

## **Actualización de modelos de elementos finitos a partir de los resultados del análisis modal operacional. Aplicación sobre la Capilla del Palacio de Würzburg (Alemania).**

*Finite element model updating from the results of the operational modal analysis. Implementation on the Chapel of the Würzburg Residence (Germany).*

Jiménez-Alonso, J.F.\* (1), Pachón, P. (1), Rodríguez-Mayorga, E. (2)

(1) *Departamento de Estructuras de Edificación e Ingeniería del Terreno. Universidad de Sevilla. Sevilla (España)*

(2) *Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras. Universidad de Sevilla (España)*

### **Resumen**

Una de las primeras dificultades que se plantean a la hora de analizar un edificio histórico es el gran nivel de incertidumbre asociado a multitud de factores condicionantes del comportamiento de la estructura. Pequeñas modificaciones de las propiedades mecánicas estimadas de los materiales constituyentes, los fenómenos de interacción suelo-estructura o incluso el propio proceso constructivo pueden ser causantes de grandes variaciones entre los resultados obtenidos a partir de un análisis numérico y los estimados de forma experimental. Dentro de las técnicas no destructivas, la actualización de modelos de elementos finitos, a partir de los parámetros dinámicos de la estructura identificados experimentalmente, permite una calibración de dichos modelos al objeto de obtener una estimación más precisa del comportamiento de la estructura. En el presente artículo se describe la aplicación de dicha técnica sobre la capilla del Palacio de Würzburg (Alemania), una de las construcciones más importantes del Barroco Centroeuropeo.

**Palabras Clave:** Construcciones históricas, Actualización de M.E.F., Técnica no destructiva, Palacio Würzburg

\*email: [jfjimenez@us.es](mailto:jfjimenez@us.es)

### **Abstract**

One of the first difficulties that can be detected in a historical building structural analysis is the high level of uncertainty associated with many factors affecting the behaviour of the structure. Slight modifications of the mechanical properties of the structural materials, the soil-structure interaction or even the building construction process may be the cause of high changes between the results obtained from a numerical analysis and others estimated experimentally. Among the non-destructive techniques, the finite element model updating from the dynamic structural parameters identified experimentally, allows the adjustment of these models in order to obtain a more accurate estimation of behaviour of the structure. In the present paper, the implementation of this technique on the Chapel of the Würzburg Residence (Germany), one of the most important churches of the Central European Baroque, is described.

**Keywords:** Historical constructions, non-destructive technique, Model updating, Würzburg Residence.

## 1. Introducción.

Dentro del estudio del comportamiento estructural de las construcciones históricas se ha convertido en práctica habitual el desarrollo de un modelo de elementos finitos al objeto de determinar numéricamente su respuesta ante las acciones de naturaleza estática y dinámica. Para desarrollar un modelo numérico adecuado de la estructura es necesario reducir el número de errores matemáticos a un nivel aceptable, estableciendo con cuidado las hipótesis en las que se apoya el mismo. Sin embargo, incluso con los más cuidadosos y detallados modelos numéricos, desarrollados a partir de los datos disponibles y del mejor juicio técnico, se producen habitualmente diferencias entre los resultados obtenidos experimentalmente y los estimados, por contrapartida, de forma numérica. Esto se debe, de forma típica, a las inevitables incertidumbres asociadas al propio modelado de la estructura, las condiciones de contorno de la misma, las propiedades de los materiales constituyentes y el efecto, no siempre adecuadamente considerado, de los elementos no estructurales. Normalmente, los errores estimados entre las frecuencias naturales estimadas experimental y numéricamente no son despreciables, siendo actualmente aceptado que las propiedades modales identificadas experimentalmente son más fiables que las procedentes del modelo de elementos finitos, como indican los resultados de estudios realizados sobre construcciones existentes. Una vez que los parámetros modales de la construcción histórica han sido identificados experimentalmente, los errores existentes en el modelo inicial de elementos finitos de la estructura pueden ser corregidos, denominándose dicho proceso de mejora, actualización de los modelos de elementos finitos.

