

TRABAJO FIN DE GRADO

---

Doble Grado en Matemáticas y Física

**PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA PARA LA  
SELECCIÓN DE CARTERAS DE VALORES**

**Javier Martín Chávez**

Dirigido por:

Justo Puerto Albandoz



FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
Departamento de Estadística e Investigación Operativa  
Sevilla, Junio 2023



# Índice general

<b>Abstract</b>	<b>5</b>
<b>Resumen</b>	<b>7</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>9</b>
1.1. El Mercado Financiero . . . . .	9
1.2. Cartera de Valores . . . . .	10
1.3. Optimización: Retorno y Riesgo . . . . .	11
1.4. El modelo de Markowitz . . . . .	15
1.5. Medidas de seguridad . . . . .	17
<b>2. Modelos lineales para la selección de carteras de valores</b>	<b>19</b>
2.1. Discretización, escenarios y computabilidad LP . . . . .	19
2.2. Modelos lineales basados en medidas de riesgo . . . . .	21
2.3. Modelos lineales basados en medidas de seguridad . . . . .	26
<b>3. Características reales en la selección de carteras de valores</b>	<b>35</b>
3.1. Restricciones en la inversión y selección de activos . . . . .	36
3.2. Costes y lotes de transacción . . . . .	39
3.3. Valor en riesgo condicional con características reales . . . . .	47
3.4. Análisis de grupos para la selección de cartera de valores . . . . .	51
3.4.1. Problemas de localización para el análisis de grupos . . . . .	53
3.4.2. Marco unificado . . . . .	55
<b>4. Optimización del problema de cartera de valores con costes de transacción como variables de decisión</b>	<b>61</b>
4.1. Preliminares . . . . .	62
4.2. El problema de cartera de valores binivel: intermediario-líder inversor-seguidor . . . . .	63
4.3. El problema de cartera de valores binivel: inversor-líder intermediario-seguidor . . . . .	72
4.4. El problema de cartera de valores binivel: bienestar social . . . . .	77

<b>5. Simulaciones computacionales</b>	<b>83</b>
5.1. Modelos sin características reales . . . . .	85
5.2. Modelo con características reales . . . . .	91
5.3. Modelo basado en agrupamiento . . . . .	95
<b>6. Conclusiones</b>	<b>99</b>
<b>Referencias</b>	<b>104</b>

# Abstract

The portfolio selection problem consists of determining the optimal combination of financial assets to construct an investment portfolio. In this work, several linear and integer programming models for portfolio selection are presented. Computational simulations are performed to analyse the results obtained with these models. These simulations contribute to a broader understanding of portfolio optimisation techniques and their practical implications.



# Resumen

El problema de selección de carteras de valores consiste en determinar la combinación óptima de activos financieros para construir una cartera de inversión. En este trabajo se presentan varios modelos de programación lineal y entera para la selección de carteras de valores. Se realizan simulaciones computacionales para analizar los resultados obtenidos con estos modelos. Estas simulaciones contribuyen a una comprensión más amplia de las técnicas de optimización de carteras y sus implicaciones prácticas.





# Capítulo 1

## Introducción

La inversión de capital se ha convertido en un dilema usual para muchas personas y empresas, ya que puede ser una excelente manera de hacer crecer su riqueza y aumentar su patrimonio a largo plazo, así como de proteger sus ahorros frente a fenómenos como la inflación. Sin embargo, invertir también conlleva riesgos, especialmente si no se tienen los conocimientos adecuados o si se toman decisiones basadas en emociones en lugar de en análisis y estrategias apropiadas.

Uno de los mayores desafíos al invertir es decidir dónde hacerlo. Hay muchas opciones diferentes disponibles, desde el mercado de valores hasta inversiones inmobiliarias, negocios o criptomonedas. Cada opción tiene sus propias ventajas e inconvenientes, y es importante investigar y entender los riesgos y recompensas asociados a cada una de ellas antes de invertir.

A lo largo de este trabajo nos centraremos en la inversión en el mercado financiero. En esta introducción definiremos los conceptos necesarios para abordar nuestro problema. La notación que usaremos aquí y en los siguientes capítulos es la utilizada en la obra de Mansini, Ogryczak y Speranza [24]. Se trata de uno de los libros más destacados en el ámbito de la optimización de carteras de valores.

### 1.1. El Mercado Financiero

El mercado financiero es un sistema que permite comprar y vender instrumentos financieros, como acciones, bonos, derivados y divisas, entre otros. Denominaremos *activo* a cada uno de esos instrumentos financieros que son traspasables.

El precio de un activo financiero se denomina *cotización* o *precio de mercado*. Dicho valor se fija a través de la oferta y la demanda en el mercado. Es decir, el precio de un activo financiero se determina por el equilibrio entre los compradores y vendedores que

están dispuestos a comprar o vender ese activo en un momento dado. Cuando hay más compradores que vendedores, el precio tiende a subir, y cuando hay más vendedores que compradores, el precio tiende a bajar. Para poder evaluar el rendimiento de un activo tenemos en cuenta como varía su cotización en un cierto intervalo de tiempo.

**Definición 1.1.1.** Sean  $q_t$  y  $q_{t-1}$  las cotizaciones de un activo en los instantes de tiempo  $t$  y  $t-1$ , la **tasa de retorno**  $r_t$  de dicho activo en el intervalo de tiempo comprendido entre  $t-1$  y  $t$  viene dada por  $r_t = \frac{q_t - q_{t-1}}{q_{t-1}}$ .

**Observación 1.1.1.** *Trabajamos en nuestro caso con activos cuyas cotizaciones son positivas. En consecuencia, la tasa de retorno está acotada inferiormente por -1. No consideramos los posibles dividendos.*

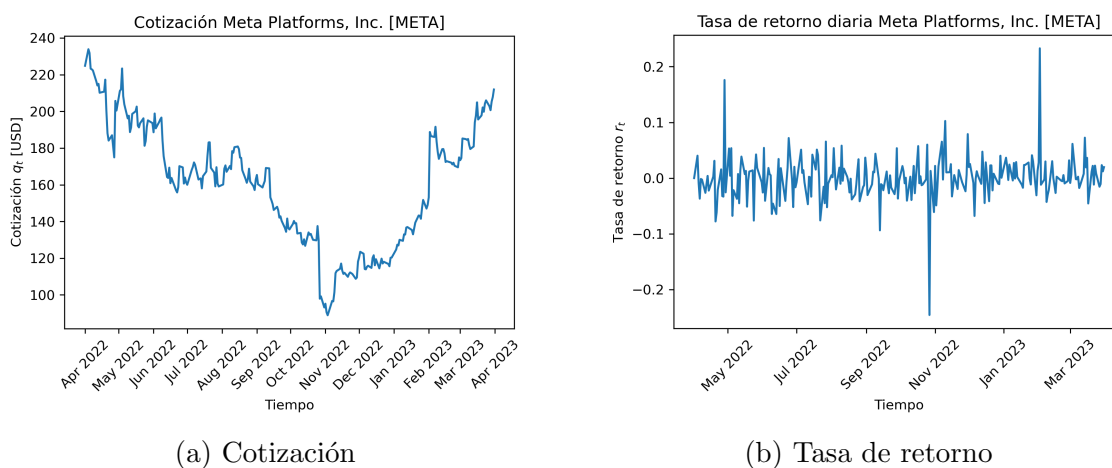


Figura 1.1: Datos financieros Meta Platforms, Inc. periodo 01/04/22 - 01/04/23 <sup>1</sup>

El precio de mercado de un activo puede ser muy volátil y cambiar rápidamente. Algunos factores que pueden influir en dicho precio incluyen las noticias económicas y políticas, las decisiones de las empresas y los gobiernos, o los cambios en las tasas de interés, entre otros. Por ejemplo, la cotización de Meta Platforms, Inc. cayó un 24.6% el 27 de octubre de 2022, tras presentar sus resultados del tercer trimestre de 2022 y obtener unos beneficios muy por debajo de lo esperado. Por el contrario, el 2 de febrero de 2023 la compañía experimentó un crecimiento del 23.3% en su precio de mercado tras anunciar un ambicioso plan de recompra de acciones de la empresa.

## 1.2. Cartera de Valores

El primer paso a la hora de invertir es saber con qué cantidad de dinero contamos para realizar nuestra inversión. Dicha cantidad recibe el nombre de *capital*,  $C$ . El capital podrá ser invertido en los diferentes activos que configuran el mercado financiero, ahora

<sup>1</sup>Datos extraídos de Yahoo! Finance <https://finance.yahoo.com/>

bien, el inversor sólo estará interesado en un conjunto específico,  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ , de esos activos, a los que nombraremos como *activos disponibles*.

Una vez definidos el capital y los activos disponibles una *cartera de valores* no es más que un vector que nos indica que fracción de nuestro capital es invertido en cada uno de los activos disponibles.

**Definición 1.2.1.** Sean  $C \in [0, \infty)$  y  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ , respectivamente, el capital y el conjunto de activos disponibles, diremos que el vector  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  es una **cartera de valores** si  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$  y  $x_i \geq 0$  para todo  $i \in N$ .

**Nota 1.2.1.** La restricción a valores no negativos de las variables  $x_i$ , denominadas *pesos*, imposibilita la realización de ventas en corto. En una venta en corto el inversor vende el activo que cree que va a bajar de precio, sin poseerlo previamente, obteniendo así una posición corta o de venta en el activo. Para ello, el inversor pide prestado el activo a un corredor o intermediario financiero y lo vende en el mercado. Si el precio del activo cae, el inversor puede comprarlo de vuelta a un precio más bajo y devolverlo al corredor, obteniendo así una ganancia. Sin embargo, si el precio del activo sube, el inversor tendrá que comprarlo de vuelta a un precio más alto, lo que resultaría en una pérdida.

La cantidad invertida en el activo  $i$  vendrá dada por  $X_i = Cx_i$ .

### 1.3. Optimización: Retorno y Riesgo

Nos enfrentamos al problema de encontrar la cartera de valores que nos permita obtener el máximo rendimiento a nuestra inversión. Para ello, introduciremos los conceptos de retorno esperado y riesgo asociado a una cartera de valores pero, en primer lugar, debemos definir el conjunto donde pretendemos encontrar dicha cartera.

**Definición 1.3.1.** Sean  $C \in [0, \infty)$  y  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ , el capital y el conjunto de activos disponibles respectivamente, el **conjunto de carteras de valores posibles**,  $Q$ , se corresponde con  $Q = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1 \text{ y } x_i \geq 0 \forall i \in N\}$ .

**Observación 1.3.1.** *El conjunto  $Q$  es un conjunto convexo.*

A la hora evaluar el rendimiento de una cartera de valores es de vital importancia tener en consideración la evolución temporal de su composición, ya que puede existir una secuencia de momentos donde nuestra cartera sea reajustada. Denominaremos *tiempo de inversión* al instante inicial en que es creada nuestra cartera, es decir, el instante donde se realiza la compra de activos. Nos centraremos en el caso que no se permite el reajuste de la cartera y en el que, por tanto, la cartera permanece invariante desde el tiempo de inversión hasta el final del periodo considerado, instante al que nos referiremos como *tiempo objetivo*. Esta estrategia recibe el nombre de *comprar y mantener*.

**Definición 1.3.2.** Sean  $C \in [0, \infty)$  y  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ , el capital y el conjunto de activos disponibles respectivamente, sea  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  una cartera de valores, la **tasa de retorno**  $r_{\mathbf{x}}$  de  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , en el intervalo de tiempo comprendido entre  $t - 1$  y  $t$  viene dada por  $r_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n r_i x_i$ .

A la hora de calcular la tasa de retorno de una cartera en nuestro periodo de inversión nos encontramos con el problema de que no es posible conocer con exactitud la cotización de un activo financiero en un instante futuro, en particular, en nuestro tiempo objetivo. Por ello, modelaremos la tasa de retorno de un activo como una variable aleatoria, cuyo valor esperado consideraremos conocido.

**Definición 1.3.3.** Sean  $C \in [0, \infty)$  y  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ , el capital y el conjunto de activos disponibles respectivamente, sea  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  una cartera de valores, la **tasa de retorno medio**  $\mu$  de  $\mathbf{x}$  en el intervalo de tiempo comprendido entre  $t - 1$  y  $t$  viene dada por

$$\mu(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{R_{\mathbf{x}}\} = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i, \quad (1.1)$$

donde  $R_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n R_i x_i$  y  $R_i$  es la variable aleatoria asociada a la tasa de retorno del activo  $i \in N$  cuyo valor esperado es  $\mu_i$ .

Uno de los objetivos del inversor será seleccionar una cartera que le permita maximizar la tasa de retorno medio ya que esto le proporcionará mayores ganancias. Ahora bien, ¿la tasa de retorno medio es suficiente para poder identificar que cartera es la adecuada? Veamos un ejemplo:

**Ejemplo 1.3.1.** Sean  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}'$  dos carteras de valores, sus tasas de retorno medio vendrán determinadas por

$$\mathbb{P}(R_{\mathbf{x}} = \xi) = \begin{cases} 1, & \text{si } \xi = 3\% \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad \mathbb{P}(R_{\mathbf{x}'} = \xi) = \begin{cases} 1/3, & \text{si } \xi = -3\% \\ 1/3, & \text{si } \xi = 2\% \\ 1/3, & \text{si } \xi = 10\% \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases},$$

y, por tanto,  $\mu(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}') = 3\%$ . Desde el punto de vista del retorno esperado, ninguna de las carteras es preferible a la otra. Sin embargo, a la hora de realizar una inversión el inversor tiene otro objetivo principal, protegerla de la incertidumbre, es decir, de la variabilidad de la tasa de retorno de dicha inversión. Esta incertidumbre es lo que conocemos como *riesgo*, el riesgo de no ganar lo esperado. Por ello, aunque  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}'$  presenten una tasa de retorno esperado idéntica, ningún inversor racional elegiría  $\mathbf{x}'$  en lugar de  $\mathbf{x}$ , ya que la tasa de retorno medio de  $\mathbf{x}$  se conoce con seguridad (cartera libre de riesgo), mientras que la de  $\mathbf{x}'$  presenta más variabilidad y, por tanto, mayor riesgo.

Se pone de manifiesto entonces que necesitamos una manera de medir el riesgo. No existe una única forma de cuantificar el riesgo y a lo largo de este trabajo veremos varias

funciones que cumplen este cometido. Dichas funciones reciben el nombre de *medidas de riesgo*, que denotaremos usualmente por  $\varrho(\cdot)$ .

**Definición 1.3.4.** Sea  $\mathbf{x}$  una cartera de valores y  $\varrho : Q \rightarrow \mathbb{R}$  una medida de riesgo, el **riesgo asociado a  $\mathbf{x}$**  viene dado por  $\varrho(\mathbf{x})$ .

En este punto ya estamos en las condiciones de plantear el problema de optimización que nos permita encontrar la cartera de valores ideal para el inversor. Dicho problema consistirá en maximizar la tasa de retorno esperado y minimizar el riesgo asociado.

**Definición 1.3.5.** Sean  $C \in [0, \infty)$ ,  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  y  $Q$ , el capital y los conjuntos de activos disponibles y carteras de valores posibles, respectivamente. Sea  $\varrho(\cdot)$  una medida de riesgo, diremos que un problema es de **optimización de cartera de valores** si es de la forma

$$\text{máx}\{[\mu(\mathbf{x}), -\varrho(\mathbf{x})] : \mathbf{x} \in Q\} \quad (1.2)$$

**Definición 1.3.6.** Una cartera de valores posible  $\mathbf{x}^0$ , será una **solución eficiente** de (1.2), o una cartera  **$\mu/\varrho$ -eficiente** si no existe  $\mathbf{x} \in Q$  tal que  $\mu(\mathbf{x}) \geq \mu(\mathbf{x}^0)$  y  $\varrho(\mathbf{x}) \leq \varrho(\mathbf{x}^0)$  con al menos una desigualdad estricta.

La relación "no menos eficiente que" permite definir una ordenación parcial en cualquier conjunto de carteras de valores posibles. Para el caso en el que el conjunto  $\{[\mu(\mathbf{x}), \varrho(\mathbf{x})]\}$  sea convexo, las soluciones eficientes se encuentran en la frontera del conjunto, dicha frontera recibe el nombre de *frontera retorno/riesgo* y aunque contenga todas las carteras  $\mu/\varrho$ -eficientes también contiene carteras que no lo son [28]. Esto puede comprobarse fácilmente de manera visual con la Figura 1.2. Nótese también que al ser  $\mu$  una función lineal, para que el conjunto sea convexo bastará con que la medida de riesgo  $\varrho$  sea una función convexa, característica que cumplen la mayoría de estas medidas.

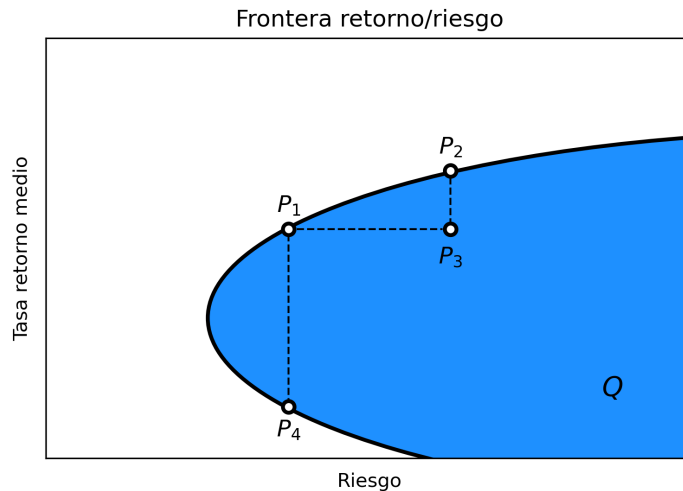


Figura 1.2: Frontera retorno/riesgo

Como podemos observar en la imagen previa, dada una cartera de valores que no se encuentra en la frontera (en nuestro caso  $P_3$ ) cuyo retorno/riesgo sea  $(\varrho(P_3), \mu(P_3))$  siempre podemos encontrar dos carteras,  $P_1$  y  $P_2$ , que cumplan  $\varrho(P_1) < \varrho(P_3)$  con  $\mu(P_1) = \mu(P_3)$  y  $\mu(P_2) > \mu(P_3)$  con  $\varrho(P_1) = \varrho(P_3)$ , por tanto,  $P_1$  y  $P_2$  son más eficientes que  $P_3$ . Es más, como  $P_1$  y  $P_2$  están en la frontera, no existen carteras con menor riesgo e igual retorno que  $P_1$ , ni carteras con mayor retorno e igual riesgo que  $P_2$ , ambas son  $\mu/\varrho$ -eficientes. Para ejemplificar que no todas las carteras pertenecientes a la frontera de retorno/riesgo son eficientes podemos tomar la cartera  $P_4$ , que pertenece a la frontera pero que no es eficiente, ya que la cartera  $P_1$  presenta un mayor retorno con el mismo nivel de riesgo.

En general, una mayor tasa de retorno lleva asociado un mayor riesgo y, consecuentemente, no vamos a poder encontrar una cartera que al mismo tiempo sea la de mayor retorno y menor riesgo. Por ello, a la hora de lidiar con el problema (1.2) vamos a utilizar el enfoque de aproximación mediante cotas [40]. Este enfoque consiste en acotar una de la variables a maximizar y resolver el problema de maximización para la otra.

**Definición 1.3.7.** Sean  $C \in [0, \infty)$ ,  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  y  $Q$ , el capital y los conjuntos de activos disponibles y carteras de valores posibles respectivamente. Sea  $\varrho(\cdot)$  una medida de riesgo, diremos que un problema de optimización de cartera de valores es abordado desde el **enfoque de aproximación mediante cotas** si es de la forma

$$\text{mín}\{\varrho(\mathbf{x}) : \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \mathbf{x} \in Q\}, \quad (1.3)$$

o bien,

$$\text{máx}\{\mu(\mathbf{x}) : \varrho(\mathbf{x}) \leq \varrho_0, \mathbf{x} \in Q\}. \quad (1.4)$$

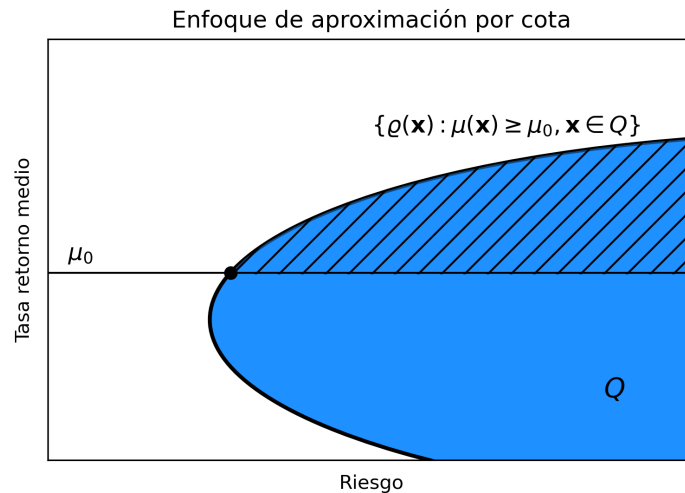


Figura 1.3: Enfoque de aproximación mediante cotas

Dada una cota, resolviendo (1.3) obtenemos la cartera eficiente con menor riesgo entre las que cumplen la cota establecida para el retorno, y variando el valor de la cota podemos generar completamente el conjunto de las carteras  $\mu/\varrho$ -eficientes, como

se ilustra en la Figura 1.3. Resolver (1.4) genera de manera análoga el conjunto de las carteras  $\mu/\rho$ -eficientes.

## 1.4. El modelo de Markowitz

Nuestro problema de optimización de cartera de valores se engloba en la *Teoría moderna de las carteras de valores*. Harry Markowitz desarrolló esta teoría en la década de 1950, como parte de su tesis doctoral en la Universidad de Chicago [27]. En ella introdujo la mayoría de conceptos que hemos tratado anteriormente y propuso como medida de riesgo la varianza estadística. La varianza da cuenta de la dispersión de los valores de la variable aleatoria tasa de retorno, por tanto, de cuán volátil es nuestra inversión. En reconocimiento a sus contribuciones y por el establecimiento de los fundamentos teóricos para tomar decisiones de inversión en condiciones de incertidumbre Markowitz recibió el Premio Nobel de Economía en 1990, junto con William Sharpe y Merton Miller.

Pasamos a describir el modelo de Markowitz que utiliza la varianza como medida de riesgo.

**Definición 1.4.1.** Sean  $C \in [0, \infty)$ ,  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  y  $Q$ , el capital y los conjuntos de activos disponibles y carteras de valores posibles respectivamente, la **varianza** de la tasa de retorno de la cartera de valores  $\mathbf{x}$  viene dada por:

$$\sigma^2(\mathbf{x}) = \text{Var}(R_{\mathbf{x}}) = \mathbb{E}\{(R_{\mathbf{x}} - \mu(\mathbf{x}))^2\} \quad (1.5)$$

Veamos que podemos expresar la varianza como un función cuadrática de los pesos  $x_i$  de los activos disponibles.

**Proposición 1.4.1.** Sea  $\sigma_j^2$  la varianza de la tasa de retorno del activo  $j$ ,  $R_j$  y  $\sigma_{ij} = \mathbb{E}\{(R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)\}$  la covarianza entre las tasas de retorno de los activos  $i$  y  $j$  (podemos denotar  $\sigma_j^2 = \sigma_{jj}$ ), entonces

$$\sigma^2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j.$$

*Demostración.* En efecto,

$$\begin{aligned}
\sigma^2(\mathbf{x}) &= \text{Var}(R_{\mathbf{x}}) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n R_i x_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \text{Var}(R_i x_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq 1}^n \text{Cov}(R_i x_i, R_j x_j) \\
&= \sum_{i=1}^n \text{Var}(R_i) x_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq 1}^n \text{Cov}(R_i, R_j) x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 x_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq 1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j,
\end{aligned}$$

llegando así a la expresión buscada.  $\square$

El **modelo de Markowitz** en su forma clásica viene dado por:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j, \quad (1.6a)$$

$$\text{s.a: } \sum_{j=1}^n \mu_j x_j \geq \mu_0, \quad (1.6b)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1, \quad (1.6c)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.6d)$$

**Observación 1.4.1.** *El modelo de Markowitz es un modelo para la optimización de cartera de valores desde el enfoque de aproximación mediante cotas.*

**Nota 1.4.2.** Las restricciones (1.6c) y (1.6d) pueden ser sustituidas por la condición  $x \in Q$ .

Estudiamos ahora el significado de los posibles valores que puede tomar la covarianza de dos activos.

**Definición 1.4.2.** Sea  $\sigma_{ij}$  la covarianza de dos activos  $i$  y  $j$ , sean  $\sigma_i$  y  $\sigma_j$  sus respectivas desviaciones típicas, los **coeficientes de correlación** de Pearson,  $\bar{\rho}_{ij}$  vienen dados por

$$\bar{\rho}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}. \quad (1.7)$$



**Observación 1.4.2.** *El coeficiente de correlación de Pearson toma valores comprendidos entre -1 y 1.*

Un valor positivo del coeficiente de correlación indica que las tasas de retorno de los activos  $i$  y  $j$  tienden a moverse en la misma dirección. Por el contrario, un valor negativo indica que las tasas de retorno tienden a moverse en direcciones opuestas, es decir, cuando una aumenta, la otra tiende a disminuir. Cuanto mayor sea el valor del coeficiente (en valor absoluto), más fuerte será la tendencia. Normalmente activos que pertenecen al mismo sector suelen tener coeficientes de correlación positivos. Si observamos el modelo de Markowitz, la forma de reducir la varianza, y en definitiva el riesgo, es seleccionar activos que tengan un coeficiente de correlación negativo. Esta estrategia recibe el nombre de *diversificación* y permite a los inversores construir carteras que tienen un nivel de riesgo total menor que el riesgo de los activos individuales que la componen, justificando así la inversión en una cartera de valores en lugar de en un activo en concreto.

## 1.5. Medidas de seguridad

A la hora de resolver (1.2) podemos encontrarnos con algunos problemas para carteras de valores que presenten un retorno significativamente pequeño. Una cartera con este tipo de retorno puede tener un riesgo asociado prácticamente nulo por lo que desde el punto de vista de minimización del riesgo será preferible a otra cartera con mayor riesgo aunque los posibles retornos de ésta sean mayores que los de la cartera libre de riesgo. Esta situación no es deseable pues incluso el peor escenario de la segunda cartera mejora los resultados de la primera, veamos un ejemplo.

**Ejemplo 1.5.1.** Sean  $\mathbf{x}$  y  $\bar{\mathbf{x}}$  dos carteras de valores, sus tasas de retorno medio vienen dadas por,

$$\mathbb{P}(R_{\mathbf{x}} = \xi) = \begin{cases} 1, & \text{si } \xi = 0.25\% \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad \mathbb{P}(R_{\bar{\mathbf{x}}} = \xi) = \begin{cases} 1/3, & \text{si } \xi = 1\% \\ 1/3, & \text{si } \xi = 2\% \\ 1/3, & \text{si } \xi = 3\% \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

En este caso el riesgo asociado a  $\mathbf{x}$  es nulo, por lo que con seguridad obtendremos un retorno del 0,25% de nuestra inversión. La segunda cartera,  $\bar{\mathbf{x}}$ , presenta una tasa de retorno esperado mayor, del 2%, sin embargo, la dispersión de los posibles valores de la tasa de retorno provoca que el riesgo asociado a  $\bar{\mathbf{x}}$  sea mayor que el de  $\mathbf{x}$ . Por tanto, desde el punto de vista del riesgo,  $\mathbf{x}$  es preferible a  $\bar{\mathbf{x}}$ . Sin embargo, los posibles valores de retorno de  $\bar{\mathbf{x}}$  son 1%, 2% y 3%, todos superiores al 0,25% de  $\mathbf{x}$  por lo que ningún inversor racional elegiría antes  $\mathbf{x}$  que  $\bar{\mathbf{x}}$ .

Para solucionar este problema introducimos el concepto de *seguridad* que cuantificaremos, al igual que ocurre con el riesgo, con *medidas de seguridad*. Estas medidas fueron introducidas por primera vez en 1963 por William J. Baumol [3].

**Definición 1.5.1.** Sean  $C \in [0, \infty)$ ,  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  y  $Q$ , el capital, los conjuntos de activos disponibles y las carteras de valores posibles respectivamente. Sea  $\varrho(\cdot)$  una medida de riesgo, su **medida de seguridad** asociada es una función  $\varsigma : Q \rightarrow \mathbb{R}$  cuyos valores vienen dados por  $\varsigma(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - \varrho(\mathbf{x})$ .

Por lo tanto, para lograr una mayor seguridad financiera, los inversores deben buscar un equilibrio adecuado entre el retorno y el riesgo. Esto significa que deben identificar inversiones que ofrezcan un retorno atractivo, pero que también tengan un nivel de riesgo aceptable en función de su perfil de riesgo individual.

Mediante el uso de medidas de seguridad, el problema de optimización de cartera de valores (1.2) se modela como un problema de maximización retorno-seguridad,

$$\text{máx}\{[\mu(\mathbf{x}), \varsigma(\mathbf{x})] : \mathbf{x} \in Q\} \quad (1.8)$$

**Proposición 1.5.2.** Dadas dos carteras de valores,  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}'$ , tales que  $\mathbf{x}$  es más  $\mu/\varrho$ -eficiente que  $\mathbf{x}'$ , entonces  $\mathbf{x}$  es más  $\mu/\varsigma$ -eficiente que  $\mathbf{x}'$ .

*Demostración.* Por ser  $\mathbf{x}$  más  $\mu/\varrho$ -eficiente que  $\mathbf{x}'$  tenemos que  $\mu(\mathbf{x}) \geq \mu(\mathbf{x}')$  y  $\varrho(\mathbf{x}) \leq \varrho(\mathbf{x}')$  con al menos una desigualdad estricta. Entonces

$$\varsigma(\mathbf{x}') = \mu(\bar{\mathbf{x}}) - \varrho(\mathbf{x}') < \mu(\mathbf{x}) - \varrho(\mathbf{x}) = \varsigma(\mathbf{x}),$$

es decir,  $\mathbf{x}$  es más  $\mu/\varsigma$ -eficiente que  $\mathbf{x}'$ . □

De nuevo, podemos utilizar el enfoque de aproximación mediante cotas para abordar (1.8) y obtener así el problema

$$\text{máx}\{\varsigma(\mathbf{x}) : \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \mathbf{x} \in Q\}. \quad (1.9)$$

# Capítulo 2

## Modelos lineales para la selección de carteras de valores

A lo largo de este capítulo estudiaremos la viabilidad del uso de modelos lineales para resolver nuestro problema de optimización de cartera de valores y veremos varios ejemplos. En el capítulo anterior ya vimos un primer modelo para resolver nuestro problema, el modelo de Markowitz, sin embargo, como podemos observar en la formulación (1.6), se trata de un modelo de programación cuadrática y no lineal. Los modelos lineales son preferibles a los cuadráticos debido a que son más fáciles de resolver computacionalmente ya que los algoritmos de resolución de problemas de programación lineal son más rápidos y eficientes en términos de tiempo y recursos computacionales que los algoritmos de resolución de problemas de programación cuadrática. Además, su solución y análisis resulta más simple y presentan ventajas en términos de adaptabilidad y ajuste a diferentes situaciones y restricciones.

