



FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA

# Grupos hiperbólicos

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Pablo Regalado García

Curso 2022-2023

Doble Grado en Física y Matemáticas

---

Tutorizado por

Juan González-Meneses López

# Resumen.

Los grupos hiperbólicos son una clase de grupos que poseen propiedades similares a las de los espacios hiperbólicos habituales de la geometría. De esta característica geométrica se pueden derivar varios resultados relevantes para el tratamiento computacional de los grupos. En concreto, este trabajo se centrará en el problema de la palabra, que consiste en saber si un elemento de un grupo, expresado como producto de sus generadores e inversos, es equivalente al elemento neutro o no.

# Abstract.

Hyperbolic groups are groups that have characteristics that resemble classical hyperbolic spaces. From this geometric attributes some relevant results can be derived, regarding computation with groups. Specifically, this study will present the word problem, which consists of deducing when an element in a group, expressed as a product of its generators and inverses, is equivalent to the identity.

# Índice general

<b>1. Presentación de un grupo. Grafo de Cayley.</b>	<b>5</b>
1.1. Generadores de un grupo. . . . .	5
1.2. Grupo libre. Presentación de un grupo. . . . .	7
1.3. Grafos de Cayley. . . . .	11
1.4. El problema de la palabra. . . . .	15
<b>2. Grupos y espacios métricos. Cuasi-isometrías.</b>	<b>16</b>
2.1. Métrica de la palabra. . . . .	16
2.2. Distancia en un grafo de Cayley. . . . .	17
2.3. Cuasi-isometrías. . . . .	19
<b>3. Espacios hiperbólicos. Grupos hiperbólicos.</b>	<b>23</b>
3.1. Espacios hiperbólicos. . . . .	23
3.2. Grupos hiperbólicos. . . . .	27
<b>4. El problema de la palabra en grupos hiperbólicos.</b>	<b>33</b>
4.1. Desigualdad isoperimétrica. Área de una palabra. . . . .	33
4.2. El problema de la palabra en grupos hiperbólicos. . . . .	40

# Introducción.

La teoría geométrica de grupos tiene su origen a principios del siglo XX y tiene por objetivo lograr un mayor entendimiento de estas estructuras, mediante el estudio de las propiedades geométricas y topológicas de ciertos espacios sobre los que actúan. Un primer ejemplo de esto aparece en el grafo de Cayley de un grupo para un determinado conjunto generador: las propiedades algebraicas del grupo se trasladan a propiedades geométricas del grafo y viceversa.

Con este fin, muchas veces el estudio se restringe a grupos finitamente generados, que dan lugar a grafos localmente finitos. Más aún, en muchas ocasiones se trabaja con grupos finitamente presentados. Estos grupos aparecen en numerosos ámbitos, como en los grupos fundamentales de las superficies compactas. Una de las principales ventajas que surgen de utilizar grupos finitamente generados es que la elección de unos generadores concretos del grupo no repercute en sus propiedades geométricas siempre que estas propiedades sean invariantes por cuasi-isometrías, un tipo particular de aplicaciones entre espacios métricos. Algunos ejemplos de dichos invariantes son la tasa de crecimiento de un grupo o la hiperbolicidad, que son invariantes por cuasi-isometría (y por tanto no dependen de los generadores escogidos).

A finales del siglo XX la teoría geométrica de grupos comienza a desarrollarse notablemente. Este crecimiento está ampliamente influenciado por los trabajos de Gromov, quien en 1987 introdujo la noción de grupo hiperbólico. Los grupos hiperbólicos son aquellos en los que en el grafo de Cayley asociado se encuentran propiedades similares a los espacios hiperbólicos habituales de la geometría, como es la propiedad de los triángulos finos: todo triángulo geodésico tiene un centro, que está a distancia uniformemente acotada de todos sus lados.

Este trabajo está enfocado en el estudio de los grupos hiperbólicos como primer contacto con la teoría geométrica de grupos, pues es uno de sus

principales objetos de estudio. Comenzamos definiendo los conceptos ya mencionados, básicos en esta rama de conocimiento, como son los grupos libres y los grupos finitamente presentados, así como los grafos de Cayley. Para estudiar la hiperbolicidad de un grupo debemos partir de una métrica en su grafo de Cayley, donde buscar la hiperbolicidad introduciendo el concepto de geodésica. Una vez establecido el puente entre el álgebra y la geometría, se pone de manifiesto la relevancia de la teoría geométrica de grupos.

El problema que se pretende abordar con este enfoque es el llamado problema de la palabra: dado un grupo y un conjunto generador, no es fácil saber cuándo un elemento expresado como producto de generadores y sus inversos (una palabra) es el elemento neutro del grupo. En general, este es un problema indecidible, que puede ser irresoluble incluso para grupos finitamente presentados, los cuales, a priori, parecen los más “sencillos”. En el primer y segundo capítulo de este trabajo se presentaran los conceptos básicos de la teoría geométrica de grupos, para definir en el tercer capítulo qué son los grupos hiperbólicos y estudiar algunas de sus propiedades. En el último capítulo se concluye el trabajo resolviendo el problema de la palabra.

A lo largo del trabajo se verá cómo el carácter hiperbólico de los grupos es útil para demostrar presentabilidad finita y una desigualdad isoperimétrica lineal, relacionando la interpretación geométrica con la combinatoria. Estos resultados, entre otros, permitirán dar una respuesta a la resolubilidad del problema de la palabra en estos grupos.

# Capítulo 1

## Presentación de un grupo. Grafo de Cayley.

Este primer capítulo tiene por objetivo introducir los principales elementos de la teoría geométrica de grupos, siguiendo una estructura para presentar el tema basada en [2], de donde se extraen varios contenidos, complementados con definiciones y ejemplos añadidos, así como algunos comentarios al final sobre el problema de la palabra.

### 1.1. Generadores de un grupo.

Comenzamos el trabajo presentando varios conceptos fundamentales en teoría de grupos.

**Definición 1.1** Un grupo es un par  $(G, \cdot)$ , donde  $G$  es un conjunto, y  $\cdot : G \times G \rightarrow G$  una operación binaria en  $G$ , denominada producto, con las siguientes propiedades:

- Existencia de elemento neutro:  $\exists 1 \in G$  tal que  $\forall g \in G, 1 \cdot g = g \cdot 1 = g$ .
- Asociatividad:  $\forall f, g, h \in G, (f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$ .
- Existencia de elemento inverso:  $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G$  tal que  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = 1$ .

En adelante, se suprimirá el símbolo del producto en el grupo, indicando el mismo mediante yuxtaposición de elementos.

Con esta noción de grupo, podemos hablar de sus subestructuras: los subgrupos. Se dice que  $H \subset G$  es un subgrupo de  $G$  si es un grupo con el producto definido en  $G$ . También se pueden definir homomorfismos de grupos, que son aplicaciones que respetan el producto. En particular, si un homomorfismo es biyectivo se dice isomorfismo, y dos grupos isomorfos son esencialmente idénticos.

Para cualquier subconjunto  $S \subset G$ , se define  $\langle S \rangle$  como el menor subgrupo que contiene a  $S$ ; es el conjunto formado por todos los productos posibles en  $G$  de los elementos de  $S$  y sus inversos:

$$\langle S \rangle = \{s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n} \mid n \in \mathbb{N}, s_1, \dots, s_n \in S, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, +1\}\}$$

Este subgrupo es el que permite introducir el concepto de *generadores* de un grupo.

**Definición 1.2** Un subconjunto  $S \subset G$  se dice que es un *conjunto generador* de  $G$  si  $\langle S \rangle = G$ . Un grupo se dice que está *finitamente generado* si admite un conjunto generador finito.

### Ejemplos:

1.  $\mathbb{Z}$  es un grupo con la suma. Además, es finitamente generado, pues  $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ .
2. El conjunto de permutaciones de  $n$  elementos,  $S_n$ , es un grupo con la composición. El conjunto  $\{(1k) \mid 1 \leq k \leq n\}$  genera el grupo, ya que toda permutación puede descomponerse en producto de trasposiciones, y cada trasposición  $(ij)$  puede expresarse como  $(1i)(1j)(1i)$ . No obstante, estos generadores no son únicos: también genera  $S_n$  el conjunto  $\{(12), (12 \dots n)\}$ .
3.  $\mathbb{R}$  también forma un grupo con la suma. Sin embargo, no es finitamente generado. Sea  $S \subset \mathbb{R}$  un subconjunto finito, y sea  $A_n = \{\pm s_1 \pm \cdots \pm s_n \mid s_1, \dots, s_n \in S\}$ . Entonces  $\langle S \rangle = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \neq \mathbb{R}$ , ya que  $\langle S \rangle$  es un conjunto numerable y  $\mathbb{R}$  no.

La idea de trabajar con un conjunto de generadores es útil para expresar cualquier grupo mediante una presentación (generadores y relaciones entre ellos), con el objetivo de dotar a estas estructuras de una métrica, como se verá más adelante. Para ello, en primer lugar, debemos ver qué es una presentación de un grupo.

## 1.2. Grupo libre. Presentación de un grupo.

En esta sección se definirá el concepto de presentación, que está íntimamente relacionado con el de grupo libre. Estos grupos se entienden intuitivamente como aquellos en los que las únicas relaciones entre un determinado conjunto de generadores que dan lugar al elemento neutro son las que provienen del producto por inverso. Vamos, en primer lugar, a introducir estos grupos, a partir de la siguiente propiedad universal.

**Definición 1.3** Sean  $F$  un grupo y  $X \subset F$  un conjunto de generadores. Se dice que  $F$  está *libremente generado* por  $X$  si para cualquier grupo  $G$  y cualquier aplicación  $\phi: X \rightarrow G$  existe un único homomorfismo de grupos  $\bar{\phi}: F \rightarrow G$  que extiende  $\phi$ .

**Proposición 1.2.1** Sea  $X \subset F$  y  $X' \subset F'$  dos conjuntos de generadores de dos grupos, que además los generan libremente. Si el cardinal de  $X$  y  $X'$  es el mismo (es decir, existe  $\theta$  aplicación biyectiva de  $X$  a  $X'$ ), entonces  $F \cong F'$

**Demostración:** Sean  $i_X: X \rightarrow F$  e  $i_{X'}: X' \rightarrow F'$  las inclusiones. Sea ahora  $\phi = i_{X'} \circ \theta: X \rightarrow F'$ . Como  $X$  genera libremente a  $F$ , existe un único homomorfismo  $\bar{\phi}: F \rightarrow F'$  que extiende  $\phi$ , es decir, tal que  $\bar{\phi} \circ i_X = i_{X'} \circ \theta$ . Análogamente, podemos considerar  $\varphi = i_X \circ \theta^{-1}: X' \rightarrow F$ , que se extiende de manera única a una aplicación  $\bar{\varphi}: F' \rightarrow F$ , con  $\bar{\varphi} \circ i_{X'} = i_X \circ \theta^{-1}$ .

Entonces,  $\bar{\varphi} \circ \bar{\phi} \circ i_X = \bar{\varphi} \circ i_{X'} \circ \theta = i_X \circ \theta^{-1} \circ \theta = i_X$ , de modo que  $\bar{\varphi} \circ \bar{\phi}$  y la identidad  $id_F$  son dos homomorfismos de  $F$  en  $F$  que extienden  $i_X$ , así que son iguales por unicidad. Aplicando un razonamiento similar se obtiene que  $\bar{\phi} \circ \bar{\varphi}$  es igual a  $id_{F'}$ . Por consiguiente,  $\bar{\phi}$  y  $\bar{\varphi}$  son isomorfismos.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{i_X} & F \\
 \theta^{-1} \uparrow \downarrow \theta & & \bar{\varphi} \uparrow \downarrow \bar{\phi} \\
 X' & \xrightarrow{i_{X'}} & F'
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 X' & \xrightarrow{i_{X'}} & F' \\
 \theta \uparrow & \nearrow \bar{\phi} \circ i_X & \\
 X & & 
 \end{array}$$



□

Ya podemos definir el concepto de grupo libre:

**Definición 1.4** Un *grupo libre* es un grupo libremente generado. En particular, el grupo libre de rango  $n$ , denotado por  $F_n$ , es el grupo libremente generado por un conjunto de  $n$  elementos (salvo isomorfismo).

