1}(\omega_{(r-1)k_1+1}, \dots, \omega_{rk_1})}}{\cdot H_{k_2}(\omega_{rk_1+1}, \dots, \omega_{rk_1+k_2}) \cdot \dots \cdot H_{k_2}(\omega_{n-k_2+1}, \dots, \omega_n)} \quad (3.101)$$

con  $rk_1 + sk_2 = n$ , y donde  $H_{k_i}$  es la función de transferencia no lineal de orden  $k_i$  de la tensión  $v(t)$ .

Retomando nuevamente el ejemplo del amplificador FET, se aplica a continuación el método de las corrientes no lineales para obtener las funciones de transferencia no lineales de segundo y tercer orden. Siguiendo la notación de la Figura 3.6, recuperamos por comodidad el vector de corrientes no lineales:

$$\mathbf{i}_{NL}(t) = \begin{bmatrix} i_{NLg}(t) \\ i_{NLd}(t) \\ i_{NLgs}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.102)$$

donde:

$$i_{NLg}(t) = -\frac{d}{dt} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_{k-1}}{k} v_{gs}^k(t) \quad (3.103a)$$

$$i_{NLd}(t) = \frac{d}{dt} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_{k-1}}{k} v_{gs}^k(t) \quad (3.103b)$$

$$i_{NLgs}(t) = -\sum_{k=2}^{\infty} g_{k0} v_{gs}^k(t) - \sum_{l=2}^{\infty} g_{0l} v_d^l(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} g_{kl} v_{gs}^k(t) v_d^l(t) \quad (3.103c)$$

■ Segundo orden:

- Tras aplicar (3.96) y (3.97):

$$i_{NLg2}(t) = -i_{NLd2}(t) = -\frac{d}{dt} \left[ \frac{C_1}{2} v_{gs1}^2(t) \right] \quad (3.104)$$

- En el caso de la no-linealidad dependiente:

$$i_{NLgs2}(t) = -g_{20} v_{gs1}^2(t) - g_{02} v_{d1}^2(t) - g_{11} v_{gs1}(t) v_{d1}(t) \quad (3.105)$$

- Los coeficientes de Fourier  $F_2[i_{NLk2}(t)]$  de las componentes espectrales en  $\omega_1 + \omega_2$  (compárese con (3.76) y (3.81)):

$$F_2[i_{NLg2}(t)] = F_{g2}(\omega_1, \omega_2) = -j(\omega_1 + \omega_2) \frac{C_1}{2} H_{gs1}(\omega_1) H_{gs1}(\omega_2) \quad (3.106a)$$

$$F_2[i_{NLd2}(t)] = F_{d2}(\omega_1, \omega_2) = -F_{g2}(\omega_1, \omega_2) \quad (3.106b)$$

$$F_2[i_{NLgs2}(t)] = F_{gs2}(\omega_1, \omega_2) = -g_{20} H_{gs1}(\omega_1) H_{gs1}(\omega_2) + \\ -g_{02} H_{d1}(\omega_1) H_{d1}(\omega_2) - g_{11} \overline{H_{gs1}(\omega_1)} H_{d1}(\omega_2) \quad (3.106c)$$

■ Tercer orden:

- Tras aplicar (3.96) y (3.97):

$$i_{NLg3}(t) = -i_{NLd3}(t) = -\frac{d}{dt} \left[ C_1 v_{gs1}(t) v_{gs2}(t) + \frac{C_2}{3} v_{gs1}^3(t) \right] \quad (3.107)$$

- En el caso de la no-linealidad dependiente:

$$i_{NLgs3}(t) = -2g_{20} v_{gs1}(t) v_{gs2}(t) - g_{30} v_{gs1}^3(t) - 2g_{02} v_{d1}(t) v_{d2}(t) - g_{03} v_{d1}^3(t) + \\ -g_{11} [v_{gs1}(t) v_{d2}(t) + v_{gs2}(t) v_{d1}(t)] + g_{21} v_{gs1}^2(t) v_{d1}(t) + g_{12} v_{gs1}(t) v_{d1}^2(t) \quad (3.108)$$

- Los coeficientes de Fourier  $F_3[i_{NLk3}(t)]$  de las componentes espectrales en  $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ :

$$F_3[i_{NLg3}(t)] = F_{g3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -j(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \times \\ \times \left[ C_1 \overline{H_{gs1}(\omega_1) H_{gs2}(\omega_2, \omega_3)} + \frac{C_2}{3} H_{gs1}(\omega_1) H_{gs1}(\omega_2) H_{gs1}(\omega_3) \right] \quad (3.109a)$$

$$F_3[i_{NLd3}(t)] = F_{d3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -F_{g3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \quad (3.109b)$$

$$\begin{aligned} F_3[i_{NLg3s3}](t) = F_{gs3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = & -2g_{20}\overline{H_{gs1}(\omega_1)H_{gs2}(\omega_2, \omega_3)} + \\ & -g_{30}H_{gs1}(\omega_1)H_{gs1}(\omega_2)H_{gs1}(\omega_3) - 2g_{02}\overline{H_{d1}(\omega_1)H_{d2}(\omega_2, \omega_3)} + \\ & -g_{03}H_{d1}(\omega_1)H_{d1}(\omega_2)H_{d1}(\omega_3) - g_{11}\left[\overline{H_{gs1}(\omega_1)H_{d2}(\omega_2, \omega_3)} + \right. \\ & \left. + \overline{H_{gs2}(\omega_1, \omega_2)H_{d1}(\omega_3)}\right] - g_{21}\overline{H_{gs1}(\omega_1)H_{gs1}(\omega_2)H_{d1}(\omega_3)} + \\ & -g_{12}\overline{H_{gs1}(\omega_1)H_{d1}(\omega_2)H_{d1}(\omega_3)} \end{aligned} \quad (3.109c)$$

### III.4. Distorsión armónica e intermodulación

Cuando se aplica una señal sinusoidal de frecuencia  $\omega$  a la entrada de un circuito no lineal, la salida es una señal periódica que contiene componentes a la frecuencia fundamental y a todos sus armónicos. Si se representa la entrada al sistema por  $x(t) = |V_i| \cos(\omega_1 t + \theta_i)$ , la salida puede expresarse mediante una serie de Fourier:

$$y(t) = |V_0| + |V_1| \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + |V_2| \cos(2\omega_1 t + \alpha_2) + |V_3| \cos(3\omega_1 t + \alpha_3) + \dots \quad (3.110)$$

El cociente entre las magnitudes de los distintos armónicos y la salida a la frecuencia fundamental es una medida de distorsión no lineal que recibe el nombre de distorsión armónica:

$$D_k = \frac{|V_k|}{|V_1|} \quad (3.111)$$

Otra medida de distorsión no lineal es la distorsión total armónica, que se define como el cociente entre el valor rms de la salida, sin considerar las componentes a la frecuencia fundamental ni de DC, y la magnitud de la salida a la frecuencia fundamental:

$$D_T = \frac{\sqrt{|V_2|^2 + |V_3|^2 + \dots}}{|V_1|} = \sqrt{D_2^2 + D_3^2 + \dots} \quad (3.112)$$

Para obtener la expresión de la distorsión armónica de orden  $k$ , en virtud de (3.30) pueden sumarse las respuestas de distinto orden que contribuyan a la misma frecuencia de salida. Como se está considerando una sola entrada sinusoidal, el vector de mezclas  $\mathbf{m}$  tiene una estructura muy simple:  $\mathbf{m} = [m_{-1}, m_1]^T$ . Teniendo en cuenta que el orden de la mezcla es la suma  $m_{-1} + m_1 = n$  y que esta mezcla contribuye al  $k$ -ésimo armónico cuando  $m_{-1} + m_1 = k$ , de aquí sigue que  $m_{-1} = (n - k)/2$  y  $m_1 = (n + k)/2$ . Como además  $m_{-1}$  y  $m_1$  son números enteros positivos, entonces es preciso que  $n \geq k$ ,  $n$  debe ser impar cuando  $k$  es impar y debe ser par cuando  $k$  sea par. Siguiendo este razonamiento, los primeros términos que contribuyen al  $k$ -ésimo armónico de la entrada son:

$$\begin{aligned} y(t; k\omega_1) = & \hat{y}_k(t; [0, k]^T) + \hat{y}_{k+2}(t; [1, k + 1]^T) + \hat{y}_{k+4}(t; [2, k + 2]^T) + \dots \\ = & \Re \left\{ (V_1)^k \exp(jk\omega_1 t) \left[ \frac{1}{2^{k-1}} H_k[(\omega_1)_k] + \frac{k+2}{2^{k+1}} |V_1|^2 H_{k+2}[-\omega_1, (\omega_1)_{k+1}] + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{(k+4)(k+3)}{2^{k+4}} |V_1|^4 H_{k+4}[-\omega_1, -\omega_1, (\omega_1)_{k+2}] + \dots \left. \right\} . \quad (3.113)$$

Para valores pequeños de la entrada,  $|V_k|$  puede aproximarse por la amplitud del primer término del desarrollo anterior:

$$|V_k| \approx \frac{1}{2^{k-1}} |V_1|^k |H_k[(\omega_1)_k]| \quad (3.114)$$

y la distorsión del  $k$ -ésimo armónico viene dada por:

$$D_k \approx \frac{|V_k|^{k-1} |H_k[(\omega_1)_k]|}{2^{k-1} |H_1(\omega_1)|} . \quad (3.115)$$

Otra forma común de distorsión no lineal es debida a productos de intermodulación entre distintas componentes de una entrada multitono. Este efecto es especialmente crítico cuando la mezcla se efectúa con señales interferentes, en presencia de la señal deseada. Una de las formas de intermodulación más perjudiciales es la que se produce entre dos tonos ( $\omega_1$  y  $\omega_2$ ) de la misma amplitud ( $V_{im}$ ), suficientemente próximos a la frecuencia fundamental ( $\omega$ ), y de la que distan respectivamente  $\delta\omega$  y  $2\delta\omega$  (véase la Figura 3.3). Si  $\omega_1, \omega_2 > \omega$ , entonces el producto de intermodulación de tercer orden  $\mathbf{m} = [0, 0, 1, 0, 2, 0]^T$  produce una mezcla entre los dos tonos con salida en la frecuencia fundamental, i.e.  $2\omega_1 - \omega_2 = \omega$ . Lo mismo sucede, cuando  $\omega_1, \omega_2 < \omega$  con el producto  $2\omega_2 - \omega_1$ . Si la amplitud de los tonos interferentes es muy superior a la de la frecuencia fundamental, este producto de intermodulación podría llegar a enmascarar la señal deseada.

Los diferentes criterios de distorsión por intermodulación están basados en cocientes entre potencias. Existe una multiplicidad de criterios según que estas potencias estén referidas a la entrada o a la salida, o bien se trate de potencias disponibles o promedio. Considérese una excitación multitono con  $Q$  sinusoides y un vector de mezcla  $\mathbf{m} = [m_{-Q}, \dots, m_{-1}, m_1, \dots, m_Q]^T$ . El cociente entre la potencia promedio disipada por la componente de intermodulación  $\omega_{\mathbf{m}}$  en la carga y el producto de las potencias disponibles en el generador a cada una de las frecuencias de entrada, viene dado por:

$$imr_t(\omega_{\mathbf{m}}) = \frac{\langle P_L(\omega_{\mathbf{m}}) \rangle}{\langle P_{disp}(\omega_1) \rangle^{(m_1+m_{-1})} \dots \langle P_{disp}(\omega_Q) \rangle^{(m_Q+m_{-Q})}} , \quad (3.116)$$

donde la potencia promedio disipada en la carga se calcula a través de (3.30):

$$\langle P_L(\omega_{\mathbf{m}}) \rangle = \frac{(n; \mathbf{m})^2}{2^{2n-1}} |V_1|^{2(m_1+m_{-1})} \dots |V_Q|^{2(m_Q+m_{-Q})} |H_n(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{m}})|^2 G_L(\omega_{\mathbf{m}}) , \quad (3.117)$$

siendo  $G_L(\omega)$  la parte real de la admitancia de carga y  $n$  el orden del producto de intermodulación. Las amplitudes  $V_q$  están relacionadas con las potencias disponibles a través de las impedancias de fuente:

$$\langle P_{disp}(\omega_q) \rangle = \frac{|V_q|^2}{8R_s(\omega_q)} \quad (3.118)$$

### III. SERIES DE VOLTERRA

De aquí sigue:

$$imr_t(\omega_m) = 2^{n+1}(n; \mathbf{m})^2 |H_n(\omega_m)|^2 [R_s(\omega_1)]^{(m_1+m-1)} \dots [R_s(\omega_Q)]^{(m_Q+m-Q)} G_L(\omega_m), \quad (3.119)$$

Puesto que  $imr_t(\omega_m)$  tiene dimensión de vatios<sup>(1-n)</sup>, para expresar este cociente en dB se puede reescribir (3.116) en terminos de una potencia de referencia  $\langle P_{ref} \rangle$ :

$$\langle P_{ref} \rangle^{(n-1)} imr_t(\omega_m) = \frac{\frac{\langle P_L(\omega_m) \rangle}{\langle P_{ref} \rangle}}{\left[ \frac{\langle P_{disp}(\omega_1) \rangle}{\langle P_{ref} \rangle} \right]^{(m_1+m-1)} \dots \left[ \frac{\langle P_{disp}(\omega_Q) \rangle}{\langle P_{ref} \rangle} \right]^{(m_Q+m-Q)}} \quad (3.120)$$

Si se expresa la potencia de referencia como  $\langle P_{ref} \rangle = 0,5 |V_{ref}|^2 G_{ref}$ , en función de la amplitud y conductancia de referencia, al tomar  $10 \cdot \log_{10}$  en ambos miembros de (3.120) resulta:

$$IMR_t(\omega_m) = 10 \cdot \log_{10} \left[ \langle P_{ref} \rangle^{(n-1)} imr_t(\omega_m) \right] = 20 \cdot \log_{10} [|V_{ref}|^{(n-1)} |H_n(\omega_m)|] + \\ + 10 \cdot \log_{10} \left\{ 4(n; \mathbf{m})^2 [R_s(\omega_1)]^{(m_1+m-1)} \dots [R_s(\omega_Q)]^{(m_Q+m-Q)} G_L(\omega_m) G_{ref}^{n-1} \right\} \quad (3.121)$$

En la práctica se acostumbra a tomar  $V_{ref} = 1$  V, y para que resulte  $\langle P_{ref} \rangle = 1$  mW la conductancia de referencia se considera igual a  $G_{ref} = 2$  mS. Asumiendo impedancias de  $50 \Omega$  para todas las frecuencias participantes, se obtiene la siguiente relación para las frecuencias fundamental  $\omega_1$  y de intermodulación  $2\omega_1 - \omega_2$ , respectivamente:

$$IMR_t(\omega_1) = 20 \cdot \log_{10} |H_1(\omega_1)| + 6,0 \text{ dB} \quad (3.122a)$$

$$IMR_t(2\omega_1 - \omega_2) = 20 \cdot \log_{10} |H_3(\omega_1, \omega_1, -\omega_2)| - 4,4 \text{ dB} \quad (3.122b)$$

Si la potencia disponible es igual para todos los tonos, entonces la potencia disipada en la carga a la frecuencia de intermodulación se puede expresar, en unidades logarítmicas, a partir de (3.120) como:

$$P_L(\omega_m) = nP_{disp} + IMR_t(\omega_m) \quad (3.123)$$

Obsérvese que (3.123) describe la ecuación de una recta en el plano de  $P_L(\omega_m)$ (dB) frente a  $P_{disp}$ (dB). Una forma relativamente sencilla de caracterizar un proceso de intermodulación en términos de la respuesta lineal de un sistema es el punto de intercepto, en el que el nivel de la potencia disipada en la carga a la frecuencia  $\omega_1$  coincide con el de  $\omega_m$ , esto es:

$$IP_n^i + IMR_t(\omega_1) = nIP_n^i + IMR_t(\omega_m), \quad (3.124)$$

donde  $IP_n^i$  es el punto de intercepto de orden  $n$  referido a la entrada. Al referir la potencia a la salida se obtiene:

$$IP_n^o = \frac{n}{n-1} IMR_t(\omega_1) - \frac{1}{n-1} IMR_t(\omega_m) \quad (3.125)$$



Si se despeja  $IMR_t(\omega_1)$  de (3.125) y se sustituye en (3.123) cuando  $n = 1$ , resulta la expresión:

$$IMR_t(\omega_m) = n [P_L(\omega_1) - P_{disp}] - (n - 1)IP_n^o, \quad (3.126)$$

que llevada nuevamente a (3.123) permite expresar la potencia del producto de intermodulación como función de la potencia disipada en la carga a la frecuencia fundamental y del punto de intercepto:

$$P_L(\omega_m) = nP_L(\omega_1) + (n - 1)IP_n^o \quad (3.127)$$

Suponiendo una potencia de referencia de 1 mW, una tensión de referencia de 1 V y terminaciones de  $50 \Omega$ , el punto de intercepto de tercer orden asociado al producto  $2\omega_1 - \omega_2$  se puede expresar en términos de las funciones de transferencia sustituyendo (3.122a) y (3.122b) en (3.125) tomando  $n = 3$ :

$$IP_3^o(2\omega_1 - \omega_2) = 10 \cdot \log_{10} \frac{|H_1(\omega_1)|^3}{|H_3(\omega_1, \omega_1, -\omega_2)|} + 11,2 \text{ dBm} \quad (3.128)$$

### III.5. Extracción de los coeficientes de las corrientes no lineales

Para la determinación de las funciones de transferencia no lineales, se ha visto que el método de las corrientes no lineales combinado con la entrada armónica expresa los elementos de circuito no lineales mediante una serie de potencias, y que los coeficientes de esta serie determinan en gran medida la respuesta del sistema. Suponiendo que el nivel de la señal es suficientemente pequeño, los errores que se introducen al truncar estas series pueden despreciarse. Centrándonos en la no-linealidad dominante de los dispositivos FET de AsGa, la corriente  $i_{ds}[v_{gs}, v_{ds}]$  admite una expansión en series de Taylor que generalmente puede truncarse a partir de los términos de tercer orden:

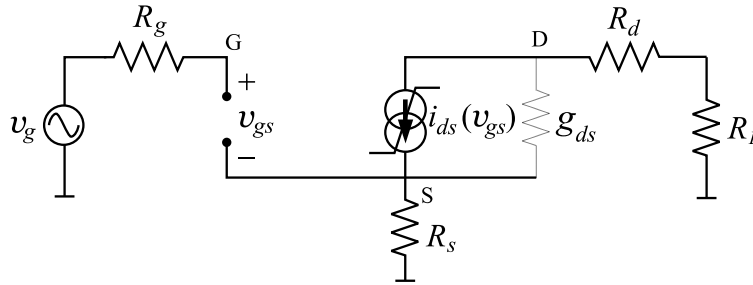
$$\begin{aligned} i_{ds}[v_{gs}, v_{ds}] = & \frac{\partial I_{ds}}{\partial V_{gs}} v_{gs} + \frac{\partial I_{ds}}{\partial V_{ds}} v_{ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I_{ds}}{\partial V_{gs}^2} v_{gs}^2 + \frac{\partial^2 I_{ds}}{\partial V_{gs} \partial V_{ds}} v_{gs} v_{ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I_{ds}}{\partial V_{ds}^2} v_{ds}^2 + \\ & + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 I_{ds}}{\partial V_{gs}^3} v_{gs}^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 I_{ds}}{\partial V_{gs}^2 \partial V_{ds}} v_{gs}^2 v_{ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 I_{ds}}{\partial V_{gs} \partial V_{ds}^2} v_{gs} v_{ds}^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 I_{ds}}{\partial V_{ds}^3} v_{ds}^3. \end{aligned} \quad (3.129)$$

donde  $i_{ds}$ ,  $v_{gs}$ ,  $v_{ds}$  son magnitudes incrementales que expresan las desviaciones de  $I_{ds}$ ,  $V_{gs}$  y  $V_{ds}$  del punto de polarización.

Comparando término a término (3.129) con (3.57b) y (3.103c), los coeficientes  $g_{10} = g_m$  y  $g_{01} = g_{ds}$  representan la transconductancia lineal y conductancia de salida lineal del FET;  $g_{20}$  y  $g_{30}$  describen la variación de la transconductancia con  $V_{gs}$ ;  $g_{02}$  y  $g_{03}$  desempeñan el mismo papel para la conductancia de salida y  $V_{ds}$ . Siguiendo este mismo razonamiento,  $g_{11}$  y  $g_{21}$  representan la dependencia no lineal de primer y segundo orden de  $g_{ds}$  con  $V_{gs}$ , mientras que  $g_{11}$  y  $g_{12}$  describen la dependencia de  $g_m$  con  $V_{ds}$ .

### III. SERIES DE VOLTERRA

El método tradicional para extraer los coeficientes de la corriente está basado en tomar medidas de la característica  $I/V$  con una determinada polarización de drenador y a continuación realizar un ajuste por mínimos cuadrados de  $i_{ds}(v_{gs})$  sobre un polinomio del grado deseado. Aunque este proceso es generalmente suficiente para extraer  $g_m$ , a menudo resulta inadecuado para determinar los coeficientes de orden más elevado, debido a que los valores determinados de esta manera son muy sensibles a las imprecisiones de la medida, errores de redondeo y a la selección de los puntos de medida.



**Figura 3.8:** Extracción de los coeficientes  $g_{k0}$  mediante medidas en RF. Circuito equivalente del FET en VHF polarizado en saturación.

Una manera efectiva de evitar estos problemas consiste en realizar la extracción de coeficientes empleando medidas de RF en lugar de DC. Estas medidas se realizan en VHF, para poder despreciar los elementos parásitos reactivos. Bajo estas condiciones, los niveles de las componentes armónicas de la salida son función exclusivamente de la potencia de entrada, de la resistencia de fuente del FET y de los coeficientes  $g_{kl}$ . Supuesto que el FET está polarizado en saturación, de manera que la dependencia de  $i_{ds}$  con  $v_{ds}$  sea aproximadamente lineal (conductancia de salida  $g_{ds}$ ), en la Figura 3.8 se muestra el circuito equivalente de un FET al que se conecta un generador de RF con una frecuencia del orden de 50 MHz, y terminado en una resistencia de carga  $R_L$ . El valor de esta resistencia se escoge lo suficientemente pequeño comparado con  $1/g_{ds}$ , para que pueda despreciarse la corriente que atraviesa la conductancia de salida, y lo bastante grande como para que sea posible identificar los armónicos de salida sobre un analizador de espectros [16].

Mediante análisis nodal, las tensiones de los nodos G, D y S se pueden expresar mediante la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_g} & 0 & 0 \\ g_m & g_{ds} + \frac{1}{R_d + R_s} & -(g_m + g_{ds}) \\ -g_m & -g_{ds} & g_{ds} + g_m + \frac{1}{R_s} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_g(t) \\ v_d(t) \\ v_s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g/R_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\sum_{k=2}^{\infty} g_{k0} v_{gs}^k(t) \\ \sum_{k=2}^{\infty} g_{k0} v_{gs}^k(t) \end{bmatrix} \quad (3.130)$$

Este sistema se resuelve, despreciando la contribución de  $g_{ds}$ , mediante el método de la entrada armónica, a partir de las corrientes no lineales  $i_{NL2}(t) = g_{20}v_{gs1}(t)^2$  e  $i_{NL3} = g_{30}v_{gs1}(t)^3 + 2g_{20}v_{gs1}(t)v_{gs2}(t)$ . Los tres primeros armónicos de la corriente de drenador

$i_n$  son:

$$i_1 = \frac{g_m V_g}{1 + g_m R_s} \quad (3.131a)$$

$$i_2 = \frac{g_{20}(1 - g_m R_s)V_g^2}{2(1 + g_m R_s)^2} \quad (3.131b)$$

$$i_3 = \frac{(g_{30} - 2g_{20}^2 R_s)(1 - g_m R_s)V_g^3}{4(1 + g_m R_s)^3} \quad (3.131c)$$

A partir de estas expresiones se puede obtener la distorsión armónica de segundo y tercer orden en función de la potencia disponible en el generador  $\langle P_{disp} \rangle = |V_g|^2 / (8R_{in})$ :

$$D_2 = \frac{\langle P_o(100 \text{ MHz}) \rangle}{\langle P_o(50 \text{ MHz}) \rangle} = \frac{2g_{20}^2 R_g (1 - g_m R_s)^2}{g_m^2 (1 + g_m R_s)^2} \langle P_{disp} \rangle \quad (3.132a)$$

$$D_3 = \frac{\langle P_o(150 \text{ MHz}) \rangle}{\langle P_o(50 \text{ MHz}) \rangle} = \left[ \frac{2(g_{30} - 2g_{20}^2 R_s)(1 - g_m R_s)R_g}{g_m(1 + g_m R_s)^2} \right]^2 \langle P_{disp} \rangle^2 \quad (3.132b)$$

Obsérvese que si se dispone de una buena estimación de la transconductancia  $g_m$ , los coeficientes  $g_{20}$  y  $g_{30}$  se pueden determinar mediante la medida de los armónicos en un analizador de espectros sustituyendo en (3.132).

Una variante de este método propuesta por su autor [17] incluye los efectos de  $g_{ds}$  sobre la corriente de salida, mejorando la sensibilidad de la medida al eliminar las restricciones que pesan sobre la resistencia de carga, que puede ahora tomar un valor de  $50 \Omega$ . Si se dispone de la medida del parámetro  $y_{21}$  del FET a la misma frecuencia de 50 MHz, entonces la transconductancia  $g_m$  está relacionada con dicho parámetro a través de la siguiente relación:

$$g_m = |y_{21}| \frac{1 + g_{ds}(R_d + R_s)}{1 - |y_{21}|R_s} \quad (3.133)$$

Resolviendo nuevamente el sistema de ecuaciones (3.130), los parámetros  $g_{20}$  y  $g_{30}$  se extraen de la distorsión armónica de segundo y tercer orden, resultando:

$$g_{20} = g_m(1 + g_m C_R R_s)^2 \sqrt{\frac{D_2}{2R_g} \langle P_{disp} \rangle} \quad (3.134a)$$

$$g_{30} = \frac{2g_{20}^2 C_R R_s}{1 + g_m C_R R_s} \pm \frac{g_m(1 + g_m C_R R_s)^3}{2R_g \langle P_{disp} \rangle} \sqrt{D_3} \quad (3.134b)$$

donde

$$C_R = g_{ds} \left( R_L + R_d + R_s + \frac{1}{g_{ds}} \right) \quad (3.135)$$

Nótese que de los dos valores posibles de  $g_{30}$  sólo uno puede ser correcto. Generalmente uno de ellos es positivo y el otro negativo. Para descartar el valor incorrecto, basta con medir  $g_{20}$  en dos o tres puntos de polarización próximos. Si  $g_{20}$  decrece a medida que aumenta  $V_{gs}$ , entonces el valor correcto es el negativo.

### III. SERIES DE VOLTERRA

---

El principal argumento crítico en contra del método anterior es que, si bien es cierto que en saturación  $g_{ds}$  es prácticamente independiente de  $V_{ds}$ , también exhibe una dependencia con  $V_{gs}$  no despreciable. De hecho, si la distorsión armónica fuese debida exclusivamente a la no-linealidad de  $g_m$  con  $V_{gs}$ , entonces esta distorsión sería independiente de la resistencia de carga, cuando experimentalmente puede comprobarse que no ocurre así. Además, no parece posible explicar estos resultados acudiendo únicamente a la no-linealidad de  $g_{ds}$  con  $V_{ds}$ , debido a que los valores de  $g_{02}$  y  $g_{03}$  que se obtienen por derivación de  $g_{ds}$  respecto de  $V_{ds}$  son muy bajos en saturación [18]. La única justificación posible a este hecho es que para una caracterización precisa de la distorsión no lineal causada por la corriente, no basta con descomponer  $i_{ds}(v_{gs}, v_{ds})$  en dos fuentes de corriente no lineales  $g_m(v_{gs})$  y  $g_{ds}(v_{ds})$ , sino que también es preciso caracterizar los términos cruzados  $g_{11}$ ,  $g_{21}$ ,  $g_{12}$ .

Para la extracción de estos coeficientes, en [9] se propone un procedimiento de caracterización experimental en el que dos frecuencias de VHF  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se inyectan respectivamente en los terminales de puerta y drenador de un FET. Las distintas mezclas de  $\omega_1$  con  $\omega_2$  se miden en un analizador de espectros y se evalúa la relación entre el nivel de salida de cada producto de intermodulación y las potencias de salida a  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .

Si se dispone de los parámetros del circuito equivalente del transistor, incluyendo  $g_{10}$  y  $g_{01}$ , las salidas de las distintas mezclas dependen de las funciones de transferencia no lineales  $H_n(\omega_n)$ . A partir de las medidas de potencia  $\langle P_o(2\omega_1) \rangle$ ,  $\langle P_o(2\omega_2) \rangle$  y  $\langle P_o(\omega_1 + \omega_2) \rangle$  se puede construir un sistema de tres ecuaciones cuyas incógnitas son precisamente  $g_{20}$ ,  $g_{11}$  y  $g_{02}$ . Estos coeficientes de segundo orden se utilizan para predecir la distorsión armónica a  $3\omega_1$  y  $3\omega_2$ , e intermodulación de tercer orden con las mezclas  $2\omega_1 + \omega_2$  y  $\omega_1 + 2\omega_2$ . Al comparar los resultados teóricos con las medidas, se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones con las incógnitas  $g_{30}$ ,  $g_{21}$ ,  $g_{12}$  y  $g_{03}$ .

Dado que el transistor es prácticamente unilateral en la banda de VHF, las variaciones en la tensión de drenador apenas repercuten sobre la entrada del FET. Por este motivo, casi toda la contribución hacia  $\langle P_o(2\omega_2) \rangle$  depende de  $g_{02}$  y hacia  $\langle P_o(3\omega_2) \rangle$  de  $g_{03}$ . A su vez,  $\langle P_o(\omega_1 + \omega_2) \rangle$  y  $\langle P_o(\omega_1 + 2\omega_2) \rangle$  están determinadas fundamentalmente por  $g_{11}$ ,  $g_{02}$ , y  $g_{03}$ ,  $g_{12}$ , respectivamente.

Otras fuentes de distorsión en dispositivos FET de AsGa son las reactancias no lineales. Aunque es habitual considerar sus efectos de importancia secundaria a la corriente  $i_{ds}$ , en realidad ha sido la dificultad para la extracción de los coeficientes de las corrientes no lineales lo que ha determinado que hayan sido muy escasos los intentos por estudiar sus contribuciones reales sobre la distorsión. Uno de los métodos más destacados en la caracterización de la capacidad  $C_{gs}$  realiza la extracción de los parámetros a partir de medidas similares a las que se han comentado con respecto a  $i_{ds}$  [10].

Una práctica común para aplicaciones en la zona de saturación consiste en suponer

### III.5. Extracción de los coeficientes de las corrientes no lineales

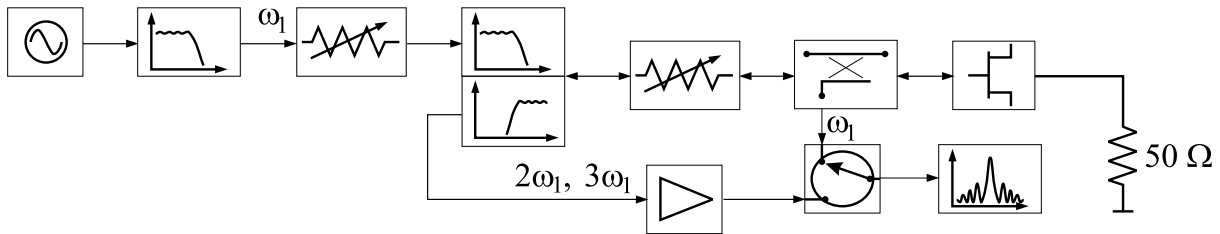
la capacidad  $C_{gd}$  lineal y no asumir dependencia de  $C_{gs}$  con  $V_{gd}$ . Bajo estas condiciones, el desarrollo en series de Taylor de la carga  $q_{gs}$  comprende los siguientes términos:

$$q_{gs}(v_{gs}) = C_{gs_1}v_{gs} + C_{gs_2}v_{gs}^2 + C_{gs_3}v_{gs}^3 + \dots \quad (3.136)$$

Al derivar esta expresión, con respecto a  $v_{gs}$  se obtiene la capacidad no lineal:

$$C_{gs}(v_{gs}) = C_{gs_1} + 2C_{gs_2}v_{gs} + 3C_{gs_3}v_{gs}^2 + \dots \quad (3.137)$$

Para la extracción de los coeficientes  $C_{gs_i}$  se asume que previamente se ha caracterizado la corriente  $i_{ds}$ , junto con los distintos parámetros de su serie de Taylor, por cualquiera de los métodos expuestos en esta sección. Se emplea un sistema de medida similar al mostrado en la Figura 3.8, en el que se aplica una señal a frecuencia  $\omega_1$  al terminal de puerta, terminándose el drenador en una resistencia de  $50 \Omega$ . Sin embargo, existen dos diferencias fundamentales en esta configuración de medida. En primer lugar, las medida de los niveles de potencia de los distintos armónicos se realiza en la puerta, en lugar del drenador, debido a que en este puerto la contribución relativa de la no-linealidad dominante  $i_{ds}$  es menor y no enmascara los efectos de  $C_{gs}$ . En segundo lugar, la frecuencia de trabajo debe incrementarse por encima de 1 GHz para que la no-linealidad de  $C_{gs}$  genere niveles de armónicos que se puedan medir, y por tanto el circuito equivalente del FET debe incluir todos los elementos parásitos. La extracción de estos armónicos se puede realizar con ayuda de un acoplador direccional y un filtro diplexor que separe la frecuencia fundamental de sus armónicos (véase la Figura 3.9).



**Figura 3.9:** Sistema de medida para la extracción de los coeficientes  $C_{gs_i}$ .

Las funciones de transferencia no lineales que relacionan la tensión  $V_{gs}$  con la entrada dependen de las corrientes no lineales de la capacidad  $C_{gs}$ . A su vez, los niveles medidos de los armónicos de la entrada se pueden expresar a partir de estas funciones de transferencia. Teniendo en cuenta que la corriente no lineal de segundo orden se puede expresar como  $i_{CNL_2}(t) = 2C_{gs_2}v_{gs}(t)dv_{gs}(t)/dt$ , para una entrada sinusoidal a frecuencia  $\omega_1$ , el coeficiente de Fourier a  $2\omega_1$  vale:

$$F_2[i_{CNL_2}(t)] = j2\omega_1 2C_{gs_2}V_{gs}(\omega_1)V_{gs}(\omega_1) \quad (3.138)$$

Sustituyendo este resultado en la expresión de la función de transferencia no lineal de segundo orden, se dispone de una ecuación de la que se puede despejar la incógnita

$C_{gs2}$ . Análogamente, la función de transferencia de tercer orden depende de  $C_{gs2}$  y de  $C_{gs3}$ . El coeficiente  $C_{gs3}$  se extrae a partir de la medida de la distorsión armónica de tercer orden y la expresión teórica de la correspondiente función de transferencia no lineal.

#### III.6. Etapas no lineales en cascada

Es común abordar el análisis de un subsistema complejo mediante el estudio de las partes que lo integran, por separado. Con frecuencia es posible descomponer un circuito no lineal en una conexión en cascada de varias subredes no lineales. Como ejemplo puede citarse el caso de un mezclador doblemente balanceado que se conecta a sendos baluns de entrada y salida, como se discutirá en el siguiente capítulo. El problema que se plantea es la manera de combinar las funciones de transferencia de las etapas individuales para obtener la función de transferencia de todo el conjunto.

Para simplificar el desarrollo se considerará que la segmentación del circuito en etapas se realiza en puntos donde se puede ignorar la interacción no lineal, si bien se tendrá en cuenta el acoplamiento lineal entre las etapas. En la Figura 3.10a se muestra una red no lineal  $A$  caracterizada por una impedancia de entrada  $Z_{iA}$  y de salida  $Z_{oA}$ . Cuando se conecta un generador de tensión  $v_{iA}(t)$  y de impedancia interna  $Z_{gA}$ , la red entrega a la carga  $Z_{LA}$  una tensión  $v_{oA}(t)$ . Lo mismo se puede decir de la Figura 3.10b con relación a la red no lineal  $B$ . Si  $A_n(\omega_n)$  y  $B_n(\omega_n)$  representan las funciones de transferencia no lineales de orden  $n$  de las subredes  $A$  y  $B$ , respectivamente, de acuerdo con (3.31) el espectro de las salidas  $v_{oA}(t)$  y  $v_{oB}(t)$  se puede expresar en función de las entradas  $v_{iA}(t)$  y  $v_{iB}(t)$  como sigue:

$$V_{oA}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} A_n(\omega_n) \cdot \delta\left(\omega - \sum \omega_n\right) \prod_{k=1}^n V_{iA}(\omega_k) \exp(j\omega_k t) \frac{d\omega_k}{2\pi} \quad (3.139a)$$

$$V_{oB}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\omega_n) \cdot \delta\left(\omega - \sum \omega_n\right) \prod_{k=1}^n V_{iB}(\omega_k) \exp(j\omega_k t) \frac{d\omega_k}{2\pi} \quad (3.139b)$$

Considérese ahora la Figura 3.10c, en la que se muestra la red  $C$  constituida por la conexión en cascada de las etapas  $A$  y  $B$ . Se considera  $Z_{gC} = Z_{gA}$ ,  $Z_{LA} = Z_{iB}$  y  $Z_{gB} = Z_{oA}$ , de manera que el equivalente de Thèvenin que alimenta la subred  $B$  se caracteriza por una fuente de tensión que está relacionada con la salida de la etapa  $A$  mediante la siguiente transformación de impedancias:

$$V_T(\omega) = \frac{Z_{oA}(\omega) + Z_{iB}(\omega)}{Z_{iB}(\omega)} V_{oA}(\omega) = T(\omega) V_{oA}(\omega) . \quad (3.140)$$

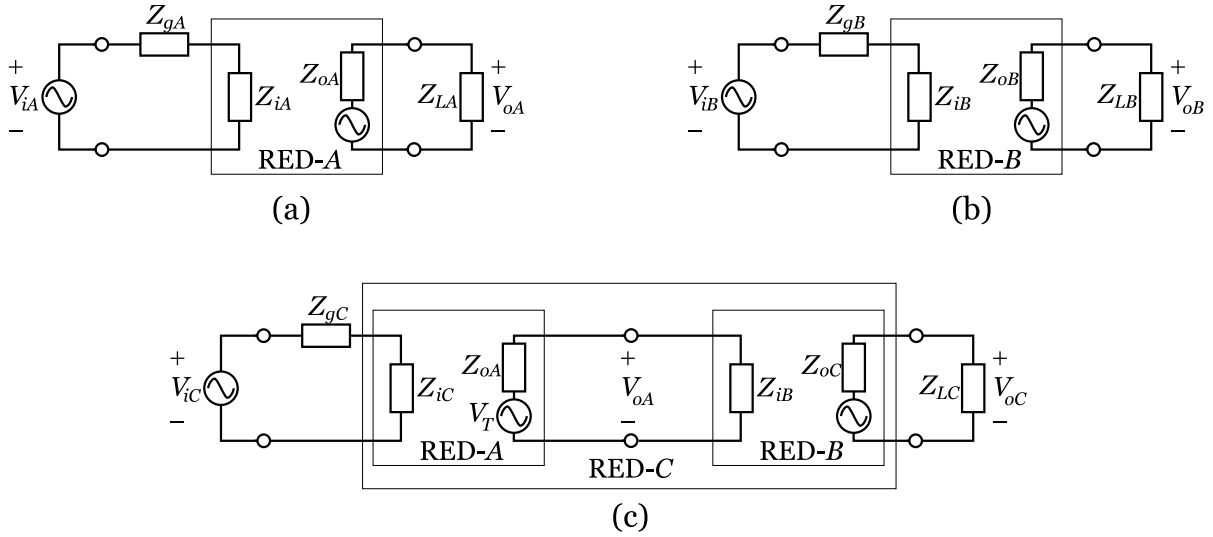


Figura 3.10: Redes no lineales en cascada.

De esta manera es posible representar la salida de  $C$  con referencia a la red  $B$  reemplazando  $V_{iB}(\omega_k)$  en (3.139b) por  $V_T(\omega_k)$ . Al sustituir (3.139), se tiene:

$$V_{oC}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\omega_n) \cdot \delta\left(\omega - \sum \omega_n\right) \prod_{k=1}^n T(\omega_k) V_{iA}(\omega_k) \exp(j\omega_k t) \frac{d\omega_k}{2\pi}. \quad (3.141)$$

A su vez, en virtud de (3.139), también puede escribirse:

$$V_{oC}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} C_n(\omega_n) \cdot \delta\left(\omega - \sum \omega_n\right) \prod_{k=1}^n V_{iC}(\omega_k) \exp(j\omega_k t) \frac{d\omega_k}{2\pi}, \quad (3.142)$$

siendo  $C_n(\omega_n)$  la función de transferencia no lineal de orden  $n$  de la red  $C$ . Como (3.141) y (3.142) deben ser iguales, para despejar  $C_n(\omega_n)$  se puede acudir al método de sondeo armónico utilizando la siguiente entrada:

$$V_{iC}(\omega) = V_{iA}(\omega) = \sum_{k=1}^n \delta(\omega - \omega_k). \quad (3.143)$$

Comenzando por  $k = 1$ , una vez efectuadas las correspondientes operaciones, se obtienen sucesivamente las relaciones:

$$C_1(\omega_1) = A_1(\omega_1)T(\omega_1)B_1(\omega_1) \quad (3.144a)$$

$$C_2(\omega_1, \omega_2) = A_1(\omega_1)A_1(\omega_2)T(\omega_1)T(\omega_2)B_2(\omega_1, \omega_2) + A_2(\omega_1, \omega_2)T(\omega_1 + \omega_2)B_1(\omega_1 + \omega_2) \quad (3.144b)$$

$$C_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \left[ \prod_{i=1}^3 A_1(\omega_i)T(\omega_i) \right] B_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + A_1(\omega_1)A_2(\omega_2, \omega_3)T(\omega_1)T(\omega_2 + \omega_3)B_2(\omega_1, \omega_2 + \omega_3) + A_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)T(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)B_1(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \quad (3.144c)$$

### III. SERIES DE VOLTERRA

En general:

$$C_n(\omega_n) = \sum_k \overline{A_{k_1}(\omega_1, \dots, \omega_{k_1}) \cdots A_{k_M}(\omega_{n-k_M+1}, \dots, \omega_n)} \cdot T \left( \sum_{i=1}^{k_1} \omega_i \right) \cdots T \left( \sum_{j=n-k_M+1}^n \omega_j \right) \cdot B_M \left( \sum_{i=1}^{k_1} \omega_i, \dots, \sum_{j=n-k_M+1}^n \omega_j \right). \quad (3.145)$$

donde el índice  $k$  se refiere a los diferentes conjuntos  $\{k_1, \dots, k_M\}$  tales que

$$\sum_{i=1}^M k_i = n. \quad (3.146)$$

Evidentemente el cálculo de las funciones de transferencia no lineales mediante (3.145) se complica computacionalmente a medida que aumenta el orden.

Dada la importancia del punto de intercepto como forma de caracterizar un proceso de intermodulación, tiene interés conocer la expresión del punto de intercepto de una cascada de subredes en función de los puntos de intercepto de las distintas etapas que la constituyen. En [19] se discute la validez de la expresión clásica del punto de intercepto de una cascada en términos de las tensiones o corrientes de intercepto de las distintas etapas, asumiendo que éstas se combinan en fase. Si en lugar de esta aproximación se admite que las componentes de intermodulación se combinan en potencia, puede escribirse (3.127) en representación no logarítmica:

$$\langle P_L(\omega_m) \rangle = \frac{\langle P_L(\omega_1) \rangle^n}{\langle IP_n^o \rangle^{n-1}}. \quad (3.147)$$

Al igual que en el desarrollo anterior se tiene en cuenta el acoplamiento lineal entre las etapas, y en la situación mostrada en la Figura 3.10 se expresa la potencia disipada en la carga a la frecuencia de intermodulación como:

$$\langle P_L(\omega_m) \rangle = \frac{\langle P_{LA}(\omega_1) \rangle^n}{\langle IP_n^A \rangle^{n-1}} |B_1(\omega_1)|^2 + \frac{\langle P_{LB}(\omega_1) \rangle^n}{\langle IP_n^B \rangle^{n-1}}. \quad (3.148)$$

Se trata de igualar esta expresión con:

$$\langle P_L(\omega_m) \rangle = \frac{\langle P_{LC}(\omega_1) \rangle^n}{\langle IP_n^C \rangle^{n-1}}. \quad (3.149)$$

Para ello se sustituye (3.117) en  $\langle P_{LA}(\omega_1) \rangle$ ,  $\langle P_{LB}(\omega_1) \rangle$  y  $\langle P_{LC}(\omega_1) \rangle$ , tomando  $n = 1$ , en términos de las funciones de transferencia  $A_1(\omega_1)$  y  $B_1(\omega_1)$ . Al cancelar términos, se obtiene la siguiente relación entre puntos de intercepto referidos a la salida:

$$\frac{1}{\langle IP_n^C \rangle} = \left\{ \left( \frac{1}{|B_1(\omega_1)|^2 \langle IP_n^A \rangle} \right)^{n-1} + \left( \frac{1}{\langle IP_n^B \rangle} \right)^{n-1} \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (3.150)$$

Esta expresión es generalizable a la cascada de  $K$  etapas:

$$\frac{1}{\langle IP_n^o \rangle} = \left\{ \sum_{m=1}^K \left( \frac{1}{|J_m(\omega_1)|^2 \langle IP_n^{o,m} \rangle} \right)^{n-1} \right\}^{\frac{1}{n-1}}, \quad (3.151)$$



donde

$$J_m(\omega_1) = \begin{cases} \prod_{l=0}^{K-m-1} H_{1,K-l}(\omega_1) & m < K \\ 1 & m = K \end{cases}, \quad (3.152)$$

siendo  $H_{1,m}(\omega_1)$  la función de transferencia lineal de la  $m$ -ésima etapa.

### III.7. Series dobles de Volterra

La expansión funcional de Volterra se puede extender a circuitos no lineales con dos puertos de entrada. En un artículo temprano de Rice [15], se asume que estos sistemas pueden ser representados mediante una doble serie. Partiendo de esta hipótesis, Rice propone expresiones generales para las componentes sinusoidales de la salida  $y(t)$  cuando las dos entradas  $x_u(t)$  y  $x_v(t)$  son sumas de términos sinusoidales, y del espectro de  $y(t)$  cuando  $x_u(t)$  es un proceso gaussiano estacionario y  $x_v(t) = P \cos(pt)$ . También aplica esta metodología al análisis de la IMD de tercer orden de un convertidor. Se resumen a continuación los resultados fundamentales manteniendo la notación utilizada por su autor.

Si  $x_u(t)$  y  $x_v(t)$  representan las dos entradas, entonces la salida  $y(t)$  se puede expresar mediante la serie doble de Volterra:

$$y(t) = \sum_{n+m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{m!n!} \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} du_m \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dv_n \times \\ \times g_{mn}(u_1, \dots, u_m; u_1, \dots, u_m) \prod_{r=1}^m x_u(t - u_r) \prod_{s=1}^n x_v(t - v_s). \quad (3.153)$$

El operador producto,  $\prod$ , se sustituye por la unidad cuando el número de factores ( $m$  ó  $n$ ) es 0, y cuando  $n$  es cero no se realizan integrales en  $v$ . El *kernel*  $g_{mn}$  es una función simétrica en las variables  $u_1, \dots, u_m$  y  $v_1, \dots, v_n$ , cuya transformada de Fourier ( $m+n$ )-dimensional se expresa como:

$$G_{mn}(\omega_{u1}, \dots, \omega_{um}; \omega_{v1}, \dots, \omega_{vn}) = \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} du_m \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dv_n \times \\ \times g_{mn}(u_1, \dots, u_m; u_1, \dots, u_m) \exp[-(u_1\omega_{u1} + \cdots + u_m\omega_{um} + v_1\omega_{v1} + \cdots + v_n\omega_{vn})t], \quad (3.154)$$

siendo  $G_{00} \equiv 0$  y  $G_{mn}$  una función simétrica en  $\omega_{u1}, \dots, \omega_{um}$  y  $\omega_{v1}, \dots, \omega_{vn}$ .

La determinación de  $G_{mn}$  se puede realizar mediante la extensión del método de la entrada armónica a partir de las ecuaciones del sistema tomando:

$$x_u(t) = \sum_{r=1}^m \exp(j\omega_{ur}t) \quad (3.155a)$$

$$x_v(t) = \sum_{s=1}^n \exp(j\omega_{vs}t), \quad (3.155b)$$

### III. SERIES DE VOLTERRA

siendo todas las frecuencias inconmensurables, y hallando el coeficiente que multiplica a  $\exp[j(\omega_{u_1} + \dots + \omega_{u_m} + \omega_{v_1} + \dots + \omega_{v_n})t]$  en la expansión de  $y(t)$ . Este coeficiente es  $G_{mn}(\omega_{u_1}, \dots, \omega_{u_m}; \omega_{v_1}, \dots, \omega_{v_n})$ . Si  $n = 0$  y  $m > 0$ , entonces  $G_{mn}(\omega_{u_1}, \dots, \omega_{u_m};)$  es el coeficiente de  $\exp[j(\omega_{u_1} + \dots + \omega_{u_m})t]$  en la expansión de  $y(t)$  cuando  $x_v(t) \equiv 0$  y  $x_u(t)$  viene dada por (3.155a).

Existe cierto parecido entre la serie doble de Volterra (3.153) y una serie simple de Volterra para la entrada particular  $x(t) = x_u(t) + x_v(t)$ , en un sistema de una sola entrada. En este caso, se tiene:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} du_k \hat{g}_k(u_1, \dots, u_k) \prod_{r=1}^k [x_u(t - u_r) + x_v(t - u_r)]. \quad (3.156)$$

Cuando se expande el producto y se utiliza la simetría de  $\hat{g}_k$ , éste puede reescribirse como:

$$\sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \prod_{r=1}^m x_u(t - u_r) \prod_{s=1}^{k-m} x_v(t - u_{m+s}). \quad (3.157)$$

Haciendo el cambio de variable  $n = k - m$  y llamando  $u_{m+s} = v_s$  para  $s = 1, \dots, n$ , (3.156) adopta la misma forma que (3.153) cuando  $\hat{g}_{m+n}(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n)$  se reemplaza por  $g_{mn}(u_1, \dots, u_m; v_1, \dots, v_n)$ . Esta propiedad se puede extender a una entrada  $x(t) = x_u(t) + x_v(t)$ , con  $x_u(t)$  y  $x_v(t)$  dadas por (3.155a) y (3.155b), simplemente reemplazando  $\hat{G}_{m+n}$  por  $G_{mn}$  e insertando un punto y coma en el lugar apropiado de la cadena de argumentos.