El primer modelo lineal propuesto no fue otro que el modelo de Markowitz pero utilizando una aproximación lineal para la varianza [34]. Para ello, puede utilizarse el método descrito por G. B. Dantzig en [7], donde modificando algunas instrucciones en el algoritmo simplex para programación lineal se consigue resolver problemas de programación cuadrática convexos.

### 2.1. Discretización, escenarios y computabilidad LP

Nos planteamos ahora si es posible formular modelos lineales para la optimización de carteras de valores que no estén basados en la aproximación lineal de la varianza. ¿Cómo podemos medir el riesgo para obtener un modelo lineal? Una primera observación es que, para garantizar que una cartera aproveche la diversificación, ninguna medida de riesgo o seguridad puede ser una función lineal de los pesos de los posibles activos de la cartera.

**Proposición 2.1.1.** Sean  $C \in [0, \infty)$ ,  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  y  $Q$ , el capital y los conjuntos de activos disponibles y de carteras de valores posibles respectivamente. Sea  $\varrho(\cdot)$  una medida de riesgo cuya expresión es de la forma

$$\varrho(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n a_j x_j, \quad \mathbf{x} \in Q, \quad (2.1)$$

donde  $a_j \in \mathbb{R}$ ,  $\forall j \in N$ . Entonces la resolución de (1.3) conduce a una cartera de valores no diversificada.

*Demostración.* Basta observar que

$$\varrho(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n a_j x_j \geq \min_{j=1, \dots, n} \{a_j\} \sum_{j=1}^n x_j = \min_{j=1, \dots, n} \{a_j\} = a_k,$$

donde  $k$  es el índice para el que se alcanza el mínimo. En consecuencia, esta cota inferior se alcanza para la cartera cuyos pesos son  $x_k = 1$  y el resto 0. Entonces la solución viene dada por una cartera que asigna el total de la inversión a un único activo (el activo  $k$ ) y que es, por tanto, una cartera no diversificada. Dado que la cota dada por  $\mu_0$  es fijada por el inversor, hemos tomado aquí un valor lo suficientemente pequeño para que la cartera anterior sea una solución factible del problema.  $\square$

Existe, sin embargo, una forma que nos permite obtener modelos lineales a través de la *discretización* de las variables aleatorias correspondientes a los retornos de cada uno de los activos. Surgirá así el concepto de *escenario*.

En el capítulo anterior consideramos que los valores esperados  $\mu_j$  correspondientes a las variables aleatorias asociadas a las tasas de retorno de los activos,  $R_j$  con  $j = 1, \dots, n$ , eran conocidos. Empleamos ahora una visión más realista, supondremos que a lo largo del tiempo de inversión pueden darse un número finito  $T$  de situaciones posibles, diferentes y mutuamente excluyentes. Cada una de estas situaciones tendrá una probabilidad conocida  $p_t$ ,  $t = 1, \dots, T$ , de ocurrir con  $\sum_{t=1}^T p_t = 1$ . Cada una de dichas situaciones definirán un valor de la tasa de retorno de cada uno de los activos disponibles. Sean  $r_{jt}$  con  $j = 1, \dots, n$  y  $t = 1, \dots, T$  dichos valores, entonces la tasa de retorno esperado de cada uno de los activos viene dada por

$$\mu_j = \sum_{t=1}^T p_t r_{jt}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Consecuentemente, sea  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  una cartera de valores, la tasa de retorno medio viene dada por

$$\mu(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{R_{\mathbf{x}}\} = \mathbb{E}\left\{\sum_{j=1}^n R_j x_j\right\} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{t=1}^T p_t r_{jt}\right) x_j = \sum_{j=1}^n \mu_j x_j. \quad (2.3)$$

**Definición 2.1.1.** Sean  $C \in [0, \infty)$ ,  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  y  $Q$ , el capital y los conjuntos de activos disponibles y carteras de valores posibles respectivamente. Diremos que un problema de optimización de cartera de valores es abordado desde el **enfoque de discretización de retornos** si el vector formado por las tasas de retornos de los activos disponibles,  $R = (R_1, \dots, R_n)$ , es un vector aleatorio discreto. Cada una de las realizaciones muestrales de  $R$  recibe el nombre **escenario**.

**Ejemplo 2.1.2.** Consideremos  $N = \{1, 2, 3\}$ , los activos disponibles y  $T = 3$  el número de escenarios posibles con  $p_t = (p_1 = 0.3, p_2 = 0.3, p_3 = 0.4)$ . Las tasas de retorno para cada uno de los escenarios están recogidas en la Tabla 2.1. Dada una cartera  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  su tasa de retorno medio viene dada por

$$\mu(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 \mu_j x_j = 0.0057x_1 + 0.0059x_2 + 0.0044x_3.$$

Activos	Escenario 1	Escenario 2	Escenario 3	Tasa de retorno esperada
1	$r_{11} = 0.020$	$r_{12} = -0.013$	$r_{13} = 0.009$	$\mu_1 = 0.0057$
2	$r_{21} = 0.011$	$r_{22} = -0.002$	$r_{23} = 0.008$	$\mu_2 = 0.0059$
3	$r_{31} = 0.025$	$r_{32} = -0.005$	$r_{33} = -0.004$	$\mu_3 = 0.0044$

Tabla 2.1: Tasas de retorno en diferentes escenarios.

**Definición 2.1.2.** Sean  $C \in [0, \infty)$ ,  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  y  $Q$ , el capital y los conjuntos de activos disponibles y carteras de valores posibles respectivamente. Diremos que una medida de riesgo,  $\varrho(\cdot)$  o de seguridad,  $\varsigma(\cdot)$ , es **LP computable** si el problema de optimización de cartera de valores asociado a dichas medidas, abordado desde el enfoque de discretización de retornos, es lineal.

## 2.2. Modelos lineales basados en medidas de riesgo

La varianza (1.5) es la forma clásica de medir la dispersión respecto a cierto valor de cualquier variable aleatoria, pero no la única. Una medida alternativa, aunque similar, es la desviación absoluta media o MAD (Mean Absolute Deviation) que fue una de las primeras medidas de riesgo utilizadas en la teoría de las carteras de valores [35].

**Definición 2.2.1.** Sea  $Q$ , el conjunto de carteras de valores posibles, la **desviación absoluta media** es la medida de riesgo  $\delta : Q \rightarrow \mathbb{R}$ , que viene dada por

$$\delta(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{|R_{\mathbf{x}} - \mathbb{E}(R_{\mathbf{x}})|\} = \mathbb{E}\left\{\left|\sum_{j=1}^n R_j x_j - \mu(\mathbf{x})\right|\right\}, \quad \mathbf{x} \in Q. \quad (2.4)$$

**Teorema 2.2.1.** *La desviación absoluta media o MAD es LP computable y el modelo lineal para el problema de optimización de cartera valores asociado es*

$$\min \sum_{t=1}^T p_t d_t, \quad (2.5a)$$

$$\text{s.a.: } d_t \geq y_t - \mu, \quad t = 1, \dots, T \quad (2.5b)$$

$$d_t \geq -(y_t - \mu), \quad t = 1, \dots, T \quad (2.5c)$$

$$y_t = \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j \quad t = 1, \dots, T \quad (2.5d)$$

$$\mu = \sum_{j=1}^n \mu_j x_j, \quad (2.5e)$$

$$\mu \geq \mu_0, \quad (2.5f)$$

$$d_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T \quad (2.5g)$$

$$\mathbf{x} \in Q. \quad (2.5h)$$

*Demostración.* Dada una medida de riesgo  $\varrho(\cdot)$ , el problema de optimización de cartera de valores asociado a dicha medida es

$$\max\{[\mu(\mathbf{x}), -\varrho(\mathbf{x})] : \mathbf{x} \in Q\},$$

que abordado desde el enfoque de aproximación mediante cotas toma la forma

$$\min\{\varrho(\mathbf{x}) : \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \mathbf{x} \in Q\}. \quad (2.6)$$

Sea  $\mathbf{x} \in Q$  una cartera de valores, teniendo en cuenta el enfoque de discretización de retornos, la desviación absoluta media puede expresarse como

$$\delta(\mathbf{x}) = \mathbb{E}\{|R_{\mathbf{x}} - \mathbb{E}(R_{\mathbf{x}})|\} = \sum_{t=1}^T p_t \left( \left| \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j - \mu(\mathbf{x}) \right| \right) = \sum_{t=1}^T p_t d_t, \quad (2.7)$$

donde denotamos  $y_t = \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j$  y  $d_t = |y_t - \mu|$  con  $t = 1, \dots, T$ . Las variables  $y_t$  representan la tasa de retorno de la cartera en cada uno de los escenarios contemplados. Y las variables  $d_t$ , que reciben el nombre de desviación en el escenario  $t$ , cuantifican la diferencia entre dichos valores de la tasa para cada escenario y la tasa de retorno esperada de nuestra cartera. Minimizando  $\sum_{t=1}^T p_t d_t$  estaremos, por tanto, reduciendo la dispersión de los posibles valores de la tasa de retorno respecto de su valor esperado.

El problema (2.6) se expresa para nuestra medida de riesgo (2.7) como

$$\begin{aligned}
& \text{mín} \sum_{t=1}^T p_t d_t, \\
& \text{s.a: } d_t = |y_t - \mu|, & t = 1, \dots, T \\
& y_t = \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j & t = 1, \dots, T \\
& \mu = \sum_{j=1}^n \mu_j x_j, \\
& \mu \geq \mu_0, \\
& \mathbf{x} \in Q,
\end{aligned}$$

dado que  $|y_t - \mu| = \text{máx}\{(y_t - \mu); -(y_t - \mu)\}$  este modelo es equivalente a (2.5). Basta observar que si  $y_t - \mu \geq 0$ , las restricciones (2.5c) son redundantes. En ese caso, la minimización (2.5a) provoca que las variables  $d_t$  tomen el mínimo valor posible, que es el que viene dado por la restricción (2.5b) y, por tanto,  $d_t = y_t - \mu = |y_t - \mu|$ . En caso contrario, las restricciones (2.5b) serán las redundantes y, de manera análoga, (2.5a) junto con (2.5c) conducen a  $d_t = -(y_t - \mu) = |y_t - \mu|$ . De esta forma, queda demostrada la equivalencia de ambos modelos y concluimos que la desviación absoluta media es LP computable y su modelo lineal asociado viene dado por (2.5).  $\square$

Este modelo fue presentado y analizado por primera vez por Konno y Yamazaki en 1991 [17].

Otra medida de riesgo que nos permite cuantificar la variabilidad es la diferencia media de Gini o GMD (Gini's Mean Difference). Esta medida no está basada en la dispersión respecto a cierto valor fijo como era la tasa de retorno esperada en el caso de la desviación absoluta media, sino que hace uso de las diferencias entre las tasas de retornos en diferentes escenarios.

**Definición 2.2.2.** Sea  $Q$  el conjunto de carteras de valores posibles, la **diferencia media de Gini** es la medida de riesgo  $\Gamma : Q \rightarrow \mathbb{R}$ , que viene dada por

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbb{E}\{|R_{\mathbf{x}} - R'_{\mathbf{x}}|\}, \quad \mathbf{x} \in Q. \quad (2.9)$$

donde  $R'_{\mathbf{x}}$  es una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida a la tasa de retorno de la cartera de valores  $\mathbf{x}$ ,  $R_{\mathbf{x}}$ .

**Teorema 2.2.2.** *La diferencia media de Gini o GMD es LP computable y el modelo*

lineal para el problema de optimización de cartera valores asociado es

$$\text{mín} \sum_{t'=1}^T \sum_{t'' \neq t'} p_{t'} p_{t''} d_{t't''}, \quad (2.10a)$$

$$\text{s.a. } d_{t't''} \geq y_{t'} - y_{t''}, \quad t', t'' = 1, \dots, T; t'' \neq t' \quad (2.10b)$$

$$y_t = \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j \quad t = 1, \dots, T \quad (2.10c)$$

$$\mu = \sum_{j=1}^n \mu_j x_j, \quad (2.10d)$$

$$\mu \geq \mu_0, \quad (2.10e)$$

$$d_{t't''} \geq 0, \quad t', t'' = 1, \dots, T; t'' \neq t' \quad (2.10f)$$

$$\mathbf{x} \in Q. \quad (2.10g)$$

*Demostración.* Sea  $\mathbf{x} \in Q$  una cartera de valores, teniendo en cuenta el enfoque de discretización de retornos, la diferencia media de Gini puede expresarse como

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbb{E}\{|R_{\mathbf{x}} - R'_{\mathbf{x}}|\} = \frac{1}{2} \sum_{t'=1}^T \sum_{t''=1}^T |y_{t'} - y_{t''}| p_{t'} p_{t''}. \quad (2.11)$$

donde  $y_t = \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j$  es la tasa de retorno de nuestra cartera en el escenario  $t$ .

Si denotamos  $d_{t't''} = |y_{t'} - y_{t''}|$  entonces el problema de optimización de cartera de valores abordado desde el enfoque de aproximación mediante cotas (1.3) se expresa para nuestra medida de riesgo (2.11) como

$$\text{mín} \frac{1}{2} \sum_{t'=1}^T \sum_{t''=1}^T d_{t't''} p_{t'} p_{t''},$$

$$\text{s.a. } d_{t't''} = |y_{t'} - y_{t''}|, \quad t', t'' = 1, \dots, T$$

$$y_t = \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j \quad t = 1, \dots, T$$

$$\mu = \sum_{j=1}^n \mu_j x_j,$$

$$\mu \geq \mu_0,$$

$$\mathbf{x} \in Q.$$

Comprobemos que este modelo es equivalente a (2.10). Para ello, tomamos  $d_{t't''}$  como variables de decisión, añadiendo las restricciones (2.10b) y (2.10f). Al resolver el problema de minimización  $\frac{1}{2} \sum_{t'=1}^T \sum_{t''=1}^T d_{t't''} p_{t'} p_{t''}$ , estas variables tomarán los valores  $d_{t't''} = \max\{y_{t'} - y_{t''}, 0\}$  con  $t', t'' = 1, \dots, T$ . Dado que  $y_{t'} - y_{t''} = -(y_{t''} - y_{t'})$ , si



$d_{t't''} = y_{t'} - y_{t''}$  entonces  $d_{t''t'} = 0$ . En consecuencia,

$$d_{t't''} + d_{t''t'} = |y_{t'} - y_{t''}| = \frac{1}{2}|y_{t'} - y_{t''}| + \frac{1}{2}|y_{t''} - y_{t'}|.$$

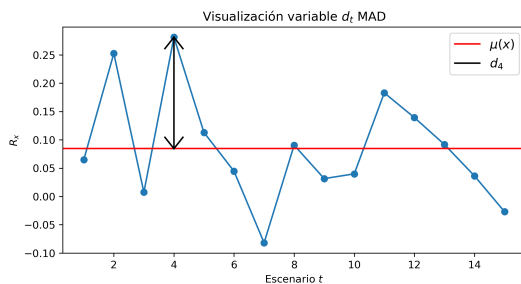
Obtenemos así

$$\frac{1}{2} \sum_{t'=1}^T \sum_{t''=1}^T d_{t't''} p_{t'} p_{t''} = \sum_{t'=1}^T \sum_{t''=1}^T p_{t'} p_{t''} d_{t't''} = \sum_{t'=1}^T \sum_{t'' \neq t'}^T p_{t'} p_{t''} d_{t't''},$$

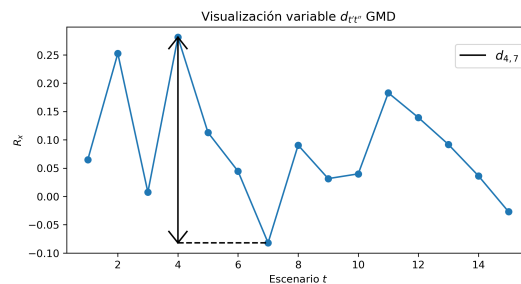
donde para la última igualdad hemos usado que  $d_{t't'} = \max\{y_{t'} - y_{t'}, 0\} = \max\{0, 0\} = 0$ . De esta forma, queda demostrada la equivalencia de ambos modelos y concluimos que la diferencia media de Gini es LP computable y su modelo lineal asociado viene dado por (2.10).  $\square$

La diferencia media de Gini fue formulada por el profesor Corrado Gini en 1912 como medida de la variabilidad y se ha convertido en una de las medidas más populares en el ámbito de la optimización de carteras de valores. El modelo (2.10) fue introducido por Yitzhaki en 1982 [38].

**Ejemplo 2.2.3.** Sea  $\mathbf{x} \in Q$  una cartera de valores conocida y  $T = 15$  el número de escenarios posibles. En las siguientes gráficas (Figura 2.1) se recogen las tasas de retorno de dicha cartera en los diferentes escenarios posibles. Realizamos una comparación visual entre el significado de las variables  $d_t$  y  $d_{t't''}$  utilizadas en los modelos MAD y GMD respectivamente. Para ello nos fijamos por ejemplo en el escenario  $t=4$ . Para el modelo MAD, la variable  $d_4$  es la distancia desde el punto correspondiente a dicho escenario hasta el retorno medio de la cartera. Sin embargo, en el modelo GMD las variables  $d_{4t''}, t'' = 1, \dots, 15$ , no se corresponden con distancias a un valor constante. En este caso, cuantifican la diferencia en valor absoluto de la tasa de retorno del escenario  $t=4$  con las del resto de escenarios. Como podemos observar, para nuestro ejemplo la diferencia máxima se corresponde con  $d_{4,7}$ .



(a)  $d_t$  en modelo MAD.



(b)  $d_{t't''}$  en modelo GMD.

Figura 2.1: Visualización de variables en modelos de dispersión.

## 2.3. Modelos lineales basados en medidas de seguridad

En la sección anterior nos centramos en el estudio de medidas de riesgo cuya minimización nos permitía reducir la variabilidad de la tasa de retorno de nuestra cartera de valores. Dejamos ahora de lado el estudio de la variabilidad, la dispersión y de la tasa de retorno de esperado para centrarnos en modelos que protejan al inversor de los peores escenarios, garantizando así la seguridad de la inversión. La primera medida de seguridad que consideramos para lograr este objetivo es la peor realización.

**Definición 2.3.1.** Sea  $Q$  el conjunto de carteras de valores posibles, la **peor realización** es la medida de seguridad  $M : Q \rightarrow \mathbb{R}$ , que viene dada por

$$M(\mathbf{x}) = \min_{t=1,\dots,T} y_t, \quad \mathbf{x} \in Q,$$

donde las variables  $y_t = \sum_{j=1}^n r_{jt}x_j$ , con  $t = 1, \dots, T$ , representan la tasa de retorno de la cartera en cada uno de los escenarios contemplados.

**Teorema 2.3.1.** *La peor realización es LP computable y el modelo lineal para el problema de optimización de cartera valores asociado es*

$$\text{máx } y \tag{2.13a}$$

$$s. a: \sum_{j=1}^n r_{jt}x_j \geq y, \quad t = 1, \dots, T \tag{2.13b}$$

$$\mu = \sum_{j=1}^n \mu_j x_j, \tag{2.13c}$$

$$\mu \geq \mu_0, \tag{2.13d}$$

$$\mathbf{x} \in Q. \tag{2.13e}$$

*Demostración.* Dada una medida de seguridad  $\varsigma(\cdot)$ , el problema de optimización de cartera de valores asociado a dicha medida es

$$\text{máx}\{[\mu(\mathbf{x}), \varsigma(\mathbf{x})] : \mathbf{x} \in Q\},$$

que abordado desde el enfoque de aproximación mediante cotas toma la forma

$$\text{máx}\{\varsigma(\mathbf{x}) : \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \mathbf{x} \in Q\}. \tag{2.14}$$

El problema (2.14) se expresa para nuestra medida de seguridad  $M(\mathbf{x}) = \min_{t=1,\dots,T} y_t$  como

$$\begin{aligned}
& \text{máx} \left( \min_{t=1, \dots, T} y_t \right) \\
& \text{s.a: } y_t = \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j, & t = 1, \dots, T \\
& \mu = \sum_{j=1}^n \mu_j x_j, \\
& \mu \geq \mu_0, \\
& \mathbf{x} \in Q.
\end{aligned}$$

Para comprobar la equivalencia de este modelo con (2.13) basta observar que  $T - 1$  restricciones de las dadas por  $\sum_{j=1}^n r_{jt} x_j \geq y$  con  $t = 1, \dots, T$  son redundantes y pueden expresarse de forma única mediante  $\min_{t=1, \dots, T} y_t \geq y$ . Además, al tratarse de un problema de maximización, la variable  $y$  tomará en el óptimo el máximo valor posible, por tanto,  $y = \min_{t=1, \dots, T} y_t$ . De esta forma, la maximización  $M(\mathbf{x}) = \min_{t=1, \dots, T} y_t$  es equivalente a la maximización de  $y$ , quedando así demostrada la equivalencia de ambos modelos. Concluimos de este modo que la peor realización es LP computable y su modelo lineal asociado viene dado por (2.13).  $\square$

El modelo anterior basado en la peor realización recibe de nombre de “Modelo Minimax” y fue introducido y analizado por Young en 1998 [39].

Una forma de generalizar la medida de seguridad de la peor realización es mediante el uso de cuantiles (ver [1]).

**Definición 2.3.2.** Dado  $\beta \in [0, 1]$ , el **cuantil de orden  $\beta$**  de una variable aleatoria  $R$  es el valor  $q \in \mathbb{R}$  tal que

$$\mathbb{P}\{R < q\} \leq \beta \leq \mathbb{P}\{R \leq q\}. \quad (2.16)$$

**Observación 2.3.1.** En el caso en que  $R$  sea una variable aleatoria discreta, su función de distribución  $F(\cdot)$  será una función escalonada, de forma que existirán valores  $\beta \in (0, 1)$  tales que el cuantil de orden  $\beta$  no será único, sino que será un conjunto de valores que formarán un intervalo cerrado [8].

Dado que en el enfoque de discretización de retornos trabajamos con variables aleatorias discretas, nos vemos obligados a reformular la definición del cuantil de orden  $\beta$  para que su valor sea único. Con ello lograremos que las medidas de seguridad que hagan uso de este concepto no sean funciones multivaluadas. La idea es que en el caso de que exista más de un valor posible para un  $\beta$  dado, tomaremos el valor del extremo inferior del intervalo cerrado que forman todos los valores  $q$ .

**Definición 2.3.3.** Sea  $\mathbf{x} \in Q$  una cartera de valores y dado  $\beta \in (0, 1]$ , el  $\beta$ -cuantil de  $\mathbf{x}$  es el valor  $q_\beta \in \mathbb{R}$  que viene dado por

$$q_\beta(\mathbf{x}) = \inf\{\eta : F_{R_{\mathbf{x}}}(\eta) \geq \beta\}, \quad (2.17)$$

donde  $F_{R_{\mathbf{x}}}(\cdot)$  es la función de distribución de la tasa de retorno de la cartera de valores  $\mathbf{x}$ .

**Ejemplo 2.3.2.** Sea  $\mathbf{x} \in Q$  una cartera de valores conocida y sean  $\beta = 0.7$  y  $R_{\mathbf{x}}$  la variable aleatoria asociada a la tasa de retorno de dicha cartera cuya distribución es  $R_{\mathbf{x}} \sim N(0.1, 0.01)$ . Al ser una variable cuya función de distribución es continua y estrictamente monótona el cuantil de orden  $\beta$ ,  $q$ , será único y su valor coincidirá con el valor de  $q_\beta$ , como podemos ver en la Figura 2.2a. Concretamente, sea  $F_{R_{\mathbf{x}}}(\cdot)$  la función de la variable aleatoria, entonces  $q = q_\beta = F_{R_{\mathbf{x}}}^{-1}(\beta) \approx 0.1524$ .

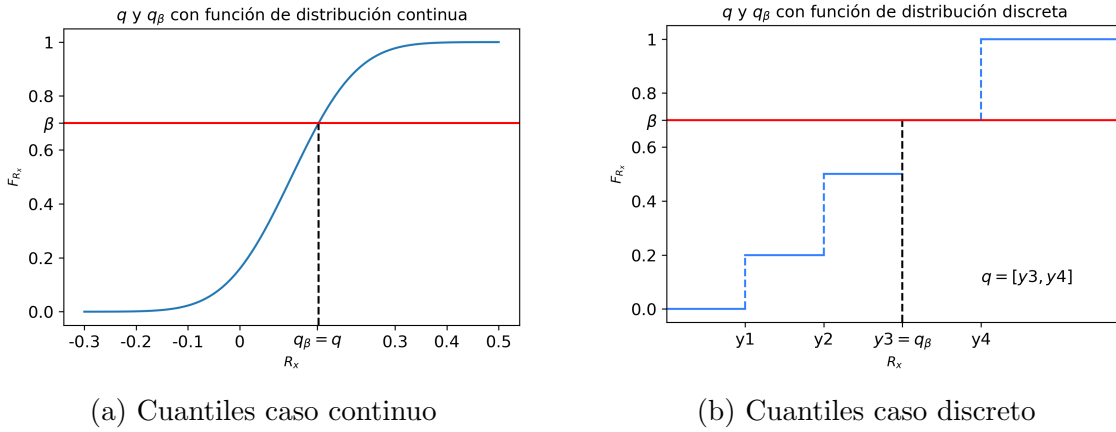


Figura 2.2: Visualización de variables en modelos de dispersión

Consideremos ahora que existen  $T = 4$  escenarios posibles que conducen a 4 valores posibles para la tasa de retorno de nuestra cartera, dichos valores son  $\{y1, y2, y3, y4\}$  los cuáles han sido ordenados en orden creciente y sus probabilidades asociadas son  $\{p1 = 0.2, p2 = 0.3, p3 = 0.2, p4 = 0.3\}$ . Dado que se trata de una variable aleatoria discreta su función de distribución es una función escalonada como podemos observar en la Figura 2.2b. Sea  $\beta = 0.7$ , en este caso

$$q_\beta(\mathbf{x}) = \inf\{\eta : F_{R_{\mathbf{x}}}(\eta) \geq 0.7\} = \inf[y3, \infty) = y3,$$

mientras que  $q = [y3, y4]$ , ya que dicho conjunto de valores cumplen  $\mathbb{P}\{R < q\} \leq 0.7 \leq \mathbb{P}\{R \leq q\}$ .

El  $\beta$ -cuantil es una medida de seguridad cuya maximización protege al inversor de los peores escenarios. Veámoslo a partir de la definición,

$$\inf\{\eta : F_{R_{\mathbf{x}}}(\eta) \geq \beta\} = \inf\{\eta : \mathbb{P}(R_{\mathbf{x}} \leq \eta) \geq \beta\}.$$

Fijamos  $\beta = 0.95$  y sea  $\eta_0$  el ínfimo del conjunto de valores tales que  $\mathbb{P}(R_{\mathbf{x}} \leq \eta) \geq 0.95$ . El inversor está interesado en que dicho valor sea lo más grande posible pues la probabilidad de que la tasa de retorno de nuestra cartera se encuentre por debajo de ese valor es del 95 %, es decir, que si ese valor fuera pequeño lo más probable es que nuestra cartera nos proporcione pérdidas o retornos pequeños. Por lo tanto, maximizando el  $\beta$ -cuantil el inversor reduce el riesgo de sufrir pérdidas, aumentando así la seguridad de su inversión. Todo esto siempre y cuando el valor de  $\beta$  sea lo suficientemente elevado, pues para valores inferiores estaríamos consiguiendo el resultado contrario. Podemos definir una medida de riesgo asociada al  $\beta$ -cuantil cuyo problema de minimización sea equivalente al problema de maximización de  $q_{\beta}(\mathbf{x})$ . Esta medida de riesgo recibe el nombre de valor en riesgo o VAR (Value-at-Risk) y es una de las medidas más destacadas en el ámbito financiero. Esta medida fue popularizada en la década de 1990 por J.P. Morgan, el mayor banco de Estados Unidos y una de mayores empresas financieras del mundo [30].

**Definición 2.3.4.** Sea  $Q$  el conjunto de carteras de valores posibles y sea  $\alpha \in [0, 1)$ , el **valor en riesgo** es la medida de riesgo  $VaR_{\alpha} : Q \rightarrow \mathbb{R}$  que viene dada por

$$VaR_{\alpha}(\mathbf{x}) = -q_{1-\alpha}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Q. \quad (2.18)$$

**Nota 2.3.3.** El valor  $\alpha$  se denomina nivel de confianza del valor en riesgo. Debe ser un valor pequeño de forma que  $\beta = 1 - \alpha$  sea elevado, como ya comentamos anteriormente. Usualmente  $\alpha = 0.05$ .

Debido a las posibles discontinuidades de la función de distribución de la tasa de retorno, el valor en riesgo y el  $\beta$ -cuantil no son, en general, medidas LP computables, es decir, no se puede encontrar un modelo lineal para su problema de optimización de cartera de valores asociado. Sin embargo, sí podemos encontrar un modelo lineal entero mixto.

**Teorema 2.3.4.** *Sea  $\alpha \in [0, 1)$ , el modelo lineal entero mixto para el problema de optimización de cartera valores asociado a las medidas valor en riesgo,  $VaR_{\alpha}(\cdot)$ , y  $\beta$ -cuantil con  $\beta = 1 - \alpha$ ,  $q_{1-\alpha}(\cdot)$ , es*

$$\text{máx } y \quad (2.19a)$$

$$s.a.: \sum_{j=1}^n r_{jt}x_j \geq y - Mz_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (2.19b)$$

$$\sum_{t=1}^T p_t z_t \leq 1 - \alpha - \pi, \quad (2.19c)$$

$$\mu = \sum_{j=1}^n \mu_j x_j, \quad (2.19d)$$

$$\mu \geq \mu_0, \quad (2.19e)$$

$$\mathbf{x} \in Q, \quad (2.19f)$$

$$z_t \in \{0, 1\}, \quad (2.19g)$$

donde  $M \in \mathbb{R}$  es una constante cuyo valor es elevado, mayor que cualquier tasa de retorno, y  $\pi \in \mathbb{R}$  es otra constante cuyo valor es pequeño y positivo, menor que cualquiera de las probabilidades  $p_t$ .