La proposición 1.2.1 es de hecho una equivalencia para estos grupos:  $F_n \cong F_m$  si y solo si  $n = m$  [2].

De la definición de grupo libre surge un problema: podríamos estar definiendo algo que en principio no exista. Dado un conjunto  $X$ , ¿existe siempre un grupo libremente generado por él? La respuesta es que sí. Vamos a describir cómo es este grupo, sin demostración (la comprobación de que es un grupo libre puede encontrarse en [7]).

Consideremos el conjunto  $X$  y consideremos un conjunto  $\bar{X} = \{\bar{x} \mid x \in X\}$ , disjunto con  $X$ . Sea  $A = X \sqcup \bar{X}$ , al que llamaremos *alfabeto*.

**Definición 1.5** Una *palabra* en el alfabeto  $A$  es una aplicación  $w: \{1, \dots, n\} \rightarrow A$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , donde se denota por  $a_i \in A$  a la imagen  $w(i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . En este caso decimos que la palabra tiene longitud  $n$ . La palabra vacía es una palabra de longitud cero (dada por la aplicación vacía).

El conjunto de palabras en  $A$  se denota por  $W(A)$ .

Una palabra  $w$  en  $A$  puede verse como una cadena (posiblemente vacía) de “letras” (elementos) del alfabeto yuxtapuestas,  $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ . Además, dos palabras pueden componerse también mediante la concatenación de las letras de ambas ( $w, w' \in W(A) \Rightarrow ww' \in W(A)$ ). Esto dota a  $W(A)$  de estructura de monoide.

**Definición 1.6**

1. Se dice que una palabra  $w \in W(A)$  es *reducible* si existen  $w_1, w_2 \in W(A)$ , y existe  $x \in X$  tal que  $w = w_1 x \bar{x} w_2$  o bien  $w = w_1 \bar{x} x w_2$ . Se dice que una palabra es *reducida* si no es reducible.
2. Dada una palabra reducible  $w \in W(A)$ , se dice que  $w'$  es una *reducción* de  $w$  si se obtiene eliminando una subpalabra de la forma  $x\bar{x}$  o bien  $\bar{x}x$ , para algún  $x \in X$

Con esta definición, podemos construir una relación de equivalencia, que será denotada por  $\sim$ . Dos palabras  $w, w' \in W(A)$  están relacionadas si existe una sucesión de palabras  $w = w_0, w_1, \dots, w_n = w'$  tal que para cualquier  $1 \leq i \leq n$  se tiene que  $w_i$  es una reducción de  $w_{i-1}$  o viceversa.

Un resultado importante es que en cada clase de equivalencia hay una única palabra reducida. Como consecuencia de esto, dada cualquier palabra  $w$ , se puede obtener la palabra reducida relacionada con ella simplemente mediante reducciones de expresiones de la forma  $x\bar{x}$  o  $\bar{x}x$ , para  $x \in X$ . Una demostración puede encontrarse en [7], donde se define una operación entre palabras reducidas y se demuestra que el grupo de palabras reducidas con dicha operación en un alfabeto es isomorfo al grupo de todas las palabras bajo la relación de equivalencia previa:

**Proposición 1.2.2** *Sea  $F(X) = W(A)/\sim$ .  $F(X)$  es un grupo con la yuxtaposición de palabras, definida como  $[w][w'] = [ww']$ . Además,  $F(X)$  está generado por  $X$  (donde identificamos  $x$  con  $[x]$  para todo  $x \in X$ ).*

**Demostración:** La operación está bien definida: tomemos  $[w] = [w']$  y  $[v] = [v']$ . Entonces existen unas sucesiones  $w = w_0, \dots, w_n = w'$  y  $v = v_0, \dots, v_m = v'$ . Como las reducciones en cada factor van a reducciones en la composición, es fácil comprobar que  $[w][v] = [w_0v_0] = [w_nv_m] = [w'][v']$ . El elemento neutro de  $F(X)$  es la palabra vacía,  $[] = [x\bar{x}]$ . La asociatividad es consecuencia de la definición de la operación mediante yuxtaposición. Dado  $[w] = [a_1 \cdots a_n]$ ,  $[w]^{-1} = [\bar{a}_n \cdots \bar{a}_1]$  es su elemento inverso (donde se entiende  $\bar{\bar{x}} = x$ ).

Para ver que  $F(X) = \langle X \rangle$  basta utilizar la definición de subgrupo generado por un subconjunto, ya que dado  $[w] \in F(X)$ ,  $[w] = [a_1] \cdots [a_n]$ , donde  $a_i \in X$  o  $a_i \in \bar{X}$ ,  $\forall i$ . Pero  $[\bar{x}] = [x]^{-1} \forall x \in X$ , así que  $[w]$  es una palabra en las clases de los elementos de  $X$  y sus inversos. Por tanto,  $[w] \in \langle X \rangle$ .  $\square$

La proposición 1.2.2 da pie al siguiente teorema:

**Teorema 1.2.3** [7]  *$F(X)$  es un grupo libre, libremente generado por  $X$ .*

Para terminar de construir una presentación de un grupo falta introducir las relaciones que pueda haber en él. Para esto, es necesario definir una clase muy particular de subgrupos: los subgrupos normales, que son aquellos invariantes por conjugación; es decir,  $H$  es normal en  $G$  (denotado por  $H \triangleleft G$ ) si dados  $h \in H$  y  $g \in G$ , se tiene que  $ghg^{-1} \in H$ . La importancia de estos

subgrupos radica en que sus clases a derecha e izquierda son las mismas:  $gHg^{-1} = H \Leftrightarrow gH = Hg$ , y por tanto puede definirse un grupo cociente  $G/H$  con las clases a la izquierda (o a la derecha), dotado de un producto de clases:  $(gH)(g'H) = gg'H$ .

Sea  $R \subset G$  un subconjunto cualquiera de un grupo  $G$ .

**Definición 1.7** La *clausura normal* de  $R$  en  $G$ , denotada por  $\langle\langle R \rangle\rangle$  es el menor subgrupo normal que contiene a  $R$ ; esto es, un subgrupo normal de  $G$  tal que si  $R \subset H$  y  $H \triangleleft G$ , entonces  $\langle\langle R \rangle\rangle \subset H$ .

Es fácil comprobar la siguiente igualdad:

$$\langle\langle R \rangle\rangle = \langle\{grg^{-1} \mid g \in G, r \in R\}\rangle$$

Si tomamos un grupo libre  $F(X)$  y un subconjunto suyo  $R \subset F(X)$ , denotamos al cociente  $F(X)/\langle\langle R \rangle\rangle$  como  $\langle X \mid R \rangle$ . Este es un grupo generado por (las clases de equivalencia de)  $X$ , pero con las relaciones añadidas de  $R$  (que puede ser vacío); esto es, todos los elementos de  $R$  (relatores) son el elemento neutro en el cociente. Esto nos permite definir el concepto de presentación de un grupo.

**Definición 1.8** Una *presentación* de un grupo  $G$  es un par  $(X, R)$ , donde  $R \subset F(X)$ , junto a un isomorfismo  $f: \langle X \mid R \rangle \rightarrow G$ . Un grupo se dice *finitamente presentado* si es isomorfo a un grupo de la forma  $\langle X \mid R \rangle$ , donde  $X$  y  $R$  son finitos.

Por simplicidad se dirá que  $\langle X \mid R \rangle$  es la presentación, en lugar del par  $(X, R)$  y el isomorfismo.

**Ejemplo:**

1.  $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle 1 \mid - \rangle$  es el grupo libre de rango 1 y es finitamente presentado (denotamos por  $-$  al conjunto vacío en caso de que no haya relaciones).
2. En general, todo grupo libre finitamente generado es finitamente presentado:

$$F_n = \langle x_1, \dots, x_n \mid - \rangle$$

3.  $\mathbb{Z}^2 \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$  es finitamente presentado.

Sea  $\phi : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$  tal que  $\phi(n, m) = a^n b^m$ . Veamos que  $\phi$  es un isomorfismo.

En primer lugar, veamos que es un homomorfismo como consecuencia directa de la definición:  $\phi((n, m) + (n', m')) = a^{n+n'} b^{m+m'} = a^n b^m a^{n'} b^{m'} = \phi(n, m)\phi(n', m')$ , donde estamos usando que  $ab = ba$  por la relación  $aba^{-1}b^{-1}$ .

Para comprobar que  $\phi$  es sobreyectiva, basta observar que la relación  $aba^{-1}b^{-1}$  implica que el grupo es abeliano, por lo que todo elemento de  $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$  puede escribirse como  $a^n b^m$ , para ciertos  $n, m \in \mathbb{Z}$ .

Veamos por último que  $\phi$  es inyectiva.  $\phi(n, m) = \phi(n', m')$  si y solo si  $a^n b^m = a^{n'} b^{m'}$ .

Consideremos  $f_a : \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle \rightarrow \mathbb{Z}$  y  $f_b : \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle \rightarrow \mathbb{Z}$ , que asocian a cada elemento del grupo la suma de los exponentes en  $a$  y en  $b$ , respectivamente. Estas aplicaciones están bien definidas, ya que  $f_a(aba^{-1}b^{-1}) = f_b(aba^{-1}b^{-1}) = 0$ , así que todos los elementos que son iguales en el cociente tienen la misma imagen. Por tanto,  $n = f_a(a^n b^m) = f_a(a^{n'} b^{m'}) = n'$ , y realizando el mismo razonamiento con  $f_b$  se obtiene que  $m = m'$ , de modo que  $\phi$  es inyectiva.

4. Todo grupo finitamente presentado es finitamente generado. Por tanto,  $\mathbb{R}$  no es finitamente presentado.
5. Pueden encontrarse también ejemplos de grupos finitamente generados que no son finitamente presentados, aunque esto es más difícil de probar. Un ejemplo es el siguiente grupo [1]:

$$\langle s, t \mid [t^n s t^{-n}, t^m s t^{-m}], n, m \in \mathbb{Z} \rangle$$

Donde  $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$  es el conmutador de  $x$  con  $y$ .

### 1.3. Grafos de Cayley.

A continuación se van a presentar conceptos básicos de teoría de grafos con el propósito de definir el grafo de Cayley de un grupo dados unos generadores, así como comentar alguna de sus utilidades, que luego se estudiarán en más profundidad.

**Definición 1.9** Un *grafo orientado*  $K$  es un par  $(V, A)$  donde  $V$  es un conjunto de puntos, llamados vértices, y  $A$  es un conjunto de aristas orientadas que relacionan los vértices, junto con dos funciones  $s: A \rightarrow V$  y  $t: A \rightarrow V$ , de modo que si una arista  $a$  parte del vértice  $v$  y llega al vértice  $w$ , se tiene que  $s(a) = v$  y  $t(a) = w$ .

Por otra parte, podemos definir otros conceptos típicos en grafos:

1. Dos vértices distintos  $v, w \in V$  se dicen *adyacentes* si existe una arista  $a \in A$  con  $s(a) = v$  y  $t(a) = w$ , o bien  $s(a) = w$  y  $t(a) = v$ .
2. Un camino en un grafo  $K$  es una sucesión de aristas y su sentido de recorrido  $a_1^{\varepsilon_1}, \dots, a_n^{\varepsilon_n}$ , donde  $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$  para todo  $i$ , con la condición  $s(a_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}}) = t(a_i^{\varepsilon_i})$ ,  $\forall i = 1, \dots, n-1$  (si  $a \in A$ , se define  $s(a^{-1}) = t(a)$  y  $t(a^{-1}) = s(a)$ ). Un arco es un camino inyectivo, es decir, tal que  $t(a_i^{\varepsilon_i}) \neq s(a_j^{\varepsilon_j})$ ,  $\forall i, j$  con  $1 \leq j \leq i \leq n$ .
3. Un camino cerrado es un camino  $a_1^{\varepsilon_1}, \dots, a_n^{\varepsilon_n}$  donde  $s(a_1^{\varepsilon_1}) = t(a_n^{\varepsilon_n})$ . Un ciclo es un arco cerrado.
4. La valencia de un vértice es el número de aristas incidentes con el vértice, contando dos veces las aristas si  $s(a) = t(a)$ .