En las ecuaciones (138)-(140) de [5] se demuestra que si la entrada  $x(t)$  de un sistema no lineal está formada por la combinación de  $\mu$  sinusoides de frecuencias inconmensurables:

$$x(t) = \sum_{r=1}^{\mu} P_r \cos(\omega_r t), \quad (3.158)$$

entonces la componente de  $y(t)$  en  $\exp[(N_1\omega_1 + \dots + N_{\mu}\omega_{\mu})t]$ ,  $N_r \geq 0$ , se puede expresar como:

$$\sum_{l_1=0}^{\infty} \dots \sum_{l_{\mu}=0}^{\infty} \prod_{r=1}^{\mu} \left[ \frac{(P_r/2)^{N_r+2l_r}}{(N_r + l_r)! l_r!} \right] G_n[(\omega_1)_{N_1+l_1}, (-\omega_1)_{l_1}, \dots, (\omega_{\mu})_{N_{\mu}+l_{\mu}}, (-\omega_{\mu})_{l_{\mu}}], \quad (3.159)$$

donde  $G_0 \equiv 0$  y el subíndice  $n$  toma el valor:

$$n = \sum_{r=1}^{\mu} (N_r + 2l_r). \quad (3.160)$$

Cuando se consideran dos entradas sinusoidales:

$$x_u(t) = \sum_{r=1}^{\mu} P_r \cos(\omega_r t), \quad x_v(t) = \sum_{r=\mu+1}^{\lambda} P_r \cos(\omega_r t), \quad \lambda = \mu + \nu, \quad (3.161)$$

en virtud de la propiedad (3.157), la componente de  $y(t)$  en  $\exp[j(N_1\omega_1 + \dots + N_{\lambda}\omega_{\lambda})t]$ ,  $N_r \geq 0$ , puede escribirse como:

$$\sum_{l_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{l_\lambda=0}^{\infty} \prod_{r=1}^{\lambda} \left[ \frac{(P_r/2)^{N_r+2l_r}}{(N_r+l_r)!l_r!} \right] \times G_{mn} [(\omega_1)_{N_1+l_1}, (-\omega_1)_{l_1}, \dots, (\omega_\mu)_{N_\mu+l_\mu}, (-\omega_\mu)_{l_\mu}; (\omega_{\mu+1})_{N_{\mu+1}+l_{\mu+1}}, (-\omega_{\mu+1})_{l_{\mu+1}}, \dots, (\omega_\lambda)_{N_\lambda+l_\lambda}, (-\omega_\lambda)_{l_\lambda}] . \quad (3.162)$$

En (3.162)  $G_{00} \equiv 0$ , y cuando  $N + l = 0$  los correspondientes argumentos no aparecen en  $G_{mn}$ . Los valores de  $m$  y  $n$  son:

$$m = \sum_{r=1}^{\mu} (N_r + 2l_r), \quad n = \sum_{s=\mu+1}^{\lambda} (N_s + 2l_s). \quad (3.163)$$

En el caso de que cualquiera de los coeficientes  $N_r$  sea negativo, la componente de salida asociada se determina cambiando el signo de  $\omega_r$  en (3.162). La generalización de (3.162) a un sistema no lineal con tres o más puertos de entrada es inmediata.

Por comodidad será de gran ayuda reescribir algunas de las expresiones anteriores con una notación más en consonancia con la utilizada a lo largo de esta Tesis. Bajo esta premisa, se presentan a continuación algunos de los resultados ya obtenidos por Rice, junto con algunas aportaciones propias.

La salida  $y(t)$  de un sistema no lineal con dos entradas  $x(t)$  y  $z(t)$  se expresa como una doble serie de componentes de salida de orden  $n + m$ , o equivalentemente, de orden  $n$  con respecto a la entrada  $x(t)$  y  $m$  con respecto a  $z(t)$ :

$$y(t) = \sum_{n+m \geq 1} \sum_{n+m \geq 1}^{\infty} y_{nm}(t), \quad (3.164)$$

donde

$$y_{n0}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_{n0}(\boldsymbol{\tau}_n) \prod_{k=1}^n x(t - \tau_k) d\tau_k \quad (3.165a)$$

$$y_{0m}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_{0m}(\boldsymbol{\zeta}_m) \prod_{l=1}^m z(t - \zeta_l) d\zeta_l \quad (3.165b)$$

e

$$y_{nm}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_{nm}(\boldsymbol{\tau}_n; \boldsymbol{\zeta}_m) \prod_{k=1}^n x(t - \tau_k) d\tau_k \prod_{l=1}^m z(t - \zeta_l) d\zeta_l, \quad (n, m \neq 0). \quad (3.166)$$

$\boldsymbol{\tau}_n$  y  $\boldsymbol{\zeta}_m$  son los vectores  $[\tau_1, \dots, \tau_n]^T$  y  $[\zeta_1, \dots, \zeta_m]^T$ , respectivamente, y el *kernel*  $h_{nm}(\boldsymbol{\tau}_n; \boldsymbol{\zeta}_m)$  es la respuesta impulsiva no lineal de orden  $n + m$ . Denotando su transformada de Fourier por  $H_{nm}(\boldsymbol{\omega}_n; \boldsymbol{\xi}_m)$  se puede reescribir (3.166) como sigue:

$$y_{nm}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} H_{nm}(\boldsymbol{\omega}_n; \boldsymbol{\xi}_m) \prod_{k=1}^n X(\omega_k) \exp(j\omega_k t) \frac{d\omega_k}{2\pi} \prod_{l=1}^m Z(\xi_l) \exp(j\xi_l t) \frac{d\xi_l}{2\pi} \quad (3.167)$$

siendo  $\boldsymbol{\omega}_n$  y  $\boldsymbol{\xi}_m$  los vectores  $[\omega_1, \dots, \omega_n]^T$  y  $[\xi_1, \dots, \xi_m]^T$ , respectivamente. La ecuación (3.167) permite expresar el término de orden  $(n + m)$  de la expansión funcional (3.164) en función del espectro de las entradas  $X(\omega)$  y  $Z(\omega)$ .

### III. SERIES DE VOLTERRA

En el caso particular en que una de las dos entradas sea de tipo sinusoidal (como por ejemplo sucede con un mezclador, con respecto a la entrada del OL), (3.167) adopta la siguiente expresión al sustituir  $x(t) = V_p \cos(\omega_p t)$ :

$$y_{nm}(t) = \left(\frac{V_p}{2}\right)^n \sum_{\mu=0}^n \frac{n!}{(n-\mu)!\mu!} \exp[j(n-2\mu)\omega_p t] \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} H_{nm}[(\omega_p)_{n-\mu}, (-\omega_p)_{\mu}; \xi_m] \prod_{l=1}^m Z(\xi_l) \exp(j\xi_l t) \frac{d\xi_l}{2\pi}. \quad (3.168)$$

Seleccionando de (3.168) aquellos términos que satisfacen  $n - 2\mu = N$  y sumando todos ellos, se puede expresar la salida asociada a la componente  $\exp(jN\omega_p t)$  como:

$$y(t|N\omega_p) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}_m(N\omega_p t; \xi_m) \prod_{l=1}^m Z(\xi_l) \exp(j\xi_l t) \frac{d\xi_l}{2\pi} \quad (3.169)$$

donde:

$$\hat{H}_m(N\omega_p t; \xi_m) = \exp(jN\omega_p t) \sum_{\mu=0}^m \left(\frac{V_p}{2}\right)^{2\mu+N} \frac{(2\mu+N)!}{(\mu+N)!\mu!} H_{(2\mu+N)m}[(\omega_p)_{\mu+N}, (-\omega_p)_{\mu}; \xi_m] \quad (3.170)$$

puede interpretarse como la función de transferencia no lineal de un sistema que varía en el tiempo con una frecuencia  $N\omega_p$ .

La ecuación (3.169) representa una expresión general para la salida de un sistema con dos entradas, de las que una de ellas es sinusoidal, en función del espectro  $Z(\omega)$  de la otra entrada. En muchos casos la salida deseada está asociada a la frecuencia fundamental, i.e.  $N = 1$ , y en este caso sólo habría que tomar en consideración las funciones de transferencia no lineales  $H_{nm}[(\omega_p)_{\mu+1}, (-\omega_p)_{\mu}; \xi_m]$ , con  $n$  impar, para evaluar la salida. Es más, para señales de pequeña amplitud en el segundo puerto de entrada, sólo es necesario extender la suma (3.169) a unos pocos términos.

Si además la otra entrada es sinusoidal, i.e.  $z(t) = V_q \cos(\omega_q t)$ , entonces puede expresarse  $y_{nm}(t)$  mediante la serie doble

$$y_{nm}(t) = \left(\frac{V_p}{2}\right)^n \left(\frac{V_q}{2}\right)^m \sum_{\mu=0}^n \sum_{\lambda=0}^m \frac{n!}{(n-\mu)!\mu!} \cdot \frac{m!}{(m-\lambda)!\lambda!} \times \\ \times \exp\{j[(n-2\mu)\omega_p + (m-2\lambda)\omega_q]t\} H_{nm}[(\omega_p)_{n-\mu}, (-\omega_p)_{\mu}; (\omega_q)_{m-\lambda}, (-\omega_q)_{\lambda}]. \quad (3.171)$$

Para la obtención de las funciones de transferencia no lineales de orden  $n + m$ , el método de la entrada armónica es generalizable a sistemas no lineales con dos entradas. En este caso se consideran las entradas  $x(t)$  y  $z(t)$  como sumas de exponenciales complejas de frecuencias inconmensurables:

$$x(t) = \exp(j\omega_{p1}t) + \exp(j\omega_{p2}t) + \cdots + \exp(j\omega_{pn}t) \quad (3.172a)$$

$$z(t) = \exp(j\omega_{q1}t) + \exp(j\omega_{q2}t) + \cdots + \exp(j\omega_{qm}t) \quad (3.172b)$$

Sustituyendo las respectivas transformadas de Fourier en (3.167), la función de transferencia no lineal simetrizada de orden  $(n+m)$ ,  $\overline{H_{nm}(\omega_{pn}; \omega_{qm})}$  se puede obtener analíticamente como el coeficiente de  $n!m! \exp[j(\omega_{p1} + \omega_{p2} + \dots + \omega_{pn} + \omega_{q1} + \omega_{q2} + \dots + \omega_{qm})t]$ .

En el caso particular de  $m = 0$  exponenciales en la segunda entrada, i.e.  $z(t) = 0$ , el resultado coincide con las funciones de transferencia no lineales de sistemas de una sola entrada, i.e.  $H_{n0}(\omega_{pn})$ .

En cuanto al método de las corrientes no lineales, es posible encontrar formas de recursión similares a (3.95)-(3.97) ó (3.98)-(3.100) para describir las componentes de orden  $n+m$  de las corrientes no lineales:

$$i_{NLnm}(t) = \frac{1}{n!m!} \frac{\partial^{n+m}}{\partial \alpha^n \partial \beta^m} i_{NL}(t) \Big|_{\alpha=\beta=0}. \quad (3.173)$$

En este caso, las componentes que contribuyen a la corriente de orden  $n+m$  generada por una conductancia no lineal, vienen dadas por:

$$i_{NLnm} = \sum_{l=2}^{n+m} g_{0l} u_{nm,l}, \quad (3.174)$$

donde

$$u_{nm,l} = \sum_{j=0}^{n+m-1} \sum_{i=0}^{n+m-j-1} u_{ij} u_{(n-i)(m-j),l-1}, \quad (3.175)$$

y  $u_{nm,1} = u_{nm}$ . La contribución de una no-linealidad dependiente se puede sistematizar de forma similar, con ayuda de la siguiente expresión:

$$i_{NLnm}(t) = \sum_{k=1}^{n+m-1} \sum_{l=1}^{n+m-k} g_{kl} \Phi_{nm,kl}, \text{ siendo } \Phi_{nm,kl} = \sum_{j=0}^{n+m-l} \sum_{i=k-j}^{n+m-l-j} v_{ij,k} u_{(n-i)(m-j),l}. \quad (3.176)$$

Esta sección será revisitada y ampliada en el Capítulo V en el contexto del análisis de sistemas variantes en el tiempo, donde se verá su relación con el método de gran señal/pequeña señal y se aplicará al análisis de mezcladores FET.

## Bibliografía

- [1] N. Wiener, "Response of a nonlinear device to noise," Tech. Rep. V-16S, M.I.T. Radiation Lab., abr. 1942.
- [2] S. Narayanan, "Transistor distortion analysis using Volterra series representation," *The Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 46, p. 991, 1967.
- [3] J. A. García, M. L. de la Fuente, J. C. Pedro, N. B. de Carvalho, Y. Newport, A. Mediavilla, y A. Tazón, "Time-varying Volterra-series analysis of spectral regrowth and noise power ratio in FET mixers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 49, No. 3, pp. 545-549, mar. 2001.

- [4] A. Ahmed, S. S. Islam, y A. F. M. Anwar, "A temperature-dependent nonlinear analysis of GaN/AlGaN HEMTs using Volterra series," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 49, No. 9, pp. 1518–1524, sep. 2001.
- [5] E. Bedrosian y S. O. Rice, "The output properties of Volterra systems driven by harmonic and gaussian inputs," *Proc. IEEE*, Vol. 59, pp. 1688–1707, dic. 1971.
- [6] J. J. Bussgang, L. Ehrman, y J. W. Graham, "Analysis of nonlinear systems with multiple inputs," *Proc. IEEE*, Vol. 62, No. 8, pp. 1088–1119, ago. 1974.
- [7] R. A. Minasian, "Intermodulation distortion analysis of MESFET amplifiers using the Volterra series representation," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-28, No. 1, pp. 1–8, ene. 1980.
- [8] G. M. Lambrianou y C. S. Aitchison, "Optimization of third-order intermodulation product and output power from an X-band MESFET amplifier using Volterra series analysis," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-33, No. 12, pp. 1395–1403, dic. 1985.
- [9] J. C. Pedro y J. Pérez, "Accurate simulation of GaAs MESFET's intermodulation distortion using a new drain-source current model," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 42, No. 1, pp. 25–33, ene. 1994.
- [10] J. A. García, A. Mediavilla Sánchez, J. C. Pedro, N. B. de Carvalho, A. Tazón Puente, y J. L. García, "Characterizing the gate-to-source nonlinear capacitor role on GaAs FET IMD performance," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 46, No. 12, pp. 2344–2354, dic. 1998.
- [11] N. B. de Carvalho y J. C. Pedro, "Multitone frequency-domain simulation of nonlinear circuits in large- and small-signal regimes," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 46, No. 12, pp. 2016–2023, dic. 1998.
- [12] S. A. Maas, "Volterra analysis of spectral regrowth," *IEEE Microwave and Guided Waves Letters*, Vol. 7, No. 7, pp. 192–193, jul. 1997.
- [13] D. D. Weiner y J. F. Spina, *Sinusoidal Analysis and Modeling of Weakly Nonlinear Circuits*. Van Nostrand Reinhold, 1980.
- [14] S. A. Maas, *Nonlinear Microwave Circuits*. Norwood (MA): Artech House, 1988.
- [15] S. O. Rice, "Volterra systems with more than one input port-distortion in a frequency converter," *The Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 52, No. 8, pp. 1255–1270, oct. 1973.
- [16] S. A. Maas y A. Crosmun, "Modeling the gate I/V characteristic of a GaAs MESFET for Volterra-series analysis," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 37, No. 7, pp. 1134–1136, jul. 1989.

- [17] S. A. Maas y D. Neilson, "Modeling MESFET's for intermodulation analysis of mixers and amplifiers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 38, No. 12, pp. 1964–1971, dic. 1990.
- [18] A. A. Crosmun y S. A. Maas, "Minimization of intermodulation distortion in GaAs MESFET small-signal amplifiers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 32, No. 9, pp. 1411–1417, Sep 1989.
- [19] S. A. Maas, "Third-order intemodulation distortion in cascaded stages," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, Vol. 5, No. 6, pp. 189–191, jun. 1995.





## Capítulo IV

# Estructuras balanceadas para mezcladores

Una topología ampliamente utilizada en alta frecuencia es la estructura balanceada. Los circuitos que incluyen un solo dispositivo de estado sólido a menudo presentan limitaciones que pueden ser problemáticas en ciertas aplicaciones. Una de ellas es la potencia de salida, ya que no siempre se puede alcanzar el nivel suficiente de potencia o rango dinámico deseado con un solo dispositivo. En otras situaciones se generan productos de intermodulación y respuestas espurias que degradan el comportamiento, y que no pueden ser eliminadas mediante un simple filtrado. Algunos de estos problemas se pueden resolver conectando dos o más dispositivos en una configuración balanceada. Los amplificadores diferenciales y los mezcladores simple y doblemente balanceados, con diodos o transistores, son ejemplos de circuitos con más de un dispositivo, y con propiedades de simetría y entradas equilibradas. Los mezcladores simplemente terminados son muy atractivos por su sencillez y comportamiento, aunque su diseño no está exento de desventajas. Uno de los principales problemas es la dificultad de inyectar el OL al tiempo que se permite la separación de señales de OL, RF y FI. Sin la ayuda de un filtro diplexor, balun o estructura híbrida, la dificultad de este problema crece a medida que aumenta la anchura de banda. Además de presentar soluciones a este problema, los mezcladores balanceados ofrecen ventajas considerables sobre los simplemente terminados, tales como la cancelación de ciertos productos de intermodulación, respuestas espurias o ruido de OL. El rango dinámico también puede ser mayor, debido a que la señal de RF se reparte entre varios dispositivos, aunque a expensas de una mayor potencia de OL, y en el caso de utilizar baluns pasivos, un incremento de las pérdidas de conversión.

La combinación de los dispositivos en una estructura balanceada se puede hacer de varias maneras. En algunos casos la técnica más sencilla consiste en conectar dos o más transistores en serie o en paralelo. En otros casos, la interconexión directa es poco práctica, debido a que requieren dispositivos idénticos y a que puede dar lugar a cambios en la impedancia, y en su lugar se prefiere acudir a circuitos acopladores,

híbridos o divisores de potencia. Estos elementos proporcionan un aislamiento mutuo entre dispositivos y preservan los niveles de impedancia a la entrada y a la salida. En ciertos casos se utilizan técnicas mixtas, utilizando híbridos en unos puertos e interconexión directa en otros.

A pesar de las superiores prestaciones que se pueden alcanzar con las estructuras balanceadas en microondas, son muy escasas las referencias que se pueden citar sobre el análisis no lineal de las mismas, debido quizás al aumento del número de ecuaciones en circuitos con más de un dispositivo no lineal. La simetría de la estructuras balanceadas puede ser aprovechada para simplificar su estudio, reduciendo el análisis de múltiples transistores al de una etapa con un solo dispositivo, sobre lo que sí existe una amplia literatura [1, 2].

En este capítulo se exploran procedimientos sistemáticos para el análisis de circuitos balanceados que contienen dispositivos no lineales. En la primera parte se resumen las estructuras que se han utilizado tradicionalmente como elementos acopladores e híbridos para mezcladores FET balanceados, utilizando fundamentalmente el material expuesto por Chang [3] y Maas [4]. A continuación se presentan las propiedades de la componentes acopladas por estas estructuras, completando la descripción de Maas [5] con ciertas propiedades de simetría. La última parte del capítulo se dedica al estudio de baluns activos, y como aportaciones propias de esta Tesis, se presenta el análisis sistemático de un par diferencial, detallando el método que aparece en [6], y que se ha aplicado al diseño de los baluns de OL y FI de un mezclador MMIC.

### IV.1. Elementos acopladores, híbridos y baluns

Los acopladores híbridos son estructuras pasivas, recíprocas, lineales, de cuatro puertos, que constituyen bloques fundamentales para los mezcladores balanceados y que idealmente no presentan pérdidas. Los cuatro puertos están adaptados y la potencia que se inyecta en cualquiera de ellos se reparte entre otros dos, a partes iguales, quedando el puerto restante aislado. Se puede demostrar, atendiendo a las propiedades de los parámetros  $S$ , que sólo existen dos tipos de híbridos: de  $90^\circ$  o cuadratura y de  $180^\circ$ . En el primer tipo, la diferencia de fase entre las salidas del acoplador es siempre de  $90^\circ$ , con independencia de cuál sea el puerto de entrada. Por tanto, la matriz de dispersión se puede expresar como:

$$S_{90} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -j & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -j \\ -j & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -j & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

En un híbrido de  $180^\circ$  cuando se inyecta potencia por el puerto 1, ésta sale por los puertos 3 y 4 con la misma fase y 3 dB menos, quedando aislado el puerto 2. Por el

contrario, si se excita el puerto 4, la diferencia de fase entre los puertos 1 y 2 es de  $180^\circ$ . Este comportamiento es recíproco, lo que se traduce en la siguiente matriz de parámetros  $S$ :

$$\mathbf{S}_{180} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Además de servir como divisores de potencia, los acopladores híbridos se pueden utilizar como combinadores si se inyecta potencia por dos puertos mutuamente aislados. En el caso particular del híbrido de  $180^\circ$ , es común referirse a los puertos 3 y 4 como puerto suma (sigma) y puerto diferencia (delta), respectivamente, debido a que la salida por el puerto 3 es proporcional a la suma en fase de las entradas por los puertos 1 y 2, mientras que por el puerto 4 la salida es proporcional a la diferencia.

Los híbridos reales sólo exhiben características aproximadamente ideales en una anchura de banda limitada. Los aspectos más importantes de un acoplador real en cuanto a su respuesta no ideal son el aislamiento entre puertos mutuamente aislados, el balance de amplitud y fase entre las salidas, y las pérdidas por retorno y de inserción. Algunas de estas magnitudes no son independientes, como sucede con la adaptación y el aislamiento. La dependencia en frecuencia del balance, aislamiento y adaptación sirve para establecer la anchura de banda de un híbrido real.

#### IV.1.1. Híbridos de $90^\circ$

##### Acopladores de líneas acopladas

Una de las realizaciones más populares de acopladores de cuadratura es la formada por un par de líneas microtira acopladas, de longitud  $\lambda/4$ , como se muestra en la Figura 4.1a. Al tratarse de una estructura multiconductora, sobre ella se pueden excitar dos modos cuasi-TEM, denominados modo par y modo impar. El diseño de estos acopladores comprende la determinación de la anchura y separación entre las líneas, de las que depende la impedancia característica de los modos par e impar ( $Z_{0e}$  y  $Z_{0o}$  respectivamente). Para que la pareja de líneas acopladas funcione como un acoplador, se debe verificar:

$$\sqrt{Z_{0e}Z_{0o}} = Z_0, \quad (4.3)$$

siendo  $Z_0$  la impedancia característica de referencia. El coeficiente de acoplamiento,  $c$ , se puede expresar como:

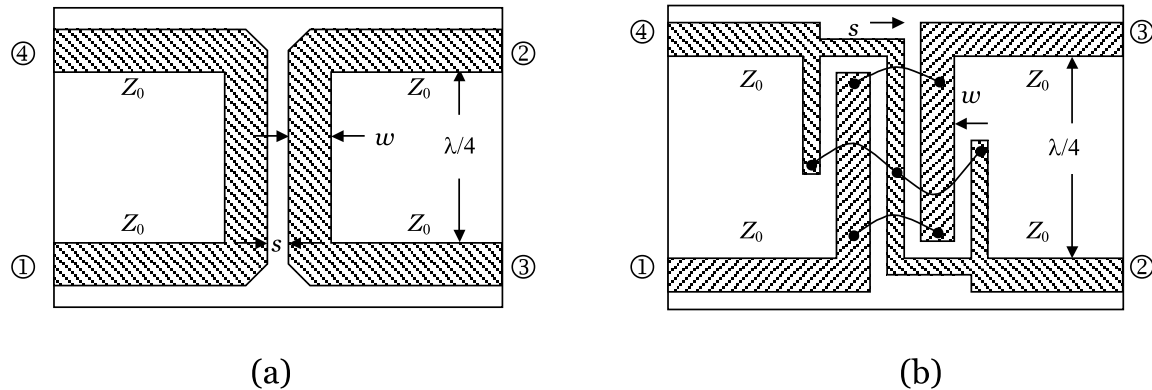
$$c = \frac{Z_{0e} - Z_{0o}}{Z_{0e} + Z_{0o}}. \quad (4.4)$$

Sustituyendo (4.4) en (4.3) se obtienen las siguientes ecuaciones de diseño:

$$Z_{0e} = Z_0 \sqrt{\frac{1+c}{1-c}}, \quad Z_{0o} = Z_0 \sqrt{\frac{1-c}{1+c}}. \quad (4.5)$$

#### IV. ESTRUCTURAS BALANCEADAS PARA MEZCLADORES

De esta manera, fijada la especificación de acoplamiento  $C$  (dB) =  $-20 \log c$ , se obtienen las impedancias características de los modos par e impar. La determinación de las dimensiones físicas a partir de  $Z_{0e}$  y  $Z_{0o}$  depende de la tecnología utilizada, y se puede acudir a métodos numéricos o modelos semiempíricos como los de [7].



**Figura 4.1:** Acopladores de líneas acopladas. (a) Líneas microtira paralelas acopladas. (b) Acoplador Lange.

Desafortunadamente es virtualmente imposible obtener un acoplamiento de 3 dB ( $c = 0,5$ ) con un único par de líneas acopladas, incluso en sustratos de alta constante dieléctrica (como el AsGa), debido a que el espaciado entre las microtiras es demasiado pequeño. Además, este acoplador tiene la desventaja de que los puertos de salida se encuentran en extremos opuestos, lo que dificulta el mantenimiento de la simetría en los diseños. Como solución a estos problemas se acude a estructuras interdigitales, como ocurre con el acoplador Lange (véase la Figura 4.1b), que permite acoplamientos en el rango de 1 a 6 dB mediante la disposición de cuatro o más líneas en paralelo. Además, la realización de puentes de soldadura entre las líneas permite que los puertos de salida se encuentren en el mismo lado de la estructura. El diseño de un acoplador Lange se puede reducir al de un acoplador de dos líneas expresando las capacidades distribuidas del circuito de cuatro líneas en función de las capacidades del par de líneas acopladas simples [8].

A pesar de que la geometría de estos acopladores está ligada a la dimensión característica  $\lambda/4$ , el comportamiento de la fase se mantiene próximo a  $90^\circ$  en una anchura de banda considerable. El balance de amplitud, aunque no es tan perfecto, es también respetable. En aplicaciones en las que no es crítico el balance de amplitud, se pueden utilizar estos acopladores en una anchura de banda muy amplia, a menudo superior a una octava. En caso necesario también se pueden sintetizar múltiples secciones de acopladores  $\lambda/4$  para alcanzar una respuesta de banda ancha.

**Acoplador branch-line**

Aunque ocupa una superficie mayor que los acopladores de líneas acopladas y en tecnología microtira se limita a aplicaciones de baja frecuencia, el acoplador branch-line está muy extendido como híbrido para la realización de mezcladores balanceados, debido a que es muy fácil de diseñar, presenta muy bajas pérdidas, las tolerancias en las dimensiones durante su fabricación pueden ser mayores, y porque se puede realizar sobre substratos económicos.

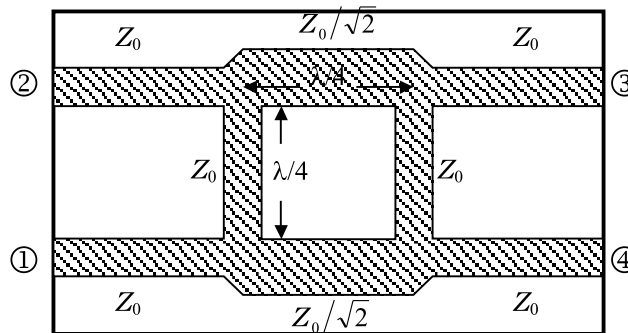
El acoplamiento se realiza intercalando líneas de transmisión de longitud  $\lambda/4$  entre dos líneas de transmisión principales, según se indica en la Figura 4.2. Aunque su anchura de banda es relativamente pequeña, alrededor del 10 %, se puede lograr el funcionamiento en banda ancha intercalando líneas de transmisión periódicamente, cada  $\lambda/4$ . En el caso de un acoplador branch-line de una sola sección, se alcanza un acoplamiento de 3 dB cuando la impedancia característica de las líneas principales es  $Z_0\sqrt{2}$ , mientras que para las ramas secundarias debe tomarse  $Z_0$ .

**IV.1.2. Híbridos de 180°**

**Transformador híbrido**

Se puede construir un híbrido de 180° a partir de un transformador o bobina de tres devanados enrollados sobre un núcleo o toroide de ferrita. Aunque el funcionamiento de una bobina híbrida depende de numerosos factores como la longitud y tamaño de los hilos, tipo de material del núcleo o la relación de vueltas entre devanados, existen transformadores que pueden operar desde 10 mHz hasta 4 GHz, siendo la respuesta de banda ancha una de sus principales ventajas.

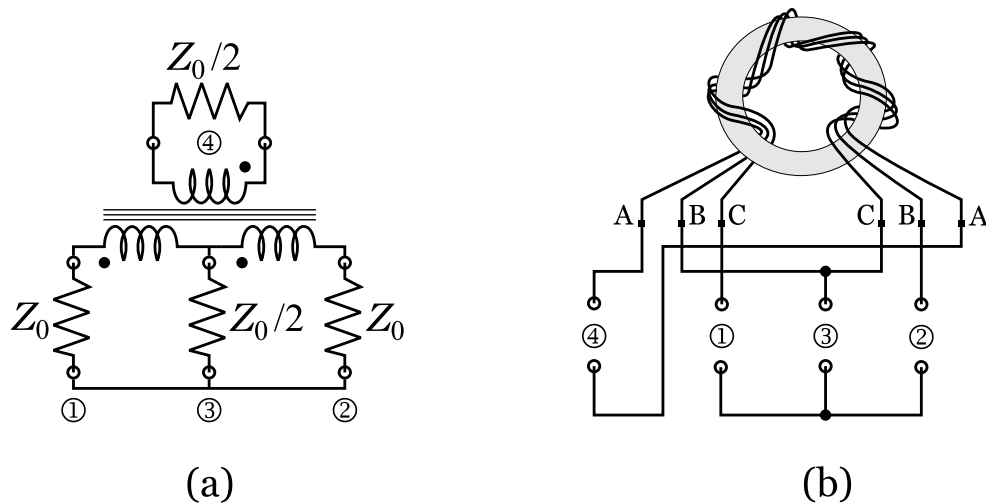
En la configuración mostrada en la Figura 4.3a, para que todos los puertos estén adaptados es preciso que la impedancia de terminación de los puertos 3 y 4 sea la mitad que la de 1 y 2. Si se admite que el devanado del puerto 4 es el primario, y que todos los devanados tienen el mismo número de vueltas, cuando se excita el primario,



**Figura 4.2:** Acoplador branch-line en tecnología microtira.

#### IV. ESTRUCTURAS BALANCEADAS PARA MEZCLADORES

la potencia se reparte entre los puertos 1 y 2. Debido a la simetría de los devanados secundarios y a la posición del punto de referencia, no se induce tensión en el puerto 3, que queda aislado del 4. Análogamente, cuando se inyecta potencia por el puerto 3, la corriente se reparte entre los devanados secundarios, y estos inducen tensiones en el primario que se encuentran en contrafase y se cancelan al sumarse, quedando el puerto 4 aislado del 3. Si se excita el puerto 2, la misma corriente que circula por el devanado secundario junto a este puerto, se induce en el primario. A su vez, esta corriente es inducida en el tercer devanado pero en sentido contrario, lo que deja aislado al puerto 1. El reparto de potencia se realiza entre los puertos 3 y 4, con una diferencia de fase de  $180^\circ$  debido a la polaridad de las tensiones inducidas en los devanados del transformador. Una propiedad importante del transformador híbrido es que el balance de amplitud y fase está determinado exclusivamente por la estructura del circuito, y no por elementos dependientes de la frecuencia como líneas de transmisión de una determinada longitud.

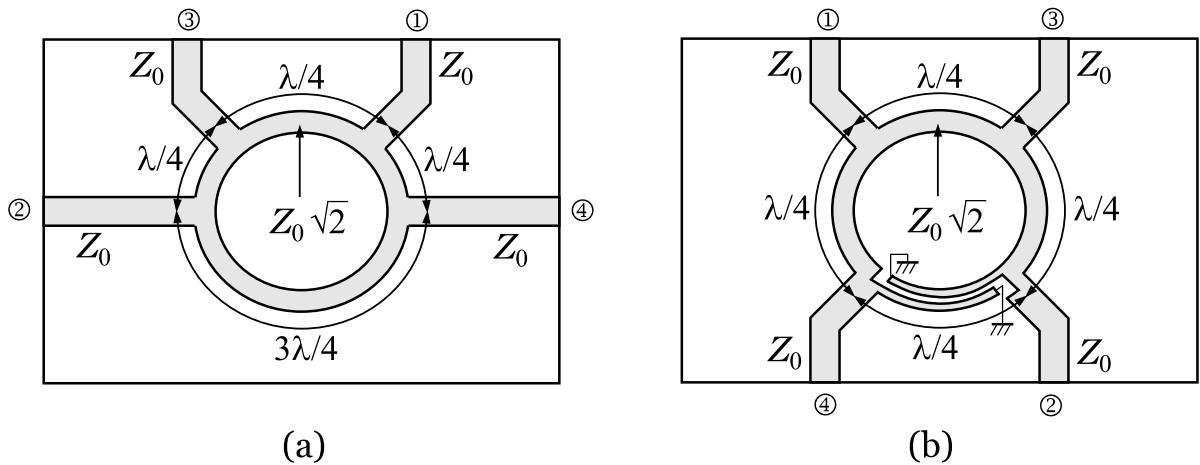


**Figura 4.3:** Transformador híbrido. (a) Circuito equivalente. (b) Realización práctica.

Una forma práctica de construir una bobina híbrida consiste en formar un único devanado enrollando tres hilos sobre un toroide de ferrita, como se indica en la Figura 4.3b. Debido al confinamiento del campo magnético por la alta permeabilidad del núcleo, el acoplamiento magnético es prácticamente ideal. El notable ancho de banda de estos híbridos se debe a que se comportan como transformadores a baja frecuencia, mientras que a frecuencias altas se pueden modelar como líneas de transmisión, evitando las resonancias que se producen entre la inductancia y las capacidades entre vueltas, responsables de la degradación del funcionamiento de los transformadores convencionales con la frecuencia.

**Anillo híbrido**

A diferencia del transformador híbrido, el anillo híbrido está formado por líneas de transmisión de una longitud determinada, de manera que su funcionamiento es de banda estrecha. Como se ve en la Figura 4.4a, el anillo se realiza con una línea de transmisión de impedancia característica  $Z_0\sqrt{2}$  que describe una circunferencia de longitud total de  $3\lambda/2$ . A lo largo de la misma se conectan cuatro puertos de impedancia  $Z_0$ , dos de los cuales están separados una distancia de  $3\lambda/4$  y los dos restantes  $\lambda/4$ .



**Figura 4.4:** Anillo híbrido. (a) Anillo híbrido en tecnología microtira. (b) Anillo híbrido modificado.

Si se inyecta potencia por el puerto 1, la señal viaja por el anillo dirigiéndose a los puertos 3 y 4. Como el trayecto entre 4 y 2 es una longitud de onda mayor que entre 3 y 2, las ondas que se superponen en el puerto 2 se encuentran en oposición de fase dando lugar a una condición de tierra virtual. Por tanto, las líneas que se extienden entre los puertos 2 y 3 y entre 2 y 4 se pueden modelar como líneas de transmisión de longitud de  $\lambda/4$  terminadas en cortocircuito. La impedancia a la entrada de estas líneas es infinita, de modo que no tienen efectos sobre los puertos 3 y 4. La parte que resta del anillo se modela nuevamente como líneas de  $\lambda/4$ , de impedancia característica  $Z_0\sqrt{2}$  y terminadas en  $Z_0$ , que se conectan en paralelo con el puerto 1, haciendo posible la adaptación de impedancias en este puerto y la división de la potencia a partes iguales entre 3 y 4. El mismo razonamiento se puede aplicar cuando se excita cualquier otro puerto.

La anchura de banda de un anillo híbrido se encuentra entre el 10% y el 15%, y está limitada fundamentalmente por la exigencia de una diferencia de longitud igual a  $\lambda/2$  entre los trayectos 2-3 y 2-4. Una forma práctica de aumentar considerablemente el ancho de banda, hasta casi una octava, consiste en reemplazar la línea de  $3\lambda/4$  por una sección de línea acoplada con sus extremos terminados en cortocircuito (véase la Figura 4.4b).

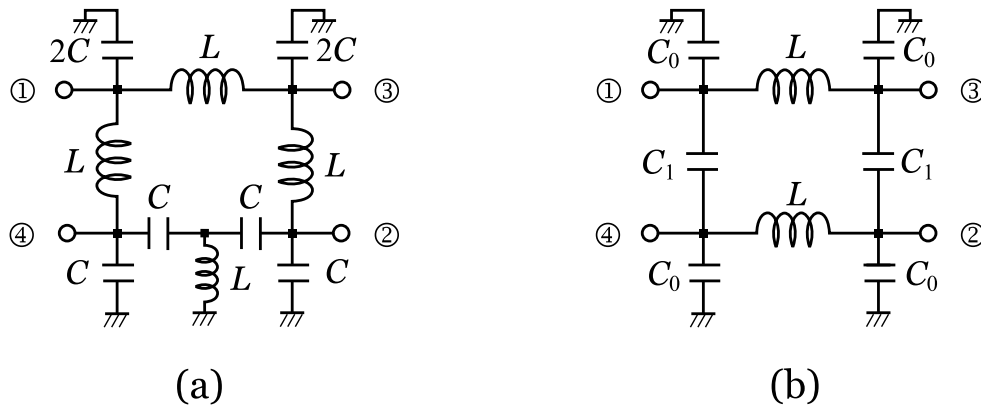


Figura 4.5: Acopladores híbridos de elementos concentrados. (a) 180°. (b) 90°.

### IV.1.3. Híbridos de elementos concentrados

Es posible construir híbridos a partir de elementos de circuito de parámetros concentrados. Al ocupar un espacio menor que sus equivalentes de parámetros distribuidos, resultan muy útiles para mezcladores en tecnología monolítica y a baja frecuencia.

La Figura 4.5a muestra el diseño de un híbrido de 180°. Su estructura es equivalente a un anillo híbrido. Está formado por cuatro secciones en “ $\pi$ ” y en “T” que simulan los segmentos de líneas de transmisión del anillo; las secciones en “ $\pi$ ” modelan las líneas de  $\lambda/4$  mientras que la sección en “T” modela la línea de longitud  $3\lambda/4$ . La ecuación de diseño es:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} = \sqrt{2}Z_0. \quad (4.6)$$

La anchura de banda de esta estructura es ligeramente superior a la de un anillo híbrido simple.

En la Figura 4.5b se representa un híbrido de 90° realizado con elementos concentrados. Como en el caso anterior, las secciones en “ $\pi$ ” ( $C_0$  y  $L$ ) simulan el comportamiento de dos líneas de transmisión, mientras que los condensadores  $C_1$  proporcionan el acoplamiento entre las líneas simuladas. Las ecuaciones de diseño son:

$$C_1 = \frac{1}{\omega Z_0 \sqrt{k}} \quad (4.7a)$$

$$L = \frac{Z_0}{\omega \sqrt{1 + \omega C_1 Z_0}} \quad (4.7b)$$

$$C_0 = \frac{1}{\omega^2 L} - C_1, \quad (4.7c)$$

siendo  $k$  la relación entre las potencias de los puertos de salida ( $k = 1$  para un acoplador de 3 dB). El funcionamiento de este acoplador es de banda estrecha, pudiéndose cifrar su anchura de banda en torno al 2%.



IV.1.4. Baluns

Una forma común de realizar mezcladores doblemente balanceados consiste en utilizar transformadores híbridos, conectando los puertos de OL y RF a los devanados primarios. Sin embargo, ya se ha comentado que resulta complicado construir transformadores híbridos capaces de operar por encima unos 4 ó 5 GHz. A estas frecuencias el empleo de híbridos de cuatro puertos queda desplazado mayoritariamente por baluns, que son estructuras que acoplan una línea de transmisión balanceada en una línea no equilibrada.

Aunque con frecuencia se confunden los baluns con los transformadores, existe una diferencia importante. Mientras que en una bobina híbrida el punto medio del devanado secundario es tierra virtual para excitaciones en modo común (o modo par), un balun se comporta como un circuito abierto ante tales excitaciones.

Balun de líneas paralelas

Se puede construir un balun mediante una línea de placas paralelas de longitud  $\lambda/4$ , poniendo a tierra uno de los conductores en el extremo no equilibrado, y conectado la carga (o fuente) balanceada entre ambos conductores en el otro extremo. De esta manera, la corriente en uno de los terminales del extremo balanceado es igual y opuesta a la corriente del otro terminal. Además, a la frecuencia para la que la longitud es  $\lambda/4$ , el extremo balanceado está aislado de tierra.

En su uso como transformador, el balun de líneas paralelas permite adaptar una impedancia de carga  $Z_L$  a una impedancia de fuente  $Z_g$  tomando la siguiente impedancia característica:

$$Z_0 = \sqrt{Z_L Z_g} \tag{4.8}$$

A pesar de que esta expresión es correcta, el modelo simple de línea de transmisión no describe correctamente todos los aspectos de este balun. En particular, la capacidad entre los conductores y el plano de masa puede tener un efecto significativo sobre el comportamiento del balun. De ahí que sea preferible utilizar un modelo de líneas

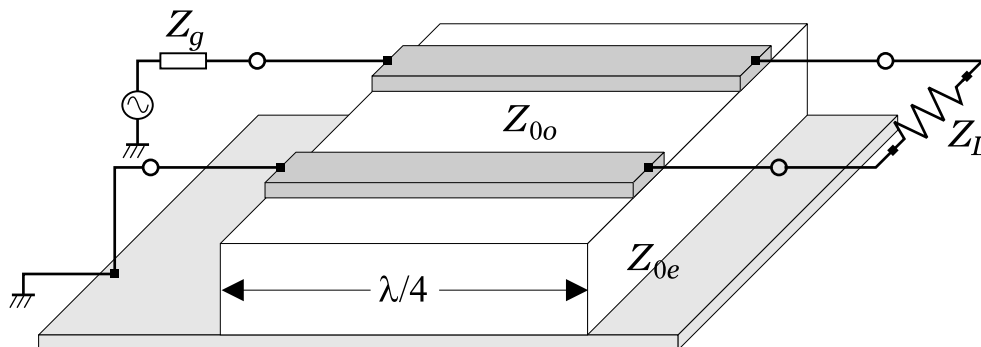


Figura 4.6: Balun de líneas paralelas.

## IV. ESTRUCTURAS BALANCEADAS PARA MEZCLADORES

paralelas acopladas como el de la Figura 4.6. En este caso, la capacidad entre las líneas y el plano de masa se puede modelar bien mediante la impedancia característica del modo par,  $Z_{0e}$ . Evidentemente, es deseable que  $Z_{0e}$  sea lo mayor posible, ya que en este caso la impedancia característica de la línea formada por los dos conductores es equivalente al doble de la impedancia característica del modo impar,  $Z_{0o}$ . Cuando  $Z_{0e}$  es suficientemente alto, el balun puede tener una anchura de banda de entre una y dos octavas. A medida que se reduce el valor de  $Z_{0e}$  se degrada el comportamiento. Como regla general se recomienda la siguiente relación entre impedancias:  $Z_{0e} > 10Z_{0o}$ . Esta desigualdad es virtualmente imposible de satisfacer a menos que se utilice un sustrato de baja constante dieléctrica y el balun esté suficientemente alejado del plano de masa.

### Balun Marchand

Presenta una anchura de banda mayor y es menos sensible a un baja impedancia característica del modo par. Está formado por dos secciones de líneas acopladas, cada una de longitud  $\lambda/4$ . La estructura está rodeada por un plano de masa, por defecto el compartimento estanco sobre el que se monta el balun. Como se observa en la Figura 4.7, uno de los terminales de cada par de líneas acopladas se conecta a tierra, mientras que el otro extremo se conecta a la carga.

El análisis de esta estructura se puede reducir al de un balun de líneas paralelas, ya que la sección más alejada del extremo de la fuente se comporta como una línea de transmisión de  $\lambda/4$  terminada en circuito abierto, y como tal la impedancia de entrada entre los terminales  $b - b'$  es cero. De esta manera, la carga  $Z_L$  está virtualmente conectada al terminal  $a$  de la primera sección.

El segundo par de líneas paralelas, además de aumentar el ancho de banda del balun al introducir una nueva resonancia, incrementa considerablemente la impedancia característica del modo par. Generalmente es suficiente con que se cumpla  $Z_{0e} > 3Z_{0o}$  para alcanzar un comportamiento aceptable. El ancho de banda se puede extender teóricamente hasta seis octavas utilizando múltiples secciones de  $\lambda/4$ .

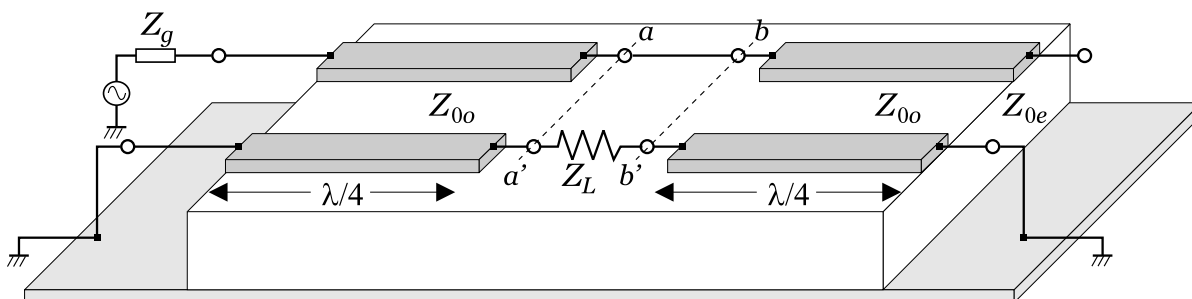
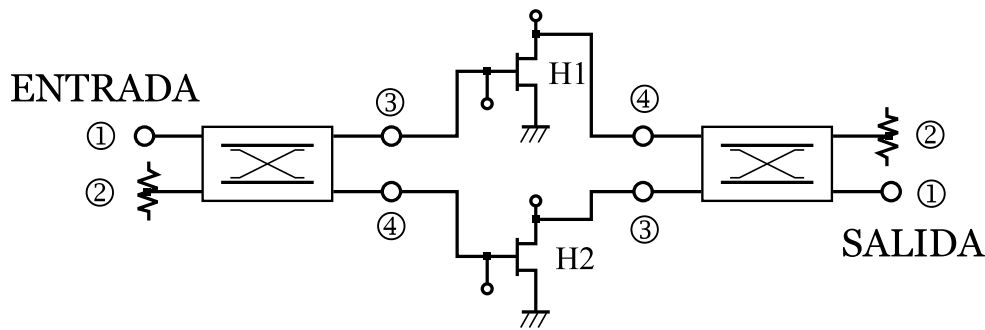


Figura 4.7: Balun Marchand.

## IV.2. Propiedades de las componentes acopladas por estructuras balanceadas

En la Figura 4.8 se muestra un par de transistores FET conectados en paralelo por medio de acopladores híbridos, en un esquema que recuerda al utilizado para construir amplificadores equilibrados o mezcladores simplemente balanceados. Los híbridos pueden ser de cualquier tipo, con tal de que el desplazamiento de fase entre la entrada y la salida de cada rama sea el mismo, y que los transistores sean idénticos. Para obtener un buen balance es preciso que la entrada de uno de los transistores y la salida del otro dispositivo se conecten al mismo puerto de cada híbrido. Cuando se cumplen estas condiciones el par de transistores acoplados presenta la misma ganancia que si se considerasen individualmente, pero el doble de potencia disponible a la salida. Se pueden demostrar otras propiedades ventajosas, dependiendo del tipo de híbrido utilizado.



**Figura 4.8:** Estructura balanceada mediante acopladores híbridos.

Sean respectivamente  $V_i^+$  y  $V_i^-$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , las tensiones incidentes y reflejadas en el puerto  $i$  del híbrido de entrada, y sean  $\Gamma_3$  y  $\Gamma_4$  los coeficientes de reflexión provocados por los transistores sobre los puertos 3 y 4 del acoplador, de tal manera que  $V_3^+ = \Gamma_3 V_3^-$  y  $V_4^+ = \Gamma_4 V_4^-$ . Si se considera una matriz de parámetros  $S$  arbitraria para el híbrido, y que la entrada se realiza por el puerto 1, estando 2 terminado en una carga adaptada (esto es,  $V_2^+ = 0$ ), el coeficiente de reflexión a la entrada de la red viene dado por:

$$\Gamma_1 = \frac{V_1^-}{V_1^+} = s_{11} + s_{13} \frac{V_3^+}{V_1^+} + s_{14} \frac{V_4^+}{V_1^+}. \quad (4.9)$$

Las expresiones generales de los dos últimos sumandos del segundo miembro se escriben en términos de  $\Gamma_3$  y  $\Gamma_4$  resolviendo el sistema que resulta de considerar las ecuaciones correspondientes a las filas tercera y cuarta de  $S$ :

$$\frac{V_3^+}{V_1^+} = \frac{\Gamma_3 s_{31} + \Gamma_3 \Gamma_4 (s_{34} s_{41} - s_{31} s_{44})}{(1 - \Gamma_3 s_{33})(1 - \Gamma_4 s_{44}) - \Gamma_3 \Gamma_4 s_{34} s_{43}} \quad (4.10a)$$

$$\frac{V_4^+}{V_1^+} = \frac{\Gamma_4 s_{41} + \Gamma_3 \Gamma_4 (s_{43} s_{31} - s_{41} s_{33})}{(1 - \Gamma_3 s_{33})(1 - \Gamma_4 s_{44}) - \Gamma_3 \Gamma_4 s_{34} s_{43}}. \quad (4.10b)$$

#### IV. ESTRUCTURAS BALANCEADAS PARA MEZCLADORES

En el caso particular de que la matriz S venga dada por (4.1) ó (4.2), las ecuaciones anteriores se pueden simplificar al tomar  $s_{ii} = s_{34} = s_{43} = 0$ , resultando:

$$\Gamma_1 = s_{13}s_{31}\Gamma_3 + s_{14}s_{41}\Gamma_4 \quad (4.11)$$

Si el híbrido es de  $180^\circ$ , entonces se obtiene al sustituir  $s_{13} = s_{31} = 1/\sqrt{2}$ ,  $s_{14} = s_{41} = 1/\sqrt{2}$ :

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} (\Gamma_3 + \Gamma_4) . \quad (4.12)$$

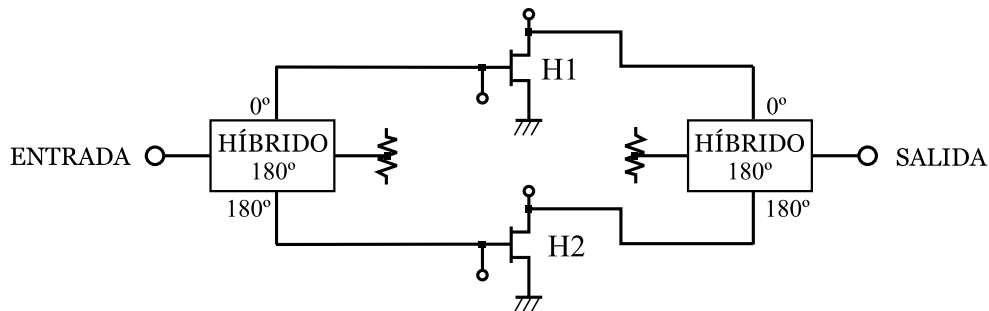
De esta manera, si los dos transistores no son idénticos y a alguna frecuencia el coeficiente de reflexión de uno de ellos es peor que el del otro, el efecto de promediado del híbrido reduce el coeficiente de reflexión en el peor de los casos. Empleando híbridos de  $90^\circ$  la situación es aún más favorable, ya que al tomar  $s_{13} = s_{31} = -j/\sqrt{2}$ ,  $s_{14} = s_{41} = 1/\sqrt{2}$  se obtiene:

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} (\Gamma_4 - \Gamma_3) , \quad (4.13)$$

es decir, si los dos transistores son exactamente idénticos, la entrada está adaptada aunque los dispositivos no lo estén.