*Demostración.* Los problemas de optimización de cartera de valores desde el enfoque de aproximación mediante cotas para nuestras medidas son

$$\text{mín}\{VaR_\alpha(\mathbf{x}) : \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \mathbf{x} \in Q\}, \quad (2.20)$$

$$\text{máx}\{q_{1-\alpha}(\mathbf{x}) : \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \mathbf{x} \in Q\}. \quad (2.21)$$

Dado que  $VaR_\alpha(\mathbf{x}) = -q_{1-\alpha}(\mathbf{x})$ , ambos problemas son equivalentes. Basta entonces que comprobemos la equivalencia de los problemas (2.21) y (2.19).

La restricciones (2.19b) implican que en el caso en el que  $y > \sum_{j=1}^n r_{jt}x_j = y_t$ , la variable binaria  $z_t$  toma el valor 1. Ahora bien, dado que  $\sum_{t=1}^T p_t = 1$ , no todas las variables  $z_t$  pueden tomar el valor 1, ya que en caso contrario la restricción (2.19c) no se cumpliría. Como consecuencia, la variable  $y$  tomará en el óptimo el valor de una de las variables  $y_t$ . La pregunta es, ¿cuál de ellas? Al estar maximizando la variable  $y$ , dado que las variables  $y_t$  fijan una cota superior para  $y$  en el caso en el que  $z_t = 0$ , el valor óptimo será

$$y = \text{mín}_{t=1, \dots, T} \{y_t : z_t = 0\}.$$

Para lograr maximizar  $y$ , interesará entonces que las variables  $y_t$  más pequeñas tengan  $z_t = 1$ , siempre y cuando la restricción (2.19c) lo permita.

Sea  $\{y^1, y^2, \dots, y^T\}$  el conjunto de las variables  $y_t$  pero ordenadas de menor a mayor, es decir,  $y^t \leq y^{t+1}$  con  $t = 1, \dots, T-1$ , y sean  $p^t$  las probabilidades tales que  $\mathbb{P}(R_{\mathbf{x}} = y^t)$ ,  $t = 1, \dots, T-1$ . Entonces

$$y = \begin{cases} y^1, & \text{si } p^1 \geq 1 - \alpha, \\ \text{máx}_{t=2, \dots, T} \{y^t : \sum_{t=1}^{t-1} p^t < 1 - \alpha\}, & \text{si } p^1 < 1 - \alpha. \end{cases} \quad (2.22)$$

Para comprobarlo consideramos

$$y_k = \text{mín}_{t=1, \dots, T} \{y_t : z_t = 0\}, \quad y^k = \text{máx}_{t=2, \dots, T} \{y^t : \sum_{t=1}^{t-1} p^t < 1 - \alpha\}.$$

Sea  $z^t$  la variable binaria  $z_t$  asociada a  $y^t$ . Hemos comentado que a la hora de maximizar la variable  $y$ , nos interesa que las variables  $y_t$  más pequeñas, tengan  $z_t = 1$ . Las variables  $y^t$  son las variables  $y_t$  en orden creciente, por tanto, nos interesa que las variables  $z^t$  tales que  $z^t = 1$  sean aquellas con valores  $t$  más pequeños. Dado que  $\sum_{t=1}^{k-1} p^t < 1$  entonces  $z^t = 1$  para  $t = 1, \dots, k-1$  ya que son los  $z^t$  con los  $t$  más pequeños posibles.

Además,  $z^k = 0$ , ya que de otro modo tendríamos que  $\sum_{t=1}^k p^t < 1$  y, en consecuencia,  $y^k \neq \text{máx}_{t=1, \dots, T} \{y^t : \sum_{t=1}^{t-1} p^t < 1 - \alpha\}$ , pues  $y^{k+1} > y^k$  cumpliría las restricciones.

Llegaríamos así a una contradicción. Por tanto,  $z^k = 0$ , de donde se deduce que  $y^k$  es el menor de los  $y_t$  con  $z_t = 0$ , es decir,  $y^k = \min_{t=1, \dots, T} \{y_t : z_t = 0\} = y_k$ .

Debemos fijarnos en el caso  $p^1 \geq 1 - \alpha$ , porque el conjunto  $\{y^t : \sum_{t=1}^{t-1} p^t < 1 - \alpha\}$  es vacío y no estaría bien definido  $y^k$ . Para dicho caso tomaremos  $y^k = y^1$ , ya que todos los  $z^t$  serían cero y, en consecuencia,  $y_k = y^1$ . De este modo,  $y^k = y_k$ , concluyendo que la expresión (2.22) es válida.

Si ahora tenemos en cuenta que la función de distribución de la tasa de retorno viene dada por

$$F_{R_{\mathbf{x}}}(\eta) = \begin{cases} 0, & \text{si } \eta \in (-\infty, y^1), \\ \sum_{j=1}^t p^j, & \text{si } \eta \in [-y^t, y^{t+1}), \\ 1, & \text{si } \eta \in [y^T, \infty), \end{cases} \quad t = 1, \dots, T-1,$$

de la continuidad por la derecha deducimos

$$\begin{aligned} q_{1-\alpha}(\mathbf{x}) &= \inf\{\eta : F_{R_{\mathbf{x}}}(\eta) \geq 1 - \alpha\} \\ &= \min_{t=1, \dots, T} \{y^t : \sum_{j=1}^t p^j \geq 1 - \alpha\} \\ &= \begin{cases} y^1, & \text{si } p^1 \geq 1 - \alpha, \\ \max_{t=2, \dots, T} \{y^t : \sum_{t=1}^{t-1} p^t < 1 - \alpha\}, & \text{si } p^1 < 1 - \alpha. \end{cases} \end{aligned}$$

Hemos probado así la equivalencia de los problemas (2.19) y (2.21).  $\square$

Como ya hemos comentando, estas medidas no son LP computables por lo que buscamos ahora una medida basada en los cuantiles que sí lo sea. Para ello podemos considerar, como medida de seguridad a maximizar, el promedio de las peores realizaciones de la tasa de retorno respecto de un  $\beta$ -cuantil dado. La medida que se basa en esta premisa se denomina valor en riesgo condicional o CVaR (Conditional Value-at-Risk).

**Definición 2.3.5.** Sea  $Q$  el conjunto de carteras de valores posibles y sea  $\beta \in (0, 1]$ , el **valor en riesgo condicional** es la medida de seguridad  $M_\beta : Q \rightarrow \mathbb{R}$  que viene dada por

$$M_\beta(\mathbf{x}) = \min_{u_t} \left\{ \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T y_t u_t : \sum_{t=1}^T u_t = \beta, 0 \leq u_t \leq p_t, t = 1, \dots, T \right\}, \quad \mathbf{x} \in Q. \quad (2.23)$$

**Observación 2.3.2.** Para valores para los que exista un único valor del cuantil de orden  $\beta$  esta expresión coincide con

$$\mathbb{E}\{R_{\mathbf{x}} \mid R_{\mathbf{x}} \leq q_\beta(\mathbf{x})\} = \mathbb{E}\{R_{\mathbf{x}} \mid -R_{\mathbf{x}} \geq VaR_{1-\beta}(\mathbf{x})\},$$

ya que todos los  $u_t$  serán 0 o  $p_t$ . Aquellas variables  $u_t \neq 0$  serán las correspondientes a las realizaciones  $y_t$  cuyos escenarios no se encuentran entre los peores. El nombre utilizado para esta medida está justificado por la expresión anterior [33].

**Observación 2.3.3.** Esta medida coincide con medidas descritas anteriormente para ciertos valores de  $\beta$ . Por ejemplo,  $M_1(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x})$ . Además para valores de  $\beta < \min_{t=1, \dots, T} p_t$ ,  $M_\beta$  coincide con el peor escenario, esto suele representarse mediante  $M(\cdot) = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} M_\beta(\cdot)$ , y por ello se dice que  $M_\beta(\cdot)$  es una generalización de  $M(\cdot)$  [39].

**Teorema 2.3.5.** Sea  $\beta \in (0, 1]$ , el valor en riesgo condicional es LP computable y el modelo lineal para el problema de optimización de cartera valores asociado es

$$\text{máx} \left( \eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t^- \right) \quad (2.24a)$$

$$\text{s.a: } d_t^- \geq \eta - y_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (2.24b)$$

$$y_t = \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j, \quad t = 1, \dots, T \quad (2.24c)$$

$$\mu = \sum_{j=1}^n \mu_j x_j, \quad (2.24d)$$

$$\mu \geq \mu_0, \quad (2.24e)$$

$$d_t^- \geq 0, \quad t = 1, \dots, T \quad (2.24f)$$

$$\eta \in \mathbb{R}, \quad (2.24g)$$

$$\mathbf{x} \in Q. \quad (2.24h)$$

*Demostración.* El problema de optimización de cartera de valores desde el enfoque de aproximación mediante cotas para nuestra medida es

$$\text{máx}\{M_\beta(\mathbf{x}) : \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \mathbf{x} \in Q\}. \quad (2.25)$$

Sea  $\mathbf{x} \in Q$ , dado el nivel de confianza  $\beta \in (0, 1]$ , el valor en riesgo condicional de  $\mathbf{x}$ ,  $M_\beta(\mathbf{x})$ , es el valor óptimo obtenido al resolver el problema

$$\text{mín} \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T y_t u_t$$

$$\text{s.a: } \sum_{t=1}^T u_t = \beta,$$

$$u_t \leq p_t, \quad t = 1, \dots, T$$

$$u_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T$$

cuyo problema dual viene dado por

$$\text{máx} \left( \eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t^- \right)$$

$$\text{s.a: } \eta - d_t^- \leq y_t, \quad t = 1, \dots, T$$

$$\eta \in \mathbb{R},$$

$$d_t^- \geq 0, \quad t = 1, \dots, T.$$



Dado que este problema tiene como valor óptimo  $M_\beta(\mathbf{x})$ , concluimos que los problemas (2.26) y (2.24) son equivalentes. La variable  $\eta$  tomará en el óptimo el valor del  $\beta$ -cuantil (ver [31,37]).  $\square$

**Ejemplo 2.3.6.** Sean  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}'$  dos carteras de valores, consideremos  $T = 5$  el número de escenarios posibles con  $p_t = (p_1 = 0.2, p_2 = 0.2, p_3 = 0.3, p_4 = 0.1, p_5 = 0.2)$ . Las tasas de retorno para cada uno de los escenarios están recogidas en la Tabla 2.2.

Escenario	Probabilidad	$R_{\mathbf{x}}$	$R_{\mathbf{x}'}$
1	$p_1 = 0.2$	$y_1 = 0.050$	$y'_1 = 0.033$
2	$p_2 = 0.2$	$y_2 = 0.045$	$y'_2 = 0.030$
3	$p_3 = 0.3$	$y_3 = 0.035$	$y'_3 = 0.035$
4	$p_4 = 0.1$	$y_4 = 0.019$	$y'_4 = 0.020$
5	$p_5 = 0.2$	$y_5 = 0.013$	$y'_5 = 0.020$

Tabla 2.2: Tasas de retorno en diferentes escenarios.

Medida	$\mathbf{x}$	$\mathbf{x}'$
$\mu(\cdot)$	0.034	0.0291
$M(\cdot)$	0.013	0.020
$M_{0.2}(\cdot)$	0.013	0.020
$M_{0.5}(\cdot)$	0.023	0.024
$M_{0.8}(\cdot)$	0.030	0.027625
$M_1(\cdot)$	0.034	0.0291

Tabla 2.3: Valores de las diferentes medidas.

Podemos calcular los valores que toman las medidas que hemos descrito anteriormente para este caso concreto. Para la cartera  $\mathbf{x}$  tenemos

$$\mu(\mathbf{x}) = \mathbb{E}(R_{\mathbf{x}}) = \sum_{t=1}^5 p_t y_t = 0.0295,$$

$$M(\mathbf{x}) = \min_{t=1, \dots, 5} y_t = 0.013.$$

Para el valor en riesgo condicional utilizamos  $\beta = \{0.2, 0.5, 0.8, 1\}$ ,

$$\begin{aligned} M_{0.2}(\mathbf{x}) &= \min_{u_t} \left\{ \frac{1}{0.2} \sum_{t=1}^5 y_t u_t : \sum_{t=1}^5 u_t = 0.2, 0 \leq u_t \leq p_t, t = 1, \dots, 5 \right\} \\ &= \mathbb{E}\{R_x \mid R_x \leq q_{0.2}(\mathbf{x})\} = 0.013, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{0.5}(\mathbf{x}) &= \min_{u_t} \left\{ \frac{1}{0.5} \sum_{t=1}^5 y_t u_t : \sum_{t=1}^5 u_t = 0.5, 0 \leq u_t \leq p_t, t = 1, \dots, 5 \right\} \\ &= \frac{1}{0.5} (y_5 p_5 + y_4 p_4 + 0.2 y_3) = 0.0230. \end{aligned}$$

El resto de valores se encuentran recogidos en la Tabla 2.3.



## Capítulo 3

# Características reales en la selección de carteras de valores

Hasta ahora hemos considerado el mercado financiero como un mero sistema que nos permite comprar y vender instrumentos financieros y que no juega ningún papel en el problema de cartera de valores. La realidad, sin embargo, es que el uso de dicho sistema conlleva unos costes adicionales a los de la propia inversión. Además, como en todo sistema, habrá una serie de limitaciones en las operaciones o transacciones que podemos realizar en él.

En capítulos anteriores considerábamos que los deseos de un inversor se limitaban a superar un cierto nivel de beneficio o no sobrepasar un nivel de riesgo dado. Sin embargo, el inversor puede estar interesado en que su inversión cuente con unas características concretas, distintas de las citadas, como por ejemplo limitar el número de activos en los que quiere invertir.

A lo largo de este capítulo analizaremos en detalle estas restricciones y características, y estudiaremos la forma de añadirlas a un modelo de optimización de cartera de valores.

En primer lugar, introducimos una nueva forma de caracterizar una cartera. Dado  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  el conjunto de activos disponibles, en lugar de utilizar los pesos de los activos usaremos la cantidad de capital invertido en cada uno de los activos. Denotaremos dichas cantidades por  $X_j$  con  $j = 1, \dots, n$ , y nos referiremos a cada  $X_j$  por el nombre de *cantidad*.

Por otro lado, hasta ahora todo el capital con el que contaba el inversor estaba destinado a realizar la inversión, sin embargo, con la inclusión de nuevas características, que llevan asociados unos costes, nos vemos obligados a realizar distinciones. Denominaremos *capital disponible* al capital inicial con el que cuenta el inversor, y *capital de inversión* al que es utilizado exclusivamente en la compra y venta de activos. Con-

tinuando con la notación de los primeros capítulos, denotaremos por  $C$  al capital de inversión y por  $\bar{C}$  al capital disponible. En muchas ocasiones ambos capitales coinciden, pudiendo considerar, en ese caso, el capital de inversión como constante. En tales circunstancias, un modelo caracterizado mediante las cantidades  $X_j, j = 1, \dots, n$  también puede caracterizarse mediante los pesos  $x_j, j = 1, \dots, n$ , ya que,

$$x_j = \frac{X_j}{C} \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

de donde,

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1 \iff \sum_{j=1}^n X_j = C. \quad (3.2)$$

Así, el uso de pesos o cantidades pasa a ser irrelevante. Sin embargo, habrá casos en los que el uso de las cantidades sí será necesario.

### 3.1. Restricciones en la inversión y selección de activos

Con el objetivo de satisfacer las preferencias de un inversor restricciones adicionales pueden ser consideradas en los modelos lineales de optimización de cartera de valores. Se presentan a continuación algunas de las más comunes:

**1. Restricciones de tipo umbral:** Este tipo de restricciones consisten en imponer límites inferiores y superiores a los valores que pueden tomar los pesos o cantidades. Su principal utilidad es evitar obtener carteras compuestas por un gran número de activos con inversiones muy pequeñas en cada uno de ellos.

**Definición 3.1.1.** Sean  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  y  $Q$ , los conjuntos de activos disponibles y carteras de valores posibles respectivamente. Sea  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in Q$  una cartera de valores, diremos que una **restricción de tipo umbral** si es de la forma

$$l_j \leq x_j \leq u_j, \quad (3.3a)$$

o bien,

$$l_j z_j \leq x_j \leq u_j z_j, \quad (3.3b)$$

donde  $u_j \geq l_j \geq 0$  y  $z_j$  es una variable de decisión binaria que vale 1 si el activo  $j$  está incluido en la cartera, es decir, si  $x_j > 0$ , y 0 en otro caso.

La definición es análoga para el caso en el que la cartera venga expresada en cantidades, simplemente cambiaríamos las variables  $x_j$  por  $X_j, j = 1, \dots, n$ .

**2. Restricciones de clase:** En ocasiones, es relevante tener la capacidad de establecer restricciones de tipo umbral para conjuntos de activos, en lugar de para un

activo concreto. Una *clase* de activos es un grupo de activos que presentan características similares como pueden ser el riesgo y el retorno. Activos pertenecientes a diferentes clases ofrecerán retornos que están débilmente correlacionados, mientras que los que pertenecen a la misma clase tienen retornos altamente correlacionados. Usualmente, los activos del mismo sector pertenecen a la misma clase; por lo tanto, la diversificación en diferentes sectores reducirá el riesgo total de nuestra cartera.

**Definición 3.1.2.** Sean  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  y  $Q$ , los conjuntos de activos disponibles y carteras de valores posibles respectivamente. Sean  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in Q$  una cartera de valores y  $G_s$  el conjunto de activos del mismo sector  $s$ , diremos que una **restricción de clase** si es de la forma

$$l_j \leq \sum_{j \in G_s} x_j \leq u_j, \quad (3.4)$$

donde  $u_j \geq l_j \geq 0$ .

La definición es análoga para el caso en el que la cartera venga expresada en cantidades, simplemente cambiaríamos las variables  $x_j$  por  $X_j, j = 1, \dots, n$ .

**3. Restricciones de diversificación:** Un inversor puede estar interesado en imponer restricciones adicionales para forzar que la cartera obtenida tenga un nivel mínimo de diversificación. La forma más sencilla de conseguir este objetivo es utilizar restricciones de tipo umbral (3.3a) imponiendo un límite máximo para los posibles valores de los pesos. Sin embargo, este procedimiento nos conducirá normalmente a una cartera con pocos activos cuyos pesos son idénticos e iguales a ese límite superior establecido.

Una forma alternativa es acotar superiormente el valor de los  $k$  mayores pesos por un porcentaje  $\gamma_k$ , siguiendo un razonamiento similar al utilizado en la medida valor en riesgo condicional (2.23). Esta idea fue propuesta por Mansini en [22].

**Definición 3.1.3.** Sean  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  y  $Q$ , los conjuntos de activos disponibles y carteras de valores posibles respectivamente. Sean  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in Q$  una cartera de valores, diremos que una **restricción de diversificación** si es de la forma

$$ks_k + \sum_{j=1}^n d_{kj}^s \leq \gamma_k \quad \text{con} \quad d_{kj}^s \geq x_j - s_k, \quad d_{kj}^s \geq 0 \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.5)$$

donde  $k \in N, \gamma_k \in [0, 1]$  y  $s_k$  es una variable no acotada que en el óptimo toma el valor del  $k$ -ésimo mayor peso.

**Ejemplo 3.1.1.** Sea  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  el conjuntos de activos disponibles, queremos imponer que en la cartera  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in Q$  seleccionada por nuestro modelo, ninguno de los pesos de los activos sea superior a 0.15. Además, ningún conjunto de 5 pesos pueden sumar un peso total superior a 0.50 y ninguno de 8 uno superior a 0.70.

Las restricciones requeridas son entonces:

$$\begin{aligned}
 x_j &\leq 0.15 & j &= 1, \dots, n \\
 5s_5 + \sum_{j=1}^n d_{5j}^s &\leq 0.50, \quad d_{5j}^s \geq x_j - s_5, \quad d_{5j}^s \geq 0 & j &= 1, \dots, n \\
 8s_8 + \sum_{j=1}^n d_{8j}^s &\leq 0.70, \quad d_{8j}^s \geq x_j - s_8, \quad d_{8j}^s \geq 0 & j &= 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

**4. Restricciones de cardinalidad:** En general, los inversores prefieren carteras que cuenten con un número limitado de activos debido a los gastos de gestión y a los costes asociados a la compra y venta de un activo.

**Definición 3.1.4.** Sean  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  y  $Q$ , los conjuntos de activos disponibles y carteras de valores posibles respectivamente. Sea  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in Q$  una cartera de valores, diremos que una **restricción es de cardinalidad** si es de la forma

$$K_{inf} \leq \sum_{j=1}^n z_j \leq K_{sup}, \quad (3.6)$$

donde  $K_{inf} \in N, K_{sup} \in N$  con  $K_{sup} \geq K_{inf}$  y  $z_j, j = 1, \dots, n$ , son las variables de decisión que vienen dadas por

$$z_j = \begin{cases} 1, & \text{si } x_j > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Un análisis del modelo de Markowitz (1.6) con restricciones de cardinalidad puede verse en [21]. Un estudio de los cambios que sufre la frontera eficiente al añadir restricciones de tipo umbral y cardinalidad puede encontrarse en [6].

**5. Restricciones lógicas:** Un inversor puede estar interesado en establecer restricciones en la selección de ciertos activos en base a decisiones tomadas sobre otros activos. Estas restricciones imponen relaciones entre activos que fuerzan su selección o exclusión de acuerdo con preferencias especificadas. Se denominan restricciones de dependencia de decisiones o restricciones lógicas. Para su implementación se requiere el uso de las variables de decisión  $z_j, j = 1, \dots, n$ , que vienen dadas por

$$z_j = \begin{cases} 1, & \text{si } x_j > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo general, estas restricciones toman una de las siguientes formas:

**Definición 3.1.5.** Una **restricción lógica** es del tipo **conjunta** si es de la forma

$$z_i + z_j \geq 2z_l. \quad (3.7)$$

Esta restricción obliga a que los activos  $i$  y  $j$  sean seleccionados si el activo  $l$  es seleccionado.

**Definición 3.1.6.** Una **restricción lógica** es del tipo **mutuamente excluyente** si es de la forma

$$z_i + z_j \leq 1. \quad (3.8)$$

Esta restricción no permite que los activos  $i$  y  $j$  sean seleccionados al mismo tiempo en una cartera de valores.

**Definición 3.1.7.** Una **restricción lógica** es del tipo **contingente** si es de la forma

$$z_i \leq z_j. \quad (3.9)$$

Esta restricción obliga a que el activo  $j$  sea seleccionado solo si el activo  $i$  es seleccionado.

Estas restricciones pueden ser combinadas dando lugar a relaciones más complejas.

## 3.2. Costes y lotes de transacción

Los inversores y entidades financieras suelen invertir su dinero en un número limitado de activos, debido a los gastos de gestión y a los costes asociados a la compra y venta de un activo. En los mercados financieros, estos costes se denominan *costes de transacción*. Incluyen comisiones y otros costes cobrados por los brókers e instituciones financieras, que actúan como intermediarios entre el inversor y el vendedor del activo. Son un factor clave para los inversores, ya que afectan directamente a sus ganancias netas, reduciéndolas y disminuyendo su capital disponible para futuras inversiones.

Los costes de transacción pueden variar en estructura y complejidad. Para expresar estos costes de forma lineal y poder incluirlos en nuestros modelos, se requiere el uso de variables adicionales y restricciones específicas.

Denotaremos por  $K(X_1, \dots, X_n)$  la función que asigna a una cartera  $\mathbf{x} = (X_1, \dots, X_n)$  su coste de transacción total, es decir, el coste asociado a comprar una cantidad  $X_1$  del activo 1,  $X_2$  del activo 2, etc. Denotaremos por  $K_j(X_j)$  al coste transacción por comprar una cantidad  $X_j$  del activo  $j$ . Nos restringiremos al caso en el que los costes de transacción para cada uno de los activos son independientes entre sí, en ese caso la función de costes de la cartera es separable y tenemos que

$$K(X_1, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n K_j(X_j). \quad (3.10)$$

Los costes de transacción son fijados por los brókers y entidades financieras que hacen de intermediarios en las operaciones en el mercado financiero, por ello, no existe una estructura única para dichos costes, ya que cada entidad o bróker usará aquella que le parezca más oportuna. Describimos a continuación algunas de las más comunes:

**Definición 3.2.1.** Sea  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  el conjunto de activos disponibles, diremos que un activo  $j \in N$  tiene asociado un **coste de transacción fijo puro (PFC)** si es de la forma

$$K_j(X_j) = \begin{cases} f_j, & \text{si } X_j > 0, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (3.11)$$

donde  $f_j \in \mathbb{R}^+$  es el coste transacción pagado si el activo  $j$  está incluido en la cartera.

Esta estructura de costes es una de las más utilizadas por las entidades financieras de todo el mundo. En ella, se cobra una cantidad fija al inversor independientemente de cuan grande sea el capital que está invirtiendo. Para incluir este tipo de costes en un modelo lineal, es necesario utilizar variables binarias de decisión. Los costes pueden expresarse en forma lineal como

$$K_j(X_j) = f_j z_j,$$

donde  $z_j$  es la variable binaria de decisión tal que

$$z_j = \begin{cases} 1, & \text{si } X_j > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De forma que la restricción lineal que tendrán que ser añadida al modelo es

$$L_j z_j \leq X_j \leq U_j z_j,$$

donde  $L_j$  y  $U_j$  son las cotas inferior y superior respectivamente de la cantidad invertida en el activo  $j$ .

Si no queremos fijar límites al capital invertido en el activo, tomaremos la cota superior como el total del capital de inversión y la inferior como un número real positivo muy pequeño, pero distinto de 0. Esto es necesario para una correcta modelización de la variable  $z_j$ , pues en caso contrario, sería posible tomar  $X_j = 0$  y  $z_j = 1$  y no se incumpliría ninguna restricción.

Si en función de la cantidad invertida, consideremos varios valores crecientes  $f_{ji}$  de costes de transacción pagados, la función de costes será una función escalonada. Un análisis del problema de optimización de carteras de valores considerando esta estructura de costes puede encontrarse en [19].

**Definición 3.2.2.** Sea  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  el conjunto de activos disponibles, diremos que un activo  $j \in N$  tiene asociado un **coste de transacción fijo proporcional (PPC)** si es de la forma

$$K_j(X_j) = c_j X_j, \quad (3.12)$$

con  $c_j \in \mathbb{R}^+$ , que se denomina coste de transacción unitario.



En esta estructura los costes de transacción, al contrario de lo que ocurre con la estructura PFC, son proporcionales a la cantidad invertida en el activo, por lo que una mayor inversión conllevará unos costes de transacción mayores. La inclusión de este tipo de costes en un modelo lineal se realiza de manera análoga al caso anterior. Varios modelos de programación lineal entera mixta con estas estructuras de costes fijos pueden encontrarse en [16].

Estas dos primeras estructuras pueden ser combinadas dando lugar a un nuevo tipo de coste de transacción. Dicho tipo de costes se caracterizará por tomar un valor fijo en inversiones inferiores a una cantidad determinada. A partir de dicha cantidad, los costes pasarán a ser proporcionales a la inversión realizada.

**Definición 3.2.3.** Sea  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  el conjunto de activos disponibles, diremos que un activo  $j \in N$  tiene asociado un **coste de transacción proporcional con base mínima (PCMC)** si es de la forma:

$$K_j(X_j) = \begin{cases} 0, & \text{si } X_j = 0, \\ f_j, & \text{si } 0 < X_j \leq M, \\ c_j X_j, & \text{si } X_j > M. \end{cases} \quad (3.13)$$

con  $f_j, c_j, M \in \mathbb{R}^+$ .

**Proposición 3.2.1.** Sea  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  el conjunto de activos disponibles, sea  $j \in N$  un activo que lleva asociado un coste de transacción de tipo PCMC, entonces podemos modelar los costes de forma lineal mediante las siguientes restricciones:

$$X_j = X_{j1} + X_{j2}, \quad (3.14a)$$

$$L_j z_{j1} \leq X_{j1}, \quad (3.14b)$$

$$M z_{j2} \leq X_{j1} \leq M z_{j1}, \quad (3.14c)$$

$$0 \leq X_{j2} \leq (\bar{C} - M) z_{j2}, \quad (3.14d)$$

$$z_{ji} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \quad (3.14e)$$

$$X_{ji} \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.14f)$$

y los costes vendrán expresados por:

$$K_j(X_j) = f_j z_{j1} + c_j X_{j2}, \quad (3.14g)$$

donde  $\bar{C}$  es el capital disponible y  $M, L_j, f_j, c_j$  constantes reales con  $\bar{C} > M > L_j > 0$  y  $M = \frac{f_j}{c_j}$ .

*Demostración.* Las variables binarias se corresponden con variables de decisión que vienen dadas por

$$z_{j1} = \begin{cases} 1, & \text{si } X_j > 0, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$z_{j2} = \begin{cases} 1, & \text{si } X_j \geq M, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si en el óptimo  $z_{j1} = z_{j2} = 0$  las restricciones (3.14c) y (3.14d) obligan a que  $X_{j1} = X_{j2} = 0$  y consecuentemente  $X_j = 0$ . Entonces por (3.13)  $K_j(X_j) = 0$ , que coincide con el valor obtenido con la expresión (3.14g). Si por el contrario, en el óptimo tenemos  $z_{j1} = z_{j2} = 1$ , entonces la restricción (3.14c) obliga a que  $X_{j1} = M$  y por (3.14d)  $X_{j2} \geq 0$ . Así,  $X_j = X_{j1} + X_{j2} \geq M$  y el coste de transacción será  $K_j(X_j) = c_j X_j = f_j + c_j X_{j2}$  que coincide con el valor obtenido con (3.14g). El caso  $z_{j1} = 0$  y  $z_{j2} = 1$  no es posible pues la restricción (3.14c) no lo permite. Por último, si  $z_{j1} = 1$  y  $z_{j2} = 0$  la restricción (3.14d) obliga a que  $X_{j2} = 0$  siendo entonces  $X_j = X_{j1} + X_{j2} = X_{j1}$ . Además, por (3.14b) y (3.14c)  $M \geq X_{j1} > 0$  por lo que  $K_j(X_j) = f_j$ , que de nuevo coincide con el valor obtenido con (3.14g). Por lo tanto, el conjunto de restricciones (3.13) permite modelar de forma lineal los costes de transacción de tipo PCMC.  $\square$

En la Figura 3.1 se exponen las distintas estructuras de costes de transacción presentadas.

