



# Aproximación de las soluciones de ecuaciones

Universidad de Sevilla

Facultad de Matemáticas

Departamento de Análisis Matemático

Trabajo Fin de Grado

Grado en Estadística

Curso 2023-2024

Dirigido por :

*María Anguiano Moreno*

Fdo : *Lucía Martín Perriáñez*

Sevilla, Octubre de 2023



## Resumen

El análisis matemático, también conocido como cálculo, es una rama fundamental de las matemáticas que se centra en el estudio de algoritmos para poder resolver problemas matemáticos como es encontrar soluciones a las ecuaciones de la forma  $F(x) = 0$ .

En una gran variedad de situaciones nos encontramos con la dificultad de hallar las raíces de una ecuación. Los métodos iterativos nos ayudaran a resolver este problema. Los métodos matemáticos son técnicas que permiten resolver de forma aproximada problemas matemáticos estimando el error cometido. Algunos de los métodos más utilizados son el método de la Bisección, el método del Punto Fijo, el método de Newton, etc. En este sentido, en este trabajo haremos un estudio detallado de estos métodos numéricos y sus variantes.

## Abstract

Mathematical analysis, also known as calculation, is a fundamental branch of mathematics that focuses on the study of algorithms to solve mathematical problems such as finding solutions to equations of the form  $F(x) = 0$ .

In a wide variety of situations we encounter the difficulty of finding the roots of an equation. Iterative methods will help us to solve this problem. Mathematical methods are techniques that allow us to solve mathematical problems in an approximate way by estimating the error made. Some of the most commonly used methods are the bisection method, the fixed point method, Newton's method, etc. In this sense, in this paper we will make a detailed study of these numerical methods and their variants.



# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>El método de Bisección</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>El método del punto fijo y el teorema de Picard</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Estudio del método del punto fijo</b>	<b>18</b>
<b>5</b>	<b>El método de Newton</b>	<b>22</b>
<b>6</b>	<b>Variantes del método de Newton</b>	<b>31</b>
6.1	Método de Whittaker . . . . .	32
6.2	Método de las cuerdas . . . . .	35
6.3	Método de la secante . . . . .	40
6.4	Método de la Falsa Posición (o Regula Falsi) . . . . .	43
<b>7</b>	<b>Programación con Matlab</b>	<b>45</b>
7.1	Método de Bisección . . . . .	46
7.2	Método de Punto Fijo . . . . .	48
7.3	Método de Newton . . . . .	50
<b>8</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>52</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>55</b>



# Capítulo 1

## Introducción

Los siglos XVII y XVIII aceleraron el desarrollo de las matemáticas en varios campos de estudio. Durante este período, gracias al trabajo separado de Newton y Leibniz, nació el cálculo infinitesimal e integral.

En sus primeras décadas no tenían una base firme, pero se entendían como un conjunto de reglas con distintas características algorítmicas, lo que justificaba el término “cálculo”: cálculo diferencial, cálculo integral y cálculo de variaciones.

A mediados del siglo XIX, Riemann publicó su teoría de la integración. En el último tercio del siglo XIX, Weierstrass lideró la aritmética del análisis, consideró que el razonamiento geométrico era erróneo e introdujo la definición de Límite.

Hacia finales del siglo XVIII, algunos matemáticos expresaron algunas dudas sobre el progreso futuro de las matemáticas. La dificultad de los problemas a resolver, la variedad de métodos utilizados, una falta casi total de técnicas y métodos para simplificar las investigaciones y la búsqueda de soluciones. Estos factores crearon un estado de ánimo un tanto pesimista.

Pero no todo era pesimismo. Condorcet afirmaba que el estado de las ciencias se encontraba en sus comienzos.

Así, con la aparición de nuevas aplicaciones en las que trabaja el análisis matemático y otras áreas de esta ciencia, el análisis empieza a especializarse en análisis real, análisis funcional, análisis armónico, análisis complejo y análisis numérico. Por esta razón, el estudio de algoritmos para problemas matemáticos se denomina “Análisis Numérico”. Un algoritmo es un procedimiento que describe un conjunto finito de pasos que deben realizarse en un orden específico.

El análisis numérico está impulsado por la necesidad de precisión en el cálculo de resultados exactos, entre otras cosas, para resolver situaciones en física y astronomía. La aplicación a problemas del mundo real destaca la importancia de esta línea de trabajo, basada en aproximaciones cada vez más precisas, obtenidas con diferentes métodos de aproximación a puntos determinados.

La necesidad de precisión une a las matemáticas y las computadoras (ordenadores) en esta importantísima tarea para el avance del trabajo matemático aplicado en los más diversos campos de la ingeniería y la física.

El desarrollo de software es esencial para comprender el análisis numérico. Matlab, por ejemplo, es un hito fundamental destinado a promover el soporte para el análisis numérico. Se desarrolló originalmente con fines educativos, pero rápidamente ganó notoriedad entre los científicos e ingenieros como una herramienta esencial para la computación científica. El sistema da acceso a algoritmos más eficientes con unas pocas líneas de código, lo que permite a los expertos centrarse en la esencia matemática del problema. Para comprender su importancia, muchos de los cálculos para el diseño de los transportadores espaciales de la NASA se realizan en este software.

El objetivo de este trabajo es desarrollar uno de los problemas clásicos de las matemáticas desde siglos, como es encontrar solución a las ecuaciones de la forma  $F(x) = 0$ .



En una gran variedad de situaciones surge el problema de hallar las raíces de una ecuación. Lo que no es una tarea sencilla, ya que por ejemplo, para ecuaciones como  $e^{-x} - 2x = 0$  podemos demostrar que tienen raíces reales pero no existe un método para calcularlas de forma exacta. Este tipo de argumentos nos conducen al estudio de métodos iterativos para el cálculo de las raíces de una ecuación.

Los métodos numéricos son técnicas matemáticas que permiten resolver de forma aproximada problemas matemáticos estimando el error cometido. Los métodos numéricos son en la actualidad herramientas informatizadas y fundamentales capaces de resolver problemas prácticos en todas las áreas de la ciencia, ya sean sociales o técnicas. El aprendizaje de los métodos numéricos es muy importante para que los estudiantes exploren algoritmos que les permitan encontrar soluciones aproximadas con el mínimo error y observar una amplia gama de aplicaciones en diversos campos del conocimiento.

Trabajaremos en el siguiente marco:

**Definición 1.1** Sea  $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Un punto  $\alpha \in I$  será una raíz de la ecuación  $F(x) = 0$  en  $I$  si  $F(\alpha) = 0$ .

Supondremos que la ecuación  $F(x) = 0$  tiene las raíces aisladas, lo que quiere decir que en un mismo entorno existe únicamente una raíz de la ecuación.

Vamos a considerar dos etapas en el cálculo aproximado de las raíces aisladas reales de la ecuación

$$F(x) = 0 \quad \text{en} \quad [a, b]. \tag{1.1}$$

- a) Separación de raíces: se establecen subintervalos de  $[a, b]$  que contengan una y sólo una raíz de la ecuación (1.1). Para ello, las herramientas fundamentales van a ser el teorema de Bolzano (para asegurar la existencia de raíces) y el teorema de Rolle (para acotar el número de raíces que puede haber).

Bernhard Bolzano fue un matemático y filósofo checo nacido en 1781. En 1796, empezó sus estudios de Filosofía y Matemáticas en la Facultad de Filosofía en la Universidad de Praga. Completó sus estudios con Teología y fue nombrado sacerdote en 1805, mismo año en el que fue designado como profesor de filosofía de la religión en la misma universidad en la que estudió. Publicó obras muy importantes como “Una Prueba Pura Analítica” (1817), conocida a día de hoy como el teorema de Bolzano, “Athanasia o pruebas de la inmortalidad del alma” (1827), “Tratado de la Ciencia de la Religión” (1834), “Teoría de la ciencia” (1837) y “Paradojas de lo infinito” (1851).



Figura 1.1: Bernhard Bolzano

**Teorema 1.2 (Teorema de Bolzano)** *Sea  $F \in C^0([a, b])$  y  $F(a)F(b) < 0$ , entonces existe al menos un punto  $\alpha$  perteneciente al intervalo  $(a, b)$  tal que  $F(\alpha) = 0$ .*

*Si se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano, quedará demostrada la existencia de alguna solución. Además, si la función es siempre creciente o siempre decreciente en el intervalo de estudio, quedará demostrada que esta solución es única.*

Michel Rolle fue un matemático francés nacido en 1652. No tuvo una gran formación académica, sino que fue un matemático autodidacta. Publicó “Tratado de Álgebra” en el cual expuso un método de resolución de determinados tipos de ecuaciones e inventó la notación para representar la raíz  $n$ -enésima de un número  $x$ . Mantuvo diversos debates

sobre los principios del cálculo diferencial. Se dedicó mayoritariamente a la teoría de ecuaciones, gracias a este dominio publicó el teorema de Rolle (1691). Se dio a conocer en 1682 cuando resolvió un problema propuesto por el matemático Jacques Ozanam.



Figura 1.2: Michel Rolle

**Teorema 1.3 (Teorema de Rolle)** *Sea  $F \in C[a, b]$  y  $F$  diferenciable en  $(a, b)$ . Si  $F(a) = F(b)$ , entonces existe al menos un punto  $\alpha$  perteneciente al intervalo  $(a, b)$  tal que  $F'(\alpha) = 0$ .*

*Si se cumplen estos axiomas en el intervalo  $[a, b]$ , entonces habrá un punto dentro de dicho intervalo donde la recta tangente a la función sea paralela al eje de abscisas. La pendiente de la recta tangente en el punto  $\alpha$  de la función  $F$  será la derivada en ese punto, es decir,  $m = F'(\alpha)$ . Si  $F'$  sólo se anula en  $n$  puntos la función  $F$  tendrá, a lo sumo,  $n + 1$  raíces. Si  $F \in C^2([a, b])$  es tal que  $F''$  tiene un signo constante en  $[a, b]$  entonces  $F$  tiene, a lo sumo, dos raíces reales en  $[a, b]$ .*

- b) En cada uno de estos intervalos se calcula la raíz  $\alpha$  de la ecuación mediante un método iterativo como límite de una sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  que converge a  $\alpha$ . De esta forma, deberemos tomar como aproximación de la solución  $\alpha$  un elemento  $x_n$  de la sucesión próximo a ella.

Completaremos el trabajo estudiando los métodos más utilizados para resolver este tipo

de problemas. Uno de ellos será el método de Newton.

Isaac Newton fue un matemático y físico inglés nacido en 1642. En 1661, ingresó en el Trinity College de la Universidad de Cambridge, donde estudió matemáticas. Allí mismo le nombraron becario en 1667. A partir de 1668 fue profesor. Newton se dedicó al estudio e investigación de los últimos avances en matemáticas y a la filosofía natural. Fue conocido por sus descubrimientos en óptica y matemáticas, aunque lo es sobre todo por su formulación de las leyes del movimiento que se convirtió en la ley de la gravitación universal.

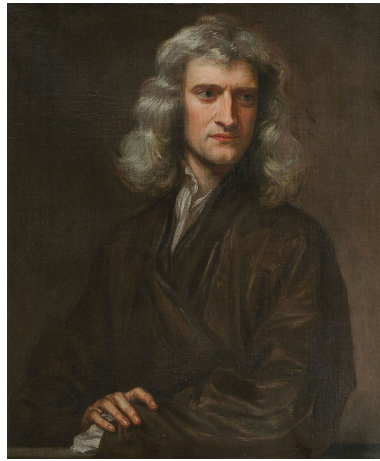


Figura 1.3: Isaac Newton

En el Capítulo 2 estudiaremos el método de Bisección. Los Capítulos 3 y 4 están dedicados al método del punto fijo, y el Capítulo 5 al método de Newton. Debido a la gran importancia del método de Newton, hemos dedicado el Capítulo 6 al desarrollo de las variantes más importantes del método de Newton. En el Capítulo 7 desarrollaremos la programación con Matlab de los tres métodos más importantes: método de bisección, método de punto fijo y método de Newton. Finalizaremos el trabajo con el Capítulo 8 de conclusiones y la bibliografía usada para elaborar este Trabajo Fin de Grado.

