



FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y ANÁLISIS NUMÉRICO

Trabajo Fin de Grado

CONTROL EN DIMENSIÓN FINITA

Miguel Trujillo Alés

Dirigido por:
Diego Araujo de Souza

Sevilla, Julio 2023

A mi difunta abuela, a mi hermano, a mis padres y al resto de mis seres queridos.

Índice general

Introducción	7
1. Preliminares	12
1.1. Definiciones y resultados del Álgebra lineal	12
1.2. El bidual E^{**}	13
1.3. Topologías débiles. Espacios reflexivos	14
1.3.1. La topología mínima para la que un conjunto de aplicaciones son continuas	14
1.3.2. Definición y propiedades elementales de la topología débil $\sigma(E, E^*)$	15
1.3.3. Definición y propiedades elementales de la topología débil $\ast, \sigma(E^*, E)$. .	16
1.3.4. Los espacios reflexivos	17
1.4. Los espacios L^p	17
1.5. Los espacios de Sobolev $W^{1,p}$	19
2. Controlabilidad	21
2.1. Controlabilidad de sistemas lineales	21
2.1.1. Controlabilidad de sistemas lineales autónomos	22
2.1.2. Controlabilidad de sistemas lineales dependientes del tiempo	35
2.1.3. Geometría de los conjuntos accesibles	38
2.2. Controlabilidad de sistemas no lineales	41
2.2.1. Geometría de los los conjuntos accesibles	46
3. Estabilización	49
3.1. Estabilización de sistemas lineales autónomos	49
3.2. Estabilización de sistemas no lineales	60
3.2.1. Recordatorios de estabilidad: teoremas de Lyapunov y Lasalle	60
3.2.2. Aplicación a la estabilización de sistemas de control no lineal	64
3.2.3. El método de Jurdjevic-Quinn	70
Conclusiones	76

Abstract

The aim of this work is to give an introduction to control and stabilization theory in finite-dimensional spaces. It will be started exposing the basic concepts of controllability in finite-dimensional spaces. Throughout this first part, it is intended to apply these controllability concepts to different types of control systems. First, it will be studied the controllability of linear systems, for both autonomous and non-autonomous cases, with and without control constraints. It will be also seen the controllability of non-linear systems, but only local results. The main idea will be to establish sufficient conditions that ensure the controllability of nonlinear control systems. Finally, it will be also exposed the basic concepts of stability/stabilization in finite-dimensional spaces. Firstly, it is intended to apply these concepts to autonomous linear systems and it will be seen the difficulties that emerge when one tries to stabilize non-autonomous linear systems. It will be also studied the stabilization of non-linear control systems, where the theory of Lyapunov functions will be useful.

Resumen

El objetivo de este trabajo es presentar una introducción a la Teoría de control y estabilización en dimensión finita. Se comenzará exponiendo los conceptos básicos de controlabilidad en espacios de dimensión finita. A lo largo de esta primera parte, se pretende aplicar dichos conceptos de controlabilidad a diferentes tipos de sistemas de control. Primero, se estudiará la controlabilidad de sistemas lineales, tanto autónomos como no autónomos, con y sin restricciones en los controles. También se verá la controlabilidad de sistemas no lineales, pero solamente resultados locales. La idea principal será establecer condiciones suficientes que aseguren la controlabilidad de sistemas de control no lineales. Por último, se expondrán también los conceptos básicos de estabilidad/estabilización en espacios de dimensión finita. En primer lugar, se pretenderá aplicar estos conceptos a los sistemas de control lineales autónomos y se verán las dificultades que emergen al intentar estabilizar sistemas lineales no autónomos. También se estudiará la estabilización de sistemas no lineales, siendo necesario el uso de la teoría de las funciones de Lyapunov.

Agradecimientos

A mi padre, mi madre y mi hermano. Gracias por facilitarme el camino. Si no fuera por vosotros, no habría llegado hasta este escalón de una larga escalera que estoy a punto de terminar de subir. Soy quien soy a día de hoy por los valores que me habéis transmitido. Aquí también debo incluir a Diana Peñalver. Gracias por escucharme siempre.

A mis verdaderos amigos que he conocido durante estos años: Rafael Porras, Beatriz Martínez y Antonio Castillo; y a mis amigos de la infancia: África Sierra, Ester Hidalgo y Manuel Quero. En algún momento de este periodo han sido el Séneca que asesoraba a Lucilio en sus crisis de existencia a través de sus epístolas.

A mi entrenador de powerlifting Alberto Vega y a todos los componentes del Club powerlifting Chipiona. Él no solo me retó en otros ámbitos de la vida como es el mundo de la competición, sino que me fortaleció un músculo muy importante: el de la voluntad del alma. Gracias a él, he sido capaz de compaginar mis dos pasiones: las matemáticas y la física y el levantamiento de potencia, siendo ambas muy exigentes, tanto a nivel mental como físico. Gracias a tí, he sido capaz de soportar cuatro o cinco horas de clase y entrenamientos de nueve a once de la noche, para después, a la mañana siguiente, volver a clase y atender las obligaciones que ello conllevaba.

A mis profesores de instituto. A Paco, de física, por embelesarme con su pasión a la hora de dar clases y quedarse con sus alumnos hasta la una de la madrugada con su telescopio. A Antonino Mediado y a Wenceslao Narváez, por intentar transmitirme cómo son las matemáticas verdaderamente. En último lugar, a Mercedes Marín, de Biología, por enseñarme que las clases van más allá de unas lecciones y que en muchas ocasiones, un profesor puede llegar a ser un gran apoyo en la vida. En los momentos de máxima dificultad, recurría a ellos en mi interior para recordar el porqué empecé en esto.

Finalmente, a mi tutor Diego Araujo de Souza, por su gran disponibilidad y confianza en mi persona. Con este trabajo fin de grado, he vuelto a recuperar esa pasión dormida que tenía por las matemáticas. Como me dijo en algún momento: “Lo bueno que tienen los matemáticos es que nunca están solos. Siempre habrá algún matemático que te pueda ayudar en tus problemas”. Así lo he sentido. Gracias también a Manuel González Burgos, por proponerle a Diego que fuera mi tutor.

Este trabajo fin de grado es tanto mío como vuestro.

Introducción

La teoría de control es el área de las matemáticas que lidia con los principios subyacentes al análisis y diseño de los sistemas de control. *Controlar* un objeto puede entenderse como la acción de influir en su comportamiento con la finalidad de conseguir un objetivo determinado. Para implementar dicha influencia en la respuesta del objeto en cuestión los ingenieros diseñan dispositivos que incorporan varias técnicas matemáticas. Estos aparatos van desde el regulador de la máquina de vapor de Watt, confeccionado durante la Revolución Industrial inglesa, hasta complejos controladores de microprocesador que se encuentran en artículos de consumo (tales como los automóviles) o en robots industriales y pilotos automáticos en aviones.

Desde un punto de vista genérico, en la teoría de control han existido dos líneas de trabajo que en ocasiones parece que han tomado direcciones opuestas, pero que en realidad son complementarias. La primera línea se basa en la idea de que un buen modelo del objeto que se quiere controlar es asequible y la finalidad de dicho modelo es *optimizar* de alguna forma el comportamiento del objeto en cuestión. Por ejemplo, los principios de la Física y las especificaciones de la Ingeniería, pueden emplearse (y de hecho, se emplean) con el fin de calcular la trayectoria de una nave espacial que minimiza el tiempo total de vuelo o el consumo de combustible. Las técnicas aquí empleadas están íntimamente relacionadas con el cálculo de variaciones clásico y otras áreas de la teoría de optimización. Por otro lado, la segunda línea se fundamenta en las restricciones impuestas por la incertidumbre asociada al modelo o al entorno en el que el objeto opera. La herramienta principal aquí es usar la *retroalimentación* con el fin de corregir desviaciones respecto al comportamiento deseado. Por ejemplo, varios sistemas de control retroalimentados se emplean en vuelos espaciales reales con el fin de compensar los errores en la trayectoria precalculada. Desde un punto de vista matemático, la teoría de estabilidad/estabilización, los sistemas dinámicos y especialmente la teoría de las funciones de una variable compleja han tenido una fuerte influencia en este campo de estudio. Hoy en día, se reconoce en un amplio rango que estas dos grandes líneas de trabajo tratan con diferentes aspectos de un mismo problema.

No solo se puede realizar un recorrido en la historia de los sistemas de control, sino que estos se encuentran de forma extensa en la naturaleza. Los mecanismos de control son empleados por organismos vivos con el fin de mantener variables esenciales como la temperatura corporal y los niveles de glucosa en sangre en unos puntos deseados. En la época de los romanos, ya se encontraban niveles de agua en acueductos que se mantenían constantes mediante el uso de varias combinaciones de válvulas. En el siglo XVII comenzaron los primeros desarrollos modernos. En este período, las necesidades asociadas a la navegación tuvieron una fuerte influencia en las investigaciones científicas y tecnológicas. Se necesitaban relojes precisos para determinar la hora solar. El matemático y astrónomo alemán Christiaan Huygens y su coetáneo Robert Hooke compitieron a la hora de diseñar relojes de péndulo con el fin de analizar el problema del control de velocidad. Durante el siglo XVIII, la atención se centró en los molinos de viento, y los *controles de velocidad* basados en las ideas de los dos científicos anteriores comenzaron a diseñarse. La idea principal aquí era el empleo de los *centrifugadores*: dos bolas unidas a un eje giran junto al molino de viento, de tal manera que la fuerza centrífuga debida a la velocidad angular hace que se eleven; a su vez, este movimiento ascendente afecta a las posiciones de las aspas del molino de viento. Por tanto, la retroalimentación se implementó por los enlaces del centrifugador con las aspas. No obstante, no fue hasta la Revolución Industrial, con la adaptación realizada

en 1769 por James Watt de los *reguladores centrífugos* a la máquina de vapor, cuando los mecanismos de control empezaron a tener popularidad; el problema en aquel entonces era regular la velocidad del motor a pesar de una carga variable. Un error en el estado estacionario era posible por lo que varios inventores introdujeron variaciones de la idea de la *retroalimentación integral* con el fin de solventar este problema. Fue el matemático y astrónomo George Airy, el que alrededor de 1840, intentó por primera vez llevar a cabo un análisis del regulador y dispositivos similares. En 1868, existían aproximadamente 75.000 reguladores Watt en uso; ese mismo año, el físico escocés James Clerk Maxwell publicó el primer tratado matemático completo sobre sus características y fue capaz de explicar los comportamientos erráticos que se habían observado de forma eventual además del efecto del *control integral*. Su trabajo dio lugar a la primera oleada de investigaciones teóricas sobre el control, mientras que las caracterizaciones de la estabilidad se obtuvieron de forma independiente por los matemáticos A. Hurwitz y E.J. Routh. Esta teoría se aplicó en diferentes áreas como el estudio de los sistemas de dirección de los barcos. En los años 30 del siglo XX, los investigadores de los laboratorios de Bell Telephone desarrollaron la teoría de los *amplificadores de retroalimentación*, basados en el cumplimiento de la estabilidad y de respuestas apropiadas de los circuitos eléctricos. Este trabajo realizado por H. Nyquist, H.W. Bode, y otros, constituyen incluso en la actualidad, el fundamento de muchos de los diseños de señal. Los ordenadores analógicos también aparecieron alrededor de esta época y constituyeron la implementación de los controladores en las industrias químicas y petrolíferas. Durante la Segunda Guerra Mundial, estas técnicas se emplearon en el diseño de las baterías antiaéreas y los sistemas de control de incendios, aplicaciones que continúan desarrollándose hasta hoy. El matemático Norbert Wiener, que desarrolló una teoría de la estimación de los procesos aleatorios empleados en estas aplicaciones, acuñó al final de la guerra el término *cibernética* para referirse a la teoría de control y a áreas relacionadas. Estas denominadas aproximaciones clásicas fueron en su mayoría limitadas por su restricción a los sistemas lineales autónomos con entradas y salidas escalares. Solo durante la década de los años 50, la teoría de control comenzó a desarrollar potentes técnicas generales que permitieron tratar sistemas multivariable dependientes del tiempo, al igual que muchos sistemas no lineales. Las contribuciones por parte de Richard Bellman y Rudolf Kalman en los Estados Unidos, y por L. Pontryagin en la Unión Soviética, formaron las bases de un vasto esfuerzo de investigación durante la década los años 60, que continúa hasta estos días. La investigación teórica actual en teoría de control involucra una variedad de áreas de matemáticas puras. Los conceptos y resultados de estas áreas dan lugar a aplicaciones en la teoría de control; recíprocamente, preguntas sobre los sistemas de control dan lugar a nuevos problemas en matemáticas que están todavía abiertos. En los artículos [11] y en el libro [12] se pueden encontrar excelentes referencias de los primeros trasfondos históricos, mientras que otras referencias como los informes [13] y [14] contienen vistas globales de las investigaciones actuales y problemas abiertos.

En relación a este Trabajo Fin de Grado, se hará un estudio en profundidad de la segunda línea de trabajo, con la particularidad de que se trabajará en dimensión finita. Se abordarán tres puntos principales. En primer lugar, en un capítulo a modo de preliminares se presentará una serie de definiciones y resultados que se apoyan en ramas de las matemáticas como el Álgebra Lineal, la Topología y el Análisis Funcional y que se emplearán de forma auxiliar en las demostraciones de algunos teoremas que se mencionarán más adelante y que forman parte del segundo punto a tratar. Se verán conceptos como el *bidual* de un *espacio vectorial*, las *topologías débil y débil** (que se contruyen a partir del concepto de *topología mínima* para que un conjunto de aplicaciones sean continuas), los *espacios reflexivos*, los *espacios L^p* y los *espacios de Sobolev $W^{1,p}$* . En cuanto a los otros dos puntos, estos constituyen el contenido principal de este Trabajo Fin de Grado. En el primero en cuestión, se tratará la noción de *controlabilidad*, mientras que en el segundo la de *estabilización* (en este punto se pondrá de manifiesto la segunda línea de trabajo mencionada previamente).

En relación al tema de controlabilidad, se comenzará definiendo qué es un sistema de control,

junto con la noción de *conjunto accesible*, esto es, el conjunto de los estados que se pueden alcanzar, desde un estado inicial x_0 dado y en un tiempo T concreto mediante una función control u que, junto con el estado inicial, determina la solución del sistema de control. Esta función control u podrá tomar sus valores en todo el espacio, o por el contrario, estar restringida a un subconjunto Ω . También se establecerá cuándo un sistema de control es *controlable* en un tiempo T .

Una vez establecidas estas definiciones, se procederá a estudiar la controlabilidad de los *sistemas lineales autónomos* sin restricciones en el control. Se dará una condición necesaria y suficiente que asegurará la controlabilidad de este tipo de sistemas de control. Recibe el nombre de *Condición de Kalman* y se trata de una comprobación algebraica. Esta condición será a su vez, equivalente a una serie de propiedades que se recogerán en el conocido *Test de Hautus*. Como aplicación de este resultado, se estudiará la controlabilidad del *circuito RLC*. Asimismo, se aportarán dos resultados que arrojarán información acerca de la controlabilidad de sistemas de control lineales autónomos con restricciones en el control. A todo esto se suma también un apartado dedicado al estudio de los *sistemas similares*. Este tipo de sistemas tendrán gran importancia en la parte de estabilización, pues se empleará el conocido *Teorema de la forma normal de Brunovski* (permite establecer la similitud entre un sistema lineal autónomo cualquiera y un sistema lineal autónomo con unas matrices determinadas) para probar el también conocido *Teorema del cambio de polo*. En cuanto a *sistemas lineales dependientes del tiempo*, se verá el concepto de *matriz Gramiana*. De forma análoga al caso autónomo, una condición necesaria y suficiente que asegura la controlabilidad de un sistema de control no autónomo en un tiempo T es que dicha matriz Gramiana sea invertible. Junto con esta condición, se aportará también un resultado en el que si se verifica una condición algebraica concreta, se podrá asegurar de nuevo la controlabilidad en el tiempo T . En este tipo de sistemas no se impondrán restricciones sobre el control. No obstante, se adjuntará un resultado que establece cómo es el conjunto accesible en el caso en el que el conjunto de las restricciones Ω sea compacto y convexo.

Pasando ahora al estudio de la controlabilidad de los *sistemas de control no lineales*, se comenzará viendo cómo obtener el *sistema linealizado* a lo largo de una trayectoria asociada a un control u del sistema de control no lineal. Si dicho sistema linealizado a lo largo de dicha trayectoria es controlable en un tiempo T , entonces se podrá decir que el sistema no lineal es *localmente* controlable en el tiempo T . Con este resultado se deducirán dos corolarios asociados a la controlabilidad local alrededor de un punto de equilibrio y el denominado *Método de retorno*, respectivamente. En el primero se tendrá como hipótesis que el sistema linealizado en el punto de equilibrio es controlable, por lo que se podrá asegurar la controlabilidad local alrededor del punto de equilibrio para el sistema no lineal; mientras que en el segundo, se asumirá como hipótesis que el sistema linealizado es controlable a lo largo de una trayectoria en *bucle* no trivial en el tiempo T . Como aplicación de este último corolario, se estudiará el *modelo del camino de Dubins*. En este tipo de sistemas tampoco se considerarán restricciones sobre el control, pero del mismo modo, se aportará un resultado que da información sobre la geometría del conjunto accesible. Asimismo, tan solo se verán resultados de controlabilidad local, ya que los de controlabilidad *global* requieren de un apoyo matemático más complejo.

Finalmente, se hará un estudio del tema de estabilización. En primer lugar, se verá la estabilidad de los sistemas lineales autónomos. Se comenzará viendo las nociones de punto de equilibrio *estable* y *asintóticamente estable* aplicadas al origen, junto con un teorema de caracterización basado en el estudio del signo de la parte real de los autovalores de la matriz que define al sistema lineal autónomo. Seguidamente se pasará a ver el concepto de *matriz Hurwitz* (matriz en la que todos los autovalores tienen parte real negativa). Para ver si una matriz es Hurwitz, se explicarán dos criterios, el de *la tabla de Routh* y el de Hurwitz. Como aplicación de la tabla de Routh, se estudiará la estabilización del *regulador de Jenkin*. Este dispositivo fue descrito por Maxwell en uno de sus artículos sobre reguladores, un hecho que ya se mencionó previamente a la hora de recorrer toda la historia de la Teoría de control. En segundo lugar, se verá cuándo

un sistema lineal autónomo es *estabilizable de forma retroalimentada* mediante un *control de retroalimentación*, que se define a partir de una *matriz de ganancia* y la solución del sistema. Mediante el ya mencionado *Teorema del cambio de Polo* se podrá garantizar la existencia de dicha matriz de ganancia. Pasando a la estabilización de los sistemas lineales no autónomos, se describirán las grandes dificultades a la hora de intentar estabilizar este tipo de sistemas. Como consecuencia de esto, no se podrán establecer resultados concluyentes.

En cuanto a los sistemas no lineales, se partirá de nociones como *función de Lyapunov* y los bien conocidos *Teorema de Lyapunov* y *Principio de LaSalle*. Junto a todo esto, se mostrará un resultado con el que se podrá ver la estabilidad local del sistema no lineal en un punto de equilibrio gracias al estudio del signo de la parte real de los autovalores de la matriz jacobiana en el punto de equilibrio en cuestión del sistema linealizado. Este resultado recibe el nombre de *Teorema de linealización*. Para finalizar, se verá un apartado dedicado a aplicaciones a la estabilización de sistemas de control no lineal. Como ejemplo, se intentará estabilizar asintóticamente de forma retroalimentada y localmente al sistema físico del *péndulo inverso*. En dicho ejemplo no solo habrá un desarrollo teórico, sino que también se desarrollará un apartado en el que se emplee el software *Matlab* con el fin de obtener representaciones gráficas que muestren la estabilización asintótica local del sistema. También se verá el *Método de Jurdjevic-Quinn*, con el fin de ilustrar el papel de las funciones de Lyapunov en el diseño de controles retroalimentados para la estabilización de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Glosario

En este glosario se lleva a cabo una serie de aclaraciones respecto a la notación empleada a lo largo de este documento.

- $\|\cdot\|_E$ se emplea para denotar la norma de un elemento perteneciente a un espacio normado genérico E . Si E es un espacio L^p , con $1 \leq p \leq \infty$ entonces la norma de uno de los elementos perteneciente a dicho espacio también puede denotarse por $\|\cdot\|_{L^p}$ o simplemente $\|\cdot\|_p$.
- $(\cdot, \cdot)_E$ se emplea para denotar al producto escalar de dos elementos de un espacio vectorial E genérico (ya sea de dimensión finita, como el caso de \mathbb{R}^n , con $n \in \mathbb{N}$; o de dimensión infinita, como el caso de L^p , con $1 \leq p \leq \infty$). Cuando no haya confusión y para simplificar la notación, se empleará simplemente en muchas ocasiones (\cdot, \cdot) .
- $|\cdot|_{2,n}$ se emplea para denotar la norma euclídea de un vector n -dimensional, i.e.,

$$|x|_{2,n} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n).$$

Cuando no haya confusión con el valor absoluto, esta notación se puede simplificar, usando únicamente $|\cdot|$.

- $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ se emplea para denotar al conjunto de matrices de tamaño $n \times m$ con coeficientes en un cuerpo \mathbb{K} (en este Trabajo de Fin de Grado, por lo general $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
- $GL_n(\mathbb{K})$ se emplea para denotar al conjunto de matrices invertibles de tamaño $n \times n$ con coeficientes en un cuerpo \mathbb{K} .

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introductorio se van a recoger una serie de definiciones, teoremas y proposiciones de Topología, Álgebra lineal y Análisis funcional, que se emplearán en las demostraciones de varios de los teoremas estudiados en este trabajo de fin de grado.

1.1. Definiciones y resultados del Álgebra lineal

El contenido de esta sección se recoge en [2, Capítulo 10, páginas 215-218]

Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} y sea $\|\cdot\|$ una norma multiplicativa sobre $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ (i.e. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, para todas las matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$), definida como:

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{|Ax|}{|x|} : x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0 \right\}.$$

El espacio vectorial $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) := \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ es de dimensión n^2 sobre \mathbb{K} , por lo que los elementos I, A, \dots, A^{n^2} son linealmente dependientes. Como consecuencia, existen unos polinomios P anuladores de A , esto es, tales que $P(A) = 0$. El anillo $\mathbb{K}[X]$ es principal y el ideal de polinomios anuladores de A admite a un único generador normalizado, esto es, un único polinomio de menor grado, con coeficiente líder igual a 1 tal que A lo anula; a este polinomio se le denomina *polinomio minimal* de A y se denota por π_A . Asimismo, el *polinomio característico* de A , denotado por $\chi_A(X)$, se define como:

$$\chi_A(X) = \det(XI - A).$$

En particular, el polinomio minimal π_A divide al polinomio característico χ_A . Nótese que *grado* $\chi_A = n$ y *grado* $\pi_A \leq n$.

Al escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ se le denomina *autovalor* o *valor propio*, si existe un vector no nulo $v \in \mathbb{K}^n$, denominado *autovector* o *vector propio*, tal que $Av = \lambda v$. El *espacio propio* asociado al autovector λ se define como:

$$E(\lambda) = \ker(A - \lambda I)$$

y es el espacio generado por los autovectores asociados al autovalor λ .

Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, los autovalores de A son exactamente las raíces del polinomio característico χ_A . En particular se tiene:

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i} \quad \text{y} \quad \pi_A(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{s_i},$$

con $s_i \leq m_i$. El entero s_i (respectivamente m_i) se denomina *orden de nilpotencia* (respectivamente *multiplicidad* algebraica) del valor propio de λ_i . Asimismo, el orden de nilpotencia se

define como el menor entero $p \geq 1$ para el que $(A - \lambda I)^p = 0$, con λ autovalor de A . Con todo esto, el *espacio característico* del autovalor λ_i se define como:

$$N(\lambda_i) = \ker(X - \lambda)^{s_i}.$$

Se muestra a continuación dos teoremas de gran relevancia [2, página 216, Teorema 10.2.1 y página 217, Teorema 10.2.3, respectivamente].

La demostración de este teorema se puede consultar en [15, Capítulo 4, página 147, Teorema 4.26].

Teorema 1.1. (*Teorema de Hamilton-Cayley*). $\chi_A(A) = 0$, o equivalentemente:

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n I = 0,$$

donde a_1, \dots, a_n son los coeficiente del polinomio característico de A .

La demostración de este teorema se puede consultar en [15, Capítulo 5, secciones 5.2 y 5.3, páginas 165-172].

Teorema 1.2. (*Descomposición de Jordan*). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Suponga que π_A es divisible en \mathbb{K} (siempre es el caso para \mathbb{C}) tal que $\pi_A(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{s_i}$. Entonces, existe una matriz $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tal que:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_r \end{pmatrix},$$

donde A_i son matrices por bloques:

$$A_i = \begin{pmatrix} J_{i,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_{i,e_i} \end{pmatrix},$$

con $J_{i,k}$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq k \leq e_i$, los denominados bloques de Jordan, que son matrices cuadradas de la forma:

$$J_{i,k} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

No teniendo todos forzosamente el mismo orden $|J_{i,k}|$. Para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, se tiene $e_i = \dim E(\lambda_i)$ y $\max_{1 \leq k \leq e_i} |J_{i,k}| = s_i$.

1.2. El bidual E^{**}

El contenido de esta sección se recoge en [1, Capítulo 1, páginas 3, 4 y 8].

Definición 1.1. Sea E un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Un funcional es una función definida sobre E o sobre algún subespacio de E con valores en \mathbb{R} .

Se denota por E^* al espacio dual de E , i.e.,

$$E^* = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es un funcional lineal y continuo } \},$$

con:

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in E}} |f(x)|.$$

Dado $f \in E^*$ y $x \in E$, a veces se escribirá $\langle f, x \rangle$ en vez de $f(x)$. Se dice que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar para la dualidad E^*, E .

A continuación, se adjunta la siguiente proposición [1, página 4, Corolario 1.4].

Proposición 1.1. *Para cada $x \in E$ se tiene que:*

$$\|x\|_E = \sup_{\substack{\|f\| \leq 1 \\ f \in E^*}} |\langle f, x \rangle| = \max_{\substack{\|f\| \leq 1 \\ f \in E^*}} |\langle f, x \rangle|.$$

Definición 1.2. *Sea E un espacio vectorial y E^* su dual. El bidual, denotado por E^{**} , es el dual de E^* con la norma:*

$$\|\xi\|_{E^{**}} = \sup_{\substack{\|f\| \leq 1 \\ f \in E^*}} |\xi(f)|.$$

Definición 1.3. *Existe una inyección canónica $J : E \rightarrow E^{**}$ definida como sigue: dado $x \in E$, la aplicación $f \mapsto \langle f, x \rangle$ es un funcional lineal y continuo en E^* ; es decir, es un elemento de E^{**} , que se denota por Jx . Se tiene que:*

$$\langle Jx, f \rangle_{E^{**}, E^*} = \langle f, x \rangle_{E^*, E}, \quad \forall x \in E, \quad \forall f \in E^*.$$

Está claro que J es lineal y J es una isometría, esto es, $\|Jx\|_{E^{**}} = \|x\|_E$. En efecto, por la Proposición 1.1 se tiene que:

$$\|Jx\|_{E^{**}} = \sup_{\substack{\|f\| \leq 1 \\ f \in E^*}} |\langle Jx, f \rangle| = \sup_{\substack{\|f\| \leq 1 \\ f \in E^*}} |\langle f, x \rangle| = \|x\|_E.$$

Puede ocurrir que J no sea sobreyectiva de E en E^{**} . No obstante, es conveniente identificar E con el subespacio E^{**} usando J . Si J resulta ser sobreyectiva, entonces se dice que E es reflexivo y E^{**} se identifica con E (esto se verá con más detalle en la sección 1.3.4).

1.3. Topologías débiles. Espacios reflexivos

El contenido de esta sección se recoge en [1, Capítulo 3, secciones 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5, páginas 55, 57, 60, 67 y 72 (respectivamente)].

1.3.1. La topología mínima para la que un conjunto de aplicaciones son continuas

Sea X un conjunto (sin ninguna estructura) e $\{Y_i\}_{i \in I}$ una colección de *espacios topológicos*. Sea $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ una colección de aplicaciones tal que para cada $i \in I$, $\varphi_i : X \mapsto Y_i$. Se considera el siguiente problema.

Problema 1.1. *Construir una topología en X que haga a todas las aplicaciones $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ continuas. Si es posible, encontrar una topología \mathcal{T} que sea la más económica en el sentido de que es la que tiene menos conjuntos abiertos.*

Se verá, que siempre hay una (única) topología “más barata” \mathcal{T} en X para la que cada aplicación φ_i es continua. Se denomina la topología *mínima* o *débil* asociada a la colección $\{\varphi_i\}_{i \in I}$.

Si $\omega_i \subset Y_i$ es cualquier conjunto abierto, entonces $\varphi_i^{-1}(\omega_i)$ es *necesariamente* un conjunto abierto en \mathcal{T} . Como ω_i recorre la familia de conjuntos abiertos de Y_i e i recorre I , obtenemos una familia de subconjuntos de X , cada uno de los cuales *debe* ser abierto en la topología \mathcal{T} . A esta familia se denota por $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Por supuesto, esta familia no tiene por qué ser una topología. Se tiene entonces el siguiente problema.

