



# Problemas avanzados en electrodinámica: movimiento de partículas

## Trabajo de Fin de Grado

25 Mayo 2023

Departamento de Electrónica y Electromagnetismo

Universidad de Sevilla

Autor: Andrés Rodríguez Galán

Tutores: Alberto Pérez Izquierdo  
Antonio Ramos Reyes

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción teórica . . . . .	1
<b>2. Movimiento en campos electromagnéticos uniformes y constantes</b>	<b>8</b>
2.1. Introducción . . . . .	8
2.2. Campo eléctrico uniforme . . . . .	9
2.3. Campo magnético uniforme . . . . .	11
2.4. Campos eléctrico y magnético paralelos . . . . .	13
2.5. Campos eléctrico y magnético perpendiculares . . . . .	14
2.5.1. Caso 1: $\left(\frac{E^2}{c^2} - B^2\right) > 0$ . . . . .	15
2.5.2. Caso 2: $\left(\frac{E^2}{c^2} - B^2\right) < 0$ . . . . .	16
2.5.3. Caso 3: $\left(\frac{E^2}{c^2} - B^2\right) = 0$ . . . . .	19
2.6. Campos eléctrico y magnético con orientación arbitraria . . . . .	21
<b>3. Movimiento en campos no uniformes y variables</b>	<b>26</b>
3.1. Introducción . . . . .	26
3.2. Onda electromagnética plana . . . . .	26
3.3. Lente de enfoque fuerte . . . . .	29
3.4. Condensador cilíndrico . . . . .	33
3.5. Campo dipolar magnético . . . . .	35
<b>4. Conclusiones</b>	<b>44</b>
<b>Referencias</b>	<b>45</b>

# 1. Introducción

Desde la electrónica hasta la producción de rayos X o las auroras boreales, las fuerzas electromagnéticas y los movimientos de partículas cargadas son los responsables de muchos fenómenos a los que estamos acostumbrados hoy en día.

En este trabajo vamos a hacer un estudio sobre el movimiento de partículas cargadas en diversos sistemas electromagnéticos, centrándonos principalmente en las trayectorias que describen estos movimientos.

## 1.1. Introducción teórica

La ecuación que rige el movimiento de las partículas cargadas es la ecuación de la fuerza de Lorentz:[1]

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.1.1)$$

donde  $q$  denota la carga de la partícula, la cual se supone puntual,  $\vec{E}$  denota el campo eléctrico y  $\vec{B}$  denota el campo magnético. Esta expresión es, junto a las ecuaciones de Maxwell, uno de los pilares de la electrodinámica clásica. La expresión que hemos dado de esta fuerza está dada en el Sistema Internacional de unidades, el cual será el sistema utilizado en todo el trabajo, siendo la expresión en otros sistemas, tales como sistemas cegesimales, ligeramente distinta.

Teniendo una expresión para la fuerza que actúa sobre la partícula, las ecuaciones de movimiento se pueden obtener de la mecánica clásica a partir de la segunda ley de Newton:

$$m \frac{d^2 \vec{v}}{dt^2} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.1.2)$$

Resolviendo estas ecuaciones obtenemos el movimiento de las partículas en el paradigma de la mecánica clásica.

Con la llegada de la teoría especial de la relatividad, sin embargo, se vio que esta forma de proceder solo era válida para casos donde las partículas se mantuvieran a velocidades mucho menores que la velocidad de la luz. Por ello, vamos a utilizar la mecánica relativista para realizar nuestros cálculos.

La base de la relatividad especial son las transformaciones de Lorentz, las cuales marcan cómo se transforman las coordenadas espacio-temporales de distintos sistemas inerciales. En concreto, las coordenadas de un sistema  $S'$  que se mueve a velocidad  $v$  en la dirección  $x$  con

respecto a otro sistema inercial  $S$  vienen dadas por las relaciones[1]

$$ct' = \gamma(ct - \frac{v}{c}x) \quad (1.1.3)$$

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (1.1.4)$$

$$y' = y \quad (1.1.5)$$

$$z' = z \quad (1.1.6)$$

donde  $v$  es la velocidad del sistema  $S'$  con respecto al sistema  $S$  y  $\gamma$  es el factor Lorentz, cuyo valor viene dado por

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.1.7)$$

A partir de estas transformaciones vamos a introducir el concepto de cuadrivector. Un cuadrivector se define como un conjunto de cuatro componentes que se transforman entre dos sistemas inerciales siguiendo las transformaciones de Lorentz. El primer cuadrivector que podemos construir es el cuadrivector posición, dado por

$$x^\alpha = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.1.8)$$

El siguiente concepto relativista que vamos a introducir es el sistema propio de la partícula. Generalmente estudiaremos el movimiento en un sistema inercial dado, denominado sistema laboratorio, pero el concepto de sistema propio resulta de gran utilidad para el desarrollo de la teoría.

El sistema propio es el sistema anclado a la partícula durante su trayectoria, de forma que en este sistema la velocidad de la partícula es nula en todo momento. Introducimos también el concepto de tiempo propio, el cual denotaremos por  $\tau$ , como el tiempo transcurrido en el sistema propio. Es fácil ver que para un movimiento acelerado el sistema propio es un sistema no inercial, por lo que no podemos usar las transformaciones de Lorentz habituales para obtener la relación entre el tiempo propio y el tiempo transcurrido en el sistema laboratorio, el cual denotaremos por  $t$ .

Para obtener esta relación podemos utilizar el siguiente razonamiento. Durante un inter-

valo de tiempo infinitesimal entre  $t$  y  $t + dt$  la partícula lleva una velocidad aproximadamente constante, por lo que durante esta escala de tiempo el sistema propio puede tratarse como una sistema inercial, por lo que la relación entre  $\tau$  y  $t$  viene dada por

$$dt = \gamma d\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2(t)}{c^2}}} d\tau \rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \gamma \quad (1.1.9)$$

donde  $u(t)$  es el módulo de la velocidad de la partícula en el instante  $t$  medida en el sistema laboratorio. Obtenemos así una ecuación diferencial que nos da la relación entre el tiempo propio y el tiempo medido en el laboratorio.

Utilizando esta noción sobre el tiempo propio podemos construir la cuadrivelocidad, definida como

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad (1.1.10)$$

donde  $\vec{u}$  es el vector velocidad en el sistema laboratorio. Las componentes de la cuadrivelocidad se transforman siguiendo las transformaciones de Lorentz, por lo que es más adecuado trabajar con esta en el formalismo relativista en lugar de usar la velocidad en el sistema laboratorio. El hecho de que la cuadrivelocidad es efectivamente un cuadvivector es fácil de ver teniendo en cuenta que el tiempo propio  $\tau$  es invariante ante transformaciones de Lorentz por su definición. A partir de la cuadrivelocidad podemos construir un cuadvivector análogo al momento clásico, el cuadvivivector:

$$p^\alpha = mU^\alpha = m\gamma \begin{pmatrix} c \\ u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad (1.1.11)$$

donde  $m$  es la masa en reposo de la partícula. Es fácil ver que las tres componentes espaciales de este cuadvivivector corresponden a las tres componentes espaciales del momento clásico en el límite no relativista ( $\frac{u}{c} \ll 1$ ), pero la interpretación de la componente temporal no parece tan clara. Para identificar este término, podemos desarrollar el factor de Lorentz en el límite no

relativista, despreciando términos de orden superior a  $\frac{u^2}{c^2}$ , obteniendo

$$p^0 \approx mc + \frac{1}{2}m\frac{u^2}{c} \quad (1.1.12)$$

La expresión que se obtiene es, salvo por un término aditivo constante y un factor  $\frac{1}{c}$ , idéntica a la energía cinética clásica. Esto parece indicar que el término temporal del cuadvivector momento puede interpretarse como la generalización relativista de la energía de la partícula, de forma que podemos escribir

$$p^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad (1.1.13)$$

Con estas definiciones, la segunda ley de Newton en el formalismo relativista toma la misma forma que en el caso clásico, pero utilizando las componentes espaciales del cuadrivivector momento:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d(\gamma\vec{v})}{dt} = \vec{F} \quad (1.1.14)$$

De la misma forma, la evolución de la energía de la partícula también toma la misma forma que su análoga clásica, pero utilizando la energía relativista

$$\frac{dE}{dt} = mc^2\frac{d\gamma}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u} \quad (1.1.15)$$

Para el caso de la fuerza de Lorentz estas expresiones toman la forma

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= q\vec{E} \cdot \vec{u} \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

Con respecto a la transformación de los campos electromagnéticos al cambiar de sistema de referencia, no podemos construir un cuadvivector que nos proporcione las leyes correctas de transformación. Sin embargo, puede demostrarse [2] que los potenciales eléctrico y magnético sí se transforman como las componentes de un cuadvivector. Recordando la definición del potencial eléctrico  $\phi$  y el potencial magnético  $\vec{A}$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

definimos el cuadvivector potencial como

$$A^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\phi}{c} \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (1.1.18)$$

A partir de este cuadvivector es posible demostrar [1] que los campos electromagnéticos se transforman como las componentes de un tensor de segundo orden antisimétrico dado por

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ \frac{-E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{-E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{-E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.19)$$

Utilizando este tensor podemos reescribir (1.1.16) de forma más compacta

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = \frac{q}{m} F^{\alpha\beta} U_\beta \quad (1.1.20)$$

donde hemos introducido los cuadvivectores covariantes, con un subíndice en lugar de un superíndice, que se obtienen cambiando el signo de la primera componente del cuadvivector contravariante,  $A_\alpha = (-A^0, A^1, A^2, A^3)$ . También hemos introducido el convenio de suma de Einstein, por el cual hay que realizar una suma sobre los índices repetidos en la expresión.

Con esto obtenemos las ecuaciones que habremos de resolver para obtener las trayectorias de las partículas cargadas. La expresión (1.1.20) conforma un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales de segundo orden para las coordenadas  $t, x, y, z$  en función del tiempo propio  $\tau$ , las cuales han de ser completadas con las condiciones iniciales adecuadas.

Aunque estas ecuaciones serán las que utilizaremos en la mayor parte del trabajo, vamos a desarrollar otro formalismo que puede ser de utilidad: la mecánica Lagrangiana relativista[2].

El Langrangiano clásico se define como

$$L(q, \dot{q}, t) = T - V \quad (1.1.21)$$

donde  $T$  es la energía cinética del sistema y  $V$  es la energía potencial. Para obtener las ecuaciones de movimiento de un sistema hay que aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange a su

Lagrangiano

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (1.1.22)$$

Lo que buscamos es una generalización del caso clásico para poder aplicarlo a la mecánica relativista, de forma que recuperemos las ecuaciones de movimiento dadas por (1.1.14).

Lo primero que podemos intentar es utilizar la definición clásica usando la energía cinética relativista, definida como la energía de la partícula menos su energía en reposo,  $T = mc^2(\gamma - 1)$ . Sin embargo, las ecuaciones de movimiento que se obtienen a partir de esta definición no son las que buscamos, por lo que necesitaremos otro enfoque para obtener la expresión correcta.

La base del formalismo Lagrangiano es la acción, definida como

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (1.1.23)$$

Con esta definición, la ecuación (1.1.22) surge al imponer que el valor de  $A$  sea un extremal. Dado que las ecuaciones de movimiento tienen que tener la misma forma en todos los sistemas de referencia, se puede deducir que  $A$  tiene que ser invariante ante transformaciones de Lorentz. Si reescribimos su definición como

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma L d\tau \quad (1.1.24)$$

la condición de que el valor de  $A$  sea invariante implica que el valor de  $\gamma L$  también lo tiene que ser. Para el caso de una partícula libre, el Lagrangiano más sencillo que cumple esta condición es

$$L_{libre} = -\frac{mc^2}{\gamma} \quad (1.1.25)$$

donde el signo negativo se introduce para obtener el límite no relativista correcto. Formulando las ecuaciones de Euler-Lagrange con este Lagrangiano recuperamos las ecuaciones de movimiento dadas por (1.1.14).

A partir de este resultado, obtener el Lagrangiano para una partícula cargada en presencia de campos electromagnéticos es sencillo. Dado que la fuerza de Lorentz tiene la misma forma en el formalismo relativista y en el formalismo clásico [1], podemos proponer el Lagrangiano de interacción que se obtiene en este último, dado por [2]

$$L_{int} = -q\Phi + q\vec{u} \cdot \vec{A} = \frac{q}{\gamma} U^\alpha A_\alpha \quad (1.1.26)$$

A partir del último término de esta igualdad puede verse que  $\gamma L_{int}$  es invariante, cumpliendo la condición que habíamos impuesto. Uniendo ambos resultados se obtiene el Lagrangiano para una partícula cargada en presencia de campos electromagnéticos

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} - q\Phi + q\vec{u} \cdot \vec{A} \quad (1.1.27)$$

## 2. Movimiento en campos electromagnéticos uniformes y constantes

### 2.1. Introducción

En este capítulo vamos a tratar el caso más sencillo de movimiento de partículas cargadas: el movimiento en campos uniformes y constantes. Estos problemas poseen siempre una solución analítica, por lo que su estudio es muy útil para estimar como será el movimiento en otros campos más complejos.

En las subsecciones de este capítulo vamos a estudiar diversas configuraciones de estos campos constantes, empezando por los casos más sencillos y usando los resultados que obtengamos para resolver problemas más complicados, culminando en el último apartado con el análisis de una configuración general.

La forma en la que abordaremos estos problemas será, a excepción del último apartado, resolviendo directamente las ecuaciones dadas por (1.1.20), las cuales conforman un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de coeficientes constantes. Sin pérdida de generalidad, escogeremos los ejes de coordenadas de forma que las ecuaciones a resolver se simplifiquen todo lo posible.

Además de las soluciones analíticas, se realizará una representación gráfica de los resultados y una comparación con soluciones numéricas, con el fin de ilustrar las características del movimiento de las partículas y comprobar que las soluciones son correctas. Esto se realizará mediante el uso del software *MATLAB*, utilizando la función *ode45* para la resolución numérica, la cual está basada en el método Runge-Kutta(4,5) [3].

