ESTRUCTURANDO LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS: UNA PROPUESTA DESDE EL MODELO MTSK

STRUCTURING MATHEMATICS TEACHER EDUCATION: A PROPOSAL FRAMED BY THE MTSK MODEL

Montes, M.[1], Carrillo, J.[1], Contreras, L. C.[1], Liñán-García, M. M.[2, 3] y Barrera-Castarnado, V. J.[2, 3]

[1]*Universidad de Huelva;* [2]*Universidad de Sevilla;*
[3]*Centro de Estudios Universitarios Cardenal Spínola CEU*

RESUMEN

En este capítulo abordamos cómo el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas constituye una herramienta útil para organizar la formación inicial de los maestros, en lo relativo al contenido matemático, desde una doble perspectiva: la estructuración de las asignaturas, y el diseño de tareas. Mostraremos para esto dos ejemplos propios de la Universidad de Huelva: una asignatura orientada hacia la construcción de conocimiento geométrico, tanto matemático como didáctico, y una tarea centrada en la reflexión sobre las características de los polígonos.

Palabras clave: *formación inicial de maestros, tareas, profesor de matemáticas, conocimiento especializado, MTSK.*

Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M. y Barrera-Castarnado, V. J. (2019). Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: una propuesta desde el modelo MTSK. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 157-176). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

ABSTRACT

In this chapter we focus on how the Mathematics Teachers' Specialized Knowledge is a powerful tool to frame prospective mathematics teachers' training from a double perspective: the structuring of the subjects, and the design of tasks. Aiming a better understanding of our perspective, we will show two examples from the University of Huelva: a subject oriented towards the construction of geometrical knowledge, both mathematical and didactical knowledge, and a task focused on the reflection about some features of polygons.

Keywords: *teacher education, tasks, mathematics teacher, specialized knowledge, MTSK.*

INTRODUCCIÓN

La formación inicial de profesores de matemáticas en España es diferente en el caso de profesores de Educación Secundaria (donde realmente tiene sentido hablar de profesores de matemáticas) y de Educación Primaria (donde tendríamos que hablar de maestros que enseñan matemáticas). En la actualidad, la primera es una formación dividida entre Grado (no necesariamente de Matemáticas, pero en general sin una orientación específica a la profesión docente) y Máster (Máster en Profesorado de Secundaria y Bachillerato); mientras que la segunda es de Grado y con orientación hacia la profesión docente.

Aunque sería interesante abordar la carrera docente como un continuo coherente y discutir en ese ámbito la orientación específica a seguir, nos centraremos en este capítulo solo en la formación de maestros de Educación Primaria. No obstante, no evitaremos así la complejidad que supone que, bajo directrices de Planes de Estudio comunes en todo el Estado, se desarrollen programas formativos donde conviven modelos diferentes de organizar el contenido matemático y el didáctico del contenido, bajo el epígrafe genérico de «Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas».

Para salvar la distancia existente entre la formación inicial y la práctica profesional (Goos, 2014), la formación de profesores de matemáticas debería inspirarse en las tareas y competencias profesionales. Por eso, cuando pensamos en el diseño de programas y actividades para la formación inicial, debemos tener la mirada puesta en lo que un profesor tendrá que hacer cuando se encuentre en su aula.

Una sesión de aula de matemáticas siempre tiene un detonante; ese detonante puede ser, por ejemplo, una pregunta de un estudiante o del profesor, o un problema o una actividad con un recurso o extraída de un libro de texto. En los casos en los que es el profesor quien lo provoca, estamos o bien ante una tarea planificada, o un momento de improvisación; cuando proviene del estudiante, ante una situación de contingencia (Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep, 2009). En ambos casos, el itinerario que sigue al detonante no está unívocamente determinado, aunque puede caracterizarse por momentos de interacción del profesor con los estudiantes (intentando comprender sus intervenciones, respondiendo o canalizando las respuestas a sus preguntas, reconduciendo los errores o lanzando nuevos retos), o del profesor y los estudiantes con el contenido matemático (Jaworski, 1994), desarrollando investigaciones o resolviendo problemas en cuyos procesos la argumentación y la demostración serán constantes; y para ello, se apoyará en diversos recursos (el libro de texto, material manipulativo o recursos tecnológicos). Estos momentos descritos han de acompañarse necesariamente de otros de institucionalización de los aprendizajes (Brousseau, 2007). En las situaciones de contingencia, además, el profesor necesitará hacer uso de su espacio de ejemplos en el ámbito del contenido matemático que está abordando (Sinclair, Watson, Zazkis y Mason, 2011).

La clase termina, pero no así el trabajo del profesor, que necesita reflexionar sobre la sesión desarrollada y planificar la siguiente. Para que esta reflexión sea efectiva es útil que disponga de un marco organizativo que le ayude a realizarla de forma disciplinada y estructurada, para identificar los elementos esenciales de la práctica, reflexionar sobre esos elementos de forma integrada y ofrecer planteamientos alternativos de enseñanza (Santagata y Guarino, 2011), así como para aprender a mirar con sentido la práctica profesional, propia o de otros (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo, 2018).