# Capítulo 2

## El método de Bisección

En este capítulo se desarrollará el método de Bisección. Para la elaboración de este capítulo se han usado las notas del curso 3M234 del Laboratoire Jacques-Louis Lions de la Sciences Sorbonne Université [4, 14], el libro de Burden *et al.* [2] y el libro de Infante del Río y Rey Cabezas [9].

Una primera técnica para resolver problemas escalares, basada en el teorema del Valor Medio, recibe el nombre de bisección.

Supongamos que  $F$  es una función continua en un intervalo  $[a, b]$  ( $F \in C([a, b])$ ) con  $F(a)F(b) < 0$ , es decir, con  $F(a)$  y  $F(b)$  de signos opuestos. Entonces, por el teorema de Bolzano existe, al menos, un punto  $\alpha \in (a, b)$  tal que  $F(\alpha) = 0$ . Suponiendo que hemos separado las raíces de la ecuación y que  $\alpha$  es la única raíz de

$$F(x) = 0 \text{ en } [a, b],$$

el método realiza repetidamente una reducción a la mitad, lo que conocemos como bisección, de los subintervalos de  $[a, b]$ , y en cada paso, se localiza la mitad que contiene  $\alpha$ .

**Algoritmo 2.1 (Algoritmo de bisección)** *Pueden presentarse dos casos:*

a)  $F\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ . Entonces  $\alpha = \frac{a+b}{2}$ .

b)  $F\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$ . Se elige el intervalo  $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$  o  $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$  en cuyos extremos la función  $F$  tenga signos opuestos para poder seguir aplicando el teorema de Bolzano. Denotamos este intervalo elegido como  $[a_1, b_1]$ , lo dividimos por la mitad y procedemos a hacer lo mismo.

El algoritmo de bisección converge a un  $\alpha$  tal que  $F(\alpha) = 0$ . Además, si el algoritmo no se detiene en un número finito de iteraciones, tenemos la siguiente estimación del error:

$$\left| \alpha - \frac{a_n + b_n}{2} \right| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

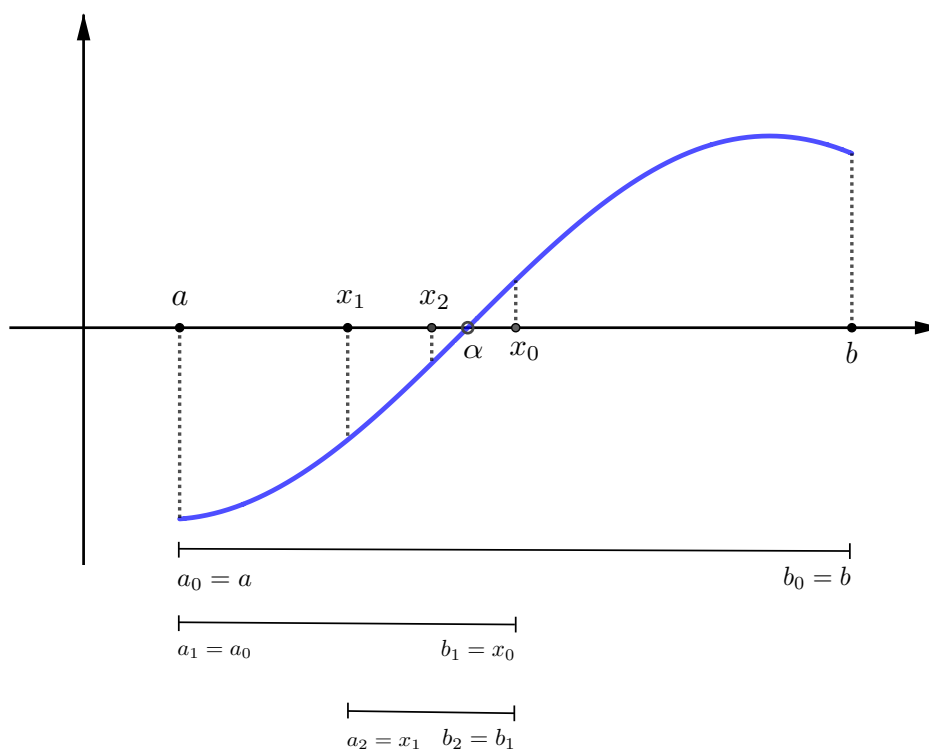


Figura 2.1: Método de la bisección

**Observación 2.1** Este método es de gran utilidad para determinar intervalos de pequeña longitud que contengan únicamente una raíz; sin embargo, es necesario hacer muchos cálculos para conseguir una buena aproximación de la raíz ya que la convergencia es muy lenta. Por lo que este método es mejor usarlo previamente a otros métodos iterativos de convergencia más rápida.

**Ejemplo 2.2** Determine el número de iteraciones necesarias para resolver la función  $F(x) = x^3 + 4x^2 - 10$  con precisión de  $10^{-3}$  en el intervalo  $[1, 2]$ . A continuación, aplique el método de bisección para encontrar una solución exacta dentro de  $10^{-3}$  en el mismo intervalo.

Teniendo en cuenta que la estimación del error es

$$\left| \alpha - \frac{a_n + b_n}{2} \right| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}},$$

entonces,

$$\left| \alpha - \frac{a_n + b_n}{2} \right| \leq 2^{-(n+1)}(b - a) < 10^{-3},$$

y como  $a = 1$  y  $b = 2$ , despejando la  $n$  tendríamos

$$2^{-(n+1)} < 10^{-3} \Rightarrow \ln(2^{-(n+1)}) < \ln(10^{-3}) \Rightarrow -(n+1)\ln(2) < -3 \Rightarrow n+1 > \frac{3}{\ln(2)} \Rightarrow n > \frac{3}{\ln(2)} - 1 \approx 8,96.$$

Por lo tanto, se requieren 9 iteraciones para conseguir una aproximación precisa dentro de  $10^{-3}$ .

Puesto que  $F(1) = -5 < 0$  y  $F(2) = 14 > 0$ , es decir, que  $F(1)$  y  $F(2)$  tienen signos opuestos, o lo que es lo mismo,  $F(1)F(2) < 0$ , podemos afirmar según el teorema de Bolzano que existe al menos un punto  $\alpha \in (1, 2)$  en el cual  $F(\alpha) = 0$ .

El método de bisección consiste en dividir el intervalo a la mitad y determinar en qué mitad se encuentra la raíz. Luego, se repite el proceso en la mitad correspondiente hasta que se alcance la precisión deseada.

Para la primera iteración del método de bisección, el punto medio del intervalo  $[1, 2]$  es 1.5. Por lo tanto,  $F(1.5) = 2.375$ , lo cual es mayor que 0. Debemos seleccionar el intervalo  $[1, 1.5]$  para la segunda iteración. El punto medio de este segundo intervalo es 1.25 y evaluando  $F(1.25)$  obtenemos  $-1.796875$ , que es menor que 0. Por lo tanto, seleccionamos el intervalo  $[1.25, 1.5]$ . El punto medio de este intervalo es 1.375 y hacemos lo mismo, obteniendo la siguiente tabla:

n	a	b	$\alpha$	$F(\alpha)$
1	1	2	1.5	2.375
2	1	1.5	1.25	-1.79687
3	1.25	1.5	1.375	0.16211
4	1.25	1.375	1.3125	-0.84839
5	1.3125	1.375	1.34375	-0.35098
6	1.34375	1.375	1.359375	-0.09641
7	1.359375	1.375	1.3671875	0.03236
8	1.359375	1.3671875	1.36328125	-0.03215
9	1.36328125	1.3671875	1.365234375	0.000072

*Después de 9 iteraciones, obtenemos que  $\alpha_9 = 1.365234375$ .*



## Capítulo 3

# El método del punto fijo y el teorema de Picard

En este capítulo se desarrollará el método del punto fijo y el teorema de Picard. Para la elaboración de este capítulo se ha usado el libro de Infante del Río y Rey Cabezas [9].

Una desventaja del método de la Bisección es que no es inmediatamente aplicable a funciones con varias variables. Para eso tenemos el método del punto fijo.

Otra forma de resolver el problema de hallar las raíces de una ecuación de la forma

$$F(x) = 0 \text{ en } [a, b]$$

es considerar otra ecuación

$$G(x) = 0 \text{ en } [a, b]$$

que sea equivalente a la anterior, es decir, que ambas tengan las mismas raíces. Vamos a considerar el caso de que

$$G(x) = f(x) - x, \quad x \in [a, b]$$

para alguna función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$F(x) = 0 \text{ en } [a, b] \iff f(x) = x \text{ en } [a, b].$$

**Definición 3.1** Una aplicación  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es contractiva en  $[a, b]$  si existe  $k \in [0, 1)$  tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \quad x, y \in [a, b].$$

Siendo  $k$  la constante de contractividad. Por tanto, una función contractiva es una función  $k$ -lipschitziana con  $k < 1$ . Recordemos que las funciones  $k$ -lipschitzianas son siempre continuas.

**Ejemplo 3.2** La aplicación  $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}, \quad x \in [1, 2]$$

es contractiva en  $[1, 2]$  de constante  $k = \frac{1}{2}$  ya que para todo  $x, y \in [1, 2]$  se verifica:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \right) - \left( \frac{y}{2} + \frac{1}{y} \right) \right| = \left| \frac{x-y}{2} - \frac{x-y}{xy} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{xy} \right| |x-y| \leq \frac{1}{2} |x-y|. \end{aligned}$$

**Observación 3.3** Son importantes las siguientes observaciones:

1. Si  $f$  es contractiva en  $[a, b]$  entonces se tiene que

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| < |x - y|, \quad x, y \in [a, b].$$

De lo que deducimos que la distancia entre  $f(x)$  y  $f(y)$  es menor que la distancia entre  $x$  e  $y$ . De aquí obtenemos el término de contractiva ya que se “contrae” la distancia entre los puntos.

2. Si  $f$  es contractiva en  $[a, b]$  entonces es uniformemente continua y, por tanto, continua en el intervalo  $[a, b]$ . Esto no implica que el recíproco tenga que ser cierto.
3. Si  $f \in C([a, b])$  es derivable en  $(a, b)$  y existe  $k \in [0, 1)$  tal que se cumpla que

$$|f'(x)| \leq k, \quad x \in (a, b)$$

entonces  $f$  es contractiva en  $[a, b]$  de constante  $k$  ya que a partir del teorema del valor medio se tiene que

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\beta)||x - y| \leq k|x - y|, \quad x, y \in [a, b].$$

4. Si  $f \in C^1([a, b])$  y se cumple que

$$|f'(x)| < 1, \quad x \in [a, b]$$

entonces  $f$  es contractiva en  $[a, b]$  de constante

$$k = \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|.$$

**Teorema 3.4 (Punto Fijo de Banach)** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es contractiva de constante  $k \in [0, 1)$  tal que  $f([a, b]) \subset [a, b]$ , entonces existe un único punto fijo  $\alpha \in [a, b]$  tal que

$$f(\alpha) = \alpha.$$

Además,  $\alpha$  es el límite de la sucesión definida por

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] & \text{arbitrario,} \\ x_n = f(x_{n-1}), & n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (3.1)$$

y se tiene la siguiente estimación del error:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1 - k} |x_1 - x_0|, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

### Demostración

a) *Unicidad*: supongamos que existe otra solución. Por tanto, tenemos que existen  $\alpha_i \in [a, b]$ , siendo  $i = 1, 2$ , tales que

$$f(\alpha_i) = \alpha_i,$$

y vamos a comprobar que  $\alpha_1 = \alpha_2$ .