## 2.2. Campo eléctrico uniforme

Para este primer caso tomaremos un campo eléctrico paralelo al eje  $z$  ( $\vec{E} = E\hat{z}$ ) y supondremos que la partícula cargada está inicialmente en el origen de coordenadas. De esta forma, el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver es:

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = \frac{qE}{mc^2} \frac{dz}{d\tau} \quad (2.2.1)$$

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = 0 \quad (2.2.2)$$

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} = 0 \quad (2.2.3)$$

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = \frac{qE}{m} \frac{dt}{d\tau} \quad (2.2.4)$$

Con las condiciones iniciales:

$$c.i : \vec{x}(\tau = 0) = 0, t(\tau = 0) = 0, \vec{p}(\tau = 0) = p_{0x}\hat{x} + p_{0y}\hat{y} + p_{0z}\hat{z}, \frac{dt}{d\tau}(\tau = 0) = \gamma_0 = \frac{1}{mc} \sqrt{m^2 c^2 + p_0^2}$$

Integrando (2.2.1) y sustituyendo en (2.2.4) llegamos a una EDO de segundo orden inhomogénea para la coordenada  $z$ :

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} - \left(\frac{qE}{mc}\right)^2 z = \frac{qE}{m} \gamma_0$$

La solución a esta ecuación puede escribirse en términos de funciones hiperbólicas. Aplicando las condiciones iniciales se obtiene

$$z(\tau) = \frac{c}{qE} \left\{ \sqrt{m^2 c^2 + p_0^2} \left[ \cosh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right) - 1 \right] + p_{0z} \sinh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right) \right\} \quad (2.2.5)$$

Las ecuaciones (2.2.2) y (2.2.3) son ecuaciones de segundo orden homogéneas cuya resolución es inmediata. Aplicando las condiciones iniciales obtenemos

$$x(\tau) = \frac{p_{0x}}{m} \tau \quad (2.2.6)$$

$$y(\tau) = \frac{p_{0y}}{m} \tau \quad (2.2.7)$$

Para obtener  $t(\tau)$  sustituimos (2.2.5) en la ecuación (2.2.1), con lo cual podemos resolverla aplicando dos veces una integración directa, llegando al resultado

$$t(\tau) = \frac{1}{qE} \left\{ \sqrt{m^2 c^2 + p_0^2} \sinh \left( \frac{qE}{mc} \tau \right) + p_{0z} \left[ \cosh \left( \frac{qE}{mc} \tau \right) - 1 \right] \right\} \quad (2.2.8)$$

Con estos resultados es posible determinar la trayectoria de la partícula en el sistema laboratorio en función del parámetro  $\tau$ , correspondiente al tiempo propio de la partícula. En este problema también es posible obtener formas cerradas para las coordenadas en función del tiempo en el sistema laboratorio, lo cual no será posible, en general, para problemas posteriores con ecuaciones más complicadas.

Para este caso, las soluciones en función de  $t$  las podemos obtener invirtiendo la función  $t(\tau)$ , pero debido a la forma de la función esta inversión no es trivial, por lo que optaremos por reformular el sistema de ecuaciones diferenciales para obtener las relaciones buscadas.

Utilizando la definición de tiempo propio

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma \quad (2.2.9)$$

podemos utilizar la ecuación (2.2.1) para obtener una expresión para  $\gamma$  en función de la coordenada  $z$ .

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{qE}{mc^2} \frac{dz}{d\tau} \longrightarrow \gamma(z) = \frac{qE}{mc^2} z + \gamma_0 \quad (2.2.10)$$

Aplicando ahora (2.2.9) en (2.2.4) llegamos a una ecuación diferencial para  $z(t)$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \gamma \frac{dz}{dt} \right) = \frac{qE}{m} \longrightarrow \gamma \frac{dz}{dt} = \frac{qE}{m} t + \frac{p_{0z}}{m} \quad (2.2.11)$$

Dado que tenemos una expresión para  $\gamma(z)$  dada por (2.2.10) podemos integrar la ecuación diferencial de forma inmediata, obteniendo una ecuación de segundo grado para  $z(t)$ :

$$\frac{qE}{2mc^2} z^2 + \gamma_0 z - \left( \frac{qE}{2m} t^2 + \frac{p_{0z}}{m} t \right) = 0$$

Obtenemos una única solución que cumpla las condiciones iniciales, que viene dada por:

$$z(t) = \frac{c}{qE} \left( \sqrt{m^2 c^2 + p_{0y}^2 + (qEt + p_{0y})^2} - \sqrt{m^2 c^2 + p_{0y}^2 + p_{0x}^2} \right) \quad (2.2.12)$$

Para realizar la representación gráfica en la figura 1 introducimos las siguientes variables

adimensionales

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} = \frac{qE}{mc^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} t_a \\ \tau_a \end{pmatrix} = \frac{qE}{mc} \begin{pmatrix} t \\ \tau \end{pmatrix} \quad (2.2.13)$$

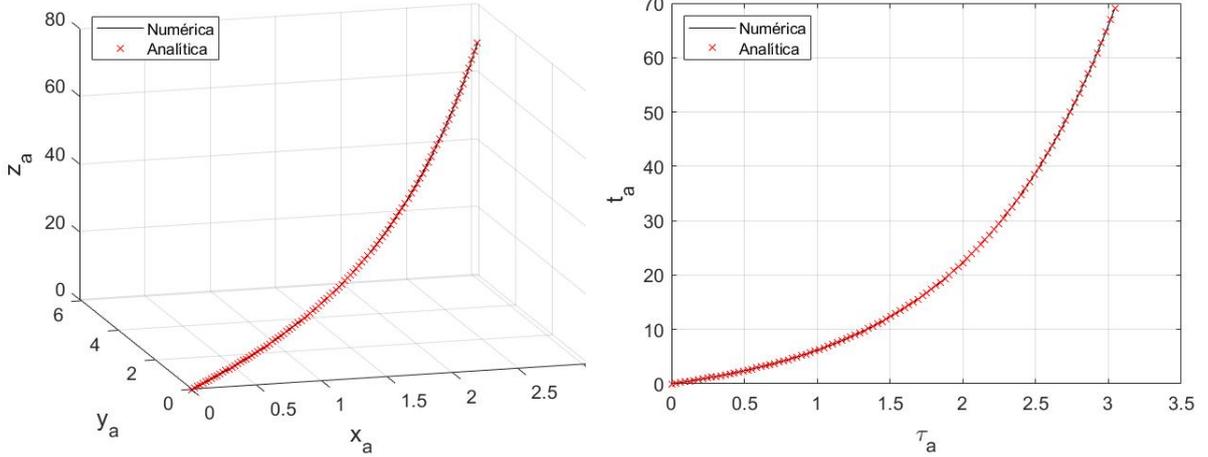


Figura 1: Comparación de la trayectoria de la partícula en un campo eléctrico uniforme obtenida analíticamente y por métodos numéricos para  $\frac{\vec{p}_0}{mc} = (1, 2, 3)$ , representadas en coordenadas adimensionales. Ambas soluciones son perfectamente coincidentes.

### 2.3. Campo magnético uniforme

Para este caso tomaremos un campo magnético paralelo al eje  $z$  ( $\vec{B} = B\hat{z}$ ) y supondremos que la partícula cargada está inicialmente en el origen de coordenadas. De esta forma, el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver es:

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0 \quad (2.3.1)$$

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{qB}{m} \frac{dy}{d\tau} \quad (2.3.2)$$

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{qB}{m} \frac{dx}{d\tau} \quad (2.3.3)$$

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} = 0 \quad (2.3.4)$$

con las condiciones iniciales:

$$c.i : \vec{x}(\tau = 0) = 0, t(\tau = 0) = 0, \vec{p}(\tau = 0) = p_{0x}\hat{x} + p_{0y}\hat{y} + p_{0z}\hat{z}, \frac{dt}{d\tau}(\tau = 0) = \gamma_0 = \frac{1}{mc} \sqrt{m^2c^2 + p_0^2}$$

En este caso las ecuaciones de movimiento (2.3.1) y (2.3.4) se pueden resolver trivialmen-

te, obteniendo funciones lineales de  $\tau$  para  $t(\tau)$  y  $z(\tau)$

$$t(\tau) = \frac{1}{mc} \sqrt{m^2 c^2 + p_0^2} \tau \quad (2.3.5)$$

$$z(\tau) = \frac{p_{0z}}{m} \tau \quad (2.3.6)$$

Integrando la ecuación (2.3.2) y aplicando condiciones iniciales obtenemos

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{qB}{m} y + \frac{p_{0x}}{m} \quad (2.3.7)$$

Sustituyendo en (2.3.3) obtenemos una ecuación diferencial para  $y(\tau)$ :

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} = - \left( \frac{qB}{m} \right)^2 y - \frac{qB p_{0x}}{m^2} \quad (2.3.8)$$

Esta ecuación corresponde a un oscilador armónico más un término inhomogéneo. Su solución, tras aplicar las condiciones iniciales, es

$$y(\tau) = \frac{p_{0x}}{qB} \left[ \cos \left( \frac{qB}{m} \tau \right) - 1 \right] + \frac{p_{0y}}{qB} \operatorname{sen} \left( \frac{qB}{m} \tau \right) \quad (2.3.9)$$

Una vez obtenida una expresión para  $y(\tau)$  podemos obtener  $x(\tau)$  integrando (2.3.7), obteniendo otro oscilador armónico para el movimiento en esta coordenada

$$x(\tau) = \frac{p_{0x}}{qB} \operatorname{sen} \left( \frac{qB}{m} \tau \right) - \frac{p_{0y}}{qB} \left[ \cos \left( \frac{qB}{m} \tau \right) - 1 \right] \quad (2.3.10)$$

En este caso la relación entre las ecuaciones en función del tiempo propio y en función del tiempo en el sistema laboratorio es inmediata, debido a la relación lineal entre  $t$  y  $\tau$ , la cual tiene su origen en el hecho de que la fuerza magnética no cambia la energía cinética de la partícula.

Para realizar la representación gráfica en la figura 2 introducimos las siguientes variables adimensionales

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} = \frac{qB}{mc} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} t_a \\ \tau_a \end{pmatrix} = \frac{qB}{m} \begin{pmatrix} t \\ \tau \end{pmatrix} \quad (2.3.11)$$

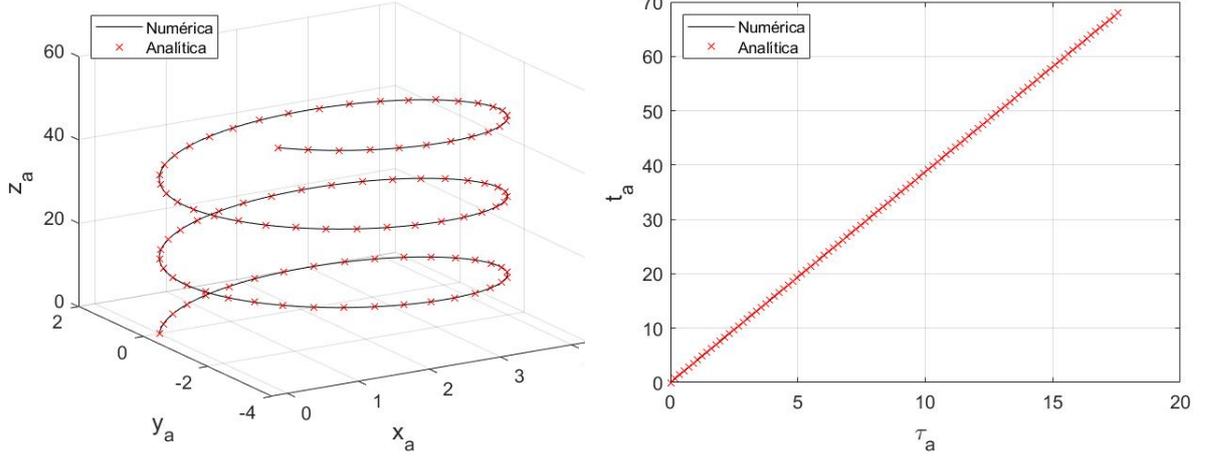


Figura 2: Comparación de la trayectoria de la partícula en un campo magnético uniforme obtenida analíticamente y por métodos numéricos para  $\frac{\vec{p}_0}{mc} = (1, 2, 3)$ , representadas en coordenadas adimensionales. Ambas soluciones son perfectamente coincidentes.

## 2.4. Campos eléctrico y magnético paralelos

Para este caso tomaremos la dirección de ambos campos paralela al eje  $z$  ( $\vec{B} = B\hat{z}$ ,  $\vec{E} = E\hat{z}$ ) y supondremos que la partícula cargada está inicialmente en el origen de coordenadas.

De esta forma, el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver es:

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = \frac{qE}{mc^2} \frac{dz}{d\tau} \quad (2.4.1)$$

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = \frac{qB}{m} \frac{dy}{d\tau} \quad (2.4.2)$$

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} = -\frac{qB}{m} \frac{dx}{d\tau} \quad (2.4.3)$$

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = \frac{qE}{m} \frac{dt}{d\tau} \quad (2.4.4)$$

con las condiciones iniciales:

$$c.i : \vec{x}(\tau = 0) = 0, t(\tau = 0) = 0, \vec{p}(\tau = 0) = p_{0x}\hat{x} + p_{0y}\hat{y} + p_{0z}\hat{z}, \frac{dt}{d\tau}(\tau = 0) = \gamma_0 = \frac{1}{mc} \sqrt{m^2 c^2 + p_0^2}$$

Dado que el campo eléctrico solo afecta a la coordenada paralela al mismo y el campo magnético afecta a las coordenadas perpendiculares, el problema puede separarse en dos partes independientes. Esto se refleja claramente en las ecuaciones, ya que (2.4.1) y (2.4.4) pueden resolverse separadamente de (2.4.2) y (2.4.3), y viceversa. Debido a esto las soluciones para  $x(\tau)$  y  $y(\tau)$  son las que obtuvimos en la sección 2.3, mientras que las soluciones correspondientes a  $z(\tau)$  y  $t(\tau)$  son las calculadas en la sección 2.2:

$$t(\tau) = \frac{1}{qE} \left\{ \sqrt{m^2 c^2 + p_0^2} \sinh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right) + p_{0z} \left[ \cosh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right) - 1 \right] \right\} \quad (2.4.5)$$

$$z(\tau) = \frac{c}{qE} \left\{ \sqrt{m^2 c^2 + p_0^2} \left[ \cosh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right) - 1 \right] + p_{0z} \sinh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right) \right\} \quad (2.4.6)$$

$$x(\tau) = \frac{p_{0x}}{qB} \sin\left(\frac{qB}{m}\tau\right) - \frac{p_{0y}}{qB} \left[ \cos\left(\frac{qB}{m}\tau\right) - 1 \right] \quad (2.4.7)$$

$$y(\tau) = \frac{p_{0x}}{qB} \left[ \cos\left(\frac{qB}{m}\tau\right) - 1 \right] + \frac{p_{0y}}{qB} \sin\left(\frac{qB}{m}\tau\right) \quad (2.4.8)$$

La trayectoria resultante es una hélice, similar a la obtenida para el caso en ausencia de campo eléctrico, que se va estirando debido a la aceleración vertical.