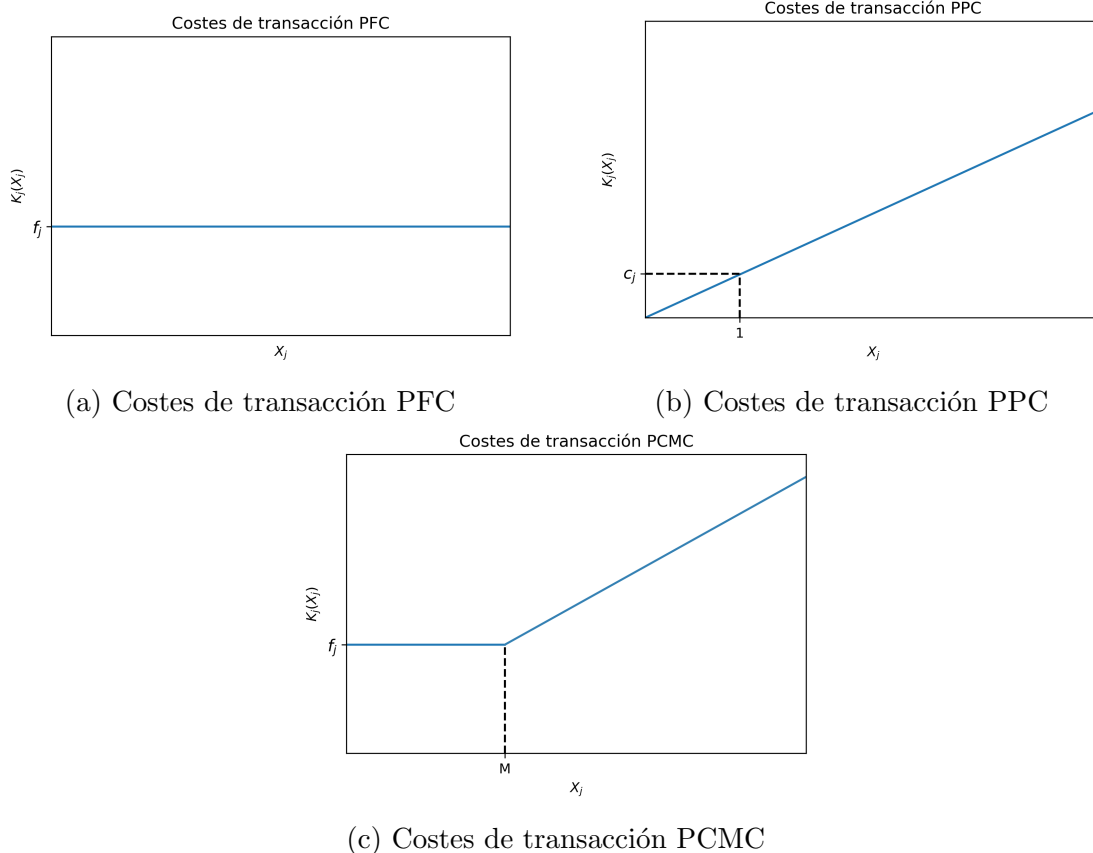


Figura 3.1: Diferentes estructuras de costes de transacción

Otro tipo de estructura de costes de transacción es la que modela dichos costes

mediante funciones convexas o cóncavas lineales a trozos. Los costes de tipo convexo se caracterizan por que el cociente  $\frac{K_j(X_j)}{X_j}$  es una función creciente, de forma que penaliza las grandes inversiones en un activo. Los de tipo cóncavo logran el efecto contrario, pues el cociente  $\frac{K_j(X_j)}{X_j}$  es una función decreciente.

Ahora que hemos descrito como expresar de forma lineal los costes de transacción, tenemos que estudiar como incluirlos en un modelo de optimización de cartera de valores. Recordamos, en primer lugar, que independiente de la medida de riesgo o seguridad utilizada su modelo asociado tiene una restricción de la forma

$$\mu = \sum_{j=1}^n \mu_j x_j \geq \mu_0. \quad (3.15)$$

Expresando el problema en cantidades en lugar de pesos pasa a ser

$$\sum_{j=1}^n \mu_j X_j \geq \mu_0 \bar{C}, \quad (3.16)$$

con

$$\sum_{j=1}^n X_j = \bar{C} \quad (3.17)$$

Existen diferentes formas de incluir los costes de transacción en un modelo de optimización de cartera de valores. A continuación, describimos algunas de las formas más comunes:

**1. Costes tratados por separado:** En este caso, todo el capital disponible será capital de inversión, es decir,  $\bar{C} = C$  y los costes de transacción serán sufragados con un capital alternativo con el que cuenta el inversor. La única restricción que impondremos es que dichos costes no superen una cota máxima dada,

$$\sum_{j=1}^n K_j(X_j) \leq K_{max}. \quad (3.18)$$

Tomar un valor muy grande para  $K_{max}$  es, a efectos prácticos, equivalente a no añadir ninguna restricción a nuestro modelo. Así, estaríamos resolviendo el problema de optimización de cartera de valores sin tener en cuenta los costes de transacción, al igual que en los capítulos anteriores. La principal ventaja de este método es que nos permite, con simplemente variar el valor de  $K_{max}$ , realizar un análisis del retorno esperado y riesgo obtenidos, en función de los costes de transacción máximos que puede asumir un inversor.

**2. Costes sustraídos del retorno:** En este caso, los costes de transacción son sufragados con las ganancias obtenidas, por tanto la restricción (3.16) deberá incluir los costes, reduciendo el retorno esperado de la inversión,

$$\sum_{j=1}^n \mu_j X_j - \sum_{j=1}^n K_j(X_j) \geq \mu_0 \bar{C}. \quad (3.19)$$

Aquí todo el capital disponible es capital de inversión  $\bar{C} = C$ , pues no es necesario reservar una parte del capital disponible para pagar los costes de transacción, ya que estos son descontados del retorno esperado obtenido de la inversión. Por tanto, estamos asumiendo implícitamente que los costes de transacción son abonados al final del periodo de inversión.

La cota dada por  $\mu_0$  establece ahora el retorno neto esperado mínimo, es decir, el retorno esperado bruto de la inversión, menos los gastos debidos a los costes de transacción. En el caso que estemos utilizando el enfoque de discretización de retornos, también habrá que sustraer los costes de transacción de los retornos de cada uno de los escenarios

$$\bar{y}_t = \sum_{j=1}^n r_{jt} X_j - \sum_{j=1}^n K_j(X_j), \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.20)$$

**3. Costes sustraídos del capital:** En este caso, el capital de inversión es el capital restante al descontar los costes de transacción al capital disponible. El inversor destina una parte de su capital disponible a sufragar los costes de las transacciones y el resto a la compra y venta de activos. Consecuentemente el capital de inversión no será constante, pues dependerá de los costes asociados a la inversión realizada. Tenemos por tanto que:

$$C = \bar{C} - \sum_{j=1}^n K_j(X_j), \quad (3.21)$$

con

$$\sum_{j=1}^n X_j = C. \quad (3.22)$$

Dado que estamos descontando los costes de transacción del capital disponible, estamos asumiendo implícitamente que los costes de transacción son abonados en el momento en el que se realiza la compra de activos, es decir, en el tiempo de inversión. Ahora el retorno esperado será

$$\bar{\mu}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \mu_j X_j - \sum_{j=1}^n K_j(X_j), \quad (3.23)$$

pues al ser el capital inicial  $\bar{C}$ , los costes se contabilizan como pérdidas desde el punto de vista del retorno. Así, la restricción (3.16) pasa a ser

$$\sum_{j=1}^n \mu_j X_j - \sum_{j=1}^n K_j(X_j) \geq \mu_0 \bar{C}. \quad (3.24)$$

En el enfoque de discretización de retornos el razonamiento es análogo,

$$\bar{y}_t = \sum_{j=1}^n r_{jt} X_j - \sum_{j=1}^n K_j(X_j), \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.25)$$

Como ya comentamos, realizar operaciones en el sistema financiero conlleva una serie de limitaciones. Una de ellas es que a la hora de realizar una operación, existe un cantidad mínima para la transacción pueda ser llevada a cabo. Dicha cantidad recibe el nombre de *lote de transacción* y es impuesta por el mercado y específica de cada activo. En el mercado, los activos son cuantificados en unidades, de forma que un lote de transacción es el número mínimo de unidades de un activo que pueden ser vendidas o compradas. Consecuentemente, el capital que puede ser invertido en un activo es siempre un múltiplo del lote de transacción de dicho activo, o equivalentemente, que todas las transacciones son realizadas por lotes. La utilización de lotes de transacción permite a los mercados financieros estandarizar las cotizaciones de los diferentes activos, logrando que un inversor pueda saber, con facilidad, el precio por unidad de cada activo. De esta forma, comparar y valorar activos diferentes es más sencillo.

**Definición 3.2.4.** Sea  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  el conjunto de activos disponibles e  $l = \{l^1, l^2, \dots, l^n\}$  sus respectivos lotes de transacción, entonces el **valor monetario por lote** de un activo  $j \in N$  es

$$V_j = l^j q_j, \quad (3.26)$$

donde  $q_j, j = 1, \dots, n$ , es la cotización del activo  $j$  en el tiempo de inversión. Sea  $\chi_j \in \mathbb{Z}^+, j = 1, \dots, n$ , el número de lotes de transacción del activo  $j$  seleccionados en una cartera de valores  $\mathbf{x} \in Q$ , entonces el capital de inversión vendrá dado por

$$C = \sum_{j=1}^n \chi_j V_j. \quad (3.27)$$

**Observación 3.2.1.** *Al ser las variables  $\chi_j, j = 1, \dots, n$ , enteras, la ecuación (3.27) puede no tener solución para un  $C \in \mathbb{R}^+$  dado. Esto obliga a considerar  $C$  como una variable, para evitar que el conjunto de soluciones factibles de nuestro problema de cartera de valores pueda ser vacío. Lo más lógico es permitir que  $C$  pueda tomar valores en un intervalo determinado por las cantidades mínimas y máximas que un inversor está dispuesto a invertir. Esto es*

$$\bar{C}_L \leq C \leq \bar{C}_U, \quad (3.28)$$

con  $\bar{C}_L, \bar{C}_U \in \mathbb{R}^+$ .

**Observación 3.2.2.** *Para problemas de optimización de carteras de valores basados en medidas de seguridad, la cota inferior  $\bar{C}_L$  puede tomarse como 0. Esta cota solo sirve para garantizar que, en los problemas basados en minimización de medidas de riesgo, no se tome  $C = 0$ , ya que esto consigue que el riesgo de la inversión sea cero.*

Para introducir de forma lineal, en un modelo de optimización de cartera de valores, las restricciones relativas a la consideración de los lotes de transacción, es conveniente distinguir los casos en los que la cartera es expresada mediante cantidades o mediante pesos.

**1. Problema expresado en cantidades:** En los problemas de optimización de carteras de valores, expresados mediante las variables  $X_j, j = 1, \dots, n$ , los lotes de transacción pueden ser modelados como

$$X_j = V_j \chi_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.29a)$$

$$\sum_{j=1}^n X_j = C, \quad (3.29b)$$

$$C \geq \bar{C}_L, \quad (3.29c)$$

$$C \leq \bar{C}_U, \quad (3.29d)$$

$$C \geq 0, \quad (3.29e)$$

$$\chi_j \in \mathbb{Z}^+, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.29f)$$

con  $\bar{C} \geq \bar{C}_U \geq \bar{C}_L \geq 0$ .

**2. Problema expresado en pesos:** En los problemas de optimización de carteras de valores, expresados mediante las variables  $x_j, j = 1, \dots, n$ , los lotes de transacción pueden ser modelados como

$$Cx_j = V_j \chi_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.30a)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1, \quad (3.30b)$$

$$C \geq \bar{C}_L, \quad (3.30c)$$

$$C \leq \bar{C}_U, \quad (3.30d)$$

$$C \geq 0, \quad (3.30e)$$

$$\chi_j \in \mathbb{Z}^+, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.30f)$$

con  $\bar{C} \geq \bar{C}_U \geq \bar{C}_L \geq 0$ .

Dado que la restricción (3.30a) es de tipo cuadrático tenemos que hacer algunas modificaciones a esta formulación. Consideramos los pesos como la fracción de un capital constante, distinto del invertido y superior a él. Podemos tomar para este capital el valor dado por la cota superior de  $C$  en la restricción (3.30d). Dado que ahora los pesos son relativos a un capital superior al capital de inversión, la restricción (3.30b) pasará a ser

una desigualdad,

$$\bar{C}_U x_j = V_j \chi_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.31a)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq 1, \quad (3.31b)$$

$$C = \bar{C}_U \sum_{j=1}^n x_j, \quad (3.31c)$$

$$C \geq \bar{C}_L, \quad (3.31d)$$

$$C \leq \bar{C}_U, \quad (3.31e)$$

$$C \geq 0, \quad (3.31f)$$

$$\chi_j \in \mathbb{Z}^+, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.31g)$$

con  $\bar{C} \geq \bar{C}_U \geq \bar{C}_L \geq 0$ . Tendremos entonces que  $X_j = \bar{C}_U x_j, j = 1, \dots, n$  y  $1 - \sum_{j=1}^n x_j$  será la fracción del capital  $\bar{C}_U$ , que no ha sido invertida.

### 3.3. Valor en riesgo condicional con características reales

En esta sección añadiremos, varias de las restricciones y características descritas en los apartados anteriores, al modelo lineal basado en la medida de seguridad valor en riesgo condicional (2.24).

**Teorema 3.3.1.** Sean  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  el conjunto de activos disponibles, cuyos costes de transacción son de tipo PCMC, y  $V = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$  sus respectivos valores monetarios por lote. Sean  $K_{inf}, K_{sup} \in N$  el número mínimo y máximo de activos de los que puede estar compuesta la cartera  $\mathbf{x} \in Q$  y  $\beta \in (0, 1]$ . Entonces, el modelo lineal para el problema de optimización de cartera valores asociado a la medida valor en riesgo condicional es

$$\text{máx} \left( \eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t \right), \quad (3.32a)$$

$$s.a: d_t \geq \eta - y_t + \sum_{j=1}^n K_j(X_j), \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.32b)$$

$$y_t = \sum_{j=1}^n r_{jt} X_j, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.32c)$$

$$\mu = \sum_{j=1}^n \mu_j X_j, \quad (3.32d)$$

$$\mu - \sum_{j=1}^n K_j(X_j) \geq \mu_0 \bar{C}, \quad (3.32e)$$

$$C + \sum_{j=1}^n K_j(X_j) \leq \bar{C}, \quad (3.32f)$$

$$\sum_{j=1}^n X_j = C, \quad (3.32g)$$

$$K_j(X_j) = f_j z_{j1} + c_j X_{j2}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.32h)$$

$$X_j = V_j \chi_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.32i)$$

$$V_j \chi_j = X_{j1} + X_{j2}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.32j)$$

$$L_j z_{j1} \leq X_{j1}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.32k)$$

$$M z_{j2} \leq X_{j1} \leq M z_{j1}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.32l)$$

$$0 \leq X_{j2} \leq (\bar{C} - M) z_{j2}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.32m)$$

$$K_{inf} \leq \sum_{j=1}^n z_{j1} \leq K_{sup}, \quad (3.32n)$$

$$C \geq \bar{C}_L, \quad (3.32ñ)$$

$$C \leq \bar{C}_U, \quad (3.32o)$$

$$C \geq 0, \quad (3.32p)$$

$$d_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.32q)$$

$$X_{ji} \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.32r)$$

$$\chi_j \in \mathbb{Z}^+, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.32s)$$

$$z_{ji} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.32t)$$

donde  $\bar{C}$  es el capital disponible y  $M, L_j, f_j, c_j, \bar{C}_U, \bar{C}_L$  constantes reales tales que  $\bar{C} > M > L_j > 0$ ,  $M = \frac{f_j}{c_j}$  y  $\bar{C} \geq \bar{C}_U \geq \bar{C}_L \geq 0$ .

*Demostración.* El modelo lineal (2.24) se formula para el caso de cantidades en lugar de pesos como

$$\text{máx} \left( \eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t \right), \quad (3.33a)$$

$$\text{s.a: } d_t \geq \eta - y_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.33b)$$

$$y_t = \sum_{j=1}^n r_{jt} X_j, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.33c)$$

$$\mu = \sum_{j=1}^n \mu_j X_j, \quad (3.33d)$$

$$\mu \geq \mu_0 \bar{C}, \quad (3.33e)$$

$$\sum_{j=1}^n X_j = \bar{C} \quad (3.33f)$$

$$d_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.33g)$$



$$X_j \geq 0, \quad (3.33h)$$

donde  $\bar{C}$  es el capital disponible, que coincide con el capital de inversión  $C$ .  $y_t$  y  $\mu$  no se corresponden ahora con tasas de retorno sino que son cantidades. Añadimos ahora los costes de transacción de tipo PCMC. Estos costes pueden modelarse de forma lineal mediante las restricciones (3.14). Si incluimos los costes sustrayéndolos del capital debemos sustituir la restricción (3.33e) por (3.24) y en la restricción (3.33b) debemos sustituir la variable  $y_t$  por (3.25). Además, ahora  $\sum_{j=1}^n X_j = C$ , pues ya no coinciden el capital disponible y el de inversión, ya que difieren en los costes de transacción. Esto queda reflejado mediante la inclusión de la restricción (3.21). Realizando los cambios comentados la formulación del modelo lineal pasa a ser

$$\text{máx} \left( \eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t \right), \quad (3.34a)$$

$$\text{s.a: } d_t \geq \eta - y_t + \sum_{j=1}^n K_j(X_j), \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.34b)$$

$$y_t = \sum_{j=1}^n r_{jt} X_j, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.34c)$$

$$\mu = \sum_{j=1}^n \mu_j X_j, \quad (3.34d)$$

$$\mu - \sum_{j=1}^n K_j(X_j) \geq \mu_0 \bar{C}, \quad (3.34e)$$

$$C + \sum_{j=1}^n K_j(X_j) = \bar{C}, \quad (3.34f)$$

$$\sum_{j=1}^n X_j = C, \quad (3.34g)$$

$$K_j(X_j) = f_j z_{j1} + c_j X_{j2}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.34h)$$

$$X_j = X_{j1} + X_{j2}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.34i)$$

$$L_j z_{j1} \leq X_{j1}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.34j)$$

$$M z_{j2} \leq X_{j1} \leq M z_{j1}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.34k)$$

$$0 \leq X_{j2} \leq (\bar{C} - M) z_{j2}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.34l)$$

$$d_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.34m)$$

$$X_{ji} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, 2, \quad (3.34n)$$

$$z_{ji} \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, 2, \quad (3.34ñ)$$

donde  $M, L_j, f_j, c_j$  son constantes reales tales que  $\bar{C} > M > L_j > 0$ ,  $M = \frac{f_j}{c_j}$ .

Para incluir la restricción que limita el número de activos de los que puede estar

compuesta la cartera, basta con añadir la restricción de cardinalidad

$$K_{inf} \leq \sum_{j=1}^n z_{j1} \leq K_{sup},$$

pues las variables de decisión  $z_{j1}, j = 1, \dots, n$ , vienen dadas por

$$z_{j1} = \begin{cases} 1, & \text{si } X_j > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por último, procedemos a realizar las modificaciones necesarias al modelo para tener en cuenta los lotes de transacción. En primer lugar, introducimos las restricciones (3.29) que modelan linealmente los lotes de transacción. Por otro lado, la restricción (3.34f) será sustituida por la desigualdad

$$C + \sum_{j=1}^n K_j(X_j) \leq \bar{C},$$

pues ahora el capital invertido no podrá tomar cualquier valor, ya que está restringido a combinaciones enteras de los valores monetarios. Existirán así, valores del capital disponible para los que la igualdad no será posible y habrá una cantidad de capital que no será invertida en ningún activo ni utilizada para sufragar los costes de transacción. Dicha cantidad es

$$\bar{C} - C - \sum_{j=1}^n K_j(X_j),$$

Habrá que tener en cuenta esta cantidad en las restricciones que involucran tasas de retornos, ya que no incluir este capital, significaría contabilizarlo como pérdidas. El capital inicial antes de realizar la inversión es  $\bar{C}$ . Finalizada la inversión en el tiempo objetivo, el capital total será

$$\mu + C + (\bar{C} - C - \sum_{j=1}^n K_j(X_j)) = \mu + \bar{C} - \sum_{j=1}^n K_j(X_j),$$

por tanto, el retorno obtenido será

$$\mu - \sum_{j=1}^n K_j(X_j),$$

y la restricción para el retorno esperado es

$$\mu - \sum_{j=1}^n K_j(X_j) \geq \mu_0 \bar{C}.$$

Así, las restricciones (3.34b) y (3.34e) quedan inalteradas.

Concluimos entonces que el modelo lineal para el problema de optimización de cartera valores considerado viene dado por (3.32).  $\square$

Una recopilación de los trabajos que presentan modelos de optimización de cartera de valores con características reales puede encontrarse en [23].

### 3.4. Análisis de grupos para la selección de cartera de valores

El análisis de grupo o agrupamiento es una técnica utilizada en el campo de la estadística y el aprendizaje automático para agrupar datos similares en conjuntos o conglomerados. El objetivo principal del agrupamiento es identificar patrones o estructuras inherentes en los datos, sin la necesidad de conocimiento previo sobre las clases o categorías a las que pertenecen los datos [26].

Una prometedora línea de investigación relativamente reciente es explotar la información de agrupación de una red de activos para desarrollar nuevos paradigmas de optimización de carteras.

Estos enfoques construyen una cartera resolviendo el modelo clásico de Markowitz pero sustituyendo la matriz de correlación original por una matriz ultramétrica de agrupación basada en la correlación.

**Definición 3.4.1.** Sean  $N$  un conjunto de  $n$  objetos y  $\delta$  una medida de distancia. Sea  $D = (\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  la matriz de distancias entre los  $n$  objetos, diremos que la **matriz**  $D$  es **ultramétrica** si se verifica:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}, \quad \forall i, j \in N, \quad (3.35a)$$

$$\delta_{ii} = 0, \quad \forall i, j \in N, \quad (3.35b)$$

$$\delta_{ij} \leq \max\{\delta_{ik}, \delta_{kj}\}, \quad \forall i, j, k \in N. \quad (3.35c)$$

La matriz ultramétrica se construye a partir de la matriz de correlación original mediante algoritmos de agrupamiento. Algunos de los más comunes son, el algoritmo de enlace simple y enlace medio [11].

Después de su aplicación, normalmente se conserva un subconjunto de los distintos elementos que componen la matriz original. Así, el agrupamiento basado en correlación puede ser visto como un procedimiento de filtrado. Además, las carteras seleccionadas por los algoritmos de agrupación son bastante robustas con respecto al ruido de medición debido a la finitud del tamaño de la muestra. Esto significa que, incluso si hay fluctuaciones o variaciones en los datos de entrada o en las condiciones del mercado, los algoritmos de agrupación utilizados para seleccionar las carteras tienden a seguir eligiendo las mismas carteras o carteras muy similares. Esto sugiere que las carteras seleccionadas son menos sensibles a las fluctuaciones o al ruido de medición, y que su estructura o composición generalmente se mantiene estable a pesar de las condiciones cambiantes [36].

El agrupamiento está íntimamente relacionado con la teoría de grafos, pues los datos se pueden representar mediante un grafo, donde los nodos representan los objetos y las aristas representan las similitudes o relaciones entre ellos.

A principios de la década de 2000, algunos autores empezaron a abordar el problema de selección de activos mediante teoría de grafos. Los activos se identifican con los nodos y las aristas, identificadas por pares de activos  $i$  y  $j$ , incorporan la estructura de dependencia basada en las correlaciones de los precios de las acciones. Se genera así grafos completos que pueden ser representados. En la siguiente figura se muestra el grafo obtenido a partir de las principales componentes del IBEX-35.

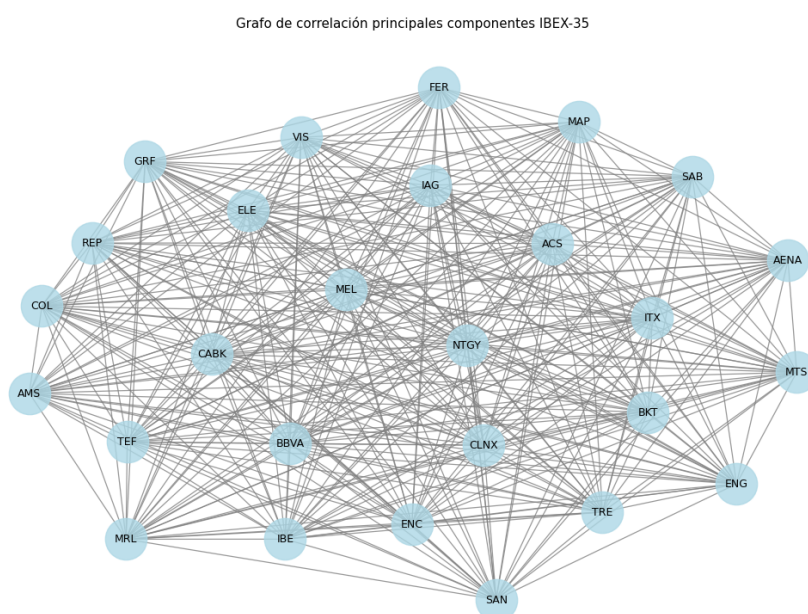


Figura 3.2: Grafo de correlación principales componentes IBEX-35

Mantegna en [25] fue uno de los primeros en construir este tipo de grafos para detectar la organización jerárquica dentro de un mercado de valores. Demostró que un árbol de expansión mínima del grafo, proporciona una ordenación de los valores, seleccionando las conexiones más relevantes entre los activos. Un árbol de expansión mínima de un grafo es un subconjunto de las conexiones entre los nodos, que conecta todos los nodos minimizando la suma de los pesos de las conexiones.

Además, el árbol de expansión mínima proporciona de manera directa, la organización jerárquica ultramétrica subdominante de los activos en un mercado que se agruparán en conglomerados que reflejan su relación de similaridad. En la Figura 3.3 se representa el árbol de expansión mínima del grafo de la Figura 3.2.

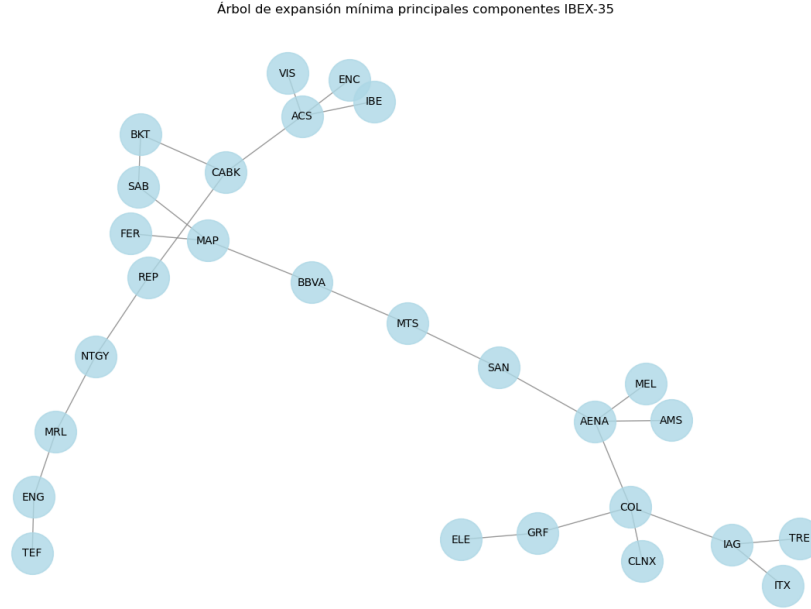


Figura 3.3: Árbol de expansión mínima principales componentes IBEX-35

### 3.4.1. Problemas de localización para el análisis de grupos

El problema de agrupación puede modelizarse como un problema de localización de instalaciones en una red. El problema de localización de instalaciones en redes o FLP de sus siglas en inglés, es un tipo de problema de localización que se centra en encontrar las ubicaciones óptimas para abrir instalaciones en una red o grafo. En este problema, se considera una red con nodos y aristas, donde los nodos representan posibles ubicaciones para las instalaciones y los aristas representan las conexiones o enlaces entre los nodos. El objetivo es determinar qué nodos deben seleccionarse como ubicaciones de las instalaciones, para minimizar o maximizar una métrica específica.

Modelizamos el problema de agrupación como un problema de red  $p$ -mediana, un problema clásico de localización de instalaciones en una red. Este problema fue introducido por Kariv y Hakimi en [15].

**Definición 3.4.2.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo finito, conexo y no dirigido sin bucles propios, con  $|V(G)| = n$  y  $|E(G)| = m$ . Cada arista  $e \in E(G)$ , identificada por un par de nodos  $(i, j)$ , con  $i, j \in V(G)$ , tiene asociada una longitud real y no-negativa  $d(e) = d_{ij}$ . Sea  $X_p = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  un conjunto de  $p$  puntos en  $G$ , donde un punto en  $G$  es un punto a lo largo de cualquier arista de  $G$  que puede, o no, ser un nodo de  $G$ . La distancia entre un nodo  $v \in V(G)$  y el conjunto  $X_p$  es

$$d_v(X_p) = \min_{1 \leq i \leq p} \{d(v, x_i)\}, \quad (3.36)$$

donde  $d(v, x_i) = d_{vx_i}$  es la longitud del camino más corto en  $G$  entre  $v$  y  $x_i$ . La suma

de todas las distancias de cada uno de los nodos de  $G$  al conjunto  $X_p$  es entonces

$$F(X_p) = \sum_{u \in V(G)} d_u(X_p). \quad (3.37)$$

El **problema de la  $p$ -mediana** en  $G$  consiste en encontrar un conjunto de puntos  $X_p^*$  de cardinalidad  $p$  tal que

$$F(X_p^*) = \min_{X_p \text{ en } G, |X_p|=p} \{F(X_p)\}. \quad (3.38)$$

El conjunto  $X_p^*$  se denomina  $p$ -mediana de  $G$ .

El siguiente teorema garantiza que siempre puede encontrarse una  $p$ -mediana en el conjunto de los nodos del grafo. Una demostración de este teorema puede ser encontrada en [13].

**Teorema 3.4.1.** *Sea  $G = (V, E)$  un grafo finito, conexo y no dirigido sin bucles propios, con  $|V(G)| = n$  y  $|E(G)| = m$ . Entonces existe un conjunto  $V_p^* \subset V(G)$ , tal que  $F(V_p^*) = F(X_p^*)$ . Existe por tanto, una  $p$ -mediana de  $G$  cuyos puntos son todos nodos.*

Como consecuencia, podemos redefinir el concepto de  $p$ -mediana de  $G$  imponiendo que el conjunto de puntos esté formado exclusivamente por nodos.

**Definición 3.4.3.** *Sea  $G = (V, E)$  un grafo finito, conexo y no dirigido sin bucles propios, con  $|V(G)| = n$  y  $|E(G)| = m$ . La  **$p$ -mediana** de  $G$  es el conjunto  $V_p^* \subset V(G)$  de cardinalidad  $p < n$  tal que*

$$F(V_p^*) = \min_{V_p \subset G, |V_p|=p} \{F(V_p)\}. \quad (3.39)$$

**Observación 3.4.1.** *Debemos asumir que  $p < n$ , ya que si  $p = n$  entonces  $V_p^* = V(G)$ ,  $F(V_p^*) = 0$ , y  $p > n$  no tiene sentido ya que número de nodos es  $n$ .*

El conjunto  $V_p^*$  será entonces, el conjunto de nodos que deben seleccionarse como ubicaciones de las instalaciones en el problema de localización de red  $p$ -mediana.