En este artículo, se presenta en primer lugar una breve introducción a la metodología de actualización de los modelos de elementos finitos a partir de parámetros de la estructura obtenidos de forma experimental. Posteriormente, se aplica la técnica descrita al ajuste del modelo de elementos finitos de una capilla situada en el interior del Palacio Würzburg (Alemania). Se describe, en primer lugar, la estructura y el modelo inicial basado en el método de los elementos finitos elaborado para analizar su comportamiento estructural. Se presentan, posteriormente y de forma resumida, las propiedades modales de la estructura identificadas experimentalmente así como un estudio de sensibilidad de los principales parámetros físicos que presentan un mayor influencia en los parámetros modales de la estructuras. A partir de dichos parámetros, y tras un ajuste manual previo, basado en la comprensión del comportamiento global de la estructura, se desarrolla una actualización automática del modelo de elementos finitos basada en la sensibilidad. Finalmente, se discutirán los resultados obtenidos.

## 2. Teoría básica para la actualización de los modelos de elementos finitos.

### 2.1. Metodologías para la actualización de los modelos de elementos finitos.

La actualización de los modelos de elementos finitos basados en los resultados de los parámetros dinámicos de la estructura (frecuencias naturales y modos de vibración) puede desarrollarse desde dos perspectivas distintas: los métodos directos y los métodos iterativos (Mottershead, J.E. et al., 1993).

Durante los primeros años de aplicación del método, el ajuste del modelo se realizaba, de forma *directa*, a través de la introducción de alteraciones en las matrices de rigidez y/o de masa de la estructura, lo que presentaba la ventaja de permitir un ajuste del modelo con datos experimentales a través de un algoritmo directo sin necesidad de realizar iteración alguna.

Dicha metodología presentaba numerosos inconvenientes, destacándose que el proceso de actualización de las matrices se desarrolla sin significado físico alguno. Estos inconvenientes provocan al aparición de otra familia de métodos denominados *iterativos* (Zivanovic, S. et al., 2007) donde la actualización del modelo, en base a los parámetros modales, se plantea a través de la introducción de cambios en algunos parámetros estructurales elegidos por el usuario y con un significado físico bien definido. En este caso, los parámetros modificados no están linealmente relacionados con los parámetros modales por lo que el proceso de ajuste necesita el uso de algoritmos de optimización para problemas no lineales, siendo necesario aplicar un proceso iterativo.

### 2.2. Algoritmos iterativos basados en la sensibilidad.

La forma más sencilla de realizar la actualización de los modelos de elementos finitos es minimizar las diferencias entre los resultados numéricos y experimentales (Teughels A., 2003). La ecuación constituida con dicho objetivo es usualmente definida a partir de la formulación de un problema de mínimos cuadrados.

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^m [z_j(\theta) - \tilde{z}_j]^2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^m r_j(\theta)^2 = \frac{1}{2} \cdot \|r(\theta)\|^2 \quad (1)$$

donde:  $z_j(\theta)$  son magnitudes resultantes del modelo numérico, que están relacionadas con las variables del modelo  $\theta$  (parámetros físicos de la estructura, tales como el modulo de elasticidad de los materiales constituyentes, la rigidez del suelo...), que serán objeto del ajuste; las variables  $\tilde{z}_j$  representan las mismas magnitudes obtenidas de forma experimental.

Las diferencias entre los parámetros experimentales y numéricos se designan como residuos  $r_j(\theta)$ . Se aconseja que el número  $m$  de residuos sea mayor que el número de variables ajustadas  $\theta$ .

En algunos casos, puede resultar interesante establecer diferentes variables peso  $w_j$  para cada uno de los residuos, modificando, de esta forma, la forma de la función objetivo. Ambos residuos (frecuencias naturales y modos de vibración), son aplicados en la ecuación anterior (1) según la siguiente formulación:

$$r_f(\theta) = \frac{\lambda_j(\theta) - \tilde{\lambda}_j}{\tilde{\lambda}_j}, j = 1, 2, \dots, m_f \quad (2)$$

donde  $\lambda_j(\theta)$  y  $\tilde{\lambda}_j$  son los valores propios de la estructura.

$$r_s(\theta) = \frac{\varphi_j^l(\theta)}{\varphi_j^r(\theta)} - \frac{\tilde{\varphi}_j^l}{\tilde{\varphi}_j^r}, j = 1, 2, \dots, m_f \quad (3)$$

donde  $\varphi_j^l$  y  $\varphi_j^r$  son las componentes del modo numérico de vibración  $j$  y  $\tilde{\varphi}_j^l$  y  $\tilde{\varphi}_j^r$  son las componentes obtenidas experimentalmente.