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |f(\alpha_1) - f(\alpha_2)| \leq k|\alpha_1 - \alpha_2| \quad \Rightarrow \quad \frac{|\alpha_1 - \alpha_2|}{|\alpha_1 - \alpha_2|} \leq k \quad \Rightarrow \quad k \geq 1,$$

lo que es absurdo ya que  $k < 1$ , por tanto, hemos comprobado que sólo existe una solución  $\alpha$ .

b) *Existencia:* la hipótesis  $f([a, b]) \subset [a, b]$  hace que la sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  definida en (3.1) verifique

$$x_n \in [a, b], \quad n \geq 0.$$

Para comprobar que esta sucesión es de Cauchy en  $[a, b]$  demostraremos que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $n_\epsilon \in \mathbb{N}$  tal que

$$|x_m - x_n| < \epsilon \quad \text{si } m, n \geq n_\epsilon.$$

Para empezar, observemos que para todo  $q \geq 0$  se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} |x_{q+1} - x_q| &= |f(x_q) - f(x_{q-1})| \leq k|x_q - x_{q-1}| \\ &\leq k^2|x_{q-1} - x_{q-2}| \leq \dots \leq k^q|x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Suponiendo que  $m > n$  podemos escribir que  $m = n + p$  con  $p \in \mathbb{N}$ . De esta forma, aplicando lo anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_{n+p} - x_n| = |(x_{n+p} - x_{n+p-1}) + (x_{n+p-1} - x_{n+p-2}) + \dots + (x_{n+1} - x_n)| \\ &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq k^{n+p-1}|x_1 - x_0| + k^{n+p-2}|x_1 - x_0| + \dots + k^n|x_1 - x_0| \\ &= (k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + \dots + k^n)|x_1 - x_0| \\ &= k^n(k^{p-1} + k^{p-2} + \dots + k + 1)|x_1 - x_0| \\ &= k^n|x_1 - x_0| \sum_{i=0}^{p-1} k^i \leq k^n|x_1 - x_0| \sum_{i=0}^{\infty} k^i = \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|, \end{aligned}$$

por ser  $k \in [0, 1)$ . Por esto mismo,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (k^n) = 0$$

y, en consecuencia, dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_\epsilon \in \mathbb{N}$  tal que

$$|x_m - x_n| < \epsilon \quad \text{si } m, n \geq n_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0| < \epsilon \quad \text{si } n \geq n_\epsilon.$$

Así, si  $n \geq n_\epsilon$  se tiene que

$$|x_{n+p} - x_n| < \epsilon,$$

luego  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  es una sucesión de Cauchy en  $[a, b]$  y, por tanto, convergente en  $[a, b]$ , es decir, existe  $\alpha \in [a, b]$  tal que

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

Como  $f \in C([a, b])$  entonces se obtiene que

$$f(\alpha) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \alpha,$$

o sea,  $\alpha$  es el único punto fijo de  $f$ . Finalmente, para cada  $n \in \mathbb{N}$  fijo hemos obtenido la estimación

$$|x_n - x_{n+p}| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Haciendo tender  $p \rightarrow +\infty$ , se obtiene la cota del error dada en (3.2).

**Interpretación geométrica 3.5** En la figura siguiente podemos observar las sucesivas iteraciones del método del Punto Fijo para la ecuación

$$f(x) = x$$

donde hemos supuesto que  $f \in C([a, b])$ , que  $f'$  tiene signo constante y que

$$|f'(x)| < 1, \quad x \in [a, b].$$

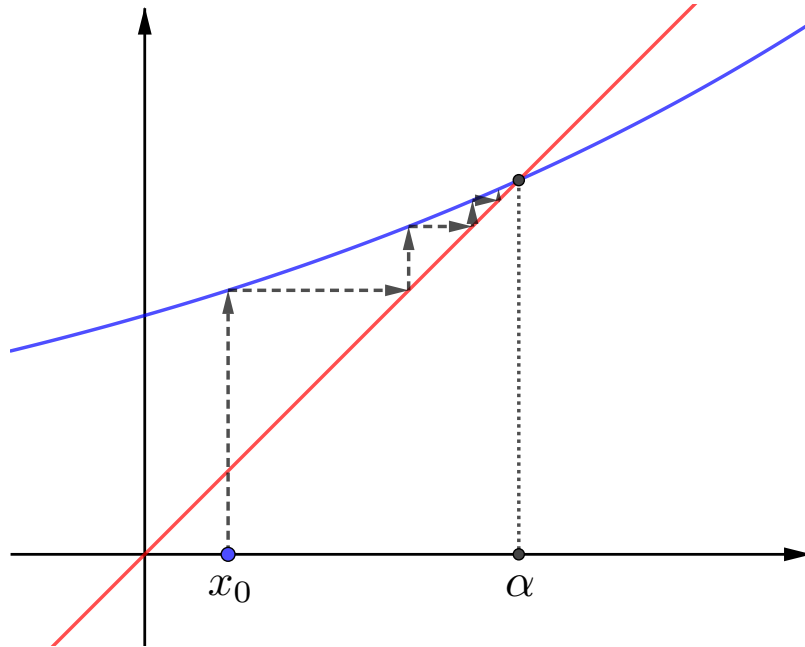


Figura 3.1: Método del punto fijo

**Definición 3.6** Sea  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$  una sucesión convergente de manera que

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad \text{y} \quad e_n = |a_n - l|, \quad n \geq 0.$$

La sucesión  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  converge a  $l$ :

a) Al menos linealmente si existe  $M > 0$  tal que

$$\frac{e_n}{e_{n-1}} \leq M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

b) Al menos cuadráticamente si existe  $M > 0$  tal que

$$\frac{e_n}{(e_{n-1})^2} \leq M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Cuando se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e_n}{e_{n-1}} = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e_n}{(e_{n-1})^2} = 0$$

se dice que el orden de convergencia de la sucesión  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  a  $l$  es superlineal o supercuadrático.

Esto puede generalizarse a que la sucesión  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  converge a  $l$  al menos con un orden de convergencia  $\beta > 0$  si existe  $M > 0$  tal que se cumpla que

$$\frac{e_n}{(e_{n-1})^\beta} \leq M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Proposición 3.7** Si  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  es contractiva de constante  $k \in [0, 1)$ , entonces la sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  dada en (3.1) converge, al menos linealmente, al único punto fijo  $\alpha$  de  $f$  en  $[a, b]$ .

Demostración. Denotando por

$$e_n = |x_n - \alpha|, \quad n \in \mathbb{N}$$

donde  $\alpha$  es el único punto fijo de  $f$ , se tiene que

$$e_n = |x_n - \alpha| = |f(x_{n-1}) - f(\alpha)| \leq k|x_{n-1} - \alpha| = ke_{n-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{e_n}{e_{n-1}} \leq k.$$

# Capítulo 4

## Estudio del método del punto fijo

En este capítulo se hará un estudio del método del punto fijo. Para la elaboración de este capítulo se han usado las notas del curso 3M234 del Laboratoire Jacques-Louis Lions de la Sciences Sorbonne Université [4, 14].

Empezamos este capítulo con la siguiente proposición:

**Proposición 4.1** *Sea  $f$  una función de clase  $C^1$  sobre un intervalo abierto  $(a, b)$ , entonces  $f$  es  $k$ -lipschitziana sobre un intervalo  $J \subset (a, b)$  si y sólo si  $|f'(x)| \leq k$  para todo  $x \in J$ .*

Consideremos ahora un intervalo abierto  $(a, b)$  y  $\alpha \in (a, b)$  un punto fijo de  $f$  (no necesariamente único en  $(a, b)$ ), con  $f \in C^1(a, b)$ . Podemos distinguir varios casos dependiendo de los valores de la derivada de  $f$  en  $\alpha$ .

- **Caso 1:**  $|f'(\alpha)| < 1$ .

En este caso, como  $f'$  es continua, existe  $r > 0$  tal que

$$|x - \alpha| \leq r \quad \Rightarrow \quad |f'(x) - f'(\alpha)| \leq \frac{1 - |f'(\alpha)|}{2} \quad \Rightarrow \quad |f'(x)| \leq k := \frac{1 + |f'(\alpha)|}{2} < 1.$$

Para llegar al resultado anterior desarrollamos lo siguiente

$$|f'(x) - f'(\alpha)| \leq \frac{1 - |f'(\alpha)|}{2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) - f'(\alpha) \leq \frac{1 - f'(\alpha)}{2} \quad \Rightarrow$$



$$f'(x) \leq \frac{1 - f'(\alpha)}{2} + f'(\alpha) \Rightarrow f'(x) \leq \frac{1 - f'(\alpha) + 2f'(\alpha)}{2} \Rightarrow$$

$$f'(x) \leq \frac{1 + f'(\alpha)}{2} < \frac{1 + 1}{2} = 1.$$

De acuerdo con la proposición anterior  $f$  es  $k$ -lipschitziana y por tanto contractiva en el intervalo  $F = [\alpha - r, \alpha + r]$ . Para todo  $x \in F$  y teniendo en cuenta que  $f$  es  $k$ -lipschitziano, se deduce

$$|f(x) - \alpha| = |f(x) - f(\alpha)| \leq k|x - \alpha| \leq kr < r,$$

y en consecuencia  $f(F) \subset F$ . El teorema del Punto Fijo nos permite afirmar que para todo  $x_0 \in F$ , la sucesión  $x_{n+1} = f(x_n)$  converge a  $\alpha$  con una velocidad de convergencia geométrica:

$$|x_n - \alpha| = |f(x_{n-1}) - f(\alpha)| \leq k|x_{n-1} - \alpha| \leq \dots \leq k^n|x_0 - \alpha| \leq rk^n.$$

Decimos que el punto fijo  $\alpha$  es atractivo si el algoritmo converge para cualquier  $x_0$  suficientemente próximo a  $\alpha$ .

- **Caso 2:**  $|f'(\alpha)| > 1$ .

Supongamos, por ejemplo, que  $f'(\alpha) > 1$ . Utilizando la continuidad de  $f'$  del mismo modo que en el caso anterior, obtenemos que existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$|x - \alpha| < \epsilon \Rightarrow f'(x) \geq k := \frac{1 + f'(\alpha)}{2} > 1.$$

Por tanto, si  $x_n \in [\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]$ , tenemos

$$|x_{n+1} - \alpha| = |f(x_n) - f(\alpha)| \geq k|x_n - \alpha|$$

que demuestra que la sucesión  $x_n$  tiende a alejarse de  $\alpha$  cuando está suficientemente cerca de ella, y que el algoritmo del punto fijo no converge en general a  $\alpha$ . Se llega a la misma conclusión si  $f'(\alpha) < -1$ . Por lo tanto, decimos que el punto fijo  $\alpha$  es repulsivo.

- **Caso 3:**  $|f'(\alpha)| = 1$ .

Este caso es ambiguo y no es posible llegar a una conclusión sobre la naturaleza del punto fijo sin un examen más detallado.

Consideremos por ejemplo  $f(x) = \sin(x)$  cuyo único punto fijo es  $\alpha = 0$  para el que tenemos  $f'(\alpha) = 1$ . Se trata de un punto fijo atractivo: dado que  $|\sin(x)| < |x|$  para todo  $x \neq 0$ , la sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$  es decreciente y minimizada por 0. Por lo tanto converge, y su límite es 0 ya que es el único punto fijo.

Consideremos por otro lado  $f(x) = \operatorname{sh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$  cuyo único punto fijo es también  $\alpha = 0$  y para el que también tenemos  $f'(\alpha) = 1$ . Se trata de un punto fijo repulsivo: como  $|\operatorname{sh}(x)| > |x|$  para todo  $x \neq 0$ , la sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$  se aleja de 0.

- **Caso 4:**  $f'(\alpha) = 0$ .