Para realizar la representación gráfica en la figura 3 introducimos las siguientes variables adimensionales

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} = \frac{qE}{mc^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} t_a \\ \tau_a \end{pmatrix} = \frac{qE}{mc} \begin{pmatrix} t \\ \tau \end{pmatrix} \quad (2.4.9)$$

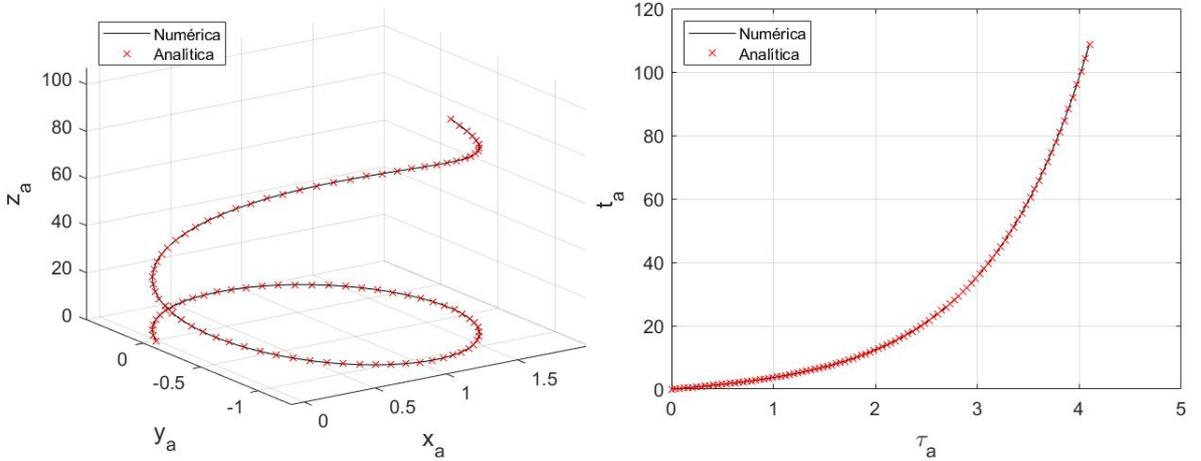


Figura 3: Comparación de la trayectoria de la partícula en campos eléctrico y magnético uniformes y paralelos obtenida analíticamente y por métodos numéricos para  $\frac{\vec{p}_0}{mc} = (1, 2, 1)$ ,  $\frac{cB}{E} = \frac{5}{2}$ , representadas en coordenadas adimensionales. Ambas soluciones son perfectamente coincidentes.

## 2.5. Campos eléctrico y magnético perpendiculares

En este caso tomaremos la dirección del campo eléctrico paralela al eje  $z$  y la dirección del campo magnético paralela al eje  $y$  ( $\vec{B} = B\hat{y}$ ,  $\vec{E} = E\hat{z}$ ) y supondremos que la partícula cargada está inicialmente en el origen de coordenadas. De esta forma, el sistema de ecuacio-

nes diferenciales a resolver es:

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = \frac{qE}{mc^2} \frac{dz}{d\tau} \quad (2.5.1)$$

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{qB}{m} \frac{dz}{d\tau} \quad (2.5.2)$$

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = 0 \quad (2.5.3)$$

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} = \frac{qE}{m} \frac{dt}{d\tau} + \frac{qB}{m} \frac{dx}{d\tau} \quad (2.5.4)$$

con las condiciones iniciales:

$$c.i : \vec{x}(\tau = 0) = 0, t(\tau = 0) = 0, \vec{p}(\tau = 0) = p_{0x}\hat{x} + p_{0y}\hat{y} + p_{0z}\hat{z}, \frac{dt}{d\tau}(\tau = 0) = \gamma_0 = \frac{1}{mc} \sqrt{m^2c^2 + p_0^2}$$

La ecuación (2.5.3) se puede resolver inmediatamente. Aplicando las condiciones iniciales se obtiene

$$y(\tau) = \frac{p_{0y}}{m} \tau \quad (2.5.5)$$

Para resolver las ecuaciones restantes comenzamos integrando (2.5.1) y (2.5.2), con lo que obtenemos las igualdades

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{qE}{mc^2} z + \gamma_0 \quad (2.5.6)$$

$$\frac{dx}{d\tau} = -\frac{qB}{m} z + \frac{p_{0x}}{m} \quad (2.5.7)$$

Podemos sustituir estas dos expresiones en (2.5.4) para obtener una ecuación diferencial para la coordenada  $z$

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} = \frac{q^2}{m^2} \left( \frac{E^2}{c^2} - B^2 \right) z + \frac{q}{m} \left( \gamma_0 E + \frac{p_{0x}}{m} B \right) \quad (2.5.8)$$

Esta ecuación diferencial puede tener tres distintas soluciones dependiendo de si el coeficiente  $\left( \frac{E^2}{c^2} - B^2 \right)$  es mayor, menor o igual a cero, por lo que estudiaremos cada caso por separado.

### 2.5.1. Caso 1: $\left( \frac{E^2}{c^2} - B^2 \right) > 0$

En este caso el movimiento de la partícula está mayormente influenciado por el campo eléctrico, lo que provoca que este esté descrito principalmente por funciones hipérbolicas. La solución que se obtiene para (2.5.8) tras aplicar las condiciones iniciales es:

$$z(\tau) = \frac{p_{0z}}{q\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - B^2}} \sinh \left( \frac{q\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - B^2}}{m} \tau \right) + \frac{1}{qc \left( \frac{E^2}{c^2} - B^2 \right)} (mc\gamma_0 E + cp_{0x} B) \left[ \cosh \left( \frac{q\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - B^2}}{m} \tau \right) - 1 \right] \quad (2.5.9)$$

Una vez tenemos la solución para  $z$  podemos introducirla en las ecuaciones (2.5.6) y (2.5.7) para obtener las expresiones para  $x$  y  $t$  mediante una integración directa.

$$x(\tau) = -\frac{B}{qc\left(\frac{E^2}{c^2} - B^2\right)^{\frac{3}{2}}}(mc\gamma_0 E + cp_{0x}B) \sinh\left(\frac{q\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - B^2}}{m}\tau\right) - \frac{Bp_{0z}}{q\left(\frac{E^2}{c^2} - B^2\right)} \left[ \cosh\left(\frac{q\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - B^2}}{m}\tau\right) - 1 \right] + \frac{E(mc^2\gamma_0 B + p_{0x}E)}{mc^2\left(\frac{E^2}{c^2} - B^2\right)}\tau \quad (2.5.10)$$

$$t(\tau) = \frac{E}{qc^3\left(\frac{E^2}{c^2} - B^2\right)^{\frac{3}{2}}}(mc\gamma_0 E + cp_{0x}B) \sinh\left(\frac{q\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - B^2}}{m}\tau\right) + \frac{Ep_{0z}}{qc^2\left(\frac{E^2}{c^2} - B^2\right)} \left[ \cosh\left(\frac{q\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - B^2}}{m}\tau\right) - 1 \right] - \frac{B(mc^2\gamma_0 B + p_{0x}E)}{mc^2\left(\frac{E^2}{c^2} - B^2\right)}\tau \quad (2.5.11)$$

Añadiendo a estas tres ecuaciones la expresión para  $y(\tau)$  dada por (2.5.5) obtenemos la trayectoria espacio-temporal de la partícula.

Para realizar la representación gráfica en la figura 4 introducimos las siguientes variables adimensionales

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} = \frac{qE}{mc^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} t_a \\ \tau_a \end{pmatrix} = \frac{qE}{mc} \begin{pmatrix} t \\ \tau \end{pmatrix} \quad (2.5.12)$$

### 2.5.2. Caso 2: $\left(\frac{E^2}{c^2} - B^2\right) < 0$

En este caso la fuerza magnética es la predominante, lo que implica que la trayectoria está principalmente descrita por funciones trigonométricas. La solución que se obtiene para (2.5.8) tras aplicar las condiciones iniciales es:

$$z(\tau) = \frac{p_{0z}}{q\sqrt{B^2 - \frac{E^2}{c^2}}} \sin\left(\frac{q\sqrt{B^2 - \frac{E^2}{c^2}}}{m}\tau\right) - \frac{1}{qc\left(B^2 - \frac{E^2}{c^2}\right)}(mc\gamma_0 E + cp_{0x}B) \left[ \cos\left(\frac{q\sqrt{B^2 - \frac{E^2}{c^2}}}{m}\tau\right) - 1 \right] \quad (2.5.13)$$

Una vez tenemos la solución para  $z$  podemos introducirla en las ecuaciones (2.5.6) y (2.5.7) para obtener las expresiones para  $x$  y  $t$  mediante una integración directa.

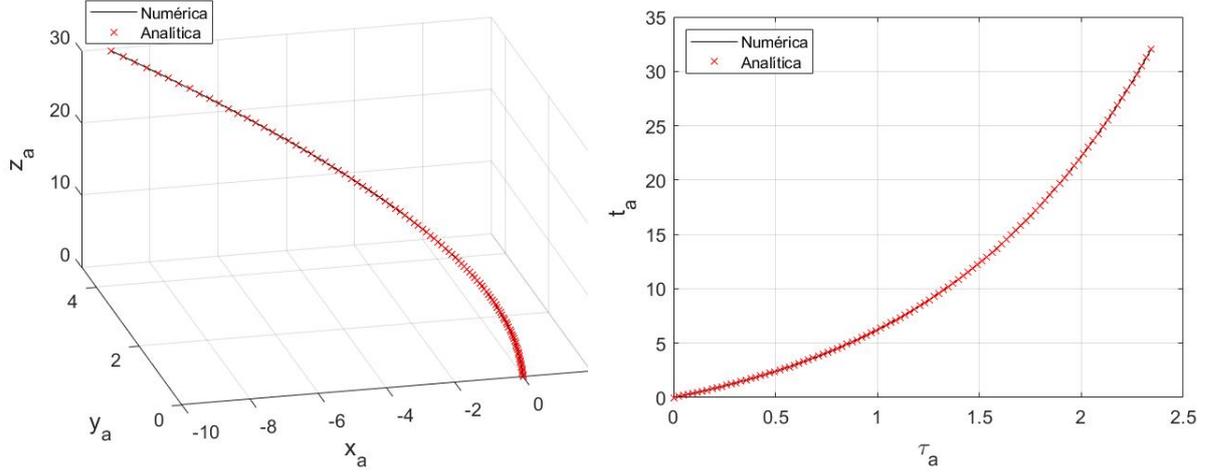


Figura 4: Comparación de la trayectoria de la partícula en campos eléctrico y magnético uniformes y perpendiculares obtenida analíticamente y por métodos numéricos para  $\frac{\vec{p}_0}{mc} = (1, 2, 3)$ ,  $\frac{cB}{E} = \frac{1}{2}$ , representadas en coordenadas adimensionales. Ambas soluciones son perfectamente coincidentes.

$$\begin{aligned}
 x(\tau) = & \frac{B}{qc \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} (mc\gamma_0 E + cp_{0x}B) \operatorname{sen} \left( \frac{q\sqrt{B^2 - \frac{E^2}{c^2}}}{m} \tau \right) \\
 & + \frac{Bp_{0z}}{q \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2}\right)} \left[ \cos \left( \frac{q\sqrt{B^2 - \frac{E^2}{c^2}}}{m} \tau \right) - 1 \right] + \frac{E(mc^2\gamma_0 B + p_{0x}E)}{mc^2 \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2}\right)} \tau
 \end{aligned} \tag{2.5.14}$$

$$\begin{aligned}
 t(\tau) = & - \frac{E}{qc^3 \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} (mc\gamma_0 E + cp_{0x}B) \operatorname{sen} \left( \frac{q\sqrt{B^2 - \frac{E^2}{c^2}}}{m} \tau \right) \\
 & - \frac{Ep_{0z}}{qc^2 \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2}\right)} \left[ \cos \left( \frac{q\sqrt{B^2 - \frac{E^2}{c^2}}}{m} \tau \right) - 1 \right] - \frac{B(mc^2\gamma_0 B + p_{0x}E)}{mc^2 \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2}\right)} \tau
 \end{aligned} \tag{2.5.15}$$

Añadiendo a estas tres ecuaciones la expresión para  $y(\tau)$  dada por (2.5.5) obtenemos la trayectoria espacio-temporal de la partícula.

Para realizar la representación gráfica en la figura 5 introducimos las siguientes variables adimensionales

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} = \frac{qB}{mc} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} t_a \\ \tau_a \end{pmatrix} = \frac{qB}{m} \begin{pmatrix} t \\ \tau \end{pmatrix} \tag{2.5.16}$$

Merece la pena comentar que esta configuración de campos eléctricos y magnéticos tiene una aplicación muy usada en diversos ámbitos: funciona como selector de velocidades para las

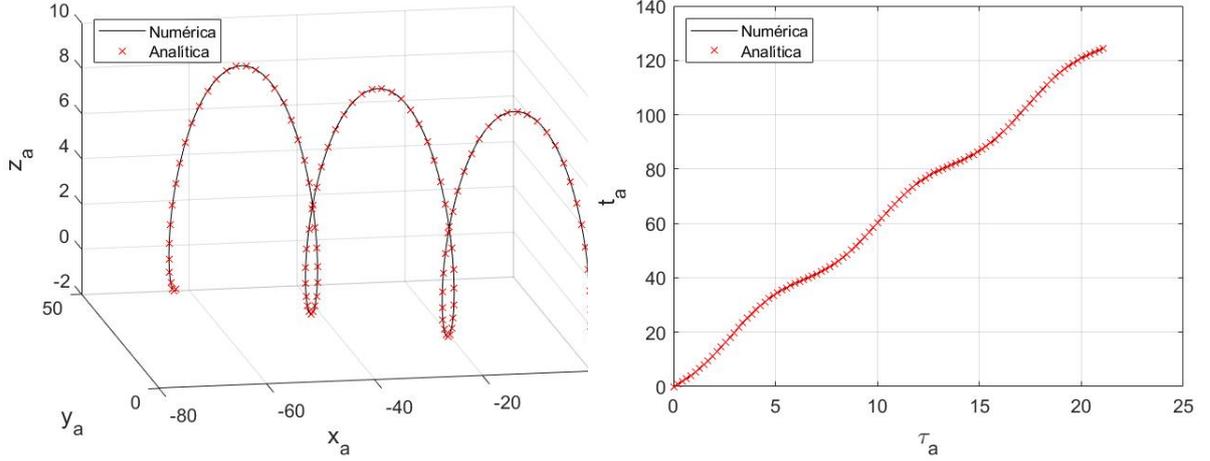


Figura 5: Comparación de la trayectoria de la partícula en campos eléctrico y magnético uniformes y perpendiculares obtenida analíticamente y por métodos numéricos para  $\frac{\vec{p}_0}{mc} = (1, 2, 3)$ ,  $\frac{cB}{E} = 2$ , representadas en coordenadas adimensionales. Ambas soluciones son perfectamente coincidentes.

partículas cargadas.