Problema 1.2. *Dado un conjunto X y una familia $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de subconjuntos de X , construir la topología “más barata” \mathcal{T} en X , en la que U_λ es abierto para todo $\lambda \in \Lambda$.*

En otras palabras, se debe encontrar la familia más económica \mathcal{F} , de subconjuntos de X que sea estable bajo \cap_{finita} y $\cup_{arbitraria}$ (i.e., la intersección finita de conjuntos de \mathcal{F} y la unión arbitraria de conjuntos de \mathcal{F} pertenecen ambas a \mathcal{F}) y con la propiedad de que $U_\lambda \in \mathcal{F}$ para todo $\lambda \in \Lambda$. La construcción es la siguiente. Primero, se consideran intersecciones finitas de conjuntos en $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, i.e., $\cap_{\lambda \in \Gamma} U_\lambda$ donde $\Gamma \subset \Lambda$ es finito. De esta forma, se obtiene una nueva familia, llamada Φ , de subconjuntos de X , que incluye $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ y que es estable bajo \cap_{finita} . Sin embargo, no tiene por qué ser estable bajo $\cup_{arbitraria}$. Por tanto, se considera ahora la familia \mathcal{F} obtenida a partir de la unión arbitraria de elementos de Φ . Está claro que \mathcal{F} es estable bajo $\cup_{arbitraria}$. No está claro que \mathcal{F} sea estable bajo \cap_{finita} . No obstante, se tiene el siguiente resultado ([1, página 56, Lema 3.1]).

Lema 1.1. *La familia \mathcal{F} es estable bajo \cap_{finita} .*

Para resumir esta discusión se tiene que los conjuntos abiertos de \mathcal{F} se obtienen considerando primero \cap_{finita} de los conjuntos de la forma $\varphi_i^{-1}(\omega_i)$ y luego $\cup_{arbitraria}$. Se sigue que para cada $x \in X$, se obtiene una base de entornos de x para la topología \mathcal{T} considerando conjuntos de la forma $\cap_{finita} \varphi_i^{-1}(V_i)$, donde V_i es un entorno de $\varphi_i(x)$ en Y_i .

En lo que sigue, a X se le equipa con la topología \mathcal{T} que es la topología mínima o débil asociada a la colección $\{\varphi_i\}_{i \in I}$.

Se muestra ahora una propiedad simple que caracteriza la convergencia de sucesiones en la topología \mathcal{F} ([1, página 56, Proposiciones 3.1 y 3.2]).

Proposición 1.2. *Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X . Entonces $x_n \rightarrow x$ (en \mathcal{F}) si y solo si $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x)$ para cada $i \in I$.*

1.3.2. Definición y propiedades elementales de la topología débil $\sigma(E, E^*)$

Sea E un espacio de Banach y sea $f \in E^*$. Se denota por $\varphi_f : E \rightarrow \mathbb{R}$ al funcional lineal $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Como f recorre E^* obtenemos una colección $\{\varphi_f\}_{f \in E^*}$ de aplicaciones de E en \mathbb{R} . Se ignora ahora la topología usual en E (asociada a $\|\cdot\|_E$) y se define una nueva topología en el conjunto E como sigue:

Definición 1.4. *La topología débil $\sigma(E, E^*)$ en E , es la topología mínima asociada a la colección $\{\varphi_f\}_{f \in E^*}$ (en el sentido de la subsección 1.3.1 con $X = E$, $Y_i = \mathbb{R}$, para cada i , y $I = E^*$).*

Observación 1.1. *Si una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en E converge a x en la topología débil $\sigma(E, E^*)$ se escribirá*

$$x_n \rightarrow x.$$

Para evitar cualquier tipo de confusión, a veces se dirá “ $x_n \rightarrow x$ débilmente en $\sigma(E, E^)$ ”. Con el fin de ser completamente claro a veces se enfatizará la convergencia fuerte diciendo “ $x_n \rightarrow x$ fuertemente”, significando que $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.*

En la siguiente proposición ([1, página 58 Proposición 3.5]) se muestra unas caracterizaciones de la convergencia débil en $\sigma(E, E^*)$.

Proposición 1.3. *Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en E . Entonces:*

1. $[x_n \rightarrow x \text{ débilmente en } \sigma(E, E^*)] \Leftrightarrow [\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \forall f \in E^*]$.
2. Si $x_n \rightarrow x$ fuertemente, entonces $x_n \rightarrow x$ débilmente en $\sigma(E, E^*)$.
3. Si $x_n \rightarrow x$ débilmente en $\sigma(E, E^*)$, entonces $\{\|x_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada y $\|x_n\| \leq \liminf \|x_n\|$.
4. Si $x_n \rightarrow x$ débilmente en $\sigma(E, E^*)$ y si $f_n \rightarrow f$ fuertemente en E^* (i.e., $\|f_n - f\|_{E^*} \rightarrow 0$), entonces $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Se sabe que todo conjunto débilmente cerrado es fuertemente cerrado, pero el recíproco es falso en espacios infinito-dimensionales. No obstante, es muy útil saber que para conjuntos convexos, débilmente cerrado coincide con fuertemente cerrado, tal y como se muestra en el siguiente teorema ([1, página 60, Teorema 3.7]).

Teorema 1.3. *Sea C un subconjunto convexo de E . Entonces C es cerrado en la topología débil $\sigma(E, E^*)$ si y solo si es cerrado en la topología fuerte.*

Como consecuencia de este teorema, se obtiene el Teorema de Mazur ([1, página 61, Corolario 3.8]).

Proposición 1.4. *(Teorema de Mazur). Asuma que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente a x . Entonces, existe una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ constituida por combinaciones convexas de los x_n que converge fuertemente a x .*

1.3.3. Definición y propiedades elementales de la topología débil $*$, $\sigma(E^*, E)$

Por ahora, se tienen las siguientes topologías en E^* :

1. la topología (fuerte) usual asociada a la norma de E^* ,
2. la topología débil $\sigma(E^*, E^{**})$, obtenida aplicando a E^* la construcción de la subsección 1.3.2.

Se va a definir ahora una *tercera topología* en E^* llamada topología débil $*$ y denotada por $\sigma(E^*, E)$ (la $*$ se emplea aquí para recordar que esta topología se define solo en espacios duales). Para cada $x \in E$ se considera el funcional lineal $\varphi_x : E^* \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $f \mapsto \varphi_x(f) = \langle f, x \rangle$. Como x recorre E obtenemos una colección $\{\varphi_x\}_{x \in E}$ de aplicaciones de E^* en \mathbb{R} .

Definición 1.5. *La topología débil $*$, $\sigma(E^*, E)$ es la topología mínima en E^* asociada a la colección $\{\varphi_x\}_{x \in E}$ (en el sentido de la subsección 1.3.1 con $X = E^*$, $Y_i = \mathbb{R}$, para todo i e $I = E$).*

Observación 1.2. *Si una sucesión $\{f_n\}$ en E^* converge a f en la topología débil $*$ se escribirá:*

$$f_n \xrightarrow{*} f.$$

Para evitar cualquier confusión algunas veces se enfatizará “ $f_n \xrightarrow{*} f$ en $\sigma(E^*, E)$ ”, “ $f_n \rightarrow f$ en $\sigma(E^*, E^{**})$ ” o “ $f_n \rightarrow f$ fuertemente”.

En la siguiente proposición ([1, página 63 Proposición 3.13]) se muestra unas caracterizaciones de la convergencia débil en $\sigma(E^*, E)$.

Proposición 1.5. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión en E^* . Entonces:*

1. $[f_n \xrightarrow{*} f \text{ en } \sigma(E^*, E)] \Leftrightarrow [\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \forall x \in E]$.
2. Si $f_n \rightarrow f$ fuertemente, entonces $f_n \rightarrow f$ en $\sigma(E^*, E^{**})$.
Si $f_n \rightarrow f$ en $\sigma(E^*, E^{**})$, entonces $f_n \xrightarrow{*} f$ en $\sigma(E^*, E)$.
3. Si $f_n \xrightarrow{*} f$ en $\sigma(E^*, E)$ entonces $\{\|f_n\|\}$ está acotada y $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.
4. Si $f_n \xrightarrow{*} f$ en $\sigma(E^*, E)$ y si $x_n \rightarrow x$ fuertemente en E , entonces $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

1.3.4. Los espacios reflexivos

Definición 1.6. Sea E un espacio de Banach y sea $J : E \rightarrow E^{**}$ la inyección canónica de E en E^{**} (ver definición 1.3). El espacio E se dice que es reflexivo si J es sobreyectivo, i.e., $J(E) = E^{**}$.

Cuando E es reflexivo, E^{**} se identifica normalmente con E .

Observación 1.3. Muchos espacios importantes en análisis son reflexivos. Claramente, los espacios finito-dimensionales son reflexivos (dado que $\dim E = \dim E^* = \dim E^{**}$). Los espacios L^p con $1 < p < \infty$ son reflexivos (ver sección 1.4). Sin embargo, espacios igualmente importantes en análisis no son reflexivos; por ejemplo: L^1 y L^∞ no son reflexivos (ver sección 1.4).

A continuación, se adjunta un teorema de gran relevancia ([1, página 69, teorema 3.18]).

Teorema 1.4. Sea E un espacio de Banach reflexivo y sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en E . Entonces existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge en la topología débil $\sigma(E, E^*)$.

1.4. Los espacios L^p

Definición 1.7. Se dice que la terna $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio medible, si Ω es un conjunto y:

I. \mathcal{M} es un σ -álgebra en Ω , i.e., \mathcal{M} es una colección de subconjuntos de Ω tales que:

- a) $\emptyset \in \mathcal{M}$.
- b) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$.
- c) $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$, siempre y cuando $A_n \in \mathcal{M}$, $\forall n$.

II. μ es una medida, i.e., $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ satisface:

- a) $\mu(\emptyset) = 0$.
- b) $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ siempre y cuando $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sea una familia de miembros de \mathcal{M} disjunta y numerable.

Los miembros de \mathcal{M} reciben el nombre de conjuntos medibles. Se puede escribir también $|A|$ en lugar de $\mu(A)$.

III. Ω es σ -finita, i.e., existe una familia numerable $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathcal{M} tal que $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ y $\mu(\Omega_n) < \infty$, $\forall n$.

Los conjuntos $E \in \mathcal{M}$ con la propiedad de que $\mu(E) = 0$, se llaman *conjuntos de medida nula*. Se dice que una propiedad es cierta p.c.t (o para casi todo $x \in \Omega$) si se cumple en todo Ω excepto en un conjunto de medida nula.

De ahora en adelante se considerará familiar las nociones de *funciones medibles* y *funciones integrables* $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Se denota por $L^1(\Omega, \mu)$ o simplemente $L^1(\Omega)$ (o incluso L^1) al espacio de las funciones integrables de Ω en \mathbb{R} . Asimismo se tiene que:

$$\|f\|_{L^1} = \|f\|_1 = \int_{\Omega} |f| d\mu = \int_{\Omega} |f|.$$

Se procede ahora a definir los espacios L^p .

Definición 1.8. Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 < p < \infty$:

$$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es medible y } |f|^p \in L^1(\Omega)\},$$

con:

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu \right]^{1/p}.$$

Asimismo:

$$L^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es medible y existe una constante } C \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ p.c.t } x \in \Omega\},$$

con:

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \inf\{C \mid |f(x)| \leq C \text{ p.c.t } x \in \Omega\}.$$

A continuación se muestra una desigualdad que será empleada con frecuencia ([1, página 92, teorema 4.6]).

Definición 1.9. Sea $1 \leq p \leq \infty$; se denota por p' al exponente conjugado de p , i.e., al número que cumple:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Teorema 1.5. (Desigualdad de Hölder.) Sea $f \in L^p$ y $g \in L^{p'}$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $fg \in L^1$ y:

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Se adjuntan también una serie de teoremas que serán de gran utilidad a lo largo de este documento ([1, página 90, teorema 4.2; página 93, teoremas 4.7 y 4.8; página 94, teorema 4.9; página 95, teorema 4.10]).

Teorema 1.6. (Teorema de la convergencia dominada). Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en L^1 que satisfice:

1. $f_n(x) \rightarrow f(x)$ p.c.t $x \in \Omega$.
2. existe una función $g \in L^1$ tal que para todo n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.c.t $x \in \Omega$.

Entonces $f \in L^1$ y $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$.

Teorema 1.7. L^p es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_p$ es una norma para cualquier p , $1 \leq p \leq \infty$.

Teorema 1.8. L^p es un espacio de Banach para cualquier p , $1 \leq p \leq \infty$.

Teorema 1.9. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en L^p y sea $f \in L^p$ tal que $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$. Entonces, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ y una función $h \in L^p$ tal que:

1. $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ p.c.t $x \in \Omega$.
2. $|f_{n_k}| \leq h(x)$ p.c.t $x \in \Omega$.

Teorema 1.10. L^p es reflexivo para cualquier p , con $1 < p < \infty$.

Teorema 1.11. (Teorema de representación de Riesz).

- Sea $1 < p < \infty$ y sea $\varphi \in (L^p)^*$. Entonces existe una única función $u \in L^{p'}$ tal que:

$$\langle \varphi, u \rangle = \int u f, \quad \forall f \in L^p.$$

Además,

$$\|u\|_{p'} = \|\varphi\|_{(L^p)^*}.$$

- Sea $p = 1$ y sea $\varphi \in (L^1)^*$. Entonces existe una única función $u \in L^\infty$ tal que:

$$\langle \varphi, u \rangle = \int u \varphi, \quad \forall \varphi \in L^1.$$

Además,

$$\|u\|_\infty = \|\varphi\|_{(L^1)^*}.$$

Observación 1.4. En lo que sigue, se pueden hacer las identificaciones siguientes:

$$(L^p)^* \equiv L^{p'},$$

con $1 < p < \infty$.

$$(L^1)^* \equiv L^\infty.$$

Observación 1.5. Los espacios $L^1(\Omega)$ y $L^\infty(\Omega)$ no son reflexivos. No obstante, $L^\infty(\Omega)$ cumple la siguiente propiedad de gran importancia.

Si Ω es un subconjunto medible de \mathbb{R}^n y $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $L^\infty(\Omega)$, entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ y un $f \in L^\infty(\Omega)$ tal que $f_{n_k} \rightarrow f$ en la topología débil $*$ $\sigma(L^\infty, L^1)$.

1.5. Los espacios de Sobolev $W^{1,p}$

El contenido de esta sección se recoge en [1, Capítulo 9, páginas 263 y 264].

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$.

Definición 1.10. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ se define como:

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \exists g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tales que} \right. \\ \left. \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \right\}.$$

Cuando no haya confusión se escribirá a veces $W^{1,p}$ en vez de $W^{1,p}(\Omega)$.

Se establece:

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ se define $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$, y se escribe:

$$\nabla u = \text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ está equipado con la norma:

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p,$$

o a veces con la norma equivalente $(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^N \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_p^p)^{1/p}$ (si $1 \leq p < \infty$).

El espacio $H^1(\Omega)$ está equipado con el producto escalar:

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2} = \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

La norma asociada:

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2^2 \right)^{1/2}$$

es equivalente a la norma de $W^{1,2}$.

Observación 1.6. En la definición de $W^{1,p}$, $C_c^\infty(\Omega)$ es el espacio de las funciones test φ , es decir, el espacio de las funciones φ que pertenecen a C^∞ y tienen soporte compacto.

Observación 1.7. La teoría de distribuciones aporta un significado a $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, es un elemento del espacio de las distribuciones $\mathcal{D}'(\Omega)$. Usando el lenguaje de las distribuciones se puede decir que $W^{1,p}(\Omega)$ es el conjunto de las funciones $u \in L^p(\Omega)$ para el que todas las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$ (en el sentido de las distribuciones) pertenecen a $L^p(\Omega)$.

Proposición 1.6. $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach para cada $1 \leq p \leq \infty$. $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio reflexivo para cada $1 < p < \infty$.

Capítulo 2

Controlabilidad

Sean n y m dos números enteros positivos. En este capítulo se considera un *sistema de control* en \mathbb{R}^n :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (2.1)$$

donde x es la *variable estado*, u es la *variable control* y $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continuamente diferenciable con respecto a (x, u) y localmente integrable con respecto a t . Los controles son funciones del tiempo, medibles y esencialmente acotadas que toman sus valores en algún subconjunto medible Ω de \mathbb{R}^m (*conjunto de las restricciones sobre los controles*).

En primer lugar, dados un estado inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y un control $u \in L^\infty(0, T; \Omega)$, existe una única solución x , absolutamente continua en I_0 , de (2.1) tal que $x(0) = x_0$, máximamente definida en algún intervalo I_0 de \mathbb{R} conteniendo al 0. Nótese que este teorema generalizado de Cauchy-Lipschitz no es exactamente el usual dado que aquí la dinámica puede ser discontinua (debido al control). Para una versión general de existencia y unicidad de este teorema, se recurre a [2, Capítulo 11, páginas 219-225] y [3, Apéndice C.3, página 474]. La ecuación diferencial (2.1) se tiene para casi todo t del intervalo maximal. Dado un tiempo $T > 0$ y un punto inicial x_0 , se dice que el control $u \in L^\infty(0, T; \Omega)$ es *admisibles* siempre y cuando la correspondiente solución x , tal que $x(0) = x_0$, está bien definida en todo el intervalo $[0, T]$. El conjunto de controles admisibles en $[0, T]$ se denota por $U_{x_0, T, \Omega}$.

Definición 2.1. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $T > 0$. El conjunto accesible $ACC_\Omega(x_0, T)$ se define como el conjunto de todos los puntos $x(T)$, donde x es una solución del sistema de control (2.1), con $x(0) = x_0$, asociada a algún control $u \in U_{x_0, T, \Omega}$. De forma resumida:

$$ACC_\Omega(x_0, T) = \{x(T) \mid \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), x(0) = x_0, u \in U_{x_0, T, \Omega}\}.$$

Definición 2.2. El sistema de control (2.1) se dice que es controlable en tiempo T si para todo x_0 de \mathbb{R}^n se tiene que $ACC_\Omega(x_0, T) = \mathbb{R}^n$.

El objetivo de este capítulo es estudiar la propiedad de controlabilidad para sistemas de controles lineales y no lineales, con y sin restricciones en los controles.

2.1. Controlabilidad de sistemas lineales

Se dice que el sistema de control es *lineal* siempre que:

$$f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u + r(t),$$

con $A \in L^\infty_{loc}(0, T; \mathcal{M}_{n \times n})$, $B \in L^\infty_{loc}(0, T; \mathcal{M}_{n \times m})$ y $r \in L^\infty_{loc}(0, T; \mathbb{R}^n)$ (en realidad, L^1 sería suficiente). El sistema lineal se dice que es *no autónomo* siempre y cuando las matrices A y B dependan de t , y se dice que es *autónomo* si $A(t) = A$ y $B(t) = B$, es decir no dependan del

tiempo. Nótese que, para sistemas de control lineales no hay explosión en tiempo finito (i.e., la admisibilidad es cierta en cualquier intervalo).

Haciendo referencia a los sistemas lineales autónomos, se distinguirán dos casos: en el primero no habrá restricciones sobre el control, mientras que en el segundo, si se impondrán. En cuanto al primer caso, se probará una condición necesaria y suficiente para la controlabilidad, que se conoce como *condición de Kalman*. En cuanto al segundo caso, también se contemplará un resultado de controlabilidad tomando la condición de Kalman como hipótesis. En la subsección referida a este tipo de sistemas lineales también se verá la noción de *similitud* entre sistemas, junto con un resultado (*Teorema de la Forma Normal de Brunovski*) que garantiza la similitud entre un sistema cualquiera y un sistema de una forma concreta que se especificará más adelante.

Por otro lado, haciendo mención a los sistemas lineales dependientes del tiempo, se demostrarán dos importantes resultados que garantizarán la controlabilidad del sistema siempre y cuando no se impongan restricciones sobre el control. Aunque en este caso no se podrá establecer un teorema que asegure la controlabilidad del sistema si se consideran restricciones sobre el control, sí será posible estudiar la geometría del conjunto accesible sin más que imponer al conjunto de las restricciones propiedades como la compacidad y la convexidad del mismo.

2.1.1. Controlabilidad de sistemas lineales autónomos

En esta sección, se asume que $A(t) = A$ y $B(t) = B$.

Caso sin restricciones en el control: condición de Kalman

El famoso teorema de Kalman ofrece una condición necesaria y suficiente para sistemas de control lineales autónomos sin restricciones en el control.

Teorema 2.1. *Supongamos que $\Omega = \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $T > 0$. El sistema de control*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

es controlable en el tiempo T si y solo si la matriz de Kalman (de tamaño $n \times mn$):

$$K(A, B) := (B, AB, \dots, A^{n-1}B),$$

es de rango máximo igual a n .

Observación 2.1. *La condición de Kalman de arriba no depende ni de T , ni de x_0 . Esto implica que si un sistema de control lineal autónomo es controlable en algún tiempo T , comenzando en algún x_0 , entonces también es controlable en cualquier tiempo, comenzando en cualquier punto. Nótese que la condición de Kalman es puramente algebraica y fácil de comprobar.*

Prueba. Para cada u se tiene un SDO lineal con coeficientes constantes:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + b_u(t), \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

con $b_u(t) := Bu(t) + r(t)$.

Se procede a obtener la única solución x del sistema (2.2) asociada al control u y con valor inicial $x(0) = x_0$. El SDO homogéneo es:

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \quad (2.3)$$

La matriz fundamental asociada al SDO homogéneo (2.3) es $F_A(t) = e^{tA}$, donde e^{tA} es la exponencial de la matriz A , esto es:

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!},$$

con $F_A(0) = I_n$. Por tanto, la solución general del SDO homogéneo viene dada por:

$$x_h(t) = F_A(t)c_h,$$

con $c_h \in \mathbb{R}^n$.

Se busca ahora una solución particular $\hat{x}(t)$ del SDO no homogéneo (2.2) de la forma $\hat{x}(t) = F_A(t)c(t)$ con $c \in W^{1,\infty}(0, T; \mathbb{R}^n)$. Para obtener $c(t)$ se impone:

$$\dot{F}_A(t)c(t) + F_A(t)\dot{c}(t) = AF_A(t)c(t) + b_u(t).$$

Teniendo en cuenta que $\dot{F}_A(t) = AF_A(t)$, se obtiene:

$$F_A(t)\dot{c}(t) = b_u(t),$$

o equivalentemente $\dot{c}(t) = F_A^{-1}(t)b_u(t)$, con $F_A^{-1}(t) = e^{-tA}$. Si se fija un punto t_0 (por ejemplo, $t_0 = 0$), se llega a:

$$c(t) = \hat{c} + \int_0^t F_A^{-1}(s)b_u(s)ds.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + \hat{x}(t) \\ &= F_A(t)c_h + F_A(t) \left(\hat{c} + \int_0^t F_A^{-1}(s)b_u(s)ds \right) \\ &= F_A(t)(c_h + \hat{c}) + F_A(t) \int_0^t F_A^{-1}(s)b_u(s)ds \\ &= e^{tA}(c_h + \hat{c}) + \int_0^t e^{(t-s)A}b_u(s)ds. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Como $x(0) = x_0$, teniendo en cuenta la expresión anterior, se obtiene $x_0 = c_h + \hat{c}$. En definitiva:

$$\begin{aligned} x(T) &= e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-s)A}b_u(s)ds \\ &= e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-s)A}r(s)ds + \int_0^T e^{(T-s)A}Bu(s)ds \\ &= e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-s)A}r(s)ds + L_T u, \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} L_T : L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\longmapsto L_T u := \int_0^T e^{(T-s)A}Bu(s)ds. \end{aligned}$$

Este operador satisface las siguientes propiedades:

- **Linealidad:** se tiene por la linealidad de la integral. En efecto, para $u, v \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} L_T(\alpha u + \beta v) &= \int_0^T e^{(T-s)A}B(\alpha u(s) + \beta v(s))ds \\ &= \alpha \int_0^T e^{(T-s)A}Bu(s)ds + \beta \int_0^T e^{(T-s)A}Bv(s)ds \\ &= \alpha L_T u + \beta L_T v. \end{aligned}$$

- Continuidad: hay que probar que existe una constante $C > 0$ tal que:

$$|L_T u|^2 \leq C \|u\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R}^m)}^2, \quad \forall u \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^m).$$

En efecto, para $u \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^m)$ y usando la desigualdad de Hölder (véase el Teorema 1.5) se tiene:

$$\begin{aligned} |L_T u|^2 &= \left| \int_0^T e^{(T-t)A} B u(t) dt \right|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \int_0^T (e^{(T-t)A} B u(t))_i dt \right|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\int_0^T |(e^{(T-t)A} B u(t))_i| dt \right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n T \int_0^T |(e^{(T-t)A} B u(t))_i|^2 dt \\ &\leq T \max_{t \in [0,T]} |u(t)|^2 \int_0^T \|e^{(T-t)A} B\|^2 dt \\ &= C \|u\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R}^m)}^2, \end{aligned}$$

$$\text{con } C := T \int_0^T \|e^{(T-t)A} B\|^2 dt.$$

En términos de este operador, está claro que el sistema es controlable para el tiempo T si y solo si L_T es sobreyectivo. Entonces, el teorema es una consecuencia inmediata del siguiente resultado.

Lema 2.1. *La matriz Kalman $K(A,B)$ es de rango n si y solo si L_T es sobreyectivo.*

Prueba. Se hace en primer lugar la implicación de izquierda a derecha. Por reducción al absurdo, se supone que L_T no es sobreyectivo. Entonces $\text{Im}(L_T) \neq \mathbb{R}^n$ y en consecuencia, $\text{Im}(L_T)$ es un subespacio cerrado de \mathbb{R}^n y por lo tanto, $\mathbb{R}^n = \text{Im}(L_T) \oplus \text{Im}(L_T)^\perp$. De aquí se deduce que $\text{Im}(L_T)^\perp \neq \emptyset$. Por tanto, existe $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ que es ortogonal a $\text{Im}(L_T)$, esto es:

$$\psi^\top \int_0^T e^{(T-s)A} B u(s) ds = 0, \quad \forall u \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^m).$$

Esto implica:

$$\psi^\top e^{(T-t)A} B = 0, \quad \forall t \in [0,T].$$

Tomando $t = T$ se obtiene $\psi^\top B = 0$. Entonces, si se deriva la ecuación de arriba respecto a t y se toma $t = T$ se obtiene $\psi^\top A B = 0$. Reiterando en la derivación, se obtiene que $\psi^\top A^k B = 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$. En particular $\psi^\top \cdot K(A,B) = 0$ y por consiguiente el rango de $K(A,B)$ es menor que n .

Se hace en segundo lugar la implicación de derecha a izquierda. Por reducción al absurdo, se supone que el rango de $K(A,B)$ es menor que n , luego existe $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $\psi^\top \cdot K(A,B) = 0$, y por tanto $\psi^\top A^k B = 0$, para cada $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Por el Teorema de Hamilton-Cayley (véase el Teorema 1.1), existen números reales a_0, a_1, \dots, a_{n-1} tales que

$$A^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k.$$

Por tanto, se obtiene fácilmente que $\psi^\top A^n B = 0$. Usando el hecho de que

$$A^{n+1} = \sum_{k=1}^n a_{k-1} A^k,$$

se llega también a que $\psi^\top A^{n+1} B = 0$. Por recurrencia inmediata, se infiere que $\psi^\top A^k B = 0$, para cada $k \in \mathbb{N}$, y por tanto, usando la expansión en serie de la exponencial de A , se obtiene que $\psi^\top e^{(T-s)A} B = 0$ para cada $s \in [0, T]$. Se concluye que $\psi^\top L_T u = 0$ para cada $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$, por lo que L_T no es sobreyectivo. \square

\square

Se va a ver ahora una aplicación del teorema anterior. En este ejemplo, se va a estudiar el *circuito RLC*, que está modelado por un sistema de control lineal y autónomo.

Ejemplo 2.1. (*Circuito RLC*). *En teoría de circuitos, un circuito RLC es un circuito lineal que contiene una resistencia eléctrica de valor R , una bobina con inductancia L y un condensador de capacidad C . Dicho circuito se modela mediante la siguiente EDO:*

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = u,$$

donde $q = \int_0^t i(s) ds$ es la carga del condensador, u es la fuerza electromotriz de un generador e i es la intensidad de la corriente que circula por el circuito. Por tanto, se tiene el siguiente SDO:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= i, \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{R}{L}i - \frac{1}{LC}q + \frac{1}{L}u. \end{aligned}$$

Expresándolo de forma matricial:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} u,$$

se llega a que:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix},$$

con $n = 2$ y $m = 1$ (i.e., hay un único control). La matriz de Kalman (de tamaño 2×2 es:

$$K(A, B) = (B, AB) = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{R}{L^2} \\ 0 & \frac{1}{L} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene rango máximo 2, aún cuando $R = 0$ (es el caso en el que el circuito carece de resistencia). Asimismo, el circuito RLC es controlable independientemente del valor de la capacidad C . También hay que destacar que para valores muy elevados de la inductancia, tendiendo a infinito (en este caso, la intensidad de corriente sería constante en el circuito en cuestión y la carga en el condensador sería una función afín, es decir, de la forma $q(t) = c_1 + c_2 t$, con c_1 y c_2 constantes que dependen de las condiciones iniciales) la matriz de Kalman sería nula, por lo que no sería controlable. Esto tiene sentido, ya que para estos valores elevados de L el control también sería nulo.

A continuación se adjunta un lema (junto con su prueba) que se empleará de forma auxiliar para probar un resultado de caracterización. Dicho resultado de caracterización recibe el nombre de *Test de Hautus* y en él se puede ver que una serie de afirmaciones, entre las cuales se encuentra la condición de Kalman, son equivalentes.

