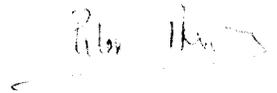


TESIS

MODELO NUMÉRICO CON REPRESENTACIÓN INTEGRAL DE TENSIONES EN EL CONTORNO, PARA PROBLEMAS DE MECÁNICA DE LA FRACTURA

presentada por: Pilar Ariza Moreno
Ingeniero Industrial



dirigida por: José Domínguez Abascal
Dr. Ingeniero Industrial



para la obtención del grado de
Doctor Ingeniero Industrial

Departamento de Mecánica de Medios Continuos,
Teoría de Estructuras e Ingeniería del Terreno
Escuela Superior de Ingenieros
Universidad de Sevilla

Sevilla, enero de 2002

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS
DE SEVILLA BIBLIOTECA

a mis padres

Una tesis, además de ser una " disertación escrita pue presenta a la universidad el aspirante al título de doctor en una facultad" (Real Academia Española), es el resultado de un trabajo en el que de forma directa o indirecta están involucrados un grupo de personas ocupando papeles más o menos relevantes.

Están los investigadores que nos han antecedido en la línea de trabajo sentando las bases de nuestro punto de partida; en general, maestros de maestros, ellos son nuestra referencia. También están los miembros de nuestro grupo de trabajo, cuya experiencia y apoyo permanente resultan en ocasiones tan gratificantes. Cómo olvidarse de nuestros solidarios compañeros de fatigas, por aquello de que las penas compartidas son menos penas. Los familiares y amigos, incentivando nuestra ansiedad con su continua búsqueda del final del camino en cada conversación y soportando nuestro ánimo en ocasiones beligerante. Y no es olvido sino reconocimiento al arduo papel de nuestro director de tesis, su labor es insustituible y su ayuda inestimable, además de ser nuestra más cercana referencia.

A todos vosotros que os identificais en estas líneas, mi más sincera gratitud.

Pilar Ariza

Sevilla, enero de 2002

Índice General

1	Introducción	1
2	Aspectos Generales de la Formulación Hipersingular Tridimensional del MEC	15
2.1	Introducción	15
2.2	Ecuación integral de contorno en flujo. Problemas de potencial . .	16
2.3	Elementos de contorno	24
3	Elasticidad Estática. Medios Isótropos	29
3.1	Introducción	29
3.2	Ecuación integral de contorno en tracciones	30
3.3	Mecánica de la fractura	37
3.3.1	Desplazamientos y tensiones en las cercanías del vértice de una grieta en un material isótropo	38
3.3.2	Elemento cuadrático tridimensional con nodo a un cuarto .	40
3.3.3	Discretización de problemas de fractura y cálculo de los factores de intensidad de tensión	43
3.4	Resultados numéricos	45
3.4.1	Dominios infinitos	45
3.4.2	Dominios finitos. Grieta interna	55
3.4.3	Dominios finitos. Grieta de borde	62

4	Elasticidad Dinámica. Medios Isótropos	75
4.1	Introducción	75
4.2	Ecuación integral de contorno en tracciones	76
4.3	Resultados numéricos	81
4.3.1	Dominios infinitos	82
4.3.2	Dominios finitos. Grieta interna	95
4.3.3	Dominios finitos. Grieta de borde	98
5	Elasticidad Estática. Medios Transversalmente Isótropos	103
5.1	Introducción	103
5.2	Ecuación integral de contorno en tracciones	104
5.3	Factor de intensidad de tensión estático para materiales transversalmente isótropos	113
5.4	Resultados numéricos	115
5.4.1	Dominios infinitos	115
5.4.2	Dominios finitos. Grieta interna	121
5.4.3	Dominios finitos. Grieta de borde	124
6	Elasticidad Dinámica. Medios Transversalmente Isótropos	129
6.1	Introducción	129
6.2	Ecuación integral de contorno en tracciones	130
6.3	Resultados numéricos	135
6.3.1	Dominios infinitos	136
7	Conclusiones y Desarrollos Futuros	145
7.1	Conclusiones	145
7.2	Desarrollos futuros	147
A	Integrales Básicas de la EIC en Flujo	149
B	Integrales Básicas de la EIC en Tracciones. Materiales Isótropos	151

C Series Infinitas de los Núcleos Armónicos de la EIC en Tracciones. Materiales Isótropos	157
D Solución Fundamental de la EIC en Tracciones. Materiales Transver- salmente Isótropos	161
Bibliografía	185

Capítulo 1

Introducción

Los fenómenos de fallo mecánico han estado presentes en la vida del hombre desde que éste comenzó a construir. La fractura, caracterizada por la formación de nuevas superficies en un material, es uno de los modos más característicos de fallo mecánico.

Los valores críticos que se utilizan de forma convencional en los criterios de resistencia se miden normalmente a partir de resultados obtenidos en laboratorio con probetas sometidas a cargas de tracción, flexión o torsión simples. Los materiales de estas probetas, cuidadosamente preparadas, se consideran homogéneos y continuos, sin los defectos mecánicos inherentes a las piezas reales. Dado que la respuesta del material y la distribución de tensiones alrededor de los defectos son muy diferentes a las de las probetas, los criterios de fallo convencionales pueden ser inadecuados cuando se aplican a elementos estructurales susceptibles de contener defectos iniciales o producidos en servicio. La finalidad de la Mecánica de la Fractura es tener en cuenta el tamaño, posición y forma de los defectos del material y determinar la carga o el desplazamiento críticos que aplicados de forma remota

sobre el defecto causa el fallo de la estructura.

El hecho de que algunas estructuras construidas por los egipcios y los romanos permanezcan aún en pie es una prueba de la habilidad de los primeros arquitectos e ingenieros. El instinto y la experiencia eran las únicas guías en la elección de materiales y en el diseño de estructuras y mecanismos. Básicamente, nuestros antepasados empleaban el procedimiento de prueba y error. Pero en la actualidad, dado el aumento de la complejidad tecnológica, los problemas son más complejos y variados que en los primeros siglos. Gradualmente durante los tres últimos siglos, el hierro y los metales en general han sustituido a la madera y la mampostería como materiales estructurales básicos, pero a pesar de su aparente mayor capacidad resistente, las estructuras y componentes metálicos no han funcionado siempre satisfactoriamente y han sufrido fallos catastróficos inesperados (véanse, Anderson, 1995 y Erdogan, 2000). Estos fallos catastróficos proporcionan grandes ingresos a abogados e ingenieros, sin embargo son perjudiciales para la economía del conjunto de la sociedad. Un estudio económico (Duga et al., 1983) estimó en 119 miles de millones de dólares el coste debido a la fractura en los Estados Unidos en 1978, aproximadamente el 4% del producto interior bruto. Además, dicho estudio estimó que el coste anual podía reducirse en 35 miles de millones si se aplicaban los conocimientos existentes, y que investigaciones futuras en el campo de la mecánica de la fractura podrían reducir adicionalmente esta cifra en 28 miles de millones.

La necesidad de entender y controlar la rotura de sólidos ha motivado numerosos esfuerzos desde muy temprano. Leonardo da Vinci esbozó en sus notas un posible ensayo para determinar la resistencia al alargamiento de un cable, y encontró que variaba inversamente con la longitud del mismo. Estos resultados, aunque de forma cualitativa, implican que los defectos en el material controlan su capacidad resistente. Galileo investigó las cargas de rotura de barras sometidas a tracción y concluyó que dichas cargas eran independientes de su longitud y proporcionales al área de la sección, esto supuso un primer paso en el concepto de

tensión. Sin embargo, las teorías de la fractura basadas en el crecimiento de grietas requieren conceptos matemáticos de tensión y deformación que no se obtuvieron hasta el siglo XIX.

En 1920 Griffith publicó un trabajo en el que se establecía una conexión cuantitativa entre las tensiones de fractura y el tamaño de los defectos (Griffith, 1921). Fue éste el primero que empleó una aproximación energética para proponer un criterio de rotura para sólidos frágiles con defectos, estableciendo un balance entre la energía elástica almacenada y la energía superficial del material. Este modelo era aplicable únicamente a sólidos frágiles ideales. Irwin extendió el modelo de Griffith a metales, incluyendo la energía disipada por plastificación local (Irwin, 1948). En 1956, Irwin desarrolló el concepto de índice de liberación de energía, el cual está relacionado con la teoría de Griffith pero de una forma más adecuada para resolver problemas de ingeniería. Con anterioridad, Westergaard (1939) había desarrollado una técnica semiinversa para analizar tensiones y desplazamientos en el vértice de una grieta. Irwin utilizó estos resultados de Westergaard (Irwin, 1957) para demostrar que las tensiones y desplazamientos en las proximidades del vértice de una grieta pueden obtenerse a partir de una única constante relacionada con el índice de liberación de energía. Este parámetro que caracteriza el vértice de una grieta se conocería más tarde como factor de intensidad de tensión. El campo de la Mecánica de la Fractura, sobre todo a partir de la 2ª Guerra Mundial, pasó de ser una curiosidad a convertirse en una disciplina dentro de la ingeniería, su desarrollo durante los últimos 40 años ha sido continuo.

La rotura frágil de un material se produce con muy pequeña deformación, y normalmente el proceso de separación de los componentes estructurales en dos o más piezas ocurre rápidamente. El modelo de Irwin para un material elasto-plástico ideal, permite aprovechar la solución elástica ideal de los campos de tensiones y desplazamientos en las inmediaciones del vértice de una grieta, suponiendo una grieta de longitud mayor que la verdadera. Cuando la deformación plástica que experimenta el material abarca una zona pequeña, la solución predicha con el mo-

delo de Irwin es suficientemente aproximada. Esto es cierto en muchas situaciones bien por la naturaleza frágil del material en estudio, o bien por las condiciones de carga existentes que impiden que en las cercanías del vértice de la grieta se desarrolle una extensa zona plástica. Así, puede afirmarse que las tensiones cerca del vértice de una grieta varían asintóticamente con $1/\sqrt{r}$, siendo r la distancia al vértice, y se pueden calcular mediante la Teoría de la Elasticidad Lineal. Esta es la llamada Mecánica de la Fractura Elástico-Lineal (MFEL).

Hay dos grupos de problemas de grietas en los que los efectos dinámicos son significativos, i.e. sólidos con una grieta estacionaria sometidos a una carga de impacto, y sólidos con una grieta propagándose a una velocidad suficientemente alta. En el primero, el campo de tensiones asintótico cerca del borde de la grieta es idéntico al problema elastostático correspondiente y generalmente, aparece un salto en el valor del factor de intensidad de tensión dinámico respecto al estático. En el segundo, el comportamiento asintótico en el borde de la grieta depende exclusivamente de la velocidad instantánea de crecimiento de la grieta (véase artículo de revisión de Rosakis y Ravichandran, 2000). Una aplicación importante de la elastodinámica es el ensayo no destructivo de componentes estructurales, que generalmente implica la determinación del tipo, tamaño, posición y orientación de defectos en el medio a partir de emisiones ultrasónicas y acústicas (Achenbach, 2000).

En los últimos 50 años se ha producido un auge importante en la aplicación de materiales con propiedades elásticas anisótropas con fines estructurales. El empleo de nuevos materiales puede ofrecer enormes ventajas, pero también mayores problemas potenciales dado el desconocimiento que inicialmente se tiene de su respuesta en servicio. De ahí que su estudio esté tan extendido entre la comunidad de investigadores de medios continuos y materiales. Originalmente, los materiales compuestos o composites reforzados unidireccionalmente con fibras, se emplearon en la industria aeroespacial dada la buena relación existente entre

su peso y propiedades mecánicas, i.e. rigidez y resistencia, alta resistencia a la corrosión y flexibilidad en el diseño. No obstante en la actualidad el ámbito de aplicación de estos materiales se ha ampliado considerablemente.

La rigidez y resistencia de estos materiales pueden verse alterados bruscamente por la existencia de microgrietas. Estas microgrietas pueden haberse producido por rotura de las fibras, desvinculamiento de fibras de la matriz o delaminación entre láminas contiguas, bien durante el proceso de fabricación, o bien en servicio. Por ello, el estudio de la propagación de ondas en materiales compuestos que contienen microgrietas, es tan importante para la detección y caracterización del daño en composites mediante análisis no destructivo con ultrasonidos, y para la determinación del inicio y crecimiento de una macrogrieta bajo condiciones de carga dinámica aplicando la MFEL. Aunque en una situación real pueden aparecer numerosos efectos, dado que la longitud de onda de una onda elástica es mucho mayor que la longitud característica del material compuesto, i.e. el diámetro y la distancia entre fibras, o el espesor de la capas, respectivamente, los composites reforzados unidireccionalmente con fibras y los laminados pueden modelarse como materiales transversalmente isótropos u ortótropos.

A partir de los años 70 hubo un notable interés por la aplicación de la teoría de la mecánica de la fractura a problemas reales que inherentemente son tridimensionales. Los numerosos intentos por obtener soluciones para este tipo de problemas han dado lugar a una gran variedad de métodos, algunos de los cuales son difíciles de seguir y extremadamente costosos en tiempo. A menudo las soluciones exactas de problemas tridimensionales fisurados presentan numerosas dificultades y se hace necesario recurrir a soluciones simplificadas. Estas simplificaciones podrían deberse a algún tipo de simetría en la geometría y/o las cargas. Con frecuencia el problema puede formularse satisfactoriamente pero las expresiones matemáticas que resultan solo pueden ser resueltas de forma aproximada. En los problemas de grietas tridimensionales, que implican grandes singularidades en las tensiones continuamente se hace necesario interpretar físicamente de forma sensata los re-

sultados numéricos obtenidos.

Los métodos numéricos de más amplia aplicación en la Mecánica de los Medios Continuos son, el Método de las Diferencias Finitas (MDF), el Método de los Elementos Finitos (MEF) y el Método de los Elementos de Contorno (MEC).

El método de los elementos de contorno puede aplicarse a problemas de mecánica de la fractura sin las limitaciones asociadas con el método de los elementos finitos, i.e. necesidad de generar mallas muy refinadas en las proximidades de la grieta y continuo remallado interior para problemas con propagación de grietas. Sin embargo, la aplicación del MEC en forma estándar a sólidos fisurados da lugar a una degeneración matemática en la solución numérica, al ser las superficies de la grieta coplanarias. Durante un largo período de tiempo la única técnica de elementos de contorno general para el estudio de grietas ha sido el empleo de subregiones (Blandford et al., 1981). Esta técnica divide el dominio en regiones introduciendo un contorno ficticio que pasa a través de la grieta, esto introduce nodos y elementos internos adicionales que conectan el vértice de la grieta con el contorno exterior. Otros autores extendieron la técnica de las subregiones en combinación con la ecuación integral en desplazamientos a problemas bidimensionales y tridimensionales en elasticidad, termoelasticidad, propagación de ondas, medios isótropos y anisótropos, y otros campos (véase el artículo de revisión de Aliabadi, 1997).

Para simular numéricamente el crecimiento de una grieta se hace necesario discretizar las distintas regiones, usando bien un remallado manual, altamente costoso en tiempo, o bien una sofisticada técnica de remallado automático. La dificultad aumenta si tenemos en cuenta el especial cuidado que requiere la zona cercana al vértice de la grieta. Para un modelo tridimensional real, generar una malla de elementos de contorno con subregiones resulta laborioso y la obtención de los resultados excesivamente costosa.

En esta tesis se va a aplicar la Mecánica de la Fractura Elástico-Lineal al estudio de problemas tridimensionales de sólidos fisurados bajo condiciones de carga

estática o de impacto, para materiales isotropos o transversalmente isotropos, mediante una formulación sin subregiones enmarcada dentro del Método de Elementos de Contorno y que tiene su origen en la representación integral de las tracciones, también conocida como formulación hipersingular.

Durante los últimos quince años el número de trabajos dedicados a la formulación hipersingular del MEC ha crecido rápidamente. Dicha formulación surge como alternativa al empleo de subregiones y se basa en derivar la ecuación integral estándar de elementos de contorno para obtener las tracciones en el contorno.

Los elementos de contorno hipersingulares se aplican principalmente a problemas de grietas, para los que se simplifican enormemente las discretizaciones y en muchos casos se mejora la precisión de los resultados.

El uso de este tipo de elementos de contorno presenta dos dificultades significativas: una es la condición de continuidad que deben satisfacer las funciones de densidad; y la otra, la integración de núcleos fuertemente singulares e hipersingulares que aparecen tras derivar los núcleos clásicos. Ambos aspectos han atraído la atención de los investigadores de elementos de contorno a partir de las primeras publicaciones en las que se aplicaron formulaciones hipersingulares de ecuaciones integrales de contorno a problemas estáticos de grietas (Cruse, 1975), propagación de ondas (Burton y Miller, 1971) y dispersión de ondas a través de grietas (Sladek y Sladek, 1984, Nishimura y Kobayashi, 1988). Para salvar estas dificultades se han presentado diferentes propuestas por parte de Sladek y Sladek (1984), Budreck y Achenbach (1988) y algunos otros. La mayoría de estos trabajos son válidos únicamente para geometrías sencillas. Pueden encontrarse revisiones completas y muy interesantes del trabajo realizado hasta 1992 y 1994 en los artículos de Krishnasamy et al. (1992) y Tanaka et al. (1994), respectivamente.

La existencia de un límite en el contorno, en la representación integral de las tracciones, establece una condición de continuidad sobre los desplazamientos en los puntos de colocación, éstos deben cumplir la condición de continuidad de Hölder de tipo $C^{1,\alpha}$. Estos requisitos representan una dificultad seria cuando se utilizan

discretizaciones estándar de elementos de contorno cuyas variables de contorno en el borde de los elementos presentan continuidad C^0 únicamente. Sin embargo, los requisitos de continuidad $C^{1,\alpha}$ han sido claramente establecidos, tras rigurosas discusiones, por Martin y Rizzo (1989), Martin y Rizzo (1996), Krishnasamy et al. (1990), Tanaka et al. (1994) y muy recientemente por Martin et al. (1998). Cabe destacar el trabajo de Cruse y coautores, Huang y Cruse (1994), Cruse y Richardson (1996) y Richardson et al. (1997), en el que los autores defendían la no necesidad de condiciones de continuidad $C^{1,\alpha}$ para los desplazamientos del contorno en la formulación de ecuaciones integrales de contorno en tracciones. No obstante, después del más reciente trabajo de Martin y Rizzo junto con Cruse (Martin et al., 1998), parece estar claro que la condición $C^{1,\alpha}$ es estrictamente necesaria, a pesar del hecho de que se han obtenido buenos resultados con algunas condiciones de continuidad menos estrictas.

Para satisfacer los requisitos de continuidad en las derivadas de superficie de los desplazamientos en los puntos de colocación del contorno (Martha et al., 1992), se han propuesto muchas estrategias. Algunas de ellas basadas en el uso de elementos especiales que hacen continuas las derivadas de las variables de contorno (Sladek et al., 1992, Young, 1996). Estos elementos son bastante complicados y difíciles de incluir en un programa general de elementos de contorno. Portela et al. (1992) y Mi y Aliabadi (1992) han propuesto una alternativa conceptualmente más simple, basada en el uso de elementos discontinuos. El tamaño del sistema de ecuaciones que se genera para problemas tridimensionales es mucho mayor cuando se utilizan estos elementos.

En esta tesis se propone una estrategia diferente. Es una extensión a tres dimensiones de la idea propuesta por Gallego y Domínguez (1996) para problemas bidimensionales. Los elementos son continuos y las variables se representan de forma clásica; i.e. con nodos situados en el contorno de los elementos. Sin embargo, se coloca en puntos dentro del elemento en los que se satisfacen las condiciones de continuidad $C^{1,\alpha}$ exigidas. Usando esta técnica se evitan las dificultades ori-

ginadas por los requisitos de continuidad en los puntos de colocación y el número de incógnitas nodales es el mismo que en la formulación clásica.

Entre los objetivos de este trabajo no está la solución de los problemas de continuidad de las variables de contorno, que se resuelven con la estrategia de colocación mencionada, pero sí la segunda dificultad importante en la formulación hipersingular de elementos de contorno; i.e., la integración de los núcleos fuertemente singulares e hipersingulares. Este problema ha sido abordado desde diferentes puntos de vista y se han desarrollado numerosas técnicas de regularización (véase el artículo de revisión de Tanaka et al., 1994).

Algunas de las ideas del presente trabajo están relacionadas con las propuestas por Rudolphi (1991) y Rudolphi et al. (1988), sin embargo la formulación de estos autores falla cuando se trata de medios abiertos, como es el caso de muchos problemas de grietas.

Por otra parte, Guiggiani et al. (1992) y Mantic (1994) presentaron una aproximación basada en regularizaciones usando desarrollos de Taylor de los desplazamientos sobre el punto de colocación como proponen Aliabadi et al. (1985). En este método, se regulariza después de discretizar y las integrales se realizan de forma general, lo cual precisa una laboriosa transformación de coordenadas. Mi y Aliabadi (1992) resolvieron problemas tridimensionales de fractura por el método dual de elementos de contorno utilizando el método de integración propuesto por Guiggiani et al. (1992).

En la tesis que se presenta, se obtiene la ecuación integral de contorno hipersingular en elasticidad llevando la representación integral de tracciones al contorno. La regularización se lleva a cabo usando dos términos del desarrollo en serie de Taylor de los desplazamientos en el punto de colocación, y un término para el desarrollo de las tracciones. Todas las integrales resultantes que contienen núcleos fuertemente singulares e hipersingulares se transforman por procedimientos analíticos en integrales con núcleos regulares o débilmente singulares integrables numéricamente mediante cuadratura de Gauss estándar (véase Cerrolaza y Alarcón, 1989).

El método que se presenta es general para superficies de contorno y elementos de contorno de cualquier forma. La regularización se hace antes de cualquier discretización del contorno. Todas las integraciones en el proceso de transformación de los núcleos se realizan analíticamente de forma directa sin cambio de coordenadas.

La extensión de las formulaciones de la Ecuación Integral de Contorno (EIC) en tracciones a problemas de mecánica de la fractura dinámica para dominios infinitos es muy sencilla. De hecho, algunas de dichas formulaciones fueron obtenidas directamente para problemas de difracción de ondas a través de grietas. Sladek y Sladek (1984), (1986) obtuvieron el FIT para un grieta circular bajo condiciones de carga simétrica armónica. Budreck y Achenbach (1988) presentaron una formulación similar para grietas planas de geometría y condiciones de carga más generales. Hirose y Achenbach (1988), (1989) resolvieron el problema de una grieta circular bajo condiciones de carga transitoria trabajando directamente en el dominio del tiempo. Nishimura y Kobayashi (1988), (1989) trabajaron en la regularización de las expresiones hipersingulares dinámicas y en el uso de funciones spline para satisfacer los requisitos de continuidad en la representación de los desplazamientos. Obtuvieron resultados para grietas circulares y elípticas. Zhang y Gross (1988) y Krishnasamy et al. (1990) también estudiaron problemas dinámicos de grietas inmersas en dominios infinitos bidimensionales usando la EIC en tracciones.

El número de trabajos relacionados con la solución de problemas dinámicos de grietas en dominios finitos usando la EIC en tracciones es bastante limitado. En dos dimensiones cabe destacar el trabajo de Fedelinski et al. (1993), (1995), (1996) que extendió la formulación mixta presentada previamente por Portela et al. (1992) para problemas dinámicos de grietas rectas usando aproximaciones en el dominio del tiempo y la transformada de Laplace. También Gallego y Domínguez (1997) extendieron a dinámica la formulación mixta de Sáez et al. (1995) para problemas bidimensionales de grietas de geometría arbitraria. En los últimos años Wen et al. (1998), (1999) han desarrollado una formulación mixta de elemen-

tos de contorno en dinámica para grietas tridimensionales en dominios finitos. Discretizan las superficies de la grieta con elementos cuadráticos discontinuos y calculan el FIT a partir de los desplazamientos de apertura de grieta aplicando el método de Reciprocidad Dual y la transformada de Laplace. Estos autores evalúan las integrales hipersingulares y fuertemente singulares usando un sistema de coordenadas polar (véase Mi y Aliabadi, 1992).

En esta tesis la formulación y solución se realizan en el dominio de la frecuencia. Se estudian problemas de grietas sometidas a cargas armónicas inmersas en dominios finitos o infinitos, pudiendo introducirse fácilmente el amortiguamiento interno del material por medio de valores complejos de las constantes elásticas del material.

La mayoría de los composites de fibra pueden modelarse como materiales transversalmente isótropos con un campo de tensiones definido por cinco constantes elásticas (Christensen, 1979). Hace más de 30 años Kassir y Sih (1968) establecieron los conceptos básicos de mecánica de la fractura para sólidos transversalmente isótropos. Demostraron que el orden de la singularidad en las tensiones en las cercanías de grietas tridimensionales, bien conocida para materiales isótropos, continúa siendo \sqrt{r} para sólidos transversalmente isótropos, aunque las tensiones dependen del grado de anisotropía (Sih y Chen, 1981). De igual forma la magnitud de las tensiones locales puede expresarse en términos de los factores de intensidad de tensión. Kassir y Sih obtuvieron expresiones para los campos de tensiones y desplazamientos en las proximidades del vértice de una grieta para grietas de geometría arbitraria contenidas en un plano perpendicular al eje de simetría del material. Sih et al. (1965) obtuvieron 3 años antes expresiones para los campos de tensiones y desplazamientos cerca del vértice de grietas en medios anisótropos para el caso bidimensional. Numerosos autores incluyendo Chen (1966) y Chen y Soni (1964) han estudiado el problema de una grieta circular sometida a carga estática en un material transversalmente isótropo. Para el caso de una grieta elíptica, caben destacar los trabajos de Shield (1951) para carga de tracción y

Chen (1966) para carga cortante. Todas estas soluciones están recopiladas en los textos de Sih y Chen (1981) y Kassir y Sih (1975).

Más recientemente Rajiyah y Atluri (1991) generalizaron la solución analítica del FIT para una grieta elíptica sometida a estados de carga arbitrarios sobre la superficie de la grieta, ya que la solución previa obtenida por Kassir y Sih era válida únicamente para tracciones constantes o variables linealmente. Rajiyah y Atluri estudiaron problemas de grietas elípticas interiores y superficiales contenidas en el plano perpendicular al eje de simetría del material e inmersas en medios transversalmente isótropos de dimensiones finitas aplicando su solución generalizada en combinación con la técnica de elementos finitos alternativos.

El número de trabajos de elementos de contorno centrados en el estudio de problemas de mecánica de la fractura en materiales no isótropos es realmente reducido. Caben destacar los trabajos de Snyder y Cruse (1975) y más recientemente Chan y Cruse (1986). Cruse y sus coautores desarrollaron una aproximación de elementos de contorno para el estudio de problemas de grietas bidimensionales en sólidos totalmente anisótropos. En 1990, Ishikawa presentó una formulación tridimensional de elementos de contorno para el estudio de problemas de grietas en medios transversalmente isótropos y anisótropos. Esta aproximación se basa en el empleo de subregiones y elementos a un cuarto en combinación con elementos de transición colocados a continuación de éstos. No se introducen elementos singulares para representar las tracciones en el frente de la grieta. Los FIT se calculan a partir de una aproximación bidimensional del desplazamiento de apertura de grieta y únicamente se obtienen resultados para modo I (Ishikawa, 1990).

Más recientemente, Sáez et al. (1997) presentaron una formulación de elementos de contorno en la que se extendía la implementación del elemento a un cuarto singular cuadrático desarrollado por Ariza et al. (1997) al estudio de problemas de grietas contenidas en materiales transversalmente isótropos. Emplearon la solución fundamental correspondiente a una carga unidad aplicada en el origen de coordenadas de un dominio tridimensional infinito transversalmente isótropo obtenida

en 1976 por Pan y Chou. Se obtienen valores del FIT en modos I, II y III para grietas tridimensionales contenidas tanto en dominios finitos como infinitos, internas y de borde. Pan y Yuan (2000) utilizando también la solución fundamental de Pan y Chou (1976) y resolviendo las hipersingularidades presentes en la ecuación integral en tracciones que platean sobre una de las caras de la grieta mediante la aplicación de cuadraturas de Kutt, presentaron valores del FIT para grietas circulares y cuadradas inmersas en dominios infinitos transversalmente isótropos.

En esta tesis se han obtenido las expresiones de los núcleos de la solución fundamental correspondiente a la EIC en tracciones derivando la solución fundamental obtenida explícitamente por Pan y Chou (1976), aplicándoseles la misma técnica de regularización que en el caso isótropo. Se han obtenido los FIT en modos I, II y III para grietas de distinta geometría, internas o de borde, inmersas en dominios tanto finitos como infinitos y para distintos materiales transversalmente isótropos.

Pueden encontrarse en la bibliografía pocos resultados relacionados con la obtención del FIT dinámico cuando ondas elásticas armónicas inciden sobre las superficies de grietas contenidas en materiales transversalmente isótropos. En dos dimensiones Ohyoshi (1973) y Zhang y Gross (1993) presentaron resultados para problemas antiplanos y Dhawan (1982), (1983) y Ohyoshi (1973) para problemas planos. Para problemas tridimensionales únicamente se han estudiado grietas circulares en medios infinitos (conocidos por el autor). Tsai (1982), (1988), (1989) obtuvo numéricamente FIT dinámicos a baja frecuencia, y Kundu (1990) y Kundu y Boström (1991), (1992) estudiaron la difracción de ondas longitudinales y torsionales a través de la grieta. En el dominio del tiempo cabe destacar el trabajo de Rizza y Nair (1999). Utilizando las transformadas de Laplace y Hankel, reducen las ecuaciones de la elasticidad para una grieta circular en medio infinito transversalmente isótropo sometida a cargas de impacto no axisimétricas, a ecuaciones integrales para los tres modos de fractura.

En esta tesis se han obtenido los FIT dinámicos para grietas de geometría circular y elíptica, tanto a baja y como a alta frecuencia. Los resultados se com-

paran favorablemente con los obtenidos por otros autores para el caso de la grieta circular, sin embargo no hay otros resultados hasta el momento para grietas de geometría elíptica, conocidos por el autor, para poder contrastar los obtenidos en esta tesis.

Capítulo 2

Aspectos Generales de la Formulación Hipersingular Tridimensional del MEC

2.1 Introducción

En este capítulo van a tratarse algunos aspectos generales de la formulación hipersingular tridimensional de Elementos de Contorno desarrollada en esta tesis, comunes tanto a problemas elásticos como de potencial, estáticos o dinámicos, dominios finitos o infinitos, materiales isótropos o transversalmente isótropos.

En el apartado 2 se aplica la técnica a problemas que cumplen la ecuación de Laplace. Se ilustra de esta forma sobre un problema gobernado por soluciones fundamentales relativamente sencillas, el procedimiento de obtención de los núcleos hipersingulares y fuertemente singulares de la EIC en flujo a partir de las derivadas de los núcleos de la EIC clásica, y la técnica de regularización de los mismos para obtener términos integrables numéricamente. Aunque en cada tipo de problema

son distintas las expresiones a regularizar, la técnica que se emplea no difiere en gran medida de la aplicada en este caso.

El proceso de discretización del contorno del problema, que permite su reducción a un sistema de ecuaciones integrales del cual se obtienen las variables sobre dicho contorno, es el mismo que el empleado en la formulación estándar del MEC, véase Domínguez (1993). Sin embargo, en la formulación hipersingular del MEC deben cumplirse ciertos requisitos de continuidad de las funciones de densidad sobre el contorno que obligan a desarrollar una técnica diferente de la estándar para obtener este sistema de ecuaciones, llamada Método de Colocación Múltiple, su planteamiento se aborda en el apartado 3.

2.2 Ecuación integral de contorno en flujo. Problemas de potencial

La representación integral para un problema de Laplace del potencial u en un punto \mathbf{y} en el interior de un dominio Ω , con superficie de contorno regular Γ y vector normal unitario $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ en el punto del contorno \mathbf{x} viene dada por

$$u(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) q(\mathbf{x}) d\Gamma = 0 \quad (2.1)$$

siendo $u(\mathbf{x})$ y $q(\mathbf{x}) = \partial u / \partial n(\mathbf{x})$ el potencial y el flujo normal en el punto del contorno \mathbf{x} , respectivamente, y $u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y $q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ las soluciones fundamentales de potencial y flujo normal, respectivamente.

Derivando la ecuación anterior en un punto \mathbf{y} a lo largo de una dirección definida por el vector unitario $\mathbf{N}(\mathbf{y})$ y llamando $q(\mathbf{y}) = (\partial u / \partial y_i) N_i(\mathbf{y})$ se obtiene

$$q(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} \frac{\partial q^*}{\partial y_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_i(\mathbf{y}) u(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial y_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_i(\mathbf{y}) q(\mathbf{x}) d\Gamma = 0 \quad (2.2)$$

Si en cambio se deriva la ecuación (2.1) con respecto únicamente a la coordenada cartesiana y_i , como se hace en Guiggiani et al. (1992), puede conseguirse una representación integral similar para cada derivada del potencial $\partial u / \partial y_i$ en \mathbf{y} . En

esta tesis se ha preferido utilizar la derivada con respecto a una dirección general \mathbf{N} para así obtener más adelante una ecuación integral en términos del potencial u y el flujo normal q .

Considerando ahora un punto de colocación en el contorno, $\mathbf{y} \in \Gamma$, y aplicando la ecuación (2.2) al dominio ligeramente modificado que se muestra en la figura 2.1, se tiene

$$q(\mathbf{y}) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{(\Gamma - e_\varepsilon) + \Gamma_\varepsilon} \left[\frac{\partial q^*}{\partial y_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_i(\mathbf{y}) u(\mathbf{x}) - \frac{\partial u^*}{\partial y_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_i(\mathbf{y}) q(\mathbf{x}) \right] d\Gamma \right\} = 0 \quad (2.3)$$

Para obtener una ecuación integral, la existencia de este límite en el contorno establece unos requisitos de continuidad en \mathbf{y} del tipo $u \in C^{1,\alpha}$; i.e., u es derivable en \mathbf{y} , satisfaciendo su primera derivada la condición de Hölder y siendo α una constante positiva (normalmente, $\alpha = 1$) como fue puesto de manifiesto por Martin y Rizzo (1996) y Martin et al. (1998).

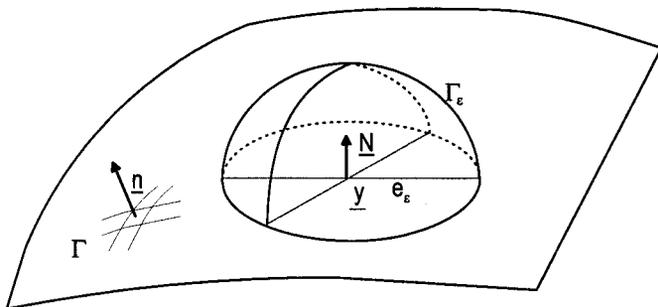


Figura 2.1: Dominio modificado alrededor de un punto del contorno.

Cabe destacar que la solución fundamental u^* presenta una singularidad débil del tipo r^{-1} cuando $r \rightarrow 0$, siendo r la distancia entre el punto de colocación \mathbf{y} y el punto de integración \mathbf{x} ($r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$). Las soluciones fundamentales correspondientes al flujo normal q^* y a la derivada $\partial u^* / \partial y_i$ presentan una singularidad fuerte del tipo r^{-2} cuando $r \rightarrow 0$, y la derivada $\partial q^* / \partial y_i$ tiene una hipersingularidad del tipo r^{-3} cuando $r \rightarrow 0$.

La superficie Γ_ϵ se utiliza para alejar el punto \mathbf{y} del contorno, siendo regular puede tener cualquier geometría, por simplicidad se elige una superficie esférica. La ecuación (2.3) se escribe para puntos suaves del contorno, siendo \mathbf{N} la normal exterior unitaria en el punto \mathbf{y} al contorno Γ . Para puntos no suaves del contorno, no es posible derivar una ecuación integral únicamente en términos del potencial y el flujo normal en el contorno siguiendo un proceso de paso al límite en el contorno. Sin embargo, puede seguirse este proceso para las derivadas con respecto a las coordenadas cartesianas del potencial.

Usando una notación similar a la empleada por Guiggiani et al. (1992):

$$W_i = \frac{\partial u^*}{\partial y_i} = \frac{1}{4\pi r^2} r_{,i}$$

$$V_i = \frac{\partial q^*}{\partial y_i} = \frac{\partial u^*}{\partial x_j \partial y_i} n_j(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi r^3} \left[3r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n} - n_i \right] \quad (2.4)$$

donde $r_{,i} = \partial r / \partial x_i = -\partial r / \partial y_i$, la ecuación (2.3) puede escribirse como:

$$q(\mathbf{y}) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{(\Gamma - e_\epsilon)} [V_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_i(\mathbf{y}) u(\mathbf{x}) - W_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_i(\mathbf{y}) q(\mathbf{x})] d\Gamma + \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_\epsilon} [V_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_i(\mathbf{y}) u(\mathbf{x}) - W_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_i(\mathbf{y}) q(\mathbf{x})] d\Gamma \right\} = 0 \quad (2.5)$$

Teniendo en cuenta que el potencial cumple condiciones de continuidad del tipo $C^{1,\alpha}$, en \mathbf{y} , puede realizarse un desarrollo en serie de éste alrededor del punto de colocación

$$u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{y}) + u_{,k}(\mathbf{y})(x_k - y_k) + O(r^{1+\alpha}) \quad (2.6)$$

El desarrollo en serie de la derivada normal del flujo en ese mismo punto \mathbf{y} sobre la superficie Γ_ϵ es:

$$q(\mathbf{x}) = u_{,k}(\mathbf{x}) n_k(\mathbf{x}) = u_{,k}(\mathbf{y}) n_k(\mathbf{x}) + O(r^\alpha) \quad (2.7)$$

Nótese que la normal unitaria $n_k(\mathbf{x})$ es una variable continua sobre la superficie Γ_ϵ con valores $-1 \leq n_k(\mathbf{x}) \leq 1$. Sin embargo, sobre la superficie e_ϵ , correspondiente a la

huella de la esfera sobre el contorno Γ , $n_k(\mathbf{x}) \rightarrow n_k(\mathbf{y}) = N_k(\mathbf{y})$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por otro lado, el producto $r_{,i}(\mathbf{x}) N_i(\mathbf{y}) \rightarrow \partial r / \partial n = 0(r)$, cuando $r \rightarrow 0$, sobre la superficie $\Gamma - e_\varepsilon$, $W_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_i(\mathbf{y})$ es débilmente singular cuando $r \rightarrow 0$, y no es necesario desarrollar el flujo $q(\mathbf{x})$ sobre la superficie $\Gamma - e_\varepsilon$. Cabe destacar además que cuando se desarrolla $u(\mathbf{x})$ sobre $\Gamma - e_\varepsilon$ hay que entender las componentes del gradiente $u_{,k}(\mathbf{y})$ como las componentes del gradiente tangencial (Bonnet y Bui, 1992); i.e., como $\hat{u}_{,k} = (u_{,k} - n_k \frac{\partial u}{\partial n})$. En adelante, se omitirá el símbolo ($\hat{\quad}$), teniendo en cuenta que cuando se integre sobre la superficie $\Gamma - e_\varepsilon$, $u_{,k}(\mathbf{y})$ van a ser las componentes del gradiente tangencial y como tal se representará en la discretización de elementos de contorno.

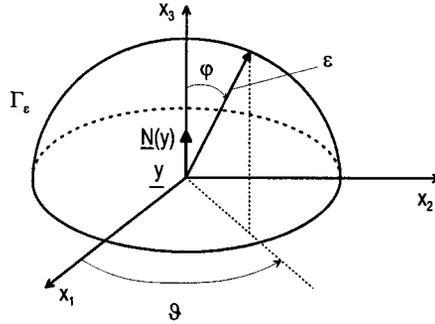


Figura 2.2: Sistema local de coordenadas.

Introduciendo los desarrollos (2.6) y (2.7) en la ecuación (2.5) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 q(\mathbf{y}) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{\Gamma - e_\varepsilon} [V_i N_i [u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}) - u_{,k}(\mathbf{y})(x_k - y_k)] - W_i N_i q(\mathbf{x})] d\Gamma + \right. \\
 \int_{\Gamma_\varepsilon} [V_i N_i [u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}) - u_{,k}(\mathbf{y})(x_k - y_k)] - W_i N_i [q(\mathbf{x}) - u_{,k}(\mathbf{y})n_k(\mathbf{x})]] d\Gamma + \\
 u(\mathbf{y}) \int_{\Gamma - e_\varepsilon} V_i N_i d\Gamma + u(\mathbf{y}) \int_{\Gamma_\varepsilon} V_i N_i d\Gamma + u_{,k}(\mathbf{y}) \int_{\Gamma - e_\varepsilon} V_i N_i (x_k - y_k) d\Gamma + \\
 \left. u_{,k}(\mathbf{y}) \int_{\Gamma_\varepsilon} N_i [V_i (x_k - y_k) - W_i n_k(\mathbf{x})] d\Gamma \right\} = 0 \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

o

$$q(\mathbf{y}) + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 = 0 \tag{2.9}$$

Los núcleos de la integrales T_1 y T_2 son débilmente singulares. Por lo tanto:

$$T_1 = \int_{\Gamma} \{V_i N_i [u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}) - u_{,k}(\mathbf{y})(x_k - y_k)] - W_i N_i q(\mathbf{x})\} d\Gamma \quad (2.10)$$

y

$$T_2 = 0 \quad (2.11)$$

Para evaluar los términos T_3 a T_6 , se va a utilizar un sistema de coordenadas centrado en el punto \mathbf{y} , con ejes 1 y 2 situados en el plano tangente al contorno y el eje 3 en la dirección de la normal $\mathbf{N}(\mathbf{y})$ (figura 2.2).

Así,

$$T_4 = u(\mathbf{y}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma_\varepsilon} V_i N_i d\Gamma = u(\mathbf{y}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma_\varepsilon} -\frac{1}{4\pi r^3} \left[3r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n} - n_i \right] N_i d\Gamma \quad (2.12)$$

Teniendo en cuenta que $r = \varepsilon$, $N_1 = N_2 = 0$, $N_3 = 1$, $\partial r / \partial n = 1$, $r_{,3} = \cos \varphi$, $n_3 = \cos \varphi$ y $d\Gamma = r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta$, la integral T_4 queda

$$T_4 = u(\mathbf{y}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi/2} -\frac{1}{2\pi\varepsilon} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \right] d\theta = u(\mathbf{y}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{2\varepsilon} \right) \quad (2.13)$$

El término T_3 se expresa como:

$$\begin{aligned} T_3 &= u(\mathbf{y}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma - e_\varepsilon} V_i N_i d\Gamma = \\ &= u(\mathbf{y}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma - e_\varepsilon} -\frac{1}{4\pi r^3} \left[3r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n} N_i - n_i N_i \right] d\Gamma = \\ &= u(\mathbf{y}) \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma - e_\varepsilon} -\frac{3}{4\pi r^3} r_{,i} N_i \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma - e_\varepsilon} \frac{n_i N_i}{4\pi r^3} d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

La última integral de la ecuación (2.14) puede calcularse analíticamente usando el teorema de Stokes (véase Apéndice A).

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma - e_\varepsilon} \frac{n_i N_i}{4\pi r^3} d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma - e_\varepsilon} \frac{3(\mathbf{N} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})}{4\pi r^5} d\Gamma + \\ &\quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial(\Gamma - e_\varepsilon)} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} d\mathbf{l} \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde la primera integral es débilmente singular y se cancela con la primera integral del lado derecho de la ecuación (2.14). El borde $\partial(\Gamma - e_\varepsilon)$ es la línea que cierra la superficie $\Gamma - e_\varepsilon$. Cuando Γ es una superficie cerrada, $\partial(\Gamma - e_\varepsilon)$ pasa a ser ∂e_ε , que es la circunferencia de radio ε alrededor del punto de colocación \mathbf{y} .

En general:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial(\Gamma - e_\varepsilon)} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} d\mathbf{l} &= \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} d\mathbf{l} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial e_\varepsilon} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} d\mathbf{l} = \\ &\quad \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} d\mathbf{l} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde la integral de línea se extiende sobre el contorno exterior de Γ , siendo cero cuando Γ es una superficie cerrada.

Sustituyendo la ecuaciones (2.15) y (2.16) en la ecuación (2.14) se obtiene:

$$T_3 = u(\mathbf{y}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma - e_\varepsilon} V_i N_i d\Gamma = u(\mathbf{y}) \left\{ \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} d\mathbf{l} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \right\} \quad (2.17)$$

donde la integral de línea solo existe para contornos abiertos.

El término T_6 puede escribirse como

$$\begin{aligned} T_6 &= u_{,k}(\mathbf{y}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} N_i \int_{\Gamma_\varepsilon} [V_i(x_k - y_k) - W_i n_k] d\Gamma = \\ &\quad u_{,k}(\mathbf{y}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} N_i \int_{\Gamma_\varepsilon} \left\{ -\frac{1}{4\pi r^3} \left[3r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n} (x_k - y_k) - n_i (x_k - y_k) \right] - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{4\pi r^2} r_{,i} n_k \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.18)$$

En la ecuación (2.18) puede observarse, considerando el sistema de coordenadas de la figura 2.2, que la integral sobre Γ_ε es cero para $i \neq k$. Dado que $N_1 = N_2 = 0$ y $N_3 = 1$, el único término no nulo se obtiene cuando $i = k = 3$.

Así,

$$\begin{aligned}
 T_6 = & u_{,3}(\mathbf{y}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left\{ -\frac{1}{4\pi r^3} [3r_{,3}(x_3 - y_3) - n_3(x_3 - y_3)] - \frac{1}{4\pi r^2} r_{,3} n_3 \right\} d\Gamma = \\
 & u_{,3}(\mathbf{y}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi/2} -\frac{3}{4\pi} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \right] d\theta = \\
 & -\frac{1}{2} u_{,3}(\mathbf{y}) = -\frac{1}{2} q(\mathbf{y})
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Nótese que la ecuación (2.19) es válida no únicamente para el sistema de coordenadas local de la figura 2.2, sino para cualquier sistema de coordenadas.

Queda por evaluar el término T_5 de la ecuación (2.9).

$$\begin{aligned}
 T_5 = & u_{,k}(\mathbf{y}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma - e_\varepsilon} V_i(x_k - y_k) d\Gamma = \\
 & u_{,k}(\mathbf{y}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{\Gamma - e_\varepsilon} -\frac{3}{4\pi r^3} r_{,i} N_i \frac{\partial r}{\partial n} (x_k - y_k) d\Gamma + \int_{\Gamma - e_\varepsilon} \frac{1}{4\pi r^2} N_i n_i r_{,k} d\Gamma \right\}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Teniendo en cuenta que $r_{,i} N_i = O(r)$, $\partial r / \partial n = O(r)$ y $(x_k - y_k) = O(r)$ cuando $r \rightarrow 0$, puede concluirse que la primera integral de la ecuación (2.2) es regular. La segunda presenta una singularidad fuerte pero puede transformarse usando, como anteriormente, el teorema de Stokes de la siguiente forma (véase Apéndice A):

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma - e_\varepsilon} \frac{1}{4\pi r^2} N_i n_i r_{,k} d\Gamma = \\
 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{\Gamma - e_\varepsilon} \frac{N_m n_k r_{,m}}{4\pi r^2} d\Gamma + \oint_{\partial(\Gamma - e_\varepsilon)} \frac{1}{4\pi r} (\mathbf{e}_k \times \mathbf{N}) d\mathbf{l} \right\}
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

donde \mathbf{e}_k es el vector unitario en la dirección k . La primera integral del lado derecho de la ecuación (2.21) es débilmente singular. La segunda se extiende sobre la línea que cierra la superficie $\Gamma - e_\varepsilon$.

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial(\Gamma - e_\varepsilon)} \frac{1}{r} (\mathbf{e}_k \times \mathbf{N}) d\mathbf{l} = \\
 & \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Gamma} \frac{1}{r} (\mathbf{e}_k \times \mathbf{N}) d\mathbf{l} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial e_\varepsilon} \frac{1}{r} (\mathbf{e}_k \times \mathbf{N}) d\mathbf{l}
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

donde $\partial\Gamma$ es el contorno exterior de Γ y ∂e_ε es la circunferencia de radio ε alrededor de \mathbf{y} . El último límite de la ecuación (2.22) es cero, y la integral sobre $\partial\Gamma$ es también cero cuando Γ es un contorno cerrado. Por otro lado, para un contorno abierto general, la ecuación (2.21) se expresa como

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma - e_\varepsilon} \frac{1}{4\pi r^2} N_i n_i r_{,k} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{N_m n_k r_{,m}}{4\pi r^2} d\Gamma + \oint_{\partial\Gamma} \frac{1}{4\pi r} (\mathbf{e}_k \times \mathbf{N}) d\mathbf{l} \quad (2.23)$$

Sustituyendo la ecuación (2.23) en la ecuación (2.22) se obtiene

$$T_5 = u_{,k}(\mathbf{y}) \left\{ \int_{\Gamma} -\frac{3}{4\pi r^3} r_{,i} N_i \frac{\partial r}{\partial n} (x_k - y_k) d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{n_k N_m r_{,m}}{4\pi r^2} d\Gamma + \oint_{\partial\Gamma} \frac{1}{4\pi r} (\mathbf{e}_k \times \mathbf{N}) d\mathbf{l} \right\} \quad (2.24)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.10), (2.11), (2.13), (2.17), (2.19) y (2.24) en la ecuación (2.9), se obtiene una representación integral de la derivada del flujo normal en el punto del contorno \mathbf{y} , en la que todas las integrales hipersingulares y fuertemente singulares se han transformado en integrales regulares y/o débilmente singulares.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} q(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} \{ V_i N_i [u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}) - u_{,k}(\mathbf{y})(x_k - y_k)] - W_i N_i q(\mathbf{x}) \} d\Gamma + \\ & u_{,k}(\mathbf{y}) \int_{\Gamma} -\frac{3}{4\pi r^3} r_{,i} N_i \frac{\partial r}{\partial n} (x_k - y_k) d\Gamma + u_{,k}(\mathbf{y}) \int_{\Gamma} \frac{N_i n_k r_{,i}}{4\pi r^2} d\Gamma + \\ & u(\mathbf{y}) \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{4\pi r^3} d\mathbf{l} + u_{,k}(\mathbf{y}) \oint_{\partial\Gamma} \frac{1}{4\pi r} (\mathbf{e}_k \times \mathbf{N}) d\mathbf{l} = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

La ecuación (2.25) representa una ecuación integral de contorno que no contiene integrales de superficie fuertemente singulares o hipersingulares. Las dos integrales de línea se extienden sobre el borde del contorno Γ cuando este contorno es abierto y son cero cuando éste es cerrado. Discretizando esta ecuación integral se obtiene una formulación de elementos de contorno cuyas integrales sobre los elementos pueden realizarse sin especiales dificultades numéricas.

2.3 Elementos de contorno

En el apartado anterior, para obtener las ecuaciones integrales de contorno en flujo correspondientes al problema de Laplace, se ha planteado sobre el contorno la representación integral de dicho flujo normal. A pesar de que estas ecuaciones se han transformado de manera que las expresiones que resultan no contienen ninguna integral hipersingular o fuertemente singular, no son en general resolubles analíticamente, y se debe recurrir por tanto al empleo de herramientas más potentes como son los métodos numéricos. El Método de los Elementos de Contorno (MEC) se ha implantado firmemente en numerosos campos de la ingeniería como una competitiva técnica numérica alternativa a métodos tales como el Método de los Elementos Finitos o el Método de las Diferencias Finitas (véanse, Brebbia y Domínguez, 1992, y Domínguez, 1993).

Las transformaciones realizadas sobre la ecuación (2.5) han simplificado considerablemente la formulación de elementos de contorno, ya que se ha resuelto uno de los problemas más complicados de abordar por las técnicas numéricas, como es la integración de hipersingularidades y singularidades fuertes.

El planteamiento numérico que aquí se propone se basa en la idea de utilizar la ecuación integral de contorno en flujo en combinación con la ecuación integral de contorno clásica para obtener de este modo una aproximación mixta de elementos de contorno muy apropiada para tratar problemas con dos superficies coplanarias en los que la aplicación del MEC da lugar a una degeneración matemática en la formulación numérica (matriz singular). Este planteamiento tiene aspectos en común con el Método Dual de Elementos de Contorno de Mi y Aliabadi (1992). En la aproximación que se propone, tanto el contorno exterior como cualquier otro contorno interior distinto de las superficies coplanarias se discretiza con elementos cuadráticos estándar y se plantea la ecuación integral de contorno clásica. La ecuación de elementos de contorno en flujo se plantea únicamente sobre una de las superficies coplanarias, mientras que sobre la otra se escribe la ecuación integral en potencial.

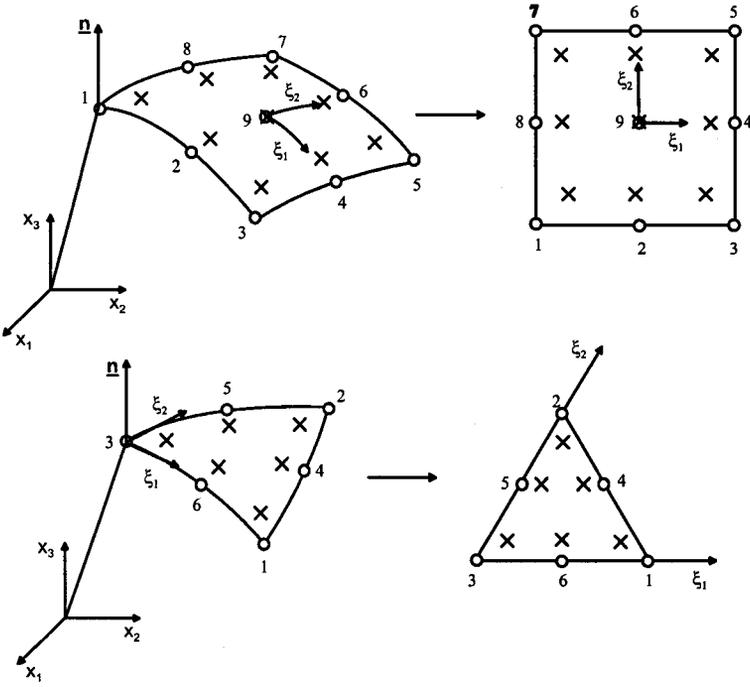


Figura 2.3: Elementos cuadráticos curvos. Nodos geométricos y de interpolación (o); puntos de colocación (x).

