



Universidad de Sevilla

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

**Espacios finitos como modelos en Topología
Algebraica**

Manuel Sánchez Caballero

Curso 2022-2023

Doble Grado en Física y Matemáticas

Tutor:

Antonio Rafael Quintero Toscano

Departamento de Geometría y Topología

12 de julio de 2023

Resumen

Los espacios topológicos finitos son una clase de espacios que nos permiten obtener información sobre espacios continuos gracias a su estrecha relación con los complejos simpliciales, además de tener aplicaciones en topología digital. En este trabajo nos centraremos en comprender los conceptos principales que relacionan espacios finitos y complejos simpliciales, y en dar una detallada exposición de conocidos modelos finitos de espacios topológicos relevantes y de aplicaciones entre ellos.

Abstract

Finite topological spaces allow us to obtain information about continuous spaces due to the fact that there exists a close relation between finite spaces and simplicial complexes, in addition to they have applications in digital topology. This study collects the main concepts needed to relate finite spaces and simplicial complexes and give a detailed exposition of known examples of finite models of relevant topological spaces and mappings between them.

Índice general

1. Espacios de Alexandrov	9
1.1. La noción de espacio de Alexandrov	9
1.2. Conexión por caminos y homotopías en A-espacios	12
2. La teoría del orden vista desde la topología	15
2.1. Conjuntos ordenados y A-espacios	15
2.2. Homotopía en A-espacios y orden	18
2.3. Espacios finitos minimales	20
3. Topología simplicial y A-espacios	23
3.1. Complejos simpliciales	23
3.2. La subdivisión baricéntrica	26
3.3. Complejos simpliciales abstractos	26
3.4. Poliedros asociados a espacios finitos	27
3.5. Espacios finitos asociados a complejos	28
4. Modelos de Alexandrov de espacios topológicos	31
4.1. Diagramas de Hasse	31
4.2. A-modelos de espacios	35
4.3. Algunas construcciones de la topología y sus A-modelos	38
5. Modelos de Alexandrov de aplicaciones continuas	45
5.1. Aproximación por subdivisiones	45
5.2. A-modelo de la multiplicación compleja	47
5.2.1. Apéndice	50
5.3. H-espacios finitos	51
6. A-modelos de las aplicaciones de Hopf y cuadrado de Whitehead	55
6.1. A-Modelo de la aplicación de Hopf	55
6.2. A-modelo del cuadrado de Whitehead	59

Introducción

Los espacios de Alexandrov (A-espacios) proporcionan un lenguaje topológico equivalente al de los conjuntos ordenados. Esto fue probado por primera vez en 1937 por P.S. Alexandrov ([1]) e independientemente por A.W. Tucker ([17]). Posteriormente M. McCord ([14]) y R. Stong ([16]) demostraron en la década de 1960-1970 que los invariantes de la topología algebraica de los poliedros compactos podían ser representados por espacios finitos.

Más recientemente, el estudio de la topología de los A-espacios se reforzó con la aparición en 2003 de unas notas de J.P. May ([12]) que se fueron ampliando hasta [13] en 2016, en las que se recoge mucho de lo conocido de la topología algebraica de los espacios finitos y dan aplicaciones en problemas relevantes y sus relaciones con otras clases de objetos habituales de la topología algebraica.

Junto con las notas de May la otra referencia con un contenido panorámico de la topología algebraica de los espacios finitos es la monografía debida a J.A. Barmak [2]). Ambas aumentaron el conocimiento de la topología algebraica y la teoría de homotopía de los A-espacios.

Es interesante mencionar que antes de que la topología algebraica de los A-espacios alcanzase el nivel de desarrollo actual por May, Barmak y otros autores, los A-espacios ya se utilizaban en topología digital para dotar de un lenguaje topológico al análisis de imágenes digitales ([10]).

De manera inversa, el poder modelizar espacios topológicos y aplicaciones continuas por medio de objetos discretos tiene interés con vistas a un posible tratamiento con ordenadores. En este trabajo exponemos con detalle las modelizaciones por medio de espacios finitos hechas por K.A. Hardie y sus colaboradores J.J.C. Vermeulen y P.J. Witbooi en [7] y [8]. Más concretamente, la obtención de modelos en la clase de los espacios finitos de la multiplicación de los números complejos unitarios, la conocida aplicación de Hopf y el llamado cuadrado de Whitehead.

A continuación pasamos a detallar el contenido de la presente memoria.

Los tres primeros capítulos forman una introducción a la teoría de los A-espacios y su equivalencia con los conjuntos ordenados. El material es un resumen de los resultados básicos de [2] y sus versiones contenidas en varios Trabajos Fin de Grado previos [3], [11]. En el primer capítulo se muestran los conceptos básicos de Topología general y Topología de A-espacios que usaremos a lo largo del trabajo. El segundo se basa en el estudio de la analogía que existe entre los A-espacios T_0 y los conjuntos en los que define una relación de orden parcial, debido a su equivalencia. Ya en el tercero introducimos los conceptos de la Topología simplicial básicos y su relación con los espacios de Alexandrov, donde se comenta el Teorema de McCord y sus implicaciones más importantes a nivel general.

El cuarto y quinto capítulo forman la aportación original de esta memoria con respecto a los Trabajos Fin de Grado que comparten gran parte del material intro-

ductorio.

En el Capítulo 4 se da la definición de modelo en la clase de A-espacio (A-modelo) de un espacio topológico siguiendo a Hardie y sus colaboradores en [7]. Una versión más general debida a Barmak está dada en [2] que comentamos pero dejamos al margen en este trabajo.

Se ve en este capítulo en qué condiciones un espacio admite un A-modelo y que éste es único salvo equivalencia de homotopía débil. Se termina con la descripción de distintos modelos de las construcciones fundamentales en teoría de homotopía: el cilindro, el cono, la suspensión y el join.

El quinto capítulo está dedicado a tratar la A-modelización de aplicaciones continuas. Se menciona el resultado de Hardie y Vermeulen que garantiza la existencia teórica de modelos para aplicaciones continuas entre poliedros. No obstante, no es tarea fácil encontrar A-modelizaciones explícitas. Como ejemplo, vemos en este trabajo que si sólo se usan aplicaciones entre A-modelos mínimos de las esferas sólo se puede modelizar una aplicación homotópicamente trivial cuando las dimensiones son distintas y homeomorfismos que intercambian puntos del mismo nivel en el caso de la misma dimensión.

El capítulo continúa con el desarrollo minucioso de las modelizaciones explícitas hechas en [7] y [8] de la multiplicación de complejos unitarios, la aplicación de Hopf y el cuadrado de Whitehead. Todas ellas son explicadas gráficamente y con demostraciones detalladas.

Capítulo 1

Espacios de Alexandrov

1.1. La noción de espacio de Alexandrov

Recordemos que una topología sobre un conjunto X es una familia de subconjuntos de X , \mathcal{T} , que cumple las siguientes propiedades:

1. \emptyset y X están en \mathcal{T} .
2. La intersección finita de conjuntos de \mathcal{T} está en \mathcal{T} .
3. La unión arbitraria de conjuntos de \mathcal{T} está en \mathcal{T} .

Al par (X, \mathcal{T}) se le llama *espacio topológico*. Los conjuntos de \mathcal{T} son llamados *conjuntos abiertos de (X, \mathcal{T})* .

Notación 1.1.1. Cuando la topología \mathcal{T} se supone implícitamente, o no es relevante en el contexto, denotamos simplemente por X al espacio topológico, que también es abreviadamente referido como “espacio”.

Un espacio topológico es un *espacio de Alexandrov*, (abreviado a *A-espacio*) si la topología \mathcal{T} es cerrada también bajo intersecciones arbitrarias. Es decir, la intersección arbitraria de abiertos es un conjunto abierto.

Es obvio que todo espacio finito es un A-espacio, ya que toda intersección de abiertos se puede expresar como una intersección finita. Por tanto, todo lo que se establezca para A-espacios, seguirá siendo válido para los espacios finitos. Históricamente fue el estudio de los espacios finitos el origen de los espacios de Alexandrov cuyas distintas denominaciones corresponden a los diferentes contextos donde han sido estudiados; ver [1], [4]. De hecho, Alexandrov llamó “discretos” a los A-espacios, pero esta terminología se emplea actualmente sólo para la clase de A-espacios cuyos puntos son todos abiertos.

La característica distintiva de los A-espacios es la existencia de un abierto mínimo para cada uno de sus puntos.

Definición 1.1.1. Sea X un A-espacio. Para todo $x \in X$, se define el *abierto mínimo* de x , U_x , como la intersección de todos los conjuntos abiertos que contienen a x .

Obviamente U_x es el menor abierto que contiene a x . De hecho los A-espacios pueden ser definidos como aquellos espacios con abiertos mínimos. Esto es,

Proposición 1.1.1. X es un A-espacio si y sólo si para todo punto $x \in X$, existe un abierto mínimo U_x que lo contiene.

Demostración. Ya sabemos por la Definición 1.1.1 que en todo A-espacio se puede encontrar un abierto mínimo para cada punto. Recíprocamente, sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia cualquiera de abiertos de X , con $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha \neq \emptyset$ y tomemos $x \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$. Entonces, $x \in G_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Por hipótesis, $U_x \subseteq G_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$, y por tanto $x \in U_x \subseteq \bigcap_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$, luego $x \in \text{int}(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha)$. Así, $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha = \text{int}(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha)$. Hemos probado que $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$ es un abierto. \square

La continuidad de aplicaciones entre A-espacios usando solamente los abiertos mínimos se expresa como sigue.

Proposición 1.1.2. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación entre A-espacios. Entonces f es continua si y sólo si $f(U_x) \subseteq U_{f(x)}$ para todo $x \in X$.

Demostración. Si f es continua, entonces $f^{-1}(U_{f(x)})$ es abierto y $x \in f^{-1}(U_{f(x)})$, luego $U_x \subseteq f^{-1}(U_{f(x)})$. Esto es, $f(U_x) \subseteq U_{f(x)}$.

Recíprocamente, si Ω es cualquier abierto de Y y $x \in f^{-1}(\Omega)$, tenemos $f(x) \in \Omega$. Luego $f(U_x) \subseteq U_{f(x)} \subseteq \Omega$. Aquí usamos la hipótesis y la minimalidad de $U_{f(x)}$. Por tanto, $U_x \subseteq f^{-1}(\Omega)$ y $x \in \text{int}(f^{-1}(\Omega))$. Hemos probado que $\text{int}(f^{-1}(\Omega)) = f^{-1}(\Omega)$, y así $f^{-1}(\Omega)$ es abierto, lo que quiere decir que f es continua. \square

La demostración de la siguiente proposición es inmediata.

Proposición 1.1.3. Si (X, \mathcal{T}) es un A-espacio, entonces para todo conjunto $Y \subseteq X$ el subespacio (Y, \mathcal{T}_Y) es también un A-espacio. Además, para cada $y \in Y$, el abierto mínimo de y en Y es $U_y^Y = U_y \cap Y$.

Proposición 1.1.4. Sean X e Y dos A-espacios. Entonces la unión disjunta $X \sqcup Y$ es un A-espacio para el que la familia de abiertos mínimos es $\{U_x, U_y\}_{x \in X, y \in Y}$.

Demostración. Recordemos que la topología de $X \sqcup Y$ la forman los abiertos de X , los abiertos de Y y todas las uniones (disjuntas) posibles de éstos. En particular, X e Y son abiertos de $X \sqcup Y$ y si G es un abierto de $X \sqcup Y$ que contiene a $x \in X$, entonces $G \cap X$ es también un abierto de X . Por tanto $U_x \subseteq G$ es también el abierto mínimo de x en $X \sqcup Y$. Igualmente si tomamos $y \in Y$. \square

Proposición 1.1.5. Sean X e Y dos A-espacios. Entonces $X \times Y$ es un A-espacio. Además, $U_x \times U_y$ es el abierto mínimo de (x, y) en $X \times Y$.

Demostración. Sea G un abierto de $X \times Y$ con $(x, y) \in G$. Por definición en la topología producto sabemos que existen U, V abiertos de X e Y , respectivamente, tales que $(x, y) \in U \times V \subseteq G$. Como X es un A-espacio, tenemos $U_x \subseteq U$ y $U_y \subseteq V$. Por tanto $U_x \times U_y \subseteq G$. \square

Recordemos que dado un espacio topológico X y una relación de equivalencia \mathcal{R} , se llama *espacio cociente* por \mathcal{R} al conjunto X/\mathcal{R} dotado de la topología *cociente* $\mathcal{T}_{\mathcal{R}} = \{U \subseteq X/\mathcal{R} \mid p^{-1}(U) \text{ es abierto de } X\}$, donde $p : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ es la proyección canónica. Obsérvese que p es continua para la topología cociente.

Proposición 1.1.6. Si X es un A-espacio, entonces X/\mathcal{R} también lo es.

Demostración. Sea $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de abiertos en X/\mathcal{R} , es decir, $p^{-1}(\Omega_\alpha)$ es abierto de X para cada $\alpha \in \Lambda$. Entonces $p^{-1}(\cap_{\alpha \in \Lambda} \Omega_\alpha) = \cap_{\alpha \in \Lambda} p^{-1}(\Omega_\alpha)$ es abierto de X por ser A-espacio. Por definición de topología cociente, $\cap_{\alpha \in \Lambda} \Omega_\alpha$ es abierto de X/\mathcal{R} . \square

Proposición 1.1.7. En la proposición anterior, $p(U_x)$ es abierto mínimo de $p(x)$ si y sólo si la aplicación cociente es también abierta.

Recordemos que una aplicación (continua o no) $f : X \rightarrow Y$ es *abierto* si para todo abierto G de X su imagen $f(G)$ es un abierto de Y .

Demostración. Si cada $p(U_x)$ fuese abierto mínimo, sería en particular un conjunto abierto y como todo abierto G de X se puede expresar como la unión $G = \cup_{x \in J} U_x$ se sigue que $p(G) = \cup_{x \in J} p(U_x)$ es abierto.

Para probar el recíproco, sabemos que cada $p(U_x)$ es un abierto que contiene a $p(x)$. Si $U_{p(x)}$ es el abierto mínimo de $p(x)$ en Y dado por la Proposición 1.1.6, la continuidad de p nos dice que $p(U_x) \subseteq U_{p(x)}$ por la Proposición 1.1.2. La minimalidad de $U_{p(x)}$ nos da $p(U_x) = U_{p(x)}$. \square

En lo referente a la convergencia, es bien sabido que la unicidad de puntos límite, crucial en tantos resultados de análisis, es consecuencia de la conocida como *propiedad de separación de Hausdorff*. Recordemos la siguiente escala de propiedades de separación.

Definición 1.1.2. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico.

1. X es un *espacio* T_0 si para dos puntos cualesquiera $x, y \in X$, existe un entorno abierto $G \in (X, \mathcal{T})$ tal que, o bien $x \in G$ y $y \notin G$, o bien $y \in G$ y $x \notin G$.
2. X es un *espacio* T_1 si dados dos puntos $x, y \in X$, existen entornos abiertos $G_1, G_2 \in (X, \mathcal{T})$ tales que: $x \in G_1, y \notin G_1$, y también $y \in G_2, x \notin G_2$.
3. X es un *espacio* T_2 o *espacio de Hausdorff* si existen abiertos G_1 y G_2 tales que $x \in G_1, y \in G_2$ y $G_1 \cap G_2 = \emptyset$

Observación 1.1.1. $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

En contraste con el punto de vista habitual, dominado por los espacios métricos, los A-espacios sólo tienen interés si ocupan el nivel más bajo de la escala, el T_0 . El espacio discreto es el único entre ellos que aparece en un nivel superior como prueba el siguiente lema.

Lema 1.1.1. Si un A-espacio es T_1 , entonces es discreto.

Demostración. Dados $x \neq y$, existe un abierto Ω de X con $x \in \Omega$ e $y \notin \Omega$. En particular, $U_x \subseteq \Omega$ e $y \notin U_x$. Así pues $U_x = \{x\}$ se reduce al elemento x para todo $x \in X$. \square

En los A-espacios la propiedad T_0 queda caracterizada como sigue.

Lema 1.1.2. Si X es un A-espacio, entonces $U_x = U_y \Leftrightarrow \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. En particular, X es T_0 si y sólo si $U_x = U_y \Leftrightarrow x = y$.

Demostración. Supongamos $U_x = U_y$ y sea $z \in \overline{\{x\}}$. Entonces $U_z \cap \{x\} \neq \emptyset$, es decir, $x \in U_z$. Por hipótesis, $U_x = U_y \subseteq U_z$. De aquí se sigue que $y \in U_z$. Por tanto $z \in \overline{\{y\}}$. Hemos demostrado inclusión $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$. La otra inclusión se prueba de forma análoga.

Si ahora suponemos $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, se tiene, en particular, $y \in \overline{\{x\}}$, y $x \in \overline{\{y\}}$. Entonces $U_y \cap \{x\} \neq \emptyset$ y $U_x \cap \{y\} \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in U_y$ e $y \in U_x$. Así que $U_x \subseteq U_y$ y $U_y \subseteq U_x$; esto es, $U_x = U_y$.

Si X fuese T_0 entonces $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ equivale a $x = y$. En efecto, si $x \neq y$ la condición T_0 implica que o $x \notin U_y$ o $y \notin U_x$. Esto es, $U_y \cap \{x\} = \emptyset$ o $U_x \cap \{y\} = \emptyset$, es decir, $y \notin \overline{\{x\}}$ o $x \notin \overline{\{y\}}$. Recíprocamente, si X no es T_0 entonces existen $x, y \in X$ con $x \neq y$ y tales que todo abierto que contiene a x contiene a y y viceversa; en particular, $y \in U_x$ y $x \in U_y$, por lo que $U_x \subseteq U_y$ y $U_y \subseteq U_x$ y, por tanto, $U_x = U_y$ con $x \neq y$. \square

1.2. Conexión por caminos y homotopías en A-espacios

Aunque los A-espacios son espacios con una pobre propiedad de separación, en lo referido a conexión son muy similares a los espacios de interés en la topología algebraica y la geometría: poliedros y variedades. Resulta que los A-espacios son, como aquellos, espacios localmente contráctiles y, como consecuencia, localmente conexos por caminos. En particular, en los A-espacios la conexión y la conexión por caminos sean equivalentes.

Recordemos que un espacio X se dice *localmente contráctil* si para todo $x \in X$ y todo entorno N de x , existe otro entorno N' de x que es contráctil y tal que $N' \subseteq N$. Obviamente, para A-espacios esto equivale a decir que el abierto mínimo es contráctil.

Lema 1.2.1. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ dos aplicaciones, donde Y es un A-espacio, de forma que $U_{f(x)} \subseteq U_{g(x)}$ o, equivalentemente, $f(x) \in U_{g(x)}$, para todo $x \in X$. Entonces f y g son homotópicas por una homotopía relativa al conjunto $\{x \in X; f(x) = g(x)\}$.

Demostración. Sea $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ la aplicación definida por $H(x, t) = f(x)$ si $t < 1$, y $H(x, 1) = g(x)$. Nótese que si $f(x) = g(x)$ entonces $H(x, t) = f(x)$ para todo t . Para comprobar que H es continua, sea Ω cualquier abierto en Y . Dado $(x, t) \in H^{-1}(\Omega)$, si $t < 1$ entonces $H(x, t) = f(x) \in \Omega$. Como f es continua, existe un abierto V con $x \in V$ y $f(V) \subseteq U_{f(x)} \subseteq \Omega$. Así pues, $H(V \times [0, 1)) = f(V) \subseteq \Omega$. Luego $(x, t) \in V \times [0, 1) \subseteq H^{-1}(\Omega)$. Es decir, $(x, t) \in \text{int}(H^{-1}(\Omega))$.

Por otro lado, si $t = 1$, $H(x, 1) = g(x) \in \Omega$, y como g es continua podemos encontrar un abierto W conteniendo a x y contenido en el abierto V dado más arriba tal que $g(W) \subseteq U_{g(x)} \subseteq \Omega$. Más aún, por hipótesis $U_{f(x)} \subseteq U_{g(x)} \subseteq \Omega$. Así pues, $H(W \times [0, 1]) = H(W \times [0, 1)) \cup H(W \times \{1\}) = f(W) \cup g(W) \subseteq \Omega$. Esto es, $(x, 1) \in W \times [0, 1] \subseteq H^{-1}(\Omega)$ y también en este caso tenemos $(x, 1) \in \text{int}(H^{-1}(\Omega))$. Por tanto, siempre $H^{-1}(\Omega)$ es abierto y así H es continua. \square

Corolario 1.2.1. Si Y es un A-espacio tal que para algún $y_0 \in Y$ se tiene $U_{y_0} = Y$ o $\overline{\{y_0\}} = Y$, entonces Y es contráctil.

Demostración. Sean $f = id_Y$ y $g = c_{y_0}$ la identidad y la constante $c_{y_0}(y) = y_0$ para todo $y \in Y$. En el primer caso, $U_y \subseteq Y = U_{y_0}$ para todo $y \in Y$ y así por el Lema 1.2.1 se sigue que $id_Y \simeq c_{y_0}$, es decir, Y es contráctil.

En el segundo caso, necesariamente $\{y_0\} \cap U_y \neq \emptyset$ para todo $y \in Y$ y por tanto $U_{y_0} \subseteq U_y$. De nuevo por Lema 1.2.1, $id_Y \simeq c_{y_0}$. \square

Corolario 1.2.2. Todo A-espacio X es localmente contráctil.

Demostración. En efecto, para todo $x \in X$ sea $Y = U_x$ en el Corolario 1.2.1. Nótese que en la topología relativa de U_x , él es el único abierto que contiene a x . Entonces U_x es contráctil. La minimalidad de U_x asegura que X es localmente contráctil. \square

Como todo espacio contráctil es conexo por caminos, tenemos

Corolario 1.2.3. Todo A-espacio X es localmente conexo por caminos. En particular, la conexión y la conexión por caminos coinciden en la clase de los A-espacios.

Más aún, tenemos la siguiente caracterización de la conexión para los A-espacios.

Teorema 1.2.1. Sea X un A-espacio X . Las siguientes condiciones son equivalentes.

1. X es conexo
2. Dados $x, y \in X$, existe una secuencia $x = z_1, \dots, z_s = y$ tal que $z_i \in U_{z_{i+1}}$ ó $z_{i+1} \in U_{z_i}$ para $i < s$.
3. X es conexo por caminos

Demostración. Supongamos que X es conexo. Fijamos $x \in X$ y consideramos A como el conjunto de puntos y tales que existe una secuencia como en el enunciado de x a y .