Lema 2.2. Sean p y q dos números enteros positivos y $A : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ un operador lineal y continuo que viene dado por una matriz A de tamaño $q \times p$. A es sobreyectivo si y solo si A^\top es inyectivo, donde $A^\top : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$ es el operador adjunto de A , que viene dado por la matriz traspuesta A^\top de tamaño $p \times q$.

Prueba. En primer lugar se hace la implicación de izquierda a derecha. Supóngase que $A : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ es sobreyectivo, esto es:

$$\forall z \in \mathbb{R}^q, \exists w \in \mathbb{R}^p \mid Aw = z.$$

Hay que probar que $A^\top : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$ es inyectivo, esto es:

$$z \in \mathbb{R}^q \mid A^\top z = 0 \Rightarrow z = 0.$$

Sea $\hat{z} \in \mathbb{R}^q$ tal que $A^\top \hat{z} = 0$, entonces $(A^\top \hat{z}, w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{R}^p$. Como A es sobreyectivo, se toma $\hat{w} \in \mathbb{R}^p$ tal que $A\hat{w} = \hat{z}$. Entonces $(\hat{z}, \hat{z}) = 0$ por lo que $\hat{z} = 0$. Por consiguiente A^\top es inyectivo.

Se hace ahora la implicación de derecha a izquierda. Supóngase por reducción al absurdo que $A : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ no es sobreyectivo. Entonces, se tiene que existe $\hat{z} \in \mathbb{R}^q$ con $\hat{z} \neq 0$ tal que $(Aw, \hat{z}) = 0$ para todo $w \in \mathbb{R}^p$. Esto implica que $(w, A^\top \hat{z}) = 0$ para todo $w \in \mathbb{R}^p$, es decir, $A^\top \hat{z} = 0$ lo que es lo mismo que $\hat{z} \in \ker A^\top$. Como $\hat{z} \neq 0$, A^\top no es inyectivo. Se llega así a un absurdo. \square

Proposición 2.1. (Test de Hautus). Las siguientes aseercciones son equivalentes:

1. El par (A, B) satisface la condición de Kalman, es decir, $\text{rg}(K(A, B)) = n$;
2. $\forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ rg}(\lambda I - A, B) = n$;
3. $\forall \lambda \in \text{Spec}(A) \text{ rg}(\lambda I - A, B) = n$;
4. $\forall z$ autovector de A^\top , $B^\top z \neq 0$;
5. $\exists c > 0 \mid \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{R}^n \mid |(\lambda I - A^\top)z|^2 + |B^\top z|^2 \geq c|z|^2$;

Prueba. En primer lugar, se demuestra la equivalencia entre los puntos 1 y 4. Se hace primero la implicación de 1 a 4. Por reducción al absurdo, supóngase que existe $z_\lambda \in \mathbb{R}^n$ autovector de A^\top (i.e., $z_\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $A^\top z_\lambda = \lambda z_\lambda$, donde λ es autovalor de A^\top) tal que $B^\top z_\lambda = 0$. Por hipótesis se tiene que $\text{rg}(K(A, B)) = n$ o equivalentemente que $K(A, B) : \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es sobreyectivo. Gracias al Lema 2.2, esto es equivalente a decir que: $K(A, B)^\top : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{nm}$ es inyectivo. Por otro lado, tenemos que:

$$K(A, B)^\top z_\lambda = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)^\top z_\lambda = \begin{pmatrix} B^\top \\ B^\top A^\top \\ \vdots \\ B^\top (A^\top)^{n-1} \end{pmatrix} z_\lambda = \begin{pmatrix} B^\top z_\lambda \\ \lambda B^\top z_\lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} B^\top z_\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Se llega a un absurdo pues z_λ es no nulo y $K(A, B)^\top$ es inyectivo.

Se realiza ahora la implicación contraria. Por reducción al absurdo supóngase que

$$\text{rg}(K(A, B)) < n.$$

Esto es equivale a decir que $K(A, B) : \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \mathbb{R}^n$ no es sobreyectivo. Por el Lema 2.2, equivalentemente se tiene que $K(A, B)^\top : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{nm}$ no es inyectivo, es decir, existe $z^* \in \mathbb{R}^n$ no nulo

tal que $K(A, B)^\top z^* = 0$. Se llega entonces a que existe $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que:

$$\begin{pmatrix} B^\top \\ B^\top A^\top \\ \vdots \\ B^\top (A^\top)^{n-1} \end{pmatrix} z^* = 0,$$

de donde se deduce que $B^\top z^* = 0$. Se considera ahora el conjunto:

$$N := \{z \in \mathbb{R}^n \mid z^\top A^k B = 0, \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

Se tiene que $z^* \in N$ y por lo tanto $N \neq \{0\}$. En efecto, como $K(A, B)^\top z^* = 0$, se tiene que $z^{*\top} A^k B = 0$ para todo $k = 0, \dots, n-1$. Usando el Teorema de Hamilton-Cayley, se tiene que

$$A^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k.$$

Luego, se deduce que $z^{*\top} A^n B = 0$. Por recurrencia, se obtiene entonces que $z^{* \top} A^k B = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. De aquí también se deduce entonces que $z^* \in N$. Por otro lado, se tiene que N es invariante por el operador lineal y continuo $A^\top : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por la matriz A^\top , es decir, $A^\top z \in N$ para todo $z \in N$. En efecto, dado $z \in N$ y $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $(A^\top z)^\top A^k B = z^\top A^{k+1} B = 0$. Se considera ahora la restricción $A^\top|_N : N \rightarrow N$. Como \mathbb{C} es algebraicamente cerrado, esto es, todo polinomio sobre \mathbb{C} tiene raíz, en particular, el polinomio característico de $A^\top|_N$ tiene raíz, por lo que existe $\bar{z} \in N \setminus \{0\}$ tal que $A^\top \bar{z} = \lambda \bar{z}$. Además, $B^\top \bar{z} = 0$, pues $\bar{z} \in N$. Se llega a un absurdo pues existe un autovector \bar{z} de A^\top tal que $B^\top \bar{z} = 0$.

En segundo lugar, se demuestra la equivalencia entre los puntos 3 y 4. Se lleva a cabo primero la implicación de 3 a 4. Por reducción al absurdo, se supone que existe $z_0 \in \mathbb{R}^n$ autovector (no nulo y asociado al autovalor λ_0) de A^\top tal que $B^\top z_0 = 0$. Por hipótesis se tiene que:

$$\forall \lambda \in \text{Spec}(A), \text{rg}(\lambda I - A, B) = n,$$

o equivalentemente, $(\lambda I - A, B) : \mathbb{R}^{n(n+m)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es sobreyectivo. Por el Lema 2.2, esto es igual a decir que $(\lambda I - A, B)^\top : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n(n+m)}$ es inyectivo. De ese modo, se obtiene:

$$(\lambda_0 I - A, B)^\top z_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 I - A^\top \\ B^\top \end{pmatrix} z_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 z_0 - A^\top z_0 \\ B^\top z_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Se llega a un absurdo pues z_0 es no nulo y $(\lambda_0 I - A, B)^\top$ es inyectivo.

Recíprocamente, por reducción al absurdo supóngase que existe λ_0 autovalor de A tal que $\text{rg}(\lambda_0 I - A, B) < n$ o equivalentemente $(\lambda_0 I - A, B) : \mathbb{R}^{n(n+m)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ no es sobreyectivo. Por el Lema 2.2, esto es igual a decir que $(\lambda_0 I - A, B)^\top : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n(n+m)}$ no es inyectivo, esto es, existe z_0 no nulo tal que $(\lambda_0 I - A, B)^\top z_0 = 0$. De aquí se deduce que $(\lambda_0 I - A^\top)z_0 = 0$ y $B^\top z_0 = 0$. Se llega a un absurdo pues esto contradice el punto 4.

En tercer lugar, se demuestra la equivalencia entre los punto 2 y 3. Se lleva a cabo primero la implicación la implicación de 2 a 3. Basta tomar en particular $\lambda \in \text{Spec}(A)$.

Se lleva acabo ahora la implicación contraria. Por reducción al absurdo se supone que existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, tal que $\text{rg}(\lambda_0 I - A, B) < n$. Por tanto, de modo equivalente, existe $z_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que:

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 I - A^\top \\ B^\top \end{pmatrix} z_0 = 0.$$

Por consiguiente, $\lambda_0 z_0 - A^\top z_0 = 0$ y $B^\top z_0 = 0$. Luego, $\lambda_0 \in \text{Spec}(A)$. Como $\text{rg}(\lambda_0 I - A, B) < n$, esto contradice el punto 3.

Finalmente se prueba la equivalencia entre los puntos 2 y 5. Se tienen las siguientes equivalencias: $\text{rg}(\lambda I - A, B) = n$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ si y solo si $(\lambda I - A, B) : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es sobreyectivo para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Esto es equivalente a decir que $(\lambda I - A, B)^\top : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ es inyectivo para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Finalmente, esto es equivalente a decir que existe una constante $c > 0$ tal que:

$$|(\lambda I - A, B)^\top z| \geq c|z|, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, o de otra manera:

$$|(\lambda I - A)^\top z|^2 + |B^\top z|^2 \geq c|z|^2, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Si se prueba esta última equivalencia, se tiene la equivalencia entre los dos puntos. Se hace primero la implicación de izquierda a derecha. Supóngase que el operador lineal y continuo entre espacios de dimensión finita, $(\lambda I - A, B)^\top : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ es inyectivo para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Se define ahora el siguiente subconjunto de los números reales:

$$U := \{ |(\lambda I - A, B)^\top z| : |z| = 1 \}.$$

Este subconjunto verifica las siguientes propiedades:

- $U \subset (0, +\infty)$. En efecto, como $z \in \mathbb{R}^n$ con $|z| = 1$ es no nulo, se tiene que $(\lambda I - A, B)^\top z \neq 0$, pues $(\lambda I - A, B)^\top$ es inyectivo. Por consiguiente, $|(\lambda I - A, B)^\top z| > 0$ para todo $z \in \mathbb{R}^n$ con $|z| = 1$.
- U es cerrado. Hay que probar que dada una sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $|z_n| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $|(\lambda I - A, B)^\top z_n| \rightarrow L$, con $L \in \mathbb{R}$, entonces $L \in U$. En efecto, como \mathbb{R}^n tiene dimensión finita y la sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está contenida en un conjunto compacto, existe una subsucesión $\{z_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $z_{n_j} \rightarrow z$ con $|z| = 1$. Asimismo, como $(\lambda I - A, B)^\top$ es continuo (la dimensión de \mathbb{R}^{n+m} es finita), se obtiene que

$$(\lambda I - A, B)^\top z_{n_j} \rightarrow (\lambda I - A, B)^\top z \quad \text{y} \quad L = |(\lambda I - A, B)^\top z|, \quad \text{con } |z| = 1.$$

En definitiva, $L \in U$.

Para concluir que, como U es cerrado y acotado inferiormente, U tiene un mínimo, luego existe una constante $c > 0$ tal que:

$$|(\lambda I - A, B)^\top z| \geq c, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n, \quad \text{con } |z| = 1.$$

Tomando ahora un $w \in \mathbb{R}^n$ no nulo y normalizándolo se llega a que:

$$|(\lambda I - A, B)^\top w| \geq c|w|, \quad \forall w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Recíprocamente, si se supone por reducción al absurdo que $(\lambda I - A, B)^\top : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ no es inyectivo, entonces existe un $z_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $(\lambda I - A, B)^\top z_0 = 0$. Se llega entonces a que:

$$0 = |(\lambda I - A, B)^\top z_0| \geq c|z_0|.$$

Esto es un absurdo. □

Caso con restricciones en el control

Nótese que, si el sistema es controlable en las condiciones del Teorema 2.1, entonces puede ser controlable en un tiempo pequeño arbitrario. Esto es debido al hecho de que no hay restricciones en el control. En el caso de restricciones en el control, tal y como se considera en este apartado, no se puede esperar que L_T sea sobreyectivo en general. No obstante, se verán dos resultados: el primero aportará información sobre el conjunto accesible cuando los controles están restringidos a un subconjunto Ω ; mientras que el segundo, asumiendo ciertas hipótesis, establecerá que el punto 0 es accesible desde un punto inicial dado en un tiempo T suficientemente grande.

Proposición 2.2. *Asúmase que $r = 0$, $0 \in \mathring{\Omega}$ y que la condición de Kalman se verifica para (A, B) . Entonces, para cada $T > 0$ y cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, el conjunto accesible $A_{CC\Omega}(x_0, T)$ contiene a un entorno del punto $e^{TA}x_0$.*

Prueba. Se tiene como hipótesis que $0 \in \mathring{\Omega}$, i.e.,

$$\exists r > 0 \mid B(0; r) \subset \Omega.$$

Se define el siguiente conjunto:

$$K_{x_0, T, r} := \{x(T) : \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0, u \in L^\infty(0, T; B(0; r))\},$$

o equivalentemente:

$$K_{x_0, T, r} := e^{TA}x_0 + K_{0, T, r},$$

con:

$$K_{0, T, r} = \{z(T) : \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), z(0) = 0, u \in L^\infty(0, T; B(0; r))\}.$$

Se tiene que $e^{TA}x_0 \in K_{x_0, T, r}$. En efecto, teniendo en cuenta que $0 \in L^\infty(0, T; B(0; r))$, se puede tomar el control $u \equiv 0$, y por tanto, la solución de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, $x(0) = x_0$ satisface $x(T) = e^{TA}x_0 \in K_{x_0, T, r}$.

Teniendo en cuenta la definición del conjunto $K_{x_0, T, r}$, si se prueba que $0 \in \mathring{K}_{0, T, r}$ se tendría el resultado. En efecto, existiría r' tal que $B(0, r') \subset K_{0, T, r}$ y por tanto, $B(e^{TA}x_0, r') \subset K_{x_0, T, r}$. Para ello, se van a verificar los siguientes puntos:

- $K_{0, T, r}$ es convexo.

Para cada $i = 1, 2$, sean $z_i(T) \in K_{0, T, r}$ donde z_i satisface $\dot{z}_i(t) = Az_i(t) + Bu_i(t)$, $z_i(0) = 0$ con $u_i \in L^\infty(0, T; B(0; r))$. Dado $\lambda \in [0, 1]$, hay que probar que $z_\lambda(T) \in K_{0, T, r}$, con $z_\lambda := \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2$. Por la definición de z_λ y por la linealidad del SDO autónomo, se tiene que z_λ satisface $\dot{z}_\lambda(t) = Az_\lambda(t) + Bu_\lambda(t)$, $z_\lambda(0) = 0$ con $u_\lambda := \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2$. Si se prueba que $u_\lambda \in L^\infty(0, T; B(0; r))$ se tendría lo que se quería. En efecto, como $u_i \in L^\infty(0, T; B(0; r))$, $i = 1, 2$, se tiene que $u_i(t) \in B(0, r)$, para todo $t \in (0, T) \setminus E_i$ con $|E_i| = 0$, $i = 1, 2$. Si se define $E_\lambda = E_1 \cup E_2$, se tiene que $|E_\lambda| = 0$ y gracias a que $u_\lambda : (0, T) \rightarrow B(0, r)$ es medible y $B(0, r)$ es convexa, también se tiene que:

$$u_\lambda(t) \in B(0, r) \quad \forall t \in (0, T) \setminus E_\lambda,$$

luego $u_\lambda \in L^\infty(0, T; B(0; r))$.

- $K_{0, T, r}$ es simétrico.

Hay que ver que si $z(T) \in K_{0, T, r}$ entonces $-z(T) \in K_{0, T, r}$. En efecto, si $z(T) \in K_{0, T, r}$, por definición de dicho conjunto, se tiene que $\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t)$ con $z(0) = 0$ y $u \in L^\infty(0, T; B(0, r))$. Si se toma $w := -z$ y $v := -u$, se tiene que $\dot{w}(t) = Aw(t) + Bv(t)$ con $w(0) = 0$. Por tanto, si se prueba que $v \in L^\infty(0, T; B(0, r))$, se tendría lo que quiere. Efectivamente, si $u \in L^\infty(0, T; B(0, r))$, entonces $u(t) \in B(0, r) \quad \forall t \in (0, T) \setminus E$, con $|E| = 0$. Pero como $B(0, r)$ es simétrica, se tiene que $v := -u \in B(0, r) \quad \forall t \in (0, T) \setminus E$ y por tanto $v \in L^\infty(0, T; B(0, r))$.

Teniendo en cuenta estos dos puntos, se prueba ahora que $0 \in K_{0,T,r}^\circ$. En primer lugar, se toma $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base cualquiera de \mathbb{R}^n y se define:

$$e_0 := - \sum_{i=1}^n e_i.$$

Gracias a la Condición de Kalman, para cada $i \in \{0, \dots, n\}$, existe un control $u_i \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que x_i es solución del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Bu_i(t), \\ x_i(0) = 0, \quad x_i(T) = e_i. \end{cases}$$

Ahora bien, como $0 \in \mathring{\Omega}$, se toma μ suficientemente grande tal que:

$$u'_i := \frac{1}{\mu} u_i \in L^\infty(0, T; B(0, r)), \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Luego, par cada $i \in \{0, \dots, n\}$, se tiene:

$$e'_i := \frac{1}{\mu} e_i = x'_i(T) \in K_{0,T,r},$$

donde:

$$\begin{cases} \dot{x}'_i(t) = Ax'_i(t) + Bu'_i(t), \\ x'_i(0) = 0. \end{cases}$$

Sean ahora $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$, tales que $0 \leq \epsilon_i < \frac{1}{2(n+1)}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Se tiene entonces que:

$$\sum_{i=1}^n \epsilon_i e'_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1-\epsilon}{n+1} - \frac{1-\epsilon}{n+1} + \epsilon_i \right) e'_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1-\epsilon}{n+1} + \epsilon_i \right) e'_i + \frac{1-\epsilon}{n+1} e'_0,$$

con

$$\epsilon = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \quad \left(\text{nótese que } \epsilon < \frac{1}{2} \right).$$

Se trata de una combinación convexa. En efecto:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1-\epsilon}{n+1} + \epsilon_i \right) + \frac{1-\epsilon}{n+1} = \frac{1-\epsilon}{n+1} n + \epsilon + \frac{1-\epsilon}{n+1} = \frac{1-\epsilon}{n+1} (n+1) + \epsilon = 1 - \epsilon + \epsilon = 1.$$

En definitiva, como $e'_i \in K_{0,T,r}$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$, y dicho conjunto es convexo, se tiene que:

$$\frac{\epsilon_1}{\mu} e_1 + \dots + \frac{\epsilon_n}{\mu} e_n \in K_{0,T,r}, \quad \text{para todo } 0 \leq \epsilon_i < \frac{1}{2(n+1)}.$$

Asimismo, como $K_{0,T,r}$ es simétrico, se llega a que:

$$\frac{\epsilon_1}{\mu} e_1 + \dots + \frac{\epsilon_n}{\mu} e_n \in K_{0,T,r}, \quad \text{para todo } |\epsilon_i| < \frac{1}{2(n+1)},$$

por lo que $0 \in K_{0,T,r}^\circ$. Esto concluye la demostración. \square

Proposición 2.3. *Asúmase que $r = 0$, que $0 \in \mathring{\Omega}$, que la condición de Kalman se verifica y que todos los autovalores de A tienen parte real negativa. Entonces, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe un tiempo $T > 0$ y un control $u \in L^\infty(0, T; \Omega)$ tal que la solución de $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $x(0) = x_0$, satisface $x(T) = 0$.*

Prueba. En primer lugar, aplicando la definición de matriz de Kalman al par $(-A, B)$ se llega a:

$$K(-A, B) = (B, -AB, \dots, (-1)^{n-1}A^{n-1}B = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}K(A, B).$$

Por hipótesis, $\text{rg}(K(A, B)) = n$, por lo que también se tiene que $\text{rg}(K(-A, B)) = n$. Como $0 \in \overset{\circ}{\Omega}$, si se aplica la proposición anterior al punto inicial 0, se tiene que para un $T_1 > 0$ dado, existe $r > 0$ tal que:

$$B(0, r) \subset A_{CC\Omega}^-(0, T_1),$$

donde

$$A_{CC\Omega}^-(0, T_1) := \{x_-(T_1) : \dot{x}_-(t) = -Ax_-(t) + Bu_-(t), x_-(0) = 0, u_- \in L^\infty(0, T_1; \Omega)\}.$$

En segundo lugar, se tiene también por hipótesis que todos los autovalores de A tienen parte real negativa. Por consiguiente, aplicando un resultado que se verá con posterioridad en el siguiente capítulo, se sabe que el punto 0 es asintóticamente estable, es decir, todas las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_+(t) = Ax_+(t), \\ x_+(0) = x_0, \end{cases}$$

(aquí se tiene el sistema original con $u = 0$) convergen a 0 cuando $t \rightarrow +\infty$.

Por tanto, teniendo en cuenta estos dos puntos, se deduce que existe $T_0 > 0$ (lo suficientemente grande) tal que $x_+(T_0) \in B(0, r)$ y existe $u_- \in L^\infty(0, T_1; \Omega)$ tal que la solución x_- del sistema $\dot{x}_-(t) = -Ax_-(t) + Bu_-(t)$ con $x_-(0) = 0$ satisface $x_-(T_1) = x_+(T_0)$.

Si se define ahora $T := T_1 + T_0$ y se considera el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

para todo tiempo t del intervalo $[0, T]$ y $u \in L^\infty(0, T; \Omega)$ dado por:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in [0, T_0], \\ -u_-(T - t), & \text{si } t \in [T_0, T], \end{cases}$$

Lo primero nótese que $x(t) = x_+(t)$ en el intervalo $[0, T_0]$ y por lo tanto verifica la ecuación arriba. En segundo lugar, observe que $x(t) = x_-(T - t)$ en el intervalo $[T_0, T]$. En efecto, $x(T_0) = x_-(T_1) = x_+(T_0)$ y $x(T) = x_-(0) = 0$. Por otro lado, en el intervalo $[T_0, T]$, tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\dot{x}_-(T - t) \\ &= Ax_-(T - t) - Bu_-(T - t) \\ &= Ax(t) + Bu(t). \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba. □

Sistemas similares

En esta sección se va a ver el efecto de un cambio de bases en sistemas de control lineales. Se empezará definiendo cuándo dos sistemas de control lineales y autónomos son *similares* y seguidamente, se adjuntarán dos resultados. El segundo es bien conocido y recibe el nombre de *Teorema de la forma normal de Brunovski*. Establece la similitud entre un sistema de control lineal y autónomo cualquiera y otro, cuyas matrices tienen una forma específica que se mostrará posteriormente. Este teorema será de gran utilidad cuando se estudie la estabilización de sistemas lineales autónomos en el siguiente Capítulo, pues se empleará para probar otro resultado de gran importancia.

Definición 2.3. Se dice que los sistemas de control lineales $\dot{x}_1(t) = A_1x_1 + B_1u_1$ y $\dot{x}_2(t) = A_2x_2 + B_2u_2$ son similares siempre que exista $P \in GL_n(\mathbb{R})$, tal que $A_2 = PA_1P^{-1}$ y $B_2 = PB_1$. Entonces se tiene que $x_2 = Px_1$ y $u_2 = u_1$. También se dice que los pares (A_1, B_1) y (A_2, B_2) son similares.

Observación 2.2. La propiedad de Kalman es intrínseca, es decir,

$$(B_2, A_2B_2, \dots, A_2^{n-1}B_2) = P(B_1, A_1B_1, \dots, A_1^{n-1}B_1).$$

En efecto:

$$\begin{aligned} B_2 &= PB_1, \\ A_2B_2 &= PA_1P^{-1}PB_1 = PA_1B_1, \\ A_2^2B_2 &= PA_1P^{-1}PA_1B_1 = PA_1^2B_1, \\ &\dots \\ A_2^{n-1}B_2 &= PA_1^{n-1}B_1. \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$(B_2, A_2B_2, \dots, A_2^{n-1}B_2) = (PB_1, PA_1B_1, \dots, PA_1^{n-1}B_1) = P(B_1, A_1B_1, \dots, A_1^{n-1}B_1)$$

En particular, el rango de la matriz de Kalman es invariante bajo una transformación similar, ya que si la matriz $K(A_1, B_1)$ tienen rango r , entonces la matriz $K(A_2, B_2)$ también tiene rango r , por ser P una matriz invertible.

Proposición 2.4. Sea A una matriz de tamaño $n \times n$, y sea B una matriz de tamaño $n \times m$. Entonces el par (A, B) es similar al par (A', B') , con:

$$A' = \begin{pmatrix} A'_1 & A'_3 \\ 0 & A'_2 \end{pmatrix} \text{ y } B' = \begin{pmatrix} B'_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde A_1 es de tamaño $r \times r$, B_1 es de tamaño $r \times m$, y r es el rango tanto de $K(A, B)$ como de $K(A', B')$.

Observación 2.3. En otras palabras, este resultado dice lo siguiente. Denotando por $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ las nuevas coordenadas, tales que, $y = Px$, con y_1 de dimensión r e y_2 de dimensión $n-r$, el sistema de control en las nuevas coordenadas se escribe como:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= A'_1y_1 + B'_1u + A'_3y_2, \\ \dot{y}_2 &= A'_2y_2. \end{aligned}$$

Dado que el par (A', B') satisface la condición de Kalman, se sigue que la parte del sistema en y_1 es controlable: se llama parte controlable del sistema. La parte en y_2 es no controlable y se llama la parte no controlable del sistema.

Prueba. En primer lugar, se asume que el rango de $K(A, B)$ es menor que n (en caso contrario, no habría nada que probar).

En segundo lugar, se considera el subespacio generado por las columnas de la matriz de Kalman. A este subespacio se le denota por F . Por consiguiente, $\dim F = \text{rg}(K(A, B)) = r$. También se considera el subespacio G de \mathbb{R}^n , tal que $\mathbb{R}^n = F \oplus G$. Sean $\mathcal{B}_1 = \{f_1, \dots, f_r\}$ una base de F y $\mathcal{B}_2 = \{f_{r+1}, \dots, f_n\}$, una base de G , se tiene en cuenta la unión de dichas bases, denotada por $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Sea P la matriz de cambio de base de $\mathcal{B} = \{f_1, \dots, f_n\}$ a la base canónica de \mathbb{R}^n , se tiene que:

$$Pf_i = e_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

o equivalentemente:

$$P^{-1}e_i = f_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

es decir $P^{-1} = (f_1 | \dots | f_n)$.

En tercer lugar, el subespacio F puede escribirse de la siguiente forma:

$$F = \{y \in \mathbb{R}^n : y = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k Bx, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, \dots, n-1\}.$$

Sea $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo inducido por la matriz cuadrada de tamaño $n \times n$, es decir:

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto g(x) := Ax.$$

Se tiene que F es invariante por g , esto es, dado $y \in F$, $g(y) \in F$. En efecto, sea $y \in F$, existen $x \in \mathbb{R}^m$ y $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ tales que $y = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k Bx$. Entonces, si se emplea el teorema de Hamilton-Cayley se llega a que:

$$g(y) = Ay = A \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k Bx \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{k-1} A^k Bx + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n-1} a_k A^k Bx = \sum_{l=0}^{n-1} \beta_l A^l Bx,$$

donde $\beta_0 := \alpha_{n-1} a_0$ y $\beta_l := \alpha_{l-1} + \alpha_{n-1} a_l$ con $l = 1, \dots, n-1$. Por tanto $g(y) \in F$ y F es invariante por g .

En cuarto lugar, se estudia la forma que tiene la matriz de g respecto de la base \mathcal{B} de \mathbb{R}^n . Para ello, hay que calcular las coordenadas respecto de \mathcal{B} de las imágenes por g de los vectores de la base \mathcal{B} . Se observa que:

- $g(f_j) = \sum_{i=1}^r b_{ij} f_i$ ($j = 1, \dots, r$) por ser F invariante por g .
- $g(f_j) = \sum_{i=1}^n c_{ij} f_i$ ($j = r+1, \dots, n$).

Por tanto, la matriz de g respecto de la base \mathcal{B} tiene la forma:

$$A' = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A'_1 & A'_3 \\ 0 & A'_2 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, se define $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, dado por:

$$v \mapsto h(v) := Bv.$$

Como $h(\mathbb{R}^m) \subset F$, se llega a que:

$$B' = PB = \begin{pmatrix} B'_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta observación 2.2 está claro que el rango de $K(A'_1, B'_1)$ es igual al rango de $K(A, B)$ □

Teorema 2.2. (La forma normal de Brunovski). *Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ y sea B una matriz de tamaño $n \times 1$ (nótese que aquí $m=1$), tales que (A, B) satisface la Condición de Kalman. Entonces el par (A, B) es similar al par (\tilde{A}, \tilde{B}) , con:*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \quad y \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde los coeficientes a_i son aquellos del polinomio característico de A , es decir $\chi_A(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n$.

Observación 2.4. Este resultado quiere decir que, en las nuevas coordenadas, el sistema es equivalente a la ecuación diferencial escalar de orden n con control escalar $x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n x(t) = u(t)$.