### 2.3. Algoritmos de optimización.

La anterior función objetivo debe minimizarse mediante la aplicación de un algoritmo de optimización.

Dentro de los dos grupos de algoritmos existentes, locales y globales, los segundos serán utilizados en el desarrollo de la presente aplicación ya que por su mayor robustez la solución final no depende del punto inicial seleccionado en el proceso de búsqueda. Dentro de los métodos de optimización global, unos de los mas frecuentemente utilizados, algoritmos genéticos, serán empleados en el desarrollo del estudio descrito en el presente artículo.

Dichos algoritmos se basan en la analogía con la evolución natural donde los miembros de una población compiten entre sí para sobrevivir y reproducirse, presentando los mejores individuos un código genético que los ponen en ventaja respecto al resto de la población.

### 2.4. Validación del proceso de actualización.

Finalmente, se comprueba la bondad del proceso de actualización a través de la comparación de las frecuencias naturales, de las formas modales y determinando el criterio del aseguramiento modal M.A.C., obtenido según la siguiente ecuación.

$$MAC_{j,K} = \frac{(\varphi_j^T \cdot \varphi_k)^2}{(\varphi_j^T \cdot \tilde{\varphi}_j) \cdot (\varphi_k^T \cdot \varphi_k)} \quad (4)$$

donde  $\varphi_j$  es el primer modo comparado,  $\varphi_k$  es el segundo modo comparado y  $T$  es la función traspuesta. Se ha considerado como criterio de aceptación de la bondad del ajuste que el valor de dicho parámetro sea superior a 0.90.

Se debe tener especial cuidado en que los parámetros modales experimentalmente identificados sean fiables para evitar problemas con la convergencia del proceso iterativo. De igual forma, la malla de mediciones debe ser lo suficientemente densa para evitar los problemas de aliasing espacial asociados a la determinación del M.A.C. (Zivanovic, S. et al., 2007).

### 3. Descripción de la estructura y modelo inicial de elementos finitos.

#### 3.1. La Capilla del Palacio de Würzburg (Alemania).

Se trata de uno de los ejemplos más interesantes donde los conceptos estructurales propuestos por Balthasar Newmann pueden apreciarse. La iglesia de una nave se genera por la intersección entre tres bóvedas de planta ovoidal, estado el eje mayor del domo central orientado longitudinalmente mientras que las laterales se orientan dicho eje transversalmente. El resultado es una composición espacial que toma el principio “yuxtaposición pulsante” como concepto básico (Figura 1). Las tres bóvedas están constituidas de mampostería con una única capa de 30 cm de espesor que se incrementa cerca de la base hasta alcanzar los 45 cm. Cada domo presenta una serie de costillas, con sección cuadrada 45x45 cm, que se sitúan radialmente a cada una de las bóvedas.