El problema de la  $p$ -mediana puede interpretarse en términos de análisis de grupos. En lugar de considerar las  $p$ -medianas como instalaciones, se reinterpretan como la mediana de un conglomerado. En otras palabras, en lugar de encontrar ubicaciones óptimas para las instalaciones, se busca encontrar conglomerados donde la mediana del conglomerado representa la ubicación central del mismo. Así, el problema de la  $p$ -mediana puede entenderse como una técnica de agrupamiento de datos.

De hecho, cuando se utiliza la distancia euclídea al cuadrado, el problema se convierte en una versión del problema de las  $k$ -medias en el análisis de grupos. En ese caso, la

solución óptima conduce a una partición del conjunto de nodos en conglomerados [14]. A los nodos pertenecientes a la  $p$ -mediana los denominaremos *representantes* y cada representante pertenecerá a un conglomerado diferente. Sea  $j \in V_p^*$  un representante de un cierto conglomerado, el resto de nodos de dicho conglomerado se dirán que son nodos *asociados* a  $j$  o *representados* por  $j$ .

### 3.4.2. Marco unificado

A la hora de utilizar el agrupamiento en el ámbito de la optimización de cartera de valores, generalmente se utilizan modelos de agrupación y selección de carteras que resuelven estos problemas en dos pasos distintos: primero la agrupación y luego la selección. Sin embargo, un punto de vista interesante es tratar el problema en una fase unificada, que permita utilizar la fase de agrupamiento como una herramienta eficaz en el proceso de determinación de los pesos óptimos de los activos en la cartera. Esta idea fue introducida por Puerto, Rodríguez-Madrena y Scozzari en [32].

Para lograr esto, modelizamos el mercado financiero como una red, es decir, como un grafo  $G = (V, E)$  finito, conexo y no dirigido sin bucles propios, donde  $V(G)$  es el conjunto de activos. Dotaremos a esta red de activos de una métrica basada en los coeficientes de correlación entre los rendimientos de los activos. Construiremos nuestra cartera seleccionando los activos de  $p$ -mediana de  $G$ , es decir, seleccionando el representante de cada uno de los  $p$  conglomerados obtenidos al particionar la red  $G$ , aprovechando así, el enfoque de agrupamiento para diversificar nuestra cartera. Podremos usar entonces, la función objetivo (3.37) del problema de la  $p$ -mediana, para filtrar la información relevante y medir el efecto de la fase de agrupamiento en los activos seleccionados con respecto a los no seleccionados.

**Definición 3.4.4.** Sean  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  y  $Q$ , el capital y los conjuntos de activos disponibles y carteras de valores posibles, respectivamente. Sea  $\varrho(\cdot)$  una medida de riesgo, diremos que un problema de optimización de cartera de valores es abordado desde el **enfoque de agrupamiento mediante la  $p$ -mediana** si es de la forma

$$\text{máx}\{[\mu(\mathbf{x}), -\varrho(\mathbf{x}), -F_p(\mathbf{x})] : \mathbf{x} \in Q, V_p \subset V(G), |V_p| = p\}, \quad (3.40)$$

donde  $F_p(\mathbf{x}) = F(V_p)$  y  $V_p$  es el conjunto de activos  $j \in N$  tales que  $x_j > 0$ .

El problema (3.40) puede ser expresado como un problema de programación matemática entero-mixto multi-objetivo cuya formulación es

$$\text{máx } \mu(\mathbf{x}), \quad (3.41a)$$

$$\text{mín } \varrho(\mathbf{x}), \quad (3.41b)$$

$$\text{mín } F_p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} z_{ij}, \quad (3.41c)$$

$$\text{s.a: } \sum_{j=1}^n z_{jj} = p, \quad (3.41d)$$

$$\sum_{j=1}^n z_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.41e)$$

$$z_{ij} \leq z_{jj}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (3.41f)$$

$$l_j z_{jj} \leq x_j \leq u_j z_{jj}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.41g)$$

$$\mathbf{x} \in Q, \quad (3.41h)$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (3.41i)$$

donde

$$z_{jj} = \begin{cases} 1, & \text{si } x_j > 0 \text{ y } j \text{ es un representante} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } x_i > 0 \text{ pero es representado por } j \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La restricción (3.41d) garantiza la selección de exactamente  $p$  representantes. La restricción (3.41e) garantiza que cada activo pertenece a exactamente a un conglomerado, mientras que la restricción (3.41f) asegura que un activo  $i$  está representado por  $j$  sólo si  $j$  está seleccionado como representante de un conglomerado. Las restricciones (3.41g) unen los problemas de localización y selección de cartera. De hecho, la restricción (3.41g) establece que si un activo  $j$  se selecciona como representante, entonces invertimos en el activo  $x_j$  una cantidad de capital que debe ser como mínimo igual a  $l_j \geq 0$  y como máximo  $u_j \geq 0$ . Por tanto, las restricciones (3.41d) y (3.41e) son una combinación de restricciones de cardinalidad y clase, la restricción (3.41f) es una restricción lógica y la restricción (3.41g) es de tipo umbral.

A la hora de lidiar con el problema (3.41) vamos a utilizar el enfoque de aproximación mediante cotas (1.3). El modelo puede ser reescrito entonces como

$$\text{mín } \varrho(\mathbf{x}), \quad (3.42a)$$

$$\text{s.a: } \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0, \quad (3.42b)$$

$$F_p(\mathbf{x}) \leq F_p^0, \quad (3.42c)$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \Gamma_Q, \quad (3.42d)$$



donde  $\Gamma_Q$  es la región factible determinada por las restricciones (3.41d)-(3.41i) y  $\mu_0$  y  $F_p^0$  son, respectivamente, la cota inferior para  $\mu(\mathbf{x})$  y la cota superior para  $F_p(\mathbf{x})$ .

Dado que este modelo puede utilizarse para cualquier medida de riesgo podemos considerarlo como un *problema general de localización y selección de cartera*.

Debemos especificar la métrica que utilizaremos para poder determinar las distancias entre los activos y así resolver el problema de agrupamiento. Una opción muy extendida consiste en cuantificar la similitud entre dos activos con la correlación de Pearson. Así, el grafo de los activos  $G$ , representa la estructura de correlación entre los diferentes activos donde las distancias asociados a cada arista se refieren a la correlación lineal entre los activos que definen sus extremos. Sea  $e \in E(G)$  representada por  $(i, j)$  con  $i, j \in V(G)$ , la distancia entre  $i$  y  $j$  es

$$d_{ij} = \sqrt{2(1 - \bar{\rho}_{ij})}, \quad (3.43)$$

donde  $\bar{\rho}_{ij}$  el coeficiente de correlación de Pearson entre los retornos de los activos (1.7).

Utilizamos ahora el enfoque de discretización de retornos y como función objetivo usaremos el valor en riesgo condicional (2.23). De esta forma, recordando el modelo lineal (2.24) el problema (3.42) puede formularse como

$$\text{máx} \left( \eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t^- \right), \quad (3.44a)$$

$$\text{s.a: } d_t^- \geq \eta - y_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.44b)$$

$$y_t = \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.44c)$$

$$\mu = \sum_{j=1}^n \mu_j x_j, \quad (3.44d)$$

$$\mu \geq \mu_0, \quad (3.44e)$$

$$F_p(\mathbf{x}) \leq F_p^0, \quad (3.44f)$$

$$d_t^- \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.44g)$$

$$\eta \in \mathbb{R}, \quad (3.44h)$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \Gamma_Q. \quad (3.44i)$$

La siguiente proposición fue enunciada y demostrada por García en [9].

**Proposición 3.4.2.** *En un problema de la  $p$ -mediana en una red, la variable  $z_{ij}$ ,  $i \neq j$ , toma en el óptimo el valor 1 para un representante  $j$  tal que  $d_{ij} = \min_{k: z_{kk}} \{d_{ik}\}$ .*

Como consecuencia, podemos reducir el número de variables binarias en nuestro modelo de  $O(n^2)$  a  $O(n)$ . Basta sustituir la restricción (3.41i) en  $\Gamma_Q$  por las siguientes

restricciones,

$$\begin{aligned} z_{jj} &\in \{0, 1\}, & j &= 1, \dots, n, \\ z_{ij} &\geq 0, & 1 &\leq i, j \leq n, i \neq j. \end{aligned}$$

Es claro, que la elección de la cota  $\mu_0$  depende exclusivamente de las preferencias del inversor, sin embargo, la elección de  $F_p^0$  y cuál puede ser su efecto en el problema de agrupamiento no es tan obvio. Por ello, describimos a continuación un procedimiento para calcular su valor. Consideramos el problema

$$\text{mín } F_p(\mathbf{x}), \quad (3.45a)$$

$$\text{s.a: } \mu \geq \mu_0, \quad (3.45b)$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \Gamma_Q. \quad (3.45c)$$

Sea  $F_p^l$  su valor óptimo,  $F_p^l$  es el mínimo valor para  $F_p^0$  que hace el problema (3.44) factible.

Consideramos ahora el problema,

$$\text{máx } \left( \eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t^- \right), \quad (3.46a)$$

$$\text{s.a: } d_t^- \geq \eta - y_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.46b)$$

$$y_t = \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.46c)$$

$$\mu = \sum_{j=1}^n \mu_j x_j, \quad (3.46d)$$

$$\mu \geq \mu_0, \quad (3.46e)$$

$$\sum_{j=1}^n z_j = p, \quad (3.46f)$$

$$l_j z_j \leq x_j \leq u_j z_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.46g)$$

$$d_t^- \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.46h)$$

$$\eta \in \mathbb{R}, \quad (3.46i)$$

$$z_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.46j)$$

$$\mathbf{x} \in Q. \quad (3.46k)$$

Sea  $X_p$  el conjunto de los  $p$  activos seleccionados en el óptimo. Entonces  $F_p(X_p) = F_p^u$  es el mayor valor que podemos tomar para  $F_p^0$ , pues para  $F_p^0 > F_p^u$  la restricción (3.44f) es despreciable.

Dado  $\lambda \in [0, 1]$ , podemos tomar  $F_p^0$  como

$$F_p^0 = \lambda F_p^l + (1 - \lambda) F_p^u. \quad (3.47)$$

Variando el parámetro  $\lambda$  podremos estudiar y controlar el efecto del agrupamiento. Para  $\lambda = 0$  recuperamos el modelo (3.46) que no es más que el modelo (2.24) con una restricción de cardinalidad.

Hemos obtenido así, una formulación de programación matemática para el problema de localizar un conjunto de  $p$  instalaciones en una red, seleccionando al mismo tiempo un subconjunto de activos que minimizan una medida de riesgo dada.



## Capítulo 4

# Optimización del problema de cartera de valores con costes de transacción como variables de decisión

En el capítulo anterior considerábamos que los costes de transacción venían dados. Ahora, estudiaremos el caso en el que costes de transacción son variables de decisión fijadas por los brókers e instituciones financieras.

El objetivo de los intermediarios será maximizar su beneficio como parte del proceso de decisión que conduce a carteras óptimas para los inversores. Por lo tanto, tendremos dos niveles de decisores: el intermediario financiero y el inversor.

Consideramos un problema de optimización de carteras basado en un modelo de inversión de un solo periodo con una fase de fijación de costes de transacción. Suponemos una relación jerárquica entre las partes implicadas en el problema, es decir, uno de los decisores toma la iniciativa y el otro lo sigue.

En primer lugar, consideramos el problema en el que intermediario fija primero los costes unitarios de transacción, tratando de anticipar la respuesta racional del inversor. Una vez fijados los costes, el inversor elige su cartera óptima. Por otro lado, analizamos el caso en el que el inversor elige primero su cartera y, a continuación, el intermediario fija los costes de transacción. Además, consideramos un problema en el que el intermediario y el inversor cooperan para maximizar beneficios. En este caso, no hay una relación jerárquica entre los decisores.

Asumimos que ambos decisores disponen de toda la información financiera o económica. Para modelizar estos problemas utilizamos métodos de optimización binivel (ver [2], [18]).

A lo largo de los siguientes apartados estudiamos las distintas situaciones planteadas basándonos en el trabajo realizado por Leal, Ponce, y Puerto en [20].

## 4.1. Preliminares

Sean  $N = \{1, \dots, n\}$ , el conjunto de activos disponibles,  $B \subset N$  el conjunto de los activos disponibles en los que el intermediario puede establecer costes de transacción y  $R = N \setminus B$ .

Consideramos costes de transacción de tipo fijo proporcional (3.12), y suponemos que el intermediario puede establecer, para cada activo  $j \in B$ , un coste de transacción unitario  $c_j$  elegido entre un conjunto discreto de costes admisibles  $\mathbb{K}_j = \{c_{j1}, \dots, c_{js_j}\}$  con  $|\mathbb{K}_j| = s_j$ .

Como ya hemos comentado, el intermediario tiene como objetivo maximizar sus beneficios, es decir, maximizar los costes de transacción que serán pagados por el inversor. Dada una cartera de valores  $\mathbf{x} = (X_1, \dots, X_n)$ , sus costes de transacción asociados son

$$K(X_1, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n K_j(X_j) = \sum_{j \in B} c_j X_j = C \sum_{j \in B} c_j x_j. \quad (4.1)$$

Por lo tanto, el problema de maximización de beneficios para el intermediario puede ser modelado de la forma

$$\text{máx} \sum_{j \in B} c_j x_j \quad (4.2a)$$

$$\text{s. a: } c_j = \sum_{k=1}^{s_j} c_{jk} a_{jk}, \quad j \in B, \quad (4.2b)$$

$$\sum_{k=1}^{s_j} a_{jk} = 1, \quad j \in B, \quad (4.2c)$$

$$a_{jk} \in \{0, 1\}, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.2d)$$

donde las variables  $a_{jk}$ ,  $j \in B$ ,  $k = 1, \dots, s_j$ , son variables binarias de decisión que vienen dados por

$$a_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{si } c_j = c_{jk}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.3)$$

En general podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que los costes unitarios seleccionados por el intermediario  $c = (c_j)_{j \in B}$  puede restringirse a pertenecer a algún poliedro  $\mathbb{K}$ . Tomamos el caso general  $\mathbb{K} = \mathbb{R}_+^{|B|}$ . Para incluir esta restricción en el problema basta con añadir la siguiente restricción

$$c \in \mathbb{K} \quad (4.4)$$

El inversor, por su parte, intentará reducir el riesgo de su inversión, garantizando al mismo tiempo que el retorno esperado esté por encima de un determinado nivel mínimo. Consideramos el valor en riesgo condicional (2.23) como medida para cuantificar el riesgo y consideramos que los costes de transacción son sustraídos del retorno. Dado  $\beta \in (0, 1]$ , en el enfoque de discretización de retornos el problema del inversor puede ser modelado como

$$\text{máx } \eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t \quad (4.5a)$$

$$\text{s.a: } d_t \geq \eta - y_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.5b)$$

$$y_t = \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j - \sum_{i \in B} c_i x_i, \quad t = 1, \dots, T \quad (4.5c)$$

$$\sum_{t=1}^T p_t y_t \geq \mu_0, \quad (4.5d)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq 1, \quad (4.5e)$$

$$\eta \in \mathbb{R}, \quad (4.5f)$$

$$d_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.5g)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.5h)$$

## 4.2. El problema de cartera de valores binivel: intermediario-líder inversor-seguidor

Analizamos en este apartado el problema en el que intermediario fija primero los costes unitarios de transacción, tratando de anticipar la respuesta racional del inversor. Una vez fijados los costes, el inversor elige su cartera óptima.

Este problema puede ser modelado en el marco de la optimización binivel como

$$\text{máx } \sum_{j \in B} c_j x_j \quad (4.6a)$$

$$\text{s.a: } c_j = \sum_{k=1}^{s_j} c_{jk} a_{jk}, \quad j \in B, \quad (4.6b)$$

$$\sum_{k=1}^{s_j} a_{jk} = 1, \quad j \in B, \quad (4.6c)$$

$$a_{jk} \in \{0, 1\}, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.6d)$$

$$c \in \mathbb{K}. \quad (4.6e)$$

$$x \in \arg \max \eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t, \quad (4.6f)$$

$$\text{s.a: } d_t \geq \eta - y_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.6g)$$

$$y_t = \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j - \sum_{i \in B} c_i x_i, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.6h)$$

$$\sum_{t=1}^T p_t y_t \geq \mu_0, \quad (4.6i)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq 1, \quad (4.6j)$$

$$\eta \in \mathbb{R}, \quad (4.6k)$$

$$d_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.6l)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.6m)$$

Para resolver este problema vamos a plantear dos formulaciones distintas de programación lineal entera mixta de un solo nivel.

### 1ª formulación:

Como podemos observar, el problema del inversor en (4.6) es lineal en las variables  $x_j$  cuando  $c$  viene dado. Por ello, podemos calcular su dual exacto, que viene dado por

$$\text{mín } \nu + \mu_0 \omega \quad (4.7a)$$

$$\text{s.a: } \nu - \sum_{t=1}^T (r_{jt} - c_j) \delta_t \geq 0, \quad j \in B, \quad (4.7b)$$

$$\nu - \sum_{t=1}^T r_{jt} \delta_t \geq 0, \quad j \in R, \quad (4.7c)$$

$$- \sum_{t=1}^T \gamma_t = 1, \quad (4.7d)$$

$$\gamma_t \geq -\frac{p_t}{\beta}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.7e)$$

$$\gamma_t + \delta_t + p_t \omega = 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.7f)$$

$$\gamma_t \leq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.7g)$$

$$\omega \leq 0, \quad (4.7h)$$

$$\nu \geq 0. \quad (4.7i)$$

donde  $\delta_t, \omega, \gamma_t, \nu$  son las variables duales asociadas a las restricciones (4.6h), (4.6i), (4.6g) y (4.6j).

Ahora podemos hacer uso del Teorema de Dualidad Fuerte para reformular el problema (4.6). Para ello, añadiremos la ecuación que iguala los valores de las funciones



objetivo del problema primal del inversor (4.6f) y de su dual (4.7a). Junto a esta ecuación, incluimos las restricciones del problema dual (4.7). De esta forma, el problema (4.6) es equivalente a

$$\text{máx} \sum_{j \in B} c_j x_j \quad (4.8a)$$

$$\text{s.a: } c_j = \sum_{k=1}^{s_j} c_{jk} a_{jk}, \quad j \in B, \quad (4.8b)$$

$$\sum_{k=1}^{s_j} a_{jk} = 1, \quad j \in B, \quad (4.8c)$$

$$a_{jk} \in \{0, 1\}, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.8d)$$

$$c \in \mathbb{K}, \quad (4.8e)$$

$$\eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t = \nu + \mu_0 \omega, \quad (4.8f)$$

$$d_t \geq \eta - y_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.8g)$$

$$y_t = \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j - \sum_{i \in B} c_i x_i, \quad t = 1, \dots, T \quad (4.8h)$$

$$\sum_{t=1}^T p_t y_t \geq \mu_0, \quad (4.8i)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq 1, \quad (4.8j)$$

$$\eta \in \mathbb{R}, \quad (4.8k)$$

$$d_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.8l)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.8m)$$

$$\nu - \sum_{t=1}^T (r_{jt} - c_j) \delta_t \geq 0, \quad j \in B, \quad (4.8n)$$

$$\nu - \sum_{t=1}^T r_{jt} \delta_t \geq 0, \quad j \in R, \quad (4.8ñ)$$

$$- \sum_{t=1}^T \gamma_t = 1, \quad (4.8o)$$

$$\gamma_t \geq -\frac{p_t}{\beta}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.8p)$$

$$\gamma_t + \delta_t + p_t \omega = 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.8q)$$

$$\gamma_t \leq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.8r)$$

$$\omega \leq 0, \quad (4.8s)$$

$$\nu \geq 0. \quad (4.8t)$$

La ecuación (4.8f) es la correspondiente al Teorema de Dualidad Fuerte.

Podemos observar que en la formulación anterior tenemos varios términos no lineales,  $c_j x_j$  y  $c_j \delta_t$ . Para eliminar dichos términos añadimos variables y restricciones adicionales siguiente el método descrito por McCormick en [29].

Dado que  $c_j = \sum_{k=1}^{s_j} c_{jk} a_{jk}, \forall j \in B$ , vamos a sustituir los términos no lineales  $c_j x_j$  por  $\sum_{k=1}^{s_j} c_{jk} \hat{a}_{jk}, \forall j \in B$ , donde  $\hat{a}_{jk}, j \in B, k = 1, \dots, s_j$  son las nuevas variables que vienen dadas por

$$\hat{a}_{jk} \leq x_j, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.9a)$$

$$\hat{a}_{jk} \leq a_{jk}, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.9b)$$

$$\hat{a}_{jk} \geq x_j - (1 - a_{jk}), \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.9c)$$

$$\hat{a}_{jk} \geq 0, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j. \quad (4.9d)$$

A la hora de introducirlas en el modelo (4.8), podemos eliminar varias restricciones intercambiando las variables  $x_j$  por  $\sum_{k=1}^{s_j} \hat{a}_{jk}, \forall j \in B$ . Así, bastaría con incluir exclusivamente las siguientes restricciones

$$\hat{a}_{jk} \leq a_{jk}, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.10a)$$

$$\hat{a}_{jk} \geq 0, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j. \quad (4.10b)$$

De manera análoga, podemos linealizar los términos no lineales  $c_j \delta_t$  sustituyéndolos por  $\sum_{k=1}^{s_j} c_{jk} \hat{\delta}_{jkt}, \forall j \in B$  donde las variables  $\hat{\delta}_{jkt}, j \in B, k = 1, \dots, s_j, t = 1, \dots, T$ , son las nuevas variables que vienen dadas por

$$\hat{\delta}_{jkt} \leq \delta_t, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, t = 1, \dots, T, \quad (4.11a)$$

$$\hat{\delta}_{jkt} \leq M a_{jk}, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, t = 1, \dots, T, \quad (4.11b)$$

$$\hat{\delta}_{jkt} \geq \delta_t - (1 - a_{jk})M, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, t = 1, \dots, T, \quad (4.11c)$$

$$\hat{\delta}_{jkt} \geq 0, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, t = 1, \dots, T. \quad (4.11d)$$

$$(4.11e)$$

con  $M$  una constante que toma un valor suficientemente grande y positivo.

Por lo tanto, añadiendo las nuevas variables y restricciones, el problema (4.8) puede

ser reformulado de la siguiente forma

$$\text{máx} \sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{s_j} c_{jk} \hat{a}_{jk} \quad (4.12a)$$

$$\text{s.a:} \sum_{k=1}^{s_j} a_{jk} = 1, \quad j \in B, \quad (4.12b)$$

$$a_{jk} \in \{0, 1\}, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.12c)$$

$$c \in \mathbb{K}, \quad (4.12d)$$

$$\eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t = \nu + \mu_0 \omega, \quad (4.12e)$$

$$d_t \geq \eta - y_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.12f)$$

$$y_t = \sum_{j \in B} r_{jt} \left( \sum_{k=1}^{s_j} \hat{a}_{jk} \right) + \sum_{j \in R} r_{jt} x_j - \sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{s_j} c_{jk} \hat{a}_{jk}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.12g)$$

$$\sum_{t=1}^T p_t y_t \geq \mu_0, \quad (4.12h)$$

$$\sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{s_j} \hat{a}_{jk} + \sum_{j \in R} x_j \leq 1, \quad (4.12i)$$

$$d_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.12j)$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in R, \quad (4.12k)$$

$$\hat{a}_{jk} \leq a_{jk}, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.12l)$$

$$\hat{a}_{jk} \geq 0, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.12m)$$

$$\eta \in \mathbb{R}, \quad (4.12n)$$

$$\nu - \sum_{t=1}^T (r_{jt} \delta_t - \sum_{k=1}^{s_j} c_{jk} \hat{\delta}_{jkt}) \geq 0, \quad j \in B, \quad (4.12ñ)$$

$$\nu - \sum_{t=1}^T r_{jt} \delta_t \geq 0, \quad j \in R, \quad (4.12o)$$

$$-\sum_{t=1}^T \gamma_t = 1, \quad (4.12p)$$

$$\gamma_t \geq -\frac{p_t}{\beta}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.12q)$$

$$\gamma_t + \delta_t + p_t \omega = 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.12r)$$

$$\gamma_t \leq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.12s)$$

$$\omega \leq 0, \quad (4.12t)$$

$$\nu \geq 0, \quad (4.12u)$$

$$\hat{\delta}_{jkt} \leq \delta_t, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, t = 1, \dots, T, \quad (4.12v)$$

$$\hat{\delta}_{jkt} \leq Ma_{jk}, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, t = 1, \dots, T, \quad (4.12w)$$

$$\hat{\delta}_{jkt} \geq \delta_t - (1 - a_{jk})M, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, t = 1, \dots, T, \quad (4.12x)$$

$$\hat{\delta}_{jkt} \geq 0, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, t = 1, \dots, T. \quad (4.12y)$$

## 2ª formulación:

Esta formulación se basa en expresar el problema del inversor a partir de las variables  $\hat{a}_{jk}$ , antes del obtener su dual. Realizando el cambio  $c_j x_j = \sum_{k=1}^{s_j} c_{jk} \hat{a}_{jk}$  el problema (4.5) se expresa de la forma

$$\text{máx } \eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t \quad (4.13a)$$

$$\text{s.a: } d_t \geq \eta - y_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.13b)$$

$$y_t = \sum_{j \in B} r_{jt} \left( \sum_{k=1}^{s_j} \hat{a}_{jk} \right) + \sum_{j \in R} r_{jt} x_j - \sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{s_j} c_{jk} \hat{a}_{jk}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.13c)$$

$$\sum_{t=1}^T p_t y_t \geq \mu_0, \quad (4.13d)$$

$$\sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{s_j} \hat{a}_{jk} + \sum_{j \in R} x_j \leq 1, \quad (4.13e)$$

$$d_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.13f)$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in R, \quad (4.13g)$$

$$\hat{a}_{jk} \leq a_{jk}, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.13h)$$

$$\hat{a}_{jk} \geq 0, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.13i)$$

$$\eta \in \mathbb{R}. \quad (4.13j)$$

$$(4.13k)$$

Ahora podemos calcular su dual, obteniendo el siguiente problema

$$\text{mín } \nu + \mu_0 \omega + \sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{s_j} a_{jk} \sigma_{jk} \quad (4.14a)$$

$$\text{s.a: } \nu - \sum_{t=1}^T r_{jt} \delta_t + \sum_{t=1}^T c_{jk} \delta_t + \sigma_{jk} \geq 0, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.14b)$$

$$\nu - \sum_{t=1}^T r_{jt} \delta_t \geq 0, \quad j \in R, \quad (4.14c)$$

$$-\sum_{t=1}^T \gamma_t = 1, \quad (4.14d)$$

$$\gamma_t \geq -\frac{p_t}{\beta}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.14e)$$

$$\gamma_t + \delta_t + p_t \omega = 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.14f)$$

$$\gamma_t \leq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.14g)$$

$$\omega \leq 0, \quad (4.14h)$$

$$\nu \geq 0 \quad (4.14i)$$

$$\sigma_{jk} \geq 0, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j. \quad (4.14j)$$

Por el Teorema de Dualidad Fuerte obtenemos que

$$\eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t = \nu + \mu_0 \omega + \sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{s_j} a_{jk} \sigma_{jk}, \quad (4.15)$$

Siguiendo un proceso análogo al realizado en la 1ª formulación, eliminamos los términos no lineales  $a_{jk} \sigma_{jk}$  mediante el uso de las variables  $\hat{\sigma}_{jk}$ . Así, la 2ª formulación para el problema (4.6) es

$$\text{máx} \sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{s_j} c_{jk} \hat{a}_{jk} \quad (4.16a)$$

$$\text{s.a:} \sum_{k=1}^{s_j} a_{jk} = 1, \quad j \in B, \quad (4.16b)$$

$$a_{jk} \in \{0, 1\}, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.16c)$$

$$c \in \mathbb{K}, \quad (4.16d)$$

$$\eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t = \nu + \mu_0 \omega + \sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{s_j} \hat{\sigma}_{jk}, \quad (4.16e)$$

$$d_t \geq \eta - y_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.16f)$$

$$y_t = \sum_{j \in B} r_{jt} \left( \sum_{k=1}^{s_j} \hat{a}_{jk} \right) + \sum_{j \in R} r_{jt} x_j - \sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{s_j} c_{jk} \hat{a}_{jk}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.16g)$$

$$\sum_{t=1}^T p_t y_t \geq \mu_0, \quad (4.16h)$$

$$\sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{s_j} \hat{a}_{jk} + \sum_{j \in R} x_j \leq 1, \quad (4.16i)$$

$$d_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.16j)$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in R, \quad (4.16k)$$

$$\hat{a}_{jk} \leq a_{jk}, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.16l)$$

$$\hat{a}_{jk} \geq 0, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.16m)$$

$$\eta \in \mathbb{R}, \quad (4.16n)$$

$$\nu - \sum_{t=1}^T r_{jt} \delta_t + \sum_{t=1}^T c_{jk} \delta_t + \sigma_{jk} \geq 0, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.16ñ)$$

$$\nu - \sum_{t=1}^T r_{jt} \delta_t \geq 0, \quad j \in R, \quad (4.16o)$$

$$- \sum_{t=1}^T \gamma_t = 1, \quad (4.16p)$$

$$\gamma_t \geq -\frac{p_t}{\beta}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.16q)$$

$$\gamma_t + \delta_t + p_t \omega = 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.16r)$$

$$\gamma_t \leq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.16s)$$

$$\omega \leq 0, \quad (4.16t)$$

$$\nu \geq 0, \quad (4.16u)$$

$$\hat{\sigma}_{jk} \leq \sigma_{jk}, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.16v)$$

$$\hat{\sigma}_{jk} \leq M a_{jk}, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, t = 1, \dots, T, \quad (4.16w)$$

$$\hat{\sigma}_{jk} \geq \sigma_{jk} - (1 - a_{jk})M, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.16x)$$

$$\hat{\sigma}_{jk} \geq 0, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.16y)$$

$$\sigma_{jk} \geq 0, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j. \quad (4.16z)$$

Tanto la 1ª como la 2ª formulación requieren determinar un valor válido para el constante  $M$ . El valor de esta constante condicionará el rendimiento del modelo.