El proceso de aprender a enseñar matemáticas requiere que estas tareas profesionales formen parte de la rutina de actividades de la formación inicial de forma que tanto la reestructuración (y a veces reconstrucción), como la comprensión profunda del contenido matemático (Ma, 1999), se desarrollen en escenarios centrados en las tareas de enseñanza, generando oportunidades de aprendizaje situado en el contexto de la práctica (Ball y Cohen, 1999). Ello no significa que la formación tenga que desarrollarse en la propia aula de Primaria o Secundaria; podría tener lugar mediante el uso de material, como casos o videocasos, que permita compartir experiencias para explorar aspectos centrales de la práctica (Borko, Koellner y Jacobs, 2011), potenciando así también la construcción de conocimiento didáctico del contenido matemático. Las actividades a desarrollar en la formación inicial así diseñadas ofrecerán a los futuros profesores múltiples oportunidades de aprendizaje: oportunidades para desempaquetar los contenidos matemáticos implicados (Ma, 1999), para organizarlos dentro de una estructura coherente, mejorar su capacidad de argumentar, discutir sobre formas de abordar esos contenidos, comprender el pensamiento de los estudiantes, anticipar sus respuestas, generar ejemplos para reconducirlas o reflexionar sobre la oportunidad de que determinada actividad se desarrolle en un nivel determinado.

En los apartados que siguen describiremos el modelo analítico de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), desarrollado en la Universidad de Huelva. Una parte importante de su construcción se ha realizado en el contexto de actividades de desarrollo profesional en entornos colaborativos. En la actualidad, como sugieren Kilpatrick y Spangler (2016), el MTSK ha servido como una conceptualización que orienta el tipo de conocimiento que un formador de profesores debe pretender que construyan los futuros docentes. MTSK desgrana los diferentes tipos de conocimiento que un profesor pone en juego cuando enseña matemáticas, por ello, lo hemos empezado a utilizar para el diseño de programas de formación inicial de profesores. Tras la presentación del modelo, mostraremos cómo MTSK puede servir para organizar la formación inicial en dos niveles, el curricular y el del diseño de tareas. Ejemplificaremos ese diseño poniendo de relieve el proceso de génesis de una tarea formativa elaborada desde MTSK.

UN MODELO DE CONOCIMIENTO PROFESIONAL ESPECIALIZADO PARA EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS: MTSK

Todo modelo, esquema o marco teórico es una representación de un concepto que supone un posicionamiento, una perspectiva respecto del objeto de estudio, y una acotación; interesarán unas características o unas dimensiones de ese objeto y no otras. Un modelo, por tanto, propone una representación (mental y gráfica) de la realidad que se proyecta en el objeto, sin ánimo de exhaustividad. Siguiendo a Chacín (2008, p. 57),

> Un modelo es un espacio conceptual que facilita la comprensión de la realidad compleja, ya que selecciona el conjunto de elementos más representativos, descubriendo la relación entre ellos y profundizando en la implicación que la práctica aporta para investigar y derivar nuevos conocimientos.

Efectivamente, la creación de un modelo pretende servir de herramienta epistemológica, mejorando la comprensión del objeto de estudio.

El modelo MTSK no tiene como propósito prioritario contrastar y evaluar el conocimiento poseído por el profesorado y determinar el contenido de la formación inicial, sino reflexionar sobre los elementos que conforman el conocimiento existente y orientar el contenido de la formación inicial. En su uso en la investigación asume la noción de conocimiento de Schoenfeld (2010, p. 25):

> Yo defino el conocimiento de un individuo como la información que tiene disponible para usar para resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar cualquier tarea. ¡Nótese que, de acuerdo con esta definición, el conocimiento no ha de ser necesariamente correcto!

Schoenfeld apunta, de este modo, tres aspectos importantes en relación con esta caracterización que es también un posicionamiento: es una información disponible, está destinado a su uso, y no es necesariamente correcto. Es evidente que el uso del modelo MTSK en formación inicial es diferente, pues las condiciones de las instituciones encargadas de dicha formación incluyen la obligación de realizar una evaluación que mida el nivel de competencia y conocimiento de los futuros profesores.

Como herramienta analítica, sirve para realizar análisis con cierto nivel de profundidad y minuciosidad, al tiempo que debe enfrentar el riesgo de atomizar un objeto de estudio que es sumamente complejo. Para ello, el MTSK (figura 1) contempla tres dominios: conocimiento matemático, conocimiento didáctico del contenido matemático y creencias y concepciones. A su vez, el dominio del conocimiento matemático se subdivide en tres subdominios: conocimiento de los temas, conocimiento de la estructura de la matemática y conocimiento de la práctica matemática. Por su parte, el conocimiento didáctico del contenido matemático se subdivide en otros tres subdominios: conocimiento de la enseñanza de la matemática, conocimiento de las características del aprendizaje matemático y conocimiento de los estándares de aprendizaje de la matemática. Cada uno de estos subdominios posee un conjunto de categorías e indicadores que ayudan a describir dicho subdominio y a operativizar el análisis. En cuanto al dominio de las creencias y concepciones, diferenciamos tres concepciones sobre la matemática (instrumentalista, platónica y de resolución de problemas) y cuatro tendencias didácticas (tradicional, tecnológica, espontaneísta e investigativa) articuladas en un sistema compuesto por las categorías propuestas por Carrillo y Contreras (1994).

En el desarrollo del modelo MTSK nos basamos, fundamentalmente, en Shulman (1986) y Ball, Thames y Phelps (2008). Conservamos los dominios del conocimiento matemático y del conocimiento didáctico del contenido matemático (aunque con una estructuración diferente), añadiendo el dominio de las creencias y concepciones del profesor sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje, ya que estas nos ayudan a comprender mejor la práctica del profesor, en particular las relaciones entre subdominios. Asimismo, la noción de especialización está ligada a la necesidad en la enseñanza, no a la diferenciación con respecto a otros profesores o profesionales de la matemática. Esta noción de especialización se expone con más detalle en Scheiner, Montes, Godino, Carrillo y Pino-Fan (2019), donde, además, se discute en relación con otros modelos, como el de Conocimiento Didáctico-Matemático (Godino, 2009). El modelo MTSK es también deudor de las ideas de Ma (1999) en tanto en cuanto se concibe la posibilidad de que el profesor conozca en profundidad los distintos elementos de conocimiento que integran cada uno de los subdominios y que conozca las relaciones entre estos elementos. A continuación, se presenta brevemente el modelo MTSK, con la descripción de los subdominios del conocimiento matemático y del conocimiento didáctico del contenido.