##### IV.2.1. Análisis mediante series de Volterra

Las estructuras balanceadas proporcionan el rechazo de ciertas señales espurias y armónicos, aunque depende del tipo de acopladores utilizados y de las propiedades de estos a dichas frecuencias. Las señales espurias de mayor interés están localizadas generalmente cerca de la frecuencia de trabajo, mientras que la generación de armónicos puede ser crítica en sistemas de banda ancha. Si se admite que el balance de la amplitud y fase de los híbridos es uniforme en un amplio margen de frecuencias, entonces la estructura balanceada puede ofrecer una significativa protección frente a espurias.



**Figura 4.9:** Estructura balanceada con rechazo de componentes espurias de orden par.

Para ilustrar esta situación, en la Figura 4.9 se muestran dos transistores, H1 y H2, cuyas entradas y salidas se conectan a puertos mutuamente aislados de baluns o híbridos de  $180^\circ$ . La relación entrada-salida de cada transistor se puede modelar mediante

un desarrollo en series de Volterra<sup>1</sup> en términos de las funciones de transferencia no lineales  $H_n(\omega_n)$ . Considérese que se aplica sobre la estructura una señal de dos tonos de frecuencia  $\omega_1 \gtrsim \omega_2$ , tal que a las entradas de H1 y H2 se tengan las tensiones:

$$v_i|_{H1} = V_1 \cos(\omega_1 t) + V_2 \cos(\omega_2 t) \quad (4.14a)$$

$$v_i|_{H2} = V_1 \cos(\omega_1 t + \pi) + V_2 \cos(\omega_2 t + \pi) = -V_1 \cos(\omega_1 t) - V_2 \cos(\omega_2 t) \quad (4.14b)$$

Las componentes de primer orden de las tensiones a las salidas de los transistores se pueden expresar como:

$$v_{o,1}|_{H1} = \Re [V_1 H_1(\omega_1) \exp(\omega_1 t)] + \Re [V_2 H_2(\omega_2) \exp(\omega_2 t)] \quad (4.15a)$$

$$v_{o,1}|_{H1} = \Re [-V_1 H_1(\omega_1) \exp(\omega_1 t)] + \Re [-V_2 H_2(\omega_2) \exp(\omega_2 t)] . \quad (4.15b)$$

Puesto que el híbrido de salida provoca un desfase adicional de 180° sobre la salida de H2, sin alterar la fase de H1, las componentes de primer orden se combinan en fase. En cuanto a las componentes de segundo orden, de acuerdo con (3.20), puede escribirse a la entrada de H1:

$$\begin{aligned} v_{o,2}|_{H1} = & \frac{1}{2} \Re [V_1 V_1^* H_2(\omega_1, -\omega_1)] + \frac{1}{2} \Re [V_2 V_2^* H_2(\omega_2, -\omega_2)] + \\ & + \Re \{V_1 V_2^* H_2(\omega_1, -\omega_2) \exp[(\omega_1 - \omega_2)t]\} + \Re \{V_1 V_2 H_2(\omega_1, \omega_2) \exp[(\omega_1 + \omega_2)t]\} + \\ & + \frac{1}{2} \Re [V_1 V_1 H_2(\omega_1, \omega_1) \exp(2\omega_1 t)] + \frac{1}{2} \Re [V_2 V_2 H_2(\omega_2, \omega_2) \exp(2\omega_2 t)] \quad (4.16) \end{aligned}$$

La salida de H2 se puede expresar como (4.16) simplemente cambiando  $V_1$  por  $-V_1$  y  $V_2$  por  $-V_2$ . Recordando que  $(-V_1)^* = -V_1^*$ , es fácil demostrar que  $v_{o,2}|_{H2} = v_{o,2}|_{H1}$ , y que por tanto se verifica la cancelación de todas estas componentes si se efectúa la combinación a través los puertos del híbrido de salida indicados en la Figura 4.9. Esta propiedad se puede extender a todas las mezclas y armónicos de orden par.

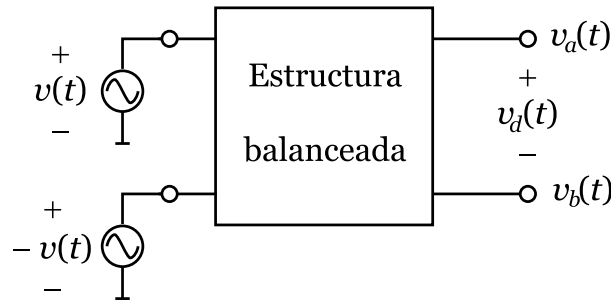


Figura 4.10: Nodos simétricos en una estructura balanceada.

Para dotar de mayor generalidad a este resultado, considérense dos nodos  $a$  y  $b$  simétricos, de la estructura balanceada general de la Figura 4.10, tales que las tensiones  $v_a(t)$  y  $v_b(t)$  están relacionadas con la entrada  $v(t)$  a través del mismo funcional  $R[v(t)]$ .

<sup>1</sup>Maas deriva los resultados siguientes acudiendo a una representación de los transistores en series de potencias [5, pp. 228–230], de manera que el análisis que se ofrece es más general.

#### IV. ESTRUCTURAS BALANCEADAS PARA MEZCLADORES

Las tensiones de los nodos están descritos a través de las funciones de transferencia no lineales  $H_n(\omega_n)$ , que relacionan  $v_a(t)$  con el espectro de la tensión de entrada  $V(\omega)$ . Considerando que la entrada está multiplicada por una constante  $K$ , la tensión en el nodo  $a$  puede expresarse como:

$$v_a(t) = \sum_{n=1}^{\infty} K^n v_{a,n}(t) . \quad (4.17)$$

Como  $b$  es nodo simétrico de  $a$ , entonces, la tensión en  $b$  se puede obtener de (4.17) tomando  $K = -1$ . De aquí sigue que la componente de orden  $n$  en el nodo  $b$  está relacionada con la correspondiente respuesta del nodo  $a$  mediante:

$$v_{b,n}(t) = (-1)^n v_{a,n}(t) , \quad (4.18)$$

y la salida diferencial  $v_d(t) = v_a(t) - v_b(t)$  se relaciona con la entrada  $v(t)$  a través de las funciones de transferencia no lineales diferenciales  $H_{d,n}(\omega_n)$ , que a su vez dependen de las correspondientes del nodo  $a$  como:

$$H_{d,n}(\omega_n) = \begin{cases} 2H_n(\omega_n) & n - \text{impar} \\ 0 & n - \text{par} \end{cases} \quad (4.19)$$

Si por el contrario los nodos  $a$  y  $b$  hubieran sido idénticos, bien por razones estructurales o por estar directamente interconectados, sus componentes de orden impar serían tierras virtuales.

Las propiedades de rechazo de las componentes acopladas en cuadratura son muy diferentes a las que se acaban de presentar. Aplicando el mismo tipo de análisis a la estructura balanceada de la Figura 4.8, considerando que los híbridos son acopladores de  $90^\circ$ , se puede comprobar que el desplazamiento de fase de los productos de segundo orden a la salida de H1 y H2 es de  $180^\circ$ , así que es de esperar que el desfase entre estas componentes a la salida del segundo híbrido sea de  $90^\circ$ , proporcionando un rechazo de 3 dB. Considerando nuevamente una señal con dos tonos, las componentes de tercer orden a la entrada de H2 vienen dadas por:

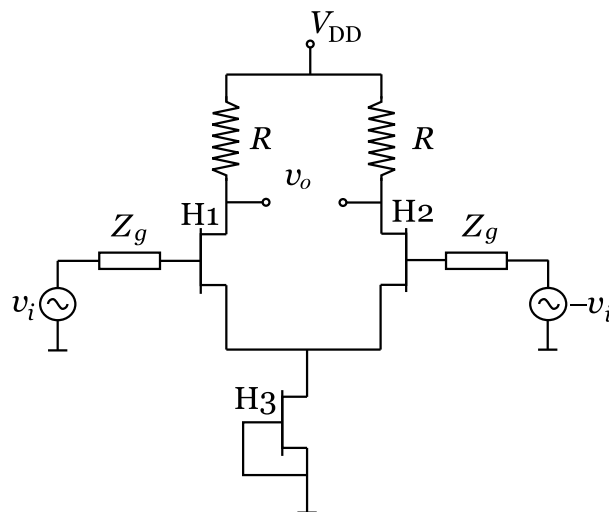
$$\begin{aligned} v_{o,2}|_{H2} = & \frac{3}{4} \Re [V_1 V_1 V_1^* H_3(\omega_1, \omega_1, -\omega_1) \exp(\omega_1 t)] + \frac{3}{2} \Re [V_1 V_2 V_2^* H_3(\omega_1, \omega_2, -\omega_2) \exp(\omega_1 t)] + \\ & + \frac{3}{4} \Re [V_2 V_2 V_2^* H_3(\omega_2, \omega_2, -\omega_2) \exp(\omega_2 t)] + \frac{3}{2} \Re [V_2 V_1 V_1^* H_3(\omega_2, \omega_1, -\omega_1) \exp(\omega_2 t)] + \\ & + \frac{3}{4} \Re \{V_1 V_1 V_2^* H_3(\omega_1, \omega_1, -\omega_2) \exp[(2\omega_1 - \omega_2)t]\} + \frac{3}{4} \Re \{V_2 V_2 V_1^* H_3(\omega_2, \omega_2, -\omega_1) \exp[(2\omega_2 - \omega_1)t]\} + \\ & + \frac{3}{4} \Re \{V_1 V_1 V_2 H_3(\omega_1, \omega_1, \omega_2) \exp[(2\omega_1 + \omega_2)t]\} + \frac{3}{4} \Re \{V_2 V_2 V_1 H_3(\omega_2, \omega_2, \omega_1) \exp[(2\omega_2 + \omega_1)t]\} + \\ & + \frac{1}{4} \Re [V_1 V_1 V_1 H_3(\omega_1, \omega_1, \omega_1) \exp(3\omega_1 t)] + \frac{1}{4} \Re [V_2 V_2 V_2 H_3(\omega_2, \omega_2, \omega_2) \exp(3\omega_2 t)] \quad (4.20) \end{aligned}$$

Una vez más, la salida de H1 se puede expresar como (4.20) cambiando  $V_1$  y  $V_2$  por  $-jV_1$  y  $-jV_2$ , respectivamente. De esta manera, es fácil comprobar que aquellos términos en los que aparece un producto de la forma  $V_i V_j V_k$ , son susceptibles de cancelación, mientras que ésta no es posible cuando aparece  $V_i V_j V_k^*$ . De ahí que esta estructura

permita la cancelación de los armónicos impares ( $3\omega_1$  y  $3\omega_2$ ) y de algunas mezclas como  $2\omega_1 + \omega_2$  ó  $2\omega_2 + \omega_1$ , aunque no es posible eliminar productos de intermodulación claramente perjudiciales, como  $2\omega_1 - \omega_2$  ó  $2\omega_2 - \omega_1$ .

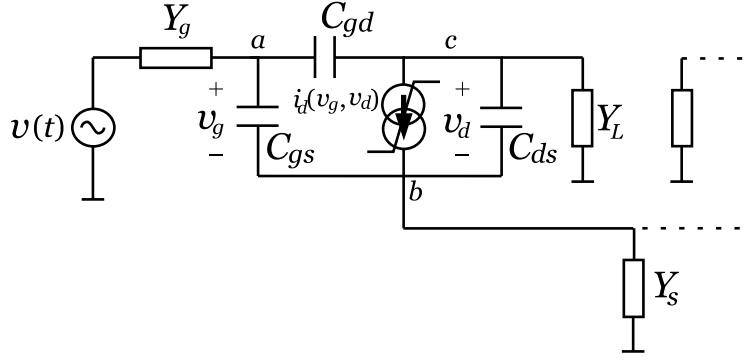
### IV.3. Análisis de un par diferencial

Es un hecho conocido que la distorsión por intermodulación en mezcladores se puede mejorar acudiendo a estructuras doblemente balanceadas, debido a que los armónicos pares dependientes tanto del oscilador local (OL) como de la entrada (RF) se cancelan, como se acaba de mostrar. Para balancear las entradas y salida de un mezclador doblemente balanceado se requieren baluns. Aunque se han descrito muchos diseños de balun basados en estructuras pasivas, además de los mostrados en la Sección IV.1.4, esta alternativa requiere más espacio de lo que generalmente está aceptado para tecnología MMIC. Además se deteriora la ganancia de conversión y se necesita un nivel elevado de OL para alcanzar una óptima ganancia de conversión. Por otro lado, la aplicación de baluns activos representa mejoras en todos estos aspectos [9, 10] a costa de sacrificar la distorsión por intermodulación, que se puede controlar mediante un diseño cuidadoso de los baluns. Como en su operación es deseable que un mezclador se comporte linealmente respecto de la entrada de RF, en realidad el diseño del balun activo de salida es crítico para alcanzar un buen comportamiento no lineal.



**Figura 4.11:** Par diferencial con transistores HEMT.

Una de las estructuras más populares para el diseño de baluns activos es el par diferencial mostrado en la Figura 4.11. El diseño de baluns basado en este circuito comprende la determinación del punto de polarización, tamaño de los transistores y tensión de alimentación. La selección de estas variables determina la ganancia diferencial, el rango dinámico, el consumo y la relación de rechazo al modo común (CMRR). Se han descrito criterios para la solución de este problema de optimización en tecno-



**Figura 4.12:** Circuito equivalente de pequeña señal para los transistores H1-H3.

logía MESFET mediante el desarrollo de un procedimiento gráfico basado en curvas derivadas de medidas al dispositivo activo [11]. Sin embargo la mayoría de los métodos son incapaces de predecir la distorsión por intermodulación. De hecho, existen escasas referencias sobre el análisis no lineal de baluns activos [12].

Asumiendo que la contribución de las corrientes no lineales reactivas es despreciable frente a la fuente de corriente  $i_{ds}(v_{gs}, v_{ds})$  (no-linealidad dominante), si se considera el circuito equivalente de pequeña señal del par diferencial, mostrado en la Figura 4.12, se pueden formular las siguientes ecuaciones nodales:

$$\begin{aligned}
 Y'_g(\hat{p})v_g(t) - \hat{p}C_{gd}v_d(t) + Y_g(\hat{p})v_b(t) &= Y_g(\hat{p})v(t) \\
 y_{md}(\hat{p})v_g(t) + Y'_L(\hat{p})v_d(t) + Y_L(\hat{p})v_b(t) &= -i_{NL}(t) \\
 Y'_g(\hat{p})v'_g(t) - \hat{p}C_{gd}v'_d(t) + Y_g(\hat{p})v(t) &= -Y_g(\hat{p})v(t) \quad (4.21) \\
 y_{md}(\hat{p})v'_g(t) + Y'_L(\hat{p})v'_d(t) + Y_L(\hat{p})v_b(t) &= -i'_{NL}(t)
 \end{aligned}$$

$$y_{ms}(\hat{p})v_g(t) + y_d(\hat{p})v_d(t) + y_{ms}(\hat{p})v'_g(t) + y_d(\hat{p})v'_d(t) - Y_s(\hat{p})v_b(t) = -[i_{NL}(t) + i'_{NL}(t)]$$

donde  $p = d/dt$  es el operador diferencial y se ha hecho uso de las definiciones  $y_d(\hat{p}) = g_d + \hat{p}C_{ds}$ ,  $y_{ms}(\hat{p}) = g_m + \hat{p}C_{gs}$ ,  $y_{md}(\hat{p}) = g_m - \hat{p}C_{gd}$ ,  $Y'_g(\hat{p}) = Y_g(\hat{p}) + \hat{p}(C_{gs} + C_{gd})$ ,  $Y'_L(\hat{p}) = Y_L(\hat{p}) + y_d(\hat{p}) + \hat{p}C_{gd}$ . La notación prima se utiliza para designar las tensiones en los nodos simétricos. En forma matricial este sistema de ecuaciones también se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix}
 Y'_g(\hat{p}) & -\hat{p}C_{gd} & 0 & 0 & 0 \\
 y_{md}(\hat{p}) & Y'_L(\hat{p}) & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & Y'_g(\hat{p}) & -\hat{p}C_{gd} & Y_g(\hat{p}) \\
 0 & 0 & y_{md}(\hat{p}) & Y'_L(\hat{p}) & Y_L(\hat{p}) \\
 0 & 0 & y_{ms}(\hat{p}) & y_d(\hat{p}) & -\frac{1}{2}Y_s(\hat{p})
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \Delta v_g(t) \\
 \Delta v_d(t) \\
 v_g^+(t) \\
 v_d^+(t) \\
 v_b(t)
 \end{pmatrix}
 =
 Y_g(\hat{p})
 \begin{pmatrix}
 \Delta v(t) \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{pmatrix}
 + \frac{1}{2}
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 -[i_{NL}(t) - i'_{NL}(t)] \\
 0 \\
 -[i_{NL}(t) + i'_{NL}(t)] \\
 -[i_{NL}(t) + i'_{NL}(t)]
 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$



donde  $\Delta v_g(t) = \frac{1}{2}[v_g(t) - v'_g(t)]$ ,  $\Delta v_d(t) = \frac{1}{2}[v_d(t) - v'_d(t)]$ ,  $v_g^+(t) = \frac{1}{2}[v_g(t) + v'_g(t)]$  y  $v_d^+(t) = \frac{1}{2}[v_d(t) + v'_d(t)]$  son respectivamente las tensiones diferenciales y de modo común de puerta y drenador. En forma compacta se puede apreciar la estructura de dos sistemas de ecuaciones desacoplados:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_d(\hat{p}) & \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{Y}_c(\hat{p}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{V}(t) \\ \mathbf{V}_c(t) \end{pmatrix} = Y_g(\hat{p}) \begin{pmatrix} \mathbf{V}(t) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{NLd}(t) \\ \mathbf{i}_{NLc}(t) \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

La simetría del circuito puede ser explotada para reducir el número de ecuaciones. Un intercambio de las fuentes, esto es,  $v(t) \rightarrow -v(t)$  produce nuevas tensiones incrementales de orden  $n$ :

$$v_{gn}(t) \rightarrow (-1)^n v_{gn}(t) \quad (4.24a)$$

$$v_{dn}(t) \rightarrow (-1)^n v_{dn}(t) \quad (4.24b)$$

$$v_{bn}(t) \rightarrow (-1)^n v_{bn}(t) \quad (4.24c)$$

pero estas tensiones deben ser idénticas a las tensiones previas en los nodos simétricos. Por tanto, se deben satisfacer las siguientes condiciones:

$$v'_{gn}(t) = (-1)^n v_{gn}(t) \quad (4.25a)$$

$$v'_{dn}(t) = (-1)^n v_{dn}(t) \quad (4.25b)$$

$$v_{bn}(t) = (-1)^n v_{bn}(t) \quad (4.25c)$$

o, equivalentemente

$$\Delta v_{gn}(t) = \begin{cases} v_{gn}(t) & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases} \quad (4.26a)$$

$$v_{gn}^+(t) = \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ v_{gn}(t) & n \text{ par} \end{cases} \quad (4.26b)$$

$$v_{bn}(t) = \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ v_{bn}(t) & n \text{ par} \end{cases} \quad (4.26c)$$

Se obtienen relaciones similares para la tensión incremental de drenador, concluyendo que los términos de orden impar de  $v_g(t)$  y  $v_d(t)$  son iguales pero de signo contrario que en sus respectivos nodos simétricos. Las componentes de orden par son iguales en todos los nodos simétricos. Por extensión, las corrientes no lineales en nodos simétricos son iguales para orden par y opuestas para orden impar, y se pueden calcular como sigue:

$$i_{NLn}(t) - i'_{NLn}(t) = \begin{cases} 2i_{NLn}(t) & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases} \quad (4.27a)$$

#### IV. ESTRUCTURAS BALANCEADAS PARA MEZCLADORES

$$i_{NLn}(t) + i'_{NLn}(t) = \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ 2i_{NLn}(t) & n \text{ par} \end{cases} \quad (4.27b)$$

Las funciones de transferencia lineales se pueden obtener de (4.23). Es importante destacar que sólo es necesario resolver el sistema de ecuaciones relativo a las tensiones diferenciales, al haber únicamente dos incógnitas no nulas:

$$H_{g1}(\omega) = \frac{Y_g(\omega)Y'_L(\omega)}{\det[\mathbf{Y}_d]} \quad (4.28a)$$

$$H_1(\omega) = -\frac{Y_g(\omega)y_{md}(\omega)}{\det[\mathbf{Y}_d]} \quad (4.28b)$$

Aplicando el método de la entrada armónica combinado con el de las corrientes no lineales, las funciones de transferencia no lineales de segundo orden se determinan mediante la ecuación:

$$\begin{pmatrix} H_{g2}^+(\omega_1, \omega_2) \\ H_2^+(\omega_1, \omega_2) \\ H_{b2}(\omega_1, \omega_2) \end{pmatrix} = \mathbf{Z}_s(\omega_1 + \omega_2) \begin{pmatrix} 0 \\ -F_2[i_{NL}] \\ -F_2[i_{NL}] \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Obsérvese que sólo se resuelve el segundo sistema de ecuaciones contenido en (4.23), al ser nulas las tensiones diferenciales de este orden. El coeficiente  $F_2[i_{NL}]$  se corresponde con la componente de segundo orden de la corriente no lineal debida a la fuente  $i_{ds}(v_{gs}, v_{ds})$  (véase (3.103c)), y ya ha sido presentado en (3.106c) (advértase el cambio de signo). Las funciones de transferencia no lineales de orden tres se pueden escribir como:

$$H_{g3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -\frac{j\omega'' C_{gd}}{|\mathbf{Y}_d(\omega'')|} F_3[i_{NL}] \quad (4.30a)$$

$$H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -\frac{Y'_g(\omega'')}{|\mathbf{Y}_d(\omega'')|} F_3[i_{NL}] \quad (4.30b)$$

Nuevamente la solución depende del primer sistema de ecuaciones de (4.23), con únicamente dos incógnitas como corresponde a las funciones de transferencia de orden impar. El coeficiente  $F_3[i_{NL}]$  a la frecuencia  $\omega'' = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$  se calcula como en (3.109c), aunque con el signo contrario.

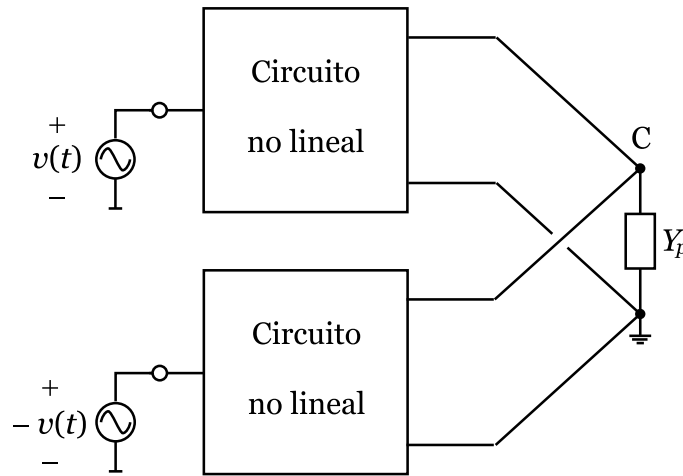
En resumen, para las funciones de transferencia de las tensiones diferenciales, el nodo  $b$  es tierra virtual y, por tanto, la matriz e admitancias es de rango  $2 \times 2$ . Para tener en cuenta las funciones de transferencia en modo común, se analiza la rama izquierda o derecha del par diferencial, reduciendo a la mitad la admitancia del transistor H3 [13]. La matriz de admitancias en este caso es de rango  $3 \times 3$ . Las funciones de transferencia no lineales de orden impar son cero para las tensiones en modo común, mientras que las de orden par son cero para las tensiones diferenciales. Finalmente, la salida diferencial, incluyendo términos hasta de tercer orden, se computa mediante la siguiente expresión, suponiendo que la entrada es un solo tono a frecuencia  $\omega$ :

$$\Delta V_o(\omega) = 2V H_1(\omega) + \frac{3}{2}|V|^3 H_3(\omega, \omega, -\omega) \quad (4.31)$$

## IV.4. Análisis sistemático de estructuras balanceadas

El método seguido en el apartado anterior se puede sistematizar para ayudar en el análisis no lineal de una estructura balanceada genérica, como la mostrada en la Figura 4.13. En ella se pueden distinguir dos circuitos idénticos, que pueden contener tanto elementos lineales como no lineales. La alimentación se realiza mediante fuentes en oposición de fases y ambos circuitos se conectan a un nodo común ( $C$ ), de admitancia  $Y_p$ .

Denotando  $v_X$  la tensión del nodo  $X$  y  $v'_X$  el voltaje en el nodo simétrico  $X'$ , el análisis de la estructura balanceada se puede simplificar mediante los cambios de variables:  $\Delta v_X = \frac{1}{2}(v_X - v'_X)$ ,  $v_X^+ = \frac{1}{2}(v_X + v'_X)$ , que denotan respectivamente la tensión diferencial y de modo común del nodo  $X$ .



**Figura 4.13:** Estructura balanceada con un nodo común ( $C$ ).

Suponiendo que  $v_X$  admite un desarrollo en series de Volterra,  $\Delta v_X$  sólo tiene componentes de orden impar, cuyas funciones de transferencia no lineales se obtienen a partir de la expresión:

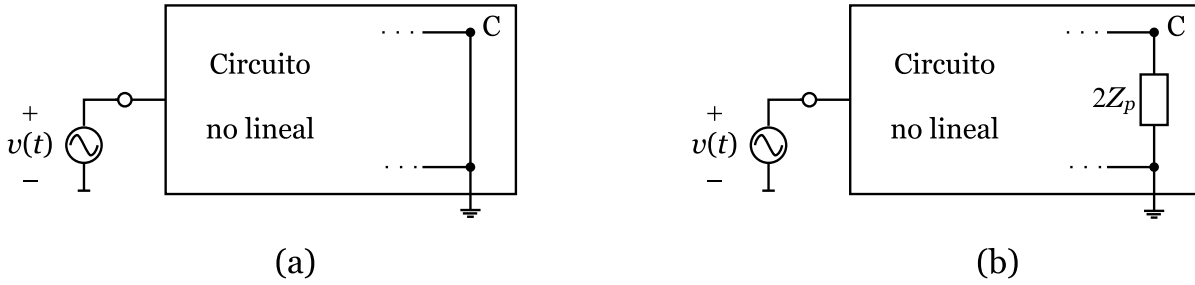
$$\mathbf{Y}_d \cdot \mathbf{H}_{dn} = \begin{cases} \mathbf{I}_s, & n = 1 \\ \mathbf{F}_n[\mathbf{i}_{NL}], & n > 1 \end{cases} \quad (4.32)$$

donde  $\mathbf{Y}_d$  es la matriz de admitancias de uno de los circuitos que componen la estructura balanceada, que resulta de conectar el nodo  $C$  en cortocircuito (véase la Figura 4.14a).

Por su parte,  $v_X^+$  sólo admite un desarrollo en componentes de orden par, cuyas funciones de transferencia no lineales asociadas se determinan mediante la expresión:

$$\mathbf{Y}_c \cdot \mathbf{H}_n^+ = \mathbf{F}_n[\mathbf{i}_{NL}] \quad (4.33)$$

donde  $\mathbf{Y}_c$  se construye calculando la matriz de admitancias del mismo circuito, considerando que el valor de  $Y_p$  se reduce a la mitad (véase la Figura 4.14b).



**Figura 4.14:** Análisis de una estructura balanceada. (a) Circuito equivalente para las componentes de orden impar. (b) Circuito equivalente para las componentes de orden par.

### IV.5. Aplicación al diseño de baluns activos

Para evaluar las expresiones anteriores, es necesario un modelo no lineal para los dispositivos activos que describa los parámetros  $g_{kl}$  adecuadamente. El modelo de Angelov (véase el subapartado II.7.2) permite una buena predicción de la transconductancia del HEMT y describe adecuadamente el máximo de  $g_m$  y sus derivadas. Por este motivo, se ha utilizado dicho modelo en el método de análisis propuesto. Recordemos que en el modelo de Angelov la corriente se expresa como:

$$I_{ds} = kW[1 + \tanh(\psi)] \tanh(\alpha V_{ds})(1 + \lambda V_{ds}) \quad (4.34)$$

Como se comentó en la Sección II.7.2, la expresión (4.34) es suficientemente precisa incluso cuando se toma  $\psi = P(V_{gs} - V_{pk})$ . Para la tecnología HEMT seleccionada (proceso ED02AH de Philips Microwave Limeil, longitud de puerta de  $0,2 \mu\text{m}$ ), el ajuste del modelo conduce a los parámetros  $P = 2,7 \text{ V}^{-1}$ ,  $V_{pk} = -0,17 \text{ V}$ .

Para una adecuada selección de la anchura de puerta ( $W$ ) y polarización, se pueden evaluar las funciones de transferencia no lineales y obtener la ganancia diferencial y CMRR en función de la anchura de puerta para diferentes corrientes porcentuales (porcentaje respecto de  $I_{DSS}$ ). Este mismo análisis se puede realizar variando la corriente para un conjunto discreto de valores de  $W$ . Los métodos clásicos para el diseño de amplificadores diferenciales basados en un modelo de Curtice cuadrático acostumbra a tomar  $I_D = 0,25I_{DSS}$  para maximizar el rango dinámico. Sin embargo, esta suposición no predice ninguna distorsión por intermodulación, debido a la dependencia lineal de la transconductancia con  $V_{GS}$ . Una no-linealidad modelada mediante una función  $\tanh$  ha mostrado ser mucho más precisa que el modelo de Curtice cuadrático, poco realista para describir la tecnología HEMT.

El presente enfoque [6] incorpora el modelo de Angelov para asistir en la selección de los parámetros de diseño. Su importancia radica en que permite extender el procedimiento clásico con una descripción precisa de cómo el rechazo a la intermodulación (IMR) varía con  $V_{GS}$ , la anchura  $W$  o la polarización del HEMT. Cuando se toma como parámetro la corriente porcentual  $i = I_D/I_{DSS}$  de H1 y H2,  $V_{GS1}$  se puede obtener

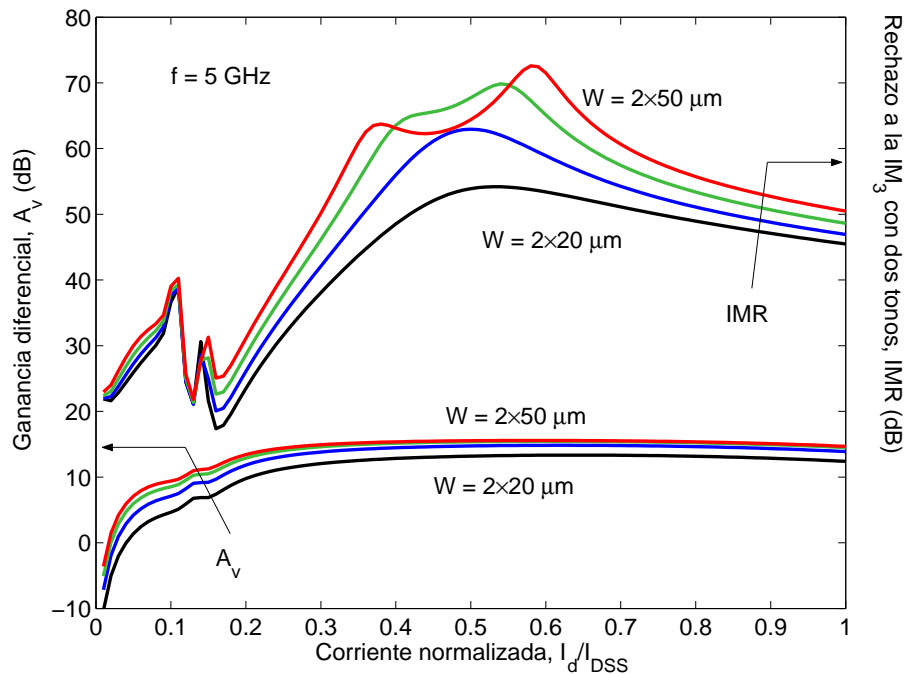
invirtiendo (4.34):

$$V_{GS1} = \frac{1}{P} \tanh^{-1} \{ [1 - \tanh(PV_{pk})]i - 1 \} + V_{pk} \quad (4.35)$$

Otro de los parámetros de diseño es la anchura de puerta de H1 y H2 ( $W$ ). Puesto que la corriente por H1 es la mitad de la de H3, la siguiente expresión es válida:

$$W_3 = 2iW \quad (4.36)$$

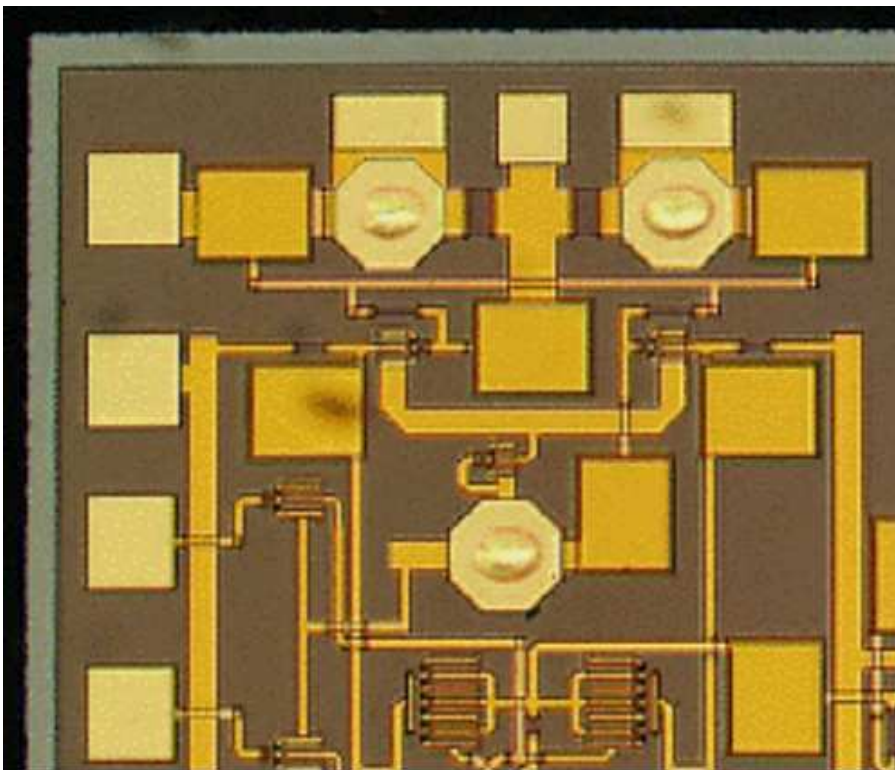
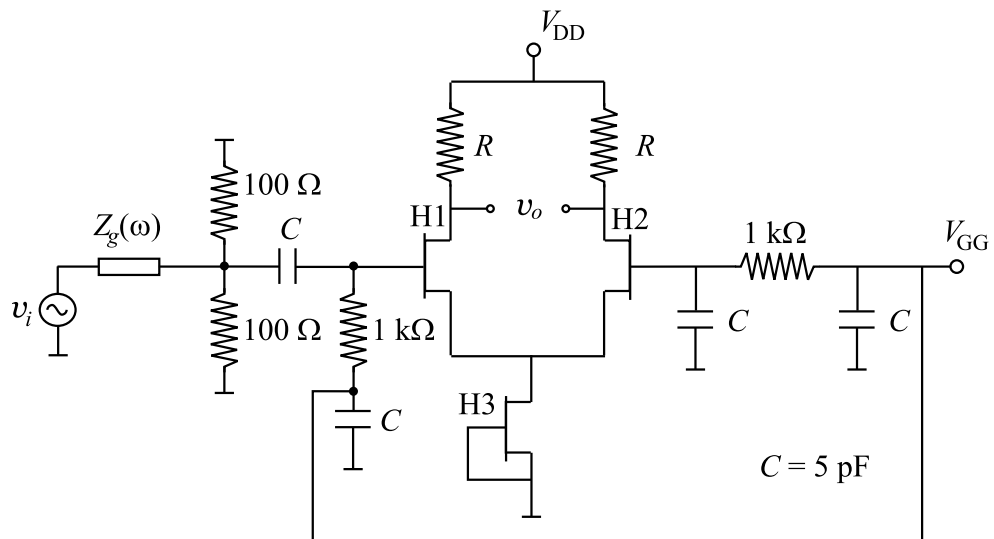
En la Figura 4.15 se muestra la ganancia diferencial como función de la corriente porcentual para diferentes anchuras de puerta y  $R = 610 \Omega$ . En la misma Figura se representa la IMR, y así es posible seleccionar una polarización óptima para conseguir simultáneamente una alta ganancia y baja distorsión. Por ejemplo, si se desea un par diferencial con una especificación de IMR  $> 70$  dB a 5 GHz, de acuerdo con las curvas anteriores, un valor de  $W = 2 \times 50 \mu\text{m}$  cumpliría con las restricciones si la corriente porcentual se escoge en torno a  $i = 60\%$ . En consecuencia debería tomarse como anchura de H3 un valor  $W_3 = 2 \times 60 \mu\text{m}$ , y sustituyendo  $i$  en (4.35) resultaría  $V_{GS1} = -0,22$  V.



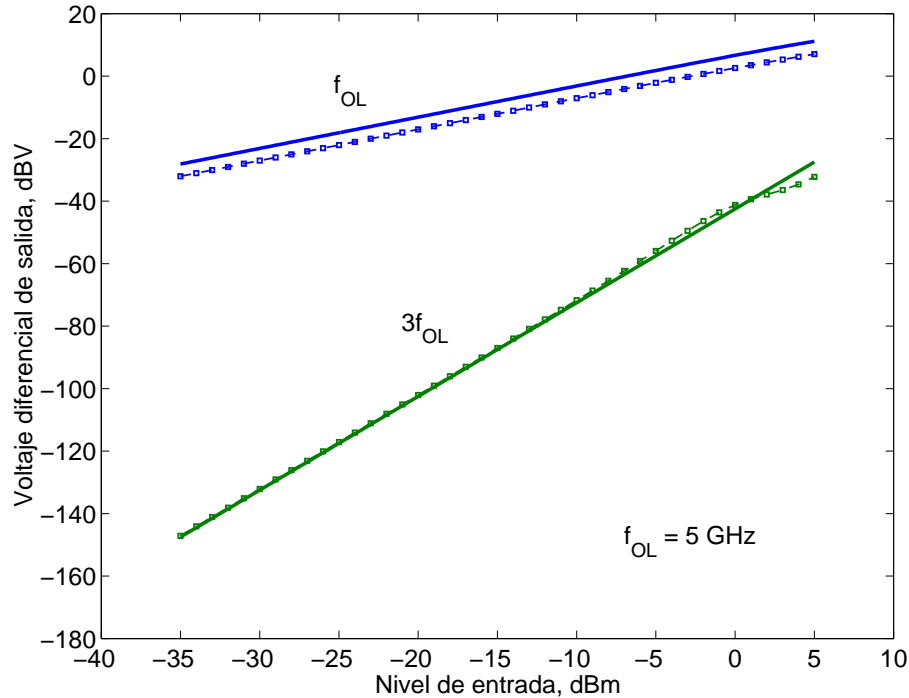
**Figura 4.15:** Ganancia e IMR de un par diferencial con  $R = 610 \Omega$  a 5 GHz como función de la corriente  $I_D$  normalizada.

A continuación se aplica este método para el análisis de los baluns de OL y salida de un mezclador doblemente balanceado que será ampliamente presentado en el Capítulo VI. En la Figura 4.16 se muestra la estructura propuesta para el balun de OL, incluyendo la red de polarización, y una fotografía ampliada de su implementación en tecnología MMIC. Es importante destacar que la entrada no balanceada se aplica a la puerta de H1, mientras que la puerta de H2 se coloca a tierra a la frecuencia de OL. Se incluyen dos resistencias de  $100 \Omega$  en paralelo para proporcionar una adaptación

#### IV. ESTRUCTURAS BALANCEADAS PARA MEZCLADORES



**Figura 4.16:** Estructura del balun de OL para un mezclador doblemente balanceado en tecnología HEMT y detalle de la realización MMIC.



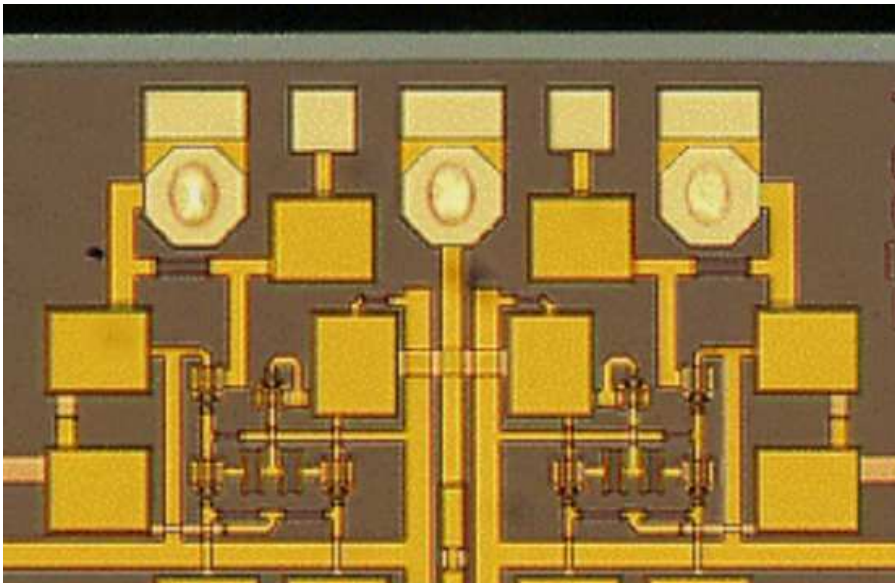
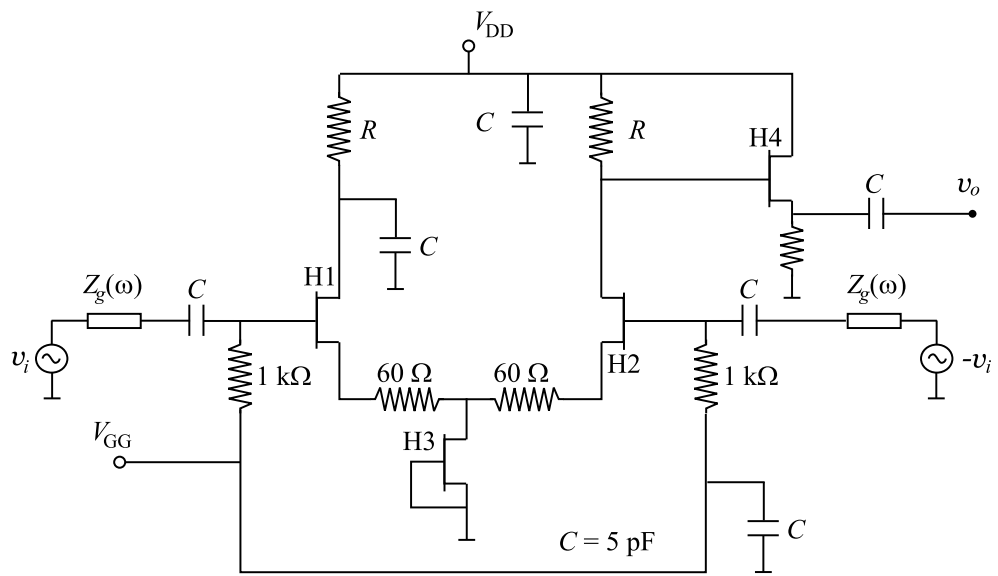
**Figura 4.17:** Respuesta de los armónicos fundamental y de tercer orden a 5 GHz del balun de OL. Trazo continuo: análisis por series de Volterra. Trazo discontinuo: balance armónico con modelo completo de la foundry para dispositivos HEMT.

de  $50 \Omega$  a la entrada. Las dimensiones elegidas para los transistores H1 y H3 son  $2 \times 30$  y  $2 \times 40 \mu\text{m}$ , respectivamente, para alcanzar una corriente próxima a 10 mA en H3 con  $V_{DS} = 2,5$  V. Un valor de  $V_{GG} = -2,1$  V produce  $V_{GS} = -0,38$  V en H1, y se seleccionó una resistencia de  $610 \Omega$  para obtener  $V_{DS1} = 2,7$  V con  $V_{DD} = 8$  V.

La evaluación del comportamiento no lineal se ha realizado a través de las expresiones en forma cerrada de las funciones de transferencia. En la Figura 4.17 se representa la salida diferencial a la frecuencia fundamental (5 GHz) y el tercer armónico (trazo continuo). Al comparar con la simulación realizada con la técnica de balance armónico y el modelo de la *foundry* (véase 1.7.4) se concluye que la correspondencia entre ambos resultados es muy buena.

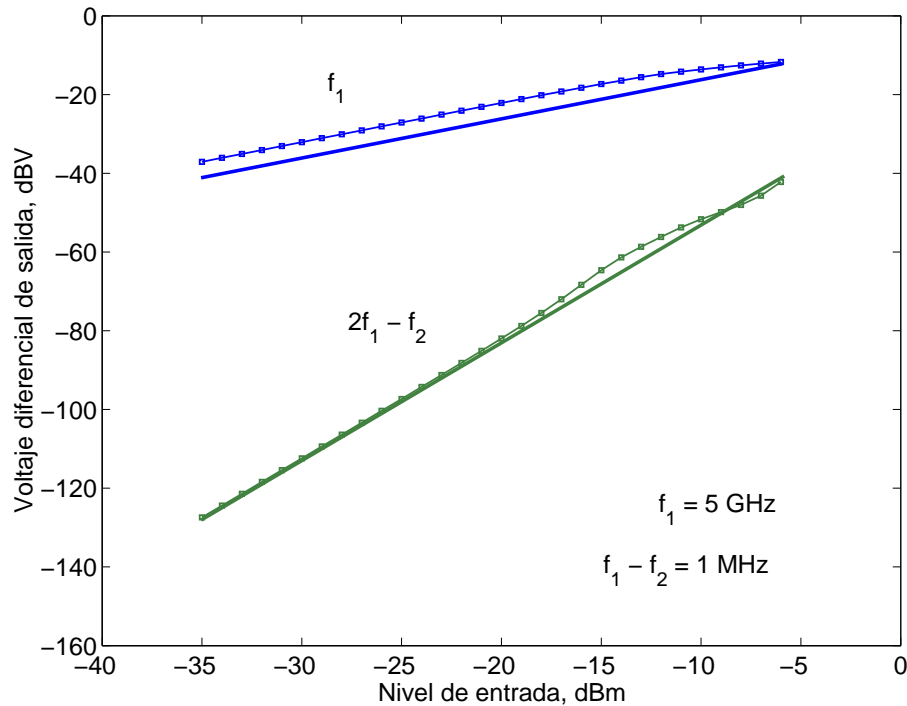
Con respecto al balun de salida, la estructura propuesta se representa en la Figura 4.18. Se seleccionaron los mismos valores para las anchuras de puerta, resistencia  $R$  y tensión de polarización  $V_{GG}$ . Aunque se aplica una tensión diferencial a la puerta de H1-H2, para desbalancear la salida, sólo se considera la tensión en el drenador de H2. Este voltaje se aplica a una etapa de salida formada por el transistor H4 en configuración de fuente-común, que proporciona una impedancia de salida baja. Tras realizar un análisis convencional del seguidor de fuente y obtenidas las funciones de transferencia no lineales del balun y la etapa de salida, éstas se combinaron siguiendo las técnicas de la Sección III.6. En la Figura 4.19 se representan la salida a la frecuencia

#### IV. ESTRUCTURAS BALANCEADAS PARA MEZCLADORES



**Figura 4.18:** Estructura del balun de salida para un mezclador doblemente balanceado en tecnología HEMT y detalle de la realización en tecnología MMIC.





**Figura 4.19:** Intermodulación de tercer orden y con dos tonos a la entrada del balun de salida a 5 GHz. Trazo continuo: análisis por series de Volterra. Trazo discontinuo: balance armónico con modelo completo de la foundry para dispositivos HEMT.

fundamental (5 GHz) y la intermodulación con dos tonos a la entrada, pudiendo advertirse nuevamente la coincidencia entre el método propuesto y los datos obtenidos por simulación mediante balance armónico y un modelo mucho más completo.

## Bibliografía

- [1] R. A. Minasian, "Simplified GaAs MESFET model to 10 GHz," *Electronics Letters*, Vol. 13, No. 8, pp. 549–541, jun. 1977.
- [2] G. M. Lambrianou y C. S. Aitchison, "Optimization of third-order intermodulation product and output power from an X-band MESFET amplifier using Volterra series analysis," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-33, No. 12, pp. 1395–1403, dic. 1985.
- [3] K. Chang, I. Bahl, y V. Nair, *RF and Microwave Circuit and Component Design for Wireless Systems*. New York: John Wiley and Sons, 2002.
- [4] S. A. Maas, *Microwave Mixers*. Norwood (MA): Artech House, 2nd Ed., 1993.
- [5] S. A. Maas, *Nonlinear Microwave Circuits*. Norwood (MA): Artech House, 1988.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [6] J. Reina-Tosina, C. Crespo-Cadenas, J. I. Alonso, y F. Pérez, "Volterra series analysis of MMIC active baluns in HEMT technology," *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol. 31, No. 4, pp. 272–276, nov. 2001.
- [7] M. Kirschning y R. H. Jansen, "Accurate wide-range design equations for the frequency-dependent characteristic of parallel coupled microstrip lines," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-32, No. 1, ene. 1984.
- [8] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*. Reading, Mass. [etc.]: Addison-Wesley, 2nd Ed., 1998.
- [9] H. Koizumi, S. Nagata, K. Tateoka, *et al.*, "A GaAs single balanced mixer MMIC with built-in active balun for personal communication systems," en *Proc. IEEE Microwave and Millimeter-Wave Monolithic Circuits Symp.*, pp. 77–80, 1995.
- [10] L. Chang-Soek, K. Min-Gun, L. Joe-Jin, *et al.*, "A low noise amplifier for a multi-band and multi-mode handset," en *Proc. IEEE RFIC Symp.*, pp. 47–50, 1998.
- [11] J. I. Alonso y J. C. Sánchez, "A simple technique for the design of GaAs MMIC double side-band modulators based on the Gilbert cell," *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol. 8, No. 2, pp. 93–97, feb. 1995.
- [12] J. Reina-Tosina y C. Crespo-Cadenas, "Análisis de baluns activos MMIC en tecnología HEMT," en *Actas XVI Simposium Nacional de la URSI*, pp. 331–332, sep. 2001, Madrid.
- [13] C. Crespo-Cadenas y J. Reina-Tosina, "Análisis de circuitos MMIC balanceados mediante series de Volterra," en *Actas XVI Simposium Nacional de la URSI*, pp. 477–478, sep. 2001, Madrid.