**Teorema 4.2.1.** *Dado  $c$ , el conjunto de los valores de los costes de transacción unitarios, denotamos por  $\mathbb{B}(c)$  al conjunto de todas las submatrices de rango máximo de la matriz que representa las restricciones del problema (4.7) en su forma estándar. Sea  $\mathbb{B}^S(c)$  el conjunto de todas las matrices resultantes al remplazar en cada matriz de  $\mathbb{B}(c)$  una columna por el vector de los términos independientes de cada una de las restricciones de (4.7). Sean*

$$\Delta(c) = \min\{|\det(A)| : A \in \mathbb{B}(c)\}, \quad (4.17a)$$

$$\Delta^S(c) = \min\{|\det(A)| : A \in \mathbb{B}^S(c)\}, \quad (4.17b)$$

entonces,

$$UB_\delta = \max_c \frac{\Delta^S(c)}{\Delta(c)}, \quad (4.18)$$

es una cota superior válida para  $M$  en (4.12).

*Demostración.* En primer lugar, fijados los costes  $c$ , observamos que por las restricciones (4.12w) y (4.12x) tenemos que

$$Ma_{jk} \geq \delta_t - (1 - a_{jk})M, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, t = 1, \dots, T.$$

Por tanto, si  $a_{jk} = 1, j \in B, k = 1, \dots, s_j$ ,

$$M \geq \delta_t, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, t = 1, \dots, T.$$

Por el contrario, si  $a_{jk} = 0, j \in B, k = 1, \dots, s_j$ , también observamos que

$$0 \geq \delta_t - M \Rightarrow M \geq \delta_t, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, t = 1, \dots, T.$$

Bastará entonces tomar como  $UB_\delta$  cualquier cota superior de  $\max_{t=1, \dots, T} \delta_t$ .

Nos centramos en el problema dual del inversor (4.7), por la restricción (4.7f) tenemos que  $\delta_t \geq 0$ , pues  $\gamma_t, \omega \leq 0$  y  $p_t \geq 0$ , con  $t = 1, \dots, T$ . Además, dado que la función objetivo representa el valor en riesgo condicional sabemos que  $\nu + \mu_0\omega$  está acotado  $\forall \omega$  y para cualquier conjunto de costes  $c$ . Concretamente,

$$r_{min} - c_{max} \leq \nu + \mu_0\omega \leq r_{max},$$

donde  $r_{min} = \min_{j=1, \dots, n, t=1, \dots, T} r_{jt}$ ,  $r_{max} = \max_{j=1, \dots, n, t=1, \dots, T} r_{jt}$  y  $c_{max} = \max_{j=1, \dots, n, k=1, \dots, s_j} c_{jk}$ . Dado que la función objetivo está acotada, la solución se alcanza en un punto extremo de la región factible. Los puntos extremos son las soluciones de los sistemas de ecuaciones de dimensión completa cogidos de la matriz de restricciones de (4.7) en su forma estándar. Aplicando la regla de Cramer, en los puntos extremos tenemos que

$$\delta_t \leq \frac{\Delta^S(c)}{\Delta(c)}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Si ahora tenemos en cuenta todos los posibles valores del conjunto de costes  $c$ ,

$$\delta_t \leq \max_c \frac{\Delta^S(c)}{\Delta(c)}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Por lo tanto,

$$\max_{t=1, \dots, T} \delta_t \leq \max_c \frac{\Delta^S(c)}{\Delta(c)} = UB_\delta.$$

□

**Corolario 4.2.2.** *Sea  $UB_\delta$  la cota obtenida por el teorema anterior para el caso en el que  $\mathbb{B}(c)$  es conjunto de todas las submatrices de rango máximo de la matriz que representa las restricciones del problema (4.14) y sea*

$$LB_\nu = \min_c \frac{\Delta^S(c)}{\Delta(c)}, \quad (4.19)$$

entonces,

$$UB_\sigma = \max\{T(r_{max} - c_{min})UB_\delta - LB_\nu, 0\}, \quad (4.20)$$

es una cota superior válida para  $M$  en (4.16).

*Demostración.* De forma análoga al caso anterior, tenemos que  $M \geq \max_{t=1, \dots, T} \delta_t$ .

Centrándonos en el problema (4.14), dado que estamos minimizando  $\nu + \mu_0\omega + \sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{s_j} a_{jk} \sigma_{jk}$ , la variables  $\sigma_{jk}, j \in B, k = 1, \dots, s_j$  tomarán en el óptimo el menor valor posible. De esta forma

$$\sigma_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{si } \nu + \sum_{t=1}^T (c_{jk} - r_{jt}) \delta_t \geq 0, \\ -\nu + \sum_{t=1}^T (r_{jt} - c_{jk}) \delta_t, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si  $\nu + \sum_{t=1}^T (c_{jk} - r_{jt}) \delta_t < 0$ , entonces  $\sum_{t=1}^T (c_{jk} - r_{jt}) < 0$  pues  $\nu > 0$  y por lo tanto,  $\sum_{t=1}^T (r_{jt} - c_{jk}) > 0$ . Así,

$$\sigma_{jk} \leq \max\{0, -LB_\nu + T(r_{max} - c_{min})UB_\delta\} = UB_\sigma.$$

□

### 4.3. El problema de cartera de valores binivel: inversor-líder intermediario-seguidor

Analizamos ahora la situación inversa a la analizada en la sección anterior. En este caso, el inversor elegirá primero una cartera y seguidamente el intermediario fijará los costes de transacción.

Esta situación no es común en la realidad, pero es interesante analizarla desde el punto de vista teórico.

Utilizamos, de nuevo, el valor en riesgo condicional para cuantificar el riesgo. El problema para el inversor consiste en seleccionar una cartera sabiendo que una vez seleccionada el intermediario maximizará sus beneficios fijando los costes de transacción. El problema puede modelarse como

$$\text{máx } \eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t, \tag{4.21a}$$

$$\text{s.a: } d_t \geq \eta - y_t, \quad t = 1, \dots, T, \tag{4.21b}$$

$$y_t = \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j - \sum_{i \in B} c_i x_i, \quad t = 1, \dots, T, \tag{4.21c}$$

$$\sum_{t=1}^T p_t y_t \geq \mu_0, \tag{4.21d}$$

$$d_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \tag{4.21e}$$



$$\eta \in \mathbb{R}, \quad (4.21f)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq 1, \quad (4.21g)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.21h)$$

$$c \in \arg \max \sum_{j \in B} c_j x_j \quad (4.21i)$$

$$\text{s.a: } c_j = \sum_{k=1}^{s_j} c_{jk} a_{jk}, \quad j \in B, \quad (4.21j)$$

$$\sum_{k=1}^{s_j} a_{jk} = 1, \quad j \in B, \quad (4.21k)$$

$$a_{jk} \in \{0, 1\}, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.21l)$$

$$c \in \mathbb{K}. \quad (4.21m)$$

Este problema puede ser simplificado en el caso en el que no se incluya la restricción (4.21m), pues en ese caso, para una cartera  $\mathbf{x}$  dada, tenemos que

$$\sum_{j \in B} c_j x_j \leq \sum_{j \in B} c_j^+ x_j \quad (4.22)$$

donde  $c_j^+ = \max_{k=1, \dots, s_j} c_{jk}, \forall j \in B$ . Y dado que  $c_j^+$  es una solución factible de (4.2), es también una solución óptima.

De esta forma, si eliminamos la restricción (4.21m) en el problema (4.21), podemos obtener la siguiente formulación equivalente

$$\max \eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t, \quad (4.23a)$$

$$\text{s.a: } d_t \geq \eta - y_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.23b)$$

$$y_t = \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j - \sum_{j \in B} c_j^+ x_j, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.23c)$$

$$\sum_{t=1}^T p_t y_t \geq \mu_0, \quad (4.23d)$$

$$d_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.23e)$$

$$\eta \in \mathbb{R}, \quad (4.23f)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq 1, \quad (4.23g)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.23h)$$

Obtenemos así, una formulación de programación lineal entera mixta de un solo nivel. En el caso que la restricción (4.21m) no sea eliminada, no puede obtenerse una formu-

lación de programación lineal entera mixta de un solo nivel. Para resolver 4.21, en este caso más general, utilizaremos el siguiente algoritmo iterativo:

**Inicialización:**

- Elegir una solución factible  $(\mathbf{x}^0, y^0, \eta_0, d^0, c^0)$  de (4.21). Denotar  $\chi^0 = (\mathbf{x}^0, y^0, \eta_0, d^0)$  y fijar  $\lambda^0 = -1$  y  $M_\beta^0 = \infty$ .

**Iteración:**  $\tau = 1, 2, \dots$

- Resolver el problema del intermediario para  $\mathbf{x}^{\tau-1}$ . Denotar la solución óptima por  $c^\tau$ .
- Resolver la formulación incompleta:

$$\text{máx } \eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t, \quad (4.24a)$$

$$\text{s.a: } d_t \geq \eta - y_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.24b)$$

$$y_t = \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j - \lambda, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.24c)$$

$$\sum_{t=1}^T p_t y_t \geq \mu_0, \quad (4.24d)$$

$$d_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.24e)$$

$$\eta \in \mathbb{R}, \quad (4.24f)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq 1, \quad (4.24g)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.24h)$$

$$\lambda \geq \sum_{j \in B} c_j^i x_j, \quad i = 1, \dots, \tau. \quad (4.24i)$$

Denotar por  $(\chi^\tau, \lambda^\tau)$  a la solución óptima, donde  $\chi^\tau = (\mathbf{x}^\tau, y^\tau, \eta^\tau, d^\tau)$  y por  $M_\beta^\tau = M_\beta(\mathbf{x}^\tau)$  al valor óptimo de la función objetivo.

- Si  $(\chi^{\tau-1}, \lambda^{\tau-1})$  es factible en la formulación incompleta (4.24) $^\tau$ , entonces  $(\chi^{\tau-1}, c^\tau)$  son las soluciones óptimas de (4.21) y  $M_\beta^\tau$  el valor óptimo de la función objetivo. **FIN**.
- Si  $(\chi^{\tau-1}, \lambda^{\tau-1})$  no es factible en (4.24) $^\tau$ , entonces seguir con la iteración  $\tau := \tau + 1$ .

**Algoritmo 1:** Problema inversor-líder intermediario-seguidor

Este algoritmo presenta similitudes con el algoritmo de Benders, que utiliza procedimientos de partición para resolver problemas de variables mixtas (ver [4]). Para

justificar la validez del algoritmo utilizamos el siguiente teorema.

**Teorema 4.3.1.** *Denotemos por  $\Omega$  al conjunto de los costes  $c \in \mathbb{K}$  que son soluciones factibles del problema del intermediario. Cada uno de estos costes serán denotados por  $c_{int}$ . Si definimos  $\lambda = \sum_{j \in B} p_j x_j$  entonces, el problema (4.21) es equivalente a*

$$\text{máx } \eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t, \quad (4.25a)$$

$$\text{s.a: } d_t \geq \eta - y_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.25b)$$

$$y_t = \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j - \lambda, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.25c)$$

$$\sum_{t=1}^T p_t y_t \geq \mu_0, \quad (4.25d)$$

$$d_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.25e)$$

$$\eta \in \mathbb{R}, \quad (4.25f)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq 1, \quad (4.25g)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.25h)$$

$$\lambda \geq \sum_{j \in B} c_{int} x_j, \quad c_{int} \in \Omega \quad (4.25i)$$

*Demostración.* En primer lugar, dado que el problema (4.21) es un problema de maximización, las variables  $d_t, t = 1, \dots, T$ , tomarán en el óptimo el mínimo valor posible. Este valor viene dado por las restricciones (4.21b) y (4.21e) y será  $d_t = \text{máx}\{0, \eta - y_t\}$ . Si ahora denotamos  $k_x = \sum_{t \in \mathbb{T}'} \frac{p_t}{\beta} > 0$ , donde  $\mathbb{T}' = \{t = 1, \dots, n : \eta - y_t \geq 0\}$ , la función objetivo de (4.21) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \text{máx } \eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t &= \text{máx } \eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t \text{máx}\{0, \eta - y_t\} \\ &= \text{máx } \eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t \in \mathbb{T}'} p_t (\eta - y_t) \\ &= \text{máx } \eta \left(1 - \frac{1}{\beta} \sum_{t \in \mathbb{T}'} p_t\right) + \frac{1}{\beta} \sum_{t \in \mathbb{T}'} p_t \left(\sum_{j=1}^n r_{jt} x_j - \sum_{j \in B} c_j x_j\right) \\ &= \text{máx } \eta (1 - k_x) + \frac{1}{\beta} \sum_{t \in \mathbb{T}'} p_t \left(\sum_{j=1}^n r_{jt} x_j\right) - \frac{1}{\beta} \sum_{t \in \mathbb{T}'} p_t \left(\sum_{j \in B} c_j x_j\right) \\ &= \text{máx } \eta (1 - k_x) + \frac{1}{\beta} \sum_{t \in \mathbb{T}'} p_t \left(\sum_{j=1}^n r_{jt} x_j\right) - c_x \lambda. \end{aligned}$$

Por tanto, dado que  $c_x \geq 1$  y  $\lambda \geq 0$ , en el problema de maximización  $\lambda$  será minimizado.

Ahora, fijada una cartera de valores  $\mathbf{x}$ , denotamos por  $\bar{\lambda}$  el valor óptimo del problema seguidor en (4.21), es decir

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \text{máx} \sum_{j \in B} c_j x_j \\ \text{s.a: } c_j &= \sum_{k=1}^{s_j} c_{jk} a_{jk}, & j \in B, \\ \sum_{k=1}^{s_j} a_{jk} &= 1, & j \in B, \\ a_{jk} &\in \{0, 1\}, & j \in B, k = 1, \dots, s_j, \\ c &\in \mathbb{K}, \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$\bar{\lambda} = \text{máx} \left\{ \sum_{j \in B} c_{int,j} x_j : c_{int} \in \Omega \right\}.$$

Dado que  $\lambda$  está siendo minimizado, podemos sustituir el problema seguidor por las restricciones

$$\lambda \geq \sum_{j \in B} c_{int,j} x_j, \quad c_{int} \in \Omega,$$

obteniéndose así el problema equivalente (4.25).  $\square$

Si el conjunto de puntos en  $\Omega$  fuera explícitamente conocido, el problema (4.25) sería una formulación de programación lineal entera mixta para el caso general de (4.21). Sin embargo, los puntos del conjunto suelen ser difíciles de enumerar. Por ello, la idea del algoritmo es partir de la formulación (4.25) pero con una única restricción para  $\lambda$ , basada en un punto inicial, e ir añadiendo una nueva desigualdad, procedente de un nuevo punto, en cada nueva iteración del algoritmo.

**Teorema 4.3.2.** *El algoritmo (1) termina en un número finito de pasos proporcionando una solución óptima del problema (4.21).*

*Demostración.* Comenzamos demostrando la finitud del algoritmo. Dado que número de soluciones factibles del problema del intermediario es finito, se tiene que el número de cortes  $\lambda \geq \sum_{j \in B} c_j^i x_j$ , que pueden ser añadidos a la formulación (4.24) es también finito. Por tanto, existirá una iteración  $\tau$  en la que se añadirá un corte repetido. Entonces  $\mathbf{x}^{\tau-1}$  será factible en el problema (4.24) $^\tau$ , pues (4.24) $^\tau$  será igual a (4.24) $^{\tau-1}$ , como consecuencia el algoritmo termina. Por lo tanto, el algoritmo termina en un número finito de pasos.

Pasamos a verificar que la solución obtenida es la solución óptima de (4.21). Denotamos por  $M_\beta^*$  al valor óptimo de la función objetivo de (4.21), que también es el valor óptimo de (4.25) por el teorema anterior.

En primer lugar, dado que  $(4.24)^\tau$  es idéntico a  $(4.24)^{\tau-1}$  excepto por una restricción adicional, tenemos que  $M_\beta^i \leq M_\beta^{i-1}$ ,  $\tau = 2, \dots, \tau$ . De hecho, como hemos fijado  $M_\beta^0 = \infty$  tenemos que  $M_\beta^i \leq M_\beta^{i-1}$ ,  $\tau = 1, \dots, \tau$ . Entonces, en el caso que  $(\chi^{\tau-1}, \lambda^{\tau-1})$  cumpla el criterio de parada, es decir, en el caso que sea factible en  $(4.24)^\tau$ , también será una solución óptima de  $(4.24)^\tau$ , ya que  $M_\beta^\tau \leq M_\beta^{\tau-1}$ , por lo que  $M_\beta^\tau = M_\beta^{\tau-1}$ . Es importante destacar que  $(\chi^0, \lambda^0)$  nunca puede verificar el criterio de parada, ya que  $\lambda^0 < 0$  y por tanto  $M_\beta(\mathbf{x}^1) = M_\beta^1$  nunca tomará el valor  $\infty$ , como es lógico.

En segundo lugar, tenemos que  $M_\beta^* \leq M_\beta^\tau$  siempre se cumple, ya que el poliedro que describe la región factible de (4.25) está incluido en el que define la región factible de  $(4.24)^\tau$ . Entonces, si  $(\chi^{\tau-1}, c^\tau)$  es factible en (4.21), tenemos que  $M_\beta^* = M_\beta^\tau$  y será una solución óptima. Por lo tanto, solo falta probar que  $(\chi^{\tau-1}, c^\tau)$  es factible en (4.21).

Para comprobar la factibilidad solo hace falta verificar que  $(\chi^{\tau-1}, c^\tau)$  verifica todas las restricciones de (4.21). Es claro que cumple las restricciones (4.21b), (4.21e), (4.21g) y (4.21h) ya que están incluidas en el problema  $(4.24)^\tau$ . Obviamente,  $(\chi^{\tau-1}, c^\tau)$  cumple las restricciones del problema del intermediario (4.21i) pues  $c^\tau$  se ha calculado resolviendo dicho problema para la cartera  $x^{\tau-1}$ . Por último, falta verificar que se cumple la restricción (4.21c). Como  $c^\tau \in \arg \max \sum_{j \in B} c_j x_j^{\tau-1}$ , se tiene que  $\sum_{j \in B} c_j^\tau x_j^{\tau-1} \geq \sum_{j \in B} c_j x_j^{\tau-1}$  para cualquier  $c$  verificando las restricciones del problema del intermediario. Por lo tanto, dado que  $\lambda$  toma el menor valor posible, como ya se vió en la demostración del teorema anterior, tenemos que  $\lambda^\tau = \sum_{j \in B} c_j^\tau x_j^{\tau-1}$  y la restricción (4.21c) se cumple.  $\square$

## 4.4. El problema de cartera de valores binivel: bienestar social

Consideramos, en último lugar, el problema en el que ninguna de las partes tiene una posición jerárquica sobre la otra. En este apartado, supondremos que ambas partes cooperan, compartiendo riesgos y beneficios y diseñando una estrategia conjunta con el objetivo de mejorar sus soluciones. Así, el inversor y el intermediario trabajan juntos para mejorar el bienestar social de la sociedad. La aplicación real de este modelo cooperativo es difícil en un mercado real competitivo, pero su análisis teórico puede proporcionar resultados interesantes.

El problema cooperativo consistirá en maximizar una suma ponderada de las funciones objetivos de las partes implicadas, es decir,

$$\max \zeta \sum_{j \in B} c_j x_j + (1 - \zeta) \left( \eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t \right), \quad (4.26)$$

con  $0 < \zeta < 1$ . La región factible vendrá delimitada por las restricciones de los problemas de ambas partes. El parámetro de ponderación  $\zeta$  será la tasa que indica a cuantas unidades de una de las funciones objetivos puede renunciar una de las partes implica-

das, a cambio de las mismas unidades de la otra función objetivo, manteniendo así, el mismo valor global.

De esta forma, una formulación para el problema de bienestar social es

$$\text{máx } \zeta \sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{s_j} c_{jk} \hat{a}_{jk} + (1 - \zeta) \left( \eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t \right) \quad (4.27a)$$

$$\text{s.a: } \sum_{k=1}^{s_j} a_{jk} = 1, \quad j \in B, \quad (4.27b)$$

$$a_{jk} \in \{0, 1\}, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.27c)$$

$$p \in \mathbb{P}, \quad (4.27d)$$

$$d_t \geq \eta - y_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.27e)$$

$$y_t = \sum_{j \in B} r_{jt} \left( \sum_{k=1}^{s_j} \hat{a}_{jk} \right) + \sum_{j \in R} r_{jt} x_j - \sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{s_j} c_{jk} \hat{a}_{jk}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.27f)$$

$$\sum_{t=1}^T p_t y_t \geq \mu_0, \quad (4.27g)$$

$$d_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.27h)$$

$$\sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{s_j} \hat{a}_{jk} + \sum_{j \in R} x_j \leq 1, \quad (4.27i)$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in R, \quad (4.27j)$$

$$\hat{a}_{jk} \leq a_{jk}, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.27k)$$

$$\hat{a}_{jk} \geq 0, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j. \quad (4.27l)$$

Vamos a considerar el caso  $\zeta = \frac{1}{2}$ , es decir, la media aritmética de las funciones objetivos. En este caso, en el problema (4.27) podemos sustituir  $\zeta \sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{s_j} c_{jk} \hat{a}_{jk} + (1 - \zeta) \left( \eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t \right)$  por  $\sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{s_j} c_{jk} \hat{a}_{jk} + \left( \eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t \right)$  pues

$$\text{máx} \left( \zeta \sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{s_j} c_{jk} \hat{a}_{jk} + (1 - \zeta) \left( \eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t \right) \right) = \frac{1}{2} \text{máx} \left( \sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{s_j} c_{jk} \hat{a}_{jk} + \left( \eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t \right) \right).$$

La siguiente proposición nos garantiza que para  $\zeta = \frac{1}{2}$  el problema de bienestar social es beneficioso para ambas partes.

**Proposición 4.4.1.** *Para el caso  $\zeta = \frac{1}{2}$ , una solución óptima del problema (4.27) proporciona un valor de la función objetivo mayor o igual que la suma de los valores óptimos de cada una de las partes en el mismo problema binivel, independientemente de la relación de jerarquía.*

*Demostración.* Basta observar que cualquier solución factible de (4.6) y (4.21) es también factible en (4.27). Esto es debido a que la región factible de (4.27) incluye las de (4.6) y (4.21), ya que todas las restricciones de (4.27) aparecen en ambos problemas.  $\square$

Podemos utilizar un algoritmo similar al algoritmo de Benders para tener una forma alternativa de resolver el problema (4.27). Para ello, necesitamos obtener una descomposición de Benders para el problema (4.27).

Para aplicar la descomposición de Benders reformulamos el problema (4.27) como

$$\text{máx} \sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{s_j} c_{jk} \hat{a}_{jk} + q(y) \quad (4.28a)$$

$$\text{s.a:} \sum_{k=1}^{s_j} a_{jk} = 1, \quad j \in B, \quad (4.28b)$$

$$a_{jk} \in \{0, 1\}, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.28c)$$

$$p \in \mathbb{P}, \quad (4.28d)$$

$$y_t = \sum_{j \in B} r_{jt} \left( \sum_{k=1}^{s_j} \hat{a}_{jk} \right) + \sum_{j \in R} r_{jt} x_j - \sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{s_j} c_{jk} \hat{a}_{jk}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.28e)$$

$$\sum_{t=1}^T p_t y_t \geq \mu_0, \quad (4.28f)$$

$$\sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{s_j} \hat{a}_{jk} + \sum_{j \in R} x_j \leq 1, \quad (4.28g)$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in R, \quad (4.28h)$$

$$\hat{a}_{jk} \leq a_{jk}, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.28i)$$

$$\hat{a}_{jk} \geq 0, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j. \quad (4.28j)$$

$$\text{donde} \quad (4.28k)$$

$$q(y) = \text{máx} \eta - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t, \quad (4.28l)$$

$$d_t \geq \eta - y_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.28m)$$

$$d_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T. \quad (4.28n)$$

Calculando el dual de  $q(y)$  obtenemos el siguiente problema

$$q(y) = \text{mín} \sum_{t=1}^T -\gamma_t y_t \quad (4.29a)$$

$$\text{s.a:} \gamma_t \geq -\frac{p_t}{\beta}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.29b)$$

$$-\sum_{t=1}^T \gamma_t = 1, \quad (4.29c)$$

$$\gamma_t \leq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.29d)$$

Por un razonamiento análogo al utilizado para obtener la formulación (4.25) tenemos que (4.29) es equivalente a

$$q(y) = \text{máx } q \quad (4.30a)$$

$$\text{s.a: } q \leq \sum_{t=1}^T -\gamma^t y_t, \gamma^t \in \Omega. \quad (4.30b)$$

donde  $\Omega$  es el conjunto de soluciones que son un punto extremo de la región factible de (4.29).

Como consecuencia, el problema (4.27) es equivalente a

$$\text{máx } \sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{s_j} c_{jk} \hat{a}_{jk} + q \quad (4.31a)$$

$$\text{s.a: } \sum_{k=1}^{s_j} a_{jk} = 1, \quad j \in B, \quad (4.31b)$$

$$a_{jk} \in \{0, 1\}, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.31c)$$

$$p \in \mathbb{P}, \quad (4.31d)$$

$$y_t = \sum_{j \in B} r_{jt} \left( \sum_{k=1}^{s_j} \hat{a}_{jk} \right) + \sum_{j \in R} r_{jt} x_j - \sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{s_j} c_{jk} \hat{a}_{jk}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.31e)$$

$$\sum_{t=1}^T p_t y_t \geq \mu_0, \quad (4.31f)$$

$$\sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{s_j} \hat{a}_{jk} + \sum_{j \in R} x_j \leq 1, \quad (4.31g)$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in R, \quad (4.31h)$$

$$\hat{a}_{jk} \leq a_{jk}, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j, \quad (4.31i)$$

$$\hat{a}_{jk} \geq 0, \quad j \in B, k = 1, \dots, s_j. \quad (4.31j)$$

$$q \leq \sum_{t=1}^T -\gamma^t y_t, \gamma^t \in \Omega. \quad (4.31k)$$

El algoritmo de Benders para el problema (4.31) es

#### Inicialización:

- Elegir una solución factible  $y^0$  del problema (4.31) y resolver, para dicha solución, el problema (4.29). Sea  $\gamma^0$  esa solución óptima de (4.29) y  $q(y^0)$  el valor óptimo. Tomar  $\Upsilon = \{\gamma^0\}$  e ir a la iteración  $\tau = 1$ .



**Iteración:**  $\tau = 1, 2, \dots$

- Resolver el problema (4.31) sustituyendo  $\Omega$  por  $\Upsilon$ . Sea  $(y^*, q^*)$  la solución óptima de dicho problema.
  - Si  $\tau = 1$  y  $q(y^0) = q^*$ . **FIN**.
  - Si  $\tau > 1$  y  $q(y^*) = q^*$ . **FIN**.
  - En otro caso, resolver el problema (4.29) para  $y = y^*$ . Denotar por  $\gamma^*$  a la solución óptima de dicho problema. Tomar  $\gamma^\tau = \gamma^*$ ,  $\Upsilon = \Upsilon \cup \{\gamma^\tau\}$ , e ir a la iteración  $\tau = \tau + 1$ .

**Algoritmo 2:** Problema bienestar social



# Capítulo 5

## Simulaciones computacionales

En este capítulo realizaremos varias simulaciones computacionales para algunos de los modelos presentados en los capítulos anteriores.

A la hora de formular los distintos modelos contemplados, hemos considerado que los datos necesarios eran conocidos. Abordamos ahora como obtener dichos datos, que no son otros que los diferentes valores de las tasas de retorno de cada uno de los activos en el periodo considerada. Estos datos darán lugar a los distintos escenarios posibles. El proceso de obtención de estos datos recibe el nombre de *generación de escenarios* y puede llevarse a cabo mediante varias técnicas. La utilización de una técnica adecuada es esencial, pues datos de mala calidad darán lugar a simulaciones que arrojarán malos resultados.

Una de los métodos más utilizadas para la generación de escenarios en un problema de cartera de valores es el *método de datos históricos*. Este método es ampliamente utilizado debido a su simplicidad. Se basa en la premisa de que los datos históricos pueden representar posibles escenarios futuros. Cada escenario se corresponde con una realización de la variable aleatoria de los rendimientos de los activos observados en un período de tiempo pasado, como un día o una semana. En este enfoque, se considera que los escenarios son igualmente probables y no se requiere hacer suposiciones sobre la distribución de los rendimientos, es decir, es un método no paramétrico. Se pueden obtener resultados significativos con un número relativamente pequeño de escenarios, alrededor de cientos de escenarios, aunque un número mayor de escenarios siempre es preferible. Esto significa que si se elige la semana como unidad de tiempo, utilizar los datos históricos de los 2 años anteriores (104 semanas) puede dar lugar a resultados de buena calidad. Es importante tener en cuenta que los escenarios futuros pueden diferir significativamente de los observados en el pasado, siendo este el principal defecto de este método [12].

Aunque existen técnicas alternativas para la generación de escenarios, como las basadas en métodos de remuestreo como el “Bootstrapping” o en métodos de simulación

Monte Carlo (ver [5, 10]), utilizaremos el método de datos históricos por su buena relación calidad-simplicidad .

Las simulaciones se han realizado para los activos que componen el índice bursátil de referencia de la bolsa española, el IBEX 35. La lista de los activos utilizados es la siguiente

Activo	Empresa	Símbolo Bursátil
1	Aena	AENA
2	ACS	ACS
3	Aceronix	ACX
4	Amadeus	AMS
5	Acciona	ANA
6	BBVA	BBVA
7	Bankinter	BKT
8	CaixaBank	CABK
9	Cellnex	CLNX
10	Colonial	COL
11	Endesa	ELE
12	Enagás	ENG
13	Fluidra	FDR
14	Ferrovial	FER
15	Grifols	GRF
16	International Airlines	IAG
17	Iberdrola	IBE
18	Inditex	ITX
19	Logista	LOG
20	Mapfre	MAP
21	Meliá Hotels	MEL
22	Merlin Properties	MRL
23	ArcelorMittal	MTS
24	Naturgy Energy Group	NTGY
25	Red Eléctrica	RED
26	Repsol	REP
27	Banco Santander	SAN
28	Banco Sabadell	SAB
29	Telefónica	TEF
30	Unicaja Banco	UNI

Tabla 5.1: Componentes del IBEX 35 utilizadas

Para la resolución de los modelos se ha utilizado el lenguaje de programación Python y concretamente la librería gurobipy que permite utilizar el solver Gurobi. Se realizan las simulaciones para el año 2022. Para cada una de las 52 semanas del año se resolverán los distintos modelos considerando que los posibles escenarios vienen dados por

los retornos semanales de los activos en las  $T = 104$  semanas anteriores a la semana en la que se construye la cartera. Así, para cada modelo obtendremos 52 carteras distintas que pueden interpretarse como una única cartera que puede ser actualizada semanalmente durante un año. Por lo tanto, requerimos de los datos del 2022, así como de los dos años anteriores, 2021 y 2020. Estos datos han sido extraídos de Yahoo! Finance <https://finance.yahoo.com/>, mediante la librería `yfinance` de Python. Compararemos los retornos de las distintas carteras con los del IBEX 35 para esa misma semana. La cota  $\mu_0$  se ha tomado como la media de los retornos semanales del IBEX 35 en el año 2022, ese valor es  $\mu_0 = -0.00076690$ .