De Carrillo, Montes, Contreras y Climent (2017, pp. 191-193) se extrae una síntesis de la descripción de los subdominios (consultar Carrillo et al., 2018 para una descripción más extensa, incluyendo explicación del proceso de obtención del modelo; consultar Carrillo, Climent, Contreras y Ribeiro, 2017 y Carrillo, Montes et al., 2017, para ver ejemplos de aplicación del modelo). El primero de los subdominios del conocimiento matemático es el *conocimiento de los temas* (KoT), conocimiento disciplinar que incluye la fenomenología y aplicaciones de un contenido, los procedimientos, las definiciones, propiedades y sus fundamentos, y los diferentes registros de representación. El conocimiento de conexiones es la esencia del *conocimiento de la estructura matemática* (KSM), que permite disponer de una visión de conjunto del conocimiento matemático, con sus conexiones de simplificación o complejización (que posibilitan ver tanto un contenido elemental desde una perspectiva avanzada, como un conocimiento avanzado desde una perspectiva elemental), las conexiones auxiliares (que permiten hacer un uso instrumental de un concepto o procedimiento en el trabajo con otro contenido), y las conexiones transversales (que se refieren a ideas matemáticas que enlazan varios núcleos de contenidos). Por otro lado, la estructura sintáctica de Shulman forma parte del *conocimiento de la práctica matemática* (KPM), que consiste en el conocimiento de las formas de proceder características del trabajo matemático, incluyendo aspectos de la comunicación, la argumentación y la demostración matemáticas, así como el conocimiento sobre qué es definir y qué características debe tener un enunciado matemático (definiciones, proposiciones…), el conocimiento de procesos asociados a la resolución de problemas (heurísticos) y el de otras prácticas del quehacer matemático (como la modelización).

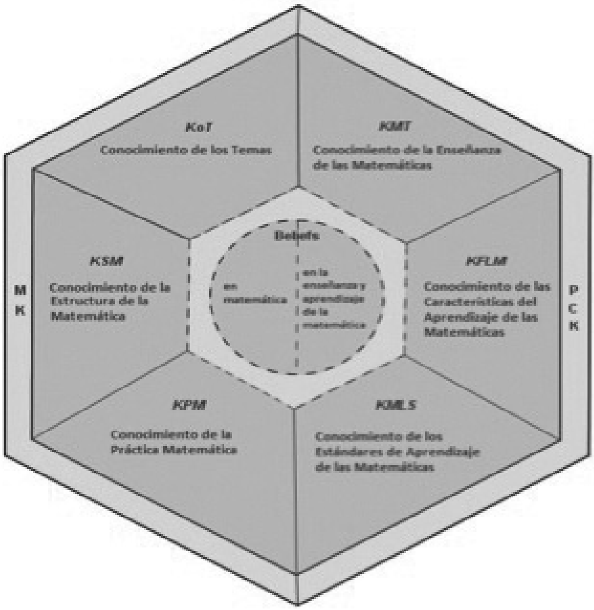

Figura 1: Modelo MTSK

Los subdominios del conocimiento didáctico del contenido matemático están ligados a la enseñanza y aprendizaje de la matemática. La idea de amalgama de Shulman es potente en la medida en que nos hace ver que no supone una mera yuxtaposición de saberes. Forman parte de este dominio, el conocimiento de recursos materiales o virtuales, incluidos los diseñados por el propio profesor, en cuanto a su potencialidad y las actividades matemáticas que posibilitan, el conocimiento de estrategias de enseñanza, técnicas, tareas y ejemplos; ambos son parte de lo que hemos denominado *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT), que se completa con el conocimiento de teorías personales o formales de enseñanza. Otro aspecto que se muestra de utilidad es el conocimiento de las formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático, que incluye el conocimiento del profesor acerca de los posibles modos de aprehensión asociados a la naturaleza misma del contenido matemático. Para un profesor es también útil el conocimiento sobre fortalezas y debilidades asociadas al aprendizaje, que aúna conocimientos sobre errores, obstáculos, dificultades y capacidades potenciales de los alumnos vinculados a la matemática en su conjunto o a temas específicos. Es asimismo relevante el conocimiento de teorías personales o formales sobre el aprendizaje tanto de la matemática en general como de contenidos particulares, y el conocimiento sobre las expectativas e intereses que suelen tener los estudiantes en relación con los contenidos matemáticos. Todos estos elementos configuran el subdominio del *conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas* (KFLM).

Como se ha indicado antes, el profesor necesita conocer lo que está establecido que debe aprenderse del contenido matemático en cada nivel educativo. A este conocimiento normativo añadimos la relevancia del conocimiento acerca de las aportaciones que desde la educación matemática se han producido en este sentido, y que permiten al profesor la toma de decisiones sobre cómo organizar y secuenciar el contenido matemático en los diferentes niveles de escolaridad. En este subdominio, que hemos denominado *conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (KMLS), hemos diferenciado entre el conocimiento acerca de lo que se espera aprendan los alumnos y el conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado, ambos para un contenido y un nivel concretos, así como el conocimiento de secuenciaciones del contenido.

Debido a la complejidad del conocimiento antes mencionada, al MTSK le interesa, al objeto de comprender mejor el conocimiento del profesor y su práctica, además de extraer elementos (categorías o indicadores) de conocimiento pertenecientes a dominios y subdominios, estudiar relaciones entre esos elementos, dominios y subdominios; dicho en otros términos, interesa mostrar la densidad de relaciones intrínseca al objeto conocimiento del profesor (e.g. Zakaryan, Estrella, et al., 2018; Aguilar-González, Muñoz-Catalán y Carrillo, 2019).