El siguiente objetivo es asociarle a todo grupo finitamente generado un grafo, para poder trabajar geoméricamente con estos.

**Definición 1.10** Sea  $G$  un grupo y  $X$  un subconjunto generador. Se define el *grafo de Cayley* de  $G$  asociado a  $X$  como el grafo  $K(G, X) = (G, A(G))$ , donde los vértices son todos los elementos del grupo y el conjunto de aristas está determinado de la siguiente manera: para cada  $g \in G$  y para cada  $x \in X$ , existe  $a \in A(G)$  con  $s(a) = g$ ,  $t(a) = gx$ .

De la definición se deduce que todos los vértices tienen valencia igual al doble del número de generadores  $2|X|$ . En concreto, hay exactamente  $|X|$  aristas que salen de cada vértice y el mismo número de aristas que entran en él. Como consecuencia directa el grafo de Cayley depende del conjunto generador escogido para el grafo. Más adelante se verá que, pese a la ambigüedad que produce la elección de un conjunto generador concreto, los grafos resultantes son lo suficientemente “parecidos” como para no alterar los resultados que se expondrán.

Las aristas se pueden identificar entonces con generadores (o con sus inversos, según su orientación) y los caminos en  $K(G, X)$  con palabras, de modo que un camino  $a_1, \dots, a_n$  se corresponde con la yuxtaposición de los generadores asociados a las aristas. Recíprocamente, una palabra puede verse como un camino (fijado el punto de inicio, que suele tomarse el elemento neutro). Un camino cerrado se corresponde con una palabra equivalente al elemento neutro, y el camino trivial se corresponde con un único vértice. En particular, todo grafo de Cayley es conexo, pues siempre existe un camino del elemento neutro a cualquier otro vértice.

**Ejemplo:**

1. Grafo de Cayley de  $\mathbb{Z}$  con conjunto generador  $\{1\}$ .

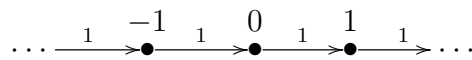


Figura 1: Grafo de Cayley de  $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ .

2. Grafo de Cayley de  $S_3$  con conjunto generador  $\{(12), (123)\}$ .

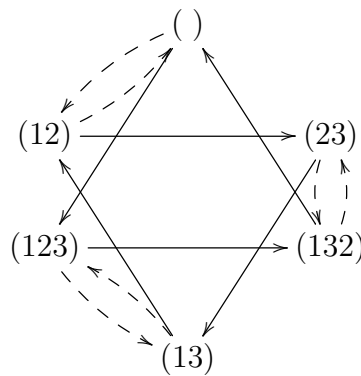


Figura 2: Grafo de Cayley de  $S_3 = \langle (12), (123) \rangle$ .

Las aristas con línea discontinua representan el producto por la derecha por el generador  $(12)$ , mientras que las aristas con línea continua representan el producto por la derecha por el generador  $(123)$ .

3. Grafo de Cayley de  $F_2$  con conjunto generador  $X = \{a, b\}$ .

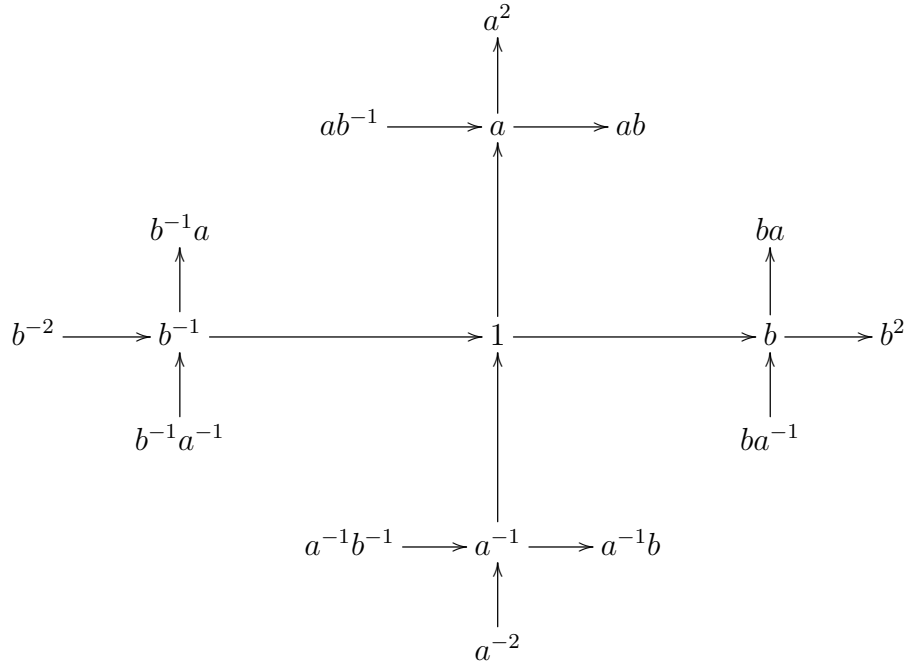


Figura 3: Grafo de Cayley de  $F_2$ .

Solo se muestra una parte del grafo, hasta las palabras de longitud dos (el grafo completo es infinito). Las aristas verticales corresponden al generador  $a$  y las horizontales al generador  $b$ .

En el último ejemplo podemos ver que el grafo de Cayley asociado al grupo libre de rango dos es un árbol (un grafo sin ciclos). Esto es general para los grupos libres:

**Proposición 1.3.1** *Sea  $G = F_n$  un grupo libre de rango  $n$ . El grafo de Cayley asociado al conjunto generador libre  $X$  es un árbol.*

**Demostración:** Sea  $a_1^{\varepsilon_1}, \dots, a_k^{\varepsilon_n}$  un ciclo en  $K(F_n, X)$ . Sean  $[x_1], \dots, [x_k]$  los generadores asociados a las aristas del ciclo. Entonces  $[x_1] \cdots [x_k] = [x_1 \cdots x_k]$ , donde  $x_1 \cdots x_n$  es una palabra que representa al elemento neutro. Como el camino considerado es un ciclo, la palabra  $x_1 \cdots x_n$  es reducida, y por ser libre, la única palabra reducida que representa al elemento neutro es la trivial. Por tanto,  $K(F_n, X)$  no tiene ciclos no triviales, así que es un árbol.  $\square$

El grafo de Cayley de un grupo es el primer concepto necesario para describir los grupos hiperbólicos: ya tenemos una forma de representar geométricamente los grupos. A partir de aquí, podemos definir una métrica sobre el grafo y conseguir un espacio geodésico en el cual buscar la propiedad de hiperbolicidad, como se verá más adelante.

## 1.4. El problema de la palabra.

Para concluir el capítulo, vamos a presentar el problema de la palabra en un grupo  $G$ , con un conjunto fijado de generadores  $X$  (en particular, en el caso de grupos finitamente generados).

Decimos que  $G$  con el conjunto generador  $X$  tiene problema de la palabra resoluble si existe un algoritmo que determine, dada una palabra en los generadores y sus inversos, si esta representa o no al elemento neutro. La necesidad de encontrar una respuesta al problema es clave para trabajar computacionalmente con grupos. Dehn demostró en torno a 1920 que se puede resolver este problema para los grupos fundamentales de superficies. La pregunta, además, no depende de los generadores elegidos, ya que si podemos escribir unos generadores en función de otros, resolver el problema de la palabra para un conjunto generador es equivalente a resolverlo para todos.

Un algoritmo que resuelva el problema de la palabra puede ser más o menos difícil de encontrar en función del grupo con el que trabajemos. Por ejemplo, para un grupo libre de rango  $n$  con generadores  $\{x_1, \dots, x_n\}$  la respuesta es muy sencilla: solo hay que comprobar si la palabra puede reducirse a la palabra vacía mediante eliminación del producto de generadores por sus inversos. Sin embargo, se sabe que existen grupos con problema de la palabra irresoluble, incluso grupos finitamente presentados. Novikov encontró un ejemplo de grupo finitamente presentado con problema de la palabra irresoluble [8]. Podemos preguntarnos entonces qué grupos sí tienen problema de la palabra resoluble y cuáles no.

Una primera respuesta surge a raíz del grafo de Cayley: si conocemos el grafo de Cayley de un grupo, podemos saber cuándo una palabra (un camino) representa el elemento neutro (el camino es cerrado). De hecho, el problema de la palabra puede verse como un problema geométrico: poder resolverlo equivale a poder construir localmente el grafo de Cayley para un grupo (puede consultarse en [9] o en [10]).



## Capítulo 2

# Grupos y espacios métricos. Cuasi-isometrías.

En el capítulo anterior se han presentado los grafos de Cayley con el objetivo de encontrar una métrica en ciertos grupos. En este capítulo se construirán los espacios métricos asociados a cada grupo y se expondrán los conceptos necesarios (fundamentalmente geométricos) para establecer un puente entre el Álgebra y la Geometría. La fuente principal de donde se extraen los contenidos de este capítulo es [6], junto con algunas definiciones de [2].

### 2.1. Métrica de la palabra.

Dado un grupo finitamente presentado  $G \cong \langle X \mid R \rangle$ , podemos definir una métrica en  $G$ . Se define la longitud de un elemento  $g \in G$  como la menor de las longitudes de todas las palabras que lo representan. Podemos entonces definir una distancia en  $G$ ,  $d_X$ , tal que  $d_X(g, h)$  sea la longitud de  $g^{-1}h$ . Esta función  $d_X: G \rightarrow \mathbb{R}$  se denomina métrica de la palabra.

Efectivamente,  $d_X$  es una métrica:

1.  $d_X(g, g) = 0$ , ya que es la longitud del elemento neutro, representado por la palabra vacía,  $\forall g \in G$ .
2.  $d_X(g, h) = d_X(h, g)$ , puesto que un elemento y su inverso vienen repre-

sentados por palabras de la misma longitud,  $\forall g, h \in G$ .

3. Dados  $g, h, k \in G$ , vamos a ver que  $d_X(g, k) \leq d_X(g, h) + d_X(h, k)$ . Sea  $g^{-1}h = [x_1 \cdots x_n]$  y  $h^{-1}k = [y_1 \cdots y_m]$ , donde  $d_X(g, h) = n$  y  $d_X(h, k) = m$ . Entonces  $g^{-1}k = g^{-1}hh^{-1}k = [x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_m]$ . Como la distancia es el mínimo de las longitudes de las palabras que representan al elemento, se tiene la desigualdad.

Esta distancia, en principio, presenta algunos inconvenientes.

El primer problema que presenta es que es una distancia discreta, toma valores en  $\mathbb{N}$ . Esto impide trabajar con triángulos geodésicos, pues una métrica que solo toma valores en los números naturales no puede dar lugar a un espacio geodésico.

Otro problema es la elección del sistema generador. Si tomamos dos sistemas generadores distintos, la métrica varía. Por ejemplo podemos aumentar o disminuir el número de generadores (y por tanto disminuir la distancia entre algunos pares de elementos). Es más, incluso con subconjuntos generadores del mismo cardinal, tener unos generadores u otros puede hacer variar la distancia (por ejemplo, considerando  $d_X(1, x)$ , que es igual a la unidad cuando  $x$  es un generador o su inverso). Para buscar una analogía con un espacio métrico hiperbólico necesitamos solventar ambos contratiempos. Este será el objetivo del capítulo.

## 2.2. Distancia en un grafo de Cayley.

Gracias a la distancia definida para un grupo finitamente presentado, ahora tenemos dos maneras de ver estos grupos geoméricamente: como espacio métrico y como grafo. Podemos preguntarnos entonces si hay alguna relación entre ambos. La respuesta es que sí: es posible tratar el grafo como un espacio métrico, con una métrica lo suficientemente “parecida” (en un sentido que se definirá en la próxima sección).