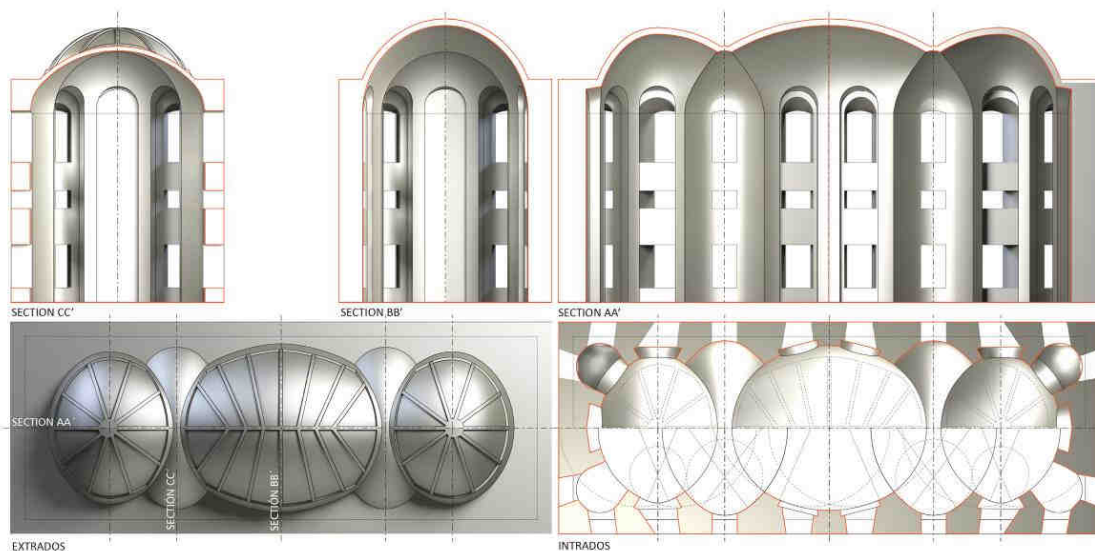


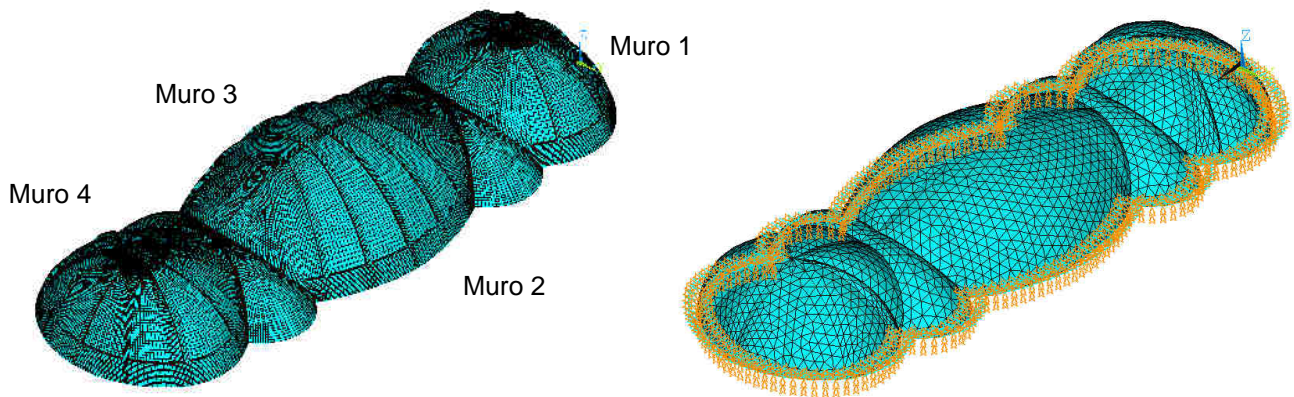
Figura 1. Modelo 3D usado para el modelo de elementos finitos.

#### 3.2. Modelo inicial de elementos finitos.

El análisis estructural se ha realizado usando ANSYS (Figura 2). Una malla con elementos sólidos se ha utilizado para definir el modelo de la cúpula. Debido a la complejidad de las formas un elemento volumétrico de 8 nodos ha sido seleccionado. Al objeto de centrar el estudio en la cúpula, el efecto de los muros laterales se ha determinado, de forma simplificada, mediante dos elementos tipo muelle por nodo que representan el efecto de la rigidez a flexión del muro en la dirección considerada. De igual forma se han considerado las siguientes propiedades mecánicas para los materiales constituyentes (Camara, M. et al., 2011):  $E$  (MPa) = 2000;  $\nu$  = 0.2;  $\rho$  ( $\text{Kg/m}^3$ ) = 1700 and  $k_f$  = 1000 kN/m. La rigidez de los muros se ha determinado considerando que los mismos se han elaborado con un material idéntico al del resto de la capilla y asimilando su comportamiento a la viga en voladizo.

Finalmente, un análisis numérico modal de la estructura se ha desarrollado para estimar las frecuencias naturales de la capilla (Tabla 1), denominándose L la dirección longitudinal del modo de vibración y T la transversal. Se presentan como referencia los tres primeros modos de vibración de la estructura (Figura 3).

A efectos de la modelización del efecto de los muros laterales, se han definido cuatro zonas en la estructura, muros 1 y 4 correspondientes a las dos bóvedas laterales y muros 2 y 3 correspondientes a la nave central.