Ya sabemos por el caso 1 que el punto  $\alpha$  es atractivo y que el teorema del punto fijo se aplica en un intervalo  $F = [\alpha - r, \alpha + r]$ . En el caso en que  $f$  sea de clase  $C^2$  en  $(a, b)$ , podemos mejorar la estimación de la convergencia geométrica. En efecto, utilizando la fórmula de Taylor-Lagrange al segundo orden escribimos, para todo  $x \in F$ ,

$$f(x) = f(\alpha) + (x - \alpha)f'(\alpha) + \frac{1}{2}(x - \alpha)^2 f''(t) = f(\alpha) + \frac{1}{2}(x - \alpha)^2 f''(t),$$

con  $t \in (x, \alpha)$ . Observando

$$M_2 = \max_{t \in F} |f''(t)|,$$

tenemos

$$|f(x) - \alpha| = |f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{M_2}{2}|x - \alpha|^2,$$

y entonces si  $x_0 \in F$ ,

$$\frac{M_2}{2}|x_n - \alpha| \leq \left(\frac{M_2}{2}|x_{n-1} - \alpha|\right)^2 \leq \left(\frac{M_2}{2}|x_{n-2} - \alpha|\right)^4 \leq \dots \leq \left(\frac{M_2}{2}|x_0 - \alpha|\right)^{2^n},$$

o finalmente planteando  $b := \frac{M_2 r}{2}$  y suponiendo  $M_2 \neq 0$

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{2}{M_2} b^{2^n}.$$

Esta estimación de convergencia se denomina cuadrática. En el caso en que  $M_2 = 0$ , tenemos directamente  $x_n = \alpha$  para todo  $n > 0$ . La convergencia cuadrática es mucho más rápida que la geométrica, pero es necesario suponer  $b < 1$  lo que siempre es posible eligiendo  $r$  suficientemente pequeño, o reiniciando la secuencia  $x_n$  a partir de un índice  $k$  para el que  $\frac{M_2}{2}|x_k - \alpha| < 1$ . En este caso decimos que el punto fijo  $\alpha$  es superatractivo.

# Capítulo 5

## El método de Newton

En este capítulo se desarrollará el método de Newton. Para la elaboración de este capítulo se ha usado el libro de Infante del Río y Rey Cabezas [9].

Dada  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  estamos interesados en encontrar un valor aproximado de las raíces de la ecuación

$$F(x) = 0 \text{ en } [a, b].$$

Para ello, consideraremos una ecuación de punto fijo equivalente a la anterior, es decir,

$$f(x) = x \text{ en } [a, b].$$

La equivalencia anterior se da para cualquier función  $f$  de la forma

$$f(x) = x - \varnothing(x)F(x), \quad x \in [a, b] \tag{5.1}$$

donde  $\varnothing : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función arbitraria tal que

$$\varnothing(x) \neq 0, \quad x \in [a, b].$$

Si  $\alpha$  es la única raíz de  $F$  en  $[a, b]$ , entonces  $\alpha$  es el único punto fijo de  $f$  en  $[a, b]$ . Por tanto, si la sucesión

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] & \text{arbitrario} \\ x_n = f(x_{n-1}), & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

es convergente, tendrá por límite el punto  $\alpha$ . A continuación, vamos a elegir la función  $\varnothing$  de forma que la convergencia de la sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  sea, al menos, cuadrática. Haciendo un desarrollo de Taylor obtenemos

$$F(\alpha) = F(x_{n-1}) + F'(x_{n-1})(\alpha - x_{n-1}) + \frac{F''(\beta_{n-1})}{2}(\alpha - x_{n-1})^2 = 0.$$

Si despejamos obtenemos

$$F'(x_{n-1})(\alpha - x_{n-1}) = -F(x_{n-1}) - \frac{F''(\beta_{n-1})}{2}(\alpha - x_{n-1})^2,$$

y podemos deducir que

$$\alpha - x_{n-1} = -\frac{1}{F'(x_{n-1})} \left( F(x_{n-1}) + \frac{F''(\beta_{n-1})}{2}(\alpha - x_{n-1})^2 \right). \quad (5.2)$$

estando  $\beta_{n-1}$  entre  $\alpha$  y  $x_{n-1}$ .

Por otra parte, teniendo en cuenta (5.1), tenemos

$$f(x_{n-1}) = x_n = x_{n-1} - \varnothing(x_{n-1})F(x_{n-1}),$$

lo cual nos permite deducir

$$x_{n-1} - x_n = \varnothing(x_{n-1})F(x_{n-1}). \quad (5.3)$$

Por consecuencia, la suma de las fórmulas (5.2) y (5.3) determina que

$$\begin{aligned} \alpha - x_{n-1} + x_{n-1} - x_n &= -\frac{1}{F'(x_{n-1})}F(x_{n-1}) - \frac{1}{F'(x_{n-1})}\frac{F''(\beta_{n-1})}{2}(\alpha - x_{n-1})^2 + \varnothing(x_{n-1})F(x_{n-1}), \\ \alpha - x_n &= \left( \varnothing(x_{n-1}) - \frac{1}{F'(x_{n-1})} \right) F(x_{n-1}) - \frac{F''(\beta_{n-1})}{2F'(x_{n-1})}(\alpha - x_{n-1})^2. \end{aligned}$$

Así pues, si existen  $m_1 > 0$  y  $M_2 > 0$  tales que

$$|F'(x)| \geq m_1 > 0, \quad x \in [a, b] \quad (5.4)$$

y

$$|F''(x)| \leq M_2, \quad x \in (a, b) \quad (5.5)$$

basta tomar

$$\varnothing(x) = \frac{1}{F'(x)}, \quad x \in [a, b] \quad (5.6)$$

para que

$$\frac{e_n}{(e_{n-1})^2} \leq \frac{M_2}{2m_1} \Rightarrow e_n \leq \frac{M_2}{2m_1}(e_{n-1})^2, \quad n \in \mathbb{N} \quad (5.7)$$

y, por lo tanto, la sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  tendrá, al menos, convergencia cuadrática. Es decir, sustituyendo (5.6) en (5.1) tenemos lo siguiente

$$f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}, \quad x \in [a, b] \quad (5.8)$$

a partir de la cual se obtiene el método de Newton

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] & \text{dado} \\ x_n = x_{n-1} - \frac{F(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})}, & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

**Interpretación geométrica 5.1** Una iteración de este método consiste en tomar  $x_{n+1}$  como la intersección o el punto de corte de la recta tangente a la gráfica de la función  $F$  en el punto  $x_n$  con el eje de abscisas. De hecho, la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = F(x)$  en el punto  $(x_n, F(x_n))$  viene dada por

$$y = F(x_n) + F'(x_n)(x - x_n),$$

y la intersección de esta recta con el eje de abscisas ( $y = 0$ ) es

$$F(x_n) + F'(x_n)(x - x_n) = 0,$$

de lo cual deducimos

$$F(x_n) = -F'(x_n)(x - x_n),$$

y despejando obtenemos

$$\frac{F(x_n)}{F'(x_n)} = x_n - x,$$

y por tanto

$$x = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)},$$

es decir, la iteración siguiente  $x_{n+1}$  en el método de Newton.

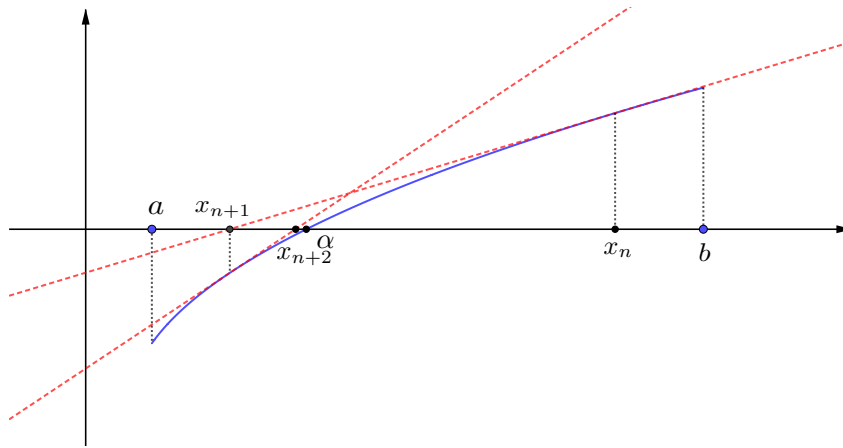


Figura 5.1: Método de Newton

Para poder demostrar la convergencia del método de Newton se requiere la siguiente hipótesis sobre la función  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\text{Hipótesis (H)} = \begin{cases} F \in C^2([a, b]), \\ F(a)F(b) < 0, \\ F' \text{ tiene signo constante en } [a, b], \\ F'' \text{ tiene signo constante en } [a, b]. \end{cases}$$

**Observación 5.2** *Son importantes las siguientes observaciones:*

1. *Toda función que verifique (H) tiene una única raíz  $\alpha$  en  $[a, b]$  que es simple.*
2. *Considerando las diversas posibilidades de los signos en (H), pueden presentarse cuatro casos:*

$$\text{Hipótesis 1 (H1)} = \begin{cases} F \in C^2([a, b]), \\ F(a) < 0 < F(b), \\ F'(x) > 0, \quad x \in [a, b], \\ F''(x) > 0, \quad x \in [a, b]. \end{cases}$$

$$\text{Hipótesis 2 (H2)} = \begin{cases} F \in C^2([a, b]), \\ F(a) < 0 < F(b), \\ F'(x) > 0, \quad x \in [a, b], \\ F''(x) < 0, \quad x \in [a, b]. \end{cases}$$

$$\text{Hipótesis 3 (H3)} = \begin{cases} F \in C^2([a, b]), \\ F(a) > 0 > F(b), \\ F'(x) < 0, \quad x \in [a, b], \\ F''(x) < 0, \quad x \in [a, b]. \end{cases}$$

$$\text{Hipótesis 4 (H4)} = \begin{cases} F \in C^2([a, b]), \\ F(a) > 0 > F(b), \\ F'(x) < 0, \quad x \in [a, b], \\ F''(x) > 0, \quad x \in [a, b]. \end{cases}$$

Para demostrar la convergencia del método de Newton cuando  $F$  verifica la hipótesis (H) podemos suponer que  $F$  verifica (H1). En efecto, la función

$$G(x) = \begin{cases} -F(-x), x \in [-b, -a] \text{ si } F \text{ verifica (H2)}, \\ -F(x), x \in [a, b] \text{ si } F \text{ verifica (H3)}, \\ F(-x), x \in [-b, -a] \text{ si } F \text{ verifica (H4)}. \end{cases}$$

verifica (H1). Si la sucesión del método de Newton para  $G$  es convergente, también es convergente para  $F$  en cada uno de los tres casos.

**Teorema 5.3** Si  $F$  verifica (H) y  $c \in [a, b]$  es el extremo de  $[a, b]$  tal que el signo de la función  $F(c)$  sea el mismo que el de la función  $F''(c)$ , entonces el método de Newton para  $F$  con  $x_0 = c$



converge, al menos cuadráticamente, a la única raíz  $\alpha$  de  $F$  en  $[a, b]$ .

*Demostración.* Por la observación 5.2 sabemos que  $F$  tiene una única raíz  $\alpha$  en  $[a, b]$  y que  $F$  verifica la hipótesis (H1), por lo que  $c = b$ . Vamos a probar, por inducción, que

$$x_n \in (\alpha, b], \quad n \geq 0.$$

i) Para  $n = 0$  sabemos que  $x_0 = b$ .

ii) Suponiendo cierto el resultado para  $n$ , es decir,

$$\alpha < x_n \leq b,$$

vamos a demostrarlo para  $n + 1$ . Si desarrollamos por Taylor la función  $F$  tenemos

$$F(\alpha) = F(x_n) + F'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{F''(\beta_n)}{2}(\alpha - x_n)^2 = 0$$

para algún  $\beta_n \in (\alpha, x_n)$ . Por la hipótesis de inducción y (H1) sabemos que

$$\frac{F''(\beta_n)}{2}(\alpha - x_n)^2 > 0,$$

y, por tanto,

$$F(x_n) + F'(x_n)(\alpha - x_n) < 0.$$

Así,

$$\alpha < x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} = x_{n+1}.$$

Además, como  $F'(x_n) > 0$  y por la hipótesis de inducción  $F(x_n) > 0$ , entonces

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} < x_n \leq b, \quad (5.9)$$

y, de esta forma se cumple

$$\alpha < x_{n+1} \leq b.$$

Por otra parte, de (5.9) se tiene que la sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset (\alpha, b]$  es estrictamente decreciente y acotada. Por consecuencia, existe

$$\beta = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

Ahora bien, la continuidad de la función  $f$  definida en (5.8) determina que

$$f(\beta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \beta$$

o, lo que es lo mismo,

$$F(\beta) = 0,$$

por lo que la unicidad de raíces de  $F$  en  $[a, b]$  hace que  $\beta = \alpha$ . Además, la hipótesis (H1) hace que se verifiquen las condiciones (5.4) y (5.5) que implican la convergencia cuadrática (5.7).