Prueba. En primer lugar, supóngase que existe una matriz $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tal que el par (A, B) es similar al par (\tilde{A}, \tilde{B}) . Entonces se tendría por definición que:

- $\tilde{A} = PAP^{-1} \Rightarrow A = P^{-1}\tilde{A}P,$
- $\tilde{B} = PB \Rightarrow B = P^{-1}\tilde{B}.$

También se tendría una base $\mathcal{B} = \{f_1, \dots, f_n\}$ de \mathbb{R}^n en la que el par (A, B) tomaría la forma (\tilde{A}, \tilde{B}) , de modo que P sería la matriz del cambio de la base \mathcal{B} a la base canónica de \mathbb{R}^n , esto es:

$$Pf_i = e_i, \quad i = 1, \dots, n \Leftrightarrow P^{-1}e_i = f_i, \quad i = 1, \dots, n \Rightarrow P^{-1} = (f_1 | \dots | f_n).$$

Por tanto se tendría:

$$\begin{aligned} B &= P^{-1}\tilde{B} = f_n, \\ Af_1 &= P^{-1}\tilde{A}Pf_1 = P^{-1}\tilde{A}e_1 = -a_n f_n, \\ Af_i &= P^{-1}\tilde{A}Pf_i = P^{-1}\tilde{A}e_i = f_{i-1} - a_{n-i+1}f_n, \quad i = 2, \dots, n, \end{aligned}$$

de donde se podría definir los vectores de la base \mathcal{B} como siguen:

$$\begin{aligned} f_n &= B, \\ f_i &= Af_{i+1} + a_{n-i}f_n \quad i = n-1, n-2, \dots, 1. \end{aligned}$$

El conjunto $\{f_1, \dots, f_n\}$ sería una base de \mathbb{R}^n , dado que:

$$\begin{aligned} \text{Span}\{f_n\} &= \text{Span}\{B\}, \\ \text{Span}\{f_n, f_{n-1}\} &= \text{Span}\{B, AB\}, \\ &\dots \\ \text{Span}\{f_n, \dots, f_1\} &= \text{Span}\{B, \dots, A^{n-1}B\} = \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Esto último se tiene gracias a la Condición de Kalman.

Faltaría probar que $Af_1 = -a_n f_n$ teniéndose así el resultado. En efecto:

$$f_1 = Af_2 + a_{n-1}f_n,$$

por lo que:

$$\begin{aligned} Af_1 &= A^2 f_2 + a_{n-1} Af_n \\ &= A^2 (Af_3 + a_{n-2} f_n) + a_{n-1} Af_n \\ &= A^3 f_3 + a_{n-2} A^2 f_n + a_{n-1} Af_n \\ &\dots \\ &= A^n f_n + a_1 A^{n-1} f_n + \dots + a_{n-1} Af_n \\ &= (A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A) f_n \\ &= -a_n f_n, \end{aligned}$$

dado que por el Teorema de Hamilton-Cayley se tiene que $A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_n I = 0$. En esta base, el par (A, B) toma la forma (\tilde{A}, \tilde{B}) , concluyendo así la prueba. \square

Observación 2.5. Este teorema puede generalizarse al caso $m > 1$, pero la forma normal no es tan simple. De forma más precisa, si el par (A, B) satisface la condición de Kalman, entonces es similar a algún par (\tilde{A}, \tilde{B}) tal que:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \tilde{A}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{A}_s \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}G = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \vdots \\ \tilde{B}_s \end{pmatrix},$$

donde las matrices \tilde{A}_i tienen la forma de la matriz \tilde{A} del teorema anterior, G es una matriz de tamaño $m \times s$, y para cada $i \in \{1, \dots, s\}$, todos los coeficientes de \tilde{B}_i son iguales a 0 excepto aquel en la última fila, columna i -ésima, que es igual a 1.

2.1.2. Controlabilidad de sistemas lineales dependientes del tiempo

En esta sección se va a estudiar la controlabilidad de los sistemas lineales dependientes del tiempo sin restricciones en los controles:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Para ello, se van dar dos resultados. En el primero se dará una condición necesaria y suficiente; mientras que en el segundo, mediante una serie de hipótesis, de entre las cuales, una es una comprobación algebraica, se podrá asegurar la controlabilidad del sistema. También se llevará a cabo un análisis de la geometría de los conjuntos accesibles cuando los controles están restringidos.

En lo que sigue, se denota por M al *resolvente* o *matriz fundamental* del sistema lineal $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, esto es, la única solución del sistema lineal $\dot{M}(t) = A(t)M(t)$, $M(0) = I_n$. Nótese que, en el caso autónomo $A(t) = A$, se tiene $M(t) = e^{tA}$. Pero en general, el resolvente no puede calcularse de forma explícita.

Teorema 2.3. Suponga que $\Omega = \mathbb{R}^m$ (no hay restricciones en el control). El sistema de control $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ es controlable en tiempo T (desde cualquier punto inicial x_0) si y solo si la matriz Gramiana:

$$G_T := \int_0^T M(t)^{-1}B(t)B(t)^\top (M(t)^{-1})^\top dt$$

es invertible.

Observación 2.6. Nótese que esta condición depende de T pero no del punto inicial. En otras palabras, si un sistema de control lineal no autónomo es controlable en tiempo T , desde el punto inicial x_0 , entonces es también controlable desde cualquier otro punto inicial (pero con el mismo tiempo T).

Observación 2.7. Se tienen las siguientes propiedades:

1. $G_T = G_T^\top$.
2. $\psi^\top G_T \psi = \langle G_T \psi, \psi \rangle = \int_0^T |B(t)^\top (M(t)^{-1})^\top \psi|^2 dt \geq 0, \quad \forall \psi \in \mathbb{R}^n$.

Esto es, G_T es una matriz simétrica no-negativa. La condición de controlabilidad de arriba dice que el sistema es controlable si y solo si G_T es definida positiva.

Por un argumento de diagonalización, esto es equivalente a decir que existe $C_T > 0$ (el autovalor más pequeño de G_T) tal que:

$$\int_0^T |B(t)^\top (M(t)^{-1})^\top \psi|^2 dt \geq C_T |\psi|^2, \forall \psi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.5)$$

Esto es lo que se conoce como desigualdad de observabilidad.

Observación 2.8. Aunque no se desarrollará aquí una teoría general de observabilidad, puede notarse que esta condición es apropiada para generalizarse al conjunto infinito-dimensional y será un instrumento de importancia en el llamado método de HUM. Aunque no se ha definido el concepto de observabilidad, el sistema es controlable en tiempo T si y solo si, la desigualdad de observabilidad de arriba se mantiene: esto se conoce como la dualidad entre controlabilidad y observabilidad.

Prueba. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Para obtener la solución x del sistema asociada a un control u y con valor inicial $x(0) = x_0$ se sigue un razonamiento análogo al empleado en la prueba del Teorema 2.1, teniendo en cuenta ahora que la matriz fundamental asociada al SDO homogéneo

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t),$$

tiene una forma genérica M con $\dot{M}(t) = A(t)M(t)$, $M(0) = I_n$. Por tanto, cualquier solución del sistema de control, asociada a algún control u desde el punto x_0 , satisface en el tiempo T :

$$x(T) = \hat{x} + M(T) \int_0^T M(t)^{-1} B(t) u(t) dt,$$

donde $\hat{x} = M(T)x_0 + \int_0^T M(t)^{-1} r(t) dt$.

Se hace primero la implicación de derecha a izquierda. Supóngase que la matriz gramiana G_T es invertible. Hay que probar que el sistema de control es controlable desde x_0 en tiempo T , esto es, $A_{CC\Omega}(x_0, T) = \mathbb{R}^n$ con $\Omega = \mathbb{R}^m$. Sea $x_1 \in \mathbb{R}^n$ un punto objetivo. Se tiene que buscar un control apropiado u , de forma que $x(T) = x_1$. Se propone entonces $u(t) = B(t)^\top (M(t)^{-1})^\top \psi$, con $\psi \in \mathbb{R}^n$ a determinar para que $x(T) = x_1$. Si se sustituye dicho control en la expresión de $x(T)$ se tiene que $x(T) = \hat{x} + M(T)G_T\psi$, y dado que G_T es invertible, es suficiente tomar $\psi = G_T^{-1}M(T)^{-1}(x_1 - \hat{x})$.

Recíprocamente, se procede por reducción al absurdo. Supóngase que G_T no es invertible. Entonces, por la Observación 2.7 se tiene que existe $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $\psi^\top G_T \psi = 0$ y por tanto, $\int_0^T |B(t)^\top M(t)^{-1} \psi|^2 dt = 0$, de donde se obtiene que $\psi^\top M(t)^{-1} B(t) = 0$ para casi todo $t \in [0, T]$. Como consecuencia, se llega a que $\psi^\top \int_0^T M(t)^{-1} B(t) u(t) dt = 0$ para cada control $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$. Por consiguiente, $\psi^\top M(T)^{-1}(x_u(T) - \hat{x}) = 0$, que significa que $x_u(T)$ pertenece a algún subespacio afín propio de \mathbb{R}^n , mientras u varía. Por tanto, el sistema no es controlable, llegando así a un absurdo. \square

Observación 2.9. Este teorema puede probarse de una forma más fácil y natural con el principio máximo de Pontryagin (desde un punto de vista del control óptimo). En realidad, el control usado en la prueba de arriba es óptimo para la norma de L^2 . La prueba de arriba también conduce, en el caso infinito-dimensional, al método de HUM.

Observación 2.10. Si el sistema es autónomo ($A(t) = A, B(t) = B$) entonces $M(t) = e^{tA}$ y entonces:

$$G_T = \int_0^T e^{-tA} B B^\top e^{-tA^\top} dt.$$

En este caso, dado que la condición de controlabilidad (Kalman) no depende del tiempo, se sigue que G_{T_1} es invertible si y solo si G_{T_2} es invertible, que no es evidente por la forma integral de arriba.

Se proporciona ahora un último teorema que generaliza la condición de Kalman en el caso no autónomo.

Teorema 2.4. *Suponga que $\Omega = \mathbb{R}^m$ (no hay restricciones en el control). Considere el sistema de control:*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t),$$

donde $t \rightarrow A(t)$ y $t \rightarrow B(t)$ son de clase C^∞ . Se define la secuencia de matrices

$$B_0(t) = B(t), \quad B_{i+1}(t) = A(t)B_i(t) - \dot{B}_i(t), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Si existe $\tilde{t} \in [0, T]$ tal que

$$\text{Span}\{B_i(\tilde{t})v \mid v \in \mathbb{R}^m, i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}^n, \quad (2.6)$$

entonces el sistema es controlable en tiempo T .

Observación 2.11. *Si $t \rightarrow A(t)$ y $t \rightarrow B(t)$ son además analíticas (i.e., expandibles en una serie de potencias convergente para cualquier t), entonces el sistema es controlable para cualquier T si y solo si (2.6) se cumple para todo $t \in [0, T]$.*

Prueba. Por reducción al absurdo, se supone que el sistema no es controlable en tiempo T . Entonces, por el Teorema 2.3, se tiene que la matriz gramiana, G_T , no es invertible, esto es:

$$\exists y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mid G_T y = 0,$$

y en particular:

$$\exists y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mid y^\top G_T y = 0.$$

Por tanto:

$$\int_0^T \|B(t)^\top M(t)^{-1\top} y\|^2 dt = 0.$$

Ahora bien, como $B \in C^\infty([0, T]; \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}))$ (por hipótesis) y $M \in C^1([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ (el resolvente es una aplicación continua) se sigue que:

$$y^\top M(t)^{-1} B(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.7)$$

Asimismo, el resolvente es una matriz invertible. En efecto, como $M(t)$ es tal que cumple $\dot{M}(t) = A(t)M(t)$, $M(0) = I_n$, usando la fórmula de Abel-Liouville se obtiene:

$$\det M(t) = \det(M(0)) e^{\int_0^t \text{Tr} A(s) ds} = \det I_n e^{\int_0^t \text{Tr} A(s) ds} = e^{\int_0^t \text{Tr} A(s) ds} \neq 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

donde $\text{Tr} A$ es la traza de la matriz A . Por tanto, $M(t)$ es invertible y existe $M(t)^{-1}$.

Si se toma ahora $t = \tilde{t}$ y se tiene en cuenta la igualdad (2.7), en la que se incluye $M(\tilde{t})^{-1} M(\tilde{t}) = I_n$, se tiene:

$$y^\top M(\tilde{t})^{-1} M(\tilde{t}) M(t)^{-1} B(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

y definiendo $z := (M(\tilde{t})^{-1})^\top y$, no nulo, se obtiene de forma equivalente:

$$z^\top M(\tilde{t}) M(t)^{-1} B(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Por definición $B_0(t) = B(t)$. Entonces:

$$z^\top M(\tilde{t}) M(t)^{-1} B_0(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

y en particular, tomando $t = \tilde{t}$:

$$z^\top B_0(\tilde{t}) = 0.$$

Derivando respecto a t , se llega a:

$$z^\top M(\tilde{t})[M(\dot{\tilde{t}})^{-1}B_0(t) + M(t)^{-1}\dot{B}_0(t)] = 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.8)$$

Se obtiene a continuación una expresión para $M(\dot{t})^{-1}$. Para ello, se parte de la igualdad $I_n = M(t)^{-1}M(t)$. Si se deriva respecto al tiempo, y se tiene en cuenta de nuevo que $\dot{M}(t) = A(t)M(t)$, $M(0) = I_n$, se consigue lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &= M(\dot{t})^{-1}M(t) + M(t)^{-1}\dot{M}(t) \\ &= M(\dot{t})^{-1}M(t) + M(t)^{-1}A(t)M(t) \\ &= [M(\dot{t})^{-1} + M(t)^{-1}A(t)]M(t), \end{aligned}$$

y como $M(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, T]$, se llega a que:

$$M(\dot{t})^{-1} = -M(t)^{-1}A(t).$$

Por consiguiente, sustituyendo la expresión obtenida para $M(\dot{t})^{-1}$ en (2.8):

$$z^\top M(\tilde{t})M(t)^{-1}[-A(t)B_0(t) + \dot{B}_0(t)] = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

y en particular, tomando $t = \tilde{t}$ se llega a que:

$$z^\top [-A(\tilde{t})B_0(\tilde{t}) + \dot{B}_0(\tilde{t})] = 0 \Leftrightarrow z^\top B_1(\tilde{t}) = 0.$$

En definitiva, se tiene que: $B_0(\tilde{t})^\top z = 0$ y $B_1(\tilde{t})^\top z = 0$. Por inducción, se puede llegar a que:

$$B_i(\tilde{t})^\top z = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

obteniendo un absurdo, ya que se tiene $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que:

$$Span\{B_i(\tilde{t})^\top z, i \in \mathbb{N}\} = 0.$$

□

2.1.3. Geometría de los conjuntos accesibles

No hay afirmaciones simples que aseguren la controlabilidad de los sistemas de control no autónomos bajo restricciones en el control. En realidad bajo restricciones en el control, se puede esbozar una imagen clara de las propiedades de controlabilidad estudiando la geometría del conjunto accesible, tal y como se verá a continuación.

Teorema 2.5. *Se considera el sistema de control en \mathbb{R}^n*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t),$$

con controles u tomando sus valores en un subconjunto compacto y convexo Ω de \mathbb{R}^m . Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Para cada $T \geq 0$, el conjunto accesible $A_{CC_\Omega}(x_0, T)$ es compacto, convexo y varía continuamente respecto a t .

Observación 2.12. *Aquí se establece la continuidad en tiempo gracias a la topología de Hausdorff.*

Observación 2.13. *Nótese que la convexidad del conjunto accesible se sigue cumpliendo aunque Ω no se asuma que sea convexo. Este punto sin embargo no es obvio y se sigue del lema de Lyapunov (asimismo basado en el teorema de Krein-Milman en dimensión infinita). En realidad, esta discusión conduce a que $A_{CC_\Omega}(x_0, T) = A_{CC_{Conv(\Omega)}}(x_0, T)$, donde $Conv(\Omega)$ es la envoltura convexa de Ω . En particular se tiene que $A_{CC_{\partial\Omega}}(x_0, T) = A_{CC_\Omega}(x_0, T)$, donde $\partial\Omega$ es la frontera de Ω . Este resultado ilustra el llamado principio bang-bang.*

Prueba. Se puede definir $A_{CC\Omega}(x_0, T)$ como sigue:

$$A_{CC\Omega}(x_0, T) = M(T)x_0 + \int_0^T M(T)M(t)^{-1}r(t)dt + L_T(L^\infty(0, T; \Omega)),$$

donde $L_T : L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un operador lineal y continuo (esto se puede ver de forma análoga a como se hizo en la demostración del Teorema 2.1, pero usando una matriz fundamental genérica $M(t)$) definido como:

$$L_T u = \int_0^T M(T)M(t)^{-1}B(t)u(t)dt.$$

■ Convexidad.

Se va a comprobar que $A_{CC\Omega}(x_0, T)$ es convexo, es decir, sean $x_{u_1}(T), x_{u_2}(T) \in A_{CC\Omega}(x_0, T)$ (con $u_i \in L^\infty(0, T; \Omega)$, $i = 1, 2$ controles admisibles), entonces: $\lambda x_{u_1}(T) + (1 - \lambda)x_{u_2}(T) \in A_{CC\Omega}(x_0, T)$ (con $\lambda \in (0, 1)$). En efecto, teniendo en cuenta la linealidad de operador L_T , se tiene que:

$$\begin{aligned} \lambda x_{u_1}(T) + (1 - \lambda)x_{u_2}(T) &= M(T)x_0 + \int_0^T M(T)M(t)^{-1}r(t)dt + \lambda L_T u_1 + (1 - \lambda)L_T u_2 \\ &= M(T)x_0 + \int_0^T M(T)M(t)^{-1}r(t)ds + L_T(\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2). \end{aligned}$$

Si se comprueba ahora que $\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2 \in L^\infty(0, T; \Omega)$ (es decir, que $L^\infty(0, T; \Omega)$ es convexo), se tendrá la convexidad de $A_{CC\Omega}(x_0, T)$. En efecto, como para $i = 1, 2$ se tiene que, $u_i(t) \in \Omega$ para todo $t \in [0, T] \setminus E_i$ con $|E_i| = 0$ y además, Ω es convexo, se llega a que $\lambda u(t) + (1 - \lambda)v(t) \in \Omega$ para todo $t \in [0, T] \setminus E$ con $E = E_1 \cup E_2$. Por consiguiente $\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2 \in L^\infty(0, T; \Omega)$.

■ Compacidad.

Se prueba ahora la compacidad de $A_{CC\Omega}(x_0, T)$. Sea $\{x_n^1\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de $A_{CC\Omega}(x_0, T)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $u_n \in L^\infty(0, T; \Omega)$ un control que dirige al sistema desde x_0 a x_n^1 en tiempo T , y sea x_n la correspondiente trayectoria. Se tiene que:

$$x_n^1 = x_n(T) = M(T)x_0 + \int_0^T M(T)M(t)^{-1}(B(t)u_n(t) + r(t))dt. \quad (2.9)$$

En primer lugar, se tiene que la sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada en $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$. En efecto, Como Ω es un subespacio compacto de \mathbb{R}^m , por el Teorema de Heine-Borel, Ω es cerrado y acotado. Por tanto:

$$\exists M > 0 \mid |u_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y con ello:

$$\|u_n\|_{L^2(0, T; \mathbb{R}^m)}^2 = \int_0^T |u_n(t)|^2 dt \leq M^2 T \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En segundo lugar, como $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ es un espacio reflexivo y la sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada en dicho espacio, por el Teorema 1.4 se tiene que existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:

$$u_{n_k} \rightarrow u \quad (\text{débilmente en } L^2(0, T; \mathbb{R}^m)),$$

para algún $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$. Teniendo en cuenta la caracterización de convergencia débil (Proposición 1.3), se tiene de forma equivalente que:

$$\langle f, u_{n_k} \rangle \rightarrow \langle f, u \rangle \quad (\text{en } \mathbb{R}) \quad \forall f \in (L^2(0, T; \mathbb{R}^m))^*.$$

Ahora bien, como $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ es un espacio de Hilbert, por el Teorema de representación de Riesz, dado $f \in (L^2(0, T; \mathbb{R}^m))^*$, se tiene que:

$$\exists! u_f \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \mid \langle f, v \rangle = (u_f, v)_{L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} \quad \forall v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m).$$

Por consiguiente, se tiene que:

$$(w, u_{n_k})_{L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} \rightarrow (w, u)_{L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} \quad (\text{en } \mathbb{R}) \quad \forall w \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m),$$

esto es:

$$\int_0^T w \cdot u_{n_k} dt \rightarrow \int_0^T w \cdot u dt \quad (\text{en } \mathbb{R}) \quad \forall w \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m). \quad (2.10)$$

En tercer lugar, se tiene que $u \in L^\infty(0, T; \Omega)$. En efecto, como la subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge débilmente a u , por el Teorema 1.4 (Teorema de Mazur), existe una subsucesión $\{v_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ constiuída por combinaciones convexas de los u_{n_k} que converge fuertemente a u . Ahora bien, por el Teorema 1.9, existe una subsucesión $\{v_{n_{k_j}}\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que:

$$v_{n_{k_j}}(t) \rightarrow u(t), \quad \text{p.c.t } t \in [0, T].$$

Ahora bien, como Ω es un conjunto convexo y los $v_{n_{k_j}}$ son combinaciones convexas de los $u_{n_{k_j}}$, que son elementos de Ω , entonces se tiene que $v_{n_{k_j}}(t) \in \Omega$, para todo $t \in [0, T] \setminus E_j$, con $|E_j| = 0$ y para todo j natural. Pero como Ω es un conjunto cerrado, se tiene entonces que $u(t) \in \Omega$ p.c.t $t \in [0, T]$. Con esto se concluye que $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$.

En cuarto lugar, se deduce que la sucesión de soluciones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada en $H^1(0, T; \mathbb{R}^n)$.

En quinto lugar, se sabe que $H^1(0, T; \mathbb{R}^n)$ es también reflexivo y además se inyecta de forma compacta en $C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$. En particular, como la sucesión $\{x_n(\cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada en $H^1(0, T; \mathbb{R}^n)$, por la caracterización de los operadores compactos, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que converge uniformemente a algún x de $C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$ en $[0, T]$. Por consiguiente, como la convergencia uniforme implica la convergencia puntual, se llega a que:

$$x_n^1 = x_n(T) \rightarrow x(T).$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la definición de x_n^1 (ecuación (2.9)) si se considera su segundo sumando, por (2.10) se llega a que:

$$\int_0^T (M(T)M(t)^{-1}B(t))u_n(t) dt \rightarrow \int_0^T (M(T)M(t)^{-1}B(t))u(t) dt.$$

En definitiva, se llega a:

$$x(T) = M(T)x_0 + \int_0^T M(T)M(t)^{-1}(B(t)u(t) + r(t))dt,$$

y en particular (una subsucesión) $x_n^1 = x_n(T)$ converge a $x(T) \in ACC_\Omega(x_0, T)$. Se tiene así la propiedad de compacidad.

■ Continuidad respecto a T .

Se va a probar ahora la continuidad en tiempo T de $ACC_\Omega(x_0, T)$, es decir: dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, para todos los números reales no negativos T_1 y T_2 , si $|T_1 - T_2| \leq \delta$ entonces $d_H(ACC_\Omega(x_0, T_1), ACC_\Omega(x_0, T_2)) \leq \epsilon$, donde d_H es la distancia Hausdorff, definida como:

$$d_H(K_1, K_2) := \max\{\sup_{y \in K_2} d(y, K_1), \sup_{y \in K_1} d(y, K_2)\},$$

para todos los subconjuntos compactos K_1 y K_2 de \mathbb{R}^n , siendo d la distancia euclídea de \mathbb{R}^n . Sin pérdida de generalidad se asume que $0 \leq T_1 < T_2$. Es suficiente probar que

1. $\forall y \in A_{CC\Omega}(x_0, T_2) \quad d(y, A_{CC\Omega}(x_0, T_1)) \leq \epsilon.$
2. $\forall y \in A_{CC\Omega}(x_0, T_1) \quad d(y, A_{CC\Omega}(x_0, T_2)) \leq \epsilon.$

Se comprueba solo el primer punto. El segundo es análogo. Sea $y \in A_{CC\Omega}(x_0, T_2)$. Es suficiente probar que existe $z \in A_{CC\Omega}(x_0, T_1)$ tal que $d(y, z) \leq \epsilon$. Por la definición de $A_{CC\Omega}(x_0, T_2)$, existe $u \in L^\infty(0, T; \Omega)$ tal que la trayectoria correspondiente, comenzando en x_0 , satisface $x(T_2) = y$. Por lo tanto, $z = x(T_1)$ es el adecuado. En efecto, se tiene:

$$\begin{aligned} x(T_2) - x(T_1) &= M(T_2)x_0 + \int_0^{T_2} M(T_2)M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds \\ &\quad - M(T_1)x_0 - \int_0^{T_1} M(T_1)M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds \\ &= \int_{T_1}^{T_2} M(T_2)M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds \\ &\quad + (M(T_2) - M(T_1))(x_0 + \int_0^{T_1} M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds). \end{aligned}$$

Si $|T_1 - T_2|$ es pequeño entonces el primer término de la suma de arriba es pequeño por continuidad, y el segundo término es pequeño por la continuidad de $t \mapsto M(t)$.

□

Observación 2.14. *Si el conjunto de restricciones en el control Ω es compacto, entonces el conjunto accesible es compacto (y convexo), y se tiene además la continuidad en tiempo. Con estas condiciones obviamente $A_{CC\Omega}(x_0, T)$ nunca puede ser igual a \mathbb{R}^n . En otras palabras, el sistema nunca es controlable en tiempo T . Esto es natural en vista de las restricciones en el control. En realidad el resultado del teorema permite definir el concepto de tiempo mínimo: dados x_0 y x_1 , dos puntos distintos de \mathbb{R}^n , no se puede conducir el sistema de control de x_0 a x_1 en un tiempo arbitrario pequeño. Un tiempo mínimo es requerido.*

Otra cuestión de interés es saber cuando el sistema de control es controlable en tiempo no fijado, esto es: ¿cuándo es la unión de todos los conjuntos $A_{CC\Omega}(x_0, T)$, sobre $T \geq 0$ igual a todo \mathbb{R}^n ?

2.2. Controlabilidad de sistemas no lineales

En esta segunda sección se estudiará la controlabilidad de los sistemas no lineales. En particular, en una primera subsección se aportarán resultados de controlabilidad local con restricciones sobre el control. Para ello, se mostrará cómo obtener el *sistema linealizado* del sistema no lineal. Gracias al estudio de la controlabilidad del primero (que no es más que un sistema lineal dependiente del tiempo) se podrá analizar la controlabilidad local del sistema no lineal. También habrá una segunda subsección en la que se aportará información acerca de la geometría del conjunto accesible, tomando como hipótesis que el conjunto de las restricciones sea compacto.

La aplicación punto final

Definición 2.4. *Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea $T > 0$ arbitrario. Un control $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$ se dice que es admisible en $[0, T]$ si la trayectoria x , solución de (2.1) correspondiente al control u , y tal que $x(0) = x_0$, está bien definida en $[0, T]$. La aplicación punto final $E_{x_0, T}$, definida sobre el conjunto de los controles admisibles, se define como $E_{x_0, T}(u) = x(T)$, donde u es un control admisible.*

El conjunto de controles admisibles en $[0, T]$ se denotará por U_{x_0, T, \mathbb{R}^m} , y el conjunto de controles admisibles en $[0, T]$ tomando sus valores en Ω se denotará por $U_{x_0, T, \Omega}$. El conjunto U_{x_0, T, \mathbb{R}^m} no es más que el conjunto en el que $E_{x_0, T}$ está bien definida (en efecto, uno debe ser muy cuidadoso con el fenómeno de explosión en tiempo finito, una vez que se están tratando con ecuaciones no lineales). Por otro lado, nótese que, para cada $T > 0$, el conjunto accesible está caracterizado por $A_{CC\Omega}(x_0, T) = E_{x_0, T}(U_{x_0, T, \Omega})$. En lo que sigue, a menudo se denotará por x_u a la solución de (2.1) correspondiente al control u .