**Figura 2.** Modelo de elementos finitos de la cubierta de la capilla.

#### 4. Identificación experimental de los parámetros dinámicos.

A partir de las mediciones realizadas sobre la estructura durante un ensayo ambiental los primeros tres modos de vibración experimentales (Tabla 1 y Figura 3) de la estructura han sido identificados mediante la aplicación de análisis modal operacional. El procedimiento de medida e identificación ha sido descrito detalladamente en un artículo anterior (Compan, V. et al., 2014).

Al objeto de realizar una estimación de la correlación existente en las propiedades dinámicas numéricas y experimentales se han obtenido (Tabla 1) las diferencias relativas entre frecuencias naturales y el criterio de aseguramiento modal (M.A.C.) para los tres modos identificados. La siguiente ecuación establece el valor de la diferencia relativa entre las frecuencias numéricas y experimentales.

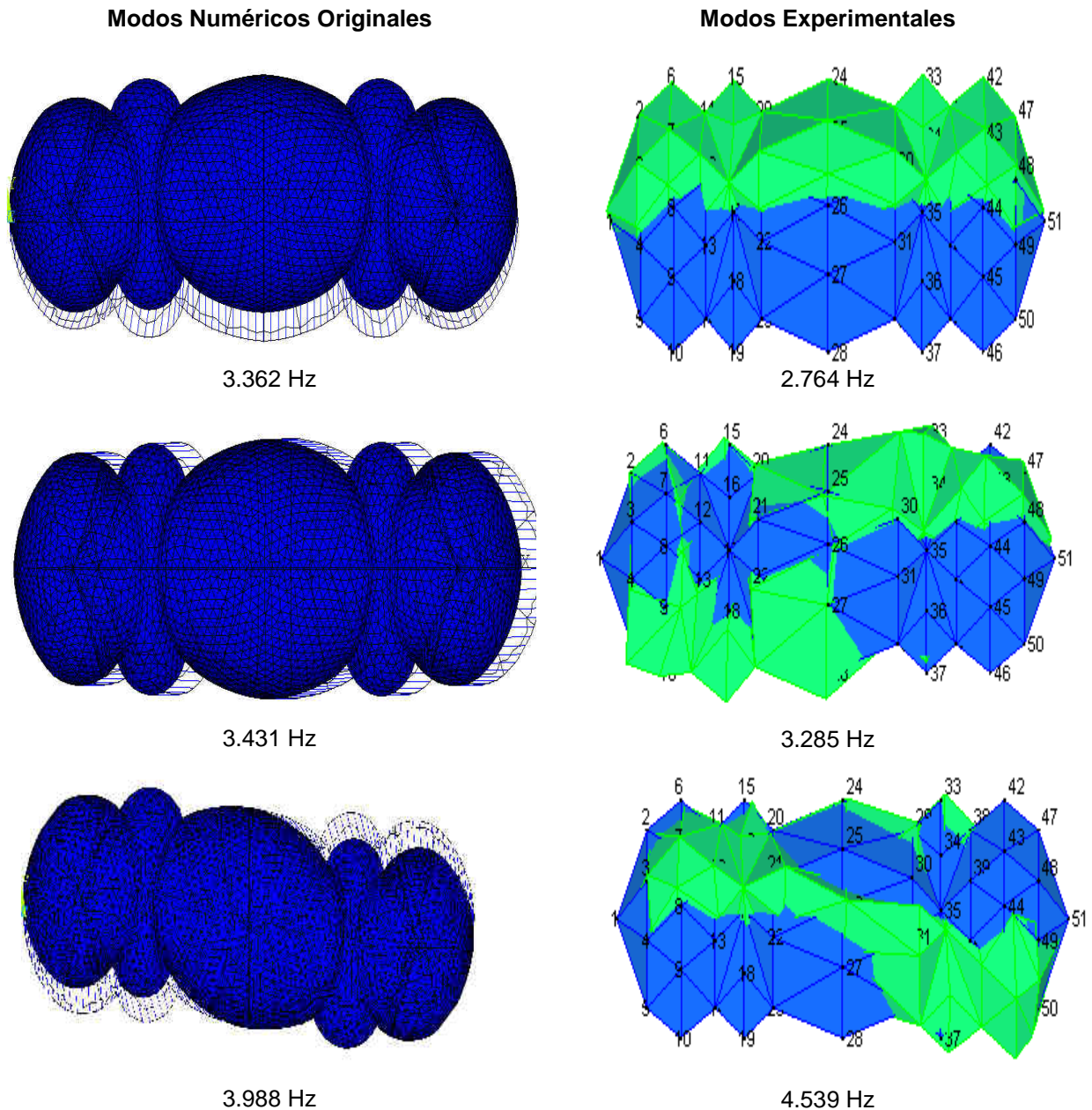
$$\Delta f = \left| \frac{f_{num} - f_{exp}}{f_{exp}} \right| \quad (5)$$