**Ejemplo 5.4** Aproximemos las raíces reales de la función siguiente mediante el método de Newton.

$$F(x) = x^5 + 5x + 8, \quad x \in \mathbb{R}.$$

En primer lugar, se cumple que  $F \in C^2([a, b])$ ,

$$F'(x) = 5x^4 + 5 = 5(x^4 + 1) > 0.$$

$$F''(x) = 20x^3 \begin{cases} > 0 & \text{si } x > 0, \\ = 0 & \text{si } x = 0, \\ < 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

por lo que la función  $F$  es creciente en  $\mathbb{R}$ , cóncava en el intervalo  $(-\infty, 0)$  y convexa en el intervalo  $(0, +\infty)$ , siendo  $x = 0$  un punto de inflexión de  $F$ .

Como, además,

$$F(-2) = -34 < 0, \quad F(-1) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad F(-2)F(-1) < 0$$

y, por lo tanto, sabemos por el teorema de Bolzano que la función  $F$  tiene una única raíz  $\alpha \in (-2, -1)$ .

Por otra parte, como

$$F'(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

el teorema de Rolle garantiza que  $\alpha$  es la única raíz de la función en todo  $\mathbb{R}$ . Puesto que

$$\begin{cases} F'(x) > 0, & x \in [-2, -1] \\ F''(x) < 0, & x \in [-2, -1] \end{cases}$$

si consideramos  $x_0 = -2$  entonces el método de Newton es convergente y el límite de la sucesión

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} - \frac{F(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{x_0 = -2}{\frac{x_{n-1}^5 + 5x_{n-1} + 8}{5(x_{n-1}^4 + 1)}} = \frac{4(x_{n-1}^5 - 2)}{5(x_{n-1}^4 + 1)}, & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

es

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n) = \alpha.$$

Los primeros términos de la sucesión anterior vienen dados en la siguiente tabla:

n	$x_n$
0	-2
1	-1.6000000000000000
2	-1.32236390595213
3	-1.16769339203490
4	-1.16703666447529
5	-1.16703618370190
6	-1.16703618370164

Observando estos valores, se puede apreciar el efecto de la convergencia cuadrática.

**Proposición 5.5** Sea  $F \in C^2([a, b])$  y denotemos por

$$m_1 = \min_{a \leq x \leq b} |F'(x)| \quad y \quad M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |F''(x)|.$$

Si  $m_1 > 0$  la sucesión del método de Newton verifica que

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - x_{n-1}|^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Utilizando la fórmula (5.8) y teniendo en cuenta que  $f(\alpha) = \alpha$ , tenemos

$$f(x) - f(\alpha) = x - \alpha - \frac{F(x)}{F'(x)}$$

y aplicando el desarrollo de Taylor:

$$f(x) - f(\alpha) = x - \frac{(x - \alpha)F'(x) + \frac{1}{2}(x - \alpha)^2 F''(\beta)}{F'(x)},$$

$$f(x) - f(\alpha) = \frac{1}{2}(x - \alpha)^2 \frac{F''(\beta)}{F'(x)}.$$

Entonces, obtenemos la estimación

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x - \alpha|^2.$$

Dado  $n \in \mathbb{N}$ , vamos a realizar lo anterior para la función  $F(x_n)$ . Si hacemos un desarrollo de Taylor, obtenemos

$$\begin{aligned} F(x_n) &= F(x_{n-1}) + F'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{F''(\beta_{n-1})}{2}(x_n - x_{n-1})^2 \\ &= \frac{F''(\beta_{n-1})}{2}(x_n - x_{n-1})^2 \end{aligned}$$

con  $\beta_{n-1}$  entre  $x_{n-1}$  y  $x_n$ , ya que

$$x_n = x_{n-1} - \frac{F(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})}.$$

Por tanto,

$$|F(x_n)| \leq \frac{M_2}{2} |x_n - x_{n-1}|^2. \quad (5.10)$$

Como, por otra parte,

$$|F(x_n)| = |F(x_n) - F(\alpha)| = |F'(v_n)||x_n - \alpha| \geq m_1|x_n - \alpha|,$$

entonces, a partir de (5.10), se verifica que

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|F(x_n)|}{m_1} \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - x_{n-1}|^2.$$

# Capítulo 6

## Variantes del método de Newton

En este capítulo se desarrollarán las variantes del método de Newton. Para la elaboración de este capítulo se ha usado el libro de Infante del Río y Rey Cabezas [9].

Nuestro objetivo sigue siendo resolver la ecuación

$$F(x) = 0 \text{ en } [a, b].$$

Sabemos que bajo el método de Newton, la convergencia es al menos cuadrática. Sin embargo, una posible desventaja es que en las sucesivas iteraciones hay que evaluar la derivada de  $F$ .

En esta sección consideramos algunas variantes de este método que “sustituyen” la derivada de  $F$  por algo menos costoso de calcular. De esta manera, la convergencia es más lenta pero las iteraciones son más sencillas.

En particular, estudiaremos las siguientes variantes del método de Newton:

- Método de Whittaker.
- Método de las cuerdas.
- Método de la secante.
- Método de la Falsa Posición (o Regula Falsi).

## 6.1 Método de Whittaker

En este método tomamos, en lugar de  $F'(x)$ , un valor constante  $\lambda \neq 0$ . A partir de (5.6), sustituimos la derivada por  $\lambda$

$$\varnothing = \frac{1}{\lambda}, \quad x \in [a, b].$$

Sustituyendo en (5.1) tenemos

$$f(x) = x - \frac{F(x)}{\lambda}, \quad x \in [a, b] \quad (6.1)$$

a partir de lo cual se obtiene el método de Whittaker

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] & \text{dado} \\ x_n = x_{n-1} - \frac{F(x_{n-1})}{\lambda}, & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

**Interpretación geométrica 6.1** *La ecuación de la recta con pendiente  $\lambda$  que pasa por el punto  $(x_n, F(x_n))$  es de la forma*

$$y = F(x_n) + \lambda(x - x_n),$$

*y la intersección de esta recta con el eje de abscisas ( $y = 0$ ) es*

$$F(x_n) + \lambda(x - x_n) = 0,$$

$$F(x_n) = -\lambda(x - x_n),$$

$$\frac{F(x_n)}{\lambda} = x_n - x,$$

$$x = x_n - \frac{F(x_n)}{\lambda},$$

*esto es, la iteración siguiente  $x_{n+1}$  en el método de Whittaker.*

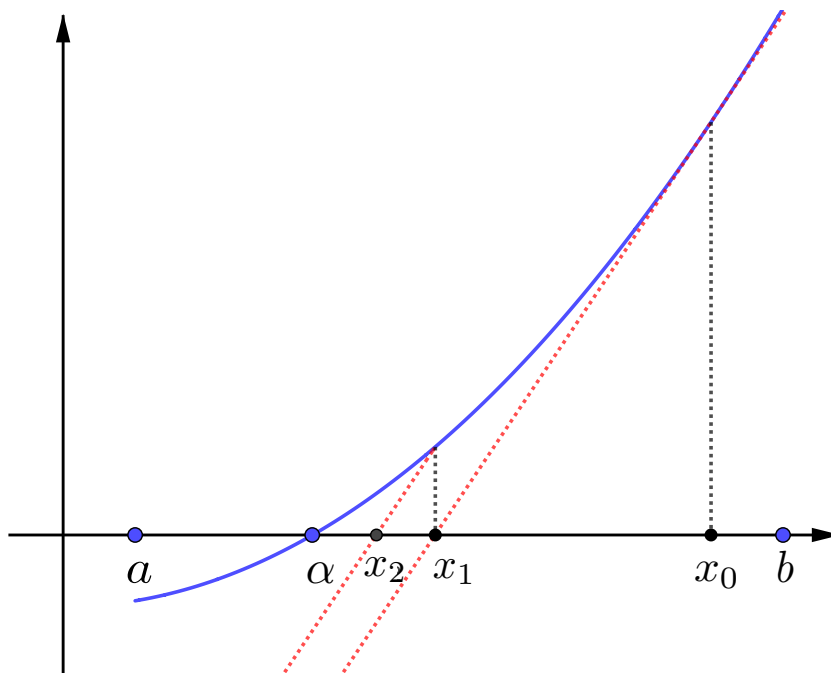


Figura 6.1: Método de Whittaker

A continuación, haremos la comprobación de la convergencia de este método bajo las mismas hipótesis que en el método de Newton.

**Teorema 6.2** Si  $F$  verifica la hipótesis (H),  $c \in [a, b]$  es el extremo de  $[a, b]$  tal que el signo de la función  $F(c)$  sea el mismo que el de la función  $F''(c)$  y  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  verifica que

$$\text{signo}\lambda = \text{signo}F' \quad \text{y} \quad |\lambda| \geq |F'(c)|,$$

entonces el método de Whittaker para  $F$  con  $x_0 \in [a, b]$  arbitrario converge, al menos linealmente, a la única raíz  $\alpha$  de  $F$  en  $[a, b]$ .

Demostración Por la observación 5.2 sabemos que  $F$  tiene una única raíz  $\alpha$  en  $[a, b]$  y que  $F$  verifica la hipótesis (H1) por lo que  $c = b$ . Por lo tanto,

$$\lambda \geq F'(b) > 0.$$

Vamos a demostrar que la función (6.1) verifica las hipótesis del teorema del Punto Fijo, teniendo en cuenta que  $f \in C^2([a, b])$  por serlo también  $F$ :

a)  $f([a, b]) \subset [a, b]$ . Como  $F'' > 0$  en  $[a, b]$ , la función  $F'$  es estrictamente creciente en  $[a, b]$ .

Por tanto,

$$0 < F'(x) \leq F'(b) \leq \lambda, \quad x \in [a, b],$$

lo que implica que

$$f'(x) = 1 - \frac{F'(x)}{\lambda} = \frac{\lambda - F'(x)}{\lambda} \geq 0, \quad x \in [a, b]. \quad (6.2)$$

Por lo tanto, deducimos que la función  $f$  es creciente en  $[a, b]$ . En concreto,

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b), \quad x \in [a, b]$$

$$a < a - \frac{F(a)}{\lambda} = f(a) \leq f(x) \leq f(b) = b - \frac{F(b)}{\lambda} < b, \quad x \in [a, b]$$

ya que  $F(a) < 0 < F(b)$  y  $\lambda > 0$ . Así, se verifica que

$$f([a, b]) \subset (a, b) \subset [a, b].$$

b)  $f$  es contractiva en  $[a, b]$ . Para ello vamos a probar que existe  $k \in [0, 1)$  tal que

$$|f'(x)| \leq k, \quad x \in [a, b].$$

Como

$$f''(x) = -\frac{F''(x)}{\lambda} < 0, \quad x \in [a, b]$$

entonces la función  $f'$  es estrictamente decreciente en  $[a, b]$ . Mediante (6.2), llegamos a que

$$k = \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| = \max_{a \leq x \leq b} f'(x) = f'(a) = 1 - \frac{F'(a)}{\lambda} < 1.$$



Por tanto, aplicando el teorema 3.4 se tiene que  $\alpha$  (que es la única raíz de  $F$  en  $[a, b]$  y el único punto fijo de  $f$  en  $[a, b]$ ) se obtiene como límite de la sucesión dada por

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] & \text{arbitrario} \\ x_n = x_{n-1} - \frac{F(x_{n-1})}{\lambda}, & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Además, por la proposición 3.7, sabemos que la convergencia de la sucesión es, al menos, lineal.