Para comenzar, observamos que dos elementos distintos  $g, h \in G$  son vértices adyacentes en  $K(G, X)$  si el producto  $g^{-1}h$  es un generador (o su inverso). Equivalentemente, esto es decir que  $d_X(g, h) = 1$ : dos vértices adyacentes en el grafo de Cayley de un grupo se encuentran a distancia uno. ¿Cómo podemos definir entonces la distancia entre puntos interiores de las

aristas? La respuesta consiste en identificar isométricamente cada arista con el intervalo unidad. De este modo, la distancia  $d_X$  se extiende a una distancia  $d$  en el grafo de Cayley correspondiente, que ahora toma valores en  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ . Otra ventaja de extender la métrica al grafo de Cayley es la posibilidad de trabajar con espacios geodésicos, como se verá a continuación.

**Definición 2.1** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervalo. Dado un camino  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ , se define su longitud como:

$$l(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^n d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) \mid a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\}$$

**Definición 2.2** Una *geodésica* es un camino  $\gamma: I \rightarrow X$  tal que para cualquier par de valores  $s, t \in I$ ,  $d(\gamma(s), \gamma(t)) = |t - s|$ .

**Definición 2.3** Un espacio métrico  $(X, d)$  se dice *geodésico* si dos puntos cualesquiera están conectados por una geodésica.

Una propiedad de especial interés en espacios geodésicos es que dados dos puntos  $x, y \in X$ , un camino de longitud mínima que los una (identificando el camino con su imagen) coincide con la imagen de una geodésica, como se puede deducir fácilmente de las definiciones anteriores, ya que su longitud es siempre  $d(x, y)$ .

El espacio  $(K(G, X), d)$  es siempre un espacio geodésico, independientemente del grupo y del sistema generador elegido, ya que todo par de puntos se pueden conectar por un camino de longitud mínima y es fácil comprobar que este es una geodésica. Sin embargo, el espacio  $(G, X)$  no es en ningún caso geodésico (no existen geodésicas por la naturaleza de su distancia). Otro ejemplo de espacio no geodésico es  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , con la métrica heredada de  $\mathbb{R}^2$ . Se puede comprobar que no existen geodésicas que conecten los puntos  $(-1, 0)$  y  $(1, 0)$ .

Así queda resuelto el primer contratiempo planteado. Pero el problema de elección de un sistema generador sigue estando presente, ahora con más razón, ya que los grafos de Cayley están definidos en función del conjunto generador.

## 2.3. Cuasi-isometrías.

Falta por ver que las distintas distancias definidas en  $G$  y en  $K(G, X)$  son razonablemente parecidas. Evidentemente todas dan lugar a espacios métricos con distintas propiedades, pero si nos “alejamos” lo suficiente de nuestro espacio, estos acaban “pareciendo” iguales: nos olvidamos de los detalles del espacio para quedarnos únicamente con una visión global de los mismos. Este es el concepto de cuasi-isometría.

**Definición 2.4** Sean  $(X, d)$  y  $(X', d')$  dos espacios métricos. Una aplicación entre ellos  $f: X \rightarrow X'$  se dice que es una  $(\lambda, k)$ -cuasi-isometría, con  $\lambda, k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  y  $\lambda > 0$ , si  $\forall x, y \in X$  se verifica que:

$$\frac{1}{\lambda}d(x, y) - k \leq d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + k$$

Con esta definición, una cuasi-isometría es una aplicación que respeta las distancias de manera acotada: si tomamos dos puntos “próximos” en el espacio de partida, sus imágenes estarán separadas una distancia relativamente “próxima” (acotada afínmente), mientras que puntos “lejanos” van a parar a puntos “lejanos” en el espacio de llegada. En particular, las isometrías son  $(1, 0)$ -cuasi-isometrías. En general, una cuasi-isometría no tiene por qué ser inyectiva, ni sobreyectiva, ni continua.

**Definición 2.5** Un espacio métrico  $(X, d)$  se dice que es *cuasi-isométrico* a otro espacio  $(X', d')$  si existen  $\lambda, k$  y una aplicación  $f: X \rightarrow X'$  tales que  $f$  es una  $(\lambda, k)$ -cuasi-isometría y todo punto de  $X'$  está a una distancia uniformemente acotada de la imagen de  $f$ . En ese caso, se denota  $(X, d) \sim (X', d')$ , o simplemente  $X \sim X'$  si no es necesario especificar la distancia en cada espacio.

En realidad, podemos hablar de dos espacios cuasi-isométricos, sin hacer referencia a cuál constituye el dominio de la cuasi-isometría gracias a la siguiente proposición:

**Proposición 2.3.1** *Ser cuasi-isométrico es una relación de equivalencia.*

**Demostración:** La relación es reflexiva porque la identidad es una isometría (y por tanto una  $(1, 0)$ -cuasi-isometría).

Si  $X \sim Y$  e  $Y \sim Z$ , con cuasi-isometrías respectivas  $f$  y  $g$ , entonces  $g \circ f$  es otra cuasi-isometría para ciertas constantes. Además, existen constantes

$c_1, c_2 \geq 0$  tales que, para todo  $z \in Z$ , existe un  $y \in Y$  con  $d_Z(g(y), z) \leq c_1$ , y existe un  $x \in X$  con  $d_Y(f(x), y) \leq c_2$ . Por tanto:

$$\begin{aligned} d_Z(g(f(x)), z) &\leq d_Z(g(f(x)), g(y)) + d_Z(g(y), z) \leq \\ &\leq \lambda d_Y(f(x), y) + k + c_1 \leq \lambda c_2 + k + c_1 \end{aligned}$$

Donde  $(\lambda, k)$  son las constantes de la cuasi-isometría  $g$ .

La propiedad simétrica requiere de una demostración más extensa, por lo que solo será comentada. Si  $X \sim Y$ , la idea para ver que  $Y \sim X$  consiste en construir una aplicación utilizando el axioma de elección. Como existe  $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tal que para cualquier  $y \in Y$  se tiene  $d(f(x_y), y) \leq c$  para algún  $x_y \in X$ , podemos verificar que la aplicación  $g: y \mapsto x_y$  cumple los requisitos que buscamos.  $\square$

Se puede demostrar además que dos espacios son cuasi-isométricos si y solo si existen cuasi-isometrías  $f: X \rightarrow X'$  y  $g: X' \rightarrow X$  cuyas composiciones están a distancia acotada de la identidad. Esta equivalencia se puede demostrar de manera similar a la propiedad simétrica, definiendo la inversa cuasi-isométrica y verificando que cumple los requisitos deseados, y da una visión más intuitiva de la relación de equivalencia, a la que estamos más acostumbrados: ser cuasi-isométrico es equivalente a encontrar cuasi-isometrías entre ambos espacios, en ambos sentidos, y no muy alejadas de ser aplicaciones inversas. Los detalles pueden encontrarse en [7], junto con la propiedad simétrica de la relación, que hace uso de este hecho.

Como ya se ha comentado, detrás de las cuasi-isometrías se encuentra la percepción poco detallada de los espacios. Por ejemplo, es fácil comprobar que un espacio acotado y un punto son cuasi-isométricos, mientras que se puede demostrar que  $\mathbb{R} \not\sim [0, \infty)$ . Intuitivamente, si nos alejamos de un espacio acotado vemos su tamaño reducirse hasta convertirse en un punto; sin embargo, el intervalo  $[0, \infty)$  está parcialmente acotado, mientras que los números reales no, así que nunca podemos verlos similares.

Un ejemplo importante de espacios cuasi-isométricos es el siguiente:

$\mathbb{Z} \sim \mathbb{R}$ . La inclusión  $i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  es una  $(1, 0)$ -cuasi-isometría y para cualquier número real existe un entero a distancia menor o igual que  $\frac{1}{2}$ .

¿Por qué es relevante este ejemplo? Tal y como han sido construidos, la métrica de la palabra en  $\mathbb{Z}$  es su distancia habitual, mientras que el grafo

de Cayley de  $\mathbb{Z}$  es precisamente  $\mathbb{R}$ : hemos identificado mediante una cuasi-isometría  $\mathbb{Z}$  con su grafo de Cayley. Podemos hacer esto en general.

**Proposición 2.3.2** *Dado un grupo  $G$  y un conjunto generador suyo  $X$ , se tiene que  $(G, d_X) \sim (K(G, X), d)$*

La demostración se basa en la misma idea utilizada para ver que los números enteros y la recta real son cuasi-isométricos: la inclusión es una cuasi-isometría y todo punto se encuentra a una distancia máxima de  $\frac{1}{2}$  de la imagen.

Finalmente, podemos comprobar que la elección de un conjunto generador concreto es irrelevante al trabajar con invariantes cuasi-isométricos.

**Proposición 2.3.3** *Sea  $G$  un grupo finitamente generado y sean  $X$  y  $X'$  dos conjuntos generadores finitos. Los espacios  $(G, d_X)$  y  $(G, d_{X'})$  son cuasi-isométricos.*

**Demostración:** Como  $X$  y  $X'$  son conjuntos generadores, podemos escribir todos los elementos de  $X$  como productos de elementos de  $X'$  y viceversa. Sean  $n_1 = \max\{d_{X'}(1, x) \mid x \in X\}$  y  $n_2 = \max\{d_X(1, x') \mid x' \in X'\}$  los máximos de las respectivas longitudes. Tomemos  $n$  el máximo de  $n_1$  y  $n_2$ .

Vamos a ver que la identidad es una  $(n, 0)$ -cuasi-isometría entre  $(G, d_{X'})$  y  $(G, d_X)$ . Sean  $g, h \in G$ . La distancia  $m = d_{X'}(g, h)$  es la mínima longitud de una palabra que representa a  $g^{-1}h$  en los generadores de  $X'$  y sus inversos. Esto es,  $g^{-1}h = x'_1 \cdots x'_m$ . Como a su vez cada generador (o inverso) de  $X'$  se puede escribir como producto de, a lo sumo,  $n_2$  generadores de  $X$ , podemos escribir  $g^{-1}h = (x_{1,1} \cdots x_{1,k_1}) \cdots (x_{m,1} \cdots x_{m,k_m})$ , con  $k_i \leq n_2 \forall i$ , de modo que:

$$d_X(g, h) \leq n_2 m \leq n_2 d_{X'}(g, h) \leq n d_{X'}(g, h)$$

Análogamente,  $d_{X'}(g, h) \leq n d_X(g, h)$ , de donde se obtienen las desigualdades:

$$\frac{1}{n} d_{X'}(g, h) \leq d_X(g, h) \leq n d_{X'}(g, h)$$

Como la aplicación es sobreyectiva, la distancia de cualquier elemento a la imagen es siempre nula, por lo que queda demostrado que los dos espacios son cuasi-isométricos.  $\square$

Este resultado es el que da coherencia a todo el trabajo: distintos conjuntos generadores finitos dan lugar a espacios métricos distintos, pero cuasi-isométricos, de manera que toda propiedad que se dé en función de un conjunto generador estará bien definida independientemente del conjunto generador si es invariante por cuasi-isometrías.

La primera observación importante que podemos hacer a partir de las dos proposiciones anteriores es la siguiente:

**Corolario 2.3.4** *Para cualquier grupo  $G$  finitamente generado y cualesquiera dos conjuntos generadores finitos  $X$  y  $X'$ , sus grafos de Cayley asociados son cuasi-isométricos:  $(K(G, X), d) \sim (K(G, X'), d')$ .*

Gracias a esto podemos sortear el segundo problema presentado al principio del capítulo: ahora sabemos que todos los grafos de Cayley asociados a conjuntos generadores finitos son cuasi-isométricos, y por tanto, al igual que los grupos, darán lugar a propiedades bien definidas si estas son invariantes por cuasi-isometrías. Esto es clave para definir la hiperbolicidad de un grupo puesto que, como se verá más adelante, la hiperbolicidad es invariante por cuasi-isometrías.