A pesar del empleo de un modelo de elementos finitos muy detallado los errores entre los parámetros modales experimentales y numéricos son elevados, siendo necesario realizar un ajuste del modelo de elementos finitos de la estructura con el objeto de que el mismo sea capaz de representar de forma adecuada el comportamiento de la estructura.

Modos	Frecuencias naturales [Hz]		$\Delta f$ [%]	M.A.C.
	Numéricos	Experimentales [SSI)		
1 T	3.362	2.764	21.63	0.93
2 L	3.431	3.285	4.44	0.77
3 T	3.988	4.539	12.13	0.29

**Tabla 1.** Modos de vibración numéricos originales/experimentales.

De la observación de la Figura 3 de los modos de vibración identificados experimentalmente se puede concluir que los modos 1 y 3 presentan un comportamiento en flexión transversal, mientras que el segundo se corresponde más con una flexión longitudinal de la capilla. En este último caso, el desplazamiento relativo de los diferentes puntos medidos no es tan marcado y se ha considerado que la bondad de los resultados no es suficiente para considerar dichas coordenadas en el proceso de actualización del modelo de elementos finitos de la estructura.



**Figura 3.** Modos de vibración numéricos/experimentales.

### 5. Actualización del modelo de elementos finitos.

De forma general, el proceso de actualización del modelo de elementos finitos de la estructura ha de comenzarse con un ajuste previo manual de la frecuencias naturales, al objeto de facilitar el proceso de optimización del problema de mínimos cuadrados, dada la elevada singularidad de la función objetivo previamente definida. En este caso, dadas las diferencias relativas entre las frecuencias naturales obtenidas en el análisis preliminar y la semejanza entre las formas modales obtenidas experimental y numéricamente se va a prescindir de esta fase de ajuste manual durante el proceso de actualización.