## Capítulo V

# Técnicas de análisis no lineal de mezcladores

Los mezcladores son circuitos no lineales excitados por dos tonos, de los cuales uno presenta un nivel elevado (OL) y el otro una potencia considerablemente inferior (RF), en general. La conversión de frecuencia que realizan los mezcladores tiene su origen en la aplicación de dispositivos no lineales a circuitos variantes en el tiempo. A pesar de la proliferación de nuevas estructuras para mezcladores FET a lo largo de los últimos años, ya sea en configuración no balanceada, simple o doblemente balanceada, con un solo FET o múltiples FETs, la transconductancia variante en el tiempo  $g_m(t)$  continúa siendo la principal responsable de la generación de productos de mezcla. De ahí que con cierta frecuencia se designe a este tipo de mezcladores como de transconductancia. Una excepción a esta regla viene representada por los mezcladores resistivos, en los que la conductancia no lineal variante en el tiempo  $g_d(t)$  es el agente dominante en la conversión de frecuencias. En ambos casos, los efectos de las capacidades no lineales  $C_{gs}$ ,  $C_{gd}$  son de menor importancia y es una práctica común despreciar su contribución en el análisis, si bien su adecuada caracterización puede ser crítica para explicar la generación de armónicos y productos de intermodulación de alto orden.

La disponibilidad de simuladores de propósito general basados en los métodos de balance armónico y series de Volterra facilita extraordinariamente el cálculo de niveles de intermodulación (IM) de una gran variedad de componentes de microondas, incluyendo los mezcladores. Sin embargo, por razones que no siempre están claras, estas herramientas de simulación a menudo predicen niveles de IM que no se corresponden con las medidas experimentales [1]. En otros casos, el enorme gasto computacional necesario para obtener un resultado significativo hace que tales cálculos parezcan poco prácticos. A pesar del dominio de los simuladores basados en balance armónico, ésta es una de las posibles técnicas para analizar circuitos no lineales. Los métodos basados en el dominio del tiempo o en series de Volterra tienen ventajas que complementan al balance armónico. Resulta relativamente simple utilizar la teoría de circuitos conven-

## V. TÉCNICAS DE ANÁLISIS NO LINEAL DE MEZCLADORES

---

cional para extraer las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de un circuito no lineal. Estas ecuaciones son no lineales y pueden ser resueltas numéricamente. Aunque las técnicas de simulación que operan en el dominio del tiempo son prácticas para analizar circuitos que incluyen únicamente elementos de parámetros concentrados, los componentes distribuidos se simulan con dificultad en el dominio del tiempo, al estar descritos por ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, y a menudo requieren un tiempo de simulación excesivo cuando se trata de obtener la respuesta en régimen permanente. El análisis en el dominio de la frecuencia evita estos problemas y facilita la formulación de las ecuaciones del circuito, al transformar las ecuaciones diferenciales en el dominio del tiempo en ecuaciones algebraicas de variable compleja.

El análisis basado en series de Volterra soslaya muchos de los inconvenientes inherentes al balance armónico, y es el método de elección para calcular niveles de IM de pequeña señal y otros fenómenos no lineales asociados. La principal ventaja del análisis con series de Volterra sobre el balance armónico es que no es un método iterativo, presenta inferior necesidad de memoria y no requiere el cómputo de transformadas de Fourier para pasar del dominio del tiempo al de la frecuencia. En resumen, el coste computacional es inferior y el rango dinámico mucho mayor, sobre todo cuando la excitación se compone de dos o más tonos con frecuencias inconmensurables, como sucede en el caso de los mezcladores. Por otro lado, existe la opinión generalizada de que los métodos de Volterra, a diferencia del balance armónico, están limitados a pequeñas excitaciones y no-linealidades débiles. No obstante, los ámbitos de aplicación de ambos métodos son complementarios y pueden utilizarse conjuntamente para el análisis de mezcladores, como ocurre con el método conocido como gran señal-pequeña señal.

Desde el punto de vista cronológico, durante las últimas décadas un gran número de publicaciones han puesto de manifiesto el interés por estudiar el funcionamiento de distintas configuraciones de mezcladores FET. Los trabajos pioneros están basados en aplicar los métodos más extendidos para el análisis de mezcladores a diodo [2, 3, 4], partiendo de la premisa de que el comportamiento del mezclador está fuertemente determinado por las formas de onda de la tensión y corriente en el dispositivo bombeado (*pumped*) por el OL. Los métodos propuestos en estos artículos son distintas variantes de la técnica de balance armónico [5, 6, 7], destacando las aportaciones de Camacho [8, 9] al estado actual del arte de este método y al cálculo de las derivadas parciales de la matriz jacobiana mediante expresiones analíticas.

La eficiencia de los algoritmos basados en el balance armónico se reduce drásticamente a medida que aumenta el número de señales de entrada. Como además el nivel de RF es comparativamente mucho más bajo que el de OL en un mezclador, la IMD debida a la entrada de RF puede quedar enmascarada por la presencia de una gran señal. Como alternativa, el método de gran señal-pequeña señal permite analizar primero el mezclador excitado exclusivamente por el OL, y convertirlo a continuación

en un circuito cuasi lineal y variante en el tiempo, excitado por la entrada de RF. Sin embargo, fenómenos como la respuesta de intermodulación no se pueden caracterizar adecuadamente si el análisis de pequeña señal se realiza sólo mediante matrices de conversión [10, 11], debido a que se trata de un análisis puramente lineal. Partiendo de las contribuciones de Swerdlow [4], Maas [12] propone una extensión del método de gran señal-pequeña señal que permite la predicción de la IMD, combinando cualquier método para la obtención de la señal de OL, sin restricciones, con series de Volterra con *kernels* variantes en el tiempo para la señal de RF. Maas aplica con éxito este método<sup>1</sup> al análisis de un mezclador a diodo. Posteriormente Peng [13, 14] extiende esta técnica al análisis no lineal de diferentes mezcladores FET. Desde entonces este método se ha utilizado repetidamente en el análisis de mezcladores por distintos autores [15, 16, 17]. Recientemente se han presentado trabajos de análisis de mezcladores desde la perspectiva de series dobles de Volterra [18, 19], obteniéndose expresiones cerradas para las funciones de transferencia no lineales de un mezclador FET resistivo.

En la primera sección de este capítulo se resumen los principales métodos basados en la técnica de balance armónico, siguiendo el planteamiento de Kundert [20] y Maas [21], con el objeto de hallar las formas de onda que se producen en un mezclador FET debido a la acción del OL. A continuación se analiza el proceso de mezcla considerando la señal de RF en un circuito variante en el tiempo que puede ser analizado mediante de matrices de conversión. Posteriormente, se presenta el mismo problema abordado desde la aplicación de series de Volterra con *kernels* variantes en el tiempo. Por último, se completa la descripción iniciada en el Capítulo III sobre series dobles de Volterra, detallando el análisis del mezclador FET propuesto en [18], y el mismo enfoque permite presentar una demostración formal del método de Maas.

## V.1. Balance armónico

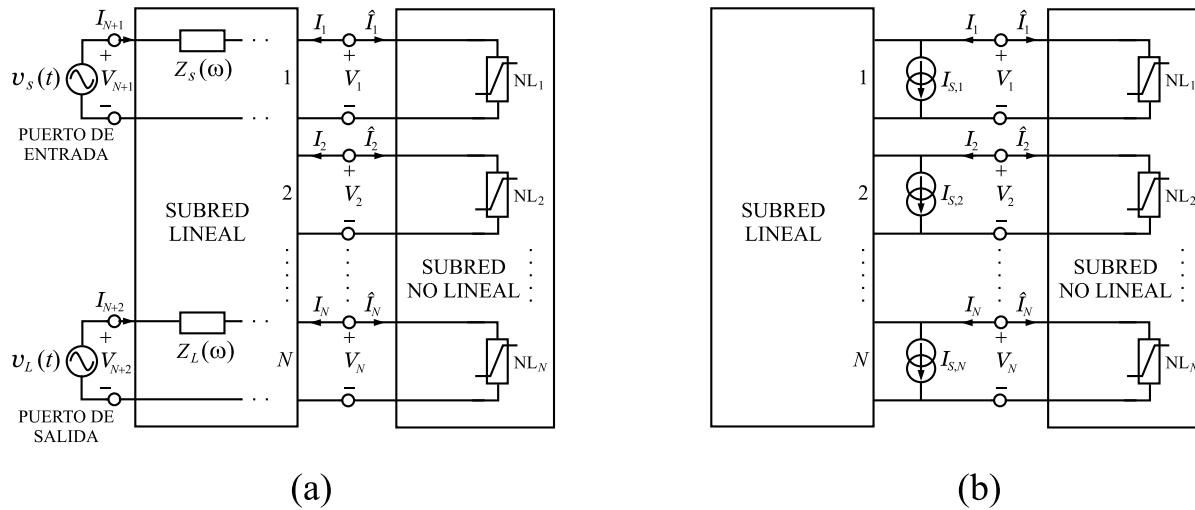
Una forma clásica de obtener la respuesta en régimen permanente de un sistema regido por ecuaciones diferenciales lineales con estímulos sinusoidales de frecuencia  $\omega_p$ , consiste en asumir una solución que pueda expresarse como  $x(t) = \Re[X \exp(j\omega_p t)]$ , donde  $X$  es la amplitud compleja o fasor de la solución. Cuando esta respuesta se ensaya en las ecuaciones diferenciales y se calculan las derivadas, se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas que se resuelve para determinar el fasor  $X$ . El balance armónico se puede presentar como una extensión del análisis fasorial para ecuaciones diferenciales no lineales. Suponiendo que la solución es periódica y que se puede descomponer en una combinación lineal de sinusoides armónicamente relacionadas, una vez que se sustituye esta solución, es posible factorizar la ecuación resultante en una suma de términos sinusoidales puros. Debido a la ortogonalidad entre sinusoi-

<sup>1</sup>En adelante se designará esta técnica como método de Maas.

## V. TÉCNICAS DE ANÁLISIS NO LINEAL DE MEZCLADORES

des de diferentes armónicos, se pueden obtener ecuaciones más simples, una para cada armónico. Estas ecuaciones no lineales se resuelven hallando los coeficientes de las sinusoides que determinan el balance de la correspondiente ecuación algebraica asociada a los distintos armónicos.

En la Figura 5.1a se muestra una forma conveniente de agrupar los elementos de circuito de una red no lineal. La subred lineal puede analizarse como una red multi-puerto caracterizada por su matriz de parámetros de admitancia. Cada puerto de esta red se conecta a una fuente de excitación externa (puertos  $N+1, N+2$ ), o bien a un elemento de circuito no lineal (puertos 1 a  $N$ ). Las impedancias de fuente y carga  $Z_s(\omega)$  y  $Z_L(\omega)$  se consideran incluidas dentro de la subred lineal. Aunque en teoría debe existir un número infinito de armónicos en cada puerto, se pueden ignorar los armónicos a partir de cierto orden  $K$ , de manera que la componente de DC y los primeros  $K$  armónicos describen adecuadamente todas las tensiones y corrientes.



**Figura 5.1:** Circuito no lineal dividido en una subred lineal y una subred no lineal.

La subred lineal puede ser analizada mediante análisis nodal a través de su matriz de admitancias:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_{N+1} \\ \mathbf{I}_{N+2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{1,1} & \dots & \mathbf{Y}_{1,N} & \mathbf{Y}_{1,N+1} & \mathbf{Y}_{1,N+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{N,1} & \dots & \mathbf{Y}_{N,N} & \mathbf{Y}_{N,N+1} & \mathbf{Y}_{N,N+2} \\ \mathbf{Y}_{N+1,1} & \dots & \mathbf{Y}_{N+1,N} & \mathbf{Y}_{N+1,N+1} & \mathbf{Y}_{N+1,N+2} \\ \mathbf{Y}_{N+2,1} & \dots & \mathbf{Y}_{N+2,N} & \mathbf{Y}_{N+2,N+1} & \mathbf{Y}_{N+2,N+2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_N \\ \mathbf{V}_{N+1} \\ \mathbf{V}_{N+2} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

donde cada elemento de los vectores de tensiones y corrientes es a su vez un vector con la componente de DC y sus  $K$  primeros armónicos:

$$\mathbf{I}_n = [I_n(0) \dots I_n(K)]^T, \quad \mathbf{V}_n = [V_n(0) \dots V_n(K)]^T \quad (5.2)$$

y los elementos de la matriz de admitancias son submatrices diagonales correspon-

dientes a los distintos armónicos de la frecuencia fundamental  $\omega_p$ :

$$\mathbf{Y}_{m,n} = \begin{pmatrix} Y_{m,n}(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Y_{m,n}(\omega_p) \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Y_{m,n}(K\omega_p) \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Téngase en cuenta que en el caso de emplear excitaciones reales, sólo se consideran componentes de frecuencia positivas, pues las componentes negativas son complejas conjugadas de las positivas y se pueden obtener de forma inmediata a partir de éstas. Es conveniente reparticionar la expresión (5.1) de manera que se escriba como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_N \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{1,N+1} & \mathbf{Y}_{1,N+2} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{N,N+1} & \mathbf{Y}_{N,N+2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{N+1} \\ \mathbf{V}_{N+2} \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{1,1} & \dots & \mathbf{Y}_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{N,1} & \dots & \mathbf{Y}_{N,N} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_N \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

o bien:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_s + \mathbf{Y}_{N \times N} \mathbf{V}, \quad (5.5)$$

donde  $\mathbf{Y}_{N \times N}$  es la submatriz formada por las  $N$  primeras filas y columnas de  $\mathbf{Y}$ , e  $\mathbf{I}_s$  representa un vector de fuentes de corriente. Esta ecuación puede representarse mediante el circuito equivalente mostrado en la Figura 5.1b, en el que las fuentes de excitación de los puertos  $N + 1$  y  $N + 2$  se sustituyen por fuentes de corriente en paralelo con los  $N$  primeros puertos.

En el Capítulo III se ha visto que en dispositivos FET los elementos de circuito no lineales pueden ser capacidades, conductancias o fuentes de corriente controladas por tensión. En todos los casos el análisis se realiza en el dominio del tiempo antitransformando las correspondientes amplitudes complejas de cada puerto:

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathbf{V}_n] \rightarrow v_n(t). \quad (5.6)$$

En el caso de una capacidad no lineal, la forma de onda de la carga puede expresarse como función de las tensiones de los  $N$  puertos, i.e.  $q_n(t) = f_{q_n}(v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t))$ . Aplicando la transformada de Fourier se obtienen las amplitudes complejas de la capacidad no lineal de cada puerto:

$$\mathcal{F}[q_n(t)] \rightarrow \mathbf{Q}_n. \quad (5.7)$$

De acuerdo con el teorema de Nyquist, la función  $f$  debe ser evaluada al menos en  $2K$  instantes de tiempo por periodo para determinar adecuadamente los coeficientes de los  $K$  primeros armónicos. Sin embargo, es una buena práctica utilizar más muestras de las necesarias, sobremuestreando las formas de onda temporales entre 2.5 y 2.6 veces el número de armónicos, para reducir los errores de *aliasing*. De esta manera, se construye un vector con los armónicos de la carga de la capacidad no lineal de cada nodo:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_1 \dots \mathbf{Q}_N]^T, \text{ donde } \mathbf{Q}_n = [Q_n(0) \dots Q_n(K)]^T. \quad (5.8)$$

## V. TÉCNICAS DE ANÁLISIS NO LINEAL DE MEZCLADORES

La corriente a través de la capacidad no lineal se puede expresar a través de la derivada de la carga:

$$i_c(n, t) = \frac{dq_n(t)}{dt} \leftrightarrow jk\omega_p Q_n(k). \quad (5.9)$$

En forma compacta la expresión (5.9) también se puede escribir como:

$$\mathbf{I}_c = j\Omega\mathbf{Q}, \quad (5.10)$$

donde  $\Omega$  es una matriz diagonal que consta de  $N$  ciclos de  $(0, \dots, K)\omega_p$  a lo largo de la diagonal principal.

La corriente instantánea a su paso por una conductancia no lineal y una fuente de corriente controlada puede expresarse como:

$$i_g(n, t) = g_n(v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t)) \leftrightarrow \mathbf{I}_G(n) = \mathcal{F}[i_g(n, t)]. \quad (5.11)$$

Así, se construye también un vector con los armónicos de la corriente no lineal de cada nodo:

$$\mathbf{I}_G = [\mathbf{I}_G(1) \ \dots \ \mathbf{I}_G(N)]^T, \text{ donde } \mathbf{I}_G(n) = [I_G(n, 0) \ \dots \ I_G(n, K)]^T. \quad (5.12)$$

Sustituyendo (5.9) y (5.12) en (5.5), se obtiene la expresión:

$$\mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{I}_s + \mathbf{Y}_{N \times N} \mathbf{V} + j\Omega\mathbf{Q} + \mathbf{I}_G = \mathbf{0}. \quad (5.13)$$

Obsérvese que si el vector  $\mathbf{V}$  es tal que  $\mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$ , entonces  $\mathbf{V}$  es la solución del balance armónico.

En la Figura 5.2a se muestra la estructura de un mezclador FET de un solo dispositivo, que sirve para el análisis de gran señal de una considerable variedad de circuitos FET. No se indica explícitamente dónde se aplica la señal de RF, que puede inyectarse bien por la puerta o por el drenador, como por ejemplo ocurre con el *gate mixer* o con el mezclador resistivo, respectivamente. Para aplicar el método de balance armónico, es conveniente estructurar el circuito en una subred lineal y en otra subred que incluya los elementos no lineales. El circuito de la Figura 5.2b se ha organizado siguiendo la metodología propuesta.

Mediante análisis nodal se obtienen las siguientes expresiones para los elementos de la matriz de admitancias de la subred lineal (cinco puertos):

$$\mathbf{Y}_{11} = \mathbf{R}_i^{-1} \quad (5.14a)$$

$$\mathbf{Y}_{22} = \mathbf{R}_i^{-1} + j\Omega C_{ds} + [\mathbf{Z}_s + (\mathbf{Z}_d^{-1} + \mathbf{Z}_g^{-1})^{-1}]^{-1} \quad (5.14b)$$

$$\mathbf{Y}_{33} = [\mathbf{Z}_g + (\mathbf{Z}_d^{-1} + \mathbf{Z}_s^{-1})^{-1}]^{-1} \quad (5.14c)$$

$$\mathbf{Y}_{44} = [\mathbf{Z}_d + (\mathbf{Z}_s^{-1} + \mathbf{Z}_g^{-1})^{-1}]^{-1} \quad (5.14d)$$

$$\mathbf{Y}_{55} = \mathbf{Y}_{11} + \mathbf{Y}_{33} \quad (5.14e)$$



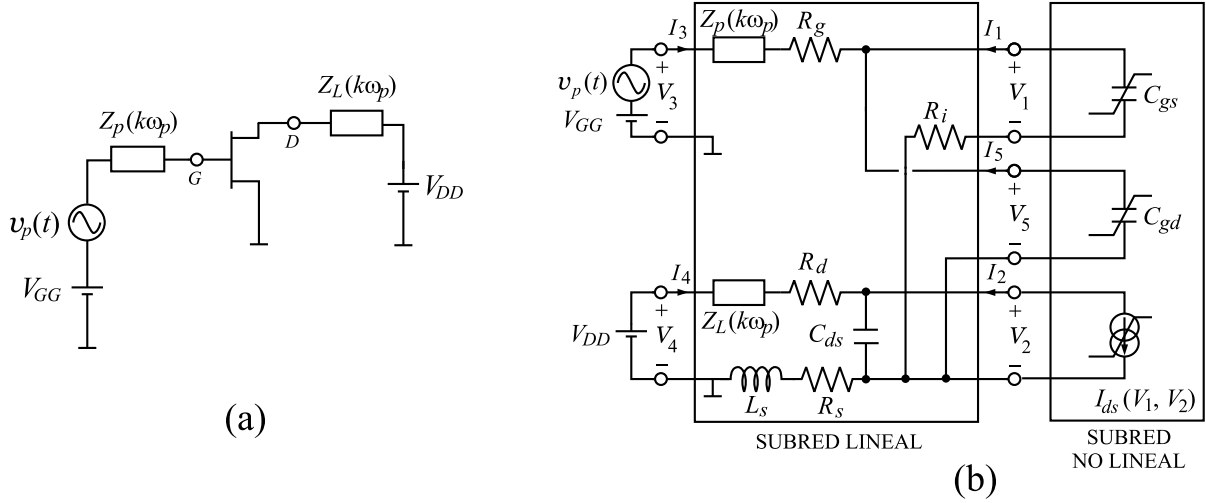


Figura 5.2: Circuito equivalente de un mezclador FET para el análisis de gran señal.

$$\mathbf{Y}_{12} = -\mathbf{Y}_{11}, \mathbf{Y}_{13} = \mathbf{Y}_{14} = \mathbf{0}, \mathbf{Y}_{15} = \mathbf{Y}_{12} \quad (5.14f)$$

$$\mathbf{Y}_{23} = -\mathbf{Z}_s^{-1} (\mathbf{Z}_d^{-1} + \mathbf{Z}_s^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{Y}_{33} \quad (5.14g)$$

$$\mathbf{Y}_{24} = -\mathbf{Z}_s^{-1} (\mathbf{Z}_s^{-1} + \mathbf{Z}_g^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{Y}_{44} \quad (5.14h)$$

$$\mathbf{Y}_{25} = \mathbf{Y}_{11} - \mathbf{Y}_{23} \quad (5.14i)$$

$$\mathbf{Y}_{34} = -\mathbf{Z}_g^{-1} (\mathbf{Z}_s^{-1} + \mathbf{Z}_g^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{Y}_{44} \quad (5.14j)$$

$$\mathbf{Y}_{35} = -\mathbf{Y}_{33} \quad (5.14k)$$

$$\mathbf{Y}_{45} = -\mathbf{Y}_{34} \quad (5.14l)$$

donde  $\mathbf{Z}_g = \mathbf{Z}_p + \mathbf{R}_g$ ,  $\mathbf{Z}_d = \mathbf{Z}_L + \mathbf{R}_d$  y  $\mathbf{Z}_s = \mathbf{R}_s + j\Omega L_s$ . Los restantes elementos se calculan a partir de la condición de reciprocidad de la subred lineal, que determina  $\mathbf{Y}_{ij} = \mathbf{Y}_{ji}$ .

Si el dispositivo está polarizado en la región de saturación, como ocurre en numerosos mezcladores FET, es una práctica común considerar lineal el comportamiento de la capacidad  $C_{gd}$ . El número de puertos de la subred lineal se reduce entonces a cuatro. Si se mantienen las referencias de las tensiones y corrientes de la Figura 5.2b, los elementos de la nueva matriz de admitancias ( $\mathbf{Y}'_{ij}$ ) se pueden hallar a partir de (5.14) aplicando la siguiente regla:

$$\mathbf{Y}'_{ij} = \mathbf{Y}_{ij} - \mathbf{Y}_{i5} (\mathbf{Y}_{55} + j\Omega C_{gd})^{-1} \mathbf{Y}_{5j}. \quad (5.15)$$

La expresión (5.13) se escribe ahora como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{I}_s + \mathbf{Y}_{2 \times 2} \mathbf{V} + j\Omega \mathbf{Q} + \mathbf{I}_G = \mathbf{0}, \quad (5.16)$$

donde:

$$\mathbf{Y}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}'_{11} & \mathbf{Y}'_{12} \\ \mathbf{Y}'_{21} & \mathbf{Y}'_{22} \end{bmatrix} \quad (5.17a)$$

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{s1} \\ \mathbf{I}_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}'_{13} \mathbf{V}_3 + \mathbf{Y}'_{14} \mathbf{V}_4 \\ \mathbf{Y}'_{23} \mathbf{V}_3 + \mathbf{Y}'_{24} \mathbf{V}_4 \end{bmatrix} \quad (5.17b)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{gs} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.17c)$$

$$\mathbf{I}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{ds} \end{bmatrix} \quad (5.17d)$$

Para la resolución eficiente del sistema de ecuaciones no lineales (5.13) ó (5.16) se requiere un método numérico iterativo. Dejando a un lado las técnicas de optimización o programación no lineal, basadas en minimizar la función de coste  $\epsilon = \mathbf{F}(\mathbf{V})\mathbf{F}^{*T}(\mathbf{V})$ , que no han tenido gran aceptación por su elevada carga computacional y problemas de convergencia global, los métodos de relajación armónica y de Newton han sido ampliamente utilizados.

La técnica de relajación por división (*splitting*) fue inicialmente propuesta para resolver sistemas de ecuaciones lineales  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Si se considera la descomposición  $\mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{C}$ , siendo  $\mathbf{B}$  una matriz no singular, una solución iterativa de punto fijo de este sistema es  $\mathbf{x}^{(j+1)} = \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{Cx}^{(j)} + \mathbf{b})$ , donde  $\mathbf{x}^{(j)}$  denota la estimación de la incógnita  $\mathbf{x}$  correspondiente a la  $j$ -ésima iteración. El algoritmo es convergente si la magnitud de todos los autovalores de  $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}$  es menor que uno. Aplicado al balance armónico, sea  $\hat{\mathbf{I}}^{(j)} = j\Omega\mathbf{Q}(\mathbf{V}^{(j)}) + \mathbf{I}_G(\mathbf{V}^{(j)})$  el vector de corrientes no lineales estimado tras la  $j$ -ésima iteración. Teniendo en cuenta que el balance armónico consiste en hallar  $\mathbf{V}$  tal que  $\mathbf{I} = -\hat{\mathbf{I}}$ , si se toma  $\mathbf{I}^{(j)} = -\hat{\mathbf{I}}^{(j)}$ , puede proponerse la siguiente actualización del vector de tensiones despejando  $\mathbf{V}$  de (5.5):

$$\mathbf{V}^{(j+1)} = \mathbf{Y}_{N \times N} (\mathbf{I}^{(j)} - \mathbf{I}_s) . \quad (5.18)$$

En la práctica, a pesar de que el valor de  $\mathbf{V}^{(0)}$  esté suficientemente próximo a la solución y de que las no-linealidades sean muy débiles, no se puede garantizar la convergencia de este método, y de hecho casi siempre diverge. Por este motivo, es preferible utilizar la siguiente variante:

$$\mathbf{U}^{(j)} = \mathbf{Y}_{N \times N} (\mathbf{I}^{(j)} - \mathbf{I}_s) \quad (5.19a)$$

$$\mathbf{V}^{(j+1)} = s\mathbf{U}^{(j)} + (1 - s)\mathbf{V}^{(j)} \quad (5.19b)$$

donde  $s$  es una constante real ( $0 < s < 1$ ) que se determina empíricamente. Valores de  $s$  próximos a cero favorecen la convergencia, aunque lentamente. A medida que  $s$  tiende a uno, la velocidad de convergencia aumenta, aunque ésta puede llegar a perderse. Un valor típico es  $s = 0,2$ , e incluso menor si la estimación inicial no es lo suficientemente buena, el circuito es fuertemente no lineal o la magnitud de la excitación es grande.

La aplicación del método de Newton a (5.13) se traduce en la siguiente fórmula iterativa:

$$\mathbf{V}^{(j+1)} = \mathbf{V}^{(j)} - \mathbf{J}_F^{-1}(\mathbf{V}^{(j)})\mathbf{F}(\mathbf{V}^{(j)}) , \quad (5.20)$$

donde  $\mathbf{J}_F(\mathbf{V}^{(j)})$  es la matriz jacobiana de  $\mathbf{F}(\mathbf{V}^{(j)})$ , cuyos elementos responden a la siguiente definición:

$$\frac{\partial F_n(k)}{\partial V_m(l)} = Y_{m,n}(k, l) + \frac{\partial I_G(n, k)}{\partial V_m(l)} + jk\omega_p \frac{\partial Q_n(k)}{\partial V_m(l)}, \quad (5.21)$$

y donde  $Y_{m,n}(k, l)$  es igual a  $Y_{m,n}(k\omega_p)$  si  $k = l$ , y cero en otro caso. Las derivadas parciales se definen como sigue:

$$\frac{\partial I_G(n, k)}{\partial V_m(l)} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial i_g(n, t)}{\partial V_m(l)} \exp(-jk\omega_p t) dt \quad (5.22a)$$

$$\frac{\partial Q_n(k)}{\partial V_m(l)} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial q_n(t)}{\partial V_m(l)} \exp(-jk\omega_p t) dt \quad (5.22b)$$

siendo  $T = 2\pi/\omega_p$  el periodo fundamental. La principal ventaja de este método consiste en que hace un uso completo de las derivadas de la función de error respecto de cada variable en cada puerto. Por este motivo, es capaz de lograr la convergencia incluso con un número de variables muy elevado. Su principal desventaja es el tiempo de cómputo que requiere la generación del jacobiano, por lo que resulta muy conveniente disponer de expresiones en forma cerrada para sus elementos si se quiere evitar el cálculo de las derivadas por medio de diferencias finitas [2, 9]. Aplicando la regla de la cadena a las expresiones (5.22a) y (5.22b), se tiene:

$$\frac{\partial I_G(n, k)}{\partial V_m(l)} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial i_g(n, t)}{\partial v_m(t)} \cdot \frac{\partial v_m(t)}{\partial V_m(l)} \exp(-jk\omega_p t) dt \quad (5.23a)$$

$$\frac{\partial Q_n(k)}{\partial V_m(l)} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial q_n(t)}{\partial v_m(t)} \cdot \frac{\partial v_m(t)}{\partial V_m(l)} \exp(-jk\omega_p t) dt \quad (5.23b)$$

donde:

$$v_m(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V_m(k) \exp(jk\omega_p t), \quad (5.24)$$

y en consecuencia:

$$\frac{\partial v_m(t)}{\partial V_m(l)} = \exp(jl\omega_p t). \quad (5.25)$$

Sean  $G_{nm}(k)$  y  $C_{nm}(k)$  los coeficientes de Fourier de las primeras derivadas de la conductancia no lineal y de la capacidad, respectivamente:

$$G_{nm}(k) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial i_g(n, t)}{\partial v_m(t)} \exp(-jk\omega_p t) dt \quad (5.26a)$$

$$C_{nm}(k) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial q_n(t)}{\partial v_m(t)} \exp(-jk\omega_p t) dt \quad (5.26b)$$

Sustituyendo (5.25) en (5.23a) y (5.23b), al comparar con (5.26a) y (5.26b) resulta:

$$\frac{\partial I_G(n, k)}{\partial V_m(l)} = G_{nm}(k - l) \quad (5.27a)$$

$$\frac{\partial Q_n(k)}{\partial V_m(l)} = C_{nm}(k-l) \quad (5.27b)$$

En forma compacta, puede escribirse:

$$\mathbf{J}_F = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{1,1} & \cdots & \mathbf{J}_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{J}_{N,1} & \cdots & \mathbf{J}_{N,N} \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

donde

$$\mathbf{J}_{m,n} = \mathbf{Y}_{m,n} + \mathbf{G}_{m,n} + j\omega \mathbf{C}_{m,n}. \quad (5.29)$$

$\mathbf{Y}_{m,n}$  tiene la misma forma que en (5.3), y  $\omega$  es idéntica a  $\Omega$ , salvo que incluye un solo ciclo de  $0, \dots, K\omega_p$  a lo largo de la diagonal principal. Como ejemplo, a continuación se detalla la forma de  $\mathbf{J}_F$  para el mezclador FET descrito por las ecuaciones (5.17):

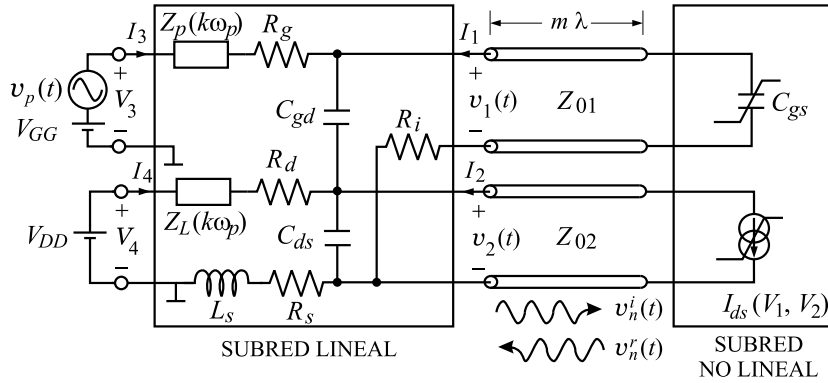
$$\begin{aligned} \mathbf{J}_F = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{1,1} & \mathbf{J}_{1,2} \\ \mathbf{J}_{2,1} & \mathbf{J}_{2,2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(0)}{\partial V_1(0)} & \cdots & \frac{\partial F_1(0)}{\partial V_1(K)} & \frac{\partial F_1(0)}{\partial V_2(0)} & \cdots & \frac{\partial F_1(0)}{\partial V_2(K)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_1(K)}{\partial V_1(0)} & \cdots & \frac{\partial F_1(K)}{\partial V_1(K)} & \frac{\partial F_1(K)}{\partial V_2(0)} & \cdots & \frac{\partial F_1(K)}{\partial V_2(K)} \\ \frac{\partial F_2(0)}{\partial V_1(0)} & \cdots & \frac{\partial F_2(0)}{\partial V_1(K)} & \frac{\partial F_2(0)}{\partial V_2(0)} & \cdots & \frac{\partial F_2(0)}{\partial V_2(K)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_2(K)}{\partial V_1(0)} & \cdots & \frac{\partial F_2(K)}{\partial V_1(K)} & \frac{\partial F_2(K)}{\partial V_2(0)} & \cdots & \frac{\partial F_2(K)}{\partial V_2(K)} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} Y'_{11}(0) & \cdots & 0 & Y'_{12}(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ jK\omega_p C_{gs}(K) & \cdots & Y'_{11}(K\omega_p) + jK\omega_p C_{gs}(0) & 0 & \cdots & Y'_{12}(K\omega_p) \\ Y'_{21}(0) + G_m(0) & \cdots & G_m(-K) & Y'_{22}(0) + G_d(0) & \cdots & G_d(-K) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_m(K) & \cdots & Y'_{21}(K\omega_p) + G_m(0) & G_d(K) & \cdots & Y'_{22}(K\omega_p) + G_d(0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Una variante del método de Newton propuesta por Curtice [7] utiliza la siguiente expresión para la actualización del vector de tensiones:

$$\mathbf{V}^{(j+1)} = \mathbf{V}^{(j)} - \alpha \mathbf{J}_F^{-1}(\mathbf{V}^{(j)}) \mathbf{F}(\mathbf{V}^{(j)}). \quad (5.31)$$

El parámetro  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) reduce uniformemente el cambio en los elementos de  $\mathbf{V}$  en cada iteración, mejorando así las propiedades de convergencia. Escogiendo un valor próximo a  $\alpha = 0,5$  se minimiza el número de iteraciones para alcanzar la convergencia.

Otra estrategia para resolver el problema de balance armónico es el algoritmo de reflexión propuesto originalmente por Kerr [3] y en el que se construye la solución a partir del análisis del circuito no lineal en régimen transitorio. Si se trata de un circuito estable, es de esperar que se pueda describir el régimen permanente a partir del transitorio. Para tal fin se intercalan líneas de transmisión ideales, de longitud  $m\lambda_p$



**Figura 5.3:** Circuito equivalente de un mezclador FET para el análisis de gran señal mediante el algoritmo de reflexión.

( $m$ -entero) e impedancia característica  $Z_{0n}$  entre los puertos de la subred lineal y los elementos de circuitos no lineales, modificando el circuito de la Figura 5.1b para que adopte la forma de la Figura 5.3, en el caso del mezclador FET de un solo dispositivo. Debido a la desadaptación entre las impedancias de la subred lineal y las impedancias características de las diferentes líneas de transmisión, se producen múltiples reflexiones en ambos extremos de las líneas a los diferentes armónicos que se consideran. Cada vez que se produce una nueva reflexión, se añade a la expresión instantánea de la onda de tensión en la línea de transmisión, hasta que su contribución sea despreciable, instante en el que se habrá alcanzado el régimen permanente.

Si se asume que la excitación se aplica al circuito en el instante  $t = 0$ , dado que las líneas de transmisión pueden tener una longitud arbitrariamente grande (siempre que sea un múltiplo entero de la longitud de onda asociada a la frecuencia fundamental), existe un intervalo de tiempo en el que no pueden viajar por ellas ondas reflejadas debido a que no ha dado tiempo aún a que la onda incidente alcance el elemento de circuito no lineal que carga el extremo. En este intervalo cada línea de transmisión se puede reemplazar por su impedancia característica, al coincidir con la impedancia de entrada, y las ondas incidentes en los  $N$  puertos  $v_{n,i}^{(0)}(t)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , se pueden hallar mediante el análisis directo de la subred lineal.

Una vez que estas ondas alcanzan los extremos de las líneas de transmisión, las ondas reflejadas  $v_{n,r}^{(0)}(t)$  se determinan analizando en el dominio del tiempo las corrientes que atraviesan los elementos de circuito no lineales, expresando:

$$i_n^{(0)}(t) = \frac{v_{n,i}^{(0)}(t) - v_{n,r}^{(0)}(t)}{Z_{0n}} \rightarrow v_{n,r}^{(0)}(t) = v_{n,i}^{(0)}(t) - i_n^{(0)}(t)Z_{0n} . \quad (5.32)$$

Para construir la nueva onda incidente es preciso conocer las componentes de la onda reflejada en el dominio de la frecuencia, i.e.  $V_{n,r}^{(0)}(k\omega_p)$ , para así poder multiplicar cada armónico por el correspondiente coeficiente de reflexión:

$$v_{n,i}^{(1)}(t) = v_{n,i}^{(0)}(t) + \frac{1}{2} \sum_{k=-K}^K \Gamma_n(k\omega_p) V_{n,r}^{(0)}(k\omega_p) \exp(jk\omega_p t) , \quad (5.33)$$

donde:

$$\Gamma_n(k\omega_p) = \frac{Z_n(k\omega_p) - Z_{0n}}{Z_n(k\omega_p) + Z_{0n}}, \quad (5.34)$$

siendo  $Z_n(k\omega_p)$  la impedancia vista a la entrada del puerto  $n$  a la frecuencia  $k\omega_p$ . Teniendo en cuenta que en cada iteración se añade  $v_{n,i}^{(0)}(t)$ , después de la  $j$ -ésima iteración, la nueva onda incidente es:

$$v_{n,i}^{(j+1)}(t) = v_{n,i}^{(0)}(t) + \frac{1}{2} \sum_{k=-K}^K \Gamma_n(k\omega_p) V_{n,r}^{(j)}(k\omega_p) \exp(jk\omega_p t), \quad (5.35)$$

Una vez que se produce la convergencia, tras  $M$  iteraciones, la forma de onda de las tensiones en los  $N$  puertos es:

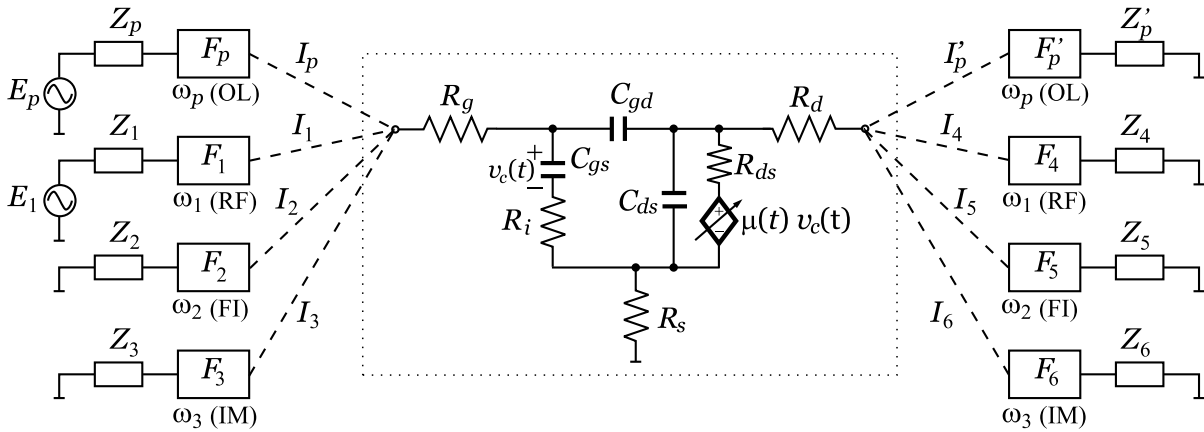
$$v_n^{(M)}(t) = v_{n,i}^{(M)}(t) + v_{n,r}^{(M)}(t). \quad (5.36)$$

Al despreciar los armónicos de orden superior a  $K$  implícitamente se supone que la impedancia de entrada de la subred lineal a esa frecuencia está adaptada a la impedancia característica de la línea de transmisión. Debido a que no requiere la evaluación de derivadas, el algoritmo de reflexión es más rápido por iteración que el método de Newton, y además no requiere una estimación inicial de la solución para empezar, y sus propiedades de convergencia son también buenas, a excepción de cuando el coeficiente de reflexión de alguna componente se hace próximo a la unidad, lo que puede provocar problemas de estabilidad numérica. Esto ocurre con frecuencia en mezcladores que presentan una impedancia cero en cada puerto en DC, debido a que la línea de transmisión cambia la polaridad de la onda en cada iteración, reduciéndose la velocidad de convergencia al valor correcto. Una forma de evitar este problema consiste en introducir artificialmente en cada puerto una impedancia en DC de valor igual a la impedancia característica de la línea, que haga cero el coeficiente de reflexión. Si los elementos de circuito no lineales drenan corriente de DC, es necesario compensar la polarización DC para tener en cuenta que se produce un desplazamiento debido a la caída de tensión en la impedancia introducida.

### V.2. Análisis de pequeña señal de circuitos variantes en el tiempo.

#### Matrices de conversión

Debido a la acción del OL, un mezclador se puede estudiar desde la perspectiva de un circuito variante en el tiempo. Siguiendo a Chang, Bahl y Nair [22, pp. 322–326], en la Figura 5.4 se muestra el circuito equivalente de pequeña señal de un mezclador FET de transconductancia. Las resistencias parásitas  $R_{gr}$ ,  $R_d$  y  $R_s$  son pequeñas comparadas con  $R_{ds}$  y pueden considerarse constantes. Los términos de mezcla producidos por las capacidades  $C_{gs}$ ,  $C_{gd}$  y  $C_{ds}$  son típicamente pequeños y sólo añaden efectos de segundo orden al funcionamiento del circuito, y por tanto se pueden utilizar valores



**Figura 5.4:** Circuito equivalente de un mezclador FET para el análisis de pequeña señal a las frecuencias de OL, RF, FI e imagen.

promedio de estas capacidades. Esto deja como principal responsable del proceso de conversión a la transconductancia  $g_m$ , que exhibe una fuerte dependencia no lineal con la polarización de puerta. Para ilustrar este proceso, cuando se aplica una señal de OL de alto nivel entre los terminales de puerta y fuente de un FET, para una determinada polarización, la transconductancia se convierte en una función variante en el tiempo  $g_m(t)$  con un periodo igual al del OL. Si  $\omega_p$  representa la frecuencia del OL, puede escribirse:

$$g_m(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k \exp(jk\omega_p t) , \quad (5.37)$$

donde  $G_k$  son los coeficientes del desarrollo de  $g_m(t)$  en series de Fourier:

$$G_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_m(t) \exp(-jk\omega_p t) d(\omega_p t) . \quad (5.38)$$

Si se consideran despreciables las componentes armónicas de la resistencia de drenador  $R_{ds}(t)$ , se puede definir un factor de amplificación variante en el tiempo  $\mu(t) = \overline{R_{ds}} g_m(t)$ , donde  $\overline{R_{ds}}$  representa el valor promedio de la resistencia de drenador. Al aplicar una tensión de pequeña señal  $v_c(t)$ , de frecuencia  $\omega_1 \neq \omega_p$ , en la capacidad de puerta, por acción de la transconductancia variante en el tiempo, aparece en el drenador una tensión  $\mu(t)v_c(t)$ . Esta tensión contiene componentes de frecuencia que pueden expresarse como  $\omega = n\omega_p \pm \omega_1$ , donde  $n$  toma cualquier valor entero. Se asume que no se generan armónicos de  $\omega_1$  al ser  $v_c(t)$  de bajo nivel.

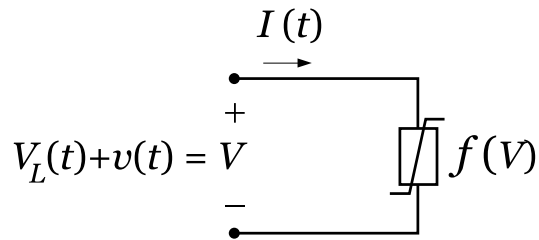
Cualquier análisis práctico de un mezclador FET debe contemplar, al menos, las componentes a las frecuencias de OL, RF, FI e imagen. En un conversor descendente la FI se define como  $|\omega_p - \omega_1|$ , y la frecuencia imagen se expresa como  $|2\omega_p - \omega_1|$ . En la Figura 5.4  $I_p, I_1, I_2, I_3$  y  $V_p, V_1, V_2, V_3$  denotan, respectivamente, las amplitudes complejas de las componentes de las corrientes y tensiones en la puerta del FET a cada una de las frecuencias mencionadas, mientras que  $I'_p, I_4, I_5, I_6$  y  $V'_p, V_4, V_5, V_6$  se refieren a las mismas componentes que aparecen en el drenador. En esta representación,

## V. TÉCNICAS DE ANÁLISIS NO LINEAL DE MEZCLADORES

los bloques etiquetados con  $F_k$  y  $F'_k$  son filtros ideales que dejan pasar completamente la frecuencia deseada con impedancia cero, y actúan como circuito abierto para las restantes componentes. El mezclador se puede analizar utilizando teoría de circuitos convencional aplicando las condiciones de contorno impuestas por las fuentes externas. Estas fuentes son  $E_1$ , de impedancia interna  $Z_1$ , para la señal de RF ( $\omega_1$ ), y  $E_p$ , con impedancia interna  $Z_p$ , para el OL. Todas las demás frecuencias están terminadas en impedancias complejas a ambos lados del FET. En general, puede escribirse:

$$V_k = E_k - I_k Z_k, \quad k = 1, 2, \dots, 6, \quad \text{y } E_k = 0, \quad \text{si } k \neq 1. \quad (5.39)$$

Este análisis, propuesto por Pucel [23], había sido aplicado previamente por Egami [2] al estudio del proceso de conversión en mezcladores a diodo. Con posterioridad se ha extendido al análisis de distintas configuraciones de mezcladores FET, pudiéndose citar el mezclador de puerta [10] y el mezclador de drenador [24], entre otros ejemplos.



**Figura 5.5:** Elemento de circuito no lineal bombeado por componentes de gran señal y pequeña señal.

Una formulación más sistemática de este método de análisis describe la relación entre las componentes de la tensión y la corriente a las diferentes frecuencias de mezcla, acudiendo a la notación matricial por medio de las llamadas *matrices de conversión*. Para dotar de completa generalidad al siguiente desarrollo, considérese que la relación  $I - V$  del elemento de circuito no lineal mostrado en la Figura 5.5 viene dada por  $I = f(V)$ , y supóngase que  $V(t)$  se expresa como la suma de una componente de gran señal  $V_L(t)$  y una componente de pequeña señal  $v(t)$ . Entonces, la corriente asociada a esta tensión se puede hallar mediante el desarrollo de  $f(V_L(t) + v(t))$  en series de Taylor:

$$I(V_L(t) + v(t)) = f(V_L(t) + v(t)) = f(V_L(t)) + \left. \frac{df(V)}{dV} \right|_{V=V_L(t)} v(t) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f(V)}{dV^2} \right|_{V=V_L(t)} v^2(t) + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3 f(V)}{dV^3} \right|_{V=V_L(t)} v^3(t) + \dots \quad (5.40)$$

La corriente incremental de pequeña señal se obtiene restando de la corriente la componente de gran señal:  $i(v(t)) = I(V_L(t) + v(t)) - I(V_L(t))$ . Teniendo en cuenta que



$v(t) \ll V_L(t)$ , al despreciar los términos de orden superior puede escribirse:

$$i(t) = \left. \frac{df(V)}{dV} \right|_{V=V_L(t)} v(t) = g(t)v(t) \quad (5.41)$$

Las matrices de conversión relacionan las componentes de la tensión y la corriente a las diferentes frecuencias de mezcla en un circuito armónicamente variante en el tiempo. Si  $V_L(t)$  es periódica, de frecuencia fundamental  $\omega_p$ , entonces  $g(t)$  admite un desarrollo en series de Fourier de coeficientes  $G_n$  (véase (5.37)–(5.38)). Una tensión  $v(t)$  sinusoidal pura, de frecuencia  $\omega_1$ , provocará componentes armónicas de la corriente  $i(t)$  que se pueden expresar como  $\omega = \pm\omega_1 + n\omega_p$ . Esta ecuación representa el conjunto de componentes de frecuencia mostradas en la Figura 5.6, en la que se aprecia una banda lateral a ambos lados de cada armónico de  $\omega_p$ , separada de estos por  $\omega_0 = |\omega_1 - \omega_p|$ . Una representación más conveniente para las frecuencias de mezcla es:

$$\omega_n = \omega_0 + n\omega_p. \quad (5.42)$$

La tensión  $v(t)$  y la corriente  $i(t)$  de pequeña señal se pueden expresar como sigue:

$$v(t) = \tilde{v}(t) + [\tilde{v}(t)]^* \quad (5.43a)$$

$$i(t) = \tilde{i}(t) + [\tilde{i}(t)]^*, \quad (5.43b)$$

donde:

$$\tilde{v}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n \exp(j\omega_n t) \quad \text{e} \quad \tilde{i}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \exp(j\omega_n t) \quad (5.44)$$

incluyen sólo las componentes negativas de las bandas laterales inferiores y las frecuencias positivas de las bandas laterales superiores. Las restantes componentes forman pares complejos conjugados con  $I_n$  y  $V_n$ . En virtud de (5.38) se tiene:

$$\begin{aligned} i(t) &= g(t)\tilde{v}(t) + g(t)[\tilde{v}(t)]^* \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k \exp(j\omega_k t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k^* \exp(-j\omega_k t) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_n V_m \exp(j\omega_{m+n} t) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_n V_m^* \exp(-j\omega_{m-n} t) \end{aligned} \quad (5.45)$$

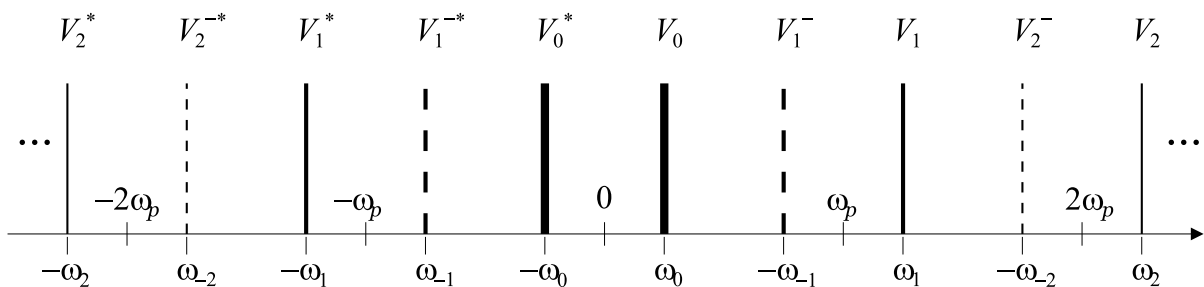


Figura 5.6: Componentes armónicas a la salida de un mezclador.