Los dos hechos que hacen diferente la discretización de la ecuación integral de contorno en flujo de la ecuación integral de contorno clásica son:

- el potencial en el contorno u debe satisfacer la condición de continuidad de Hölder $u \in C^{1,\alpha}$, en y ; y
- las derivadas, en y , del potencial aparecen en la ecuación integral de contorno.

Como consecuencia de la primera de estas dos características, no se pueden utilizar elementos estándar lineales o cuadráticos con colocación en puntos nodales situados en el borde de los elementos. Debido a la segunda, no se pueden emplear

elementos constantes.

Siguiendo la idea de Gallego y Domínguez (1996) para dos dimensiones, la ecuación integral de contorno en flujo se discretiza con elementos de superficie cuadráticos de seis o nueve nodos situados en sus posiciones habituales tanto para representar la geometría como las variables de contorno. Sin embargo, no se coloca en los nodos del borde; i.e. en $\xi_1, \xi_2 = \pm 1$, sino en ciertos puntos cercanos a los nodos pero en el interior del elemento (figura 2.3).

Cabe destacar que los elementos de este tipo son continuos C^0 , mientras que las variables de contorno se escriben, como es habitual, en términos de sus valores en los nodos situados en el borde de los elementos. Tan solo los puntos de colocación se desplazan hacia el interior de los elementos. El flujo y potencial en cada punto de colocación se expresan en términos de los valores nodales y de los valores de las funciones de forma en los puntos de colocación. Las derivadas del potencial se expresan en términos del potencial nodal y de las derivadas de las funciones de forma en los puntos de colocación.

Como consecuencia de la estrategia de colocación, se pueden tener dos o más ecuaciones por cada nodo, obtenidas al colocar en tantos puntos como elementos contienen al nodo. Estas ecuaciones se suman para obtener una única por nodo. Merece la pena destacar que este Método de Colocación Múltiple (MCM) se utiliza únicamente para los nodos que pertenecen a una de las superficies coplanarias, excepto para aquellos situados dentro del elemento y los nodos del borde de las superficies coplanarias en los que no es necesario ningún punto de colocación ($u^+ = u^-$).

Es también importante destacar que dado que el proceso de regularización da lugar a expresiones de las integrales de contorno con mayor número de términos que las integrales hipersingulares y fuertemente singulares originales, las expresiones regularizadas de las integrales se van a utilizar únicamente sobre una parte de la superficie Γ cercana al punto de colocación, mientras que las expresiones originales de las integrales de contorno se plantean en el resto del contorno donde éstas son

no-singulares. Así, la expresión que hay que discretizar en elementos de contorno para problemas que cumplen la ecuación de Laplace es:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}q(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma_o} \{V_i N_i [u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}) - u_{,k}(\mathbf{y})(x_k - y_k)] - W_i N_i q(\mathbf{x})\} d\Gamma + \\
 & u_{,k}(\mathbf{y}) \int_{\Gamma_o} -\frac{3}{4\pi r^3} r_{,i} N_i \frac{\partial r}{\partial n} (x_k - y_k) d\Gamma + u_{,k}(\mathbf{y}) \int_{\Gamma_o} \frac{N_i n_k r_{,i}}{4\pi r^2} d\Gamma + \\
 & u(\mathbf{y}) \oint_{\partial\Gamma_o} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{4\pi r^3} d\mathbf{l} + u_{,k}(\mathbf{y}) \oint_{\partial\Gamma_o} \frac{1}{4\pi r} (\mathbf{e}_k \times \mathbf{N}) d\mathbf{l} + \\
 & \int_{\Gamma - \Gamma_o} \{V_i N_i u(\mathbf{x}) - W_i N_i q(\mathbf{x})\} d\Gamma = 0
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

donde Γ_o es una parte del contorno cercana al punto de colocación, i.e., los elementos que contienen al nodo en el que se está escribiendo la ecuación mediante colocación múltiple, y $\Gamma - \Gamma_o$ es el resto del contorno. Mencionar también que todas las integrales de superficie sobre Γ_o que multiplican a las derivadas del potencial, $u_{,k}(\mathbf{y})$, son cero cuando las superficies son planas ($\partial r / \partial n = 0$). En estos casos, los únicos términos adicionales introducidos en la ecuación integral de contorno como consecuencia del proceso de regularización son varias integrales de línea sencillas.

Capítulo 3

Elasticidad Estática. Medios Isótropos

3.1 Introducción

Como se ha visto en el capítulo anterior, en la formulación mixta de elementos de contorno para un dominio tridimensional isótropo, homogéneo y elástico-lineal se combina el planteamiento sobre el contorno de dos tipos de ecuaciones integrales. Una de ellas la EIC estándar, cuyas soluciones fundamentales y tratamiento numérico son ampliamente conocidos y pueden consultarse en numerosa bibliografía y la otra, la EIC en tracciones cuyas soluciones fundamentales se obtienen básicamente derivando las soluciones fundamentales que gobiernan la primera, esto es, desplazamientos y tracciones. La integración de los núcleos fuertemente singulares e hipersingulares que aparecen en las soluciones fundamentales de la ecuación en tracciones son el objeto del segundo apartado de este capítulo. Este problema ha sido abordado por la comunidad científica desde diferentes puntos de vista y se han desarrollado numerosas técnicas de regularización (Tanaka et al., 1994).

La aproximación mixta de elementos de contorno es muy apropiada para el estudio de problemas de Mecánica de la Fractura. En el tercer apartado se tratan algunos aspectos generales de los campos de tensiones y desplazamientos en las cercanías del vértice de una grieta tridimensional y los elementos de contorno que permiten caracterizar dichos comportamientos.

Por último, en el apartado 4 se presentan resultados para algunos problemas de mecánica de la fractura estática que validan el procedimiento desarrollado, dado el buen acuerdo que en general mantienen con las soluciones analíticas, o en su defecto con los resultados numéricos propuestos por otros autores.

3.2 Ecuación integral de contorno en tracciones

La representación integral clásica de los desplazamientos para un punto interno \mathbf{y} de un cuerpo elástico Ω cuyo contorno es una superficie regular Γ con normal exterior unitaria $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ bajo condiciones de fuerzas de volumen nulas, puede escribirse como:

$$u_l(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} p_{ik}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_k(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{ik}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p_k(\mathbf{x}) d\Gamma = 0 \quad (3.1)$$

para $l, k = 1, 2, 3$; donde u_k y p_k representan la componente k de los vectores de desplazamientos y tracciones, respectivamente, y u_{ik}^* , p_{ik}^* son los tensores de desplazamientos y tracciones de la solución fundamental, respectivamente.

Las tensiones en puntos internos pueden obtenerse derivando los desplazamientos en un punto \mathbf{y} e introduciendo las deformaciones correspondientes en la relación tensión-deformación. Las componentes del vector de tracciones en un punto \mathbf{y} sobre una superficie con normal exterior unitaria \mathbf{N} son

$$p_l(\mathbf{y}) = \sigma_{lm}(\mathbf{y}) N_m(\mathbf{y}) \quad (3.2)$$

La representación integral de las componentes de las tracciones se obtiene derivando la ecuación (3.1) y haciendo uso de la ley de Hooke y de la ecuación (3.2).

$$p_l(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} s_{imk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_m(\mathbf{y}) u_k(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} d_{imk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_m(\mathbf{y}) p_k(\mathbf{x}) d\Gamma = 0 \quad (3.3)$$

donde d_{lmk}^* y s_{lmk}^* son combinaciones lineales de derivadas de u_{lk}^* y p_{lk}^* , respectivamente. Se tienen las siguientes expresiones:

$$d_{lmk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \{ (1-2\nu)(\delta_{kl}r_{,m} + \delta_{km}r_{,l} - \delta_{lm}r_{,k}) + 3r_{,l}r_{,m}r_{,k} \} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} s_{lmk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = & \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^3} \left\{ 3 \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{lm}r_{,k} + \right. \\ & \nu(\delta_{kl}r_{,m} - \delta_{km}r_{,l}) - 5r_{,l}r_{,m}r_{,k}] + 3\nu(n_l r_{,m}r_{,k} + n_m r_{,l}r_{,k}) + \\ & \left. (1-2\nu)(3n_k r_{,l}r_{,m} + n_m \delta_{lk} + n_l \delta_{mk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{lm} \right\} \quad (3.5) \end{aligned}$$

donde $r_{,i} = \partial r / \partial x_i = -\partial r / \partial y_i$. El núcleo d_{lmk}^* tiene una singularidad fuerte de orden r^{-2} mientras que s_{lmk}^* es hipersingular de orden r^{-3} , cuando $r \rightarrow 0$.

Para obtener la representación integral para un punto suave del contorno \mathbf{y} , se realiza un proceso de paso al límite en el contorno. Usando la geometría modificada de la figura 2.1, puede escribirse la siguiente expresión:

$$p_l(\mathbf{y}) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{(\Gamma-\epsilon_\epsilon)+\Gamma_\epsilon} [s_{lmk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_m(\mathbf{y}) u_k(\mathbf{x}) - d_{lmk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_m(\mathbf{y}) p_k(\mathbf{x})] d\Gamma \right\} = 0 \quad (3.6)$$

De forma similar al caso de la derivada normal del potencial tratado en el capítulo anterior, deben destacarse algunos aspectos relacionados con esta representación de las tracciones:

- los desplazamientos deben ser diferenciables en \mathbf{y} , satisfaciendo sus derivadas primeras la condición de Hölder, $u_k \in C^{1,\alpha}$;
- en puntos no suaves del contorno no es posible obtener una representación integral de las tracciones en términos únicamente de los desplazamientos y trac-

ciones en el contorno siguiendo el proceso de paso al límite en el contorno. Sin embargo, puede seguirse dicho proceso para las derivadas de los desplazamientos y tras invertir la matriz \mathbf{c} obtener una representación de las tracciones por combinación lineal de la representación de las derivadas de los desplazamientos. La necesidad de procedimientos específicos para puntos del contorno con discontinuidad en la normal no solo aparece en la formulación en tracciones sino que está asociado al uso de éstos como variables del sistema, como fue puesto de manifiesto en la formulación clásica por Alarcón et al. (1979);

- la superficie Γ_ε que se utiliza para eliminar el punto \mathbf{y} del contorno puede tener cualquier forma, dado que es una superficie regular. Por simplicidad se ha elegido una superficie esférica.

Teniendo en cuenta que $u_k \in C^{1,\alpha}$, en \mathbf{y} , éste puede desarrollarse como

$$u_k(\mathbf{x}) = u_k(\mathbf{y}) + u_{k,h}(\mathbf{y})(x_h - y_h) + O(r^{1+\alpha}) \quad (3.7)$$

y las tracciones

$$p_k(\mathbf{x}) = \sigma_{kh}(\mathbf{x})n_h(\mathbf{x}) = \sigma_{kh}(\mathbf{y})n_h(\mathbf{x}) + O(r^\alpha) \quad (3.8)$$

Cabe destacar que este desarrollo particular de $p_k(\mathbf{x})$ alrededor de \mathbf{y} , con $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ como variable, es necesario para la superficie Γ_ε , donde $-1 \leq \mathbf{n}(\mathbf{x}) \leq 1$, pero no para $\Gamma - e_\varepsilon$ donde $\mathbf{n}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{N}(\mathbf{y})$, cuando $r \rightarrow 0$.

Haciendo uso de los desarrollos (3.7) y (3.8), la ecuación (3.6) puede escribirse

como

$$\begin{aligned}
& p_l(\mathbf{y}) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{\Gamma - e_\varepsilon} \{s_{lmk}^* N_m [u_k(\mathbf{x}) - u_k(\mathbf{y}) - u_{k,h}(\mathbf{y})(x_h - y_h)] - \right. \\
& d_{lmk}^* N_m [p_k(\mathbf{x}) - p_k(\mathbf{y})]\} d\Gamma + \\
& \int_{\Gamma_\varepsilon} \{s_{lmk}^* N_m [u_k(\mathbf{x}) - u_k(\mathbf{y}) - u_{k,h}(\mathbf{y})(x_h - y_h)] - \\
& d_{lmk}^* N_m [p_k(\mathbf{x}) - \sigma_{kh}(\mathbf{y})n_h(\mathbf{x})]\} d\Gamma + \\
& u_k(\mathbf{y}) \int_{\Gamma - e_\varepsilon} s_{lmk}^* N_m d\Gamma + u_k(\mathbf{y}) \int_{\Gamma_\varepsilon} s_{lmk}^* N_m d\Gamma + \\
& u_{k,h}(\mathbf{y}) \int_{\Gamma - e_\varepsilon} s_{lmk}^* N_m (x_h - y_h) d\Gamma + u_{k,h}(\mathbf{y}) \int_{\Gamma_\varepsilon} s_{lmk}^* N_m (x_h - y_h) d\Gamma - \\
& \left. p_k(\mathbf{y}) \int_{\Gamma - e_\varepsilon} d_{lmk}^* N_m d\Gamma - \sigma_{kh}(\mathbf{y}) \int_{\Gamma_\varepsilon} d_{lmk}^* N_m n_h d\Gamma \right\} = 0 \quad (3.9)
\end{aligned}$$

o

$$p_l(\mathbf{y}) + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7 + T_8 = 0 \quad (3.10)$$

Las componentes de la derivada de u_k en \mathbf{y} , i.e., $u_{k,h}(\mathbf{y})$ en los términos T_1 y T_5 correspondientes al desarrollo de $u_k(\mathbf{x})$ sobre la superficie $\Gamma - e_\varepsilon$, deben entenderse como componentes de la derivada tangencial. Dichas componentes pueden representarse ocasionalmente como las derivadas de la representación de los desplazamientos sobre los elementos de contorno.

Dado que s_{lmk}^* es hipersingular de orden r^{-3} , y que d_{lmk}^* es singular de orden r^{-2} , cuando $r \rightarrow 0$, los núcleos de las integrales T_1 y T_2 son débilmente singulares. Por lo tanto, T_1 puede calcularse numéricamente sobre el contorno Γ

$$\begin{aligned}
T_1 = \int_{\Gamma} \{ & s_{lmk}^* N_m [u_k(\mathbf{x}) - u_k(\mathbf{y}) - u_{k,h}(\mathbf{y})(x_h - y_h)] \\
& - d_{lmk}^* N_m [p_k(\mathbf{x}) - p_k(\mathbf{y})]\} d\Gamma \quad (3.11)
\end{aligned}$$

y

$$T_2 = 0 \quad (3.12)$$

Para evaluar T_3 a T_8 se utiliza el mismo sistema de coordenadas centrado en el punto de colocación \mathbf{y} que se empleó en el capítulo 2 para evaluar las integrales correspondientes al problema de potencial. Considérense en primer lugar las integrales sobre la superficie esférica Γ_ε (T_4 , T_6 y T_8). Para estas integrales (figura 2.2) $r = \varepsilon$, $N_1 = N_2 = 0$, $N_3 = 1$; $\partial r / \partial n = 1$, $r_{,3} = n_3 = \cos\varphi$ y $d\Gamma = r^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$. Sustituyendo estas simples relaciones geométricas, pueden evaluarse analíticamente las integrales sobre Γ_ε (ver detalles en Apéndice B).

$$T_4 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ u_k(\mathbf{y}) \int_{\Gamma_\varepsilon} s_{lmk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_m d\Gamma \right\} = u_k(\mathbf{y}) \frac{\mu(\nu - 2)}{4(1 - \nu)} \delta_{lk} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \quad (3.13)$$

$$T_6 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ u_{k,h}(\mathbf{y}) \int_{\Gamma_\varepsilon} s_{lmk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_m (x_h - y_h) d\Gamma \right\} = \frac{\mu(5\nu - 7)}{30(1 - \nu)} u_{k,h} N_m (\delta_{lk} \delta_{hm} + \delta_{km} \delta_{hl}) \quad (3.14)$$

$$T_8 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \sigma_{kh}(\mathbf{y}) \int_{\Gamma_\varepsilon} d_{lmk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_m n_h d\Gamma \right\} = - \frac{4 - 5\nu}{30(1 - \nu)} u_{k,h} N_m (\delta_{lk} \delta_{hm} + \delta_{km} \delta_{hl}) \quad (3.15)$$

para $l = 1, 2$, y

$$T_4 = u_k(\mathbf{y}) \frac{-2\mu}{4(1 - \nu)} \delta_{lk} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \quad (3.16)$$

$$T_6 = \frac{-\mu}{1 - \nu} \left[\frac{2 + 10\nu}{30} u_{k,h} \delta_{kh} \delta_{lm} + \frac{14 - 10\nu}{30} u_{k,h} \delta_{lk} \delta_{hm} \right] N_m \quad (3.17)$$

$$T_8 = - \frac{1}{1 - \nu} \left[\frac{5\nu - 1}{30} \sigma_{kh} \delta_{kh} \delta_{lm} + \frac{8 - 10\nu}{30} \sigma_{kh} \delta_{lk} \delta_{hm} \right] N_m \quad (3.18)$$

para $l = 3$.

En ambos casos, sumando (3.14) y (3.15) o (3.17) y (3.18), se obtiene:

$$T_6 + T_8 = - \frac{1}{2} \sigma_{lm}(\mathbf{y}) N_m = - \frac{1}{2} p_l(\mathbf{y}) \quad (3.19)$$

Haciendo uso del teorema de Stokes y algún álgebra sencilla (véase Apéndice B), el término T_3 puede transformarse en una suma de integrales de superficie

regulares y débilmente singulares, integrales de línea sobre el borde del contorno y un término no acotado que cancela el término no acotado que resulta de T_4 . Así,

$$T_3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u_k(\mathbf{y}) \int_{\Gamma - e_\varepsilon} s_{lmk}^* N_m d\Gamma = u_k(\mathbf{y}) \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)} \left\{ I_{lk} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{\varepsilon} [2 + \nu(\delta_{3l} - 1)] \delta_{lk} \right\} \quad (3.20)$$

con

$$\begin{aligned} I_{lk} = & 3(1-2\nu) \int_{\Gamma} \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial r}{\partial n} N_k r_{,l} + r_{,m} N_m n_k r_{,l} \right) d\Gamma + \\ & 3\nu \int_{\Gamma} \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial r}{\partial n} N_l r_{,k} + r_{,m} N_m n_l r_{,k} \right) d\Gamma + \\ & 3(1-\nu) \delta_{lk} \int_{\Gamma} \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial n} r_{,m} N_m d\Gamma + 15(\nu-1) \int_{\Gamma} \frac{r_{,l} r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} r_{,m} N_m}{r^3} d\Gamma + \\ & 3\nu \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} r_{,l} r_{,k} d\mathbf{l} + (1-2\nu) \delta_{lk} \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} d\mathbf{l} + \\ & (4\nu-1) \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{e}_k N_l}{r^3} d\mathbf{l} + (1-2\nu) \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{e}_l N_k}{r^3} d\mathbf{l} \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde las integrales de línea se extienden sobre el borde $\partial\Gamma$ de la superficie Γ y son cero cuando Γ es un contorno cerrado.

El término T_5 se transforma de forma similar usando el teorema de Stokes (véase Apéndice B), para dar lugar a una suma de integrales de línea y de superficie que son al menos débilmente singulares. Así,

$$T_5 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ u_{k,h}(\mathbf{y}) \int_{\Gamma - e_\varepsilon} s_{lmk}^* N_m (x_h - y_h) \right\} d\Gamma = u_{k,h}(\mathbf{y}) \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)} J_{lhk} \quad (3.22)$$

donde

$$\begin{aligned}
 J_{lhk} = & 3(1-2\nu) \int_{\Gamma} \frac{r_{,l}r_{,h}(r_{,m}N_m n_k + N_k \frac{\partial r}{\partial n})}{r^2} d\Gamma + \\
 & 3\nu \int_{\Gamma} \frac{r_{,k}r_{,h}(r_{,m}N_m n_l + N_l \frac{\partial r}{\partial n})}{r^2} d\Gamma - 15 \int_{\Gamma} \frac{r_{,l}r_{,k}r_{,h} \frac{\partial r}{\partial n} r_{,m}N_m}{r^2} d\Gamma + \\
 & 3(1-3\nu) \int_{\Gamma} \frac{r_{,h} \frac{\partial r}{\partial n} (r_{,k}N_l - r_{,l}N_k)}{r^2} d\Gamma + 3\nu \int_{\Gamma} \frac{r_{,l}r_{,h}n_k r_{,m}N_m}{r^2} d\Gamma + \\
 & \nu \oint_{\partial\Gamma} \frac{r_{,l}r_{,h}}{r} (\mathbf{e}_k \times \mathbf{N}) d\mathbf{l} - \nu \int_{\Gamma} \frac{N_h r_{,l}(n_k - N_k n_m N_m)}{r^2} d\Gamma - \\
 & - \nu N_h N_k \int_{\Gamma} \frac{n_l r_{,m} N_m}{r^2} d\Gamma - \nu N_h N_k \oint_{\partial\Gamma} \frac{1}{r} (\mathbf{e}_l \times \mathbf{N}) d\mathbf{l} + \\
 & (1-2\nu) \int_{\Gamma} \frac{N_k r_{,h}(n_l - N_l n_m N_m)}{r^2} d\Gamma - \\
 & (1-3\nu) \int_{\Gamma} \frac{N_l r_{,h}(n_k - N_k n_m N_m)}{r^2} d\Gamma + \nu N_k N_l \int_{\Gamma} \frac{n_h r_{,m} N_m}{r^2} d\Gamma + \\
 & \nu N_l N_k \oint_{\partial\Gamma} \frac{1}{r} (\mathbf{e}_h \times \mathbf{N}) d\mathbf{l} + \delta_{kl} 3\nu \int_{\Gamma} \frac{\frac{\partial r}{\partial n} r_{,m} N_m r_{,h}}{r^2} d\Gamma + \\
 & \delta_{kl} \left\{ (1-\nu) \int_{\Gamma} \frac{n_h r_{,m} N_m}{r^2} d\Gamma + (1-\nu) \oint_{\partial\Gamma} \frac{1}{r} (\mathbf{e}_h \times \mathbf{N}) d\mathbf{l} \right\} + \\
 & \delta_{kh} \left\{ \nu \int_{\Gamma} \frac{n_l r_{,m} N_m}{r^2} d\Gamma + \nu \oint_{\partial\Gamma} \frac{1}{r} (\mathbf{e}_l \times \mathbf{N}) d\mathbf{l} \right\} \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

El término T_7 puede transformarse fácilmente usando el teorema de Stokes (véase Apéndice B).

$$T_7 = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ p_k(\mathbf{y}) \int_{\Gamma - e_\varepsilon} d_{ilmk}^* N_m d\Gamma \right\} = p_k(\mathbf{y}) \frac{1}{4\pi(1-\nu)} K_{lk} \quad (3.24)$$

con

$$\begin{aligned}
 K_{lk} = & -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{r_{,m} N_m}{r^2} [(1-2\nu) \delta_{lk} + 3r_{,l}r_{,k}] d\Gamma - \\
 & \frac{1}{2} (1-2\nu) \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} [(N_k - n_k) r_{,l} - (N_l - n_l) r_{,k}] d\Gamma - \\
 & \frac{1}{2} \epsilon_{lkj} (1-2\nu) \oint_{\partial\Gamma} \frac{1}{r} dx_j \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

donde ϵ_{lkj} es el símbolo de permutación, es igual a 1 (-1) si el subíndice permuta

cíclicamente (anticíclicamente).

Sustituyendo las ecuaciones (3.11) a (3.25) en la ecuación (3.10) se obtiene una ecuación integral de contorno de tracciones general en términos únicamente de integrales regulares o débilmente singulares.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} p_l(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} \{s_{lmk}^* N_m [u_k(\mathbf{x}) - u_k(\mathbf{y}) - u_{k,h}(\mathbf{y})(x_h - y_h)] - \\ & d_{lmk}^* N_m [p_k(\mathbf{x}) - p_k(\mathbf{y})]\} d\Gamma + \\ & \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)} [u_k(\mathbf{y}) I_{lk} + u_{k,h}(\mathbf{y}) J_{lhk} + p_k(\mathbf{y}) K_{lk}] = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde I_{lk} , J_{lhk} y K_{lk} vienen dadas por las ecuaciones (3.21), (3.23) y (3.25), respectivamente. Esta ecuación integral de contorno es válida para contornos abiertos o cerrados, contornos planos o curvos y puede ser discretizada de forma directa usando una formulación de elementos de contorno.

3.3 Mecánica de la fractura

Los materiales de uso en ingeniería pueden presentar pequeños defectos o imperfecciones en su interior como consecuencia del proceso de fabricación o de la propia naturaleza del material. Normalmente estos defectos permanecen inalterados a lo largo de la vida de la pieza y no afectan a su resistencia. En otros casos, sin embargo, crecen en forma de grietas como consecuencia de la fatiga, corrosión, cargas súbitas, etc., pudiéndose producir el fallo a tensiones por debajo de aquellas para las que la estructura o pieza han sido diseñadas.

En una aproximación macroscópica de la fractura se asume generalmente que el medio es un continuo homogéneo en el sentido de que el tamaño del defecto dominante es grande en comparación con la dimensión microestructural característica del material. El problema consiste entonces en estudiar la influencia de las cargas aplicadas, la geometría del defecto, las condiciones ambientales y el comportamiento del material en el proceso de fractura del sólido, esta disciplina se conoce como *Mecánica de la Fractura* (véase Erdogan, 2000).

Es pues enormemente importante el conocimiento del estado de tensiones que aparece en las proximidades de las grietas estacionarias, como determinante de su posible propagación, y de las grietas en propagación, como determinante de su evolución.

En este apartado se presentan en forma general los campos elastostáticos de desplazamientos y tensiones en las proximidades del vértice de una grieta inmersa en un material isótropo, los elementos utilizados para discretizar esta zona de la grieta y la obtención de los Factores de Intensidad de Tensiones (FIT) de forma directa a partir de los valores de las variables nodales correspondientes a los elementos a un cuarto.

3.3.1 Desplazamientos y tensiones en las cercanías del vértice de una grieta en un material isótropo

El campo de tensiones y desplazamientos en las proximidades del borde de una grieta contenida en un sólido elástico lineal, y bajo condiciones de carga generales es de naturaleza asintótica (Irwin, 1957).

Definiendo unos ejes de coordenadas polares con origen en el vértice de la grieta (figura 3.1), puede verse que el campo de tensiones, para todo cuerpo elástico lineal que contiene una grieta, a una distancia pequeña desde el borde de la misma puede expresarse como:

$$\sigma_{ij} \simeq \left(\frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \right) f_{ij}(\theta) \quad (3.27)$$

donde f_{ij} es una función adimensional de θ , que representa la variación angular de cada una de las componentes del tensor de tensiones.

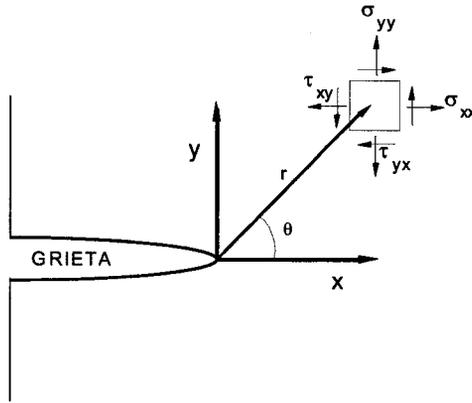


Figura 3.1: Definición de los ejes de coordenadas en el vértice de una grieta.

Conocidas las funciones $f_{ij}(\theta)$, y dado que éstas son independientes de la geometría de la grieta y de las condiciones de carga, se tiene que K , el factor de intensidad de tensión, caracteriza completamente el campo asintótico de tensiones y desplazamientos alrededor del vértice de la grieta. Irwin también demostró que las tensiones y desplazamientos en las cercanías del contorno interno suave de una grieta plana contenida en un sólido lineal, bajo condiciones generales de carga, puede expresarse en términos de tres factores de intensidad de tensión, i.e., K_I , K_{II} , K_{III} , asociados con los modos de deformación de apertura simétrica, deslizamiento plano y deslizamiento antiplano, respectivamente (véase figura 3.2)

En la ecuación (3.27) puede verse que aparece un término dominante proporcional a $\frac{1}{\sqrt{r}}$. Cuando r tiende a cero, este término dominante tiende a infinito, mientras que los otros términos permanecen finitos o tienden a cero. Por lo tanto, las tensiones cerca del vértice de una grieta varían con $\frac{1}{\sqrt{r}}$ independientemente de la forma del sólido que la contiene.

El campo de desplazamientos asociado se obtiene a partir del tensor de tensiones, sin más que aplicar las leyes de comportamiento correspondientes; siendo en las cercanías de una grieta proporcionales a \sqrt{r} .

Las expresiones correspondientes al tensor de tensiones y desplazamientos están ampliamente recogidas en numerosa bibliografía (véase Anderson, 1995).

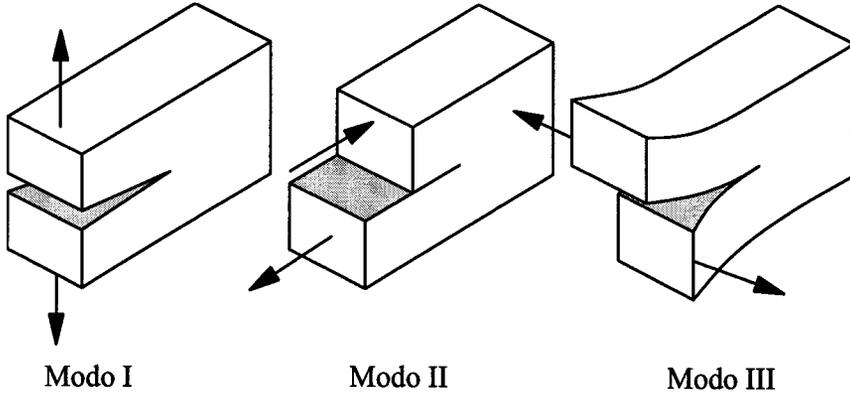


Figura 3.2: Modos de apertura de una grieta.

3.3.2 Elemento cuadrático tridimensional con nodo a un cuarto

Para poder representar adecuadamente el comportamiento de los campos de desplazamientos y tensiones en las proximidades del vértice de una grieta, es necesario discretizar el vértice de la grieta con elementos cuyas características geométricas sean tales que permitan que se cumpla este comportamiento (Ariza et al., 1997).

El elemento es de tipo cuadrilátero de nueve nodos (figura 3.3). Los nodos 4, 8 y 9 están situados en línea recta y a distancia un cuarto entre los 3 y 5, 1 y 7 y 2 y 6, respectivamente. Los lados 1, 8, 7 y 3, 4, 5 son perpendiculares a la curva 1, 2, 3 que se ubica sobre el vértice de la grieta. La distancia 1, 7 es la misma que la 3, 5.

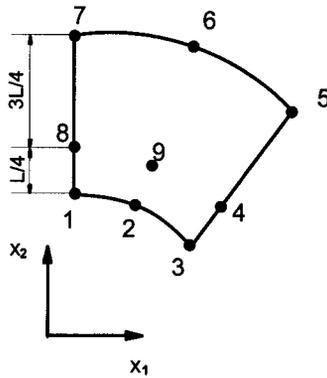


Figura 3.3: Elemento tridimensional a un cuarto.

Si se satisfacen estas condiciones geométricas, existe una relación entre la variable natural ξ_2 (figura 3.4) y la distancia al borde de la grieta \bar{r} del tipo

$$\xi_2 = 2\sqrt{\frac{\bar{r}}{L}} - 1 \quad (3.28)$$

siendo L la distancia entre los nodos 1 y 7.

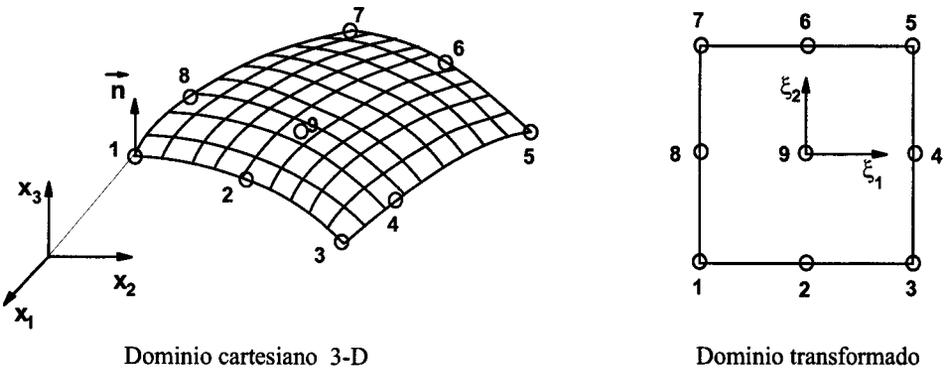


Figura 3.4: Transformación de coordenadas cartesianas a naturales del elemento a un cuarto.

Introduciendo esta relación en las expresiones de las funciones de forma que

permiten interpolar los desplazamientos en un punto de ese elemento a partir de los valores nodales, se tiene una variación con la distancia \bar{r} al borde 1, 2, 3 del tipo:

$$u_i = a_i^1 + a_i^2 \sqrt{\frac{\bar{r}}{L}} + a_i^3 \left(\frac{\bar{r}}{L}\right) \quad (3.29)$$

donde a_i^j son combinaciones de los valores nodales de u_i y la coordenada natural ξ_1 (figura 3.4). Así, a lo largo de la línea 1, 8, 7 ($\xi_1 = -1$) la ecuación (3.29) representa la variación de los desplazamientos u_i con la distancia \bar{r} al borde de la grieta con

$$\begin{aligned} a_i^1 &= u_i^1 \\ a_i^2 &= -3u_i^1 - u_i^7 + 4u_i^8 \\ a_i^3 &= 2u_i^1 + 2u_i^7 - 4u_i^8 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Análogamente, a lo largo de la línea 2, 9, 6 ($\xi_1 = 0$)

$$\begin{aligned} a_i^1 &= u_i^2 \\ a_i^2 &= -3u_i^2 - u_i^6 + 4u_i^9 \\ a_i^3 &= 2u_i^2 + 2u_i^6 - 4u_i^9 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Finalmente, a lo largo de la línea 3, 4, 5 ($\xi_1 = 1$)

$$\begin{aligned} a_i^1 &= u_i^3 \\ a_i^2 &= -3u_i^3 - u_i^5 + 4u_i^4 \\ a_i^3 &= 2u_i^3 + 2u_i^5 - 4u_i^4 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Queda así garantizado el comportamiento del orden de $\sqrt{\bar{r}}$ de los desplazamientos.

Esta geometría permite igualmente representar, utilizando unas funciones de forma modificadas, la variación $1/\sqrt{\bar{r}}$ de las tensiones en las proximidades del vértice de la grieta, pero en la formulación hipersingular estas tensiones en el interior del material no son incógnitas del sistema de ecuaciones, ya que además del contorno exterior se discretizan únicamente las dos caras de la grieta.

3.3.3 Discretización de problemas de fractura y cálculo de los factores de intensidad de tensión

El Factor de Intensidad de Tensión define la amplitud de la singularidad en el vértice de una grieta. Por lo tanto, si K es conocido, es posible determinar todas las componentes de tensiones, deformaciones y desplazamientos como función de \bar{r} y θ .

$$u = K f(\theta, C_{ij}) \sqrt{\bar{r}} \quad (3.33)$$

$$\sigma = K g(\theta, C_{ij}) / \sqrt{\bar{r}} \quad (3.34)$$

donde \bar{r} y θ son coordenadas polares centradas en el vértice de la grieta y f y g son funciones universales del ángulo θ y las constantes elásticas del material C_{ij} . En este apartado se nota por \bar{r} la distancia al borde de la grieta, para diferenciarla de la distancia r entre el punto de colocación y el punto de observación empleada en la formulación de elementos de contorno.

Como se ha puesto de manifiesto en el primer capítulo, la formulación hipersingular de elementos de contorno es muy adecuada para resolver problemas de fractura. Se pueden así estudiar problemas con falta de simetría prescindiendo de técnicas de división en subregiones y posterior acoplamiento de las mismas. Sin embargo, ya que no es necesario hacer pasar una sección a lo largo de la grieta, cuando se resuelva el sistema de ecuaciones no se va a disponer directamente de valores nodales correspondientes a puntos cercanos al borde de la grieta y en el interior del material. Se van a utilizar entonces como variables nodales básicas en la grieta, para el cálculo de los FIT, los Desplazamientos de Apertura de Grieta (DAG).

Dependiendo del tipo de dominio en estudio y de la posición de la grieta, la discretización del contorno y las ecuaciones integrales mínimas que hay que escribir van a ser diferentes.

Los elementos empleados en la discretización son de tipo cuadrático normal salvo los que están en contacto con el borde de la grieta que tienen simplemente la

ubicación de los nodos a un cuarto antes descrita (elementos a un cuarto). Así los desplazamientos se representan mediante la ecuación (3.29). Para los elementos que discretizan la superficie de la grieta se emplea una estrategia de colocación específica (MCM) distinta de la estándar, como se ha descrito en el apartado 2.3.

Si el dominio objeto de estudio es infinito solo se discretiza una superficie de la grieta y se plantea sobre estos elementos únicamente la ecuación integral de contorno en tracciones. La variable nodal que se emplea para resolver el sistema de ecuaciones es el DAG. En cambio, si el dominio es finito se discretizan el contorno exterior y una o dos caras de la grieta, dependiendo si ésta es interior o de borde, respectivamente.

Cuando la grieta es de borde se mantienen como variables independientes las componentes de los desplazamientos en ambos labios de la grieta, ya que existen nodos que pertenecen a una de las superficies de la grieta y al contorno exterior. Así por simplicidad, si se discretizan las dos superficies de la grieta, sobre una de ellas se plantea la ecuación integral en tracciones y sobre la otra la ecuación integral en desplazamientos.

Una vez resuelto el problema de contorno, i.e. conocidos los desplazamientos y tracciones nodales, los valores numéricos de los FIT se obtienen a partir de ellos. Así, teniendo en cuenta que en la representación del MEC los desplazamientos en el elemento a un cuarto evolucionan con \bar{r} de la misma forma que lo hacen en el caso teórico, no hay más que particularizar la expresión teórica, en función de las coordenadas polares, r y θ , K_i y las propiedades elásticas del material, de las tres componentes de \mathbf{u} para cada nodo situado a un cuarto del borde de la grieta (i.e. los nodos 4, 8 y 9) e igualarlas a los valores numéricos obtenidos. Así se obtienen K_I , K_{II} y K_{III} para el punto del vértice de la grieta en la perpendicular al nodo que se está considerando.

$$\begin{aligned}
 K_I &= \frac{\mu}{2(1-\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \Delta u_3 \\
 K_{II} &= \frac{\mu}{2(1-\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \Delta u_n \\
 K_{III} &= \frac{\mu}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \Delta u_t
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

donde μ es el módulo de elasticidad transversal del material, ν el módulo de Poisson, Δu_i el desplazamiento de apertura de grieta del nodo a un cuarto del borde y L la longitud del elemento en la dirección normal al borde de la grieta.

3.4 Resultados numéricos

En este apartado se analizan diversos problemas de Mecánica de la Fractura estática tridimensional de sólidos isótropos haciendo uso de la formulación desarrollada en apartados anteriores. Se han obtenido resultados para dominios tanto finitos como infinitos, y distintas geometrías de grieta. Los resultados se han comparado con soluciones analíticas, caso de existir, o con resultados obtenidos por otros autores aplicando diferentes técnicas numéricas.

3.4.1 Dominios infinitos

Grieta circular

Éste es un problema clásico en Elastostática para el que existen soluciones analíticas (Sneddon, 1946, Kassir y Sih, 1966). Las propiedades del dominio elástico infinito son: módulo transversal, $\mu = 10^6$ Pa y módulo de Poisson, $\nu = 0.3$. La malla de elementos de contorno consta de 64 elementos cuadriláteros, como se muestra en la figura 3.5.

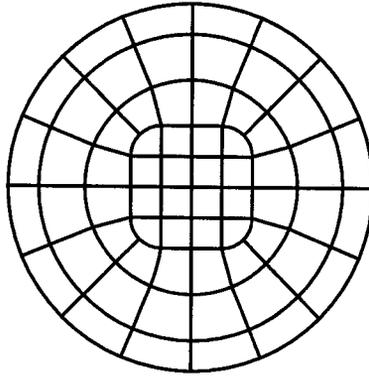


Figura 3.5: Discretización de elementos de contorno de una grieta circular en medio infinito.

En primer lugar se somete la grieta a presión interna uniforme. El factor de intensidad de tensión correspondiente al modo I se evalúa a partir de los valores de la apertura de grieta de los nodos a un cuarto situados en la primera fila de nodos a partir del borde de la grieta (ecuación (3.35)).

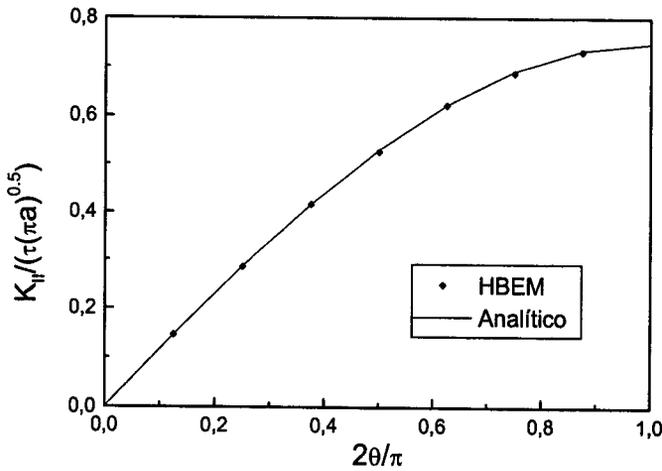


Figura 3.6: FIT modo II. Grieta circular en medio infinito.

El valor del FIT en modo I obtenido usando la malla de elementos de contorno de la figura 3.5 es $K_I = 1.989\sigma\sqrt{\frac{a}{\pi}}$, presenta una desviación respecto de la solución analítica obtenida por Sneddon (1946) ($K_I = 2\sigma\sqrt{\frac{a}{\pi}}$) inferior al 1%, siendo a el radio de la grieta y σ la carga aplicada.

En segundo lugar se aplica una tracción cortante sobre la superficie de la grieta circular para obtener el FIT en modos II y III. La malla de elementos de contorno es la misma que la empleada anteriormente. El FIT correspondiente al modo II y modo III se calcula a partir de la ecuación (3.35), siendo Δu_n y Δu_t los desplazamientos relativos de los nodos a un cuarto en la dirección perpendicular y tangencial al frente de la grieta y contenida en el plano de la misma, respectivamente.

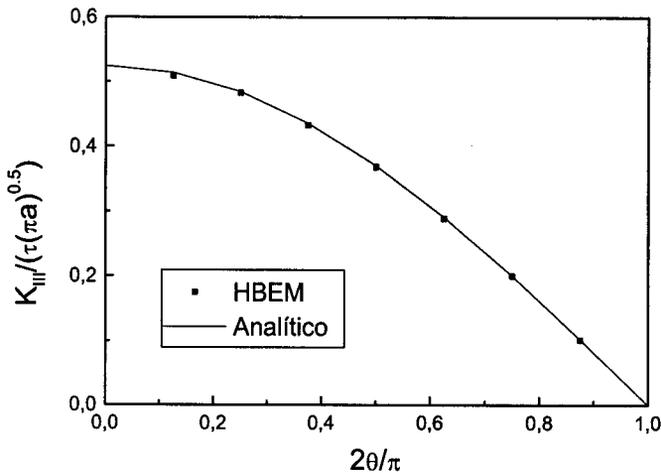


Figura 3.7: FIT modo III. Grieta circular en medio infinito.

En las figuras 3.6 y 3.7 se muestran los valores normalizados del FIT en modos II y III, respectivamente. Se comparan con las expresiones analíticas obtenidas por Kassir y Sih (1966)

$$\begin{aligned}
 K_{II} &= \frac{4 \operatorname{sen} \theta}{(2 - \nu) \pi} \tau \sqrt{\pi a} \\
 K_{III} &= \frac{4(1 - \nu) \operatorname{cos} \theta}{(2 - \nu) \pi} \tau \sqrt{\pi a}
 \end{aligned}
 \tag{3.36}$$

el ángulo θ se mide sobre el plano de la grieta desde la dirección perpendicular a la de aplicación de la carga. Los dos grupos de resultados muestran muy buen acuerdo entre ellos.

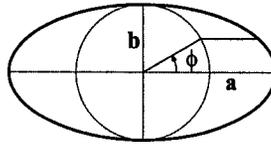


Figura 3.8: Geometría de grieta elíptica.

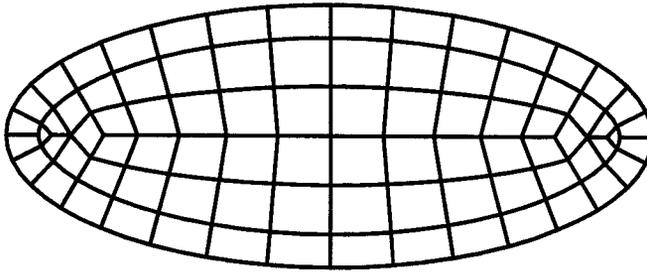


Figura 3.9: Discretización de elementos de contorno de una grieta elíptica en medio infinito.

Grieta elíptica

Otro problema clásico para el que también existen soluciones analíticas (Irwin, 1962 y Kassir y Sih, 1966), es el de una grieta elíptica inmersa en un medio infinito isótropo. Muchos de los defectos internos que aparecen en un sólido tienen formas

geométricas irregulares y se desvían sustancialmente de un perfil circular. De ahí que un contorno elíptico pueda considerarse una buena aproximación para una grieta real. Las propiedades del dominio elástico son las mismas que en el problema anterior, siendo la relación entre el semieje mayor, a , y el semieje menor, b , 2.5 (figura 3.8). El contorno de la grieta se discretiza con 84 elementos cuadriláteros, como se observa en la figura 3.9.

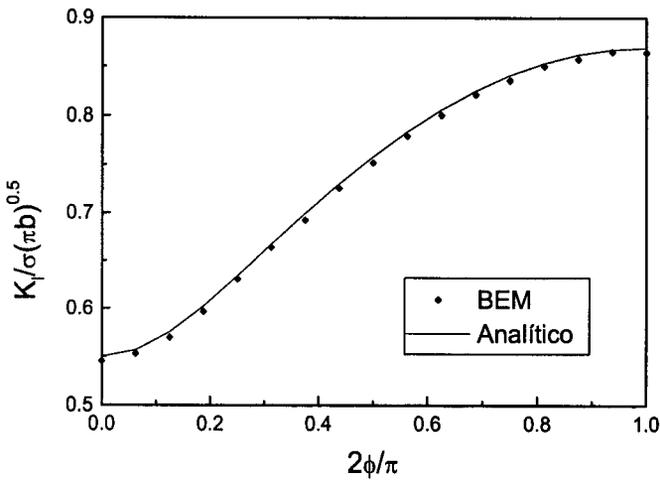


Figura 3.10: FIT modo I. Grieta elíptica en medio infinito.

En primer lugar se aplica una tracción uniforme sobre la superficie de la grieta de valor σ , y se calcula el factor de intensidad de tensión correspondiente al modo I (ecuación (3.35)) a partir de la apertura de grieta (Δu_n) de los nodos a un cuarto.

Los resultados se comparan con la solución exacta de Irwin (1962) obtenida con el método de la función de tensión (figura 3.10). La posición a lo largo del vértice de la grieta viene definida por un ángulo ϕ medido con respecto al radio mayor de la elipse (figura 3.8).

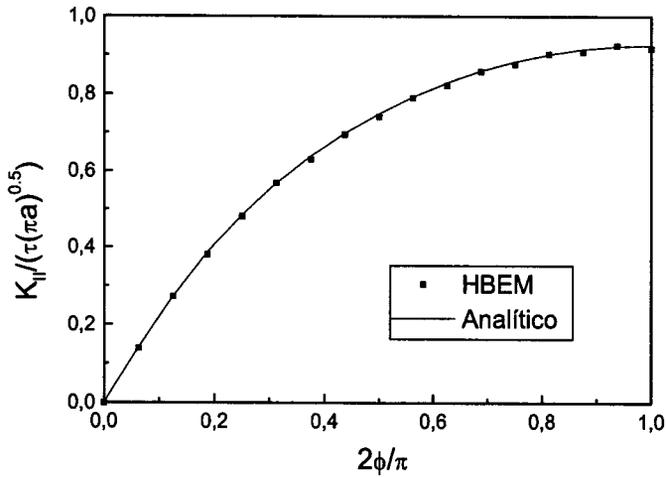


Figura 3.11: FIT modo II. Grieta elíptica en medio infinito.

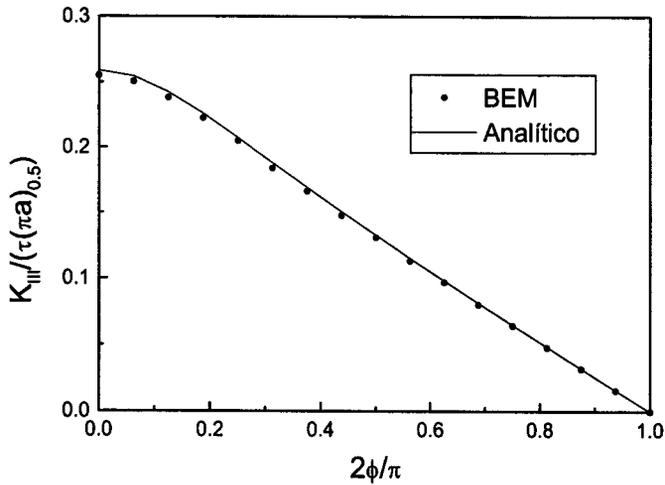


Figura 3.12: FIT modo III. Grieta elíptica en medio infinito.

En segundo lugar se aplica una tracción cortante sobre la superficie de la grieta, en la dirección del semieje menor, para obtener el FIT en modo II y modo III. Los resultados se comparan con la solución exacta para este mismo problema obtenida

por Kassir y Sih (1966) (figuras 3.11 y 3.12). En todos los casos existe un buen acuerdo entre los resultados numéricos aquí obtenidos y las soluciones analíticas.

Grieta cilíndrica

Se considera una grieta cilíndrica con la geometría que se muestra en la figura 3.13, inmersa en un dominio infinito y sometida a un estado de tensión bidimensional en la dirección z. Se ha elegido esta geometría para reproducir aproximadamente condiciones de tensión plana en la sección media de la grieta. Las propiedades del material son las mismas que en los ejemplos anteriores.

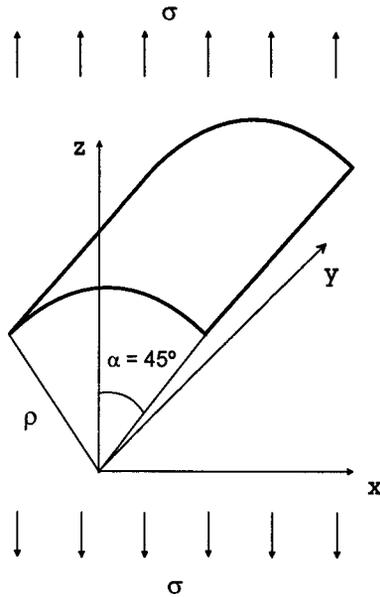


Figura 3.13: Grieta cilíndrica en medio infinito.

La malla de elementos de contorno se muestra en la figura 3.14 siendo los elementos situados en el borde de la grieta elementos a un cuarto.

A pesar del hecho de que este tipo de elementos únicamente representa exactamente la variación \sqrt{r} de los desplazamientos cerca del vértice de la grieta cuando

el elemento es plano, se han utilizado para casos en los que la curvatura no es muy grande. Los resultados obtenidos muestran que no hay una pérdida de precisión importante a causa de la curvatura del elemento.

Los FIT en modo I y modo II se calculan a partir de los DAG de los nodos a un cuarto usando las expresiones de la ecuación (3.35). Cabe destacar que las componentes del vector de desplazamiento que se utilizan en estas ecuaciones son la normal y tangencial, respectivamente, a la superficie de la grieta en la línea del borde de la grieta.

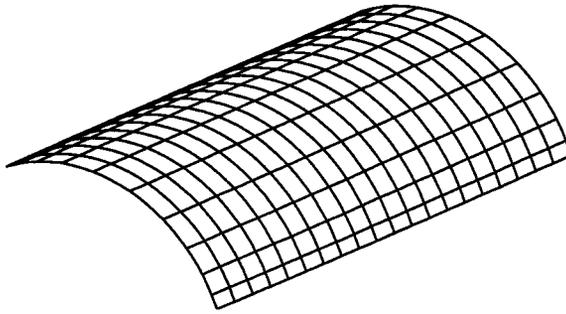


Figura 3.14: Discretización de elementos de contorno de grieta cilíndrica en medio infinito.

Los valores obtenidos del DAG muestran una pequeña variación a lo largo de los dos bordes de grieta rectos, salvo en las primeras filas de elementos próximos a los extremos en los que el efecto del borde de grieta curvo es apreciable.

Los resultados obtenidos a partir de las expresiones de la ecuación (3.35) y los desplazamientos de los nodos a un cuarto situados en la sección media de la grieta son:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi \rho s e n \alpha} \quad 0.539 \quad (3.37)$$

$$K_{II} = \sigma \sqrt{\pi \rho s e n \alpha} \quad 0.604 \quad (3.38)$$

Estos valores presentan una diferencia menor del 1 % con respecto a la solución exacta (ecuación (3.39)), para un arco de grieta circular bajo condiciones de de-

formación plana, obtenido por Atluri et al. (1975) usando funciones de tensión.