Supongamos que una partícula entra en una región con estos campos electromagnéticos a una cierta velocidad  $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{x}$ . El movimiento que seguirá la partícula en la dirección vertical viene dado por (2.5.13), y podemos observar que para un valor de  $v_{0x}$  concreto desaparece el movimiento en esta dirección. Teniendo en cuenta que el momento inicial de la partícula viene dado por  $p_{0x} = m\gamma_0 v_{0x}$ , las partículas no se desviarán de la trayectoria rectilínea si tienen una velocidad dada por

$$v_{0x} = -\frac{E}{B} \quad (2.5.17)$$

De esta forma, variando los valores de  $E$  y  $B$  podemos conseguir que las partículas que lleven una velocidad dada no se desvíen. Si colocamos una pequeña ranura a la salida de la región con campos, obtendremos solamente partículas que lleven la velocidad que buscamos. Además, para el caso de las partículas cuyas velocidades vengan dadas por (2.5.17), puede obtenerse a partir de (2.5.14) y (2.5.15) que la velocidad se mantiene constante durante toda la trayectoria, por lo que la velocidad a la salida será igual que a la entrada.

Merece la pena añadir también que, en general, las curvas formadas por las trayectorias cambian en función del valor de  $v_{0x}$ . Para analizar esto podemos ver el comportamiento de la función  $\frac{dz}{dx}$ , la cual podemos calcular a partir de (2.5.13) y (2.5.14) aplicando la regla de la

cadena, obteniendo

$$\frac{dz}{dx} \propto \frac{(cE + v_{0x}cB) \operatorname{sen} \left( \frac{q\sqrt{B^2 - \frac{E^2}{c^2}}}{m} \tau \right)}{cB(cE + v_{0x}cB) \operatorname{cos} \left( \frac{q\sqrt{B^2 - \frac{E^2}{c^2}}}{m} \tau \right) + E(c^2B + v_{0x}E)} \quad (2.5.18)$$

A partir de esta función podemos encontrar tres velocidades con efectos interesantes. La primera,  $v_{0x} = -\frac{E}{B}$ , cuyo efecto ya hemos analizado, y dos velocidades que provocan que la derivada no esté definida para ciertos valores de  $\tau$ , dadas por  $v_{0x} = 0$  y  $v_{0x} = -2\frac{cB/E}{1+(cB/E)^2}c$ . Además, para los casos  $v_{0x} > 0$  y  $v_{0x} < -2\frac{cB/E}{1+(cB/E)^2}c$  tenemos instantes donde la derivada diverge, lo que se traduce en una trayectoria que forma bucles. En la figura 6 podemos observar las posibles trayectorias en los distintos casos, a excepción del caso  $v_{0x} = -\frac{E}{B}$  cuya trayectoria es trivial.

### 2.5.3. Caso 3: $\left(\frac{E^2}{c^2} - B^2\right) = 0$

En este caso donde las intensidades de ambos campos son iguales obtenemos unas ecuaciones de movimiento formadas únicamente por polinomios. La solución que se obtiene para (2.5.8) tras aplicar las condiciones iniciales es:

$$z(\tau) = \frac{p_{0z}}{m} \tau + \frac{qE}{2m^2c} (mc\gamma_0 + p_{0x}) \tau^2 \quad (2.5.19)$$

Una vez tenemos la solución para  $z$  podemos introducirla en las ecuaciones (2.5.6) y (2.5.7) para obtener las expresiones para  $x$  y  $t$  mediante una integración directa.

$$x(\tau) = \frac{p_{0x}}{m} \tau - \frac{qEp_{0z}}{2m^2c} \tau^2 - \frac{q^2E^2}{6m^3c^2} (mc\gamma_0 + p_{0x}) \tau^3 \quad (2.5.20)$$

$$t(\tau) = \gamma_0\tau + \frac{qp_{0z}E}{2m^2c^2} \tau^2 + \frac{q^2E^2}{6m^3c^3} (mc\gamma_0 + p_{0x}) \tau^3 \quad (2.5.21)$$

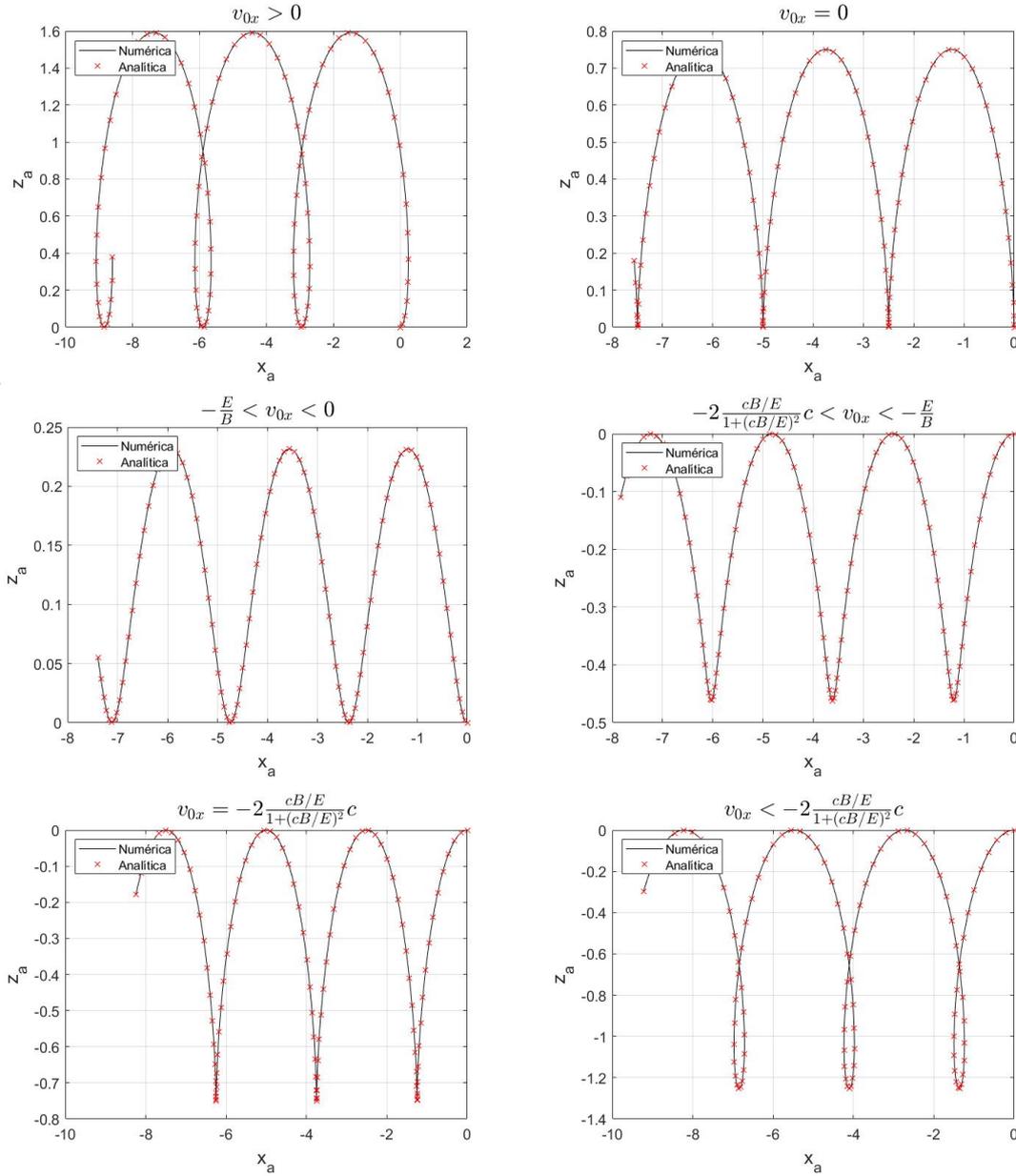


Figura 6: Trayectoria de la partícula cargada para distintos valores de  $v_{0x}$ , con  $v_{0y} = v_{0z} = 0$  y  $\frac{cB}{E} = 3$ , representadas en coordenadas adimensionales.

Añadiendo a estas tres ecuaciones la expresión para  $y(\tau)$  dada por (2.5.5) obtenemos la trayectoria espacio-temporal de la partícula.

Para realizar la representación gráfica en la figura 7 introducimos las siguientes variables adimensionales

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} = \frac{qE}{mc^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} t_a \\ \tau_a \end{pmatrix} = \frac{qE}{mc} \begin{pmatrix} t \\ \tau \end{pmatrix} \quad (2.5.22)$$

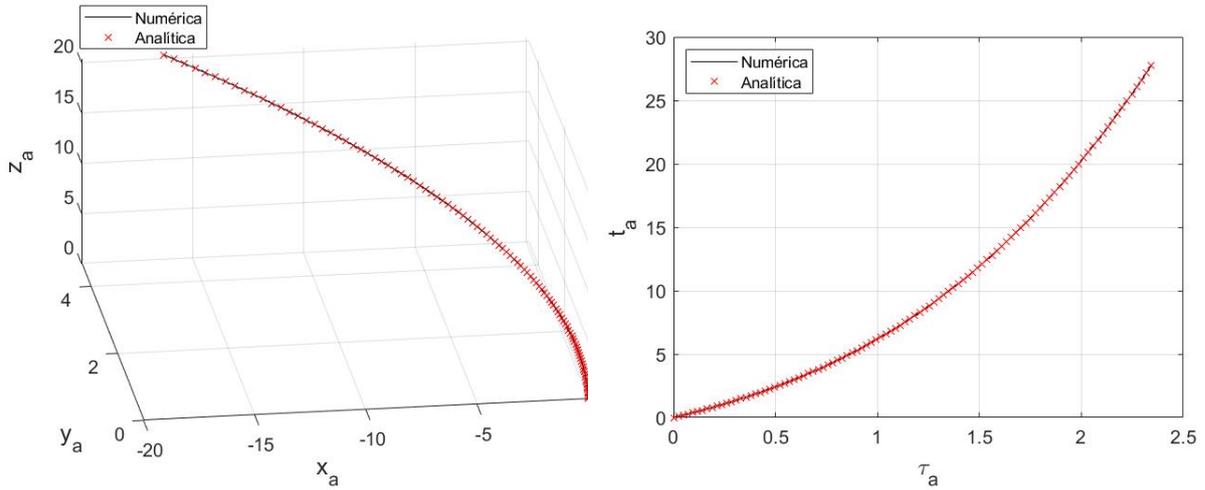


Figura 7: Comparación de la trayectoria de la partícula en campos eléctrico y magnético uniformes y perpendiculares obtenida analíticamente y por métodos numéricos para  $\frac{\vec{p}_0}{mc} = (1, 2, 3)$ ,  $\frac{cB}{E} = 1$ , representadas en coordenadas adimensionales. Ambas soluciones son perfectamente coincidentes.

## 2.6. Campos eléctrico y magnético con orientación arbitraria

Para obtener las soluciones del problema general optaremos por usar un método distinto a resolver directamente el sistema de ecuaciones diferenciales. Lo que haremos será aplicar una transformación de Lorentz al problema para reducirlo al caso de campos eléctrico y magnético paralelos, cuyas soluciones ya conocemos. Tras deshacer la transformación de Lorentz obtendremos la trayectoria de la partícula en el sistema laboratorio.

Primero, elegiremos un sistema de coordenadas tal que el campo eléctrico sea paralelo al eje  $z$  y el campo magnético tenga únicamente componentes en las direcciones  $z$  e  $y$ , de forma que esta última sea siempre positiva. Definimos  $\theta$ , el cual puede tomar valores en el intervalo  $\theta \in [0, \pi]$ , como el ángulo entre ambos campos, de forma que los campos pueden escribirse como  $\vec{E} = E\hat{z}$  y  $\vec{B} = B \cos \theta \hat{y} + B \sin \theta \hat{z}$ , con  $E, B > 0$ .

En lo que sigue excluirémos el caso en el que  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , debido a que no podemos transformar este sistema en otro donde los campos sean paralelos.

Para obtener los módulos de los campos tras la transformación de Lorentz haremos uso de dos invariantes relativistas dados por [1]

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = EB \cos \theta = \vec{\bar{E}} \cdot \vec{\bar{B}} \quad (2.6.1)$$

$$\frac{E^2}{c^2} - B^2 = \frac{\bar{E}^2}{c^2} - \bar{B}^2 \quad (2.6.2)$$

donde  $\vec{\bar{E}}, \vec{\bar{B}}$  denotan los campos tras una transformación de Lorentz. Dado que buscamos

un sistema donde ambos campos sean paralelos, la igualdad (2.6.1) tomará la forma

$$EB \cos \theta = \pm \bar{E} \bar{B} \quad (2.6.3)$$

donde el signo + va asociado al caso con  $\theta < \frac{\pi}{2}$  y el signo - corresponde al caso  $\theta > \frac{\pi}{2}$ . Este signo se introduce de forma que podamos suponer  $\bar{E}, \bar{B} > 0$  y habrá de tenerse en cuenta más adelante.