MTSK COMO ORGANIZADOR DE LA FORMACIÓN INICIAL: DOS NIVELES DE CONCRECIÓN

Mostraremos en esta sección cómo se puede organizar el contenido de la formación inicial teniendo como referente el contenido matemático de la Educación Primaria como objeto de enseñanza y aprendizaje, estructurando dos niveles de concreción, las asignaturas y tareas específicas, usando el modelo MTSK.

La Orden ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habilitan para el ejercicio de la profesión de Maestro en educación Primaria, determina que, en el ámbito de las matemáticas, se deben

> Adquirir competencias matemáticas básicas (numéricas, cálculo, geométricas, representaciones espaciales, estimación y medida, organización e interpretación de la información, etc.). Conocer el currículo escolar de matemáticas. Analizar, razonar y comunicar propuestas matemáticas. Plantear y resolver problemas vinculados con la vida cotidiana. Valorar la relación entre matemáticas y ciencias como uno de los pilares del pensamiento científico. Desarrollar y evaluar contenidos del currículo mediante recursos didácticos apropiados y promover las competencias correspondientes en los estudiantes (p. 53750).

Esta materia obligatoria, que hay que articular en un mínimo de 18 ECTS[1], ha sido desarrollada en cada universidad en asignaturas diferentes. En el caso de la Universidad de Huelva, se añadieron 3 ECTS y la materia se desarrolla en cuatro asignaturas: Introducción a la Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática en Educación Primaria (3 ECTS, segundo semestre), Didáctica de la Matemática en Educación Primaria I: números y operaciones (6 ECTS, cuarto semestre), Didáctica de la Matemática en Educación Primaria II: la construcción del lenguaje matemático, magnitudes y medida, tratamiento de la información, azar y probabilidad (6 ECTS, quinto semestre) y Didáctica de la Matemática en Educación Primaria III: las formas, las figuras y sus propiedades (6 ECTS, séptimo semestre). La primera de ellas, que tiene un carácter transversal, aborda la resolución de problemas e inicia el desarrollo de la capacidad de analizar, razonar y comunicar, entre otras competencias de alfabetización matemática. Supone también una primera mirada a la estructura y organización del currículo, que será una constante a lo largo del resto de las asignaturas, en las que la adquisición de las competencias matemáticas básicas se desarrolla desde la perspectiva de conocimiento profundo del contenido matemático elemental (Ma, 1999) para su transformación como objeto de enseñanza y aprendizaje. Las otras tres asignaturas se centran en

[1] Un crédito ECTS equivale a 25 horas de trabajo del estudiante (de 8 a 10 en un aula y el resto de tutorías y trabajo autónomo).

la construcción de elementos de conocimiento relativos a los diferentes temas matemáticos escolares que conforman la totalidad de temas propios del currículo de Educación Primaria.

En los dos apartados que siguen, centraremos nuestra atención en los dos siguientes niveles de concreción necesarios: el programa de una de las asignaturas, y el diseño de tareas para alcanzar los objetivos de dicho programa.

Organización de asignaturas en la formación inicial usando el Modelo MTSK

Aquí nos centraremos en la asignatura del séptimo semestre, que aborda los contenidos propios del bloque de Geometría. Siguiendo la estructura general de la Orden 3587/2007, se adaptaron las competencias, objetivos, y contenidos de la asignatura a los elementos propios del conocimiento especializado cuya construcción se necesita, por parte de los futuros maestros, para poder gestionar procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de forma adecuada. La asignatura se dividió así en los distintos temas que cubren los diferentes aspectos de la geometría escolar, asumiendo que el conocimiento tiene un carácter holístico e integrado, y abordando la construcción de elementos de conocimiento de la totalidad de subdominios de MTSK, siendo conscientes (y haciendo uso) de las relaciones entre ellos.

Por ejemplo, en el bloque de figuras planas, se asumió como elemento inicial el trabajo sobre aspectos conceptuales, como el concepto de polígono, sus características críticas, y los elementos que los definen (KoT, Definiciones). Estas definiciones llevan a poder trabajar la clasificación de formas planas (KoT, Procedimientos) desde la perspectiva de los elementos de los polígonos que permiten generar cada clasificación (KoT, Propiedades). A raíz de la noción de clasificación, se incide en aspectos del conocimiento de la práctica matemática, como la construcción de definiciones matemáticas, y el papel de los ejemplos y contraejemplos en dicho proceso. Asimismo, se caracterizan el razonamiento inductivo y el deductivo, y se aborda la formulación de hipótesis, su comprobación, y los procesos de demostración formales e informales (KPM), pretendiendo con ello que los futuros maestros desarrollen conocimiento de las características del aprendizaje del contenido ligadas a las formas de interacción de los alumnos con los procesos de validación. Desde este punto, donde la noción de polígono ya ha sido abordada en profundidad, y analizada para desgranar los conceptos que permiten definirla, se abordan las representaciones de las formas planas, la notación matemática, y el vocabulario matemático apropiado para la geometría (KoT, Representaciones), y en cómo este vocabulario puede ser un indicador del aprendizaje (KFLM, Formas de interacción con el contenido). Posteriormente se trabajan las clasificaciones esperables en distintos niveles de Educación Primaria (KMLS, Niveles de desarrollo conceptual y procedimental esperado), ligando estas reflexiones al bloque introductorio de familiarización con el currículo escolar.