Observación 2.15. *No es difícil probar que el conjunto U_{x_0, T, \mathbb{R}^m} , dotado con la topología estándar de $L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$, es un conjunto abierto, y con ello, $E_{x_0, T}$ es de clase C^1 en U_{x_0, T, \mathbb{R}^m} (de hecho, es de clase C^p siempre que f sea C^p).*

Teorema 2.6. *Sean $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in U_{x_0, T, \mathbb{R}^m}$ y $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continuamente diferenciable con respecto a (x, u) y localmente integrable con respecto a t . La diferencial (de Fréchet) $dE_{x_0, T}(u) : L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^n$ viene dada por:*

$$dE_{x_0, T}(u) \cdot \delta u = \delta_1 x(T),$$

donde $\delta_1 x$ es la solución del llamado sistema linealizado a lo largo de (x_u, u)

$$\begin{cases} \delta_1 \dot{x}(t) = A(t)\delta_1 x(t) + B(t)\delta u(t), \\ \delta_1 x(0) = 0, \end{cases}$$

con:

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_u(t), u(t)), \quad B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(t, x_u(t), u(t)),$$

(de tamaños $n \times n$ y $n \times m$, respectivamente). Más precisamente, si M es el resolvente del sistema linealizado, esto es, la única matriz de de orden n solución de $\dot{M}(t) = A(t)M(t)$, $M(0) = I_n$, entonces

$$dE_{x_0, T}(u) \cdot \delta u = M(T) \int_0^T M^{-1}(t)B(t)\delta u(t)dt.$$

Prueba. Primeramente, se define la función $\delta x(t) := x_{u+\delta u}(t) - x_u(t)$. Luego, haciendo un desarrollo de Taylor de primer orden, en la variables (x, u) , de la función f , se obtiene que:

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}(t) &= f(t, x_{u+\delta u}(t), u(t) + \delta u(t)) - f(t, x_u(t), u(t)) \\ &= f(t, x_u(t) + \delta x(t), u(t) + \delta u(t)) - f(t, x_u(t), u(t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_u(t), u(t)) \cdot \delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(t, x_u(t), u(t)) \cdot \delta u(t) + o(|(\delta x(t), \delta u(t))|). \end{aligned}$$

Se escribe, $\delta x = \delta_1 x + \delta_2 x + \dots$, donde $\delta_1 x$ es la parte lineal en δu , $\delta_2 x$ es la parte cuadrática en δu , etc. De modo que, identificando la parte lineal del desarrollo, se obtiene el sistema linealizado

$$\delta_1 \dot{x}(t) = A(t)\delta_1 x(t) + B(t)\delta u(t).$$

Teniendo en cuenta que $\delta x(0) = 0$, y por lo tanto $\delta_1 x(0) = 0$, si resolvemos el sistema linealizado, se llega a que:

$$\delta_1 x(T) = M(T) \int_0^T M^{-1}(t)B(t)\delta u(t)dt,$$

donde M es la resolvente del sistema linealizado homogéneo. Por otro lado, notemos que $\delta_1 x(T)$ es lineal y continuo con respecto a δu en la topología de $L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$. De ese modo, se deduce que $\delta_1 x(T)$ es la diferencial de Fréchet de $E_{x_0, T}$ en u . \square

Observación 2.16. *Este teorema dice que la diferencial de la aplicación punto final en u es la aplicación punto final del sistema linealizado a lo largo de (x_u, u) . Esto es similar al bien conocido resultado en teoría de sistemas dinámicos, que establece que la diferencial del flujo es el flujo del sistema linealizado. Esta observación tiene consecuencias interesantes en términos de las propiedades de controlabilidad local, como se verá en breve.*

Controlabilidad local a lo largo de una trayectoria

Teorema 2.7. *Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea $u \in U_{x_0, T, \mathbb{R}^m}$. Si el sistema linealizado a lo largo de (x_u, u) es controlable en el tiempo T , entonces el sistema de control no lineal (2.1) es localmente controlable en el tiempo T desde x_0 . En otras palabras, existe un entorno V de $x(T)$ en \mathbb{R}^n tal que, para cada $y \in V$, existe un control $v \in U_{x_0, T, \mathbb{R}^m}$ tal que la solución de (2.1), con $x_v(0) = x_0$, satisface $x_v(T) = y$.*

Observación 2.17. *Nótese que, en el teorema anterior, v está cerca de u para la topología $L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$, y las trayectorias x_v y x_u están cerca para la topología de $C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$. El teorema en realidad diría un poco más, pues $E_{x_0, T}$ es una submersión, significando que, para unas coordenadas apropiadas, $E_{x_0, T}$ es una proyección lineal.*

Prueba. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea $u \in U_{x_0, T, \mathbb{R}^m}$. Si el sistema linealizado a lo largo de (x_u, u) es controlable en el tiempo T , entonces el conjunto accesible del sistema linealizado cumple la condición $A_{CC_{\mathbb{R}^m}}(0, T) = \mathbb{R}^n$. Pero como $A_{CC_{\mathbb{R}^m}}(0, T) = E_{0, T}(U_{0, T, \mathbb{R}^m})$, se deduce que la aplicación punto final del sistema linealizado es sobreyectiva. Teniendo ahora en cuenta la Observación 2.16, se llega a que la diferencial de la aplicación punto final en u : $dE_{x_0, T}(u) : L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es sobreyectiva. Por un argumento estándar de la función implícita (teorema de la aplicación sobreyectiva), esto implica que la propia aplicación punto final $E_{x_0, T} : U_{x_0, T, \mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, es una submersión local. En particular, $E_{x_0, T}$ es localmente sobreyectiva y localmente abierta en u . La sobreyectividad local de $E_{x_0, T}$ significa que el sistema de control general (2.1) es localmente controlable en el tiempo T desde x_0 . \square

Observación 2.18. *Nótese que aquí, este argumento de la prueba anterior funciona porque se han considerado controles que toman sus valores en todo \mathbb{R}^m . El argumento sigue siendo válido al considerar un conjunto Ω de restricciones en el control, siempre que sea posible considerar variaciones locales de u : esto es cierto siempre y cuando u esté en el interior de $L^\infty(0, T; \Omega)$ para la topología de $L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$ (nótese que esta condición es más fuerte que requerir que u tome sus valores en el interior de Ω).*

Observación 2.19. *La controlabilidad en tiempo T del sistema linealizado*

$$\delta_1 \dot{x}(t) = A(t)\delta_1 x(t) + B(t)\delta u(t)$$

puede caracterizarse gracias a los Teoremas 2.3 y 2.4. Se obtienen por tanto, condiciones suficientes explícitas para garantizar la controlabilidad local.

Se proveen ahora dos aplicaciones importantes del Teorema 2.7 (que son casos particulares): controlabilidad local alrededor de un punto, y el método de retorno.

Controlabilidad local alrededor de un punto de equilibrio

Suponga que el sistema de control general (2.1) es autónomo, esto es, f no depende de t . Suponga también que $(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ es un punto de equilibrio de f , i.e., $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$. En ese caso, la trayectoria constante definida por $x(t) = \bar{x}$ y $u(t) = \bar{u}$ es una solución de (2.1). El sistema linealizado a lo largo de este punto de equilibrio viene dado por:

$$\delta_1 \dot{x}(t) = A\delta_1 x(t) + B\delta u(t), \quad \text{donde } A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) \text{ y } B = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}).$$

Se sigue del Teorema 2.7 que si este sistema de control linealizado es controlable en el tiempo T , entonces el sistema de control no lineal es localmente controlable en tiempo T desde \bar{x} , i.e., existe un entorno de \bar{x} tal que \bar{x} puede conducirse, por medio de un control, en el tiempo T a cualquier punto de ese entorno. Revirtiendo el tiempo (que es posible porque estamos en dimensión finita), existe un entorno de \bar{x} tal que cualquier punto de ese entorno puede conducirse, por medio de un control, a \bar{x} en el tiempo T . Se obtiene así el siguiente resultado:

Corolario 2.1. *Con la notación de arriba, suponga que $\text{rg}(A, B) = n$ y que $\bar{u} \in \mathring{\Omega}$. Entonces, para cada $T > 0$, el sistema de control (2.1), con f independiente de t , es localmente controlable en el tiempo T desde \bar{x} en el siguiente sentido: para cada $T > 0$ existe un entorno V de \bar{x} en \mathbb{R}^n tal que, para todo $x_0, x_1 \in V$, existe un control $u \in U_{\bar{x}, T, \Omega}$ tal que $x_u(0) = x_0$ y $x_u(T) = x_1$.*

El método de retorno

En el Corolario 2.1, la condición suficiente es que el sistema linealizado en el punto de equilibrio sea controlable. Asíumase ahora que el sistema linealizado en el punto de equilibrio no es controlable, y sin embargo se querría probar, usando condiciones alternativas, que el sistema de control no lineal es localmente controlable. La idea del llamado *método de retorno* (inventado por J-M. Coron) es asumir que existe una trayectoria en bucle no trivial del sistema de control, que va desde x_0 a x_0 en tiempo T , a lo largo de la cual el sistema linealizado es controlable. Entonces, el Teorema 2.7 implica que el sistema de control es localmente controlable alrededor de x_0 .

Nótese que el método no es restrictivo para puntos de equilibrios. Se tiene el siguiente Corolario.

Corolario 2.2. *Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Suponga que existe una trayectoria \tilde{x} del sistema de control (2.1), correspondiente a un control \tilde{u} en $[0, T]$, tal que $\tilde{x}(0) = \tilde{x}(T) = x_0$. Suponga también que \tilde{u} está en el interior de $L^\infty(0, T; \Omega)$ para la topología de $L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$. Si el sistema linealizado a lo largo de (\tilde{x}, \tilde{u}) es controlable en tiempo T , entonces el sistema de control no lineal (2.1) es localmente controlable en tiempo T alrededor del punto x_0 .*

A continuación, se muestra un ejemplo en el que se aplicará los resultados de controlabilidad local.

Ejemplo 2.2. *En geometría, el camino de Dubins se refiere a la curva más corta que conecta a dos puntos en el plano euclídeo dos-dimensional, con una restricción en la curvatura del camino, con una tangente al camino inicial y final preescritas y con la hipótesis de que el vehículo que viaja lo hace solo hacia adelante. El camino de Dubins se emplea normalmente en el campo de la robótica, como una forma de plantear caminos para robots con ruedas, aviones y vehículos submarinos. Por ejemplo, para un robot con ruedas, un modelo de coche cinemático (también conocido como coche de Dubins) para el sistema viene dado por:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \cos \theta(t), & x_1(0) &= 0, \\ \dot{x}_2(t) &= \sin \theta(t), & x_2(0) &= 0, \\ \dot{\theta}(t) &= u(t), & \theta(0) &= 0, \end{aligned}$$

con $t \in [0, T]$ y:

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}, \quad f(X(t), u(t)) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \\ \sin \theta(t) \\ u(t) \end{pmatrix}.$$

$(x_1(t), x_2(t))$ es la posición el coche en el instante t , θ es el ángulo que forma el vector velocidad (el coche se mueve en este caso con velocidad constante igual a 1) con una dirección fija y el control tasa de giro u está restringido.

Se ve de forma clara que se trata de un sistema de control no lineal autónomo.

Con el fin de probar que este sistema de control es localmente controlable de un entorno de $(0, 0, 0)$ a un entorno de $(0, 0, 2\pi)$ (en un tiempo arbitrario $T > 0$), se considera la trayectoria de referencia dada por:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \bar{\theta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{T}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} \\ \frac{T}{2\pi} (1 - \cos \frac{2\pi t}{T}) \\ \frac{2\pi t}{T} \end{pmatrix},$$

y $\bar{u}(t) = \frac{2\pi}{T}$. Se tiene que:

$$\bar{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{X}(T) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1(T) \\ \bar{x}_2(T) \\ \bar{\theta}(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi \end{pmatrix}.$$

Asimismo, el sistema linealizado está representado por las matrices:

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial X}(t, X_u(t), u(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \theta(t) \\ 0 & 0 & \cos \theta(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(t, X_u(t), u(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

por lo que el sistema linealizado a lo largo de la trayectoria (\bar{x}, \bar{u}) queda representado por:

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial X}(t, \bar{X}_{\bar{u}(t)}, \bar{u}(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \frac{2\pi t}{T} \\ 0 & 0 & \cos \frac{2\pi t}{T} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(t, \bar{X}_{\bar{u}(t)}, \bar{u}(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, por el Teorema 2.4, es fácil probar que el sistema linealizado es controlable en cualquier tiempo $T > 0$. En efecto, si se construye la sucesión de matrices $\{B_i(t)\}_{i \in \mathbb{N}}$ que se muestran en dicho teorema, se obtiene:

$$\begin{aligned} B_0(t) &= B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ B_1(t) &= A(t)B_0(t) - \frac{dB_0}{dt}(t) = A(t)B_0(t) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{2\pi t}{T} \\ \cos \frac{2\pi t}{T} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ B_2(t) &= A(t)B_1(t) - \frac{dB_1}{dt}(t) = -\frac{dB_1}{dt}(t) = \frac{2\pi}{T} \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi t}{T} \\ \sin \frac{2\pi t}{T} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ B_3(t) &= A(t)B_2(t) - \frac{dB_2}{dt}(t) = -\frac{dB_2}{dt}(t) = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \begin{pmatrix} \sin \frac{2\pi t}{T} \\ -\cos \frac{2\pi t}{T} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ B_4(t) &= A(t)B_3(t) - \frac{dB_3}{dt}(t) = -\frac{dB_3}{dt}(t) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^3 \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi t}{T} \\ \sin \frac{2\pi t}{T} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &\dots \end{aligned}$$

De aquí se deduce de forma clara, que si se toma un $\bar{t} \in (0, T)$ cualquiera se llega a que:

$$\text{Span}\{B_i(\bar{t})v \mid v \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}\} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \frac{2\pi \bar{t}}{T} \\ \cos \frac{2\pi \bar{t}}{T} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi \bar{t}}{T} \\ \sin \frac{2\pi \bar{t}}{T} \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^3.$$

En definitiva, el sistema linealizado es controlable en cualquier tiempo $T > 0$ y por el Corolario 2.2, el sistema de control no lineal es localmente controlable de un entorno de $(0, 0, 0)$ a un entorno de $(0, 0, 2\pi)$.

2.2.1. Geometría de los los conjuntos accesibles

Se tiene el siguiente resultado, similar al Teorema 2.5. Teniendo en cuenta una serie de hipótesis expuestas a continuación, se va a probar que el conjunto accesible es compacto y varía continuamente en el tiempo.

Teorema 2.8. *Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea $T > 0$. Suponga que:*

- Ω es compacto;
- existe un $b > 0$ tal que, para cada control admisible $u \in U_{x_0, T, \Omega}$, se tiene que $|x_u(t)| \leq b$ para cada $t \in [0, T]$;
- existe un $c > 0$ tal que $|f(t, x, u)| \leq c$ para cada $t \in [0, T]$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x| \leq b$ y para cada $u \in \Omega$;
- el conjunto de velocidades $V(t, x) = \{f(t, x, u) | u \in \Omega\}$ es convexo, para todo (t, x) ;
- f es globalmente Lipschitz en x en $[0, T] \times \bar{B}(0, b) \times \Omega$.

Entonces, el conjunto $A_{CC_\Omega}(x_0, t)$ es compacto y varía continuamente en tiempo en $[0, T]$.

Observación 2.20. *La segunda hipótesis (acotación uniforme de trayectorias) se hace para evitar la explosión en tiempo finito de las trayectorias. Se satisface por ejemplo si la dinámica f es sublineal en el infinito. La tercera hipótesis se hace por motivos técnicos en la prueba, porque al principio se asume que f es localmente integrable, solo, respecto a t . La hipótesis de convexidad de $V(t, x)$ se asume por ejemplo para sistemas de control afines (esto es, siempre y cuando f es afín en u) y si Ω es además convexo.*

Prueba. En primer lugar, se va a comprobar que $V(t, x)$ es compacto para todo (t, x) , esto es, dada una sucesión $\{f(t, x, u_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V(t, x)$, hay que ver que existe una subsucesión $\{f(t, x, u_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V(t, x)$, tal que $f(t, x, u_{n_k}) \rightarrow f(t, x, u)$ en \mathbb{R}^n , con $u \in \Omega$. Por la definición del conjunto $V(t, x)$, se tiene que la sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$, pero como Ω es compacto, se obtiene una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ tal que $u_{n_k} \rightarrow u$ en \mathbb{R}^m , con $u \in \Omega$. Pero como f es una función C^1 en (x, u) , en particular es continua, por lo que se tiene que $f(t, x, u_{n_k}) \rightarrow f(t, x, u)$ en \mathbb{R}^n , con $u \in \Omega$, tal y como se buscaba.

En segundo lugar, se va a probar que $A_{CC_\Omega}(x_0, t)$ es compacto para cada $t \in [0, T]$. Para ello, es suficiente ver que para cada sucesión de puntos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $A_{CC_\Omega}(x_0, t)$ se puede extraer una subsucesión convergente. Para cada natural n , sea $u_n \in U_{x_0, t, \Omega}$ un control que dirija al sistema desde x_0 a x_n en tiempo t y sea $x_n : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la correspondiente trayectoria, se tiene que:

$$x_n = x_n(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x_n(s), u_n(s)) ds.$$

Se define ahora $g_n(s) := f(s, x_n(s), u_n(s))$. Por hipótesis se tiene lo siguiente:

- como $u_n \in U_{x_0, T, \Omega}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $[0, t] \subset [0, T]$, entonces $\|x_n(s)\| < b$ para todo $s \in [0, t]$.
- como $s \in [0, t] \subset [0, T]$, $u_n(s) \in \Omega$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x_n(s)$ es tal que $\|x_n(s)\| \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $|g_n(s)| = |f(s, x_n(s), u_n(s))| \leq c$.

En conclusión, $|g_n(s)| \leq c$ para todo $s \in [0, t]$. De aquí se deduce que la sucesión de funciones $\{g_n(\cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada en $L^\infty(0, t; \mathbb{R}^n)$. Ahora bien, por la Observación 1.5, como $\{g_n(\cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada en $L^\infty(0, t; \mathbb{R}^n)$, se tiene que existe una subsucesión $\{g_{n_k}(\cdot)\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{g_n(\cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:

$$g_{n_k} \xrightarrow{*} g \quad (\text{débilmente } * \text{ en } L^\infty(0, t; \mathbb{R}^n)),$$

para algún $g \in L^\infty(0, t; \mathbb{R}^n)$. Equivalentemente, teniendo en cuenta la identificación $L^\infty(0, t; \mathbb{R}^n) \equiv (L^1(0, t; \mathbb{R}^n))^*$ y la caracterización de la convergencia débil $*$ (Proposición 1.5)

$$\langle g_{n_k}, v \rangle \rightarrow \langle g, v \rangle, \quad \forall v \in L^1(0, t; \mathbb{R}^n).$$

Y de nuevo, de forma equivalente, teniendo ahora en cuenta el segundo punto del Teorema 1.11 (Teorema de representación de Riesz para $p = 1$) se llega a que:

$$\int_0^t g_{n_k}(s)v(s)ds \rightarrow \int_0^t g(s)v(s)ds \quad (\text{en } \mathbb{R}) \quad \forall v \in L^1(0, t; \mathbb{R}^n). \quad (2.11)$$

Para cada $\tau \in [0, t]$, se define ahora $x(\tau) := x_0 + \int_0^\tau g(s)ds$. Por un lado se tiene que al ser g una función definida en el intervalo $[0, t]$ e integrable Lebesgue, x es absolutamente continua en $[0, t]$. Por otro lado, por la caracterización de la convergencia débil $*$ (2.11), si se toma $1 \in L^1(0, t; \mathbb{R}^n)$ se llega a que:

$$\int_0^t g_{n_k}(s)1ds \rightarrow \int_0^t g(s)1ds \quad (\text{en } \mathbb{R})$$

de donde se concluye que la sucesión de funciones $\{x_{n_k}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a x .

El objetivo ahora es probar que x es una trayectoria asociada a un control u que toma sus valores en Ω , es decir, probar que $g(s) = f(s, x(s), u(s))$ para casi todo $s \in [0, t]$. Para ello, para todo natural k y para casi todo $s \in [0, t]$, se define $h_{n_k}(s) := f(s, x(s), u_{n_k}(s))$ junto con el siguiente conjunto:

$$\mathcal{V} = \{h \in L^2(0, t; \mathbb{R}^n) \mid h(s) \in V(s, x(s)) \text{ p.c.t } s \in [0, t]\}.$$

Nótese que $h_{n_k} \in \mathcal{V}$ para cada entero k .

A todo esto se suma que el conjunto \mathcal{V} es convexo y cerrado en $L^2(0, t; \mathbb{R}^n)$ para la topología fuerte. Se ve a continuación:

- Convexidad. Dados $h_1, h_2 \in \mathcal{V}$ y un $\lambda \in [0, 1]$, hay que ver que $\lambda h_1 + (1 - \lambda)h_2 \in \mathcal{V}$, o equivalentemente que $\lambda h_1 + (1 - \lambda)h_2 \in L^2(0, t; \mathbb{R}^n)$ y $\lambda h_1(s) + (1 - \lambda)h_2(s) \in V(s, x(s))$ p.c.t $s \in [0, t]$. Por la definición del conjunto \mathcal{V} , se tiene para cada $i = 1, 2$, que $h_i \in L^2(0, t; \mathbb{R}^n)$ y $h_i(s) \in V(s, x(s))$ para todo $s \in [0, t] \setminus E_i$ con $|E_i| = 0$, o equivalentemente que $h_i(s) = f(s, x(s), u_i(s))$, con $u_i(s) \in \Omega$ para todo $s \in [0, t] \setminus E_i$ con $|E_i| = 0$. Ahora bien, como $L^2(0, t; \mathbb{R}^n)$ es un espacio vectorial, se tiene que $\lambda h_1 + (1 - \lambda)h_2 \in L^2(0, t; \mathbb{R}^n)$. Asimismo, por hipótesis, se sabe que el conjunto de velocidades $V(s, x(s))$ es convexo, luego $\lambda h_1(s) + (1 - \lambda)h_2(s) \in V(s, x(s))$ para todo $s \in [0, t] \setminus E$, con $E := E_1 \cup E_2$ y $|E| = 0$.
- Para ver que \mathcal{V} es un conjunto cerrado, hay que probar que dada una sucesión $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contenida en \mathcal{V} tal que $l_n \rightarrow l$ en $L^2(0, t; \mathbb{R}^n)$, entonces $l \in \mathcal{V}$, es decir, que $l \in L^2(0, t; \mathbb{R}^n)$ (esto es evidente) y que $l(s) \in V(s, x(s))$ p.c.t $s \in [0, t]$. Ahora bien, como $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que converge fuertemente en $L^2(0, t; \mathbb{R}^n)$, por el Teorema 1.9, se puede extraer una subsucesión $\{l_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge puntualmente a l p.c.t $s \in [0, t]$. Pero como $l_{n_k} \in V(s, x(s))$ p.c.t $s \in [0, t]$ y para todo $k \in \mathbb{N}$ y el conjunto de velocidades $V(s, x(s))$ es compacto, se tiene finalmente que $l(s) \in V(s, x(s))$ p.c.t $s \in [0, t]$.

Por tanto, como el conjunto \mathcal{V} es convexo y cerrado en $L^2(0, t; \mathbb{R}^n)$ para la topología fuerte, se tiene por el Teorema 1.3 que \mathcal{V} es también cerrado en $L^2(0, t; \mathbb{R}^n)$ para la topología débil. Pero al igual que $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, la sucesión $\{h_{n_k}\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada en $L^2(0, t; \mathbb{R}^n)$ y como dicho espacio es reflexivo, existe alguna subsucesión $\{h_{n_{k_j}}\}_{j \in \mathbb{N}}$ que converge a algún h para la topología débil y h debe pertenecer a \mathcal{V} dado que \mathcal{V} es débilmente cerrado.

Finalmente, se va a probar que $g = h$ p.c.t $s \in [0, t]$, es decir:

$$\int_0^t \varphi(s)g(s)ds = \int_0^t \varphi(s)h(s)ds, \quad \forall \varphi \in L^2(0, t; \mathbb{R}).$$

Sumando y restando, se obtiene para cada $\varphi \in L^2(0, t; \mathbb{R}^n)$:

$$\int_0^t \varphi(s)g_{n_{k_j}}(s)ds = \int_0^t \varphi(s)h_{n_{k_j}}(s)ds + \int_0^t \varphi(s)(g_{n_{k_j}}(s) - h_{n_{k_j}}(s))ds. \quad (2.12)$$

Ahora bien, por hipótesis se sabe que f es globalmente Lipschitz en x en $[0, T] \times \bar{B}(0, b) \times \Omega$, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que:

$$|f(t, x_1, u) - f(t, x_2, u)| \leq C|x_1 - x_2|, \quad \forall t \in [0, T], \quad x_1, x_2 \in \bar{B}(0, b), u \in \Omega.$$

Asimismo, la sucesión $\{x_{n_{k_j}}\}_{j \in \mathbb{N}}$ está contenida en $\bar{B}(0, b)$ y converge puntualmente a x p.c.t $s \in [0, t]$. Como el conjunto $\bar{B}(0, b)$ es compacto (por ser la clausura de un conjunto acotado en \mathbb{R}^n), necesariamente $x(s) \in \bar{B}(0, b)$ p.c.t $s \in [0, t]$. Por tanto, se llega a:

$$|g_{n_{k_j}}(s) - h_{n_{k_j}}(s)| = |f(s, x_{n_{k_j}}(s), u_{n_{k_j}}(s)) - f(s, x(s), u_{n_{k_j}}(s))| \leq C|x_{n_{k_j}}(s) - x(s)| \text{ p.c.t } s \in [0, t].$$

Ahora se aplica el teorema de la convergencia dominada a la sucesión de funciones $\{z_{n_{k_j}}\}_{j \in \mathbb{N}}$ definida como $z_{n_{k_j}} := g_{n_{k_j}} - h_{n_{k_j}}$. Por la desigualdad obtenida antes, se tiene que:

- la sucesión $\{x_{n_{k_j}}\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a x p.c.t $s \in [0, t]$, por lo que la sucesión $\{z_{n_{k_j}}\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a 0 p.c.t $s \in [0, t]$.
- $|z_{n_{k_j}}(s)| = |g_{n_{k_j}}(s) - h_{n_{k_j}}(s)| \leq |g_{n_{k_j}}(s)| + |h_{n_{k_j}}(s)| \leq 2c$ para todo natural j y p.c.t $s \in [0, t]$.

Por tanto:

$$\int_0^t \varphi(s)(g_{n_{k_j}}(s) - h_{n_{k_j}}(s)) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } j \rightarrow \infty,$$

de donde se sigue, usando la igualdad 2.12:

$$\int_0^t \varphi(s)g(s)ds = \int_0^t \varphi(s)h(s)ds, \quad \forall \varphi \in L^2(0, t; \mathbb{R}),$$

es decir, $g = h$ p.c.t $s \in [0, t]$. En particular, se tiene que $g \in \mathcal{V}$, y por tanto, p.c.t $s \in [0, t]$ existe $u(s) \in \Omega$ tal que $g(s) = f(s, x(s), u(s))$. Aplicando ahora un lema de selección medible en teoría de la medida [5, Lemas 2A y 3A, página 161] (nótese que $g \in L^\infty(0, t; \mathbb{R}^n)$), u puede elegirse para que sea medible en $[0, T]$. En definitiva, la trayectoria x se asocia en $[0, t]$ con el control u tomando sus valores en Ω , y $x(t)$ es el límite puntual de los puntos $x_{n_{k_j}}$. Se tiene así la compacidad de $A_{CC\Omega}(x_0, t)$.

Queda por probar la continuidad del conjunto accesible con respecto al tiempo. Sean t_1 y t_2 dos números reales tales que $0 < t_1 < t_2 \leq T$ y sea $x_2 \in A_{CC\Omega}(x_0, t_2)$. Por definición, existe un control u que toma sus valores en Ω , generando la trayectoria x , tal que:

$$x_2 = x(t_2) = x_0 + \int_0^{t_2} f(t, x(t), u(t))dt.$$

El punto $x_1 = x(t_1) = x_0 + \int_0^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt$ pertenece a $A_{CC\Omega}(x_0, t_1)$ y usando la hipótesis en f , se obtiene:

$$|x_2 - x_1| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f(t, x(t), u(t))dt \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(t, x(t), u(t))|dt \leq c|t_1 - t_2|.$$

De aquí, se concluye fácilmente. □

Observación 2.21. *Se pueden encontrar resultados de controlabilidad global en la literatura. No obstante, no se mencionarán en este trabajo de fin de grado, ya que para realizar la demostración de los mismos se requiere de conocimientos avanzados de álgebra (sobre los corchetes de Lie) y variedades diferenciables.*

Capítulo 3

Estabilización

El objetivo principal de este capítulo será estabilizar un posible punto de equilibrio inestable a través de un control de retroalimentación.

Sean n y m dos enteros positivos. En esta capítulo se considera un sistema de control autónomo en \mathbb{R}^n :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (3.1)$$

donde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 con respecto a (x, u) , y los controles son funciones del tiempo, medibles y esencialmente acotadas que toman sus valores en algun subconjunto medible Ω de \mathbb{R}^m (conjunto de las restricciones en el control)

Sea $(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un punto de equilibrio, esto es, $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$, tal que $\bar{u} \in \mathring{\Omega}$ (interior de Ω). El objetivo será diseñar un control de retroalimentación $u(x)$ que estabilice localmente el equilibrio (\bar{x}, \bar{u}) , esto es, tal que el sistema “lazo cerrado” $\dot{x}(t) = f(x(t), u(x(t)))$ sea localmente asintóticamente estable en \bar{x} .

3.1. Estabilización de sistemas lineales autónomos

Esta sección está dedicada al estudio de la estabilidad de los sistemas lineales autónomos. En primer lugar, se mostrará un resultado que permite establecer si el punto 0 de un sistema lineal autónomo es un punto de equilibrio estable, asintóticamente estable o por el caso contrario, inestable, sin más que estudiar el signo de la parte real de los autovalores de la matriz A del sistema lineal. Asimismo, dicho resultado se complementará junto con dos criterios: el criterio de Routh y el criterio de Hurwitz. Estos criterios permiten estudiar el signo de la parte real de las raíces del polinomio característico de la matriz A del sistema lineal autónomo, es decir, de sus autovalores. Finalmente, se verá la noción de control de *retroalimentación* y cuándo un sistema lineal autónomo se puede estabilizar de forma retroalimentada.

Al final de esta sección se estudiarán los sistemas lineales dependientes del tiempo, donde se presentarán las dificultades existentes a la hora de estudiar la estabilidad de dichos sistemas.

Se considera la siguiente definición:

Definición 3.1. *Se considera el sistema lineal $\dot{x}(t) = Ax(t)$, con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se denota por $x(\cdot, x_0)$ la solución tal que $x(0, x_0) = x_0$. Se dice que el punto 0, que es por supuesto un punto de equilibrio (es el único si A es invertible), es estable si:*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \eta > 0 \mid \forall x_0 \in \mathbb{R}^n : |x_0| \leq \eta \Rightarrow |x(t)| \leq \epsilon, \forall t \geq 0.$$

El punto 0 es asintóticamente estable si es estable y además $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Observación 3.1. *Para un sistema lineal, la estabilidad local es equivalente a la estabilidad global.*

Se tiene el siguiente y bien conocido resultado:

Teorema 3.1. *Se tiene lo siguiente:*

- Si existe un autovalor (complejo) λ de A tal que $Re(\lambda) > 0$, entonces el punto de equilibrio 0 es inestable, esto es, existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que la solución de $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(0) = x_0$ satisface $|x(t)| \rightarrow +\infty$ cuando $t \rightarrow +\infty$.
- Si todos los autovalores (complejos) de A tienen una parte real negativa, entonces 0 es asintóticamente estable, esto es, todas las soluciones de $\dot{x}(t) = Ax(t)$ convergen a 0 cuando $t \rightarrow +\infty$.
- El punto de equilibrio 0 es estable si y solo si todos los autovalores de A tienen una parte real no positiva y si un autovalor λ es tal que $Re(\lambda) = 0$ entonces λ es una raíz simple del polinomio mínimo de A .