Es conveniente considerar varias medidas para comparar los distintos modelos que simulemos.

**Definición 5.0.1.** Sea  $\mathbf{x}$  un cartera de valores que puede ser actualizada periódicamente durante el tiempo  $t$  que dure la inversión. Denotamos por  $\mu^t(\mathbf{x})$  al conjunto de las tasas de retorno obtenidas por cada una de las actualizaciones de la cartera. El **Ratio de Sharpe** ( $Sh$ ) viene dado por

$$Sh = \frac{\mathbb{E}\{\mu^t(\mathbf{x}) - r_f\}}{\sigma(\mu^t(\mathbf{x}))}, \quad (5.1)$$

donde  $r_f$  es un retorno constante, que en nuestro caso tomaremos como 0 y  $\sigma(\mu^t(\mathbf{x}))$  es la desviación estándar. El rendimiento de la cartera será mayor mientras mayor sea  $Sh$ . También podremos utilizar el retorno medio  $Rm = \mathbb{E}\{\mu^t(\mathbf{x})\}$  como medida para evaluar el rendimiento de la cartera.

A lo largo de los siguientes apartados presentamos los resultados obtenidos.

## 5.1. Modelos sin características reales

Comenzamos considerando varios modelos que no incluyen características reales, concretamente simularemos el modelo de Markowitz (1.6) y el modelo Valor en Riesgo Condicional (CVaR) (2.24). Comenzamos con el modelo de Markowitz.

En la Figura 5.1 se representan las tasas de retorno obtenidas para cada una de las carteras de valores calculadas, junto con los retornos semanales del IBEX 35. Como podemos observar, en general, el modelo de Markowitz consigue reducir las pérdidas en las semanas donde el IBEX 35 presenta las peores tasas de retorno. Esto puede visualizarse en la semana 22 y especialmente en la semana 8, donde el modelo reduce a 1/3 las pérdidas obtenidas por el IBEX 35. Por el contrario, el modelo de Markowitz presenta peores resultados que el IBEX 35 en semanas donde el IBEX 35 obtiene grandes retornos, como puede verse en las semanas 9, 20, 31 o 51. Sin embargo, hay algunas excepciones entre las que destaca la semana 42 donde el modelo de Markowitz consigue mejorar en un 50% los resultados del IBEX 35.

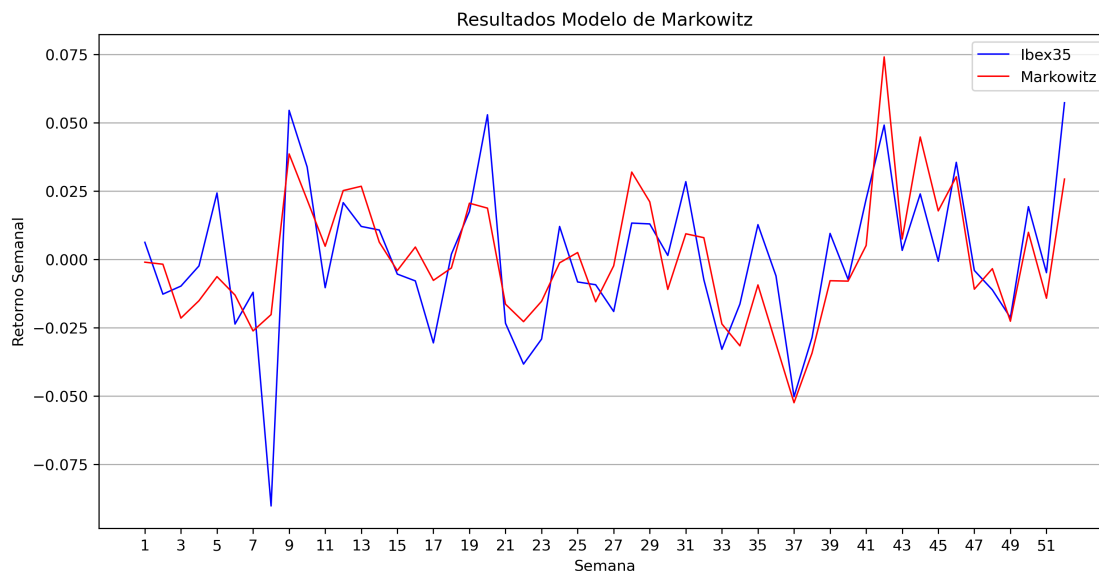


Figura 5.1: Resultados Modelo de Markowitz

Para el modelo de Markowitz puede construirse la frontera retorno/riesgo (1.2) que se describió en el primer capítulo. Para ello, basta con seleccionar una semana al azar y resolver el modelo para distintos valores de  $\mu_0$ , intercambiando la desigualdad (1.6b) por una igualdad. Se obtienen así, un conjunto de carteras que permiten construir la frontera retorno/riesgo. En la Figura 5.2 podemos ver los resultados obtenidos. Se han incluido adicionalmente los puntos correspondientes a cada uno de los activos y se ha destacado la cartera de riesgo mínimo.

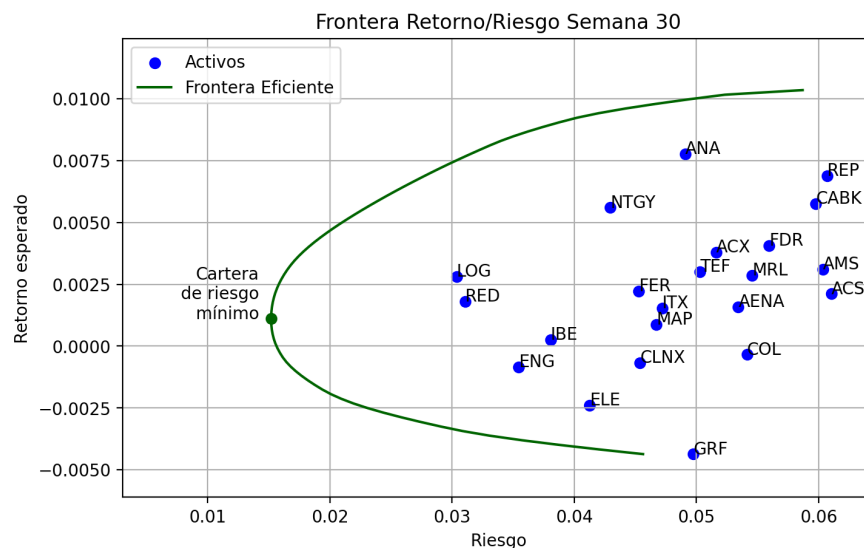


Figura 5.2: Frontera retorno riesgo

Como ya se comentó al inicio de este capítulo, el número de escenarios suficiente para obtener buenos resultados mediante el método de los datos históricos es del orden

de cientos, sin embargo, siempre es preferible un número mayor de escenarios. Por ello, es conveniente estudiar como se ven afectados los resultados ante una variación en el número  $T$  de escenarios utilizados. En la Figura 5.3 pueden observarse los resultados obtenidos para los casos  $T = 104, 156, 204$ , es decir, utilizando 2, 3 y 4 años respectivamente. Como puede comprobarse los resultados obtenidos son muy similares, siendo prácticamente idénticos en los casos  $T = 156, 204$ .

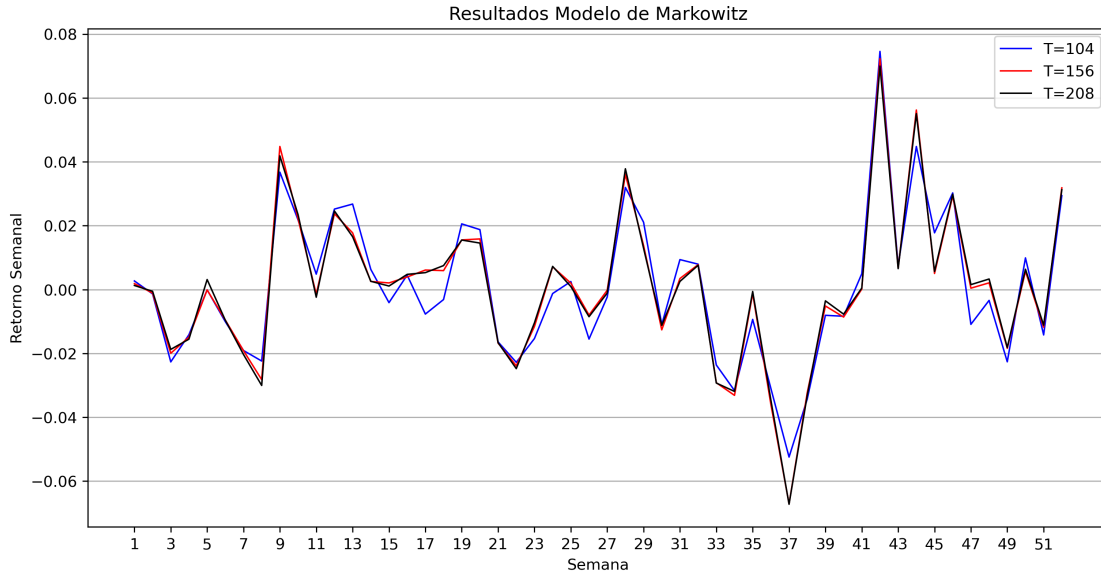


Figura 5.3: Resultados Modelo de Markowitz distintos  $T$

Pasamos ahora a analizar los resultados obtenidos para el modelo basado en el Valor en Riesgo Condicional (2.24). Tomamos  $\beta = 0.05$  y de nuevo, representamos las tasas de retorno obtenidas para cada una de las carteras de valores calculadas, junto con los retornos semanales del IBEX 35. En la Figura 5.4 puede observarse que se consigue, al igual que para el modelo de Markowitz, disminuir las pérdidas en las semanas donde el IBEX 35 sufre caídas acusadas, en detrimento de las ganancias obtenidas para las semanas donde el IBEX 35 obtiene grandes retornos. Esto puede ejemplificarse en las semanas 8 y 22 para las pérdidas y en las semanas 9 y 20 para las ganancias. Cabe destacar la semana 42, donde el modelo mejora los resultados del índice, obteniéndose el máximo retorno de la serie.

Podemos comparar los resultados obtenidos para distintos valores de  $\beta$ . Como ya se comentó en el capítulo 2,  $M(\cdot) = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} M_\beta(\cdot)$  y  $M_1(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x})$ . Por lo general, cuanto menor sea  $\beta$ , mayor es la aversión al riesgo. En la Figura 5.5 se representan los resultados obtenidos para  $\beta = 0.05, 0.50, 0.95$ . Como puede observarse, la volatilidad de los retornos obtenidos, aumenta a medida que aumenta el valor  $\beta$ . Así, el riesgo es mayor para valores de  $\beta$  más elevados.

Al igual que se realizó para el modelo de Markowitz, comparamos los resultados obtenidos variando el número de escenarios utilizados. Lo hacemos tanto para  $\beta = 0.05$

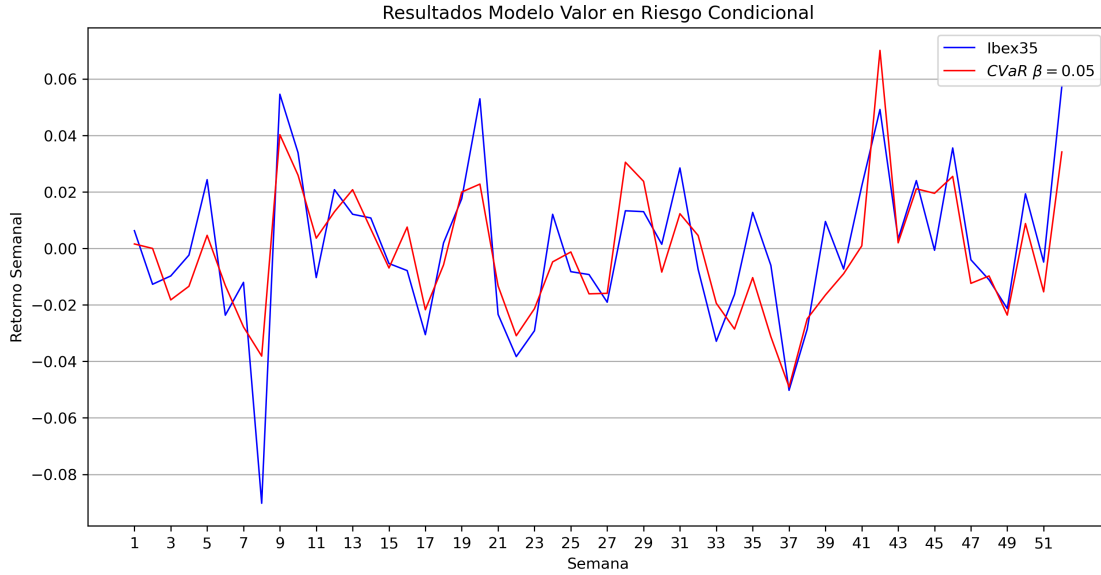


Figura 5.4: Resultados Modelo CVaR

como para  $\beta = 0.95$ . Los valores utilizados para el número de escenarios son  $T = 104, 156, 204$ . Los resultados pueden visualizarse en las Figuras 5.6 y 5.7.

Dada la aparente similitud entre los resultados obtenidos para el modelo de Markowitz y el modelo CVaR para  $\beta = 0.05$ . Representamos ambos modelos en el mismo gráfico para facilitar su comparación. Como puede observarse en la Figura 5.8 los resultados obtenidos para ambos modelos son muy similares. Esto significa que ambos modelos construyen carteras parecidas a pesar de tener formulaciones distintas.

Por último, podemos comparar los rendimientos de todos los modelos simulados mediante los valores obtenidos para el Ratio de Sharpe (5.1) y el retorno medio. Estos datos se encuentran recogidos en la Tabla (5.2).

Modelo	$Sh \cdot 10^2$	$Rm \cdot 10^3$
Markowitz, $T = 104$	0.474	0.107
Markowitz, $T = 156$	2.661	0.622
Markowitz, $T = 208$	<b>2.860</b>	<b>0.661</b>
CVaR $\beta = 0.05, T = 104$	-7.650	-1.693
CVaR $\beta = 0.05, T = 156$	-2.745	-0.613
CVaR $\beta = 0.05, T = 208$	0.624	0.141
CVaR $\beta = 0.50, T = 104$	-1.733	-0.396
CVaR $\beta = 0.95, T = 104$	-18.651	-7.354
CVaR $\beta = 0.95, T = 156$	-15.640	-5.699
CVaR $\beta = 0.95, T = 208$	-8.354	-3.287
IBEX 35	-2.986	-0.767

Tabla 5.2: Valores del Ratio de Sharpe y retorno medio



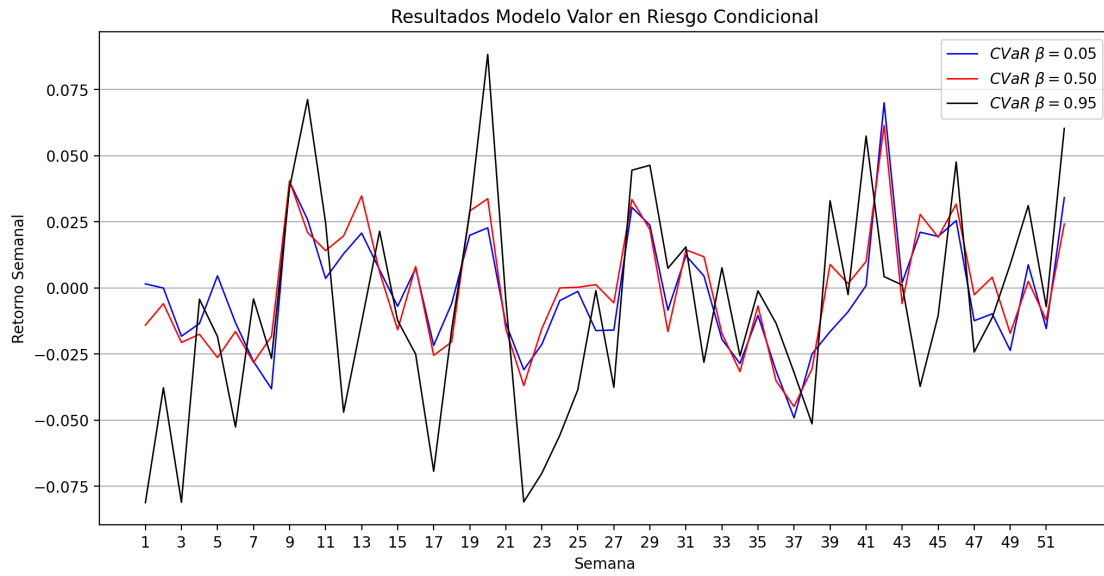


Figura 5.5: Resultados Modelo CVaR distintos  $\beta$

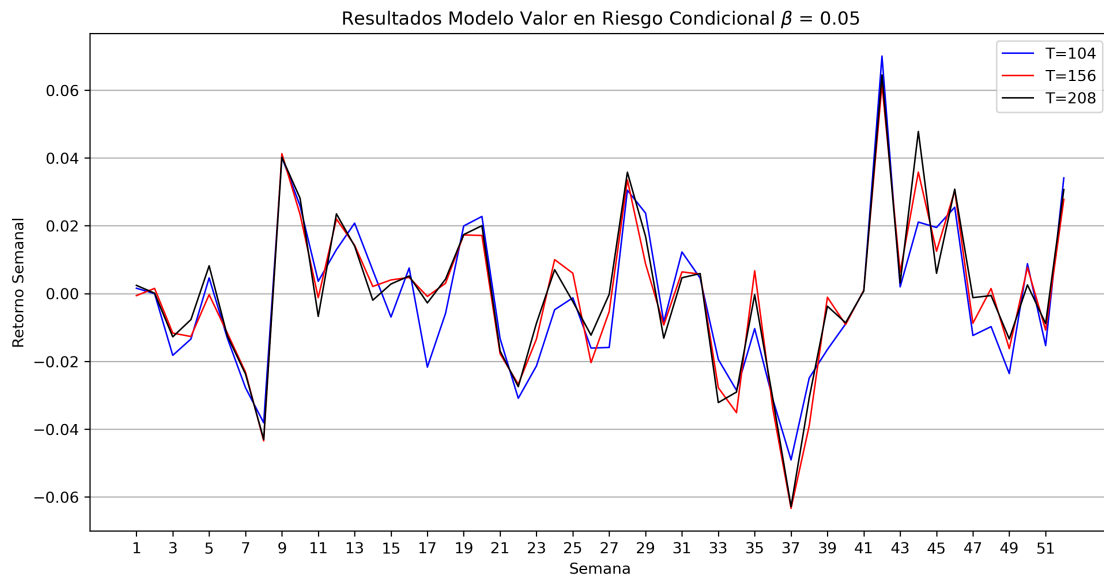


Figura 5.6: Resultados Modelo CVaR distintos  $T$ ,  $\beta = 0.05$

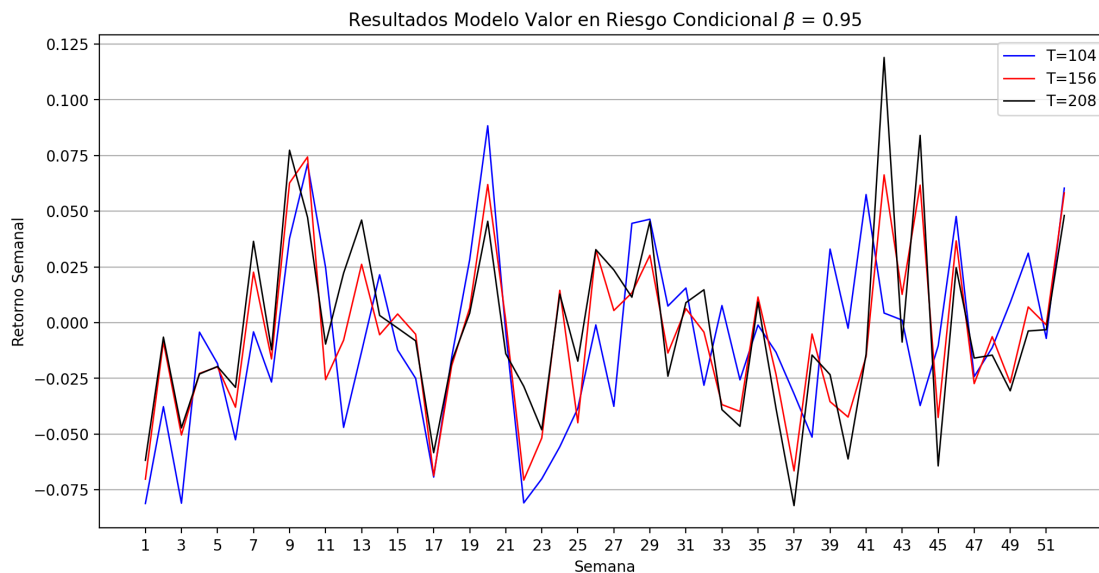


Figura 5.7: Resultados Modelo CVaR distintos  $T$ ,  $\beta = 0.95$

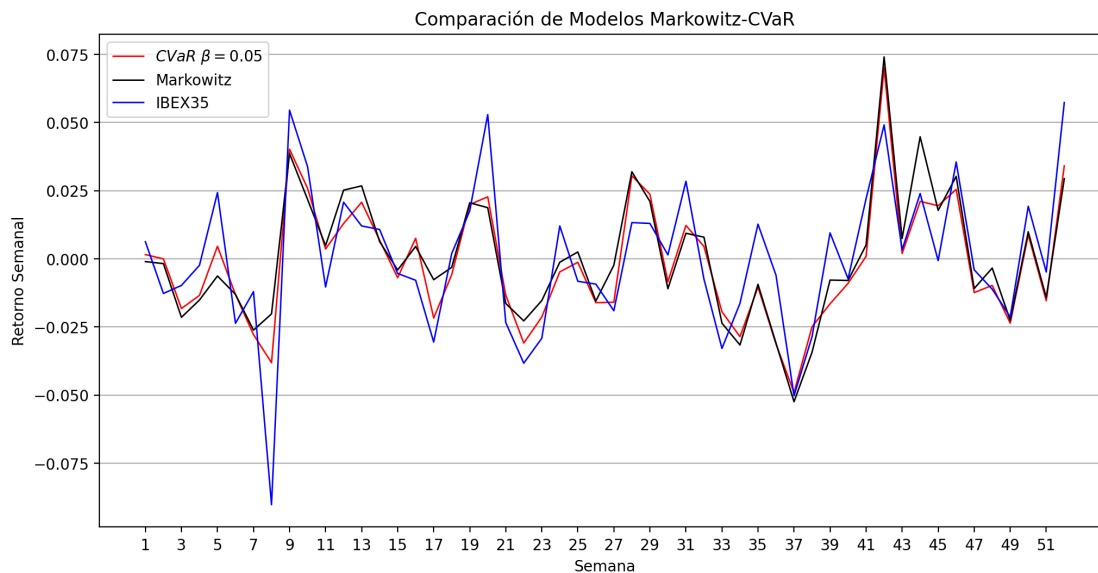


Figura 5.8: Comparación resultados Markowitz y CVaR  $\beta = 0.05$

## 5.2. Modelo con características reales

En este apartado presentamos los resultados obtenidos para el modelo basado en el Valor en Riesgo Condicional con características reales (3.32). Los valores predeterminados para los diferentes parámetros que intervienen en este modelo se recogen en la Tabla 5.3.

Parámetro	$\beta$	$\bar{C}$	$\bar{C}_U$	$\bar{C}_L$	$K_{sup}$	$K_{inf}$	$f_j = f \forall j$	$c_j = c$	$L_j = L$
Valor	0.05	100000	$\bar{C}$	98000	20	10	1	0.0005	2500

Tabla 5.3: Parámetros CVaR Real

A lo largo de este apartados realizaremos variaciones de estos parámetros y analizaremos su influencia sobre los resultados obtenidos.

Comenzamos presentando los resultados para el caso predeterminado. En la Figura 5.9 se representan las tasas de retorno obtenidas para cada una de las carteras de valores calculadas, junto con los retornos semanales del IBEX 35 y del modelo CVaR sin características reales. Como puede observarse, los resultados obtenidos para el modelo CVaR con, y sin características reales, es prácticamente idéntico, excepto por una pequeña diferencia en el valor de los retornos debida a los costes de transacción. Así, el modelo con características reales obtiene, para todas las semanas, un retorno menor.

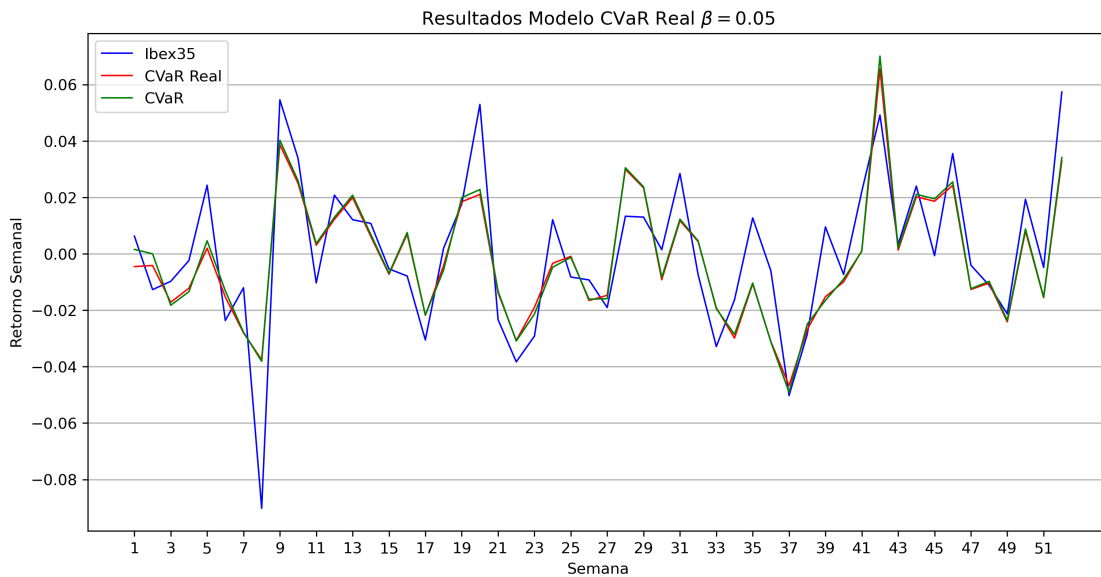


Figura 5.9: Resultados Modelo CVaR Real

Las pequeñas diferencias en los retornos pueden ser visualizadas con claridad en un gráfico en el que representemos el retorno acumulado. Dicha representación se presenta en la Figura 5.10. Es fácil ver como ambos retornos se distancian a medida que transcurren las semanas.

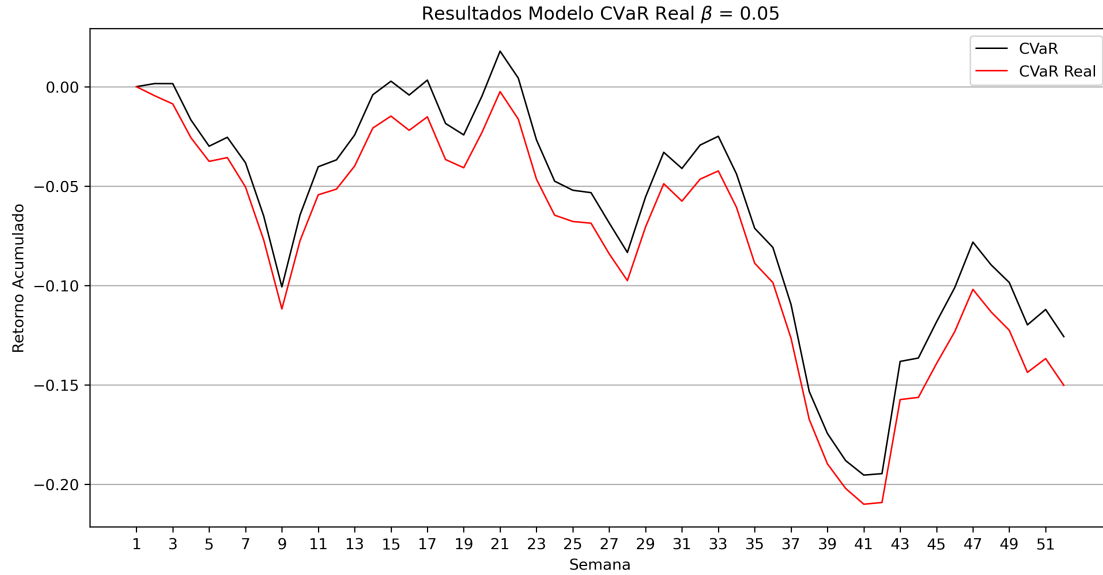


Figura 5.10: Comparación retorno acumulado

Los parámetros  $K_{sup}$  y  $K_{inf}$  determinan el número máximo y mínimo de activos que pueden componer la cartera de valores. Representamos los resultados obtenidos para diferentes parejas de estos valores, concretamente tomaremos  $K_{sup} = 5, 20, 30$  y  $K_{inf} = 0, 10, 25$ . En la Figura 5.11 podemos visualizar los resultados para el caso  $\beta = 0.05$ . Con este valor de  $\beta$ , el modelo tenderá a construir carteras que reduzcan el riesgo, por lo tanto, generará normalmente carteras bien diversificadas. Por ello, ha medida que reducimos el valor  $K_{sup}$  los resultados presentan mayor volatilidad, ya que limitar el número de activos en los que se puede invertir no permite realizar una buena diversificación. Por el contrario, con un valor  $\beta = 0.95$  el modelo tenderá a construir carteras que maximicen el retorno esperado ya que  $M_1(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x})$ . Por ello, variar los valores  $K_{sup}$  y  $K_{inf}$  no debería afectar en exceso a los resultados ya que para maximizar el retorno esperado la diversificación no es especialmente relevante. Esto concuerda con los resultados obtenidos, que pueden visualizarse en la Figura 5.12.

Siguiendo con la variación de los distintos parámetros, realizamos simulaciones para distintos valores de los costes de transacción unitarios  $c_j, j = 1, \dots, 30$ . En primer lugar, comentar que todos los costes de transacción se han seleccionado idénticos, pues es lo más común entre la mayoría de brókers. Concretamente, hemos tomado  $c = 0.0005$  que es equivalente a cobrar una comisión del 0,05% del capital invertido en cada activo. Realizamos simulaciones para  $c = 0.0005, 0.005$  y además, fijamos  $L = 1$ . El parámetro  $L$  determina la cantidad mínima que ha de ser comprada de un activo que ha sido seleccionado en la cartera. Disminuir  $L$  de 2500 a 1 aumenta el número de carteras factibles, mientras que aumentar los costes reduce significativamente la región factible de nuestro problema pudiendo ser incluso vacía. Por ello, disminuir  $L$  ayuda a atenuar la reducción del tamaño de la región factible provocada por  $c$ .