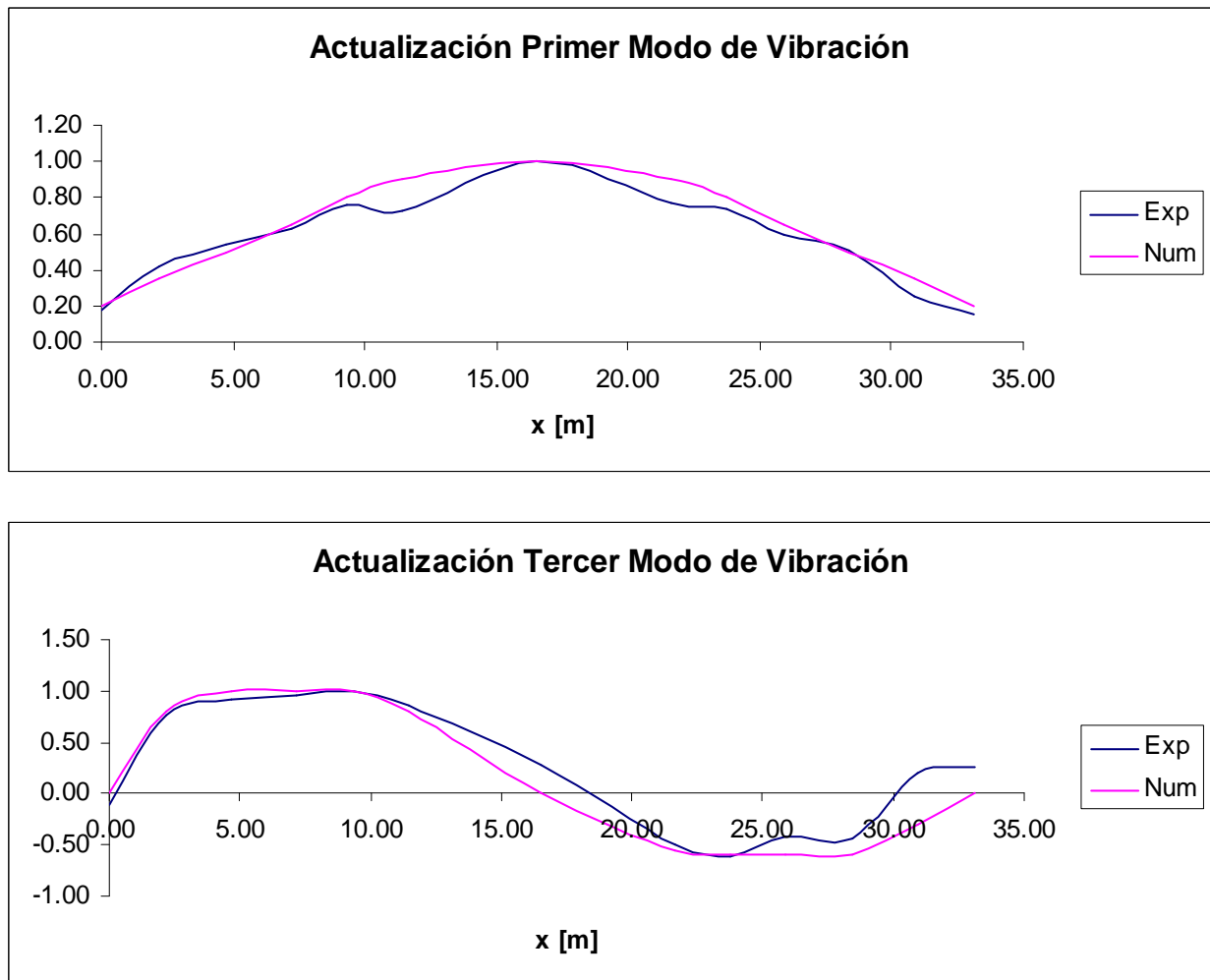
En segundo lugar, han de determinarse los parámetros físicos de la estructura que presenten mayor incertidumbre o sensibilidad con el comportamiento estructural de la misma. En dicho sentido es habitual realizar un estudio de sensibilidad entre los diferentes parámetros posibles. Al objeto de comparar la sensibilidad de cada residuo ( $r_f=r_f$  o  $r_s$ ) frente a cada uno de los  $n$  parámetros ( $\theta$ ), se define como magnitud la sensibilidad normalizada  $S_{n,ij}$ , cuya magnitud queda establecida por la siguiente ecuación (Zivanovic, S. et al., 2007).

$$S_{n,ij} = \frac{\Delta r_i / \Delta \theta_j}{r_i / \theta_j} \quad (6)$$

Tras la realización de dicho estudio de sensibilidad, se han seleccionado los 7 parámetros (Tabla 2) que presentan mayor sensibilidad con el comportamiento dinámico de la estructura. La selección de un número mayor de parámetros dificultaría en exceso la comprensión física del fenómeno de ajuste. Finalmente, se ha realizado la actualización del modelo de elementos finitos mediante la implementación del algoritmo descrito en la sección 2 en el programa MATLAB.

Parámetros	Mínimo	Actualizado	Máximo
Modulo E Cúpulas [MPa]	1000	1650	4000
Módulo E Costillas [MPa]	1000	1610	4000
Modulo E Arranque MPa]	1000	1670	4000
Rigidez Long. Muro 1/4 [kN/m]	200	410	2000
Rigidez Tran. Muro 2/3 [kN/m]	200	415	2000
Rigidez Tran. Muro 1/4 [kN/m]	200	1975	2000
Rigidez Long. Muro 2/3 [kN/m]	200	1506	2000

**Tabla 2.** Rango variación parámetros físicos seleccionados.



**Figura 4.** Proceso de actualización de los dos primeros modos de vibración transversales de la estructura.

La función objetivo ha sido definida a partir de los residuos generados por la diferencia entre las frecuencias naturales de vibración correspondientes a los tres primeros modos de vibración y las coordenadas modales modificadas de los dos modos de vibración transversales (Figura 4). En dicho sentido, para facilitar el proceso de convergencia, se han creado, tanto experimental como numéricamente, unos vectores de

coordenadas modales medias a partir de 11 secciones realizadas sobre la estructura en dirección longitudinal. Dichas secciones coinciden con la malla previamente definida en el ensayo ambiental (Compan, V. et al., 2014).). Bajo dicho criterio la función objetivo queda definida por 25 residuos (3+2x11) y optimizada mediante el empleo de un método de búsqueda con carácter global, algoritmos genéticos, usando una población de 1000 vectores, y alcanzándose el mínimo tras 50 iteraciones.