Prueba. La prueba sigue de los siguientes puntos:

- Se comienza la prueba con el primer punto. Sea $x_{0,\lambda}$ un autovector (no nulo) asociado a un autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que $Re(\lambda) > 0$. Por definición se tiene que $Ax_{0,\lambda} = \lambda x_{0,\lambda}$.

Sea ahora $x_\lambda(t) = e^{\lambda t} x_{0,\lambda}$. Se tiene que $x_\lambda(0) = x_{0,\lambda}$, $\dot{x}_\lambda(t) = \lambda x_\lambda(t)$ y $Ax_\lambda(t) = \lambda x_\lambda(t)$. Por tanto, x_λ es solución de:

$$\begin{cases} \dot{x}_\lambda(t) = \lambda x_\lambda(t), \\ x_\lambda(0) = x_{0,\lambda}. \end{cases}$$

De ese modo, se concluye con:

$$|x_\lambda(t)| = e^{Re(\lambda)t} |x_{0,\lambda}| \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty,$$

gracias a que $Re(\lambda) > 0$. Por lo tanto, el punto de equilibrio 0 es inestable.

- El resolvente del sistema lineal $\dot{x}(t) = Ax(t)$ es $M(t) = e^{tA}$. Ahora bien, por el Teorema 1.2 (Teorema de descomposición de Jordan), existe una matriz $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tal que

$$PAP^{-1} = \text{bloque diag}[J_1, \dots, J_r],$$

donde J_i es el bloque de Jordan asociado al autovalor λ_i de A .

Por consiguiente, teniendo todo esto en cuenta, se obtiene un resultado (extraído de [2, Capítulo 11, Proposición 11.2.2, página 223]) que se enuncia en el siguiente lema:

Lema 3.1. *Todas las soluciones del sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ son de la forma:*

$$x(t) = \sum_{1 \leq i \leq r} \sum_{1 \leq j \leq m_i} e^{\lambda_i t} t^{j-1} v_{i,j},$$

donde m_i es el orden del bloque de Jordan J_i , $v_{i,j} \in N(\lambda_i)$, con $N(\lambda_i)$ el espacio propio asociado al autovalor λ_i .

Como en este caso, si $Re(\lambda_i) < 0$, para todo $1 \leq i \leq r$, se llega a que:

$$|x(t)| \leq \sum_{1 \leq i \leq r} \sum_{1 \leq j \leq m_i} e^{Re(\lambda_i)t} |t|^{j-1} |v_{i,j}| \leq e^{tRe(\lambda_0)} \sum_{1 \leq i \leq r} \sum_{1 \leq j \leq m_i} |t|^{j-1} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty,$$

donde λ_0 es el autovalor cuya parte real es la más próxima a 0 .

- Usando el Lema 3.1, la norma de los términos de la suma asociados a un autovalor con parte real negativa va a cero cuando t tiende al infinito. Por otro lado, la norma de los términos de la suma asociados a un autovalor con parte real igual a cero, tienen su comportamiento, cuando t tiende al infinito, determinado por el orden del bloque de Jordan asociado a dichos autovalores. De eso modo, si todos los autovalores con parte real igual a cero son simples entonces el orden del bloque de Jordan asociado es igual a uno y por lo tanto e^{tA} está acotado. Luego 0 es un equilibrio estable.

Explicación de la tabla de Routh.

Las dos primeras filas de la tabla de Routh contienen los coeficientes de los polinomios:

$$P_1(z) = a_0z^n + a_2z^{n-2} + \dots$$

$$P_2(z) = a_1z^{n-1} + a_3z^{n-3} + \dots$$

donde los elementos que son nulos se omiten en la tabla por construcción. Uno de estos dos polinomios es par (es decir, solo tiene potencias pares de z , incluyendo la potencia z^0) y el otro es impar (solo tiene potencias impares de z). Un polinomio $P_3(z)$ se define como el resto obtenido al dividir $P_1(z)$ por $P_2(z)$, esto es:

$$P_1(z) = Q_1(z)P_2(z) + P_3(z),$$

donde $Q_1(z) = a_0z/a_1$ es el cociente. La tercera fila de la tabla de Routh contiene los coeficientes del resto:

$$P_3(z) = (a_2 - \frac{a_0a_3}{a_1})z^{n-2} + (a_4 - \frac{a_0a_5}{a_1})z^{n-4} + \dots = b_1z^{n-2} + b_2z^{n-4} + \dots$$

Si se repite el proceso, se obtienen un conjunto de polinomios $P_k(z)$ tales que:

$$P_k(z) = Q_k(z)P_{k+1}(z) + P_{k+2}(z) \quad \text{para } k = 1, \dots, n-1,$$

o equivalentemente:

$$P_{k+2}(z) = P_k(z) - Q_k(z)P_{k+1}(z) \quad \text{para } k = 1, \dots, n-1.$$

Los polinomios $P_k(z)$ son de la forma:

$$P_k(z) = c_kz^{n-k+1} + \dots,$$

donde c_k es el coeficiente que lidera la k -ésima fila de la tabla de Routh, con $c_1 = a_0$ y $c_2 = a_1$. Los cocientes $Q_k(z)$ vienen dados por:

$$Q_k(z) = \frac{c_k}{c_{k+1}}z \quad \text{para } k = 1, \dots, n-1.$$

Los polinomios $P_k(z)$ se van alternando entre polinomios pares e impares de orden decreciente. La tabla de Routh contiene los coeficientes de estos polinomios, omitiendo aquellos que son siempre nulos debido a la propiedad par/impar. Si ningun c_k es nulo, los dos últimos polinomios de la secuencia son $P_n(z) = c_nz$ y $P_{n+1}(z) = c_{n+1}$.

Junto con los polinomios $P_k(z)$, dicho algoritmo también genera una secuencia de polinomios $P_k(z) + P_{k+1}(z)$, comenzando con el polinomio original $P(z) = P_1(z) + P_2(z)$. El criterio de Routh se origina a partir de una propiedad clave que se aplica a cada uno de estos polinomios en cada paso del proceso en cuestión. Dicha propiedad clave se muestra en el siguiente lema.

Lema 3.2. *Suponga que $c_1, \dots, c_{k+1} \neq 0$, entonces el número de raíces de $P_k(z) + P_{k+1}(z)$ con $\text{Re}(z) < 0$ (o $\text{Re}(z) > 0$) es igual al número de raíces de $(1 + Q_k(z))(P_{k+1}(z)) + P_{k+2}(z)$ con $\text{Re}(z) < 0$ (o $\text{Re}(z) > 0$). Las raíces con $R(z) = 0$ son iguales en ambos polinomios, incluídas sus multiplicidades.*

Nótese que el último polinomio en la secuencia es $P_n(z) + P_{n+1}(z) = c_nz + c_{n+1}$. Dado que $1 + Q_k(z) = (c_kz + c_{k+1})/c_{k+1}$, el criterio de Routh se sigue de esta propiedad clave de forma directa. Se concluye con los siguientes puntos:

- Si el polinomio $P(z)$ tiene raíces imaginarias, la tabla de Routh no es completa. En efecto, $1 + Q_k(z)$ y $c_n z + c_{n+1}$ solo pueden tener raíces reales, por lo que el proceso debe acabar antes del último paso si hay raíces imaginarias.
- Si $c_{k+1} = 0$ para algún k , entonces $P_k(z) + P_{k+1}(z)$ tiene raíces tales que $Re(z) \geq 0$. En efecto, $c_{k+1} = 0$ si y solo si el segundo coeficiente de $P_k(z) + P_{k+1}(z)$ es cero. El segundo coeficiente es la suma de las raíces de $P_k(z) + P_{k+1}(z)$, lo que implica que algunas raíces deben estar en el plano imaginario o en el semiplano derecho. El polinomio original debe tener al menos el mismo número de raíces con $Re(z) \geq 0$.
- Recíprocamente, si $P(z)$ tiene todas sus raíces con $Re(z) > 0$ entonces la tabla de Routh debe ser completa.

Prueba del lema. La prueba se sustenta sobre la naturaleza par/impar de los polinomios y propiedades que se pueden demostrar de forma directa. Por un lado, un polinomio $P_p(z)$ se dice que es *par*, si cumple que $P_p(i\omega)$ (con $\omega \in \mathbb{R}$) es puramente real. Por tanto, se tiene que $P_p(z) = P_p(-z)$ y sus raíces deben ser pares de raíces imaginarias ($\pm i\omega$), pares de raíces reales ($\pm a$) o cuádruplas de raíces complejas ($\pm a \pm ib$). Por otro lado, un polinomio $P_i(z)$ se dice que es *impar*, si cumple que $P_i(i\omega)$ (con $\omega \in \mathbb{R}$) es puramente imaginario. Por tanto se tiene que $P_i(z) = zP_p(z)$, donde $P_p(z)$ es un polinomio par. Sus raíces deben incluir una raíz en $z = 0$, más el mismo tipo de raíces que un polinomio par. Asimismo, se tienen la siguientes propiedades: la suma de dos polinomios pares/impares es par/impar, el producto de dos polinomios pares o dos polinomios impares es par, y el producto de un polinomio par con uno impar es impar.

A continuación se considera el siguiente polinomio:

$$\begin{aligned} D_{k,g}(z) &= P_k(z) + P_{k+1}(z) + gQ_k(z)P_{k+2}(z) \\ &= P_{k+2}(z) + Q_k(z)P_{k+1}(z) + P_{k+1}(z) + gQ_k(z)P_{k+2}(z), \end{aligned}$$

con $g \in [0, 1]$. Para $g = 0$, $D_{k,0}(z) = P_k(z) + P_{k+1}(z)$; mientras que para $g = 1$, $D_{k,1} = (1 + Q_k(z))(P_{k+1}(z) + P_{k+2}(z))$. El polinomio $D_{k,g}(z)$ es la suma de $P_k(z)$ y dos polinomios de menor grado. Por tanto, $D_{k,g}(z)$ tiene grado $n - k + 1$ para todo $g \in [0, 1]$ y una rama continua conecta los ceros de $D_{k,0}(z)$ a los de $D_{k,1}(z)$.

Nótese ahora que una raíz de $D_{k,g}(z)$ pertenece al plano imaginario si y solo si, para algún ω_0 :

$$P_{k+2}(i\omega_0) + Q_k(i\omega_0)P_{k+1}(i\omega_0) + P_{k+1}(i\omega_0) + gQ_k(i\omega_0)P_{k+2}(i\omega_0) = 0.$$

Debido al alterne par/impar de los polinomios $P_k(z)$ y que $Q_k(z)$ es un polinomio impar, la ecuación anterior puede dividirse en una parte real y otra imaginaria, obteniéndose:

$$P_{k+2}(i\omega_0) + Q_k(i\omega_0)P_{k+1}(i\omega_0) = 0,$$

$$P_{k+1}(i\omega_0) + gQ_k(i\omega_0)P_{k+2}(i\omega_0) = 0.$$

Se sigue que:

$$(1 - gQ_k^2(i\omega_0))P_{k+2}(i\omega_0) = 0.$$

Como $(1 - gQ_k^2(i\omega_0)) = 1 + g(c_k\omega_0/c_{k+1})^2 \geq 1$, para todo $g \in [0, 1]$, se tiene que $P_{k+2}(i\omega) = 0$ y $P_{k+1}(i\omega) = 0$. En definitiva, cualquier raíz imaginaria de $D_{k,g}(z)$ para algún $g \in [0, 1]$ también es raíz de $P_k(z) + P_{k+1}(z)$, de $P_{k+1}(z) + P_{k+2}(z)$ y de $D_{k,g}(z)$ para todo $g \in [0, 1]$. Finalmente, las raíces imaginarias permanecen en su localización, y ninguna raíz de $D_{k,g}(z)$ puede moverse desde el SPD o desde el SPI hasta el plano imaginario. Por tanto, ninguna raíz puede moverse del SPD al SPI y viceversa. Con esto, el lema queda probado. \square

Ejemplo 3.1. Considerése el polinomio cúbico $P(z) = z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3$. La tabla de Routh asociada es:

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_2 & 0 & 0 \\ a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 \end{array}$$

donde $b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$, $b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1} = 0$, $c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1} = a_3$ y $c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1} = 0$. Por consiguiente, la tabla de Routh queda como sigue:

$$\begin{array}{cccc} 1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ \frac{a_1a_2 - a_3}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ahora bien, por el Teorema 3.3, P es Hurwitz, si y solamente si se cumplen las siguientes condiciones:

$$a_1 > 0, a_3 > 0, a_1a_2 - a_3 > 0.$$

Ejemplo 3.2. En uno de los primeros análisis matemáticos de los sistemas de control con retroalimentación, Maxwell (1868), en su artículo *Sobre reguladores* [10] consideró el problema de regular la velocidad angular de los ejes motores. Se procederá a describir su estudio sobre el regulador de Jenkin. Es bastante difícil entender la forma exacta de este regulador según el artículo de Maxwell, por lo que se ha usado el esquemático dado en Bennet (1979) [9] (ver Figura 3.1). El experimento se realizó con el regulador en cuestión por Maxwell, Balfour Stewart y Jenkin en 1863. Desafortunadamente, no se ha encontrado ninguna descripción sobre el regulador de dicho época, aunque el regulador se preserva en el Whipple Museum of Science en la Universidad de Cambridge. El objetivo del regulador es asegurar que las desviaciones de la velocidad angular del eje motor respecto de un valor nominal sean pequeñas. Básicamente, se trata de un regulador de fricción. Si la velocidad angular aumenta respecto de su valor nominal, las bolas voladoras se alejan y la fuerza entre éstas y el anillo de fricción aumenta. Esto provoca que el anillo rote a una velocidad angular incrementada, que da lugar a los siguientes efectos:

- el peso en el fluido amortiguante se eleva con el fin de proveer un amortiguamiento hidráulico.
- el engranaje helicoidal dentado accionado por una espiral giratoria hace que el freno de cinta apriete el eje motor.
- un torque extra proporcional a la desviación angular del anillo de fricción respecto de un valor nominal se aplica al eje motor.

El anillo de fricción puede girar en ambas direcciones de modo que si la velocidad angular disminuye por debajo de su valor nominal los dos últimos efectos se invierten. A continuación se definen las siguientes variables:

- y = desviación angular del anillo respecto de su valor nominal.
- $\frac{dx}{dt}$ = velocidad angular del eje.
- P = torque del eje motor.
- R = torque de carga fijo del eje motor.
- M = momento de inercia de la máquina.
- G = constante que relaciona el torque aplicado a la máquina con y .

- $F =$ coeficiente de fricción.
- $V_1 =$ velocidad de operación fijada lo más baja posible.
- $B =$ momento de inercia del anillo
- $Y =$ coeficiente de amortiguamiento viscoso.
- $W =$ torque debido al peso.

Teniendo en cuenta estas variables, Maxwell empleó las siguientes ecuaciones:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = P - R - F \left(\frac{dx}{dt} - V_1 \right) - Gy,$$

$$B \frac{d^2y}{dt^2} = F \left(\frac{dx}{dt} - V_1 \right) - Y \frac{dy}{dt} - W.$$

Si se toman como variables de estado:

$$x_1 = \frac{dx}{dt}, \quad x_2 = y, \quad x_3 = \frac{dy}{dt},$$

las ecuaciones anteriores pueden escribirse entonces como sigue:

$$M\dot{x}_1 = P - R - F(x_1 - V_1) - Gx_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_3,$$

$$B\dot{x}_3 = F(x_1 - V_1) - Yx_3 - W.$$

Para obtener los puntos de equilibrio se impone $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$, $\dot{x}_3 = 0$:

$$\dot{x}_2 = 0 \Leftrightarrow x_3^e = 0;$$

$$\dot{x}_3 = 0 \Leftrightarrow F(x_1^e - V_1) - Yx_3^e - W = 0 \Leftrightarrow x_1^e = \frac{W}{F} + V_1;$$

$$\dot{x}_1 = 0 \Leftrightarrow P - R - F(x_1^e - V_1) - Gx_2^e = 0 \Leftrightarrow x_2^e = \frac{P - R - F(x_1^e - V_1)}{G} = \frac{P - R - W}{G}.$$

Si se define ahora la variable $x := x' + x^e$, las ecuaciones presentan la siguiente forma:

$$\dot{x}'_1 = -\frac{F}{M}x'_1 - \frac{G}{M}x'_2,$$

$$\dot{x}'_2 = x'_3,$$

$$\dot{x}'_3 = \frac{F}{B}x'_1 - \frac{Y}{B}x'_3,$$

o de forma equivalente:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F/M & -G/M & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ F/B & 0 & -Y/B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de la matriz de arriba satisfacen la siguiente ecuación característica:

$$P(\lambda) = \lambda^3 + \left(\frac{Y}{B} + \frac{F}{M} \right) \lambda^2 + \frac{FY}{MB} \lambda + \frac{FG}{MB} = 0,$$

y por el ejemplo anterior, este polinomio es Hurwitz si y solo si:

$$\left(\frac{Y}{B} + \frac{F}{M} \right) \frac{FY}{MB} - \frac{FG}{MB} > 0,$$

ó

$$\frac{Y}{B} + \frac{F}{M} > \frac{G}{Y}.$$

Por tanto, el punto de equilibrio x^e será asintóticamente estable si se cumplen las condiciones anteriores. Este es el resultado obtenido por Maxwell, a partir del cual, concluyó “Si no se cumple, habrá un movimiento de balanceo por parte del regulador que aumentará hasta que sea tan alto como los límites del movimiento del regulador. Para asegurar la estabilidad el valor de Y debe ser lo suficientemente grande...”

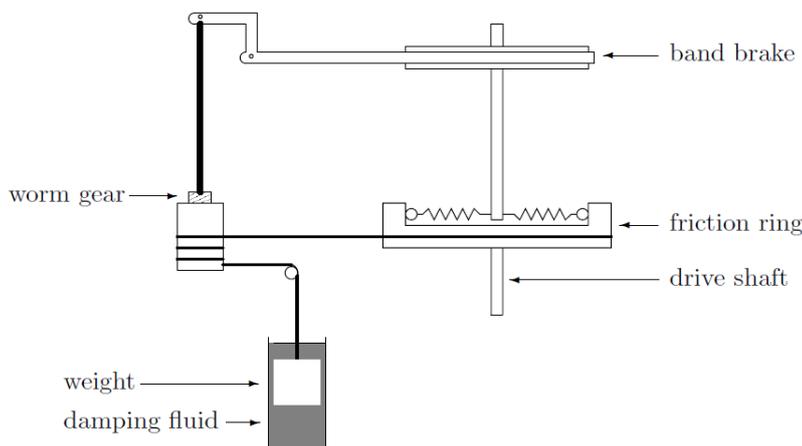


Figura 3.1: Regulador Jenkin (Imagen extraída de [6], página 307).

Criterio de Hurwitz.

Considérese $a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = a_{2n-1} = 0$, y se define la matriz cuadrada de tamaño n :

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & \cdots & a_{2n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & \cdots & a_{2n-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & \cdots & a_{2n-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{2n-4} \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{2n-5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & * & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

donde $*$ = a_0 o a_1 , según la paridad de n . Sean $\{H_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ los menores principales de H , definidos por

$$H_1 = a_1, H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \dots, H_n = \det(H).$$

Teorema 3.4. Si $a_0 > 0$, entonces P es Hurwitz si y solo si $H_i > 0$ para cada $k \in \{1, \dots, n\}$.

Observación 3.2. La prueba de este teorema no se va a realizar, ya que se necesita de una amplia gama de nociones sobre álgebra de matrices y análisis de variable compleja. No obstante, todo este contenido puede consultarse en [6, Capítulo 3]. En particular, la demostración de este teorema se encuentra en [6, Capítulo 3, sección 3.4, página 339, Teorema 3.4.71].

Observación 3.3. *Asúmase que $a_0 > 0$.*

Si todas la raíces de P tienen parte real no positiva, entonces $a_k \geq 0$ y $H_k \geq 0$, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$.

Si $n \leq 3$, $a_k \geq 0$ y $H_k \geq 0$ para cada $k \in \{1, 2, 3\}$, entonces todas las raíces de P tienen parte real no positiva.

Una condición necesaria para la estabilidad es que $a_k \geq 0$ para cada $k \in \{1, \dots, n\}$. Esta condición es sin embargo insuficiente (tómese por ejemplo $P(z) = z^4 + z^2 + 1$).

Definición 3.4. *El sistema de control lineal autónomo $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, con $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, se dice que es estabilizable de forma retroalimentada si existe $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (llamada matriz de ganancia) tal que el sistema bucle-cerrado con la retroalimentación (lineal) $u(t) = Kx(t)$,*

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t)$$

es asintóticamente estable. Esto es equivalente a exigir que $A + BK$ es Hurwitz.

Observación 3.4. *Este concepto es invariante bajo transformaciones similares $A_1 = PAP^{-1}$, $B_1 = PB$, $K_1 = KP^{-1}$.*

Teorema del cambio de polo.

Teorema 3.5. *(Teorema del cambio de polo). Si (A, B) satisface la condición de Kalman $rgK(A, B) = n$, entonces para cada polinomio real de grado n cuyo coeficiente líder es 1, existe $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $\chi_{A+BK} = P$, esto es, el polinomio característico de $A + BK$ es igual a P . En realidad, el recíproco es cierto.*

Prueba. Para realizar la prueba de este teorema, se distinguen dos casos:

- **Caso 1:** $m = 1$. Se sigue tel Teorema 2.2 (Forma normal de Brunovski) que el sistema es similar a:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde a_i con $i = 1, \dots, n$ son los coeficientes del polinomio característico de A , $\chi_A(X)$. Se considera ahora $K = (k_1 \cdots k_n)$ y $u = Kx$, de modo que:

$$A + BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ k_1 - a_n & k_2 - a_{n-1} & \cdots & k_n - a_1 \end{pmatrix}.$$

De aquí se obtiene que $\chi_{A+BK}(X) = X^n + (a_1 - k_n)X^{n-1} + \dots + (a_n - k_1)$. Por tanto, para cada polinomio $P(X) = X^n + \alpha_1 X^{n-1} + \dots + \alpha_n$, es suficiente escoger $k_1 = a_n - \alpha_n, \dots, k_n = a_1 - \alpha_1$.

- **Caso 2:** $m \geq 1$. Este caso puede reducirse al caso $m = 1$. Para ello, se considera el siguiente Lema.

Lema 3.3. *Si (A, B) satisface la condición de Kalman, entonces existe $y \in \mathbb{R}^m$ y $C \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ tales que $(A + BC, By)$ satisface la condición de Kalman.*

Atendiendo a este lema, se extrae lo siguiente: la matriz A es de tamaño $n \times n$, la matriz B es de tamaño $n \times m$ y la matriz C es de tamaño $m \times n$. Por tanto, denotando $A' := A + BC$, esta nueva matriz tiene tamaño $n \times n$. Asimismo, de nuevo, B tiene tamaño $n \times m$ e y , tamaño $m \times 1$. Por consiguiente, si se denota $B' := By$, esta nueva matriz tiene tamaño $n \times 1$. Entonces, el nuevo par (A', B') satisface la condición de Kalman con $m = 1$ y por el caso 1, para cada polinomio P de grado n cuyo coeficiente líder es 1, existe $K_1 \in \mathcal{M}_{1 \times n}(\mathbb{R})$ tal que $\chi_{A'+B'K_1} = \chi_{A+BC+ByK_1} = P$, y por tanto, tomando $K := C + yK_1 \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, se tiene $\chi_{A+BK} = P$, y el teorema queda probado. □

Prueba del lema. Sea $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $By \neq 0$. Se tiene $x_1 := By$.

- **Afirmación 1:** Existe $x_2 \in Ax_1 + Im(B)$ (y por tanto, existe $y_1 \in \mathbb{R}^m$ tal que $x_2 = Ax_1 + By_1$) tal que $\dim(Span(x_1, x_2)) = 2$.

En efecto, en caso contrario se tendría $Ax_1 + Im(B) \subset Span(x_1)$, y con ello, $Ax_1 \in Span(x_1)$ e $Im(B) \subset Span(x_1)$. Por tanto:

$$Im(AB) = AIm(B) \subset Span(Ax_1) \subset Span(x_1)$$

y de forma iterativa se obtendría que $Im(A^k B) \subset Span(x_1)$, para cada entero k . Esto implicaría que:

$$Im(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = Im(B) + Im(AB) + \dots + Im(A^{n-1}B) \subset Span(x_1)$$

que contradeciría la condición de Kalman.

- **Afirmación 2:** Para cada $k \leq n$, existe $x_k \in Ax_{k-1} + Im(B)$ (y por tanto, existe $y_{k-1} \in \mathbb{R}^m$ tal que $x_k = Ax_{k-1} + By_{k-1}$) tal que $\dim(E_k) = k$, donde $E_k = Span(x_1, \dots, x_k)$.

En efecto, en caso contrario se tendría $Ax_{k-1} + Im(B) \subset E_{k-1}$, y con ello, $Ax_{k-1} \in E_{k-1}$ e $Im(B) \subset E_{k-1}$. Se prueba ahora que $AE_{k-1} \subset E_{k-1}$. En efecto, nótese que $Ax_1 = x_2 - By_1 \in E_{k-1} + Im(B) \subset E_{k-1}$, y similar para Ax_2 , etc, $Ax_{k-2} = x_{k-1} - By_{k-1} \in E_{k-1} + Im(B) \subset E_{k-1}$, y finalmente, $Ax_{k-1} \in E_{k-1}$.

Por tanto $Im(AB) = AIm(B) \subset AE_{k-1} \subset E_{k-1}$, y de forma similar se tiene que $Im(A^i B) \subset E_{k-1}$ para cada entero i . Se seguiría que:

$$Im(B, AB, \dots, A^{n-1}B) \subset E_{k-1},$$

que contradeciría la condición de Kalman.

Por consiguiente, se ha construido una base $\{x_1, \dots, x_n\}$ de \mathbb{R}^n . Se define $C \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ mediante las relaciones:

$$Cx_1 = y_1, Cx_2 = y_2, \dots, Cx_{n-1} = y_{n-1}, Cx_n \text{ arbitrario.}$$

Entonces $(A + BC, x_1)$ satisface la condición de Kalman dado que $(A + BC)x_1 = Ax_1 + By_1 = x_2, \dots, (A + BC)x_{n-1} = Ax_{n-1} + By_{n-1} = x_n$. □

Corolario 3.1. Si el sistema de control lineal $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ es controlable entonces es estabilizable.

Prueba. Para probar este corolario, es suficiente tomar por ejemplo $P(X) = (X + 1)^n$ y aplicar el Teorema del cambio de polo. Como P tiene una raíz $X = -1$ con multiplicidad n , el Teorema del cambio de polo garantiza la existencia de una matriz de ganancia K tal que $\chi_{A+BK} = P$. Luego, $A + BK$ es Hurwitz y entonces el sistema es estabilizable. □

Se finaliza esta sección con los sistemas lineales no autónomos. Lo primero, es que no hay una teoría para este tipo de sistemas $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$. Se va a explicar como emergen dificultades al considerar el sistema $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ sin el control. A priori se podría pensar que, si la matriz $A(t)$ es Hurwitz para cada t , entonces el sistema es asintóticamente estable. No obstante, esta idea es errónea. La afirmación es incluso errónea bajo condiciones más fuertes sobre $A(t)$. Por ejemplo, el sistema no será asintóticamente estable aunque la matriz $A(t)$ satisfaga las siguientes condiciones: existe $\epsilon > 0$ tal que, para cada t , cada autovalor (complejo) $\lambda(t)$ de $A(t)$ satisface $Re(\lambda(t)) \leq -\epsilon$.

Un contraejemplo sería el siguiente:

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + a\cos^2 t & 1 - a \sin t \cos t \\ -1 - a \sin t \cos t & -1 + a\sin^2 t \end{pmatrix},$$

con $a \in [1, 2)$. De hecho, puede verse que:

$$x(t) = e^{(a-1)t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix},$$

es una solución de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, y no converge a 0 siempre que $a \geq 1$. Además, se puede ver que si $a < 1$ entonces el sistema es asintóticamente estable. Asimismo, el polinomio característico de la matriz $A(t)$ es:

$$\begin{aligned} P_t(\lambda) &= \det(\lambda I - A(t)) \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda + 1 - a \cos^2 t & -1 + a \sin t \cos t \\ 1 + a \sin t \cos t & \lambda + 1 - a \sin^2 t \end{pmatrix} \\ &= (\lambda + 1)^2 - a(\cos^2 t + \sin^2 t)(\lambda + 1) + a^2 \cos^2 t \sin^2 t - [a \cos^2 t \sin^2 t - 1] \\ &= (\lambda + 1)^2 - a(\lambda + 1) + 1 = \lambda^2 + (2 - a)\lambda + 2 - a, \end{aligned}$$

mientras que la tabla de Routh queda:

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 - a \\ 2 - a & 0 \\ \frac{(2-a)^2}{2-a} & 0 \end{array}$$

. Por tanto $A(t)$ es Hurwitz si y solamente si $a < 2$.