## 6.2 Método de las cuerdas

En este método, en lugar de  $F'(x)$ , tomamos la función

$$\frac{F(c) - F(x)}{c - x}, \quad x \in [a, b],$$

siendo  $c$  uno de los extremos del intervalo  $[a, b]$ . A partir de (5.6), tenemos

$$\varnothing(x) = \frac{c - x}{F(c) - F(x)}, \quad x \in [a, b]$$

y sustituyendolo en (5.1) tendríamos

$$f(x) = x - \frac{F(x)}{F(c) - F(x)}(c - x), \quad x \in [a, b]$$

a partir de la cual obtenemos el método de las cuerdas

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] & \text{dado} \\ x_n = x_{n-1} - \frac{F(x_{n-1})}{F(c) - F(x_{n-1})}(c - x_{n-1}), & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

**Interpretación geométrica 6.3** Tomando  $c = b$ , la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $(x_n, F(x_n))$  y  $(b, F(b))$  quedaría

$$y = F(x_n) + \frac{F(b) - F(x_n)}{b - x_n}(x - x_n),$$

y la intersección de esta recta con el eje de abscisas ( $y = 0$ ) es

$$F(x_n) + \frac{F(b) - F(x_n)}{b - x_n}(x - x_n) = 0,$$

$$F(x_n) = -\frac{F(b) - F(x_n)}{b - x_n}(x - x_n),$$

$$\frac{F(x_n)}{F(b) - F(x_n)}(b - x_n) = x_n - x,$$

$$x = x_n - \frac{F(x_n)}{F(b) - F(x_n)}(b - x_n),$$

es decir, la iteración siguiente  $x_{n+1}$  en el método de las cuerdas.

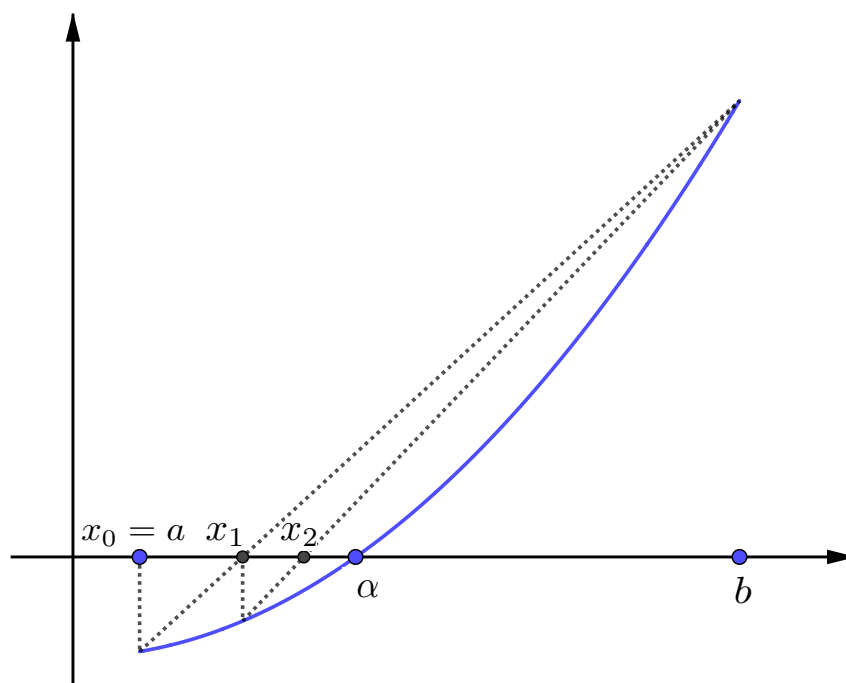


Figura 6.2: Método de las cuerdas

A continuación, haremos la comprobación de la convergencia de este método bajo las mismas hipótesis que en el método de Newton.

**Teorema 6.4** Sea  $F$  verificando la hipótesis (H),  $c \in [a, b]$  el extremo de  $[a, b]$  tal que el signo de la función  $F(c)$  sea el mismo que el de la función  $F''(c)$  y  $d$  el otro extremo del intervalo

$[a, b]$ . Entonces el método de las cuerdas para  $F$  con  $x_0 = d$  converge, al menos linealmente, a la única raíz  $\alpha$  de  $F$  en  $[a, b]$ .

Demostración. Por la observación 5.2 sabemos que  $F$  tiene una única raíz  $\alpha$  en  $[a, b]$  y que  $F$  verifica la hipótesis (H1) por lo que  $c = b$  y  $d = a$ . Comprobemos, por inducción, que

$$x_n \in [a, \alpha), \quad n \geq 0.$$

i) Para  $n = 0$  sabemos que  $x_0 = d = a$ .

ii) Suponiendo cierto el resultado para  $n$ , es decir,

$$a \leq x_n < \alpha \tag{6.3}$$

vamos a demostrarlo para  $n + 1$ . Al ser  $F' > 0$ , la función  $F$  es estrictamente creciente en  $[a, b]$  y, por tanto,

$$F(a) \leq F(x_n) < F(\alpha) = 0.$$

De esta forma, como

$$F(b) - F(x_n) > -F(x_n) > 0 \quad y \quad b - x_n > b - \alpha > 0 \tag{6.4}$$

entonces

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F(b) - F(x_n)}(b - x_n) > x_n \geq a. \tag{6.5}$$

La hipótesis

$$F''(x) > 0, \quad x \in [a, b]$$

determina que la función  $F$  es convexa en el intervalo  $[a, b]$ ; así, en particular, la gráfica de  $F$  en  $[x_n, b]$  queda por debajo de la cuerda de ecuación

$$y(x) = F(x_n) + \frac{F(b) - F(x_n)}{b - x_n}(x - x_n)$$

que une los puntos  $(x_n, F(x_n))$  y  $(b, F(b))$ . De esta forma, evaluando en el punto  $\alpha \in (x_n, b)$  se tiene que

$$0 = F(\alpha) < y(\alpha) = F(x_n) + \frac{F(b) - F(x_n)}{b - x_n}(\alpha - x_n),$$

de donde obtenemos que

$$\alpha > x_n - \frac{F(x_n)}{F(b) - F(x_n)}(b - x_n) = x_{n+1}.$$

Por tanto, por (6.5), la sucesión  $\{x_n\}_n^\infty = 0$  es estrictamente creciente y, además,

$$a = x_0 < x_n < x_{n+1} < \alpha < b, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.6)$$

luego existe  $\beta \in [a, \alpha]$  tal que

$$\beta = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

Como  $F \in C([a, b])$  y

$$x_n = x_{n-1} - \frac{F(x_{n-1})}{F(b) - F(x_{n-1})}(b - x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}$$

haciendo tender  $n \rightarrow +\infty$ , se obtiene que

$$\beta = \beta - \frac{F(\beta)}{F(b) - F(\beta)}(b - \beta),$$

$$\frac{F(\beta)}{F(b) - F(\beta)}(b - \beta) = 0$$

de donde se concluye que  $F(\beta) = 0$  ya que, por (6.6), sabemos que  $\beta \neq b$ . De esta forma, por la unicidad de raíces de  $F$  en  $[a, b]$  se llega a que  $\beta = \alpha$ .

Finalmente, utilizando (6.3) y (6.5), para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que

$$0 > x_{n+1} - \alpha > x_n - \alpha.$$

Por tanto

$$e_{n+1} = |x_{n+1} - \alpha| < |x_n - \alpha| = e_n,$$

de donde se deduce la convergencia, al menos lineal, del método.

Además se tiene el siguiente resultado respecto a la estimación del error:

**Proposición 6.5** Sea  $F$  verificando la hipótesis (H) y denotemos por

$$m_1 = \min_{a \leq x \leq b} |F'(x)| \quad y \quad M_1 = \max_{a \leq x \leq b} |F'(x)|. \quad (6.7)$$

La sucesión del método de las cuerdas comenzando en  $x_0 = d$  verifica que

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_n - x_{n-1}|, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.8)$$

*Demostración.* De nuevo, por la observación 5.2,  $F$  tiene una única raíz  $\alpha$  en  $[a, b]$  y, además, verifica la hipótesis (H1) por lo que  $c = b$  y  $d = a$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , por el teorema del Valor Medio, se verifica que

$$F(\alpha) - F(x_{n-1}) = F'(\beta_{n-1})(\alpha - x_{n-1}) \quad \text{con } \beta_{n-1} \in (x_{n-1}, \alpha)$$

y

$$F(b) - F(x_{n-1}) = F'(v_{n-1})(b - x_{n-1}) \quad \text{con } v_{n-1} \in (x_{n-1}, b).$$

De esta forma, como  $F(\alpha) = 0$ , se tiene que

$$\begin{aligned} F'(\beta_{n-1})(\alpha - x_{n-1}) &= -F(x_{n-1}) = \frac{F(b) - F(x_{n-1})}{b - x_{n-1}}(x_n - x_{n-1}) \\ &= F'(v_{n-1})(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Como la función  $F'$  es positiva en  $[a, b]$  entonces

$$\alpha - x_{n-1} = \frac{F'(v_{n-1})}{F'(\beta_{n-1})}(x_n - x_{n-1})$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \alpha - x_n &= (\alpha - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_n) = \left( \frac{F'(v_{n-1})}{F'(\beta_{n-1})} - 1 \right) (x_n - x_{n-1}) \\ &= \frac{F'(v_{n-1}) - F'(\beta_{n-1})}{F'(\beta_{n-1})} (x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Tomando valores absolutos se concluye, a partir de (6.7), el resultado (6.8).

### 6.3 Método de la secante

En este método la derivada es discretizada mediante la fórmula de derivación numérica más simple, la de dos puntos. Es decir, en lugar de  $F'(x_{n-1})$  tomamos el siguiente cociente

$$\frac{F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}}.$$

A partir de (5.6), tenemos

$$\varnothing(x) = \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})}$$

y obtenemos así el método de la secante

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_0, x_1 \in [a, b] & \text{dados} \\ x_n = x_{n-1} - \frac{F(x_{n-1})}{F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})}(x_{n-1} - x_{n-2}), & n \geq 2. \end{array} \right.$$

**Interpretación geométrica 6.6** *La recta que une los puntos  $(x_{n-1}, F(x_{n-1}))$  y  $(x_n, F(x_n))$  viene dada por*

$$y = F(x_n) + \frac{F(x_n) - F(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n),$$

*y la intersección de esta recta con el eje de abscisas ( $y = 0$ ) es*

$$F(x_n) + \frac{F(x_n) - F(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n) = 0,$$

$$F(x_n) = -\frac{F(x_n) - F(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n),$$

$$\frac{F(x_n)}{F(x_n) - F(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1}) = x_n - x,$$

$$x = x_n - \frac{F(x_n)}{F(x_n) - F(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1}),$$

*es decir, la iteración siguiente  $x_{n+1}$  en el método de la secante.*

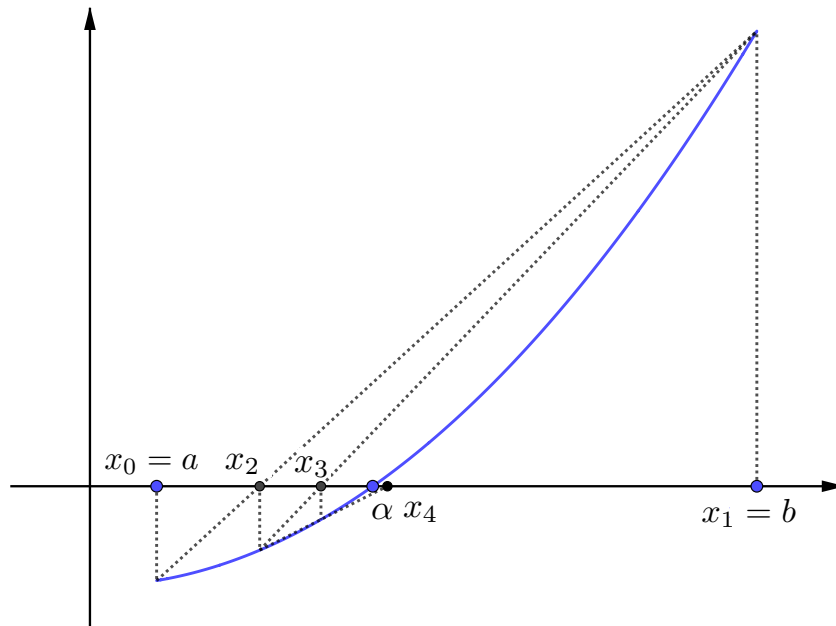


Figura 6.3: Método de la secante

A continuación se demostrará que, de todas las variantes del método de Newton, el método de la secante es el que converge más rápido.