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{\sigma\sqrt{\pi\rho\text{sen}\alpha}}{1 + \text{sen}^2(\alpha/2)} F_I(\alpha, \beta) \\ K_{II} &= \frac{\sigma\sqrt{\pi\rho\text{sen}\alpha}}{1 + \text{sen}^2(\alpha/2)} F_{II}(\alpha, \beta) \end{aligned} \quad (3.39)$$

con

$$\begin{aligned} F_I(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha/2) - \cos(2\beta + \alpha/2) - \cos(2\beta + 3\alpha/2) \\ &\quad \cdot \text{sen}^4(\alpha/2) - 2\text{sen}(2\beta + 3\alpha/2)\text{sen}(\alpha)\text{sen}^2(\alpha/2) \} \\ F_{II}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \{ \text{sen}(\alpha/2) + \text{sen}(2\beta + \alpha/2) + \text{sen}(2\beta + 3\alpha/2) \\ &\quad \cdot \text{sen}^4(\alpha/2) + 2\text{sen}(2\beta + 3\alpha/2)\cos(\alpha)\text{sen}^2(\alpha/2) \} \end{aligned} \quad (3.40)$$

siendo β el ángulo que forma la dirección de aplicación de la carga y la tangente al arco de la grieta en el extremo de ésta ($\beta = 45^\circ$).

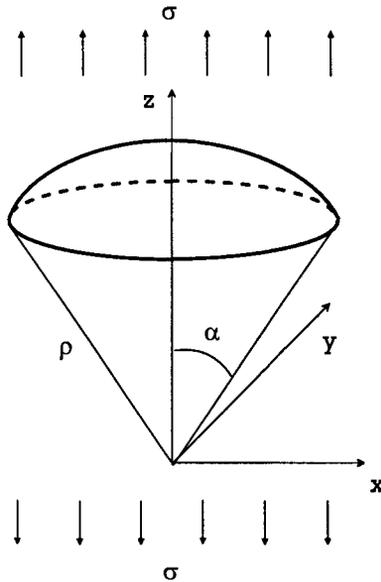


Figura 3.15: Grieta esférica en medio infinito.

Grieta esférica

A continuación se considera una grieta con forma esférica inmersa en un dominio infinito de las mismas propiedades que los ejemplos anteriores. La curvatura de la grieta se define por el ángulo α , como se puede ver en la figura 3.15. Se han obtenido resultados para grietas con curvaturas desde $\alpha = 0^\circ$ hasta $\alpha = 45^\circ$.

La malla de elementos de contorno que se ha utilizado para este problema es similar a la empleada para la grieta circular, pero incluyendo la curvatura de la superficie de la grieta (figura 3.16). La segunda fila de nodos a partir del vértice de la grieta están ubicados a un cuarto de la longitud del arco que forma la primera fila de elementos que discretizan la superficie de la grieta.

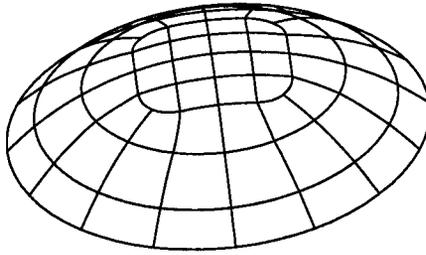


Figura 3.16: Discretización de elementos de contorno de una grieta esférica en medio infinito.

En la figura 3.17 se muestran los valores obtenidos del FIT en modo I y modo II, para diferentes curvaturas de grieta, normalizados con el factor de intensidad de tensión en modo I para una grieta circular plana ($K_N = 2 \sigma \sqrt{\frac{a}{\pi}}$). Para evaluar la precisión de estos resultados nótese que la variación de K_I y K_{II} con la curvatura de la superficie de la grieta tal como se muestra en la figura 3.17 es aproximadamente la misma que se obtiene para una grieta bidimensional con forma de arco (véanse los resultados obtenidos para $\alpha = 45^\circ$ en el ejemplo anterior). Puede establecerse otra comparación considerando una grieta circular en un medio infinito inclinada con respecto a la dirección de aplicación de la carga el mismo ángulo que el frente

de grieta en la grieta esférica.

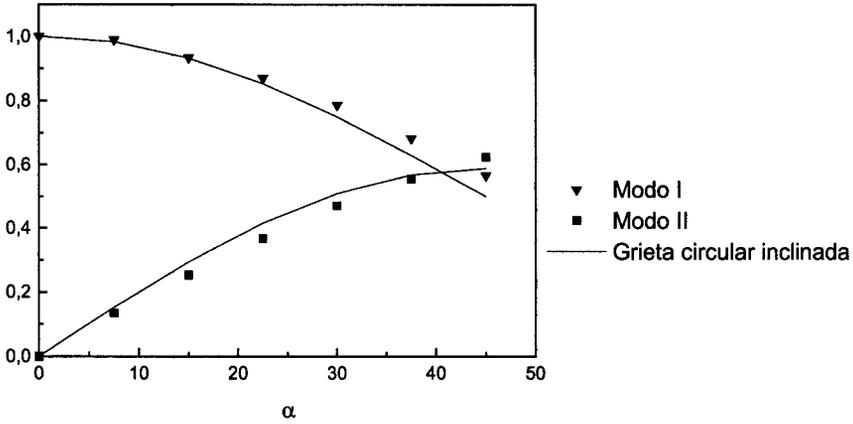


Figura 3.17: FIT modo I y modo II para grieta esférica con diferentes curvaturas.

Como puede verse en la figura 3.17 a pesar de las diferencias geométricas entre los problemas que estamos comparando, la solución analítica de este problema (Rooke y Cartwright, 1976) es muy parecida a la solución de elementos de contorno obtenida.

$$\begin{aligned}
 K_I &= \frac{2}{\pi} \sigma \sqrt{\pi a} \cos^2 \phi \\
 K_{II} &= \frac{4}{\pi(2-\nu)} \sigma \sqrt{\pi a} \sin \phi \cos \phi \cos \omega
 \end{aligned}
 \tag{3.41}$$

siendo ϕ el ángulo que forma la normal a la superficie de la grieta con el eje vertical z y ω el ángulo medido a lo largo del borde de la grieta.

3.4.2 Dominios finitos. Grieta interna

Cuando el dominio que se estudia es finito y la grieta es interior, se discretiza únicamente una superficie de la grieta para cuyos nodos se escribe la EIC en tracciones, usando el método de colocación múltiple para aquellos que pertenecen a más de un elemento, y la EIC clásica para los nodos del contorno exterior.

Grieta circular en barra cilíndrica

Con este problema se pretende poner a punto la formulación mixta desarrollada. En primer lugar se modela una grieta circular en un medio infinito haciendo $R=10a$, siendo R y a el radio de la barra cilíndrica y de la grieta, respectivamente. Los resultados se comparan con los obtenidos anteriormente y con la solución analítica de este problema. A continuación se reduce el diámetro del cilindro hasta hacerlo doble que el de la grieta. La altura total del cilindro es dos veces su diámetro en cualquier caso.

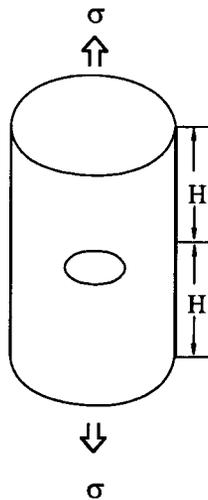


Figura 3.18: Grieta circular en barra cilíndrica.

El cilindro se somete a tracción uniforme, σ , aplicada en sus caras superior e inferior (figura 3.18). La discretización de elementos de contorno para la grieta es la misma que para medio infinito y la del contorno exterior es similar a la que se muestra en la figura 3.20.

El factor de intensidad de tensión en modo I calculado a partir de los valores de la apertura de grieta de los nodos a un cuarto situados a lo largo del vértice de la grieta es para el primer caso $K_I=1.987\sigma\sqrt{a/\pi}$ y para el segundo $K_I=0.705\sigma\sqrt{\pi a}$.

Estos resultados presentan un buen acuerdo con los analíticos de Sneddon (1946), ($K_I=2\sigma\sqrt{a/\pi}$), y con los obtenidos por Banks-Sills y Sherman (1992) usando el método de la integral J y la derivada de rigidez para un cilindro de radio $2a$ ($K_I=0.706\sigma\sqrt{\pi a}$).

Grieta circular inclinada en barra cilíndrica

Se considera una grieta circular de radio a en el interior de una barra cilíndrica de radio R y situada en un plano inclinado un ángulo ϕ respecto al eje de la barra. Las propiedades del material son las mismas que en los ejemplos anteriores. La geometría se define en la figura 3.19 ($R=10a$, $h=30a$, $\phi=45^\circ$). La superficie de la grieta se discretiza con la misma malla que en el caso de una grieta circular en medio infinito (figura 3.5) y la superficie exterior del cilindro tal como se muestra en la figura 3.20.

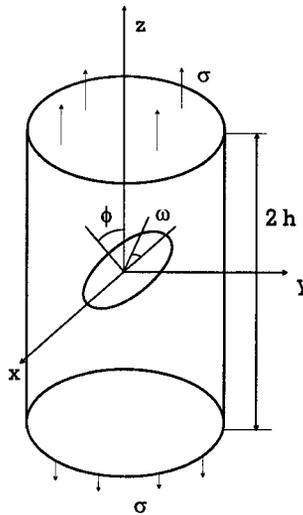


Figura 3.19: Grieta circular inclinada en barra cilíndrica.

El cilindro se somete a tracción uniforme, σ , aplicada en sus caras superior e inferior. El FIT para los tres modos se calcula a partir del DAG de los nodos a

un cuarto y se normalizan con respecto al FIT en modo I para una grieta circular plana en medio infinito, $K_N = 2\sigma\sqrt{\frac{a}{\pi}}$. En la figura 3.21 se comparan los resultados obtenidos con la solución analítica de Rooke y Cartwright (1976) para un dominio infinito.

$$\begin{aligned}
 K_I &= \frac{2}{\pi}\sigma\sqrt{\pi a}\cos^2\phi \\
 K_{II} &= \frac{4}{\pi(2-\nu)}\sigma\sqrt{\pi a}\sin\phi\cos\phi\cos\omega \\
 K_{III} &= \frac{4(1-\nu)}{\pi(2-\nu)}\sigma\sqrt{\pi a}\sin\phi\cos\phi\sin\omega
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

siendo ω el ángulo a lo largo del borde de la grieta.

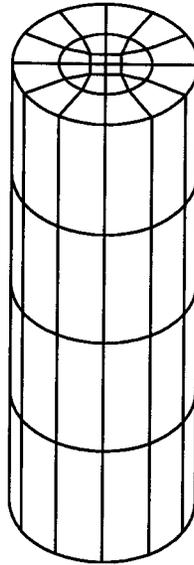


Figura 3.20: Discretización de elementos de contorno de la superficie exterior.

El acuerdo entre los resultados es muy bueno, dado que el radio del cilindro es mucho mayor que el de la grieta cabe esperar que el campo de tensiones cerca de la grieta sea muy parecido al que existe en un medio infinito.

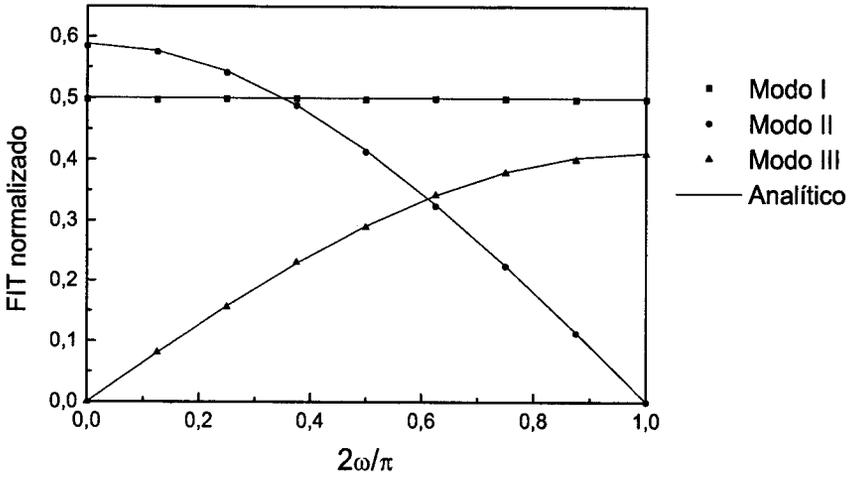


Figura 3.21: FIT modo I, modo II y modo III. Grieta circular inclinada en barra cilíndrica.

Grieta elíptica en el interior de barra prismática

Los problemas de grietas en placas han recibido en los últimos años una gran atención por parte de investigadores e ingenieros dada su importancia en el diseño y mantenimiento de estructuras en general.

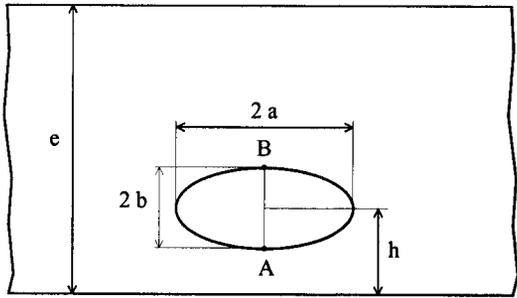


Figura 3.22: Grieta elíptica inmersa en un dominio finito cerca de un borde libre.

Con objeto de evaluar el efecto de un borde libre próximo a una grieta interna,

vamos a considerar un grieta elíptica, de semieje mayor a y semieje menor b , contenida en una placa de espesor finito y situada en una posición arbitraria con uno de sus ejes principales paralelo a la superficie de la placa (figura 3.22).

El tamaño de la placa es $80 \times 80 \times 40$ y la relación entre los semiejes $b/a=0.4$, siendo $a=10$. Las propiedades del material son las mismas que en ejemplos anteriores. La discretización de elementos de contorno para el contorno exterior se ha refinado en la cara de la placa más cercana a la elipse (figura 3.23).

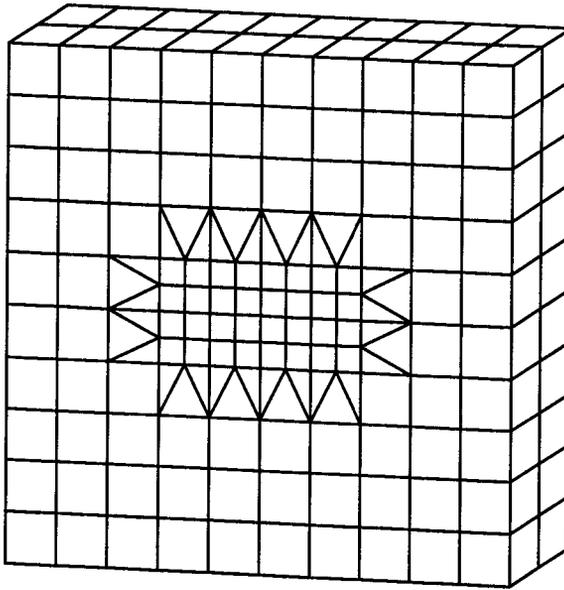


Figura 3.23: Discretización de elementos de contorno exterior.

Los valores del FIT para modo-I aquí obtenidos, normalizado con respecto a los valores correspondientes a la misma elipse inmersa en medio infinito, se comparan con los resultados numéricos de Kassir y Sih (1975) para una grieta elíptica contenida en un semiespacio y situada a una distancia h del borde libre. Los valores de K_I/K_I^∞ se representan frente al ángulo ϕ medido sobre la superficie de la grieta, desde el punto A, más próximo al borde libre, hasta el punto B (figura 3.22).

En la figura 3.24 se observa que la forma descrita por las curvas correspondientes a valores de b/h igual a 0.4, 0.6 y 0.75 guardan un buen acuerdo con las obtenidas por Kassir y Sih (1975) aunque los valores numéricos presentan cierta discrepancia entre sí con una diferencia máxima inferior a 2.5%.

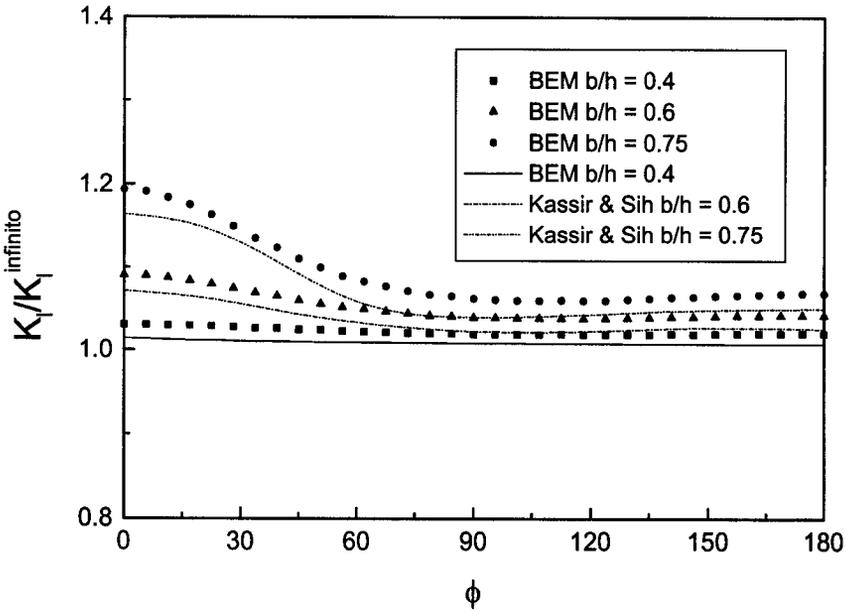


Figura 3.24: FIT normalizado modo I. Grieta elíptica en el interior de barra prismática.

		b/h	0.5	0.6	0.8
Isida y Noguchi	M_A		1.043	1.079	1.239
	M_B		1.019	1.031	1.063
HBEM	M_A		1.047	1.084	1.233
	M_B		1.023	1.035	1.0731

Tabla 3.1: Amplificación del FIT para grieta elíptica en el interior de barra prismática.

Isida y Noguchi (1984) obtuvieron una expresión polinómica del factor de intensidad de tensión para el problema de una grieta elíptica contenida en un sólido semi-infinito, mediante un método modificado de las fuerzas de volumen, para un amplio rango de valores de b/h y b/a . En la tabla 3.1 se comparan los resultados para valores de b/h comprendidos entre 0.5 y 0.8, y $b/a=0.4$.

3.4.3 Dominios finitos. Grieta de borde

En este tipo de problemas hay un contorno exterior en contacto con la grieta. Tanto la superficie de la grieta como el contorno exterior se discretizan con elementos cuadráticos, el único requisito que debe cumplir la malla es que los elementos del frente de la grieta tengan los nodos centrales a un cuarto de su longitud.

Dado que los nodos comunes a la grieta y el contorno exterior para las caras superior e inferior de la grieta son independientes, los desplazamientos de los nodos de las superficies superior e inferior de la grieta se tratan como incógnitas independientes.

Se plantean dos tipos de ecuaciones integrales de contorno:

- la EIC clásica en desplazamientos para la superficie de la grieta y el contorno exterior; y
- la EIC en tracciones para la superficie de la grieta.

En cada dirección cartesiana se escriben dos ecuaciones para cada nodo de la superficie de la grieta, excepto para los del frente de la grieta que se escribe la EIC en desplazamientos colocando directamente en ellos. Para ser congruentes, en el resto de nodos, incluso aquellos que pertenecen a la grieta y al contorno exterior, se aplica la técnica ya descrita de colocación múltiple cuando el nodo pertenece a más de un elemento.

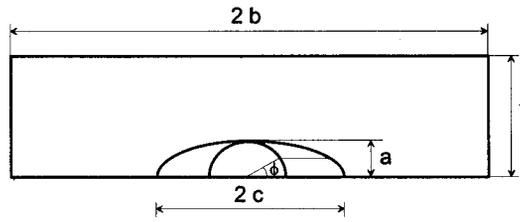


Figura 3.25: Grieta de borde semielíptica en barra prismática.

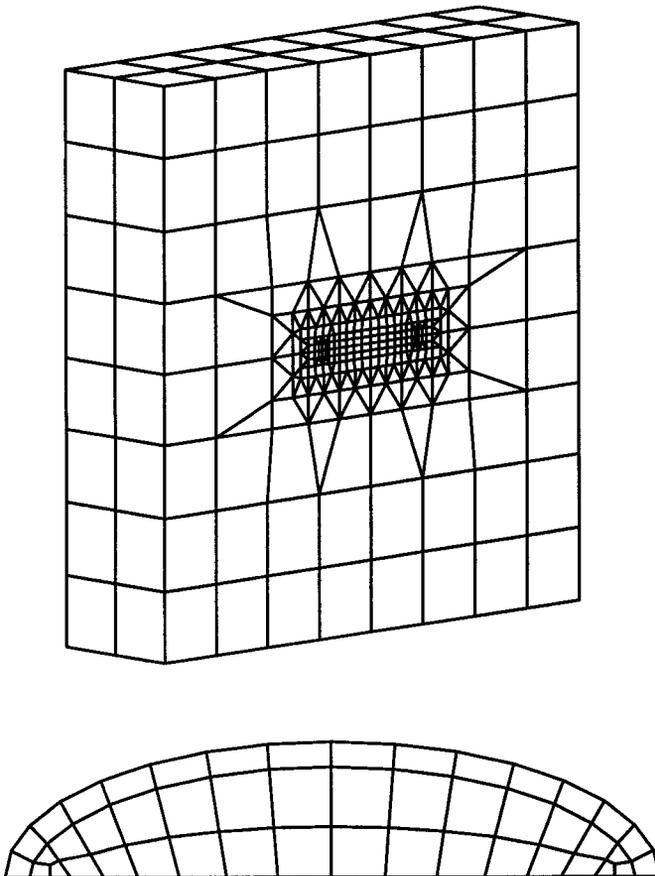


Figura 3.26: Discretización de elementos de contorno para grieta semielíptica en barra prismática.

Semiellipse en pieza prismática

Se considera una grieta plana semielíptica contenida en la sección media de una barra prismática de altura $2h$ sometida a tracción uniforme aplicada en dos caras opuestas de la barra en dirección perpendicular a la grieta. La geometría de la sección media se muestra en la figura 3.25.

La configuración de la grieta y la barra estudiada, se caracteriza por las siguientes relaciones geométricas: $a/c = 0.4$; $a/t = 0.2$; $a/b = 0.1$. Las propiedades del material son: módulo de Poisson $\nu = 0.3$ y módulo de elasticidad transversal $\mu = 10^6$ Pa. La malla de EC del problema se muestra en la figura 3.26, con 16 elementos a lo largo del frente de la grieta.

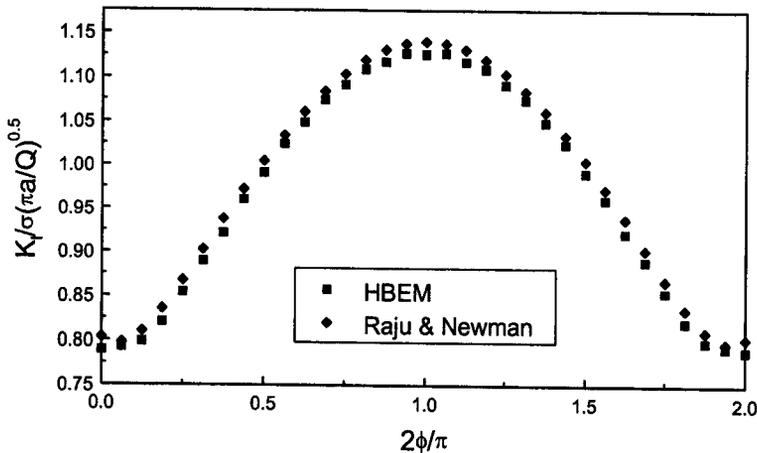


Figura 3.27: FIT modo-I a lo largo de grieta de borde semielíptica en barra prismática.

La figura 3.27 muestra el FIT normalizado en modo I a lo largo del frente de la grieta semielíptica, siendo Q el cuadrado de la integral elíptica completa de segundo tipo (el ángulo ϕ se muestra en la figura 3.25). Estos valores se han obtenido a partir de la ecuación (3.35) siendo Δu la apertura de grieta normal de los nodos a un cuarto. Los resultados presentan un buen acuerdo con los obtenidos

por Raju y Newman (1979) para el mismo problema mediante el método de los elementos finitos. En el trabajo de Isida et al. (1984) aparecen resultados para esta misma configuración geométrica y se establece una comparación del FIT en el punto de máximo valor ($\phi = 90$).

Isida et al.	1.104
Raju & Newman	1.138
HBEM	1.126

Tabla 3.2: Comparación del FIT para grieta semiéptica ($\phi = 90$).

Grieta recta central en pieza prismática

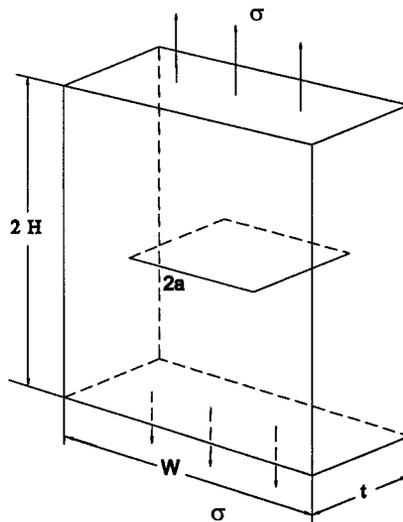


Figura 3.28: Grieta recta central en pieza prismática.

Este problema ha sido resuelto en dos dimensiones por Isida (1975) para distintas relaciones geométricas entre la longitud de la grieta, altura y longitud de la placa. La geometría del problema se muestra en la figura 3.28, siendo $2a/W = 0.5$ y

$$2H/W = 1.$$

Dada la simetría existente, solo se ha discretizado la mitad de la placa y se han empleado dos mallas de elementos de contorno, con 2 y 4 elementos a un cuarto a lo largo del frente de la grieta en cada una de las superficies (figura 3.29).

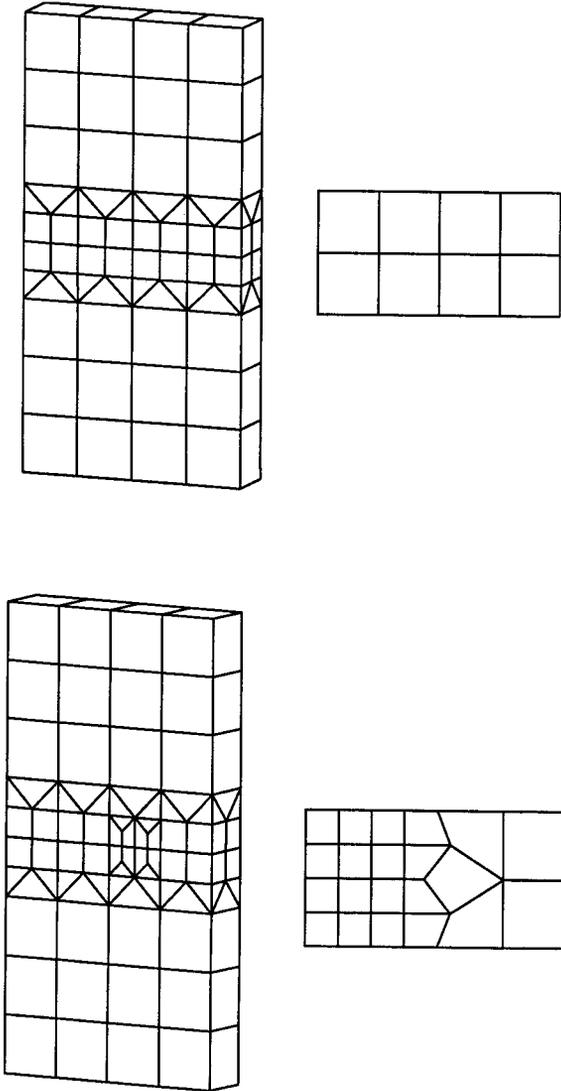


Figura 3.29: Discretización de EC para grieta recta central en pieza prismática.

Para el modelo tridimensional se toma una placa de ancho $t = 0.25W$ y se imponen condiciones de deformación plana prescribiendo desplazamientos normales nulos en cada una de las caras en las que la grieta alcanza la superficie exterior. Los resultados se obtienen para un material con las mismas propiedades que el ejemplo anterior.

El valor normalizado del FIT en modo I, $F_I = K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$ (siendo a la semilongitud de grieta y σ el valor de la tracción aplicada en los extremos de la placa), para las dos discretizaciones se calcula a partir de los valores nodales de los desplazamientos de los nodos a un cuarto. Los resultados aquí obtenidos, $F_I = 1.3307$ y 1.3348 , para 2 y 4 elementos a lo largo del frente de la grieta, respectivamente, se comparan con los correspondientes de Isida (1975), $F_I = 1.334$, que son precisos con un 1% de error. Estos valores del FIT son bastante precisos y muestran escasa dependencia respecto del tamaño de los elementos de la malla empleada.

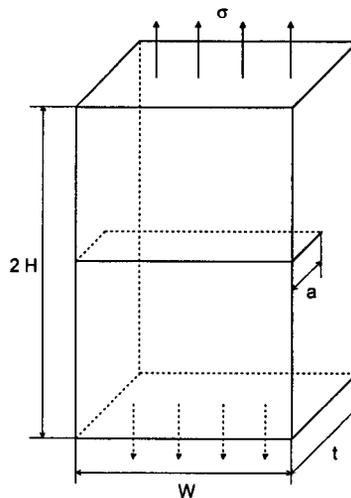


Figura 3.30: Grieta recta de borde en pieza prismática.

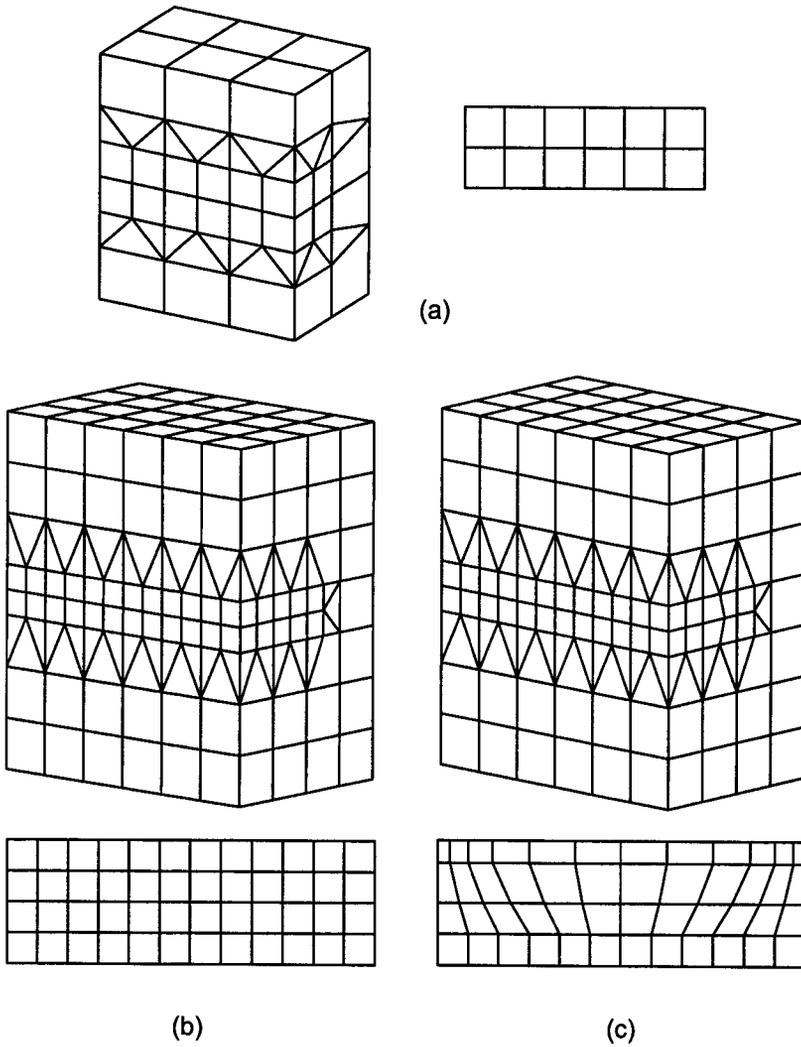


Figura 3.31: Discretización de EC para grieta recta de borde en pieza prismática ($H/a=1.75$).

Grieta recta de borde en pieza prismática

La distribución de los campos de tensiones y desplazamientos en las inmediaciones del vértice de una grieta, descrita en el apartado 3.3.1, es válida para zonas cer-

canas al borde de la grieta pero alejadas de intersecciones con superficies libres, en caso contrario las singularidades dejan de ser de tipo $1/\sqrt{r}$ y \sqrt{r} , respectivamente (Folias, 1975, Benthem, 1977, Bazant et al., 1979 y Folias, 1980).

En este problema, dada la geometría del mismo y a pesar de que es puramente del tipo modo I, el factor de intensidad de tensión varía a lo largo del frente de la grieta desde el valor en el plano medio de la pieza prismática, cercano al correspondiente a condiciones de deformación plana, y el valor en la intersección del vértice de la grieta con la superficie libre en la cual la intensidad de la singularidad es menor de \sqrt{r} y por lo tanto el factor de intensidad de tensión (definido en el sentido habitual) tiende a cero.

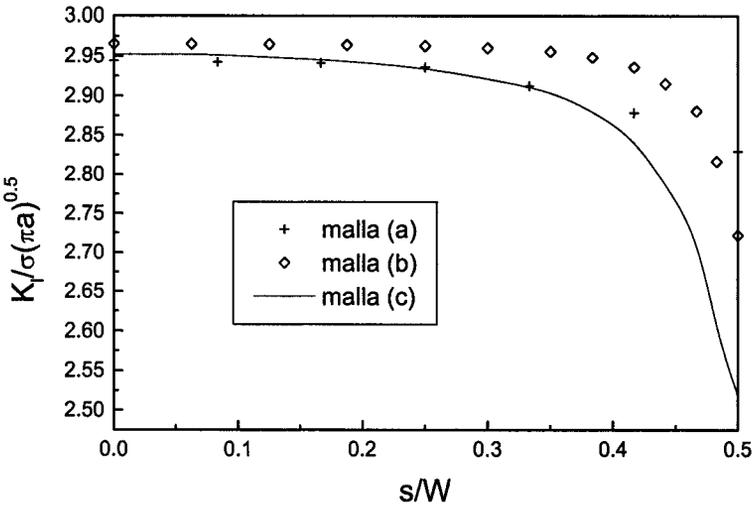


Figura 3.32: Grieta recta de borde ($H/a= 1.75$). Comparación del FIT normalizado modo I.

La geometría de la barra se muestra en la figura 3.30. Se han obtenido resultados numéricos para dos configuraciones, $H/a = 1.75$ y 6 , $W/a = 3$, $t/a = 2$ y módulo de Poisson $\nu = 1/3$. Para representar los valores del FIT, llamamos s a la longitud a lo largo del frente de la grieta medida desde el centro de la misma, i.e.,

$s = W/2$ corresponde a ambos vértices.

Vamos a centrarnos en primer lugar en la pieza con relación geométrica $H/a = 1.75$. Se han realizado tres discretizaciones de EC diferentes (figura 3.31). Las mallas (b) y (c) se diferencian principalmente en la discretización de la superficie de la grieta, tienen el mismo número de nodos y elementos. En ambos casos a lo largo del frente de la grieta se han colocado 12 elementos a un cuarto, pero mientras que en la primera todos los elementos tienen la misma forma y tamaño, en la segunda el tamaño de los elementos situados en el borde de la grieta disminuye en la dirección del frente de grieta y a medida que se acerca a la intersección con la superficie libre.

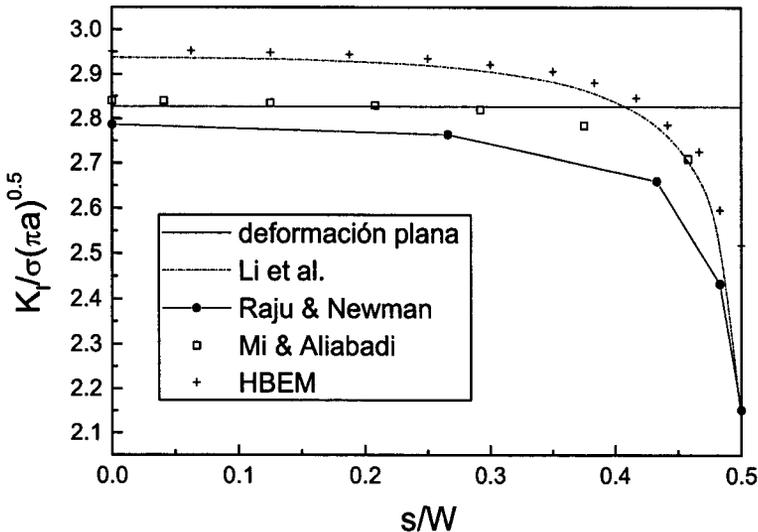


Figura 3.33: Comparación del FIT normalizado modo I para grieta recta de borde.

En la figura 3.32 se comparan los valores del FIT normalizado obtenidos para estas tres discretizaciones. Los resultados para la malla (c) reflejan un descenso del valor del FIT más acusado. Dichos resultados se comparan en la figura 3.33 con los obtenidos por otros autores para el mismo problema utilizando distintos métodos (Raju y Newman, 1977, elementos finitos, Mi y Aliabadi, 1992, formulación dual

de elementos de contorno, y Li et al., 1998, formulación simétrica de elementos de contorno) y con el valor correspondiente a condiciones de deformación plana.

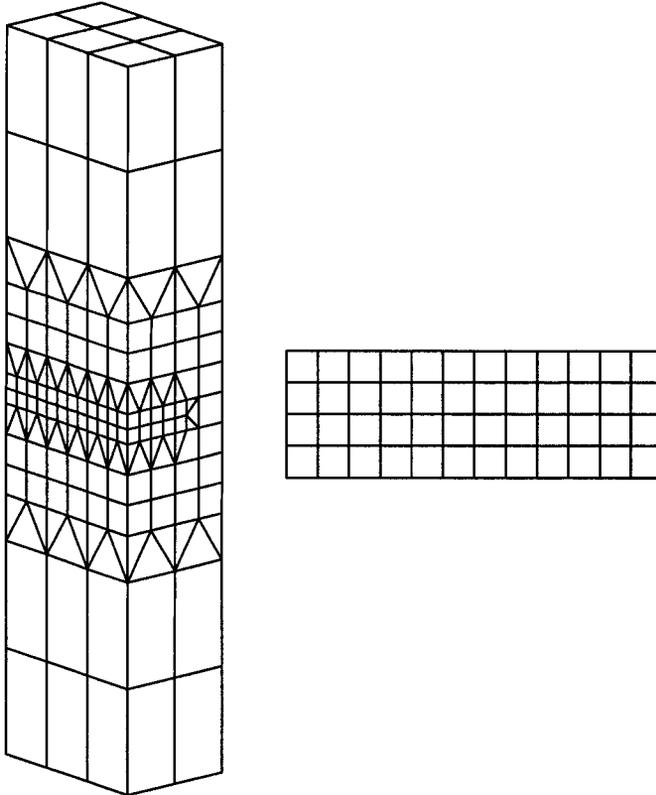


Figura 3.34: Discretización de EC para grieta recta de borde en barra prismática ($H/a=6$).

En la figura 3.35 se comparan los resultados para las dos geometrías ($H/a=1.75$ y 6) con los obtenidos por Raju y Newman (1977) y Mi y Aliabadi (1992). Véase que el valor del FIT para una grieta recta de borde no depende de la altura de la placa que la contiene.

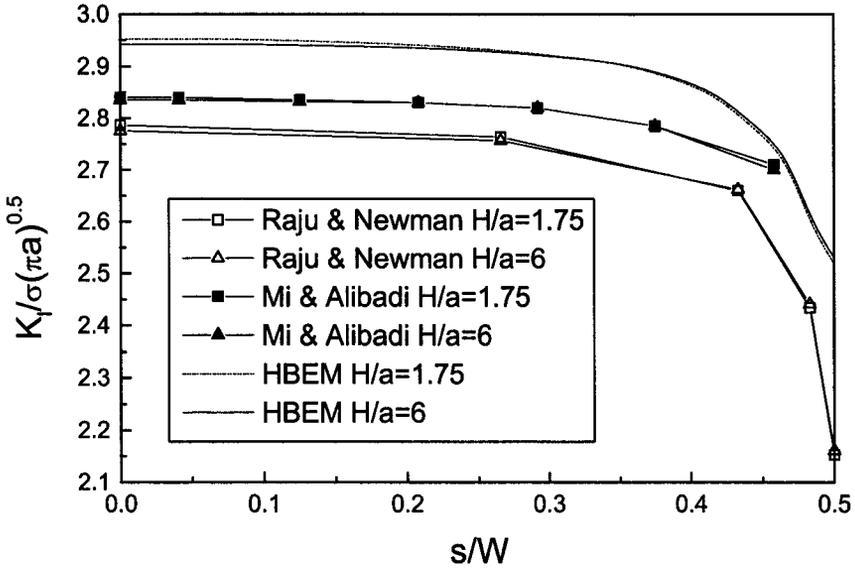


Figura 3.35: Comparación del FIT normalizado modo I para grieta recta de borde.

Dos grietas rectas de borde en pieza prismática

Utilizando las mismas discretizaciones de elementos de contorno del problema anterior y cambiando únicamente las condiciones de contorno, es posible obtener la variación del FIT en modo I a lo largo del borde de grieta cuando en una placa prismática aparecen dos grietas de borde como se muestra en la figura 3.36.

Nótese que a diferencia del problema anterior, al aumentar la altura de la placa el valor del FIT normalizado disminuye (figura 3.37). Los resultados se comparan con los obtenidos por Raju y Newman (1977) y Mi y Aliabadi (1992) para el mismo problema.

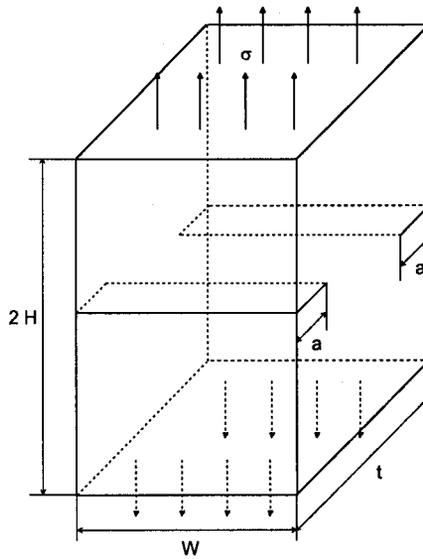


Figura 3.36: Dos grietas rectas de borde en barra prismática.

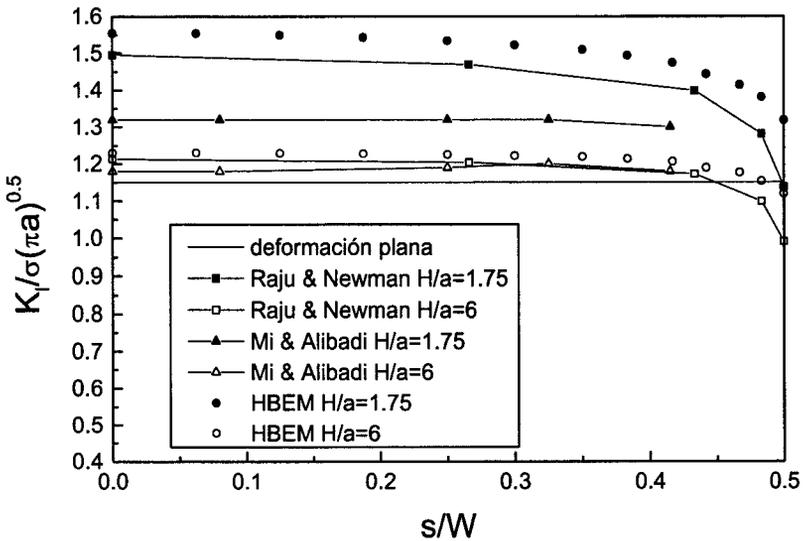


Figura 3.37: Comparación del FIT normalizado modo I para dos grietas rectas de borde.

Capítulo 4

Elasticidad Dinámica. Medios Isótropos

4.1 Introducción

Las grietas no son únicamente un concentrador de tensión, sino que producen difracción de las ondas que sobre ellas inciden cuando el material que las contiene está sometido a acciones dinámicas. Por ello, los valores del Factor de Intensidad de Tensión dinámicos son mayores que los obtenidos cuando una carga de igual amplitud se aplica de forma cuasi-estática sobre el mismo sólido fisurado.

El método de la ecuación integral de contorno aplicado a un dominio tridimensional isótropo que se encuentra sometido a una sollicitación de tipo armónico, constituye una aplicación clásica en Elastodinámica (Cruse y Rizzo, 1968). La obtención de las soluciones fundamentales para problemas bidimensionales y tridimensionales en Elastodinámica armónica puede verse en Domínguez y Abascal (1984). Estas soluciones fundamentales armónicas convergen a las estáticas cuando la frecuencia de excitación tiende a cero. Así, es posible expresar las soluciones fundamentales armónicas para dominios tridimensionales como la suma de las co-

respondientes al problema estático y otros términos, dependientes de la frecuencia y que se anulan cuando ésta tiende a cero.

En el apartado 2 se presentan la obtención y regularización de la EIC en tracciones en Elastodinámica armónica y como, de forma análoga al comportamiento de los núcleos de la ecuación clásica, es posible obtener sus núcleos correspondientes a la solución fundamental como la suma de los del problema estático y una serie de términos que dependen de la frecuencia de manera que se anulan cuando $\omega \rightarrow 0$.

Para comprobar la eficacia de la técnica desarrollada, en el apartado 3 se presentan resultados para problemas tridimensionales con grietas de diferente geometría, inmersas tanto en dominios infinitos como finitos, sobre los que actúan cargas variables armónicamente en un amplio rango de frecuencias.

4.2 Ecuación integral de contorno en tracciones

La representación integral clásica de los desplazamientos para un punto interno \mathbf{y} de un cuerpo elástico Ω cuyo contorno es una superficie regular Γ con normal exterior unitaria $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ sometido a una carga armónica y bajo condiciones de fuerzas de volumen nulas, puede escribirse como:

$$u_l(\mathbf{y}, \omega) + \int_{\Gamma} p_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) u_k(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) p_k(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma = 0 \quad (4.1)$$

para $l, k = 1, 2, 3$; donde u_k y p_k representan la componente k de los vectores de desplazamientos y tracciones, respectivamente, ω es la frecuencia de excitación y u_{lk}^*, p_{lk}^* son los tensores de desplazamientos y tracciones de la solución fundamental armónica isótropa, respectivamente.

Las tensiones en puntos internos se obtienen de forma similar al caso estático (apartado 3.2), teniendo las componentes del vector de tracciones en un punto \mathbf{y}

sobre una superficie con normal exterior unitaria \mathbf{N} la siguiente expresión

$$p_l(\mathbf{y}, \omega) = \sigma_{lm}(\mathbf{y}, \omega) N_m(\mathbf{y}) \quad (4.2)$$

Así, la representación integral de las componentes de las tracciones se expresa como,

$$p_l(\mathbf{y}, \omega) + \int_{\Gamma} s_{lmk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) N_m(\mathbf{y}) u_k(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma - \int_{\Gamma} d_{lmk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) N_m(\mathbf{y}) p_k(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma = 0 \quad (4.3)$$

donde d_{lmk}^* y s_{lmk}^* obtenidos combinando linealmente las derivadas de u_{ik}^* y p_{ik}^* , respectivamente, tienen las siguientes expresiones:

$$d_{lmk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \delta_{lm} r_{,k} \left(-\psi_{,r} + \chi_{,r} + 2\frac{\chi}{r} \right) + (\delta_{kl} r_{,m} + \delta_{km} r_{,l}) \left(\frac{\chi}{r} - \psi_{,r} \right) + r_{,l} r_{,m} r_{,k} \left(2\chi_{,r} - 4\frac{\chi}{r} \right) + 2\frac{\chi}{r} \delta_{lm} r_{,k} \right\} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} s_{lmk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = & \frac{\mu}{4\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[4r_{,l} r_{,m} r_{,k} \left(-5\frac{\chi_{,r}}{r} + \chi_{,rr} + 8\frac{\chi}{r^2} \right) + \right. \right. \\ & (\delta_{lk} r_{,m} + \delta_{mk} r_{,l}) \left(-\psi_{,rr} + 3\frac{\chi_{,r}}{r} + \frac{\psi_{,r}}{r} - 6\frac{\chi}{r^2} \right) + \\ & 2\delta_{lm} r_{,k} \left[\frac{\lambda}{\mu} \left(-\psi_{,rr} + \chi_{,rr} + \frac{\psi_{,r}}{r} + \frac{\chi_{,r}}{r} - 4\frac{\chi}{r^2} \right) - 4\frac{\chi}{r^2} + 2\frac{\chi_{,r}}{r} \right] \left. \right] + \\ & 2r_{,l} r_{,m} n_k \left(2\frac{\chi_{,r}}{r} - 4\frac{\chi}{r^2} - \frac{\lambda}{\mu} \left(\psi_{,rr} - \chi_{,rr} - \frac{\psi_{,r}}{r} - \frac{\chi_{,r}}{r} + 4\frac{\chi}{r^2} \right) \right) + \\ & r_{,k} (n_l r_{,m} + n_m r_{,l}) \left(-\psi_{,rr} + \frac{\psi_{,r}}{r} + 3\frac{\chi_{,r}}{r} - 6\frac{\chi}{r^2} \right) + \\ & \delta_{lm} n_k \left[-\frac{\lambda^2}{\mu^2} \left(\psi_{,rr} - \chi_{,rr} - 4\frac{\chi_{,r}}{r} - 2\frac{\chi}{r^2} + 2\frac{\psi_{,r}}{r} \right) - \right. \\ & \left. \frac{\lambda}{\mu} \left(4\frac{\psi_{,r}}{r} - 4\frac{\chi_{,r}}{r} - 8\frac{\chi}{r^2} \right) + 4\frac{\chi}{r^2} \right] + 2(n_m \delta_{lk} + n_l \delta_{mk}) \left(-\frac{\psi_{,r}}{r} + \frac{\chi}{r^2} \right) \left. \right\} \quad (4.5) \end{aligned}$$

siendo ψ y χ funciones de la frecuencia de excitación ω , de las velocidades de onda del material, c_1 y c_2 , y de la distancia r entre el punto de aplicación de la carga, \mathbf{x} ,

y el punto en el que se representa la ecuación integral, \mathbf{y} . Sus expresiones pueden verse en el Apéndice C.

Cada uno de los núcleos de la representación integral de las tracciones puede expresarse como

$$d_{lmk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = d_{lmk}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) + d_{lmk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (4.6)$$

$$s_{lmk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = s_{lmk}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) + s_{lmk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (4.7)$$

donde $d_{lmk}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ y $s_{lmk}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) \rightarrow 0$ cuando $\omega \rightarrow 0$ y $d_{lmk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y $s_{lmk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se corresponden con las soluciones fundamentales estáticas y por lo tanto presentan la misma singularidad fuerte de orden r^{-2} e hipersingularidad de orden r^{-3} , respectivamente, cuando $r \rightarrow 0$.

La parte regular de las soluciones fundamentales, s_{lmk}^R y d_{lmk}^R , se obtienen restando al desarrollo en serie de los núcleos armónicos d_{lmk}^* y s_{lmk}^* los núcleos estáticos $d_{lmk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y $s_{lmk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, pueden escribirse como la suma de un término regular y débilmente singular, respectivamente, y una serie infinita regular (véase Apéndice C).

Para obtener la representación integral para un punto suave del contorno \mathbf{y} , se realiza un proceso de paso al límite en el contorno, caben hacerse las mismas consideraciones respecto a los requisitos de continuidad para las componentes de los desplazamientos que en el caso estático. Usando nuevamente la geometría modificada de la figura 2.1 y las expresiones (4.6) y (4.7), puede escribirse:

$$p_l(\mathbf{y}, \omega) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{(\Gamma - e_\varepsilon) + \Gamma_\varepsilon} [s_{lmk}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) N_m(\mathbf{y}) u_k(\mathbf{x}, \omega) - d_{lmk}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) N_m(\mathbf{y}) p_k(\mathbf{x}, \omega)] d\Gamma + \int_{(\Gamma - e_\varepsilon) + \Gamma_\varepsilon} [s_{lmk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_m(\mathbf{y}) u_k(\mathbf{x}, \omega) - d_{lmk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_m(\mathbf{y}) p_k(\mathbf{x}, \omega)] d\Gamma \right\} = 0 \quad (4.8)$$

En esta representación de las tracciones, los integrandos de la primera integral son todos regulares o débilmente singulares. Sin embargo, los núcleos de la segunda integral son hipersingulares o fuertemente singulares, para hacerlos integrables

numéricamente es preciso aplicarles el mismo proceso de regularización empleado en el apartado 3.2 para el caso estático.