En la Figura 5.13 se presentan las tasas de retorno obtenidas para los distintos

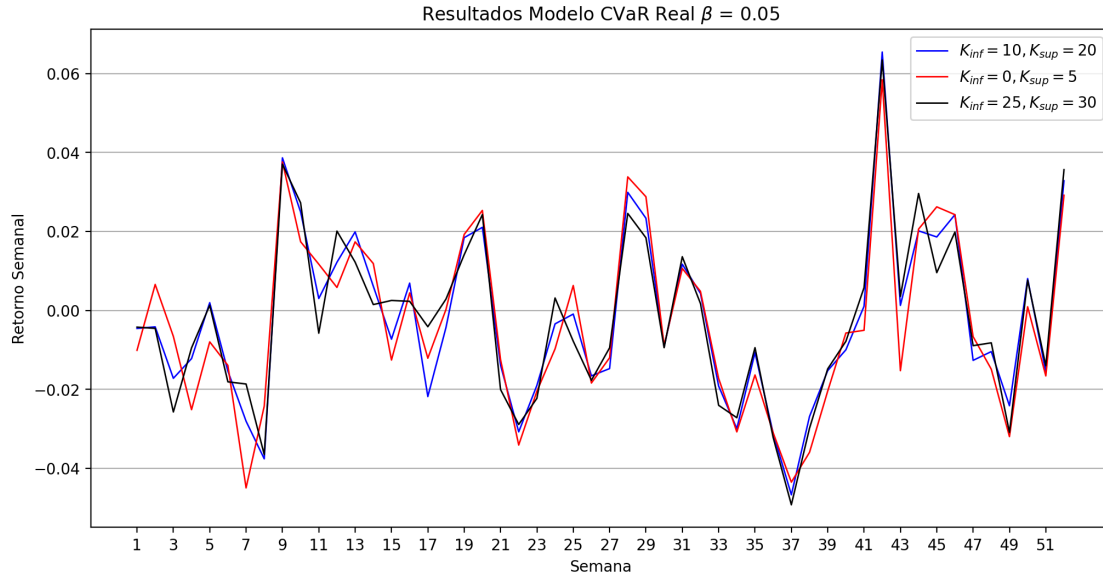


Figura 5.11: Resultados modelo CVaR Real distintos valores  $K_{sup}$  y  $K_{inf}$

valores de  $c$ . Como era de esperar, el aumento de los costes conlleva una reducción significativa de los retornos obtenidos.

Por último, podemos comparar los rendimientos de todos los modelos simulados en este apartado. Utilizamos el Ratio de Sharpe y el retorno medio. Los valores obtenidos se encuentran recogidos en la Tabla (5.4).

Modelo CVaR Real	Sh $\cdot 10^2$	Rm $\cdot 10^3$
$\beta = 0.05, K_{inf} = 0, K_{sup} = 5, c_j = 0.0005, L_j = 2500$	-14.153	-3.120
$\beta = 0.05, K_{inf} = 10, K_{sup} = 20, c_j = 0.0005, L_j = 2500$	-10.628	-2.276
$\beta = 0.05, K_{inf} = 25, K_{sup} = 30, c_j = 0.0005, L_j = 2500$	<b>-10.499</b>	<b>-2.235</b>
$\beta = 0.95, K_{inf} = 0, K_{sup} = 5, c_j = 0.0005, L_j = 2500$	-20.027	-7.895
$\beta = 0.95, K_{inf} = 10, K_{sup} = 20, c_j = 0.0005, L_j = 2500$	-19.295	-7.386
$\beta = 0.95, K_{inf} = 25, K_{sup} = 30, c_j = 0.0005, L_j = 2500$	-17.004	-6.131
$\beta = 0.05, K_{inf} = 10, K_{sup} = 20, c_j = 0.0005, L_j = 1$	-11.762	-2.531
$\beta = 0.05, K_{inf} = 10, K_{sup} = 20, c_j = 0.005, L_j = 1$	-34.995	-8.821

Tabla 5.4: Valores del Ratio de Sharpe y retorno medio

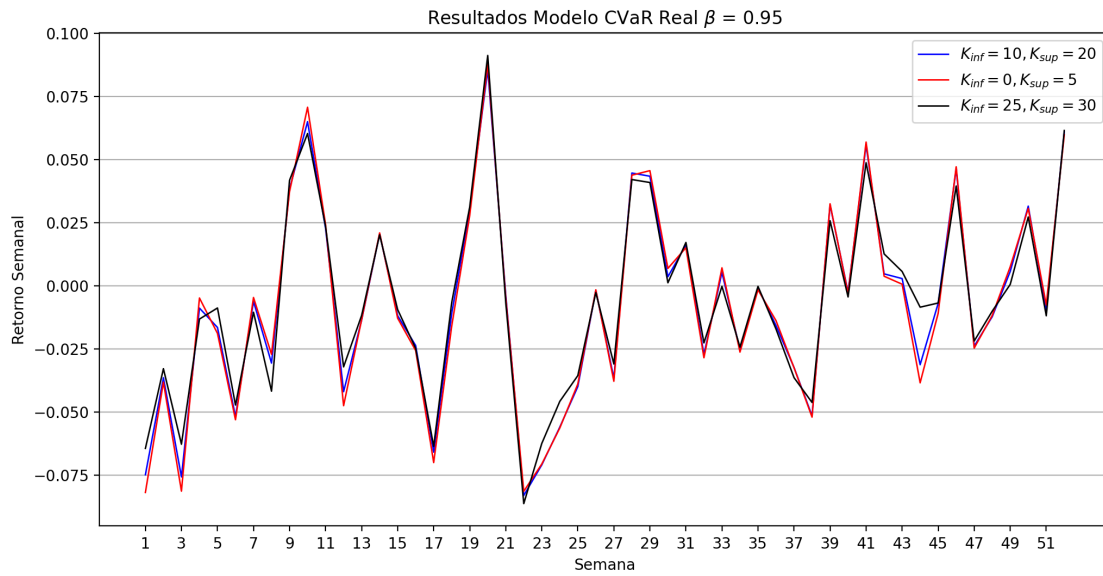


Figura 5.12: Resultados modelo CVaR Real distintos valores  $K_{sup}$  y  $K_{inf}$

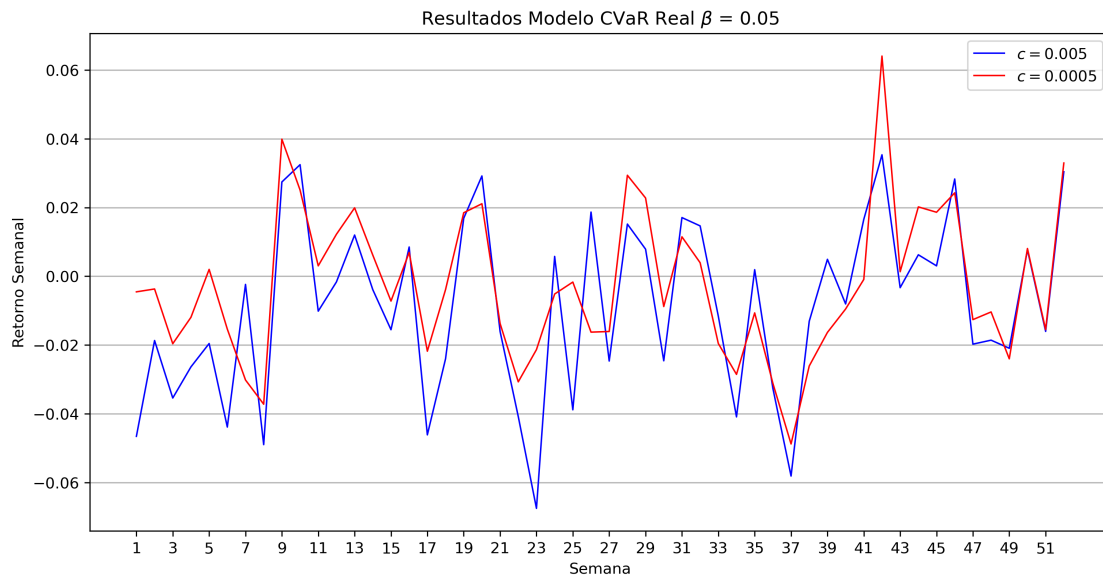


Figura 5.13: Resultados Modelo CVaR distintos  $T$ ,  $\beta = 0.05$

### 5.3. Modelo basado en agrupamiento

En este apartado realizaremos varias simulaciones para el modelo basado en agrupamiento (3.44).

Este modelo permite variar el tamaño del conglomerado que determina los activos que conforman la cartera óptima. El tamaño del conglomerado se representa mediante el parámetro  $p$ . El modelo permite también, controlar el efecto del agrupamiento variando el parámetro  $\lambda$ . Para  $\lambda = 0$  recuperamos el modelo (3.46) que no es más que el modelo CVaR (2.24) con una restricción de cardinalidad.

Comenzamos estudiando el efecto, sobre los resultados obtenidos, de la variación del parámetro  $p$  manteniendo fijo el parámetro  $\lambda$ . Realizamos simulaciones para  $p = 5, 10, 15$  con  $\lambda = 1$ . En la Figura 5.14 se representan las tasas de retorno obtenidas para cada una de las carteras de valores calculadas, junto con los retornos semanales del IBEX 35. Como puede observarse, los mejores resultados se obtienen para  $p = 5$ , seguido de  $p = 15$  y  $p = 10$ . Destaca la semana 8, donde aunque el IBEX 35 presente el menor retorno de la serie, el modelo de agrupamiento consigue reducir, prácticamente en su totalidad, las pérdidas obtenidas.

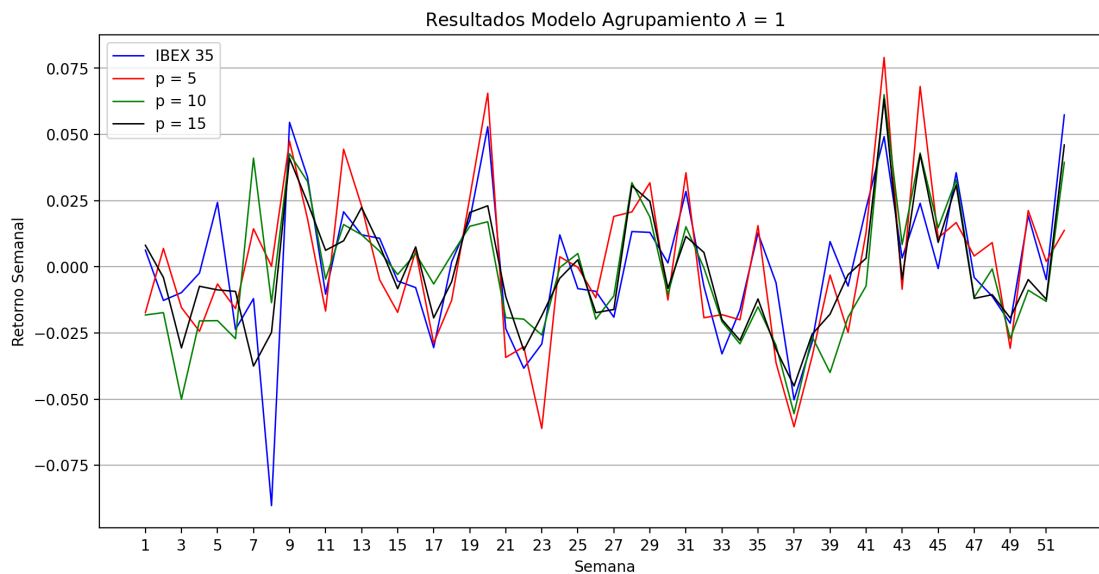


Figura 5.14: Resultados modelo agrupamiento distintos valores  $p$

Para tener una visión más clara de las diferencias entre los resultados obtenidos para diferentes valores de  $p$ , podemos representar el retorno acumulado a lo largo de las 52 semanas del año. Dicha representación puede visualizarse en la Figura 5.15. Cabe destacar el caso  $p = 5$ , que mejora significativamente el rendimiento del índice. De hecho, este modelo es el único que genera ganancias, a pesar de que el índice exhibe un retorno claramente negativo. Esto destaca su eficacia y demuestra su capacidad para obtener resultados positivos en condiciones adversas.

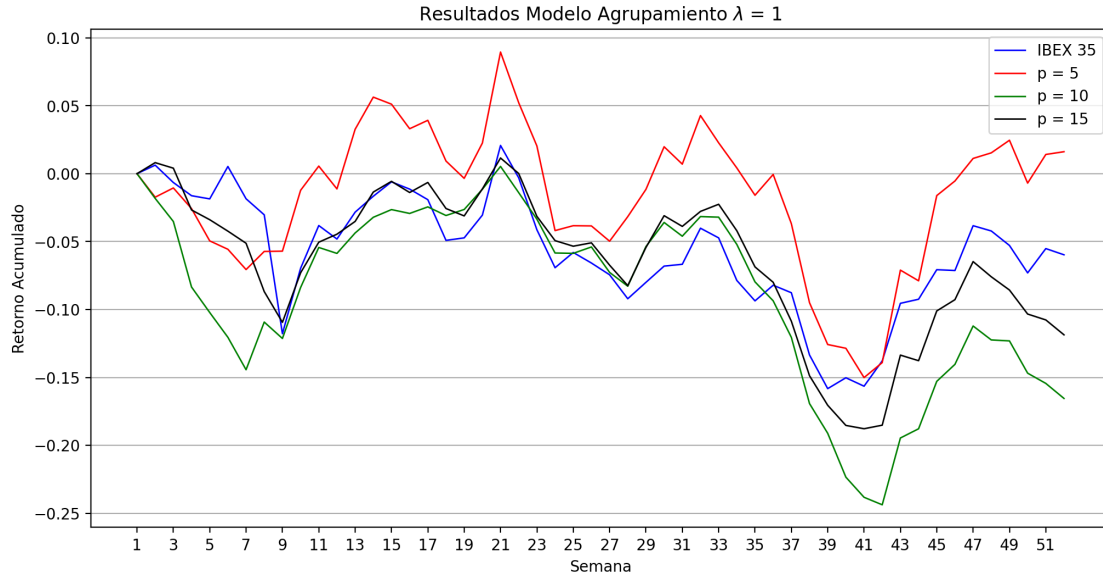


Figura 5.15: Retorno acumulado para distintos valores  $p$

Pasamos ahora a analizar la dependencia de los resultados obtenidos con el parámetro  $\lambda$ . Realizamos simulaciones para  $\lambda = 0, 0.5, 1$  para cada uno de los valores de  $p$  considerados con anterioridad. Los resultados obtenidos se presentan en las Figuras 5.16, 5.17 y 5.18. Como podemos observar, a medida que aumentamos el valor  $p$ , los resultados obtenidos para los distintos  $\lambda$  tienden a converger. Esto se debe a que la principal virtud del agrupamiento es representar, mediante unos pocos activos, las características del conjunto total de las componentes del índice. Dado que el número de componentes utilizadas es relativamente pequeño, concretamente 30 activos, para  $p = 15$  el conglomerado contará con la mitad del total de los activos. Así, solo  $30 - p = 15$  distancias tomarán valores no nulos. Esto provoca que los valores  $F_p^l$  y  $F_p^u$  sean muy similares y por tanto,  $F_p^0 = \lambda F_p^l + (1 - \lambda)F_p^u$  permanecerá prácticamente constante a pesar de que  $\lambda$  varíe.

Por último, podemos comparar los rendimientos de todos los modelos simulados mediante los valores obtenidos para el Ratio de Sharpe y el retorno medio. Estos datos se encuentran recogidos en la Tabla (5.5).

Medida	$\lambda = 0$	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.50$	$\lambda = 0.75$	$\lambda = 1$
$Sh \cdot 10^2 (p = 5)$	-0.172	-0.095	-0.201	0.038	<b>0.099</b>
$Rm \cdot 10^3 (p = 5)$	-78.523	-42.853	-87.871	17.063	<b>34.056</b>
$Sh \cdot 10^2 (p = 10)$	-5.718	<b>-4.091</b>	-7.159	-8.389	-9.750
$Rm \cdot 10^3 (p = 10)$	-1.236	<b>-0.865</b>	-1.514	-1.826	-2.424
$Sh \cdot 10^2 (p = 10)$	-5.238	-5.283	-5.342	<b>-5.117</b>	-5.794
$Rm \cdot 10^3 (p = 10)$	-1.136	-1.146	-1.160	<b>-1.111</b>	-1.309

Tabla 5.5: Valores del Ratio de Sharpe y retorno medio



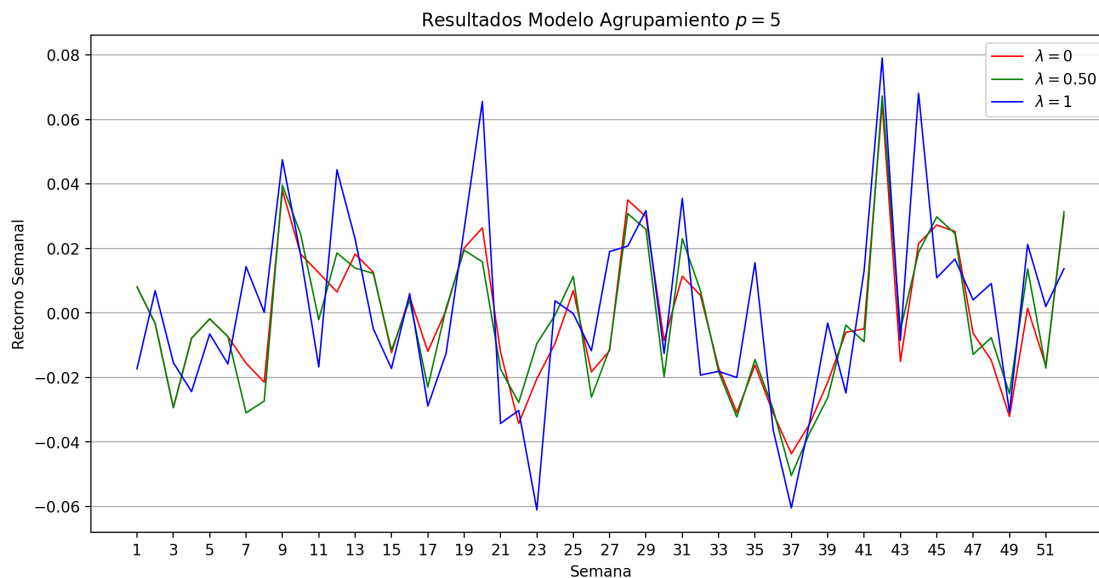


Figura 5.16: Resultados modelo agrupamiento  $p = 5$

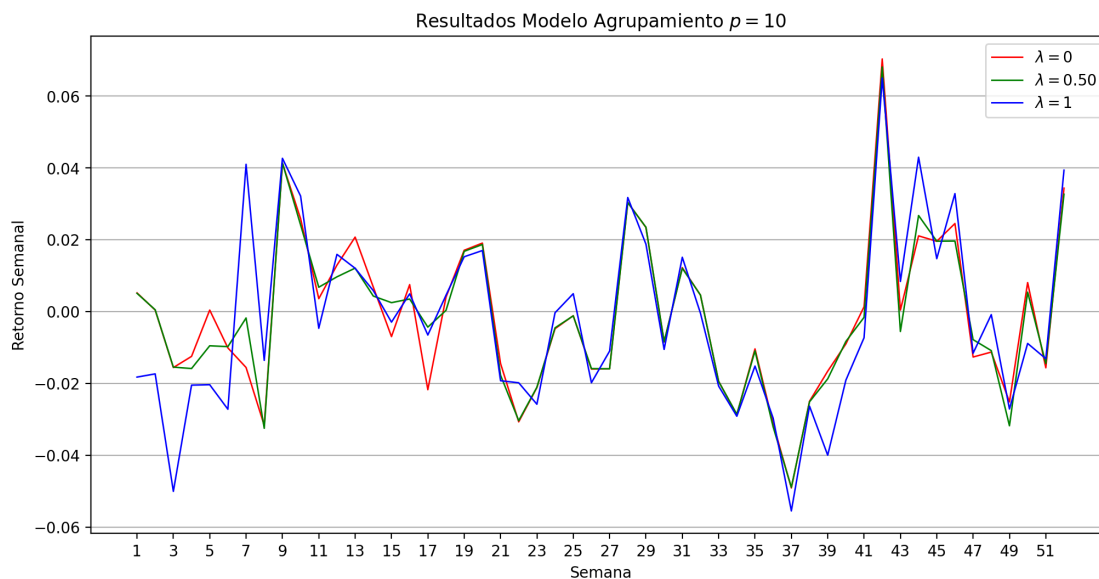


Figura 5.17: Resultados modelo agrupamiento  $p = 10$

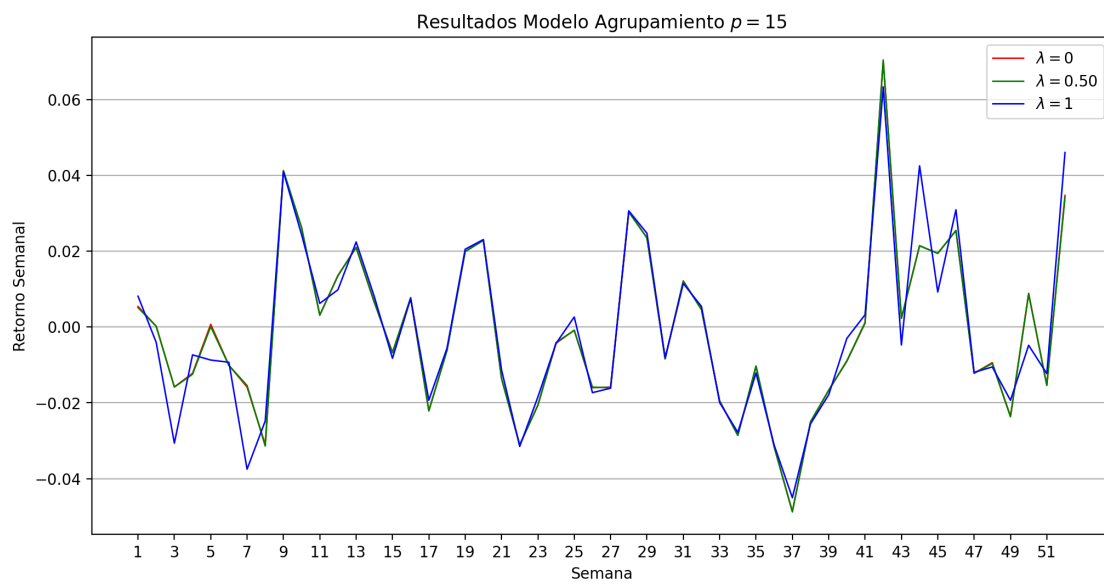


Figura 5.18: Resultados modelo agrupamiento  $p = 15$

# Capítulo 6

## Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos modelizado el problema de optimización de cartera de valores. Los distintos modelos planteados permiten adaptar el problema a las necesidades y preferencias de diferentes inversores, obteniéndose carteras que se ajustan a sus intereses.

Entre los distintos modelos, cabe destacar los buenos resultados obtenidos con el modelo de Markowitz a pesar de su simplicidad. En cuanto al modelo de agrupamiento, ha quedado demostrado en las simulaciones, que la fase de agrupamiento es una herramienta eficaz en el proceso de determinación de los pesos óptimos de los activos en la cartera, mejorando incluso los resultados del índice. El modelo de optimización bi-nivel, con costes de transacción como variables de decisión, ha permitido tener una visión del problema de optimización de cartera de valores desde el punto de vista de los brókers e instituciones financieras, y comprender mejor las relaciones de jerarquía en el mercado de valores.

Las simulaciones computacionales desempeñan un papel crucial en la parte práctica de este trabajo, ya que permiten evaluar y comparar diferentes estrategias de selección de carteras mediante la resolución de los modelos planteados. Se ha puesto de manifiesto que el método de datos históricos para generación de escenarios, a pesar de su simplicidad, es un método efectivo que ha arrojado resultados satisfactorios para la selección de cartera de valores.

En conclusión, este trabajo ha presentado una introducción completa al problema de selección de cartera de valores, abordando tanto su parte teórica como práctica con simulaciones computacionales. Los modelos y las simulaciones proporcionan una base sólida para futuros estudios y aplicaciones en el campo de la gestión de inversiones.



# Referencias

- [1] ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M., AND HEATH, D. Coherent measures of risk. Mathematical finance 9, 3 (1999), 203–228.
- [2] BARD, J. F. Practical bilevel optimization: algorithms and applications, vol. 30. Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] BAUMOL, W. An expected gain-confidence limit criterion for portfolio selection. Management Science 10, 1 (1963), 174–182.
- [4] BENDERS, J. F. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems ‘. Numerische mathematik 4, 1 (1962), 238–252.
- [5] BÜHLMANN, P. Bootstraps for time series. Statistical science (2002), 52–72.
- [6] CHANG, T.-J., MEADE, N., BEASLEY, J. E., AND SHARAIHA, Y. M. Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. Computers & Operations Research 27, 13 (2000), 1271–1302.
- [7] DANTZIG, G. B. Linear Programming and Extensions. RAND Corporation, Santa Monica, CA, 1963.
- [8] EMBRECHTS, P., KLÜPPELBERG, C., AND MIKOSCH, T. Modelling extremal events: for insurance and finance, vol. 33. Springer Science & Business Media, 2013.
- [9] GARCÍA, S., LABBÉ, M., AND MARÍN, A. Solving large p-median problems with a radius formulation. INFORMS Journal on Computing 23, 4 (2011), 546–556.
- [10] GLASSERMAN, P. Monte Carlo methods in financial engineering, vol. 53. Springer, 2004.
- [11] GOWER, J. C., AND ROSS, G. J. Minimum spanning trees and single linkage cluster analysis. Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics) 18, 1 (1969), 54–64.
- [12] GUASTAROBA, G., MANSINI, R., AND SPERANZA, M. G. On the effectiveness of scenario generation techniques in single-period portfolio optimization. European Journal of Operational Research 192, 2 (2009), 500–511.

- [13] HAKIMI, S. L. Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems. Operations research 13, 3 (1965), 462–475.
- [14] HANSEN, P., BRIMBERG, J., UROŠEVIĆ, D., AND MLADENOVIĆ, N. Solving large p-median clustering problems by primal–dual variable neighborhood search. Data Mining and Knowledge Discovery 19 (2009), 351–375.
- [15] KARIV, O., AND HAKIMI, S. L. An algorithmic approach to network location problems. i: The p-centers. SIAM journal on applied mathematics 37, 3 (1979), 513–538.
- [16] KELLERER, H., MANSINI, R., AND SPERANZA, M. G. Selecting portfolios with fixed costs and minimum transaction lots. Annals of Operations Research 99 (2000), 287–304.
- [17] KONNO, H., AND YAMAZAKI, H. Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to tokyo stock market. Management science 37, 5 (1991), 519–531.
- [18] LABBÉ, M., AND VIOLIN, A. Bilevel programming and price setting problems. Annals of operations research 240 (2016), 141–169.
- [19] LE THI, H. A., MOEINI, M., AND DINH, T. P. Dc programming approach for portfolio optimization under step increasing transaction costs. Optimization 58, 3 (2009), 267–289.
- [20] LEAL, M., PONCE, D., AND PUERTO, J. Portfolio problems with two levels decision-makers: Optimal portfolio selection with pricing decisions on transaction costs. European Journal of Operational Research 284, 2 (2020), 712–727.
- [21] LI, D., SUN, X., AND WANG, J. Optimal lot solution to cardinality constrained mean–variance formulation for portfolio selection. Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics 16, 1 (2006), 83–101.
- [22] MANSINI, R., OGRYCZAK, W., AND SPERANZA, M. G. Conditional value at risk and related linear programming models for portfolio optimization. Annals of operations research 152 (2007), 227–256.
- [23] MANSINI, R., OGRYCZAK, W., AND SPERANZA, M. G. Twenty years of linear programming based portfolio optimization. European Journal of Operational Research 234, 2 (2014), 518–535.
- [24] MANSINI, R., OGRYCZAK, W., AND SPERANZA, M. G. Linear and Mixed Integer Programming for Portfolio Optimization. EURO Advanced Tutorials on Operational Research. Springer International Publishing, 2015.

- [25] MANTEGNA, R. N. Hierarchical structure in financial markets. The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems 11 (1999), 193–197.
- [26] MARDIA, K., KENT, J., AND BIBBY, J. Multivariate analysis academic press inc. London) Ltd 15 (1979), 518.
- [27] MARKOWITZ, H. Portfolio selection. The Journal of Finance 7, 1 (1952), 77–91.
- [28] MARKOWITZ, H. M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. Yale University Press, 1959.
- [29] MCCORMICK, G. P. Computability of global solutions to factorable nonconvex programs: Part i—convex underestimating problems. Mathematical programming 10, 1 (1976), 147–175.
- [30] MORGAN, J. P. Riskmetrics-technical document 3rd edition. New York: Morgan Guaranty Trust Company (1995).
- [31] PFLUG, G. C. Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk. Probabilistic constrained optimization: Methodology and applications (2000), 272–281.
- [32] PUERTO, J., RODRÍGUEZ-MADRENA, M., AND SCOZZARI, A. Clustering and portfolio selection problems: A unified framework. Computers & Operations Research 117 (2020), 104891.
- [33] ROCKAFELLAR, R. T., URYASEV, S., ET AL. Optimization of conditional value-at-risk. Journal of risk 2 (2000), 21–42.
- [34] SHARPE, W. F. A linear programming approximation for the general portfolio analysis problem. Journal of Financial and Quantitative Analysis 6, 5 (1971), 1263–1275.
- [35] SHARPE, W. F. Mean-absolute-deviation characteristic lines for securities and portfolios. Management Science 18, 2 (1971), B–1.
- [36] TOLA, V., LILLO, F., GALLEGATI, M., AND MANTEGNA, R. N. Cluster analysis for portfolio optimization. Journal of Economic Dynamics and Control 32, 1 (2008), 235–258.
- [37] URYASEV, S. Conditional value-at-risk: Optimization algorithms and applications. In proceedings of the IEEE/IAFE/INFORMS 2000 conference on computational intelligence for financial engineering (CIFEr)(Cat. No. 00TH8520) (2000), IEEE, pp. 49–57.
- [38] YITZHAKI, S. Stochastic dominance, mean variance, and gini’s mean difference. The American Economic Review 72, 1 (1982), 178–185.
- [39] YOUNG, M. R. A minimax portfolio selection rule with linear programming solution. Management science 44, 5 (1998), 673–683.

- [40] YU, Y. H., LASDON, L. S., AND DA, D. On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics (1971), 296–297.