Se tiene que si $A \cap U_p \neq \emptyset$ entonces $U_p \subseteq A$. En efecto, dado $w \in U_p$ e $y \in A \cap U_p$ veamos cómo modificar una secuencia z_1, \dots, z_s de x a y para encontrar una secuencia entre x y w :

Si $y \in U_{z_{s-1}}$, entonces la secuencia original se extiende a otra con dos términos más, $z_{s+1} = p$ y $z_{s+2} = w$ ya que $y = z_s$ y w están en $U_p = U_{z_{s+1}}$. Si ahora $z_{s-1} \in U_y$, entonces consideramos la nueva secuencia q_1, \dots, q_{s+1} donde $q_j = z_j$ si $j \leq s-1$ y $q_s = p$ y $q_{s+1} = w$ ya que en este caso $z_{s-1} \in U_{z_{s-1}} \subseteq U_y \subseteq U_{q_s}$ y $q_{s+1} \in U_{q_s}$.

De la observación anterior se sigue inmediatamente que $y \in A$ si y sólo si $U_y \subseteq A$ y, como consecuencia, A es abierto y cerrado. Por ser X conexo, $A = \emptyset$ o $A = X$. Como $x \in A$, se sigue que $A = X$ y se tiene (2).

Si se cumple (2), usamos el Corolario 1.2.2 para definir un camino σ_i entre z_i y z_{i+1} para todo $1 \leq i \leq s$. Se sigue entonces que existe un camino entre x e y y así X es conexo por caminos.

La implicación (3) \Rightarrow (1) es válida en general. \square

Otra interesante consecuencia del Lema 1.2.1 es que podemos encontrar para todo A-espacio X un A-espacio T_0 que es homotópicamente equivalente a él. Con más detalle,

Teorema 1.2.2. Todo A-espacio X tiene un cociente canónico X_0 que es T_0 . Más aún, la aplicación cociente $p : X \rightarrow X_0$ es una equivalencia de homotopía. Además, para todo $x \in X$, $p(U_x)$ es el abierto mínimo de la clase $[x] \in X_0$.

Más aún, X_0 se puede suponer un retracto de deformación de X .

Demostración. Se define la relación $x \sim y$ si $U_x = U_y$. Sea $X_0 = X / \sim$ el espacio cociente correspondiente a esta relación. Sabemos que X_0 es un A-espacio por la Proposición 1.1.6. Más aún, la proyección canónica $p : X \rightarrow X_0$ es una aplicación abierta ya que $p^{-1}(p(U_x)) = U_x$, pues si $y \in p^{-1}(p(U_x))$ entonces existe $z \in U_x$ con $p(y) = p(z)$, esto es, $U_y = U_z \subseteq U_x$ y así $y \in U_x$. Tenemos, por Proposición 1.1.7, que $p(U_x)$ es el abierto mínimo de $[x]$. El espacio X_0 es T_0 como consecuencia inmediata del Lema 1.1.2 pues $p(U_x) = p(U_y)$ es equivalente a $[x] = [y]$.

Para ver p es una equivalencia de homotopía definimos $f : X_0 \rightarrow X$, eligiendo para $[x] \in X_0$ un representante cualquiera, pero fijo, $z_x \sim x$ y tomamos $f([x]) = z_x$. Para comprobar que f es continua, basta observar que para $x \in X$, $f^{-1}(U_x) = \{[x'] \in X_0; x' \sim z_{x'} \in U_x\} = \{[x']; U_{x'} \subseteq U_x\} = p(U_x)$.

Por otra parte, es obvio que $p \circ f = id_{X_0}$. Además, por definición de f y la relación “ \sim ”, se sigue la igualdad $U_{f(p(x))} = U_{z_x} = U_x$, y obtenemos una homotopía H entre $f \circ p$ y id_X como consecuencia del Lema 1.2.1.

Finalmente, la restricción de f a la imagen $\tilde{f} : X_0 \rightarrow f(X_0)$ es un homeomorfismo y así $\tilde{f} \circ p : X \rightarrow X_0 \rightarrow f(X_0)$ es un retracción de X sobre $f(X_0)$ ya que para todo $f([x]) \in f(X_0)$ tenemos $\tilde{f}(q(f([x]))) = f([x])$. Además es un retracto de deformación pues si $i : f(X_0) \rightarrow X$ es la inclusión, la homotopía H encontrada anteriormente nos da una homotopía entre $i \circ \tilde{f} \circ p = f \circ p$ y la identidad de X .

Para comprobar que \tilde{f} es un homeomorfismo sólo hay que ver que su inversa $\tilde{f}^{-1} : f(X_0) \rightarrow X_0$ es continua, pero esto es inmediato ya que $\tilde{f}^{-1} = p|_{f(X_0)}$. \square

Nota 1.2.1. El teorema anterior es debido a M. McCord ([14], Teorema 4) y nos dice que, desde el punto de vista homotópico, no hay pérdida de generalidad si nos centramos en los A-espacios T_0 .

Capítulo 2

La teoría del orden vista desde la topología

Los conjuntos parcialmente ordenados pueden ser estudiados topológicamente como A-espacios T_0 , pues ambas clases de objetos matemáticos son equivalentes. En la primera sección estudiaremos este hecho con detalle. En las otras dos secciones se estudia la teoría de homotopía de los A-espacios T_0 con el lenguaje de la teoría del orden.

2.1. Conjuntos ordenados y A-espacios

Definición 2.1.1. Un *preorden* \mathcal{R} en un conjunto X es una relación reflexiva y transitiva. Si un preorden \mathcal{R} en X es además antisimétrico, se llamará *orden parcial* (o simplemente *orden* en X) y decimos que (X, \mathcal{R}) es un *conjunto parcialmente ordenado* o un *poset*. Se denota por $x \leq y$ si $(x, y) \in \mathcal{R}$ y se escribirá (X, \leq) por (X, \mathcal{R}) .

Dos elementos x e y del conjunto preordenado (X, \leq) se dicen que están relacionados o que son *comparables* si $x \leq y$ ó $x \geq y$. De lo contrario, se dicen *incomparables*.

Si cada par de elementos son comparables, se dice que (X, \leq) es un conjunto *totalmente ordenado*. En general, cualquier subconjunto totalmente ordenado de un poset se llamará *cadena*. Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice una *anticadena* si ningún par de sus elementos son comparables.

Un elemento x de un conjunto preordenado X se dice *maximal* (*minimal*) si para cada z en X con $x \leq z$ ($z \leq x$, respectivamente) implica $x = z$. Se denotará por $Max(X)$ ($Min(X)$, respectivamente) al conjunto de los elementos maximales (minimales, respectivamente) de X .

Es inmediato comprobar que tanto $Max(X)$ como $Min(X)$ son anticadenas.

Definición 2.1.2. Una aplicación entre conjuntos preordenados $f : (X, \leq) \rightarrow (Y, \preceq)$ se dice que *preserva el orden* (o que es una *aplicación ordenada*) si para $x \leq x'$ se tiene $f(x) \preceq f(x')$. Se dice que *invierte el orden* (o es *antiordenada*) si para $x \leq x'$ se tiene $f(x') \preceq f(x)$.

La aplicación anterior se dice que es un *isomorfismo* entre conjunto preordenados si es una biyección tal que f y f^{-1} son aplicaciones ordenadas. Si son antiordenadas se llama *antiisomorfismo*.

Definición 2.1.3. Un subconjunto $S \subseteq X$ se llama *conjunto decreciente* si $y \leq x \in S$ implica $y \in S$, para $x, y \in X$. Para $x \in X$, $\downarrow x = \{y \in X : y \leq x\}$ es un conjunto decreciente llamado *ideal principal generado por x* .

De igual manera, un subconjunto $S \subseteq X$ se llama *conjunto creciente* si $y \geq x \in S$ implica $y \in S$, para $x, y \in X$. Para $x \in X$, $\uparrow x = \{y \in X : y \geq x\}$ es un conjunto creciente llamado *filtro principal generado por x* .

Una vez establecidas las nociones principales de los posets, vamos a describir la identificación entre A-espacios y conjuntos preordenados, debida a Alexandrov ([1]) y a Tucker ([17]). Denotaremos por **Alex** a la clase de los A-espacios y aplicaciones continuas, y por **PreOrd** a la clase de los conjuntos preordenados y aplicaciones que preservan el orden.

Lema 2.1.1. Si \leq es un preorden en X , entonces, para todo $x \in X$, el ideal principal

$$\downarrow x = \{y \in X : y \leq x\},$$

es el abierto base mínima para una A-topología sobre X tal que sus abiertos son exactamente los conjuntos decrecientes (equivalentemente, los cerrados son los conjuntos crecientes).

Más aún, si \leq es un orden parcial, entonces esta topología es T_0 .

Definición 2.1.4. La topología anterior se conoce como *topología del preorden \leq* y se denota por \mathcal{T}_{\leq} .

Nota 2.1.1. También la familia de filtros principales $\uparrow x$ son los abiertos mínimos para una A-topología, que es justamente la topología del preorden opuesto definido por $x \leq^{op} y$ si $y \leq x$.

Recíprocamente, se tiene el siguiente resultado.

Lema 2.1.2. En todo A-espacio (X, \mathcal{T}) se puede definir un preorden $\leq_{\mathcal{T}}$ llamado *preorden de especialización en \mathcal{T}* , estableciendo $x \leq_{\mathcal{T}} y$ si se cumple una de las siguientes condiciones equivalentes:

$$y \in \overline{\{x\}} \iff x \in U_y \iff \overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}.$$

Más aún, si (X, \mathcal{T}) es T_0 , entonces el preorden $\leq_{\mathcal{T}}$ es, de hecho, un orden parcial.

El siguiente teorema da la equivalencia entre preórdenes y A-topologías.

Teorema 2.1.1. Toda relación de preorden \leq sobre un conjunto X coincide con el preorden de especialización de su topología. Más aún, toda A-topología \mathcal{T} sobre X es la topología de su preorden de especialización. Además, $f : (X, \leq) \rightarrow (Y, \preceq)$ es ordenada si y solo si $f : (X, \mathcal{T}_{\leq}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_{\preceq})$ es continua.

Nota 2.1.2. Obsérvese que el abierto mínimo de un punto x , U_x , puede definirse, respecto al preorden de especialización $\leq_{\mathcal{T}}$, como

$$U_x = \downarrow x,$$

mientras que la clausura, $\overline{\{x\}}$, puede definirse como

$$\overline{\{x\}} = \uparrow x.$$

Nota 2.1.3. Dado un espacio finito X , una aplicación inyectiva o sobreyectiva continua $f : X \rightarrow X$ es un homeomorfismo, ya que por ser X finito, f es una biyección y por tanto una permutación de X , luego existe un entero $n \geq 1$ tal que $f^n = Id_X$.

Nota 2.1.4. Los elementos minimales de un conjunto preordenado (X, \leq) son los abiertos unitarios de la A-topología asociada al preorden y a su vez, los elementos maximales de X son conjuntos cerrados unitarios. En particular, $Min(X)$ es un subespacio abierto discreto y $Max(X)$ es un subespacio cerrado discreto. Como todo poset finito tiene algún elemento maximal y minimal, todo espacio finito T_0 posee al menos un punto que es subconjunto cerrado y otro punto que es abierto.

El Teorema 2.1.1 puede reescribirse de la siguiente forma:

Teorema 2.1.2. Existe una equivalencia entre la clase **Alex** y la clase **PreOrd**, que hace corresponder a un A-espacio (X, \mathcal{T}) el conjunto preordenado $(X, \leq_{\mathcal{T}})$, y a una aplicación continua $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ ella misma vista entre conjuntos preordenados, $f : (X, \leq_{\mathcal{T}_X}) \rightarrow (Y, \leq_{\mathcal{T}_Y})$.

Esta equivalencia se restringe a una equivalencia entre los A-espacios T_0 y los conjuntos parcialmente ordenados.

Por tanto, para estudiar A-espacios T_0 podemos dedicarnos a estudiar posets y viceversa. Esto será bastante utilizado en los próximos capítulos.

Terminamos esta sección con las caracterizaciones de la conexión y la compacidad que tenemos de los A-espacios vistas desde el punto de vista de los posets. Para la conexión se tiene como consecuencia inmediata del Teorema 1.2.1:

Teorema 2.1.3. Un A-espacio X es conexo (o, equivalentemente, conexo por caminos) si y solo si existe una secuencia de elementos comparables para el orden de especialización entre dos puntos cualesquiera de X .

Para la compacidad se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.1.4. Un A-espacio es compacto si y solo si $Max(X)$ es finito, y todo $x \in X$ es menor que algún elemento de $Max(X)$.

Demostración. Supongamos que X es compacto, entonces del recubrimiento de X por abiertos mínimos $X = \cup_{x \in X} U_x$ podemos extraer un subrecubrimiento finito $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_s}$. Podemos suponer que ningún par en $J = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ es comparable, ya que si $x_i \leq x_j$ entonces $U_{x_i} \subseteq U_{x_j}$ y podemos eliminar U_{x_i} del subrecubrimiento obtenido. De ello se sigue inmediatamente que $J = Max(X)$ y que todo elemento de X es menor que algún x_j .

Si se cumplen las condiciones del teorema, dado cualquier recubrimiento por abiertos $X = \cup_{\alpha \in \Lambda} \Omega_{\alpha}$, para cada $x \in Max(X)$ consideramos un índice $\alpha(x) \in \Lambda$ tal que $x \in \Omega_{\alpha(x)}$. Entonces $U_x \subseteq \Omega_{\alpha(x)}$ y tenemos, por la segunda condición, $X = \cup_{x \in Max(X)} U_x \subseteq \cup_{x \in Max(X)} \Omega_{\alpha(x)}$, es decir X es compacto. \square

2.2. Homotopía en A-espacios y orden

Es natural buscar una formulación de las homotopías entre aplicaciones continuas de A-espacios en términos de alguna relación de orden entre tales aplicaciones. Para ello comenzamos observando que si X e Y son A-espacios (o, equivalentemente, conjuntos preordenados), se puede dotar al conjunto Y^X de las aplicaciones continuas de X en Y del orden:

$$f \leq g \text{ si } f(x) \leq g(x) \text{ en el preorden de } Y \text{ para todo } x \in X. \quad (2.1)$$

Para espacios finitos esta relación de preorden permite caracterizar la homotopía entre aplicaciones. En efecto, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.2.1. Sea X un espacio finito e Y un A-espacio cualquiera. Entonces dos aplicaciones $f, g : X \rightarrow Y$ son homotópicas si y solo si existe una sucesión de aplicaciones f_0, \dots, f_n tales que $f_0 = f, f_n = g$ y f_i es comparable a f_{i+1} para todo $0 \leq i \leq n - 1$ respecto al orden en (2.1).

Demostración. Sea $H : X \times I \rightarrow Y$ una homotopía entre las aplicaciones f y g . Por continuidad, para cada $x \in X$ y $t \in I$ existe un $\epsilon = \epsilon(x, t) > 0$ tal que $H(U_x \times (t - \epsilon, t + \epsilon)) \subseteq U_{H(x,t)}$ (ver Proposición 1.1.2). Como X es finito, para cada $t \in I$ se puede tomar $\epsilon(t) = \min\{\epsilon(x, t); x \in X\}$. Tenemos entonces que dado cualquier $t \in I$,

$$H(U_x \times (t - \epsilon(t), t + \epsilon(t))) \subseteq U_{H(x,t)} \text{ para todo } x \in X. \quad (2.2)$$

Sea $\delta > 0$ el número de Lebesgue del recubrimiento de I por los intervalos $(t - \epsilon(t), t + \epsilon(t))$ ($t \in I$). Ahora sea $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$ una partición de I tal que $s_{i+1} - s_i < \delta$ para todo i . Así pues para cada subintervalo $[s_i, s_{i+1}]$ existe un $t_i \in I$ con $[s_i, s_{i+1}] \subseteq (t_i - \epsilon(t_i), t_i + \epsilon(t_i))$ y por (2.2)

$$H(U_x \times [s_i, s_{i+1}]) \subseteq U_{H(x,t_i)} \text{ para todo } x \in X.$$

En particular, para las aplicaciones continuas $f_i = H|_{X \times \{s_i\}}$ y $g_i = H|_{X \times \{t_i\}}$ tenemos $f_i(x) \leq g_i(x) \leq f_{i+1}(x)$. Esto es, $f = f_0 \leq g_0 \geq f_1 \leq g_1 \geq f_2 \leq \dots \leq f_{n-1} \leq g_{n-1} \geq f_n = g$.

Recíprocamente, si tenemos una secuencia $f = f_0, \dots, f_n = g$ de aplicaciones comparables por el orden (2.1), por la transitividad de la relación de homotopía podemos suponer que la secuencia se reduce a $f \leq g$ (o $g \leq f$, que es un caso análogo) y el resultado sigue directamente del Lema 1.2.1. \square

La secuencia en el Teorema 2.2.1 se puede conseguir de manera que la diferencia entre dos aplicaciones consecutivas de la misma sea solo en un punto. Esto es,

Proposición 2.2.1. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ dos aplicaciones homotópicas entre espacios finitos T_0 . Entonces existe una sucesión $f = f_0, f_1, \dots, f_n = g$ tal que para todo $0 \leq i < n$ existe un punto $x_i \in X$ con las siguientes propiedades:

1. f_i y f_{i+1} coinciden en $X - \{x_i\}$.
2. $f_i(x_i) \prec f_{i+1}(x_i)$ ó $f_{i+1}(x_i) \prec f_i(x_i)$.

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f = f_0 \leq g$ pues el caso $f_0 \geq g$ es análogo y podemos razonar paso a paso en la secuencia dada entre f y g por el Corolario 2.2.1.

Se define el conjunto $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$. Si $A = \emptyset$, entonces $f = g$ y no hay nada que probar. Supongamos, por tanto, $A \neq \emptyset$ y sea x_0 un punto maximal de A . Se define $f_1 : X \rightarrow Y$ como $f_1(x) = f(x)$ si $x \neq x_0$ y $f_1(x_0) = g(x_0)$. Afirmamos que f_1 es continua. En efecto, si $x \leq x'$ con $x, x' \neq x_0$, $f_1(x) = f(x) \leq f(x') = f_1(x')$ por ser f continua. Ahora, si $x \leq x_0$ entonces $f_1(x) = f(x) \leq g(x) \leq g(x_0) = f_1(x_0)$, usando la continuidad de g .

En caso de que $x_0 \leq x$, la maximalidad de x_0 es A nos dice que $f(x) = g(x)$ a menos que $x = x_0$. Entonces si $x_0 < x$, $f_1(x_0) = g(x_0) = f(x_0) \leq f(x) = f_1(x)$. Esto demuestra la continuidad de f_1 . Más aún, $f_1 \leq g$ y $A_1 = \{x \in X; f_1(x) \neq g(x)\} = A - \{x_0\}$.

Ahora repetimos el razonamiento con A_1 . Reiterándolo llegamos a agotar A y obtenemos una secuencia $f = f_0 \leq f_1 \leq \dots \leq f_n = g$. \square

De acuerdo con el Teorema 2.2.1, para la topología de Alexandrov asociada al preorden en (2.1), la conexión por caminos corresponde a la conexión por secuencias de aplicaciones comparables para ese preorden.

En teoría de homotopía, si al conjunto Y^X de la aplicaciones continuas de X a Y se le dota de la topología compactoabierto, entonces la relación de homotopía entre aplicaciones en Y^X se corresponde con la conexión de la topología compactoabierto.

Recordemos que la llamada *topología compactoabierto* es la topología generada por todas las intersecciones finitas de la forma $\bigcap_{i=1}^n \langle K_i, U_i \rangle$ siendo, para cada i , K_i y U_i conjuntos compactos y abiertos de X e Y , respectivamente, y $\langle K, U \rangle = \{f \in Y^X; f(K) \subseteq U\}$.

Para la topología compactoabierto se tiene el siguiente resultado, conocido como *ley exponencial* (ver [15]; Teorema 46.11). Recordemos que un espacio X se dice *localmente compacto* si para todo punto $x \in X$ y para todo entorno N de x existe un entorno más pequeño de x , $K \subseteq N$, que es compacto. El teorema dado en [15] exige la propiedad de Hausdorff, pero esta no es necesaria (ver [11], Teorema 1.5.10).

Teorema 2.2.2. Sean Y y Z espacios topológicos cualquiera y sea X localmente compacto (no necesariamente de Hausdorff). Entonces si Y^X está dotado de la topología compactoabierto, la continuidad de $h : X \times Z \rightarrow Y$ es equivalente a la continuidad de la aplicación $\widehat{h} : Z \rightarrow Y^X$. Es decir, que la aplicación $h \rightarrow \widehat{h}$ induce una biyección $Y^{X \times Z} \cong (Y^X)^Z$.

Como consecuencia inmediata del teorema anterior, si tomamos $Z = [0, 1]$, el intervalo unidad euclídeo, se tiene la siguiente identificación de las homotopías como caminos entre aplicaciones.

Corolario 2.2.1. Sea X un espacio localmente compacto. Entonces para todo espacio Y , dos aplicaciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ son homotópicas si y sólo si están conectadas por un camino en Y^X con la topología compactoabierto.

En general, si X es un A-espacio localmente compacto, la topología compactoabierto no coincide con la topología para el preorden en (2.1), por lo que a una homotopía no siempre se le podrá asociar una secuencia de aplicaciones comparables. Sin embargo, esto sí ocurre para los espacios finitos, más explícitamente:

Proposición 2.2.2. Si X es un espacio finito e Y es cualquier A-espacio, la topología compactoabierto sobre Y^X coincide con la A-topología del orden en (2.1).

Una demostración de este resultado se encuentra en [3].

Habitualmente, la caracterización de las homotopías como secuencias de aplicaciones comparables dada en el Teorema 2.2.1 se presenta como consecuencia inmediata del Corolario 2.2.1 (ver [13], [2]). La demostración que se da aquí del Teorema 2.2.1 es una demostración directa que solo utiliza resultados topológicos del Grado de Matemáticas. La hemos tomado de [3].

2.3. Espacios finitos minimales

Para los conjuntos finitos, la caracterización de aplicaciones homotópicas dada en la Proposición 2.2.1 permitió a Stong (ver [16]) dar un método para reducir el estudio de los tipos de homotopía de estos espacios al de tipos de homeomorfía. Para ello usó la siguiente definición en términos del orden de especialización.

Definición 2.3.1. Sea X un A-espacio. Un punto $x \in X$ se dice que es *eliminable ascendentemente* si existe $y \in X$ con $y \geq x$ tal que $z \geq x$ implica $z \geq y$. De forma similar, un punto $x \in X$ se dice que es *eliminable descendentemente* si existe $y \in X$ con $y \leq x$ tal que $z \leq y$ para todo $z \leq x$. Se dirá que un punto es *eliminable* si lo es ascendentemente o descendentemente.

Si $x \in X$ es un punto eliminable, $X - \{x\}$ se llamará una *reducción* de X . Se dice que X se reduce a Y si existe una secuencia de reducciones $X = X_0, \dots, X_n = Y$. Un A-espacio se dice *minimal* si es T_0 y no tiene puntos eliminables. A todo subespacio minimal de un A-espacio que sea retracto de deformación de X se le llama un *núcleo* de X .