Las componentes de los vectores de desplazamientos y tracciones se desarrollan en y como

$$u_k(\mathbf{x}, \omega) = u_k(\mathbf{y}, \omega) + u_{k,h}(\mathbf{y}, \omega)(x_h - y_h) + O(r^{1+\alpha}) \quad (4.9)$$

$$p_k(\mathbf{x}, \omega) = \sigma_{kh}(\mathbf{x}, \omega)n_h(\mathbf{x}) = \sigma_{kh}(\mathbf{y}, \omega)n_h(\mathbf{x}) + O(r^\alpha) \quad (4.10)$$

Sobre estos desarrollos caben hacerse las mismas consideraciones que para el caso estático. Introduciendo los desarrollos (4.9) y (4.10) en la ecuación (4.8), ésta puede escribirse como

$$\begin{aligned} & p_l(\mathbf{y}, \omega) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{\Gamma - e_\varepsilon} \{ s_{lmk}^R N_m u_k(\mathbf{x}, \omega) - d_{lmk}^R N_m p_k(\mathbf{x}, \omega) \} d\Gamma + \right. \\ & \int_{\Gamma_\varepsilon} \{ s_{lmk}^R N_m u_k(\mathbf{x}, \omega) - d_{lmk}^R N_m p_k(\mathbf{x}, \omega) \} d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma - e_\varepsilon} \{ s_{lmk}^S N_m [u_k(\mathbf{x}, \omega) - u_k(\mathbf{y}, \omega) - u_{k,h}(\mathbf{y}, \omega)(x_h - y_h)] - \\ & d_{lmk}^S N_m [p_k(\mathbf{x}, \omega) - p_k(\mathbf{y}, \omega)] \} d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma_\varepsilon} \{ s_{lmk}^S N_m [u_k(\mathbf{x}, \omega) - u_k(\mathbf{y}, \omega) - u_{k,h}(\mathbf{y}, \omega)(x_h - y_h)] - \\ & d_{lmk}^S N_m [p_k(\mathbf{x}, \omega) - \sigma_{kh}(\mathbf{y}, \omega)n_h(\mathbf{x})] \} d\Gamma + \\ & u_k(\mathbf{y}, \omega) \int_{\Gamma - e_\varepsilon} s_{lmk}^S N_m d\Gamma + u_k(\mathbf{y}, \omega) \int_{\Gamma_\varepsilon} s_{lmk}^S N_m d\Gamma + \\ & u_{k,h}(\mathbf{y}, \omega) \int_{\Gamma - e_\varepsilon} s_{lmk}^S N_m (x_h - y_h) d\Gamma + u_{k,h}(\mathbf{y}, \omega) \int_{\Gamma_\varepsilon} s_{lmk}^S N_m (x_h - y_h) d\Gamma - \\ & \left. p_k(\mathbf{y}, \omega) \int_{\Gamma - e_\varepsilon} d_{lmk}^S N_m d\Gamma - \sigma_{kh}(\mathbf{y}, \omega) \int_{\Gamma_\varepsilon} d_{lmk}^S N_m n_h d\Gamma \right\} = 0 \quad (4.11) \end{aligned}$$

o

$$p_l(\mathbf{y}, \omega) + T_1^R + T_2^R + T_1^S + T_2^S + T_3^S + T_4^S + T_5^S + T_6^S + T_7^S + T_8^S = 0 \quad (4.12)$$

La integral T_1^R no presenta ninguna dificultad, puede calcularse numéricamente sobre el contorno Γ ya que las soluciones fundamentales se comportan de manera débilmente singular.

$$T_1^R = \int_{\Gamma} \{s_{lmk}^R N_m u_k(\mathbf{x}, \omega) - d_{lmk}^R N_m p_k(\mathbf{x}, \omega)\} d\Gamma \quad (4.13)$$

En cuanto a la integral T_2^R sobre Γ_ε ; al ser las soluciones fundamentales s_{lmk}^R y d_{lmk}^R como máximo débilmente singulares (i.e. $\sim 0(\frac{1}{\varepsilon})$) y siendo $d\Gamma \sim 0(\varepsilon^2)$, la integral tenderá a cero según $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$T_2^R = 0 \quad (4.14)$$

El tratamiento aplicado a las ocho integrales singulares, T_1^S a T_8^S , es el mismo que en el apartado 3.2 para el caso estático. Así se tiene

$$T_1^S = \int_{\Gamma} \{s_{lmk}^S N_m [u_k(\mathbf{x}, \omega) - u_k(\mathbf{y}, \omega) - u_{k,h}(\mathbf{y}, \omega)(x_h - y_h)] - d_{lmk}^S N_m [p_k(\mathbf{x}, \omega) - p_k(\mathbf{y}, \omega)]\} d\Gamma \quad (4.15)$$

$$T_2^S = 0 \quad (4.16)$$

$$T_4^S = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ u_k(\mathbf{y}, \omega) \int_{\Gamma_\varepsilon} s_{lmk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) N_m d\Gamma \right\} = u_k(\mathbf{y}, \omega) \frac{\mu(\nu - 2)}{4(1 - \nu)} \delta_{lk} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \quad (4.17)$$

para $l = 1, 2$, y

$$T_4^S = u_k(\mathbf{y}, \omega) \frac{-2\mu}{4(1 - \nu)} \delta_{lk} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \quad (4.18)$$

para $l = 3$.

$$T_6^S + T_8^S = -\frac{1}{2} \sigma_{lm}(\mathbf{y}, \omega) N_m = -\frac{1}{2} p_l(\mathbf{y}, \omega) \quad (4.19)$$

$$T_3^S = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u_k(\mathbf{y}, \omega) \int_{\Gamma - \varepsilon_\varepsilon} s_{lmk}^S N_m d\Gamma = u_k(\mathbf{y}, \omega) \frac{\mu}{4\pi(1 - \nu)} \left\{ I_{lk} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{\varepsilon} [2 + \nu(\delta_{3l} - 1)] \delta_{lk} \right\} \quad (4.20)$$

$$T_5^S = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ u_{k,h}(\mathbf{y}, \omega) \int_{\Gamma - e_\varepsilon} s_{lmk}^S N_m(x_h - y_h) \right\} d\Gamma = \\ u_{k,h}(\mathbf{y}, \omega) \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)} J_{lhk} \quad (4.21)$$

$$T_7^S = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ p_k(\mathbf{y}, \omega) \int_{\Gamma - e_\varepsilon} d_{lmk}^S N_m d\Gamma \right\} = p_k(\mathbf{y}, \omega) \frac{1}{4\pi(1-\nu)} K_{lk} \quad (4.22)$$

donde I_{lk} , J_{lhk} y K_{lk} vienen dadas por las ecuaciones (3.21), (3.23) y (3.25), respectivamente.

Sustituyendo las ecuaciones (4.13) a (4.22) en la ecuación (4.12) se obtiene una ecuación integral de contorno general armónica en tracciones en términos únicamente de integrales regulares o débilmente singulares.

$$\frac{1}{2} p_l(\mathbf{y}, \omega) + \int_{\Gamma} \{ s_{lmk}^R N_m u_k(\mathbf{x}, \omega) - d_{lmk}^R N_m p_k(\mathbf{x}, \omega) \} d\Gamma + \\ \int_{\Gamma} \{ s_{lmk}^S N_m [u_k(\mathbf{x}, \omega) - u_k(\mathbf{y}, \omega) - u_{k,h}(\mathbf{y}, \omega)(x_h - y_h)] - \\ d_{lmk}^S N_m [p_k(\mathbf{x}, \omega) - p_k(\mathbf{y}, \omega)] \} d\Gamma + \\ \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)} [u_k(\mathbf{y}, \omega) I_{lk} + u_{k,h}(\mathbf{y}, \omega) J_{lhk} + p_k(\mathbf{y}, \omega) K_{lk}] = 0 \quad (4.23)$$

Al igual que la ecuación (3.26) correspondiente al caso estático, esta ecuación integral de contorno es válida para contornos abiertos o cerrados, contornos planos o curvos y puede ser discretizada de forma directa usando una formulación de elementos de contorno.

4.3 Resultados numéricos

En este apartado se analizan una serie de problemas armónicos de Mecánica de la Fractura tridimensional empleando la técnica desarrollada anteriormente. Al igual que en el capítulo anterior, el contorno del problema se discretiza mediante elementos cuadráticos estándar, cuadriláteros o triangulares, a excepción de la fila de elementos colocados en el borde de la grieta que son elementos a un cuarto.

Se ha estudiado la propagación de ondas a través de grietas de distintas geometrías inmersas en dominios infinitos y se han comparado los resultados, de forma satisfactoria, con los obtenidos por otros autores para baja y alta frecuencia. Dada la escasez en la bibliografía de resultados armónicos para problemas en los que la grieta está contenida en un dominio finito, ya sea interna o de borde, se ha aplicado la transformada de Fourier a los resultados obtenidos en el dominio de la frecuencia para problemas con esta configuración geométrica y se han comparado con las soluciones dadas por otros autores para los mismos problemas en el dominio del tiempo o aplicando la transformada de Laplace a resultados armónicos.

4.3.1 Dominios infinitos

Grieta circular

Hace más de 30 años Robertson (1967) estudió analíticamente la difracción de ondas longitudinales a través de una grieta circular inmersa en un dominio infinito isótropo. Desde entonces y dada la simplicidad de esta geometría, han sido numerosos los resultados tanto analíticos como numéricos que se han presentado para este problema, en algunos casos porque los autores emplean técnicas válidas únicamente para este problema y en otros, como es nuestro caso, para validar la técnica desarrollada y determinar su eficacia.

La grieta está sometida al efecto de una onda de apertura propagándose en una dirección perpendicular a la superficie de la grieta. La malla de elementos de contorno (figura 4.1) es la misma que la empleada en el capítulo anterior. Todos los elementos son cuadriláteros de nueve nodos, teniendo los que se sitúan en el frente de la grieta sus nodos intermedios a un cuarto de su longitud.

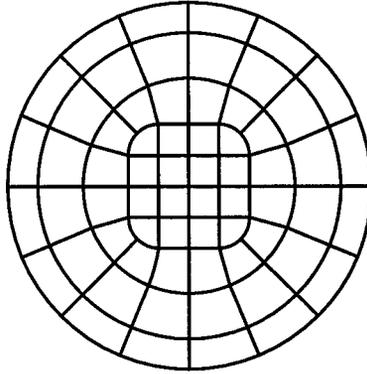


Figura 4.1: Discretización de elementos de contorno de una grieta circular en medio infinito.

En la figura 4.2 se muestran resultados correspondientes al Desplazamiento de Apertura de Grieta (DAG) para diferentes posiciones a lo largo del radio, normalizados con respecto a la apertura en el centro de la grieta para una carga estática uniforme de la misma amplitud. Los distintos grupos de curvas corresponden a diferentes valores del parámetro ak_T , donde k_T es el número de onda asociado a los movimientos transversales que se propagan en la dirección perpendicular a la superficie de la grieta,

$$ak_T = a \frac{\omega}{c_2} \quad (4.24)$$

siendo, a el radio de la grieta, ω la frecuencia de excitación y c_2 la velocidad de onda longitudinal del material. El módulo de Poisson del material es $\nu = 0.25$.

Los valores aquí obtenidos presentan un buen acuerdo con los presentados por Mal (1970) mediante un método iterativo para resolver las ecuaciones integrales, Budreck y Achenbach (1988) usando una forma regularizada de la EIC en tracciones, Nishimura y Kobayashi (1988) usando funciones B splines para resolver sus EIC regularizadas y Sáez y Domínguez (1999) usando una formulación clásica de elementos de contorno en combinación con elementos a un cuarto y a un cuarto singulares para discretizar el vértice de la grieta (figura 4.2). Se observa que a

medida que aumenta la frecuencia aparecen mayores diferencias entre los distintos autores para los valores máximos y mínimos.

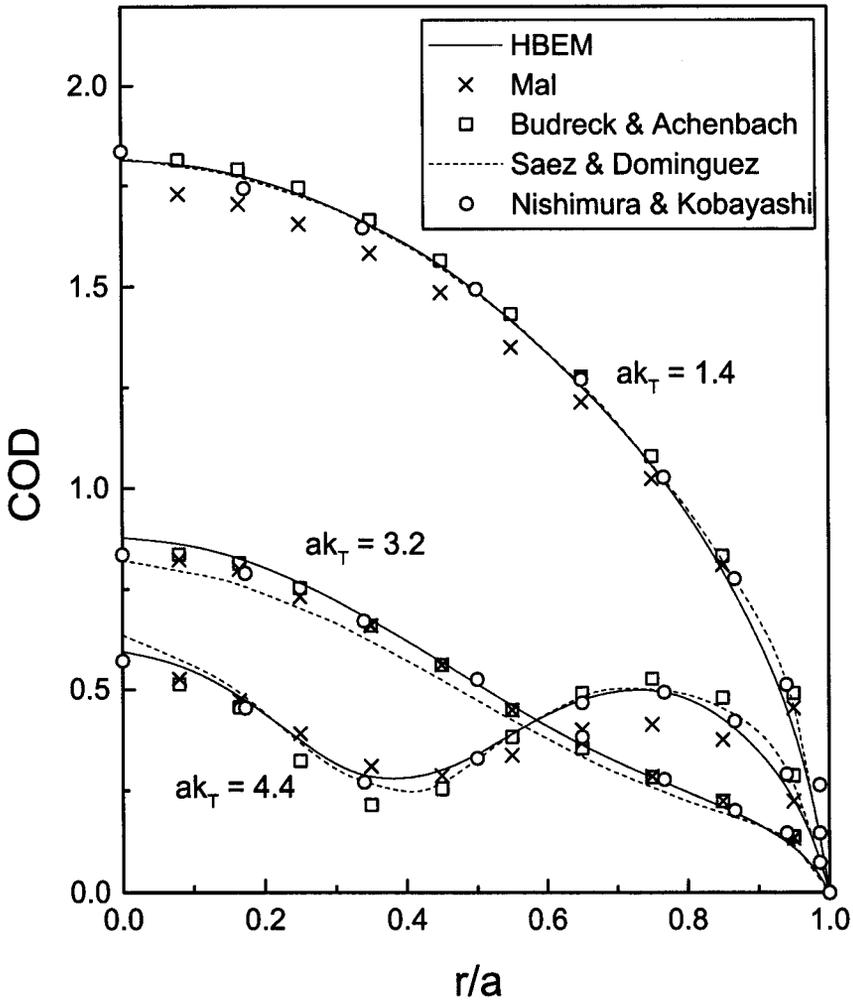


Figura 4.2: Desplazamiento de apertura de grieta normalizado. Grieta circular en medio infinito.

Para el mismo problema y un rango de frecuencias $0 \leq \omega a/c_1 \leq 1.5$, se representa en la figura 4.3 el Factor de Intensidad de Tensión en modo I normalizado,

K_I/K_{IS} , obtenido a partir del desplazamiento de apertura de grieta de los nodos a un cuarto (ecuación (3.35)), siendo K_{IS} el FIT asociado al problema estático equivalente. Estos resultados se comparan con los obtenidos por Sladek y Sladek (1986), usando el método de la derivada de la ecuación integral de contorno y Parton y Boriskovsky (1989) usando un método semianalítico de ecuaciones integrales.

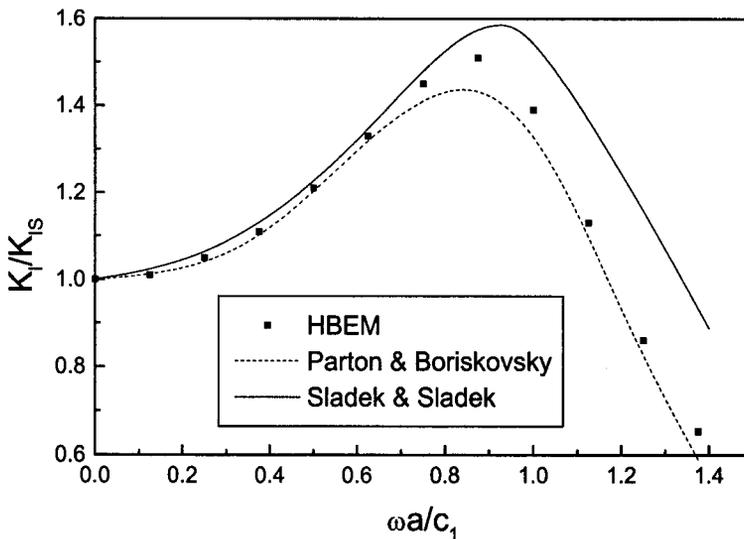


Figura 4.3: FIT normalizado modo I. Grieta circular en medio infinito.

El módulo de Poisson de un material influye en el valor de la frecuencia de excitación de la carga que actuando sobre una pieza que contiene una grieta, hace que se alcance el valor máximo del FIT y en la magnitud del mismo. En la figura 4.4 pueden verse los FIT en modo I normalizados, para distintos valores de ν y su comparación con los resultados obtenidos por Parton y Boriskovsky (1989), para un rango normalizado de frecuencias $0 \leq \omega a/c_1 \leq 1.5$.

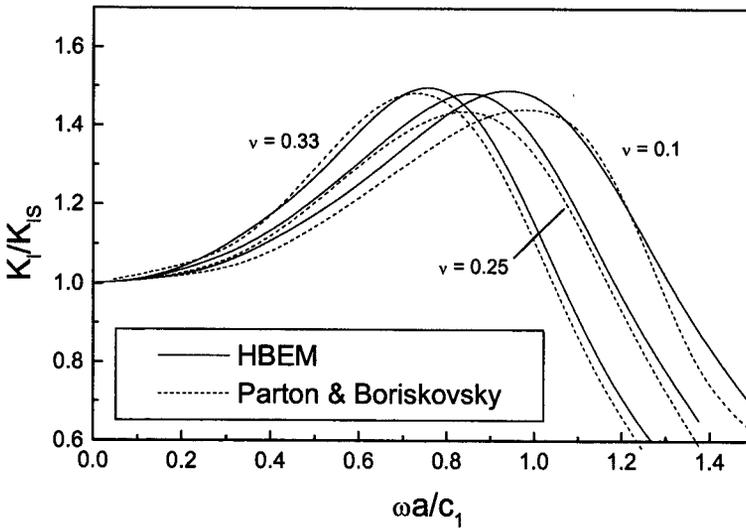


Figura 4.4: FIT normalizado modo I para distintos valores de ν . Grieta circular en medio infinito.

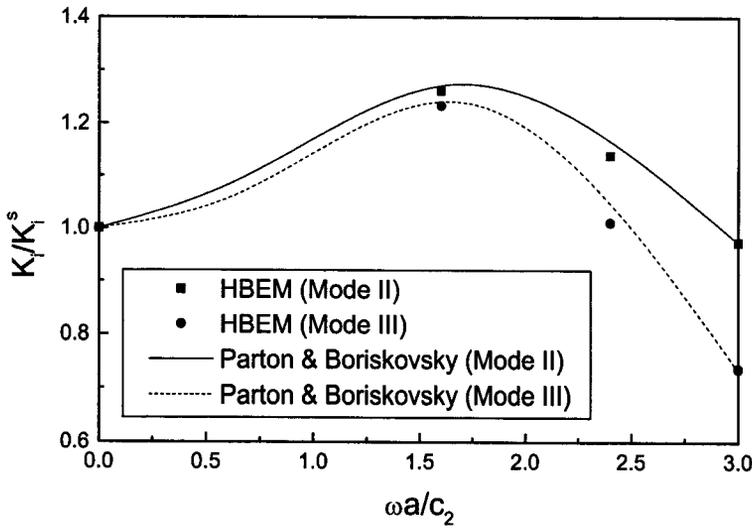


Figura 4.5: FIT normalizado modo II y modo III. Grieta circular en medio infinito.

A continuación la grieta se somete al efecto de una onda cortante propagándose en dirección normal a la superficie de la grieta. La malla de elementos de contorno es la misma que la empleada anteriormente, siendo en este caso el módulo de Poisson del material $\nu = 0.3$. Los valores de FIT normalizado en modo II y modo III se comparan con los obtenidos por Parton y Boriskovsky (1989), para un rango normalizado de frecuencias $0 \leq \omega a/c_2 \leq 3$ (figura 4.5).

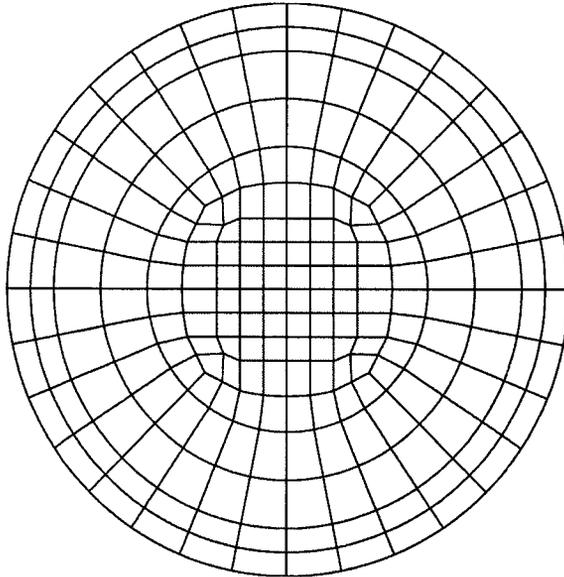


Figura 4.6: Discretización de elementos de contorno de una grieta circular en medio infinito (refinada).

A medida que aumenta el valor de la frecuencia se atenúa la amplitud del FIT. En los problemas estudiados, el primer máximo es un máximo absoluto, y el resto se repiten a intervalos constantes de la frecuencia reducida. En las figuras 4.7, 4.8 y 4.9 se representan los FIT normalizados para modo I, modo II y modo III, respectivamente, para un rango de frecuencias $0 \leq k_T a \leq 5$. El valor del módulo de Poisson del material es $\nu = 0.25$. Se han empleado dos mallas de elementos de contorno (figuras 4.1 y 4.6), ya que al ser la longitud de onda λ , inversamente

proporcional a la frecuencia de excitación hay que disminuir el tamaño de los elementos situados en las proximidades del borde de la grieta, para que se cumpla la condición $L \leq \lambda/10$, siendo λ la menor longitud de onda. Los resultados se comparan con los obtenidos por distintos autores, Mal (1970), Nishimura y Kobayashi (1988) usando funciones B splines cúbicas para resolver sus EIC regularizadas y Zhang y Gross (1998) mediante una formulación no hipersingular de elementos de contorno en el dominio de la frecuencia partiendo de la integral de conservación elastodinámica armónica presentada por Zhang y Achenbach (1989) y Zhang y Gross (1992).

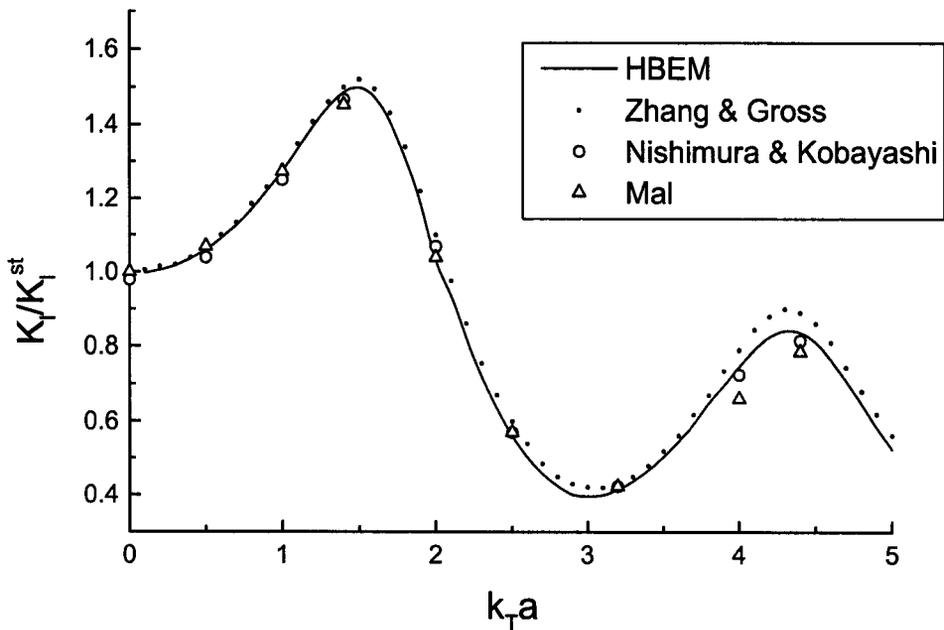


Figura 4.7: FIT normalizado modo I. Grieta circular en medio infinito.

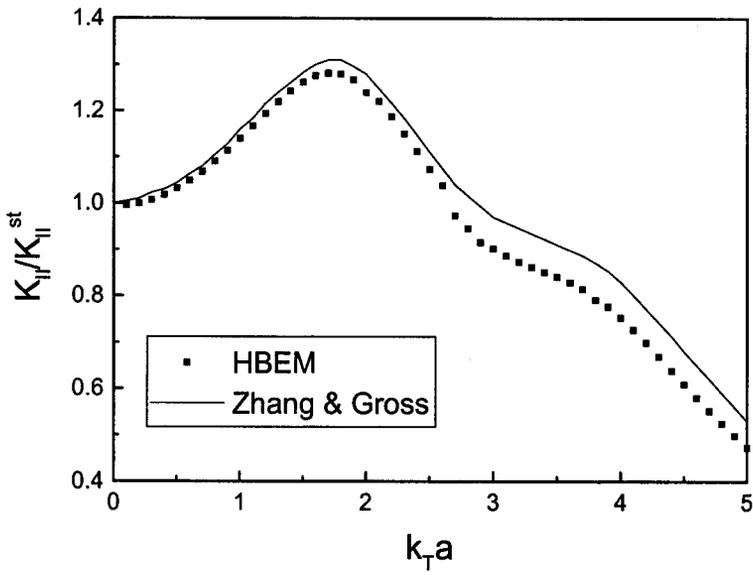


Figura 4.8: FIT normalizado modo II. Grieta circular en medio infinito.

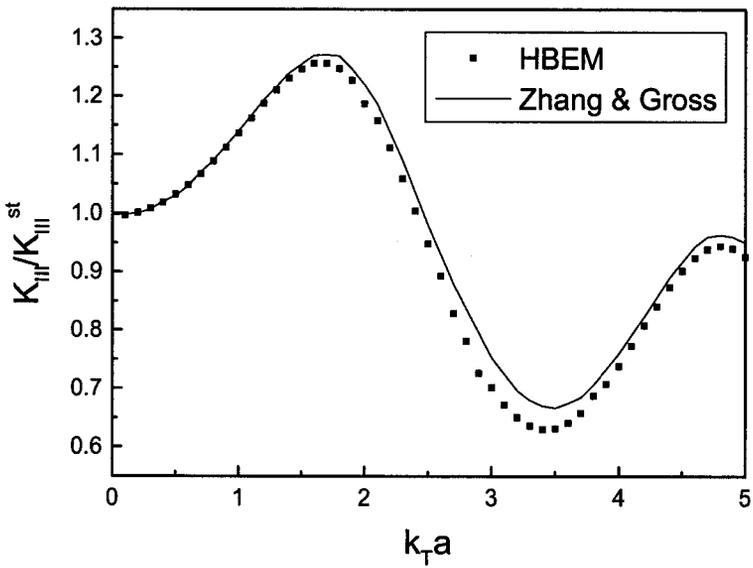


Figura 4.9: FIT normalizado modo III. Grieta circular en medio infinito.

Grieta elíptica

A continuación se considera una grieta elíptica de semieje mayor a y semieje menor b . La malla de elementos de contorno consta de 142 elementos (figura 4.10) y el módulo de Poisson del material es $\nu = 0.3$.

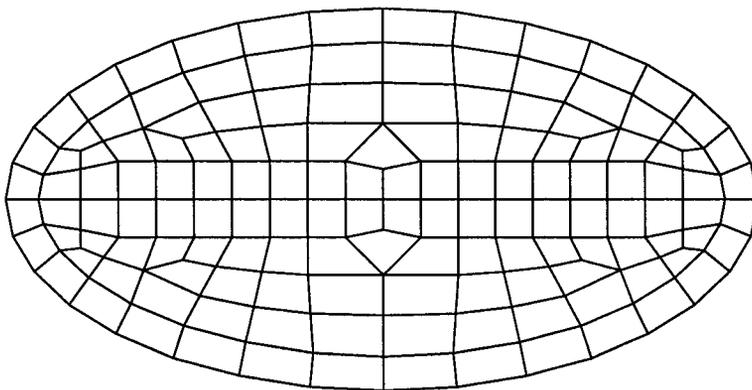


Figura 4.10: Discretización de elementos de contorno de una grieta elíptica en medio infinito ($a/b=2$).

En la figura 4.11 se muestran los valores del FIT modo I, normalizado con respecto al valor estático correspondiente, obtenidos cuando una onda plana longitudinal de presión actúa en la superficie de la grieta elíptica, para un rango normalizado de frecuencias $0 \leq k_T a \leq 5$. Los resultados para $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 90^\circ$, siendo θ el ángulo medido desde el semieje mayor al menor, se comparan de forma satisfactoria con los obtenidos por Nishimura y Kobayashi (1989) y Zhang y Gross (1998).

En las figuras 4.13 y 4.14 se representan los desplazamientos de apertura de grieta, normalizados con el valor estático en el centro de la grieta para el problema equivalente, frente a la distancia radial normalizada para cuatro valores de la frecuencia de excitación. La relación entre semiejes es $a/b = \sqrt{2}$ (figura 4.12) y el módulo de Poisson del material se toma $\nu = 0.25$.

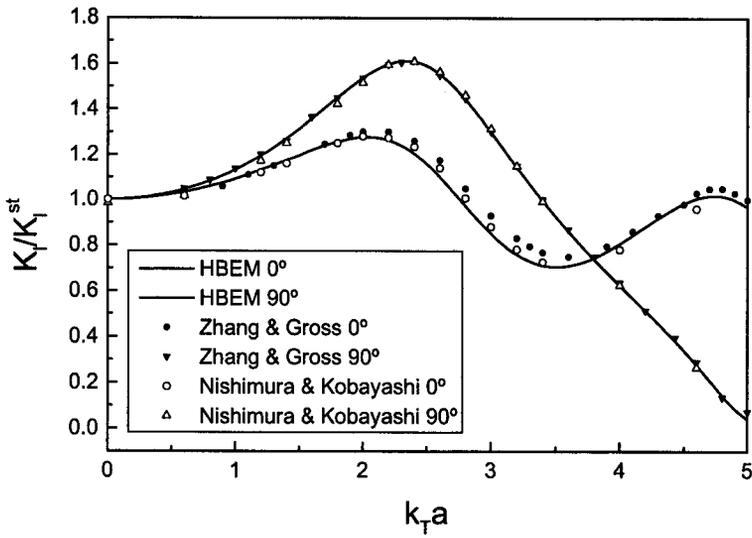


Figura 4.11: FIT normalizado modo I. Grieta elíptica en medio infinito.

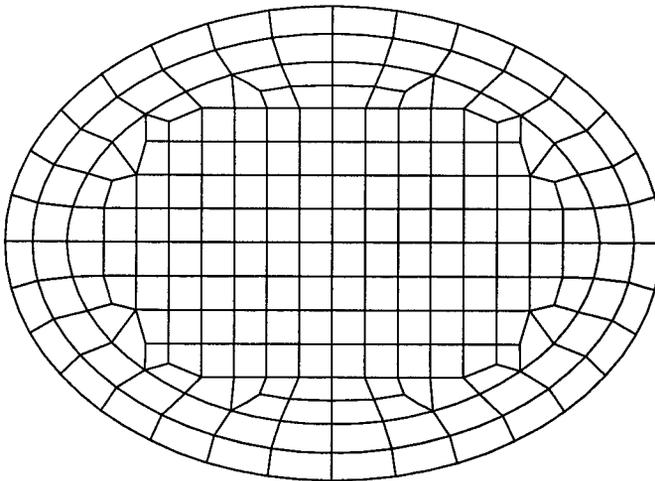


Figura 4.12: Discretización de elementos de contorno de una grieta elíptica en medio infinito ($a/b=\sqrt{2}$).

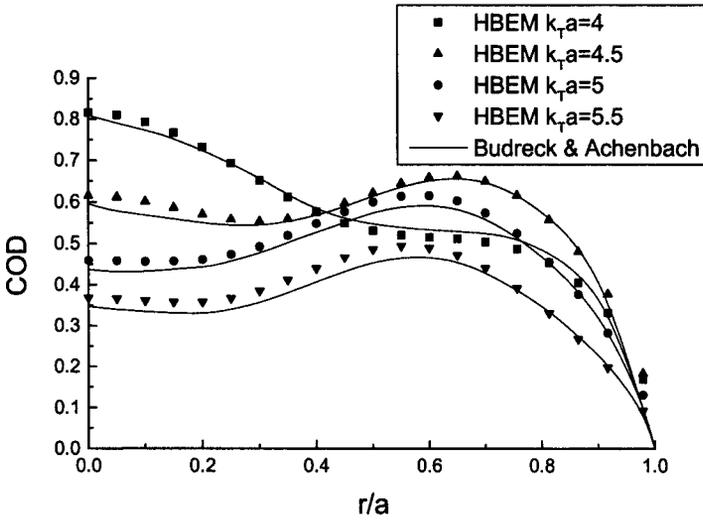


Figura 4.13: Desplazamiento de apertura de grieta normalizado. Semieje mayor de elipse en medio infinito.

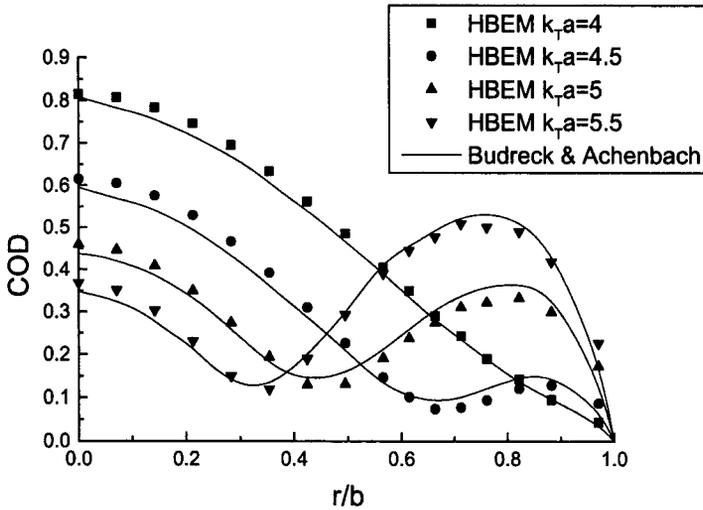


Figura 4.14: Desplazamiento de apertura de grieta normalizado. Semieje menor de elipse en medio infinito.

Los resultados se comparan con los obtenidos por Budreck y Achenbach (1988) para el mismo problema usando una forma regularizada de la EIC en tracciones. Las figuras 4.13 y 4.14 muestran que existe una gran dependencia entre la forma geométrica de la grieta y los desplazamientos de apertura de grieta; el DAG es claramente diferente de la solución que resulta para una grieta circular (figura 4.2).

Grieta cuadrada

Finalmente vamos a considerar una grieta cuadrada de lado $2a$. El módulo de Poisson del material se ha tomado $\nu = 0.2$. La discretización de elementos de contorno se muestra en la figura 4.15. La grieta se somete a una onda armónica plana incidiendo perpendicularmente a la superficie de la misma.

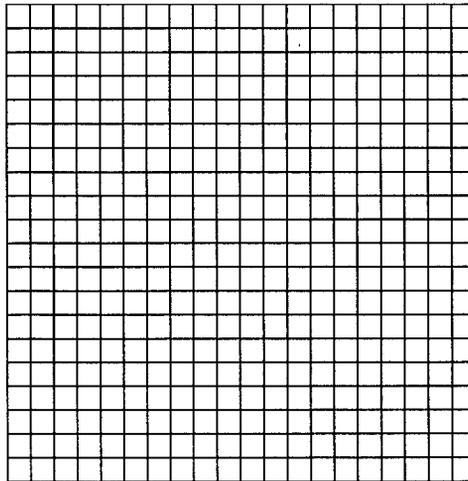


Figura 4.15: Discretización de elementos de contorno de una grieta cuadrada en medio infinito.

En las figuras 4.16 y 4.17 se representa la variación del FIT modo I normalizado, frente a X/a y $k_T a$ respectivamente, siendo X una coordenada con origen en el

centro de uno de sus lados y que recorre el frente de la grieta, y k_T la frecuencia normalizada.

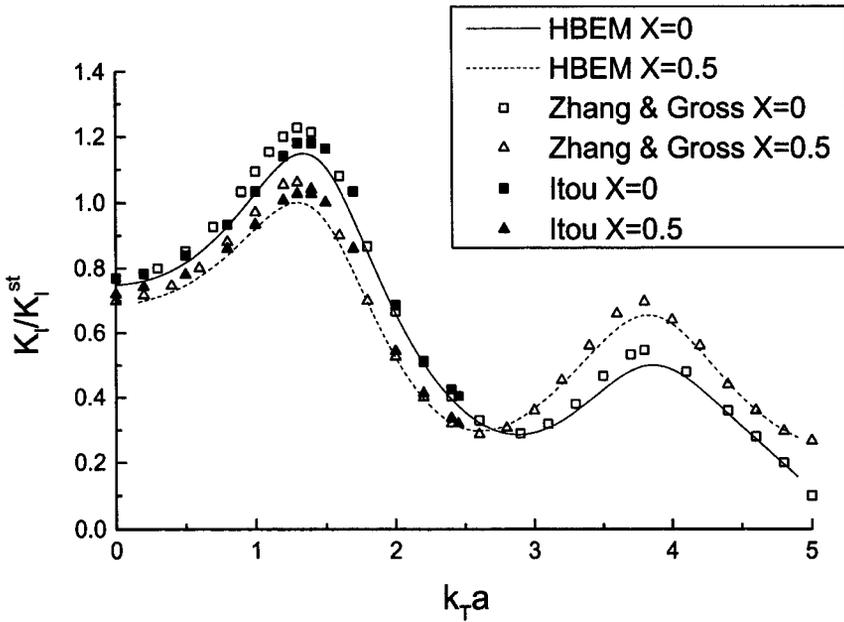


Figura 4.16: FIT normalizado modo I frente X/a . Grieta cuadrada en medio infinito.

Los resultados se comparan con los obtenidos por Zhang y Gross (1998), y por Itou (1980) usando la transformada de Fourier para plantear dos ecuaciones integrales duales que resuelve desarrollando los desplazamientos en la grieta con la serie doble de polinomios de Jacobi y aplicando el método de Schmidt.

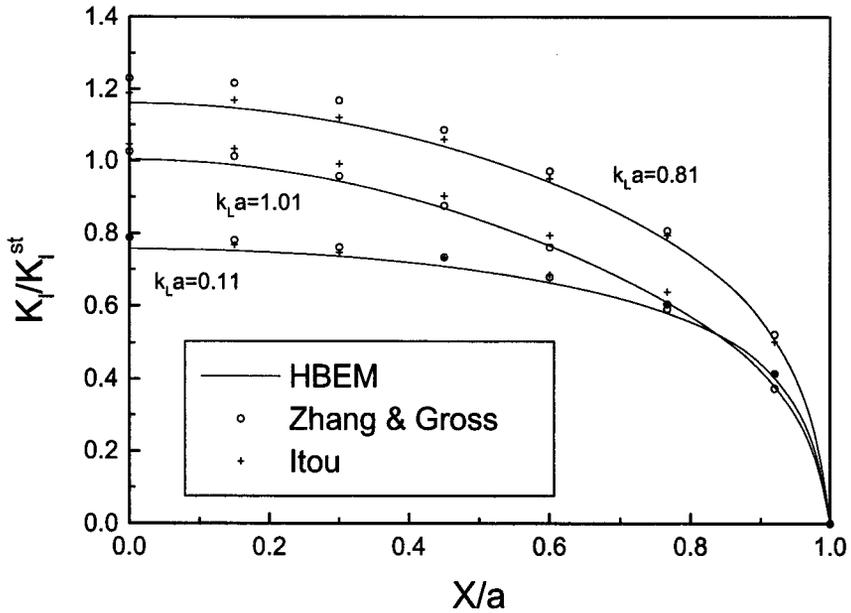


Figura 4.17: FIT normalizado modo I frente $k_L a$. Grieta cuadrada en medio infinito.

4.3.2 Dominios finitos. Grieta interna

Grieta circular en barra prismática

En primer lugar se estudia una barra de sección cuadrada que contiene una grieta circular centrada sometida a tracción uniforme aplicada en caras opuestas paralelas a la superficie de la grieta. La geometría y las condiciones de contorno del problema se muestran en la figura 4.18. El radio de la grieta es a , siendo $a/w=0.5$ y $h/w=2$.

Las propiedades mecánicas del material son: módulo de elasticidad transversal $\mu = 76.923$ GPa, módulo de Poisson $\nu = 0.2$ y densidad $\rho = 5000$ kg/m³. Además de las propiedades puramente elásticas del material, se considera un amortiguamiento interno utilizando un módulo de elasticidad transversal complejo $\mu_c = \mu(1 + 2\beta i)$, se han tomado para β los valores 0 y 0.01. En la figura 4.19 se muestra la malla

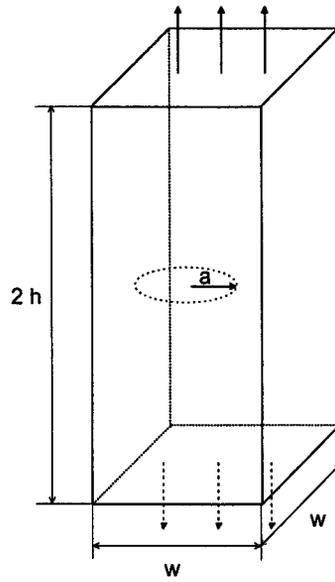


Figura 4.18: Grieta circular en barra prismática.

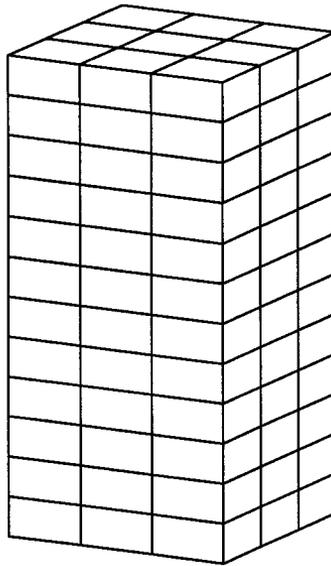


Figura 4.19: Discretización de elementos de contorno de barra prismática.

de elementos de contorno correspondiente el contorno exterior, la discretización de la superficie de la grieta circular puede verse en la figura 4.1.

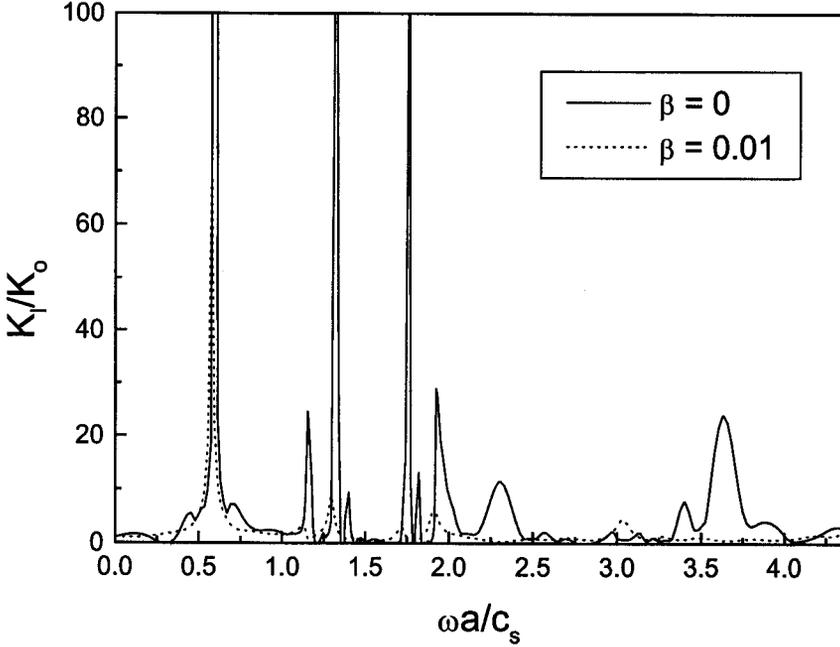


Figura 4.20: Variación del FIT modo I normalizado frente a la frecuencia adimensionalizada.

No se han encontrado en la literatura resultados en el dominio de la frecuencia para este problema, sin embargo si ha sido estudiado por otros autores en el dominio del tiempo, bien directamente o aplicando la transformada de Laplace. En la figura 4.20 se muestran los valores del FIT en modo I en el dominio de la frecuencia, normalizados con la solución analítica estática para una grieta circular en medio infinito. A frecuencias bajas las diferencias entre los resultados para el problema sin amortiguar y con amortiguamiento de 1% aparecen únicamente en los valores máximos de los picos. Sin embargo a medida que aumenta la frecuencia las diferencias entre ambas curvas se hacen más notables. Aplicando la transformada

de Fourier a los resultados para amortiguamiento de 1% se obtiene el FIT modo I normalizado en el dominio del tiempo. Puede verse que existe un buen acuerdo con las soluciones de Wen et al. (1998) usando una formulación dual de EC en el dominio de la frecuencia y aplicando la transformada de Laplace, y de Marrero (2001) usando una formulación clásica de EC en el dominio del tiempo.

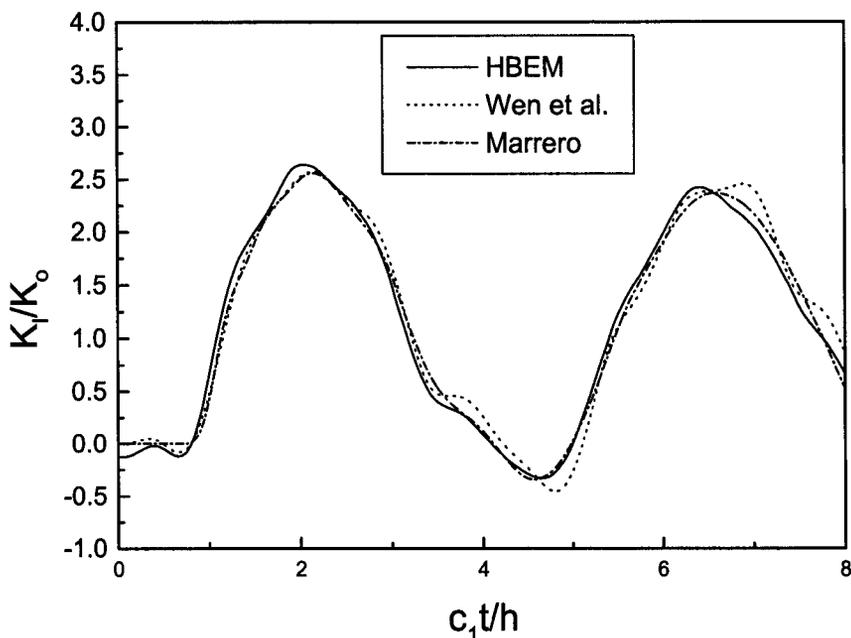


Figura 4.21: Variación del FIT modo I normalizado frente al tiempo adimensionalizado.

4.3.3 Dominios finitos. Grieta de borde

Grieta recta de borde

El siguiente ejemplo ha sido resuelto en dos dimensiones originalmente por Chen (1975). La geometría y condiciones de contorno se presentan en la figura 4.22, donde $a=4.8$ mm, $W=20$ mm, $H=40$ mm y $t=3.2$ mm. Para simular el proble-

ma bidimensional, se han aplicado condiciones de contorno de deformación plana impidiendo el desplazamiento normal de las superficies de la placa en las que la grieta intersecta la superficie exterior.

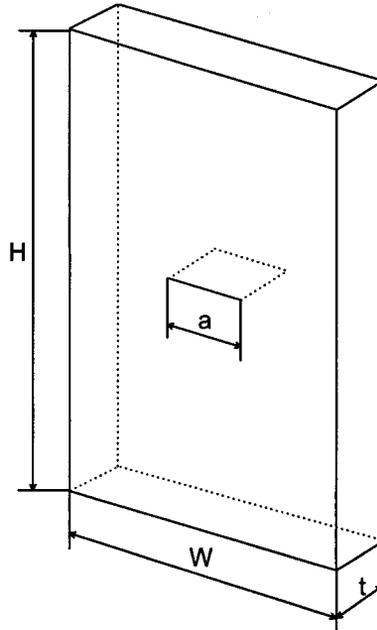


Figura 4.22: Grieta recta centrada en placa prismática.

Las propiedades mecánicas del material son: módulo de elasticidad transversal $\mu = 76.923$ GPa, módulo de Poisson $\nu = 0.3$ y densidad $\rho = 5000$ kg/m³. Al igual que en el problema anterior se ha considerado un amortiguamiento interno tomando $\beta = 0.01$. Dada la simetría del problema se discretiza únicamente la mitad del mismo (figura 4.23). La discretización de elementos de contorno se ha realizado teniendo en cuenta que la longitud de los elementos de la grieta y su cercanía sea menor que la décima parte de la longitud de las ondas s en el material de la placa ($l \leq \lambda/10$), siendo λ la longitud de onda de la mayor frecuencia estudiada.

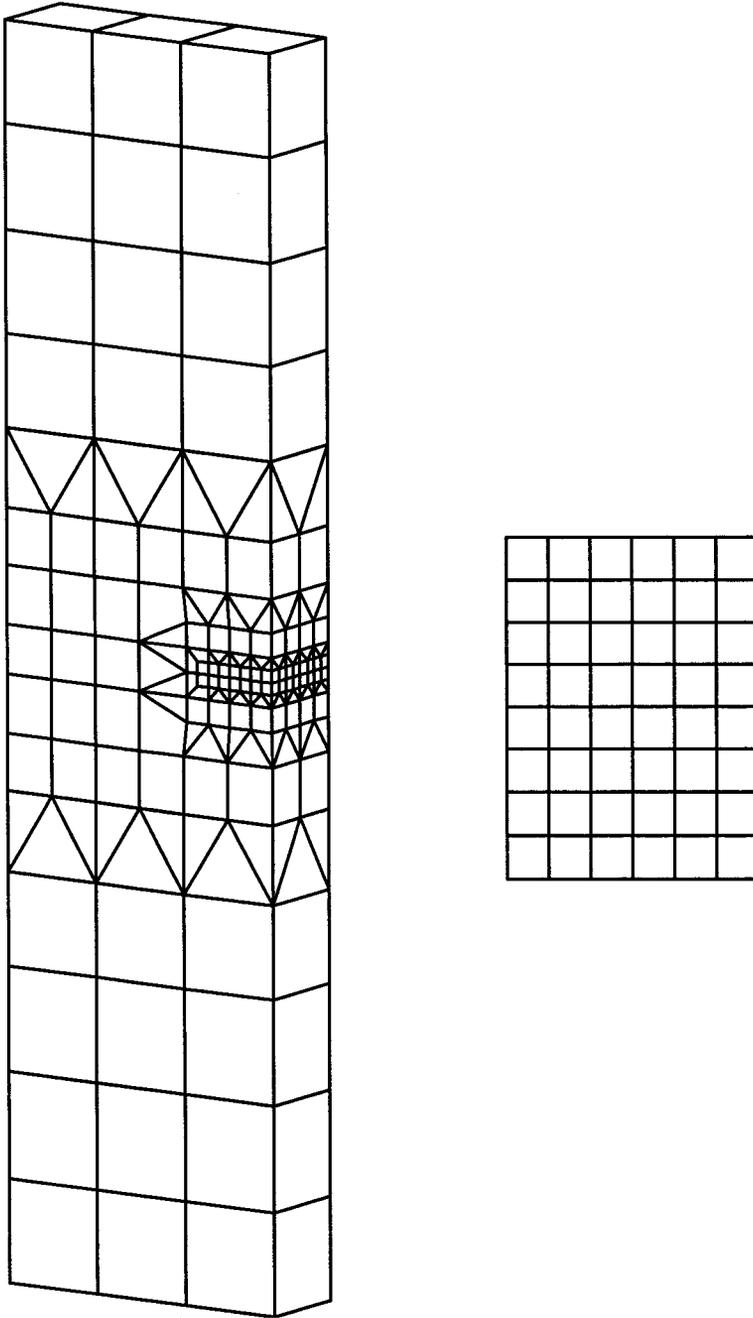


Figura 4.23: Discretización de elementos de contorno de grieta recta centrada en placa prismática.

El problema se estudia en primer lugar para una variación armónica de la carga aplicada en los extremos de la placa. En la figura 4.24 puede verse el FIT modo I, normalizado con respecto al valor estático del problema equivalente, frente a la frecuencia normalizada. Los resultados se comparan con los obtenidos por Chirino y Dominguez (1989) para el mismo problema en dos dimensiones. Se observa una ligera alteración de la frecuencia del primer pico, si bien ambas funciones de respuesta en frecuencia se encuentran en notable acuerdo.

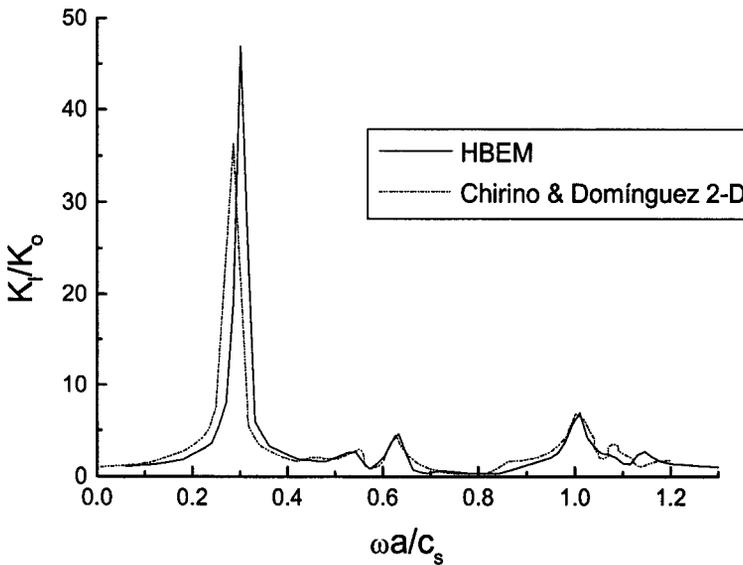


Figura 4.24: Variación del FIT modo I normalizado frente a la frecuencia adimensionalizada.

Dado que los resultados del problema resuelto por Chen (1975) corresponden a una carga de impacto, se ha aplicado la transformada de Fourier a los resultados anteriores para obtener la respuesta en el dominio del tiempo. Esta respuesta puede verse en la figura 4.25 donde también se recogen las obtenidas por Chen (1975) y Chirino y Dominguez (1989) para el problema 2-D. En todos los casos el FIT aparece normalizado con $p(t)\sqrt{\pi a}$.