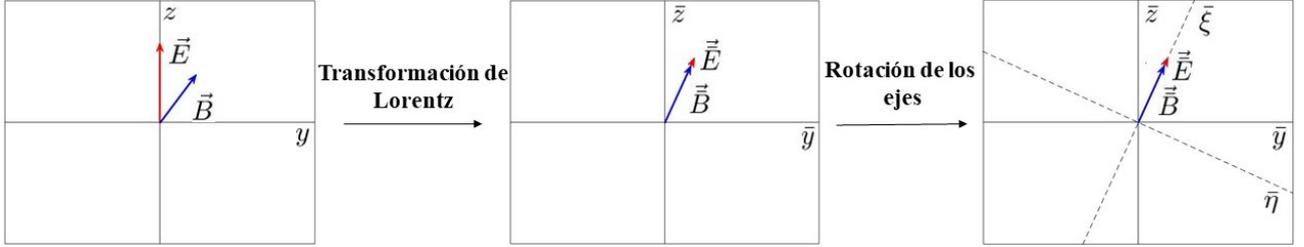


Figura 8: Esquema del procedimiento que seguiremos para resolver este problema. Al realizar una transformación de Lorentz adecuada conseguiremos unos campos paralelos, y al rotar los ejes podremos obtener un problema análogo al de la sección (2.4)

Las ecuaciones (2.6.3) y (2.6.2) forman un sistema de dos ecuaciones del cual podemos obtener los valores de  $\bar{E}$  y  $\bar{B}$ :

$$\bar{E} = \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\left(\frac{E^2}{c^2} - B^2\right)^2 + 4\frac{E^2}{c^2} B^2 \cos^2 \theta} + \left(\frac{E^2}{c^2} - B^2\right)} \quad (2.6.4)$$

$$\bar{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\left(\frac{E^2}{c^2} - B^2\right)^2 + 4\frac{E^2}{c^2} B^2 \cos^2 \theta} - \left(\frac{E^2}{c^2} - B^2\right)} \quad (2.6.5)$$

A continuación definiremos la transformación de Lorentz que tendremos que aplicar para obtener campos paralelos. El sistema de referencia al que nos moveremos tendrá una velocidad paralela al eje  $x$ , cuyo valor podemos obtener a partir de las transformaciones relativistas de los campos electromagnéticos particularizadas a nuestro caso:[2]

$$\begin{aligned} \bar{E}_y &= -v\gamma' B \cos \theta \\ \bar{E}_z &= \gamma'(E + vB \sin \theta) \\ \bar{B}_y &= \gamma'(B \sin \theta + \frac{v}{c^2} E) \\ \bar{B}_z &= \gamma' B \cos \theta \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

donde  $\gamma' = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$  denota el factor Lorentz asociado a la transformación, el cual no hay

que confundir con la derivada  $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$  asociada al movimiento de la partícula. Imponiendo que los campos tras la transformación sean paralelos obtenemos una expresión para  $v$

$$\frac{\bar{E}_z}{\bar{E}_y} = \frac{\bar{B}_z}{\bar{B}_y} \longrightarrow vB^2 = - \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right) EB \operatorname{sen} \theta - \frac{v}{c^2} E^2 \quad (2.6.7)$$

Resolviendo la ecuación anterior obtenemos el valor de  $v$ , el cual podemos escribir como

$$\frac{v}{c} = \frac{\bar{B}^2 - B^2}{\frac{E}{c} B \operatorname{sen} \theta} = \frac{\frac{\bar{E}^2}{c^2} - \frac{E^2}{c^2}}{\frac{E}{c} B \operatorname{sen} \theta} \quad (2.6.8)$$

Al hacer el cambio de sistema de referencia las condiciones iniciales también se transforman, por lo que definimos:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_0 &= \gamma' \left( \gamma_0 - \frac{vp_{0x}}{mc^2} \right) \\ \bar{p}_{0x} &= \gamma' (p_{0x} - mv\gamma_0) \\ \bar{p}_{0y} &= p_{0y} \\ \bar{p}_{0z} &= p_{0z} \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

A continuación introduciremos el cambio de variables  $(y, z) \leftrightarrow (\eta, \xi)$  dado por:

$$\begin{cases} \bar{\eta} = \cos(\varphi)\bar{y} - \operatorname{sen}(\varphi)\bar{z} \\ \bar{\xi} = \operatorname{sen}(\varphi)\bar{y} + \cos(\varphi)\bar{z} \end{cases}; \begin{cases} \bar{y} = \cos(\varphi)\bar{\eta} + \operatorname{sen}(\varphi)\bar{\xi} \\ \bar{z} = -\operatorname{sen}(\varphi)\bar{\eta} + \cos(\varphi)\bar{\xi} \end{cases} \quad (2.6.10)$$

El cual corresponde a una rotación entorno a la dirección  $x$ . El ángulo  $\varphi$  viene dado por:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \frac{\bar{E}_z}{\bar{E}} = \frac{\gamma'(E + vB \operatorname{sen} \theta)}{\bar{E}} \\ \operatorname{sen}(\varphi) &= \frac{\bar{E}_y}{\bar{E}} = -\frac{\gamma'vB \cos \theta}{\bar{E}} \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

De forma que al aplicar el cambio (2.6.10) la dirección asociada a  $\xi$  estará alineada con el campo eléctrico ( $\vec{\bar{E}} = \bar{E}\hat{\xi}$ ). Para la dirección del campo magnético existen dos posibilidades dependiendo del valor de  $\theta$ . Para el caso de  $\theta < \frac{\pi}{2}$  el campo magnético tendrá la misma dirección y sentido que el campo eléctrico ( $\vec{\bar{B}} = \bar{B}\hat{\xi}$ ), mientras que para el caso contrario con  $\theta > \frac{\pi}{2}$  el campo magnético tendrá sentido opuesto al campo eléctrico ( $\vec{\bar{B}} = -\bar{B}\hat{\xi}$ ).

El sistema de coordenadas  $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{\eta}, \bar{\xi})$  es un sistema donde tenemos campos eléctrico y magnético paralelos, por lo que podemos utilizar las soluciones obtenidas en la sección 2.4,

obteniendo

$$\bar{t}(\tau) = \frac{1}{q\bar{E}} \left\{ mc\bar{\gamma}_0 \sinh\left(\frac{q\bar{E}}{mc}\tau\right) + \bar{p}_{0\xi} \left[ \cosh\left(\frac{q\bar{E}}{mc}\tau\right) - 1 \right] \right\} \quad (2.6.12)$$

$$\bar{x}(\tau) = \frac{\bar{p}_{0x}}{q\bar{B}} \operatorname{sen}\left(\frac{q\bar{B}}{m}\tau\right) \mp \frac{p_{0\eta}}{q\bar{B}} \left[ \cos\left(\frac{q\bar{B}}{m}\tau\right) - 1 \right] \quad (2.6.13)$$

$$\bar{\eta}(\tau) = \pm \frac{\bar{p}_{0x}}{q\bar{B}} \left[ \cos\left(\frac{q\bar{B}}{m}\tau\right) - 1 \right] + \frac{\bar{p}_{0\eta}}{q\bar{B}} \operatorname{sen}\left(\frac{q\bar{B}}{m}\tau\right) \quad (2.6.14)$$

$$\bar{\xi}(\tau) = \frac{c}{q\bar{E}} \left\{ mc\bar{\gamma}_0 \left[ \cosh\left(\frac{q\bar{E}}{mc}\tau\right) - 1 \right] + \bar{p}_{0\xi} \sinh\left(\frac{q\bar{E}}{mc}\tau\right) \right\} \quad (2.6.15)$$

donde el signo superior se aplica al caso  $\theta < \frac{\pi}{2}$  y el inferior al caso  $\theta > \frac{\pi}{2}$ .

Finalmente, para obtener la solución en el sistema de referencia original solo tenemos que deshacer el cambio dado por (2.6.10) y la transformación de Lorentz. Teniendo en cuenta las definiciones que hemos hecho anteriormente, las soluciones a las que llegamos son:

$$t(\tau) = \gamma' \frac{mc\bar{\gamma}_0}{q\bar{E}} \sinh\left(\frac{q\bar{E}}{mc}\tau\right) + \gamma' \frac{(p_{0y} \operatorname{sen} \varphi + p_{0z} \cos \varphi)}{q\bar{E}} \left[ \cosh\left(\frac{q\bar{E}}{mc}\tau\right) - 1 \right] + \gamma' \frac{v}{c^2} \frac{\bar{p}_{0x}}{q\bar{B}} \operatorname{sen}\left(\frac{q\bar{B}}{m}\tau\right) \mp \gamma' \frac{v}{c^2} \frac{(p_{0y} \cos \varphi - p_{0z} \sin \varphi)}{q\bar{B}} \left[ \cos\left(\frac{q\bar{B}}{m}\tau\right) - 1 \right] \quad (2.6.16)$$

$$x(\tau) = \gamma' v \frac{mc\bar{\gamma}_0}{q\bar{E}} \sinh\left(\frac{q\bar{E}}{mc}\tau\right) + \gamma' v \frac{(p_{0y} \operatorname{sen} \varphi + p_{0z} \cos \varphi)}{q\bar{E}} \left[ \cosh\left(\frac{q\bar{E}}{mc}\tau\right) - 1 \right] + \gamma' \frac{\bar{p}_{0x}}{q\bar{B}} \operatorname{sen}\left(\frac{q\bar{B}}{m}\tau\right) \mp \gamma' \frac{(p_{0y} \cos \varphi - p_{0z} \sin \varphi)}{q\bar{B}} \left[ \cos\left(\frac{q\bar{B}}{m}\tau\right) - 1 \right] \quad (2.6.17)$$

$$y(\tau) = \operatorname{sen} \varphi \frac{mc^2\bar{\gamma}_0}{q\bar{E}} \left[ \cosh\left(\frac{q\bar{E}}{mc}\tau\right) - 1 \right] + \operatorname{sen} \varphi \frac{(p_{0y} \operatorname{sen} \varphi + p_{0z} \cos \varphi)}{q\bar{E}} \sinh\left(\frac{q\bar{E}}{mc}\tau\right) \pm \pm \cos \varphi \frac{\bar{p}_{0x}}{q\bar{B}} \left[ \cos\left(\frac{q\bar{B}}{m}\tau\right) - 1 \right] + \cos \varphi \frac{(p_{0y} \cos \varphi - p_{0z} \sin \varphi)}{q\bar{B}} \operatorname{sen}\left(\frac{q\bar{B}}{m}\tau\right) \quad (2.6.18)$$

$$z(\tau) = \cos \varphi \frac{mc^2\bar{\gamma}_0}{q\bar{E}} \left[ \cosh\left(\frac{q\bar{E}}{mc}\tau\right) - 1 \right] + \cos \varphi \frac{c(p_{0y} \cos \varphi + p_{0z} \cos \varphi)}{q\bar{E}} \sinh\left(\frac{q\bar{E}}{mc}\tau\right) \mp \mp \operatorname{sen} \varphi \frac{\bar{p}_{0x}}{q\bar{B}} \left[ \cos\left(\frac{q\bar{B}}{m}\tau\right) - 1 \right] - \operatorname{sen} \varphi \frac{(p_{0y} \cos \varphi - p_{0z} \sin \varphi)}{q\bar{B}} \operatorname{sen}\left(\frac{q\bar{B}}{m}\tau\right) \quad (2.6.19)$$

Para realizar la representación gráfica en la figura 9 introducimos las siguientes variables adimensionales

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} = \frac{qE}{mc^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} t_a \\ \tau_a \end{pmatrix} = \frac{qE}{mc} \begin{pmatrix} t \\ \tau \end{pmatrix} \quad (2.6.20)$$

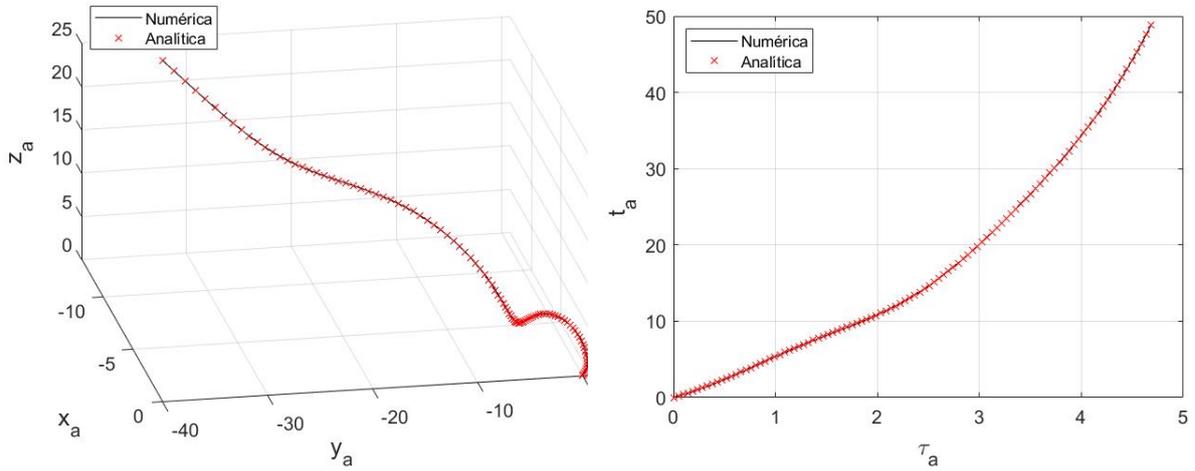


Figura 9: Comparación de la trayectoria de la partícula en campos eléctrico y magnético uniformes obtenida analíticamente y por métodos numéricos para  $\frac{\vec{p}_0}{mc} = (1, 2, 3)$ ,  $\frac{cB}{E} = 3$ ,  $\theta > \frac{\pi}{2}$ . Ambas soluciones son perfectamente coincidentes.

### 3. Movimiento en campos no uniformes y variables

#### 3.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos las trayectorias de partículas cargadas en diversas configuraciones de campos electromagnéticos de interés.

A diferencia de los problemas en campos uniformes y constantes que hemos tratado hasta ahora, la gran mayoría de problemas en campos no uniformes y variables no tienen una solución exacta que se pueda describir mediante funciones elementales. Debido a esto, es común buscar soluciones mediante métodos numéricos o realizando aproximaciones que permitan simplificar el problema original, tales como trabajar en un régimen no relativista o estudiando el movimiento en una región pequeña donde los campos sean aproximadamente constantes.

Aunque en este capítulo no tendremos muchas soluciones analíticas para comparar con soluciones numéricas, seguiremos acompañando las resoluciones con representaciones gráficas de los resultados para facilitar la comprensión.