**Proposición 6.7** Si  $F \in C^2([a, b])$  y denotamos por

$$e_n = |x_n - \alpha|, \quad n \geq 0$$

siendo  $\alpha$  una raíz de  $F$  en  $[a, b]$ , entonces

$$e_n \leq \frac{M_2}{2m_1} e_{n-1} e_{n-2}, \quad n \geq 2 \tag{6.9}$$

siendo

$$m_1 = \min_{a \leq x \leq b} |F'(x)| \quad y \quad M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |F''(x)|.$$

Por tanto, cuando el método secante converge, se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e_n}{e_{n-1}} = 0,$$

que sabemos por la definición 3.6 que la convergencia es superlineal.

Demostración. Por definición se tiene que

$$\begin{aligned}\alpha - x_n &= \alpha - x_{n-1} + \frac{F(x_{n-1})}{F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})}(x_{n-1} - x_{n-2}) \\ &= (\alpha - x_{n-1}) \left( 1 - \frac{F(\alpha) - F(x_{n-1})}{\alpha - x_{n-1}} \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})} \right).\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$F[x_{n-1}, \alpha] = \frac{F(\alpha) - F(x_{n-1})}{\alpha - x_{n-1}}$$

y

$$F[x_{n-1}, x_{n-2}] = \frac{F(x_{n-2}) - F(x_{n-1})}{x_{n-2} - x_{n-1}},$$

podemos deducir

$$\begin{aligned}\alpha - x_n &= (\alpha - x_{n-1}) \left( 1 - F[x_{n-1}, \alpha] \frac{1}{F[x_{n-1}, x_{n-2}]} \right) \\ &= (\alpha - x_{n-1}) (F[x_{n-2}, x_{n-1}] - F[x_{n-1}, \alpha]) \frac{1}{F[x_{n-1}, x_{n-2}]}.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las diferencias divididas

$$F[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m}] = \frac{F[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}] - F[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+m}]}{x_i - x_{i+m}},$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\alpha - x_n &= -(\alpha - x_{n-1})(\alpha - x_{n-2}) \frac{F[x_{n-2}, x_{n-1}] - F[x_{n-1}, \alpha]}{x_{n-2} - \alpha} \frac{1}{F[x_{n-1}, x_{n-2}]} \\ &= -(\alpha - x_{n-1})(\alpha - x_{n-2}) \frac{F[x_{n-2}, x_{n-1}, \alpha]}{F[x_{n-1}, x_{n-2}]}.\end{aligned}$$

Ahora usando la propiedad

$$F[x_{m-k}, x_{m-(k-1)}, \dots, x_m, x] = \frac{F^{(k+1)}(\beta_x)}{(k+1)!}$$

determina la existencia de  $\beta_\alpha$  y  $\beta$  tales que

$$\alpha - x_n = -(\alpha - x_{n-1})(\alpha - x_{n-2}) \frac{F''(\beta_\alpha)}{2F'(\beta)}$$

siendo  $k = 1$  y de donde, tomando valores absolutos, se obtiene (6.9).



## 6.4 Método de la Falsa Posición (o Regula Falsi)

Este método es una variante del método de Newton, pero también puede interpretarse como una generalización del método de la bisección. Para poder aplicarlo, es necesario que la función  $F \in C([a, b])$  y no es necesario que  $F$  sea cóncava o convexa en  $[a, b]$  (en este caso coincidiría con el método de las cuerdas).

Consideremos  $F \in C([a, b])$  con  $F(a)F(b) < 0$  de forma que existe una única raíz  $\alpha \in (a, b)$  tal que  $F(\alpha) = 0$ . La ecuación de la recta que une los puntos  $(a, F(a))$  y  $(b, F(b))$  viene dada por

$$y = F(a) + \frac{F(b) - F(a)}{b - a}(x - a),$$

y la intersección de dicha recta con el eje de abscisas ( $y = 0$ ) es

$$F(a) + \frac{F(b) - F(a)}{b - a}(x - a) = 0,$$

$$F(a) = -\frac{F(b) - F(a)}{b - a}(x - a),$$

$$\frac{F(a)}{F(b) - F(a)}(b - a) = a - x,$$

$$x = a - \frac{F(a)}{F(b) - F(a)}(b - a),$$

e igualamos el resultado anterior a  $c$

$$x = a - \frac{F(a)}{F(b) - F(a)}(b - a) = c.$$

Al igual que con el método de la bisección, tomamos

$$\begin{cases} a_1 = a, & b_1 = c & \text{si } F(a)F(c) < 0 \\ a_1 = c, & b_1 = b & \text{si } F(c)F(b) < 0. \end{cases}$$

La siguiente iteración se obtendría aplicando la misma estrategia al intervalo  $[a_1, b_1]$  y, así, sucesivamente.

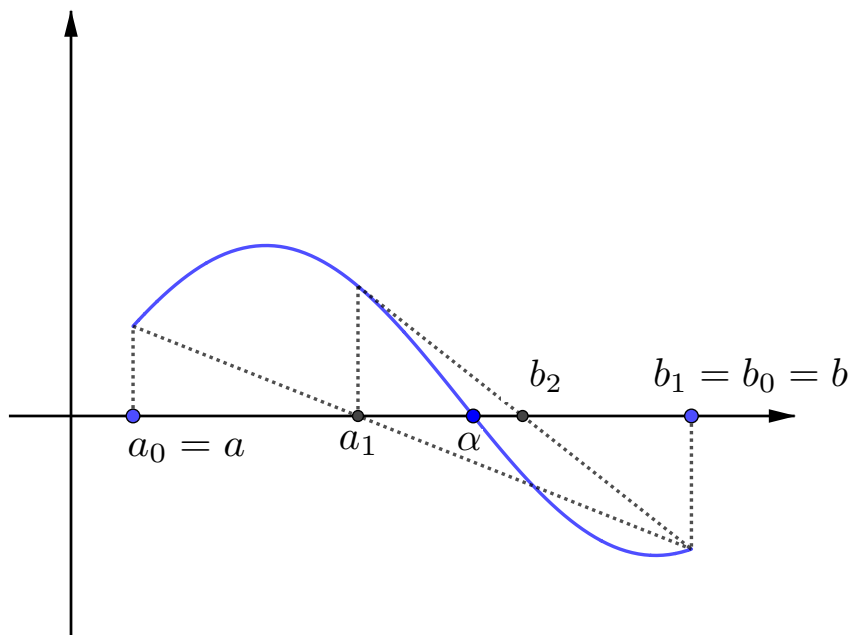


Figura 6.4: Método de la Falsa Posición

# Capítulo 7

## Programación con Matlab

Matlab es una plataforma de programación y cálculo numérico utilizada para analizar datos, desarrollar algoritmos y crear modelos. Algunas de las características de Matlab son:

- La programación es mucho más sencilla.
- Hay continuidad entre valores enteros, reales y complejos.
- La amplitud del intervalo y la exactitud de los números es mayor.
- Cuenta con una biblioteca matemática amplia.
- Abundantes herramientas gráficas.
- Capacidad de vincularse con los lenguajes de programación tradicionales.
- Transportabilidad de los programas.

Algunas de sus desventajas son:

- Necesita de muchos recursos de sistema como son Memoria, tarjeta de videos,... para funcionar correctamente.
- El tiempo de ejecución es lento.
- No genera código ejecutable.

- Es caro.

En este capítulo hemos desarrollado los programas con Matlab de los tres métodos numéricos más importantes: el método de Bisección, el método de punto fijo y el método de Newton. Para ello hemos usado los apuntes de Echevarría [5] y el libro de Infante del Río y Rey Cabezas [9].

## 7.1 Método de Bisección

Sea  $F \in C([a, b])$ . Sea  $\alpha$  la única raíz de

$$F(x) = 0 \quad \text{en} \quad [a, b].$$

### Algoritmo de bisección

- a) Datos de entrada:  $a, b, \varepsilon > 0$ , y  $\text{error} > 0$ .  
Hacer  $e = (b - a)/2$  y definir  $n = 0$ .
- b) Calcula  $\text{aprox} = \frac{a + b}{2}$ .
  - b.1) Si  $|e| \leq \text{error}$  o  $|F(\text{aprox})| < \varepsilon$ , parar y devolver  $\text{aprox}$  como aproximación de la solución y  $n$  como el número de iteraciones necesarias.
  - b.2) Si  $F(a)F(\text{aprox}) < 0$ , hacer  $b = \text{aprox}$ .
  - b.3) Si no, hacer  $a = \text{aprox}$ .
- c) Hacer  $e = e/2$ ,  $n = n + 1$  y volver al paso b).

### Programa en Matlab

El programa **Biseccion(F,a,b,epsilon,error)** devuelve una aproximación *aprox* de la única raíz  $\alpha$  de la función  $F$  en el intervalo  $[a, b]$  y el número de iteraciones  $n$  necesarias para obtener dicha aproximación. Se detiene el algoritmo si  $|F(\text{aprox})| < \text{epsilon}$  o si  $|\text{aprox} - \alpha| < \text{error}$ , donde *aprox* y  $n$  son los argumentos de salida del programa.

```

function [aprox,n] = Biseccion(F, a, b, epsilon, error)

Fa = F(a);
Fb = F(b);
if ( Fa*Fb > 0 )
    error('No se cumplen las hipótesis del Teorema de Bolzano');
end

e = (b-a)*0.5;
aprox = (a+b)*0.5;
n=0;

while ( abs(e) >=error )
    Faprox = F(aprox);
    if ( abs(Faprox) < epsilon )
        return
    end
    if (Fa*Faprox > 0)
        a = aprox;
        Fa = Faprox;
    else
        b = aprox;
        Fb = Faprox;
    end
    aprox = (a+b)*0.5;
    e = e*0.5;
    n = n+1;
end

```

Al ejecutar el programa del método de bisección para la función  $F(x) = \text{sen}(x) - 0.4$  en el intervalo  $[0, 1]$  con un error inferior a  $10^{-6}$ , obtenemos que la aproximación obtenida es 0.411560 siendo necesarias 13 iteraciones. En la siguiente figura ilustramos la aproximación obtenida.

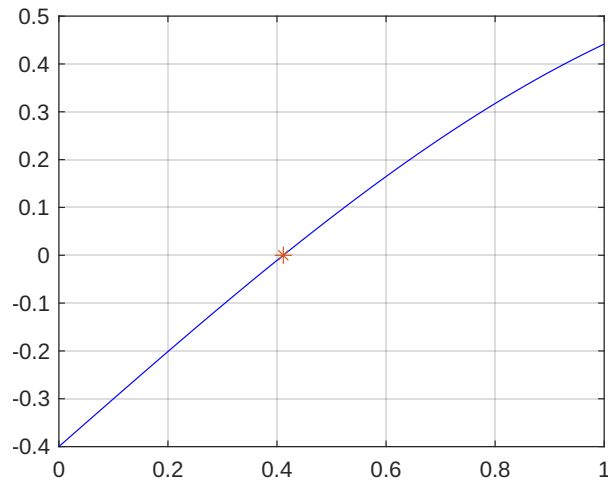


Figura 7.1: Ilustración de la aproximación de la solución de  $F(x) = \text{sen}(x) - 0.4$  mediante el método de bisección con un error inferior a  $10^{-6}$ .

## 7.2 Método de Punto Fijo

Sea  $F \in C([a, b])$ . Sea  $\alpha$  la única raíz de

$$F(x) = 0 \quad \text{en} \quad [a, b] \iff x = f(x) \quad \text{en} \quad [a, b].$$

### Algoritmo de punto fijo

- a) Elegir  $x_0 \in [a, b]$  y  $\varepsilon > 0$ . Definir  $n = 0$ .
- b) Dados  $n \geq 0$  y  $x_n$ .
  - b.1) Calcular  $x_{n+1} = f(x_n)$ .
  - b.2) Si  $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$ , parar y devolver  $x_{n+1}$  como aproximación.

b.3) Hacer  $n = n + 1$  y repetir el paso b).