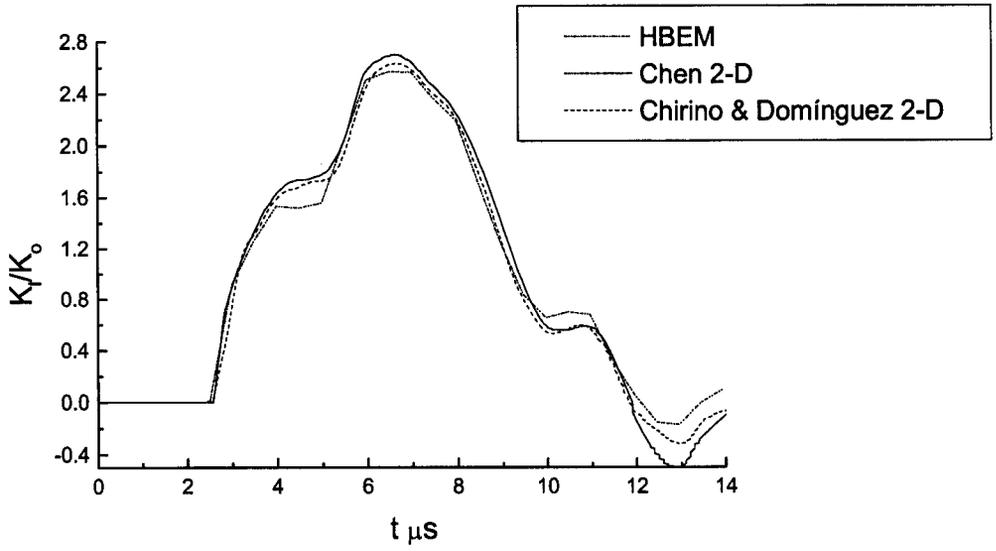


Figura 4.25: Variación del FIT modo I normalizado frente al tiempo adimensionalizado.

Capítulo 5

Elasticidad Estática. Medios Transversalmente Isótropos

5.1 Introducción

Los materiales transversalmente isótropos se caracterizan por presentar propiedades de isotropía en todos los planos normales a una dirección determinada. Entre ellos se cuentan aquellos cuya estructura cristalina es de tipo hexagonal, así como un importante número de materiales compuestos.

Como se ha puesto de manifiesto en anteriores capítulos, la implementación del MEC requiere del conocimiento de una solución fundamental que permite transformar las integrales de dominio en integrales sobre el contorno. En el caso que nos ocupa, esta solución viene definida por los campos de desplazamientos y tracciones en un dominio transversalmente isótropo infinito generados por la aplicación de una carga concentrada en un punto interno, para la EIC estándar en desplazamientos, y combinaciones de las derivadas de los anteriores, para la EIC en tracciones. Tan sólo existen en la bibliografía expresiones en forma explícita de soluciones fundamentales para problemas bidimensionales y para ciertos casos tridimensionales.

Rizzo y Shippy (1970) presentaron la primera aplicación del MEC a problemas anisótropos planos. Vogel y Rizzo (1973) propusieron una representación integral para problemas tridimensionales, aunque la técnica desarrollada posteriormente por Wilson y Cruse (1978) para la implementación numérica de una solución fundamental anisótropa expresada en forma de integrales de línea resultó de carácter más general. Fueron Pan y Chou (1976) quienes obtuvieron en forma explícita una solución fundamental estática para sólidos tridimensionales transversalmente isótropos.

En este capítulo, partiendo de la solución fundamental de Pan y Chou para los campos de desplazamientos y tracciones, se van a obtener expresiones explícitas para los núcleos de la EIC en tracciones. La aplicación de la técnica de regularización descrita en el capítulo 2 va a permitir integrar numéricamente dichos núcleos, que al igual que en el caso isótropo van a ser originalmente hipersingulares y fuertemente singulares. En el tercer apartado se tratan algunos aspectos generales de los campos de tensiones y desplazamientos en la cercanía del borde de una grieta tridimensional para materiales transversalmente isótropos.

Por último en el apartado cuarto se presentan resultados para algunos problemas de mecánica de la fractura estática, y se comparan bien con soluciones analíticas, caso de existir, o en su defecto numéricas, obtenidas por otros autores.

5.2 Ecuación integral de contorno en tracciones

El planteamiento de la ecuación integral de contorno, tanto en desplazamientos como en tracciones, para un punto interno y el posterior proceso de paso al límite en el contorno para obtener la representación integral para un punto suave del contorno, no depende como es sabido del tipo de material, siempre que se trate de un cuerpo con comportamiento elástico-lineal y homogéneo, y cuyo contorno sea una superficie regular (veáanse ecuaciones (3.1), (3.3) y (3.6)). Sin embargo las expresiones que gobiernan el comportamiento de un sólido, i.e. campos de

desplazamientos y tracciones, si son función del tipo de material.

Aparecen en la bibliografía distintas técnicas para la obtención de las soluciones fundamentales anisótropas estándar, cabe destacar el método desarrollado por Wang y Achenbach (1995) para problemas elastodinámicos en el dominio de la frecuencia (la solución estática se corresponde con la parte singular de la solución dinámica). Este método, basado en la transformada de Radon, proporciona los desplazamientos y tracciones en forma de integrales sobre la superficie de una esfera de radio unidad. Para que su implementación en un código de elementos de contorno resulte eficiente, debe emplearse la técnica desarrollada por Wilson y Cruse (1978) consistente en evaluar dicha solución numéricamente y generar así una base de datos en la cual interpolar. A pesar de que este método ha sido utilizado con éxito en numerosos trabajos, en esta tesis se ha optado por emplear la solución fundamental explícita obtenida por Pan y Chou (1976) mediante la consideración de tres potenciales que gobiernan los desplazamientos. Las expresiones resultantes son aplicables a todos los materiales transversalmente isótropos estables y, a diferencia de otras soluciones existentes, no presentan singularidad alguna en el eje de simetría del material.

Así, los núcleos de la solución fundamental de la EIC en tracciones, d_{lmk}^* y s_{lmk}^* , se han obtenido combinando linealmente las derivadas de los núcleos de la solución fundamental de la EIC estándar, u_{lk}^* y p_{lk}^* , de Pan y Chou.

Dada la equivalencia que existe entre los núcleos d_{lmk}^* y las componentes de las tracciones, i.e.

$$d_{lmk}^* = -p_{kml}^* \quad (5.1)$$

no se incluyen en este texto sus expresiones, tan solo mencionar que tal y como ocurre en el caso isótropo, el orden de la singularidad que aparece en estos términos es r^{-2} , cuando $r \rightarrow 0$.

Las expresiones correspondientes a los núcleos s_{lmk}^* se recogen en el Apéndice D de este documento. Análogamente, dichos términos son hipersingulares de orden r^{-3} , cuando $r \rightarrow 0$. Cabe destacar que estas expresiones se simplifican conside-

rablemente si se tiene en cuenta que la mayoría de las grietas objeto de estudio en la bibliografía, cuando se trata de materiales transversalmente isótropos, son planas y contenidas en el plano perpendicular al eje de simetría del material, i.e.

$$x_3 = n_1 = n_2 = N_1 = N_2 = 0$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = 0 \quad (5.2)$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_1^* = R_2^* = R_3^* = r$$

La técnica desarrollada en esta tesis es igualmente válida para otras configuraciones geométricas.

Con respecto a la representación de las tracciones y el proceso de regularización que es preciso aplicar para integrar numéricamente los términos hipersingulares y fuertemente singulares, caben hacerse las mismas consideraciones que las tenidas en cuenta para el caso isótropo.

De las ocho integrales que aparecen en la ecuación (3.9) vamos a centrarnos en los términos I_{lk} , J_{lhk} y K_{lk} de las integrales T_3 , T_5 y T_7 , respectivamente, ya que son los únicos que pueden incluir hipersingularidades o fuertes singularidades, y el tratamiento de las otras integrales, salvo algún álgebra, no presenta ninguna dificultad añadida. A diferencia del caso isótropo, no se han obtenido expresiones compactas de los núcleos s_{lmk}^* y por lo tanto tampoco para los términos I_{lk} , J_{lhk} y K_{lk} .

Aplicando el teorema de Stokes y algún álgebra a los términos de la integral T_3 de la ecuación (3.9), ésta se transforma en una suma de integrales de superficie regulares y débilmente singulares, integrales de línea sobre el contorno exterior del dominio y un término no acotado correspondiente a las integrales de línea sobre el contorno interior (huella de la semiesfera sobre el dominio), que se cancela con el término no acotado que se deriva de la integral T_4 . Los términos hipersingulares que aparecen son: $(r_{,l}r_{,k}n_m N_m)/r^3$ y $(n_l N_k)/r^3$, su transformación analítica puede verse en las ecuaciones (B.15) a (B.17) del Apéndice B. Así,

$$T_3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u_k(\mathbf{y}) \int_{\Gamma - e_\varepsilon} s_{lmk}^* N_m d\Gamma = u_k(\mathbf{y}) \{I_{lk} + f(\varepsilon)\} \quad (5.3)$$

siendo

$$\begin{aligned} I_{11} = & -C_{44} \left(\frac{\nu_3}{4\pi} + C_{44}(D_{61}D_{31} + D_{62}D_{32}) \right) \\ & \left[3 \int_{\Gamma} \frac{\frac{\partial r}{\partial n} r_{,m} N_m}{r^3} d\Gamma + \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} d\mathbf{l} \right] + \\ & 3C_{44}^2 (D_{61}D_{31} + D_{62}D_{32}) \left[5 \int_{\Gamma} \frac{r_{,1}^2 \frac{\partial r}{\partial n} r_{,m} N_m}{r^3} d\Gamma + \oint_{\partial\Gamma} r_{,1}^2 \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} d\mathbf{l} \right] + \\ & 3 \frac{C_{44}\nu_3}{4\pi} \left[5 \int_{\Gamma} \frac{r_{,2}^2 \frac{\partial r}{\partial n} r_{,m} N_m}{r^3} d\Gamma + \oint_{\partial\Gamma} r_{,2}^2 \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} d\mathbf{l} \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} I_{22} = & -C_{44} \left(\frac{\nu_3}{4\pi} + C_{44}(D_{61}D_{31} + D_{62}D_{32}) \right) \\ & \left[3 \int_{\Gamma} \frac{\frac{\partial r}{\partial n} r_{,m} N_m}{r^3} d\Gamma + \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} d\mathbf{l} \right] + \\ & 3C_{44}^2 (D_{61}D_{31} + D_{62}D_{32}) \left[5 \int_{\Gamma} \frac{r_{,2}^2 \frac{\partial r}{\partial n} r_{,m} N_m}{r^3} d\Gamma + \oint_{\partial\Gamma} r_{,2}^2 \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} d\mathbf{l} \right] + \\ & 3 \frac{C_{44}\nu_3}{4\pi} \left[5 \int_{\Gamma} \frac{r_{,1}^2 \frac{\partial r}{\partial n} r_{,m} N_m}{r^3} d\Gamma + \oint_{\partial\Gamma} r_{,1}^2 \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} d\mathbf{l} \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} I_{33} = & - (2C_{13}(\nu_1 A'_1 D_{51} + \nu_2 A'_2 D_{52}) - C_{33}(\nu_1^2 A_1 D_{51} + \nu_2^2 A_2 D_{52})) \\ & \left[3 \int_{\Gamma} \frac{\frac{\partial r}{\partial n} r_{,m} N_m}{r^3} d\Gamma + \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} d\mathbf{l} \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} I_{12} = & 3C_{44} \left(C_{44}(D_{41}D_{31} + D_{42}D_{32}) - \frac{\nu_3}{4\pi} \right) \\ & \left[5 \int_{\Gamma} \frac{r_{,1} r_{,2} \frac{\partial r}{\partial n} r_{,m} N_m}{r^3} d\Gamma + \oint_{\partial\Gamma} r_{,1} r_{,2} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} d\mathbf{l} \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$I_{21} = 3C_{44} \left(C_{44}(D_{61}D_{51} + D_{62}D_{52}) - \frac{\nu_3}{4\pi} \right) \left[5 \int_{\Gamma} \frac{r_{,1}r_{,2} \frac{\partial r}{\partial n} r_{,m} N_m}{r^3} d\Gamma + \oint_{\partial\Gamma} r_{,1}r_{,2} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} d\mathbf{l} \right] \quad (5.8)$$

para materiales cuyas propiedades elásticas cumplen que $P_{13} - C_{13} - 2C_{44} \neq 0$, y

$$I_{11} = -C_{44} \left(\frac{\nu_3 + \nu_1}{4\pi} + \nu_1 D_1 - D_2 \right) \left[3 \int_{\Gamma} \frac{\frac{\partial r}{\partial n} r_{,m} N_m}{r^3} d\Gamma + \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} d\mathbf{l} \right] + 3C_{44}(\nu_1 D_1 - D_2 + \frac{\nu_1}{4\pi}) \left[5 \int_{\Gamma} \frac{r_{,1}^2 \frac{\partial r}{\partial n} r_{,m} N_m}{r^3} d\Gamma + \oint_{\partial\Gamma} r_{,1}^2 \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} d\mathbf{l} \right] + 3 \frac{C_{44}\nu_3}{4\pi} \left[5 \int_{\Gamma} \frac{r_{,2}^2 \frac{\partial r}{\partial n} r_{,m} N_m}{r^3} d\Gamma + \oint_{\partial\Gamma} r_{,2}^2 \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} d\mathbf{l} \right] \quad (5.9)$$

$$I_{22} = -C_{44} \left(\frac{\nu_3 + \nu_1}{4\pi} + \nu_1 D_1 - D_2 \right) \left[3 \int_{\Gamma} \frac{\frac{\partial r}{\partial n} r_{,m} N_m}{r^3} d\Gamma + \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} d\mathbf{l} \right] + 3C_{44}(\nu_1 D_1 - D_2 + \frac{\nu_1}{4\pi}) \left[5 \int_{\Gamma} \frac{r_{,2}^2 \frac{\partial r}{\partial n} r_{,m} N_m}{r^3} d\Gamma + \oint_{\partial\Gamma} r_{,2}^2 \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} d\mathbf{l} \right] + 3 \frac{C_{44}\nu_3}{4\pi} \left[5 \int_{\Gamma} \frac{r_{,1}^2 \frac{\partial r}{\partial n} r_{,m} N_m}{r^3} d\Gamma + \oint_{\partial\Gamma} r_{,1}^2 \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} d\mathbf{l} \right] \quad (5.10)$$

$$I_{33} = D_2 \left(\frac{C_{13}}{\nu_1} + C_{33} \right) \left[3 \int_{\Gamma} \frac{\frac{\partial r}{\partial n} r_{,m} N_m}{r^3} d\Gamma + \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} d\mathbf{l} \right] \quad (5.11)$$

$$I_{12} = 3C_{44} \left(\nu_1 D_1 - D_2 + \frac{\nu_3 - \nu_1}{4\pi} \right) \left[5 \int_{\Gamma} \frac{r_{,1}r_{,2} \frac{\partial r}{\partial n} r_{,m} N_m}{r^3} d\Gamma + \oint_{\partial\Gamma} r_{,1}r_{,2} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} d\mathbf{l} \right] \quad (5.12)$$

$$I_{21} = I_{12} \quad (5.13)$$

para materiales cuyas propiedades elásticas cumplen que $P_{13}-C_{13}-2C_{44} = 0$.

Siendo

$$I_{13} = I_{23} = I_{31} = I_{32} = 0 \quad (5.14)$$

para ambos casos. Todas las integrales de superficie incluyen el término $\frac{\partial r}{\partial n}$, por lo tanto son nulas para la configuración geométrica que vamos a estudiar. Las integrales de línea se extienden sobre el borde $\partial\Gamma$ de la superficie Γ y son cero cuando Γ es un contorno cerrado. Las expresiones para D_i y D_{ij} pueden verse en el Apéndice D.

En los términos de la integral T_5 no existen hipersingularidades, los términos fuertemente singulares se transforman usando el teorema de Stokes para dar lugar a una suma de integrales de línea y de superficie que son al menos débilmente singulares (véase Apéndice B). Así,

$$T_5 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ u_{k,h}(\mathbf{y}) \int_{\Gamma - e_\epsilon} s_{lmk}^* N_m(x_h - y_h) \right\} d\Gamma = u_{k,h}(\mathbf{y}) J_{lhk} \quad (5.15)$$

siendo

$$\begin{aligned} J_{1h1} = & -C_{44} \left(\frac{\nu_3}{4\pi} + C_{44}(D_{61}D_{31} + D_{62}D_{32}) \right) \\ & \left[\int_{\Gamma} \frac{N_3 r_{,h}(n_3 - N_3 n_m N_m)}{r^2} d\Gamma + N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{e}_h \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} \right] + \\ & 3C_{44}^2 (D_{61}D_{31} + D_{62}D_{32}) \left[\int_{\Gamma} \frac{N_3 r_{,1}^2 r_{,h}(n_3 - N_3 n_m N_m)}{r^2} d\Gamma + \right. \\ & \left. \frac{1}{3} N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} r_{,1}^2 \frac{\mathbf{e}_h \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} + \delta_{h1} \frac{2}{3} N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{e}_h \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} \right] + \\ & 3 \frac{C_{44} \nu_3}{4\pi} \left[\int_{\Gamma} \frac{N_3 r_{,2}^2 r_{,h}(n_3 - N_3 n_m N_m)}{r^2} d\Gamma + \right. \\ & \left. \frac{1}{3} N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} r_{,2}^2 \frac{\mathbf{e}_h \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} + \delta_{h2} \frac{2}{3} N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{e}_h \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} \right] \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned}
J_{2h2} = & -C_{44} \left(\frac{\nu_3}{4\pi} + C_{44}(D_{61}D_{31} + D_{62}D_{32}) \right) \\
& \left[\int_{\Gamma} \frac{N_3 r_{,h}(n_3 - N_3 n_m N_m)}{r^2} d\Gamma + N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{e}_h \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} \right] + \\
& 3C_{44}^2 (D_{61}D_{31} + D_{62}D_{32}) \left[\int_{\Gamma} \frac{N_3 r_{,2}^2 r_{,h}(n_3 - N_3 n_m N_m)}{r^2} d\Gamma + \right. \\
& \left. \frac{1}{3} N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} r_{,2}^2 \frac{\mathbf{e}_h \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} + \delta_{h2} \frac{2}{3} N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{e}_h \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} \right] + \\
& 3 \frac{C_{44} \nu_3}{4\pi} \left[\int_{\Gamma} \frac{N_3 r_{,1}^2 r_{,h}(n_3 - N_3 n_m N_m)}{r^2} d\Gamma + \right. \\
& \left. \frac{1}{3} N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} r_{,1}^2 \frac{\mathbf{e}_h \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} + \delta_{h1} \frac{2}{3} N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{e}_h \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} \right] \quad (5.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{3h3} = & - (2C_{13}(\nu_1 A'_1 D_{51} + \nu_2 A'_2 D_{52}) - C_{33}(\nu_1^2 A_1 D_{51} + \nu_2^2 A_2 D_{52})) \\
& \left[\int_{\Gamma} \frac{N_3 r_{,h}(n_3 - N_3 n_m N_m)}{r^2} d\Gamma + N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{e}_h \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} \right] \quad (5.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{1h2} = & 3C_{44} \left(C_{44}(D_{41}D_{31} + D_{42}D_{32}) - \frac{\nu_3}{4\pi} \right) \\
& \left[\int_{\Gamma} \frac{N_3 r_{,1} r_{,2} r_{,h}(n_3 - N_3 n_m N_m)}{r^2} d\Gamma + \right. \\
& \left. \delta_{h1} \frac{1}{3} N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} r_{,1}^2 \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} + \delta_{h2} \frac{1}{3} N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} r_{,2}^2 \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} \right] \quad (5.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{2h1} = & 3C_{44} \left(C_{44}(D_{61}D_{51} + D_{62}D_{52}) - \frac{\nu_3}{4\pi} \right) \\
& \left[\int_{\Gamma} \frac{N_3 r_{,1} r_{,2} r_{,h}(n_3 - N_3 n_m N_m)}{r^2} d\Gamma + \right. \\
& \left. \delta_{h1} \frac{1}{3} N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} r_{,1}^2 \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} + \delta_{h2} \frac{1}{3} N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} r_{,2}^2 \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} \right] \quad (5.20)
\end{aligned}$$

para materiales cuyas propiedades elásticas cumplen que $P_{13}-C_{13}-2C_{44} \neq 0$, y

$$\begin{aligned}
 J_{1h1} = & -C_{44} \left(\frac{\nu_3 + \nu_1}{4\pi} + \nu_1 D_1 - D_2 \right) \\
 & \left[\int_{\Gamma} \frac{N_3 r_{,h} (n_3 - N_3 n_m N_m)}{r^2} d\Gamma + N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{e}_h \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} \right] + \\
 & 3C_{44} \left(\nu_1 D_1 - D_2 + \frac{\nu_1}{4\pi} \right) \left[\int_{\Gamma} \frac{N_3 r_{,1}^2 r_{,h} (n_3 - N_3 n_m N_m)}{r^2} d\Gamma + \right. \\
 & \left. \frac{1}{3} N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} r_{,1}^2 \frac{\mathbf{e}_h \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} + \delta_{h1} \frac{2}{3} N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{e}_h \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} \right] + \\
 & 3 \frac{C_{44} \nu_3}{4\pi} \left[\int_{\Gamma} \frac{N_3 r_{,2}^2 r_{,h} (n_3 - N_3 n_m N_m)}{r^2} d\Gamma + \right. \\
 & \left. \frac{1}{3} N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} r_{,2}^2 \frac{\mathbf{e}_h \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} + \delta_{h2} \frac{2}{3} N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} \right] \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{2h2} = & -C_{44} \left(\frac{\nu_3 + \nu_1}{4\pi} + \nu_1 D_1 - D_2 \right) \\
 & \left[\int_{\Gamma} \frac{N_3 r_{,h} (n_3 - N_3 n_m N_m)}{r^2} d\Gamma + N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{e}_h \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} \right] + \\
 & 3C_{44} \left(\nu_1 D_1 - D_2 + \frac{\nu_1}{4\pi} \right) \left[\int_{\Gamma} \frac{N_3 r_{,1}^2 r_{,h} (n_3 - N_3 n_m N_m)}{r^2} d\Gamma + \right. \\
 & \left. \frac{1}{3} N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} r_{,1}^2 \frac{\mathbf{e}_h \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} + \delta_{h1} \frac{2}{3} N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{e}_h \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} \right] + \\
 & 3 \frac{C_{44} \nu_3}{4\pi} \left[\int_{\Gamma} \frac{N_3 r_{,2}^2 r_{,h} (n_3 - N_3 n_m N_m)}{r^2} d\Gamma + \right. \\
 & \left. \frac{1}{3} N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} r_{,2}^2 \frac{\mathbf{e}_h \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} + \delta_{h2} \frac{2}{3} N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{e}_h \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} \right] \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{3h3} = & D_2 \left(\frac{C_{13}}{\nu_1} + C_{33} \right) \\
 & \left[\int_{\Gamma} \frac{N_3 r_{,h} (n_3 - N_3 n_m N_m)}{r^2} d\Gamma + N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{e}_h \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} \right] \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

$$J_{1h2} = 3C_{44} \left(\nu_1 D_1 - D_2 + \frac{\nu_3 - \nu_1}{4\pi} \right) \left[\int_{\Gamma} \frac{N_3 r_{,1} r_{,2} r_{,h} (n_3 - N_3 n_m N_m)}{r^2} d\Gamma + \delta_{h1} \frac{1}{3} N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} r_{,1}^2 \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} + \delta_{h2} \frac{1}{3} N_3^2 \oint_{\partial\Gamma} r_{,2}^2 \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}}{r} d\mathbf{l} \right] \quad (5.24)$$

$$J_{2h1} = J_{1h2} \quad (5.25)$$

para materiales cuyas propiedades elásticas cumplen que $P_{13} - C_{13} - 2C_{44} = 0$.

Siendo

$$J_{1h3} = J_{2h3} = J_{3h1} = J_{3h2} = 0 \quad (5.26)$$

para ambos casos.

Tampoco existen hipersingularidades en los términos de la integral T_7 .

$$T_7 = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ p_k(\mathbf{y}) \int_{\Gamma - e_\varepsilon} d_{lmk}^* N_m d\Gamma \right\} = p_k(\mathbf{y}) K_{lk} \quad (5.27)$$

Los términos K_{lk} son no nulos únicamente para $l \neq k$ e igual a 3. Las singularidades fuertes que aparecen son del tipo $r_{,i} N_3 / r^2$ ($i=1,2$), que se regularizan aplicando el teorema de Stokes como sigue:

$$\frac{r_{,i} N_3}{r^2} = \frac{r_{,i} N_3 (1 - n_m N_m)}{r^2} + N_3 \nabla \times \left(\frac{1}{r} \mathbf{e}_i \times \mathbf{N} \right) \cdot \mathbf{n} + N_3 \frac{N_m r_{,m} n_i}{r^2} \quad (5.28)$$

dando lugar a integrales de línea y términos débilmente singulares que se integran numéricamente.

La ecuación integral de contorno en tracciones general en términos únicamente de integrales regulares o débilmente singulares, válida para contornos abiertos o cerrados, contornos planos o curvos, con las grietas contenidas en un plano perpendicular al eje de simetría del material, tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} p_l(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} \{ s_{ilmk}^* N_m [u_k(\mathbf{x}) - u_k(\mathbf{y}) - u_{k,h}(\mathbf{y})(x_h - y_h)] - \\ & d_{ilmk}^* N_m [p_k(\mathbf{x}) - p_k(\mathbf{y})] \} d\Gamma + \\ & [u_k(\mathbf{y}) I_{lk} + u_{k,h}(\mathbf{y}) J_{lhk} + p_k(\mathbf{y}) K_{lk}] = 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

puede ser discretizada de forma directa usando una formulación de elementos de contorno.

5.3 Factor de intensidad de tensión estático para materiales transversalmente isótropos

De acuerdo con los trabajos de Kassir y Sih (1968) y (1975), el orden de la singularidad de las tensiones en las cercanías de grietas tridimensionales continúa siendo \sqrt{r} para sólidos transversalmente isótropos y los factores de intensidad de tensión K_J ($J=I, II, III$) para grietas contenidas en un plano perpendicular al eje de simetría del material se pueden definir en términos de la distribución de tensiones en la forma habitual

$$\begin{aligned} K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} (\sigma_{zz})_{\theta=0} \\ K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} (\sigma_{nz})_{\theta=0} \\ K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} (\sigma_{tz})_{\theta=0} \end{aligned} \quad (5.30)$$

donde las componentes de las tensiones se refieren a un sistema de coordenadas local con origen en el punto arbitrario P situado en el frente de la grieta donde se calcula el FIT (figura 5.1). El eje n está situado a lo largo de la normal al frente de la grieta, el eje t a lo largo de la tangente al frente de la grieta, y el eje z perpendicular al plano de la grieta.

Las expresiones de las componentes de los desplazamientos y tensiones en las proximidades del frente de una grieta para estados de carga simétricos y anti-simétricos al plano de la grieta, en función de los FIT, las constantes elásticas del material y las coordenadas polares r y θ , pueden verse en Kassir y Sih (1968).

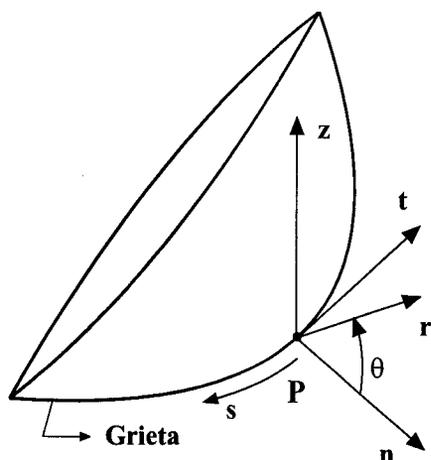


Figura 5.1: Sistema de coordenadas local de referencia para una grieta tridimensional.

La técnica seguida para la obtención numérica de los FIT es la misma que se ha aplicado en el capítulo 3 para materiales isótropos, aunque las expresiones en términos de los desplazamientos de apertura de grieta en los nodos a un cuarto son las siguientes

$$\begin{aligned}
 K_I &= \sqrt{\frac{\pi}{2L}} \Delta u_z \frac{\beta_1}{\frac{m_1}{1+m_1} - \frac{m_2}{1+m_2}} \\
 K_{II} &= \sqrt{\frac{\pi}{2L}} \Delta u_n \frac{C_{44} (\sqrt{n_2} - \sqrt{n_1}) (1+m_1)(1+m_2)}{(m_2 - m_1) \sqrt{n_1 n_2}} \\
 K_{III} &= \sqrt{\frac{\pi}{2L}} \Delta u_t \frac{C_{44}}{\sqrt{n_3}}
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

siendo n_1 , n_2 , n_3 , β_1 , m_1 y m_2 función de las constantes elásticas del material. Así, n_1 y n_2 son las soluciones de la ecuación característica

$$C_{11} C_{44} n^2 + [C_{13}(C_{13} + 2C_{44}) - C_{11} C_{33}] + C_{33} C_{44} = 0 \tag{5.32}$$

y

$$m_j = \frac{(C_{13} + C_{44}) n_j}{C_{33} - C_{44} n_j}, \quad j = 1, 2 \tag{5.33}$$

$$\beta_1 = C_{44} (\sqrt{n_1} - \sqrt{n_2}) \quad (5.34)$$

$$n_3 = \frac{2C_{44}}{C_{11} - C_{12}} \quad (5.35)$$

5.4 Resultados numéricos

El número de problemas de sólidos transversalmente isótropos fisurados estudiados por otros autores es muy reducido si se compara con el caso isótropo. En este apartado se presentan resultados para dominios tanto finitos como infinitos y distintas geometrías de grietas, contenidas en el plano perpendicular al eje de simetría del material. Únicamente existen soluciones analíticas para grietas inmersas en dominios infinitos.

5.4.1 Dominios infinitos

Grieta circular

Vamos a estudiar el mismo ejemplo numérico analizado en el capítulo 3 y para el que también existe una solución analítica en materiales transversalmente isótropos (véase Kassir y Sih, 1975). La malla de elementos de contorno empleada en la discretización de la grieta es la que se muestra en la figura 4.1. Se considera un material composite grafito-epoxy de propiedades elásticas

$$\begin{aligned} C_{11} &= 13.92 \text{ GPa} \\ C_{33} &= 160.7 \text{ GPa} \\ C_{12} &= 6.92 \text{ GPa} \\ C_{13} &= 6.44 \text{ GPa} \\ C_{44} &= 7.07 \text{ GPa} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Se van a aplicar sobre la grieta dos estados de carga. En primer lugar se somete a presión interna uniforme produciendo FIT en modo I, el cual resulta independiente

de las propiedades del medio considerado. El valor analítico normalizado viene dado por

$$F_I = \frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}} = \frac{2}{\pi} \quad (5.37)$$

El factor de intensidad de tensión correspondiente al modo I se evalúa a partir de la apertura de grieta, en dirección normal a la superficie de la misma, de los nodos a un cuarto situados en la primera fila de nodos a partir del borde de la grieta (ecuación (5.31)). En la tabla 5.1 se comparan los resultados obtenidos para el FIT normalizado en modo I utilizando la formulación hipersingular, con la solución analítica de Kassir y Sih (1975) y los resultados de Sáez et al. (1997) usando una formulación estándar de elementos de contorno, con elementos a un cuarto singulares y a un cuarto a ambos lados del borde de la grieta para la discretización del dominio.

	F_I
HBEM	0.633
Saez et al.	0.643 (t)
	0.634 (u)
Kassir y Sih	0.637

Tabla 5.1: FIT normalizado modo I. Grieta circular en medio infinito.

En segundo lugar se aplica una tracción cortante sobre la superficie de la grieta que nos proporciona los FIT en modo II y modo III. A partir de las expresiones de la ecuación (5.31), siendo Δu_n y Δu_t los desplazamientos relativos de los nodos a un cuarto en las direcciones perpendicular y tangencial al frente de la grieta y contenidos en el plano de la misma, respectivamente, se obtienen los FIT en modos II y III que se comparan, igual que anteriormente, con los valores analíticos de Kassir y Sih (1975) y los obtenidos por Sáez et al. (1997) a partir de las tracciones en los nodos a un cuarto singulares.

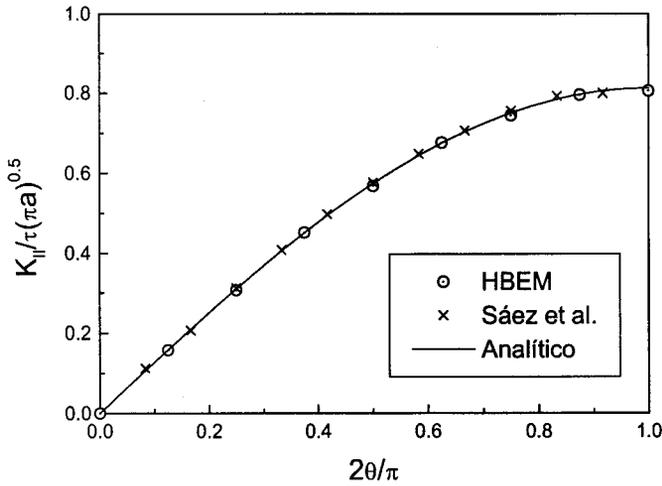


Figura 5.2: FIT modo II. Grieta circular en medio infinito.

La solución analítica para los FIT normalizados en modos II y III viene dada para materiales isotrópicos por

$$\begin{aligned}
 F_{II} &= \frac{K_{II}}{\tau\sqrt{\pi a}} = \frac{4\text{sen}\theta}{(2-\nu)\pi} \\
 F_{III} &= \frac{K_{III}}{\tau\sqrt{\pi a}} = \frac{4(1-\nu)\text{cos}\theta}{(2-\nu)\pi}
 \end{aligned}
 \tag{5.38}$$

siendo θ el ángulo polar medido respecto del eje perpendicular al que se aplica la carga cortante sobre la superficie de la grieta. Para materiales transversalmente isotrópicos basta sustituir ν por $1-N^*$ en las expresiones anteriores, donde

$$N^* = \frac{(m_2 - m_1)/\sqrt{n_3}}{(1 + m_1)(1 + m_2) \left(\frac{1}{\sqrt{n_1}} - \frac{1}{\sqrt{n_2}} \right)}
 \tag{5.39}$$

Los FIT normalizados obtenidos con la formulación mixta aquí desarrollada, a partir de los valores nodales de los desplazamientos, se representan en las figuras 5.2 y 5.3 frente al ángulo θ , que indica la posición sobre el vértice de la grieta. El acuerdo con la solución analítica resulta muy bueno en todos los casos.

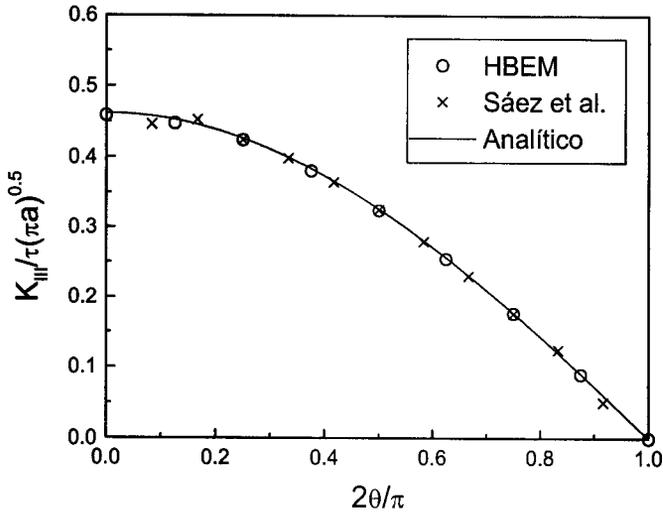


Figura 5.3: FIT modo III. Grieta circular en medio infinito.

Grieta elíptica

La solución analítica para los FIT de una grieta elíptica inmersa en un dominio infinito transversalmente isótropo puede encontrarse en el trabajo de Kassir y Sih (1975). Las propiedades del dominio elástico son las mismas que en el problema anterior, siendo la relación entre los semiejes mayor y menor 2.5 (figura 5.4). La malla de elementos de contorno para la discretización de la superficie de la grieta que se muestra en la figura 5.5 es la misma que se empleó para el caso isótropo.

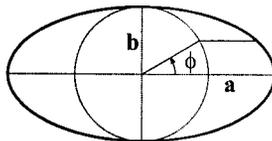


Figura 5.4: Geometría de grieta elíptica.

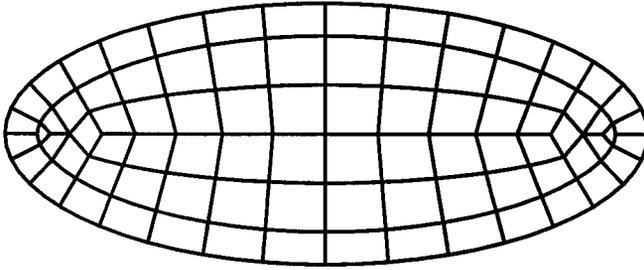


Figura 5.5: Discretización de elementos de contorno de una grieta elíptica en medio infinito.

Se obtienen resultados para los dos estados de carga considerados en el ejemplo anterior: tracción uniforme sobre las superficies de la grieta, lo que produce FIT en modo I; y tracción cortante sobre los labios de la grieta en dos direcciones opuestas a lo largo del semieje mayor de la elipse, lo que da lugar a FIT en modos II y III.

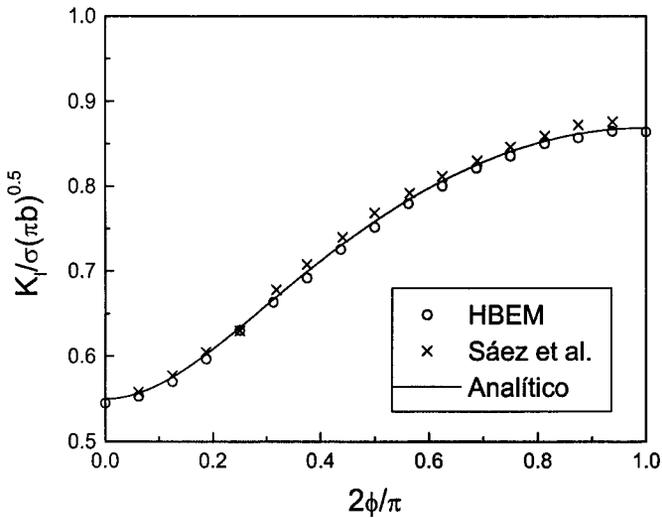


Figura 5.6: FIT modo I. Grieta elíptica en medio infinito.

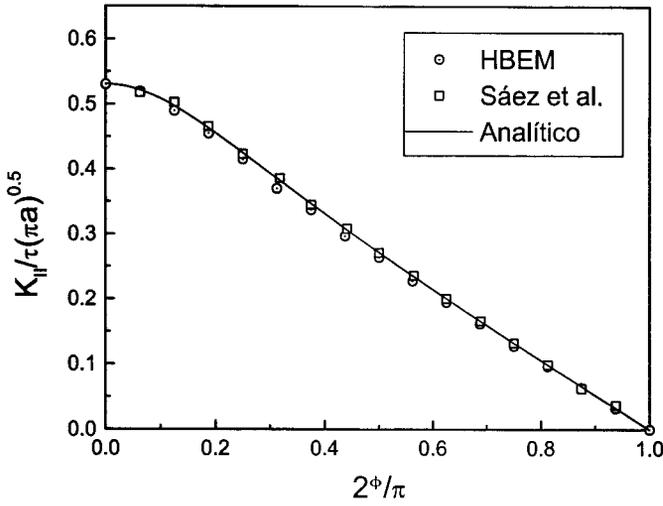


Figura 5.7: FIT modo II. Grieta elíptica en medio infinito.

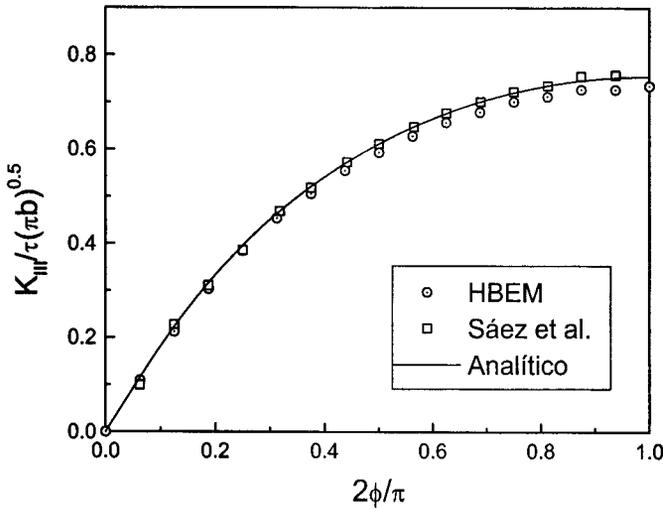


Figura 5.8: FIT modo III. Grieta elíptica en medio infinito.

Los FIT, para diferentes posiciones a lo largo del vértice de la grieta, obtenidos a partir de los valores nodales de los DAG mediante las ecuaciones (5.31) se com-

paran con los analíticos de Kassir y Sih (1975) y los resultados numéricos de Sáez et al. (1997). En las figuras 5.6, 5.7 y 5.8, se muestran los resultados correspondientes a la grieta cargada en modos I, II y III, respectivamente. La posición a lo largo del vértice de la grieta se define por el ángulo ϕ medido con respecto al semieje mayor de la elipse (figura 5.4). En todos los casos existe un buen acuerdo entre los resultados obtenidos para un material grafito-epoxy y las soluciones analíticas.

5.4.2 Dominios finitos. Grieta interna

Dada la escasez de resultados para problemas con geometrías de este tipo y materiales transversalmente isótropos -conocidos por este autor-, algunos de los resultados que se presentan en este apartado son inéditos.

Cuando el dominio que se estudia es finito y la grieta es interior, se escribe la EIC en tracciones para los nodos de la grieta, usando el método de colocación múltiple para aquellos que pertenecen a más de un elemento, y la EIC clásica para los nodos del contorno exterior.

Grieta circular en barra cilíndrica

Con este ejemplo se pretende poner de manifiesto el efecto de contornos exteriores sobre el valor del FIT, se comparan los resultados para dos materiales transversalmente isótropos, grafito-epoxy y composite laminado, con los obtenidos en el capítulo 3 para un material isótropo. En la figura 5.9 puede verse la geometría del problema, la altura total del cilindro es dos veces su diámetro. Las propiedades elásticas para el material grafito-epoxy pueden verse en la ecuación (5.36) y para

el composite laminado

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= 5.37 \text{ GPa} \\
 C_{33} &= 251.168 \text{ GPa} \\
 C_{12} &= 1.34 \text{ GPa} \\
 C_{13} &= 3.35 \text{ GPa} \\
 C_{44} &= 5 \text{ GPa}
 \end{aligned}
 \tag{5.40}$$

El cilindro está sometido a tracción uniforme, σ , aplicada en sus caras superior e inferior. La discretización de elementos de contorno para la grieta circular es la misma que se ha utilizado para medio infinito (figura 4.1), la del contorno exterior se muestra en la figura 5.10.

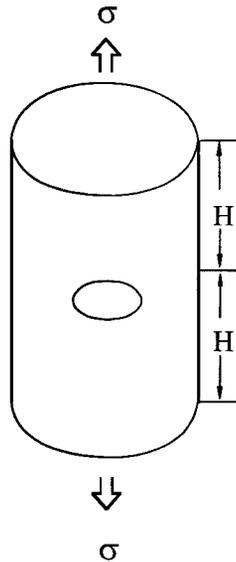


Figura 5.9: Geometría de cilindro con grieta circular simétrica.

En la figura 5.11 puede verse como disminuye el valor del FIT en modo I a medida que aumenta la relación entre los radios del cilindro y de la grieta.

Se normaliza respecto al valor obtenido para una grieta circular inmersa en un dominio infinito con las propiedades elásticas de cada material.

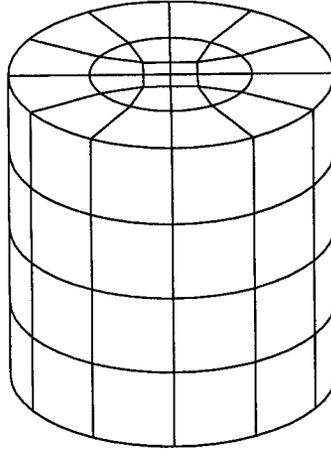


Figura 5.10: Discretización de elementos de contorno de barra cilíndrica.

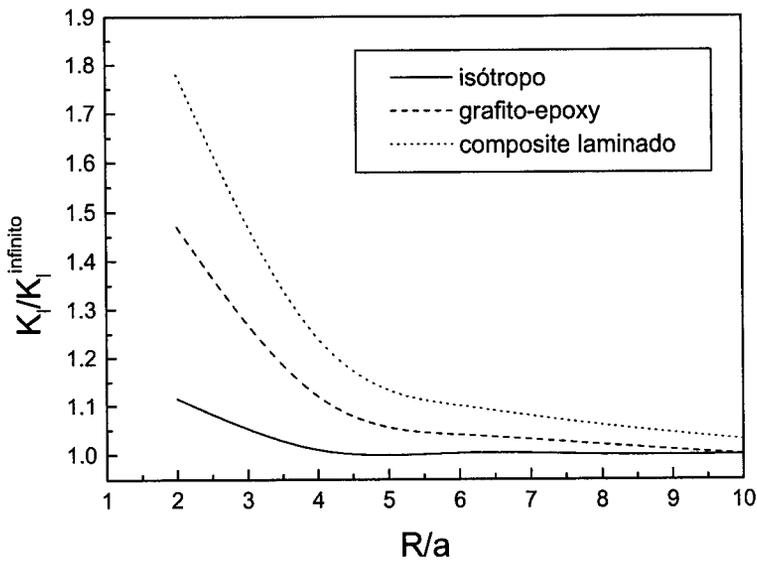


Figura 5.11: Variación FIT modo I. Grieta circular en barra cilíndrica.

Grieta elíptica en el interior de barra prismática

En el capítulo 3 se destacó el creciente interés manifestado por parte de investigadores e ingenieros hacia los problemas de grietas contenidas en placas. De forma análoga al estudio realizado para materiales isótropos, vamos a evaluar el efecto de un borde libre próximo a una grieta interna sobre el campo de tensiones y desplazamientos en las proximidades de esa grieta. Se considera una grieta elíptica de semieje mayor a y semieje menor b (figura 3.22), contenida en una placa de espesor finito y situada a una distancia arbitraria h de uno de los bordes. Tanto la geometría de la pieza como la discretización de EC coinciden con las descritas en el apartado 3.4.2..

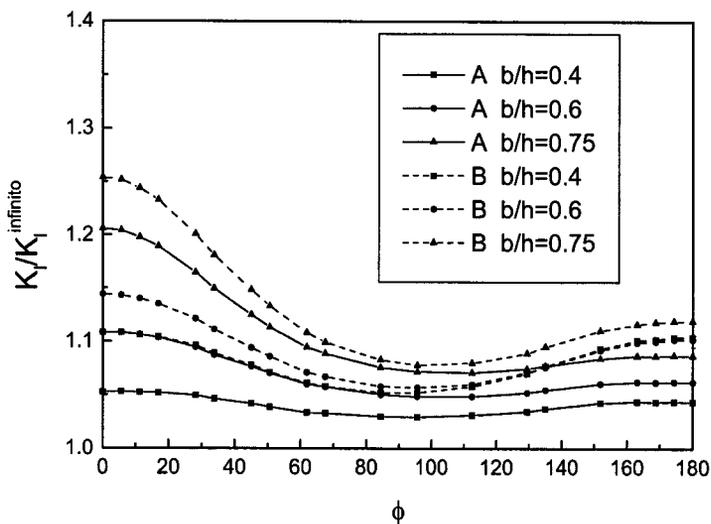


Figura 5.12: FIT normalizado modo I. Grieta elíptica en el interior de barra prismática.

En la figura 5.12 se muestran los valores normalizados del FIT en modo I para tres valores de h ($b/h= 0.4, 0.6$ y 0.75). La variación del FIT respecto al ángulo ϕ (figura 3.8), es similar a la que se observa en la figura 3.24 para un material isótropo. No podemos establecer otra comparación ya que no conoce el autor

resultados en la bibliografía para este problema. Las propiedades elásticas de los materiales pueden verse en el apartado anterior (A: grafito-epoxy y B: composite laminado).

También es interesante obtener la variación del valor del FIT para una grieta centrada en una placa respecto al espesor de la misma. Se considera una grieta elíptica de relación entre semiejes $b/a=0.5$, siendo $a=1.25$ (figura 4.10), contenida en una placa de dimensiones 10×10 y espesor variable $2d$. La malla de elementos de contorno del dominio exterior es similar a la que se muestra en la figura 3.23 aunque refinada en ambas caras opuestas.

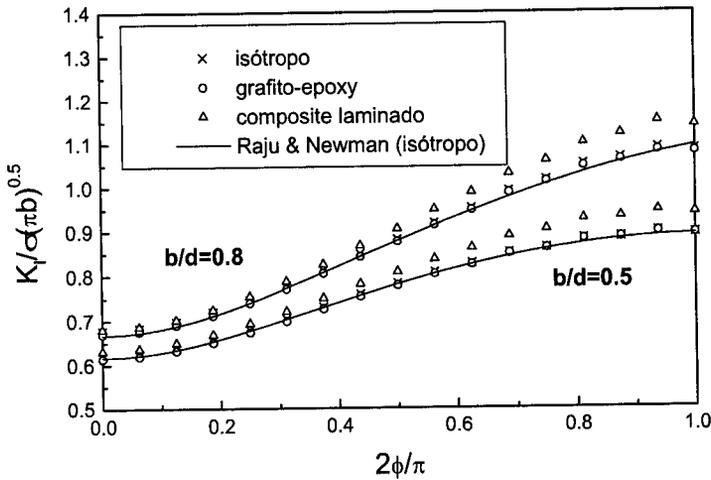


Figura 5.13: FIT normalizado modo I. Grieta elíptica centrada en barra prismática.

En la figura 5.13 se comparan los valores del FIT en modo I obtenidos aquí para dos materiales transversalmente isotrópicos, grafito-epoxy y composite laminado, y uno isotrópico de propiedades elásticas: módulo de Poisson $\nu = 0.3$ y módulo transversal $\mu = 10^6 Pa$, con los obtenidos por Raju y Newman (1977) para la misma configuración geométrica y un material isotrópico de iguales propiedades, usando el método de los elementos finitos con un error del 5%. Estos autores presentan una expresión para el FIT que tiene en cuenta tanto la geometría de la

elipse como el espesor y ancho de la placa.

La evolución del FIT en modo I en el punto del borde de la grieta elíptica más cercano al contorno exterior (i.e. $\phi = 90$), para distintos espesores de placa puede verse en la figura 5.14. Los resultados presentan un buen acuerdo con los obtenidos por Isida y Noguchi (1984) para una elipse de igual relación geométrica centrada en una placa de ancho infinito.

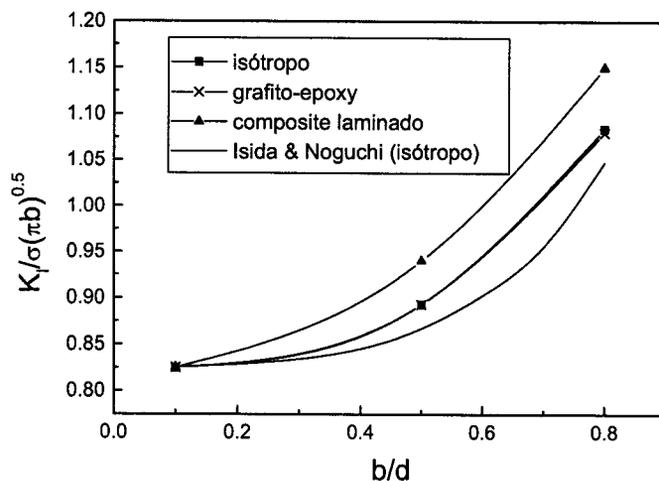


Figura 5.14: Variación del FIT para una grieta elíptica centrada en una placa respecto al espesor de la misma.

5.4.3 Dominios finitos. Grieta de borde

Sobre la discretización del dominio y el planteamiento de las EIC para este tipo de problemas caben tenerse en cuenta las mismas consideraciones que en el apartado análogo del capítulo 3.

Grieta recta central en pieza prismática

Este problema ha sido resuelto en dos dimensiones para materiales isótropos y transversalmente isótropos. La geometría del problema se muestra en el figura

3.28, siendo $2a/W = 0.5$, $t = 0.25W$ y $2H/W = 1$. Dada la simetría del problema se ha discretizado la mitad de la placa, colocando 4 elementos a la largo del vértice de la grieta en cada una de las superficies (figura 5.15).

Se han impuesto condiciones de deformación plana prescribiendo desplazamientos normales nulos en cada una de las caras en las que la grieta alcanza la superficie exterior. Los resultados se obtienen para dos materiales transversalmente isótropos de constantes elásticas equivalentes a las de los materiales ortótropos bidimensionales (con las direcciones principales paralelas a los ejes coordenados) considerados por Bowie y Freese (1972):

- material A

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= 12.043 \text{ GPa} \\
 C_{12} &= 4.351 \text{ GPa} \\
 C_{13} &= 4.918 \text{ GPa} \\
 C_{33} &= 22.951 \text{ GPa} \\
 C_{44} &= 4.762 \text{ GPa}
 \end{aligned}
 \tag{5.41}$$

- material B

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= 11.178 \text{ GPa} \\
 C_{12} &= 3.485 \text{ GPa} \\
 C_{13} &= 4.399 \text{ GPa} \\
 C_{33} &= 102.639 \text{ GPa} \\
 C_{44} &= 5.880 \text{ GPa}
 \end{aligned}
 \tag{5.42}$$

El valor normalizado del FIT en modo I, $F_I = K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ (siendo a la semi-longitud de la grieta y σ el valor de la tracción aplicada en los extremos de la placa), se calcula a partir de los valores de los desplazamientos de apertura de grieta mediante la ecuación (5.31). En la tabla 5.2 se comparan los valores aquí obtenidos con los dados por Bowie y Freese (1972) para el problema bidimensional

y por Sáez et al. (1997) para el problema tridimensional, obtenidos a partir de las tracciones y desplazamientos nodales de los elementos a un cuarto singulares y a un cuarto, respectivamente, mediante una formulación estándar de elementos de contorno.