Para los espacios minimales finitos los tipos de homotopía se reducen al los tipos de homeomorfía. Más explícitamente, Stong (ver [16]) obtuvo los siguientes resultados.

Teorema 2.3.1. Si X es un espacio minimal finito y $f : X \rightarrow X$ es homotópica a la identidad entonces f es la identidad.

Demostración. De acuerdo con el Teorema 2.2.1 podemos suponer que $id_X \leq f$ o $f \leq id_X$. Supongamos $id_X \leq f$. Por la Proposición 2.2.1 podemos suponer que existe $x_0 \in X$ tal que $f(x) = x$ si $x \neq x_0$.

Como $x_0 \leq f(x_0)$, si existe $x_1 \in X$ con $x_0 \leq x_1$ y $x_0 \neq x_1$, por la continuidad de f se tiene $x_0 \leq f(x_0) \leq f(x_1) = x_1$. Por tanto x_0 sería un punto eliminable gracias a $f(x_0)$. Esto lleva a contradicción pues X es minimal.

La observación anterior lleva a que x_0 debe ser un elemento maximal, pero entonces $f(x_0) = x_0$ y f es la propia identidad. El caso $f \leq id_X$ es análogo, apareciendo x_0 como un punto eliminable descendentemente. \square

Corolario 2.3.1. Toda equivalencia de homotopía entre espacios minimales finitos es un homeomorfismo.

Demostración. Si $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia de homotopía, existe $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g \simeq id_Y$ y $g \circ f \simeq id_X$. Entonces por el Teorema 2.3.1, $f \circ g = id_Y$ y $g \circ f = id_X$. \square

Además del resultado anterior, Stong también probó en [16] la existencia de núcleos para los espacios finitos. Empezamos con al siguiente proposición.

Proposición 2.3.1. Si x es un punto eliminable en X , entonces la inclusión $i : X - \{x\} \rightarrow X$ es un retracto de deformación.

Demostración. Supongamos que $x \in X$ es un punto eliminable ascendentemente y sea $y \geq x$ tal que para todo $z \geq x$ se tiene $z \geq y$. Definimos entonces la retracción $r : X \rightarrow X - \{x\}$ tomando $r(z) = z$ si $z \neq x$ y $r(x) = y$. Es obvio que $r \geq id$. Probamos ahora que r es continua y de esta forma $i \circ r \simeq id$ por el Teorema 2.2.1. Para ver la continuidad, supongamos que $w \leq w'$. Si $w, w' \neq x$, por definición $r(w) = w \leq w' = r(w')$. Si $w = x$, entonces $r(w) = y \leq w' = r(w')$. Finalmente, si $w' = x$ tenemos $r(w) = w \leq x \leq y = r(w')$.

En el caso en el que x sea eliminable descendentemente se razona de manera análoga. \square

Teorema 2.3.2. Sea X un espacio finito. Entonces X admite un núcleo.

Demostración. De acuerdo con el Teorema 1.2.2, X admite un retracto de deformación que es T_0 , por lo que se puede suponer que X ya es T_0 . Además por la Proposición 2.3.1 el quitar un punto eliminable se corresponde con un retracto de deformación. Podemos hacer así desaparecer los puntos eliminables que nos vayan apareciendo hasta llegar a un núcleo de X tras una secuencia de retractos de deformación. \square

Corolario 2.3.2. Dos espacios finitos son homotópicamente equivalentes si y sólo si tienen núcleos homeomorfos. En particular, todas los núcleos de un mismo espacio finito son homeomorfos.

Demostración. De la propiedad transitiva de la relación de homotopía se sigue que los núcleos de X e Y son homotópicamente equivalentes. Entonces por el Corolario 2.3.1 estos núcleos son homeomorfos. \square

Capítulo 3

Topología simplicial y A-espacios

Dado que vamos a usar triangulaciones de espacios, introduciremos los resultados básicos de la Topología Simplicial en este capítulo.

Después de esto, veremos que existe una estrecha relación entre los complejos simpliciales y los espacios de Alexandrov.

3.1. Complejos simpliciales

Una colección de puntos $\{a_0, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ se dice *afínmente independiente* si los vectores $\{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$ son linealmente independientes.

El n -símplice generado por $\{a_0, \dots, a_n\}$ es el conjunto convexo

$$\sigma^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i \text{ con } \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

Los coeficientes λ_i son llamados *coordenadas baricéntricas* y los puntos a_i con $0 \leq i \leq n$ se llaman *vértices* de σ y se escribirá $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ para dar explícitamente los vértices de σ . Así, un 0-símplice es un punto, un 1-símplice es un segmento, un 2-símplice es un triángulo y un 3-símplice es un tetraedro.

Dado un símplice σ , el *interior (afín)* de σ es el conjunto

$$\overset{\circ}{\sigma} = \{x \in \sigma : \lambda_i > 0 \text{ para todo } 0 \leq i \leq n\}.$$

Definición 3.1.1. Sean σ y τ dos símplices en \mathbb{R}^m . Se dice que τ es *cara* de σ y se denota por $\tau \leq \sigma$, si los vértices de τ son vértices de σ .

Si $\tau \neq \sigma$ y $\tau \leq \sigma$ se dice que τ es una *cara propia* de σ y se denota por $\tau < \sigma$.

Si $\tau \leq \sigma$, se dirá que $\overset{\circ}{\tau}$ es una *cara abierta* de σ .

La unión de caras propias de un n -símplice $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ se llama *borde* de σ , y se denota por $\overset{\bullet}{\sigma}$. Nótese que $\overset{\bullet}{\sigma} = \{x \in \sigma : x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i \text{ tal que } \lambda_j = 0 \text{ para algún } j\}$, y por tanto $\overset{\circ}{\sigma} = \sigma - \overset{\bullet}{\sigma}$.

Lema 3.1.1. Se tienen las dos propiedades siguientes:

1. Todo símplice es unión disjunta de sus caras abiertas.
2. Dos caras de un mismo símplice o son disjuntas o se encuentran en una cara.

Definición 3.1.2. Se llama *complejo simplicial* a una colección K finita de símlices en algún espacio euclídeo \mathbb{R}^n verificando:

1. Si $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ entonces $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ ó $\sigma_1 \cap \sigma_2$ es una cara común de σ_1 y σ_2 .
2. Si $\sigma \in K$ y $\tau \leq \sigma$ entonces $\tau \in K$.

Como consecuencia del Lema 3.1.1 se tiene:

Lema 3.1.2. Sean $\sigma, \tau \in K$ con $\overset{\circ}{\sigma} \cap \tau \neq \emptyset$. Entonces $\sigma \leq \tau$.

Definición 3.1.3. La *dimensión* de K es el número $\max\{\dim \sigma : \sigma \in K\}$. Un símlice σ se dirá que es un *símlice maximal* en K si es de máxima dimensión en K .

Un símlice σ de un complejo K se dice *principal* si no existe ningún símlice $\tau \in K$ tal que $\sigma \leq \tau$. En particular, los símlices maximales de K son símlices principales.

Nota 3.1.1. Nótese que todo símlice σ determina un complejo simplicial al considerar σ y todas sus caras.

En lo que sigue, σ denotará indistintivamente un símlice o el complejo simplicial determinado por él.

Definición 3.1.4. Un *subcomplejo* $L \subseteq K$ es un conjunto de símlices de K que es a su vez un complejo simplicial. Se llama *m-esqueleto* de K y se denota por K^m al subcomplejo

$$K^m = \{\sigma \in K : \dim \sigma \leq m\}.$$

A K^0 se le llama el *conjunto de vértices* de K y los 1-símlices serán llamados las *aristas* de K .

Definición 3.1.5. El conjunto de los puntos de los símlices de K se denomina *poliedro subyacente* de K , y se denotará por $|K|$. Se tiene que $|K| = \bigcup \{\sigma : \sigma \in K\}$. Como consecuencia inmediata del Lema 3.1.2 se tiene que todo $x \in |K|$ está en el interior de un único símlice de K , llamado *símlice soporte* de x .

Definición 3.1.6. Sean K_1 y K_2 complejos simpliciales y φ una aplicación definida entre los vértices de K_1 y K_2 . Se dice que φ es una *aplicación simplicial* si dado un símlice $\sigma \in K_1$ con $\sigma = (v_0, \dots, v_n)$, los vértices $\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_n)$ están en un mismo símlice de K_2 . Una aplicación simplicial entre K y L se denotará como $\varphi : K \rightarrow L$. Nótese que la composición de aplicaciones simpliciales es siempre una aplicación simplicial. Un *isomorfismo simplicial* entre dos complejos simpliciales K_1 y K_2 es una biyección φ entre los vértices tal que (v_0, \dots, v_n) es un símlice de K_1 si y solo si $(\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_n))$ lo es de K_2 .

Toda aplicación simplicial $\varphi : K_1 \rightarrow K_2$ da lugar a una aplicación continua que seguimos denotando $\varphi : |K_1| \rightarrow |K_2|$ definida por extensión lineal. Esto es, si $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i \in \sigma = (v_0, \dots, v_n)$ se define $\varphi(x) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \varphi(v_i)$.

Definición 3.1.7. Sea K un complejo simplicial y $\sigma \in K$ un símlice. Se llama *estrella* de σ en K al subcomplejo simplicial

$$st(\sigma; K) = \{\tau \in K : \text{existe } \rho \in K \text{ con } \tau, \sigma \leq \rho\}.$$

Obsérvese que $|st(\sigma; K)| = \bigcup \{\mu : \mu \in K, \sigma \leq \mu\}$.

Si $x \in |K|$ se define la *estrella* de x en K como el subcomplejo

$$st(x; K) = \{\tau \in K : \text{existe } \rho \in K \text{ con } x \in \rho \text{ y } \tau \leq \rho\}.$$

Por otra parte, se define la *estrella abierta* de $x \in |K|$ como el conjunto

$$\overset{\circ}{st}(x; K) = \bigcup \{\overset{\circ}{\mu} : \mu \in K \text{ y } x \in \mu\}.$$

La propiedad clave de la estrella abierta es que define un abierto de la topología de $|K|$. Esto se debe al hecho de que cuando la intersección $\overset{\circ}{st}(x; K) \cap \sigma$ no es vacía, entonces $x \in \sigma$ y esa intersección es justamente la diferencia $\sigma - \sigma_x$, donde σ_x es el símplice soporte de x , que es un abierto de σ .

Definición 3.1.8. Se define el *engarce* o *link* de σ en K como el subcomplejo simplicial

$$lk(\sigma; K) = \{\rho \in st(\sigma; K) : \sigma \cap \rho = \emptyset\}.$$

Así mismo, se define el *engarce* o *link* de $x \in |K|$ como el subcomplejo

$$lk(x; K) = \{\sigma \in st(x; K) : x \notin \sigma\}.$$

Definición 3.1.9. Dos conjuntos finitos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ se dicen *unibles* si $A \cup B$ es afinmente independiente. Se define la *unión simplicial* de A y B como el símplice de vértices $A \cup B$ o equivalentemente, como el conjunto

$$AB = \{\lambda a + \mu b : a \in A, b \in B; \lambda, \mu \geq 0; \lambda + \mu = 1\}.$$

Dos complejos simpliciales, K y L se dicen *unibles* si todo $\sigma \in K$ es unible con todo $\tau \in L$. Se define la *unión simplicial* de K y L , denotada por $K * L$, como el complejo simplicial:

$$K * L = \{\sigma, \tau, \sigma\tau : \sigma \in K, \tau \in L\}.$$

Se define el *cono* de un complejo simplicial $K \in \mathbb{R}^n$ como la unión simplicial de K y un vértice v . Se denota como vK y se dirá cono de vértice v y base K .

Análogamente, se define la *suspensión* de K como la unión simplicial de K con dos vértices u y v . Se denota por $\{u, v\}K$ y se dirá suspensión de K con vértices u y v .

Nota 3.1.2. Sean K_1, K_2, K_3 complejos simpliciales unibles tales que cada uno de ellos es unible a la unión simplicial de los otros dos. Es inmediato comprobar que $(K_1 * K_2) * K_3 = K_1 * (K_2 * K_3)$.

Corolario 3.1.1. La unión simplicial por un cono, es un cono.

Demostración. Sean $K = aZ$ un cono y L un complejo simplicial. Por la Nota 3.1.2 $K * L = (a * Z) * L = a * (Z * L)$, que es un cono. \square

3.2. La subdivisión baricéntrica

Definición 3.2.1. Sean K y K' complejos simpliciales. Se dice que K' es una *subdivisión* de K si se cumplen las siguientes propiedades:

1. $|K| = |K'|$.
2. Todo símplice de K es unión de símplices de K' . En particular, los vértices de K son vértices de K' .

Se tiene especial interés al caso de la subdivisión baricéntrica.

Definición 3.2.2. Dado un n -símplice σ se llama *baricentro* de σ al punto

$$b(\sigma) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} a_i,$$

donde $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$.

Definición 3.2.3. Sea K un complejo simplicial. Dada una secuencia de símplices de K ordenada por la relación de cara $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_n \in K$, el conjunto de sus baricentros $\{b(\sigma_0), \dots, b(\sigma_n)\}$ es afínmente independiente y determina así un símplice contenido en σ_n . La *subdivisión baricéntrica* de K , sdK , es el complejo simplicial formado por estos símplices. De esta forma los vértices de sdK son los baricentros de los símplices de K . En particular los vértices de K siguen siendo vértices de sdK .

Nota 3.2.1.

1. Si σ es de dimensión n , los n -símplices de sdK contenidos en σ están en biyección con las permutaciones de los vértices de σ .
2. Para subdivisiones baricéntricas reiteradas se usa la notación $sd^m K = sd(sd^{m-1} K)$ con $m \geq 1$ y $sd^0 K = K$.

3.3. Complejos simpliciales abstractos

Una vez introducidos los conceptos básicos sobre complejos simpliciales, vamos a estudiar la relación que tienen con los objetos de interés para nosotros, los A-espacios.

La estructura combinatoria de un complejo simplicial puede ser definida sin hacer referencia a ninguna representación espacial.

Definición 3.3.1. Dado un conjunto V , un *complejo abstracto* con vértices en V consiste en una colección no vacía de partes finitas de V , \mathcal{A} , verificando las siguientes condiciones:

1. \mathcal{A} contiene todos los subconjuntos unitarios de V .
2. Dado $\Sigma \in \mathcal{A}$, todo subconjunto de Σ pertenece a \mathcal{A} .

A los elementos de V se les llama *vértices* de \mathcal{A} , y a los subconjuntos de \mathcal{A} simplices de \mathcal{A} .

La *dimensión* de \mathcal{A} es el número (posiblemente infinito):

$$\dim \mathcal{A} = \sup \{ \text{card}(\Sigma) : \Sigma \in \mathcal{A} \} - 1.$$

Es claro que todo complejo simplicial K determina un complejo abstracto $\mathcal{A}(K)$ donde los vértices de $\mathcal{A}(K)$ son los vértices de K y los simplices de $\mathcal{A}(K)$ son los conjuntos de vértices de K situados en un mismo símplice de K .

La definición de aplicación simplicial entre complejos abstractos es inmediata: dados dos complejos abstractos \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 una aplicación entre sus conjuntos de vértices $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ se dice *aplicación simplicial* si para todo símplice s de \mathcal{A}_1 , $\varphi(s)$ es un símplice de \mathcal{A}_2 . De esta forma, φ será un *isomorfismo simplicial* si además es una biyección entre V_1 y V_2 . Una aplicación simplicial se denota $\varphi : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$.

Definición 3.3.2. Una *realización geométrica* de un complejo abstracto \mathcal{A} es un complejo simplicial K cuyo complejo abstracto $\mathcal{A}(K)$ es simplicialmente isomorfo a \mathcal{A} .

Teorema 3.3.1. Todo complejo abstracto finito \mathcal{A} con n vértices admite una realización geométrica en \mathbb{R}^n .

Demostración. Sea $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ el conjunto de vértices de \mathcal{A} . Consideremos el $(n-1)$ -símplice $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ de vértices los puntos $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ con 1 en el lugar i para $1 \leq i \leq n$.

Sea K el complejo simplicial formado por por aquellas caras de Δ , $(e_{i_1}, \dots, e_{i_s})$, tales que $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_s}\}$ es un símplice de \mathcal{A} . Es inmediato que K es una realización de \mathcal{A} en \mathbb{R}^n . \square

Notación 3.3.1. A partir de ahora todo complejo abstracto se identificará con una realización geométrica suya.

3.4. Poliedros asociados a espacios finitos

Sea X un espacio finito T_0 , se llama *complejo orden* de X al complejo abstracto $\mathcal{K}(X)$ tal que los vértices de $\mathcal{K}(X)$ son los puntos de X y sus simplices son las cadenas finitas del orden de especialización de X (ver Sección 2.1). Más aún, toda aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ entre espacios finitos T_0 define una aplicación simplicial $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ que envía la cadena $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$ en la cadena $f(x_0) \leq f(x_1) \leq \dots \leq f(x_n)$. Denotaremos también por $\mathcal{K}(f)$ a la aplicación continua inducida entre los correspondientes poliedros $|\mathcal{K}(X)|$ y $|\mathcal{K}(Y)|$.

Para el poliedro $|\mathcal{K}(X)|$ siempre es posible definir una aplicación $\psi_X : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow X$ de la siguiente manera: dado $z \in |\mathcal{K}(X)|$, sea $s = \{x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n\}$ el símplice soporte de z en $\mathcal{K}(X)$. Entonces se toma

$$\psi_X(z) = x_0 = \text{mín } s.$$

La continuidad de ψ_X se sigue de que, para todo $x \in X$, $\psi_X^{-1}(U_x) = \bigcup_{y \leq x} \overset{\circ}{st}(y, \mathcal{K}(X))$. Más aún, ψ_X hace que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 |\mathcal{K}(X)| & \xrightarrow{\mathcal{K}(f)} & |\mathcal{K}(Y)| \\
 \psi_X \downarrow & & \downarrow \psi_Y \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array} \tag{3.1}$$

La conmutatividad sigue de la observación de que si $s = (x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n)$ es el símplice soporte de z , entonces, por definición, $\mathcal{K}(f)(z)$ tiene a $\mathcal{K}(f)(s)$ como símplice soporte; además, por preservar f el orden, $f(\text{mín } s) = \text{mín } f(s)$.

McCord demostró en ([14], Teorema 1) el siguiente teorema:

Teorema 3.4.1. (Teorema de McCord). Para todo espacio finito X y T_0 , la aplicación ψ_X es una equivalencia de homotopía débil.

Recordemos la noción de equivalencia de homotopía débil:

Definición 3.4.1. Si $[X, Y]$ denota el conjunto cociente Y^X / \simeq por la relación de homotopía, toda aplicación $f : Y \rightarrow Z$ induce una aplicación $f_* : [X, Y] \rightarrow [X, Z]$ dada por $f_*([g]) = [f \circ g]$. Obsérvese que si $g \simeq g'$ y $f \simeq f'$, entonces se tiene que $f \circ g \simeq f' \circ g'$ por la compatibilidad de la relación de la homotopía con la composición de aplicaciones. En particular, f_* está bien definida y $f_* = f'_*$.

Una aplicación continua se llama una *equivalencia de homotopía débil* si para todo complejo simplicial finito K se tiene que $f_* : [[K], X] \rightarrow [[K], Y]$ es una biyección. Dos espacios X e Y son del *mismo tipo de homotopía débil* (o *débilmente homotópicamente equivalentes*) si existe una secuencia de espacios $X = X_0, X_1, \dots, X_n = Y$ tal que para cada $1 \leq i \leq n$ hay equivalencias débiles $X_i \rightarrow X_{i+1}$ ó $X_{i+1} \rightarrow X_i$. Se denotará por $X \simeq_d Y$

Nota 3.4.1. Es claro que toda equivalencia de homotopía es una equivalencia de homotopía débil. Más aún, el recíproco es cierto para los poliedros ([9]). Como consecuencia se obtiene que si X e Y son espacios finitos T_0 del mismo tipo de homotopía débil, entonces sus complejos de orden definen poliedros del mismo tipo de homotopía.

3.5. Espacios finitos asociados a complejos

De forma análoga a lo que hemos visto en la última sección, dado un complejo simplicial K podemos obtener un poset de manera natural $\mathcal{X}(K) = (\mathcal{X}(K), \leq)$, donde los puntos de $\mathcal{X}(K)$ son los símplices y " \leq " la relación ser cara.

Si nos fijamos, en el espacio finito asociado a este orden, el abierto minimal U_s de $s \in \mathcal{X}(K)$ coincide con el subcomplejo de K formado por s y todas sus caras. Dada una aplicación simplicial $f : K \rightarrow L$, se define $\mathcal{X}(f) : \mathcal{X}(K) \rightarrow \mathcal{X}(L)$ por $\mathcal{X}(f)(s) = f(s)$. Nótese que $\mathcal{X}(f)$ preserva el orden y por tanto es continua entre los espacios finitos. A $\mathcal{X}(K)$ se le llama *espacio finito asociado a K* .

Existe un isomorfismo simplicial $\lambda_K : \mathcal{K}(\mathcal{X}(K)) \rightarrow sd(K)$ que asocia a cada cadena $\sigma_0 \leq \dots \leq \sigma_n$ el símplice $(b(\sigma_0), \dots, b(\sigma_n))$. Más aún, si $\varphi : K \rightarrow L$ es una aplicación simplicial, el siguiente diagrama es conmutativo, donde $sd(\varphi) : sd(K) \rightarrow sd(L)$ es la aplicación simplicial inducida por φ que lleva el baricentro $b(\sigma)$ en el baricentro $b(\varphi(\sigma))$:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{K}(\mathcal{X}(K)) & \xrightarrow{\mathcal{K}(\varphi)} & \mathcal{K}(\mathcal{X}(L)) \\
\lambda_K \downarrow \cong & & \cong \downarrow \lambda_L \\
K & \xrightarrow{\varphi} & L
\end{array} \tag{3.2}$$

De acuerdo con el Teorema 3.4.1 tenemos una equivalencia de homotopía débil $\psi_{\mathcal{X}(K)} : |\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))| \rightarrow \mathcal{X}(K)$.

Teorema 3.5.1. Mediante el isomorfismo simplicial λ_K se obtiene una equivalencia de homotopía débil $\Phi_K = \psi_{\mathcal{X}(K)} \circ \lambda_K^{-1} : |K| = |sdK| \rightarrow |\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))| \rightarrow \mathcal{X}(K)$. De hecho, la aplicación es natural en el sentido de que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
|sd(K)| & \xrightarrow{sd(\varphi)} & |sd(L)| \\
\phi_K \downarrow \cong & & \cong \downarrow \phi_L \\
K & \xrightarrow{\mathcal{X}(\varphi)} & L
\end{array} \tag{3.3}$$

donde $\varphi : K \rightarrow L$ es una aplicación simplicial. Esto es consecuencia de la conmutatividad de los diagramas (3.1) y (3.2).