Se explica ahora el motivo de este error. Una forma simple para entenderlo es el siguiente caso (no demasiado restrictivo). Asúmase que, para cada t , $A(t)$ es diagonalizable, y existe $P(t)$ invertible tal que $P(t)^{-1}A(t)P(t) = D(t)$, con $D(t)$ diagonal, y $P(\cdot)$ y $D(\cdot)$ de clase C^1 . Si se define $X(t) = P(t)Y(t)$, se obtiene de forma inmediata que:

$$\dot{Y}(t) = (D(t) - P(t)^{-1}\dot{P}(t))Y(t).$$

Si el término $P(t)^{-1}\dot{P}(t)$ fuera igual a 0 (como es en el caso autónomo), entonces, obviamente, la estabilidad asintótica sería cierta tan pronto como los autovalores (diagonal de $D(t)$) tuvieran parte real negativa. Pero, incluso si $D(t)$ es Hurwitz, el término $P(t)^{-1}\dot{P}(t)$ puede desestabilizar la matriz y generar un error en estabilidad asintótica.

En otras palabras, lo que provoca la divergencia es el hecho de que los autovectores (que constituyen las columnas de $P(t)$) tal vez evolucionen rápido en tiempo, implicando que la norma de $\dot{P}(t)$ sea grande.

Para finalizar con un resultado positivo, puede notarse que, si la matriz $A(t)$ varía lentamente en el tiempo, entonces la norma del término $P(t)^{-1}\dot{P}(t)$ es pequeña, por lo que si somos capaces de asegurar que esta norma es lo suficientemente pequeña con respecto a la de $D(t)$, entonces se puede establecer un resultado de estabilidad asintótica.

3.2. Estabilización de sistemas no lineales

3.2.1. Recordatorios de estabilidad: teoremas de Lyapunov y LaSalle

Considérese un sistema dinámico continuo $\dot{x}(t) = f(x(t))$, donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz. Se denota por $x(\cdot, x_0)$ la única solución de este sistema tal que $x(0, x_0) = x_0$. Se asume que \bar{x} es un *punto de equilibrio*, esto es, $f(\bar{x}) = 0$.

Definición 3.5. ■ *El punto de equilibrio \bar{x} se dice que es estable si, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para cada punto inicial x_0 tal que $|x_0 - \bar{x}| \leq \delta$, se tiene $|x(t, x_0) - \bar{x}| \leq \epsilon$ para cada $t \geq 0$.*

- *El punto de equilibrio \bar{x} se dice que es localmente asintóticamente estable (de forma abreviada, LAE) si es estable y además $x(t, x_0) \rightarrow \bar{x}$ cuando $t \rightarrow +\infty$ para cada x_0 en algún entorno de \bar{x} .*
- *Si el entorno es todo \mathbb{R}^n entonces se habla de estabilidad asintótica global (de forma abreviada, GAE). Si un resultado de estabilidad asintótica se establece en algún entorno V de \bar{x} , entonces decimos que \bar{x} es GAE en V .*

A continuación, se muestra el concepto de la *función de Lyapunov*, junto con dos teoremas bien conocidos: el *Teorema de Liapunov* y el *Principio de LaSalle*. Sus demostraciones no se adjuntarán ya que estos teoremas serán empleados de forma auxiliar con el fin de proveer información sobre los entornos de estabilidad.

Definición 3.6. *Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene el punto de equilibrio \bar{x} . La función $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una función de Lyapunov en \bar{x} sobre Ω si:*

- *V es de clase C^1 en Ω ;*
- *$V(\bar{x}) = 0$ y $V(x) > 0$ para cada $x \in \Omega \setminus \{\bar{x}\}$;*
- *$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0$ para cada $x \in \Omega$. Si la desigualdad es estricta en $\Omega \setminus \{\bar{x}\}$ entonces se dice que la función de Lyapunov es estricta.*

Observación 3.5. *Nótese que, a lo largo de una trayectoria del sistema dinámico dada, se tiene que:*

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle$$

Por tanto si V es una función de Lyapunov entonces el valor de V no aumenta a lo largo de ninguna trayectoria. Una función de Lyapunov puede verse como un pozo de potencial, que asegura la estabilidad.

Definición 3.7. *La función de Lyapunov V se dice que es propia siempre y cuando $V^{-1}([0, L])$ es un subconjunto compacto de Ω , para cada $L \in V(\Omega)$; en otras palabras, la imagen inversa de cada compacto es compacto. Cuando $\Omega = \mathbb{R}^n$, esta propiedad es equivalente a decir que $V(x) \rightarrow +\infty$ cuando $|x| \rightarrow +\infty$.*

Teorema 3.6. *(Teorema de Lyapunov) Si existe una función de Lyapunov V en \bar{x} sobre Ω , entonces \bar{x} es estable. Si V es estricta entonces \bar{x} es LAE. Si además V es propia, entonces \bar{x} es GAE en Ω .*

Observación 3.6. *Cuando la función de Liapunov no es estricta entonces se puede ser más específico e inferir que la trayectoria converge a algún subconjunto.*

Teorema 3.7. *(Principio de LaSalle) Sea V una función de Lyapunov sobre Ω , de clase C^1 que es propia. Sea \mathcal{I} el subconjunto más grande de $\{x \in \Omega \mid \langle \nabla V(x), f(x) \rangle = 0\}$ que es invariante bajo el flujo (en tiempo positivo) del sistema dinámico. Entonces, todas las soluciones convergen a \mathcal{I} , en el sentido de que $d(x(t), \mathcal{I}) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$ (con d la distancia Euclídea).*

Observación 3.7. Es interesante formular el principio de LaSalle en el caso particular en el que el conjunto invariante \mathcal{I} se reduce al conjunto unitario $\{\bar{x}\}$. El enunciado es entonces, como sigue: sea V una función de Lyapunov en Ω de clase C^1 que es propia tal que, si x es una solución del sistema $\dot{x}(t) = f(x(t))$ tal que $\langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle = 0$ para cada $t \geq 0$, entonces necesariamente $x(t) = \bar{x}$. Entonces el punto de equilibrio \bar{x} es GAE en Ω .

Ejemplo 3.3. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que $g(0) = 0$ y $xg(x) > 0$ si $x \neq 0$ y satisfaciendo $\int_0^{+\infty} g(s)ds = +\infty$ y $\int_{-\infty}^0 g(s)ds = -\infty$. Considerando la función de Lyapunov:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x g(s)ds,$$

es fácil probar que el punto $(0, 0)$ es GAE para el sistema $\ddot{x} + \dot{x} + g(x) = 0$ (que tiene que ser escrito como un sistema de primer orden).

En primer lugar, se escribe el sistema en cuestión como un sistema de primer orden. Para ello, se considera el cambio de variables $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$. Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + g(x_1).\end{aligned}$$

Expresándolo ahora de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g(x_1) \end{pmatrix}.$$

En segundo lugar, se considera la función de Lyapunov reescrita en las nuevas variables, esto es, $V(x_1, x_2) = F(x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$, donde:

$$\begin{aligned}F : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x_1 &\longmapsto F(x_1) = \int_0^{x_1} g(s)ds.\end{aligned}$$

Nótese en este caso, que $\Omega = \mathbb{R}^2$. Se comprueban ahora los siguientes puntos:

- V es de clase C^1 en \mathbb{R}^2 . En efecto, $\frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1, x_2) = F'(x_1) = g(x_1)$ es una función de clase C^1 en \mathbb{R} por hipótesis; y $\frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_2$ es también una función de clase C^1 en \mathbb{R} .
- Sea $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$, se tiene de forma clara que $V(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$.
Asimismo, si $(x_1, x_2) \neq (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, entonces $V(x_1, x_2) > 0$. En efecto, por una lado se tiene que si $x_2 \neq 0$ entonces $\frac{1}{2}x_2^2 > 0$. Por otro lado, se sabe por hipótesis que si $x_1 \neq 0$ entonces $x_1g(x_1) > 0$. Por tanto, si $x_1 < 0$, necesariamente $g(x_1) < 0$ y si $x_1 > 0$, necesariamente $g(x_1) > 0$. Teniendo en cuenta esto, si $x_1 > 0$ entonces $s \in [0, x_1]$, por lo que $g(s) > 0$ para todo s de dicho intervalo y $\int_0^{x_1} g(s)ds > 0$. Por el contrario, si $x_1 < 0$ entonces $s \in [x_1, 0]$, por lo que $g(s) < 0$ para todo s de dicho intervalo y $\int_0^{x_1} g(s)ds = -\int_{x_1}^0 g(s)ds > 0$. En definitiva, si $x_1 \neq 0$, entonces $F(x_1) > 0$.
- Se tiene que: $\nabla V(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^t = (g(x_1), x_2)^t$. Por tanto: $\langle \nabla V(x_1, x_2), (x_2, -x_2 - g(x_1)) \rangle = g(x_1)x_2 - x_2(x_2 + g(x_1)) = -x_2^2 \leq 0$ para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\}$
- V es propia. En efecto, si $|(x_1, x_2)| \rightarrow +\infty$, necesariamente $x_1 \rightarrow \pm\infty$ y $x_2 \rightarrow \pm\infty$. Por tanto, $\frac{1}{2}x_2^2 \rightarrow +\infty$ cuando $x_2 \rightarrow \pm\infty$ y $F(x_1) = \int_0^{x_1} g(s)ds \rightarrow +\infty$ cuando $x_1 \rightarrow \pm\infty$ por hipótesis. En definitiva, $V(x_1, x_2) = F(x_1) + \frac{1}{2}x_2^2 \rightarrow +\infty$ cuando $|(x_1, x_2)| \rightarrow +\infty$.
- Sea $(x_1(t), x_2(t))$ tal que $x_2(t) = 0$. Entonces, $\dot{x}_1(t) = 0$ y $g(x_1(t)) = 0$, por lo que $x_1(t) = 0$. Por consiguiente $(x_1(t), x_2(t)) = 0$.

En definitiva, la función V es una función de Liapunov. Por el quinto punto, también se deduce que V es propia. Por tanto, por el Teorema 3.7, (\bar{x}_1, \bar{x}_2) es GAE en \mathbb{R}^2 .

Finalmente, se adjunta un resultado que también será de vital importancia. Mediante el estudio de los autovalores de la matriz jacobiana del sistema linealizado en un punto de equilibrio dado, se puede obtener un resultado de estabilidad local alrededor de dicho punto. Sin embargo, no se ofrece ningún tipo de información acerca de los conjuntos de estabilidad.

Teorema 3.8. (Teorema de linealización). *Asúmase que f es de clase C^1 . Sea A la matriz jacobiana de f en el punto de equilibrio \bar{x} del sistema $\dot{x}(t) = f(x(t))$.*

1. *Si todos los autovalores de A tienen parte real estrictamente negativa, entonces el punto de equilibrio \bar{x} es localmente asintóticamente estable.*
2. *Si existe un autovalor de A cuya parte real es estrictamente positiva, entonces el punto de equilibrio \bar{x} es inestable.*

Prueba. Sea el sistema autónomo $\dot{x}(t) = f(x(t))$, donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función de clase C^1 , se realiza un desarrollo de Taylor de primer orden alrededor del punto de equilibrio \bar{x} ($f(\bar{x}) = 0$):

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})(x - \bar{x}) + R(x - \bar{x}) = A(x - \bar{x}) + R(x - \bar{x}),$$

donde A es la matriz jacobiana de f en el punto de equilibrio \bar{x} , i.e., $A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})$ y $R(x - \bar{x})$ es una función que cumple que:

$$\frac{R(x - \bar{x})}{|x - \bar{x}|} \rightarrow 0$$

cuando $|x - \bar{x}| \rightarrow 0$.

Para continuar con la demostración, se verifican las siguientes propiedades:

- **Propiedad 1.** Como todos los autovalores de la matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tienen parte real negativa, para cualquier matriz Q simétrica definida positiva, existe una única matriz P simétrica definida positiva que es solución de la siguiente ecuación de Lyapunov:

$$A^\top P + PA = -Q.$$

En efecto, se considera $P := \int_0^{+\infty} e^{tA^\top} Q e^{tA} dt$. Como Q es una matriz definida positiva, existe una matriz no singular $Q^{\frac{1}{2}}$ tal que $Q = (Q^{\frac{1}{2}})^\top Q^{\frac{1}{2}}$. Teniendo esto en cuenta, se llega a lo siguiente:

- Como Q es simétrica, es decir, $Q^\top = Q$ se obtiene:

$$(e^{tA^\top} Q e^{tA})^\top = (e^{tA})^\top Q^\top (e^{tA^\top})^\top = e^{tA^\top} Q e^{tA}, \quad \forall t \in (0, +\infty)$$

por lo que P es simétrica.

- Sea $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$v^\top e^{tA^\top} Q e^{tA} v = v^\top e^{tA^\top} (Q^{\frac{1}{2}})^\top Q^{\frac{1}{2}} e^{tA} v = (Q^{\frac{1}{2}} e^{tA} v)^\top Q^{\frac{1}{2}} e^{tA} v = |Q^{\frac{1}{2}} e^{tA} v|^2 > 0, \quad \forall t \in (0, +\infty).$$

Por consiguiente, P es definida positiva.

- Se comprueba ahora que P satisface la ecuación de Lyapunov:

$$\begin{aligned} A^\top P + PA &= \int_0^{+\infty} \{A^\top e^{tA^\top} Q e^{tA} + e^{tA^\top} Q e^{tA} A\} dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} (e^{tA^\top} Q e^{tA}) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{tA^\top} Q e^{tA} - Q = -Q. \end{aligned}$$

Por el Teorema 3.1, como A es Hurwitz, se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA} x_0\| = 0$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y en particular, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{tA}\| = 0$. Por un razonamiento análogo, se tiene también que: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{tA^\top}\| = 0$.

Como Q es cualquier matriz simétrica definida positiva, para el caso particular de $Q = I_n$, se tiene que la matriz P es de la forma $P := \int_0^{+\infty} e^{tA^T} Q e^{tA} dt$ y la ecuación de Lyapunov queda:

$$A^T P + P A = -I_n.$$

A partir de ahora, para las propiedades venideras se tiene en cuenta este caso particular en el que $Q = I_n$.

- **Propiedad 2.** Se considera la función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$x \mapsto V(x) := \langle x - \bar{x}, P(x - \bar{x}) \rangle.$$

V es una función de Lyapunov para el sistema $\dot{x}(t) = A(x(t) - \bar{x})$ en \bar{x} y además, el punto de equilibrio \bar{x} es GAE. En efecto:

- V es de clase C^1 en \mathbb{R}^n .
- $V(\bar{x}) = \langle \bar{x} - \bar{x}, P(\bar{x} - \bar{x}) \rangle = 0$ y dado $x \neq \bar{x}$:

$$V(x) = \langle x - \bar{x}, P(x - \bar{x}) \rangle = (x - \bar{x})^T P(x - \bar{x}) > 0,$$

por ser P una matriz definida positiva.

- Se calcula en este punto la derivada respecto al tiempo de la función de Lyapunov:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= \frac{d}{dt} (\langle x(t) - \bar{x}, P(x(t) - \bar{x}) \rangle) \\ &= \langle \dot{x}(t), P(x(t) - \bar{x}) \rangle + \langle x(t) - \bar{x}, P\dot{x}(t) \rangle \\ &= \langle A(x(t) - \bar{x}), P(x(t) - \bar{x}) \rangle + \langle x(t) - \bar{x}, P A(x(t) - \bar{x}) \rangle \\ &= \langle x(t) - \bar{x}, A^T P(x(t) - \bar{x}) \rangle + \langle x(t) - \bar{x}, P A(x(t) - \bar{x}) \rangle \\ &= \langle x(t) - \bar{x}, (A^T P + P A)(x(t) - \bar{x}) \rangle = \langle x(t) - \bar{x}, -I_n(x(t) - \bar{x}) \rangle = \\ &= -\langle x(t) - \bar{x}, x(t) - \bar{x} \rangle = -|x(t) - \bar{x}|^2 < 0, \quad \forall x \neq \bar{x}. \end{aligned}$$

- V es propia. En efecto:

$$V(x) = \langle x - \bar{x}, P(x - \bar{x}) \rangle = |P^{\frac{1}{2}}(x - \bar{x})|^2 \geq C|x - \bar{x}|^2,$$

con $C > 0$. Este último paso es posible porque P es invertible, por lo que $P^{\frac{1}{2}}$ también lo es.

Como $x(t) = \bar{x}$ es la única solución del sistema para la que $\frac{d}{dt} V(t) = \langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle = 0$, por el Principio de LaSalle, el punto de equilibrio \bar{x} es GAE.

- **Propiedad 3.** La función V precedente es también una función de Lyapunov para el sistema $\dot{x}(t) = A(x(t) - \bar{x}) + R(x - \bar{x})$ en el punto de equilibrio \bar{x} sobre un abierto Ω de la forma $B(\bar{x}, \delta)$ (con δ una cantidad positiva lo suficientemente pequeña). Además, el punto de equilibrio \bar{x} es LAE en Ω . En efecto, los dos primeros puntos se tienen ya. Tan solo hay que ver que la función de Lyapunov es estricta en $\Omega \setminus \{\bar{x}\}$.

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x), f(x) \rangle &= \langle A(x - \bar{x}) + R(x - \bar{x}), P(x - \bar{x}) \rangle + \langle x - \bar{x}, P(A(x - \bar{x}) + R(x - \bar{x})) \rangle \\ &= \langle x - \bar{x}, (A^T P + P A)(x - \bar{x}) \rangle + \langle R(x - \bar{x}), P(x - \bar{x}) \rangle + \langle x - \bar{x}, P R(x - \bar{x}) \rangle \\ &= \langle x - \bar{x}, -I_n(x - \bar{x}) \rangle + 2\langle x - \bar{x}, P R(x - \bar{x}) \rangle \\ &= -|x - \bar{x}|^2 + 2\langle x - \bar{x}, P R(x - \bar{x}) \rangle \\ &\leq -|x - \bar{x}|^2 + 2|x - \bar{x}| \|P\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} |R(x - \bar{x})| \\ &\leq |x - \bar{x}|^2 \left(-1 + 2\|P\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \frac{|R(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|} \right). \end{aligned}$$

Ahora bien, dado $\epsilon := \frac{1}{4\|P\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}$, existe $\delta = \delta(\epsilon)$ tal que si $|x - \bar{x}| < \delta$, entonces

$$\frac{|R(x(t) - \bar{x})|}{|x(t) - \bar{x}|} < \epsilon.$$

Teniendo esto en cuenta, si $x \in B(\bar{x}, \delta)$ se llega a que:

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x), f(x) \rangle &\leq |x - \bar{x}|^2 \left(-1 + 2\|P\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \frac{|R(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|} \right) \\ &\leq |x(t) - \bar{x}|^2 \left(-1 + 2\|P\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \frac{1}{4\|P\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}} \right) \\ &\leq -\frac{1}{2}|x(t) - \bar{x}|^2. \end{aligned}$$

Con esto se tiene que V es estricta en $\Omega \setminus \{\bar{x}\}$ y por tanto, el punto de equilibrio \bar{x} es LAE.

Con todas estas propiedades probadas se llega a que si los autovalores de la matriz jacobiana A en el punto de equilibrio \bar{x} tienen parte real negativa, entonces \bar{x} es localmente asintóticamente estable, tal y como se enunciaba en el teorema.

Finalmente, la prueba del segundo ítem es parecida y hace uso de la propiedad 1 y de la construcción apropiada de una función de Lyapunov tal que $\dot{V} > 0$ (esto puede verse con gran detalle en [16, Teorema 3.7, página 127]). \square

3.2.2. Aplicación a la estabilización de sistemas de control no lineal

Considérese el sistema de control no lineal general (3.1), y un punto de equilibrio $(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathbb{R}^n \times \Omega$, tal y como se estableció al principio del capítulo. Se considera el sistema linealizado en dicho punto:

$$\delta \dot{x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t),$$

donde:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) \quad \text{y} \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}).$$

Si el sistema linealizado puede estabilizarse de forma retroalimentada, es decir, si se puede encontrar una matriz K de tamaño $m \times n$ tal que $A + BK$ es Hurwitz, entonces el Teorema 3.8 implica un resultado de estabilización local para el sistema de control no lineal (3.1). En otras palabras, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.9. *Si el par (A, B) satisface la condición de Kalman, entonces existe una matriz K de tamaño $m \times n$ tal que el control de retroalimentación $u = K(x - \bar{x}) + \bar{u}$ estabiliza asintóticamente al sistema de control no lineal (3.1) localmente alrededor de (\bar{x}, \bar{u}) . En otras palabras, el sistema bucle-cerrado $\dot{x}(t) = f(x(t), K(x(t) - \bar{x}) + \bar{u})$ es LAS en \bar{x} .*

Nótese que el entorno tiene que ser lo suficientemente pequeño como para que el control de retroalimentación u tome sus valores en el conjunto Ω .

Ejemplo 3.4. *(Estabilización del péndulo inverso).*

Considérese un péndulo inverso como el de la Figura 3.2, de masa m y longitud l que está unido a un carro de masa M cuya aceleración está controlada por el control u . Asimismo, se definen a continuación las siguientes coordenadas:

- ξ : determina la posición del carro. En este caso, el carro se modela como una masa puntual M , con coordenada ξ en el eje horizontal.
- ξ_2 : determina la posición de uno de los extremos del péndulo inverso en el eje horizontal respecto al carro.

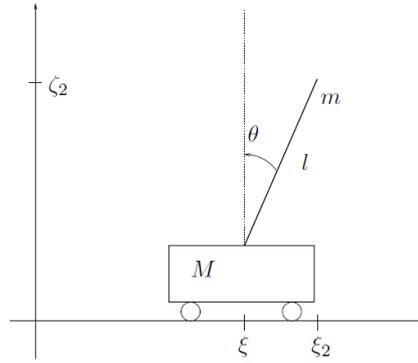


Figura 3.2: Péndulo inverso. (Imagen extraída de [2], página 80).

- ζ_2 : determina la posición de uno de los extremos del péndulo inverso en el eje vertical respecto del carro.
- θ : determina el desplazamiento angular del péndulo inverso respecto del eje vertical.

. Las energías cinética y potencial son:

$$E_c = \frac{1}{2}M\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}M(\dot{\xi}_2^2 + \dot{\zeta}_2^2), \quad E_p = mg\zeta_2.$$

Por otra parte, se tiene que $\zeta_2 = l \cos \theta$ y $\xi_2 = \xi + l \sin \theta$. Por consiguiente, el sistema en cuestión tiene dos grados de libertad que están determinados por las coordenadas ξ y θ . Entonces, el Lagrangiano del sistema es:

$$\begin{aligned} L = E_c - E_p &= \frac{1}{2}M\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{\xi}_2^2 + \dot{\zeta}_2^2) - mgl \cos \theta \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{\xi} + l(\cos \theta)\dot{\theta})^2 + (l(\sin \theta)\dot{\theta})^2] - mgl \cos \theta \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m[\dot{\xi}^2 + l^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + 2l \cos \theta \dot{\xi} \dot{\theta} + l^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2] - mgl \cos \theta \\ &= \frac{1}{2}(M + m)\dot{\xi}^2 + ml\dot{\xi}\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta. \end{aligned}$$

De acuerdo con las Ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} + F_{ext}$$

si se aplican a cada una de las coordenadas, se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

- Coordenada θ .

Primero se deriva el lagrangiano respecto a $\dot{\theta}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml\dot{\xi} \cos \theta + ml^2\dot{\theta}$$

y derivando respecto al tiempo t se llega a:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml\ddot{\xi} \cos \theta - ml\dot{\xi} \sin \theta \dot{\theta} + ml^2\ddot{\theta}.$$

Ahora se deriva respecto a θ :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml\dot{\xi}\dot{\theta} \sin \theta + mgl \sin \theta.$$

En este caso $F_{ext} = 0$. Por consiguiente se concluye:

$$ml\ddot{\xi} \cos \theta + ml^2\ddot{\theta} - mgl \sin \theta = 0.$$

Se despeja $\ddot{\theta}$ de la ecuación anterior:

$$\ddot{\theta} = \frac{mgl \sin \theta - ml\ddot{\xi} \cos \theta}{ml^2}. \quad (3.2)$$

■ *Coordenada ξ .*

Primero se deriva el lagrangiano respecto a $\dot{\xi}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = (M + m)\dot{\xi} + ml\dot{\theta} \cos \theta$$

y derivando respecto al tiempo t se llega a:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = (M + m)\ddot{\xi} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta.$$

Ahora se deriva respecto a ξ :

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = 0.$$

En este caso $F_{ext} = u$. Por consiguiente se concluye:

$$(M + m)\ddot{\xi} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = u.$$

Se despeja $\ddot{\xi}$ de la ecuación anterior:

$$\ddot{\xi} = \frac{u - ml\ddot{\theta} \cos \theta + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta}{M + m}. \quad (3.3)$$

Se sustituye la ecuación anterior en la ecuación (3.2) obteniéndose así la ecuación de movimiento para la coordenada θ

$$\ddot{\theta} = \frac{-ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta + (M + m)g \sin \theta - u \cos \theta}{l(M + m \sin^2 \theta)} \quad (3.4)$$

Sustituyendo ahora esta última ecuación en la ecuación (3.3) se llega a la ecuación de movimiento para la coordenada ξ :

$$\ddot{\xi} = \frac{ml\dot{\theta}^2 \sin \theta - mg \cos \theta \sin \theta + u}{M + m \sin^2 \theta} \quad (3.5)$$

Se definen ahora las siguientes variables de estado: $x_1 = \xi$, $x_2 = \dot{\xi}$ (esto implica que $\dot{x}_2 = \ddot{\xi}$), $x_3 = \theta$ y $x_4 = \dot{\theta}$ (esto implica que $\dot{x}_4 = \ddot{\theta}$). Por consiguiente, considerando el vector $x := (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ se obtiene el siguiente sistema no lineal:

$$\dot{x} = f(x, u) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \\ f_3(x, u) \\ f_4(x, u) \end{pmatrix},$$

donde:

$$\begin{aligned} f_1(x, u) &= x_2, \\ f_2(x, u) &= \frac{mlx_4^2 \sin x_3 - mg \cos x_3 \sin x_3 + u}{M + m \sin^2 x_3}, \\ f_3(x, u) &= x_4, \\ f_4(x, u) &= \frac{-mlx_4^2 \sin x_3 \cos x_3 + (M + m)g \sin x_3 - u \cos x_3}{l(M + m \sin^2 x_3)}. \end{aligned}$$

Una vez obtenido el sistema en las nuevas variables, se procede a obtener los puntos de equilibrio del sistema. Para ello, se impone $f(x, u) = 0$.

$$f_1(x, u) = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0.$$

$$f_2(x, u) = 0 \Leftrightarrow u = -mlx_4^2 \sin x_3 + mg \cos x_3 \sin x_3.$$

$$f_3(x, u) = 0 \Leftrightarrow x_4 = 0.$$

$$\begin{aligned} f_4(x, u) = 0 &\Leftrightarrow -mlx_4^2 \sin x_3 \cos x_3 + (M + m)g \sin x_3 - u \cos x_3 = 0 \Leftrightarrow \\ &(M + m)g \sin x_3 - mg \cos^2 x_3 \sin x_3 = 0 \Leftrightarrow \\ -mlx_4^2 \sin x_3 \cos x_3 + (M + m)g \sin x_3 - [-mlx_4^2 \sin x_3 + mg \cos x_3 \sin x_3] \cos x_3 &= 0 \Leftrightarrow \\ \sin x_3 = 0 &\Leftrightarrow x_3 = 0; \theta \in [-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

En definitiva, $\bar{x} = (\bar{x}_1, 0, 0, 0)$ con $\bar{u} = 0$.

Ahora que se ha deducido el punto de equilibrio del sistema en cuestión, hay que determinar el sistema linealizado en el punto de equilibrio. Para ello, se calcula primero la matriz jacobiana del sistema, esto es, $A = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x}$ y después se calcula $\frac{\partial f(\bar{x}, \bar{u})}{\partial u}$.

- Derivadas de la primera componente de f :

$$\nabla_x f_1(\bar{x}, \bar{u}) = (0, 1, 0, 0).$$

- Derivadas de la segunda componente de f :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_3} &= \frac{(mlx_4^2 \cos x_3 - mg \cos(2x_3))(M + m \sin^2 x_3)}{(M + m \sin^2 x_3)^2} \\ &\quad - \frac{(mlx_4^2 \sin x_3 - mg \cos x_3 \sin(x_3) + u)(M + m \sin 2x_3)}{(M + m \sin^2 x_3)^2}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_4} &= \frac{2mlx_4 \sin x_3}{M + m \sin^2 x_3}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $\nabla_x f_2(\bar{x}, \bar{u}) = (0, 0, 0, 1)$.

- Derivadas de la tercera componente de f :

$$\nabla_x f_3(\bar{x}, \bar{u}) = (0, 0, -\frac{mg}{M}, 0).$$

- Derivadas de la cuarta componente de f :

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1}, \frac{\partial f_4}{\partial x_2} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_4}{\partial x_3} &= \frac{[-mlx_4^2 \cos(2x_3) + (M+m)g \cos x_3 + u \sin x_3](M+m \sin^2 x_3)}{l(M+m \sin^2 x_3)^2} \\ &\quad - \frac{[-mlx_4^2 \sin x_3 \cos x_3 + (M+m)g \sin x_3 - u \cos x_3](M+m \sin(2x_3))}{l(M+m \sin^2 x_3)^2}, \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_4} &= \frac{-2mlx_4 \sin x_3}{M+m \sin^2 x_3}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\nabla_x f_4(\bar{x}, \bar{u}) = (0, 0, -\frac{(M+m)g}{M}, 0)$.