En este momento, se retoman las clasificaciones de polígonos, la equiangularidad, equilateralidad y sus relaciones, buscando ejemplos con solo una de las características (KoT, KPM). Esto lleva a la geometría del triángulo, como caso particular del polígono, con propiedades específicas (Teorema de Pitágoras, Desigualdad Triangular). Posteriormente se incide sobre la circunferencia, discutiendo su relación con los polígonos (KSM, Conexiones de complejización), y abordando diferentes propiedades y características de la misma (KoT, Propiedades). Tras esto, se abordan nociones teóricas relativas al aprendizaje de las matemáticas, como la imagen y la definición de un concepto (Tall y Vinner, 1981), o los niveles de Van Hiele para describir el aprendizaje geométrico (Van Hiele, 1986), que permiten construir conocimiento sobre teorías de aprendizaje (KFLM), que estructura la mirada de los estudiantes para maestro sobre los procesos de aprendizaje (Fernández, et al., 2018).

Una vez centrado el tema en el aprendizaje, se abordan los errores habituales en el aprendizaje de la geometría, o los diferentes obstáculos para una buena comprensión de la geometría escolar, como el generado por el uso de figuras prototípicas o en posición 'estándar' (KFLM, Fortalezas y dificultades). Posteriormente, y retomándose este aspecto en el bloque final, se abordan los recursos para la enseñanza de la geometría, como la trama de puntos o GeoGebra, para posteriormente reflexionar sobre el tratamiento de la geometría en los libros de texto (KMT, Recursos).

También se involucra a los estudiantes para maestro (EPM) en el análisis y diseño de tareas escolares ligadas a la geometría, donde se tienen que usar todos los elementos construidos anteriormente, para reflexionar sobre la naturaleza de las formas planas en entornos y situaciones cotidianas (KoT, Fenomenología y aplicaciones), como un buen punto de partida para trabajar la geometría en el aula. Para acabar el tema, se vuelve a incidir en el conocimiento matemático, reflexionando sobre posibles geometrías no euclidianas, como la geometría proyectiva, la afín o la topológica (KSM, Conexiones de complejización).

Se pretende que todos los aspectos anteriormente indicados sean tomados en cuenta por los estudiantes en el último bloque, relativo al diseño y análisis de propuestas de enseñanza de la geometría, en el que han de diseñar tareas, fundamentadas en dichos aspectos, para discutirlas en pequeños grupos con sus compañeros y el formador, y para reformularlas.

Tabla 1: Estructuración de un bloque de una asignatura con MTSK

SUBDOMINIO DE MTSK	CONTENIDO DE LA MATERIA
Conocimiento de los Temas	Concepto de polígono Características críticas de los polígonos Clasificación de formas planas Elementos de los polígonos que permiten clasificarlos Representaciones, notación y vocabulario ligado a la noción de polígono (y forma plana) Ejemplos representativos de formas planas Propiedades y resultados geométricos (Teorema de Pitágoras, Desigualdad Triangular) Fenomenología de los polígonos
Conocimiento de la Estructura Matemática	Circunferencia como no-ejemplo extremo Diferentes geometrías
Conocimiento de la Práctica Matemática	Construcción de definiciones matemáticas Función del ejemplo y el contraejemplo Razonamiento deductivo e inductivo Formulación y comprobación de hipótesis Demostraciones formales e informales
Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas	Recursos para la enseñanza de la geometría Actividades y propuestas para la enseñanza de polígonos
Conocimiento de las Características del Aprendizaje Matemático	Indicadores de aprendizaje del contenido Imagen y definición de concepto (Tall y Vinner, 1981) Niveles de Van Hiele (1986) Errores y obstáculos habituales al tratar los polígonos
Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje Matemático	Currículo escolar de geometría (concreción en polígonos y formas planas)

Como vemos en la tabla 1, MTSK permite dar sistematicidad a la planificación de los contenidos a abordar en el programa de formación, llevando a la potencial construcción, por parte de los futuros maestros, de un conocimiento profesional integrado abarcando todos los subdominios de conocimiento modelizados por MTSK. Esto es significativo, y acorde a la organización hecha en la Universidad de Huelva de las asignaturas, donde no se trabaja matemáticas y didáctica de las matemáticas en asignaturas separadas, sino que se acerca a la realidad de la integración del conocimiento disciplinar y el conocimiento de la enseñanza y aprendizaje de la disciplina, y además se hace con una mirada permanente a la realidad del aula, usando por ejemplo narrativas (Ivars y Fernández, 2018), o casos (Markovits y Smith, 2008).

Diseño de tareas formativas usando el Modelo MTSK

Desde la perspectiva que aquí se presenta, el análisis del conocimiento que se moviliza en un aula de primaria tiene el potencial de aportar al investigador-formador oportunidades para construir tareas de formación que contribuyan a desarrollar el conocimiento del EPM (De Gamboa, Badillo y Ribeiro, 2015). Dichas tareas estarán, pues, basadas en contextos reales de enseñanza y aprendizaje, sirviendo como detonantes para fomentar la construcción de conocimiento en los EPM, articulado desde la perspectiva del MTSK.

Mostramos a continuación un ejemplo de tarea formativa sobre los polígonos. Este ejemplo está compuesto por un caso (Markovits, et al., 2008) y un conjunto de cuestiones, estando las segundas orientadas hacia la comprensión profunda del primero. El caso de la tarea procede de la reconstrucción[2] de un episodio de una clase de Geometría de 5º de Educación Primaria, en el que la maestra ejemplifica con no polígonos y polígonos convexos. En ella, la maestra comienza definiendo polígonos y sus elementos (vértices, lados, diagonales, ángulos), continúa con la clasificación de polígonos según el número de lados, definición de polígono regular y cálculo del perímetro, si bien solo se hace con ejemplos de polígonos convexos (aunque la maestra no haga explícito este detalle). La maestra dibuja dos polígonos en la pizarra (un pentágono regular y un trapecio isósceles) y plantea varias actividades, entre las que destacan las relacionadas con las diagonales de los polígonos propuestos, poniendo de relieve en dichas actividades tanto el número de diagonales como su definición y propiedades.