## V. TÉCNICAS DE ANÁLISIS NO LINEAL DE MEZCLADORES

Puesto que  $V_L(t)$  se asume real,  $g(t)$  también debe serlo, y por tanto los coeficientes de Fourier de la conductancia variante en el tiempo satisfacen la relación  $G_{-n} = G_n^*$ . Si se aplica el cambio de variable muda  $n \leftarrow -n$  en el segundo sumando del miembro de la derecha, (5.45) también puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k \exp(j\omega_k t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k^* \exp(-j\omega_k t) &= \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_n V_m \exp(j\omega_{m+n} t) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_n^* V_m^* \exp(-j\omega_{m+n} t) . \end{aligned} \quad (5.46)$$

Al igualar los términos de ambos miembros que varían a la misma frecuencia, se obtiene un sistema de infinitas ecuaciones que relacionan las amplitudes complejas  $I_k$  con  $V_m$  a través de los coeficientes de Fourier  $G_n$ :

$$I_k = \sum_{n+m=k}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_n V_m , \quad k = -\infty, \dots, \infty . \quad (5.47)$$

Si se asume que  $V_n$  e  $I_n$  son despreciables más allá de orden  $\pm N$ , este sistema de ecuaciones puede expresarse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} I_{-N} \\ I_{-N+1} \\ \vdots \\ I_{-1} \\ I_0 \\ I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 & G_{-1} & \cdots & G_{-2N} \\ G_1 & G_0 & \cdots & G_{-2N+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{N-1} & G_{N-2} & \cdots & G_{-N-1} \\ G_N & G_{N-1} & \cdots & G_{-N} \\ G_{N+1} & G_N & \cdots & G_{-N+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{2N} & G_{2N-1} & \cdots & G_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{-N} \\ V_{-N+1} \\ \vdots \\ V_{-1} \\ V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \mathbf{G} \cdot \begin{bmatrix} V_{-N} \\ V_{-N+1} \\ \vdots \\ V_{-1} \\ V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} , \quad (5.48)$$

donde  $\mathbf{G}$  recibe el nombre de matriz de conversión. Téngase en cuenta que  $\tilde{v}(t)$  e  $\tilde{i}(t)$  sólo incluyen la mitad de las componentes armónicas de  $v(t)$  e  $i(t)$ , así que no indican una representación completa de las formas de onda de la tensión y corriente, y además  $\omega_n$  es negativo cuando  $n < 0$ . Para que la operación con matrices de conversión sea compatible con el análisis fasorial convencional es necesario que las frecuencias asociadas a las componentes de los vectores de tensiones y corrientes de (5.48) sean positivas. De acuerdo con la Figura 5.6, sea  $V_k^-$  la amplitud compleja de la tensión de la banda lateral inferior asociada al armónico  $k\omega_p$  ( $k > 0$ ). La frecuencia que representaría a esta componente es  $-\omega_{-k}$ , y por tanto la amplitud compleja asociada no está incluida en  $\tilde{v}(t)$ . Es evidente que  $V_{-k} = V_k^{-*}$ , estando  $V_k^-$  ligada a una componente de frecuencia positiva. Reemplazando los  $N$  primeros elementos de los vectores de (5.48) por los conjugados de las amplitudes complejas de las bandas laterales inferiores, se

llega a:

$$\begin{bmatrix} I_N^{-*} \\ I_{N-1}^{-*} \\ \vdots \\ I_1^{-*} \\ I_0 \\ I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 & G_{-1} & \cdots & G_{-2N} \\ G_1 & G_0 & \cdots & G_{-2N+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{N-1} & G_{N-2} & \cdots & G_{-N-1} \\ G_N & G_{N-1} & \cdots & G_{-N} \\ G_{N+1} & G_N & \cdots & G_{-N+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{2N} & G_{2N-1} & \cdots & G_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_N^{-*} \\ V_{N-1}^{-*} \\ \vdots \\ V_1^{-*} \\ V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{I} = \mathbf{GV}, \quad (5.49)$$

Todos los elementos de los vectores  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{I}$  están asociados a componentes de frecuencias positivas, y esto permite trabajar con ellos de una forma similar a como se opera con fasores.

Si el elemento de circuito variante en el tiempo es una capacidad, la carga y la tensión están relacionadas según  $\tilde{q}(t) = c(t)\tilde{v}(t)$ , donde  $c(t)$  tiene asociada una serie de Fourier de coeficientes  $C_k$ . Al trabajar en el dominio de la frecuencia, expresando la corriente como la derivada de la carga, se obtiene:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k \exp(j\omega_k t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} j\omega_{m+n} C_n V_m \exp(j\omega_{m+n} t). \quad (5.50)$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} I_N^{-*} \\ I_{N-1}^{-*} \\ \vdots \\ I_0 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega_{-N} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & j\omega_{-N+1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & j\omega_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & j\omega_N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_0 & C_{-1} & \cdots & C_{-2N} \\ C_1 & C_0 & \cdots & C_{-2N+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_N & C_{N-1} & \cdots & C_{-N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{2N} & C_{2N-1} & \cdots & C_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_N^{-*} \\ V_{N-1}^{-*} \\ \vdots \\ V_0 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{I} = j\Omega\mathbf{C}\mathbf{V} \quad (5.51)$$

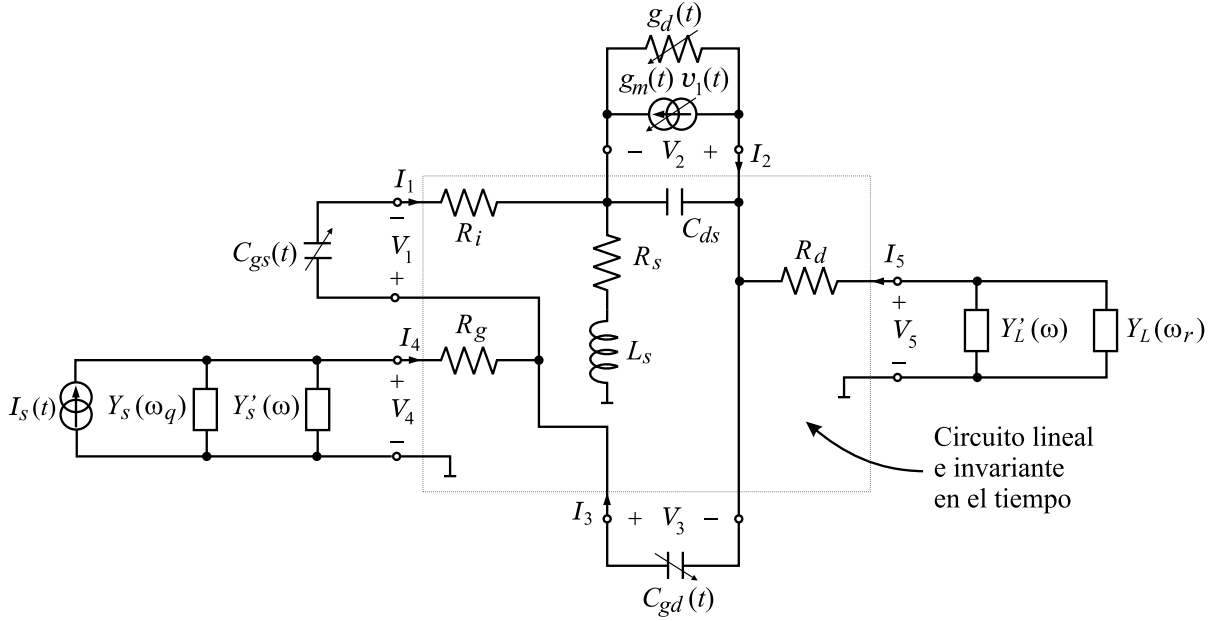
Por último, los elementos de circuito invariantes en el tiempo tienen asociada matrices de conversión diagonales. Si  $Z(\omega)$  representa una impedancia a cierta frecuencia  $\omega$ , la correspondiente matriz de conversión tiene la forma:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z(\omega_{-N}) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Z(\omega_{-N+1}) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Z(\omega_0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & Z(\omega_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z^*(-\omega_{-N}) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Z^*(-\omega_{-N+1}) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Z(\omega_0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & Z(\omega_N) \end{bmatrix}. \quad (5.52)$$

Dado que los vectores  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{I}$  satisfacen las leyes de Kirchhoff, se pueden escribir ecuaciones nodales para un circuito variante en el tiempo con matrices de conversión, de la misma manera que si el circuito tuviera coeficientes constantes, con la salvedad de que se utiliza notación matricial. Así, en [9, 23, 10], se pueden encontrar expresiones cerradas para la admitancia de transferencia, la ganancia de conversión o las impedancias de entrada y salida de un mezclador FET operando en saturación. Es de destacar que en todos estos casos el análisis es puramente lineal y no se describen fenómenos de segundo o tercer orden. Por este motivo, se manejan expresiones linealizadas de los elementos de circuito no lineales, capacidades y corrientes a través de matrices de conversión como las de la transconductancia de pequeña señal  $\mathbf{G}_m$  o de la conductancia de salida  $\mathbf{G}_d$ .

Regresando al análisis de pequeña señal del mezclador FET, Maas [21, pp. 428–432] propone una forma adecuada de agrupar los elementos de circuito, que se muestra en la Figura 5.7. La región recuadrada representa una subred lineal multipuerto invariante en el tiempo. Siguiendo la estrategia ya comentada anteriormente para el análisis de gran señal, a excepción de la entrada y la salida, en cada uno de los puertos de esta subred lineal se conecta un elemento de circuito variante en el tiempo.

Sean  $\omega_q = \omega_0 + q\omega_p$  y  $\omega_r = \omega_0 + r\omega_p$  dos frecuencias de mezcla. Por defecto,  $q = 1$  y  $\omega_q$  es la frecuencia de entrada a RF, mientras que  $r = 0$  designa a  $\omega_r$  como frecuencia de salida a FI. Sin embargo, este planteamiento se puede extender a cualquier pareja  $(p, r)$ . Para facilitar la imposición de condiciones sobre los filtros de entrada y salida, se ha separado explícitamente el valor de la admitancia de fuente a  $\omega_q$  y a otras frecuencias ( $Y'_s(\omega)$ , con  $Y'_s(\omega_q) = 0$ ). Análogamente,  $Y'_L(\omega)$  representa la admitancia de carga a frecuencias diferentes de la de salida  $\omega_r$ , con  $Y'_L(\omega_r) = 0$ . Al haberse empleado las mismas referencias que en la Figura 5.2, los elementos de la matriz de admitancias de la subred lineal se pueden leer directamente de (5.14), tomando ahora  $\mathbf{Z}_g = \mathbf{R}_g$  y  $\mathbf{Z}_d = \mathbf{R}_d$  al dejar fuera las impedancias de fuente y carga. Cada elemento de esta



**Figura 5.7:** Circuito equivalente de un mezclador FET para el análisis de pequeña señal.

matriz es, a su vez, una matriz diagonal con  $(2N + 1) \times (2N + 1)$  entradas.

Para tener en cuenta los elementos de circuito variantes en el tiempo se construye una matriz aumentada a partir de la matriz de admitancias, añadiendo matrices de conversión a las submatrices correspondientes. Como  $j\Omega C_{gs}$  relaciona  $I_1$  con  $V_1$ , se añade a  $Y_{11}$ ;  $G_{ds}$  a  $Y_{22}$ ;  $j\Omega C_{gd}$  a  $Y_{33}$ ; y  $G_m$  a  $Y_{21}$ . Por último,  $Y'_s$  e  $Y'_L$  se añaden respectivamente a  $Y_{44}$  e  $Y_{55}$ . Los nuevos puertos 1, 2 y 3 están terminados en circuito abierto a todas las frecuencias, y sólo la corriente de entrada a  $\omega_q$  ( $I_4(q)$ ) y la de salida a  $\omega_r$  ( $I_5(r)$ ) son distintas de cero. La matriz de admitancias aumentada relaciona las tensiones y corrientes de los cinco puertos a todas las frecuencias de mezcla. Una vez invertida esta matriz, el análisis del mezclador siguiendo esta metodología es prácticamente directo, ya que sólo las columnas de la matriz de impedancias que se multiplican por  $I_4(q)$  e  $I_5(r)$  son responsables de las tensiones en los distintos puertos a las diferentes frecuencias de mezcla. Asimismo, considerado el mezclador como una red de dos puertos, se puede extraer una matriz de impedancias  $2 \times 2$  que relacione las tensiones y corrientes a la entrada y a la salida, a  $\omega_q$  y  $\omega_r$ , respectivamente:

$$\begin{bmatrix} V_4(q) \\ V_5(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{44}(q, q) & Z_{45}(q, r) \\ Z_{44}(r, q) & Z_{45}(r, r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4(q) \\ I_5(r) \end{bmatrix}. \quad (5.53)$$

Renombrando  $Z_{11} = Z_{44}(q, q)$ ,  $Z_{12} = Z_{45}(q, r)$ ,  $Z_{21} = Z_{44}(r, q)$  y  $Z_{22} = Z_{45}(r, r)$ , las impedancias a la entrada y a la salida del mezclador vienen dadas por:

$$Z_{in}(\omega_q) = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_L(\omega_r)} \quad (5.54a)$$

$$Z_{out}(\omega_r) = Z_{22} - \frac{Z_{21}Z_{12}}{Z_{11} + Z_s(\omega_q)} \quad (5.54b)$$

y se tiene la siguiente expresión para la ganancia de conversión:

$$G_c = \frac{\langle P_L(\omega_r) \rangle}{\langle P_{in}(\omega_q) \rangle} = \frac{|Z_{21}|^2}{|Z_{22} + Z_L(\omega_r)|^2} \cdot \frac{\Re[Z_L(\omega_r)]}{\Re[Z_{in}(\omega_q)]}. \quad (5.55)$$

Nótese que (5.55) es una fórmula cerrada que permite conocer la respuesta del mezclador a  $\omega_r$  en función de la entrada a  $\omega_q$ .

### V.3. Series de Volterra con *kernels* variantes en el tiempo

El análisis de pequeña señal de la sección anterior parte de la hipótesis de que la excitación es relativamente pequeña, y como tal es posible ignorar los términos no lineales del desarrollo incremental en series de Taylor de (5.40), resultando una formulación lineal de pequeña señal. Además, no es inmediato extender su aplicación a excitaciones con múltiples tonos. La descripción de fenómenos adversos como la intermodulación requiere la consideración de entradas multitono y el carácter no lineal de los elementos de circuito que contribuyen a ella. Mientras que la eficiencia del balance armónico se reduce a medida que aumenta el número de señales de entrada, las series de Volterra resultan muy eficientes para analizar entradas multitono, si bien su uso asume que las no-linealidades incrementales son débiles y que las tensiones aplicadas son relativamente pequeñas. Virtualmente todos los dispositivos de estado sólido cumplen estas condiciones, siempre que no sean conducidos a un estado de saturación por acción de la excitación de pequeña señal. En el caso de un mezclador FET, el transistor puede ser llevado a un régimen fuertemente no lineal por un OL de gran señal, sin que ello impida que el análisis de pequeña señal se pueda llevar a cabo bajo las condiciones indicadas. En otras palabras, el FET bombeado por el OL se puede considerar como un dispositivo débilmente no lineal y variante en el tiempo. Bajo este supuesto, el análisis de las no-linealidades ante excitaciones multitono se puede efectuar de una manera similar a como se analiza un circuito débilmente no lineal e invariante en el tiempo con series de Volterra, con la salvedad de que los coeficientes de la serie de Taylor que describen la no-linealidad no son constantes, sino variantes en el tiempo. De ahí que se hable de series de Volterra con *kernels* variantes en el tiempo. La dificultad añadida a la formulación del método se encuentra en que no sólo aparecen las mezclas entre las frecuencias contenidas en la señal de entrada, sino además las de éstas con los distintos armónicos del OL. Puesto que las matrices de conversión son una herramienta matemática adecuada para la representación de las componentes espectrales de una tensión o corriente en un circuito armónicamente variante en el tiempo, se seguirán utilizando ampliamente en esta sección.

Como punto de partida, considérese nuevamente el elemento de circuito no lineal de la Figura 5.5 y la ecuación (5.40), que describe la corriente asociada al dispositivo bombeado por una componente de tensión de gran señal  $V_L(t)$ , a la que se superpone

otra de pequeña señal,  $v(t)$ . Reteniendo ahora los infinitos términos de la serie de Taylor, la corriente incremental se expresa como:

$$i(t) = g(t)v(t) + \sum_{n=2}^{\infty} g_n(t)v^n(t), \text{ donde } g_n(t) = \frac{1}{n!} \cdot \left. \frac{d^n f(V)}{dV^n} \right|_{V=V_L(t)}. \quad (5.56)$$

Al igual que sucedía con (3.85), será útil considerar que  $v(t)$  en (5.56) es la respuesta de un circuito no lineal y variante en el tiempo cuando se excita con una corriente  $i(t)$ . Siguiendo el método de Maas [21, pp.137–146], sea  $v_n(t)$  la componente de orden  $n$  del desarrollo de la tensión incremental en series de Volterra. Limitando esta expansión a componentes hasta de tercer orden, se tiene:

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) \quad (5.57a)$$

$$v^2(t) = v_1^2(t) + 2v_1(t)v_2(t) \quad (5.57b)$$

$$v^3(t) = v_1^3(t). \quad (5.57c)$$

Recuérdese que un producto de mezcla de orden  $n$  es cualquier combinación de  $n$  tonos de excitación, incluyendo frecuencias positivas y negativas. Obviamente el cuadrado de la tensión crea un producto de segundo orden debido a  $v_1^2(t)$  y otro de tercer orden, que aparece por la mezcla de la componente de primer orden  $v_1(t)$  con la de segundo orden  $v_2(t)$ .

La ecuación que satisface la conductancia no lineal y variante en el tiempo es:

$$g(t)v(t) + g_2(t)v^2(t) + g_3(t)v^3(t) + \dots = i(t). \quad (5.58)$$

Sustituyendo (5.57) en (5.58) y separando esta ecuación en productos de primer, segundo y tercer orden, resulta:

$$g(t)v_1(t) = i(t) \quad (5.59a)$$

$$g(t)v_2(t) = -g_2(t)v_1^2(t) \quad (5.59b)$$

$$g(t)v_3(t) = -g_3(t)v_1^3(t) - 2g_2(t)v_1(t)v_2(t). \quad (5.59c)$$

Estas ecuaciones implican que se puede describir un circuito diferente para cada componente. La tensión de primer orden se calcula mediante (5.59a) utilizando matrices de conversión. Una vez obtenida su solución,  $v_1(t)$  permite obtener la corriente de excitación para el circuito descrito por (5.59b), a partir de la cual se obtiene  $v_2(t)$ . Obsérvese que esta ecuación es lineal, y que el único proceso no lineal se encuentra en la formulación de la corriente de excitación, función de  $v_1(t)$ . Una vez que se conoce esta corriente, se pueden aplicar matrices de conversión para hallar las componentes de  $v_2(t)$ .

Para llegar a los mismos resultados de una forma alternativa, se puede seguir el método de las corrientes no lineales, escalando la corriente de entrada por una variable muda  $\alpha$  tal que (5.56) se reescriba como:

$$\alpha i(t) = g(t) \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n v_n(t) + \sum_{n=2}^{\infty} g_n(t) \left[ \sum_{s=1}^{\infty} \alpha^s v_s(t) \right]^n. \quad (5.60)$$

## V. TÉCNICAS DE ANÁLISIS NO LINEAL DE MEZCLADORES

Derivando ambos miembros de (5.60) con respecto de  $\alpha$  y sustituyendo posteriormente  $\alpha = 0$  se obtiene:

$$i(t) = g(t)v_1(t) , \quad (5.61)$$

que es equivalente a considerar exclusivamente la parte lineal del circuito excitada por la entrada  $i(t)$ . Derivando nuevamente respecto de  $\alpha$  y tomando  $\alpha = 0$  resulta:

$$-g_2(t)v_1^2(t) = g(t)v_2(t) , \quad (5.62)$$

que coincide con (5.61) sustituyendo la excitación original por la corriente no lineal de segundo orden  $-i_{NL2}(t)$ , con:

$$i_{NL2}(t) = g_2(t)v_1^2(t) . \quad (5.63)$$

Repetiendo este proceso, la corriente no lineal de orden 3, viene dada por:

$$i_{NL3}(t) = 2g_2(t)v_1(t)v_2(t) + g_3(t)v_1^3(t) . \quad (5.64)$$

En resumen, en todos los órdenes se trata de resolver un circuito lineal y variante en el tiempo, excitado por unas entradas particulares. La dificultad está en hacer compatible la formulación de matrices de conversión con entradas multitono, identificando las componentes de interés que aparecen en las corrientes no lineales.

Considérese que la corriente de excitación está formada por dos tonos,  $\omega_{q1}$  y  $\omega_{q2}$ , tales que:

$$i(t) = i_1 \cos[(\omega_{01} + q\omega_p)t] + i_2 \cos[(\omega_{02} + q\omega_p)t] , \omega_{02} > \omega_{01} , \quad (5.65)$$

donde  $\omega_p$  es la frecuencia fundamental de la conductancia variante en el tiempo. Puesto que la respuesta de primer orden es lineal con la entrada,  $v_1(t)$  tendrá componentes de salida en las distintas mezclas de  $\omega_{q1,2}$  con los armónicos de  $\omega_p$ . Estas componentes satisfacen las siguientes ecuaciones matriciales:

$$\mathbf{G} \mathbf{V}_1(\omega_{0i}) = \mathbf{I}(\omega_{0i}) , \quad i = 1, 2 , \quad (5.66)$$

a partir de las cuales se pueden hallar directamente los vectores  $\mathbf{V}_1(\omega_{01})$  y  $\mathbf{V}_1(\omega_{02})$ , cuyos elementos son las amplitudes complejas de las tensiones de primer orden a las frecuencias  $\omega_{n1} = \omega_{01} + n\omega_p$  y  $\omega_{n2} = \omega_{02} + n\omega_p$ , respectivamente. En correspondencia con la notación empleada en (5.43),  $v_1(t)$  se puede expresar como:

$$v_1(t) = \tilde{v}_1(t, \omega_{01}) + \tilde{v}_1(t, \omega_{02}) + [\tilde{v}_1(t, \omega_{01}) + \tilde{v}_1(t, \omega_{02})]^* , \quad (5.67)$$

donde

$$\tilde{v}_1(t, \omega_{0i}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_1(n, \omega_{0i}) \exp(j\omega_{ni}t) , \quad (5.68)$$

y  $V_1(n, \omega_{0i})$  es el elemento del vector  $\mathbf{V}_1(\omega_{0i})$  correspondiente a la mezcla  $\omega_{ni}$ .

Para la formulación de la corriente no lineal de orden dos, es preciso hallar previamente las componentes de  $v_1^2(t)$ . Elevando (5.67) al cuadrado y agrupando términos, se llega a:



$$v_1^2(t) = \tilde{v}_1(t, \omega_{01}) \cdot \tilde{v}_1(t, \omega_{01}) + \tilde{v}_1(t, \omega_{02}) \cdot \tilde{v}_1(t, \omega_{02}) + \tilde{v}_1(t, \omega_{01}) \cdot \tilde{v}_1^*(t, \omega_{01}) + \tilde{v}_1(t, \omega_{02}) \cdot \tilde{v}_1^*(t, \omega_{02}) + 2\tilde{v}_1(t, \omega_{01}) \cdot \tilde{v}_1(t, \omega_{02}) + 2\tilde{v}_1(t, \omega_{02}) \cdot \tilde{v}_1^*(t, \omega_{01}) + [\dots]^* . \quad (5.69)$$

La estructura de (5.69) permite distinguir dos tipos de sumandos:

- $\widetilde{a}_{11}(t; \omega_{0i}, \omega_{0j}) = \tilde{v}_1(t, \omega_{0i}) \cdot \tilde{v}_1(t, \omega_{0j})$ , con componentes en  $\omega_{0i} + \omega_{0j} + n\omega_p$
- $\widetilde{b}_{11}(t; \omega_{0i}, \omega_{0j}) = \tilde{v}_1(t, \omega_{0i}) \cdot \tilde{v}_1^*(t, \omega_{0j})$ , con componentes en  $\omega_{0i} - \omega_{0j} + n\omega_p$

Analizando el primer tipo de respuesta, se debe verificar:

$$A_k(\omega_{0i}, \omega_{0j}) = \sum_{n+m=k}^{\infty} \sum_{n+m=k}^{\infty} V_1(n, \omega_{0i}) V_1(m, \omega_{0j}) , \quad k = -\infty, \dots, \infty , \quad (5.70)$$

siendo  $A_k(\omega_{0i}, \omega_{0j})$  la amplitud compleja de la componente de  $\widetilde{a}_{11}(t; \omega_{0i}, \omega_{0j})$  a la frecuencia  $\omega_{0i} + \omega_{0j} + k\omega_p$ . Limitando la variación de  $k$  entre  $-N$  y  $N$ , se puede reescribir (5.70) en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} A_{-N} \\ A_{-N+1} \\ \vdots \\ A_{-1} \\ A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1(0, \omega_{0i}) & V_1(-1, \omega_{0i}) & \cdots & V_1(-2N, \omega_{0i}) \\ V_1(1, \omega_{0i}) & V_1(0, \omega_{0i}) & \cdots & V_1(-2N+1, \omega_{0i}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_1(N-1, \omega_{0i}) & V_1(N-2, \omega_{0i}) & \cdots & V_1(-N-1, \omega_{0i}) \\ V_1(N, \omega_{0i}) & V_1(N-1, \omega_{0i}) & \cdots & V_1(-N, \omega_{0i}) \\ V_1(N+1, \omega_{0i}) & V_1(N, \omega_{0i}) & \cdots & V_1(-N+1, \omega_{0i}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_1(2N, \omega_{0i}) & V_1(2N-1, \omega_{0i}) & \cdots & V_1(0, \omega_{0i}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1(-N, \omega_{0j}) \\ V_1(-N+1, \omega_{0j}) \\ \vdots \\ V_1(-1, \omega_{0j}) \\ V_1(0, \omega_{0j}) \\ V_1(1, \omega_{0j}) \\ \vdots \\ V_1(N, \omega_{0j}) \end{bmatrix} . \quad (5.71)$$

Si al igual que en (5.49) se hace el cambio de variable  $V_1(-n, \omega_{0k}) = V_1^{-*}(n, \omega_{0k})$ , entonces (5.71) admite la siguiente representación, en forma compacta:

$$\mathbf{A}_{11}(\omega_{0i}, \omega_{0j}) = \mathbf{V}_1(\omega_{0i}) \star \mathbf{V}_1(\omega_{0j}) , \quad (5.72)$$

donde  $\star$  representa el operador convolución entre vectores, y  $\mathbf{A}_{11}(\omega_{0i}, \omega_{0j})$  es un vector de componentes:

$$\mathbf{A}(\omega_{0i}, \omega_{0j}) = \left[ A_{N}^{-*} \quad A_{N-1}^{-*} \quad \cdots \quad A_1^{-*} \quad A_0 \quad A_1 \quad \cdots \quad A_N \right]^T$$

De forma completamente similar, se demuestra que el segundo tipo de sumandos puede expresarse como:

$$\mathbf{B}_{11}(\omega_{0i}, \omega_{0j}) = \mathbf{V}_1(\omega_{0i}) \star \widehat{\mathbf{V}}_1^*(\omega_{0j}) , \quad (5.73)$$

y  $\widehat{\mathbf{V}}_1$  es el vector que resulta de colocar los elementos de  $\mathbf{V}_1$  en orden inverso.

## V. TÉCNICAS DE ANÁLISIS NO LINEAL DE MEZCLADORES

Definiendo la matriz de conversión  $\mathbf{G}_2$ , asociada a  $g_2(t)$ :

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} G_2(0) & G_2(-1) & \cdots & G_2(-2N) \\ G_2(1) & G_2(0) & \cdots & G_2(-2N+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_2(N-1) & G_2(N-2) & \cdots & G_2(-N-1) \\ G_2(N) & G_2(N-1) & \cdots & G_2(-N) \\ G_2(N+1) & G_2(N) & \cdots & G_2(-N+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_2(2N) & G_2(2N-1) & \cdots & G_2(0) \end{bmatrix}, \quad (5.74)$$

siendo

$$G_2(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_2(t) \exp(-jk\omega_p t) d(\omega_p t), \quad (5.75)$$

la corriente no lineal de segundo orden presenta las siguientes componentes:

$$\mathbf{I}_{NL2}(2\omega_01) = \mathbf{G}_2 \mathbf{A}_{11}(\omega_01, \omega_01) \quad (5.76a)$$

$$\mathbf{I}_{NL2}(2\omega_02) = \mathbf{G}_2 \mathbf{A}_{11}(\omega_02, \omega_02) \quad (5.76b)$$

$$\mathbf{I}_{NL2}(0) = \mathbf{G}_2 \cdot [\mathbf{B}_{11}(\omega_01, \omega_01) + \mathbf{B}_{11}(\omega_02, \omega_02)] \quad (5.76c)$$

$$\mathbf{I}_{NL2}(\omega_01 + \omega_02) = 2\mathbf{G}_2 \mathbf{A}_{11}(\omega_01, \omega_02) \quad (5.76d)$$

$$\mathbf{I}_{NL2}(\omega_02 - \omega_01) = 2\mathbf{G}_2 \mathbf{B}_{11}(\omega_02, \omega_01) \quad (5.76e)$$

En virtud de (5.62), las tensiones de segundo orden satisfacen las siguientes ecuaciones matriciales:

$$\mathbf{G} \mathbf{V}_2(0) = -\mathbf{I}_{NL2}(0) \quad (5.77a)$$

$$\mathbf{G} \mathbf{V}_2(2\omega_{0i}) = -\mathbf{I}_{NL2}(2\omega_{0i}), \quad i = 1, 2 \quad (5.77b)$$

$$\mathbf{G} \mathbf{V}_2(\omega_{01} + \omega_{02}) = -\mathbf{I}_{NL2}(\omega_{01} + \omega_{02}) \quad (5.77c)$$

$$\mathbf{G} \mathbf{V}_2(\omega_{02} - \omega_{01}) = -\mathbf{I}_{NL2}(\omega_{02} - \omega_{01}) \quad (5.77d)$$

Pasando a formular las corrientes no lineales de tercer orden, el producto  $v_1(t)v_2(t)$  del primero de los sumandos de (5.64) se puede expresar como sigue:

$$\begin{aligned} v_1(t)v_2(t) = & \widetilde{a}_{12}(t; \omega_{01}, 2\omega_{02}) + \widetilde{a}_{12}(t; \omega_{02}, 2\omega_{01}) + \widetilde{b}_{21}(t; 2\omega_{01}, \omega_{02}) + \widetilde{b}_{21}(t; 2\omega_{02}, \omega_{01}) + \\ & + \widetilde{a}_{12}(t; \omega_{01}, \omega_{01} + \omega_{02}) + \widetilde{a}_{12}(t; \omega_{02}, \omega_{01} + \omega_{02}) + \widetilde{a}_{12}(t; \omega_{01}, \omega_{02} - \omega_{01}) + \widetilde{a}_{12}(t; \omega_{02}, \omega_{02} - \omega_{01}) + \\ & + \widetilde{b}_{21}(t; \omega_{01} + \omega_{02}, \omega_{01}) + \widetilde{b}_{21}(t; \omega_{01} + \omega_{02}, \omega_{02}) + \widetilde{b}_{12}(t; \omega_{01}, \omega_{02} - \omega_{01}) + \widetilde{b}_{12}(t; \omega_{02}, \omega_{02} - \omega_{01}) + \\ & + \widetilde{a}_{12}(t; \omega_{01}, 0) + \widetilde{a}_{12}(t; \omega_{02}, 0) + \widetilde{a}_{12}(t; \omega_{01}, 2\omega_{01}) + \widetilde{a}_{12}(t; \omega_{02}, 2\omega_{02}) + \\ & + \widetilde{b}_{12}(t; \omega_{01}, 0) + \widetilde{b}_{12}(t; \omega_{02}, 0) + \widetilde{b}_{21}(t; 2\omega_{01}, \omega_{01}) + \widetilde{b}_{21}(t; 2\omega_{02}, \omega_{02}) + [\cdots]^*, \quad (5.78) \end{aligned}$$

donde

$$\widetilde{a}_{nm}(t; \omega_k, \omega_j) = \widetilde{v}_n(t; \omega_k) \cdot \widetilde{v}_m(t; \omega_j) \leftrightarrow \mathbf{A}_{nm}(\omega_k, \omega_j) = \mathbf{V}_n(\omega_k) \star \mathbf{V}_m(\omega_j) \quad (5.79a)$$

$$\widetilde{b}_{nm}(t; \omega_k, \omega_j) = \widetilde{v}_n(t; \omega_k) \cdot \widetilde{v}_m^*(t; \omega_j) \leftrightarrow \mathbf{B}_{nm}(\omega_k, \omega_j) = \mathbf{V}_n(\omega_k) \star \widehat{\mathbf{V}}_m^*(\omega_j) \quad (5.79b)$$

El segundo de los sumandos de (5.64) depende de  $v_1^3(t)$ , que se compone de los siguientes términos:

$$\begin{aligned} v_1^3(t) = & \widetilde{c}_{111}(t; \omega_{01}, \omega_{01}, \omega_{01}) + 3\widetilde{d}_{111}(t; \omega_{01}, \omega_{01}, \omega_{01}) + \widetilde{c}_{111}(t; \omega_{02}, \omega_{02}, \omega_{02}) + \\ & + 3\widetilde{d}_{111}(t; \omega_{02}, \omega_{02}, \omega_{02}) + 3\widetilde{c}_{111}(t; \omega_{01}, \omega_{01}, \omega_{02}) + 3\widetilde{d}_{111}(t; \omega_{01}, \omega_{01}, \omega_{02}) + 3\widetilde{c}_{111}(t; \omega_{02}, \omega_{02}, \omega_{01}) + \\ & + 3\widetilde{d}_{111}(t; \omega_{02}, \omega_{02}, \omega_{01}) + 6\widetilde{d}_{111}(t; \omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{01}) + 6\widetilde{d}_{111}(t; \omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{02}) + [\dots]^*. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Se ha hecho uso de las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} \widetilde{c}_{111}(t; \omega_{0i}, \omega_{0j}, \omega_{0k}) = & \widetilde{v}_1(t; \omega_{0i}) \cdot \widetilde{v}_1(t; \omega_{0j}) \cdot \widetilde{v}_1(t; \omega_{0k}) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow & \mathbf{C}_{111}(\omega_{0i}, \omega_{0j}, \omega_{0k}) = \mathbf{V}_1(\omega_{0i}) \star \mathbf{V}_1(\omega_{0j}) \star \mathbf{V}_1(\omega_{0k}) \end{aligned} \quad (5.81a)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{d}_{111}(t; \omega_{0i}, \omega_{0j}, \omega_{0k}) = & \widetilde{v}_1(t; \omega_{0i}) \cdot \widetilde{v}_1(t; \omega_{0j}) \cdot \widetilde{v}_1^*(t; \omega_{0k}) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow & \mathbf{D}_{111}(\omega_{0i}, \omega_{0j}, \omega_{0k}) = \mathbf{V}_1(\omega_{0i}) \star \mathbf{V}_1(\omega_{0j}) \star \widehat{\mathbf{V}}_1^*(\omega_{0k}) \end{aligned} \quad (5.81b)$$

Sustituyendo (5.78) y (5.80) en (5.64), la corriente no lineal de tercer orden presenta las siguientes componentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{NL3}(\omega_{01}) = & 2\mathbf{G}_2 [\mathbf{A}_{12}(\omega_{01}, 0) + \mathbf{B}_{12}(\omega_{01}, 0) + \mathbf{B}_{21}(2\omega_{01}, \omega_{01}) + \mathbf{B}_{21}(\omega_{01} + \omega_{02}, \omega_{02}) + \\ & + \mathbf{B}_{12}(\omega_{02}, \omega_{02} - \omega_{01})] + \mathbf{G}_3 [3\mathbf{D}_{111}(\omega_{01}, \omega_{01}, \omega_{01}) + 6\mathbf{D}_{111}(\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{02})] \end{aligned} \quad (5.82a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{NL3}(\omega_{02}) = & 2\mathbf{G}_2 [\mathbf{A}_{12}(\omega_{02}, 0) + \mathbf{B}_{12}(\omega_{02}, 0) + \mathbf{B}_{21}(2\omega_{02}, \omega_{02}) + \mathbf{B}_{21}(\omega_{01} + \omega_{02}, \omega_{01}) + \\ & + \mathbf{A}_{12}(\omega_{01}, \omega_{02} - \omega_{01})] + \mathbf{G}_3 [3\mathbf{D}_{111}(\omega_{02}, \omega_{02}, \omega_{02}) + 6\mathbf{D}_{111}(\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{01})] \end{aligned} \quad (5.82b)$$

$$\mathbf{I}_{NL3}(3\omega_{01}) = 2\mathbf{G}_2 \mathbf{A}_{12}(\omega_{01}, 2\omega_{01}) + \mathbf{G}_3 \mathbf{C}_{111}(\omega_{01}, \omega_{01}, \omega_{01}) \quad (5.82c)$$

$$\mathbf{I}_{NL3}(3\omega_{02}) = 2\mathbf{G}_2 \mathbf{A}_{12}(\omega_{02}, 2\omega_{02}) + \mathbf{G}_3 \mathbf{C}_{111}(\omega_{02}, \omega_{02}, \omega_{02}) \quad (5.82d)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{NL3}(2\omega_{01} - \omega_{02}) = & 2\mathbf{G}_2 [\mathbf{B}_{21}(2\omega_{01}, \omega_{02}) + \mathbf{B}_{12}(\omega_{01}, \omega_{02} - \omega_{01})] + \\ & + 3\mathbf{G}_3 \mathbf{D}_{111}(\omega_{01}, \omega_{01}, \omega_{02}) \end{aligned} \quad (5.82e)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{NL3}(2\omega_{02} - \omega_{01}) = & 2\mathbf{G}_2 [\mathbf{B}_{21}(2\omega_{02}, \omega_{01}) + \mathbf{A}_{12}(\omega_{02}, \omega_{02} - \omega_{01})] + \\ & + 3\mathbf{G}_3 \mathbf{D}_{111}(\omega_{02}, \omega_{02}, \omega_{01}) \end{aligned} \quad (5.82f)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{NL3}(2\omega_{01} + \omega_{02}) = & 2\mathbf{G}_2 [\mathbf{A}_{12}(\omega_{02}, 2\omega_{01}) + \mathbf{A}_{12}(\omega_{01}, \omega_{01} + \omega_{02})] + \\ & + 3\mathbf{G}_3 \mathbf{C}_{111}(\omega_{01}, \omega_{01}, \omega_{02}) \end{aligned} \quad (5.82g)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{NL3}(2\omega_{02} + \omega_{01}) = & 2\mathbf{G}_2 [\mathbf{A}_{12}(\omega_{01}, 2\omega_{02}) + \mathbf{A}_{12}(\omega_{02}, \omega_{01} + \omega_{02})] + \\ & + 3\mathbf{G}_3 \mathbf{C}_{111}(\omega_{02}, \omega_{02}, \omega_{01}) \end{aligned} \quad (5.82h)$$

siendo  $\mathbf{G}_3$  la matriz de conversión asociada a  $g_3(t)$ .

De esta manera, las tensiones de intermodulación de tercer orden, con dos tonos, y con salida en las frecuencias  $2\omega_{01} - \omega_{02} + k\omega_p$ , satisfacen la ecuación matricial:

$$\mathbf{G} \mathbf{V}_3(2\omega_{01} - \omega_{02}) = -\mathbf{I}_{NL3}(2\omega_{01} - \omega_{02}) \quad (5.83)$$

## V. TÉCNICAS DE ANÁLISIS NO LINEAL DE MEZCLADORES

En el caso típico en que  $q = 1$  en (5.65) la potencia de intermodulación sobre una resistencia de referencia  $R_0$ , a la frecuencia  $2\omega_{01} - \omega_{02}$  se puede expresar como:

$$\langle P_{IM3} \rangle = 2 |V_3(0, 2\omega_{01} - \omega_{02})|^2 / R_0 \quad (5.84)$$

siendo  $V_3(0, 2\omega_{01} - \omega_{02})$  el elemento del vector  $\mathbf{V}_3(2\omega_{01} - \omega_{02})$  correspondiente a  $n = 0$ .

La extensión del método a cualquier circuito no lineal armónicamente variante en el tiempo es inmediata si se reemplaza  $\mathbf{G}$  en (5.66), (5.77) y (5.83) por la matriz de admitancias de conversión de la parte lineal del circuito, y los vectores  $\mathbf{V}_n$ ,  $\mathbf{I}$  e  $\mathbf{I}_{NLn}$  por vectores multidimensionales con las tensiones, corrientes reales y corrientes no lineales de cada nodo, respectivamente, correspondientes a cada orden. Como caso práctico, en el siguiente capítulo se analizará un mezclador FET resistivo haciendo uso de esta metodología.

### V.4. Análisis de mezcladores FET mediante series dobles de Volterra

En el Capítulo III se han introducido las series dobles de Volterra como herramienta para el análisis de sistemas con dos puertos de entrada. Como un mezclador tiene, en efecto, dos entradas, nada impide que pueda ser analizado mediante esta técnica. Aunque parece que se trata de una potente herramienta, no se ha encontrado en la literatura consultada ningún intento de analizar la distorsión no lineal en mezcladores FET con series dobles de Volterra hasta muy recientemente [18].

Como paso previo al análisis detallado de un mezclador, considérese el circuito de la Figura 5.8, que se compone de una subred lineal y una fuente de corriente  $i(v, u)$  dependiente de las tensiones de los nodos  $v(t)$  y  $u(t)$ . Las ecuaciones integrodiferenciales que relacionan las tensiones en los nodos con las corrientes de excitación  $i_v(t)$  e  $i_u(t)$ , vienen dadas simbólicamente por:

$$L_v[v(t), u(t)] = i_v(t) \quad (5.85a)$$

$$L_u[v(t), u(t)] + i[v(t), u(t)] = i_u(t) \quad (5.85b)$$

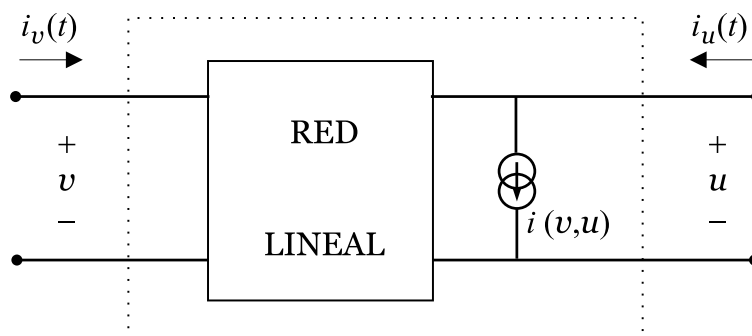


Figura 5.8: Circuito no lineal simple con dos puertos de entrada.

siendo  $i[v(t), u(t)] = g_{10}v(t) + g_{01}u(t) + i_{NL}[v(t), u(t)]$ , y la corriente no lineal

$$i_{NL}[v(t), u(t)] = \sum_{k=2}^{\infty} g_{k0}v^k(t) + \sum_{k=2}^{\infty} g_{0k}u^k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} g_{kl}v^k(t)u^l(t). \quad (5.86)$$

Cuando las entradas cambian a  $x(t) = \alpha i_v(t)$  y  $z(t) = \beta i_u(t)$ , las tensiones de los nodos pasan a ser  $y(t)$  y  $w(t)$ , y sus correspondientes respuestas de orden  $n + m$  se expresan según:

$$y_{nm}(t) = \alpha^n \beta^m v_{nm}(t) \quad (5.87a)$$

$$w_{nm}(t) = \alpha^n \beta^m u_{nm}(t) \quad (5.87b)$$

Sustituyendo en (5.85) y derivando con respecto a  $\alpha$ , al tomar  $\alpha = \beta = 0$  se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales para  $v_{10}(t)$  y  $u_{10}(t)$ :

$$L_v[v_{10}(t), u_{10}(t)] = i_v(t) \quad (5.88a)$$

$$L'_u[v_{10}(t), u_{10}(t)] = 0, \quad (5.88b)$$

siendo  $L'_u[v(t), u(t)] = L_u[v(t), u(t)] + g_{10}v(t) + g_{01}u(t)$ . La ecuación (5.88) describe el circuito lineal asociado. Este resultado se interpreta concluyendo que  $v_{10}(t)$  y  $u_{10}(t)$  se determinan analizando la solución del circuito en ausencia de la entrada  $i_u(t)$ , esto es, considerando que sólo  $i_v(t)$  está aplicada.

De manera similar, tomando la derivada respecto de  $\beta$  y haciendo  $\alpha = \beta = 0$ , se obtiene el mismo sistema de ecuaciones lineales para  $v_{01}(t)$  y  $u_{01}(t)$ , siendo ahora  $i_u(t)$  la única excitación. Repitiendo este proceso, las respuestas  $v_{nm}(t)$  y  $u_{nm}(t)$  para órdenes altos satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$L_v[v_{nm}(t), u_{nm}(t)] = 0 \quad (5.89a)$$

$$L'_u[v_{nm}(t), u_{nm}(t)] = -i_{NLnm}(t), \quad (5.89b)$$

y por tanto puede interpretarse que  $v_{nm}$  y  $u_{nm}$  son las respuestas asociadas al circuito lineal excitado por una corriente  $-i_{NLnm}(t)$  dada por:

$$i_{NLnm}(t) = \frac{1}{n!m!} \left. \frac{\partial^{n+m}}{\partial \alpha^n \partial \beta^m} i_{NL}(t) \right|_{\alpha=\beta=0}. \quad (5.90)$$

Como ejemplo ilustrativo de análisis considérese el modelo simple de mezclador FET mostrado en la Figura 5.9, en el que la señal de OL se aplica en la puerta y la de RF en el drenador. Está ampliamente aceptado que se pueden obtener buenos resultados limitando los elementos de circuito no lineales a la fuente de corriente controlada del FET. Introduciendo el operador diferencial  $\hat{p} = d/dt$  y aplicando las leyes de Kirchhoff, se pueden expresar en forma compacta las ecuaciones nodales del mezclador de la manera siguiente:

$$\mathbf{Y}(\hat{p}) \mathbf{v}(t) = \mathbf{i}_s(t) + \mathbf{i}_{NL}(t), \quad (5.91)$$

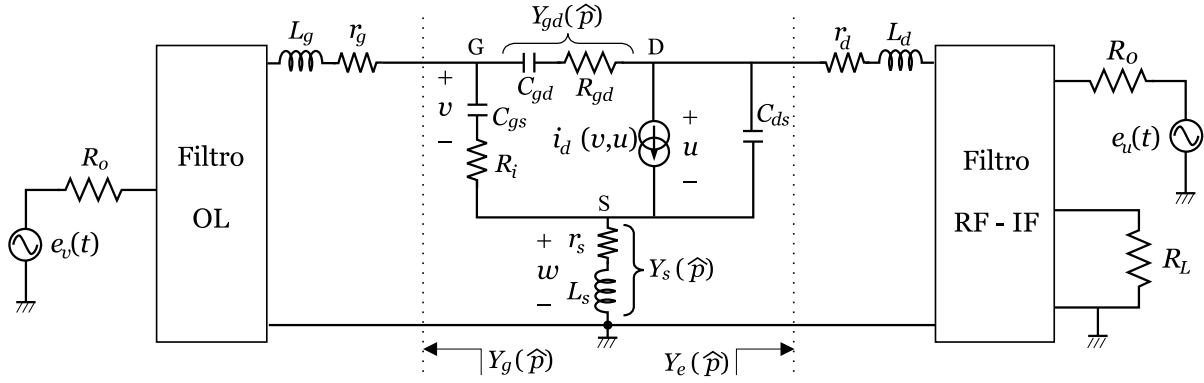


Figura 5.9: Modelo de mezclador FET con la señal de RF aplicada en el drenador.

donde

$$\mathbf{Y}(\hat{p}) = \begin{pmatrix} Y_g''(\hat{p}) & -Y_{gd}(\hat{p}) & Y_g(\hat{p}) \\ Y_{md}(\hat{p}) & Y_e'(\hat{p}) & Y_e(\hat{p}) \\ -Y_{ms}(\hat{p}) & -Y_d(\hat{p}) & Y_s(\hat{p}) \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ u(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (5.92a)$$

$$\mathbf{i}_s(t) = \begin{bmatrix} Y_g(\hat{p})e_v(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Y_e(\hat{p})e_u(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{i}_{NL}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -i_{NL}[v(t), u(t)] \\ i_{NL}[v(t), u(t)] \end{bmatrix}, \quad (5.92b)$$

y se ha hecho uso de las siguientes definiciones en la matriz de admitancias de la subred lineal aumentada:

$$Y_g'(\hat{p}) = Y_g(\hat{p}) \cdot [1 + R_i(\hat{p}C_{gs})] \quad (5.93a)$$

$$Y_{gd}'(\hat{p}) = Y_{gd}(\hat{p}) \cdot [1 + R_i(\hat{p}C_{gs})] \quad (5.93b)$$

$$Y_d(\hat{p}) = g_{01} + \hat{p}C_{ds} \quad (5.93c)$$

$$Y_{ms}(\hat{p}) = g_{10} + \hat{p}C_{gs} \quad (5.93d)$$

$$Y_{md}(\hat{p}) = g_{10} - Y_{gd}'(\hat{p}) \quad (5.93e)$$

$$Y_g''(\hat{p}) = Y_g'(\hat{p}) + Y_{gd}'(\hat{p}) + \hat{p}C_{gs} \quad (5.93f)$$

$$Y_e'(\hat{p}) = Y_e(\hat{p}) + Y_{gd}(\hat{p}) + Y_d(\hat{p}) \quad (5.93g)$$

Con ayuda del método de la entrada armónica, se presenta a continuación la ecuación matricial a resolver para determinar las funciones de transferencia no lineales de orden  $n + m$ :

$$\begin{bmatrix} G_{nm}(\omega_n; \xi_n) \\ H_{nm}(\omega_n; \xi_n) \\ S_{nm}(\omega_n; \xi_n) \end{bmatrix} = \mathbf{Y}^{-1}(\omega') F_{nm}[i_{NLnm}(t)] \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.94)$$

siendo  $\omega' = \omega_1 + \dots + \omega_n + \xi_1 + \dots + \xi_m$ , y  $F_{nm}[i_{NLnm}(t)]$  el coeficiente de Fourier de  $i_{NLnm}(t)$  evaluado en  $\omega'$  y dividido por  $n!m!$ . A modo de ejemplo, la expresión completa para las funciones de transferencia no lineales entre los terminales de drenador y fuente,

viene dada por:

$$H_{nm}(\omega_n; \xi_n) = \frac{F_{nm}[i_{NLnm}(t)]}{\det[\mathbf{Y}(j\omega')]} \{Y_g(\omega') [Y_{md}(\omega') + Y_{ms}(\omega')] - Y_g''(\omega') [Y_L(\omega') - Y_s(\omega')]\} \quad (5.95)$$

Se ofrecen a continuación expresiones para las corrientes no lineales de órdenes más bajos, obtenidas mediante la fórmula de recursión (3.176):

$$i_{NL20}(t) = g_{20}v_{10}(t)v_{10}(t) + g_{02}u_{10}(t)u_{10}(t) + g_{11}v_{10}(t)u_{10}(t) \quad (5.96a)$$

$$i_{NL02}(t) = g_{20}v_{01}(t)v_{01}(t) + g_{02}u_{01}(t)u_{01}(t) + g_{11}v_{01}(t)u_{01}(t) \quad (5.96b)$$

$$i_{NL11}(t) = 2g_{20}v_{10}(t)v_{01}(t) + 2g_{02}u_{10}(t)u_{01}(t) + g_{11} [v_{10}(t)u_{01}(t) + v_{01}(t)u_{10}(t)] \quad (5.96c)$$

Si se admite que el mezclador está excitado por dos tonos,  $e_v(t) = V_p \cos(\omega_p t)$  (OL) y  $e_u(t) = V_q \cos(\omega_q t)$  (RF), de amplitudes suficientemente pequeñas como para considerar válida la hipótesis de pequeña señal para ambas entradas, la salida se puede aproximar por los primeros términos del desarrollo en series dobles de Volterra. En particular, el término dominante en la salida a la frecuencia intermedia  $|\omega_q - \omega_p|$  se podría expresar según:

$$u(t; \omega_p - \omega_q) \simeq \frac{1}{2} V_p V_q |H_{11}(\omega_p; -\omega_q)| \cos [(\omega_p - \omega_q)t + \angle H_{11}(\omega_p; -\omega_q)] , \quad (5.97)$$

y la intermodulación con dos tonos a la entrada de RF estaría determinada fundamentalmente por  $H_{13}(\omega_1; \xi_3)$ .