## Capítulo 3

# Espacios hiperbólicos. Grupos hiperbólicos.

### 3.1. Espacios hiperbólicos.

En este capítulo se introducirá el concepto de hiperbolicidad, en principio desde un punto de vista puramente geométrico. Esta propiedad presenta diversas definiciones, todas ellas equivalentes, aunque se utilizará el concepto de hiperbolicidad en el sentido de Rips, debido a que es más intuitiva geoméricamente. Sobre esta propiedad, se definirán los grupos hiperbólicos y se demostrarán algunas propiedades importantes de los mismos, con vistas a los resultados que se presentarán en el próximo capítulo. A partir de este punto, se omitirá la distancia considerada en cada espacio si esta no lleva a confusión.

Este capítulo toma como referencia principal [2] para su desarrollo, tomando de ahí definiciones y proposiciones relevantes para el trabajo.

**Definición 3.1** Sea  $X$  un espacio geodésico. Consideremos un triángulo geodésico de lados  $\alpha, \beta, \gamma$ . Se dice que un punto  $p \in X$  es un  $\delta$ -centro si se verifica la siguiente desigualdad:  $\max\{d(p, \alpha), d(p, \beta), d(p, \gamma)\} \leq \delta$ .

En este sentido, se dice que un triángulo es  $\delta$ -fino si posee un  $\delta$ -centro.

**Definición 3.2 (Hiperbolicidad de Rips)** Un espacio geodésico  $X$  se dice hiperbólico en el sentido de Rips si existe una constante  $\delta$ , llamada cons-



tante de hiperbolicidad, tal que todo triángulo geodésico en  $X$  es  $\delta$ -fino.

Esta definición requiere de geodésicas para trabajar con espacios hiperbólicos. El problema de encontrar espacios geodésicos asociados a un grupo se ha resuelto en el capítulo anterior, gracias a los grafos de Cayley, que extienden la métrica del grupo. No obstante, es posible trabajar de otras formas: en el artículo original de Gromov, matemático que introdujo los grupos hiperbólicos, se hacía uso de otra definición alternativa (“ser hiperbólico” en el sentido de Gromov), que no necesita de estos espacios, sino únicamente de ciertas desigualdades entre puntos [5].

**Definición 3.3** Sea  $X$  un espacio métrico. Se define el producto de Gromov de  $x$  con  $y$  respecto de  $z$  como:

$$\langle x, y \rangle_z = \frac{1}{2}(d(x, z) + d(y, z) - d(x, y))$$

**Definición 3.4 (Hiperbolicidad de Gromov)** Un espacio métrico  $X$  se dice hiperbólico en el sentido de Gromov si se verifica la siguiente condición de cuatro puntos:

$$\forall x, y, z, w \in X; \langle x, y \rangle_w \geq \min\{\langle x, z \rangle_w, \langle y, z \rangle_w\} - \delta$$

Donde  $\delta$  es una constante independiente de los puntos elegidos.

La equivalencia entre la hiperbolicidad de Rips y de Gromov se demuestra en [2], en la sección 6.5. En lo sucesivo se utilizará únicamente la definición de Rips.

A continuación vamos a demostrar una caracterización muy útil sobre triángulos finos en espacios hiperbólicos.

**Proposición 3.1.1** *Sea  $X$  un espacio  $\delta$ -hiperbólico y consideremos un triángulo geodésico, de lados  $\alpha, \beta, \gamma$  y vértices  $x, y, z$ . Entonces  $\alpha \subset N(\beta \cup \gamma, 6\delta)$ ; esto es, todo lado está contenido en un entorno uniformemente acotado de la unión del resto de lados.*

Esta propiedad es muy útil, ya que permite trabajar con triángulos geodésicos sin hacer referencia expresa al  $\delta$ -centro del mismo. Para demostrarla es necesario primero hablar de caminos  $t$ -tenso. Un camino  $\alpha$  con extremos  $x, y$  se dice que es  $t$ -tenso si  $l(\alpha) \leq d(x, y) + t$ .

También es conveniente observar que en un triángulo geodésico con un  $\delta$ -centro cualquiera,  $p$ , es posible tomar un  $2\delta$ -centro que caiga en cualquiera de los lados: basta tomar  $a \in \alpha$  con  $d(a, p) \leq \delta$ .

Vamos a ver ahora un lema que permite demostrar la caracterización. Este lema se corresponde con los lemas 6.2 y 6.4 de [2], rescatando únicamente aquellas partes de interés para la prueba.

**Lema 3.1.2** *Sea  $X$  un espacio hiperbólico y sean  $x, y \in X$ . Sea  $\alpha$  una geodésica que los une y  $\beta$  un camino  $t$ -tenso entre  $x$  e  $y$ . Se verifica que:*

$$\beta \subset N(\alpha, \frac{1}{2}t + 4\delta)$$

**Demostración:** Sea  $z \in \beta$ . Podemos acotar el producto de Gromov de  $x$  e  $y$  de la siguiente manera:

$$\langle x, y \rangle_z = \frac{1}{2}(d(x, z) + d(y, z) - d(x, y)) \leq \frac{1}{2}(l(\beta) - d(x, y)) \leq \frac{t}{2}$$

El siguiente paso es acotar la distancia de  $z$  a la geodésica en función del producto de Gromov. Para ello, tomamos el triángulo geodésico formado por  $\alpha$  y dos geodésicas que unen  $z$  con  $x$  e  $y$ , respectivamente  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  (ver figura 4). Por ser  $X$  hiperbólico, podemos encontrar un  $2\delta$  centro,  $a$ , sobre  $\alpha$ . Ahora podemos verificar las siguientes desigualdades:

$$d(x, a) + d(a, z) \leq d(x, z) + 4\delta \tag{3.1}$$

$$d(y, a) + d(a, z) \leq d(y, z) + 4\delta \tag{3.2}$$

La primera desigualdad es consecuencia de la acotación  $d(a, \gamma_1) \leq 2\delta$ . Basta tomar  $b \in \gamma_1$  con  $d(a, b) \leq 2\delta$ , y aplicar sucesivamente la desigualdad triangular en los dos triángulos en los que se divide el triángulo de vértices  $x, a, z$ , como se muestra en la figura 4, para acotar cada uno de los sumandos. La segunda desigualdad se demuestra de manera análoga, trabajando ahora con  $\gamma_2$ .

Sumando ahora las dos desigualdades y restando  $d(x, a) + d(a, y) = d(x, y)$  obtenemos finalmente:

$$d(z, \alpha) \leq d(z, a) \leq \langle x, y \rangle_z + 4\delta$$

Y por tanto:

$$d(z, \alpha) \leq \frac{1}{2}t + 4\delta$$

□

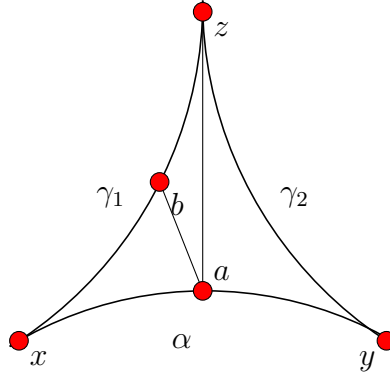


Figura 4: División del triángulo geodésico.

La demostración de la proposición 3.1.1 es directa gracias al lema.

**Demostración (de la proposición 3.1.1):** Sean  $\alpha, \beta, \gamma$  los lados que unen  $x$  e  $y$ ,  $x$  y  $z$ , y  $z$  e  $y$  respectivamente. Sea  $a$  un  $2\delta$ -centro del triángulo sobre  $\alpha$ . El punto  $a$  divide el lado en dos segmentos:  $\alpha[x, a]$  y  $\alpha[a, y]$ . Consideremos una geodésica que conecte  $a$  y  $z$ , denotada por  $\tau$ . Podemos ver que  $l(\alpha[x, a] \cup \tau) = d(x, a) + d(a, z) \leq d(x, z) + 4\delta$ , haciendo uso de (3.1), así que  $\alpha[x, a] \cup \tau$  es un camino  $4\delta$ -tenso, y por tanto está contenido en  $N(\beta, 6\delta)$  por el lema 3.1.2. En particular,  $\alpha[x, a] \subset N(\beta, 6\delta)$ .

Aplicando el mismo razonamiento obtenemos  $\alpha[a, y] \subset N(\gamma, 6\delta)$ , y juntando ambos resultados se deduce la contención deseada. □

La condición demostrada en la proposición 3.1.1 es, de hecho, equivalente a la hiperbolicidad de  $X$ . Si en un espacio geodésico  $X$  se verifica que para cualquier triángulo geodésico, cualquiera de sus lados está contenido en un entorno de radio fijo  $\delta'$  de los otros dos, entonces el espacio es hiperbólico. Basta ver que  $\alpha \cap N(\beta, \delta')$  y  $\alpha \cap N(\gamma, \delta')$  no pueden tener intersección vacía, ya que su unión es  $\alpha$ , que es un conjunto conexo. De tal modo, cualquier

punto de la intersección es un  $\delta'$ -centro del triángulo, y esta constante no depende del triángulo concreto que hayamos escogido.

Por último, presentamos el siguiente resultado, que es fundamental para dotar de coherencia el trabajo.

**Proposición 3.1.3** *Sean  $X$  e  $Y$  espacios geodésicos cuasi-isométricos.  $X$  es hiperbólico si y solo si  $Y$  lo es.*

La demostración de esta proposición es extensa y utiliza el concepto de cuasi-geodésicas y distancia de Hausdorff entre dos conjuntos, que no han sido definidos, así que no se presentará aquí. Sin embargo, puede consultarse en [2] o en [3] de manera más detallada. La idea reside en comprobar que la imagen por una cuasi-isometría de una geodésica no está “muy lejos” de una cuasi-geodésica, de modo que la imagen de un triángulo geodésico está próxima a un triángulo cuasi-geodésico. Por otra parte, se comprueba que una cuasi-geodésica se puede contener en un entorno de una geodésica que une sus extremos. Así se encuentra un  $\delta$ -centro para el triángulo en  $Y$ , y por la cuasi-isometría se puede llevar de vuelta a un  $\delta'$ -centro en  $X$ .

## 3.2. Grupos hiperbólicos.

Ya están presentados todos los conceptos necesarios para trabajar con grupos hiperbólicos, definiéndolos de manera coherente con los contenidos del segundo capítulo.

**Definición 3.5 (Grupo hiperbólico)** Se dice que un grupo finitamente generado  $G$  es hiperbólico si para algún conjunto generador finito suyo  $X$  el espacio  $(K(G, X), d)$  es un espacio hiperbólico.

En principio, con esta definición, determinar si un grupo es hiperbólico puede ser complicado por su dependencia con el conjunto generador escogido. Si un conjunto generador da lugar a un grafo que no es hiperbólico, ¿podemos asegurar que el grupo no es hiperbólico sin más? Aquí es donde la relación de cuasi-isometrías entra en juego y nos permite simplificar la definición de manera significativa. Los espacios métricos asociados a un grupo en función del conjunto generador (finito) escogido son todos cuasi-isométricos, al igual que sus grafos de Cayley. Pero por la proposición 3.1.3, la hiperbolicidad es invariante por cuasi-isometrías, de modo que un grupo es hiperbólico si y

solo si, dado cualquier conjunto generador finito suyo, su grafo de Cayley asociado es hiperbólico.

Una vez fijamos un conjunto de generadores concreto, decimos que un grupo es  $\delta$ -hiperbólico si  $\delta$  es constante de hiperbolicidad para el grafo de Cayley asociado.

**Ejemplos:**

1. Todo grupo libre de rango finito,  $F_n$ , es hiperbólico, pues el grafo de Cayley asociado a su conjunto generador libre es un árbol y por tanto sus triángulos geodésicos son 0-finos.
2. Todo grupo finito es hiperbólico. Por ser finito, cualquier grafo de Cayley suyo tiene diámetro finito,  $\delta$ , y por consiguiente todo triángulo geodésico es  $\delta$ -fino.
3. El grupo fundamental de una superficie compacta, orientable y de género  $g \geq 2$  es hiperbólico [7].
4. Todo grupo finitamente generado es cuasi-isométrico a cualquier subgrupo de índice finito suyo. Por tanto, todo grupo virtualmente hiperbólico (ser virtualmente una propiedad es decir que un subgrupo de índice finito cumple la propiedad) es hiperbólico, y cualquier subgrupo de índice finito de un grupo hiperbólico es hiperbólico [2].
5. Como caso particular,  $SL(2, \mathbb{Z})$  es hiperbólico, pues contiene el subgrupo generado por las matrices:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se puede demostrar que este subgrupo es libre de rango dos utilizando el lema del ping-pong, y además es de índice finito [7].