En el análisis con MTSK del episodio que conduce al caso de nuestro ejemplo, el formador-investigador detecta evidencias de la movilización de KoT (Definiciones, propiedades y sus fundamentos), KMT (Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) y KPM (Formas de validación y demostración). Al estar presente en el episodio solo la representación de dos polígonos convexos, el investigador-formador, en su reconstrucción, decide incluir la problematización sobre las consecuencias que puede tener la convexidad y concavidad sobre las propiedades del polígono y sobre la cantidad y las propiedades de las diagonales (KoT, Propiedades y sus fundamentos), introduciendo así una nueva situación que sirva como detonante para relacionar los conocimientos que la maestra ha planteado en la clase. También incluye, en las cuestiones, la identificación de los niveles de razonamiento geométrico según el modelo de Van Hiele (KFLM, Teorías de aprendizaje) y el planteamiento de si el nivel de desarrollo conceptual es el esperado para el nivel en el que están los

[2] El caso se construye desde el episodio, añadiendo elementos de conocimiento especializado evocado al investigador-formador por las situaciones presentes en el aula (Liñán-García, 2017). La sensibilidad teórica (Strauss y Corbin, 1994) y la propia experiencia como formador fundamentan la suma de estos elementos adicionales para generar un caso rico en MTSK.

escolares (KMLS)[3]. De esta forma, se proponen a los EPM las siguientes cuestiones intercaladas con la lectura de la reconstrucción del episodio que se proporciona por escrito a los EPM:

1. ¿Qué conocimientos matemáticos se ponen en juego en el desarrollo del episodio descrito?
2. ¿Qué papel juegan los ejemplos y contraejemplos en la construcción de una definición matemática? ¿Qué ejemplos utiliza la maestra y con qué fin? ¿Qué relación hay entre la imagen que muestran del concepto de diagonal y la definición que se da?
3. ¿Qué dificultades de los alumnos observas en el desarrollo del episodio? ¿En qué nivel de Van Hiele consideras que está cada uno? Justifica tu respuesta.
4. ¿Qué recursos para la enseñanza de los contenidos matemáticos utiliza la maestra? Identifica potencialidades y limitaciones de estos. ¿Qué otros recursos se podrían haber utilizado?
5. Justifica si la actividad que se desarrolla en el episodio es o no adecuada para quinto curso de Primaria.

Con la primera cuestión se pretende que los EPM movilicen conocimiento sobre las definiciones asociables a los polígonos y sus elementos, y sus diferentes registros de representación (KoT, Definiciones, propiedades y sus fundamentos; Registros de representación), sobre la forma de definir en matemáticas, incluyendo el lenguaje, y esquemas de prueba inductivos (KPM, Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones; Prácticas particulares del quehacer matemático; Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal; Formas de validación y demostración).

Los ejemplos (KMT, Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) serían el punto de partida para la reflexión sobre las condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones (KPM) a que les lleva la segunda cuestión. El investigador-formador podría problematizar las definiciones de polígono teniendo en cuenta los atributos relevantes, irrelevantes e incorrectos, para distinguir definición e imagen del concepto (Tall y Vinner, 1981).

Desde la comprensión mostrada sobre el conocimiento de la maestra de las fortalezas y dificultades de sus alumnos (KFLM), la tercera cuestión pretende movilizar conocimiento relativo a teorías de aprendizaje de la geometría, en este caso la de Van Hiele (1986) (KFLM, Teorías sobre el aprendizaje).

[3] Ambas cuestiones surgen desde las oportunidades de construcción de conocimiento que el investigador-formador identifica, en este caso al observar ejemplificaciones parciales (limitadas a polígonos convexos), y teniendo en cuenta la relevancia de la teoría de aprendizaje de Van Hiele, que permite discutir el aprendizaje de los alumnos involucrados en la situación.

Tras identificar el potencial de los recursos presentes en el caso para abordar los contenidos matemáticos involucrados en el episodio (KMT, Recursos materiales y virtuales), la cuarta cuestión vuelve a poner el foco en las imágenes del concepto que privilegian los recursos anteriores, de cara a provocar su reflexión, tanto desde el conocimiento de las características del aprendizaje (KFLM, Fortalezas y dificultades, Teorías sobre el aprendizaje), como de la propia definición de los elementos y la forma de definir (KoT, Definiciones, propiedades y sus fundamentos; KPM Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones), teniendo en cuenta lo ya trabajado en la cuestión 1). A diferencia de la segunda cuestión, centrada en los ejemplos mostrados en el caso, pretendemos aquí que los EPM se hagan conscientes de la necesidad de considerar qué características debe tener el elenco de ejemplos que utilicen en el proceso de enseñanza-aprendizaje: cualquier ejemplo de un concepto puede cumplir un determinado conjunto de características irrelevantes, pero debe cumplir todas las características críticas del mismo. Finalmente, con la quinta cuestión pretendemos movilizar en los estudiantes la reflexión sobre el currículum, complementado con propuestas curriculares diversas como la de NCTM (2000) (KMLS, Expectativas de aprendizaje; Nivel de desarrollo conceptual; Secuenciación con temas anteriores y posteriores).