En resumen, el presente enfoque es particularmente adecuado para circuitos que trabajan en un régimen cuasi lineal, cuya salida se puede truncar despreciando términos de orden alto. Sin embargo, en el caso de circuitos no lineales, con una gran señal aplicada en uno de sus puertos de entrada, también se puede acudir a la metodología expuesta para demostrar formalmente una generalización del método de Maas descrito en las dos secciones anteriores.

Con referencia nuevamente a la Figura 5.8, sea  $i_v(t)$  la excitación de gran señal y tómesese  $\alpha = 1$  en (5.87), de manera que

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} v_{n0} + \sum_{m=1}^{\infty} \beta^m \sum_{n=0}^{\infty} v_{nm} = v_0 + \delta v \quad (5.98a)$$

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n0} + \sum_{m=1}^{\infty} \beta^m \sum_{n=0}^{\infty} u_{nm} = u_0 + \delta u , \quad (5.98b)$$

donde  $\delta v = \sum_{m=1}^{\infty} \beta^m v_m$  y  $\delta u = \sum_{m=1}^{\infty} \beta^m u_m$ . Sustituyendo en (5.85) y haciendo  $\beta = 0$  se llega a:

$$L_v[v_0(t), u_0(t)] = i_v(t) \quad (5.99a)$$

$$L_u[v_0(t), u_0(t)] + i[v_0(t), u_0(t)] = 0 . \quad (5.99b)$$

Las formas de onda de  $v_0(t)$  y  $u_0(t)$  se obtienen considerando que sólo la señal de OL se aplica al mezclador, y empleando una técnica adecuada, por ejemplo, balance armónico. Si se admite que  $v_0(t)$  y  $u_0(t)$  son conocidos y se expresa la corriente  $i[v(t), u(t)]$  en series de Taylor alrededor de  $[v_0(t), u_0(t)]$ :

$$i[v(t), u(t)] = i[v_0(t), u_0(t)] + \sum_{k+l \geq 1} \sum_{k+l \geq 1}^{\infty} G_{kl}[v_0(t), u_0(t)] \delta v^k(t) \delta u^l(t), \quad (5.100)$$

siendo

$$G_{kl}[v_0(t), u_0(t)] = \frac{1}{k!l!} \cdot \left. \frac{\partial^{k+l}}{\partial v^k \partial u^l} i[v(t), u(t)] \right|_{v_0(t), u_0(t)}. \quad (5.101)$$

Derivando con respecto a  $\beta$  y tomando luego  $\beta = 0$  resulta el sistema de ecuaciones lineales y variantes en el tiempo para  $v_1(t)$  y  $u_1(t)$ :

$$L_v[v_1(t), u_1(t)] = 0 \quad (5.102a)$$

$$L'_u[v_1(t), u_1(t)] = i_u(t), \quad (5.102b)$$

donde

$$L'_u[v_1(t), u_1(t)] = L_u[v_1(t), u_1(t)] + G_{10}[v_0(t), u_0(t)]v_1(t) + G_{01}[v_0(t), u_0(t)]u_1(t). \quad (5.103)$$

Como en el caso anterior, (5.102) describe el circuito lineal asociado, variante en el tiempo. La solución para  $v_1(t), u_1(t)$  se puede obtener de manera convencional mediante matrices de conversión. El proceso de derivación respecto de  $\beta$  se repite para obtener la corriente no lineal  $i_{NLm}(t)$  que excita el circuito lineal y variante en el tiempo representado por (5.102). Por tanto, queda demostrado que el análisis de circuitos no lineales variantes en el tiempo se puede realizar sin más que reemplazar los coeficientes constantes de las corrientes no lineales por coeficientes variantes  $G_{kl}(t) \equiv G_{kl}[v_0(t), u_0(t)]$ .

En el capítulo siguiente se demuestra que las corrientes no lineales de orden 2 y 3, asociadas a (5.100), satisfacen las siguientes expresiones:

$$i_{NL2}(t) = G_{20}(t)v_1(t)^2 + G_{02}(t)u_1(t)^2 + G_{11}(t)v_1(t)u_1(t) \quad (5.104a)$$

$$i_{NL3}(t) = G_{30}(t)v_1^3(t) + G_{03}(t)u_1^3(t) + G_{21}(t)v_1^2(t)u_1(t) + G_{12}(t)v_1(t)u_1^2(t) + 2G_{20}(t)v_1(t)v_2(t) + 2G_{02}(t)u_1(t)u_2(t) + G_{11}(t)[v_2(t)u_1(t) + v_1(t)u_2(t)]. \quad (5.104b)$$

## Bibliografía

- [1] S. A. Maas, "How to model intermodulation distortion," en *Proc. 1991 MTT-S International Microwave Symposium Digest*, pp. 149–151, 1991.
- [2] S. Egami, "Nonlinear, linear analysis and computer-aided design of resistive mixers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-22, No. 3, pp. 270–275, mar. 1973.



- 
- [3] A. R. Kerr, "A technique for determining the local oscillator waveforms in a microwave mixer," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-23, No. 10, pp. 828–831, oct. 1975.
- [4] R. B. Swerdlow, "Analysis of intermodulation noise in frequency converters by Volterra series," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-26, No. 4, pp. 305–313, abr. 1978.
- [5] A. Ushida y L. Chua, "Frequency-domain analysis of nonlinear circuits driven by multitone signals," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, Vol. 31, No. 9, pp. 766–778, sep. 1984.
- [6] R. Gilmore, "Nonlinear circuit design using the modified harmonic balance algorithm," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-34, No. 12, pp. 1294–1307, dic. 1986.
- [7] W. R. Curtice, "Nonlinear analysis of GaAs MESFET amplifiers, mixers, and distributed amplifiers using the harmonic balance technique," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-35, No. 4, pp. 441–447, jul. 1987.
- [8] C. Camacho-Peñalosa, "Numerical steady-state analysis of nonlinear microwave circuits," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-31, No. 9, pp. 724–730, sep. 1983.
- [9] C. Camacho-Peñalosa y C. S. Aitchison, "Analysis and design of MESFET gate mixers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-35, No. 7, pp. 643–652, jul. 1987.
- [10] S. A. Maas, "Theory and analysis of GaAs MESFET mixers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-32, No. 10, pp. 1402–1406, oct. 1984.
- [11] J. Dreifuss, A. Madjar, y A. Bar-Lev, "A novel method for the analysis of microwave two-port active mixers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-33, No. 11, pp. 1241–1244, nov. 1985.
- [12] S. A. Maas, "Two-tone intermodulation in diode mixers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-35, No. 3, pp. 307–314, mar. 1987.
- [13] S. Peng, P. J. McCleer, y G. I. Haddad, "Nonlinear models for the intermodulation analysis of FET mixers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 43, No. 5, pp. 1037–1044, mayo 1995.
- [14] S. Peng, P. J. McCleer, y G. I. Haddad, "Intermodulation analysis of FET resistive mixers using Volterra series," en *Proc. 1996 MTT-S International Microwave Symposium Digest*, pp. 1377–1380, 1996.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [15] W. Yu, S. Sen, y B. H. Leung, "Distortion analysis of MOS track-and-hold sampling mixers using time-varying Volterra series," *IEEE Trans. Circuits and Syst. II*, Vol. 46, No. 2, pp. 101–113, feb. 1999.
- [16] J. A. García, M. L. de la Fuente, J. C. Pedro, N. B. de Carvalho, Y. Newport, A. Mediavilla, y A. Tazón, "Time-varying Volterra-series analysis of spectral regrowth and noise power ratio in FET mixers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 49, No. 3, pp. 545–549, mar. 2001.
- [17] J. Kim y Y. Kwon, "Intermodulation analysis of dual-gate fet mixers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 50, No. 6, pp. 1544–1555, jun. 2002.
- [18] C. Crespo-Cadenas y J. Reina-Tosina, "Analysis of FET resistive mixers with a double Volterra series approach," en *Proc. European Microwave Conference*, sep. 2002.
- [19] C. Crespo-Cadenas y J. Reina-Tosina, "Análisis de mezcladores con FET resistivo mediante una serie doble de volterra," en *Actas XVII Simposium Nacional de la URSI*, pp. 487–488, sep. 2002, Madrid.
- [20] K. S. Kundert y A. Sangiovanni-Vincentelli, "Simulation of nonlinear circuits in the frequency domain," *IEEE Trans. Computer-Aided Design*, Vol. CAD-5, No. 4, pp. 521–535, oct. 1986.
- [21] S. A. Maas, *Nonlinear Microwave Circuits*. Norwood (MA): Artech House, 1988.
- [22] K. Chang, I. Bahl, y V. Nair, *RF and Microwave Circuit and Component Design for Wireless Systems*. New York: John Wiley and Sons, 2002.
- [23] R. A. Pucel, D. Massé, y R. Bera, "Performance of GaAs MESFET mixers at X band," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-24, No. 6, pp. 351–360, jun. 1976.
- [24] M. Joao Rosario, P. R. B. Vitor, y J. Costa Freire, "MESFET drain mixers: Analysis and design," en *Proc. Mediterranean Electrotechnical Conference MELECON'89*, pp. 343–346, 1989.

## Capítulo VI

# Estructuras analizadas. Resultados

A lo largo de los últimos años se ha propuesto el diseño de mezcladores MMIC empleando técnicas muy diversas. El uso de dispositivos activos permite trabajar con señales de bajo nivel a la entrada, por lo que son frecuentes las propuestas que hacen uso de uno o varios dispositivos activos. Aunque el análisis no lineal de mezcladores de microondas de un solo dispositivo ha sido descrito por varios autores, son muy pocos los trabajos teóricos que se han publicado en el caso de mezcladores de múltiples dispositivos [1]. De hecho, es una realidad conocida que el diseño de mezcladores con varios FETs es bastante más complicado que un mero escalado de las características de un mezclador con un solo FET [2, p. 343–344]. Una mejor comprensión del comportamiento no lineal en circuitos con varios FETs proporcionaría una información valiosa para mejorar las características de distorsión por intermodulación.

Una de las realizaciones más populares de mezcladores con múltiples FETs es la célula de Gilbert, originalmente implementada con transistores bipolares [3, 4], y que idealmente realiza el producto lineal del oscilador local y la señal de entrada. Sólo unos pocos artículos han desarrollado técnicas de diseño basadas en esta estructura [5], bien en tecnología MOSFET o MESFET. Al tratarse de una estructura doblemente balanceada, permite eliminar los armónicos pares de OL y RF, y por consiguiente cabe esperar una mejora en la respuesta frente a los productos de intermodulación. La célula de Gilbert puede considerarse como un mezclador de transconductancia, y como tal es la modulación de la transconductancia del dispositivo activo por la acción del OL, lo que permite la conversión de frecuencia.

A continuación se presenta el análisis y diseño de un mezclador doblemente balanceado basado en la célula de Gilbert, utilizando las técnicas mostradas a lo largo de esta Tesis. El mezclador ha sido construido en tecnología monolítica, con HEMTs del proceso ED02AH de la fundición Philips Microwave Limeil. El circuito ha sido ampliamente caracterizado, y para validar los métodos de análisis se muestran algunas medidas comparadas con las simulaciones realizadas, mostrando en todos los casos una buena concordancia.

Aunque las necesidades de los sistemas inalámbricos actuales demandan mezcladores con continuas mejoras en la ganancia de conversión, factor de ruido y rango dinámico, es difícil compaginar estas características con la tendencia a reducir el consumo a límites más bajos. Resulta cada vez más complicado para los mezcladores activos satisfacer las especificaciones de linealidad e intermodulación. Sin embargo, los mezcladores pasivos presentan la ventaja de no depender de una fuente de alimentación. El mezclador resistivo fue introducido por Maas aprovechando el canal del transistor MESFET operando en zona lineal para producir la mezcla de frecuencias [6]. Desde entonces diferentes autores han mostrado las excelentes características de intermodulación de los mezcladores resistivos, debido a la buena linealidad de la resistencia del canal [7, 8, 9].

En la segunda parte de este capítulo se analiza un mezclador resistivo. La metodología aplicada está basada en el cálculo de las pérdidas mediante matrices de conversión, y la determinación del nivel de intermodulación con dos tonos a la entrada, mediante series de Volterra con *kernel*s variantes en el tiempo. Para validar el método utilizado, se comparan los resultados del análisis con medidas del mezclador resistivo de Maas publicadas en [6].

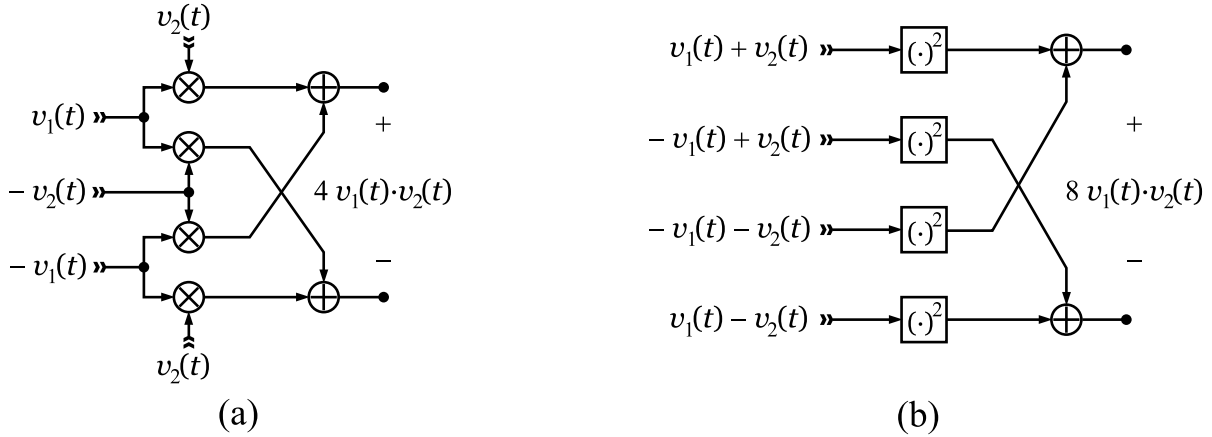
### VI.1. Mezcladores doblemente balanceados. Célula de Gilbert

Es un hecho conocido que cuando se aplican dos señales  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$  a un dispositivo no lineal, se generan productos de la forma  $v_1^k(t)v_2^l(t)$ . En un mezclador interesa cancelar todas las componentes diferentes de  $v_1(t)v_2(t)$  mediante una topología circuital apropiada. Para conseguir una cancelación robusta de la no-linealidad no basta con acudir a configuraciones no equilibradas, siendo necesaria una estructura doblemente balanceada. Se conocen sólo dos métodos de cancelación para multiplicadores de cuatro cuadrantes [10]. Al tratarse de estructuras doblemente equilibradas, aunque el mezclador tiene dos entradas, existen cuatro combinaciones de señales diferenciales:  $(v_1, v_2)$ ,  $(-v_1, v_2)$ ,  $(-v_1, -v_2)$ ,  $(v_1, -v_2)$ . El método de cancelación de la Figura 6.1a está basado en mezcladores equilibrados, mientras que el de la Figura 6.1b se basa en dispositivos de ley cuadrática. En ambas estructuras se logra la cancelación de las componentes de orden superior y de modo común ( $V_1$  y  $V_2$ ) debido a las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} & [(V_1 + v_1)(V_2 + v_2) + (V_1 - v_1)(V_2 - v_2)] + \\ & - [(V_1 - v_1)(V_2 + v_2) + (V_1 + v_1)(V_2 - v_2)] = 4v_1v_2 \end{aligned} \quad (6.1a)$$

$$\begin{aligned} & \{[(V_1 + v_1) + (V_2 + v_2)]^2 + [(V_1 - v_1) + (V_2 - v_2)]^2\} + \\ & - \{[(V_1 - v_1) + (V_2 + v_2)]^2 + [(V_1 + v_1) + (V_2 - v_2)]^2\} = 8v_1v_2 \end{aligned} \quad (6.1b)$$

Estos esquemas de cancelación se pueden realizar mediante mezcladores de transconductancia basados en dispositivos FET. Para aproximarnos al funcionamiento de



**Figura 6.1:** Arquitecturas básicas de multiplicador de cuatro cuadrantes.

la célula de Gilbert (CG), considérese un transistor FET, operando en la zona de saturación, en el que la corriente se expresa idealmente mediante una ley cuadrática:

$$I_{ds} = kW(V_{gs} - V_T)^2, \quad V_{gs} > V_T, \quad V_{ds} > V_{gs} - V_T \quad (6.2)$$

En la Figura 6.2 se muestra un par diferencial excitado por una tensión  $v_i$  que se aplica equilibradamente a la puerta de los dos transistores FET, polarizados en saturación, que están recorridos por las corrientes:

$$I_{o1} = kW(V_{GG} + v_i - V_b - V_T)^2 \quad (6.3a)$$

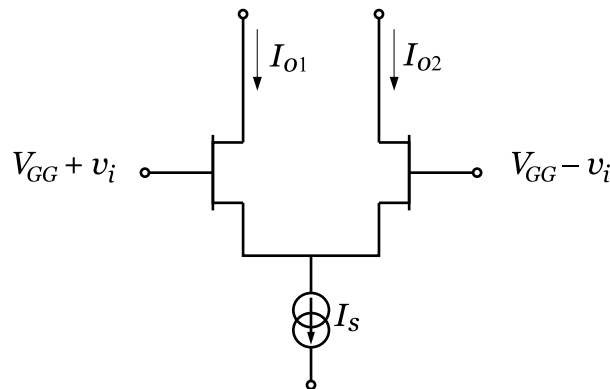
$$I_{o2} = kW(V_{GG} - v_i - V_b - V_T)^2, \quad (6.3b)$$

siendo  $V_b$  la tensión en el nodo común de fuente. Es inmediato demostrar que la corriente de cola  $I_s = I_1 + I_2$  satisface la expresión:

$$I_s = 2kW [v_i^2 + (V_{GG} - V_b - V_T)^2]. \quad (6.4)$$

Al despejar  $V_{GG} - V_b - V_T$  de (6.4), se pueden reescribir las corrientes de (6.3) como:

$$I_{o1} = kW \left( v_i + \sqrt{\frac{I_s}{2kW} - v_i^2} \right)^2 = kW \left( \frac{I_s}{2kW} + 2v_i \sqrt{\frac{I_s}{2kW} - v_i^2} \right) \quad (6.5a)$$



**Figura 6.2:** Par diferencial con transistores FET.

## VI. ESTRUCTURAS ANALIZADAS. RESULTADOS

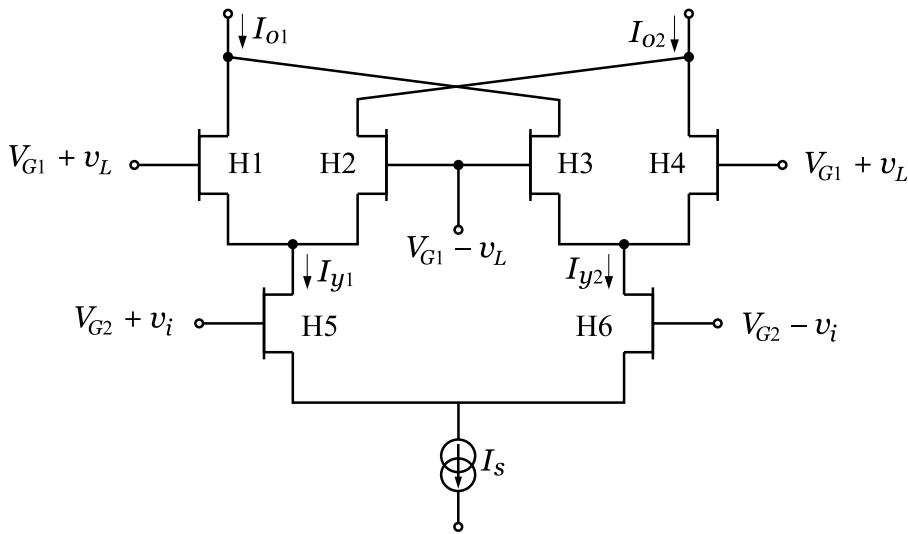
$$I_{o2} = kW \left( -v_i + \sqrt{\frac{I_s}{2kW} - v_i^2} \right)^2 = kW \left( \frac{I_s}{2kW} - 2v_i \sqrt{\frac{I_s}{2kW} - v_i^2} \right). \quad (6.5b)$$

Restando ambas expresiones, se obtiene la corriente diferencial de salida:

$$I_{o1} - I_{o2} = 2\sqrt{2kW I_s} v_i \sqrt{1 - \frac{2kW}{I_s^2} v_i^2}. \quad (6.6)$$

Asumiendo que  $2kW v_i^2 \ll I_s$ , la expresión anterior puede aproximarse por:

$$I_{o1} - I_{o2} \simeq 2\sqrt{2kW I_s} v_i. \quad (6.7)$$



**Figura 6.3:** Célula de Gilbert con transistores FET.

En una CG la corriente diferencial de salida se obtiene restando las corrientes de dos pares diferenciales (véase la Figura 6.3). Asumiendo que los transistores H1-H4 tienen las mismas dimensiones, a partir de (6.7) puede escribirse:

$$I_o = I_{o1} - I_{o2} = 2\sqrt{2kW} v_L \left[ \sqrt{I_{y1}} - \sqrt{I_{y2}} \right]. \quad (6.8)$$

La corriente de entrada  $\sqrt{I_{y1}} - \sqrt{I_{y2}}$  es generada por un tercer par diferencial (transistores H5 y H6). Recuperando (6.5), se tiene:

$$\sqrt{I_{y1}} = \sqrt{kW_5} \left( v_i + \sqrt{\frac{I_s}{2kW_5} - v_i^2} \right) \quad (6.9a)$$

$$\sqrt{I_{y2}} = \sqrt{kW_5} \left( -v_i + \sqrt{\frac{I_s}{2kW_5} - v_i^2} \right). \quad (6.9b)$$

Finalmente, sustituyendo en (6.8) la diferencia:

$$\sqrt{I_{y1}} - \sqrt{I_{y2}} = 2\sqrt{kW_5} v_i, \quad (6.10)$$

se obtiene la siguiente expresión para la corriente diferencial de salida:

$$I_o = 4k\sqrt{2WW_5}v_Lv_i. \quad (6.11)$$

Nótese como el esquema de cancelación reproduce la Figura 6.1a. A la vista de este resultado, puede concluirse que una CG real dista de ser un multiplicador ideal de cuatro cuadrantes, debido a que el modelo propuesto está basado en una ley cuadrática y no incluye efectos de orden superior, y por tanto difiere sensiblemente de los modelos de FET de AsGa descritos en el Capítulo II. Se requieren técnicas avanzadas para la adecuada caracterización de los procesos no lineales que aparecen en una CG con MESFET ó HEMT, bajo diferentes condiciones de polarización.

## VI.2. Análisis de la Célula de Gilbert

Como se acaba de mostrar, la CG está compuesta básicamente por una etapa amplificadora (H5-H6) cuya salida es conmutada a la frecuencia del OL debido a la acción de dos amplificadores diferenciales cruzados, H1-H2 y H3-H4, excitados por una señal sinusoidal  $v_L = V_L \cos(\omega_L t)$ . En la Figura 6.4 se muestra una representación alternativa de la CG, cuya similitud con un mezclador FET en anillo permite extender su aplicación al análisis y diseño de un mezclador resistivo doblemente balanceado.

Si  $v_L(t)$  y  $v_i(t)$  se aplican a los puertos de entrada de OL y RF, respectivamente, la salida diferencial de la CG es una función de ambas señales, que se puede expresar como:

$$v_o(v_L, v_i) = [I_{12}(v_L, v_i) - I_{43}(v_L, v_i)] R \quad (6.12)$$

donde  $I_{12}(v_L, v_i) = I_1 - I_2$  e  $I_{43}(v_L, v_i) = I_4 - I_3$  son términos de corrientes diferenciales que deben ser evaluados previamente.

La CG se puede estudiar analizando primero el comportamiento no lineal bajo la excitación del OL, exclusivamente, y a continuación un análisis de pequeña señal con la entrada de RF aplicada. Con referencia a la Figura 6.4 se supone que H1-H4 son idénticos, al igual que H5-H6.

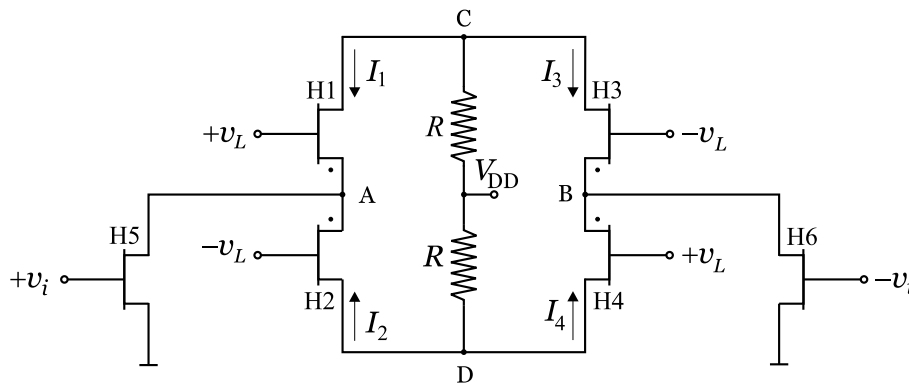


Figura 6.4: Célula de Gilbert con transistores FET. Topología en anillo.

## VI. ESTRUCTURAS ANALIZADAS. RESULTADOS

En el caso de que sólo se aplique señal en la puerta de OL, se pueden aprovechar algunas propiedades de simetría del circuito para demostrar ciertas relaciones útiles. Las corrientes de H5 y H6 son iguales y tienen sólo armónicos de orden par, por lo que las tensiones correspondientes son iguales y tienen sólo armónicos de  $\omega_L$  de orden par. En consecuencia, las corrientes de drenador satisfacen las igualdades  $I_1 = I_4$  e  $I_2 = I_3$ , y las variaciones de las tensiones son iguales. La corriente diferencial  $I_{12}(v_L, 0)$  es una función periódica con el mismo periodo que la señal del OL, por lo que puede ser descrita como una serie de Fourier conteniendo sólo armónicos impares.

El modelo más sencillo, aunque poco realista, para describir la respuesta de la CG, asume que la acción de  $v_L$  sobre H1-H4 es equiparable a la de un interruptor ideal cuyo estado varía entre un circuito abierto y un cortocircuito [11]. Si  $I_{50}$  representa la corriente de DC asociada a H5 cuando  $V_{gs5} = V_{GS5}$  y  $V_{ds5} = V_5$ , entonces la corriente de drenador se puede expresar como:

$$I_5 \approx I_{50} + g_m^{H5} v_i + g_d^{H5} v_5 \quad (6.13)$$

Asumiendo que esta corriente se divide a partes iguales entre las ramas de H1 y H2, puede escribirse:

$$I_{12} = \frac{1}{2} [I_{50} + g_m^{H5} v_i + g_d^{H5} v_5] [p(t) - \bar{p}(t)] \quad (6.14a)$$

$$I_{43} = \frac{1}{2} [I_{50} - g_m^{H5} v_i + g_d^{H5} v_5] [p(t) - \bar{p}(t)] \quad (6.14b)$$

donde  $p(t)$  es una señal periódica rectangular unipolar, de periodo  $T = 2\pi/\omega_L$ , y en contrafase con  $\bar{p}(t)$ , esto es,  $p(t) - \bar{p}(t) = 2p(t) - 1$ . Sustituyendo en (6.12), la tensión diferencial de salida, tomada entre los drenadores de H1 y H4 viene dada por:

$$v_o = Rg_m^{H5} v_i [p(t) - \bar{p}(t)] \quad (6.15)$$

El proceso de mezcla se puede ilustrar fácilmente tomando  $v_i(t) = V_{RF} \cos(\omega_{RF}t)$ , al desarrollar  $p(t) - \bar{p}(t)$  en los diferentes armónicos de  $\omega_L$ :

$$\begin{aligned} v_o(t) &= 2Rg_m^{H5} V_{RF} \cos(\omega_{RF}t) \cdot \left[ \frac{2}{\pi} \cos(\omega_L t) - \frac{2}{3\pi} \cos(3\omega_L t) + \dots \right] = \\ &= 2Rg_m^{H5} V_{RF} \left\{ \frac{1}{\pi} \cos[(\omega_{RF} - \omega_L)t] + \frac{1}{\pi} \cos[(\omega_{RF} + \omega_L)t] + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3\pi} \cos[(3\omega_L - \omega_{RF})t] - \frac{1}{3\pi} \cos[(3\omega_L + \omega_{RF})t] + \dots \right\} \quad (6.16) \end{aligned}$$

De aquí sigue que la ganancia de conversión toma el valor siguiente:

$$G_C = \frac{2}{\pi} Rg_m^{H5} \quad (6.17)$$



### VI.2.1. Determinación de las componentes armónicas de $I_{12}$

El modelo expuesto hasta aquí asume una conmutación ideal en los transistores H1-H4, controlada por la acción de la entrada  $v_L$ . Teniendo en cuenta que un FET dista de comportarse como un interruptor ideal, un análisis más riguroso de la CG consideraría las componentes armónicas de la corriente diferencial  $I_{12}$  a partir de un modelo de FET adecuado.

Se ha mencionado anteriormente la similitud de la CG con un mezclador resistivo doblemente balanceado. Esto sugiere que es de esperar un mejor comportamiento si H1-H4 se polarizan con bajo  $V_{DS}$ . En efecto, es un hecho conocido [2] que una conducción directa excesiva requiere potencia de OL innecesaria, y por tanto parece más adecuado un punto de polarización próximo a la región subumbral para H1-H4 si se va a diseñar un mezclador o modulador. Al igual que en otros diseños previos [12] se supondrá que H5-H6 están polarizados en saturación.

En el modelado de MESFET y HEMT se ha prestado especial atención a su no-linealidad dominante: la fuente de corriente controlada. Estos modelos están dirigidos fundamentalmente a tensiones  $V_{gs}$  por encima del umbral. Para la región subumbral se asumirá una dependencia exponencial con  $V_{gs}$  [13]. Si  $I_{10}$  representa la corriente de DC del drenador de H1 cuando  $V_{gs1} = V_{GS1}$  y  $V_{ds1} \equiv V_1 = V_{10}$ , entonces la corriente de drenador se puede expresar como:

$$I_1 = I_{10} \exp [\alpha(V_{gs1} - V_{GS1})] \left[ 1 + \frac{g_{d1}(V_1 - V_{10})}{I_{10}} \right], \quad (6.18)$$

donde  $\alpha$  es un parámetro que puede ser obtenido mediante ajuste de la característica  $I/V$  del FET. Se ha comprobado que la coincidencia entre (6.18) y el modelo no lineal de HEMT ED02AH de Philips Microwave Limeil es buena en la región subumbral.

En el caso que sólo se aplique señal en la puerta de OL, puesto que por la simetría de la estructura las variaciones de las tensiones de H1-H4 son iguales:  $v_{10} = v_{20} = v_{30} = v_{40}$ , puede escribirse:

$$I_1 = I_{10} \exp [\alpha(v_L - v_5)] \left[ 1 + \frac{g_{d1}v_1}{I_{10}} \right] \quad (6.19a)$$

$$I_2 = I_{10} \exp [\alpha(-v_L - v_5)] \left[ 1 + \frac{g_{d1}v_1}{I_{10}} \right] \quad (6.19b)$$

Al aplicar la Ley de Kirchhoff de las corrientes resulta:

$$I_5(v_L, 0) = I_1 + I_2 = I_{10} \{ \exp [\alpha(v_L - v_5)] + \exp [\alpha(-v_L - v_5)] \} \left[ 1 + \frac{g_{d1}v_1}{I_{10}} \right]. \quad (6.20)$$

La corriente diferencial  $I_1 - I_2$  se puede relacionar con la corriente de drenador de H5 a través de (6.20), restando (6.19a) de (6.19b), obteniéndose:

$$I_{12}(v_L, 0) = I_1 - I_2 = I_5(v_L, 0) \tanh(\alpha v_L). \quad (6.21)$$

## VI. ESTRUCTURAS ANALIZADAS. RESULTADOS

Al mismo resultado se puede llegar partiendo del modelo de FET de Angelov (1.20) (véase el subapartado II.7.2) :

$$I_{ds} = I_{pk} (1 + \tanh(\psi)) \cdot (1 + \lambda V_{ds}) \tanh(\alpha V_{ds}) . \quad (6.22)$$

Para la tecnología HEMT seleccionada, el modelo (6.22) es lo suficientemente adecuado si se toma  $\psi = P(V_{gs} - V_{pk})$  con los parámetros siguientes:  $P = 2,7 \text{ V}^{-1}$ ,  $V_{pk} = -0,17 \text{ V}$ . Siguiendo el razonamiento anterior se puede llegar a la expresión:

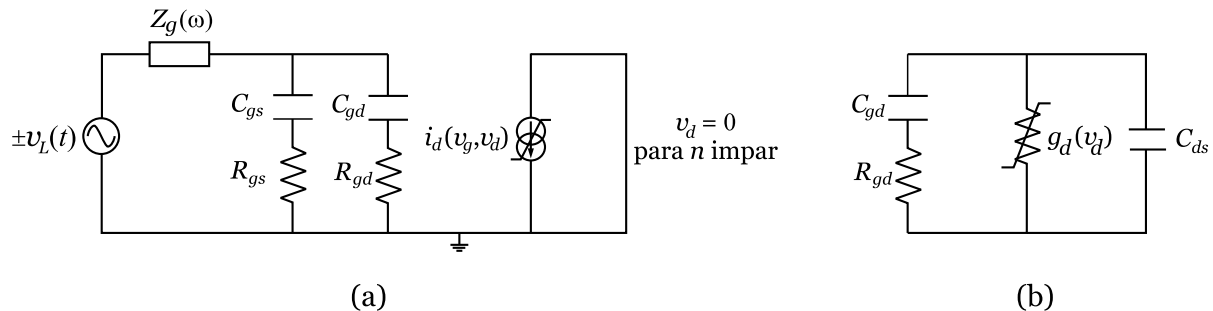
$$I_{12}(v_L, 0) = I_5(v_L, 0) \tanh(2Pv_L) , \quad (6.23)$$

válida cuando  $\exp [2(V_{GS1} - V_{pk} - v_5)] \ll 1$ , aproximación perfectamente justificable bajo polarización subumbral.

El análisis de la corriente  $I_5$  se puede efectuar aprovechando la simetría de la CG. Cuando  $v_i = 0$ , las tensiones en A y B son iguales, y por tanto estos nodos se comportan como tierra virtual para las componentes impares del OL. Las mismas consideraciones se pueden hacer sobre los nodos C y D. Despreciando las resistencias de acceso, el circuito equivalente de H1-H4 para componentes impares se muestra en la Figura 6.5a. Como puede apreciarse, la única función de transferencia no lineal distinta de cero, para orden impar, es la que relaciona la tensión incremental asociada a la capacidad  $C_{gs}$  con  $v_L(t)$ .

Para componentes de orden par, H5 y H6 se pueden aproximar por el circuito equivalente de la Figura 6.5b, y la CG actúa como un amplificador diferencial dual con corrientes de cola  $I_5 = I_1 + I_2$  e  $I_6 = I_3 + I_4$ . Para evaluar  $I_5$  sólo es necesario determinar la función de transferencia no lineal de segundo orden del par diferencial H1-H2 o equivalentemente, la del amplificador formado por H1, la carga activa  $H5(\times \frac{1}{2})$  y  $R(\times 2)$  [14]. De esta manera se pueden hallar directamente los coeficientes de Fourier de  $I_{12}(t)$ . Una vez determinada la componente  $\tilde{I}_{12}^{(1)}(V_L)$  para la frecuencia fundamental  $\omega_L$ , la ganancia de la CG a  $\omega_L \pm \omega_{RF}$  cuando la entrada de RF está presente, se puede expresar como:

$$G_C = \frac{\tilde{I}_{12}^{(1)}(V_L)}{I_D} R g_m^{H5} \quad (6.24)$$



**Figura 6.5:** (a) Modelo de H1-H4 para orden impar cuando  $v_i = 0$ . (b) Modelo de H5 y H6 cuando  $v_i = 0$ .

En consonancia con (6.17), en el límite cuando  $V_L \rightarrow \infty$ , (6.24) debe de tomar un valor igual a la ganancia de un amplificador cuya salida se multiplica por una onda cuadrada de amplitud  $\pm 1$ . Nótese que en ambos casos la ganancia de conversión se expresa como el producto de una constante, que depende de las componentes armónicas de la corriente, por la ganancia de pequeña señal de una etapa amplificadora. A través de (6.24) se puede predecir también el nivel de los productos de mezcla a los distintos armónicos del OL, aunque estos se encuentran generalmente fuera de banda, y por tanto su interés es limitado. En cambio, en su funcionamiento como mezclador, es de gran interés la caracterización de las respuestas en las que intervienen los armónicos de la entrada (RF), que dependen del comportamiento no lineal del par H5-H6, a lo que se dedica el siguiente apartado.

### VI.2.2. Análisis aproximado de pequeña señal

Una vez obtenidas las componentes armónicas de las corrientes, se puede seguir el método gran señal-pequeña señal para el análisis de la CG. Teniendo en cuenta que la entrada se aplica a H5-H6, el análisis de pequeña señal es equivalente al de un amplificador diferencial, y en consecuencia, la distorsión por intermodulación es debida fundamentalmente a H5-H6.

En [15] se describe el análisis de un amplificador diferencial considerando un modelo de pequeña señal unilateral del FET. A continuación se presenta el mismo análisis basado en la teoría expuesta en el Capítulo IV. Como extensión del método mencionado, se prescinde de la aproximación unilateral y se incluye el efecto de los términos cruzados  $g_{kl}$  en la caracterización de la fuente de corriente no lineal del FET. Como hipótesis simplificadora se asume que las resistencias de acceso y otros elementos parásitos son despreciables.

El análisis de H5-H6 se reduce al del circuito mostrado en la Figura 6.6, que es equivalente a un amplificador en fuente común. Mediante análisis nodal se obtiene la siguiente matriz de admitancias:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_g(\omega) + j\omega(C_{gs} + C_{gd}) & -j\omega C_{gd} \\ g_{10} - j\omega C_{gd} & g_{01} + Y_0(\omega) + j\omega C_{gd} \end{pmatrix}, \quad (6.25)$$

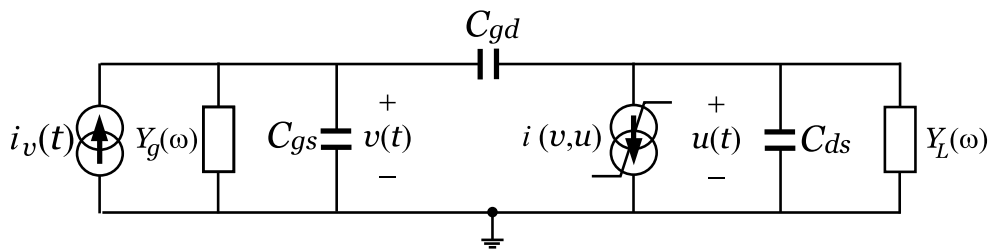


Figura 6.6: Modelo de pequeña señal de un amplificador FET en fuente común.

## VI. ESTRUCTURAS ANALIZADAS. RESULTADOS

donde se ha hecho uso de la definición  $Y_0(\omega) = Y_L(\omega) + j\omega C_{ds}$ .

La función de transferencia de primer orden (salida diferencial) se puede expresar como:

$$H_1(\omega) = -\frac{Y_g(\omega)}{\Delta(\omega)} [g_{10} - j\omega C_{gd}] , \quad (6.26)$$

siendo  $\Delta(\omega)$  el determinante de la matriz de admitancias. El método convencional de desarrollo en series de Volterra conduce a la siguiente función de transferencia no lineal de tercer orden:

$$H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{Y_g(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + j(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)(C_{gs} + C_{gd})}{\Delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)} \left[ 2g_{20} \overline{H_{G1}(\omega_1)H_{G2}(\omega_2, \omega_3)} + g_{30}H_{G1}(\omega_1)H_{G1}(\omega_2)H_{G1}(\omega_3) + g_{21} \overline{H_{G1}(\omega_1)H_{G1}(\omega_2)H_1(\omega_3)} \right] , \quad (6.27)$$

donde  $H_{G1}(\omega_1)$  y  $H_{G2}(\omega_1, \omega_2)$  son las funciones de transferencia no lineales de segundo orden asociadas a la tensión puerta-fuente:

$$H_{G1}(\omega) = \frac{Y_g(\omega)}{\Delta(\omega)} [g_{01} + Y_0(\omega) + j\omega C_{gd}] \quad (6.28a)$$

$$H_{G2}(\omega_1, \omega_2) = -\frac{j(\omega_1 + \omega_2)C_{gd}}{\Delta(\omega_1 + \omega_2)} \left[ g_{20}H_{G1}(\omega_1)H_{G1}(\omega_2) + g_{11} \overline{H_{G1}(\omega_1)H_1(\omega_2)} \right] \quad (6.28b)$$

Despreciando efectos de orden superior a tres y combinando (6.26) y (6.27), la tensión de salida a la frecuencia  $\omega_1$  se puede escribir como:

$$v_o(t; \omega_1) = V_i |H_1(\omega_1)| \cos[\omega_1 t + \angle H_1(\omega_1)] + \frac{3}{4} V_i^3 |H_3(\omega_1, \omega_1, -\omega_1)| \cos[\omega_1 t + \angle H_3(\omega_1, \omega_1, -\omega_1)] , \quad (6.29)$$

y para operación lineal se tiene la siguiente expresión para la ganancia:

$$A_v = \left| H_1(\omega_1) + \frac{3}{4} V_i^2 H_3(\omega_1, \omega_1, -\omega_1) \exp [\angle H_3(\omega_1, \omega_1, -\omega_1) - \angle H_1(\omega_1)] \right| \quad (6.30)$$

La intermodulación con dos tonos también se puede obtener en una forma similar a (6.29). La componente de tercer orden con frecuencia de salida  $2\omega_1 - \omega_2$  viene dada por:

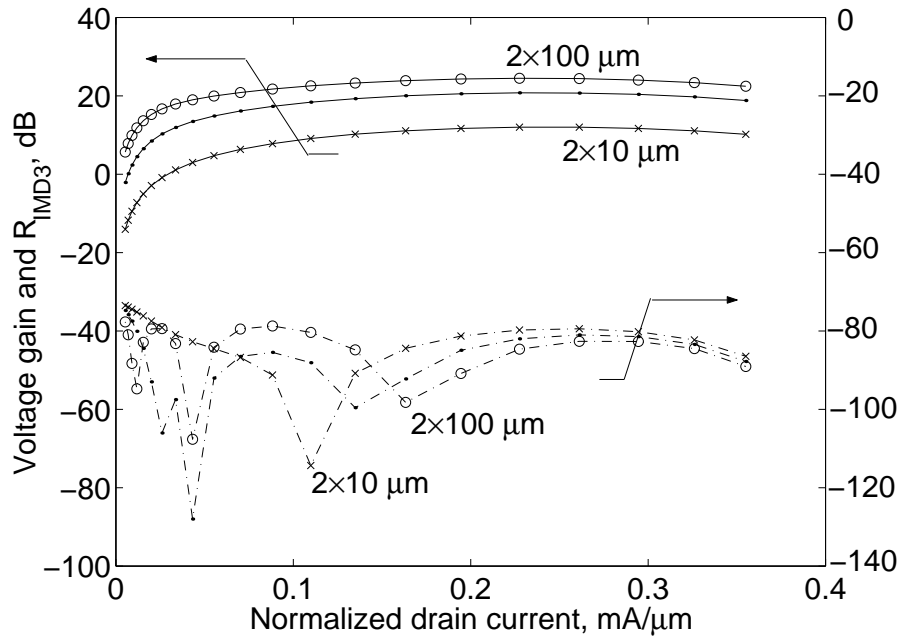
$$v_{o3}(t; 2\omega_1 - \omega_2) = \frac{3}{4} V_i^3 |H_3(\omega_1, \omega_1, -\omega_2)| \cos[(2\omega_1 - \omega_2)t + \angle H_3(\omega_1, \omega_1, -\omega_2)] , \quad (6.31)$$

y la relación entre la salida a la frecuencia fundamental  $\omega_{1,2} \simeq \omega_0$  y la respuesta de IMD de tercer orden, se expresa como:

$$R_{IMD_3} = \left| \frac{\frac{3}{4} V_i^3 H_3(\omega_0, \omega_0, -\omega_0)}{H_1(\omega_0) + \frac{9}{4} V_i^2 H_3(\omega_0, \omega_0, -\omega_0) \exp [\angle H_3(\omega_0, \omega_0, -\omega_0) - \angle H_1(\omega_0)]} \right| . \quad (6.32)$$

## VI.2.3. Método de diseño

Como se acaba de mostrar en los apartados precedentes, la CG se asemeja a una etapa amplificadora (H5-H6) cuya salida es conmutada a la frecuencia del OL mediante la cuarteta de transistores H1-H4. Por tanto, la IMD es debida fundamentalmente a la acción de H5-H6. De ahí el interés de un análisis preliminar del amplificador diferencial en fuente común propuesto en el apartado anterior, para optimizar la ganancia e IMD.



**Figura 6.7:** Ganancia e  $IMD$  del par diferencial H5-H6 en función de la corriente  $I_{ds}$  normalizada.

Una vez conocidas las funciones de transferencia no lineales, se puede representar la ganancia de tensión del par H5-H6 en función de la corriente de drenador normalizada, para distintas anchuras de puerta [16]. En la Figura 6.7 se observa una ganancia aproximadamente constante en un rango amplio de corrientes de polarización. En la misma figura se ha representado la IMD. Obsérvese cómo se necesita una corriente próxima a  $0,12W$  mA para tener simultáneamente una alta ganancia y baja IMD, junto con un consumo reducido.

Recordando que  $V_{10} \ll V_{50}$ , la condición  $I_{50}/I_{10} = 2$  implica que  $W_5 \ll W_1$ . Por este motivo, en lo sucesivo se ha tomado  $W_5 = 2 \times 40 \mu\text{m}$  y  $W_1 = 6 \times 50 \mu\text{m}$ . Teniendo en cuenta que según la Figura 6.7 un buen criterio para minimizar la IMD es seleccionar  $I_{50}/W = 0,12 \text{ mA}/\mu\text{m}$ , el punto de polarización DC puede ser determinado mediante un modelo adecuado, como por ejemplo (6.22). Sustituyendo en el modelo de Angelov se concluye que  $V_{50} = 3 \text{ V}$ ,  $V_{GS5} = -0,35 \text{ V}$  e  $I_{50} = 10 \text{ mA}$  para H5-H6, y  $V_{GS1} = -0,75 \text{ V}$  e  $I_{10} = 5 \text{ mA}$  para H1-H4.

### VI.2.4. Resultados

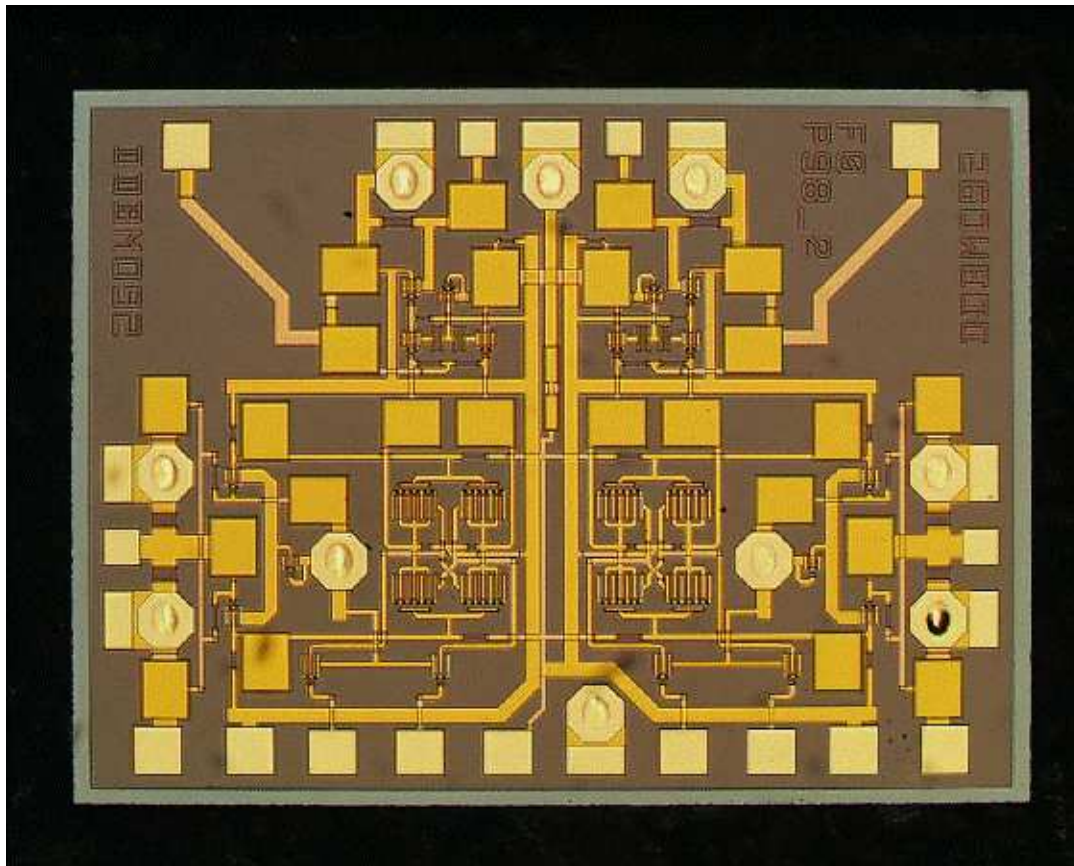
El diseño y realización del circuito que se presenta a continuación forma parte de un amplio proyecto que tuvo por objeto el diseño de un modulador/demodulador universal MMIC, capaz de operar hasta 7 GHz, y destinado a receptores de espectro ensanchado por secuencia directa. Para validar los métodos de análisis no lineal propuestos en esta Tesis, se ha diseñado un mezclador doblemente equilibrado basado en la CG y dos amplificadores diferenciales necesarios para obtener el desfase de  $180^\circ$  que asegura un buen equilibrio entre las ramas del mezclador. Como dispositivos activos se utilizaron HEMTs de AsGa, y se buscó el objetivo de una ganancia razonable, bajo consumo e IMD.