En definitiva, la matriz jacobiana en el punto de equilibrio queda como sigue:

$$A = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(m+M)g}{lM} & 0 \end{pmatrix}.$$

Falta por deducir la matriz B del sistema linealizado, es decir, $B = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{u})}{\partial u}$. En este caso, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial u} &= \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial u} &= \frac{1}{M+m \sin^2 x_3}, \\ \frac{\partial f_4(x, u)}{\partial u} &= \frac{-\cos x_3}{M+m \sin^2 x_3}, \end{aligned}$$

y por consiguiente:

$$\partial_u f(\bar{x}, \bar{u}) = (0, \frac{1}{M}, 0, -\frac{1}{lM}).$$

Entonces la matriz B en el punto de equilibrio tiene la forma:

$$B = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{u})}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{lM} \end{pmatrix}.$$

A modo de conclusión, el sistema linealizado presenta la forma:

$$\delta \dot{x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t),$$

con $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ y $B \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ con las formas mostradas más arriba.

Una vez obtenido el sistema linealizado, se va a comprobar si se puede estabilizar de forma retroalimentada, es decir, por la Definición 3.4, se va a ver si existe una matriz de ganancia $K \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$ tal que el sistema bucle-cerrado con la retroalimentación lineal $\delta u(t) = K\delta x(t)$:

$$\delta \dot{x}(t) = (A + BK)\delta x(t)$$

es asintóticamente estable, esto es, la matriz $A + KB$ es Hurwitz, o equivalentemente, la parte real de sus autovalores es negativa.

Para ver la existencia de la matriz de ganancia K , se hace uso del Teorema 3.5 (Teorema del cambio de polo), que establece que si (A, B) satisface la condición de Kalman, entonces para

cada polinomio real de grado n con coeficiente líder igual a 1 (se denota a dicho polinomio por P), existe $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (en este caso particular, $m = 1$ y $n = 4$), tal que $\chi_{A+BK} = P$, es decir, el polinomio característico de $A + BK$ es igual a P . En efecto, la matriz de Kalman $K(A, B)$, para el sistema linealizado es:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(m+M)g}{lM} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{lM} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{lM} \end{pmatrix},$$

$$A^2B = A \cdot AB = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{mg}{lM^2} \\ 0 \\ -\frac{(m+M)g}{(lM)^2} \end{pmatrix},$$

$$A^3B = A \cdot A^2B = \begin{pmatrix} \frac{mg}{lM^2} \\ 0 \\ -\frac{(m+M)^2g}{lM} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente:

$$K(A, B) = (B, AB, A^2B, A^3B) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{M} & 0 & \frac{mg}{lM^2} \\ \frac{1}{M} & 0 & \frac{mg}{lM^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{M} & 0 & -\frac{(m+M)g}{(lM)^2} \\ 0 & 0 & \frac{g}{l^2M} & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\det K(A, B) = -\frac{g^2}{l^4M^4} \neq 0$, esta matriz tiene rango máximo igual a 4, por lo que se cumple la condición de Kalman. Por consiguiente, se garantiza la existencia de la matriz de ganancia $K \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$, tal que $A + BK$ es Hurwitz. Se puede asegurar por tanto que el sistema linealizado es estabilizable de forma retroalimentada. Teniendo todo esto en cuenta, por el Teorema 3.8 (Teorema de linealización), como f es una función de clase C^1 y $A + BK$ es Hurwitz, entonces el punto de equilibrio (\bar{x}, \bar{u}) es localmente asintóticamente estable.

En definitiva, con todos estos pasos se ha conseguido estabilizar asintóticamente al sistema de control no lineal (péndulo inverso) localmente alrededor del punto de equilibrio (\bar{x}, \bar{u}) , usando para ello un control de retroalimentación que se ha construido a partir de una matriz de ganancia $K \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$.

A continuación se adjuntan dos representaciones gráficas que se han obtenido mediante el software Matlab. El código se ha extraído de [2, Capítulo 3, páginas 238-241].

En relación al método directo, mediante el software maple se ha obtenido una expresión del polinomio característico de la matriz $A + BK$, χ_{A+BK} . Posteriormente se ha calculado la tabla de Routh asociada a dicho polinomio con el fin de obtener condiciones necesarias y suficientes sobre K para que $A + BK$ sea Hurwitz. Finalmente se han determinado los valores de los elementos de la matriz de K de tal modo que las raíces de χ_{A+BK} sean igual a -1 (esta raíz tendría entonces multiplicidad algebraica igual a 4). Por otro lado, en cuanto a la función `place` de `matlab`, ésta sitúa a las raíces del polinomio característico χ_{A+BK} en $(-1, -2, -3, -4)$. Esta función es de la forma:

$$K = \text{place}[A, B, p],$$

es decir, hay que dar las matrices A y B y un vector p que contiene a las raíces. Como resultado, devuelve una matriz de ganancia K .

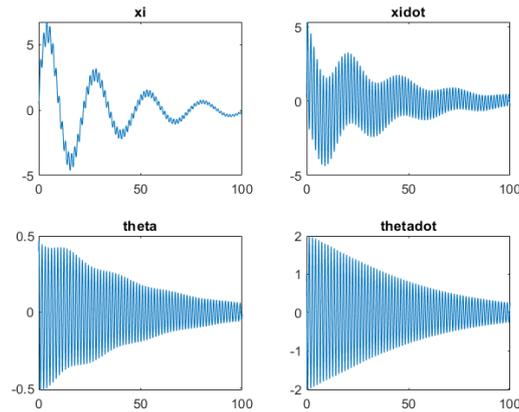
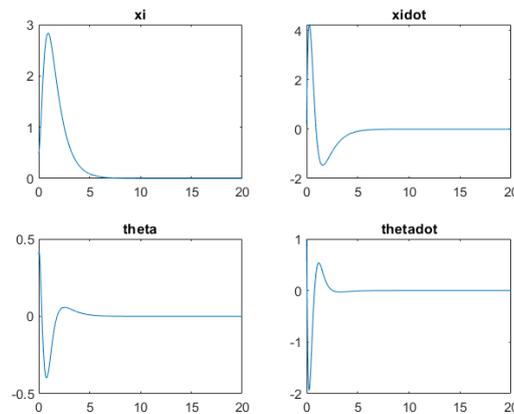


Figura 3.3: Método directo.

Figura 3.4: Uso de la función *place* de matlab.

Comparando ambos métodos, se puede ver de forma clara que el segundo es más eficiente que el primero. En la figura 3.3 se contempla como a medida que avanza el tiempo, las funciones que describen la posición y sus respectivas derivadas se aproximan al equilibrio (punto 0 para las cuatro funciones) pero de forma oscilante. No obstante, en la figura 3.4 se infiere que, transcurrido un tiempo considerable, las funciones tienden al equilibrio, indicando así que se ha podido estabilizar asintóticamente al péndulo inverso localmente de forma retroalimentada, mediante la matriz de ganancia determinada por la función `place`.

3.2.3. El método de Jurdjevic-Quinn

Los teoremas de Lyapunov y LaSalle pueden aplicarse también a los sistemas de control de una forma evidente, aportando información de los entornos de estabilidad. Por ejemplo, se tiene la siguiente afirmación: considérese como más arriba el sistema de control no lineal (3.1). Se asume que existe una función $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ de clase C^1 , tomando valores positivos en $\Omega \setminus \{\bar{x}\}$, y tal que, para cada $x \in \Omega$, existe $u(x) \in \Omega$ tal que $\langle \nabla V(x), f(x, u) \rangle < 0$; entonces el control u estabiliza al sistema de control globalmente en Ω . Muchas otras afirmaciones similares pueden derivarse fácilmente, basadas en los teoremas de Lyapunov y LaSalle. Naturalmente, lo que es difícil aquí, es ser capaz de asegurar una buena regularidad de los controles de retroalimentación. Esta cuestión no se discutirá en este Trabajo de Fin de Grado, pero puede decirse que ha surgido todo un campo de investigación asociado a este tema. Para ilustrar el papel de las funciones de Lyapunov en estabilización, se va a describir a continuación una estrategia espectacular y

ampliamente usada (y sin embargo muy simple) con el fin de diseñar controles de estabilización gracias a las funciones de Lyapunov.

Teorema 3.10. *Considérese el sistema de control afín en \mathbb{R}^n*

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t)g_i(x(t)), \quad (3.6)$$

donde f y g_i (con $i = 1, \dots, m$) son campos vectoriales “suaves” en \mathbb{R}^n . Sea \bar{x} tal que $f(\bar{x}) = 0$. En otras palabras, \bar{x} es un punto de equilibrio del sistema no controlable (esto es, con $u_i = 0$).

Asúmase que existe una función de Lyapunov en \bar{x} para el sistema incontrolable, es decir, se asume que existe una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que:

1. $V(\bar{x}) = 0$ y $V(x) > 0$ para cada $x \neq \bar{x}$;
2. V es propia;
3. $L_f V(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$;
4. El conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid L_f V(x) = 0 \text{ y } L_{g_i}^k V(x) = 0, \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall k \in \mathbb{N}\}$$

se reduce al conjunto unitario $\{\bar{x}\}$.

Entonces el punto de equilibrio \bar{x} es GAE en \mathbb{R}^n para el sistema de control blucle-cerrado con el control de retroalimentación definido como $u_i(t) = -L_{g_i} V(x(t))$, $i = 1, \dots, m$.

Observación 3.8. 1. La notación $L_f V$ se denomina la derivada de L_f de V a lo largo de f . Se define como $L_f V(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle$. Es la derivada de V a lo largo de la dirección f .

2. Si se denota por G_i con $i \in \{1, \dots, m\}$ a la función dada por:

$$\begin{aligned} G_i : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto G_i(x) := L_{g_i} V(x), \end{aligned}$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} L_f G_i(x) &= \langle \nabla G_i(x), f(x) \rangle = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} G_i(x) f^j(x) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} L_{g_i} V(x) f^j(x) \\ &= \sum_{j=1}^n (\langle \partial_{x_j} \nabla V(x), g_i(x) \rangle + \langle \nabla V(x), \partial_{x_j} g_i(x) \rangle) f^j(x) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (\partial_{x_j} \partial_{x_k} V(x) g_i^k(x) + \partial_{x_k} V(x) \partial_{x_j} g_i^k(x)) f^j(x). \end{aligned}$$

Prueba. En primer lugar, se considera la siguiente función:

$$F(x) := f(x) - \sum_{i=1}^m L_{g_i} V(x) g_i(x).$$

Nótese que $F(\bar{x}) = 0$, es decir, \bar{x} es un punto de equilibrio del sistema “lazo cerrado” (3.6) con $u_i(t) = -L_{g_i} V(x(t))$ (con $i = 1, \dots, m$). En efecto, por la hipótesis 1, V es una función suave y alcanza su mínimo en \bar{x} , luego $\nabla V(\bar{x}) = 0$, y por tanto $L_{g_i} V(\bar{x}) = \langle \nabla V(\bar{x}), g_i(\bar{x}) \rangle = 0$ para

$i = 1, \dots, m$. Asimismo, \bar{x} es un punto de equilibrio para el sistema no controlable (esto es, para $u_i = 0$ con $i = 1, \dots, m$), por lo que $f(\bar{x}) = 0$. En definitiva:

$$f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^m L_{g_i} V(\bar{x}) g_i(\bar{x}) = 0.$$

En segundo lugar, se tiene que:

$$\begin{aligned} L_F V(x) &= \langle \nabla V(x), F(x) \rangle = \langle \nabla V(x), f(x) - \sum_{i=1}^m L_{g_i} V(x) g_i(x) \rangle \\ &= \langle \nabla V(x), f(x) \rangle + \sum_{i=1}^m L_{g_i} V(x) \langle \nabla V(x), g_i(x) \rangle \\ &= L_f V(x) - \sum_{i=1}^m (L_{g_i} V(x))^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Aquí se ha empleado la hipótesis 3, esto es, $L_f V(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y que $(L_{g_i} V(x))^2$ es positivo. Como conclusión, se obtiene entonces que la función V también es una función de Lyapunov en el punto \bar{x} para el sistema "lazo cerrado" (3.6) con $u_i(t) = -L_{g_i} V(x)$ (con $i = 1, \dots, m$).

En tercer lugar, si se asume que $L_F V(x(t)) = 0$ para cada $t \geq 0$, entonces necesariamente $L_f V(x(t)) = 0$ y $L_{g_i} V(x(t)) = 0$, $i = 1, \dots, m$. Derivando con respecto a t y teniendo en cuenta que $u_i(t) = L_{g_i} V(x(t)) = 0$ con $i = 1, \dots, m$, se infiere que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L_{g_i} V(x(t)) &= \frac{d}{dt} \langle \nabla V(x(t)), g_i(x(t)) \rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} \nabla V(x(t)), g_i(x(t)) \right\rangle + \left\langle \nabla V(x(t)), \frac{d}{dt} g_i(x(t)) \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \partial_{x_k} V(x(t)) g_i^k(x(t)) + \partial_{x_k} V(x(t)) \frac{d}{dt} g_i^k(x(t)) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \partial_{x_j} \partial_{x_k} V(x(t)) \dot{x}^j(t) g_i^k(x(t)) + \partial_{x_k} V(x(t)) \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} g_i^k(x(t)) \dot{x}^j(t) \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\partial_{x_j} \partial_{x_k} V(x(t)) g_i^k(x(t)) + \partial_{x_k} V(x(t)) \partial_{x_j} g_i^k(x(t)) \right] f^j(x(t)) \\ &= L_f G_i(x(t)) = L_f L_{g_i} V(x(t)). \end{aligned}$$

Aquí se ha tenido en cuenta el desarrollo de la Observación 3.8, punto 2. Por tanto, claramente, se obtiene que $L_f^k L_{g_i} V(x(t)) = 0$, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ y para cada $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, por la hipótesis 4, se tiene necesariamente que $x(t) = \bar{x}$, y por el Principio de LaSalle, se llega a que \bar{x} es GAE, concluyendo así la prueba. \square

Observación 3.9. Cabe destacar que el método de Jurdjevic-Quinn también permite diseñar controles de retroalimentación globalmente estabilizadores, que satisfacen además algunas restricciones. Por ejemplo, en el marco del Teorema 3.10, se añade el requerimiento $|u_i| \leq 1$, $i = 1, \dots, m$. Entonces, con el control de retroalimentación:

$$u_i = \text{sat}(-L_{g_i} V(x)) = \begin{cases} -1 & \text{si } -L_{g_i} V(x) \leq -1; \\ -L_{g_i} V(x) & \text{si } -1 \leq -L_{g_i} V(x) \leq 1; \\ 1 & \text{si } -L_{g_i} V(x) \geq 1, \end{cases}$$

el punto de equilibrio \bar{x} es GAE, donde sat es la función de saturación. En efecto, la prueba de arriba es fácilmente adaptable, teniendo en cuenta que $z\text{sat}(-z) \leq 0$ y la función $F(x)$ del sistema "lazo cerrado" es localmente Lipschitz.

Se provee a continuación una aplicación en el campo de la Biología (control de poblaciones en sistemas de Lotka-Volterra).

Ejemplo 3.5. (Sistema generalizado de Lotka-Volterra). Considérese el sistema generalizado de Lotka-Volterra:

$$\dot{N}_i = N_i \left(b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} N_j \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

donde $b = (b_1, \dots, b_n)^\top$ y A es una matriz cuadrada de coeficientes a_{ij} satisfaciendo $b_i > 0$ y $a_{ii} \leq 0$, para todo $i = 1, \dots, n$.

En primer lugar, nótese que $(0, +\infty)^n$ es invariante para la solución del sistema diferencial, es decir, si el punto inicial $N_0 \in (0, +\infty)^n$ entonces $N(t) \in (0, +\infty)^n$ para todo $t \geq 0$. En efecto, se dará la idea en el caso $n = 2$. El caso general, no es más que una adaptación. Si uno busca soluciones de la forma $(N_1, 0)$ o $(0, N_2)$, se ve que cada N_i es una solución de la ecuación logística

$$\dot{N}_i = N_i (b_i + a_{ii} N_i).$$

En el espacio de fase, estas soluciones son líneas rectas en los ejes, comenzando en algún punto del correspondiente eje y acercándose a $(0, 0)$, $(0, N_2)$ o $(N_1, 0)$. Asumiendo que el sistema tiene una única solución para cada condición inicial dada $N_1(0) = N_{1,0} > 0$, $N_2(0) = N_{2,0} > 0$, que se sabe que están definidas para todo $t > 0$, podemos mostrar por contradicción que $(N_1(t), N_2(t))$ permanecerá en el interior del primer cuadrante. Para eso, si admitimos que una solución que parte del interior del primer cuadrante llega hasta alguno de los ejes, la unicidad de solución nos dice que esta solución debe coincidir con una solución de la forma $(N_1, 0)$ o $(0, N_2)$, lo que obviamente es una contradicción, debido a la unicidad de solución. Por lo tanto la solución no llegará al eje y ambas componentes seguirán siendo positivas.

Considérese el punto de equilibrio $\bar{N} = (\bar{N}_1, \dots, \bar{N}_n)^\top$, definido por $b + A\bar{N} = 0$. Sean c_1, \dots, c_n algunos números reales. Sea C la matriz diagonal cuyos coeficientes son los c_i . Se establece:

$$V(N) = \sum_{i=1}^n c_i \left(N_i - \bar{N}_i - \bar{N}_i \ln \frac{N_i}{\bar{N}_i} \right).$$

En primer lugar, se va a comprobar las condiciones que se deben verificar para que $V : (0 + \infty)^n \rightarrow \mathbb{R}$ sea una función de Lyapunov en \bar{N} sobre $(0 + \infty)^n$.

- V es una función de clase C^1 en $(0 + \infty)^n$. En efecto:

$$\frac{\partial V(N)}{\partial N_i} = c_i \left(1 - \frac{\bar{N}_i}{N_i} \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

- $V(\bar{N}) = 0$ y $V(N) > 0$ para todo $N \in (0, +\infty)^n \setminus \{\bar{N}\}$.

Por un lado:

$$V(\bar{N}) = \sum_{i=1}^n c_i \left(\bar{N}_i - \bar{N}_i - \bar{N}_i \ln \frac{\bar{N}_i}{\bar{N}_i} \right) = \sum_{i=1}^n c_i (\bar{N}_i - \bar{N}_i - \bar{N}_i \ln 1) = 0.$$

Por otro lado, se considera la función $f(x) = x - \beta - \beta \ln \frac{x}{\beta}$ con $x > 0$ y β una constante positiva. Teniendo en cuenta ahora el cambio de variable $y := \frac{x}{\beta}$ y la función $g := \frac{f}{\beta}$, se obtiene:

$$g(y) = y - 1 - \ln y,$$

con $y > 0$. Se calcula ahora $g'(y)$ y se impone $g'(y) = 0$:

$$g'(y) = 1 - \frac{1}{y}, \quad g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 1.$$

Ahora bien, si $y \in (0, 1)$, $g'(y) < 0$ (g es monótona decreciente en dicho intervalo); mientras que si $y \in (1, +\infty)$, $g'(y) > 0$ (g es monótona creciente en dicho intervalo). Además $g(1) = 0$. Por tanto, el punto $(1, 0)$ es un mínimo global de la función g , de modo que dicha función es estrictamente positiva en $(0, +\infty) \setminus \{1\}$. Deshaciendo el cambio de variable, se concluye que el punto $(\beta, 0)$ es un mínimo global de la función f , de modo que la función en cuestión también es estrictamente positiva en $(0, +\infty) \setminus \{\beta\}$.

Teniendo este análisis previo en cuenta, como el punto de equilibrio \bar{N} es tal que $\bar{N}_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ y la solución $N(t)$ cumple que $N_i(t) > 0$ para todo $t \geq 0$ y para todo $i = 1, \dots, n$ por ser $(0, +\infty)^n$ invariante, se llega a que:

$$(N_i - \bar{N}_i - \bar{N}_i \ln \frac{N_i}{\bar{N}_i}) > 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Por consiguiente, para que $V(N) > 0$ para todo $N \in (0, +\infty)^n \setminus \{\bar{N}\}$, necesariamente débese tener que $c_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$.

- $\frac{d}{dt}V(N(t)) \leq 0$ para todo $N(t) \in (0, +\infty)^n$.

Con el siguiente cálculo se llega a que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(N(t)) &= \sum_{i=1}^n c_i \left(\dot{N}_i - \bar{N}_i \frac{\dot{N}_i}{N_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \frac{\dot{N}_i}{N_i} (N_i - \bar{N}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \left(b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} N_j \right) (N_i - \bar{N}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i (b_i + (AN)_i) (N_i - \bar{N}_i), \end{aligned}$$

donde $(AN)_i$ es la componente i -ésima del vector AN . Teniendo ahora en cuenta que $b_i + (A\bar{N})_i = 0$, se deduce que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(N(t)) &= \sum_{i=1}^n c_i (N_i - \bar{N}_i) (b_i + (AN)_i) = \sum_{i=1}^n c_i (N_i - \bar{N}_i) (-(A\bar{N})_i + (AN)_i) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i (N_i - \bar{N}_i) (A(N - \bar{N}))_i = \sum_{i,j=1}^n c_i (N_i - \bar{N}_i) a_{ij} (N_j - \bar{N}_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (N_i - \bar{N}_i) c_i a_{ij} (N_j - \bar{N}_j) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (N_j - \bar{N}_j) a_{ij} c_i (N_i - \bar{N}_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (N_i - \bar{N}_i) (CA(N - \bar{N}))_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (N_j - \bar{N}_j) (A^T C(N - \bar{N}))_j \\ &= \frac{1}{2} \langle N - \bar{N}, (A^T C + CA)(N - \bar{N}) \rangle. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\frac{d}{dt}V(N(t)) = \frac{1}{2} \langle N - \bar{N}, (A^T C + CA)(N - \bar{N}) \rangle.$$

Si la matriz $A^T C + CA$ fuera definida negativa, se tendría que la derivada sería negativa en $(0, +\infty)^n \setminus \{\bar{N}\}$. Por lo tanto, V sería estricta.

- V es propia. En efecto, en este caso $\Omega = (0, +\infty)^n$ y $V(\Omega) = [0, +\infty)$, con $V(\bar{N}) = 0$ y $V(N) > 0$ para todo $N \in (0, +\infty)^n \setminus \{\bar{N}\}$. Por tanto, dado $L \in [0, +\infty)$, $V^{-1}([0, L]) = \overline{B(\bar{N}, V(L))}$ (bola cerrada de centro el punto de equilibrio y radio $V(L)$). Dicho subconjunto es un subconjunto compacto de Ω .

En definitiva, si se cumplieran las condiciones necesarias mencionadas previamente, se podría garantizar que la función V fuera una función de Lyapunov y por el Principio de LaSalle se inferiría que el punto de equilibrio \bar{N} es GAE ya que sería el único que verificaría que $\frac{d}{dt}V(N(t)) = 0$, para todo $t \geq 0$ (este ejemplo es un caso muy particular ya que la derivada es además estricta, una condición que no se exige en las hipótesis del Principio de LaSalle).

Ahora se introducen una serie de controles en las primeras $n - 1$ ecuaciones, es decir, el sistema queda como sigue:

$$\dot{N}_i = N_i \left(b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} N_j + \alpha_i u_i \right), \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

En este caso, $m = n - 1$ y $g_i(N) = N_i \alpha_i e_i$, donde e_i es el i -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Vamos a aplicar el Teorema 3.10. Para eso, solo resta verificar que el conjunto:

$$M = \{N \in (0, +\infty)^n \mid L_f V(N) = 0 \text{ y } L_f^k L_{g_i} V(N) = 0, \forall i \in \{1, \dots, n - 1\}, \forall k \in \mathbb{N}\}$$

se reduce al conjunto unitario $\{\bar{N}\}$. En efecto, sea $N \in M$. En primer lugar, se tiene

$$0 = L_{g_i} V(N) = c_i \alpha_i (N_i - \bar{N}_i), \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

Luego, si $\alpha_i \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n - 1$, entonces $N_i = \bar{N}_i$ para todo $i = 1, \dots, n - 1$. Por otro lado, $L_f V(N) = 0$ implica que

$$0 = \frac{1}{2} \langle N - \bar{N}, (A^T C + CA)(N - \bar{N}) \rangle = \sum_{i,j=1}^n (N_i - \bar{N}_i) c_i a_{ij} (N_j - \bar{N}_j) = (N_n - \bar{N}_n)^2 c_n a_{nn}.$$

Gracias al Teorema 3.10, es fácil ahora diseñar un control de retroalimentación que estabiliza globalmente al sistema en el punto de equilibrio \bar{N} , bajo la hipótesis de que el coeficiente a_{nn} sea nulo.

Conclusiones

Este Trabajo Fin de Grado se ha sustentado sobre un marco teórico muy específico que tan solo constituye una introducción a la extensa Teoría de control y estabilización. Se han visto las nociones de controlabilidad y estabilización en dimensión finita, existiendo toda una continuación de este campo en espacios de dimensión infinita. Asimismo, tan solo se ha abordado de forma básica una de las actuales líneas de trabajo explicadas en la introducción: la estabilización de los sistemas de control de forma retroalimentada, desarrollada en parte por los matemáticos Routh y Hurwitz. Existe otra línea de gran interés. Se trata de la Teoría del control óptimo elaborada por Pontryagin y que sería de gran interés para futuros trabajos.

No obstante, regresando al contenido de este trabajo fin de grado, no solo se ha podido poner en práctica diferentes nociones estudiadas en cursos de Álgebra, Álgebra lineal, Análisis de variable compleja y Análisis funcional, sino que se ha llevado a cabo un estudio de conceptos nuevos de Topología y Análisis funcional que se han podido aplicar de forma satisfactoria en las demostraciones de diferentes resultados. Asimismo, estos resultados han podido emplearse en modelos que describen el comportamiento físico de sistemas reales, mostrando así la gran utilidad de estos y la fuerte conexión entre el mundo matemático y físico.

Bibliografía

- [1] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* (Inglés) [*Análisis funcional, espacios de Sobolev y ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*], Universitext, Springer, New York, 2011.
- [2] E. Trélat, *Contrôle optimal. Théorie & applications. Mathématiques Concrètes.* (Francés) [*Control óptimo. Teoría y aplicaciones. Matemáticas concretas*], Vuibert, Paris, 2005, vi+246 pp.
- [3] E.D. Sontag, *Mathematical control theory. Deterministic finite-dimensional systems.* (Inglés) [*Teoría de control matemático. Sistemas determinísticos finito-dimensionales*] Segunda edición, Textos en Matemáticas Aplicadas, 6, Springer-Verlag, New York, 1998, xvi+531
- [4] J-M. Coron. *Control and nonlinearity.* (Inglés) [*Control y no-linealidad*], Mathematical surveys and monographs, 1956, ISSN 0076-5376 ; v. 136.
- [5] E.B. Lee, L. Markus. *Foundations of optimal control theory.* (Inglés) [*Fundamentos de la teoría de control óptimo*] John Wiley, New York, 1967.
- [6] D. Hinrichsen, A. J. Pritchard. *Mathematical Systems Theory I, Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness (Texts in Applied Mathematics).* (Inglés) [*Teoría de sistemas matemáticos I, modelado, análisis de espacio de estados y robustez (Textos en matemáticas aplicadas)*]
- [7] M. Bodson. *Explaining the Routh-Hurwitz criterion. A tutorial presentation* (Inglés) [*Explicación del criterio de Routh-Hurwitz. Un tutorial de presentación*], 15 de septiembre de 2019.
- [8] B. Bonnard, M. Chyba, *Singular trajectories and their role in control theory.* (Inglés) [*Trayectorias singulares y su papel en teoría de control*], Math. & Appl. (Berlin), 40. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [9] S. Bennett, *A History of Control Engineering 1800–1930.* (Inglés) [*Historia de la Ingeniería de Control 1800-1930*], IEE Control Engineering Series 8. Peter Peregrinus Ltd., Stevenage, UK, 1979.
- [10] J. C. Maxwell, *On governors.* (Inglés) [*Sobre reguladores*], Proc. Royal Soc. London, 16:270–283, 1868.
- [11] A. T. Fuller, "The early development of control theory, parts I and II", *J. Dynamic Systems, Measurement, and Control.* (Inglés) ["Los primeros desarrollos de la teoría de control, partes I y II", *Sistemas Dinámicos J., Medidas, y Control*], 98(1976): 109-118 and 224-235.
- [12] O. Mayr, *The Origins of Feedback Control.* (Inglés) [*Los orígenes del control de retroalimentación*], MIT Press, Cambridge, MA, 1970.

- [13] W. H. Fleming et. al., *Future Directions in Control Theory: A Mathematical Perspective. (Inglés) [Direcciones futuras en la Teoría de Control: Una Perspectiva Matemática]*, SIAM Publications, Philadelphia, 1988.
- [14] A. H. Levis et. al., "Challenges to control: A collective view. Report from the workshop held at the University of Santa Clara on September 18-19, 1986". (Inglés) ["Retos en el control: Una visión colectiva. Informe del taller celebrado en la Universidad de Santa Clara en Septiembre, 18-19, 1986"], IEEE Trans. Autom. Control 32(1987): 275-285.
- [15] Igor R. Shafarevich, Alexey O. Remizov, *Linear Algebra and Geometry. (Inglés) [Álgebra lineal y geometría]*.
- [16] Hassan K.Khalil, *Nonlinear systems. (Inglés) [Sistemas no lineales]*. Prentice Hall, 2002.