### Programa en Matlab

El programa **PuntoFijo(f,xcero,epsilon,N)** devuelve una aproximación *aprox* de un punto fijo de  $f(x)$ , es decir, una solución de  $x = f(x)$ , donde *xcero* es el dato inicial y *N* es el número de iteraciones a realizar. Se detiene el algoritmo si  $|x_{n+1} - x_n| < \text{epsilon}$ , donde *aprox* es el argumento de salida del programa.

```
function [aprox] = PuntoFijo(f, xcero, epsilon, N)

aprox= xcero;
for k=1:N
    x0=aprox;
    aprox=f(aprox);
    if ( abs(aprox-x0) < epsilon )
        return
    end
end
```

Al ejecutar el programa del método de punto fijo para la función  $F(x) = e^{-x} - x$  con dato inicial  $x_0 = \frac{1}{3}$  y 22 iteraciones, obtenemos que la aproximación obtenida es 0.5671. En la siguiente figura ilustramos la aproximación obtenida.

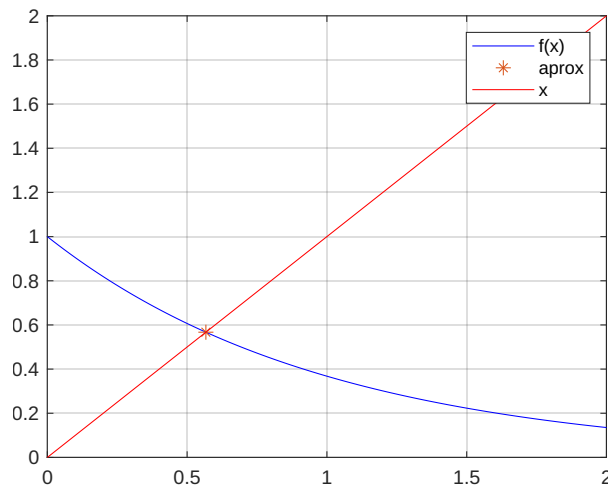


Figura 7.2: Ilustración de la aproximación de la solución de  $F(x) = e^{-x} - x$ , donde  $f(x) = e^{-x}$ , mediante el método de punto fijo.

### 7.3 Método de Newton

Sea  $F \in C([a, b])$ . Sea  $\alpha$  la única raíz de

$$F(x) = 0 \quad \text{en} \quad [a, b].$$

#### Algoritmo de Newton

a) Elegir  $x_0 \in [a, b]$ ,  $\delta > 0$  y  $\varepsilon > 0$ .

b) Dados  $n \geq 0$  y  $x_n$ .

b.1) Calcular  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ .

b.2) Si  $|x_{n+1} - x_n| < \delta$  o bien  $|f(x_{n+1})| < \varepsilon$ , parar y devolver  $x_{n+1}$  como aproximación.

#### Programa en Matlab

El programa `Newton(F,dF,xcero,delta,epsilon,N)` devuelve una aproximación *aprox* de la solución de  $F(x) = 0$ , donde  $dF$  es la derivada de  $F$ , *xcero* es el dato inicial y  $N$  es el número máximo de iteraciones a realizar. Se detiene el algoritmo si  $|x_{n+1} - x_n| < \delta$  o bien



si  $|F(\text{aprox})| < \text{epsilon}$ , donde *aprox* es el argumento de salida del programa.

```
function [aprox] = Newton(F, dF, xcero, delta, epsilon, N)

aprox= xcero;
for k=1:N;
    x0=aprox;
    aprox=aprox-F(aprox)/dF(aprox);
    if ( abs(F(aprox))<epsilon) | (abs(aprox-x0) < delta )
        return
    end
end
```

Al ejecutar el programa del método de Newton para la función  $F(x) = x - 1.3 \sin(x)$  con dato inicial  $x_0 = 0.2$  y 3 iteraciones, obtenemos que la aproximación obtenida es  $2.8886 \times 10^{-6}$ . En la siguiente figura ilustramos la aproximación obtenida.

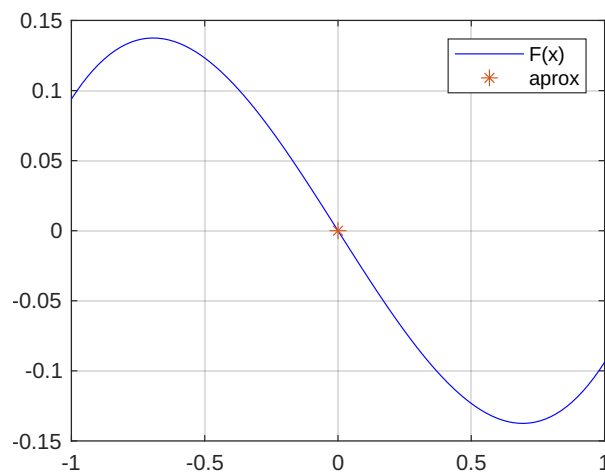


Figura 7.3: Ilustración de la aproximación de la solución de  $F(x) = x - 1.3 \sin(x)$  mediante el método de Newton.

# Capítulo 8

## Conclusiones

En este capítulo se desarrollarán las conclusiones a las que hemos llegado durante el desarrollo de este Trabajo Fin de Grado. Nos centraremos en los inconvenientes que tienen los métodos estudiados y en el uso de estos métodos en Estadística. Para ello, se han usado los apuntes de Hernández [8] y el artículo de Salazar *et al.* [15].

### Fallos de los métodos iterativos

Los métodos iterativos proporcionan una manera fácil de encontrar las raíces de funciones continuas al generar sucesiones de puntos que convergen a la raíz deseada. Sin embargo, este no es siempre el caso. De los métodos mostrados, solo el método de bisección garantiza la convergencia. Esto se debe a que su desarrollo se basa en el concepto de completitud de  $\mathbb{R}$ . Por lo tanto, siempre es una buena práctica acotar el intervalo en el que se encuentra la raíz a través de algunas iteraciones por bisección, para luego proceder a uno de los otros métodos.

Cuando se introdujo el método del punto fijo, se cumplieron ciertas condiciones para asegurar la convergencia de las secuencias iterativas. Sin embargo, la principal dificultad radica en cómo construir la función iterativa  $f(x)$ , ya que podemos despear de diversas formas.

**Ejemplo 8.1** Sea  $F(x) = -2x^2 + 3x + 1$ . Existen varias opciones para crear  $f(x)$ :

- $x = \frac{2x^2 - 1}{3}$
- $x = \sqrt{\frac{3x + 1}{2}}$
- $x = \frac{-1}{-2x + 3}$
- $x = \frac{1 + 3x}{2x}$
- $x = 2x^2 - 2x - 1$
- $x = \frac{2x^3}{3x + 1}$

También el método de Newton puede fallar de varias formas. Una de ellas es cuando ocurre la finalización prematura, es decir, cuando para algún  $x_n$  se cumple que  $F'(x_n) = 0$ . Algebraicamente es imposible dividir por cero, pero geoméricamente se trata de una recta tangente a la curva que es paralela al eje de abcisas. Otro de los fallos que puede tener este método es que la secuencia de iterados  $\{x_n\}$  se aleje cada vez más de la raíz  $\alpha$ . La última de las formas en las que este algoritmo puede fallar al buscar una raíz es cuando el proceso iterativo genera una sucesión oscilante. En este caso,  $F(x) = x^3 - 2x + 2$ ;  $x_0 = 0$ ;  $x_1 = 1$  y  $x_2 = 0 = x_0$ , con lo que el proceso iterativo no termina nunca.

## Métodos numéricos en Estadística

La estadística se ha convertido en una herramienta fundamental de la investigación científica y empírica en todas las áreas de la ciencia, tanto social como técnica. La estadística se enfoca de lleno en el gran problema de tomar decisiones correctas.

Un estudio realizado en la Facultad de Informática y Electrónica de la Escuela Superior Politécnica del Chimborazo en Riobamba Ecuador, encontró que el uso de tablas de valores de distribución de muestreo para hacer Inferencia Estadística dificultaba la redacción del trabajo de fin de grado por parte de los estudiantes de pregrado y postgrado. Para encontrar los intervalos

de confianza, se limitan a usar valores que se encuentran en los libros, lo cual es un inconveniente ya que al desarrollar temas destinados a automatizar y medir las características de calidad de procesos reales, no encontraban los valores necesarios para tomar una decisión. Entonces, se pensó que los métodos numéricos podrían usarse para crear un Programa Informático que simularan un análisis estadístico para la comprobación de hipótesis. Esto permite a los estudiantes tomar decisiones rápidas y eficientes sin necesidad de asesoramiento y sin mucha dificultad. Además, otro problema al que se podrían enfrentar los estudiantes de la cátedra de métodos numéricos es la aplicación práctica de estos métodos, lo que puede tener un impacto significativo en el proceso educativo en este campo. Es importante mencionar que antes de embarcarse en este proyecto, se buscaron herramientas informáticas que ayudaran a probar hipótesis, pero no se encontró ninguna que se ajustara perfectamente a la realidad.

La Inferencia Estadística es la parte de la estadística matemática que se encarga del estudio de los métodos para la obtención del método de probabilidad que sigue una variable aleatoria de una determinada población, a través de una muestra obtenida de ésta para poder sacar conclusiones. Para poder resolver el problema de Inferencia Estadística es necesario calcular raíces de ecuaciones integrales de una alta complejidad, por lo cual afrontaremos el problema utilizando técnicas de integración numérica y técnicas para hallar raíces de ecuaciones.

Para hallar las raíces de ecuaciones contamos con varios métodos numéricos como el método de la bisección, el método de Newton, el método del punto fijo, etc., cada uno de ellos tienen ventajas y desventajas como vimos anteriormente. En el proyecto no se utilizó el método de Newton por la complejidad de las ecuaciones, por lo que optaron por el método de la bisección ya que se dedujo que encontraba las soluciones en un tiempo aceptable y con un error mínimo.

Por tanto, se creó el SIAE (Sistema Informático para el Análisis Estadístico) que es un sistema que permitirá a los estudiantes notar las aplicaciones de los métodos numéricos y a desarrollar su capacidad científica en el campo de la Inferencia Estadística. Además, se pudo observar que los métodos numéricos se pueden combinar para resolver problemas más complejos.

# Bibliografía

- [1] Bibliografía de Rolle, EcuRed: Enciclopedia cubana.
- [2] R.L. Burden, D.J. Faires, A.M. Burden, *Análisis Numérico*, Cengage Learning Editores, 2017.
- [3] F. Calderon Solorio, *Métodos Numéricos*, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, 2022.
- [4] A. Cohen y B. Després, *Introduction à l'analyse numérique*, Notes du Cours 3M234, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Sciences Sorbonne Université, 2015.
- [5] R. Echevarría, *Apuntes de MATLAB orientados a métodos numéricos elementales*, Universidad de Sevilla, 2020.
- [6] Foto de Bolzano: Wikipedia “Bernard Bolzano”.
- [7] Foto de Newton: Wikipedia “Isaac Newton”.
- [8] S.A. Hernández, *Apuntes de Cálculo Numérico: con aplicaciones sobre Euler Math Toolbox*, Ediciones UNPAedita, Río Gallegos: Universidad Nacional de la Patagonia Austral, 2018.
- [9] J.A. Infante del Río y J.M. Rey Cabezas, *Métodos Numéricos. Teoría, problemas y prácticas con Matlab*, Ediciones Pirámides, 2015.
- [10] E. Irazoqui, G. Castillo, L. Faúndez, D. Rivas, *Introducción al Análisis Numérico*, Universidad del Bío-Bío, Escuela de Pedagogía en Educación Matemática (Chile), 2010.

- [11] V. Moreno, M.E. Ramírez, C. de la Oliva, E. Moreno y otros, *Biografía de Bernhard Bolzano*, Buscabiografias.com, 2000.
- [12] V. Moreno, M.E. Ramírez, C. de la Oliva, E. Moreno y otros, *Biografía de Isaac Newton*, Buscabiografias.com, 2003.
- [13] P. Osorio, S. Castro, *Unas Matemáticas para todos*, Gami Editorial, 2018.
- [14] M.C. Pinto, *Approximation numérique des fonctions*, Notes du Cours 3M234, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Sciences Sorbonne Université, 2017-2018.
- [15] N.J. Salazar, J.L. Tinajero y E.G. Salazar, *Métodos Numéricos para la simulación de un sistema experto en el Análisis Estadístico*, Mecánica Computacional Vol XXXVII, 861-869, 2019.