Se resumen a continuación las principales consideraciones sobre el diseño de la CG. De acuerdo con las conclusiones del apartado anterior, los transistores H1-H4 se han polarizado en una región en la que la dependencia de  $I_{ds}$  con  $V_{ds}$  es casi lineal, manteniendo  $V_{gs} = -0,73$  V y  $V_{ds} = 1,6$  V. Para conseguir el funcionamiento en la región subumbral, el nivel de OL debe ser lo suficientemente alto como para provocar un incremento de la tensión de fuente en estos FET, que mantenga  $V_{gs}$  por debajo del umbral ( $-0,906$  V) durante todo el ciclo de OL. En consecuencia, la operación subumbral permite una reducción de la tensión de alimentación ( $V_{DD}$ ), y como las corrientes de drenador son inferiores que en la región de saturación, el consumo de potencia también puede disminuirse. Asimismo se produce una mejora en el rendimiento, ya que los transistores H1-H4 operan como en un amplificador de clase C ó E. De acuerdo con la bibliografía consultada, éste es el primer mezclador HEMT descrito en el que se utiliza polarización subumbral [17, 18].

Con respecto a H5-H6, deben soportar una corriente que es el doble que la de H1-H4. Para alcanzar operación lineal, H5-H6 han sido polarizados en saturación. Las anchuras de puerta de estos transistores se han seleccionado para obtener corrientes de 10 mA, siguiendo las pautas de diseño comentadas en el apartado anterior.

En muchos diseños los mezcladores doblemente balanceados están acompañados de baluns pasivos [1]. Sin embargo, las dimensiones de estos baluns son generalmente demasiado grandes como para que se implementen sobre el mismo sustrato, quedando por tanto fuera del MMIC. Además, las pérdidas en estos baluns provocan un incremento de la potencia de OL necesaria. En el circuito propuesto se ha incluido un balun activo basado en un par diferencial para equilibrar la señal de OL. Una estructura similar se ha utilizado para desbalancear la salida del mezclador. El análisis y diseño de ambos baluns ha sido ampliamente detallado en el Capítulo IV.

Siguiendo la metodología expuesta, se ha realizado un mezclador MMIC. El circuito ha sido fabricado en la fundición Philips Microwave Limeil. La tecnología aplicada se conoce como proceso ED02AH, e incluye HEMTs pseudomórficos con  $0,2 \mu\text{m}$  de longitud de puerta. En el Apéndice 1 se resumen las características más importantes de esta tecnología. En la Figura 6.8 se muestra una fotografía del circuito realizado,



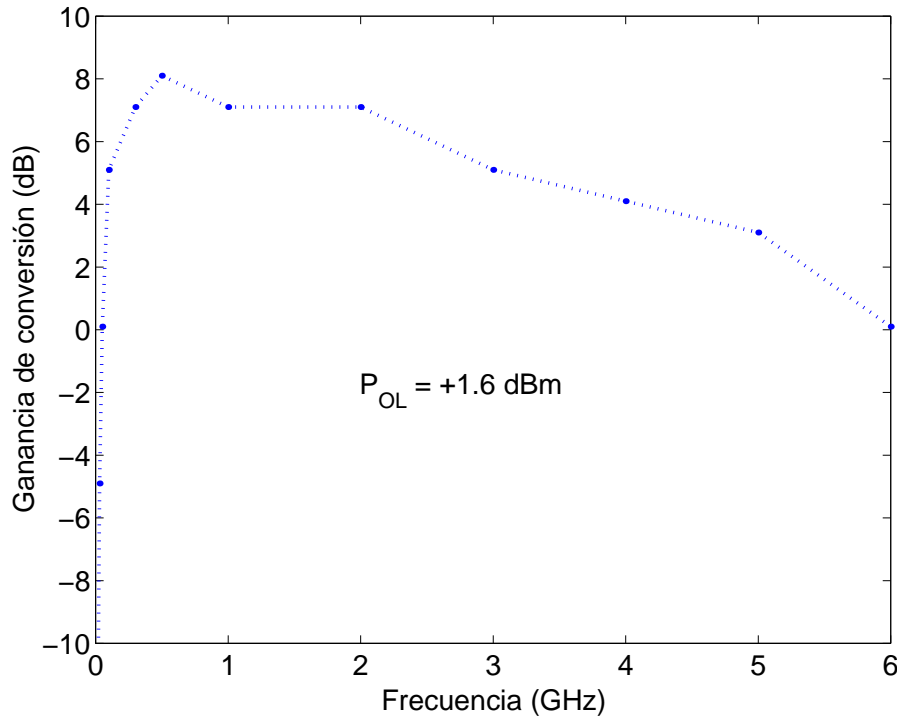
**Figura 6.8:** Fotografía del MMIC realizado, por cortesía de Tecnológica Componentes Electrónicos.

que ocupa una superficie de  $1,5 \times 2 \text{ mm}^2$ . Como puede observarse, comprende dos mitades simétricas. Cada mitad incluye una CG y baluns activos de OL y salida.

### Caracterización experimental

El circuito MMIC ha sido ampliamente caracterizado hasta una frecuencia de 15 GHz [19]. Los datos experimentales se obtuvieron por cortesía de la Universidad Politécnica de Madrid, en el contexto del Proyecto de Investigación TIC96-0724-C06-06 de la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología. Utilizando equipamiento de microondas adecuado, el conjunto de medidas incluyó respuesta en frecuencia, ganancia de conversión, adaptación a la entrada y salida, punto de compresión de 1 dB e intermodulación de tercer orden.

En la Figura 6.9 se muestra la respuesta en frecuencia de la ganancia de conversión, que alcanza 7 dB a 2 GHz para un nivel de OL de +1,6 dBm. El ancho de banda se puede extender hasta 10 GHz si se utilizan niveles más altos de OL. Es importante destacar que para estas medidas el nivel de OL ha permanecido invariable a +1,6 dBm. Este valor es mucho menor que los niveles típicos de OL, que pueden ser superiores a +10 dBm para obtener prestaciones similares [1]. Esta es la principal contribución



**Figura 6.9:** Respuesta en frecuencia de la ganancia de conversión.

del balun de OL. No obstante, en un mezclador no es esencial que la ganancia de conversión sea alta, de modo que el circuito propuesto puede servir para abarcar toda la banda X.

La respuesta en frecuencia del mezclador está determinada por las funciones de transferencia de la CG y baluns. Para evaluar el comportamiento, los baluns han sido estudiados en detalle, y en particular su respuesta en frecuencia en términos de los parámetros del modelo de HEMT. Mediante un análisis sencillo se puede hallar la siguiente expresión para la función de transferencia de los baluns:

$$A_V(s) = \frac{V_o}{V_g} = \frac{A_{V_o}s[1 - s(C_{gd}/g_m)]}{1 + b_1s + b_2s^2 + b_3s^3}, \quad (6.33)$$

donde los coeficientes  $b_1$ ,  $b_2$  y  $b_3$  se pueden expresar en función de los parámetros del HEMT.

Las pérdidas por retorno se encuentran por encima de 15 dB, tanto a la entrada como a la salida (véase la Figura 6.10), a pesar de que no se ha procedido al diseño de redes de adaptación para favorecer un funcionamiento en banda ancha.

Para validar el análisis de gran señal a partir de las componentes armónicas de la corriente diferencial  $I_{12}$  fue necesario convertir la medida a tensiones y corrientes internas de la CG, considerando la característica de los baluns. La Figura 6.11 muestra en línea continua la dependencia de los coeficientes  $I_{12}^{(n)}$  ( $n = 1, 3$  y  $5$ ) con la amplitud del OL, calculados con el método propuesto. También se muestran en línea discontinua los mismos coeficientes calculados con el modelo ED02AH y la técnica del balance ar-



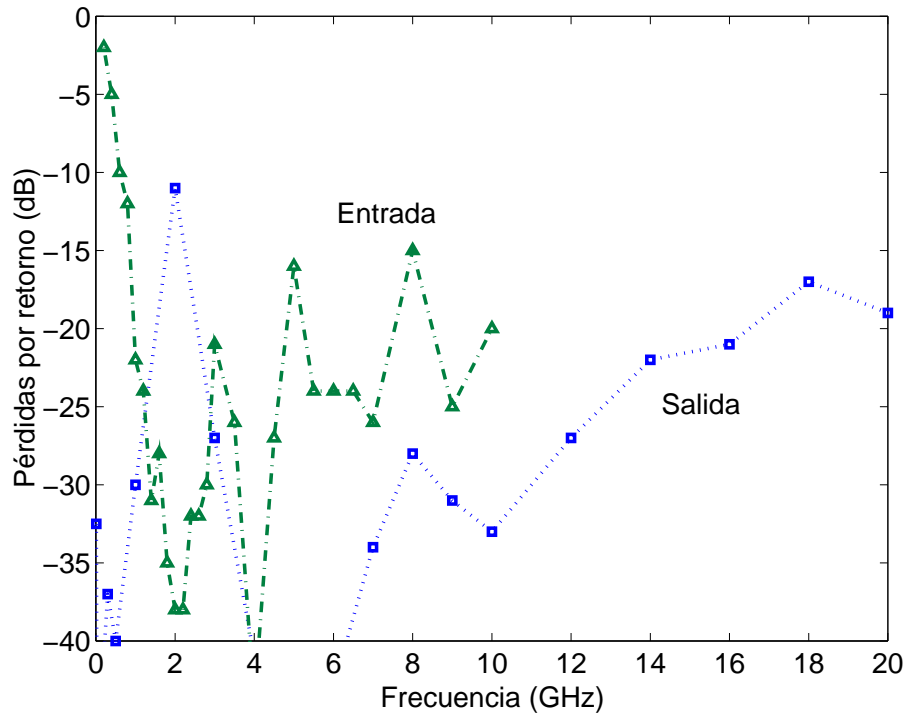


Figura 6.10: Pérdidas por retorno a la entrada y salida.

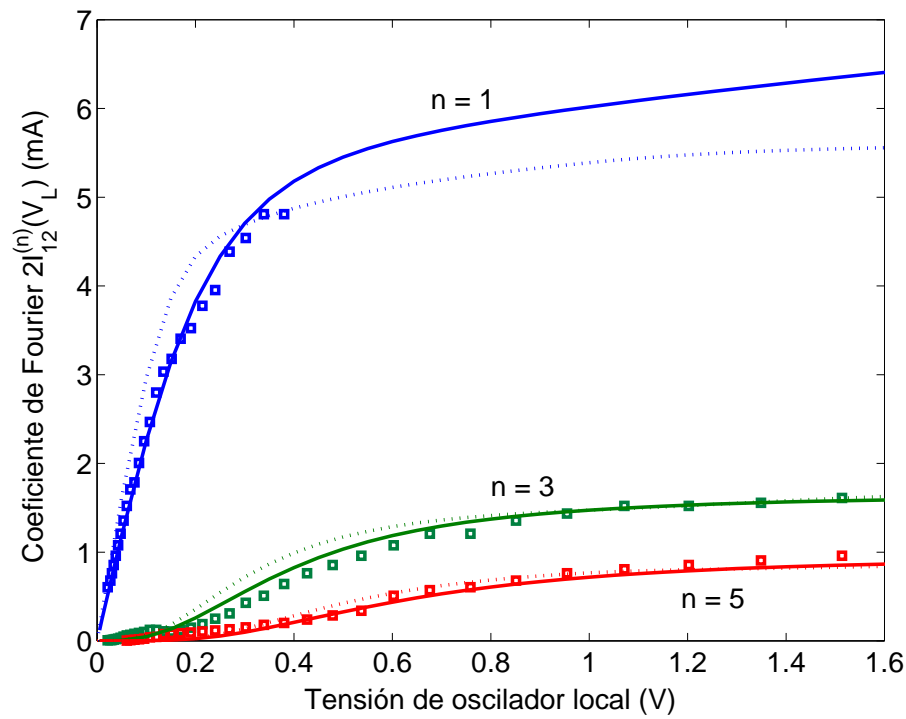
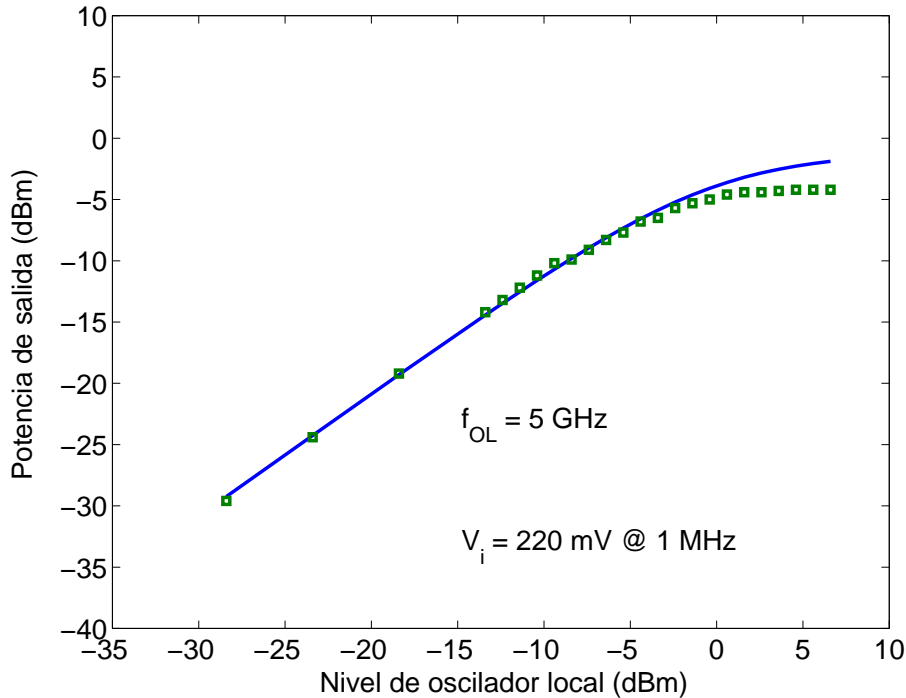


Figura 6.11: Componentes armónicas de  $I_{12}$ . En trazo continuo: método teórico expuesto; en trazo discontinuo: balance armónico; nube de puntos: medidas convertidas a tensiones y corrientes.



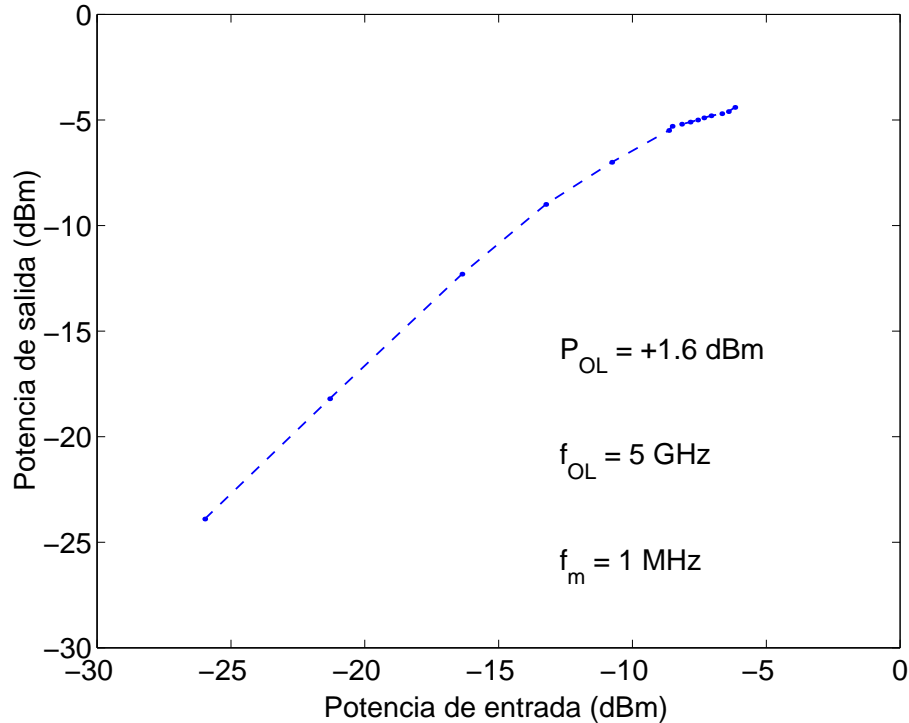
**Figura 6.12:** Respuesta a 5 GHz en función del nivel de OL.

mónico, y puede observarse que la dependencia es muy similar. La comparación con las medidas muestra también una gran coincidencia.

De la caracterización del MMIC a 5 GHz se han obtenido los datos de potencia de salida, ante el nivel de OL, representados con puntos en la Figura 6.12, y el cálculo teórico realizado con (6.24) corresponde a la línea continua. Es importante enfatizar nuevamente que gracias a la acción del balun de OL, la máxima ganancia de conversión se alcanza con un nivel de OL alrededor de 0 dBm, mucho menor que los valores típicos que aparecen en la literatura.

La linealidad del mezclador se puede estudiar con ayuda de la Figura 6.13, pudiéndose distinguir un nivel de salida en el punto de compresión de 1 dB de  $-6$  dBm.

En la Figura 6.14 se muestra en línea continua la respuesta fundamental variando el nivel de la señal de RF de entrada, y la IMD de tercer orden, con dos tonos, para la CG considerada individualmente. Se puede apreciar la coincidencia con la misma técnica de series de Volterra y un modelo de HEMT detallado, y con el método de balance armónico. Para poder comparar con medidas fue preciso tener en cuenta el efecto que sobre la IMD ejerce además el balun de salida, que se caracteriza por una ganancia de 3 dB y un punto de intercepto a la salida de  $+7$  dBm, a 5 GHz. Variando la tensión de entrada y fijando la potencia de OL a  $+1,6$  dBm se observa en la Figura 6.15 una estrecha coincidencia entre los datos medidos y el método teórico presentado, en el que se aplicó la técnica de análisis de subsistemas no lineales en cascada expuesta en el Capítulo III. La respuesta fundamental y la intermodulación calculadas (línea continua) muestra una gran coincidencia, a pesar de la sencillez del análisis y de que



**Figura 6.13:** Nivel de salida en función de la entrada de RF a 5 GHz.

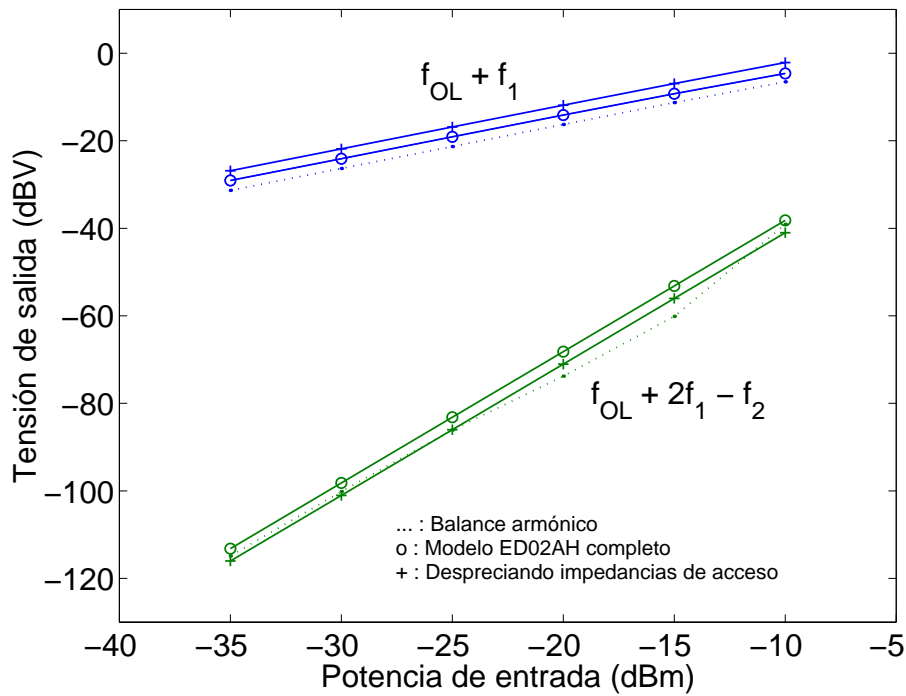
se está ante un circuito de mediana complejidad, con un número relativamente alto de dispositivos (14 HEMTs).

Finalmente se midió el espectro de salida a una frecuencia de OL de 10 GHz, utilizando una señal moduladora de 1 MHz. En la Figura 6.16 se puede apreciar un rechazo de portadora superior a 30 dB. La Figura 6.17 muestra el espectro de intermodulación con dos tonos, a una frecuencia de OL de 5 GHz. La protección frente a la intermodulación de tercer orden es superior a 40 dB.

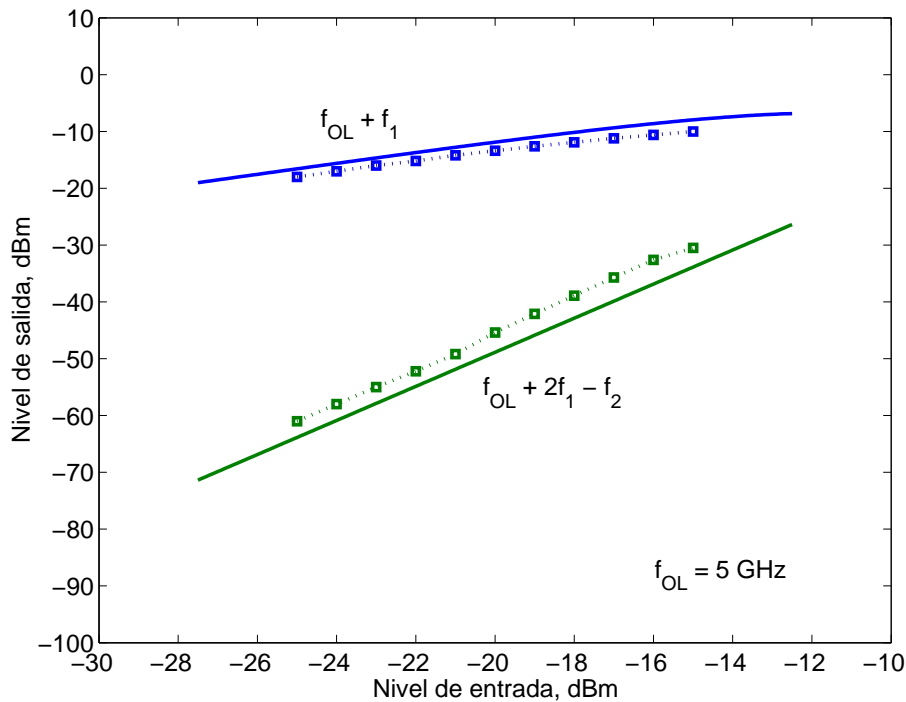
### VI.3. Análisis de un mezclador resistivo

Una forma común de realizar un mezclador consiste en aplicar una señal de OL de alto nivel y una señal de RF de pequeña amplitud sobre un dispositivo no lineal, como puede ser un diodo Schottky. El OL modula la conductancia de la unión entre valores extremos, haciendo posible la conversión de frecuencia. Si la modulación de esta conductancia se realizase como una resistencia variante en el tiempo, la mezcla resultante estaría libre de intermodulación. Un ejemplo de tal elemento podría ser un interruptor ideal, operado a la frecuencia de OL, en serie con una pequeña resistencia [20]. Los parámetros más importantes que gobiernan la operación de un interruptor son las impedancias de los estados ON-OFF, la amplitud de la señal de control y el tiempo de transición entre estados. Un interruptor ideal presenta una impedancia cero en el estado ON y se comporta como un circuito abierto ideal en OFF, y obviamente requiere

## VI. ESTRUCTURAS ANALIZADAS. RESULTADOS



**Figura 6.14:** Respuesta fundamental e IMD de la CG mediante diferentes métodos de análisis.



**Figura 6.15:** Respuesta fundamental e IMD de tercer orden con dos tonos a la salida del MMIC.

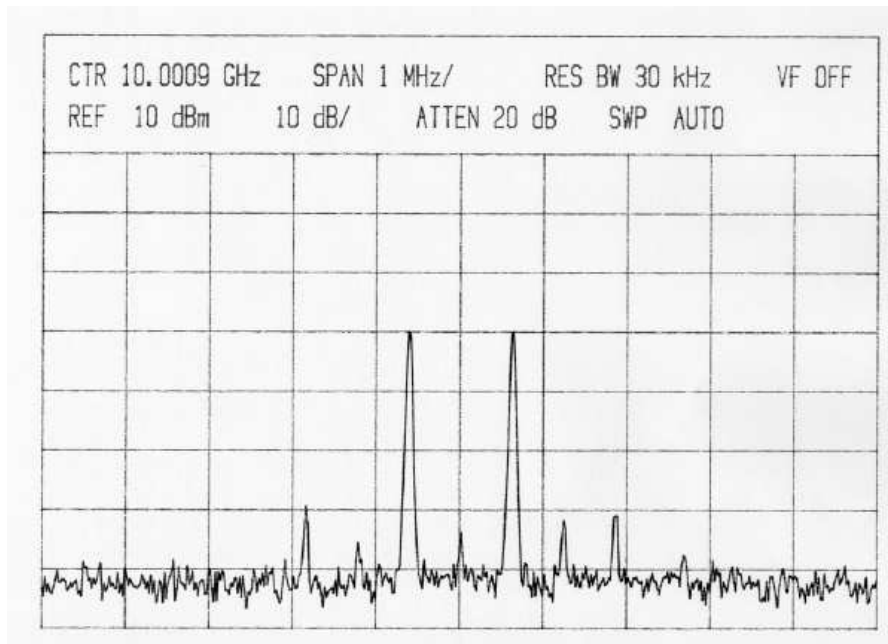


Figura 6.16: Espectro de salida a 5 GHz.

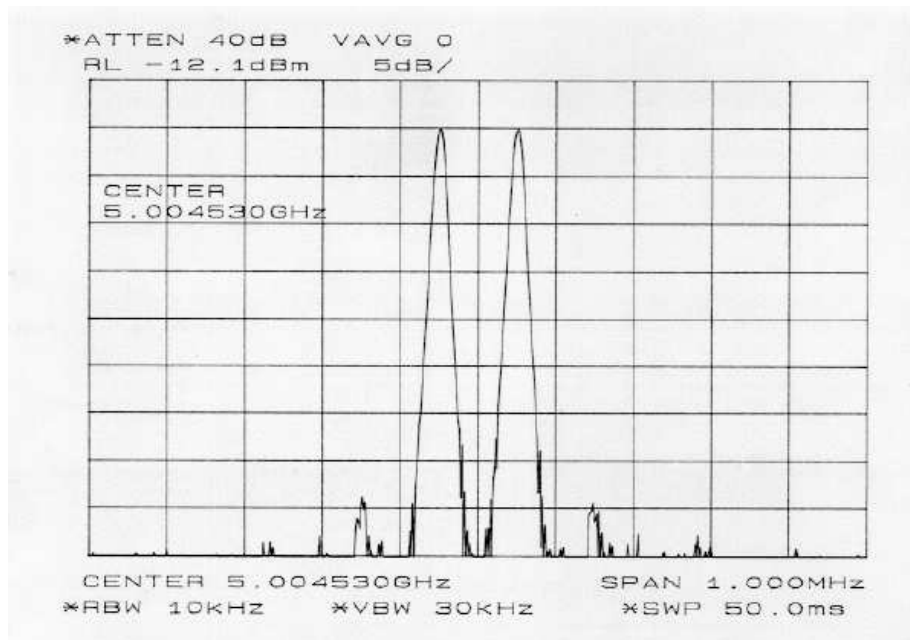


Figura 6.17: Espectro de intermodulación con dos tonos a 10 GHz.

## VI. ESTRUCTURAS ANALIZADAS. RESULTADOS

una tensión mínima de control y no existe tiempo de transición entre estados.

La dependencia temporal de la impedancia de un interruptor que varía entre los estados ON y OFF a la frecuencia de OL puede ser descrita por medio de una forma de onda cuadrada,  $s(t)$ , que puede expresarse en series de Fourier como:

$$s(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \cos(n\omega_p t) \quad (6.34)$$

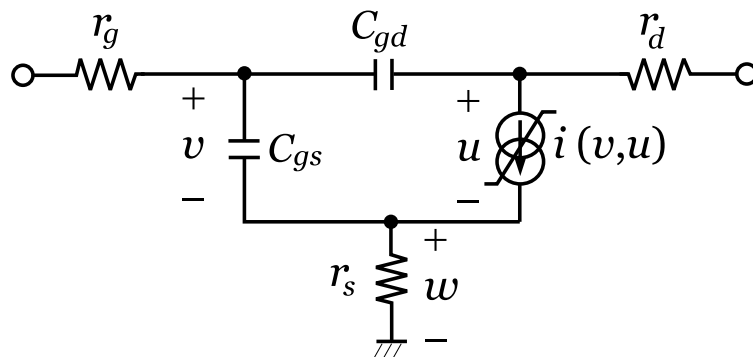
Si se aplica una señal de RF,  $v_q(t)$ , en serie con el interruptor variante en el tiempo, alternativamente permitiendo e impidiendo que la señal de RF pase a la salida, la tensión de salida,  $v_o(t)$ , viene dada por:

$$v_o(t) = v_q(t) \cdot s(t) = V_q \cos(\omega_q t) \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \cos(n\omega_p t) \right) \quad (6.35)$$

A la vista de esta expresión, se observa que los armónicos pares del OL no pasan a la salida, de la misma manera que no existen términos a las frecuencias de los armónicos impares de  $\omega_p$ . Sólo aparecen aquellos términos asociados al producto de  $\cos(\omega_q t)$  con  $\cos(n\omega_p t)$ , para valores impares de  $n$ . Asimismo, es evidente que una entrada con dos tonos tampoco produce intermodulación de tercer orden.

Dado que una resistencia lineal variante en el tiempo no existe en la realidad, el dispositivo más indicado para construir un mezclador resistivo es el que mejor se aproxima a las características de un interruptor ideal. La resistencia del canal de un FET no polarizado es sólo débilmente no lineal. Si el transistor está operando en su región lineal (véase la Sección II.7.3), la respuesta es no lineal con respecto a  $V_{gs}$ , lo cual permite la modulación de la conductancia del canal, mientras que la variación con respecto a  $V_{ds}$  es bastante lineal. Esta característica permite que la distorsión generada sea muy pequeña, comparada con un mezclador a diodo.

En la Figura 6.18 se muestra el circuito equivalente simplificado de un FET resistivo (compárese con la Figura 2.13). La capacidad puerta-canal se distribuye a lo largo del canal, pero por simplicidad se modela como dos capacidades concentradas. Para



**Figura 6.18:** Circuito equivalente de un FET resistivo.

realizar el mezclador se hace operar el FET en configuración de fuente común, con el OL aplicado en la puerta, polarizada negativamente, y la señal de RF se aplica al drenador, de donde se filtra también la FI.

Dado que el valor de  $C_{gd}$  es significativamente más elevado cuando no se aplica polarización en el drenador que cuando el FET se polariza en saturación, es importante que la señal de OL no se acople al drenador, ya que de lo contrario provocaría una excursión en la característica  $I/V$  de la fuente de corriente que incrementaría el nivel de distorsión no lineal. Para que esto no suceda, debe colocarse un filtro de RF que deje el drenador en cortocircuito a la frecuencia de OL y a todas las frecuencias de mezcla, excepto RF y FI. Por razones similares, el filtro de OL debe cortocircuitar la puerta del FET a las frecuencias de RF, FI e imagen. Bajo estas consideraciones, la Figura 6.19 muestra el circuito equivalente del mezclador, incluyendo los filtros de OL, RF y FI. Las dos entradas del mezclador se pueden representar por su equivalente de Thévenin, y nos referiremos a  $Z_g(\hat{p})$  para designar la impedancia equivalente del generador de OL, incluyendo el efecto del filtro. Análogamente,  $Z_d(\hat{p})$  es la impedancia equivalente del generador de RF, filtro incluido. La salida se representa por una admitancia equivalente de carga  $Y_L(\hat{p})$ .

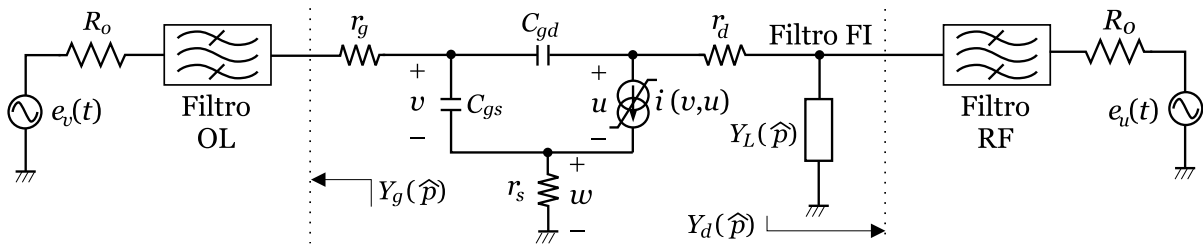
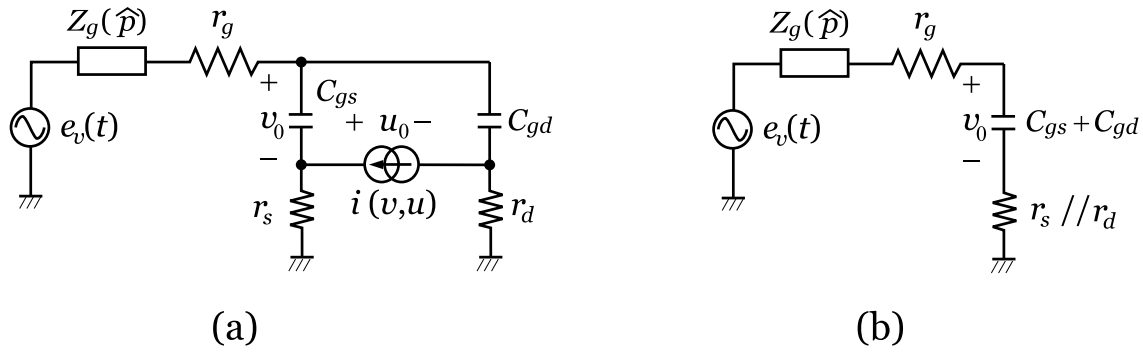


Figura 6.19: Circuito equivalente de un mezclador FET resistivo.

A continuación se detalla minuciosamente el análisis de un mezclador FET resistivo, basado en el cual se han obtenido los resultados que se resumen en [21]. De acuerdo con las conclusiones de la Sección V.4, el mezclador se puede analizar con el método de gran señal/pequeña señal, estudiando primero las formas de onda de las tensiones de control de la fuente de corriente  $i(v, u)$ , cuando sólo se aplica la excitación de OL. Posteriormente se aplica un análisis de pequeña señal considerando sólo la entrada de RF y la fuente de corriente modelada como una conductancia variante en el tiempo.

### VI.3.1. Análisis de gran señal

Como consecuencia de las características exigidas al filtro de RF, el estudio de las formas de onda del FET bombeado por la señal de OL se simplifica considerablemente. Dado que a la frecuencia de OL el drenador está terminado en cortocircuito, el análisis de gran señal se reduce al circuito de la Figura 6.20a. Si no se aplica polarización



**Figura 6.20:** Análisis de gran señal de un mezclador FET resistivo. (a) Circuito equivalente del mezclador excitado sólo por el OL. (b) Modelo de gran señal bajo  $u_0(t) = 0$ .

en el drenador, entonces  $C_{gs} \simeq C_{gd}$ , y como además los valores de las resistencias parásitas  $r_s$  y  $r_d$  son similares, entonces la solución para la tensión  $u_0(t)$  es trivial, esto es,  $u_0(t) = 0$ , quedando  $C_{gs}$  en paralelo con  $C_{gd}$  y  $r_s$  con  $r_d$ . Por tanto, el circuito de OL se comporta como se muestra en la Figura 6.20b, y puede ser analizado empleando técnicas puramente lineales.

Si se aplica una señal de alto nivel,  $e_v(t) = |V_p| \cos(\omega_p t)$ , la forma de onda de la tensión  $v_0(t)$  se puede expresar como:

$$v_0(t) = |V_p| \cdot |G_{10}(\omega_p)| \cos[\omega_p t + \angle H_0(\omega_p)], \quad (6.36)$$

siendo  $G_{10}(\omega_p)$  la función de transferencia:

$$G_{10}(\omega_p) = \frac{V_0(\omega_p)}{E_v(\omega_p)} = \frac{1}{1 + j\omega_p(C_{gs} + C_{gd}) \left[ Z_g(\omega_p) + r_g + \frac{r_s r_d}{r_s + r_d} \right]}. \quad (6.37)$$

Para que el generador de OL entregue su potencia disponible es preciso que exista adaptación conjugada de impedancias a la entrada, esto es:

$$Z_g(\omega_p) = r_g + \frac{r_s r_d}{r_s + r_d} - \frac{1}{j\omega_p(C_{gs} + C_{gd})}, \quad (6.38)$$

en cuyo caso (6.37) se expresa como:

$$G_{10}(\omega_p) = \frac{1}{2j\omega_p(C_{gs} + C_{gd}) \left( r_g + \frac{r_s r_d}{r_s + r_d} \right)}. \quad (6.39)$$

En términos de la potencia disponible,  $\langle P_{OL} \rangle = \frac{|V_p|^2}{8 r_g + \frac{r_s r_d}{r_s + r_d}}$ , la forma de onda de la tensión  $v_0(t)$  viene dada por:

$$v_0(t) = \frac{1}{\omega_p(C_{gs} + C_{gd})} \sqrt{\frac{2 \langle P_{OL} \rangle}{r_g + \frac{r_s r_d}{r_s + r_d}}} \text{sen}(\omega_p t). \quad (6.40)$$



Conviene hacer notar que si se llama  $V_0$  a la amplitud de  $v_0(t)$ , entonces

$$\langle P_{OL} \rangle = \frac{1}{2} |V_0|^2 \omega_p^2 (C_{gs} + C_{gd})^2 \left( r_g + \frac{r_s r_d}{r_s + r_d} \right)$$

coincide con la ecuación (5) de [6].

### VI.3.2. Análisis de pequeña señal

Una vez conocidas las tensiones y corrientes debidas al OL, se realiza un análisis de pequeña señal para hallar la respuesta de primer orden, que sirve para determinar las corrientes no lineales que actúan como excitación para la respuesta de segundo orden. A partir de esta última se construyen las corrientes no lineales de tercer orden y este proceso se reitera para obtener la respuesta de órdenes superiores.

El modelo equivalente de pequeña señal del mezclador se representa en la Figura 6.21a. La puerta del FET está terminada en cortocircuito por acción del filtro de OL. La similitud entre este circuito y el de la Figura 5.9 sugiere que el mezclador resistivo satisface (5.91) y (5.92) sustituyendo  $Y_g(\hat{p})$  e  $Y_e(\hat{p})$  en aquellas ecuaciones por  $r_g^{-1}$  y  $\{r_d + [Y_L(\hat{p}) + Y_d(\hat{p})]^{-1}\}^{-1}$ , respectivamente. Como además  $R_i = R_{gs} = C_{ds} = 0$ , las ecuaciones de mezclador, en términos de las tensiones  $v, u, w$  se expresan como sigue:

$$\mathbf{Y}(\hat{p}) \mathbf{v}(t) = \mathbf{i}_s(t) + \mathbf{i}(t), \quad (6.41)$$

siendo

$$\mathbf{Y}(\hat{p}) = \begin{pmatrix} r_g^{-1} + \hat{p}(C_{gs} + C_{gd}) & -\hat{p}C_{gd} & r_g^{-1} \\ \hat{p}C_{gd} & Y_e(\hat{p}) + \hat{p}C_{gd} & Y_e(\hat{p}) \\ -\hat{p}C_{gs} & 0 & r_s^{-1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ u(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (6.42a)$$

$$\mathbf{i}_s(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ Y_e(\hat{p}) [Y_L(\hat{p}) + Y_d(\hat{p})]^{-1} Y_d(\hat{p}) e_u(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{i}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -i[v(t), u(t)] \\ i[v(t), u(t)] \end{bmatrix}. \quad (6.42b)$$

Como en (5.100) la fuente de corriente  $i(v, u)$  se desarrolla en series de Taylor alrededor de la solución de gran señal  $i[v_0(t), u_0(t)]$ :

$$i[v(t), u(t)] = i[v_0(t), u_0(t)] + \sum_{k+l \geq 1} \sum_{k+l \geq 1}^{\infty} G_{kl}[v_0(t), u_0(t)] \delta v^k(t) \delta u^l(t), \quad (6.43)$$

siendo  $\delta v = \sum_{m=1}^{\infty} v_m$  y  $\delta u = \sum_{m=1}^{\infty} u_m$ . Si se aplica un factor de escala  $\beta$  sobre la entrada, se seguirá cumpliendo el mismo sistema de ecuaciones cambiando  $e_u(t)$  por  $\beta e_u(t)$  y escalando las tensiones de orden  $m$  por  $\beta^m$ .

Para hallar  $v_1(t), u_1(t)$  y  $w_1(t)$  se deriva (6.41) parcialmente con respecto a  $\beta$ :

$$\mathbf{Y}(\hat{p}) \sum_{m=1}^{\infty} m \beta^{m-1} \mathbf{v}_m = \mathbf{i}_s + \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial \beta}. \quad (6.44)$$

## VI. ESTRUCTURAS ANALIZADAS. RESULTADOS

Al tomar  $\beta = 0$ :

$$\mathbf{Y}(\hat{p})\mathbf{v}_1 = \mathbf{i}_s + \left. \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial \beta} \right|_{\beta=0}. \quad (6.45)$$

El cálculo del segundo sumando del miembro de la derecha requiere evaluar la derivada de (6.43). Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial i}{\partial \beta} = \frac{\partial i}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial i}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta}, \quad (6.46)$$

siendo:

$$\frac{\partial v(t)}{\partial \beta} = v_1(t) + \sum_{m=2}^{\infty} m\beta^{m-1}v_m(t) \quad (6.47a)$$

$$\frac{\partial u(t)}{\partial \beta} = u_1(t) + \sum_{m=2}^{\infty} m\beta^{m-1}u_m(t) \quad (6.47b)$$

$$\frac{\partial i}{\partial v} = G_{10}[v_0(t), u_0(t)], \quad \frac{\partial i}{\partial u} = G_{01}[v_0(t), u_0(t)] \quad (6.47c)$$

Al sustituir (6.46) en (6.45):

$$\mathbf{Y}'(\hat{p})\mathbf{v}_1 = \mathbf{i}_s, \quad (6.48)$$

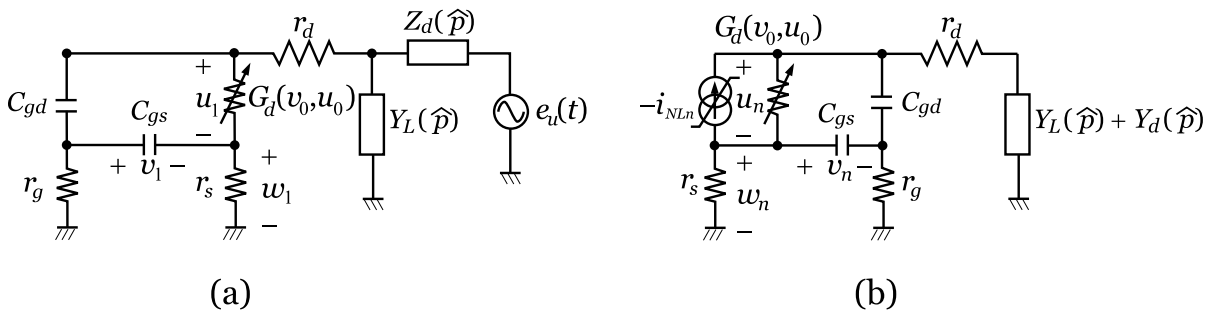
donde

$$\mathbf{Y}'(\hat{p}) = \begin{pmatrix} r_g^{-1} + \hat{p}(C_{gs} + C_{gd}) & -\hat{p}C_{gd} & r_g^{-1} \\ G_{10}(t) + \hat{p}C_{gd} & G_{01}(t) + Y_e(\hat{p}) + \hat{p}C_{gd} & Y_e(\hat{p}) \\ -G_{10}(t) - \hat{p}C_{gs} & -G_{01}(t) & r_s^{-1} \end{pmatrix} \quad (6.49)$$

es la matriz de admitancias aumentada con la parte lineal de la fuente de corriente.

Se trata de la ecuación que gobierna el circuito excitado por  $e_u(t)$  cuando el comportamiento de la fuente de corriente se considera lineal y variante en el tiempo, dependiente de  $v_0(t)$  y  $u_0(t)$ . La solución de este sistema se construye reemplazando los elementos de  $\mathbf{Y}'(\hat{p})$  por matrices de conversión, verificándose:

$$\begin{pmatrix} r_g^{-1}\mathbf{1} + j\Omega(C_{gs} + C_{gd}) & -j\Omega C_{gd} & r_g^{-1}\mathbf{1} \\ \mathbf{G}_{10} + j\Omega C_{gd} & \mathbf{G}_{01} + \mathbf{Y}_e + j\Omega C_{gd} & \mathbf{Y}_e \\ -\mathbf{G}_{10} - j\Omega C_{gs} & -\mathbf{G}_{01} & r_s^{-1}\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{w}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{Y}_e [\mathbf{Y}_L + \mathbf{Y}_d]^{-1} \mathbf{Y}_d \mathbf{e}_u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.50)$$



**Figura 6.21:** Análisis de pequeña señal de un mezclador FET resistivo. (a) Circuito equivalente para la determinación de las tensiones de primer orden. (b) Modelo de pequeña señal para orden  $n$ . señal bajo  $u_0(t) = 0$ .

donde  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{w}_1$  son vectores de  $2N + 1$  elementos,  $\mathbf{1}$  es la matriz identidad  $(2N + 1) \times (2N + 1)$  y  $\mathbf{e}_u(t)$  es el vector de excitación correspondiente a la entrada de RF,  $e_u(t) = V_q \exp(j\omega_1 t) + V_q^* \exp(-j\omega_1 t) = 2|V_q| \cos(\omega_1 t + \angle V_q)$ , con  $\omega_1 = \omega_0 + \omega_p$ :

$$\mathbf{e}_u = \begin{bmatrix} N^{-*} & (N-1)^{-*} & & -1^{-*} & 0 & 1 & 2 & & N \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & V_q & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T \quad (6.51)$$

La tensión a la salida (sobre la carga) se puede expresar como:

$$\mathbf{v}_o = \mathbf{u}_1 + r_d r_g^{-1} \mathbf{v}_1 + [1 + r_d (r_g^{-1} + r_s^{-1})] \mathbf{w}_1, \quad (6.52)$$

y la potencia de salida a la frecuencia intermedia ( $\omega_0$ ) viene dada por:

$$\langle P_o(\omega_0) \rangle = 2|V_o(0)|^2 / R_0. \quad (6.53)$$

Una mejor aproximación a la expansión funcional de Volterra consideraría los términos de orden superior derivando (6.44) respecto de  $\beta$  y sustituyendo posteriormente  $\beta = 0$ :

$$2\mathbf{Y}(\hat{p})\mathbf{v}_2 = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{i}}{\partial \beta^2} \right|_{\beta=0}. \quad (6.54)$$

La segunda derivada de la corriente  $i[v, u]$  se efectúa nuevamente aplicando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 i}{\partial \beta^2} = & 2G_{20}(t) \left( \frac{\partial v(t)}{\partial \beta} \right)^2 + 2G_{02}(t) \left( \frac{\partial u(t)}{\partial \beta} \right)^2 + 2G_{11}(t) \left( \frac{\partial v(t)}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial u(t)}{\partial \beta} \right) + \\ & + G_{10}(t) \left( \frac{\partial^2 v(t)}{\partial \beta^2} \right) + G_{01}(t) \left( \frac{\partial^2 u(t)}{\partial \beta^2} \right) \end{aligned} \quad (6.55)$$

Las derivadas de  $u$  y  $v$  respecto de  $\beta$  se calculan por separado, resultando (véase también (6.47)):

$$\frac{\partial^2 v(t)}{\partial \beta^2} = 2v_2(t) + \sum_{m=3}^{\infty} m(m-1)\beta^{m-2}v_m(t) \quad (6.56a)$$

$$\frac{\partial^2 u(t)}{\partial \beta^2} = 2u_2(t) + \sum_{m=3}^{\infty} m(m-1)\beta^{m-2}u_m(t) \quad (6.56b)$$

Al tomar  $\beta = 0$  puede expresarse (6.54) como:

$$\mathbf{Y}'(\hat{p})\mathbf{v}_2 = \mathbf{i}_{NL2}, \quad (6.57)$$

donde  $\mathbf{i}_{NL2} = \begin{bmatrix} 0 & -i_{NL2}(t) & i_{NL2}(t) \end{bmatrix}^T$ , siendo

$$i_{NL2}(t) = G_{20}(t)v_1(t)^2 + G_{02}(t)u_1(t)^2 + G_{11}(t)v_1(t)u_1(t). \quad (6.58)$$

Para orden tres, la tercera derivada conduce al sistema de ecuaciones:

$$6\mathbf{Y}(\hat{p})\mathbf{v}_3 = \left. \frac{\partial^3 \mathbf{i}}{\partial \beta^3} \right|_{\beta=0}, \quad (6.59)$$

## VI. ESTRUCTURAS ANALIZADAS. RESULTADOS

y se puede demostrar que:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^3 i}{\partial \beta^3} \right|_{\beta=0} &= 6G_{30}(t)v_1^3(t) + 6G_{03}(t)u_1^3(t) + 6G_{21}(t)v_1^2(t)u_1(t) + 6G_{12}(t)v_1(t)u_1^2(t) + \\ &+ 12G_{20}(t)v_1(t)v_2(t) + 12G_{02}(t)u_1(t)u_2(t) + 6G_{11}(t) [v_2(t)u_1(t) + v_1(t)u_2(t)] + \\ &+ 6G_{10}(t)v_3(t) + 6G_{01}(t)u_3(t) . \end{aligned} \quad (6.60)$$

Sustituyendo (6.60) en (6.59) se obtiene:

$$\mathbf{Y}'(\hat{p})\mathbf{v}_2 = \mathbf{i}_{NL3} , \quad (6.61)$$

donde la corriente no lineal de orden 3 se expresa como:

$$\begin{aligned} i_{NL3}(t) &= G_{30}(t)v_1^3(t) + G_{03}(t)u_1^3(t) + G_{21}(t)v_1^2(t)u_1(t) + G_{12}(t)v_1(t)u_1^2(t) + \\ &+ 2G_{20}(t)v_1(t)v_2(t) + 2G_{02}(t)u_1(t)u_2(t) + G_{11}(t) [v_2(t)u_1(t) + v_1(t)u_2(t)] . \end{aligned} \quad (6.62)$$

En resumen, las respuestas de orden 2, 3, ... se obtienen resolviendo el mismo circuito lineal y variante en el tiempo mostrado en la Figura 6.21b. Únicamente la formulación de las corrientes de excitación es un proceso no lineal que depende de las respuestas a órdenes inferiores.