Vemos una síntesis de la integración de los diferentes aspectos trabajados en la tarea formativa en la Tabla 2:

Tabla 2: Contenidos de la tarea

SUBDOMINIO DE MTSK	**CONTENIDO**
Conocimiento de los Temas	Distintas definiciones de polígono Propiedades de los polígonos y sus fundamentos Elementos de los polígonos Registros de representación
Conocimiento de la Práctica Matemática	Esquema de prueba inductivo Condiciones necesarias y suficientes Definiciones matemáticas
Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas	Ejemplos para introducir polígonos Exploración de recursos para la enseñanza de polígono, limitaciones y potencialidades
Conocimiento de las Características del Aprendizaje Matemático	Definiciones e imágenes de polígono Dificultades en relación con el concepto de polígono Niveles de Van Hiele
Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje Matemático	Reflexión sobre el currículo nacional, y presentación de propuestas curriculares alternativas

Mostraremos ahora un extracto de la implementación de la tarea, centrándonos en la cuestión 2. En particular, mostramos intervenciones de estudiantes para maestro tras haber abordado dicha actividad. Lo que exponemos a continuación es un análisis con MTSK de algunos fragmentos de las respuestas dadas a la citada cuestión.

> M: Yo creo que la profesora plantea esta tarea para crear discusión, analizando aquellas características de cada figura que determinan las que son polígono o las que no.
>
> C: Al poner ejemplos de polígonos y de no polígonos les hace llegar al concepto. La otra forma sería diciéndoles un polígono es bla, bla, bla… y que se lo aprendan. […]
>
> T: En el caso de las diagonales, por ejemplo, la maestra ha puesto primero polígonos convexos para que tracen las diagonales, y ahí todos las han identificado rápidamente. Le ha servido para que sepan lo que es, relacionen la definición con el dibujo.

Los tres EPM que intervienen identifican la tarea planteada por la profesora como una estrategia de enseñanza (KMT, Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Se apoyan en su propio conocimiento sobre las diagonales de un polígono (KoT, Definiciones propiedades y sus fundamentos) para considerar el dibujo desde la definición (KoT, Registros de representación) como apoyo para una mejor comprensión (KMT, Recursos materiales y virtuales).

Una EPM llama la atención sobre la dificultad que ha observado (y que ella misma declara tener) en los polígonos cóncavos, lo que evidencia un conocimiento sobre fortalezas y dificultades (KFLM).

> C: Sí, pero cuando ha puesto los cóncavos los alumnos estaban liados, porque no todos han visto las diagonales de fuera. Vamos, yo tampoco las había dibujado.

El debate sobre las dificultades en polígonos cóncavos se evidencia de nuevo en el siguiente fragmento:

> M: Si cada vez que te hablan de la diagonal de un polígono te ponen polígonos convexos, la imagen que tienes de diagonal es por dentro, aunque sabes la definición y no dice que sea así. Yo creo que pone esos ejemplos porque sabe eso.[…]

Vemos que muestran su conocimiento de que, en general, en las aulas solo se muestran ejemplos prototípicos. En este sentido, indican que esto genera dificultades en los alumnos de Primaria (KFLM, Fortalezas y dificultades) y hace que estos interaccionen de una forma determinada ante las diferentes casuísticas (KFLM, Formas de interacción con un contenido matemático).

Los EPM consideran la diferencia entre la imagen del concepto y la definición del mismo como forma en la que los alumnos aprenden (KFLM, Teorías de aprendizaje; Formas de interacción con un contenido matemático):

T: Pues los ejemplos y contraejemplos sirven para generar una buena imagen del concepto, jeje. Por lo de las características críticas y eso, y la definición entonces…

Y parecen conocer que las condiciones necesarias (características críticas) han de estar presentes en una definición (KPM, Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones).

Como se ha puesto de relieve, los elementos de MTSK movilizados se alinean con las expectativas puestas en el diseño de la actividad. Se han movilizado conocimientos sobre las definiciones de polígonos involucradas, y la consideración del dibujo desde las mismas (KoT, Definiciones, propiedades y sus fundamentos; Registros de representación), sobre la enseñanza de las matemáticas (KMT, Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), sobre las condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones (KPM) y sobre los atributos relevantes, que permiten distinguir definición e imagen del concepto. También se aprecia la movilización de conocimiento sobre características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM, Fortalezas y dificultades; Formas de interacción con un contenido matemático).

REFLEXIONES Y CONCLUSIONES FINALES

Una de las tareas pendientes de la investigación en educación matemática es la transferencia de los resultados de investigación (García, Maas y Wake, 2010). En particular, entendemos que la investigación en torno al profesor de matemáticas debe tener implicaciones en la formación inicial. En este capítulo mostramos cómo un modelo analítico de conocimiento profesional, como es el caso de MTSK, puede constituir una herramienta útil en dos niveles.

En el primer nivel, las investigaciones realizadas usando MTSK pueden orientar qué elementos de conocimiento especializado deben ser construidos en los procesos de formación inicial. Así, se puede conseguir una estructura curricular de la formación inicial que asegura que un maestro disponga de una base de conocimiento especializado, como docente que enseñará matemáticas, que le permita gestionar con cierta soltura, las situaciones de enseñanza y aprendizaje. Asumimos que el ejemplo aquí mostrado tiene características idiosincráticas, como el hecho de conjugar elementos matemáticos y de educación matemática en la misma asignatura, que no lo hacen directamente replicable en otros contextos. Aun así, independientemente de la carga asignada a esta disciplina en la formación inicial, hay que asumir la imposibilidad de abordar la construcción de la totalidad de elementos de conocimiento necesarios. En este sentido, se debe brindar a los futuros maestros no solo oportunidades para construir conocimiento, sino también herramientas que les permitan aprender a construirlo lo más autónomamente posible. En un segundo nivel de concreción, las tareas formativas desarrolladas usando el modelo MTSK como guía para su diseño permiten que los EPM construyan aspectos concretos de conocimiento, para lo que se conjugan elementos de teoría y análisis de la práctica, que implican la construcción de nuevo conocimiento, y la percepción del mismo como útil para la práctica docente. Así, aprenden a problematizar la práctica de aula, planteándose preguntas que implican movilizar elementos de conocimiento para comprender las situaciones, y, potencialmente, identificar la necesidad de construir nuevo conocimiento que les permita comprenderlas. Esta cuestión debería ser abordada en los programas de formación permanente de profesorado.