Nota 3.5.1. Aunque $|K| = |sdK|$, el diagrama anterior no es conmutativo si se sustituye $sd(\varphi)$ por φ , pues en general, $sd(\varphi)$ y φ no coinciden como aplicaciones entre poliedros. No obstante, $\varphi : K \rightarrow L$ es aproximación simplicial de $sd(\varphi) : |K| = |sdK| \rightarrow |sdL| = |L|$, ya que el símplice soporte de $sd(\varphi)(x)$ en L coincide con el de $\varphi(x)$. Así, ambas aplicaciones son homotópicas y se tiene, por tanto, que $\Phi_L \circ \varphi \simeq \mathcal{X}(\varphi) \circ \Phi_K$.

Mediante los operadores \mathcal{X} y \mathcal{K} se definen y desarrollan, para espacios finitos T_0 , herramientas análogas a las de la topología simplicial, basadas en las ideas de subdivisión baricéntrica y aproximación simplicial. Así, se define la *subdivisión baricéntrica* del espacio finito $T_0 X$ como el espacio finito $sd_{\mathcal{X}}(X) = \mathcal{X} \circ \mathcal{K}(X)$. Esta consecuencia se puede iterar y se obtiene la *n-ésima subdivisión baricéntrica* de X como $sd_{\mathcal{X}}^n(X) = (\mathcal{X} \circ \mathcal{K})^n(X)$. Además, toda aplicación $h : X \rightarrow Y$ entre espacios finitos T_0 define una aplicación $sd_{\mathcal{X}}^n h = (\mathcal{X} \circ \mathcal{K})^n(h)$. Si el isomorfismo simplicial λ_K del diagrama (4.2) se usa como identificación, sd^n y $sd_{\mathcal{X}}^n$ están ligados por la igualdad $\mathcal{K} \circ sd_{\mathcal{X}}^n(X) = sd^n \circ \mathcal{K}(X)$.

Capítulo 4

Modelos de Alexandrov de espacios topológicos

En este capítulo vamos a dar algunos ejemplos de A -espacios que vía el operador \mathcal{K} , modelizan en la clase **Alex** importantes espacios de la topología algebraico-geométrica. Empezamos con el concepto diagrama de Hasse, que ayuda a trabajar con los posets de una forma más geométrica e intuitiva.

4.1. Diagramas de Hasse

Definición 4.1.1. Dado un poset (X, \leq) , el *diagrama de Hasse asociado a X* es el grafo orientado $\mathcal{H}(X)$, en el que sus vértices son los elementos de X y sus aristas son los pares ordenados (a, b) tales que $a < b$ y no existe c tal que $a < c < b$.

Como cada espacio topológico finito (X, \mathcal{T}) puede ser identificado con un poset, se llama diagrama de Hasse del espacio al diagrama del poset que determina.

Nota 4.1.1. Usualmente, $\mathcal{H}(X)$ se dibuja en el plano de tal manera que, si $a < b$, entonces el vértice que representa a b está arriba del vértice que represente a a , quedando la dirección de la arista de a a b bien definida por el dibujo.

Veamos el concepto de nivel o altura, que está directamente relacionado con la dimensión del complejo asociado.

Definición 4.1.2. Sea X un poset. Definimos el *nivel* o la *altura* de $x \in X$ como la posición que ocupa en la cadena más larga de todas las que forma parte en X . Equivalentemente, x tiene *altura* h si h es la longitud del camino orientado más largo en $\mathcal{H}(X)$ de un elemento minimal a x .

Nota 4.1.2. Habitualmente se define la altura como una unidad menos que la aquí definida. Así, los elementos minimales para nosotros tienen altura 1.

Observación 4.1.1. El nivel de un punto maximal nos da la dimensión del complejo asociado, de manera que si X es un espacio finito y $x \in X$ es un punto maximal, entonces $\dim(K(X)) = \text{altura}(x) - 1$.

A continuación damos los diagramas de Hasse de algunos espacios finitos de interés.

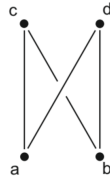


Figura 4.1: Modelo mínimo de S^1 .

Ejemplo 4.1.1. (Esferas mínimas en **Alex**) Sea Σ^1 el espacio finito cuyo diagrama de Hasse es

Esto es, los abiertos mínimos de Σ^1 son $U_a = \{ a \}$, $U_b = \{ b \}$, $U_c = \{ a, b, c \}$ y $U_d = \{ a, b, d \}$.

Podemos reiterar este proceso y continúa el diagrama de Hasse de altura n

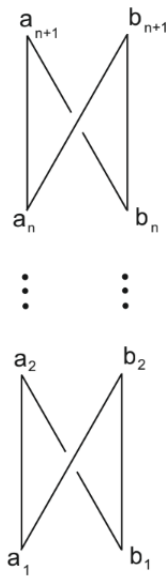


Figura 4.2: Modelo mínimo de S^n .

representando el espacio finito $\Sigma^n = \{ a_i, b_i \}_{1 \leq i \leq n+1}$ de abiertos mínimos $U_{a_j} = \{ a_j \} \cup \{ a_i, b_i \mid i \leq j - 1 \}$ y $U_{b_j} = \{ b_j \} \cup \{ a_i, b_i \mid i \leq j - 1 \}$. Obsérvese que $\mathcal{K}(\Sigma^1)$ es la triangulación de S^1 con cuatro vértices y, en general, $\mathcal{K}(\Sigma^n)$ es la triangulación de S^n obtenida como suspensión reiterada de dos puntos $\mathcal{K}(\Sigma^n) = \{ a_{n+1}, b_{n+1} \} * \mathcal{K}(\Sigma^{n-1}) = \dots = \{ a_{n+1}, b_{n+1} \} * \dots * \{ a_1, b_1 \}$ (ver Figura 4.3)

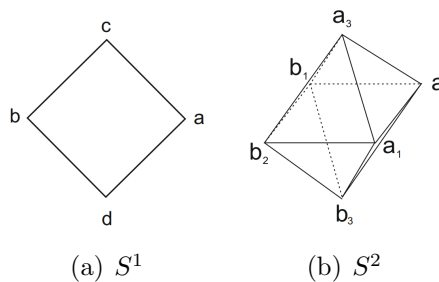


Figura 4.3: Triangulaciones de S^1 y S^2 .

Los espacios finitos Σ^n son llamados esferas (finitas) mínimas. La razón de este nombre está justificada por la Proposición 4.2.1 que daremos más adelante.

Consideremos el conjunto de los números enteros \mathbb{Z} . Sobre él, podemos construir una topología que da lugar a un A-espacio de la siguiente forma.

Definición 4.1.3. La *recta de Khalimsky* es el espacio topológico $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ donde sus abiertos mínimos son:

1. Si $n \in \mathbb{Z}$ es impar, $U_n = \{n\}$.
2. Si $n \in \mathbb{Z}$ es par, $U_n = \{n - 1, n, n + 1\}$.

Este espacio se corresponde con el poset $K = (\mathbb{Z}, \preceq)$ donde $2k - 1 \preceq 2k \succ 2k + 1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

La *semirrecta de Khalimsky* es el subposet de $K, K_{\geq 0} = (\mathbb{Z}_{\geq 0}, \preceq)$. A su vez, dados dos enteros n y m con $n \leq m - 1$ el *arco de Khalimsky* Γ_n^m es el subposet de K formado por el intervalo $[n, m] \subseteq \mathbb{Z}$. Para $n = m$, $\Gamma_n^n = \{n\}$ se llama *arco de Khalimsky degenerado*.

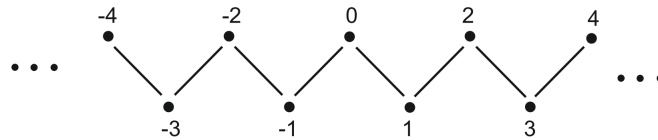


Figura 4.4: Recta de Khalimsky.

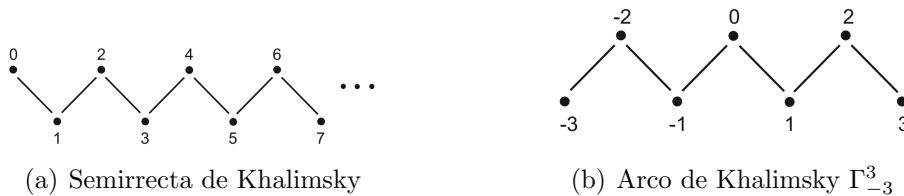


Figura 4.5: Subespacios de la recta de Khalimsky.

Observación 4.1.2. Los extremos de cualquier arco de Khalimsky Γ_n^m son puntos eliminables. Esto significa que podemos ir eliminando los extremos izquierdos por ejemplo para ver que $\{m\}$ es un retracto de deformación fuerte de Γ_n^m .

Ejemplo 4.1.2. El *plano de Khalimsky* es el producto cartesiano de dos rectas de Khalimsky. El orden de este nuevo poset viene dado por: $(x, y) \leq (z, t) \iff x \leq z$ y $y \leq t$.

El diagrama de Hasse del plano de Khalimsky es complicado de visualizar, por lo que usaremos esta representación gráfica del plano, entendiendo que se extiende hasta el infinito:

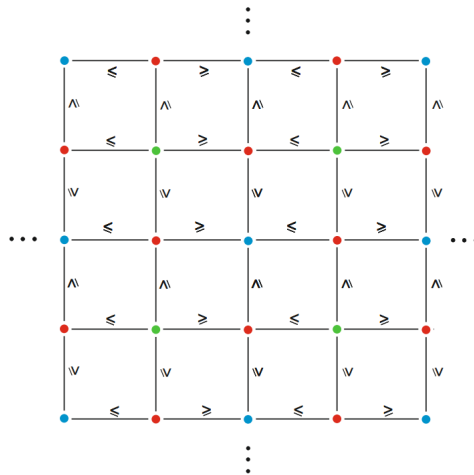


Figura 4.6: Plano de Khalimsky.

En general, el n -espacio de Khalimsky es el producto de n -copias de la recta de Khalimsky $K^n = K \times \dots \times K$. Se tiene que $\mathcal{K}(K^n)$ es una triangulación de \mathbb{R}^n

Ejemplo 4.1.3. (Circunferencias y toros de Khalimsky). Una *circunferencia de Khalimsky* de longitud n es una sucesión finita de puntos x_1, \dots, x_n donde si x_i es un punto abierto, entonces x_{i+1} es un punto cerrado y viceversa, para todo $i = 1, \dots, n - 1$; y además $x_1 = x_n$.

Toda circunferencia de Khalimsky es de longitud par, dado que si consideramos una circunferencia de longitud impar, el primer punto y el último, al ser el mismo, serían un punto abierto y cerrado a la vez, lo cual no puede ocurrir en la topología de Khalimsky.

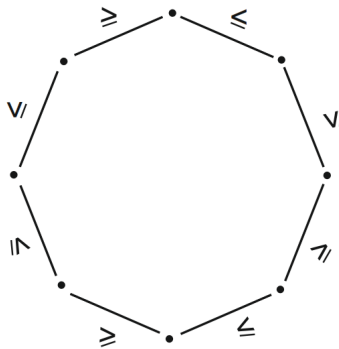


Figura 4.7: Circunferencia de Khalimsky de 8 puntos.

Usando las circunferencias de Khalimsky, se obtienen los toros de Khalimsky de forma similar a como ocurría con el plano de Khalimsky a partir de la recta de Khalimsky.

Dada una n -tupla $m = (m_1, \dots, m_n) \in (2\mathbb{Z})^n$, donde $m_i \geq 4$ para todo $i = 1, \dots, n$, se define el n -toro de Khalimsky como $T_m = \mathbb{Z}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_n}$. Obviamente, un 1-toro de Khalimsky es una circunferencia de Khalimsky.

El diagrama de Hasse del 2-toro de Khalimsky es bastante complicado. Por tanto, visualizaremos estos posets a partir del plano de Khalimsky de forma análoga a como representamos el toro como identificación de una región del plano.

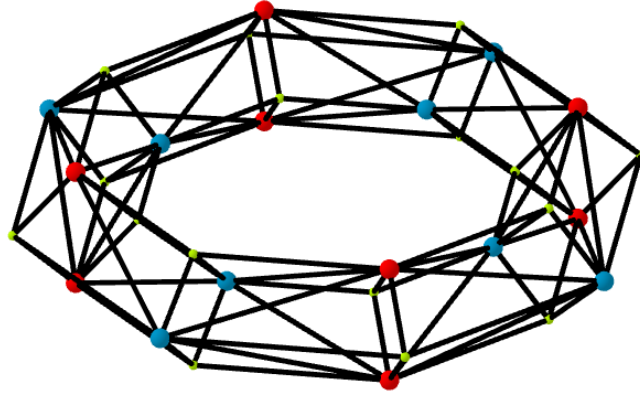


Figura 4.8: Diagrama de Hasse del 2-toro de Khalimsky $T_{(8,4)}$.

4.2. A-modelos de espacios

Definición 4.2.1. Sea W un espacio topológico y X un A-espacio T_0 . Diremos que X es un *modelo de Alexandrov* (o un *A-modelo*) de W si $|\mathcal{K}(X)|$ es homotópicamente equivalente a W . Diremos que X es un *A-modelo mínimo* si es un modelo finito de cardinal mínimo.

En los ejemplos de la sección anterior tenemos modelos de S^1 , S^n , \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 o el toro.

Es interesante observar que Σ^n es el modelo finito mínimo de S^n . Esto es,

Proposición 4.2.1. El espacio finito Σ^n es el modelo de S^n con menor cardinal.

Demostración. Consideremos Y otro modelo finito de S^n con menor cardinal que Σ^n . Como $|\mathcal{K}(Y)|$ es homotópicamente equivalente a S^n , tenemos que

$$H_n(|\mathcal{K}(Y)|, \mathbb{Z}_2) \cong H_n(S^n, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Entonces necesariamente $\dim(|\mathcal{K}(Y)|) \geq n$ y el diagrama de Hasse de Y tiene al menos $n + 1$ niveles. Como el cardinal de Y es $\leq 2n + 1$, algún nivel sólo contiene un punto y_0 . En tal caso los puntos de nivel superior serían eliminables descendentemente por orden creciente de niveles. De esta forma, vemos que Y tiene como retracts de deformación fuerte a un cono de vértice y_0 y por tanto Y es contráctil. Esta contradicción demuestra la proposición. □

Es importante puntualizar que pueden existir varios A-modelos no homotópicamente equivalentes de un mismo espacio W . Esto se debe a la siguiente observación.

Nota 4.2.1. Si bien ψ_X es siempre una equivalencia de homotopía débil, solo puede ser una equivalencia de homotopía cuando $|\mathcal{K}(X)|$ es una unión disjunta de poliedros contráctiles. Podemos suponer que X es conexo por caminos pues toda equivalencia de homotopía preserva el número de componentes conexas e induce equivalencias de homotopía entre ellas. En tal caso, si $g : X \rightarrow |\mathcal{K}(X)|$ es una inversa homotópica de ψ_X , la imagen de $g \circ \psi_X : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow |\mathcal{K}(X)|$ debe ser un subconjunto conexo de

un poliedro y contener solo una cantidad finita de puntos. Esto solo es posible si es un único punto, luego la identidad de $|\mathcal{K}(X)|$ es homotópica a una constante y por tanto este poliedro debe ser contráctil.

Aún siendo el poliedro $|\mathcal{K}(X)|$ contráctil, ψ_X puede no ser una equivalencia de homotopía, como muestra el siguiente ejemplo (puede encontrarse en el Ejemplo 4.2.1 de [2]).

Ejemplo 4.2.1. Sea X el espacio finito cuyo diagrama de Hasse aparece en la Figura 4.9 (a). Es inmediato que no tiene puntos eliminables, por tanto es un espacio minimal y no puede ser contráctil. Sin embargo, su complejo simplicial asociado, $\mathcal{K}(X)$, es la triangulación del cuadrado que aparece en la Figura 4.9 (b). Entonces, usando el Teorema 3.4.1, X es del tipo de homotopía débil de un punto, pero no es contráctil.

Este ejemplo muestra que la contractibilidad de un espacio finito X no equivale a la contractibilidad de su complejo simplicial asociado $\mathcal{K}(X)$.

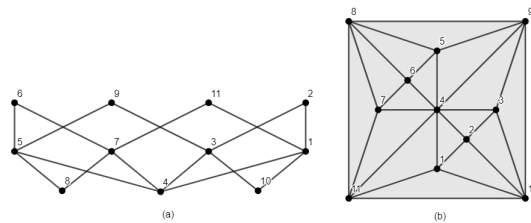


Figura 4.9: Espacio y su complejo asociado.

En particular, el espacio puntual tiene al espacio finito del ejemplo anterior como A-modelo no homotópicamente equivalente al espacio puntual. Obsérvese que los arcos de Khalimsky, la semirrecta o la recta de Khalimsky son modelos del punto no homomorfos entre sí pero son todos ellos contráctiles.

Todas las circunferencias de Khalimsky son modelos de S^1 representando distintos tipos de homotopía pues al ser espacios minimales, las equivalencias de homotopía entre ellos serían necesariamente homeomorfismos por el Corolario 2.3.1.

Sólo se puede asegurar que los A-modelos de un espacio topológico fijado tienen todos el mismo tipo de homotopía débil. Esto es,

Proposición 4.2.2. Si X_1 y X_2 son A-modelos de un mismo espacio topológico W , entonces X_1 e X_2 son del mismo tipo de homotopía débil.

Demostración. De acuerdo con el teorema de McCord (Teorema 3.4.1) tenemos que X_i es débilmente equivalente a $|\mathcal{K}(X_i)|$. Como cada $|\mathcal{K}(X_i)|$ es homotópicamente equivalente a W , se sigue que X_1 y X_2 son del mismo tipo de homotopía débil. \square

También tenemos el siguiente resultado que determina los tipos de homotopía de los espacios que admiten A-modelos finitos.

Proposición 4.2.3. Un espacio W admite un A-modelo finito X si y sólo si X tiene el mismo tipo de homotopía que un poliedro.

Demostración. Obviamente la existencia del A-modelo X da lugar a una equivalencia de homotopía $W \simeq |\mathcal{K}(X)|$.

Recíprocamente, si tenemos una equivalencia de homotopía $W \simeq |K|$, consideremos el espacio finito $X = \mathcal{X}(K)$, para el cual $\mathcal{K}(X) = sdK$; ver Sección 3.4. Entonces tenemos una equivalencia de homotopía $|\mathcal{K}(X)| = |sdK| = |K| \simeq W$. \square

Ejemplo 4.2.2. Sea $Y = \{1/n\}_{n \geq 1} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$. Entonces Y es un espacio compacto que no tiene un A-modelo finito pues no puede tener el tipo de homotopía de un poliedro ya que los poliedros compactos sólo tienen un número finito de componentes conexas y este número es invariante por equivalencias de homotopía.

Un ejemplo de espacio compacto y conexo por caminos que no posee un A-modelo finito es el espacio X conocido como círculo de Varsovia

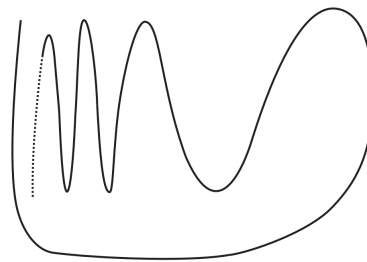


Figura 4.10: Círculo de Varsovia.

En efecto, de acuerdo con la Proposición 4.2.3 bastará ver que X no tiene el tipo de homotopía de un poliedro $|K|$.

Si suponemos que para cierto poliedro $|K|$ tenemos una equivalencia de homotopía $f : |K| \rightarrow X$, observamos que la imagen de f no puede ser todo X ya que en tal caso X sería localmente conexo por el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz (ver Teorema 31.5 en [20], ver Teorema 2.15 [5]). Entonces por conexión y compacidad $f(|K|)$ es un arco cerrado y $f : |K| \rightarrow f(|K|)$ es homotópicamente trivial. Para una inversa homotópica de f , $g : X \rightarrow |K|$, tenemos que $f \circ g \simeq id_{|K|}$ es homotópicamente trivial y por ello $|K|$ y X deben ser contráctiles.

Veamos que X no es contráctil y habremos llegado a una contradicción.

De existir una homotopía $H : X \times I \rightarrow X$ entre id_X y una aplicación constante c_{x_0} , por ser X conexo por caminos podemos suponer que x_0 es el punto indicado en el dibujo. Entonces la restricción $\alpha = H|_{\{x_0\} \times I}$ define un lazo en X basado en x_0 , por lo que la imagen de α es un arco en X que contiene a x_0 . Esto significa que debe existir un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, x_n no está en la imagen de α . Por otro lado, para cada $n \geq n_0$, $H|_{\{x_n\} \times I}$ es un camino entre x_n y x_0 y por tanto debe existir t_n tal que $H(x_n, t_n) = x_{n_0}$. Por compacidad podemos suponer sin pérdida de generalidad que t_n converge a algún t_0 . Por continuidad $\alpha(t_0) = H(x_0, t_0) = x_{n_0}$, lo que nos lleva a una contradicción.

Nota 4.2.2. En este trabajo, se ha definido un A-modelo siguiendo [7] en la Definición 4.2.1. No obstante en [2] se define un A-modelo de un espacio topológico X como un A-espacio Y tal que X e Y tengan el mismo tipo de homotopía débil (ver Definición 3.4.1).

Si $A-B$ modelo indica un A -modelo en el sentido Barmak, se tiene que un espacio X admite un $A-B$ modelo finito si y sólo si $X \simeq_d P$, con $P = |K|$ un poliedro compacto.

En efecto, en tal caso $X \simeq_d P = |K| \simeq_d \mathcal{X}(K)$ de acuerdo con el Teorema 3.5.1. Recíprocamente por el Teorema de McCord (Teorema 3.4.1), si Y es un $A-B$ modelo finito de X , entonces $X \simeq_d Y \simeq_d |\mathcal{K}(Y)|$.

Obsérvese que los espacios Y y X en el Ejemplo 4.2.2, que no admiten A -modelos, sí admiten $A-B$ modelos, siendo en el caso de Y el conjunto de los números naturales con la topología discreta y para X el punto.

Nótese también que la misma demostración de la Proposición 4.2.1 prueba que Σ^n es también $A-B$ modelo mínimo de S^n .

4.3. Algunas construcciones de la topología y sus A -modelos

Las construcciones básicas topológicas tienen una analogía finita, de manera que si por ejemplo tenemos un modelo finito de un cierto espacio, un modelo finito del cono del espacio será el cono finito del modelo finito del espacio.

Recordemos las construcciones topológicas elementales obtenidas como espacios cocientes.

Sea X un espacio topológico y consideremos el intervalo $I = [0, 1]$. Se denomina *cilindro sobre X* al espacio producto de ambos, notado por $X \times I$.

Se define el *cono sobre X* al espacio cociente $X \times I / \sim$, donde \sim denota la relación de equivalencia dada por: $(x, 1) \sim (y, 1)$, para cualesquiera $x, y \in X$. Se denota por $C(X)$.