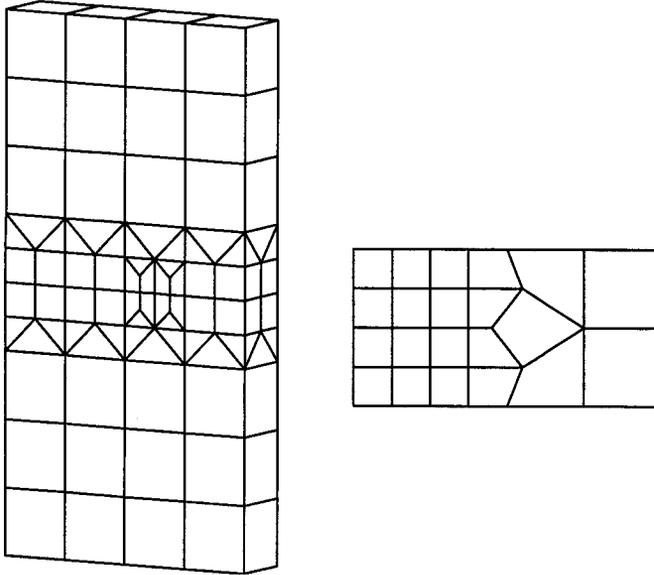


Figura 5.15: Discretización de EC para grieta recta central en pieza prismática.

	Material A		Material B	
HBEM	1.45		1.85	
Saez et al.	1.45	(t)	1.84	(t)
	1.44	(u)	1.85	(u)
Bowie y Freese	1.46		1.85	

Tabla 5.2: FIT normalizado modo I. Pieza prismática con grieta central.

Capítulo 6

Elasticidad Dinámica. Medios Transversalmente Isótropos

6.1 Introducción

Los materiales compuestos normalmente se refuerzan con fibras orientadas unidireccionalmente, el diámetro de las fibras y la separación entre ellas se supone mucho más pequeño que la longitud de onda de las ondas elásticas que se propagan en el material. Por ello, los materiales compuestos reforzados con fibras pueden modelarse como materiales transversalmente isótropos con la dirección de la fibra como eje de simetría del material.

No existen en la bibliografía expresiones explícitas de soluciones fundamentales para problemas armónicos tridimensionales anisótropos. La técnica más empleada para la obtención de éstas se basa en las transformadas de Fourier y Laplace. Esta metodología proporciona expresiones explícitas para el caso isótropo, aunque no

sucede lo mismo en casos de anisotropía más generales para los que la solución se obtiene en términos de integrales sobre dominios infinitos. Los primeros estudios sobre soluciones fundamentales para medios anisótropos se centraron en la obtención de desarrollos asintóticos de campo lejano (Buchwald, 1959, Lighthill, 1960, Musgrave, 1961). Numerosos autores han revisado posteriormente estas primeras contribuciones tanto para materiales anisótropos como transversalmente isótropos. Más recientemente, Wang y Achenbach (1995) presentaron un nuevo método, basado en la transformada de Radon, que proporciona los desplazamientos en forma de integrales sobre la superficie de una esfera de radio unidad.

La solución fundamental armónica para sólidos con propiedades elásticas transversalmente isótropas puede expresarse como la suma de una parte regular que depende de la frecuencia de excitación y que se anula cuando ésta tiende a cero y otra parte singular que se corresponde con la solución fundamental estática del mismo problema. En el apartado 2 se obtiene la parte regular de la solución fundamental armónica de la EIC en tracciones derivando la parte regular de los núcleos de desplazamientos y tracciones de la solución fundamental armónica propuesta por Wang y Achenbach (1995). Para evaluar numéricamente las integrales que aparecen se aplica la técnica desarrollada por Wilson y Cruse (1978).

En el apartado 3 se presentan resultados para problemas tridimensionales de mecánica de la fractura armónica para dominios infinitos, algunos de los cuales no han sido estudiados previamente por otros autores.

6.2 Ecuación integral de contorno en tracciones

La representación integral clásica de las componentes de los desplazamientos y las tracciones para un punto interno y de un cuerpo elástico sometido a una carga armónica, ecuaciones (6.1) y (6.2) respectivamente, ya han sido presentadas previamente en el capítulo 4.

$$u_l(\mathbf{y}, \omega) + \int_{\Gamma} p_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) u_k(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) p_k(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma = 0 \quad (6.1)$$

$$p_l(\mathbf{y}, \omega) + \int_{\Gamma} s_{lmk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) N_m(\mathbf{y}) u_k(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma - \int_{\Gamma} d_{lmk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) N_m(\mathbf{y}) p_k(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma = 0 \quad (6.2)$$

u_{lk}^* y p_{lk}^* son los tensores de desplazamientos y tracciones de la solución fundamental armónica transversalmente isótropa, y d_{lmk}^* y s_{lmk}^* son los núcleos de la IEC en tracciones obtenidos combinando linealmente las derivadas de los primeros. Todos ellos pueden expresarse como:

$$u_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = u_{lk}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) + u_{lk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (6.3)$$

$$p_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = p_{lk}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) + p_{lk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (6.4)$$

$$d_{lmk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = d_{lmk}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) + d_{lmk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (6.5)$$

$$s_{lmk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = s_{lmk}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) + s_{lmk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (6.6)$$

donde $u_{lk}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$, $p_{lk}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$, $d_{lmk}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ y $s_{lmk}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) \rightarrow 0$ cuando $\omega \rightarrow 0$ representan la parte regular de las soluciones fundamentales y $u_{lk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $p_{lk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $d_{lmk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y $s_{lmk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ la parte singular, que se corresponden con las soluciones fundamentales estáticas y por lo tanto presentan la misma singularidad débil de orden r^{-1} , singularidad fuerte de orden r^{-2} e hipersingularidad de orden r^{-3} , respectivamente, cuando $r \rightarrow 0$.

La representación integral de las tracciones para un punto suave del contorno (ecuación (4.8)), incluyendo los desarrollos de los desplazamientos y las tracciones en \mathbf{y} (ecuaciones (4.9) y (4.10)), puede expresarse como

$$p_l(\mathbf{y}, \omega) + T_1^R + T_2^R + T_1^S + T_2^S + T_3^S + T_4^S + T_5^S + T_6^S + T_7^S + T_8^S = 0 \quad (6.7)$$

Las integrales T_i^R no presentan ninguna dificultad numérica. El tratamiento que debe aplicarse a las integrales T_i^S ha sido descrito en el capítulo 5.

En este capítulo se estudian únicamente problemas de grietas contenidas en dominios infinitos, por lo tanto solo es necesario plantear en la grieta la EIC en tracciones, teniendo como variables en el sistema de ecuaciones directamente los desplazamientos de apertura de grieta. Así pues, nos centramos en la obtención de los términos $s_{lmk}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ a partir de las derivadas segundas de la parte regular de los núcleos $u_{ik}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ de la solución fundamental de Wang y Achenbach. Al igual que en el capítulo anterior el plano de la grieta se considerará perpendicular al eje de simetría del material que a su vez coincidirá con el eje x_3 del sistema global de referencia.

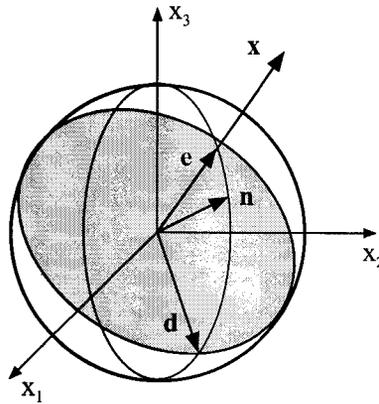


Figura 6.1: Geometría de la esfera de radio unidad.

La solución fundamental propuesta por Wang y Achenbach proporciona los desplazamientos en forma de integrales sobre la superficie de una esfera de radio unidad

$$u_{jk}^R = \frac{C_{44}i}{16\pi^2} \int_{|\mathbf{n}|=1} \sum_{m=1}^3 A_{jk}^m(\mathbf{n}, \bar{\omega}) e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}|} dS(\mathbf{n}) \quad (6.8)$$

siendo

$$\begin{aligned}
 A_{jk}^m(\mathbf{n}, \bar{\omega}) &= \frac{n_j n_k}{1 - n_3^2} \frac{M}{C} \frac{\kappa_m}{c_m^2} \\
 A_{j3}^m(\mathbf{n}, \bar{\omega}) &= A_{3j}^m(\mathbf{n}, \bar{\omega}) = -k_3 n_j n_3 \frac{1}{C} \frac{\kappa_m}{c_m^2} \\
 A_{33}^m(\mathbf{n}, \bar{\omega}) &= \frac{K}{C} \frac{\kappa_m}{c_m^2} \\
 A_{jk}^3(\mathbf{n}, \bar{\omega}) &= - \left[\frac{n_j n_k}{1 - n_3^2} - \delta_{jk} \right] \frac{\kappa_3}{c_3^2} \\
 A_{j3}^3(\mathbf{n}, \bar{\omega}) &= A_{3j}^3(\mathbf{n}, \bar{\omega}) = 0 \\
 A_{33}^3(\mathbf{n}, \bar{\omega}) &= 0
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

para $j, k, m=1,2$. A_{jk}^m son funciones de la frecuencia modificada $\bar{\omega}^2 = \rho\omega^2/C_{44}$ y del vector \mathbf{n} , normal exterior unitaria a la esfera unidad.

M, K, C son funciones de las velocidades de fase c_m y de n_3

$$C(n_3) = (\kappa_1 + 1)n_3^2 + (\kappa_2 + 1)(1 - n_3^2) - 2c_m^2 \tag{6.10}$$

$$M(c_m, n_3) = \kappa_1 n_3^2 + (1 - n_3^2) - c_m^2 \tag{6.11}$$

$$K(c_m, n_3) = n_3^2 + \kappa_2(1 - n_3^2) - c_m^2 \tag{6.12}$$

siendo c_1 la velocidad de fase asociada a los movimientos cuasitransversales, c_2 la asociada a los movimientos cuasilongitudinales y c_3 a los movimientos puramente transversales.

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ B - \sqrt{B^2 - 4A} \right\}} \\
 c_2 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ B + \sqrt{B^2 - 4A} \right\}} \\
 c_3 &= \sqrt{\kappa_4(1 - n_3^2) + n_3^2}
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

A y B se expresan en función de n_3 y de las constantes elásticas C_{ijpq} del material

$$A(n_3) = \kappa_1 n_3^4 + \kappa_3 n_3^2 (1 - n_3^2) + \kappa_2 (1 - n_3^2)^2 \quad (6.14)$$

$$B(n_3) = (\kappa_1 + 1)n_3^2 + (\kappa_2 + 1)(1 - n_3^2) \quad (6.15)$$

siendo

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \bar{c}_{33} \\ \kappa_2 &= \bar{c}_{11} \\ \kappa_3 &= 1 + \kappa_1 \kappa_2 - (\bar{c}_{13} + 1)^2 \\ \kappa_4 &= \frac{\bar{c}_{11} - \bar{c}_{12}}{2} \\ \kappa_5 &= \bar{c}_{13} + 1 \end{aligned} \quad (6.16)$$

donde $\bar{c}_{mn} = C_{mn}/C_{44}$.

La derivada segunda de los desplazamientos tiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} u_{jk,pq}^R &= -\frac{C_{44}^i}{16\pi^2} \int_{|n|=1} \sum_{m=1}^3 A_{jk}^m(\mathbf{n}, \bar{\omega}) k_m^2 n_p n_q e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}|} dS(\mathbf{n}) - \\ &\frac{C_{44}}{16\pi^2} \int_{|n|=1} \sum_{m=1}^3 2A_{jk}^m(\mathbf{n}, \bar{\omega}) k_m n_p n_q e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}|} \delta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) dS(\mathbf{n}) \end{aligned} \quad (6.17)$$

La segunda de estas integrales se convierte en una integral de línea sobre la circunferencia de radio unidad y perpendicular al vector \mathbf{x} (véase figura 6.1), así

$$\begin{aligned} &\int_{|n|=1} \sum_{m=1}^3 2A_{jk}^m(\mathbf{n}, \bar{\omega}) k_m n_p n_q e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}|} \delta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) dS(\mathbf{n}) = \\ &\int_{|d|=1, \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}=0} \sum_{m=1}^3 2A_{jk}^m(\mathbf{n}, \bar{\omega}) k_m n_p n_q e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}|} \frac{1}{|\mathbf{x}|} dl(\mathbf{n}) \end{aligned} \quad (6.18)$$

Los integrandos en (6.18) tan sólo dependen de la orientación del vector de posición \mathbf{x} y no de su módulo. La evaluación numérica de la primera integral de la ecuación (6.17) se realiza empleando la técnica desarrollada por Wilson y Cruse (1978) consistente en generar numéricamente una base datos para cada material en la cual interpolar. La integral se tabula para $\theta \in (0, \pi/2)$, $\phi \in (0, 2\pi)$ ya que el

integrando es simétrico respecto del plano $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$. La segunda integral se evalúa directamente mediante una cuadratura de Gauss monodimensional.

Así, la ecuación integral de contorno general armónica en tracciones en términos únicamente de integrales regulares o débilmente singulares se escribe como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} p_l(\mathbf{y}, \omega) + \int_{\Gamma} \{s_{lmk}^R N_m u_k(\mathbf{x}, \omega) - d_{lmk}^R N_m p_k(\mathbf{x}, \omega)\} d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma} \{s_{lmk}^S N_m [u_k(\mathbf{x}, \omega) - u_k(\mathbf{y}, \omega) - u_{k,h}(\mathbf{y}, \omega)(x_h - y_h)] - \\ & d_{lmk}^S N_m [p_k(\mathbf{x}, \omega) - p_k(\mathbf{y}, \omega)]\} d\Gamma + \\ & [u_k(\mathbf{y}, \omega) I_{lk} + u_{k,h}(\mathbf{y}, \omega) J_{lhk} + p_k(\mathbf{y}, \omega) K_{lk}] = 0 \end{aligned} \quad (6.19)$$

donde I_{lk} y J_{lhk} vienen dadas por las ecuaciones (5.4) a (5.14) y (5.16) a (5.26). Esta ecuación integral de contorno es válida para contornos abiertos o cerrados, contornos planos o curvos, con las grietas contenidas en un plano perpendicular al eje de simetría del material.

6.3 Resultados numéricos

En este apartado se estudian problemas de propagación de ondas planas longitudinales a través de grietas situadas perpendicularmente a la dirección de las fibras, es decir, en un plano de simetría del material e inmersas en dominios infinitos. Esta orientación aparece de forma natural por la rotura de una o un grupo de fibras, así parece razonable estudiar grietas con forma geométrica circular o elíptica. Las ondas longitudinales van a propagarse en la dirección de las fibras, es decir abriendo la grieta.

A diferencia de lo que ha sucedido en los últimos 30 años con los problemas de grietas contenidas en sólidos isótropos, hasta el momento no se ha abordado el estudio analítico de la propagación de ondas elásticas a través de grietas contenidas en sólidos anisótropos. Caben destacar los trabajos de Tsai (1982), (1988), (1989) que obtuvo numéricamente, mediante el método de la transformada de Hankel,

el FIT en modo I dinámico a baja frecuencia, para una grieta circular inmersa en sólidos infinitos con propiedades transversalmente isótropas, y Kundu (1990) y Kundu y Boström (1991), (1992) que estudiaron la difracción de ondas longitudinales y torsionales a través de una grieta circular, obteniendo los DAG para frecuencias relativamente altas y resultados de campo lejano para los desplazamientos, utilizando una representación de la transformada de Hankel del campo difractado y un desarrollo en series de Legendre de los desplazamientos en la grieta.

6.3.1 Dominios infinitos

Grieta circular

Se estudia en primer lugar la difracción de ondas por una grieta circular de radio a . El movimiento incidente se propaga según el eje x_3 de simetría del material. Se emplean las mismas mallas de EC que en el caso isótropo, figuras 4.1 y 4.6, dependiendo del valor de la frecuencia de excitación.

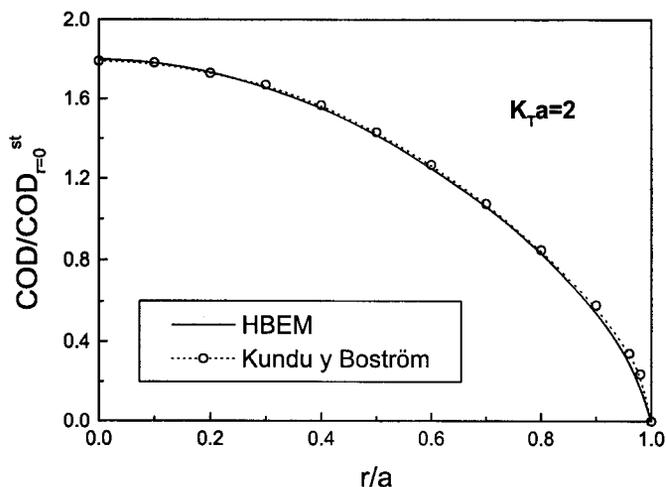


Figura 6.2: Desplazamiento de apertura de grieta normalizado. Material grafito-epoxy.

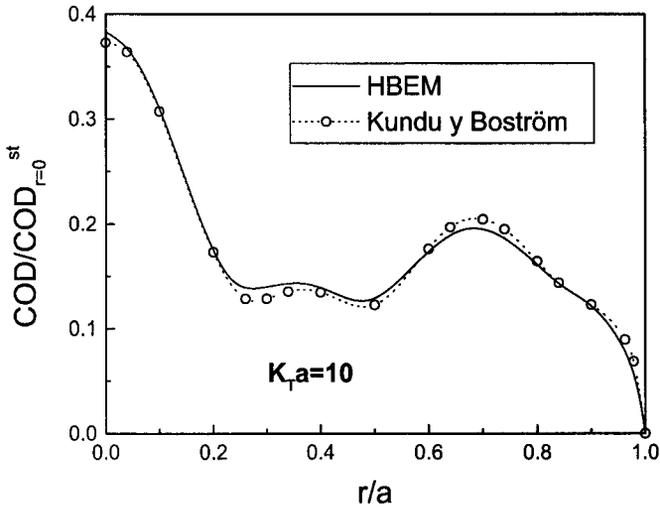


Figura 6.3: Desplazamiento de apertura de grieta normalizado. Material grafito-epoxy.

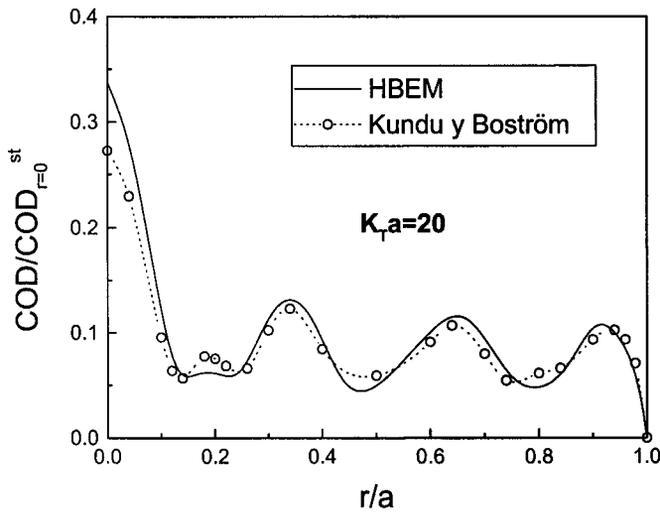


Figura 6.4: Desplazamiento de apertura de grieta normalizado. Material grafito-epoxy.

Se presentan resultados para dos tipos de materiales, un sólido isótropo y un sólido transversalmente isótropo, de propiedades:

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= 13.92 \text{ GPa} \\
 C_{33} &= 160.7 \text{ GPa} \\
 C_{12} &= 6.92 \text{ GPa} \\
 C_{13} &= 6.44 \text{ GPa} \\
 C_{44} &= 7.07 \text{ GPa} \\
 \rho &= 1578 \text{ kg/m}^3
 \end{aligned}
 \tag{6.20}$$

y

$$\begin{aligned}
 E &= 69.15 \text{ GPa} \\
 \nu &= 0.25 \\
 \rho &= 2770 \text{ kg/m}^3
 \end{aligned}
 \tag{6.21}$$

respectivamente.

Los valores normalizados del desplazamiento de apertura de grieta respecto del desplazamiento en el centro de la grieta cuando ésta se somete a presión interna de magnitud igual a la amplitud del campo de tensiones incidentes, para diferentes valores de $k_T a$, siendo k_T el número de onda asociado a los movimientos transversales que se propagan en la dirección perpendicular a la superficie de la grieta, para el primer material se muestran en las figuras 6.2 a 6.4. Análogamente, los resultados para un material isótropo pueden verse en las figuras 6.5 a 6.7. El acuerdo con los valores obtenidos por Kundu y Boström (1991) para estos mismos materiales es bastante bueno. A la vista de estos resultados numéricos podemos concluir que es posible considerar frecuencias relativamente altas con el procedimiento desarrollado en esta tesis.

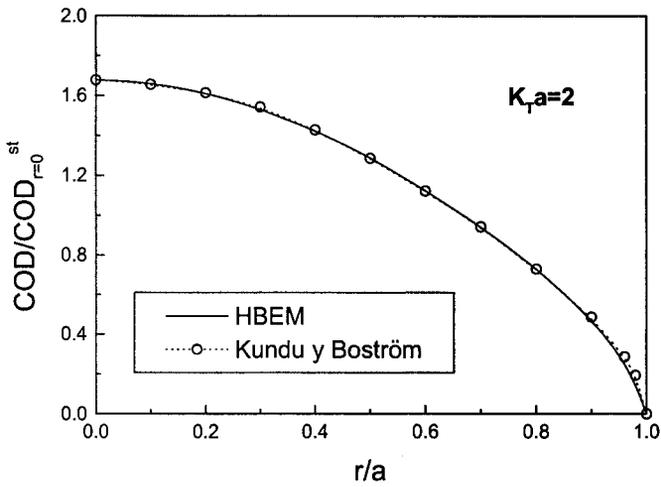


Figura 6.5: Desplazamiento de apertura de grieta normalizado. Material isótropo.

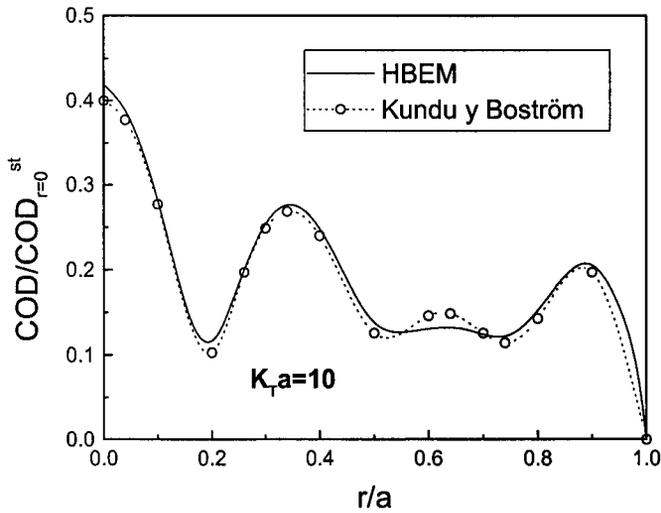


Figura 6.6: Desplazamiento de apertura de grieta normalizado. Material isótropo.

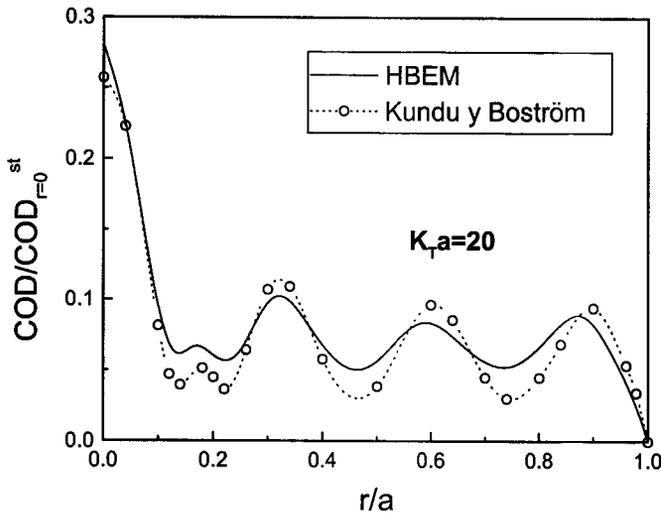


Figura 6.7: Desplazamiento de apertura de grieta normalizado. Material isótropo.

Se ha obtenido asimismo una representación del FIT modo I normalizado respecto al valor correspondiente al caso estático frente a la frecuencia normalizada, para un rango $0 \leq k_T a \leq 5$. La figura 6.8 muestra las curvas para dos materiales, grafito-epoxy e isótropo con propiedades elásticas: módulo transversal, $\mu = 10^6$ Pa y módulo de Poisson, $\nu = 0.3$. Los valores del FIT modo I armónico para estos mismos materiales fueron obtenidos anteriormente por Tsai (1988) para un rango de frecuencias bajas. Sus resultados se comparan con los aquí obtenidos en la figura 6.9. Según este autor el material isótropo alcanza el máximo valor del FIT, éste ocurre en $k_T a = 1.49$. El valor del FIT para el grafito-epoxy es más bajo y alcanza su máximo para $k_T a = 1.58$. El máximo FIT dinámico es entre un 44% y un 49% más alto que el valor estático para el problema equivalente. Nuestros resultados corroboran completamente las conclusiones obtenidas por Tsai.

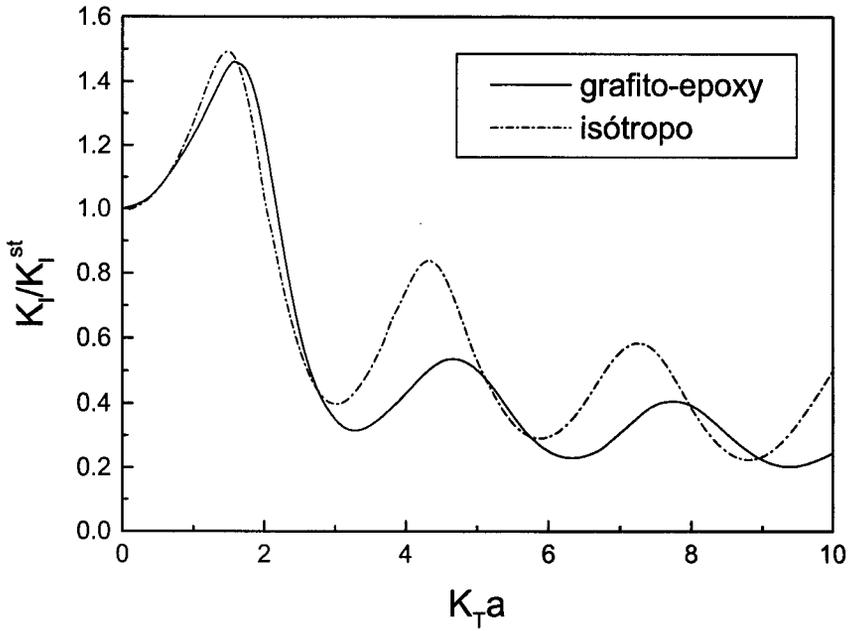


Figura 6.8: FIT normalizado modo I. Grieta circular en medio infinito.

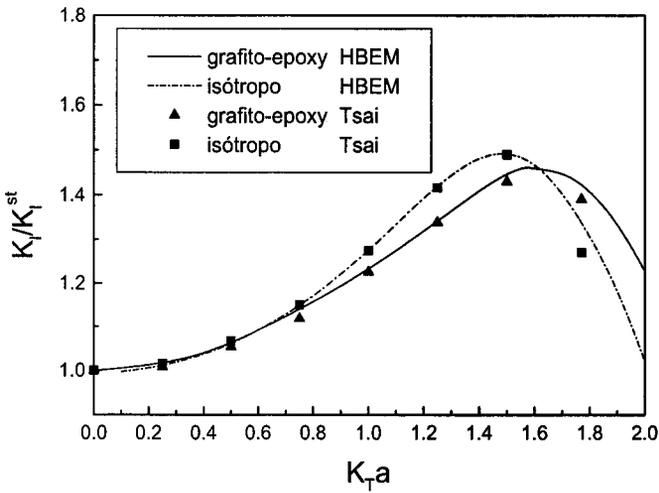


Figura 6.9: FIT normalizado modo I. Grieta circular en medio infinito.

Grieta elíptica

Como hemos comentado anteriormente, en la realidad las grietas tienen formas geométricas irregulares que se desvían sustancialmente de un perfil circular. Aunque no existen en la bibliografía estudios de propagación de ondas en materiales transversalmente isótropos para grietas con geometría elíptica, conocidos por el autor, en este trabajo se presenta la variación del FIT en modo I frente a la frecuencia normalizada $k_T a$, siendo k_T el número de onda asociado a los movimientos transversales que se propagan en la dirección perpendicular a la superficie de la grieta y a el semieje mayor de la elipse.

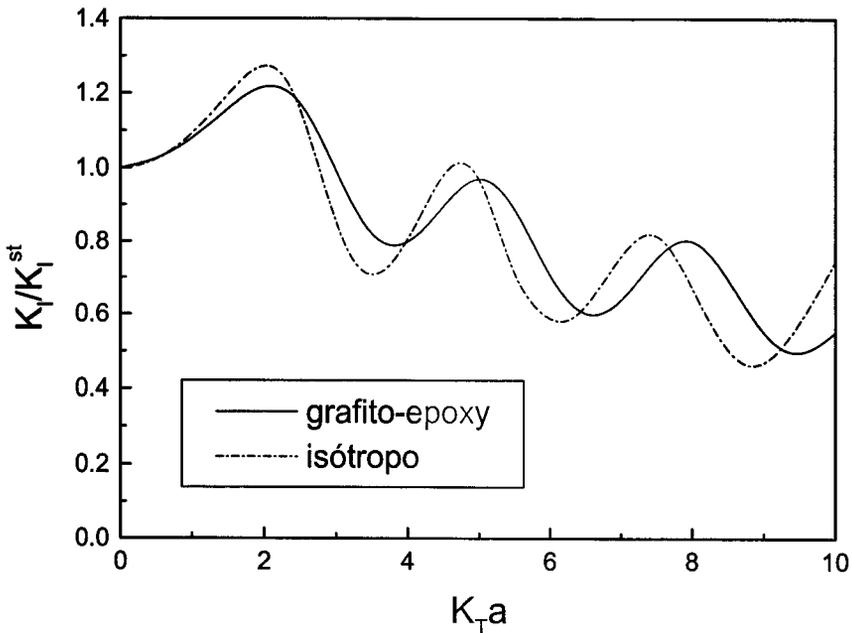


Figura 6.10: FIT normalizado modo I. Grieta elíptica en medio infinito ($\theta = 0^\circ$).

La relación entre el semieje mayor, a , y el semieje menor, b , es 2. La superficie de la grieta se discretiza con 142 elementos cuadráticos (figura 4.10). En las figuras 6.10 y 6.11 se representan los valores del FIT modo I para dos materiales, grafito-

epoxy e isótropo, en dos posiciones a lo largo del frente de la grieta $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 90^\circ$, respectivamente, siendo θ un ángulo medido a partir del semieje mayor.

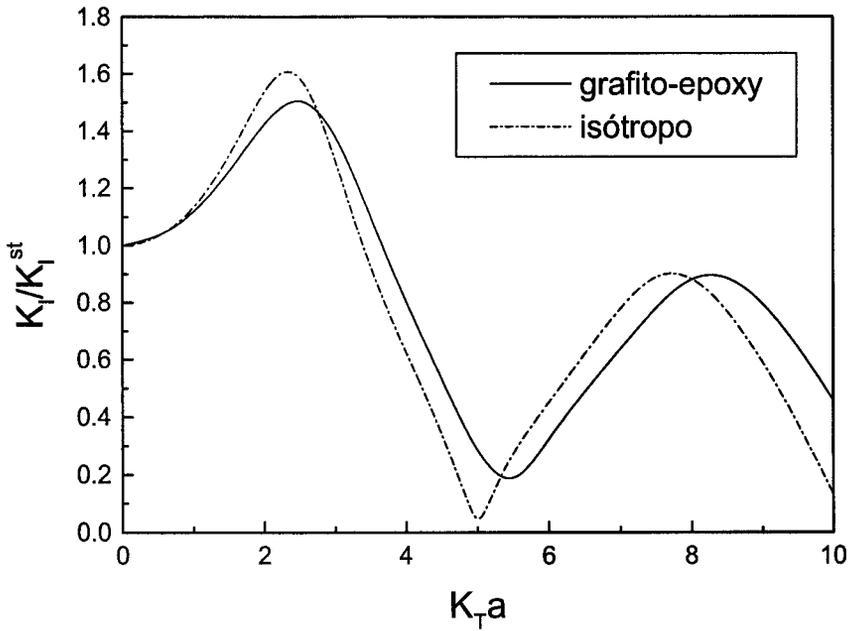


Figura 6.11: FIT normalizado modo I. Grieta elíptica en medio infinito ($\theta = 90^\circ$).

Capítulo 7

Conclusiones y Desarrollos Futuros

7.1 Conclusiones

En esta tesis se ha mejorado e implementado una formulación hipersingular de elementos de contorno para el estudio numérico de problemas tridimensionales de Mecánica de la Fractura mediante el Método de los Elementos de Contorno.

Esta formulación surge como la mejor alternativa al empleo de subregiones en el análisis de sólidos fisurados con falta de simetría, bien sea de tipo geométrico o en las condiciones de contorno definidas sobre el problema. Se ha obtenido una representación integral de las tracciones en el contorno en base a derivar la ecuación integral estándar de elementos de contorno.

La aplicación de la formulación hipersingular del MEC junto al elemento de contorno a un cuarto se ha revelado como una herramienta precisa y efectiva para el cálculo de los Factores de Intensidad de Tensión (FIT) y los Desplazamientos de Apertura de Grieta (DAG) de forma directa a partir de los valores nodales de

los desplazamientos.

Las dos dificultades significativas que presenta el uso de elementos de contorno hipersingulares: una la condición de continuidad que deben satisfacer las funciones de densidad; y la otra, principal objetivo de este trabajo, la integración de núcleos fuertemente singulares e hipersingulares que aparecen tras derivar los núcleos clásicos, se han resuelto de forma satisfactoria en esta tesis. La primera, empleando un Método de Colocación Múltiple que evita el incremento del número de incógnitas nodales respecto del que se obtiene aplicando la formulación clásica; y la segunda, aplicando sobre los núcleos hipersingulares y fuertemente singulares técnicas de regularización específicas. En primer lugar se han regularizado los núcleos usando dos términos del desarrollo en serie de Taylor de los desplazamientos en el punto de colocación, y un término para el desarrollo de las tracciones, y a continuación se han transformado analíticamente, mediante la aplicación del teorema de Stokes, en núcleos regulares o débilmente singulares integrables numéricamente. La regularización se ha aplicado antes de cualquier discretización del contorno. Las integraciones se han realizado analíticamente de forma directa sin necesitar ningún cambio de coordenadas mediante una cuadratura de Gauss.

El carácter general de la técnica desarrollada ha permitido su aplicación a problemas elásticos lineales tanto estáticos como dinámicos en el dominio de la frecuencia, gobernados por leyes de comportamiento isótropas o transversalmente isótropas, pudiendo estar las grietas contenidas en dominios infinitos y también en dominios finitos, ser interiores y de borde, con forma geométrica arbitraria, planas y curvas.

En esta tesis se han obtenido por primera vez expresiones explícitas de los núcleos de la solución fundamental de la ecuación integral de contorno estática en tracciones para materiales transversalmente isótropos partiendo de la solución

fundamental de Pan y Chou (1976).

En cuanto a la formulación hipersingular del MEC en elastodinámica en el dominio de la frecuencia para sólidos transversalmente isótropos, la presente tesis contribuye con la obtención de la parte regular de la solución fundamental derivando la parte regular de los núcleos de desplazamientos y tracciones de la solución fundamental armónica propuesta por Wang y Achenbach (1995) expresada en forma de integrales sobre la superficie de una esfera de radio unidad.

Se han resuelto numerosos problemas y sus resultados se han comparado satisfactoriamente con soluciones analíticas existentes en la bibliografía o en su defecto con resultados numéricos obtenidos por otros autores. En el cuarto apartado del capítulo 3 se ha analizado como afecta la existencia de un borde libre al valor del FIT, tanto si la grieta es interna y próxima a ese borde, como si el vértice de la grieta alcanza el contorno exterior. Se ha estudiado, por primera vez, la propagación de ondas a través de una grieta elíptica en un sólido transversalmente isótropo y se ha representado la variación del FIT frente a la frecuencia de excitación de la carga aplicada.

7.2 Desarrollos futuros

La técnica desarrollada en esta tesis puede extenderse sin dificultad a otras formulaciones del MEC de gran interés en la Mecánica de la Fractura que pueden en algunos casos no estar aún totalmente resueltas. Es inmediata su aplicación a la formulación para problemas de propagación o crecimiento por fatiga de grietas pseudo-estáticas, evitando así el uso de subregiones y reduciendo en gran medida el tiempo y dificultad del remallado.

Dentro de la formulación del MEC elastodinámico en el dominio del tiempo, esta técnica permitiría extender fácilmente a dominios tridimensionales el trabajo de Gallego y Domínguez (1997) para dos dimensiones tanto para materiales

isótropos como transversalmente isótropos, ya que la forma de la solución de Wang y Achenbach (1993) para este caso resulta similar a la aquí tratada en el dominio de la frecuencia. Esto permitiría estudiar problemas de propagación en los que la velocidad instantánea de la grieta se determina a partir de un criterio de fractura en función de la tenacidad del material.

La formulación hipersingular puede considerarse un paso previo en la implementación de la formulación simétrica de elementos de contorno o Método de Galerkin, ya que la técnica de regularización y transformación de los núcleos hipersingulares es directamente aplicable a este último.

A pesar de que los resultados obtenidos son satisfactorios en cualquier caso, cabría esperar una mejora en los mismos si se implementa algún procedimiento de evaluación numérica de integrales cuasi-singulares presentes sobre todo en problemas en los que el vértice de la grieta alcanza el contorno exterior o cuando la grieta, siendo interna, está próxima a un borde libre, y en general cuando las diferencias el tamaño del elemento en el que se integra es mucho mayor que la distancia entre el punto de integración y el punto de colocación. Esto permitiría estudiar más profundamente una serie de aspectos de radical interés en la Mecánica de la Fractura, como son los efectos de la forma del borde de grieta y las condiciones mixtas de deformación y tensión plana que aparecen en los puntos del frente de la grieta en los especímenes reales.

Apéndice A

Integrales Básicas de la EIC en Flujo

Ecuaciones básicas de la EIC para la derivada del potencial.

$$Ip_1 = \int_{\Gamma} \frac{n_i N_i}{r^3} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{3(\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})}{r^5} d\Gamma + \oint_{\partial\Gamma} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} d\mathbf{l} \quad (\text{A.1})$$

Puede verse fácilmente que realizando el producto vectorial se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} &= -\frac{3}{r^5} \begin{pmatrix} N_1 r_1^2 + N_2 r_1 r_2 + N_3 r_1 r_3 \\ N_1 r_1 r_2 + N_2 r_2^2 + N_3 r_2 r_3 \\ N_1 r_1 r_3 + N_2 r_2 r_3 + N_3 r_3^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{r^3} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \\ &= -\frac{3}{r^5} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} + \frac{1}{r^3} \mathbf{N} \end{aligned}$$

y

$$\frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}}{r^3} = \frac{3(\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})}{r^5} + \nabla \times \left(\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{N}}{r^3} \right) \cdot \mathbf{n}$$

la cual integrando y usando el teorema de Stokes da lugar a la expresión (A.1).

$$Ip_2 = \int_{\Gamma} \frac{n_i N_i r_{,k}}{r^2} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{n_k N_m r_{,m}}{r^2} d\Gamma + \oint_{\partial\Gamma} \frac{1}{r} (\mathbf{e}_k \times \mathbf{N}) d\mathbf{l} \quad (\text{A.2})$$

Para $k = 1$, el siguiente producto escalar se escribe como:

$$\nabla \times \mathbf{z} \times \mathbf{N} = \frac{1}{r^2} \begin{Bmatrix} N_1 r_{,1} \\ N_2 r_{,1} \\ N_3 r_{,1} \end{Bmatrix} - \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} N_1 r_{,1} + N_2 r_{,2} + N_3 r_{,3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

siendo $\mathbf{z} = (\frac{1}{r}, 0, 0)^T$.

En general:

$$\nabla \times \mathbf{z} \times \mathbf{N} = \frac{1}{r^2} [r_{,k} \mathbf{N} - (N_m r_{,m}) \mathbf{e}_k]$$

con $\mathbf{z} = \frac{1}{r} \mathbf{e}_k$

Por lo tanto:

$$\frac{r_{,k} \mathbf{N} \cdot \mathbf{n}}{r^2} = \frac{N_m r_{,m} n_k}{r^2} + \nabla \times \left(\frac{1}{r} \mathbf{e}_k \times \mathbf{N} \right) \cdot \mathbf{n}$$

que da lugar a la expresión (A.2).

Apéndice B

Integrales Básicas de la EIC en Tracciones. Materiales Isótropos

1.- Integrales necesarias para obtener T_4 (ecuaciones (3.13) y (3.16)).

$$I_{E4} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} s_{lmk}^* N_m d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} s_{lk}^* d\Gamma \quad (\text{B.1})$$

Tomando por ejemplo $l = 1$ y $k = 1$, usando el sistema de coordenadas local (figura 2.2) donde $N_1 = N_2 = 0$, $N_3 = 1$ y sustituyendo s_{lmk}^* dada por la ecuación

(3.5) se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} s_{11}^* d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} s_{131}^* d\Gamma = & (B.2) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)\varepsilon^3} \{3\nu r_{,3} - 15r_{,1}^2 r_{,3} + 3\nu n_1 r_{,1} r_{,3} + 3\nu n_3 r_{,1}^2 + \\ (1-2\nu)(3n_1 r_{,1} r_{,3} + n_3)\} d\Gamma &= \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)\varepsilon} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} [3\nu \cos \varphi \sin \varphi - 15 \sin^3 \varphi \cos^2 \theta \cos \varphi + \\ 3\nu \sin^3 \varphi \cos \theta \cos^2 \varphi + 3\nu \sin^3 \varphi \cos \varphi \cos^2 \theta + \\ +(1-2\nu)(3 \sin^3 \varphi \cos \varphi \cos^2 \theta + \cos \varphi \sin \varphi)] d\varphi d\theta \end{aligned}$$

donde se han tenido en cuenta las siguientes relaciones geométricas: $r_{,3} = n_3 = \cos \varphi$, $r_{,1} = n_1 = \sin \varphi \sin \theta$, $r_{,2} = n_2 = \sin \varphi \sin \theta$, y $d\Gamma = \varepsilon^2 \sin \varphi d\varphi d\theta$. Tras integrar, se obtiene:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} s_{131}^* d\Gamma = \frac{\mu(\nu-2)}{4(1-\nu)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \quad (B.3)$$

Siguiendo un proceso de sustitución similar se obtiene el mismo resultado para $l=2$, $k=2$, y

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} s_{333}^* d\Gamma = -\frac{1}{2} \frac{\mu}{(1-\nu)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \quad (B.4)$$

para $l=k=3$. La integral $I_{E4} = 0$ para cualquier $l \neq k$.

2.- Integrales necesarias para obtener T_6 (ecuaciones (3.14) y (3.17)).

$$I_{E6} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} s_{lmk}^* N_m(x_h - y_h) d\Gamma \quad (B.5)$$

Teniendo en cuenta que (figura 2.2) $N_1 = 0$, $N_2 = 0$, $N_3 = 1$, $r_{,3} = n_3 = \cos \varphi$, $r_{,1} = n_1 = \sin \varphi \cos \theta$, $r_{,2} = n_2 = \sin \varphi \sin \theta$, $(x_h - y_h)/r = r_{,h}$, y $d\Gamma = \varepsilon^2 \sin \varphi d\varphi d\theta$; las integrales de la ecuación (B.5) pasan a ser integrales de funciones trigonométricas. Todas son zero excepto:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} s_{1m3}^* N_m(x_1 - y_1) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} s_{1m1}^* N_m(x_3 - y_3) d\Gamma = & (B.6) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} s_{2m3}^* N_m(x_2 - y_2) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} s_{2m2}^* N_m(x_3 - y_3) d\Gamma = \frac{\mu(5\nu-7)}{30(1-\nu)} \end{aligned}$$

que proporciona la expresión para T_6 en la ecuación (3.14), y

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} s_{3m1}^* N_m(x_1 - y_1) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} s_{3m2}^* N_m(x_2 - y_2) d\Gamma = -\frac{\mu(2 + 10\nu)}{30(1 - \nu)} \quad (\text{B.7})$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} s_{3m3}^* N_m(x_3 - y_3) d\Gamma = -\frac{8\mu}{15(1 - \nu)} \quad (\text{B.8})$$

que proporciona T_6 como se muestra en la ecuación (3.17).

3.- Integrales necesarias para obtener T_8 (ecuaciones (3.15) y (3.18)).

$$I_{E8} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} d_{lmk}^* N_m n_h d\Gamma \quad (\text{B.9})$$

Usando las mismas relaciones trigonométricas que en los casos anteriores, puede verse fácilmente que los únicos términos distintos de zero en la ecuación (B.9) son:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} d_{1m3}^* N_m(x_1 - y_1) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} d_{1m1}^* N_m(x_3 - y_3) d\Gamma = \quad (\text{B.10})$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} d_{2m3}^* N_m(x_2 - y_2) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} d_{2m2}^* N_m(x_3 - y_3) d\Gamma = \frac{4 - 5\nu}{30(1 - \nu)}$$

que proporciona el término T_8 de la ecuación (3.15), y

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} d_{3m1}^* N_m(x_1 - y_1) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} d_{3m2}^* N_m(x_2 - y_2) d\Gamma = \frac{5\nu - 1}{30(1 - \nu)} \quad (\text{B.11})$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} d_{3m3}^* N_m(x_3 - y_3) d\Gamma = \frac{7 - 5\nu}{30(1 - \nu)} \quad (\text{B.12})$$

que proporciona T_8 que aparece en la ecuación (3.18).

4.- Transformaciones necesarias para obtener T_3 (ecuación (3.20)).

Hay que evaluar la siguiente integral:

$$I_{E3} = \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \varepsilon_\varepsilon} s_{lmk}^* N_m d\Gamma \right\} = \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \varepsilon_\varepsilon} s_{lk}^* d\Gamma \right\} \quad (\text{B.13})$$

donde el núcleo de la integral es:

$$\begin{aligned}
 s_{lk}^* &= s_{lmk}^* N_m = \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)r^3} \left\{ 3(1-2\nu) \frac{\partial r}{\partial n} r_{,k} N_m \delta_{lm} + \right. & (B.14) \\
 & 3\nu \frac{\partial r}{\partial n} r_{,m} N_m \delta_{lk} + 3\nu \frac{\partial r}{\partial n} r_{,l} N_m \delta_{mk} - 15 \frac{\partial r}{\partial n} r_{,lr,k} r_{,m} N_m + \\
 & 3\nu n_l r_{,k} r_{,m} N_m + 3\nu n_m N_m r_{,lr,k} + 3(1-2\nu) n_k r_{,lr,m} N_m + \\
 & \left. (1-2\nu) n_m N_m \delta_{lk} + (1-2\nu) n_l N_m \delta_{mk} - (1-4\nu) n_k N_m \delta_{lm} \right\}
 \end{aligned}$$

Todas las partes débilmente singulares de s_{lk}^* se integran numericamente. En s_{lk}^* aparecen tres términos hipersingulares básicos, que son: $(r_{,lr,k} n_m N_m)/r^3$, $(n_m N_m)/r^3$ y $(n_l N_k)/r^3$. Estos términos hipersingulares se transforman analíticamente de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{r_{,lr,k} n_m N_m}{r^3} &= \nabla \times \left[\frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{N}) r_{,lr,k}}{r^3} \right] \cdot \mathbf{n} + 5r_{,lr,k} \frac{(\mathbf{N} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - & (B.15) \\
 & \frac{\partial r}{\partial n} \frac{N_k r_{,l}}{r^3} - \frac{\partial r}{\partial n} \frac{N_l r_{,k}}{r^3}
 \end{aligned}$$

$$\frac{n_m N_m}{r^3} = \nabla \times \left[\frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{N})}{r^3} \right] \cdot \mathbf{n} + \frac{3(\mathbf{N} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \quad (B.16)$$

$$\frac{n_l N_k}{r^3} = \nabla \times \left[\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{e}_k N_l}{r^3} \right] \cdot \mathbf{n} + \frac{3N_l r_{,k}}{r^3} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (B.17)$$

Hay que aplicar las siguientes consideraciones a los términos de la parte derecha de las ecuaciones (B.15), (B.16) y (B.17):

- el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ de las integrales que contienen productos vectoriales pasan a ser integrales de línea sobre el contorno exterior de $\Gamma - e_\varepsilon$, $\partial\Gamma$ más una integral de línea sobre el contorno interior, i.e. ∂e_ε , que es el límite explícitamente escrito en la parte derecha de la ecuación (3.20).

- los términos que contienen $(\mathbf{N} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})$ son débilmente singulares y el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ de sus integrales puede evaluarse numericamente.

• los términos que contienen $(\frac{\partial r}{\partial n})$ son fuertemente singulares pero se cancelan con los términos fuertemente singulares de la ecuación (B.14) en cuyo caso no quedan términos fuertemente singulares tras el proceso de cancelación.

Sustituyendo la ecuaciones (B.15) a (B.17) en (B.14) y ésta en (B.13) se obtiene ecuación (3.20), después de algún álgebra.

5.- Transformaciones necesarias para obtener T_5 (ecuación (3.22)).

Hay que evaluar la siguiente integral:

$$I_{E5} = \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - e_\varepsilon} s_{lmk}^* N_m(x_h - y_h) d\Gamma \right\} = \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - e_\varepsilon} s_{lk}^*(x_h - y_h) d\Gamma \right\} \quad (\text{B.18})$$

donde el núcleo de la integral es:

$$\begin{aligned} s_{lk}^*(x_h - y_h) &= s_{lmk}^* N_m(x_h - y_h) = & (\text{B.19}) \\ & \frac{\mu}{4\pi(1-v)r^2} \left\{ 3(1-2v) \frac{\partial r}{\partial n} r_{,k} N_m \delta_{lm} r_{,h} + 3v \frac{\partial r}{\partial n} r_{,m} N_m \delta_{lk} r_{,h} + \right. \\ & 3v \frac{\partial r}{\partial n} r_{,l} N_m \delta_{mk} r_{,h} - 15 \frac{\partial r}{\partial n} r_{,l} r_{,k} r_{,m} N_m r_{,h} + \\ & 3v n_{l,r,k} r_{,m} N_m r_{,h} + 3v n_m N_m r_{,l} r_{,k} r_{,h} + 3(1-2v) n_{k,r,l} r_{,m} N_m r_{,h} + \\ & \left. (1-2v) n_m N_m \delta_{lk} r_{,h} + (1-2v) n_l N_m \delta_{mk} r_{,h} - (1-4v) n_k N_m \delta_{lm} r_{,h} \right\} \end{aligned}$$

De nuevo, se integran numericamente todas las partes regulares y débilmente singulares de la ecuación (B.19). No existen términos hipersingulares en (B.19). Los términos fuertemente singulares se transforman como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{r_{,l} r_{,k} r_{,h} n_m N_m}{r^2} &= \frac{1}{3} \nabla \times \left[\frac{(\mathbf{e}_k \times \mathbf{N}) r_{,l} r_{,h}}{r} \right] \cdot \mathbf{n} + & (\text{B.20}) \\ \frac{r_{,l} r_{,h} n_k N_m r_{,m}}{r^2} &- \frac{1}{3} \frac{r_{,l} n_k N_h}{r^2} - \frac{1}{3} \frac{r_{,h} n_k N_l}{r^2} \end{aligned}$$

$$\frac{n_m N_m r_{,h}}{r^2} = \nabla \times \left(\frac{1}{r} \mathbf{e}_h \times \mathbf{N} \right) \cdot \mathbf{n} + \frac{N_m r_{,m} n_h}{r^2} \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{n_l N_k r_{,h}}{r^2} = \frac{N_k r_{,h} (n_l - N_l n_m N_m)}{r^2} + N_k N_l \frac{N_m r_{,h} n_m}{r^2} \quad (\text{B.22})$$

Haciendo uso de la ecuaciones (B.20) a (B.22) pueden transformarse todos los términos fuertemente singulares de la ecuación (B.19) en términos con productos vectoriales, que dan lugar a integrales de línea y términos débilmente singulares, que se integran numericamente. Así, sustituyendo (B.20) a (B.22) en (B.18) se obtiene el término T_5 de la ecuación (3.22), después de algún álgebra.

6.- Transformaciones necesarias para obtener T_7 (ecuación (3.24)).

Hay que evaluar las siguientes integrales

$$I_{E7} = \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - e_\varepsilon} d_{lmk}^* N_m d\Gamma \right\} = \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - e_\varepsilon} d_{lk}^* d\Gamma \right\} \quad (\text{B.23})$$

siendo el núcleo de la integral:

$$d_{lk}^* = d_{lmk}^* N_m = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{2} \left[\frac{r_{,m} N_m \delta_{kl}}{r^2} + \frac{r_{,l} N_m \delta_{km}}{r^2} - \frac{r_{,k} N_m \delta_{lm}}{r^2} \right] + \frac{3}{2} \frac{r_{,l} r_{,k} r_{,m} N_m}{r^2} \right\} \quad (\text{B.24})$$

En la ecuación (B.24) hay dos términos débilmente singulares y dos fuertemente singulares, que se transforman como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{r_{,l} N_m \delta_{km} - r_{,k} N_m \delta_{lm}}{r^2} &= \frac{r_{,l} N_k - r_{,k} N_l}{r^2} = \\ \frac{r_{,l} (N_k - n_k) - r_{,k} (N_l - n_l)}{r^2} + \frac{r_{,l} n_k - r_{,k} n_l}{r^2} &= \\ \frac{r_{,l} (N_k - n_k) - r_{,k} (N_l - n_l)}{r^2} + \epsilon_{lkj} \nabla \times \frac{1}{r} \mathbf{e}_j \mathbf{n} & \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Sustituyendo la ecuación (B.25) en (B.24) y ésta en (B.23) se obtiene directamente T_7 como aparece en la ecuación (3.24).