6.  $\mathbb{Z}^2$  no es hiperbólico. Podemos comprobar que su grafo de Cayley respecto de los generadores  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  no es hiperbólico. Los vértices de este grafo son los puntos  $(m, n) \in \mathbb{R}^2$  con coordenadas enteras, y las aristas van de  $(m, n)$  a  $(m + 1, n)$  y a  $(m, n + 1)$ . Podemos tomar el triángulo de vértices  $A = (0, 0)$ ,  $B = (0, n)$  y  $C = (n, 0)$ , con las geodésicas que se muestran en la figura 5.

El punto  $(n, n)$  sobre el lado que une  $B$  y  $C$  está a distancia  $n$  de los otros dos lados, y esto implica que  $\mathbb{Z}^2$  no es hiperbólico por la proposición 3.1.1.

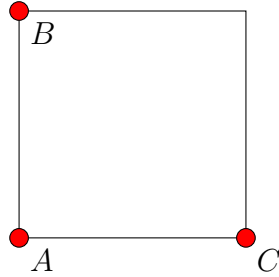


Figura 5: Triángulo geodésico en el grafo de Cayley de  $\mathbb{Z}^2 = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle$ .

7. Cualquier grupo  $G$  que contenga un subgrupo  $H$  isomorfo a  $\mathbb{Z}^2$  no es hiperbólico [7]. Esto es consecuencia de que en un grupo hiperbólico, para cualquier elemento de orden infinito  $g$ ,  $\langle g \rangle$  es un subgrupo de índice finito para su centralizador,  $C_G(g) = \{h \in G \mid hg = gh\}$ . Pero si  $g \in H$ , entonces  $\langle g \rangle \subset H \subset C_G(g)$ , y  $\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}$  no puede ser de índice finito en  $H \cong \mathbb{Z}^2$ , luego tampoco puede ser de índice finito en  $C_G(g)$ .
8.  $\text{SL}(3, \mathbb{Z})$  no es hiperbólico, pues el subgrupo generado por las siguientes matrices es isomorfo a  $\mathbb{Z}^2$ :

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De manera similar se puede comprobar que para cualquier  $n \geq 3$ ,  $\text{SL}(n, \mathbb{Z})$  no es hiperbólico.

9. Los grupos de Baumslag-Solitar son grupos de la forma:  $BS(n, m) \cong \langle a, b \mid a^m b = b a^n \rangle$ . Es fácil ver que  $\mathbb{Z}^2 \cong BS(1, 1)$ . La propiedad anterior contra la hiperbolicidad se puede generalizar gracias a estos grupos: ningún grupo hiperbólico puede contener un subgrupo de Baumslag-Solitar [2].

Por último, para terminar el capítulo, se demostrará una propiedad importante de estos grupos, que será especialmente relevante para su tratamiento posterior: si un grupo es hiperbólico, entonces es finitamente presentado. La

demostración está tomada de [6], ya que no se sustenta en resultados previos, aunque se puede encontrar en otras fuentes.

**Proposición 3.2.1** *Todo grupo  $\delta$ -hiperbólico es finitamente presentado.*

**Demostración:** Sea  $G$  un grupo  $\delta$ -hiperbólico para un conjunto finito de generadores  $X$ . Consideremos la métrica de la palabra en  $G$  asociada al conjunto generador  $X$ . Definimos los conjuntos:

$$X_n = \{g \mid g \in G, d_X(1, g) \leq n\}$$

$$R_n = \{xyz \mid x, y, z \in X_n, xyz = 1 \text{ en } G\} \subset F(X_n)$$

Estos conjuntos cumplen que  $X_n \subset X_{n+1}$  y  $R_n \subset R_{n+1}, \forall n$ . Además, dan lugar a una sucesión de grupos,  $G_n = \langle X_n \mid R_n \rangle$ .

A partir de estos grupos podemos construir una sucesión de homomorfismos:

$$G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow \dots$$

Donde  $\varinjlim G_n = G$  y donde cada homomorfismo  $f_n: G_n \longrightarrow G_{n+1}$  lleva una clase en  $G_n$  a la clase del mismo representante en  $G_{n+1}$ :  $f_n([w]_n) = [w]_{n+1}$ . Dichos homomorfismos están bien definidos, ya que  $X_n \subset X_{n+1}$  y si tomamos dos representantes en  $G_n$  de la misma clase,  $[x]_n = [x']_n$ , entonces  $xx'^{-1} \in \langle\langle R_n \rangle\rangle \subset \langle\langle R_{n+1} \rangle\rangle$ .

La idea de la demostración consiste en ver que para algún  $N$  lo suficientemente grande la cadena se estabiliza, todos los homomorfismos pasan a ser isomorfismos, y por tanto  $G \cong \langle X_N \mid R_N \rangle$ . Para ello empezamos viendo que todos los homomorfismos  $f_n$  son sobreyectivos. Esto es, todas las palabras de longitud  $n + 1$  se pueden generar a partir de las de longitud  $n$ .

Para ello, vamos a ver que la imagen de  $f_n$  contiene a todos los elementos de  $X_{n+1}$ . Y esto basta comprobarlo para elementos  $g \in X_{n+1} \setminus X_n$ . Si tomamos  $g \in X_{n+1} \setminus X_n$ , existen  $u, v \in X_n$  con  $uv = g$ , de modo que  $[g]_{n+1} = f_n([u]_n)f_n([v]_n)$ . Esto es lo mismo que decir que si tenemos una palabra de longitud  $n + 1$  podemos descomponerla en dos de longitud menor o igual que  $n$ . Por tanto,  $f_n$  es sobreyectivo para todo  $n$ .

A continuación, vamos a ver que a partir de un  $N \gg 2\delta'$  (donde  $\delta' = 6\delta$ ), las aplicaciones son inyectivas, y por tanto son isomorfismos que garantizan que  $G \cong \langle X_N \mid R_N \rangle$ . Para comprobar esto, vamos a ver que  $[w]_{N+1} = 1$

implica  $[w]_N = 1$ , donde  $w \in F(X_N)$ . Si conseguimos demostrar que toda relación en  $R_{N+1}$  se puede descomponer en relaciones en  $\langle\langle R_N \rangle\rangle$ , entonces se tiene la inyectividad.

Sea pues  $x, y, z \in X_{N+1}$  con  $xyz \in R_{N+1}$ . Si los tres elementos pertenecen a  $X_N$ , entonces  $xyz \in R_N$  por definición. Supongamos que no es así. En ese caso, para cada elemento  $w$  en  $X_{N+1} \setminus X_N$  podemos escoger una partición en dos palabras de longitud mayor que  $\delta'$ :  $w = w_1w_2$ , con  $d_X(1, w_1) > \delta'$  y  $d_X(1, w_2) > \delta'$ , y con  $d_X(1, w) = d_X(1, w_1) + d_X(1, w_2)$ . En particular, cada palabra de la descomposición tiene longitud estrictamente menor que  $N + 1$ . Distingamos casos:

**Caso 1:**  $\#(\{x, y, z\} \cap X_N) = 2$ . Podemos considerar, de hecho, que siempre es el último elemento el que no está en  $X_N$ ,  $z \notin X_N$ , ya que los otros casos se derivan de conjugar la relación (si  $xyz \in \langle\langle R_N \rangle\rangle$ , entonces  $yzx = x^{-1}(xyz)x \in \langle\langle R_N \rangle\rangle$ , y  $zxy = y^{-1}x^{-1}(xyz)xy \in \langle\langle R_N \rangle\rangle$ ). En este caso, elegimos un triángulo geodésico con vértices  $1, x, xy$  (ver figura 6). El lado que une  $xy$  con  $1$  es una geodésica que representa al elemento  $z$ , y podemos descomponerlo, como se ha explicado en el párrafo anterior, en dos segmentos  $z_1$  y  $z_2$  de longitud mayor o igual que  $\delta'$  (cuya suma además es la longitud de  $z$ ). Sea  $P$  el punto en que se divide la geodésica en estos dos segmentos. Por la hipótesis de hiperbolicidad, existe un punto  $Q$  sobre uno de los otros lados (digamos sobre la geodésica entre  $1$  y  $x$ ) tal que la distancia de  $Q$  a  $P$  es menor que  $\delta'$ . En particular, por la partición elegida,  $Q \neq 1, xy$ . Es más, aplicando la desigualdad triangular, se comprueba que  $d(Q, xy) \leq d(Q, P) + d(P, xy) < \delta' + (N + 1 - \delta') = N + 1$ . Podemos ahora descomponer el triángulo en otros tres (o dos si  $Q$  coincide con  $x$ ), uniendo mediante una geodésica  $Q$  con el vértice opuesto en el triángulo principal:  $1, Q, P$ ;  $Q, xy, P$  y  $x, xy, Q$ . Ver figura 6.

Estos tres triángulos ahora tienen lados con longitud menor o igual que  $N$ , de modo que hemos descompuesto la relación  $xyz_1z_2$  en otras tres relaciones con elementos de longitud menor o igual que  $N$  (cada triángulo es un conjugado de relaciones de  $R_N$ ). Así que podemos expresar la relación de  $R_{N+1}$  como producto de conjugados de relaciones de  $R_N$ .



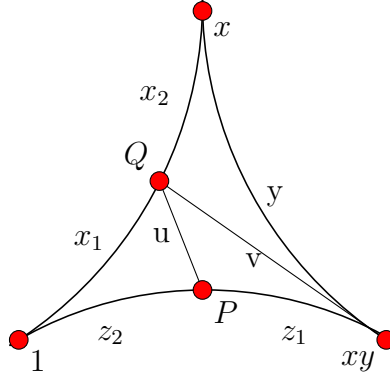


Figura 6: Representación de la relación  $xyz$  como producto de conjugados de las relaciones  $y$  y sus inversos  $r_1 = x_1uz_2$ ,  $r_2 = x_2yv$  y  $r_3 = z_1^{-1}vu$ :

$$xyz = (x_1uz_2)(z_2^{-1}u^{-1}x_2yvuz_2)(z_1^{-1}u^{-1}v^{-1}z_1z_2).$$

**Caso 2:**  $\#\{x, y, z\} \cap X_N \leq 1$ . Podemos proceder como antes, suponiendo que  $y, z \notin X_N$ , definiendo el punto  $P$  y encontrando un punto  $Q$  a distancia menor o igual que  $\delta'$  de  $P$  en alguno de los lados. Si  $Q$  no coincide con  $x$ , entonces  $Q$  divide al lado en que cae en dos segmentos de longitud estrictamente menor que  $N + 1$ , puesto que cada lado tiene longitud  $N + 1$  como mucho. Podemos volver a considerar los tres triángulos resultantes de unir  $Q$  con el vértice opuesto, por ejemplo  $1, Q, P$ ;  $Q, xy, P$  y  $x, xy, Q$ . La única salvedad es que ahora uno de los triángulos puede contener un lado con longitud  $N + 1$ , en este caso el triángulo  $x, xy, Q$ . Pero este se puede descomponer en otros tres aplicando el caso anterior, de modo que obtenemos una descomposición de la relación de  $R_{N+1}$  en varios conjugados de relaciones de  $R_N$ .

Si  $Q$  coincide con  $x$ , basta aplicar el caso 1 a los dos triángulos  $1, x, P$  y  $x, xy, P$  para descomponerlos de nuevo.  $\square$

## Capítulo 4

# El problema de la palabra en grupos hiperbólicos.

Como ya se comentó en el capítulo primero, el problema de la palabra es indecidible en general, ya que existen grupos para los que no hay un algoritmo que nos determine cuándo una palabra en los generadores del grupo (y sus inversos) representa el elemento neutro. El objetivo de este capítulo es utilizar las herramientas desarrolladas previamente para obtener una respuesta para los grupos hiperbólicos: ¿tienen estos grupos problema de la palabra resoluble, irresoluble o depende del grupo considerado?