A su vez, se define la *suspensión sobre X* como el espacio cociente $X \times I / \sim$, donde \sim ahora denota la relación de equivalencia siguiente: $(x, 0) \sim (y, 0)$ y $(x, 1) \sim (y, 1)$, para todo $x, y \in X$. Se denota por $S(X)$.

Observación 4.3.1. Es fácil ver que podemos definir la suspensión de un espacio X a partir del cono directamente al identificar todos los puntos $[x, 0] \in C(X)$. En algunas ocasiones haremos uso de esta propiedad aunque no se diga explícitamente.

Las nociones de cilindro y cono para A -espacios están dados en la siguiente definición.

Definición 4.3.1. Dado un A -espacio X , un *cilindro de X en Alex* (abreviado a *A -cilindro*) es un producto $\mathbb{I}_n^m X = X \times \Gamma_n^m$ donde Γ_n^m es un arco de Khalimsky. Un *cono de X en Alex* es un A -espacio $\mathbb{C}_n^m X = X \times \Gamma_n^{m-1} \cup \{*\}$, con $n \leq m - 1$ y siendo el orden el dado en $X \times \Gamma_n^{m-1}$ y $(x, m - 1) \leq *$ para todo $x \in X$.

Aunque cilindros y conos para distintos (n, m) y (n', m') no son homeomorfos en general (pues no tienen el mismo número de puntos), sí son homotópicamente equivalentes.

Lema 4.3.1. Cualquier cilindro $\mathbb{I}_n^m X$ tiene el mismo tipo de homotopía que X . Por otro lado, cualquier cono $\mathbb{C}_n^m X$ es contráctil.

Demostración. Como ya se mencionó en la Observación 4.1.2, todo arco de Khalimsky Γ_n^m tiene como retracts de deformación fuerte cualquiera de sus extremos. Por tanto, todo cilindro $\mathbb{I}_n^m X$ tiene el tipo de homotopía del propio espacio $X \cong X \times \{m\}$.

Para el caso de los conos, a continuación veremos que todos tienen el tipo de homotopía de $\mathbb{C}X := X \cup \{*\}$ (con $x \leq *$ para todo $x \in X$), que es contráctil por el Corolario 1.2.1.

Supongamos entonces que $n \leq m - 2$ pues si $n = m - 1$, $\mathbb{C}_n^m X \cong \mathbb{C}X$. En tal caso la inclusión $j : \{m - 1\} \hookrightarrow \Gamma_n^m$ se extiende a $\hat{j} : \mathbb{C}X \rightarrow \mathbb{C}_n^m X$ con $\hat{j}(*) = *$ y $\hat{j}(x) = (x, m - 1)$. Más aún, la constante $c_{m-1} : \Gamma_n^{m-1} \rightarrow \Gamma_n^{m-1}$, con $c_{m-1}(i) = m - 1$ para todo $n \leq i \leq m - 1$, se extiende a una aplicación continua $\hat{c}_{m-1} : \mathbb{C}_n^m X \rightarrow \mathbb{C}X$ dada por $\hat{c}_{m-1}(x, i) = x$ y $\hat{c}_{m-1}(*) = *$.

Teniendo en cuenta que Γ_n^{m-1} se retrae a $\{m - 1\}$ al ir quitando una secuencia de puntos eliminables, por la demostración de la Proposición 2.3.1 podemos encontrar una homotopía $H : \Gamma_n^{m-1} \times I \rightarrow \Gamma_n^{m-1}$ tal que $H(i, t) \in \{i, i + 1\}$ para todo $i \leq m - 2$ y $H(m - 1, t) = m - 1$ para todo t .

Esta homotopía da lugar a una homotopía $\hat{H} : \mathbb{C}_n^m X \times I \rightarrow \mathbb{C}_n^m X$ definida por $\hat{H}((x, i), t) = (x, H(i, t))$ si $n \leq i \leq m - 1$ y $\hat{H}(*, t) = *$ para todo $t \in I$. Es obvio que $\hat{H}(-, 0) = id_{\mathbb{C}_n^m X}$ y $\hat{H}(-, 1) = \hat{j} \circ \hat{c}_{m-1}$.

Nótese que \hat{H} es continua en $*$. En efecto, el abierto mínimo de $*$ en $\mathbb{C}_n^m X$ es $U_* = \{*\} \cup X \times \{m - 1\}$ si m es par y $U_* = \{*\} \cup X \times \{m - 1, m - 2\}$ si m es impar. En el primer caso la homotopía \hat{H} cumple $\hat{H}(U_* \times I) \subseteq U_*$ trivialmente. En el segundo caso, $\hat{H}((x, m - 1), t) = (x, H(m - 1, t)) = (x, m - 1) \in U_*$ y $\hat{H}((x, m - 2), t) = (x, H(m - 2, t)) \in U_x \times \{m - 1, m - 2\} \subseteq U_*$. □

Definición 4.3.2. Al cono $\mathbb{C}X = X \cup \{*\}$ con $x \leq *$ para todo $x \in X$ se le llama el *cono no Hausdorff* de X .

Para las suspensiones tenemos la siguiente definición.

Definición 4.3.3. Dado un A-espacio X , una *suspensión de X en Alex* (abreviado *A-suspensión*) es el A-espacio $\mathbb{S}_n^m X = X \times \Gamma_n^{m-1} \cup \{*_0, *_1\}$, con $n \leq m - 1$ y donde $*_0$ y $*_1$ no son comparables y $(x, m - 1) \leq *_0$, $(x, m - 1) \leq *_1$ para todo $x \in X$. Esto es la unión de dos copias del cono $\mathbb{C}_n^m X$ a lo largo de $X \times \Gamma_n^{m-1}$.

De manera análoga a lo hecho para el cono se puede probar que cualquier suspensión $\mathbb{S}_n^m X$ es homotópicamente equivalente a la suspensión $\mathbb{S}X = X \cup \{*_0, *_1\}$ con $x \leq *_0$ y $x \leq *_1$ para todo $x \in X$. A $\mathbb{S}X$ se le llama la *suspensión no Hausdorff* de X .

Definición 4.3.4. Sean X e Y dos espacios topológicos. Se define el *join* de X e Y como el subespacio de $C(X) \times C(Y)$,

$$X * Y = X \times C(Y) \cup C(X) \times Y.$$

Con esta definición, el cono $C(X)$ es homeomorfo al join de X con un espacio puntual $P = \{p\}$. En efecto, $C(P)$ es homeomorfo al intervalo $[p, *]$, así que el join $X * P$ es la unión en el producto $C(X) \times C(P)$ de los subespacios $C(X) \times P = C(X) \times \{p\}$ y $X \times C(P) \cong X \times [p, *]$ con intersección $X \times \{p\}$. Gráficamente

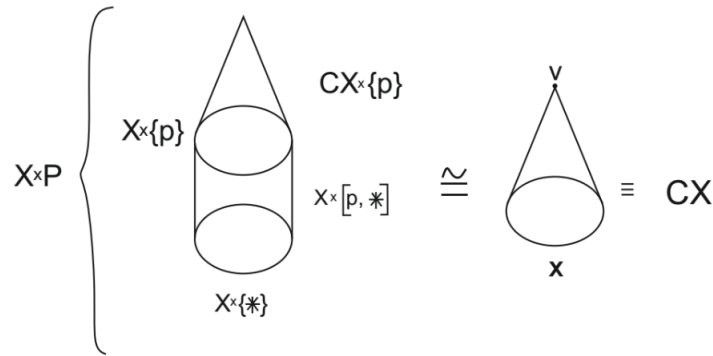


Figura 4.11: Cono visto como join por un punto.

Igualmente la suspensión de X , $S(X)$, es el join de X con el espacio discreto de dos puntos $D = \{d_1, d_2\}$. En efecto, $C(D)$ es homeomorfo a un intervalo $[d_1, d_2]$ con el vértice del cono $*$ correspondiendo a un punto del interior.

Así que el join $X * D$ es la unión en $C(X) \times C(D)$ de los subespacios $C(X) \times D = C(X) \times \{d_1\} \cup C(X) \times \{d_2\}$ y $X \times C(D) \cong X \times [d_1, d_2]$ con intersección $X \times D = X \times \{d_1, d_2\}$. Gráficamente

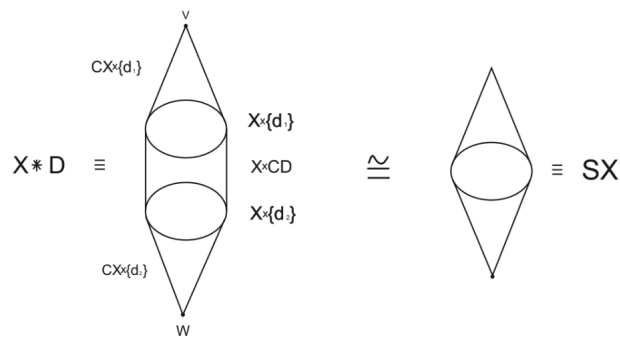


Figura 4.12: Suspensión vista como join por dos puntos.

Nota 4.3.1. La construcción join tiene la siguiente definición alternativa salvo homeomorfismo.

Sea $Z = X \sqcup X \times Y \times I \sqcup Y$ la unión disjunta de los tres espacios indicados. Sobre Z se define la relación de equivalencia generada por $(x, y, 0) \sim x$ y $(x, y, 1) \sim y$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$.

Denotamos por $X *_w Y$ al espacio cociente Z / \sim , al que llamaremos *join de Whitehead*.

Existe una aplicación continua $\nu : Z \rightarrow X \times Y$ dada por $\nu(x) = (x, *_y) \in X \times C(Y)$, $\nu(y) = (*_x, y) \in C(X) \times Y$, $\nu(x, y, t) = (x, [y, 1 - 2t]) \in X \times C(Y)$ si $0 \leq t \leq 1/2$ y $\nu(x, y, t) = ([x, 2t - 1], y) \in C(X) \times Y$ si $1/2 \leq t \leq 1$. Aquí $*_x$ y $*_y$ son los vértices de $C(X)$ y $C(Y)$, respectivamente. La relación de equivalencia inducida por ν coincide con la generada por \sim y así ν induce una biyección continua $\bar{\nu} : X *_w Y \rightarrow X * Y$.

Se tiene entonces el siguiente resultado.

Proposición 4.3.1. La aplicación $\bar{\nu} : X *_w Y \rightarrow X * Y$ es homeomorfismo cuando X e Y son espacios compactos y Hausdorff. En particular, si X e Y son poliedros compactos.

Demostración. De la hipótesis se sigue que $X *_w Y$ sería compacto y $X * Y \subseteq C(X) \times C(Y)$ sería Hausdorff. Es bien conocido que toda biyección continua de un espacio compacto a otro Hausdorff es homeomorfismo. \square

Observación 4.3.2. Un resultado conocido de topología simplicial visto en la asignatura Homología Simplicial del Grado en Matemáticas es que el poliedro subyacente de una unión simplicial de complejos $K * L$ es homeomorfo al join $|K| * |L|$. Esto es, $K * L$ es una triangulación de $|K| * |L|$.

Dados dos A-espacios X e Y , a partir de conos cualesquiera $\mathbb{C}_n^m X$ y $\mathbb{C}_p^q Y$ se define un *join* en **Alex** (*A-join*) de manera natural. Todos los A-joins de X e Y son homotópicamente equivalentes. Esto se debe a que \mathbb{C}_n^m tiene a $\mathbb{C}X$ como retracts de deformación fuerte como vimos en la demostración del Lema 4.3.1. A partir de aquí es directo que el join $X \otimes Y$ hecho a partir de los conos de pares (n, m) y (p, q) tiene como retracts de deformación fuerte al join no-Hausdorff $X \otimes Y$ definido en [7] como sigue.

Definición 4.3.5. Dados dos posets X e Y , se define el *join no-Hausdorff* $X \otimes Y = \mathbb{C}X \times Y \cup X \times \mathbb{C}Y \subseteq \mathbb{C}X \times \mathbb{C}Y$

En [2] se da la siguiente definición de join en **Alex**.

Definición 4.3.6. Dados dos A-espacios X e Y , el *join de Barmak* de X e Y es el A-espacio $X \otimes_B Y = X \sqcup Y$ donde las relaciones de X e Y se mantienen y además $x \leq y$ para todo $x \in X, y \in Y$.

Es fácil probar que $X \otimes_B Y$ no tiene en general el mismo tipo de homotopía que $X \otimes Y$, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.1. Sean $X = \{x_1, x_2\}$ e $Y = \{y_1, y_2\}$ dos espacios discretos con dos puntos. Entonces $X \otimes_B Y = \Sigma^1$ es el modelo mínimo de S^1 .

De hecho, se tiene en general que $\Sigma^n \otimes_B \Sigma^m = \Sigma^{n+m+1}$.

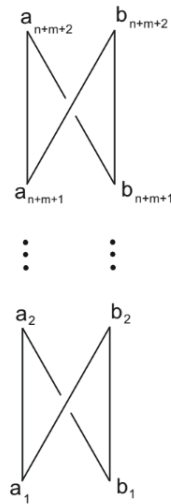


Figura 4.13: Diagrama de Hasse de Σ^{n+m+1} .

Por el contrario, se puede comprobar que el join no-Hausdorff $X \otimes Y$ es el modelo de S^1 dado por la circunferencia de Khalimsky de ocho puntos. Como ambos espacios finitos son minimales y no homeomorfos, no pueden ser del mismo tipo de homotopía.

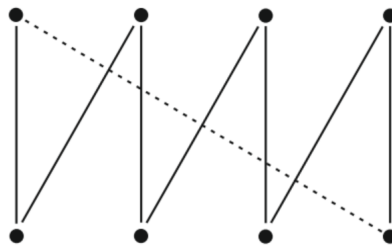


Figura 4.14: Diagrama de Hasse de la circunferencia de Khalimsky de 8 puntos.

La noción de join en **Alex** que imita a la definición alternativa del join de Whitehead en 4.3.1 es la siguiente.

Definición 4.3.7. Se llama *A-join de Whitehead* de los A-espacios X e Y al A-espacio $X \otimes_w Y = X \sqcup X \times Y \sqcup Y$, donde para todo $(x, y) \in X \times Y$ tenemos $(x, y) \leq x$ y $(x, y) \leq y$, además de mantener los órdenes de X , Y y $X \times Y$.

Nota 4.3.2. El join de Whitehead es un caso particular de una construcción llamada *doble cilindro de un par* de aplicaciones $f : Z \rightarrow X$ y $g : Z \rightarrow Y$, denotado por $M(f, g)$. Para espacios topológicos, $M(f, g)$ es el espacio cociente

$$M(f, g) = (X \sqcup Z \times I \sqcup Y) / \sim$$

donde \sim es la relación de equivalencia generada por $(z, 0) \sim f(z)$ y $(z, 1) \sim g(z)$ para todo $z \in Z$. Así, $X \otimes_w Y$ es el doble cilindro de las proyecciones canónicas $p_1 : Z = X \times Y \rightarrow X$ y $p_2 : Z = X \times Y \rightarrow Y$.

Para A-espacios, el *doble cilindro en Alex* de dos aplicaciones $f : Z \rightarrow X$ y $g : Z \rightarrow Y$ se define como $M(f, g) = X \sqcup Z \sqcup Y$, donde $z \leq f(z)$ y $z \leq g(z)$ para todo $z \in Z$.

Nota 4.3.3. La definición de join de Whitehead en **Alex** (y, más generalmente, la noción de doble cilindro) puede generalizarse tomando cualquier A-cilindro $\mathbb{I}_n^m(X \times Y)$ como sigue:

Sea

$$X \otimes_n^m Y = Y \sqcup \mathbb{I}_n^m(X \times Y) \sqcup X,$$

donde, para todo $x \in X$ e $y \in Y$, $(x, y, m) \leq x$, $(x, y, n) \leq y$ y manteniéndose el orden en el A-cilindro.

Es una comprobación directa que la equivalencia de homotopía natural de $\mathbb{I}_n^m(X \times Y)$ con $X \times Y$ se extiende a una equivalencia de homotopía entre $X \otimes_n^m Y$ y el join de Whitehead $X \otimes_w Y$

Proposición 4.3.2. Si los espacios X e Y que consideremos tienen A-modelos finitos entonces las construcciones anteriores en **Alex** son A-modelos finitos de las correspondientes construcciones topológicas.

Demostración. En efecto, el operador \mathcal{K} lleva el A-cilindro $\mathbb{I}_n^m X$ en una triangulación del cilindro topológico $|\mathcal{K}(X)| \times I$. Esto se debe a que, en general, dados dos espacios finitos X e Y , $\mathcal{K}(X \times Y)$ es una triangulación del producto topológico $|\mathcal{K}(X)| \times |\mathcal{K}(Y)|$ (ver [2] Proposición 2.7.5).

Análogamente, dado el cono $\mathbb{C}_n^m X$ se tiene que $\mathcal{K}(\mathbb{C}(X))$ es una triangulación del cono topológico $C|\mathcal{K}(X)|$. Obsérvese que para el cono no-Hausdorff $\mathbb{C}(X)$, $\mathcal{K}(\mathbb{C}(X))$ es precisamente el complejo cono de $\mathcal{K}(X)$.

En el caso de la suspensión es análogo, siendo $\mathcal{K}(\mathbb{S}_n^m X)$ una triangulación de la suspensión $S(|\mathcal{K}(X)|)$. Además si $\mathbb{S}(X)$ es la suspensión no-Hausdorff, $\mathcal{K}(\mathbb{S}(X))$ es justamente el complejo suspensión de $\mathcal{K}(X)$.

Finalmente, para el join $X * Y$ se tiene que $\mathcal{K}(X * Y)$ es una triangulación del join topológico $|\mathcal{K}(X)| * |\mathcal{K}(Y)|$ (ver Observación 4.3.2). Si consideramos el join de Barmak $X \otimes_B Y$ entonces $\mathcal{K}(X \otimes_B Y)$ es exactamente la unión simplicial $\mathcal{K}(X) * \mathcal{K}(Y)$. \square

Capítulo 5

Modelos de Alexandrov de aplicaciones continuas

Como una extensión del capítulo anterior vamos a definir lo que es un A-modelo de una aplicación continua y dar algunos ejemplos de A-modelos de importantes aplicaciones que aparecen en la topología algebraico-geométrica. La definición precisa la establecemos en la primera sección donde veremos que un teorema de Hardie y Vermeulen asegura la existencia de un A-modelo para cualquier aplicación continua entre espacios con A-modelos finitos.

5.1. Aproximación por subdivisiones

De manera análoga a cómo hemos definido un A-modelo para un espacio topológico, podemos definir un A-modelo para una aplicación continua. Más explícitamente,

Definición 5.1.1. Si $g : W \rightarrow Z$ es una aplicación continua entre espacios topológicos, una aplicación entre A-espacios $f : X \rightarrow Y$ se dice un A-modelo de g si X e Y son A-modelos de W y Z y existen equivalencias de homotopía $h_1 : |\mathcal{K}(X)| \simeq W$ y $h_2 : |\mathcal{K}(Y)| \simeq Z$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo salvo homotopía.

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{K}(X)| & \xrightarrow{\mathcal{K}(f)} & |\mathcal{K}(Y)| \\ h_1 \downarrow & & \downarrow h_2 \\ W & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

Si trabajamos con A-modelos finitos con pocos puntos no podemos esperar representar muchas aplicaciones. Esto queda de manifiesto en la siguiente proposición.

Proposición 5.1.1. Todas las aplicaciones continuas entre A-modelos mínimos de esferas de distinta dimensión son homotópicamente triviales.

Demostración. Sea $f : \Sigma^m \rightarrow \Sigma^n$ una aplicación continua, con $m \neq n$ y denotemos los elementos de Σ^m y Σ^n según el Ejemplo 4.1.1.

En caso de que f no fuese sobreyectiva, $f(\Sigma^m) \subseteq \Sigma^n - \{p_0\}$ para algún $p_0 \in \Sigma^n$ y $\Sigma^n - \{p_0\}$ es contráctil (ver Demostración de la Proposición 4.2.1).

Supongamos pues que f es sobreyectiva (lo que implica $m > n$). Entonces $f(a_{m+1}) \neq f(b_{m+1})$, pues en caso contrario, por ser f continua y sobreyectiva, todos

los puntos de Σ^n deberían ser menores o iguales que $f(a_{m+1}) = f(b_{m+1})$, pero esto no ocurre para el otro elemento que se encuentra a la misma altura que $f(a_{m+1})$, pues no está relacionado con él.

Además, si $f(a_{m+1})$ y $f(b_{m+1})$ son distintos y ocupan distintos niveles, son comparables. Supongamos que $f(a_{m+1}) \leq f(b_{m+1})$ (el otro caso es análogo).

De nuevo por continuidad y sobreyectividad, todos los elementos de Σ^n serían menores o iguales que $f(b_{m+1})$ y llegamos a la contradicción de antes.

Así pues $f(a_{m+1})$ y $f(b_{m+1})$ tienen el mismo nivel en Σ^n . Por continuidad y sobreyectividad, f debe preservar elementos maximales. Tenemos así que $\{f(a_{m+1}), f(b_{m+1})\} = \{a_{n+1}, b_{n+1}\}$. Más aún, no existe $x \in \Sigma^m$ tal que $f(x) = f(a_{m+1})$ o $f(x) = f(b_{m+1})$, pues en uno de estos casos se llega a contradicción. Por ejemplo el primero, como $x \leq a_{m+1}$, por continuidad $f(a_{m+1}) = f(x) \leq f(b_{m+1})$.

Así pues, f se restringe a una sobreyección continua $f_1 : \Sigma^{m-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}$ si no consideramos los elementos maximales de Σ^m . Realizando el razonamiento análogo al caso de Σ^m , llegamos a que f_1 preserva los elementos maximales de Σ^{m-1} y además no existe otro elemento cuya imagen esté en $\{a_n, b_n\}$. Iterando este proceso n veces, deducimos que f_{n-1} se restringe a una aplicación continua y sobreyectiva $f_n : \Sigma^{m-n} \rightarrow \Sigma^0$, lo que nos lleva a una contradicción por ser Σ^{m-n} conexo y Σ^0 no. □

No obstante, existe un teorema de aproximación por subdivisiones de espacios finitos debido a Hardie y Vermeulen que permite aproximar cualquier aplicación continua entre los poliedros asociados. Con ello toda aplicación continua entre espacios topológicos que admiten A-modelos finitos tiene un A-modelo. En detalle,

Teorema 5.1.1. (Teorema 2.3 en [6]) Sea $f : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow |\mathcal{K}(Y)|$ una aplicación continua, donde X e Y son espacios finitos T_0 . Entonces existe un entero n y una aplicación continua $g : sd_{\mathcal{X}}^n X \rightarrow Y$ tal que $\mathcal{K}(g)$ es homotópica a f .