## 6. Análisis del proceso de actualización.

Los cambios en los parámetros (Tabla 2) sugieren cierta reducción de la rigidez de los materiales modelados acorde con el nivel de deterioro y fisuración existente en este tipo de construcciones. Dicha reducción de rigidez es especialmente acentuada en el caso de los muros laterales de gran esbeltez. El proceso de actualización mejora la correlación entre las frecuencias naturales experimentales y numéricas reduciendo la diferencia relativa entre frecuencias naturales e incrementando los valores de los ratios MAC (Tabla 3) a través del cambio de los 7 parámetros físicos seleccionados. Todos los parámetros modificados presentan valores que están dentro de su rango físico aceptable, facilitando el adecuado entendimiento del proceso de actualización y validando la convergencia del proceso de optimización empleado.

Modos	Frecuencias naturales [Hz]		$\Delta f$ [%]	M.A.C.
	Actualizadas	Experimentales [SSI]		
1 T	2.784	2.764	0.70	0.95
2 L	3.366	3.285	2.46	0.91
3 T	4.542	4.539	0.06	0.89

**Tabla 3.** Modos de vibración actualizados/experimentales.

Por otro lado, de cara al desarrollo de estudios posteriores, dada la magnitud semejante que alcanzan alguno de los parámetros físicos considerados sería posible reducir el número dichos parámetros en el desarrollo del proceso de optimización sin disminuir la precisión de los resultados.

## 7. Conclusiones.

El desarrollo de un modelo de elementos finitos de una construcción histórica basado en los datos de ensayos localizados y el mejor juicio técnico no garantiza que dicho modelo inicial permita estimar razonablemente las propiedades modales (frecuencias naturales y formas modales) de la estructura, incluso si el mismo presenta un alto nivel de detalle. Los tres primeros modos de vibración de la Capilla del Palacio de Würzburg fueron estimados en base al tratamiento mediante la técnica del análisis modal operacional de las medidas realizadas durante un ensayo ambiental. Comparando dichos parámetros experimentales con los inicialmente obtenidos de un modelo de elementos finitos se estimaron diferencias relativas elevadas tanto en las frecuencias naturales como en las formas modales. Al objeto de reducir dichas diferencias un proceso de actualización del modelo de elementos finitos se ha realizado, modificando el valor de siete parámetros físicos del modelo. Tras dicho proceso, la correlación entre las frecuencias naturales, experimentales y numéricas, y los valores del M.A.C. de los tres modos de vibración estudiados se ha incrementado de forma notable. Todos los cambios en los parámetros están dentro de sus límites físicos aceptables, lo que facilita su interpretación técnica y valida el éxito global del proceso de actualización. El ajuste de los parámetros sugiere que la principal variable que controla el comportamiento dinámico de los primeros tres modos de vibración de la capilla es la rigidez de los muros, siendo esta inferior a la inicialmente considerada en el modelo de elementos finitos.

## Referencias.

- Cámara, M, Compán V., Rodríguez-Mayorga, E., 2011. Finite Element modelling of historical masonry constructions. 1st International Congress on Mechanical models in structural engineering. Granada (Spain).
- Compan, V., Cámara, M., Sáez, A., 2014. El análisis modal operacional en la identificación de propiedades dinámicas de edificaciones históricas. Aplicación sobre la Capilla del Palacio de Würzburg (Alemania). Jornadas Internacionales Conmemorativas del 80 aniversario del IETcc.
- Mottershead, J.E., Friswell, M.I., 1993. Model Updating in structural dynamics: a survey. Journal of Sound and Vibration 167 347-375.
- Zivanovic, S., Pavic, A., Reynold, R., 2007. Finite element modelling and updating of a lively footbridge. The complete process. Engineering Structures, Vol. 301(1-2), pp. 126-145.
- Teughels A., 2003. Inverse modelling of civil engineering structures based on operational modal data. Ph.D. Thesis, Katholieke Universiteit Leuven, 2003.