Los enunciados de estos problemas, con algunas variaciones, están extraídos de [2][4]

#### 3.2. Onda electromagnética plana

Consideramos una partícula inicialmente en reposo en el origen sobre la que incide una onda electromagnética plana que se propaga en la dirección positiva del eje  $x$ , cuyos campos vienen dados por

$$\vec{E} = E_{0y} \cos(kx - \omega t + \phi_y) \hat{y} + E_{0z} \cos(kx - \omega t + \phi_z) \hat{z} \quad (3.2.1)$$

$$\vec{B} = -\frac{E_{0z}}{c} \cos(kx - \omega t + \phi_y) \hat{y} + \frac{E_{0y}}{c} \cos(kx - \omega t + \phi_z) \hat{z} \quad (3.2.2)$$

A partir de estos campos construimos el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver:

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = \frac{q}{mc^2} \frac{dy}{d\tau} E_{0y} \cos(kx - \omega t + \phi_y) + \frac{q}{mc^2} \frac{dz}{d\tau} E_{0z} \cos(kx - \omega t + \phi_z) \quad (3.2.3)$$

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = \frac{q}{mc} \frac{dy}{d\tau} E_{0y} \cos(kx - \omega t + \phi_y) + \frac{q}{mc} \frac{dz}{d\tau} E_{0z} \cos(kx - \omega t + \phi_z) \quad (3.2.4)$$

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} = \frac{q}{m} \frac{dt}{d\tau} E_{0y} \cos(kx - \omega t + \phi_y) - \frac{q}{mc} \frac{dx}{d\tau} E_{0y} \cos(kx - \omega t + \phi_y) \quad (3.2.5)$$

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = \frac{q}{m} \frac{dt}{d\tau} E_{0z} \cos(kx - \omega t + \phi_z) - \frac{q}{mc} \frac{dx}{d\tau} E_{0z} \cos(kx - \omega t + \phi_z) \quad (3.2.6)$$

con las condiciones iniciales:

$$c.i : \vec{x}(\tau = 0) = 0, t(\tau = 0) = 0, \vec{p}(\tau = 0) = 0, \frac{dt}{d\tau}(\tau = 0) = 1$$

En primer lugar, observamos que las ecuaciones para  $x$  y  $t$ , dadas por (3.2.3) y (3.2.4), solo difieren por un factor multiplicativo  $c$ . Esto nos permite relacionar ambas coordenadas mediante

$$c \frac{d^2 t}{d\tau^2} = \frac{d^2 x}{d\tau^2} \quad (3.2.7)$$

Integrando esta ecuación y aplicando las condiciones iniciales obtenemos

$$c \frac{dt}{d\tau} - \frac{dx}{d\tau} = c \quad (3.2.8)$$

Integrando una vez más y multiplicando la expresión por el número de onda  $k$  obtenemos

$$\omega t - kx = \omega\tau \quad (3.2.9)$$

donde hemos aplicado la relación de dispersión de la onda  $ck = \omega$ .

Utilizando estas dos últimas expresiones podemos simplificar la ecuación (3.2.5) para obtener

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} = \frac{q}{m} E_{0y} \cos(\omega\tau - \phi_y) \quad (3.2.10)$$

Integrando esta expresión obtenemos

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{q}{m\omega} E_{0y} (\text{sen}(\omega\tau - \phi_y) + \text{sen}(\phi_y)) \quad (3.2.11)$$

Mediante una segunda integración obtenemos la expresión para la coordenada  $y$ :

$$y(\tau) = -\frac{q}{m\omega^2} E_{0y} (\cos(\omega\tau - \phi_y) - \cos(\phi_y)) + \frac{q}{m\omega} E_{0y} \text{sen} \phi_y \tau \quad (3.2.12)$$

Con respecto a la coordenada  $z$  podemos ver que la expresión (3.2.5) es idéntica a la expresión (3.2.6) tras realizar el cambio  $y \rightarrow z$ . Debido a esto y a que ambas coordenadas tienen las mismas condiciones iniciales podemos obtener las expresiones correspondientes a  $z$  a partir de (3.2.11) y (3.2.12):

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{q}{m\omega} E_{0z} (\text{sen}(\omega\tau - \phi_z) + \text{sen}(\phi_z)) \quad (3.2.13)$$

$$z(\tau) = -\frac{q}{m\omega^2}E_{0z}(\cos(\omega\tau - \phi_z) - \cos(\phi_z)) + \frac{q}{m\omega}E_{0z}\sin\phi_z\tau \quad (3.2.14)$$

Para obtener la solución para la coordenada  $x$  sustituimos las expresiones dadas por (3.2.11) y (3.2.13) en la ecuación (3.2.4), llegando así a

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} = & \frac{q^2}{2m^2\omega c} (E_{0y}^2 \sin(2\omega\tau - 2\phi_y) + E_{0z}^2 \sin(2\omega\tau - 2\phi_z)) \\ & + \frac{q^2}{m^2\omega c} (E_{0y}^2 \sin(\phi_y) \cos(\omega\tau - \phi_y) + E_{0z}^2 \sin(\phi_z) \cos(\omega\tau - \phi_z)) \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

donde hemos hecho uso de la identidad trigonométrica  $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$ . Al igual que para la otras coordenadas esta ecuación puede resolverse por integración directa, obteniendo:

$$\begin{aligned} x(\tau) = & -\frac{q^2}{8m^2\omega^3 c} [E_{0y}^2 (\sin(2\omega\tau - 2\phi_y) + \sin(2\phi_y)) + E_{0z}^2 (\sin(2\omega\tau - 2\phi_z) + \sin(2\phi_z))] \\ & - \frac{q^2}{m^2\omega^3 c} [E_{0y}^2 \sin(\phi_y) (\cos(\omega\tau - \phi_y) - \cos(\phi_y)) + E_{0z}^2 \sin(\phi_z) (\cos(\omega\tau - \phi_z) - \cos(\phi_z))] \\ & + \frac{q^2\tau}{4m^2\omega^2 c} [E_{0y}^2 (1 + 2\sin^2(\phi_y)) + E_{0z}^2 (1 + 2\sin^2(\phi_z))] \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Una vez obtenida la solución para  $x$  la expresión para  $t$  sigue inmediatamente de (3.2.9). Obtenemos un resultado interesante, que los movimientos en  $y$  y  $z$  solamente están acotados si la onda no tiene ningún desfase inicial en dichas direcciones.

Para realizar la representación gráfica en la figura 10 introducimos las siguientes variables adimensionales

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} = \frac{m\omega^2}{qE_{0y}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} t_a \\ \tau_a \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} t \\ \tau \end{pmatrix} \quad (3.2.17)$$

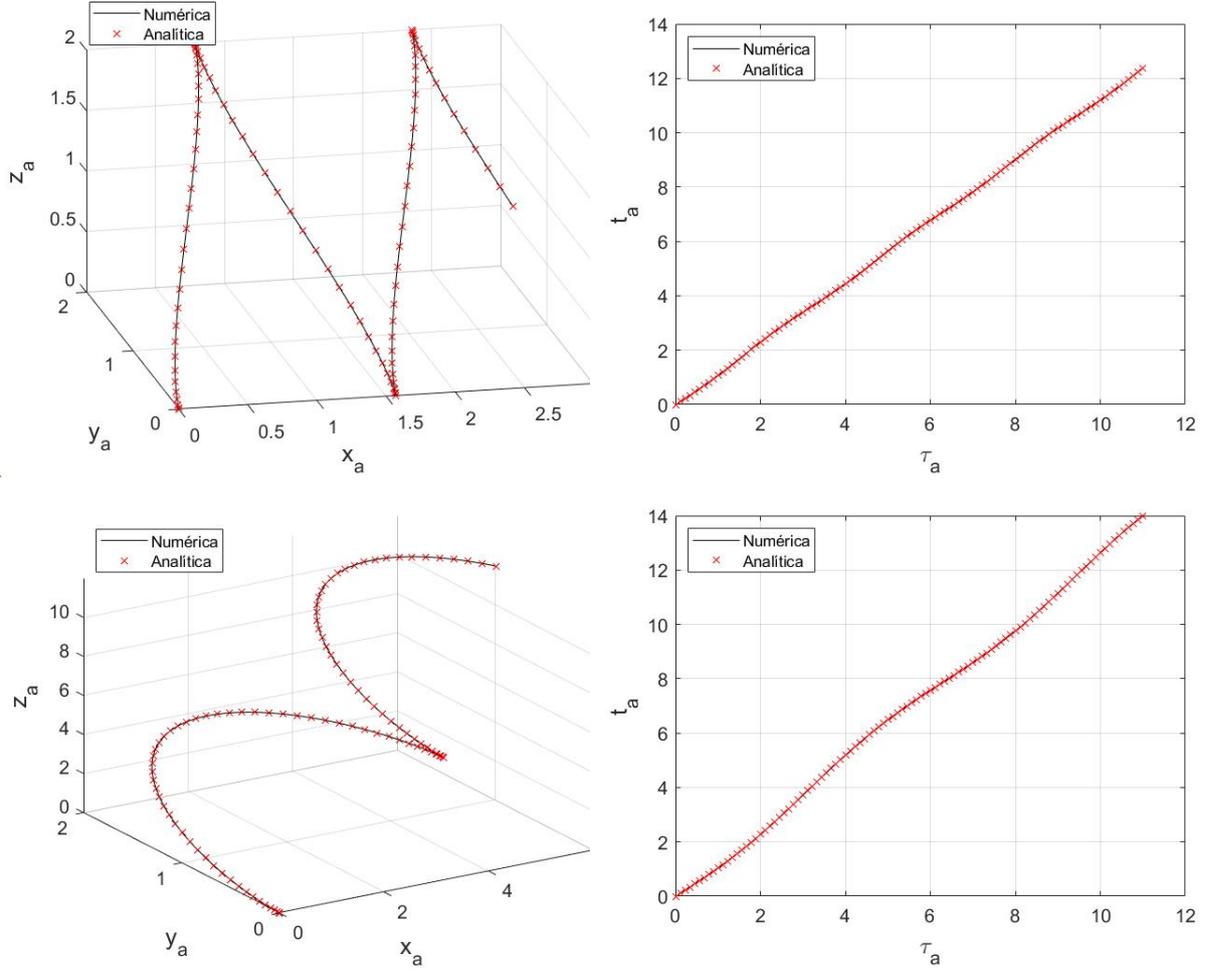


Figura 10: Parte superior: Trayectoria espaciotemporal de una partícula en una onda electromagnética plana con  $\frac{qE_{0y}}{mc\omega} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{E_{0y}}{E_{0z}} = 1$ ,  $\phi_z = \phi_y = 0$   
 Parte inferior: Trayectoria espaciotemporal de una partícula en una onda electromagnética plana polarizada circularmente con  $\frac{qE_{0y}}{mc\omega} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{E_{0y}}{E_{0z}} = 1$ ,  $\phi_y = 0$ ,  $\phi_z = \frac{\pi}{2}$ . Se aprecia que el movimiento de la partícula ya no está acotado en la dirección  $z$

### 3.3. Lente de enfoque fuerte

En este apartado estudiaremos el movimiento de partículas en un campo electrostático correspondiente a una lente cuadrupolar. Este campo tiene la capacidad de modificar la trayectoria de un haz de partículas cargadas de forma análoga a una lente óptica, por lo que su uso está extendido en áreas como la microscopía electrónica o los aceleradores de partículas. Este campo está dado por el potencial

$$\phi(x, y) = k(x^2 - y^2) \quad (3.3.1)$$

siendo  $k$  una constante que determina la intensidad del campo. Debido a que no es posible obtener una solución analítica para el caso relativista optaremos por buscar soluciones en el límite no relativista.

A partir del potencial obtenemos la expresión del campo eléctrico

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = -2kx\hat{x} + 2ky\hat{y} \quad (3.3.2)$$

Aplicando la segunda ley de Newton obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2kq}{m}x \quad (3.3.3)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2kq}{m}y \quad (3.3.4)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0 \quad (3.3.5)$$

con las condiciones iniciales:

$$c.i : \vec{x}(t=0) = x_0\hat{x} + y_0\hat{y} + z_0\hat{z}, \vec{v}(t=0) = v_{0x}\hat{x} + v_{0y}\hat{y} + v_{0z}\hat{z}$$

Vemos que en el límite no relativista obtenemos tres ecuaciones desacopladas cuya resolución es muy simple. Suponiendo  $k > 0$  obtenemos las soluciones:

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{2kq}{m}}t\right) + v_{0x} \sin\left(\sqrt{\frac{2kq}{m}}t\right) \quad (3.3.6)$$

$$y(t) = y_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{2kq}{m}}t\right) + v_{0y} \sinh\left(\sqrt{\frac{2kq}{m}}t\right) \quad (3.3.7)$$

$$z(t) = v_{0z}t + z_0 \quad (3.3.8)$$

A partir de estos resultados podemos identificar el efecto de lente que tiene este campo.

Consideremos un haz de partículas moviéndose en la dirección positiva del eje  $z$ , el cual entra en una región con el campo eléctrico que estamos considerando en el instante  $t = 0$  y lo abandona en el instante  $t = \frac{l}{v_{0z}}$ , siendo  $l$  el espesor de la lente. Centrándonos en el plano  $xz$ , las partículas al salir tienen una posición y una velocidad en la dirección  $x$  dadas por

$$x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{2kq}{m}} \frac{l}{v_{0z}}\right) \quad (3.3.9)$$

$$v_x = -x_0 \sqrt{\frac{2kq}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{2kq}{m}} \frac{l}{v_{0z}}\right) \quad (3.3.10)$$

Dado que fuera de la lente las partículas siguen un movimiento rectilíneo uniforme, el tiempo

que tardan las partículas en llegar a  $x = 0$  viene dado por

$$t = \sqrt{\frac{m}{2kq}} \cot \left( \sqrt{\frac{2kq}{m}} \frac{l}{v_{0z}} \right) \quad (3.3.11)$$

Consecuentemente, el punto  $z$  en el que convergen las partículas, de forma análoga al foco de una lente óptica, viene dado por

$$z_{xz} = v_{0z} \sqrt{\frac{m}{2kq}} \cot \left( \sqrt{\frac{2kq}{m}} \frac{l}{v_{0z}} \right) + l \quad (3.3.12)$$

Donde hemos considerado que el haz entra en la lente en  $z = 0$  sin pérdida de generalidad. Este resultado nos indica que todas las partículas del haz convergen en un mismo punto del plano  $xy$ , y además las partículas que entran en la lente a la vez convergen en el mismo instante. Por lo tanto, la analogía con una lente convergente es clara.

Cabe resaltar que para obtener este efecto es importante que la velocidad dada por (3.3.10) sea negativa, por lo que no cualquier combinación de  $l$  y  $v_{0z}$  funciona.