Recordemos que $sd_{\mathcal{X}}^n X := (\mathcal{X} \circ \mathcal{K})^n X$ denota la n -ésima subdivisión del espacio finito X (ver Nota 3.5.1).

Corolario 5.1.1. Sea $f : W \rightarrow Z$ una aplicación continua y supongamos que W y Z admiten A-modelos finitos. Entonces f admite un A-modelo.

Demostración. Sean X e Y espacios finitos y equivalencias de homotopía $h_1 : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow W$ y $h_2 : |\mathcal{K}(Y)| \rightarrow Z$. Elegida una inversa homotópica de h_2 , $g_2 : Z \rightarrow |\mathcal{K}(Y)|$, sea $h = g_2 \circ f \circ h_1 : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow |\mathcal{K}(Y)|$. Por el Teorema 5.1.1 aplicado a h se puede encontrar un entero n y una aplicación continua $g : sd_{\mathcal{X}}^n X \rightarrow Y$ tal que

$$\mathcal{K}(g) : |\mathcal{K}(sd_{\mathcal{X}}^n X)| = |sd^n \mathcal{K}(X)| = |\mathcal{K}(X)| \rightarrow |\mathcal{K}(Y)|$$

es homotópica a h . Es inmediato comprobar que el diagrama siguiente es conmutativo salvo homotopía, esto es, g es un A-modelo para f .

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{K}(X)| & \xrightarrow{\mathcal{K}(g)} & |\mathcal{K}(Y)| \\ h_1 \downarrow & & \downarrow h_2 \\ W & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

□

5.2. A-modelo de la multiplicación compleja

Recordemos que un grupo topológico consiste en una terna (G, \mathcal{T}, \cdot) donde (G, \mathcal{T}) es un espacio topológico y (G, \cdot) es un grupo tal que las aplicaciones $G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$, y $G \rightarrow G$, $x \mapsto x^{-1}$, son continuas.

Dos ejemplos clásicos de grupo topológico vienen dados por la multiplicación de números complejos unitarios $m : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$ y la multiplicación de números cuaterniónicos unitarios $m : S^3 \rightarrow S^3$. También existe otra multiplicación para S^7 a partir de los números octoniónicos unitarios, la cual no es asociativa (ver [9], Capítulo 3.C). De hecho, estas son las únicas esferas con estructura multiplicativa.

La siguiente proposición prueba que no podemos modelar estas multiplicaciones usando los modelos mínimos de S^1 , S^3 y S^7 : Σ^1 , Σ^3 y Σ^7 .

Proposición 5.2.1. No existe una aplicación continua $\mu : \Sigma^n \times \Sigma^n \rightarrow \Sigma^n$ tal que $\mathcal{K}(\mu)$ sea homotópica a la multiplicación compleja ($n = 1$), cuaterniónica ($n = 3$) u octoniónica ($n = 7$).

Nota 5.2.1. En la proposición anterior, la multiplicación sobre $|\mathcal{K}(\Sigma^n)|$ se hace vía el homeomorfismo $h : |\mathcal{K}(\Sigma^n)| \rightarrow S^n$ dado por $h(x) = x/\|x\|$ (ver Ejemplo 4.1.1).

Para ello, veamos primero el siguiente resultado.

Proposición 5.2.2. Si $f : \Sigma^n \rightarrow \Sigma^n$ es una aplicación continua tal que $\mathcal{K}(f)$ no es homotópicamente trivial, entonces f intercambia puntos en algunos niveles del diagrama de Hasse $\mathcal{H}(\Sigma^n)$.

Demostración. Tenemos que f es necesariamente sobreyectiva, pues en caso contrario tampoco lo es $\mathcal{K}(f)$ y sería homotópicamente trivial.

Como f es sobreyectiva, necesariamente es una biyección y por tanto es homeomorfismo (ver Nota 2.1.3). Al ser homeomorfismo, el nivel de cualquier $x \in \Sigma^{2n-1}$ es el mismo que el de $f(x)$ pues en caso contrario U_x y $U_{f(x)} = f(U_x)$ no tendrían el mismo cardinal. □

Demostración. (de la Proposición 5.2.1) Procederemos por reducción al absurdo. En caso de que existiese μ , si fijamos un punto arbitrario $x \in \Sigma^n$, tenemos el diagrama para el homeomorfismo $h : |\mathcal{K}(\Sigma^n)| \rightarrow S^n$, $h(x) = x/\|x\|$.

$$\begin{array}{ccccc} |\mathcal{K}(\Sigma^n)| & \xrightarrow{\mathcal{K}(i_x)} & |\mathcal{K}(\Sigma^n \times \Sigma^n)| & \xrightarrow{\mathcal{K}(\mu)} & |\mathcal{K}(\Sigma^n)| \\ h \downarrow \cong & & h \times h \downarrow \cong & & \cong \downarrow h \\ S^n & \xrightarrow{i_{h(x)}} & S^n \times S^n & \xrightarrow{m} & S^n \end{array}$$

donde $i_x : \Sigma^n \rightarrow \Sigma^n \times \Sigma^n$ es $i_x(y) = (x, y)$ e $i_{h(x)}(z) = (h(x), z)$ y el diagrama de la derecha es conmutativo salvo homotopía. En particular, $m \circ i_{h(x)}$ es la traslación $z \mapsto h(x) \cdot z$.

Es bien conocido que una traslación en un grupo topológico conexo es siempre homotópica a la identidad y para el diagrama anterior lo mismo ocurre con $\mathcal{K}(\mu) \circ \mathcal{K}(i_x) = \mathcal{K}(\mu \circ i_x)$.

Aplicando la Proposición 5.2.2 a $\mu_x = \mu \circ i_x : \Sigma^n \rightarrow \Sigma^n$ llegamos a que μ_x intercambia puntos en algunos niveles de Σ^n .

Un razonamiento análogo nos lleva al mismo resultado para $\mu^x = \mu \circ j_x$ con $j_x(y) = (y, x)$, esto es, para traslaciones a derecha.

Dados x e y en distintos niveles, tenemos que $\mu_x(y)$ es un elemento en el nivel de y . Análogamente $\mu^y(x)$ está en el mismo nivel que x . Pero entonces $\mu^y(x) = \mu(x, y) = \mu_x(y)$ está en el mismo nivel que x , lo que nos lleva a contradicción. \square

Nota 5.2.2. Como consecuencia de las Proposiciones 5.1.1 y 5.2.2 tenemos todas las posibles aplicaciones entre los modelos mínimos de las esferas.

Al observar que el modelo finito más simple para S^1 no sirve, podríamos aplicar 5.1.1 para encontrar un modelo finito que nos sirva. Probaremos explícitamente que mediante una sola subdivisión, la aplicación $\mu : sd_{\mathcal{X}}^1(\Sigma^1) \times sd_{\mathcal{X}}^1(\Sigma^1) \rightarrow \Sigma^1$ dada por la tabla de la Figura 5.1 es un A-modelo de la multiplicación. Ver Nota 5.2.3

1-i	1	i	i	i	-1	-i	-i	-i
-i	1	1	1	i	-1	-1	-1	-i
-1-i	-i	-i	1	i	i	i	-1	-i
-1	-1	-i	1	1	1	i	-1	-1
-1+i	-1	-i	-i	-i	1	i	i	i
i	-1	-1	-1	-i	1	1	1	i
1+i	i	i	-1	-i	-i	-i	1	i
1	1	i	-1	-1	-i	-i	1	1
μ	1	1+i	i	-1+i	-1	-1-i	-i	1-i

Figura 5.1: Tabla de la aplicación μ

Nota 5.2.3. Para hacer más comprensible las figuras representando a Σ^1 y su subdivisión, los elementos de Σ^1 y de $sd_{\mathcal{X}}^1(\Sigma^1)$ se denotarán con números complejos adecuados para que los vértices de $\mathcal{K}(\Sigma^1)$ se correspondan con estos números en el plano complejo.

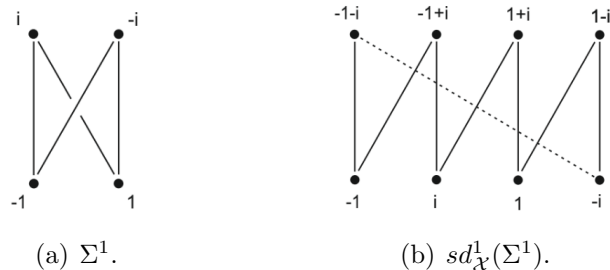


Figura 5.2: Modelos finitos con notación compleja.

Teorema 5.2.1. La aplicación μ es un modelo finito de la multiplicación de números complejos unitarios.

Nota 5.2.4. La multiplicación de números complejos unitarios se entenderá definida sobre $|\mathcal{K}(sd_{\mathcal{X}}^1(\Sigma))| \times |\mathcal{K}(sd_{\mathcal{X}}^1(\Sigma))|$ mediante el homeomorfismo h de la Nota 5.2.1. Además, en la demostración del Teorema 5.2.1 usaremos los siguientes lemas.

En primer lugar recordemos que al expresar los elementos de S^1 en coordenadas polares, $x = e^{i\theta_x}$, la multiplicación se traduce en la suma de los argumentos. De esta forma la preimagen por m de $p = e^{i\alpha}$ (fibra de p) corresponde a la recta $\theta_x + \theta_y = \alpha$

Lema 5.2.1. Consideremos la triangulación de $S^1 \times S^1$ dada por $\mathcal{K}(sd_{\mathcal{X}}^1(\Sigma^1) \times sd_{\mathcal{X}}^1(\Sigma^1))$. Entonces, en la siguiente tabla

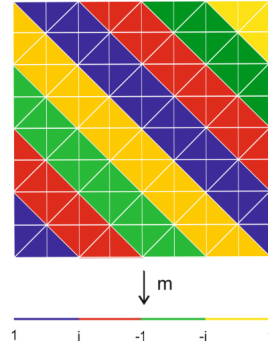


Figura 5.3: Diagrama de bandas.

cada banda es mandada por m en la arista del mismo color en $\mathcal{K}(\Sigma^1)$. En particular la fibra de cualquier vértice de $\mathcal{K}(\Sigma^1)$ es una recta de $\mathcal{K}(sd_{\mathcal{X}}^1(\Sigma^1) \times sd_{\mathcal{X}}^1(\Sigma^1))$.

Demostración. De acuerdo con las observaciones anteriores, cada banda está descrita por la desigualdad $n\pi/2 \leq \theta_x + \theta_y \leq (n+1)\pi/2$ ($n \bmod 4$) y su imagen por m visto como suma de argumentos es justamente la arista $(n\pi/2, (n+1)\pi/2)$. En particular la fibra de $n\pi/2$ es la recta $\theta_x + \theta_y = n\pi/2$, como podemos ver en la siguiente figura.

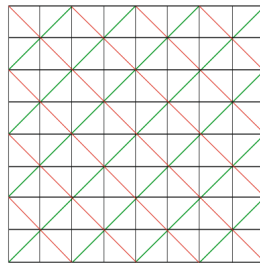


Figura 5.4: En ella podemos ver que las rectas rojas son las preimágenes de los vértices de $\mathcal{K}(\Sigma^1)$.

□

Lema 5.2.2. Para $(x, y) \in |\mathcal{K}(sd_{\mathcal{X}}^1(\Sigma^1) \times sd_{\mathcal{X}}^1(\Sigma^1))|$, se tiene que $m(x, y)$ precede a $\mathcal{K}(\mu)(x, y)$ respecto al sentido antihorario de S^1 . Más aún, el ángulo $\gamma(x, y)$ medido desde $m(x, y)$ hasta $\mathcal{K}(\mu)(x, y)$ es menor estricto que π .

Demostración. Si (x, y) es un vértice que se encuentra en el borde de una banda entonces una tediosa comprobación de 36 casos (ver Apéndice 5.2.1), nos dice que $m(x, y) = \mathcal{K}(\mu)(x, y)$ o bien $\mathcal{K}(\mu)(x, y)$ es el vértice posterior a $m(x, y)$ en el sentido antihorario. En particular $\gamma(x, y) \leq \pi/2$.

En el caso de que (x, y) sea un vértice interior a una banda $(n-1)\pi/2 \leq \theta_x + \theta_y \leq n\pi/2$ se tiene que $\mathcal{K}(\mu)(x, y) = n\pi/2$. Entonces $m(x, y)$ es un punto interior de $((n-1)\pi/2, n\pi/2)$ por el Lema 5.2.1.

Ahora, sea $(x, y) \in \mathring{\sigma}$ con $\sigma = (w_1, w_2)$ una arista con w_1 en la recta $\theta_x + \theta_y = (n-1)\pi/2$ y w_2 en el interior de la banda. Entonces, por la observación anterior, $\mathcal{K}(\mu)(w_2) = n\pi/2$ y por ser $\mathcal{K}(\mu)$ simplicial $\mathcal{K}(\mu)(w_1) = (n-1)\pi/2$ o $n\pi/2$.

Por tanto, $\mathcal{K}(\mu)(x, y) = n\pi/2$ o está en el interior de la arista $((n-1)\pi/2, n\pi/2)$. En el primer caso $\mathcal{K}(\mu)(x, y)$ precede a $m(x, y)$. En el segundo, observemos que si $(x, y) = (1-\lambda)w_1 + \lambda w_2$ entonces se comprueba (Teorema de Pitágoras) que la distancia de (x, y) a la recta $(n-1)\pi/2$, llamada l , es menor que λ . Entonces por ser $\mathcal{K}(\mu)$ simplicial $\mathcal{K}(\mu)(x, y) = (1-\lambda)\mathcal{K}(\mu)(w_1) + \lambda\mathcal{K}(\mu)(w_2) = (1-\lambda)(n-1)\pi/2 + \lambda n\pi/2$. Por tanto λ es la distancia de $\mathcal{K}(\mu)(x, y)$ a $(n-1)\pi/2$ y como l sigue siendo la distancia de $(n-1)\pi/2$ a $m(x, y)$ se concluye que $m(x, y)$ precede a $\mathcal{K}(\mu)(x, y)$.

Supongamos ahora que (x, y) está en el interior de un triángulo σ de vértices v_1, v_2 y v_3 con los dos primeros en la recta $\theta_x + \theta_y = (n-1)\pi/2$ y v_3 en el interior de la banda. Como hemos observado antes $\mathcal{K}(\mu)(v_3) = n\pi/2$ y $\mathcal{K}(\mu)(v_1)$ y $\mathcal{K}(\mu)(v_2)$ pueden tomar los valores $(n-1)\pi/2$ y $n\pi/2$ ya que $m(v_1) = m(v_2) = (n-1)\pi/2$. Si $\mathcal{K}(\mu)(v_1) = \mathcal{K}(\mu)(v_2) = n\pi/2$ ya tenemos que $m(x, y)$ precede a $\mathcal{K}(\mu)(x, y)$.

Si no, $\mathcal{K}(\mu)$ lleva σ en la arista $((n-1)\pi/2, n\pi/2)$. Más aún si $(x, y) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i v_i$ con $\lambda_i > 0$, podemos escribir $(x, y) = (1-\rho)p + \rho v_3$ donde $\rho = \lambda_3$ y $p = \lambda_1/(1-\rho)v_1 + \lambda_2/(1-\rho)v_2$ está en la cara de σ de vértices v_1 y v_2 . En particular $m(p) = (n-1)\pi/2$ y podemos repetir el argumento anterior con p en el lugar de w_1 y v_3 en el lugar de w_2 .

Para el caso en el que los vértices del borde de la banda aparezcan en la recta $\theta_x + \theta_y = n\pi/2$, el razonamiento es análogo. Con ello se termina la demostración. □

Demostración. (del Teorema 5.2.1) Es una comprobación directa (ver 5.2) que la aplicación μ preserva el orden, por tanto es una aplicación continua entre espacios finitos.

Ahora, usando la identificación proporcionada por el homeomorfismo $x \mapsto x/\|x\|$, definimos para todo punto $(x, y) \in |\mathcal{K}(sd_{\mathcal{X}}^1(\Sigma^1) \times sd_{\mathcal{X}}^1(\Sigma^1))|$ la aplicación $H((x, y), t)$ como el punto del arco de $m(x, y)$ a $\mu(x, y)$ de ángulo $\arg(m(x, y)) + t\gamma(x, y)$, donde $\gamma(x, y)$ es el ángulo proporcionado por el Lema 5.2.2. Esta aplicación es continua y define una homotopía entre m y $\mathcal{K}(\mu)$; esto es, μ es un modelo finito de m . □

5.2.1. Apéndice

Aquí damos los valores para los 36 casos mencionados en la prueba del Lema 5.2.2. Denotaremos por $[a + bi] = (a + bi)/\|(a + bi)\|$.

$$\begin{array}{ll}
m([1], [1]) = [1] & \mu(1, 1) = 1 \\
m([1+i], [1]) = [1+i] & \mu(1+i, 1) = i \\
m([1+i], [1+i]) = [i] & \mu(1+i, 1+i) = i \\
m([i], [1]) = [i] & \mu(i, 1) = -1 \\
m([i], [1+i]) = [-1+i] & \mu(i, 1+i) = -1 \\
m([i], [i]) = [-1] & \mu(i, i) = -1 \\
m([-1+i], [1]) = [-1+i] & \mu(-1+i, 1) = -1 \\
m([-1+i], [1+i]) = [-1] & \mu(-1+i, 1+i) = -i \\
m([-1+i], [i]) = [-1+i] & \mu(-1+i, i) = -i \\
m([-1+i], [-1+i]) = [-i] & \mu(-1+i, -1+i) = -i \\
m([-1], [1]) = [-1] & \mu(-1, 1) = -1 \\
m([-1], [1+i]) = [-1-i] & \mu(-1, 1+i) = -i \\
m([-1], [i]) = [-i] & \mu(-1, i) = 1 \\
m([-1], [-1+i]) = [1-i] & \mu(-1, -1+i) = 1 \\
m([-1], [-1]) = [1] & \mu(-1, -1) = 1 \\
m([-1-i], [1]) = [-1-i] & \mu(-1-i, 1) = -i \\
m([-1-i], [1+i]) = [-i] & \mu(-1-i, 1+i) = -i \\
m([-1-i], [i]) = [1-i] & \mu(-1-i, i) = 1 \\
m([-1-i], [-1+i]) = [1] & \mu(-1-i, -1+i) = i \\
m([-1-i], [-1]) = [1+i] & \mu(-1-i, -1) = i \\
m([-1-i], [-1-i]) = [i] & \mu(-1-i, -1-i) = i \\
m([-i], [1]) = [-i] & \mu(-i, 1) = 1 \\
m([-i], [1+i]) = [1-i] & \mu(-i, 1+i) = 1 \\
m([-i], [i]) = [1] & \mu(-i, i) = 1 \\
m([-i], [-1+i]) = [1+i] & \mu(-i, -1+i) = i \\
m([-i], [-1]) = [i] & \mu(-i, -1) = -1 \\
m([-i], [-1-i]) = [-1+i] & \mu(-i, -1-i) = -1 \\
m([-i], [-i]) = [-1] & \mu(-i, -i) = -1 \\
m([1-i], [1]) = [1-i] & \mu(1-i, 1) = 1 \\
m([1-i], [1+i]) = [1] & \mu(1-i, 1+i) = i \\
m([1-i], [i]) = [1+i] & \mu(1-i, i) = i \\
m([1-i], [-1+i]) = [i] & \mu(1-i, -1+i) = i \\
m([1-i], [-1]) = [-1+i] & \mu(1-i, -1) = -1 \\
m([1-i], [-1-i]) = [-1] & \mu(1-i, -1-i) = -i \\
m([1-i], [-i]) = [-1-i] & \mu(1-i, -i) = -i \\
m([1-i], [1-i]) = [-i] & \mu(1-i, 1-i) = -i
\end{array}$$

5.3. H-espacios finitos

En el apartado anterior vemos en particular que un modelo de la multiplicación de un grupo topológico, no es sino una aplicación que cumple las propiedades de grupo salvo homotopía. Este fenómeno es habitual en topología algebraica y llevó a Hopf a presentar lo que hoy se conoce como un H-espacio.

Esta sección recoge un importante resultado de Stong que nos dice que en **Alex** los únicos H-espacios conexos son los triviales. Recordemos la definición de H-espacio.

Definición 5.3.1. Sea X un espacio topológico y $m : X \times X$ una aplicación continua que llamaremos *multiplicación*. Un elemento $e \in X$ se dice *elemento neutro homotópico* para m si para las aplicaciones $i_1, i_2 : X \rightarrow X \times X$, dadas por $i_1(x) = (x, e)$ e $i_2(x) = (e, x)$, las composiciones $m \circ i_1$ y $m \circ i_2$ son homotópicas a la identidad de X . Un *H-espacio* es un espacio X dotado de una multiplicación m con un elemento neutro homotópico e . Se denota por el par (X, e) .

Nota 5.3.1. Obviamente todo grupo topológico es un H-espacio, pero existen muchos ejemplos de H-espacios que no son grupos topológicos, siendo el espacio de lazos el ejemplo clásico, el cual se ve en la asignatura Geometría y Topología de Superficies del Grado en Matemáticas. Recordemos que $\Omega(X, x_0)$ denota el conjunto de aplicaciones continuas $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ tales que $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. Entre estas aplicaciones, llamadas *lazos en x_0* , podemos definir la multiplicación de la siguiente forma: dados dos lazos α y β , $m(\alpha, \beta) = \alpha * \beta$ es el lazo (llamado *yuxtaposición* de α y β)

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Esta multiplicación tiene como elemento neutro homotópico el lazo constante en x_0 , pues $\alpha * c_{x_0} \simeq \alpha$ relativamente a $\{0, 1\}$. Sin embargo, veamos que no podemos encontrar un elemento neutro. En caso de que existiese un lazo $e(t)$ tal que $\alpha * e = \alpha$ para todo lazo α , tendríamos que

$$\alpha * e(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ e(2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Esto significa que $\alpha(2t) = \alpha(t)$ para todo $t \in [0, 1/2]$. Entonces para t_0 arbitrario en $[0, 1]$ se tiene $\alpha(2(t_0/2)) = \alpha(t_0/2) = \alpha(t_0/4) = \dots = \alpha(t_0/2^n)$ para n un entero positivo arbitrario. Luego, tomando límite a ambos lados

$$\alpha(t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(t_0/2^n) = \alpha(0) = x_0$$

Por tanto, el lazo α sólo puede ser constante, lo que nos lleva a una contradicción.

La primera observación sobre la noción de H-espacio es que, por definición, es un invariante homotópico. Con más detalle, se tiene el siguiente resultado.

Lema 5.3.1. Sea $f : X \rightarrow Y$ una equivalencia de homotopía. Si (X, e) es un H-espacio, también lo es $(Y, f(e))$.