Apéndice C

Series Infinitas de los Núcleos Armónicos de la EIC en Tracciones. Materiales Isótropos

Los núcleos de las ecuaciones integrales de contorno para un problema armónico isótropo se expresan en términos de dos funciones ψ y χ , y de sus derivadas primeras y segundas.

$$\psi = \left(1 + \frac{1}{k_2^2 r^2} + \frac{1}{k_2 r}\right) \frac{e^{-k_2 r}}{r} - \frac{c_2^2}{c_1^2} \left(\frac{1}{k_1^2 r^2} + \frac{1}{k_1 r}\right) \frac{e^{-k_1 r}}{r}$$
$$\chi = \left(1 + \frac{3}{k_2^2 r^2} + \frac{3}{k_2 r}\right) \frac{e^{-k_2 r}}{r} - \frac{c_2^2}{c_1^2} \left(1 + \frac{3}{k_1^2 r^2} + \frac{3}{k_1 r}\right) \frac{e^{-k_1 r}}{r} \quad (\text{C.1})$$

donde k_1 y k_2 son función de la frecuencia de excitación ω , de la distancia r entre el punto de aplicación de la carga concentrada armónica y el punto en el que se plantea la representación integral, y de las velocidades de onda del material c_1 y

c_2 .

$$k_1 = \frac{i\omega}{c_1}$$

$$k_2 = \frac{i\omega}{c_2} \quad (\text{C.2})$$

siendo estas últimas función de las propiedades del material.

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (\text{C.3})$$

Desarrollando en serie las exponenciales se pueden obtener expresiones para los núcleos d_{lmk}^R y s_{lmk}^R que son la suma de términos regulares o débilmente singulares y de una serie infinita regular.

1.- Series infinitas para el núcleo d_{lmk}^R .

La parte regular del núcleo d_{lmk} tiene la siguiente expresión

$$d_{lmk}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \left\{ (\delta_{kl}r_{,m} + \delta_{km}r_{,l}) \cdot \left(A - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)r^2} \right) + r_{,l}r_{,m}r_{,k} \cdot \left(B - \frac{3}{2(1-\nu)r^2} \right) + \delta_{lm}r_{,k} \cdot \left(C + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)r^2} \right) \right\} \quad (\text{C.4})$$

siendo

$$A = \frac{1}{r^2} \frac{c_2^2}{c_1^2} - k_2^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{(n+2)(n+4)} \frac{(1+(c_2/c_1)^{n+4})}{n!} (k_2 r)^n \quad (\text{C.5})$$

$$B = \frac{3}{r^2} \left(1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \right) + k_2^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n-1)}{(n+2)(n+4)} \frac{(1-(c_2/c_1)^{n+4})}{n!} (k_2 r)^n \quad (\text{C.6})$$

$$C = -\frac{1}{r^2} \frac{c_2^2}{c_1^2} - k_2^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2+(n+4)(c_2/c_1)^{n+2} - 2(n+3)(c_2/c_1)^{n+4}}{(n+2)(n+4)} \frac{(k_2 r)^n}{n!} \quad (\text{C.7})$$

los primeros términos de las ecuaciones (C.5), (C.6) y (C.7) cancelan los términos $-\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)r^2}$, $\frac{3}{2(1-\nu)r^2}$ y $\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)r^2}$ de la ecuación (C.4), respectivamente. Así, la parte de la integral T_1^R correspondiente al núcleo d_{lmk}^R es regular e integrable numéricamente.

2.- Series infinitas para el núcleo s_{lmk}^R .

La parte regular del núcleo s_{lmk} tiene la siguiente expresión

$$s_{lmk}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{\mu}{4\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} r_{,l} r_{,m} r_{,k} \left(D + \frac{15}{(1-\nu)r^3} \right) + \left[\frac{\partial r}{\partial n} (\delta_{lk} r_{,m} + \delta_{km} r_{,l}) + r_{,k} (n_l r_{,m} + n_m r_{,l}) \right] \left(E - \frac{3\nu}{(1-\nu)r^3} \right) + \left(\frac{\partial r}{\partial n} \delta_{lm} r_{,k} + r_{,l} r_{,m} r_{,k} \right) \left(F - \frac{3(1-2\nu)}{(1-\nu)r^3} \right) + \delta_{lm} n_k \left(G + \frac{1-4\nu}{(1-\nu)r^3} \right) + \left(n_m \delta_{lk} + n_l \delta_{mk} \right) \left(H - \frac{1-2\nu}{(1-\nu)r^3} \right) \right\} \quad (C.8)$$

siendo

$$D = \frac{30}{r^3} \left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - 1 \right) + \frac{3k_2^2}{2r} (1 - (c_2/c_1)^4) + \frac{k_2^4 r}{12} ((c_2/c_1)^6 - 1) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4k_2^3 (-k_2 r)^n ((c_2/c_1)^{n+5} - 1)}{(n+5)(n+3)(n+1)(n-1)(n-3)!} \quad (C.9)$$

$$E = \frac{3}{r^3} \left(1 - 2 \frac{c_2^2}{c_1^2} \right) + \frac{k_2^2}{2r} (c_2/c_1)^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_2^3 (-k_2 r)^n [4(c_2/c_1)^{n+5} + (n+1)] n}{(n+5)(n+3)(n+1)n!} \quad (C.10)$$

$$F = \frac{6}{r^3} \left(\frac{c_2^2}{c_1^2} \right) + \frac{k_2^2}{2r} (-3(c_2/c_1)^4 + 2(c_2/c_1)^2 - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4k_2^3 (-k_2 r)^n n [-(n+4)(c_2/c_1)^{n+5} + \frac{n+5}{2}(c_2/c_1)^{n+3} - 1]}{(n+5)(n+3)(n+1)n!} \quad (C.11)$$

$$\begin{aligned}
 G = & \frac{2}{r^3} \left(1 - 3 \frac{c_2^2}{c_1^2} \right) + \frac{k_2^2}{2r} \left(-(c_2/c_1)^4 + 4(c_2/c_1)^2 - 1 \right) + \\
 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4k_2^3 (-k_2 r)^n}{(n+5)(n+3)(n+1)n!} \left[(n^2 + 6n + 6)(c_2/c_1)^{n+5} - \right. \\
 & \left. (n^2 + 7n + 10)(c_2/c_1)^{n+3} + \frac{n^2 + 8n + 15}{4} (c_2/c_1)^{n+1} - 1 \right] \quad (C.12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{2}{r^3} \left(\frac{c_2^2}{c_1^2} \right) - \frac{k_2^2}{2r} \left((c_2/c_1)^4 + 1 \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2k_2^3 (-k_2 r)^n [2(c_2/c_1)^{n+5} + (n+3)]}{(n+5)(n+3)(n+1)n!} \\
 & \quad (C.13)
 \end{aligned}$$

los primeros términos de las ecuaciones (D.39), (C.10), (C.11), (C.12) y (C.13) cancelan los términos $\frac{15}{(1-\nu)r^3}$, $-\frac{3\nu}{(1-\nu)r^3}$, $-\frac{3(1-2\nu)}{(1-\nu)r^3}$, $\frac{(1-4\nu)}{(1-\nu)r^3}$ y $-\frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)r^3}$ de la ecuación (C.8), respectivamente. Así, la parte de la integral T_1^R correspondiente al núcleo s_{lmk}^R es débilmente regular e integrable numéricamente.

Apéndice D

Solución Fundamental de la EIC en Tracciones.

Materiales Transversalmente Isótropos

Cuando se aplica una carga estática concentrada en el origen de coordenadas de un medio transversalmente isótropo infinito, cuyo eje de simetría coincide con el eje x_3 del sistema de referencia, los núcleos s_{lmk}^* en un punto arbitrario (x_1, x_2, x_3) del mismo vienen dados por

CASO 1

Materiales cuyas constantes elásticas cumplen

$$P_{13} - C_{13} - 2C_{44} \neq 0$$

$$\nu_1 A_1 = -\nu_2 A_2 = \frac{C_{13} + C_{44}}{4\pi C_{33} C_{44} (\nu_2^2 - \nu_1^2)}$$

$$B_i = -A_i$$

$$A'_1 = B'_1 = \frac{\nu_1^2 C_{33} - C_{44}}{8\pi C_{33} C_{44} (\nu_1^2 - \nu_2^2) \nu_1^2}$$

$$A'_2 = B'_2 = \frac{C_{44} - \nu_2^2 C_{33}}{8\pi C_{33} C_{44} (\nu_1^2 - \nu_2^2) \nu_2^2}$$

$$\begin{aligned} s_{111}^* = & n_1 \left\{ (C_{11} + C_{12}) \left(\frac{D_{71}}{R_1^3} + \frac{D_{72}}{R_2^3} \right) - 3(C_{11}x_1^2 + C_{12}x_2^2) \left(\frac{D_{71}}{R_1^5} + \frac{D_{72}}{R_2^5} \right) + \right. \\ & 4C_{66} \left[A'_1 \nu_1 [-R_{11}(C_{11} + 3C_{12}) + R_{31}(C_{11}R^2 + 6C_{12}x_2^2) - \right. \\ & 3R_{51}x_2^2 (C_{11}x_1^2 + C_{12}x_2^2)] + A'_2 \nu_2 [-R_{12}(C_{11} + 3C_{12}) + \\ & R_{32}(C_{11}R^2 + 6C_{12}x_2^2) - 3R_{52}x_2^2 (C_{11}x_1^2 + C_{12}x_2^2)] \left. \right] + \\ & 2C_{66}D(C_{12} - C_{11})(-R_{13} + R_{33}R^2 - 3R_{53}x_1^2x_2^2) - \\ & C_{13} \left[\frac{D_{41}A_1\nu_1^2}{R_1^3} \left(1 - \frac{3x_1^2}{R_1^2} \right) + \frac{D_{42}A_2\nu_2^2}{R_2^3} \left(1 - \frac{3x_2^2}{R_2^2} \right) \right] - \\ & 2C_{66}C_{13} \left[\frac{A_1\nu_1^2}{R_1^3} \left(1 - \frac{3x_1^2}{R_1^2} \right) + \frac{A_2\nu_2^2}{R_2^3} \left(1 - \frac{3x_2^2}{R_2^2} \right) \right] \left. \right\} + \quad (D.1) \\ & 3C_{66}x_1x_2n_2 \left\{ -4A'_1\nu_1 [R_{31}(C_{11} + C_{12}) - R_{51}(C_{11}x_1^2 + C_{12}x_2^2)] - \right. \\ & 4A'_2\nu_2 [R_{32}(C_{11} + C_{12}) - R_{52}(C_{11}x_1^2 + C_{12}x_2^2)] + \\ & D(x_2^2 - x_1^2)(C_{11} - C_{12})R_{53} - 2C_{13} \left(\frac{A_1\nu_1^2}{R_1^5} + \frac{A_2\nu_2^2}{R_2^5} \right) \left. \right\} + \\ & x_1n_3 \left\{ 2C_{44}A'_1D_{31} [-R_{21}(3C_{11} + C_{12}) + R_{41}(C_{11}x_1^2 + C_{12}x_2^2)] + \right. \\ & 2C_{44}A'_2D_{32} [-R_{22}(3C_{11} + C_{12}) + R_{42}(C_{11}x_1^2 + C_{12}x_2^2)] + \\ & \left. \frac{C_{12} - C_{11}}{4\pi} (R_{23} - R_{43}x_2^2) - 3C_{44}C_{13}x_3 \left(\frac{D_{31}A_1\nu_1^2}{R_1^5} + \frac{D_{32}A_2\nu_2^2}{R_2^5} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{121}^* = & 6C_{66}x_1x_2n_1 \left\{ 4 \left[\nu_1 A'_1 (R_{31} - R_{51}x_2^2) + \nu_2 A'_2 (R_{32} - R_{52}x_2^2) - \right. \right. \\
& 2 \left(\frac{D_{71}}{R_1^5} + \frac{D_{72}}{R_2^5} \right) + DR_{53}(x_2^2 - x_1^2) \left. \right\} + \\
& C_{66}n_2 \left\{ D [2R_{13} - 4R_{33}x_2^2 + 3R_{53}x_1^2(x_1^2 - x_2^2)] - \right. \\
& 8 \left[\nu_1 A'_1 (-R_{11} + R^2 R_{31} - 3R_{51}x_1^2x_2^2) + \right. \\
& \left. \left. \nu_2 A'_2 (-R_{12} + R^2 R_{32} - 3R_{52}x_1^2x_2^2) \right] \right\} + \\
& C_{66}x_2n_3 \left\{ \frac{1}{4\pi} [-2R_{23} + R_{43}(x_2^2 - x_1^2)] + \right. \\
& \left. 4C_{44} \left[A'_1 D_{31} (-R_{21} + R_{41}x_1^2) + A'_2 D_{32} (-R_{22} + R_{42}x_1^2) \right] \right\} \quad (D.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{131}^* = & C_{44}x_1n_1 \left\{ 3x_3 \left[\frac{\nu_1^2}{R_1^5} (A_1 D_{41} - D_{71}) + \frac{\nu_2^2}{R_2^5} (A_2 D_{42} - D_{72}) \right] + \right. \\
& 2C_{66} [\nu_1 D_{61} (R_{21} - R_{41}x_2^2) + \nu_2 D_{62} (R_{22} - R_{42}x_2^2) - \\
& \left. \nu_3 D (R_{23} - R_{43}x_2^2)] \right\} + \\
& C_{44}C_{66}x_2n_2 \left\{ -2 [\nu_1 D_{61} (R_{21} - R_{41}x_1^2) + \nu_2 D_{62} (R_{22} - R_{42}x_1^2)] - \right. \\
& \left. \nu_3 D [2R_{23} - R_{43}(x_1^2 - x_2^2)] \right\} - \\
& C_{44}n_3 \left\{ -C_{44} \left[\frac{D_{61}D_{31}}{R_1^3} \left(1 - \frac{3x_1^2}{R_1^2} \right) + \frac{D_{62}D_{32}}{R_2^3} \left(1 - \frac{3x_1^2}{R_2^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \frac{\nu_3}{4\pi R_3^3} \left(1 - \frac{3x_2^2}{R_3^2} \right) \right\} \quad (D.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{112}^* = & 3C_{66}x_1x_2n_1 \left\{ -4\nu_1A_1' [R_{31}(C_{11} + C_{12}) - R_{51}(C_{11}x_1^2 + C_{12}x_2^2)] - \right. \\
& 4\nu_2A_2' [R_{32}(C_{11} + C_{12}) - R_{52}(C_{11}x_1^2 + C_{12}x_2^2)] + \\
& DR_{53}(C_{11} - C_{12})(x_2^2 - x_1^2) - 2C_{13} \left(\frac{A_1\nu_1^2}{R_1^5} + \frac{A_2\nu_2^2}{R_2^5} \right) \left. \right\} + \\
& n_2 \left\{ (C_{11} + C_{12}) \left(\frac{D_{71}}{R_1^3} + \frac{D_{72}}{R_2^3} \right) - 3(C_{11}x_1^2 + C_{12}x_2^2) \left(\frac{D_{71}}{R_1^5} + \frac{D_{72}}{R_2^5} \right) \right. + \\
& 4C_{66} \left[A_1'\nu_1 [-R_{11}(3C_{11} + C_{12}) + R_{31}(6C_{11}x_1^2 + C_{12}R^2) - \right. \\
& 3R_{51}x_1^2 (C_{11}x_1^2 + C_{12}x_2^2)] + A_2'\nu_2 [-R_{12}(3C_{11} + C_{12}) + \\
& R_{32}(6C_{11}x_1^2 + C_{12}R^2) - 3R_{52}x_1^2(C_{11}x_1^2 + C_{12}x_2^2)] \left. \right] + \quad (D.4) \\
& 2C_{66}D(C_{11} - C_{12})(-R_{13} + R_{33}R^2 - 3R_{53}x_1^2x_2^2) - \\
& C_{13} \left[\frac{D_{41}A_1\nu_1^2}{R_1^3} \left(1 - \frac{3z_1^2}{R_1^2} \right) + \frac{D_{42}A_2\nu_2^2}{R_2^3} \left(1 - \frac{3z_2^2}{R_2^2} \right) \right] - \\
& 2C_{66}C_{13} \left[\frac{A_1\nu_1^2}{R_1^3} \left(1 - \frac{3x_1^2}{R_1^2} \right) + \frac{A_2\nu_2^2}{R_2^3} \left(1 - \frac{3x_2^2}{R_2^2} \right) \right] \left. \right\} + \\
& x_2n_3 \left\{ 2C_{44}A_1'D_{31} [-R_{21}(C_{11} + 3C_{12}) + R_{41}(C_{11}x_1^2 + C_{12}x_2^2)] + \right. \\
& 2C_{44}A_2'D_{32} [-R_{22}(C_{11} + 3C_{12}) + R_{42}(C_{11}x_1^2 + C_{12}x_2^2)] + \\
& \left. \frac{C_{11} - C_{12}}{4\pi} (R_{23} - R_{43}x_1^2) - 3C_{44}C_{13}x_3 \left(\frac{D_{31}A_1\nu_1^2}{R_1^5} + \frac{D_{32}A_2\nu_2^2}{R_2^5} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{122}^* = & C_{66}^2n_1 \left\{ 8 \left[\nu_1A_1'(R_{11} - R_{31}R^2 + R_{51}x_1^2x_2^2) + \right. \right. \\
& \left. \nu_2A_2'(R_{12} - R_{32}R^2 + R_{52}x_1^2x_2^2) \right] + \\
& D \left[2R_{13} - 4R_{33}x_2^2 + 3R_{53}x_1^2(x_2^2 - x_1^2) \right] \left. \right\} + \\
& 6C_{66}n_2 \left\{ C_{66} \left[4\nu_1A_1'(R_{31} - R_{51}x_1^2) + 4\nu_2A_2'(R_{32} - R_{52}x_1^2) + \right. \right. \\
& \left. DR_{53}x_1^2x_2^2(x_1^2 - x_2^2) \right] - x_1^2x_2^2 \left(\frac{D_{71}}{R_1^5} + \frac{D_{72}}{R_2^5} \right) \left. \right\} + \\
& C_{66}^2x_1n_3 \left\{ 4C_{44} \left[A_1'D_{31}(-R_{21} + R_{41}x_2^2) + A_2'D_{32}(-R_{22} + R_{42}x_2^2) \right] + \right. \\
& \left. \frac{1}{4\pi} [-2R_{23} + R_{43}(x_1^2 - x_2^2)] \right\} \quad (D.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{132}^* = & C_{44}C_{66}x_2n_1 \left\{ 2 \left[\nu_1 D_{61}(-R_{21} + R_{41}x_1^2) + \nu_2 D_{62}(-R_{22} + R_{42}x_1^2) \right] + \right. \\
& \left. \nu_3 D \left[-2R_{23} + R_{43}(x_2^2 - x_1^2) \right] \right\} + \\
& C_{44}x_1n_2 \left\{ 3x_3 \left[\frac{\nu_1^2}{R_1^5}(D_{41}A_1 - D_{71}) + \frac{\nu_2^2}{R_2^5}(D_{42}A_2 - D_{72}) \right] + \right. \\
& 2C_{66} \left[\nu_1 D_{61}(3R_{21} - R_{41}x_1^2) + \nu_2 D_{62}(3R_{22} - R_{42}x_1^2) + \right. \\
& \left. \left. \nu_3 D(R_{23} - R_{43}x_2^2) \right] \right\} + \\
& 3C_{44}x_1x_2n_3 \left\{ C_{44} \left(\frac{D_{41}D_{31}}{R_1^5} + \frac{D_{42}D_{32}}{R_2^5} \right) - \frac{\nu_3}{4\pi R_3^5} \right\} \quad (D.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{113}^* = & x_1n_1 \left\{ 2C_{44}A_1' D_{31} \left[-R_{21}(3C_{11} + C_{12}) + R_{41}(C_{11}x_1^2 + C_{12}x_2^2) \right] + \right. \\
& 2C_{44}A_2' D_{32} \left[-R_{22}(3C_{11} + C_{12}) + R_{42}(C_{11}x_1^2 + C_{12}x_2^2) \right] + \\
& \left. \frac{C_{12} - C_{11}}{4\pi} (R_{23} - R_{43}x_2^2) - 3C_{44}C_{13}x_3 \left(\frac{D_{31}A_1\nu_1^2}{R_1^5} + \frac{D_{32}A_2\nu_2^2}{R_2^5} \right) \right\} + \\
& x_2n_2 \left\{ 2C_{44}A_1' D_{31} \left[-R_{21}(C_{11} + 3C_{12}) + R_{41}(C_{11}x_1^2 + C_{12}x_2^2) \right] + \right. \\
& 2C_{44}A_2' D_{32} \left[-R_{22}(C_{11} + 3C_{12}) + R_{42}(C_{11}x_1^2 + C_{12}x_2^2) \right] + \\
& \left. \frac{C_{11} - C_{12}}{4\pi} (R_{23} - R_{43}x_1^2) - 3C_{44}C_{13}x_3 \left(\frac{D_{31}A_1\nu_1^2}{R_1^5} + \frac{D_{32}A_2\nu_2^2}{R_2^5} \right) \right\} + \\
& n_3 \left\{ \frac{2\nu_1 A_1' D_{51}}{R_1^3} \left(C_{11} + C_{12} - 3 \frac{C_{11}x_1^2 + C_{12}x_2^2}{R_1^2} \right) + \right. \\
& \frac{2\nu_2 A_2' D_{52}}{R_2^3} \left(C_{11} + C_{12} - 3 \frac{C_{11}x_1^2 + C_{12}x_2^2}{R_2^2} \right) - \\
& \left. C_{13} \left[\frac{D_{51}A_1\nu_1^2}{R_1^3} \left(1 - \frac{3z_1^2}{R_1^2} \right) + \frac{D_{52}A_2\nu_2^2}{R_2^3} \left(1 - \frac{3z_2^2}{R_2^2} \right) \right] \right\} \quad (D.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{123}^* = & C_{66}x_2n_1 \left\{ 4C_{44} \left[A_1' D_{31}(-R_{21} + x_1^2 R_{41}) + A_2' D_{32}(-R_{22} + x_1^2 R_{42}) \right] + \right. \\
& \left. \frac{1}{4\pi} [-2R_{23} + R_{43}(x_2^2 - x_1^2)] \right\} + \\
& C_{66}x_1n_2 \left\{ 4C_{44} \left[A_1' D_{31}(-R_{21} + x_2^2 R_{41}) + A_2' D_{32}(-R_{22} + x_2^2 R_{42}) \right] + \right. \\
& \left. \frac{1}{4\pi} [-2R_{23} + R_{43}(x_1^2 - x_2^2)] \right\} - \\
& 12C_{66}x_1x_2n_3 \left\{ \frac{D_{51}B_1'\nu_1}{R_1^5} + \frac{D_{52}B_2'\nu_2}{R_2^5} \right\} \tag{D.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{133}^* = & C_{44}n_1 \left\{ \frac{\nu_3}{4\pi R_3^3} \left(-1 + \frac{3x_2^2}{R_3^2} \right) + \right. \\
& \left. C_{44} \left[\frac{D_{31}D_{61}}{R_1^3} \left(-1 + \frac{3x_1^2}{R_1^2} \right) + \frac{D_{32}D_{62}}{R_2^3} \left(-1 + \frac{3x_1^2}{R_2^2} \right) \right] \right\} + \\
& 3C_{44}x_1x_2n_2 \left\{ -\frac{\nu_3}{4\pi R_3^5} + C_{44} \left[\frac{D_{31}D_{61}}{R_1^5} + \frac{D_{32}D_{62}}{R_2^5} \right] \right\} - \\
& 3C_{44}x_1x_3n_3 \left\{ \frac{D_{51}D_{61}\nu_1^2}{R_1^5} + \frac{D_{52}D_{62}\nu_2^2}{R_2^5} \right\} \tag{D.9}
\end{aligned}$$

$$s_{211}^* = s_{121}^*$$

$$\begin{aligned}
s_{221}^* = & n_1 \left\{ (C_{11} + C_{12}) \left(\frac{D_{71}}{R_1^3} + \frac{D_{72}}{R_2^3} \right) - 3(C_{12}x_1^2 + C_{11}x_2^2) \left(\frac{D_{71}}{R_1^5} + \frac{D_{72}}{R_2^5} \right) + \right. \\
& 4C_{66} \left[A'_1 \nu_1 [-R_{11}(3C_{11} + C_{12}) + R_{31}(C_{12}R^2 + 6C_{11}x_2^2) - \right. \\
& 3R_{51}x_2^2 (C_{12}x_1^2 + C_{11}x_2^2)] + A'_2 \nu_2 [-R_{12}(3C_{11} + C_{12}) + \\
& R_{32}(C_{12}R^2 + 6C_{11}x_2^2) - 3R_{52}x_2^2(C_{12}x_1^2 + C_{11}x_2^2)] \left. \right] + \\
& 2C_{66}D(C_{11} - C_{12})(-R_{13} + R_{33}R^2 - 3R_{53}x_1^2x_2^2) - \\
& C_{13} \left[\frac{D_{41}A_1\nu_1^2}{R_1^3} \left(1 - \frac{3z_1^2}{R_1^2} \right) + \frac{D_{42}A_2\nu_2^2}{R_2^3} \left(1 - \frac{3z_2^2}{R_2^2} \right) \right] - \\
& 2C_{66}C_{13} \left[\frac{A_1\nu_1^2}{R_1^3} \left(1 - \frac{3x_2^2}{R_1^2} \right) + \frac{A_2\nu_2^2}{R_2^3} \left(1 - \frac{3x_1^2}{R_2^2} \right) \right] \left. \right\} + \quad (D.10) \\
& 3C_{66}x_1x_2n_2 \left\{ -4A'_1\nu_1 [R_{31}(C_{11} + C_{12}) - R_{51}(C_{12}x_1^2 + C_{11}x_2^2)] - \right. \\
& 4A'_2\nu_2 [R_{32}(C_{11} + C_{12}) - R_{52}(C_{12}x_1^2 + C_{11}x_2^2)] + \\
& D(x_2^2 - x_1^2)(C_{12} - C_{11})R_{53} - 2C_{13} \left(\frac{A_1\nu_1^2}{R_1^5} + \frac{A_2\nu_2^2}{R_2^5} \right) \left. \right\} + \\
& x_1n_3 \left\{ 2C_{44}A'_1D_{31} [-R_{21}(C_{11} + 3C_{12}) + R_{41}(C_{12}x_1^2 + C_{11}x_2^2)] + \right. \\
& 2C_{44}A'_2D_{32} [-R_{22}(C_{11} + 3C_{12}) + R_{42}(C_{12}x_1^2 + C_{11}x_2^2)] + \\
& \left. \frac{C_{11} - C_{12}}{4\pi} (R_{23} - R_{43}x_2^2) - 3C_{44}C_{13}x_3 \left(\frac{D_{31}A_1\nu_1^2}{R_1^5} + \frac{D_{32}A_2\nu_2^2}{R_2^5} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{231}^* = & C_{44}x_2n_1 \left\{ 3x_3 \left[\nu_1^2 \frac{A_1D_{41} - D_{71}}{R_1^5} + \nu_2^2 \frac{A_2D_{42} - D_{72}}{R_2^5} \right] + \right. \\
& 2C_{66} [\nu_1 D_{61}(3R_{21} - R_{41}x_2^2) + \nu_2 D_{62}(3R_{22} - R_{42}x_2^2) + \\
& \left. \nu_3 D(R_{23} - R_{43}x_1^2)] \right\} - \\
& C_{44}C_{66}x_1n_2 \left\{ 2\nu_1 D_{61}(R_{21} - R_{41}x_2^2) + 2\nu_2 D_{62}(R_{22} - R_{42}x_2^2) + \right. \\
& \left. \nu_3 D [2R_{23} + R_{43}(x_2^2 - x_1^2)] \right\} + \\
& 3C_{44}x_1x_2n_3 \left\{ C_{44} \left(\frac{D_{61}D_{31}}{R_1^5} + \frac{D_{62}D_{32}}{R_2^5} \right) - \frac{\nu_3}{4\pi R_3^5} \right\} \quad (D.11)
\end{aligned}$$

$$s_{212}^* = s_{122}^*$$

$$\begin{aligned}
 s_{222}^* = & 3C_{66}x_1x_2n_1 \left\{ -4A'_1\nu_1 [R_{31}(C_{11} + C_{12}) - R_{51}(C_{12}x_1^2 + C_{11}x_2^2)] - \right. \\
 & 4A'_2\nu_2 [R_{32}(C_{11} + C_{12}) - R_{52}(C_{12}x_1^2 + C_{11}x_2^2)] + \\
 & \left. D(x_2^2 - x_1^2)(C_{12} - C_{11})R_{53} - 2C_{13} \left(\frac{A_1\nu_1^2}{R_1^5} + \frac{A_2\nu_2^2}{R_2^3} \right) \right\} + \\
 & n_2 \left\{ (C_{11} + C_{12}) \left(\frac{D_{71}}{R_1^3} + \frac{D_{72}}{R_2^3} \right) - 3(C_{12}x_1^2 + C_{11}x_2^2) \left(\frac{D_{71}}{R_1^5} + \frac{D_{72}}{R_2^5} \right) \right\} + \\
 & 4C_{66} \left[A'_1\nu_1 [-R_{11}(C_{11} + 3C_{12}) + R_{31}(C_{11}R^2 + 6C_{12}x_1^2)] - \right. \\
 & 3R_{51}x_1^2 (C_{12}x_1^2 + C_{11}x_2^2)] + A'_2\nu_2 [-R_{12}(C_{11} + 3C_{12}) + \\
 & \left. R_{32}(C_{11}R^2 + 6C_{12}x_1^2) - 3R_{52}x_1^2(C_{12}x_1^2 + C_{11}x_2^2)] \right] + \quad (D.12) \\
 & 2C_{66}D(C_{12} - C_{11})(-R_{13} + R^2R_{33} - 3x_1^2x_2^2R_{53}) - \\
 & C_{13} \left[\frac{D_{41}A_1\nu_1^2}{R_1^3} \left(1 - \frac{3x_1^2}{R_1^2} \right) + \frac{D_{42}A_2\nu_2^2}{R_2^3} \left(1 - \frac{3x_2^2}{R_2^2} \right) \right] - \\
 & 2C_{66}C_{13} \left[\frac{A_1\nu_1^2}{R_1^3} \left(1 - \frac{3x_1^2}{R_1^2} \right) + \frac{A_2\nu_2^2}{R_2^3} \left(1 - \frac{3x_2^2}{R_2^2} \right) \right] \left\} + \\
 & x_2n_3 \left\{ 2C_{44}A'_iD_{31} [-R_{21}(3C_{11} + C_{12}) + R_{41}(C_{12}x_1^2 + C_{11}x_2^2)] + \right. \\
 & 2C_{44}A'_2D_{32} [-R_{22}(3C_{11} + C_{12}) + R_{42}(C_{12}x_1^2 + C_{11}x_2^2)] + \\
 & \left. \frac{C_{12} - C_{11}}{4\pi} (R_{23} - x_1^2R_{43}) - 3C_{44}C_{13}x_3 \left(\frac{D_{31}A_1\nu_1^2}{R_1^5} + \frac{D_{32}A_2\nu_2^2}{R_2^5} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_{232}^* = & C_{44}C_{66}x_1n_1 \left\{ 2 [\nu_1D_{61}(-R_{21} + R_{41}x_2^2) + \nu_2D_{62}(-R_{22} + R_{42}x_2^2)] + \right. \\
 & \left. \nu_3D [-2R_{23} + R_{43}(x_1^2 - x_2^2)] \right\} + \\
 & C_{44}x_2n_2 \left\{ 3x_3 \left[\frac{\nu_1^2}{R_1^5} (D_{41}A_1 - D_{71}) + \frac{\nu_2^2}{R_2^5} (D_{42}A_2 - D_{72}) \right] + \right. \\
 & 2C_{66} [\nu_1D_{61}(R_{21} - R_{41}x_1^2) + \nu_2D_{62}(R_{22} - R_{42}x_1^2) - \\
 & \left. \nu_3D(R_{23} - R_{43}x_1^2)] \right\} + \\
 & C_{44}n_3 \left\{ -C_{44} \left[\frac{D_{61}D_{31}}{R_1^3} \left(1 - \frac{3x_2^2}{R_1^2} \right) + \frac{D_{62}D_{32}}{R_2^3} \left(1 - \frac{3x_2^2}{R_2^2} \right) \right] - \right. \\
 & \left. \frac{\nu_3}{4\pi R_3^3} \left(1 - \frac{3x_1^2}{R_3^2} \right) \right\} \quad (D.13)
 \end{aligned}$$

$$s_{213}^* = s_{123}^*$$

$$\begin{aligned}
s_{223}^* = & x_1 n_1 \left\{ 2C_{44} A_1' D_{31} [-R_{21}(C_{11} + 3C_{12}) + R_{41}(C_{12}x_1^2 + C_{11}x_2^2)] + \right. \\
& 2C_{44} A_2' D_{32} [-R_{22}(C_{11} + 3C_{12}) + R_{42}(C_{12}x_1^2 + C_{11}x_2^2)] + \\
& \left. \frac{C_{11} - C_{12}}{4\pi} (R_{23} - R_{43}x_2^2) - 3C_{44} C_{13} x_3 \left(\frac{D_{31} A_1 \nu_1^2}{R_1^5} + \frac{D_{32} A_2 \nu_2^2}{R_2^5} \right) \right\} + \\
& x_2 n_2 \left\{ 2C_{44} A_1' D_{31} [-R_{21}(3C_{11} + C_{12}) + R_{41}(C_{12}x_1^2 + C_{11}x_2^2)] + \right. \\
& 2C_{44} A_2' D_{32} [-R_{22}(3C_{11} + C_{12}) + R_{42}(C_{12}x_1^2 + C_{11}x_2^2)] + \\
& \left. \frac{C_{12} - C_{11}}{4\pi} (R_{23} - R_{43}x_1^2) - 3C_{44} C_{13} x_3 \left(\frac{D_{31} A_1 \nu_1^2}{R_1^5} + \frac{D_{32} A_2 \nu_2^2}{R_2^5} \right) \right\} + \\
& n_3 \left\{ \frac{2\nu_1 A_1' D_{51}}{R_1^3} \left(C_{11} + C_{12} - 3 \frac{C_{12}x_1^2 + C_{11}x_2^2}{R_1^2} \right) + \right. \\
& \frac{2\nu_2 A_2' D_{52}}{R_2^3} \left(C_{11} + C_{12} - 3 \frac{C_{12}x_1^2 + C_{11}x_2^2}{R_2^2} \right) - \\
& \left. C_{13} \left[\frac{D_{51} A_1 \nu_1^2}{R_1^3} \left(1 - \frac{3z_1^2}{R_1^2} \right) + \frac{D_{52} A_2 \nu_2^2}{R_2^3} \left(1 - \frac{3z_2^2}{R_2^2} \right) \right] \right\} \quad (D.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{233}^* = & C_{44} x_1 x_2 n_1 \left\{ 3C_{44} \left(\frac{D_{61} D_{31}}{R_1^5} + \frac{D_{61} D_{31}}{R_1^5} \right) - 3 \frac{\nu_3}{4\pi R_3^5} \right\} - \\
& C_{44} n_2 \left\{ C_{44} \left[\frac{D_{61} D_{31}}{R_1^3} \left(1 - \frac{3x_2^2}{R_1^2} \right) + \frac{D_{62} D_{32}}{R_2^3} \left(1 - \frac{3x_2^2}{R_2^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \frac{\nu_3}{4\pi R_3^3} \left(1 - \frac{3x_1^2}{R_3^2} \right) \right\} - \\
& 3C_{44} x_2 x_3 n_3 \left\{ \frac{D_{61} D_{51} \nu_1^2}{R_1^5} + \frac{D_{62} D_{52} \nu_2^2}{R_2^5} \right\} \quad (D.15)
\end{aligned}$$

$$s_{311}^* = s_{131}^*$$

$$s_{321}^* = s_{231}^*$$

$$\begin{aligned}
s_{331}^* = & n_1 \left\{ C_{13} \left[\frac{D_{81}}{R_1^3} \left(2 - 3 \frac{R^2}{R_1^2} \right) + \frac{D_{82}}{R_2^3} \left(2 - 3 \frac{R^2}{R_2^2} \right) \right] + \right. \\
& 4C_{66}C_{13} \left[A'_1 \nu_1 \left[-4R_{11} + R_{31}(x_1^2 + 7x_2^2) - 3R_{51}x_2^2R^2 \right] + \right. \\
& \left. A'_2 \nu_2 \left[-4R_{12} + R_{32}(x_1^2 + 7x_2^2) - 3R_{52}x_2^2R^2 \right] \right] + \\
& C_{33} \left[-2C_{66} \left[\frac{\nu_1^2 A_1}{R_1^3} \left(1 - 3 \frac{x_2^2}{R_1^2} \right) + \frac{\nu_2^2 A_2}{R_2^3} \left(1 - 3 \frac{x_2^2}{R_2^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \frac{\nu_1^2 A_1 D_{41}}{R_1^3} \left(1 - 3 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) - \frac{\nu_2^2 A_2 D_{42}}{R_2^3} \left(1 - 3 \frac{z_2^2}{R_2^2} \right) \right] \left. \right\} - \\
& 6C_{66}x_1x_2n_2 \left\{ 2C_{13} \left[\nu_1 A'_1 (2R_{31} - R_{51}R^2) + \nu_2 A'_2 (2R_{32} - R_{52}R^2) \right] - \right. \\
& \left. C_{33} \left(\frac{\nu_1^2 A_1}{R_1^5} + \frac{\nu_2^2 A_2}{R_2^5} \right) \right\} + \\
& C_{44}x_1n_3 \left\{ 2C_{13} \left[D_{31} A'_1 (-4R_{21} + R_{41}R^2) + D_{32} A'_2 (-4R_{22} + R_{42}R^2) \right] - \right. \\
& \left. 3x_3 C_{33} \left(\frac{\nu_1^2 A_1 D_{31}}{R_1^5} + \frac{\nu_2^2 A_2 D_{32}}{R_2^5} \right) \right\} \tag{D.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{332}^* = & -6C_{66}x_1x_2n_1 \left\{ 2C_{13} \left[\nu_1 A'_1 (2R_{31} - R_{51}R^2) + \nu_2 A'_2 (2R_{32} - R_{52}R^2) \right] - \right. \\
& \left. C_{33} \left(\frac{\nu_1^2 A_1}{R_1^5} + \frac{\nu_2^2 A_2}{R_2^5} \right) \right\} + \\
& n_2 \left\{ C_{13} \left[\frac{D_{81}}{R_1^3} \left(2 - 3 \frac{R^2}{R_1^2} \right) + \frac{D_{82}}{R_2^3} \left(2 - 3 \frac{R^2}{R_2^2} \right) \right] + \right. \\
& 4C_{66}C_{13} \left[A'_1 \nu_1 \left[-4R_{11} + R_{31}(7x_1^2 + x_2^2) - 3R_{51}x_1^2R^2 \right] + \right. \\
& \left. A'_2 \nu_2 \left[-4R_{12} + R_{32}(7x_1^2 + x_2^2) - 3R_{52}x_1^2R^2 \right] \right] + \\
& C_{33} \left[-2C_{66} \left[\frac{\nu_1^2 A_1}{R_1^3} \left(1 - 3 \frac{x_1^2}{R_1^2} \right) + \frac{\nu_2^2 A_2}{R_2^3} \left(1 - 3 \frac{x_1^2}{R_2^2} \right) \right] - \right. \\
& \left. \frac{\nu_1^2 A_1 D_{41}}{R_1^3} \left(1 - 3 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) - \frac{\nu_2^2 A_2 D_{42}}{R_2^3} \left(1 - 3 \frac{z_2^2}{R_2^2} \right) \right] \left. \right\} + \\
& C_{44}x_2n_3 \left\{ 2C_{13} \left[D_{31} A'_1 (-4R_{21} + R_{41}R^2) + D_{32} A'_2 (-4R_{22} + R_{42}R^2) \right] - \right. \\
& \left. 3x_3 C_{33} \left(\frac{\nu_1^2 A_1 D_{31}}{R_1^5} + \frac{\nu_2^2 A_2 D_{32}}{R_2^5} \right) \right\} \tag{D.17}
\end{aligned}$$

$$s_{312}^* = s_{132}^*$$

$$s_{322}^* = s_{232}^* \quad s_{313}^* = s_{133}^* \quad s_{323}^* = s_{233}^*$$

$$\begin{aligned}
 s_{333}^* = & C_{44}x_1n_1 \left\{ 2C_{13} \left[D_{31}A'_1(-4R_{21} + R_{41}R^2) + D_{32}A'_2(-4R_{22} + R_{42}R^2) \right] \right. \\
 & \left. - 3C_{33}x_3 \left(\frac{\nu_1^2 A_1 D_{31}}{R_1^5} + \frac{\nu_2^2 A_2 D_{32}}{R_2^5} \right) \right\} + \\
 & C_{44}x_2n_2 \left\{ 2C_{13} \left[D_{31}A'_1(-4R_{21} + R_{41}R^2) + D_{32}A'_2(-4R_{22} + R_{42}R^2) \right] \right. \\
 & \left. - 3C_{33}x_3 \left(\frac{\nu_1^2 A_1 D_{31}}{R_1^5} + \frac{\nu_2^2 A_2 D_{32}}{R_2^5} \right) \right\} + \\
 & n_3 \left\{ -2C_{13} \left[\frac{\nu_1 A'_1 D_{51}}{R_1^3} \left(1 - 3 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) + \frac{\nu_2 A'_2 D_{52}}{R_2^3} \left(1 - 3 \frac{z_2^2}{R_2^2} \right) \right] - \right. \\
 & \left. C_{33} \left[\frac{\nu_1^2 A_1 D_{51}}{R_1^3} \left(1 - 3 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) + \frac{\nu_2^2 A_2 D_{52}}{R_2^3} \left(1 - 3 \frac{z_2^2}{R_2^2} \right) \right] \right\} \quad (D.18)
 \end{aligned}$$

CASO 2

Materiales cuyas constantes elásticas cumplen

$$P_{13} - C_{13} - 2C_{44} = 0$$

$$A_1 = A_2 = 0$$

$$B_1 = B_2 = -\frac{C_{13} + C_{44}}{16\pi C_{11} C_{44}}$$

$$A'_1 = A'_2 = \frac{1}{16\pi C_{11}}$$

$$B'_1 = B'_2 = \frac{1}{16\pi C_{44}\nu_1^2}$$

$$\begin{aligned}
s_{111}^* = & n_1 \left\{ \frac{\nu_3}{2\pi} (C_{11} - C_{12})(R_{13} - R_{33}R^2 + 3R_{53}x_1^2x_2^2) + \right. & (D.19) \\
& \frac{\nu_1}{2\pi} \frac{1}{R_1^3} \left(C_{11} + C_{12} - 3 \frac{x_1^2 C_{11} + x_2^2 C_{12}}{R_1^2} \right) + \\
& \frac{\nu_3^2}{2\pi\nu_1} C_{11} (-R_{11} + R_{31}R^2 - 3R_{51}x_1^2x_2^2) + \\
& 3 \frac{\nu_3^2}{2\pi\nu_1} C_{12} (-R_{11} + 2R_{31}x_2^2 - R_{51}x_2^4) + \\
& \frac{\nu_3^2}{\nu_1} D_1 \frac{1}{R_1^3} \left(C_{11} + 3C_{12} - 3 \frac{x_1^2 C_{11} + 3x_2^2 C_{12}}{R_1^2} \right) - \\
& \nu_1 D_2 \frac{1}{R_1^3} \left(C_{11} + C_{12} - 3 \frac{x_1^2 C_{11} + x_2^2 C_{12}}{R_1^2} \right) - \\
& 3\nu_1 D_1 \frac{z_1^2}{R_1^5} \left(C_{11} + C_{12} - 5 \frac{x_1^2 C_{11} + x_2^2 C_{12}}{R_1^2} \right) - \\
& 3 \frac{\nu_3^2}{\nu_1} D_1 \frac{x_2^2}{R_1^5} \left(C_{11} + 3C_{12} - 5 \frac{x_1^2 C_{11} + x_2^2 C_{12}}{R_1^2} \right) + \\
& C_{13} \left(\frac{C_{13}\nu_1^2}{4\pi P_{13}} + (\nu_1^2 + \nu_3^2) D_1 \right) \frac{1}{R_1^3} \left(1 - 3 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) - \\
& 3C_{13} D_1 \frac{1}{R_1^5} \left[\nu_1^2 z_1^2 \left(3 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) + \nu_3^2 x_2^2 \left(1 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right] \left. \right\} + \\
& x_1 x_2 n_2 \left\{ 3 \frac{\nu_3^2}{\nu_1} D_1 \frac{1}{R_1^5} \left(3(C_{11} + C_{12}) - 5 \frac{x_1^2 C_{11} + x_2^2 C_{12}}{R_1^2} \right) + \right. \\
& 3 \frac{\nu_3^2}{2\pi\nu_1} (-R_{31}(C_{11} + C_{12}) + R_{51}(x_1^2 C_{11} + x_2^2 C_{12})) + \\
& 3 \frac{\nu_3}{4\pi} (C_{11} - C_{12}) R_{53} (x_2^2 - x_1^2) + 3\nu_3^2 D_1 C_{13} \frac{1}{R_1^5} \left(1 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \left. \right\} + \\
& x_1 n_3 \left\{ 3D_1 \frac{z_1}{R_1^5} \left(3C_{11} + C_{12} - 5 \frac{x_1^2 C_{11} + x_2^2 C_{12}}{R_1^2} \right) + \right. \\
& \frac{1}{4\pi} (R_{21}(-3C_{11} + C_{12}) + R_{41}(C_{11}x_1^2 - C_{12}x_2^2)) + \\
& \left. \frac{1}{4\pi} (C_{11} + C_{12})(-R_{23} + x_2^2 R_{43}) + 3\nu_1 C_{13} \frac{z_1}{R_1^5} \left[-D_2 + D_1 \left(2 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{121}^* = & 3C_{66}x_1x_2n_1 \left\{ -\frac{\nu_1}{\pi} \frac{1}{R_1^5} + \frac{\nu_3^2}{\pi\nu_1} (R_{31} - R_{51}x_2^2) + \frac{\nu_3}{2\pi} (2R_{33} - R^2R_{53}) + \right. \\
& \left. \frac{2}{R_1^5} \left(-3\frac{\nu_3^2}{\nu_1} D_1 + \nu_1 D_2 + 5\nu_1 D_1 \frac{z_1^2}{R_1^2} + 5\frac{\nu_3^2}{\nu_1} D_1 \frac{x_2^2}{R_1^2} \right) \right\} + \\
& C_{66}n_2 \left\{ 2\frac{\nu_3^2}{\nu_1} D_1 \frac{1}{R_1^3} \left(-1 + 3\frac{R^2}{R_1^2} - 15\frac{x_1^2x_2^2}{R_1^4} \right) + \right. \\
& \left. \frac{\nu_3^2}{\pi\nu_1} (R_{11} - R_{31}R^2 + 3R_{51}x_1^2x_2^2) + \right. \\
& \left. \frac{\nu_3}{\pi} (R_{13} - R_{33}R^2) + 3\frac{\nu_3}{4\pi} R_{53}(x_1^2 - x_2^2) \right\} + \\
& C_{66}x_2n_3 \left\{ 6D_1 \frac{z_1^2}{R_1^5} \left(1 - 5\frac{x_1^2}{R_1^2} \right) + \frac{1}{4\pi} R_{53}(x_1^2 - x_2^2)^2 \right\} \quad (D.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{131}^* = & C_{44}x_1n_1 \left\{ 3\nu_1^2 \frac{z_1}{R_1^5} \left(\frac{-1}{2\pi} + D_2 \right) + \frac{\nu_3^2}{2\pi} (R_{21} - R_{41}x_2^2) - \frac{\nu_3^2}{2\pi} (R_{23} - R_{43}x_2^2) + \right. \\
& 3D_1 \frac{z_1}{R_1^5} \left(-\nu_3^2 - 2\nu_1^2 + 5\frac{\nu_3^2x_2^2 + \nu_1^2z_1^2}{R_1^2} \right) - \\
& \left. 3 \left(\frac{C_{13}\nu_1^2}{4\pi P_{13}} + (\nu_1^2 + \nu_3^2)D_1 \right) \frac{x_3}{R_1^5} + 15D_1 \frac{x_3}{R_1^7} (\nu_1^2z_1^2 + \nu_3^2x_2^2) \right\} + \\
& C_{44}x_2n_2 \left\{ 3\nu_3^2(1 + \nu_1)D_1 \frac{x_3}{R_1^5} \left(1 - 5\frac{x_1^2}{R_1^2} \right) - \frac{\nu_3^2}{2\pi} (R_{21} - R_{41}x_1^2) + \right. \\
& \left. \frac{\nu_3^2}{4\pi} [-2R_{23} + R_{43}(x_2^2 - x_1^2)] \right\} + \\
& C_{44}n_3 \left\{ \left(\nu_1 D_1 + \frac{\nu_1}{4\pi} - D_2 \right) \frac{1}{R_1^3} \left(-1 + 3\frac{x_1^2}{R_1^2} \right) + \right. \\
& \left. 3D_1(1 + \nu_1) \frac{z_1^2}{R_1^5} \left(1 - 5\frac{x_1^2}{R_1^2} \right) + \frac{\nu_3}{4\pi} \frac{1}{R_3^3} \left(-1 + 3\frac{x_2^2}{R_3^2} \right) \right\} \quad (D.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{112}^* = & \quad x_1 x_2 n_1 \left\{ 3\nu_3^2 C_{13} D_1 \frac{1}{R_1^5} \left(1 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) + 3 \frac{\nu_3}{4\pi} (C_{11} - C_{12}) R_{53} (x_2^2 - x_1^2) + \right. \\
& 3 \frac{\nu_3^2}{\nu_1} D_1 \frac{1}{R_1^5} \left(3(C_{11} + C_{12}) - 5 \frac{x_1^2 C_{11} + x_2^2 C_{12}}{R_1^2} \right) - \\
& \left. 3 \frac{\nu_3^2}{2\pi\nu_1} (R_{31}(C_{11} + C_{12}) - R_{51}(x_1^2 C_{11} + x_2^2 C_{12})) \right\} + \\
& n_2 \left\{ \frac{\nu_1}{2\pi} \frac{1}{R_1^3} \left(C_{11} + C_{12} - 3 \frac{x_1^2 C_{11} + x_2^2 C_{12}}{R_1^2} \right) + \right. \tag{D.22} \\
& \frac{\nu_3^2}{2\pi\nu_1} C_{12} (-R_{11} + R_{31} R^2 - 3R_{51} x_1^2 x_2^2) + \\
& 3 \frac{\nu_3^2}{2\pi\nu_1} C_{11} (-R_{11} + 2R_{31} x_1^2 - R_{51} x_1^4) + \\
& \frac{\nu_3}{2\pi} (C_{12} - C_{11}) (R_{13} - R_{33} R^2 + 3R_{53} x_1^2 x_2^2) + \\
& \frac{\nu_3^2}{\nu_1} D_1 \frac{1}{R_1^3} \left(3C_{11} + C_{12} - 3 \frac{3x_1^2 C_{11} + x_2^2 C_{12}}{R_1^2} \right) - \\
& \nu_1 D_2 \frac{1}{R_1^3} \left(C_{11} + C_{12} - 3 \frac{x_1^2 C_{11} + x_2^2 C_{12}}{R_1^2} \right) - \\
& 3\nu_1 D_1 \frac{z_1^2}{R_1^5} \left(C_{11} + C_{12} - 5 \frac{x_1^2 C_{11} + x_2^2 C_{12}}{R_1^2} \right) - \\
& \frac{3\nu_3^2}{\nu_1} D_1 \frac{x_1^2}{R_1^5} \left(3C_{11} + C_{12} - 5 \frac{x_1^2 C_{11} + x_2^2 C_{12}}{R_1^2} \right) + \\
& C_{13} \left(\frac{C_{13}\nu_1^2}{4\pi P_{13}} + (\nu_1^2 + \nu_3^2) D_1 \right) \frac{1}{R_1^3} \left(1 - 3 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) - \\
& \left. 3C_{13} D_1 \frac{1}{R_1^5} \left[\nu_1^2 z_1^2 \left(3 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) + \nu_3^2 x_1^2 \left(1 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right] \right\} + \\
& x_2 n_3 \left\{ 3D_1 \frac{z_1}{R_1^5} \left(C_{11} + 3C_{12} - 5 \frac{x_1^2 C_{11} + x_2^2 C_{12}}{R_1^2} \right) + \right. \\
& \frac{1}{4\pi} (R_{21}(C_{11} - 3C_{12}) + R_{41}(-C_{11}x_1^2 + C_{12}x_2^2)) + \\
& \left. \frac{1}{4\pi} (C_{11} + C_{12})(-R_{23} + R_{43}x_1^2) + 3\nu_1 C_{13} \frac{z_1}{R_1^5} \left[-D_2 + D_1 \left(2 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{122}^* = & C_{66}n_1 \left\{ 2 \frac{\nu_3^2 D_1}{\nu_1} \frac{1}{R_1^3} \left(-1 + 3 \frac{R^2}{R_1^2} - 15 \frac{x_1^2 x_2^2}{R_1^4} \right) + \frac{\nu_3}{\pi} (R_{13} - R_{33} R^2) + \right. \\
& \left. 3 \frac{\nu_3}{4\pi} R_{53} (x_1^2 - x_2^2)^2 + \frac{\nu_3^2}{\nu_1 \pi} (R_{11} - R_{31} R^2 + 3 R_{51} x_1^2 x_2^2) \right\} + \\
& C_{66} x_1 x_2 n_2 \left\{ \frac{3}{R_1^5} \left(2 \nu_1 D_2 - \frac{\nu_1}{\pi} - 6 \frac{\nu_3^2 D_1}{\nu_1} \right) + 3 \frac{\nu_3^2}{\nu_1 \pi} (R_{31} - R_{51} x_1^2) + \right. \\
& \left. 3 \frac{\nu_3}{2\pi} R_{53} (x_1^2 - x_2^2) + 30 \frac{D_1}{R_1^7} \left(\nu_1 z_1^2 + \frac{\nu_3^2}{\nu_1} x_1^2 \right) \right\} + \\
& C_{66} x_1 n_3 \left\{ 6 \nu_1 D_1 \frac{z_1}{R_1^5} \left(1 - 5 \frac{x_2^2}{R_1^2} \right) + \frac{1}{4\pi} (-4 R_{23} + R_{43} R^2) \right\} \quad (D.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{132}^* = & C_{44} x_2 n_1 \left\{ 3 D_1 \nu_3^2 (1 + \nu_1) \frac{x_3}{R_1^5} \left(1 - 5 \frac{x_1^2}{R_1^2} \right) - \right. \\
& \left. \frac{\nu_3^2}{2\pi} (R_{21} - R_{41} x_1^2) + \frac{\nu_3^2}{4\pi} [-2 R_{23} + R_{43} (x_2^2 - x_1^2)] \right\} + \\
& C_{44} x_1 n_2 \left\{ 3 \nu_1^2 \frac{z_1}{R_1^5} \left(\frac{-1}{2\pi} + D_2 \right) + \frac{\nu_3^2}{2\pi} (3 R_{21} - R_{41} x_1^2) + \right. \\
& \left. \frac{\nu_3^2}{2\pi} (R_{23} - R_{43} x_2^2) + 3 \nu_3^2 D_1 \frac{z_1}{R_1^5} \left(-3 + 5 \frac{x_1^2}{R_1^2} \right) - \right. \\
& \left. 3 \left(\frac{C_{13} \nu_1^2}{4\pi P_{13}} + (\nu_1^2 + \nu_3^2) D_1 \right) \frac{x_3}{R_1^5} + 15 D_1 \nu_1^2 \frac{x_3 z_1^2}{R_1^7} - \right. \\
& \left. 3 D_1 \nu_3^2 \frac{x_3}{R_1^5} \left(2 - 5 \frac{x_1^2}{R_1^2} \right) - 3 D_1 \nu_1^2 \frac{z_1}{R_1^5} \left(2 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right\} + \\
& C_{44} x_1 x_2 n_3 \left\{ -\frac{3}{R_1^5} \left(D_2 + \frac{\nu_1}{4\pi} \right) + 3 \frac{\nu_3}{4\pi} \frac{1}{R_3^5} - 15 D_1 \frac{z_1^2}{R_1^7} + \right. \\
& \left. 3 \nu_1 D_1 \frac{1}{R_1^5} \left(1 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right\} \quad (D.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_{113}^* = & \quad x_1 n_1 \left\{ 3D_1 \frac{z_1}{R_1^5} \left(3C_{11} + C_{12} - 5 \frac{x_1^2 C_{11} + x_2^2 C_{12}}{R_1^2} \right) + \right. \\
 & \quad \frac{1}{4\pi} (R_{21}(-3C_{11} + C_{12}) + R_{41}(C_{11}x_1^2 - C_{12}x_2^2)) - \\
 & \quad \left. \frac{1}{4\pi} (C_{11} + C_{12})(R_{23} - x_2^2 R_{43}) - 3\nu_1 C_{13} \frac{z_1}{R_1^5} \left[D_2 - D_1 \left(2 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right] \right\} + \\
 & \quad x_2 n_2 \left\{ 3D_1 \frac{z_1}{R_1^5} \left(C_{11} + 3C_{12} - 5 \frac{x_1^2 C_{11} + x_2^2 C_{12}}{R_1^2} \right) - \right. \\
 & \quad \frac{1}{4\pi} (R_{21}(C_{11} - 3C_{12}) + R_{41}(-C_{11}x_1^2 + C_{12}x_2^2)) - \\
 & \quad \left. \frac{1}{4\pi} (C_{11} + C_{12})(R_{23} - x_1^2 R_{43}) - 3\nu_1 C_{13} \frac{z_1}{R_1^5} \left[D_2 - D_1 \left(2 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right] \right\} + \\
 & \quad n_3 \left\{ 3 \frac{D_1}{\nu_1} \frac{z_1^2}{R_1^5} \left(C_{11} + C_{12} - 5 \frac{x_1^2 C_{11} + x_2^2 C_{12}}{R_1^2} \right) - \right. \\
 & \quad \frac{D_2}{\nu_1} \frac{1}{R_1^3} \left(C_{11} + C_{12} - 3 \frac{x_1^2 C_{11} + x_2^2 C_{12}}{R_1^2} \right) + \\
 & \quad \left. D_2 C_{13} \frac{1}{R_1^3} \left(1 - 3 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) + 3D_1 C_{13} \frac{z_1^2}{R_1^5} \left(3 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right\} \quad (D.25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_{123}^* = & \quad C_{66} x_2 n_1 \left\{ 6D_1 \frac{z_1}{R_1^5} \left(1 - 5 \frac{x_1^2}{R_1^2} \right) + \frac{1}{4\pi} (-4R_{23} + R_{43}R^2) \right\} + \\
 & \quad C_{66} x_1 n_2 \left\{ 6D_1 \frac{z_1}{R_1^5} \left(1 - 5 \frac{x_2^2}{R_1^2} \right) + \frac{1}{4\pi} (-4R_{23} + R_{43}R^2) \right\} + \\
 & \quad 6C_{66} x_1 x_2 n_3 \left\{ \frac{D_2}{\nu_1} \frac{1}{R_1^5} - 5 \frac{D_1}{\nu_1} \frac{z_1^2}{R_1^7} \right\} \quad (D.26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_{133}^* = & \quad C_{44} n_1 \left\{ \frac{1}{R_1^3} \left(\nu_1 D_1 + \frac{\nu_1}{4\pi} + D_2 \right) \left(-1 + 3 \frac{x_1^2}{R_1^2} \right) + \right. \\
 & \quad \left. 3(\nu_1 + 1) D_1 \frac{z_1^2}{R_1^5} \left(1 - 5 \frac{x_1^2}{R_1^2} \right) - \frac{\nu_3}{4\pi} \frac{1}{R_3^3} \left(1 - 3 \frac{x_2^2}{R_3^2} \right) \right\} + \\
 & \quad C_{44} x_1 x_2 n_2 \left\{ -\frac{3}{R_1^5} \left(D_2 + \frac{\nu_1}{4\pi} \right) + 3 \frac{\nu_3}{4\pi} \frac{1}{R_3^5} - 15D_1 \frac{z_1^2}{R_1^7} + \right. \\
 & \quad \left. 3\nu_1 D_1 \frac{1}{R_1^5} \left(1 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right\} + \quad (D.27) \\
 & \quad C_{44} x_1 n_3 \left\{ 3D_2(\nu_1 - 1) \frac{x_3}{R_1^5} - 15D_1 \frac{x_3 z_1^2}{R_1^7} + 3D_1 \frac{z_1}{R_1^5} \left(2 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$s_{211}^* = s_{121}^*$$