### 4.1. Desigualdad isoperimétrica. Área de una palabra.

Para comenzar a abordar la pregunta planteada es necesario hablar de la desigualdad isoperimétrica, tomando como referencias [6] y [3]. Supongamos un espacio métrico y una curva cerrada  $C$  de longitud  $l(C)$ . La desigualdad isoperimétrica nos da una relación entre la longitud de la curva y el área que encierra en su interior. En el plano euclídeo, por ejemplo, es conocido que la curva  $C$  de longitud fija  $l(C) = l$  que encierra área máxima es la circunferencia. Por tanto, para cualquier otra curva  $C'$  de la misma longitud, se comprueba que:

$$A(C') \leq A(C) = \frac{l^2}{4\pi}$$

. Esto quiere decir que el área de una región compacta y conexa está acotada superiormente en función de la longitud de su borde: no podemos obtener regiones arbitrariamente grandes con bordes cualesquiera. En este caso, la dependencia es cuadrática, pero en distintos espacios puede variar.

Un ejemplo relevante para esta discusión es el plano hiperbólico,  $\mathbb{H}^2$ . La curva  $C$  que encierra mayor área para una longitud  $l$  fija vuelve a ser la circunferencia, que en este caso tiene una longitud, en función del radio  $r$ , de  $2\pi \sinh r$ . Basta calcular el área de un disco en el plano hiperbólico para comprobar cómo es su desigualdad isoperimétrica. Para cualquier otra curva  $C'$  de longitud  $l$ :

$$A(C') \leq A(C) = \int_0^r 2\pi \sinh t \, dt = 2\pi(\cosh r - 1) \leq 2\pi \sinh r = l$$

Es decir, la desigualdad isoperimétrica es lineal.

Al definir el concepto de grupo hiperbólico, hacemos una asociación entre un grupo y un espacio métrico geodésico, su grafo de Cayley, y buscamos en este la propiedad de hiperbolicidad. Por esta razón, podemos preguntarnos si, por analogía con el plano hiperbólico, los grafos de Cayley y los grupos asociados presentan también una desigualdad isoperimétrica lineal. La respuesta es que sí, pero antes de entrar en detalles sobre la demostración, debemos preguntarnos qué entendemos por “área” en un grupo (que asumiremos finitamente presentado) o un grafo.

La desigualdad isoperimétrica tiene sentido cuando hablamos de curvas cerradas en un espacio métrico, y el área se relaciona con aquello que encierra la curva. Comenzaremos hablando del concepto de área en un grupo, partiendo de una palabra representando el elemento neutro (el equivalente a un camino cerrado).

Sea  $G \cong \langle X \mid R \rangle$  un grupo finitamente presentado y sea  $w$  una palabra en los generadores  $X$  que representa el elemento neutro en  $G$ . Sabemos que se tiene la siguiente igualdad en  $F(X)$ :

$$w = \prod_{i=1}^n v_i^{-1} r_i^{\varepsilon_i} v_i \quad (4.1)$$

Donde  $v_i$  es una palabra en los generadores,  $r_i \in R$  y  $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ , para todo  $1 \leq i \leq n$ . Esta descomposición no tiene por qué ser única, en principio.

**Definición 4.1** Dado un grupo  $G \cong \langle X \mid R \rangle$  finitamente presentado y dada una palabra  $w$  representando al elemento neutro, se define su *área*,  $A(w)$ , como el menor  $n$  tal que  $w$  admite una expresión como en (4.1).

Esta definición de área de una palabra, junto con la longitud de la misma, nos permite trabajar con desigualdades isoperimétricas. Ahora bien, ¿cómo se traduce esto en el grafo de Cayley correspondiente? Una palabra que represente al elemento neutro se asocia a un camino cerrado en el grafo de Cayley, fijado un punto base (generalmente el elemento neutro). Un diagrama de Van Kampen para esa palabra se construye a partir de un subgrafo del grafo de Cayley delimitado por dicho camino cerrado:

**Definición 4.2** Sea  $G \cong \langle X \mid R \rangle$  un grupo finitamente presentado. Un *diagrama de van Kampen* es un complejo 2-dimensional conexo con las siguientes propiedades:

1. Toda 1-celda (arista) está orientada y etiquetada con un elemento de  $X$ .
2. Para toda 2-celda, si leemos las etiquetas de su borde en una dirección concreta, empezando desde un punto concreto, obtenemos una relación de  $R$  (donde leer una arista en la dirección opuesta a su orientación equivale a leer el inverso del generador).

Es fácil comprobar que el 1-esqueleto de un diagrama de van Kampen es un subgrafo del grafo de Cayley. Leyendo el contorno de un diagrama de van Kampen en un sentido determinado obtenemos una palabra en los generadores de  $G$ , que además representa al elemento neutro por ser un camino cerrado. Aquí se ve la equivalencia entre la combinatoria del grupo y la geometría del grafo: una palabra representando al elemento neutro es un camino cerrado, y la cantidad de relaciones necesarias para construirla son la cantidad de 2-celdas utilizadas en un diagrama de van Kampen asociado, donde la conjugación en la expresión (4.1) es necesaria para trasladar las relaciones al punto del diagrama donde se encuentran. Podemos definir, por tanto, el área de un camino cerrado en el grafo de Cayley como el mínimo número de 2-celdas que encierra, visto como complejo.

El siguiente ejemplo permite visualizar mejor estos conceptos.

**Ejemplo:**

Sea  $G = \langle a, b, c \mid r_1 = aba^{-1}b^{-1}, r_2 = c^2b^{-1} \rangle$  y sea  $w = ac^2a^{-2}c^{-2}bab^{-1}$ . La palabra  $w$  representa al elemento neutro, ya que se puede escribir como:

$$w = (ar_2a^{-1})(r_1)(ba^{-1}r_2^{-1}ab^{-1})$$

Un diagrama de van Kampen asociado a esta palabra puede ser el siguiente:

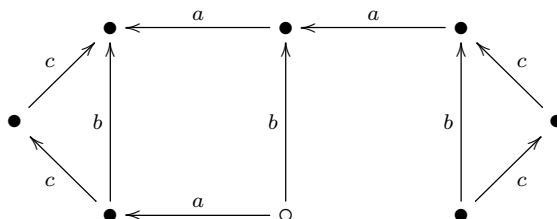


Figura 7: Diagrama de van Kampen asociado a la palabra  $ac^2a^{-2}c^{-2}bab^{-1}$ .

Empezando en el punto blanco, leyendo las etiquetas en sentido horario obtenemos  $w$ . Cada 2-celda representa una relación, leyendo su contorno. La expresión de la palabra como producto de conjugados de relaciones se traduce en el diagrama como desplazarse hacia una 2-celda, recorrerla en un cierto sentido y luego regresar por el mismo camino. El área está relacionada, pues, con la cantidad de 2-celdas que hay en el diagrama de van Kampen. Podemos ver que en este caso  $A(w) \leq 3$  (habría que comprobar si este es el mínimo de hecho de todas las relaciones).

La equivalencia combinatoria y geométrica de ambas definiciones de área se puede demostrar, como se ve en el siguiente teorema, extraído de [9].

**Teorema 4.1.1** *Todo diagrama de van Kampen con  $n$  2-celdas para una palabra  $w$  da lugar a una manera de expresar  $w$  como un producto  $\prod_{i=1}^n v_i^{-1} r_i^{\varepsilon_i} v_i$ , con  $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ . Todo producto  $\prod_{i=1}^n v_i^{-1} r_i^{\varepsilon_i} v_i$  con  $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$  da lugar a un diagrama de van Kampen para  $w$  con como mucho  $n$  2-celdas. En particular,  $w$  admite un diagrama de van Kampen si y solo si representa al elemento neutro.*

Si tenemos una expresión para una palabra  $w$  como en (4.1), es sencillo obtener su diagrama de van Kampen asociado: basta tomar un punto de inicio e ir recorriendo el camino en el grafo de Cayley: por cada producto, representamos un camino “de ida”  $v_i^{-1}$  hacia la relación, luego el camino cerrado asociado a la relación, y por último el camino “de vuelta”,  $v_i$ .

Esta construcción, además, da lugar a un diagrama dual al diagrama de van Kampen, presentado en [4], en las páginas 40 y 41. El resultado de esta construcción es un disco agujereado, donde cada agujero es una de las 2-celdas asociadas a la expresión de la palabra  $w$ . El área también se visualiza

así como el número de agujeros del disco, y el área de una palabra como el área combinatoria mínima de un disco asociado a la palabra.

Con estas nociones de área, podemos volver a la desigualdad isoperimétrica y comprobar que los grupos hiperbólicos tienen desigualdad isoperimétrica lineal, al igual que el plano hiperbólico.

**Teorema 4.1.2** *Todo grupo  $\delta$ -hiperbólico tiene desigualdad isoperimétrica lineal.*

La demostración de este teorema se realiza por inducción en la longitud de un camino cerrado en el grafo de Cayley respecto de unos generadores fijos, donde la constante  $\delta$  de hiperbolicidad hará referencia a la que se obtiene en la proposición 3.1.1 de ahora en adelante.

Para realizar la prueba, es necesario primero demostrar un lema que nos permite descomponer caminos cerrados en otros dos: uno de longitud acotada por  $12\delta$  y otro de longitud estrictamente menor que el inicial.

**Lema 4.1.3** *Sea  $G$  un grupo  $\delta$ -hiperbólico con un conjunto de generadores  $X$ . Para toda palabra  $w$  representando al elemento neutro, asociada a un camino cerrado  $\gamma$  en  $K(G, X)$ , existen dos subpalabras  $w_1$  y  $w_2$  de modo que  $w$  puede escribirse como  $\beta w_1 \alpha^{-1} \beta^{-1} \beta \alpha w_2 \beta^{-1}$  para algunas palabras  $\alpha$  y  $\beta$ , verificando que  $\beta w_1 \alpha^{-1} \beta^{-1}$  y  $\beta \alpha w_2 \beta^{-1}$  también son palabras que representan al elemento neutro y que si denotamos por  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  los caminos cerrados asociados, estos encierran la misma área que un par de caminos  $\gamma'_1$  y  $\gamma'_2$  de longitud  $l(\gamma'_1) \leq 12\delta$  y  $l(\gamma'_2) < l(\gamma)$ .*

**Demostración:** Sea  $\gamma$  un camino cerrado de longitud  $n$  que parametrizamos mediante su longitud de arco, fijando un punto base. Vamos a distinguir dos casos:

**Caso 1:** supongamos que existe un vértice  $u = \gamma(t)$  tal que el vértice  $v = \gamma(t + 6\delta)$  se encuentra a distancia  $d(u, v) < 6\delta$ . Podemos suponer que  $u$  es el punto base reparametrizando el camino, de modo que  $u = \gamma(0)$ . Al reparametrizar el camino, lo que estamos haciendo es conjugar la palabra inicial  $w$  por un elemento  $\beta$  para desplazar el punto base. Esto implica que los caminos cerrados que vamos a obtener, partiendo del punto base original, tienen una longitud que depende del punto  $u$ . Sea  $\alpha$  una geodésica que conecta  $u$  con  $v$ , y denotemos por  $-\alpha$  la misma geodésica recorrida en sentido

contrario. Podemos definir los siguientes caminos cerrados:

$$\gamma'_1 = \gamma([0, 6\delta]) \cup (-\alpha)$$

$$\gamma'_2 = \alpha \cup \gamma([6\delta, n])$$

donde los caminos  $\gamma([0, 6\delta])$  y  $\gamma([6\delta, n])$  están asociados a las palabras  $w_1$  y  $w_2$ . Basta comprobar ahora que  $l(\alpha) = d(u, v) < 6\delta = l(\gamma([0, 6\delta]))$ . De este modo, es inmediato que  $l(\gamma'_1) \leq 12\delta$  y  $l(\gamma'_2) < l(\gamma)$ . Además, estos dos caminos asociados a las palabras  $w_1\alpha^{-1}$  y  $\alpha w_2$  tienen la misma área que los caminos de longitud arbitraria que parten del punto base fijado (asociados a las palabras  $\beta w_1\alpha^{-1}\beta^{-1}$  y  $\beta\alpha w_2\beta^{-1}$ ), ya que la conjugación de una palabra no altera su área.