Demostración. Sea $g : Y \rightarrow X$ una inversa homotópica de f . Si m_X es la multiplicación de (X, e) se define $m_Y : Y \times Y \rightarrow Y$ como la composición $m_Y = f \circ m_X \circ (g \times g)$. Para ver que $(Y, f(e))$ es un H-espacio para la multiplicación m_Y , simplemente observamos que $si : X \times I \rightarrow X$ es una homotopía entre $g \circ f$ y id_X , entonces $\gamma(t) = H(e, t)$

define un camino entre $gf(e)$ y e . Por tanto $m_X(x, \gamma(t))$ define una homotopía entre $id \simeq m_X(x, e)$ y $h(x, gf(e))$. Así pues $m_Y(y, f(e)) = f(m_X(g(y), gf(e))) \simeq f(g(y) \simeq id_Y(y))$. Análogamente $m_Y(e, y) \simeq id_Y(y)$. \square

Como una extensión de los resultados obtenidos en la sección anterior incluimos aquí el estudio que hizo Stong de los H-espacios en [16] del que se deduce que, salvo en casos triviales, no es posible que un A-modelo de un H-espacio topológico W sea el transferido por el operador \mathcal{K} de un H-espacio en **Alex**, ya que para espacios finitos la noción de H-espacio es extremadamente restrictiva como muestra la siguiente proposición.

Proposición 5.3.1. Sea (X, e) un H-espacio finito. Entonces la componente de e , X_e , es contráctil.

Demostración. Supongamos que X es minimal. En tal caso las aplicaciones $m(x, e)$ y $m(e, x)$, al ser homotópicas a la identidad, coinciden con la identidad de X . Sea $p \in X_e$ y $\gamma(t)$ un camino en X entre e y p . Entonces $H : X \times I \rightarrow X$ dad por $H(x, t) = m(x, \gamma(t))$ es una homotopía entre $f(x) = m(x, p)$ y la identidad. Por tanto $f(x)$ vuelve a ser la identidad y $x = m(x, p)$ para todo $p \in X_e$. De manera análoga $x = m(q, x)$ para todo $q \in X_e$. Por tanto, $q = m(q, p) = p$ y X_e se reduce a un punto.

Sea ahora (X, e) cualquier H-espacio finito y $h : X \rightarrow M$ una equivalencia de homotopía donde M es minimal. También $(M, h(e))$ tiene estructura de H-espacio por el Lema 5.3.1 y por ello la componente de $h(e)$, $M_{h(e)}$, se reduce a $\{h(e)\}$. Como h es una equivalencia de homotopía define una biyección entre componentes $C_x \longleftrightarrow C_{h(x)}$ y además una equivalencia de homotopía entre $C_x \simeq C_{h(x)}$. En particular, $X_e \simeq M_{h(e)}$, llegándose así al resultado deseado. \square

Corolario 5.3.1. Todo H-espacio finito conexo es contráctil.

Nota 5.3.2. La proposición anterior sólo garantiza la contractibilidad de la componente X_e . Por ejemplo, si $X = Y \sqcup \{e\}$ es la unión disjunta donde Y es cualquier espacio finito, se puede definir sobre X la estructura de H-espacio siguiente: $m(e, e) = e$, $m(y, e) = m(e, y) = y$ para todo $y \in Y$ y $m(y, y') = y$ para $y, y' \in Y$.

Un resultado más fuerte que permite llegar a que todas las componentes son contráctiles cuando el H-espacio no es conexo se consigue exigiendo al H-espacio los análogos homotópicos de las otras dos propiedades de un grupo, esto es, asociatividad y existencia de inverso.

Así, se dice que un H-espacio es *asociativo* si las composiciones

$$m \circ (m \times id) : (X \times X) \times X \rightarrow X \times X \rightarrow X \text{ y } m \circ (id \times m) : X \times (X \times X) \rightarrow X \times X \rightarrow X$$

son homotópicas.

Se dice que el H-espacio admite *inverso homotópico a la izquierda* si existe una aplicación continua $l : X \times X$ tal que para la diagonal $\Delta : X \rightarrow X \times X$, $\Delta(x) = (x, x)$, la composición

$$m \circ (l \times id) \circ \Delta : X \rightarrow X \times X \rightarrow X \times X \rightarrow X$$

es homotópica a la constante $c_e(x) = e$. Análogamente se define *inverso homotópico a la derecha* como una aplicación continua $r : X \rightarrow X$ para la cual la composición

$$m \circ (id \times r) \circ \Delta : X \rightarrow X \times X \rightarrow X \times X \rightarrow X$$

es homotópica a c_e .

Nota 5.3.3. En el ejemplo visto en la 5.3.1, un lazo $\alpha(t)$ de $\Omega(X, x_0)$ tiene como inverso homotópico el lazo $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$.

Stong probó en [16] el siguiente resultado.

Teorema 5.3.1. Cualquier H -espacio finito asociativo que admite inversos homotópicos a izquierda y derecha tiene todas sus componentes conexas contráctiles. Esto es, los únicos (salvo equivalencia de homotopía) H -espacios finitos en las condiciones anteriores son los espacios discretos.

Capítulo 6

A-modelos de las aplicaciones de Hopf y cuadrado de Whitehead

En este capítulo estudiaremos cómo obtener un A-modelo de la aplicación de Hopf y del cuadrado de Whitehead, los cuales fueron publicados en [7] y en [8].

6.1. A-Modelo de la aplicación de Hopf

La definición por Hopf en 1931 de la aplicación que lleva su nombre (la definición original de Hopf se diferencia de la que sigue en una reordenación de coordenadas)

$$h : S^3 \rightarrow S^2, \quad h(a, b, c, d) = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2, 2(ad + bc), 2(bd - ac)),$$

marcó el inicio de lo que hoy se conoce como teoría de homotopía.

Las importantes propiedades geométricas y algebraicas de la aplicación de Hopf se estudian en varias áreas de las matemáticas y se aplican en física teórica ([18]).

En teoría de homotopía la aplicación de Hopf es un caso particular de la llamada construcción de Hopf, que se define como sigue.

Definición 6.1.1. Sean X , Y y Z espacios topológicos y $f : X \times Y \rightarrow Z$ una aplicación continua. Se llama *construcción de Hopf de f* a la aplicación

$$h_f : X * Y = CX \times Y \cup X \times CY \rightarrow SZ$$

dada por

$$h_f([x, t], y) = [f(x, y), \frac{1+t}{2}] \text{ y } h_f(x, [y, s]) = [f(x, y), \frac{1-s}{2}].$$

Si se usa la definición alternativa de join $X *_w Y = (X \sqcup X \times Y \times I \sqcup Y) / \sim$ vista en 4.3.1, entonces h_f queda definida simplemente por $h_f([x, y, t]) = [f(x, y), t]$.

La aplicación de Hopf aparece (salvo homotopía, ver XI.4. Ejemplo 1 en [19]) como la construcción de Hopf de $f : S^1 \rightarrow S^1$ la multiplicación de números complejos unitarios. Si consideramos $f : S^3 \rightarrow S^3$ la multiplicación cuaterniónica aparece la aplicación de Hopf $h_f : S^3 * S^3 \cong S^7 \rightarrow S^4 \cong S(S^3)$.

La siguiente definición es una réplica en la clase de los A-espacios de la construcción de Hopf.

Definición 6.1.2. Sean X, Y y Z A -espacios y $f : X \times Y \rightarrow Z$ una aplicación continua. Se define la *construcción de Hopf no Hausdorff de f* como la aplicación $h_f : X \otimes Y \rightarrow \mathbb{S}Z$ dada por:

$$h_f(x, y) = f(x, y), \text{ si } (x, y) \in X \times Y, \quad h_f(\hat{x}, y) = \hat{n} \text{ y } h_f(x, \hat{y}) = \hat{s},$$

siendo \hat{x}, \hat{y} los máximos de $\mathbb{C}X$ y $\mathbb{C}Y$, respectivamente, y \hat{n}, \hat{s} los elementos máximos de $\mathbb{S}Z$.

Queremos ver la compatibilidad de los A -modelos finitos con la construcción de Hopf. Para ello usaremos los siguientes lemas.

Lema 6.1.1. Sean X, Y, Z espacios finitos y $f : X \times Y \rightarrow Z$ continua. Entonces

$$\mathcal{K}(h_f) : \mathcal{K}(X \otimes Y) \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{S}Z) = S\mathcal{K}(X)$$

es homotópica a la construcción de Hopf de $\mathcal{K}(f)$:

$$h_{\mathcal{K}(f)} : |\mathcal{K}(X * Y)| = C|\mathcal{K}(X)| \times |\mathcal{K}(Y)| \cup |\mathcal{K}(X)| \times C|\mathcal{K}(Y)| \rightarrow S|\mathcal{K}(Z)| = |\mathcal{K}(\mathbb{S}Z)|.$$

Demostración. Bastará probar que para todo $x \in |\mathcal{K}(X \otimes Y)|$ hay un segmento uniendo $\mathcal{K}(h_f)(x)$ y $h_{\mathcal{K}(f)}(x)$ totalmente contenido en $S|\mathcal{K}(Z)| = |\mathcal{K}(\mathbb{S}Z)|$. Así tendremos definida la homotopía lineal $H(x, t) = (1 - t)\mathcal{K}(h_f)(x) + th_{\mathcal{K}(f)}(x)$.

Para ello observamos que $\mathcal{K}(X \otimes Y) = \mathcal{K}(\mathbb{C}X \times Y) \cup \mathcal{K}(X \times \mathbb{C}Y)$ es un subcomplejo simplicial de $\mathcal{K}(\mathbb{C}X \times \mathbb{C}Y)$ cuyos vértices son pares $v_i = (p_i, q_i) \in \mathbb{C}X \times \mathbb{C}Y - \{c_X, c_Y\}$ y un símlice $\sigma = (v_1, \dots, v_s)$ corresponde a una cadena A_σ en $\mathbb{C}X \times \mathbb{C}Y$. Nótese que en A_σ pueden aparecer algunos p_i o q_i repetidos.

Si $x \in \sigma$, podemos suponer que algunos p_i son c_X ya que $v_s = (p_s, q_s) \leq (c_X, q_s) = v_{s+1}$ y reemplazamos σ por $\sigma' = (v_1, \dots, v_s, v_{s+1})$. Por simplicidad supongamos que $p_1 = \dots = p_m = c_X$.

Como $x = \sum_{i=1}^s \lambda_i v_i$ con λ_i coordenadas baricéntricas ($\sum_{i=1}^s \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \geq 0$), por ser $\mathcal{K}(h_f)$ simplicial y la definición de h_f , tenemos

$$\mathcal{K}(h_f)(x) = \sum_{i=1}^s \lambda_i h_f(p_i, q_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f(c_X, q_i) + \sum_{i=m+1}^s \lambda_i f(p_i, q_i) = \lambda \hat{n} + (1 - \lambda)y,$$

donde $\lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i$ e $y = \sum_{i=m+1}^s \frac{\lambda_i}{1-\lambda} f(p_i, q_i)$. Así y es un punto del símlice $\gamma \in \mathcal{K}(Z)$ de vértices $f(p_i, q_i)$ ($m+1 \leq i \leq s$). Esto es, $\mathcal{K}(h_f)(x)$ está en el símlice $\hat{n}\gamma$ del cono superior de $S\mathcal{K}(Z)$.

Por otro lado, sabemos que si $\mathcal{K}(X)$ es un complejo simplicial en \mathbb{R}^n el cono topológico $C|\mathcal{K}(X)|$ es homeomorfo al cono geométrico ($a \in \mathbb{R}^{n+1} - \mathbb{R}^n$)

$$a|\mathcal{K}(X)| = \{(1 - \varepsilon)z + ta; z \in |\mathcal{K}(X)|\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1},$$

que lleva $[z, t]$ en $(1 - t)z + ta$. En particular la clase $[z, 1]$ se identifica con el vértice a .

Ahora observamos que $x = (x_1, x_2) \in \tau_1 \times \tau_2$ para los símlices de $\mathcal{K}(\mathbb{C}X)$ y $\mathcal{K}(\mathbb{C}Y)$ $\tau_1 = (p_1, \dots, p_s)$ y $\tau_2 = (q_1, \dots, q_s)$. Así pues, en coordenadas baricéntricas,

$$x_1 = \left(\sum_{i=1}^m \nu_i \right) c_X + \sum_{i=m+1}^s \nu_i p_i = \nu c_X + (1 - \nu)p \text{ y } x_2 = \sum_{i=1}^s \beta_i q_i,$$

donde $\nu = \sum_{i=1}^m \nu_i$ y $p = \sum_{i=m+1}^s \frac{\nu_i}{1-\nu} p_i$.

Con la identificación de conos de más arriba, x se escribe como el par $([p, \nu], x_2) \in C|\mathcal{K}(X)| \times |\mathcal{K}(Y)|$, y

$$h_{\mathcal{K}(f)}(x) = [\mathcal{K}(f)(p, x_2), \frac{1+\nu}{2}] \in |\mathcal{K}(\mathbb{S}Z)| = S|\mathcal{K}(Z)|.$$

Si tomamos el símlice $\tau'_1 = (p_{m+1}, \dots, p_s)$ y $A_{\tau'_1}$ y A_{τ_2} denotan las cadenas en X e Y correspondientes a estos símlices, tenemos que $(p, x_2) \in |\mathcal{K}(A_{\tau'_1})| \times |\mathcal{K}(A_{\tau_2})| = |\mathcal{K}(A_{\tau'_1} \times A_{\tau_2})|$ y por tanto (p, x_2) pertenece a un símlice ρ asociado a una cadena en $A_{\tau'_1} \times A_{\tau_2}$, $(p_{j_1}, q_{k_1}), \dots, (p_{j_i}, q_{k_i})$, con $j_i \in \{m+1, s\}$ y $k_i \in \{1, \dots, s\}$. Entonces por la definición de $\mathcal{K}(f)$ y ser esta aplicación simplicial se sigue que $\mathcal{K}(f)(p, x_2)$ está en el símlice $\gamma_1 \in \mathcal{K}(\mathbb{S}Z)$ de vértices $f(p_{j_i}, q_{k_i})$.

De nuevo usando la identificación de conos se llega a que $h_{\mathcal{K}(f)}(x)$ está en el símlice $\widehat{n}\gamma_1$, que es cara de $\widehat{n}\gamma$ y así $h_{\mathcal{K}(f)}(x), \mathcal{K}(h_f)(x) \in \widehat{n}\gamma$. La convexidad de este símlice concluye la demostración ya que el caso en que $p_i = c_Y$ para algún i es completamente análogo al anterior. \square

Lema 6.1.2. Sea X un espacio compacto y \mathcal{R} una relación de equivalencia tal que el espacio cociente X/\mathcal{R} es Hausdorff. Si se define la relación de equivalencia \mathcal{R}' sobre $X \times I$ por $(x, t)\mathcal{R}'(y, s)$ si $x\mathcal{R}y$ y $t = s$, entonces la aplicación $\psi : X \times I \rightarrow (X/\mathcal{R}) \times I$ dada por $\psi(x, t) = ([x], t)$ induce un homeomorfismo $\widetilde{\psi} : (X \times I)/\mathcal{R}' \rightarrow (X/\mathcal{R}) \times I$.

Demostración. La relación de equivalencia definida por ψ es justamente \mathcal{R}' , por lo que la aplicación inducida $\widetilde{\psi} : (X \times I)/\mathcal{R}' \rightarrow (X/\mathcal{R}) \times I$ es una biyección continua. Por la hipótesis, el espacio origen es compacto y el de llegada es Hausdorff, por lo que $\widetilde{\psi}$ es un homeomorfismo. \square

Lema 6.1.3. Sean X, Y y Z espacios topológicos tales que X e Y son compactos y Z es Hausdorff. Dadas dos aplicaciones homotópicas $f, g : X \times Y \rightarrow Z$, sus construcciones de Hopf h_f y h_g también son homotópicas.

Demostración. Sea $H : X \times Y \times I \rightarrow Z$ una homotopía entre f y g . Usaremos la definición alternativa de la construcción de Hopf

$$h_f, h_g : X * Y = X \times Y \times I / \sim \rightarrow Z,$$

y definimos la aplicación

$$F : (X \times Y \times I) \times I \rightarrow Z \times I, \quad F(x, y, t, s) = (H(x, y, s), t),$$

que obviamente es continua. Sea la composición de F con la proyección $\pi : Z \times I \rightarrow SZ$,

$$G = \pi \circ F : (X \times Y \times I) \times I \rightarrow Z.$$

Si $\mathcal{R} = \sim$ la relación sobre $X \times Y \times I$ que define $X * Y$ y \mathcal{R}' la relación dada en el Lema 6.1.2, es inmediato comprobar que G es compatible con la relación \mathcal{R}' por lo que G induce una aplicación continua $\widetilde{G} : (X \times Y \times I) \times I / \mathcal{R}' \rightarrow SZ$. Entonces la composición de \widetilde{G} con el homeomorfismo del Lema 6.1.2 nos da una homotopía entre h_f y h_g

$$\widetilde{H} = \widetilde{G} \circ \psi : (X * Y) \times I = ((X \times Y \times I)/\mathcal{R}) \times I \cong (X \times Y \times I \times I)/\mathcal{R}' \rightarrow SZ$$

definida como $\widetilde{H}([x, y, t], s) = [H(x, y, s), t]$. \square

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente resultado.

Teorema 6.1.1. Sean X_1, X_2 e Y espacios finitos y sea $g : |\mathcal{K}(X_1)| \times |\mathcal{K}(X_2)| \rightarrow |\mathcal{K}(Y)|$ una aplicación continua tal que existe una $f : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ continua tal que $\mathcal{K}(f) \simeq g$ (en particular f es un A-modelo de g). Entonces la construcción no Hausdorff de f es un A-modelo de la construcción de Hopf de g .

Demostración. En efecto, aplicando el Lemma 6.1.1, tenemos que $\mathcal{K}(h_f) \simeq h_{\mathcal{K}(f)}$ y por el Lema 6.1.3, $h_{\mathcal{K}(f)} \simeq h_g$. \square

Corolario 6.1.1. Si μ es el A-modelo de la multiplicación compleja en la Proposición 5.2.1, la construcción no Hausdorff de Hopf h_μ es un A-modelo de la aplicación de Hopf.

Demostración. Ya vimos en la demostración de la Proposición 5.2.1 que identificando $|\mathcal{K}(sd_\chi^1 \Sigma^1)|$ con S^1 por el homeomorfismo $x \mapsto x/\|x\|$, la multiplicación m leída en $|\mathcal{K}(sd_\chi^1 \Sigma^1)|$ es homotópica a la aplicación μ . El resultado sigue ahora directamente del Teorema 6.1.1. \square

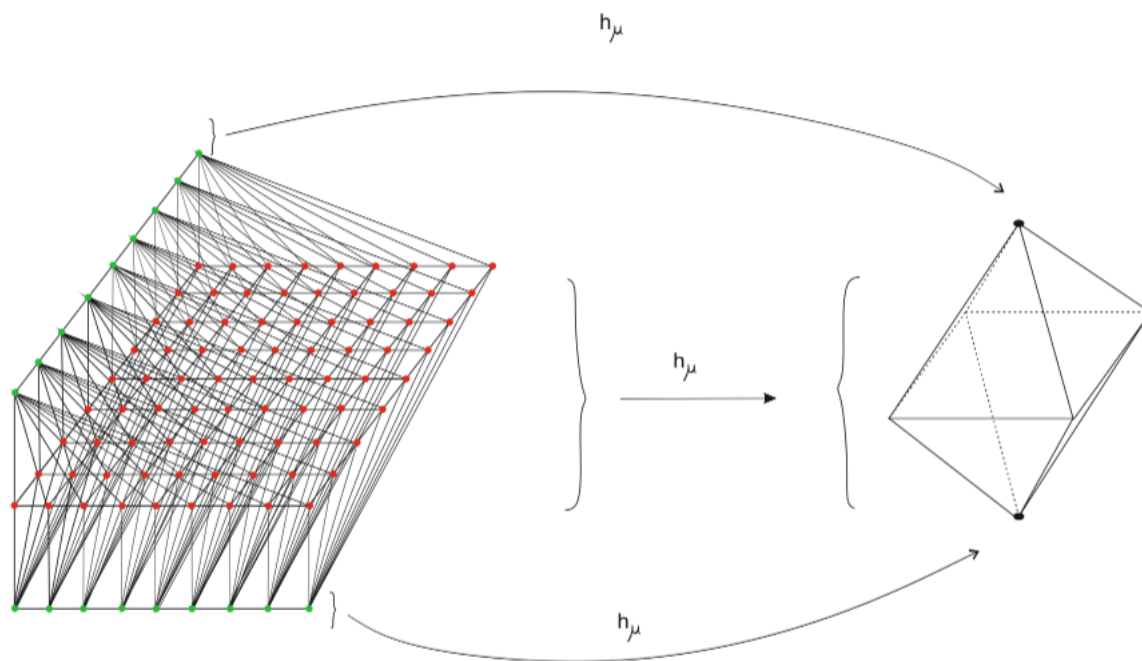


Figura 6.1: Representación gráfica del modelo finito de la aplicación de Hopf

Para representar gráficamente la aplicación de Hopf y sus fibras (preimágenes de puntos), se suele representar S^3 como \mathbb{R}^3 y el punto del infinito ∞ . Ahora la descripción de la descomposición de S^3 en dos toros macizos es fácil, se toma un primer toro macizo T_1 con su circunferencia guía la circunferencia unidad en el plano OXY y el segundo toro macizo T_2 tiene su circunferencia guía la formada al añadir ∞ al eje OZ y hacer que su superficie exterior sea la misma que la T_1 , quedando así los paralelos (circunferencias trasladadas de la circunferencia guía) de T_1 identificados con los meridianos (circunferencias que bordean los discos transversales a la circunferencia guía) de T_2 . Ver Figura 6.1

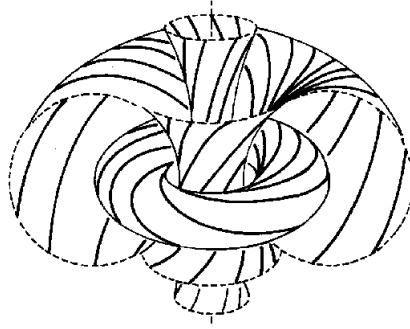


Figura 6.2: Fibración de Hopf en el caso continuo.

Ahora la fibra de un punto del hemisferio norte de S^2 es un paralelo de T_1 , siendo la fibra del polo norte exactamente la guía de T_1 . Análogamente con el hemisferio sur y el toro T_2 . De esta forma las fibras de los puntos del ecuador forman la superficie tórica que es la intersección $T_1 \cap T_2$.

Para el caso finito que hemos estudiado en este trabajo, podemos establecer una analogía: si nos fijamos en la aplicación μ , vemos que actúa como en el caso continuo, pues las circunferencias $\{*\} \times sd_{\mathcal{X}}^1(\Sigma^1)$ ejercen el papel de las circunferencias guía. A su vez, el papel de superficie tórica de contacto lo representa el toro $sd_{\mathcal{X}}^1(\Sigma^1) \times sd_{\mathcal{X}}^1(\Sigma^1)$, pues su imagen por la construcción de Hopf finita es el ecuador de Σ^2 . También podemos visualizar las circunferencias que son las fibras de los puntos del ecuador como indicamos en la Figura 6.3. Cada punto de Σ^2 tiene como preimagen una circunferencia de 16 puntos. Así la fibra de cada punto de Σ^2 es una circunferencia de 16 puntos.