El diseño de los programas de formación inicial a nivel nacional es diverso. En este sentido, respetando las idiosincrasias de cada programa, de sus alumnos, y del contexto en el que están inmersos, se puede avanzar en la complementariedad de los diferentes enfoques, que podrían nutrirse mutuamente. Desde diferentes enfoques, apoyados en una actitud inclusiva, crítica, autocrítica y flexible, podemos considerar aspectos de otros enfoques que puedan ayudarnos a mejorar la formación de nuestros EPM. El diseño de tareas adaptadas a cada programa, usando organizadores comunes, más allá del propio contenido matemático, podría suponer un punto de partida interesante. El modelo MTSK brinda, como hemos mostrado, la posibilidad de orientar y estructurar la formación inicial de maestros en lo relativo a su conocimiento. Desde nuestro reconocimiento y valoración de la diversidad de enfoques en la investigación en conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas, entendemos que los programas de formación han de caminar hacia la búsqueda de relaciones entre ellos.

RECONOCIMIENTOS

Esta investigación está financiada por el Centro de Investigación COIDESO, y por el proyecto RTI2018-096547-B-I00, del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidad.

REFERENCIAS

Aguilar-González, A., Muñoz-Catalán, M. C. y Carrillo, J. (2019). An example of connections between the mathematics teacher's conceptions and specialised knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(2), 1-15.

Ball, D. L. y Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners: Toward a practice-based theory of professional education. En L. Darling-Hammond y G. Sykes (Eds.), *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (pp. 3-32). San Francisco: Jossey-Bass.

Ball, D. L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Borko, H., Koellner, K. y Jacobs, J. (2011). Using video representations of teaching in practice-based professional development programs. *ZDM Mathematics Education, 43*, 175-187.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aireas: Zorzal.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Ribeiro, C. M. (2017). Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) in the «Dissecting an equilateral triangle» problem. *RIPEM - International Journal for Research in Mathematics Education, 7*(2), 88-107.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán· M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education: 20*(3), 236-253.

Carrillo, J. y Contreras, L. C. (1994). The relationship between the conceptions of mathematics and of mathematics teaching. A model using categories and descriptors for their analysis. En J. P. Ponte y J. P. Matos (Eds.), *Actas del 18º Congreso del PME* (Vol 2, pp. 152-159). Lisboa: Universidad de Lisboa.

Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L. C. y Climent, N. (2017). Les connaissances du professeur dans une perspective basée sur leur spécialisation: MTSK. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 22*, 185-205.

Chacín, B. (2008). Modelo teórico-metodológico para generar conocimiento desde la extensión universitaria. *Laurus, Revista de Educación*, *14*(26), 56-88.

De Gamboa, G., Badillo, E. y Ribeiro, M. (2015). El horizonte matemático en el conocimiento para la enseñanza del profesor: geometría y medida en educación primaria. *PNA*, *10*(1), 1-24.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *AIEM -Avances de Investigación en Educación Matemática, 13*, 39-61.

García, F. J., Maas, K., y Wake, G. (2010). Theory meets practice: Working pragmatically within different cultures and traditions. En R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines y A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 445-457). Londres: Springer.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.

Goos, M. (2014). Researcher–teacher relationships and models for teaching development in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 46*, 189-200.

Ivars, P. y Fernández, C. (2018). The role of writing narratives in developing pre-service elementary teachers' noticing. En G. Stylianides y K. Hino (Eds.), *Research Advances in the Mathematical Education of Pre-service Elementary Teachers* (pp. 245-259). Londres: Springer.

Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry*. Londres: Falmer Press.

Kilpatrick, J. y Spangler, D. A. (2016). Educating future mathematics education professors. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education (Third Edition)* (pp. 297-309). Londres: Rouletdge.

Liñán-García, M. M. (2017). *Conocimiento Especializado en Geometría en un aula de 5º de Primaria*. Tesis doctoral no publicada. Huelva: Universidad de Huelva.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Markovits, Z. y Smith, M. (2008). Cases as Tools in Mathematics Teacher Education. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.),*The International Handbook of Mathematics Teacher Education* (Volume 2, pp. 39-64). Rotterdam: Sense Publisher.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). *Orden ECI/3857/2007.* Madrid: España. Recuperado de: https://www.boe.es/boe/dias/2007/12/29/pdfs/A53747-53750.pdf.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching. Reflecting on practice with the Knowledge Quartet*. Londres: SAGE.

Santagata, R. y Guarino, J. (2011). Using video to teach future teachers to learn from teaching. *ZDM Mathematics Education, 43*, 133-145.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J. y Pino-Fan, L. R. (2019). What Makes Mathematics Teacher Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(1), 153-172.

Schoenfeld, A. H. (2010). *How we think*. New York: Routledge.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(*2*), 4-14.

Sinclair, N., Watson, A., Zazkis, R y Mason, J. (2011). The structuring of personal example spaces. *The Journal of Mathematical Behavior, 30*, 291-303.

Strauss, A. y Corbin, J. (1994). Grounded Theory Methodology. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 217-285). Thousand Oaks: Sage Publications.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, whit particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight. A theory of mathematics education*. Londres: Academic Press.

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *36(*2), 105-123.