En el plano  $yz$  tenemos un comportamiento opuesto, provocando que el haz diverja tras atravesar la lente. De la misma forma que (3.3.12) nos da la posición del foco de la lente convergente asociada al plano  $xz$ , podemos obtener la posición del foco de la lente divergente asociada al plano  $yz$ , cuya expresión es

$$z_{yz} = -v_{0z} \sqrt{\frac{m}{2kq}} \coth \left( \sqrt{\frac{2kq}{m}} \frac{l}{v_{0z}} \right) + l \quad (3.3.13)$$

Mediante la combinación de dos lentes con distintas orientaciones es posible eliminar la componente divergente y obtener una lente equivalente convergente en ambos planos, por lo que este sistema se puede usar para concentrar haces de partículas cargadas [5].

Si las velocidades que alcanzan las partículas en el interior de la lente son cercanas a la velocidad de la luz los efectos relativistas se harán apreciables y los resultados que hemos obtenido no seguirán siendo válidos. Podemos ilustrar este efecto comparando las trayectorias que hemos obtenido para el caso clásico con las trayectorias relativistas obtenidas por resolución numérica. Representaremos cuatro trayectorias, dos de partículas cercanas al eje  $z$  y dos suficientemente lejos para que los efectos relativistas sean apreciables. Las coordenadas que

representaremos son las coordenadas adimensionales dadas por

$$\begin{pmatrix} x_a \\ z_a \end{pmatrix} = \frac{1}{v_{0z}} \sqrt{\frac{2kq}{m}} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \quad (3.3.14)$$

En la Figura 11 podemos observar esta representación, donde las partículas entran en la lente en  $z = 0$ . Podemos observar dos efectos muy claros sobre las trayectorias relativistas. El primero es el cambio en la posición del foco, pues mientras que las partículas que entran cerca del eje no sufren ningún cambio apreciable con respecto a la trayectoria clásica las partículas más alejadas, debido a que están sometidas a campos más intensos y alcanzan velocidades más elevadas, tienen un foco muy distinto, por lo que la posición de este es dependiente de la posición inicial de cada partícula. El segundo efecto es el cambio de velocidad en el eje  $z$ , pues aunque todas las trayectorias se han representado en el mismo intervalo de tiempo las trayectorias relativistas llegan a un valor de  $z$  menor.

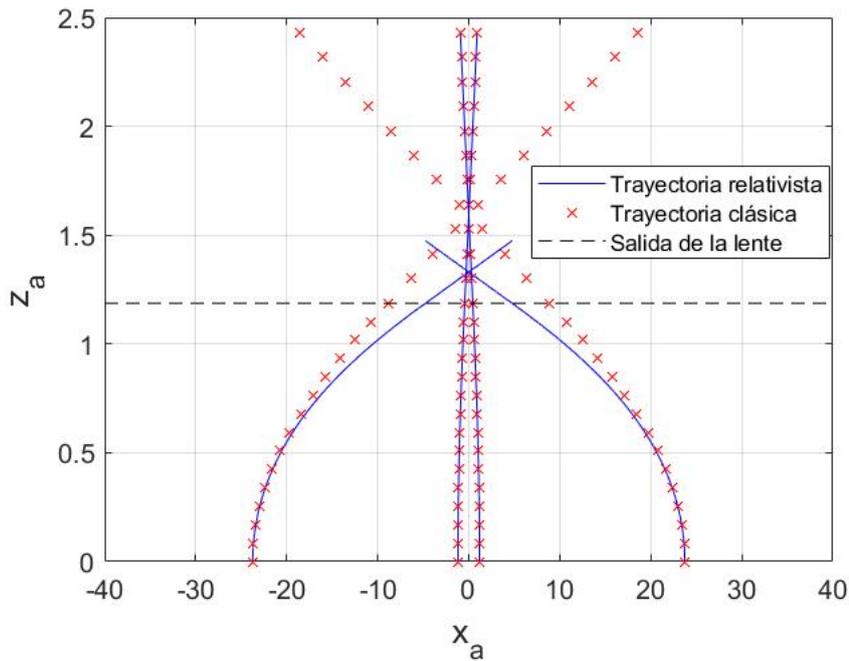


Figura 11: Trayectoria de dos pares de partículas que entran en una lente a dos distancias del eje  $z$  distintas. Se observa que sobre las partículas más exteriores hay una mayor desviación del caso clásico debido a la mayor intensidad de los campos.

### 3.4. Condensador cilíndrico

En este apartado analizaremos el efecto de un campo magnético sobre las partículas que se mueven en el interior de un condensador cilíndrico. Concretamente estudiaremos las características que tiene que tener dicho campo para evitar que las partículas cargadas procedentes del conductor interno lleguen al conductor externo.

Esta configuración puede tener aplicaciones interesantes en campos como la física de plasma y los reactores de fusión nuclear, debido a su capacidad para confinar partículas cargadas. Para esto consideraremos un condensador de longitud infinita formado por dos conductores de radios  $a$  y  $b$  a potenciales  $V(\rho = a) = 0$  y  $V(\rho = b) = V$ . Debido a la simetría del problema, propondremos un campo magnético que dependa únicamente de la coordenada radial  $\rho$ , y dado que buscamos una fuerza radial propondremos un campo con dirección paralela al eje  $z$ , de manera que el campo con el que trabajamos viene dado por  $\vec{B} = B(\rho)\hat{z}$ .

Aunque podríamos obtener las ecuaciones de movimiento de la partícula del mismo modo que en los apartados anteriores, en esta ocasión utilizaremos el formalismo Lagrangiano para obtener las ecuaciones directamente en coordenadas cilíndricas. Partimos del Lagrangiano para una partícula cargada dado por

$$L = -mc\sqrt{c^2 - \dot{\rho}^2 - \rho^2\dot{\phi}^2 - \dot{z}^2} - qV(\rho) + q\rho\dot{\phi}A_\phi(\rho) \quad (3.4.1)$$

donde los puntos sobre las coordenadas denotan derivadas respecto al tiempo del sistema laboratorio,  $V(\rho)$  denota el potencial en el condensador y  $A_\phi(\rho)$  es la componente azimutal del potencial magnético. Para este problema solo nos interesa la ecuación correspondiente a la coordenada  $\phi$ , las cual viene dada por la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( m\gamma\rho^2\dot{\phi} + q\rho A_\phi(\rho) \right) = 0 \quad (3.4.2)$$

Integrando (3.4.2) y derivando respecto a  $\rho$  obtenemos

$$\frac{d}{d\rho} \left( m\gamma\rho^2\dot{\phi} \right) = -q\rho B(\rho) \quad (3.4.3)$$

donde hemos tenido en cuenta que  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ . Si integramos ahora (3.4.3) entre  $\rho = a$  y  $\rho = b$  obtenemos

$$\left[ m\gamma\rho^2\dot{\phi} \right]_{\rho=a}^{\rho=b} = -q \int_a^b d\rho \rho B(\rho) = -q \frac{\Phi_m}{2\pi} \quad (3.4.4)$$

donde  $\Phi_m$  denota el flujo magnético a través de la corona circular entre las paredes del con-

densador. Para obtener su valor partiremos de la conservación de la energía, suponiendo que la partícula sale del conductor interior en reposo, de forma que tenemos

$$mc^2 = m\gamma(\rho = b)c^2 + qV(\rho = b) \rightarrow \gamma(\rho = b) = 1 - \frac{qV}{mc^2} \quad (3.4.5)$$

donde hemos tratado  $\gamma$  como una función de la coordenada  $\rho$ . A partir de este resultado también podemos obtener el valor de  $\phi(\rho = b)$  imponiendo que  $\dot{\rho}(\rho = b) = 0$ , de forma que tengamos un punto de retorno en la superficie del conductor externo. Con respecto al valor de  $\dot{z}(\rho)$  es fácil ver que es nulo en cualquier punto, debido a que inicialmente valía cero y no hay ninguna fuerza ejerciendo en esa dirección. Con todo esto podemos obtener

$$\gamma(\rho = b) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2 \dot{\phi}^2(\rho=b)}{c^2}}} = 1 - \frac{qV}{mc^2} \rightarrow \dot{\phi}(\rho = b) = \frac{c}{b} \frac{\sqrt{\frac{qV}{mc^2} \left( \frac{qV}{mc^2} - 2 \right)}}{1 - \frac{qV}{mc^2}} \quad (3.4.6)$$

Sustituyendo en (3.4.4) obtenemos

$$\Phi_m^L = -\frac{2\pi mcb}{q} \sqrt{\frac{qV}{mc^2} \left( \frac{qV}{mc^2} - 2 \right)} \quad (3.4.7)$$

Este resultado nos dice que cualquier campo de la forma  $\vec{B} = B(\rho)\hat{z}$  puede evitar la llegada de partículas cargadas al conductor externo siempre y cuando su flujo magnético asociado cumpla  $|\Phi_m| > |\Phi_m^L|$ , siendo este hecho independiente de la forma explícita del campo magnético aplicado.

También es posible llegar a un resultado similar considerando un campo magnético con dirección azimutal. Siguiendo un procedimiento completamente análogo obtenemos:

$$\Phi_m^L = \frac{mcH}{q} \sqrt{\frac{qV}{mc^2} \left( \frac{qV}{mc^2} - 2 \right)} \quad (3.4.8)$$

En este caso, el flujo se calcula a través de una superficie rectangular de altura  $H$  entre ambos conductores.

A modo ilustrativo, vamos a representar gráficamente las trayectorias de partículas que salen de el punto  $\vec{r}_0 = (a, 0, 0)$ , en el caso límite  $|\Phi_m| = |\Phi_m^L|$  para campos magnéticos de distintas dependencias con la coordenada radial en un condensador con  $b = 10a$  y  $\frac{qV}{mc^2} = -1$  en la figura 12.

Cabe destacar el comportamiento de la partícula en el caso de  $B \propto \frac{1}{\rho}$  con dirección  $z$ ,

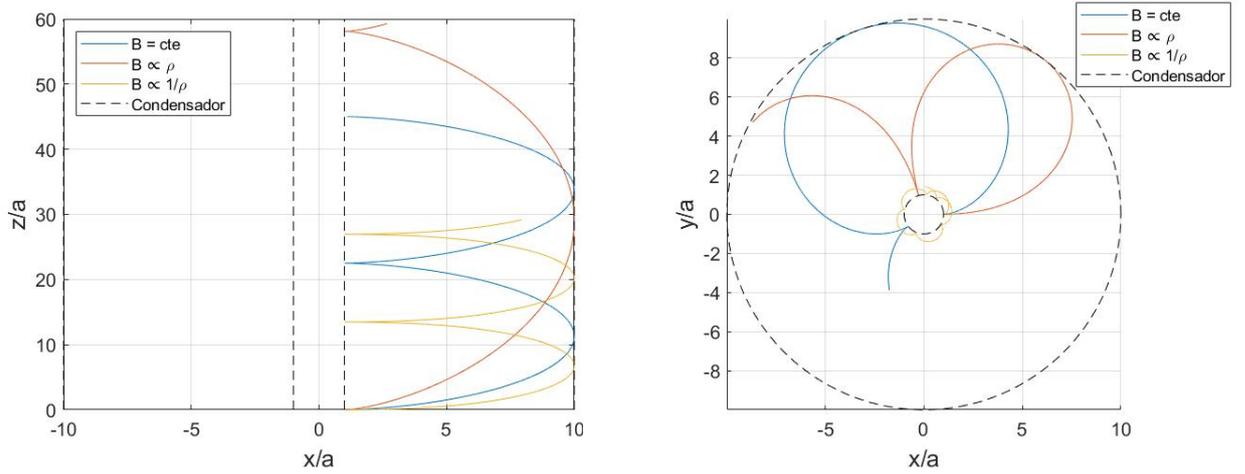


Figura 12: Representación de la trayectoria de una partícula procedente del conductor interior del condensador. En la figura izquierda tenemos tres tipos de campo magnético con dirección azimutal, cuyo flujo magnético vale  $|\Phi_m| = |\Phi_m^L|$  en todos los casos, de forma que  $\rho = b$  es un punto de retorno. En la figura derecha tenemos tres tipos de campo magnético con dirección  $z$ , cuyo flujo magnético vale  $|\Phi_m| = |\Phi_m^L|$  en todos los casos, de forma que  $\rho = b$  es un punto de retorno.

el cual parece contradecir los resultados que hemos obtenido, pues aún tratándose del caso límite la partícula retorna mucho antes de llegar al conductor exterior. Sin embargo, esto no está en desacuerdo con lo que hemos dicho, debido a que solo hemos demostrado que hay un punto de retorno en  $\rho = b$ , pero esto no significa que no pueda haber otros puntos a menor distancia del centro.

### 3.5. Campo dipolar magnético

En este apartado estudiaremos las características del movimiento de partículas en campos magnéticos no uniformes, centrándonos en el caso particular de un campo dipolar dado en coordenadas esféricas por

$$\vec{B} = \frac{M\mu_0}{4\pi r^3}(2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \quad (3.5.1)$$

Recordando los resultados de la sección 2.3, una partícula que se mueve en un campo magnético constante tendrá una trayectoria helicoidal en torno a las líneas del campo magnético. El radio y la frecuencia de la órbita pueden obtenerse a partir de (2.3.10) y (2.3.9)

$$a = \frac{p_{0\perp}}{qB} \quad (3.5.2)$$

$$\vec{\omega}_B = \frac{q\vec{B}}{\gamma mc} \quad (3.5.3)$$

Donde  $p_{0\perp}$  denota la componente perpendicular al campo del momento inicial de la partícula.

En el caso de un campo magnético que varíe en el espacio de forma suficientemente suave, este movimiento puede ser una primera aproximación de la trayectoria que podemos esperar, una trayectoria helicoidal alrededor de las líneas de campo cuyo radio y frecuencia dependerán del valor local del campo magnético. Aunque esta primera aproximación pueda predecir algunos comportamientos que veremos más adelante, no sirve para explicar otros fenómenos que aparecen en las trayectorias reales, por lo que vamos a intentar llegar a una aproximación mejor.