Las expresiones (6.58) y (6.62) coinciden con las presentadas en [22], aunque en el caso de un mezclador resistivo se pueden simplificar aún más puesto que  $u_0(t) = 0$  y la condición de polarización  $V_{DS} = 0$  conduce a  $G_{k0}[v_0(t), 0] = 0$ , para todo  $k$ . Por otro lado, si el circuito lineal y variante en el tiempo está excitado por la señal de RF, las tensiones  $u_1$ ,  $v_1$  y  $w_1$  tendrán componentes a las frecuencias de RF, FI e imagen. Como ya se ha comentado, el filtro de OL deja la puerta en cortocircuito a estas frecuencias para evitar el acoplamiento de los puertos de RF y OL. Por este motivo  $v_1 = 0$  y el circuito de la Figura 6.21a es idéntico al de un diodo [6]. Sustituyendo en (6.58), la corriente no lineal de segundo orden se reduce a:

$$i_{NL2}(t) = G_{02}(t)u_1(t)^2 . \quad (6.63)$$

Esta corriente produce tensiones de puerta con componentes de la forma  $\pm 2\omega_0 + n\omega_p$ , así que no se produce la cancelación de  $v_2$  por el filtro de OL, y la equivalencia con un diodo deja de ser válida. Por tanto, la corriente  $i_{NL3}$  viene dada por:

$$i_{NL3}(t) = G_{03}(t)u_1^3(t) + 2G_{02}(t)u_1(t)u_2(t) + G_{11}(t)v_2(t)u_1(t) . \quad (6.64)$$

El tercer término de (6.64) representa el cambio que experimenta la tensión de puerta cuando una señal de RF está presente. Sin considerar este término (6.63) y (6.64) son similares a las ecuaciones (3) y (4) presentadas en [23].

Para el análisis de la intermodulación de tercer orden se considerará una entrada con dos tonos de frecuencias  $\omega_{01} + \omega_p$  y  $\omega_{02} + \omega_p$ , con  $\omega_{02} \gtrsim \omega_{01}$ . Empleando la notación de la Sección IV.4, el proceso de cálculo se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Mediante (6.50) evaluar los vectores de primer orden  $\mathbf{u}_1(\omega_{01})$  y  $\mathbf{u}_1(\omega_{02})$ .
2. Construir las corrientes no lineales de segundo orden:
  - a) Calcular  $\mathbf{A}_{11}^{uu}(\omega_{01}, \omega_{01}) = \mathbf{u}_1(\omega_{01}) \star \mathbf{u}_1(\omega_{01})$  y  $\mathbf{B}_{11}^{uu}(\omega_{02}, \omega_{01}) = \mathbf{u}_1(\omega_{02}) \star \hat{\mathbf{u}}_1^*(\omega_{01})$ .
  - b) Obtener  $\mathbf{i}_{NL2}(2\omega_{01}) = \mathbf{G}_{02} \mathbf{A}_{11}^{uu}(\omega_{01}, \omega_{01})$ ,  $\mathbf{i}_{NL2}(\omega_{02} - \omega_{01}) = 2\mathbf{G}_{02} \mathbf{B}_{11}^{uu}(\omega_{02}, \omega_{01})$ .
3. Las tensiones de segundo orden satisfacen el siguiente sistema de matrices de conversión:

$$\begin{pmatrix} r_g^{-1} \mathbf{1} + j\Omega(C_{gs} + C_{gd}) & -j\Omega C_{gd} & r_g^{-1} \mathbf{1} \\ \mathbf{G}_{10} + j\Omega C_{gd} & \mathbf{G}_{01} + \mathbf{Y}_e + j\Omega C_{gd} & \mathbf{Y}_e \\ -\mathbf{G}_{10} - j\Omega C_{gs} & -\mathbf{G}_{01} & r_s^{-1} \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{i}_{NL2} \\ \mathbf{i}_{NL2} \end{bmatrix}. \quad (6.65)$$

Resolver (6.65) con  $\mathbf{i}_{NL2} = \mathbf{i}_{NL2}(2\omega_{01})$  para obtener  $\mathbf{u}_2(2\omega_{01})$  y  $\mathbf{v}_2(2\omega_{01})$ , y con  $\mathbf{i}_{NL2} = \mathbf{i}_{NL2}(\omega_{02} - \omega_{01})$  para obtener  $\mathbf{u}_2(\omega_{02} - \omega_{01})$  y  $\mathbf{v}_2(\omega_{02} - \omega_{01})$ .

4. Determinar las corrientes no lineales de tercer orden:
  - a) Calcular los siguientes vectores:
    - $\mathbf{D}_{111}^{uuu}(\omega_{01}, \omega_{01}, \omega_{02}) = \mathbf{u}_1(\omega_{01}) \star \mathbf{u}_1(\omega_{01}) \star \hat{\mathbf{u}}_1^*(\omega_{02})$ ,
    - $\mathbf{B}_{21}^{uu}(2\omega_{01}, \omega_{02}) = \mathbf{u}_2(2\omega_{01}) \star \hat{\mathbf{u}}_1^*(\omega_{02})$ ,
    - $\mathbf{B}_{12}^{uu}(\omega_{01}, \omega_{02} - \omega_{01}) = \mathbf{u}_1(\omega_{01}) \star \hat{\mathbf{u}}_2^*(\omega_{02} - \omega_{01})$ ,
    - $\mathbf{B}_{21}^{vu}(2\omega_{01}, \omega_{02}) = \mathbf{v}_2(2\omega_{01}) \star \hat{\mathbf{u}}_1^*(\omega_{02})$ ,
    - $\mathbf{B}_{12}^{uv}(\omega_{01}, \omega_{02} - \omega_{01}) = \mathbf{u}_1(\omega_{01}) \star \hat{\mathbf{v}}_2^*(\omega_{02} - \omega_{01})$ .
  - b) La corriente no lineal de tercer orden a  $\pm(2\omega_{01} - \omega_{02}) + n\omega_p$  se expresa como:

$$\mathbf{i}_{NL3}(2\omega_{01} - \omega_{02}) = 3\mathbf{G}_{03} \mathbf{D}_{111}^{uuu}(\omega_{01}, \omega_{01}, \omega_{02}) + 2\mathbf{G}_{02} [\mathbf{B}_{21}^{uu}(2\omega_{01}, \omega_{02}) + \mathbf{B}_{12}^{uu}(\omega_{01}, \omega_{02} - \omega_{01})] + \mathbf{G}_{11} [\mathbf{B}_{21}^{vu}(2\omega_{01}, \omega_{02}) + \mathbf{B}_{12}^{uv}(\omega_{01}, \omega_{02} - \omega_{01})]. \quad (6.66)$$

5. Se resuelve (6.65) con  $\mathbf{i}_{NL3}(2\omega_{01} - \omega_{02})$  y se determinan las tensiones  $\mathbf{v}_3(2\omega_{01} - \omega_{02})$ ,  $\mathbf{u}_3(2\omega_{01} - \omega_{02})$  y  $\mathbf{w}_3(2\omega_{01} - \omega_{02})$ .

La tensión de intermodulación a la salida se puede obtener, bien a través de (6.52) con los nuevos vectores, o bien haciendo uso de la siguiente expresión:

$$\mathbf{v}_o(2\omega_1 - \omega_2) = [1 + r_d(\mathbf{Y}_L + \mathbf{Y}_d)] (\mathbf{u}_3 + \mathbf{w}_3). \quad (6.67)$$

Finalmente, la potencia de intermodulación a se expresa como:

$$\langle P_{IM3}(2\omega_{01} - \omega_{02}) \rangle = 2|V_o(0, 2\omega_{01} - \omega_{02})|^2 / R_0. \quad (6.68)$$

### VI.3.3. Resultados

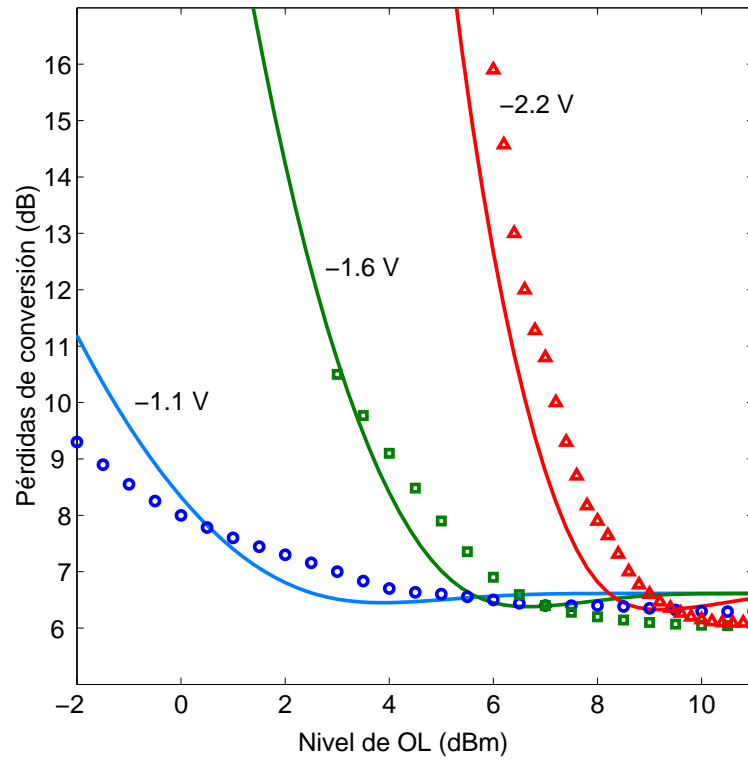
El presente método de análisis ha sido validado calculando las pérdidas de conversión y la intermodulación de tercer orden con dos tonos. Para poder comparar con medidas, se han utilizado los datos que aparecen publicados en [6], sobre un mezclador resistivo con una frecuencia de OL de 8,8 GHz, FI de 1,5 GHz y la banda lateral superior de RF a 10,5 GHz. El transistor es un MESFET Avantek AT10650-5 que se ha modelado a partir de la característica  $I/V$  incluida por Maas en el mencionado artículo, ajustando los datos de la corriente al modelo de Fujii (véase la Sección II.7.3). El resto de los parámetros se han obtenido consultando distintas fuentes. Así, las resistencias  $R_d$ ,  $R_s$  y  $R_g$  de este mismo transistor aparecen en [24], y las capacidades  $C_{gd}$  y  $C_{gs}$  se han estimado a partir de [25, p. 65].

Un detalle de importancia es la estructura de las admitancias  $Y_L$  e  $Y_d$  que modelan los filtros de RF y FI. Puesto que en el modelo de pequeña señal aparecen en paralelo,  $Y_L$  debe dejar pasar la FI con una impedancia  $R_0$ , y debe ser un circuito abierto a la frecuencia de RF. A las demás frecuencias, se comporta como un cortocircuito. Por el contrario,  $Y_d$  es un circuito abierto a FI, presenta una impedancia  $R_0$  a RF y es un cortocircuito a las demás frecuencias. En consecuencia, se ha tomado la siguiente matriz de conversión para  $Y_L + Y_d$ :

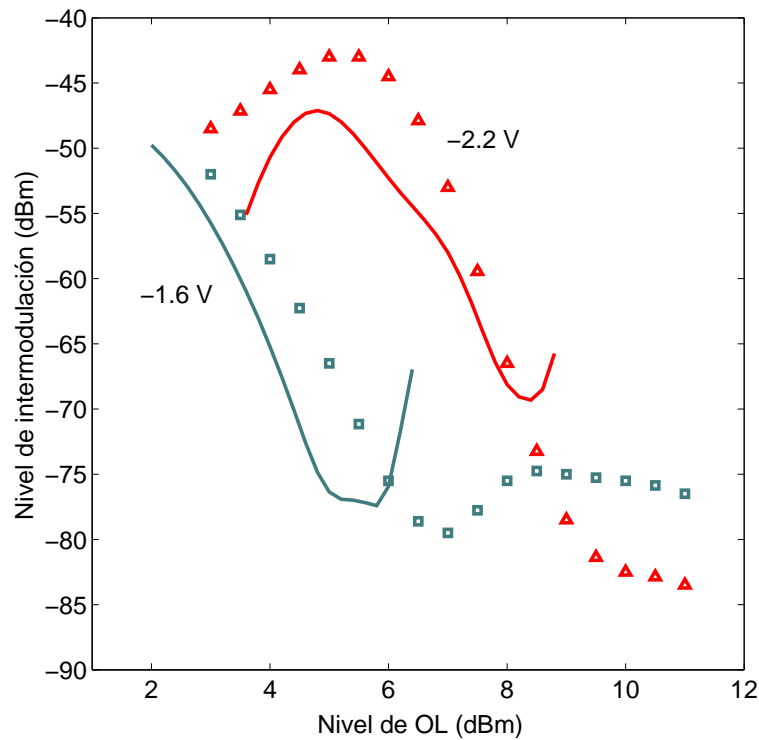
$$[Y_L + Y_d]^{-1} = \begin{array}{l} N^{-*} \rightarrow \\ (N-1)^{-*} \rightarrow \\ \vdots \\ 1^{-*} \rightarrow \\ 0 \rightarrow \\ 1 \rightarrow \\ 2 \rightarrow \\ \vdots \\ N \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & R_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & R_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (6.69)$$

En la Figura 6.22 se representan las pérdidas de conversión en función del nivel de OL y de la polarización de puerta. Los resultados obtenidos mediante simulación se corresponden satisfactoriamente con los datos experimentales. También se ha calculado el nivel de intermodulación de tercer orden con dos tonos a la entrada, con un nivel de  $-7$  dBm por tono, obteniéndose los datos que aparecen representados en la Figura 6.23, en trazo continuo. Considerando las limitaciones del modelo de MESFET utilizado, que la extracción de parámetros ha sido insuficiente, y sobre todo, que no se ha dispuesto de medidas directas de las derivadas de la corriente  $I_{ds}$ , se puede concluir que los resultados son muy satisfactorios.

Esta metodología de análisis se puede aplicar también al diseño de mezcladores MMIC con FET resistivo, para la optimización de las características no lineales. El diseñador de circuitos MMIC tiene a su disposición una variable que no está presente



**Figura 6.22:** Pérdidas de conversión comparadas con datos experimentales (línea de puntos) para distintas polarizaciones de puerta.



**Figura 6.23:** Intermodulación de tercer orden calculada para un nivel de -7 dBm por tono. Comparación con datos experimentales (línea de puntos) para distintas polarizaciones de puerta.

cuando se trabaja con componentes discretos: las dimensiones de los FET. Partiendo del análisis expuesto en este capítulo, en [26] se describe un procedimiento que permite estudiar la influencia de la anchura del FET sobre las pérdidas de conversión y el punto de intercepto de un mezclador resistivo. En las Figuras 6.24 y 6.25 se han representado estas características utilizando un modelo sencillo de HEMT del proceso ED02AH de PML. En ambos casos, el mezclador coincide con el ejemplo analizado en esta sección, aunque utilizando un transistor diferente. Los niveles de salida en FI y de  $IM_3$  se han representado en la Figura 6.24 en función de la anchura de puerta, considerando de 2 a 6 dedos. Los resultados son coherentes con el hecho de que se puede obtener un mejor comportamiento con una polarización de puerta próxima a la tensión umbral, y la salida es aproximadamente independiente del número de dedos. Se consigue una clara mejora de la IMD, entre 5 y 10 dB, tomando  $V_{GS} = 0,75$  V en lugar de 0,5 V. Esta mejora puede alcanzar 20 dB reduciendo  $W$  de  $300 \mu\text{m}$  a  $50 \mu\text{m}$ , y se consiguen 3-4 dB más si se elige un HEMT de 2 dedos en lugar de 6. Finalmente, la Figura 6.25 muestra que la selección de la anchura de puerta exige un compromiso entre las pérdidas de conversión y el punto de intercepto.

## Bibliografía

- [1] F. de Flaviis y S. A. Maas, "X-band doubly balanced resistive mixer with very low intermodulation," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 43, No. 2, pp. 457–460, feb. 1995.
- [2] S. A. Maas, *Microwave Mixers*. Norwood (MA): Artech House, 2nd Ed., 1993.
- [3] B. Gilbert, "A precise four-quadrant multiplier with subnanosecond response," *IEEE J. Solid State Circuits*, Vol. 3, No. 4, pp. 365–373, dic. 1968.
- [4] D. Soo y R. G. Meyer, "A four-quadrant NMOS analog multiplier," *IEEE J. Solid State Circuits*, Vol. 17, pp. 1174–1178, 1982.
- [5] J. I. Alonso y J. C. Sánchez, "A simple technique for the design of GaAs MMIC double side-band modulators based on the Gilbert cell," *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol. 8, No. 2, pp. 93–97, feb. 1995.
- [6] S. A. Maas, "A GaAs MESFET mixer with very low intermodulation," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-35, No. 4, pp. 425–429, abr. 1987.
- [7] F. Ellinger, R. Vogt, y W. Bachtold, "Compact monolithic integrated resistive mixers with low distortion for HIPERLAN," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 50, No. 1, pp. 178–182, ene. 2002.
- [8] H. Zirath, C. Fager, M. Garcia, P. Sakalas, L. Landen, y A. Alping, "Analog MMICs for millimeter-wave applications based on a commercial  $0.14\text{-}\mu\text{m}$  pHEMT techno-



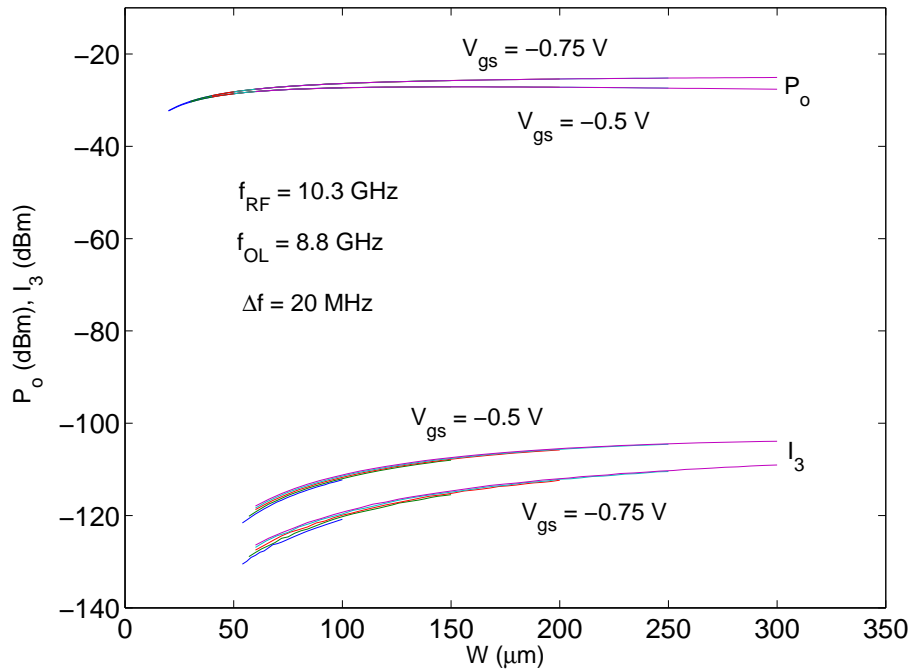


Figura 6.24: Niveles de salida en un mezclador con HEMT resistivo.

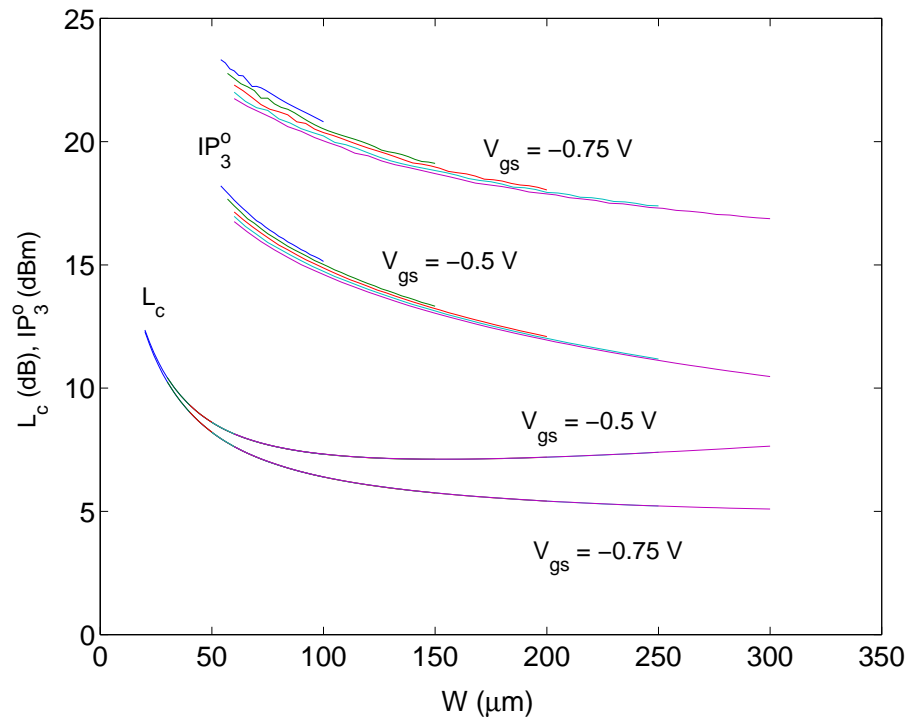


Figura 6.25: Pérdidas de conversión y punto de intercepto en un mezclador con HEMT resistivo.

- logy," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 49, No. 11, pp. 2086–2092, nov. 2001.
- [9] K. Yhland y C. Fager, "A FET transceiver suitable for FMCW radars," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, Vol. 10, No. 9, pp. 372–374, sep. 2000.
- [10] G. Han y E. Sánchez-Sinencio, "CMOS transconductance multipliers: A tutorial," *IEEE Trans. Circuits and Systems II*, Vol. 45, No. 12, pp. 1550–1563, dic. 1998.
- [11] K. L. Fong y R. G. Meyer, "Monolithic RF active mixer design," *IEEE Trans. Circuits and Systems II*, Vol. 46, No. 3, pp. 231–238, mar. 1999.
- [12] A. Boveda, F. Ortigoso, y J. I. Alonso, "A 0.7-3 GHz GaAs QPSK/QAM direct modulator," *IEEE J. Solid State Circuits*, Vol. 28, No. 12, pp. 1340–1348, dic. 1993.
- [13] J. M. Golio, *Microwave MESFETs and HEMTs*. Artech House, 1993.
- [14] C. Crespo-Cadenas y J. Reina-Tosina, "Análisis no lineal de mezcladores MMIC con múltiples HEMTs," en *Actas XV Simposium Nacional de la URSI*, pp. 349–350, sep. 2000, Zaragoza.
- [15] C. Crespo-Cadenas, J. Reina-Tosina, J. I. Alonso, y F. Pérez, "Analysis of intermodulation distortion in an MMIC Gilbert cell using Volterra series," en *Proc. Int. Symp. Microwave and Optical Tech. (ISMOT'2001)*, jun. 2001.
- [16] C. Crespo-Cadenas, J. Reina-Tosina, J. I. Alonso, y J. Pérez, "Design of a MMIC Gilbert cell with HEMT technology," en *Proc. GaAs Conf. 2001*, pp. 499–502, sep. 2001.
- [17] C. Crespo-Cadenas, J. Reina-Tosina, J. I. Alonso, y F. Pérez, "GaAs MMIC mixer based on the Gilbert cell with HEMTs biased on the subthreshold region," en *Proc. Microwave Symposium 2000 (MS'2000)*, pp. 160–163, mayo 2000, Tetuan.
- [18] J. Reina-Tosina, C. Crespo-Cadenas, J. I. Alonso, y F. Pérez, "Mezclador MMIC basado en la célula de Gilbert, con HEMTs de GaAs polarizados en la región subumbral," en *Actas XV Simposium Nacional de la URSI*, pp. 341–342, sep. 2000, Zaragoza.
- [19] J. Reina-Tosina, C. Crespo-Cadenas, J. I. Alonso, y F. Pérez, "GaAs MMIC mixer based on the Gilbert cell with HEMTs biased on the subthreshold region," *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol. 28, No. 4, pp. 241–244, feb. 2001.
- [20] E. W. Lin y W. H. Ku, "Device considerations and modelling for the design of an InP-based MODFET millimeter-wave resistive mixer with superior conversion efficiency," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 43, No. 8, pp. 1951–1959, ago. 1995.

- [21] C. Crespo-Cadenas y J. Reina-Tosina, "Analysis of FET resistive mixers with a double Volterra series approach," en *Proc. European Microwave Conference*, sep. 2002.
- [22] S. Peng, P. J. McCleer, y G. I. Haddad, "Nonlinear models for the intermodulation analysis of FET mixers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 43, No. 5, pp. 1037–1044, mayo 1995.
- [23] S. Peng, P. J. McCleer, y G. I. Haddad, "Intermodulation analysis of FET resistive mixers using Volterra series," en *Proc. 1996 MTT-S International Microwave Symposium Digest*, pp. 1377–1380, 1996.
- [24] A. A. Crosmun y S. A. Maas, "Minimization of intermodulation distortion in GaAs MESFET small-signal amplifiers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 32, No. 9, pp. 1411–1417, Sep 1989.
- [25] S. A. Maas, *Nonlinear Microwave Circuits*. Norwood (MA): Artech House, 1988.
- [26] C. Crespo-Cadenas y J. Reina-Tosina, "Optimización de características no lineales en el diseño de MMICs," en *Actas XVII Simposium Nacional de la URSI*, pp. 65–66, sep. 2002, Madrid.

**BIBLIOGRAFÍA**

---

# Conclusiones

Se abrió esta Tesis con una cita de Rice y Bedrosian, en la que estos dos pioneros de la técnica estudiada a lo largo de este trabajo expresaban su inquietud, hace más de treinta años, sobre las ventajas de la descripción de los sistemas no lineales mediante series de Volterra. El tiempo ha demostrado que la expansión funcional de Volterra es una herramienta valiosa para el análisis de circuitos no lineales de microondas, incluyendo los mezcladores.

Tras la investigación realizada en esta Tesis, se pueden derivar las siguientes conclusiones:

1. Las series de Volterra se pueden aplicar eficientemente al análisis de fenómenos no lineales en mezcladores de microondas excitados por señales multitono. La aplicación de procedimientos sistemáticos y de fórmulas recursivas para el cálculo de las corrientes no lineales, permite extraer una información de primer orden sobre el comportamiento no lineal, aun con un número reducido de parámetros. Los procedimientos de análisis están exentos de problemas de rango dinámico y de convergencia, propios de otros métodos de análisis como el balance armónico.
2. Aprovechando ciertas propiedades de simetría, se puede extender la expansión funcional de Volterra para la descripción de estructuras balanceadas, a partir de configuraciones equivalentes más sencillas de analizar.
3. Las funciones de transferencia no lineales contienen una valiosa información sobre el comportamiento no lineal que puede utilizarse para la generación de criterios de optimización aplicados al diseño.

Se resumen a continuación otras aportaciones destacables de esta Tesis:

- Se ha diseñado un mezclador MMIC doblemente balanceado basado en la CG, cuya respuesta en frecuencia se extiende hasta 10 GHz con un nivel de OL de sólo +1,6 dBm. Esta potencia es bastante más pequeña que la utilizada en la bibliografía referenciada. Este es primer mezclador basado en aquella configuración, en el que los transistores de la parte superior se polarizan en la región subumbral. Esta polarización permite reducir el consumo de potencia. En cuanto a las características no lineales, a pesar de que las medidas realizadas sobre el MMIC

## CONCLUSIONES

---

indican un punto de intercepto de +3 dBm a la salida, el análisis de la CG permite concluir que el este punto se encuentra a +18 dBm, y que la etapa *buffer* del balun de salida es responsable de su degradación.

- Se han diseñado baluns activos basados en el par diferencial para el circuito MMIC. La aplicación de estos baluns permite reducir considerablemente el nivel de OL, aunque se requiere un diseño cuidadoso para evitar un empeoramiento de las características no lineales.
- Se han presentado expresiones cerradas para la salida de los baluns y de la CG y de las funciones de transferencia no lineales, habiéndose completado el análisis de un circuito MMIC que presenta un moderado número de dispositivos activos (14 HEMTs).
- Como resultado teórico, es de destacar también la aplicación de series dobles de Volterra para el análisis de mezcladores. En este sentido, se han presentado funciones de transferencia no lineales que pueden extenderse a una gran variedad de configuraciones de mezcladores, y se ha propuesto una demostración formal del método de gran señal-pequeña señal.
- Con respecto al análisis del mezclador resistivo, a pesar de las limitaciones del modelo utilizado y de que no se ha podido realizar la extracción de la mayoría de sus parámetros, los resultados muestran una buena coincidencia con las medidas publicadas.

Algunos de los resultados obtenidos son susceptibles de ampliaciones futuras, al mismo tiempo que se abren nuevas líneas de investigación:

A pesar de que se dispone de modelos empíricos sobre el ruido en dispositivos FET de AsGa, el comportamiento del ruido en mezcladores FET está todavía sujeto a investigación y suscita un continuo interés. El análisis mediante series dobles de Volterra de mezcladores excitados por señales gaussianas, puede proporcionar una valiosa información que contribuya al estudio de la generación de ruido en estos mezcladores.

Los estudios teóricos sobre mezcladores consideran componentes no lineales significativas hasta de tercer orden. La inclusión de componentes de mayor orden (quinto orden), además de permitir una mejor precisión en la predicción de la  $IM_3$ , puede ayudar a encontrar nuevos criterios de diseño que optimicen el comportamiento (determinación de las impedancias de terminación óptimas, búsqueda de “puntos dulces”, etc.).

Para el desarrollo de la línea anterior, es necesario disponer de nuevas técnicas para la extracción de parámetros. La utilización de series dobles de Volterra puede ser una posible solución claramente innovadora. La caracterización experimental no reviste dificultad, ya que el FET estaría excitado por señales de bajo nivel y las funcio-

nes de transferencia no lineales son conocidas. Este procedimiento se podría extender también para la determinación de los coeficientes de las capacidades no lineales.

Entre las configuraciones circuitales que presentan mayor atractivo para el análisis mediante series de Volterra, figura el mezclador FET en anillo o en estrella. Se trata de dos estructuras muy populares entre mezcladores doblemente balanceados, y presentan unas características similares en cuanto a su comportamiento no lineal. La operación de estas estructuras ha sido ampliamente estudiada en mezcladores a diodo, si bien existen escasas referencias sobre el análisis de las características no lineales cuando se realizan con dispositivos FET. Esta Tesis sería un buen punto de partida para el estudio de estos tipos de mezcladores y la obtención de criterios de diseño orientados a la optimización de su comportamiento. De hecho, se ha visto en la Figura 6.4 que la célula de Gilbert se puede representar mediante una estructura en anillo, y en consecuencia es de esperar que la extensión de los resultados teóricos al análisis de un mezclador FET en anillo no requiera un esfuerzo considerable.

**CONCLUSIONES**

---



## Apéndice A

# Tecnología utilizada

La elección de una tecnología apropiada es un aspecto de gran importancia cuando se trata de diseñar un circuito monolítico. La evolución y desarrollo de la tecnología MMIC en los últimos años ha sido incuestionable. Dos factores han sido fundamentales en el despegue de esta tecnología: por una parte, la considerable mejora de los procesos tecnológicos de fabricación, a pesar de que todavía existen variaciones en los procesos que reducen el rendimiento si se comparan con las tecnologías más maduras del silicio; y por otra, el desarrollo de paquetes de CAD/CAM, que han hecho mucho más asequible para el diseñador la tarea de dar luz a una determinada aplicación.

A la hora de elegir un proceso tecnológico se deben tener en cuenta los siguientes aspectos [1, pp. 21–22]:

- La máxima frecuencia de operación de los dispositivos ( $f_T$ ).
- La disponibilidad de modelos para los elementos lineales y, más importante, para los elementos no lineales.
- La fiabilidad de los valores de los elementos y la reproducibilidad.
- El rango de dispositivos disponibles.
- El coste por  $\text{mm}^2$  del circuito.
- El tiempo de fabricación.

El mezclador activo doblemente balanceado, basado en la Célula de Gilbert, que se presenta en esta Tesis, ha sido fabricado siguiendo el proceso ED02AH de la fundición Philips Microwave Limeil (desde enero de 2000 OMMIC). En este apéndice se resumen las características más significativas de este proceso.

El proceso ED02AH de OMMIC ha sido desarrollado específicamente para aplicaciones de microondas hasta la banda de milimétricas, y circuitos digitales de alta capacidad para enlaces ópticos. La composición del acrónimo por el que se conoce este proceso se debe a los siguientes atributos [2]:

## A. TECNOLOGÍA UTILIZADA

---

E Transistor de enriquecimiento (*enhancement mode*)

D Transistor de empobrecimiento o depleción (*depletion mode*)

02 Longitud de puerta de  $0,2 \mu\text{m}$

A Proceso OMMIC tipo "A"

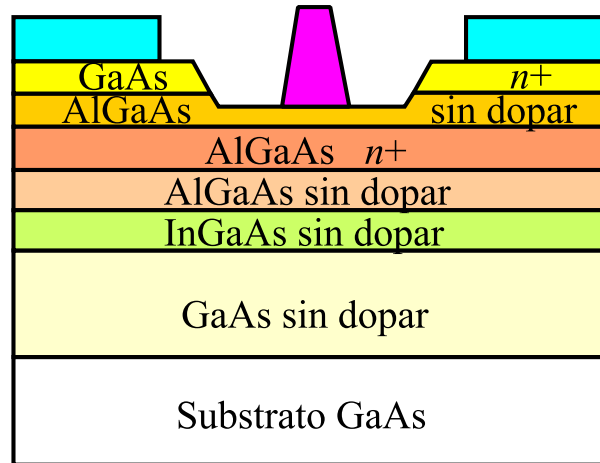
H Capa HEMT pseudomórfica

La característica principal de este proceso es la utilización de una capa activa pseudomórfica (InAsGa) gracias a la cual se pueden implementar dos tipos de transistores HEMT de  $0,2 \mu\text{m}$  de longitud de puerta, de depleción y enriquecimiento (ON y OFF), cuyas tensiones umbrales toman valores aproximados de  $-0,9 \text{ V}$  y  $+0,1 \text{ V}$ , respectivamente. Estos transistores presentan una frecuencia de transición de  $63 \text{ GHz}$  y un factor de ruido de  $0,5 \text{ dB}$  a  $12 \text{ GHz}$ . Se dispone además de dos clases de diodos ( $0,2 \mu\text{m}$  "GM" y  $3 \mu\text{m}$  "BE"), que pueden servir para construir mezcladores, varactores o conseguir un desplazamiento de nivel. Para reducir las capacidades parásitas se aplica una solución de  $\text{SiO}_2/\text{Si}_3\text{N}_4$  entre las capas, combinada con el aislamiento por puentes de aire. Según se utilice la capa  $\text{Si}_3\text{N}_4$  o la capa  $\text{Si}_3\text{N}_4+\text{SiO}_2$  se obtienen dos tipos de condensadores diferentes. Las resistencias se implementan mediante la capa activa de AsGa, sin requerir abrasión. Se emplea una metalización de oro de gran pureza de  $1,25 \mu\text{m}$  de espesor para las interconexiones e inductancias en espiral. Las conexiones a tierra (*via holes*) se realizan a través de un sustrato de  $100 \mu\text{m}$  de espesor para reducir las inductancias parásitas a tierra. Por último, una protección total con  $\text{Si}_3\text{N}_4$  asegura una elevada fiabilidad. El tamaño de los dados puede tomar los siguientes valores:  $1,5 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$ ,  $1,5 \text{ mm} \times 2 \text{ mm}$ ,  $3 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$ , ó  $3 \text{ mm} \times 3 \text{ mm}$ , y el periodo de fabricación tiene una duración en torno a los 6 meses.

### A.1. Estructura de capas

El crecimiento del material de arranque de AsGa se realiza mediante el método de encapsulado líquido de Czochralsky. Como paso previo al crecimiento de las diferentes capas, el sustrato debe cumplir estrictas especificaciones, entre las que se incluye una resistividad superior a  $10^7 \Omega \cdot \text{m}$ , un espesor de  $620 \pm 20 \mu\text{m}$  con una variación total máxima de  $6 \mu\text{m}$ , y una planicidad de  $8 \mu\text{m}$  o inferior.

Los componentes activos están basados en una heteroestructura de AlAsGa – InAsGa – AsGa obtenida mediante el método MOVPE (véase la Figura 1.1.). Las obleas de un mismo lote pueden considerarse idénticas, con una uniformidad del espesor y el dopado dentro de un margen del 1 %, y un promedio de defectos de tamaño superior a  $0,15 \mu\text{m}^2$  inferior a  $10/\text{cm}^2$ . Se describen a continuación el resto de las capas de la cara superior, de manera resumida (Figura 1.2):



**Figura 1.1:** Perfil de la región activa del proceso ED02AH.

1. Capa "LI". Proporciona un aislamiento entre componentes activos.
2. Contactos óhmicos "OH". Consiste en una capa de AuGeNi que se deposita en las regiones de contacto para facilitar las metalizaciones.
3. Capa "BE". Se utiliza para dar forma al electrodo inferior de los condensadores MIM, el primer metal de interconexión y los diodos de  $3 \mu\text{m}$ . Tiene un espesor de 650 nm y como metal se emplea TiPtAu.
4. Capas "LE" y "GM". Formación del canal y la metalización de puerta, con un espesor de 360 nm.
5. Nitruro de Silicio. Se cubre la oblea con una capa de  $\text{Si}_3\text{N}_4$  para proteger las zonas activas y servir de dieléctrico a los condensadores MIM. El  $\text{Si}_3\text{N}_4$  tiene una elevada constante dieléctrica y previene la formación de óxidos inestables en la superficie de la oblea.
6. Capa "CG". Se practican aberturas en la máscara de  $\text{Si}_3\text{N}_4$  para permitir el contacto con las metalizaciones de las capas inferiores.
7. Capa "TE". Se hace evaporar un metal sobre las regiones destinadas al electrodo superior de los condensadores MIM. También protege las puertas de TiAl y las líneas de Au. Esta capa tiene un espesor de 560 nm.
8. Capa "CO". Se deposita una máscara de 800 nm de  $\text{SiO}_2$  sobre la oblea y se practican aberturas para disponer de un segundo nivel de interconexiones con las capas "OH", "BE" y "TE".
9. Capa "AB". A través de esta capa es posible realizar puentes de aire, con un espesor de  $1 \mu\text{m}$ .

## A. TECNOLOGÍA UTILIZADA

---

10. Capa "IN". Se evapora una máscara de de TiPtAU de  $1,25 \mu\text{m}$  de espesor, que sirve como segundo nivel de interconexión. Presenta menos pérdidas que la capa "BE".
11. Protección final. Se deposita una segunda máscara de  $\text{Si}_3\text{N}_4$  sobre la oblea, asegurando su total encapsulado.
12. Capa "CB". Abertura de los contactos para las entradas y salidas (*bonding pads*) y las calles de separación entre los chips.

En cuanto a la cara inferior, las conexiones a tierra tienen un tamaño de  $120 \times 120 \mu\text{m}^2$ , y se realizan mediante la capa "VH" (*via hole*). Para constituir el plano de masa se suelda una superficie de Au de espesor  $3,5 \mu\text{m}$  a la superficie inferior de la oblea. Si no se requieren *via holes*, la capa VH no es necesaria, y en este caso tan sólo se hace evaporar una capa de GeAu de  $0,18 \mu\text{m}$  de espesor, que sirve de plano de masa.

Como medida de control de calidad, todas las obleas se someten a una caracterización no destructiva, y en algunos lotes escogidos al azar se caracteriza destructivamente una de las obleas. La forma de realizar este control consiste en medir un conjunto de patrones de test (PCM, *Process Control Monitor*) que se implementan sobre cada oblea en ubicaciones fijas, al mismo tiempo que los circuitos de los clientes. Cada PCM contiene módulos de test de tamaño  $300 \mu\text{m} \times 300 \mu\text{m}$ . Entre otros módulos pueden citarse los que se destinan a la medida de las resistencias de cuadro de las capas "LI", "BE", "IN", "OH", "GM", resistencias de interconexión entre distintas capas, capacidades de condensadores o características en DC y RF de transistores de  $6 \times 15 \mu\text{m}$  y diodos de  $3 \mu\text{m}$ . La validación de los parámetros eléctricos garantizados a partir de la medida de los PCM determina la calidad de la oblea y su posible aceptación para la entrega al cliente.

### A.2. Elementos disponibles

- Resistencias. Se fabrican mediante una tira en la máscara "LI", que presenta una resistencia superficial de  $195 \Omega/\square$ . Participan además las capas "IN", "OH" y "CO".
- Condensadores MIM. Según la capacidad del mismo se pueden realizar de dos maneras: con dieléctrico de  $\text{Si}_3\text{N}_4$  ( $1500 \text{ \AA}$ ) para valores altos, o con  $\text{SiO}_2$  ( $8000 \text{ \AA}$ ) además del Nitruro de Silicio, para valores pequeños. En el primer caso los electrodos se realizan mediante las capas "BE" y "TE", mientras que en el segundo el electrodo superior se define en la máscara "IN".
- Inductancias. Se implementan mediante una espiral de metal "IN", de al menos dos vueltas. Los contactos se realizan a nivel de las capas "BE" y "CO". El mo-

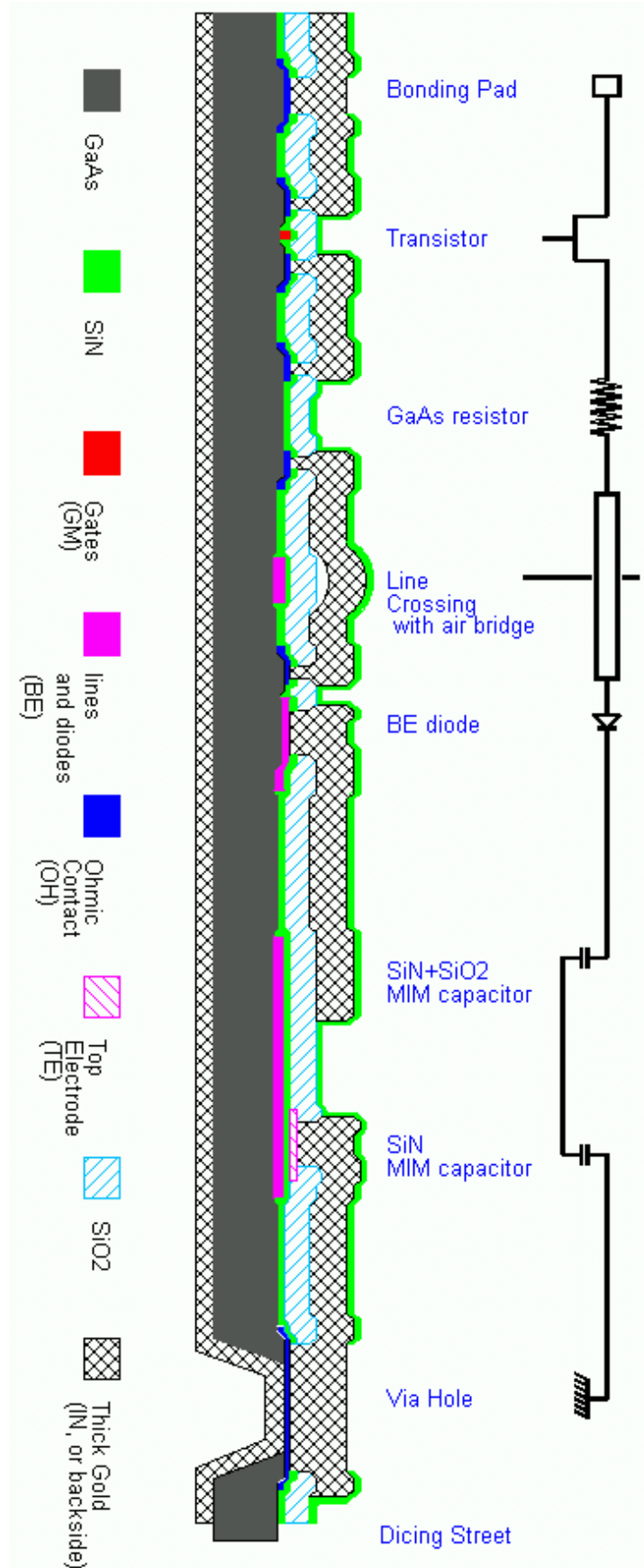


Figura 1.2: Capas del proceso ED02AH de OMMIC (©Philips Microwave Limeil, 1998).

delo está limitado a inductancias inferiores a 15 nH y una frecuencia máxima de operación de 25 GHz.

- Líneas de transmisión. Normalmente se realizan con la capa "IN", aunque también es posible la implementación en la capa "BE".
- Transistores p-HEMT de enriquecimiento y depleción (ON y OFF). La configuración recomendada es en forma de "U", con múltiples dedos. Intervienen las máscaras "LI", "OH", "GM", "CO" e "IN". PML facilita un modelo no lineal válido para un número de dedos no superior a 6 y una anchura unitaria por dedo menor o igual que 50  $\mu\text{m}$ .
- Diodos Schottky. Se distinguen dos tipos: en el primero se conectan los electrodos de drenador y fuente. La longitud de la metalización de fuente es, al igual que en los transistores HEMT, de 0,2  $\mu\text{m}$ . Para el segundo tipo (diodos "BE"), se utiliza como electrodo la capa "BE", dejando la longitud del mismo fija a 3  $\mu\text{m}$ . Los diodos "GM" se destinan especialmente al diseño de mezcladores a diodo, pero no son adecuados para realizar desplazamientos de nivel o varactores, debido a que la corriente de DC y la variación de la capacidad son demasiado pequeñas. En estos casos se prefieren los diodos "BE".

## Bibliografía

- [1] M. L. de la Fuente Rodríguez, *Diseño de Mezcladores de Microondas en Tecnología Monolítica*. Tesis Doctoral, Universidad de Cantabria, 1997.
- [2] "GaAs IC design manual foundry process ED02AH," tech. rep., Philips Microwave Limeil, 1998.

## Apéndice B

# Relación de trabajos publicados

Se enumeran a continuación las publicaciones científicas y comunicaciones en congresos a que ha dado lugar la realización de la presente Tesis.

### Publicaciones en revistas internacionales

- J. Reina-Tosina, C. Crespo-Cadenas, J. I. Alonso, y F. Pérez, "Volterra series analysis of MMIC active baluns in HEMT technology," *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol. 31, No. 4, pp. 272–276, nov. 2001.
- J. Reina-Tosina, C. Crespo-Cadenas, J. I. Alonso, y F. Pérez, "GaAs MMIC mixer based on the Gilbert cell with HEMTs biased on the subthreshold region," *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol. 28, No. 4, pp. 241–244, feb. 2001.

### Comunicaciones en congresos internacionales

- C. Crespo-Cadenas y J. Reina-Tosina, "Analysis of FET resistive mixers with a double Volterra series approach," en *Proc. European Microwave Conference*, sep. 2002.
- C. Crespo-Cadenas, J. Reina-Tosina, J. I. Alonso, y J. Pérez, "Design of a MMIC Gilbert cell with HEMT technology," en *Proc. GaAs Conf. 2001*, pp. 499–502, sep. 2001.
- C. Crespo-Cadenas, J. Reina-Tosina, J. I. Alonso, y F. Pérez, "Analysis of intermodulation distortion in an MMIC Gilbert cell usign Volterra series," en *Proc. Int. Symp. Microwave and Optical Tech. (ISMOT'2001)*, jun. 2001.
- C. Crespo-Cadenas, J. Reina-Tosina, J. I. Alonso, y F. Pérez, "GaAs MMIC mixer based on the Gilbert cell with HEMTs biased on the subthreshold region," en *Proc. Microwave Symposium 2000 (MS'2000)*, pp. 160–163, mayo 2000, Tetuan.

### Comunicaciones en congresos nacionales

- J. Reina-Tosina, A. Pettenghi-Roldán, A. Campoy-Naranjo, y C. Crespo-Cadenas, “Construcción de soportes para la caracterización no destructiva de componentes de microondas,” en *Actas XVII Simposium Nacional de la URSI*, pp. 203–204, sep. 2002, Madrid.
- C. Crespo-Cadenas y J. Reina-Tosina, “Análisis de mezcladores con FET resistivo mediante una serie doble de Volterra,” en *Actas XVII Simposium Nacional de la URSI*, pp. 487–488, sep. 2002, Madrid.
- C. Crespo-Cadenas y J. Reina-Tosina, “Optimización de características no lineales en el diseño de MMICs,” en *Actas XVII Simposium Nacional de la URSI*, pp. 65–66, sep. 2002, Madrid.
- J. Reina-Tosina y C. Crespo-Cadenas, “Análisis de baluns activos MMIC en tecnología HEMT,” en *Actas XVI Simposium Nacional de la URSI*, pp. 331–332, sep. 2001, Madrid.
- C. Crespo-Cadenas y J. Reina-Tosina, “Análisis de circuitos MMIC balanceados mediante series de Volterra,” en *Actas XVI Simposium Nacional de la URSI*, pp. 477–478, sep. 2001, Madrid.
- J. Reina-Tosina, C. Crespo-Cadenas, J. I. Alonso, y F. Pérez, “Mezclador MMIC basado en la célula de Gilbert, con HEMTs de GaAs polarizados en la región subumbral,” en *Actas XV Simposium Nacional de la URSI*, pp. 341–342, sep. 2000, Zaragoza.
- C. Crespo-Cadenas y J. Reina-Tosina, “Análisis no lineal de mezcladores MMIC con múltiples HEMTs,” en *Actas XV Simposium Nacional de la URSI*, pp. 349–350, sep. 2000, Zaragoza.
- J. Reina-Tosina y C. Crespo-Cadenas, “Diseño de un amplificador operacional MMIC de alta velocidad con HEMT de GaAs,” en *Actas XIV Simposium Nacional de la URSI*, pp. 479–480, sep. 1999, Santiago de Compostela.