$$\begin{aligned}
s_{221}^* = & n_1 \left\{ \frac{\nu_1}{2\pi} \frac{1}{R_1^3} \left(C_{11} + C_{12} - 3 \frac{x_1^2 C_{12} + x_2^2 C_{11}}{R_1^2} \right) + \right. & (D.28) \\
& \frac{\nu_3^2}{2\pi\nu_1} C_{12} (-R_{11} + R_{31} R^2 - 3R_{51} x_1^2 x_2^2) + \\
& 3 \frac{\nu_3^2}{2\pi\nu_1} C_{11} (-R_{11} + 2R_{31} x_2^2 - R_{51} x_2^4) + \\
& \frac{\nu_3}{2\pi} (C_{12} - C_{11}) (R_{13} - R_{33} R^2 + 3R_{53} x_1^2 x_2^2) + \\
& \frac{\nu_3^2}{\nu_1} D_1 \frac{1}{R_1^3} \left(3C_{11} + C_{12} - 3 \frac{x_1^2 C_{12} + 3x_2^2 C_{11}}{R_1^2} \right) - \\
& \nu_1 D_2 \frac{1}{R_1^3} \left(C_{11} + C_{12} - 3 \frac{x_1^2 C_{12} + x_2^2 C_{11}}{R_1^2} \right) - \\
& 3\nu_1 D_1 \frac{z_1^2}{R_1^5} \left(C_{11} + C_{12} - 5 \frac{x_1^2 C_{12} + x_2^2 C_{11}}{R_1^2} \right) - \\
& \frac{3\nu_3^2}{\nu_1} D_1 \frac{x_2^2}{R_1^5} \left(3C_{11} + C_{12} - 5 \frac{x_1^2 C_{12} + x_2^2 C_{11}}{R_1^2} \right) + \\
& C_{13} \left(\frac{C_{13}\nu_1^2}{4\pi P_{13}} + (\nu_1^2 + \nu_3^2) D_1 \right) \frac{1}{R_1^3} \left(1 - 3 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) - \\
& 3C_{13} D_1 \frac{1}{R_1^5} \left[\nu_1^2 z_1^2 \left(3 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) + \nu_3^2 x_2^2 \left(1 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right] \left. \right\} + \\
& x_1 x_2 n_2 \left\{ 3\nu_3^2 C_{13} D_1 \frac{1}{R_1^5} \left(1 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) + 3 \frac{\nu_3}{4\pi} (C_{11} - C_{12}) R_{53} (x_1^2 - x_2^2) + \right. \\
& 3 \frac{\nu_3^2}{\nu_1} D_1 \frac{1}{R_1^5} \left(3(C_{11} + C_{12}) - 5 \frac{x_1^2 C_{12} + x_2^2 C_{11}}{R_1^2} \right) - \\
& \left. 3 \frac{\nu_3^2}{2\pi\nu_1} (R_{31} (C_{11} + C_{12}) - R_{51} (x_1^2 C_{12} + x_2^2 C_{11})) \right\} + \\
& x_1 n_3 \left\{ 3D_1 \frac{z_1}{R_1^5} \left(C_{11} + 3C_{12} - 5 \frac{x_1^2 C_{12} + x_2^2 C_{11}}{R_1^2} \right) + \right. \\
& \frac{1}{4\pi} (R_{21} (C_{11} - 3C_{12}) + R_{41} (x_1^2 C_{12} - x_2^2 C_{11})) + \\
& \left. \frac{1}{4\pi} (C_{11} + C_{12}) (-R_{23} + R_{43} x_2^2) + 3\nu_1 C_{13} \frac{z_1}{R_1^5} \left[-D_2 + D_1 \left(2 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$s_{212}^* = s_{122}^*$$

$$\begin{aligned}
s_{222}^* = & \quad x_1 x_2 n_1 \left\{ 3 \frac{\nu_3^2}{\nu_1} D_1 \frac{1}{R_1^5} \left(3(C_{11} + C_{12}) - 5 \frac{x_1^2 C_{12} + x_2^2 C_{11}}{R_1^2} \right) + \right. \\
& \quad 3 \frac{\nu_3^2}{2\pi \nu_1} (-R_{31}(C_{11} + C_{12}) + R_{51}(x_1^2 C_{12} + x_2^2 C_{11})) + \\
& \quad \left. 3 \frac{\nu_3}{4\pi} (C_{11} - C_{12}) R_{53}(x_1^2 - x_2^2) + 3\nu_3^2 D_1 C_{13} \frac{1}{R_1^5} \left(1 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right\} + \\
& \quad n_2 \left\{ \frac{\nu_3}{2\pi} (C_{11} - C_{12})(R_{13} - R_{33}R^2 + 3R_{53}x_1^2 x_2^2) + \right. \tag{D.29} \\
& \quad \frac{\nu_1}{2\pi} \frac{1}{R_1^3} \left(C_{11} + C_{12} - 3 \frac{x_1^2 C_{12} + x_2^2 C_{11}}{R_1^2} \right) + \\
& \quad \frac{\nu_3^2}{2\pi \nu_1} C_{11} (-R_{11} + R_{31}R^2 - 3R_{51}x_1^2 x_2^2) + \\
& \quad 3 \frac{\nu_3^2}{2\pi \nu_1} C_{12} (-R_{11} + 2R_{31}x_1^2 - R_{51}x_1^4) + \\
& \quad \frac{\nu_3^2}{\nu_1} D_1 \frac{1}{R_1^3} \left(C_{11} + 3C_{12} - 3 \frac{x_1^2 C_{12} + 3x_2^2 C_{11}}{R_1^2} \right) - \\
& \quad \nu_1 D_2 \frac{1}{R_1^3} \left(C_{11} + C_{12} - 3 \frac{x_1^2 C_{12} + x_2^2 C_{11}}{R_1^2} \right) - \\
& \quad 3\nu_1 D_1 \frac{z_1^2}{R_1^5} \left(C_{11} + C_{12} - 5 \frac{x_1^2 C_{12} + x_2^2 C_{11}}{R_1^2} \right) - \\
& \quad 3 \frac{\nu_3^2}{\nu_1} D_1 \frac{x_1^2}{R_1^5} \left(C_{11} + 3C_{12} - 5 \frac{x_1^2 C_{12} + x_2^2 C_{11}}{R_1^2} \right) + \\
& \quad C_{13} \left(\frac{C_{13}\nu_1^2}{4\pi P_{13}} + (\nu_1^2 + \nu_3^2) D_1 \right) \frac{1}{R_1^3} \left(1 - 3 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) - \\
& \quad \left. 3C_{13} D_1 \frac{1}{R_1^5} \left[\nu_1^2 z_1^2 \left(3 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) + \nu_3^2 x_1^2 \left(1 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right] \right\} + \\
& \quad x_2 n_3 \left\{ 3D_1 \frac{z_1}{R_1^5} \left(3C_{11} + C_{12} - 5 \frac{x_1^2 C_{11} + x_2^2 C_{12}}{R_1^2} \right) + \right. \\
& \quad \frac{1}{4\pi} (R_{21}(-3C_{11} + C_{12}) + R_{41}(C_{11}x_2^2 - C_{12}x_1^2)) + \\
& \quad \left. \frac{1}{4\pi} (C_{11} + C_{12})(-R_{23} + x_1^2 R_{43}) + 3\nu_1 C_{13} \frac{z_1}{R_1^5} \left[-D_2 + D_1 \left(2 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{231}^* = & C_{44}x_2n_1 \left\{ 3\nu_1^2 \frac{z_1}{R_1^5} \left(\frac{-1}{2\pi} + D_2 \right) + \frac{\nu_3^2}{2\pi} (3R_{21} - R_{41}x_2^2) + \right. \\
& \frac{\nu_3^2}{2\pi} (R_{23} - R_{43}x_1^2) + 3\nu_3^2 D_1 \frac{z_1}{R_1^5} \left(-3 + 5 \frac{x_2^2}{R_1^2} \right) - \\
& 3 \left(\frac{C_{13}\nu_1^2}{4\pi P_{13}} + (\nu_1^2 + \nu_3^2) D_1 \right) \frac{x_3}{R_1^5} + 15D_1 \nu_1^2 \frac{x_3 z_1^2}{R_1^7} - \\
& \left. 3D_1 \nu_3^2 \frac{x_3}{R_1^5} \left(2 - 5 \frac{x_2^2}{R_1^2} \right) - 3D_1 \nu_1^2 \frac{z_1}{R_1^5} \left(2 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right\} + \\
& C_{44}x_1n_2 \left\{ 3D_1 \nu_3^2 (1 + \nu_1) \frac{x_3}{R_1^5} \left(1 - 5 \frac{x_2^2}{R_1^2} \right) - \right. \\
& \left. \frac{\nu_3^2}{2\pi} (R_{21} - R_{41}x_2^2) + \frac{\nu_3^2}{4\pi} [-2R_{23} + R_{43}(x_1^2 - x_2^2)] \right\} + \\
& C_{44}x_1x_2n_3 \left\{ -\frac{3}{R_1^5} \left(D_2 + \frac{\nu_1}{4\pi} \right) + 3 \frac{\nu_3}{4\pi} \frac{1}{R_3^5} - 15D_1 \frac{z_1^2}{R_1^7} + \right. \\
& \left. 3\nu_1 D_1 \frac{1}{R_1^5} \left(1 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right\} \tag{D.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{232}^* = & C_{44}x_1n_1 \left\{ 3\nu_3^2 (1 + \nu_1) D_1 \frac{x_3}{R_1^5} \left(1 - 5 \frac{x_2^2}{R_1^2} \right) - \frac{\nu_3^2}{2\pi} (R_{21} - R_{41}x_2^2) + \right. \\
& \left. \frac{\nu_3^2}{4\pi} [-2R_{23} + R_{43}(x_1^2 - x_2^2)] \right\} + \\
& C_{44}x_2n_2 \left\{ 3\nu_1^2 \frac{z_1}{R_1^5} \left(\frac{-1}{2\pi} + D_2 \right) + \frac{\nu_3^2}{2\pi} (R_{21} - R_{41}x_1^2) - \frac{\nu_3^2}{2\pi} (R_{23} - R_{43}x_1^2) + \right. \\
& 3D_1 \frac{z_1}{R_1^5} \left(-\nu_3^2 - 2\nu_1^2 + 5 \frac{\nu_3^2 x_1^2 + \nu_1^2 z_1^2}{R_1^2} \right) - \\
& 3 \left(\frac{C_{13}\nu_1^2}{4\pi P_{13}} + (\nu_1^2 + \nu_3^2) D_1 \right) \frac{x_3}{R_1^5} + 15D_1 \frac{x_3}{R_1^7} (\nu_1^2 z_1^2 + \nu_3^2 x_1^2) \left. \right\} + \\
& C_{44}n_3 \left\{ \left(\nu_1 D_1 + \frac{\nu_1}{4\pi} - D_2 \right) \frac{1}{R_3^3} \left(-1 + 3 \frac{x_2^2}{R_1^2} \right) + \right. \\
& \left. 3D_1 (1 + \nu_1) \frac{z_1^2}{R_1^5} \left(1 - 5 \frac{x_2^2}{R_1^2} \right) + \frac{\nu_3}{4\pi} \frac{1}{R_3^3} \left(-1 + 3 \frac{x_1^2}{R_3^2} \right) \right\} \tag{D.31}
\end{aligned}$$

$$s_{213}^* = s_{123}^*$$

$$\begin{aligned}
 s_{223}^* = & \quad x_1 n_1 \left\{ 3D_1 \frac{z_1}{R_1^5} \left(C_{11} + 3C_{12} - 5 \frac{x_1^2 C_{12} + x_2^2 C_{11}}{R_1^2} \right) + \right. \\
 & \quad \frac{1}{4\pi} (R_{21} (C_{11} - 3C_{12}) + R_{41} (x_1^2 C_{12} - x_2^2 C_{11})) - \\
 & \quad \left. \frac{1}{4\pi} (C_{11} + C_{12}) (R_{23} - x_2^2 R_{43}) - 3\nu_1 C_{13} \frac{z_1}{R_1^5} \left[D_2 - D_1 \left(2 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right] \right\} + \\
 & \quad x_2 n_2 \left\{ 3D_1 \frac{z_1}{R_1^5} \left(3C_{11} + C_{12} - 5 \frac{x_1^2 C_{12} + x_2^2 C_{11}}{R_1^2} \right) + \right. \\
 & \quad \frac{1}{4\pi} (R_{21} (C_{12} - 3C_{11}) + R_{41} (x_2^2 C_{11} - x_1^2 C_{12})) - \\
 & \quad \left. \frac{1}{4\pi} (C_{11} + C_{12}) (R_{23} - x_1^2 R_{43}) - 3\nu_1 C_{13} \frac{z_1}{R_1^5} \left[D_2 - D_1 \left(2 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right] \right\} + \\
 & \quad n_3 \left\{ 3 \frac{D_1}{\nu_1} \frac{z_1^2}{R_1^5} \left(C_{11} + C_{12} - 5 \frac{x_1^2 C_{12} + x_2^2 C_{11}}{R_1^2} \right) - \right. \\
 & \quad \frac{D_2}{\nu_1} \frac{1}{R_1^3} \left(C_{11} + C_{12} - 3 \frac{x_1^2 C_{12} + x_2^2 C_{11}}{R_1^2} \right) + \\
 & \quad \left. D_2 C_{13} \frac{1}{R_1^3} \left(1 - 3 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) + 3D_1 C_{13} \frac{z_1^2}{R_1^5} \left(3 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right\} \quad (D.32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_{233}^* = & \quad C_{44} x_1 x_2 n_1 \left\{ -\frac{3}{R_1^5} \left(D_2 + \frac{\nu_1}{4\pi} \right) + 3 \frac{\nu_3}{4\pi} \frac{1}{R_3^5} - 15D_1 \frac{z_1^2}{R_1^7} + \right. \\
 & \quad \left. 3\nu_1 D_1 \frac{1}{R_1^5} \left(1 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right\} + \\
 & \quad C_{44} n_2 \left\{ \frac{1}{R_1^3} \left(\nu_1 D_1 + \frac{\nu_1}{4\pi} + D_2 \right) \left(-1 + 3 \frac{x_2^2}{R_1^2} \right) + \right. \\
 & \quad \left. 3(\nu_1 + 1) D_1 \frac{z_1^2}{R_1^5} \left(1 - 5 \frac{x_2^2}{R_1^2} \right) - \frac{\nu_3}{4\pi} \frac{1}{R_3^3} \left(1 - 3 \frac{x_1^2}{R_3^2} \right) \right\} + \quad (D.33) \\
 & \quad C_{44} x_2 n_3 \left\{ 3D_2 (\nu_1 - 1) \frac{x_3}{R_1^5} - 15D_1 \frac{x_3 z_1^2}{R_1^7} + 3D_1 \frac{z_1}{R_1^5} \left(2 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$s_{311}^* = s_{131}^*$$

$$s_{321}^* = s_{231}^*$$

$$\begin{aligned}
s_{331}^* = & n_1 \left\{ \frac{\nu_3^2}{2\pi\nu_1} C_{13}(-R_{11} + R_{31}R^2 - 3R_{51}x_1^2x_2^2) + \right. \\
& \frac{3\nu_3^2}{2\pi\nu_1} C_{13}(-R_{11} + 2R_{31}x_2^2 - R_{51}x_2^4) + \tag{D.34} \\
& \nu_1 C_{13} \left(\frac{1}{2\pi} - D_2 \right) \frac{1}{R_1^3} \left(2 - 3\frac{R^2}{R_1^2} \right) + \frac{\nu_3^2}{\nu_1} C_{13} D_1 \frac{1}{R_1^3} \left(4 - 3\frac{3x_2^2 + x_1^2}{R_1^2} \right) - \\
& 3D_1 C_{13} \frac{1}{R_1^5} \left[\nu_1 z_1^2 \left(2 - 5\frac{R^2}{R_1^2} \right) - \frac{\nu_3^2}{\nu_1} x_2^2 \left(4 - 5\frac{R^2}{R_1^2} \right) \right] + \\
& C_{33} \left(\frac{C_{13}\nu_1^2}{4\pi P_{13}} + (\nu_1^2 + \nu_3^2)D_1 \right) \frac{1}{R_1^3} \left(1 - 3\frac{z_1^2}{R_1^2} \right) - \\
& 3\nu_1^2 D_1 C_{33} \frac{z_1^2}{R_1^5} \left(3 - 5\frac{z_1^2}{R_1^2} \right) - 3\nu_3^2 D_1 C_{33} \frac{x_2^2}{R_1^5} \left(1 - 5\frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \left. \right\} + \\
& x_1 x_2 n_2 \left\{ 3\nu_3^2 C_{33} D_1 \frac{1}{R_1^5} \left(1 - 5\frac{z_1^2}{R_1^2} \right) + 3\frac{\nu_3^2}{\nu_1} C_{13} D_1 \frac{1}{R_1^5} \left(6 - 5\frac{R^2}{R_1^2} \right) + \right. \\
& \left. 3\frac{\nu_3^2}{2\pi\nu_1} C_{13}(-2R_{31} + R_{51}R^2) \right\} + \\
& x_1 n_3 \left\{ 3C_{13} D_1 \frac{z_1}{R_1^5} \left(2 - 5\frac{R^2}{R_1^2} \right) + \frac{C_{13}}{4\pi} [-2R_{21} + R_{41}(x_1^2 - x_2^2)] + \right. \\
& \left. \frac{C_{13}}{2\pi} (-R_{23} + R_{43}x_2^2) - 3\nu_1 C_{33} D_2 \frac{z_1}{R_1^5} + 3\nu_1 C_{33} D_1 \frac{z_1}{R_1^5} \left(2 - 5\frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$s_{312}^* = s_{132}^*$$

$$s_{322}^* = s_{232}^*$$

$$\begin{aligned}
 s_{332}^* = & \quad x_1 x_2 n_1 \left\{ 3\nu_3^2 C_{33} D_1 \frac{1}{R_1^5} \left(1 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) + 3 \frac{\nu_3^2}{\nu_1} C_{13} D_1 \frac{1}{R_1^5} \left(6 - 5 \frac{R^2}{R_1^2} \right) + \right. \\
 & \quad \left. 3 \frac{\nu_3^2}{2\pi\nu_1} C_{13} (-2R_{31} + R_{51} R^2) \right\} + \tag{D.35} \\
 & \quad n_2 \left\{ \frac{\nu_3^2}{2\pi\nu_1} C_{13} (-R_{11} + R_{31} R^2 - 3R_{51} x_1^2 x_2^2) + \right. \\
 & \quad \frac{3\nu_3^2}{2\pi\nu_1} C_{13} (-R_{11} + 2R_{31} x_1^2 - R_{51} x_1^4) + \\
 & \quad \nu_1 C_{13} \left(\frac{1}{2\pi} - D_2 \right) \frac{1}{R_1^3} \left(2 - 3 \frac{R^2}{R_1^2} \right) + \frac{\nu_3^2}{\nu_1} C_{13} D_1 \frac{1}{R_1^3} \left(4 - 3 \frac{x_2^2 + 3x_1^2}{R_1^2} \right) - \\
 & \quad 3D_1 C_{13} \frac{1}{R_1^5} \left[\nu_1 z_1^2 \left(2 - 5 \frac{R^2}{R_1^2} \right) - \frac{\nu_3^2}{\nu_1} x_1^2 \left(4 - 5 \frac{R^2}{R_1^2} \right) \right] + \\
 & \quad C_{33} \left(\frac{C_{13} \nu_1^2}{4\pi P_{13}} + (\nu_1^2 + \nu_3^2) D_1 \right) \frac{1}{R_1^3} \left(1 - 3 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) - \\
 & \quad \left. 3\nu_1^2 D_1 C_{33} \frac{z_1^2}{R_1^5} \left(3 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) - 3\nu_3^2 D_1 C_{33} \frac{x_1^2}{R_1^5} \left(1 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right\} + \\
 & \quad x_2 n_3 \left\{ 3C_{13} D_1 \frac{z_1}{R_1^5} \left(2 - 5 \frac{R^2}{R_1^2} \right) + \frac{C_{13}}{4\pi} [-2R_{21} + R_{41}(x_2^2 - x_1^2)] + \right. \\
 & \quad \left. \frac{C_{13}}{2\pi} (-R_{23} + R_{43} x_1^2) - 3\nu_1 C_{33} D_2 \frac{z_1}{R_1^5} + 3\nu_1 C_{33} D_1 \frac{z_1}{R_1^5} \left(2 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$s_{313}^* = s_{133}^*$$

$$s_{323}^* = s_{233}^*$$

$$\begin{aligned}
 s_{333}^* = & \quad x_1 n_1 \left\{ 3D_1 C_{13} \frac{z_1}{R_1^5} \left(4 - 5 \frac{R^2}{R_1^2} \right) + \frac{C_{13}}{4\pi} [-2R_{21} + R_{41}(x_1^2 - x_2^2)] + \right. \\
 & \quad \left. \frac{C_{13}}{2\pi} (-R_{23} + R_{43} x_2^2) - 3\nu_1 C_{33} D_2 \frac{z_1}{R_1^5} + 3\nu_1 C_{33} D_1 \frac{z_1}{R_1^5} \left(2 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right\} + \\
 & \quad x_2 n_2 \left\{ 3D_1 C_{13} \frac{z_1}{R_1^5} \left(4 - 5 \frac{R^2}{R_1^2} \right) + \frac{C_{13}}{4\pi} [-2R_{21} + R_{41}(x_2^2 - x_1^2)] + \right. \\
 & \quad \left. \frac{C_{13}}{2\pi} (-R_{23} + R_{43} x_1^2) - 3\nu_1 C_{33} D_2 \frac{z_1}{R_1^5} + 3\nu_1 C_{33} D_1 \frac{z_1}{R_1^5} \left(2 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right\} + \\
 & \quad n_3 \left\{ 3 \frac{C_{13} D_1}{\nu_1} \frac{z_1^2}{R_1^5} \left(2 - 5 \frac{R^2}{R_1^2} \right) - \frac{C_{13} D_2}{\nu_1} \frac{1}{R_1^3} \left(2 - 3 \frac{R^2}{R_1^2} \right) + \right. \\
 & \quad \left. C_{33} D_2 \frac{1}{R_1^3} \left(1 - 3 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) + 3C_{33} D_1 \frac{z_1^2}{R_1^5} \left(3 - 5 \frac{z_1^2}{R_1^2} \right) \right\} \tag{D.36}
 \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned}
 R^2 &= x_1^2 + x_2^2 \\
 R_i^2 &= R^2 + z_i^2 \\
 R_i^* &= R_i + z_i \\
 z_i &= \nu_i x_3
 \end{aligned} \tag{D.37}$$

$$\begin{aligned}
 R_{1i} &= \frac{1}{R_i R_i^{*2}} \\
 R_{2i} &= \frac{1}{R_i^3 R_i^*} + \frac{1}{R_i^2 R_i^{*2}} \\
 R_{3i} &= \frac{1}{R_i^3 R_i^{*2}} + \frac{2}{R_i^2 R_i^{*3}} \\
 R_{4i} &= \frac{3}{R_i^5 R_i^*} + \frac{3}{R_i^4 R_i^{*2}} + \frac{2}{R_i^3 R_i^{*3}} \\
 R_{5i} &= \frac{1}{R_i^5 R_i^{*2}} + \frac{2}{R_i^4 R_i^{*3}} + \frac{2}{R_i^3 R_i^{*4}}
 \end{aligned} \tag{D.38}$$

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \frac{C_{13} + C_{44}}{4\pi P_{13}} \\
 D_2 &= \frac{C_{44}}{4\pi P_{13}} \\
 D_{3i} &= \frac{C_{11} + C_{13}\nu_i^2}{C_{13} + C_{44}} \\
 D_{4i} &= C_{11} - C_{13}\nu_i^2 l_i \\
 D_{5i} &= C_{13} - C_{33}\nu_i^2 l_i \\
 D_{6i} &= 2A'_i \nu_i - A_i \\
 D_{7i} &= 2C_{44}\nu_i^3 (1 + l_i) A'_i
 \end{aligned} \tag{D.39}$$

Bibliografía

- Achenbach, J.D. (2000). Quantitative Nondestructive Evaluation. In *Int. J. Solids & Struc.*, **37**, 13–27.
- Alarcón, E., Martín, A. y París, F. (1979). Boundary Elements in Potencial and Elasticity Theory. In *Comput. & Struct.*, **10**, 341–362.
- Aliabadi, M. H., Hall, W. S., y Plemister, T. G. (1985). Taylor Expansions for Singular Kernels in Boundary Element Method. In *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **21**, 2221–2236.
- Aliabadi, M. H. (1997). Boundary Element Formulations in Fracture Mechanics. In *Appl. Mech. Rev.*, **50**, 83–96.
- Anderson, T.L. (1995). Fracture Mechanics. Fundamental and Applications. In *CRC Press*.
- Ariza, M. P., Sáez, A., y Domínguez, J. (1997). A Singular Element for Three-dimensional Fracture Mechanics Analysis. In *Eng. Ana. with Boundary Elements*, **20**, 275–285.
- Atluri, S.N., Kobayashi, A.S., y Nakagaki, M. (1975). An Assumed Displacement Hybrid Finite Element Model For Linear Fracture Mechanics. In *Int. J. Frac.*, **11-2**, 257–271.
- Banks-Sills, L., y Sherman, D. (1992). On the Computation of Stress Intensity Factors for Three-dimensional Geometries by Means of the Stifness Derivative and J-Integral Methods. In *Int. J. Frac.*, **53**, 1–20.
- Bazant, Z.P., y Estenssoro, L.F. (1979). Surface Singularity and Crack Propagation. In *Int. J. Solids & Struc.*, **15**, 405–426.
- Benthem, J.P. (1977). State of Stress at the Vertex of a Quarter-Infinite Crack in a Half-Space. In *Int. J. Solids & Struc.*, **13**, 479–492.

- Blandford, G.E., Ingraffea, A.R., y Liggett, J.A. (1981). Two-Dimensional Stress Intensity Factor Computations using the Boundary Element Method. In *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **17**, 387–406.
- Bonnet, M., y Bui, H. D. (1992). Regularization of the Displacement and Traction BIE for 3D Elastodynamics Using Indirect Methods. In Kane, J. H., Maier, G., Tosaka, N., and Atluri, S. N., eds., *Advances in B.E. Techniques*. Springer-Verlag, Berlin.
- Bowie, O.L. y Freese, C.E. (1972). Central Crack in Plane Orthotropic Rectangular Sheet. In *Int. J. Fract. Mech.*, **8**, 49–58.
- Brebbia, C.A., y Domínguez, J. (1992). Boundary Elements. An Introductory Course, segunda edición. *Computational Mechanics Publications, Southampton y MacGraw-Hill, New York*.
- Buchwald, V.T. (1959). Elastic Waves in Anisotropic Media. In *Proc. Roy. Soc. London*, **A253**, 563–580.
- Budreck, D.E., y Achenbach, J.D. (1988). Scattering from Three-Dimensional Planar Cracks by the Boundary Integral Equation Method. In *J. Appl. Mech.*, **55**, 405–412.
- Burton, A.J., y Miller, G.F. (1971). The Application of Integral Equation Methods to the Numerical Solution of some Exterior Boundary-Value Problems. In *Proc. Roy. Soc. London*, **A323**, 201–210.
- Cerrolaza, M. y Alarcón, E. (1989). A Bicubic Transformation for the Numerical Evaluation of the Cauchy Principal Value Integrals in Boundary Elements. In *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **28**, 987–999.
- Chan, K.S., y Cruse, T.A. (1986). Stress Intensity Factors for Anisotropic Compact-Tension Specimens with Inclined Cracks. In *Eng. Fract. Mech.*, **23**, 863–874.
- Chirino, F. y Dominguez, J. (1989). Dynamic Analysis of Cracks Using Boundary Element Method. In *Eng. Fract. Mech.*, **34**, 1051–1061.
- Chen, W.T. y Soni, R.P. (1964). On a Circular Crack in a Transversely Isotropic Material with Prescribed Shear Stress. In *IBM J. Research Development*, **8**, 192–195.
- Chen, W.T. (1966). On some Problems in Transversely Isotropic Elastic Materials. In *J. Appl. Mech.*, **33**, 347–355.

- Chen, W.T. (1966). Some Aspects of a Flat Elliptical Crack under Shear Stress. In *J. Math. Phys.*, **45**, 213–223.
- Chen, Y.M. (1975). Numerical Computation of Dynamic Stress Intensity Factors by a Lagrangian Finite Difference Method. In *Eng. Fract. Mech.*, **7**, 653–660.
- Christensen, R.M. (1979). Mechanics of Composites Materials. In *Eng. Fract. Mech.*, Wiley, New York.
- Cruse, T.A., y Rizzo, F.J. (1968). A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem I. In *J. Math. Ana. Appl.*, **22**, 244.
- Cruse, T.A. (1975). Boundary-Integral Equation Method for Three-Dimensional Elastic Fracture Mechanics Analysis. In *Report. No. AFOSR-TR-75-0813*, 13–20.
- Cruse, T. A., y Richardson, J. D. (1996). Nonsingular Somigliana Stress Identities in Elasticity. In *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **39**, 3273–3304.
- Dhawan, G.K. (1982). Interaction of Elastic Waves by a Griffith Crack in an Infinite Transversely-Isotropic Medium. In *Int. J. Fract.*, **19**, 29–37.
- Dhawan, G.K. (1983). Interaction of SV-Waves by a Griffith Crack in an Infinite Transversely-Isotropic Medium. In *Int. J. Fract.*, **20**, 103–110.
- Domínguez, J., y Abascal, R. (1984). On Fundamental Solutions for the Boundary Integral Equations Method in Static and Dynamic Elasticity. In *Engineering Analysis*, **1**, 128–134.
- Domínguez, J. (1993). Boundary Elements in Dynamics. *Computational Mechanics Publications, Southampton y Elsevier Science, London*.
- Domínguez, J., Ariza, M.P., y Gallego, R. (2000). Flux and Traction Boundary Elements without Hypersingular or Strongly Singular Integrals. In *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **48**, 111–135.
- Duga, J.J., Fisher, W.H., Buxbaum, R.W., Rosenfield, A.R., Burth, A.R., Honton, E.J., y McMillan, S.C. (1983). The Economic Effects of Fractura in the United States. *NBS Special Publication 647-2, United States Department of Commerce, Washington, DC*.
- Erdogan, F. (2000). Fracture Mechanics. In *Int. J. Solids & Structures*, **37**, 171–183.

- Fedelinski, P., Aliabadi, M.H. y Rooke, D.P. (1993). The Dual Boundary Element Method in Dynamic Fracture Mechanics. In *Engng. Anal. Bound. Elem.*, **12**, 203–210.
- Fedelinski, P., Aliabadi, M.H. y Rooke, D.P. (1995). The Dual Boundary Element Method: J-Integral for Dynamic Stress Intensity Factors. In *Int. J. Fracture*, **65**, 369–381.
- Fedelinski, P., Aliabadi, M.H. y Rooke, D.P. (1996). Boundary Element Formulations for the Dynamic Analysis of Cracked Structures. In *Engng. Anal. Bound. Elem.*, **17**, 45–56.
- Folias, E.S. (1975). On the Three-Dimensional Theory of Cracked Plates. In *J. Appl. Mech.*, **42**, 663–674.
- Folias, E.S. (1980). Method of Solution of a Class of Three-Dimensional Elastostatic Problems under Mode I Loading. In *Int. J. Fracture*, **16**, 335–348.
- Gallego, R., y Domínguez, J. (1996). Hypersingular BEM for Transient Elastodynamic. In *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **39**, 1681–1705.
- Gallego, R., y Domínguez, J. (1997). Solving Transient Dynamic Crack Problems by the Hypersingular Boundary Element Method. In *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, **20**, 799–812.
- Griffith, A.A. (1921). The Phenomena of Rupture and Fluid in Solids. In *Phil. Trans. Royal Society. London*, **A221**, 163–197.
- Guiggiani, M., Krishnasamy, G., Rudolphi, T. J. y Rizzo, F. J. (1992). A General Algorithm for the Numerical Solution of Hypersingular Boundary Integral Equations. In *J. Appl. Mech. (ASME)*, **59**, 604–614.
- Hirose, S. y Achenbach, J.D. (1988). BEM to Analyze the Interaction of an Acoustic Pulse with a Rigid Circular Disk. In *Wave Motion*, **10**, 267–275.
- Hirose, S. y Achenbach, J.D. (1989). Time-Domain Boundary Element Analysis of Elastic Wave Interaction with a Crack. In *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **28**, 629–644.
- Huang, Q., y Cruse, T. A. (1994). On the Non-Singular Traction BIE in Elasticity. In *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **37**, 2041–2072.

- Irwin, G.R. (1948). Fracture Dynamics. In *Fracturing of Metals, American Society for Metals, Cleveland*, 147–166.
- Irwin, G.R. (1957). Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. In *J. Appl. Mech.*, **24**, 361–364.
- Irwin, G.R. (1962). Crack-Extension Force for a Part-Trough Crack in a Plate. In *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, **29**, 651–654.
- Ishikawa, H. (1990). Application of the Boundary Element Method to Anisotropic Crack Problems. In *Advances in Boundary Element Methods for Fracture Mechanics*, ed. M.H. Aliabadi & C.A. Brebbia. Computational Mechanics Publications, Southampton and Elsevier Science, London.
- Isida, M. (1975). Arbitrary Loading Problems of Doubly Symmetric Regions Containing a Central Crack. In *Engng. Frac. Mech.*, **7**, 505–514.
- Isida, M. y Noguchi, H. (1984). Tension of a Plate Containing an Embedded Elliptical Crack. In *Engng. Frac. Mech.*, **20**, 387–408.
- Isida, M., Noguchi, H. y Yoshida, T. (1984). Tension and Bending of finite Thickness Plates with a Semi-Elliptical Surface Crack. In *International Journal of Fracture*, **26**, 157–188.
- Itou, S. (1980). Dynamic Stress Concentration Around a Rectangular Crack in an Infinite Elastic Medium. In *Z. Angew. Math. Mech.*, **60**, 317–322.
- Kassir, M.K. y Sih, G.C. (1966). Three-Dimensional Stress Distribution Around an Elliptical Crack Under Arbitrary Loadings. In *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, **33**, 601–611.
- Kassir, M.K. y Sih, G.C. (1968). Three-Dimensional Stresses Around Elliptical Cracks in Transversely Isotropic Solids. In *Eng. Fract. Mech.*, **1**, 327–345.
- Kassir, M.K. y Sih, G.C. (1975). Three-Dimensional Crack Problems. In *Mechanics of Fracture, Ed. G.C. Sih, Nordhoff, The Netherlands*.
- Krishnasamy, G., Schmerr, L.W., Rudolphi, T.J., y Rizzo, F.J. (1990). Hypersingular Boundary Integral Equations: Some Applications in Acoustic and Elastic Wave Scattering. In *J. Appl. Mech., ASME*, **57**, 404–414.

- Krishnasamy, G., Rizzo, F. J., y Rudophi, T. J. (1992). Hypersingular Boundary Integral Equation: Their Occurrence, Interpretation, Regularization and Computation. In Banerjee, P.K. and Kobayashi, S., eds., *Developments in Boundary Element Methods-7*. Elsevier, London.
- Kundu, T. (1990). Scattering of Torsional Waves by a Circular Crack in a Transversely Isotropic Solid. In *J. Acoust. Soc. Amer.*, **88**, 1975–1980.
- Kundu, T. y Boström, A. (1991). Axisymmetric Scattering of a Plane Longitudinal Wave by a Circular Crack in a Transversely Isotropic Solid. In *ASME J. Appl. Mech.*, **58**, 695–702.
- Kundu, T. y Boström, A. (1992). Elastic Wave Scattering by a Circular Crack in a Transversely Isotropic Solid. In *Wave Motion*, **15**, 285–300.
- Li, S., Mear, M.E. y Xiao, L. (1998). Symmetric Weak-Form Integral Equation Method for Three-Dimensional Fracture Analysis. In *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **151**, 435–459.
- Lighthill, M.J. (1960). Studies on Magneto-Hydrodynamic Waves and Other Anisotropic Wave Motions. In *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **A252**, 397–430.
- Mal, A.K. (1970). Interaction of Elastic Waves with a Penny-Shaped Crack. In *Int. J. Eng. Sci.*, **8**, 381–388.
- Mantic, V. (1994). On Computing Boundary Limiting Values of Boundary Integrals with Strongly Singular and Hypersingular Kernels in 3D BEM for Elastostatics. In *Eng. Anal. with Boundary Elements*, **13**, 115–134.
- Marrero, M. (2001). Estudio Numérico de Problemas Dinámicos Transitorios. Aplicación a la Mecánica de la Fractura. *Tesis*, Universidad de Sevilla, (España).
- Martha L. F., Gray L. J. y Ingrassia A. R. (1992). Three-Dimensional Fracture Simulation with a Single-Domain Direct Boundary Element Formulation. In *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **35**, 1907–1921.
- Martin, P.A., y Rizzo, F.J. (1989). On Boundary Integral Equations for Crack Problems. In *Proc. R. Soc.*, **A421**, 341–355.
- Martin, P.A., y Rizzo, F.J. (1996). Hypersingular Integrals: How Smooth Must the Density Be?. In *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **39**, 687–704.

- Martin, P. A., Rizzo, F. J., y Cruse, T.A. (1998). Smoothness-Relaxation Strategies for Singular and Hypersingular Integral Equations. In *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **42**, 885–906.
- Mi, Y., y Aliabadi, M. H. (1992). Dual Boundary Element Method for Three-Dimensional Fracture Mechanics Analysis. In *Eng. Anal. Boundary Elements*, **10**, 161–171.
- Musgrave, M.J.P. (1961). Elastic Waves in Anisotropic Media. In Sneddon and Hill, Eds., *Progress in Solid Mechanics, North-Holland, Amsterdam 2*, 64–85.
- Newman, J.C., y Raju, I.S. (1983). Stress Intensity Factor Equations for Cracks in Three-Dimensional Finite Bodies. In J.C. Lewis and G. Simes, Eds, *Fracture Mechanics Fourteenth Symposium, Volume I, ASTM STP 791*, Am. Soc. for Testing Materials. I-238–I-265.
- Nishimura, N., y Kobayashi, D. (1988). An Improved Boundary Integral Equation Method for Crack Problems. In *Advanced Boundary Element Methods*. Cruse, T.A., ed. Proc. IUTAM Symposium on Springer-Verlag. 279–286.
- Nishimura, N., y Kobayashi, D. (1989). A Regularized Boundary Integral Equation Method for Elastodynamic Crack Problems. In *Comput. Mech.*, **4**, 319–328.
- Ohyoshi, T. (1973). Effect of Orthotropy on Singular Stress Produced Near a Crack Tip by SH-Waves. In *Z. Angew. Math. Mech.*, **53**, 409–411.
- Ohyoshi, T. (1973). Effect of Orthotropy on Singular Stress for a Finite Crack. In *ASME J. Appl. Mech.*, **40**, 491–497.
- Pan, Y.C. y Chou, T.W. (1976). Point Force Solution for an Infinite Transversely Isotropic Solid. *J. Appl. Mech.*, **43**, 608–612.
- Pan, Ernian y Yuan, F.G. (2000). Boundary Element Analysis of Three-Dimensional Cracks in Anisotropic Solids. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **48**, 211–237.
- Parton, V. Z., Boriskovsky, V. G. (1989). Dynamic Fracture Mechanics. Volumen 1: Stationary Cracks. *Hemisphere Publishing Corporation*, .
- Portela, A., Aliabadi, M. H., y Rooke, D. P. (1992). The Dual Boundary Element Method: Effective Implementation for Crack Problems. In *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **33**, 1269–1287.

- Rajiyah, H., y Atluri, S.N. (1991). Analysis of Embedded and Surface Elliptical Flaws in Transversely Isotropic Bodies by Finite Element Alternating Method. In *J. Appl. Mech.*, **58**, 435–443.
- Raju, I.S., y Newman, J.C. Jr. (1977). Three-Dimensional Finite Element Analysis of Finite-Thickness Fracture Specimens. In *NASA TN*, **D-8414**.
- Raju, I.S., y Newman, J.C. Jr. (1979). Stress-Intensity Factors for a Wide Range of Semi-Elliptical Surface Cracks in Finite-Thickness Plates. In *Engng. Fract. Mech.*, **11**, 817–829.
- Richardson, J. D., Cruse, R. A., y Huang, Q. (1997). On the Validity of Conforming BEM Algorithms for Hypersingular Boundary Integral Equations. In *Comput. Mech.*, **20**, 213–220.
- Rizza, R. y Nair, S. (1999). A Penny Shaped Crack in a Transversely Isotropic Material under Non-Axisymmetric Impact Loads. In *Int. J. Solids & Struct.*, **36**, 35–64.
- Rizzo, F.J. y Shippy, D.J. (1970). A Method for Stress Determination in Plane Anisotropic Elastic Bodies. In *J. Composite Materials*, **4**, 36–61.
- Robertson I.A. (1967). Diffraction of a Plane Longitudinal Wave by a Penny-Shaped Crack. In *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **63**, 229–238.
- Rooke, D.P., y Cartwright, D.J. (1976). A Compendium of Stress Intensity Factors. In *HMSO*, London. **15**, 269–278.
- Rosakis, A.J., y Ravichandran, G. (2000). Dynamic Failure Mechanics. In *Int. J. Solids & Struc.*, **37**, 331–348.
- Rudolphi, T. J., Krishnasamy, G., Schmerr, L. W., y Rizzo, F. J. (1988). On the Use of Strongly Singular Integral Equations for Crack Problems. In Brebbia, C.A., ed. *Boundary Elements X*. Computational Mechanics Publications, Southampton.
- Rudolphi, T.J. (1991). The Use of Simple Solutions in the Regularization of Hypersingular Boundary Integral Equations. In *Mathematical and Computer Modelling*, **15**, 269–278.
- Sáez, A., Gallego, R. y Domínguez, J. (1995). Hypersingular Quarter-Point Boundary Elements for Crack Problems. In *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **38**, 1681–1701.

- Sáez, A., Ariza, M.P., y Domínguez, J. (1997). Three-Dimensional Fracture Analysis in Transversely Isotropic Solids. In *Eng. Anal. Boundary Elements*, **20**, 287–298.
- Sáez, A. y Domínguez, J. (1999). BEM Analysis of Wave by a Circular Crack in a Transversely Isotropic Solid. In *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **44**, 1283–1300.
- Shield, R.T. (1951). Notes on Problems in Hexagonal Anisotropic Materials. In *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **47**, 401–409.
- Sih, G.C., Paris, P.C., y Irwin, G.R. (1965). On Cracks in Rectilinearly Anisotropic Bodies. In *Int. J. Fract. Mech.*, **1**, 189–203.
- Sih, G.C. y Chen, E.P. (1981). *Mechanics of Fracture Volume 6: Cracks in Composites Materials*. Martinus Nijhoff, The Netherlands.
- Sladek, V., y Sladek, J. (1984). Transient Elastodynamic Three-Dimensional Problems in Cracked Bodies. In *Appl. Math. Modelling*, **8**, 2–10.
- Sladek, V., y Sladek, J. (1986). Dynamic Stress Intensity Factors Studied by Integro-Differential Equations. In *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **23**, 919–928.
- Sladek, V., Sladek, J., y Tanaka, M. (1992). Numerical Solution of Nonsingular BIE for Crack Problems. In Brebbia, C. A., Domínguez, J., and Paris, F., eds., *Boundary Elements XIV, Vol. 2*. Computational Mechanics Publications, Southampton.
- Sneddon, I. N. (1946). The Distribution of Stress in the Neighbourhood of a Crack in an Elastic Solid. In *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, **187**, 229–260.
- Snyder, M.D., y Cruse, T.A. (1975). Boundary Integral Equation Analysis of Cracked Anisotropic Plates. In *Int. J. Fract.*, **11**, 315–328.
- Tanaka, M., Sladek, V., y Sladek, J. (1994). Regularization Techniques Applied to Boundary Element Methods. In *Appl. Mech. Reviews*, **47**, 457–499.
- Tsai, Y.M. (1982). Penny-Shaped Crack in a Transversely Isotropic Plate of Finite Thickness. In *Int. J. Fract.*, **20**, 81–89.
- Tsai, Y.M. (1988). Dynamic Penny-Shaped Crack in a Transversely Isotropic Material. In *Eng. Fract. Mech.*, **31**, 977–984.
- Tsai, Y.M. (1989). Torsional Vibration of a Penny-Shaped Crack in a Transversely Isotropic Material. In *Advances in Fracture Research ICF 7*, **3**, (Edited by Salama et al.). Pergamon Press, Oxford. 2363–2368.

- Vogel, S.M. y Rizzo, F.J. (1973). An Integral Equation Formulation of Three Dimensional Anisotropic Elastostatic Boundary Value Problems. In *J. Elasticity*, **3**, 203–216.
- Wang, C.Y. y Achenbach, J.D. (1993). A New Method to Obtain 3-D Green's Functions for Anisotropic Solids. In *Wave Motion*, **18**, 273–289.
- Wang, C.Y. y Achenbach, J.D. (1995). 3-D Time-Harmonic Elastodynamic Green's Functions for Anisotropic Solids. In *Proc. Roy. Soc. London*, **A449**, 441–458.
- Wen, P.H., Aliabadi, M.H., y Rooke, D.P. (1998). Cracks in Three Dimensions: A Dynamic Dual Boundary Element Analysis. In *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **167**, 139–151.
- Wen, P.H., Aliabadi, M.H., y Rooke, D.P. (1999). Three-Dimensional Dynamic Fracture Analysis with the Dual Reciprocity Method in Laplace Domain. In *Engng. Anal. Bound. Elem.*, **23**, 51–58.
- Westergaard, H.M. (1939). Bearing Pressures and Cracks. In *Journal of Applied Mechanics*, **6**, 49–53.
- Wilson, R.B. y Cruse, T.A. (1978). Efficient Implementation of Anisotropic Three Dimensional Boundary-Integral Equation Stress Analysis. In *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **12**, 1383–1397.
- Young, A. (1996). A Single-Domain Boundary Element Method for 3-D Elastostatic Crack Analysis Using Continuous Elements. In *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **39**, 1265–1293.
- Zhang, Ch. y Achenbach, J.D. (1989). A New Boundary Integral Equation Formulation for Elastodynamic and Elastostatic Crack Analysis. *ASME J. Appl. Mech.*, **56**, 284–290.
- Zhang, Ch. y Gross, D. (1992). 3-D Elastodynamic Crack Analysis by a Non-Hypersingular BIEM. *Comput. Mech.*, **9**, 137–152.
- Zhang, Ch. y Gross, D. (1988). The Solution of Plane Problems of Wave Loaded Cracks by an Integral Equation Method. *Z. Angew. Math. Mech.*, **68**, 299–305.
- Zhang, Ch. y Gross, D. (1993). Interaction of Antiplane Cracks With Elastic Waves in Transversely Isotropic Materials. *Acta Mechanica*, **101**, 231–247.
- Zhang, Ch. y Gross, D. (1998). On Wave Propagation in Elastic Solids with Cracks. *Computational Mechanics Publications* .