**Caso 2:** supongamos que para todo vértice  $u = \gamma(t)$  se verifica que  $d(u, v) = 6\delta$ , donde  $v = \gamma(t + 6\delta)$ , con  $t + 6\delta$  módulo  $n$ . Notemos que  $d(u, v) \leq l(\gamma[t, t + 6\delta]) = 6\delta$ , así que estos son todos los casos posibles.

Esta hipótesis implica que todo segmento en  $\gamma$  de longitud  $6\delta$  es una geodésica. Si no fuera geodésica, existirían  $0 < k_1 < k_2 < 6\delta$  tal que  $d(\gamma(s + k_1), \gamma(s + k_2)) < k_2 - k_1$ . Pero entonces, aplicando la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} k_1 + 6\delta - k_2 &\geq d(\gamma(s), \gamma(s + k_1)) + d(\gamma(s + k_2), \gamma(s + 6\delta)) > \\ &> d(\gamma(s), \gamma(s + 6\delta)) - (k_2 - k_1) \end{aligned}$$

Que entra en contradicción con  $d(\gamma(s), \gamma(s + 6\delta)) = 6\delta$ .

Sea  $v_0 = \gamma(0)$  el punto base del camino y sea  $v = \gamma(t)$  el punto a mayor distancia de  $v_0$  sobre el camino. Definimos  $v^+ = \gamma(t + 3\delta)$  y  $v^- = \gamma(t - 3\delta)$ .

Sean ahora  $\alpha$  y  $\beta$  geodésicas que conectan  $v_0$  con  $v^-$  y  $v^+$  respectivamente. El triángulo formado por los vértices  $v_0, v^-$  y  $v^+$  y lados  $\alpha, \gamma([t - 3\delta, t + 3\delta]), \beta$  es geodésico. Por hiperbolicidad, el punto  $v \in \gamma([t - 3\delta, t + 3\delta])$  se encuentra a distancia menor o igual que  $\delta$  de algún punto  $u$  en alguno de los lados (supongamos sin pérdida de generalidad que es  $\alpha$ ). Definimos  $r = d(v_0, u)$  y  $s = d(u, v^-)$  (ver figura 8).

Aplicando la desigualdad triangular de nuevo, obtenemos:

$$d(v_0, v) \leq r + \delta$$

$$s \geq 3\delta - \delta = 2\delta$$

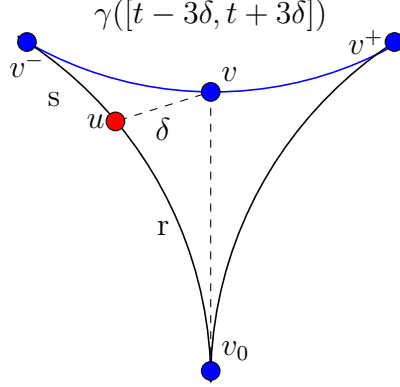


Figura 8: Se ha dibujado en azul el segmento perteneciente al camino cerrado inicial y los vértices que se encuentran sobre el camino.

Utilizando ahora que  $v$  maximiza la distancia a  $v_0$ :

$$d(v_0, v) \geq d(v_0, v^-) = r + s \geq r + 2\delta > r + \delta \geq d(v_0, v)$$

Y esto es una contradicción con la hipótesis inicial. Por tanto el caso segundo no es posible y concluimos la demostración.  $\square$

Gracias a este lema, podemos probar el teorema 4.1.2.

**Demostración (del teorema 4.1.2):** Sea  $G$  un grupo  $\delta$ -hiperbólico con un conjunto de generadores finito  $X$ . Como el grupo es finitamente generado por hipótesis, existen un número finito de caminos cerrados (fijado un punto base) de longitud menor o igual que  $12\delta$ , así que podemos escoger  $K = \max\{A(\gamma) \mid \gamma \text{ camino cerrado, } l(\gamma) \leq 12\delta\}$ .

Sea  $\gamma$  un camino cerrado en su grafo de Cayley. Si la longitud del camino es menor o igual que  $12\delta$ , entonces  $A(\gamma) \leq K \leq Kl(\gamma)$ . En caso contrario, supongamos el resultado probado para caminos de longitud  $l(\gamma) \leq n$  y veamos qué ocurre para un camino con longitud  $l(\gamma) = n + 1$ . Por el lema 4.1.3, podemos reescribir la palabra asociada a  $\gamma$  como producto de dos palabras asociadas a caminos cerrados  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , cumpliendo que  $A(\gamma_1) = A(\gamma'_1)$  y  $A(\gamma_2) = A(\gamma'_2)$  para ciertos caminos  $\gamma'_1$  y  $\gamma'_2$  que verifican las desigualdades  $l(\gamma'_1) \leq 12\delta$  y  $l(\gamma'_2) < l(\gamma)$ . Podemos aplicar el caso anterior y la hipótesis de inducción a los dos nuevos caminos cerrados, respectivamente, y obtenemos:

$$A(\gamma) \leq A(\gamma_1) + A(\gamma_2) = A(\gamma'_1) + A(\gamma'_2) \leq K + Kl(\gamma'_2) = K(l(\gamma'_2) + 1) \leq Kl(\gamma)$$



□

Este teorema es de hecho una equivalencia: un grupo con desigualdad isoperimétrica lineal es hiperbólico. Sin embargo, la equivalencia no es necesaria para el resultado final del trabajo, así que no se incluirá. Puede consultarse una demostración en [3] (de donde se ha extraído además la demostración del teorema 4.1.2).

## 4.2. El problema de la palabra en grupos hiperbólicos.

En esta última sección se demostrará finalmente que el problema de la palabra es resoluble para grupos hiperbólicos, haciendo uso de la desigualdad isoperimétrica lineal demostrada previamente. Para concluir el resultado se utilizarán varias demostraciones de [4], junto con algunas definiciones de [6].

**Definición 4.3** Dada una presentación de un grupo,  $G \cong \langle X \mid R \rangle$ , se define su *función de Dehn* o *función isoperimétrica* como la siguiente función entre números naturales:

$$f(n) = \text{máx}\{A(w) \mid w \in F(X), w = 1 \text{ en } G, l(w) \leq n\}$$

La función de Dehn de un grupo para un conjunto generador cuyo relaciona el área de las palabras que representan al elemento neutro con su longitud. Esta función está íntimamente relacionada con la desigualdad isoperimétrica. En un grupo hiperbólico es fácil comprobar que escogiendo  $K$  como en el teorema 4.1.2, se verifica la desigualdad  $f(n) \leq Kn$ . Y esto es el punto clave para resolver el problema de la palabra en grupos hiperbólicos, junto con el siguiente lema:

**Lema 4.2.1** *Sea  $w$  una palabra reducida que podemos expresar como producto de  $n$  conjugados de relaciones como en (4.1) y sea  $k$  el máximo de las longitudes de las relaciones. Entonces podemos reescribir  $w$  como producto de conjugados de relaciones de manera que los  $v_i$  tengan longitud menor o igual que  $(l(w) + 2k)2^n$ , para todo  $1 \leq i \leq n$ .*

La demostración de este lema puede consultarse en [4] y hace uso del diagrama de van Kampen dual. La idea principal consiste en “recortar” el

diagrama de manera que vamos eliminando los agujeros en su interior, controlando el número de aristas que quedan en su interior. Tras el primer recorte, se llega a una palabra equivalente  $w' = w(ur^{-1}u^{-1})$  de área menor, donde los elementos que conjugan la relación,  $u$ , tienen longitud acotada. Al ir disminuyendo el área de  $w'$ , llegamos al elemento neutro y podemos reescribir  $w$  como deseamos.

Finalmente, podemos juntar todos los resultados del trabajo para demostrar que el problema de la palabra se puede resolver en un grupo hiperbólico.

**Teorema 4.2.2 (El problema de la palabra en grupos hiperbólicos)**  
*Todo grupo hiperbólico tiene problema de la palabra resoluble.*

**Demostración:** Sea  $G$  un grupo  $\delta$ -hiperbólico, y sea  $\langle X \mid R \rangle$  una presentación finita suya (que existe por la proposición 3.2.1). Tomemos una palabra en sus generadores,  $w$ , que podemos asumir reducida (de no serlo, podemos reducirla y obtenemos otra palabra equivalente). Vamos a comprobar si  $w$  representa el elemento neutro o no.

Si  $w$  representase el elemento neutro, entonces podríamos escribir la palabra como en (4.1), para un determinado  $n$ . Dada la palabra, podemos calcular su longitud,  $l$ , y en virtud del teorema 4.1.2, deducimos que el área de la palabra debería ser  $n \leq Kl$ . Por tanto, hay un número finito de combinaciones de conjugados de relaciones que debemos usar, ya que  $R$  es un conjunto finito.

Por otro lado, si  $w$  se puede escribir como producto de conjugados de relaciones, gracias al lema 4.2.1, sabemos que además podemos elegir esta descomposición para que los elementos de conjugación tengan una longitud menor o igual que  $(l + 2k)2^n \leq (l + 2k)2^{Kl}$ . Es decir, la longitud de los  $v_i$  está acotada en función de la longitud de la palabra, al igual que el área, y hay por consiguiente un número finito de posibles elecciones (ya que el número de generadores es finito).

Basta escribir todas las combinaciones posibles de hasta  $Kl$  productos, con todos los posibles  $v_i$  de hasta  $(l + 2k)2^{Kl}$  de longitud, y comprobar si  $w$  representa el mismo elemento en  $F(X)$  (el algoritmo se reduce a resolver el problema de la palabra en un grupo libre). Como existen un número finito de posibilidades, el proceso siempre acaba.  $\square$

Hemos concluido con esto el objetivo del trabajo, que es comprobar la utilidad de la geometría para resolver problemas computacionales. El algoritmo

propuesto es altamente ineficiente, pero basta para confirmar la posibilidad de resolver el problema de la palabra. De hecho, este teorema es bastante más general ([4]), y permite resolver el problema de la palabra en grupos que tengan una función isoperimétrica recursiva: los grupos hiperbólicos simplemente son un caso particular de esta clase de grupos, pues su función isoperimétrica es lineal. Es más, el teorema asegura que hay una equivalencia entre tener problema de la palabra decidible y tener función isoperimétrica recursiva, que abre las puertas a un estudio mucho más amplio de qué grupos pueden tener problema de la palabra resoluble o no.

# Bibliografía

- [1] G. Baumslag. “Wreath products and finitely presented groups”. En: *Mathematische Zeitschrift* 75 (1961).
- [2] B. Bowditch. *A Course on Geometric Group Theory*. Vol. 16. Mathematical Society of Japan Memoirs, 2006.
- [3] C. Druţu y M. Kapovich. *Geometric group theory*. Vol. 63. American Mathematical Soc., 2018.
- [4] D. B. A. Epstein. *Word Processing in Groups*. Jones y Bartlett Publishers, 1992.
- [5] M. Gromov. *Essays in Group Theory*. Vol. 8. Mathematical Sciences Research Institute Publications, 1987.
- [6] J. Howie. *Hyperbolic groups lecture notes*. 2015. URL: <https://citeserx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=fbc5a2acbd7ed451bbcf86615a2e2858459f4d6>.
- [7] C. Löh. *Geometric group theory, an introduction*. Springer, 2017.
- [8] P. S. Novikov. *On the algorithmic unsolvability of the word problem in group theory*. Vol. 44. Trudy Mat. Inst. Steklov, 1955.
- [9] M. Shapiro y W. Neumann. “A short course in geometric group theory”. En: *Health Physics* 77 (1999).
- [10] J. Stillwell. *Classical topology and combinatorial group theory*. Springer, 1991.