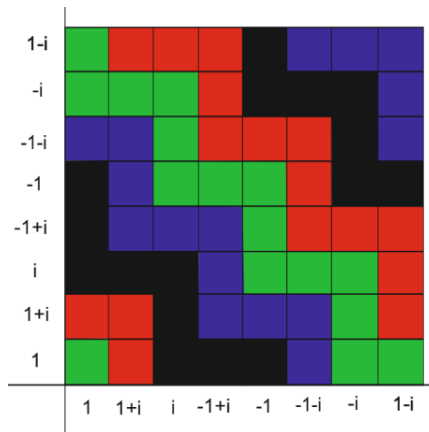


Figura 6.3: Fibras de los puntos del ecuador. Cada color representa una circunferencia de 16 puntos.

6.2. A-modelo del cuadrado de Whitehead

La propiedad que despertó el interés por la aplicación de Hopf en topología algebraica fue el hecho de que representa un generador del tercer grupo de homotopía de S^2 , $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$.

A partir de este resultado se inició el cálculo de los grupos de homotopía de las esferas. Se tiene que $\pi_i(S^n) = 0$ si $i < n$ y $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$. Para $i > n$, Serre probó en 1951 que $\pi_i(S^n)$ es un grupo finito para $i > n$ salvo $\pi_{4k-1}(S^{2k})$, que es la suma directa de \mathbb{Z} y un grupo finito. Aún no se conocen todos los grupos de homotopía de las esferas.

Recordemos que, dado un espacio X con un punto distinguido $x_0 \in X$ y el n -cubo I^n con borde ∂I^n , los elementos del grupo $\pi_n(X, x_0)$ ($n \geq 1$) son las clases de homotopía relativa a ∂I^n de aplicaciones $\alpha : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ (llamadas n -lazos). La operación de grupo viene dada por $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$, donde

$$(\alpha * \beta)(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \alpha(2x_1, x_2, \dots, x_n) & 0 \leq x_1 \leq 1/2 \\ \beta(2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n) & 1/2 \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

es la yuxtaposición de n -lazos. Ver [9] para comprobar que esta definición define una estructura de grupo (abeliano si $n \geq 2$). Para $n = 1$ tenemos la definición del grupo fundamental de Poincaré (no abeliano en general) que se estudia en la asignatura Geometría y Topología de Superficies del Grado en Matemáticas.

Obsérvese que mediante homeomorfismos adecuados entre B^n e I^n , podemos ver los n -lazos como aplicaciones $\alpha : (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$ y la yuxtaposición de n -lazos α, β por la aplicación inducida por α y β en la bola obtenida al identificar el hemisferio sur de la bola de α con el hemisferio norte de la bola de β . Ver Figura 6.4.

Igualmente, todo n -lazo definido por $\alpha : (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$ define y está definido por la aplicación $\tilde{\alpha} : (S^n, p_0) \rightarrow (X, x_0)$ resultante al identificar todo S^{n-1} a punto. De esta manera un n -lazo se puede ver alternativamente como una aplicación de (S^n, p_0) en (X, x_0) y la yuxtaposición de n -lazos $\alpha, \beta : (S^n, p_0) \rightarrow (X, x_0)$ es entonces la composición

$$(\alpha \vee \beta) \circ \mu,$$

donde $S^n \vee S^n$ es la unión de dos copias de S^n por p_0 y $\eta : S^n \rightarrow S^n \vee S^n$ lleva $S^{n-1} \subseteq S^n$ a p_0 y cada hemisferio de S^n a una copia de S^n en $S^n \vee S^n$. Ver Figura 6.4.

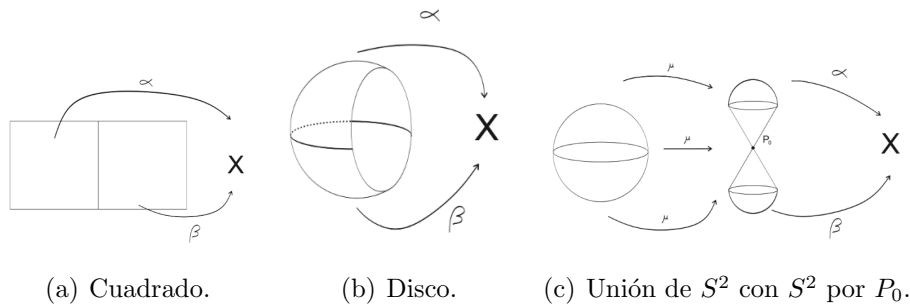


Figura 6.4: n -lazos vistos de distintas formas.

El producto de Whitehead es una operación entre grupos de homotopía definida como sigue.

Definición 6.2.1. Dados los elementos de $a \in \pi_n(Y, y_0)$ y $b \in \pi_m(Y, y_0)$ representados por los n -lazos $\alpha : (B^m, S^{m-1}) \rightarrow (Y, y_0)$ y $\beta : (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (Y, y_0)$,

consideramos la aplicación

$$f : S^{m+n-1} = S^{m-1} * S^{n-1} = B^m \times S^{n-1} \cup S^{m-1} \times B^n \rightarrow Y,$$

dada por $f(z, w) = \alpha(z)$ en $B^m \times S^{n-1}$ y $f(z, w) = \beta(w)$ en $S^{m-1} \times B^n$. Nótese que f está bien definida, pues la restricción a $S^{m-1} \times S^{n-1}$ es la constante y_0 . Aquí los conos de S^{m-1} y S^{n-1} se identifican con las correspondientes bolas B^m y B^n . Si tomamos un punto $p_0 \in S^{m-1} \times S^{n-1}$, el elemento de $\pi_{m+n-1}(Y, y_0)$ representado por $f : (S^{m+n-1}, p_0) \rightarrow (Y, y_0)$ y denotado $[a, b]$ es el llamado *producto de Whitehead* de a y b .

Ver [19] para los detalles y las propiedades del producto de Whitehead.

El *cuadrado de Whitehead* es el elemento de $\pi_3(S^2)$ definido como el producto de Whitehead $[\iota_2, \iota_2]$ donde ι_2 es el generador de $\pi_2(S^2)$ representado por la identidad de S^2 . Se tiene que $[\iota_2, \iota_2]$ es el doble (salvo signo) del generador de $\pi_3(S^2)$ representado por la aplicación de Hopf (ver XI Teorema 2.5 [19]).

Terminamos este trabajo describiendo el A-modelo del cuadrado de Whitehead dado en [8]. Para ello consideramos el cono con tres niveles del A-modelo mínimo de S^1 , $\mathbb{C}_0^2 \Sigma^1 = \mathbb{I}_0^1 \Sigma^1 \cup \{*\}$; ver Definición 4.3.1.

Obsérvese que existe una aplicación natural

$$g : \mathbb{C}_0^2 \Sigma^1 \rightarrow \Sigma^2 \tag{6.1}$$

que lleva el elemento maximal en un elemento maximal de Σ^2 (denotado por j en la Figura 6.5), la copia $\Sigma^1 \times \{1\}$ en Σ^1 por la identidad y la copia $\Sigma^1 \times \{0\}$ en el otro elemento maximal de Σ^2 (es decir, $-j$).

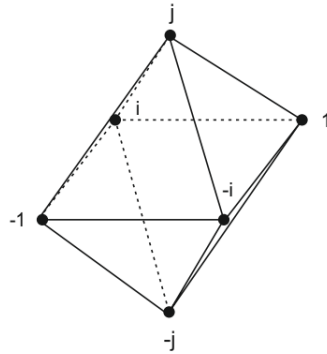
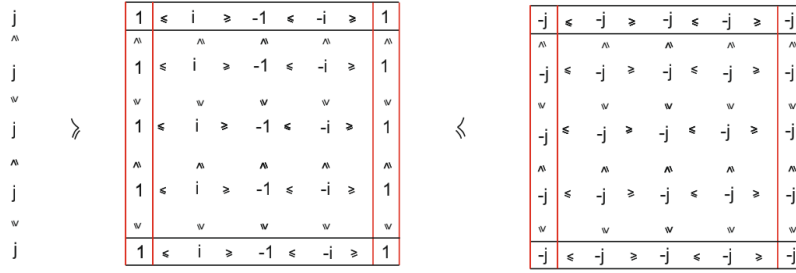


Figura 6.5: Suspensión de Σ^1 .

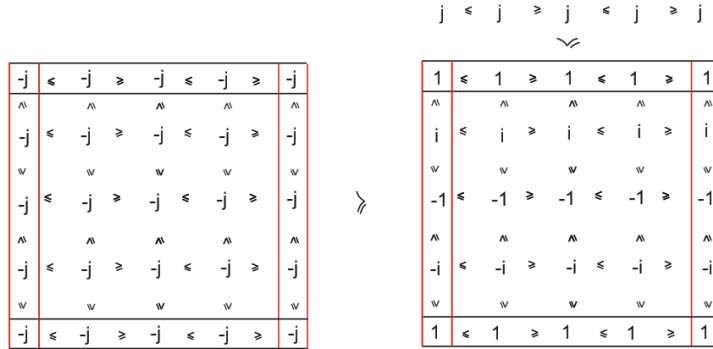
Para el correspondiente join

$$\Sigma^1 \otimes_0^1 \Sigma^1 = (\mathbb{C}_0^2 \Sigma^1) \times \Sigma^1 \cup \Sigma^1 \times (\mathbb{C}_0^2 \Sigma^1)$$

se define la aplicación $f : \Sigma^1 \otimes_0^1 \Sigma^1 \rightarrow \Sigma^2$ dada por el diagrama en la Figura 6.6, donde j y $-j$ indica los elementos maximales de $\Sigma^2 = \mathbb{S}(\Sigma^1)$ y los números indican las imágenes de los elementos del join con la representación de números complejos indicada en la Nota 5.2.3.



(a) Imagen de $(\mathbb{C}_0^2 \Sigma^1) \times \Sigma^1$.



(b) Imagen de $\Sigma^1 \times (\mathbb{C}_0^2 \Sigma^1)$.

Figura 6.6: Modelo del cuadrado de Whitehead.

Teorema 6.2.1. La aplicación $f : \Sigma^1 \otimes_0^1 \Sigma^1 \longrightarrow \Sigma^2$ es un A-modelo del cuadrado de Whitehead en $\pi_3(S^2)$.

En la demostración del Teorema 6.2.1 usaremos el siguiente lema.

Lema 6.2.1. La aplicación $g : \mathbb{C}_0^2 \Sigma^1 \rightarrow \Sigma^2$ definida en 6.1 es un A-modelo de la proyección natural $\pi : CS^1 \rightarrow S(S^1)$ dada por $\pi([x, t]_c) = [x, t]_s$. Aquí los subíndices denotan el espacio cociente al que pertenecen las clases.

Demostración. Empecemos indicando que

$$|\mathcal{K}(\mathbb{C}_0^2 \Sigma^1)| = |\mathcal{K}(\mathbb{C} \Sigma^1) \cup \mathcal{K}(\Sigma^1 \times \{0, 1\})| = C|\mathcal{K}(\Sigma^1)| \cup |\mathcal{K}(\Sigma^1)| \times I$$

se identifica de manera clara con el cono sobre $|\mathcal{K}(\Sigma^1)|$ de altura 2, denotado por $C_2|\mathcal{K}(\Sigma^1)|$. Igualmente, para simplificar la notación identificaremos $|\mathcal{K}(\Sigma^2)|$ con la suspensión de altura 2 $S_2|\mathcal{K}(\Sigma^1)|$.

Sea $h : |\mathcal{K}(\Sigma^1)| \rightarrow S^1$ el homeomorfismo habitual $h(x) = x/\|x\|$ y sean $h_1 : C_2|\mathcal{K}(\Sigma^1)| \rightarrow C(S^1)$ y $h_2 : S_2(|\mathcal{K}(\Sigma^1)|) \rightarrow S(S^1)$ los homeomorfismos inducidos $h_1([x, t]_c) = [h(x), t/2]_c$ y $h_2([x, t]_s) = [h(x), t/2]$. Afirmamos que el diagrama siguiente es conmutativo salvo homotopía lo que probará el lema.

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{K}(\mathbb{C}_0^2 \Sigma^1)| = C_2|\mathcal{K}(\Sigma^1)| & \xrightarrow{\mathcal{K}(g)} & |\mathcal{K}(\Sigma^2)| = S_2|\mathcal{K}(\Sigma^1)| \\ h_1 \downarrow & & \downarrow h_2 \\ CS^1 & \xrightarrow{\pi} & S(S^1) \end{array}$$

La afirmación anterior equivale a probar que $\mathcal{K}(g)$ es homotópica a la composición $\bar{\pi} = h_2^{-1} \circ \pi \circ h_1$. Sobre $|\mathcal{K}(\mathbb{C}(\Sigma^1))|$ se tiene directamente la igualdad.

Ahora si $(y, s) \in |\mathcal{K}(\Sigma^1)| \times I$, esto es, si visto en el cono $C_2|\mathcal{K}(\Sigma^1)|$ (y, s) está entre los niveles 0 y 1, $\bar{\pi}(y, s)$ está situado en un segmento desde el polo sur a y .

Por otro lado, sea (a, b) un 1-símplice de $\mathcal{K}(\Sigma^1)$ conteniendo a y . Supongamos $a < b$ (el otro caso es análogo). Por definición de $\mathcal{K}(\Sigma^1 \times \{0, 1\})$, que es una triangulación del cilindro $|\mathcal{K}(\Sigma^1)| \times I$, tenemos que el punto (y, s) está en dos posibles triángulos de $\mathcal{K}(\Sigma^1 \times \{0, 1\})$: (v_1, v_2, v_3) o (w_1, w_2, w_3) , donde $v_1 = (a, 1)$, $v_2 = (b, 1)$, $v_3 = (b, 0)$ y $w_1 = (a, 1)$, $w_2 = (a, 0)$, $w_3 = (b, 0)$, ya que todo triángulo corresponde a una cadena de tres elementos.

Por ser $\mathcal{K}(g)$ simplicial, si $(y, s) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i v_i$, entonces $\mathcal{K}(g)(y, s) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i f(v_i)$ es un punto del triángulo de vértices v_1 , v_2 y el polo sur de la suspensión. Análogamente, en el segundo caso $\mathcal{K}(g)(y, s)$ está en la arista que une $(a, 1)$ con el polo sur.

En ambos casos, tenemos que $\bar{\pi}(y, s)$ y $\mathcal{K}(g)(y, s)$ están en un mismo símlice y el segmento que los une está en $S_2|\mathcal{K}(\Sigma^1)|$. Esto hace que la aplicación $H(y, s, t) = (1-t)\bar{\pi}(y, s) + t\mathcal{K}(g)(y, s)$ esté bien definida y da una homotopía entre $\bar{\pi}$ y $\mathcal{K}(g)$ sobre $|\mathcal{K}| \times I$.

Obsérvese que esta homotopía se extiende a todo $C_2|\mathcal{K}(\Sigma^1)|$ por la homotopía constante, ya que $\bar{\pi}$ y $\mathcal{K}(g)$ coinciden en los puntos de la forma $(y, 1)$. Nótese además que esta homotopía es constantemente el polo sur en el nivel 0 de $C_2|\mathcal{K}(\Sigma^1)|$. \square

Demostración. (del Teorema 6.2.1) En primer lugar, es fácil ver la continuidad, pues como se puede comprobar en la figura, las imágenes respetan el orden al aplicar f .

Para ver que es un modelo finito del producto de Whitehead, recordemos en primer lugar el siguiente hecho: si ψ es el homeomorfismo $B^2 \cong CS^1$, $x \mapsto [x, 1 - \|x\|]$, y $h : S(S^1) \rightarrow S^2$ es el homeomorfismo habitual $z \mapsto z/\|z\|$, entonces, si π es la proyección del Lema 6.2.1, la composición

$$h \circ \pi \circ \psi^{-1} : (B^2, S^1) \rightarrow (S^2, p_0),$$

con p_0 el polo sur, es un representante de la clase de la identidad ι_2 . Esto nos permite suponer, salvo homeomorfismo, que $[\iota_2, \iota_2]$ está representado por la aplicación

$$[\pi, \pi] : S^1 * S^1 = CS^1 \times S^1 \cup S^1 \times CS^1 \rightarrow S(S^1)$$

dada por $[\pi, \pi]([x, t]_c, y) = \pi([x, t]_c) = [x, t]_s$ y $[\pi, \pi](x, [y, s]_c) = \pi([y, s]_c) = [y, s]_s$. Como anteriormente, los subíndices denotan si la clase es del cono o la suspensión.

Si hacemos una definición análoga con la aplicación $g : \mathbb{C}_0^2\Sigma^1 \rightarrow \Sigma^1$ del Lema 6.2.1 tenemos

$$[g, g] : \Sigma^1 \otimes_0^1 \Sigma^1 = \mathbb{C}_0^2\Sigma^1 \times \Sigma^1 \cup \Sigma^1 \times \mathbb{C}_0^2\Sigma^1 \rightarrow \mathbb{S}(\Sigma^1)$$

que lleva $((*, x), y)$ y $(x, (*), y)$ en el polo norte de $\mathbb{S}(\Sigma^1)$, $((a, 1), y)$ y $(x, (a, 1))$ en a y $((a, 0), y)$ y $(x, (a, 0))$ en el polo sur. Esto es, $f = [g, g]$. Mediante una comprobación directa a partir de las definiciones se llega a que

$$\mathcal{K}(f) = [\mathcal{K}(g), \mathcal{K}(g)] : |\mathcal{K}(\Sigma^1 \otimes_0^1 \Sigma^1)| = C_2|\mathcal{K}(\Sigma^1)| \times |\mathcal{K}(\Sigma^1)| \cup |\mathcal{K}(\Sigma^1)| \times C_2|\mathcal{K}(\Sigma^1)| \rightarrow S_2|\mathcal{K}(\Sigma^1)|.$$

Terminamos la demostración comprobando que un diagrama análogo al del Lema 6.2.1 (donde h'_1 y h'_2 son las extensiones naturales de los homeomorfismos en aquel diagrama)

$$\begin{array}{ccc}
|\mathcal{K}(\Sigma^1 \otimes_0^1 \Sigma^1)| & \xrightarrow{\mathcal{K}(f)} & S_2 |\mathcal{K}(\Sigma^1)| \\
h'_1 \downarrow & & \downarrow h'_2 \\
CS^1 & \xrightarrow{[\pi, \pi]} & S(S^1)
\end{array}$$

es conmutativo salvo homotopía.

En efecto, si H es la homotopía entre $\mathcal{K}(g)$ y la composición $\bar{\pi}$ obtenida en la demostración del Lema 6.2.1, definimos una homotopía \tilde{H} entre $\mathcal{K}(f) = [\mathcal{K}(g), \mathcal{K}(g)]$ y $h'_2 \circ [\pi, \pi] \circ h'_1$ tomando $\tilde{H}([x, t_1]_c, y, t_2) = H([x, t_1]_c, t_2)$ y $\tilde{H}((x, [y, t_1]_c), t_2) = H([y, t_1]_c, t_2)$.

La buena definición de \tilde{H} sigue de que H es constantemente el polo sur en todos los puntos de la base del cono. Es inmediato comprobar que la homotopía deseada es \tilde{H} . \square

Concluimos comentando cómo se pueden visualizar las fibras sobre los puntos de Σ^2 : Si volvemos a la representación de S^3 como unión de dos toros macizos, estos toros se corresponden en el modelo finito con los productos cuya unión forman $\Sigma^1 \otimes \Sigma^1$ y así cada toro macizo finito está formado por la circunferencia guía y dos superficies tóricas, una de ellas común. La fibra del polo norte es justamente las dos circunferencias guía de 4 puntos y la fibra del polo sur es la superficie tórica de 16 puntos compartida por los dos toros macizos. Obsérvese también que las fibras de los puntos del ecuador de Σ^2 , $\pm 1, \pm i$, son pares de circunferencias de 4 puntos entrelazadas ya que cada una de ellas es un paralelo de un toro macizo.

Bibliografía

- [1] P.S. Alexandroff. Diskrete Räume. *Math. Sbornik*, 2(1937), 501–519.
- [2] J.A. Barmak. *Algebraic topology of finite topological spaces and applications*, Lecture Notes Math., vol. 2032. Springer, 2011.
- [3] A.M. Cumplido. *La noción de homotopía para espacios finitos y espacios de Alexandrov*. Trabajo Fin de Grado(2022). Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla.
- [4] O. Fröhlich. Das Halbordnungssystem der topologischen Räume auf einer Menge. *Mathematische Annalen*, 156(1964) 79–95.
- [5] M. Gandul. *La curva de Hilbert y otras curvas que rellenan áreas o volúmenes*. Trabajo Fin de Grado (2019). Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla.
- [6] K.A. Hardie, J.J.C. Vermeulen. Homotopy theory of finite and locally finite T_0 spaces. *Expo. Math.*, 11(1993), 331–341.
- [7] K.A. Hardie, J.J.C. Vermeulen, P.J. Witbooi. A nontrivial pairing of finite T_0 spaces. *Topology and its Applications*, 125(2022), 533–542.
- [8] K.A. Hardie, P.J. Witbooi. The Whitehead square of the 6-point 2-sphere. *Quaestiones Mathematicae*, 29(2006), 1–7.
- [9] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [10] E. Khalimsky, R.D. Kopperman, P.R. Meyer. Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets. *Topology and its Applications*, 36(1990), 1-17.
- [11] A. Luque. *Espacios de Alexandrov: el puente entre poliedros y conjuntos ordenados*. Trabajo Fin de Grado (2014). Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla.
- [12] J.P. May. Finite topological spaces. Notes for REU, 2003. <http://www.math.uchicago.edu/~may/MISC/FiniteSpaces.pdf>.
- [13] J.P. May. *Finite spaces and larger contexts. Preliminary draft submitted to the AMS*, 2016. <http://https://math.uchicago.edu/~may/FINITE/FINITEBOOK/FINITEBOOKCollatedDraft.pdf>.
- [14] M. McCord. Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces. *Duke Math.*, 33(1966), 465-474.

- [15] J.R. Munkres. *Topología*. Pearson Educación, 2001.
- [16] R.E. Stong. Finite topological spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 123(1966), 325-340.
- [17] A.W. Tucker. Cell spaces. *Ann. of Math.*, 37(1936), 92-100.
- [18] H.K. Urbantke. The Hopf fibration—seven times in physics. *Journal of Geometry and Physics*, 46(2003), 125–150.
- [19] G.W. Whitehead. *Elements of Homotopy Theory*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 61. Springer, 1978.
- [20] S. Wilard. *General Topology*. Addison-Wesley, 1970.