Como segunda aproximación podemos suponer que el centro de la órbita helicoidal también se mueve, a una velocidad menor que la velocidad orbital de la partícula. Para esto vamos a introducir el efecto que tiene la variación del módulo del campo magnético sobre la trayectoria, centrándonos en campos cuyo gradiente es perpendicular a ellos ( $\vec{\nabla}B \cdot \vec{B} = 0$ ), de forma que podemos escribir el campo de forma aproximada como [2]

$$\vec{B} \approx \vec{B}_0 + \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial \eta} \right)_0 \eta = \vec{B}_0 \left[ 1 + \frac{1}{B_0} \left( \frac{\partial B}{\partial \eta} \right)_0 \eta \right] \quad (3.5.4)$$

donde  $\eta$  denota la coordenada en la dirección del gradiente del módulo del campo. Podemos ver que la dirección de  $\vec{B}$  no cambia, por lo que solo nos tenemos que centrar en el movimiento perpendicular al campo. Para ello, supondremos que la velocidad transversal de la partícula vendrá dada por la velocidad que tendría en la aproximación de campo constante más una pequeña perturbación,  $\vec{v}_\perp = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$  con  $\vec{v}_1 \ll \vec{v}_0$ . La ecuación diferencial para la velocidad transversal puede escribirse como

$$\frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = \frac{q}{\gamma mc} \vec{v}_\perp \times \vec{B} = \vec{v}_\perp \times \vec{\omega}_B \quad (3.5.5)$$

Desarrollando y manteniendo únicamente términos de primer orden llegamos a

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} \approx \left[ \vec{v}_1 + \vec{v}_0 \eta_0 \frac{1}{B_0} \left( \frac{\partial B}{\partial \eta} \right)_0 \right] \times \vec{\omega}_0 \quad (3.5.6)$$

Podemos relacionar la velocidad  $\vec{v}_0$  con la posición en el plano perpendicular al campo, la cual denotaremos como  $\vec{r}_0$ . A partir de las soluciones obtenidas en la sección 2.3 puede verse claramente que

$$\vec{v}_0 = -\vec{\omega}_0 \times \vec{r}_0 \quad (3.5.7)$$

Sustituyendo en (3.5.6) obtenemos

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} \approx \left[ \vec{v}_1 - \vec{\omega}_0 \times \vec{r}_0 \eta_0 \frac{1}{B_0} \left( \frac{\partial B}{\partial \eta} \right)_0 \right] \times \vec{\omega}_0 \quad (3.5.8)$$

donde  $\omega_0$  denota la frecuencia de giro en la aproximación de campo constante. Para simplificar la expresión y evitar términos oscilatorios podemos buscar el valor medio de  $\vec{v}_1$ . Suponiendo que podemos despreciar  $\langle \frac{d\vec{v}_1}{dt} \rangle$  obtenemos

$$\langle \vec{v}_1 \rangle = \vec{\omega}_0 \times \langle \vec{r}_0 \eta_0 \rangle \frac{1}{B_0} \left( \frac{\partial B}{\partial \eta} \right)_0 \quad (3.5.9)$$

Como  $\vec{r}_0$  varía sinusoidalmente la única componente que no se anula de  $\langle \vec{r}_0 \eta_0 \rangle$  es la componente paralela a  $\eta$ , de forma que este valor medio vale

$$\langle \vec{r}_0 \eta_0 \rangle = \frac{a^2}{2} \hat{\eta} \quad (3.5.10)$$

De esta forma obtenemos que el centro de giro de la trayectoria se desplaza con una velocidad aproximada dada por

$$\vec{v}_G = \langle \vec{v}_1 \rangle = \frac{a^2}{2} \frac{1}{B_0} \left( \frac{\partial B}{\partial \eta} \right)_0 (\vec{\omega}_0 \times \hat{\eta}) \quad (3.5.11)$$

Aplicamos ahora este resultado al movimiento de una partícula en el plano ecuatorial de un campo dipolar. Suponiendo que el dipolo está alineado con el eje  $z$ , el campo magnético tendrá dirección  $z$  y el gradiente de su módulo tiene dirección radial, por lo que esperamos un movimiento del centro de la órbita con dirección azimutal. El campo magnético a una distancia  $r$  del dipolo vale en este caso

$$\vec{B}(r) = B(r) \hat{z} = -\frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \hat{z} \quad (3.5.12)$$

Calculamos la derivada de su módulo con respecto a la coordenada radial

$$\frac{dB(r)}{dr} = -\frac{3}{r} B(r) \quad (3.5.13)$$

Suponiendo que la partícula se encuentra inicialmente en  $r = R$  obtenemos al sustituir en (3.5.11)

$$\vec{v}_G = \frac{2a^2}{3R} \omega_0 \hat{\phi} \quad (3.5.14)$$

Por lo tanto, suponiendo que la partícula no tenía velocidad vertical inicialmente, esperamos que la trayectoria de la partícula sea aproximadamente una órbita circular de radio dado por (3.5.2), cuyo centro está en  $r = R$  y se mueve en dirección azimutal con una velocidad dada por (3.5.14), siempre y cuando se cumpla  $a \ll R$ .

Para comprobar que este resultado es una buena aproximación lo compararemos con la trayectoria que se obtiene por resolución numérica. Para hacer esta simulación nos basaremos en un caso real, el movimiento de un protón situado a 30000 km del centro de la Tierra bajo el efecto del campo magnético terrestre ( $\vec{M} = -2,5614 \cdot 10^{22} \hat{z} \text{ A m}^2$ ) [2] con un momento inicial  $\frac{\vec{p}_0}{mc} = (\frac{1}{2}, 0, 0)$

En la figura 13 podemos observar como la trayectoria se ajusta a la forma que habíamos predicho, un movimiento circular cuyo centro se desliza lentamente en dirección azimutal.

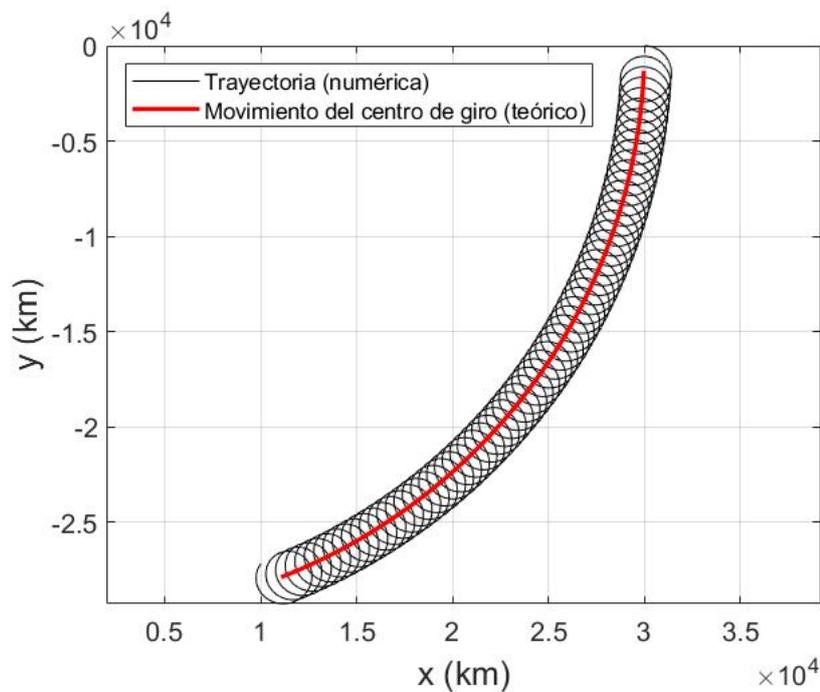


Figura 13: Representación de la trayectoria de un protón contenido en el plano ecuatorial terrestre. Se observa que el movimiento de la partícula (negro) se ajusta al que habíamos estimado (rojo).

Midiendo el periodo de la coordenada azimutal en esta simulación podemos obtener un valor para  $v_G$  de

$$\frac{v_G}{R} = 0,298 \text{ Hz} \quad (3.5.15)$$

Si comparamos con el valor dado por (3.5.14)

$$\frac{v_G}{R} = 0,294 \text{ Hz} \quad (3.5.16)$$

obtenemos una desviación del  $\sim 1\%$ , por lo que la aproximación parece válida en estas condiciones.

A continuación estudiaremos el efecto de las variaciones en el campo magnético paralelas a las líneas de campo. A diferencia del caso anterior, estas variaciones sí afectarán al movimiento paralelo al campo.

Para estudiar este efecto vamos a introducir un resultado muy útil de la mecánica hamiltoniana: la invariancia adiabática de la integral de acción [2]. La integral de acción se define como

$$J = \oint P dq \quad (3.5.17)$$

donde  $q$  es una coordenada periódica,  $P$  su momento conjugado y la integral se realiza sobre un periodo de  $q$ . Es posible demostrar [6] que  $J$  es una cantidad conservada bajo cambios adiabáticos, es decir, cambios suficientemente lentos en el sistema comparados con el periodo de  $q$ .

En nuestro caso, el movimiento perpendicular al campo es un movimiento periódico, por lo que podemos calcular el valor de  $J$  correspondiente para obtener una ley de conservación. Para hacer esto, tenemos en cuenta que el momento conjugado en este caso viene dado por [2]

$$\vec{P} = \vec{p} + q\vec{A} \quad (3.5.18)$$

la integral viene entonces dada por

$$J = \oint \vec{P}_\perp \cdot d\vec{l} = \oint \gamma m \vec{v}_\perp \cdot d\vec{l} + q \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint \gamma m \omega_B a^2 d\theta + q \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (3.5.19)$$

Aplicando el teorema de Stokes a la segunda integral y resolviendo la primera obtenemos

$$J = 2\pi\gamma m \omega_B a^2 + q \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} ds \quad (3.5.20)$$

Donde  $S$  es la superficie encerrada en un periodo de la trayectoria de la partícula y  $\vec{n}$  es el vector normal a la superficie. Es importante tener en cuenta que este vector tiene sentido opuesto al campo magnético, debido a que el circuito sobre el que se integra tiene una dirección de mano izquierda con respecto al campo magnético. Si asumimos que el campo magnético es aproximadamente constante sobre esta superficie, obtenemos

$$J = 2\pi\gamma m \omega_B a^2 - q \int_S B \pi a^2 = qB\pi a^2 \quad (3.5.21)$$

Donde hemos desarrollado el valor de  $\omega_B$  dado por (3.5.3). Este resultado nos indica que, si el campo magnético varía lentamente a lo largo de la línea de campo que orbite la partícula, el flujo del campo magnético a través de la órbita se mantendrá constante.

Podemos aplicar esta conservación para obtener un resultado un poco más general para el movimiento de una partícula en el plano ecuatorial de un dipolo. Supongamos que la partícula tiene ahora una pequeña velocidad vertical en el instante inicial, de forma que el movimiento ya no está restringido al plano ecuatorial y tendremos un movimiento a lo largo de las líneas de campo. La ecuación de las líneas de campo para un campo dipolar es

$$r = r_0 \operatorname{sen}^2(\theta) \quad (3.5.22)$$

Sustituyendo en (3.5.1) podemos obtener el valor del campo magnético a lo largo de una línea de campo dada

$$B(\theta) = \frac{\mu_0 M}{4\pi r_0^3} \frac{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}}{\operatorname{sen}^6 \theta} \quad (3.5.23)$$

Dado que la velocidad vertical de la partícula es pequeña, podemos esperar que los valores de  $\theta$  sean muy cercanos a  $\theta = \frac{\pi}{2}$  durante toda la trayectoria, por lo que podemos hacer un desarrollo de Taylor del campo en torno a este punto. Dado que un desarrollo de primer orden nos proporciona un campo constante, realizaremos el desarrollo hasta el segundo orden

$$B(\theta) = \frac{\mu_0 M}{4\pi r_0^3} \frac{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}}{\operatorname{sen}^6 \theta} \approx \frac{\mu_0 M}{4\pi r_0^3} \left[ 1 + \frac{9}{2} \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right)^2 \right] \quad (3.5.24)$$

De nuevo, suponiendo que el desplazamiento es pequeño, podemos escribir de forma aproximada

$$z \approx R \operatorname{sen} \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \approx R \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.5.25)$$

Por lo que el valor del campo en función de la coordenada  $z$  es

$$B(z) \approx \frac{\mu_0 M}{4\pi r_0^3} \left[ 1 + \frac{9}{2} z^2 \right] \quad (3.5.26)$$

En un movimiento en un campo magnético el módulo de la velocidad se conserva, por lo que podemos escribir

$$v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 = v_{\parallel 0}^2 + v_{\perp 0}^2 \quad (3.5.27)$$

Teniendo en cuenta ahora el valor de  $a$  dado por (3.5.2) y la conservación del flujo, obtene-

mos

$$v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp 0}^2 \frac{B(z)}{B(z=0)} = v_{\parallel 0}^2 + v_{\perp 0}^2 \quad (3.5.28)$$

Esta ecuación nos da una ecuación diferencial para la coordenada  $z$

$$v_{\parallel} = \frac{dz}{dt} = \sqrt{v_{\parallel 0}^2 - v_{\perp 0}^2 \frac{9z^2}{2r_0^2}} \quad (3.5.29)$$

Derivando esta ecuación con respecto al tiempo obtenemos la ecuación de un oscilador armónico

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{9}{2} \frac{v_{\perp 0}^2 \frac{z}{r_0^2} \frac{dz}{dt}}{\sqrt{v_{\parallel 0}^2 - v_{\perp 0}^2 \frac{9z^2}{2r_0^2}}} = -\frac{9}{2} \frac{v_{\perp 0}^2}{r_0^2} z \quad (3.5.30)$$

Llegamos entonces a que la partícula realiza un pequeño movimiento oscilatorio de frecuencia

$$\omega_z = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{v_{\perp 0}}{r_0} \quad (3.5.31)$$

De la misma forma que antes, podemos comprobar si este valor se ajusta a las soluciones numéricas. Realizamos el cálculo para un protón a 30000 km del centro terrestre que se mueve inicialmente con un ángulo  $\alpha = \frac{\pi}{20}$  respecto al plano ecuatorial, de forma que su momento inicial es  $\vec{p}_0 = \frac{mc}{2}(\cos \alpha, 0, \sin \alpha)$ , y lo representamos en la figura 14 . En estas condiciones, midiendo el tiempo que tarda la partícula en pasar dos veces por  $z = 0$ , obtenemos un valor de

$$\omega_z = 9,491 \text{ Hz} \quad (3.5.32)$$

Comparando con el resultado obtenido a partir de (3.5.31)

$$\omega_z = 9,370 \text{ Hz} \quad (3.5.33)$$

obtenemos, de nuevo, una discrepancia del  $\sim 1\%$ , por lo que la aproximación refleja los resultados esperados con una baja desviación para estas condiciones. Cabe recalcar que, debido a las aproximaciones que hemos hecho, este error irá aumentando conforme aumente el valor de  $\alpha$ .

También podemos obtener otro resultado muy interesante fuera de la aproximación de ángulos pequeños. A partir de la relación (3.5.28) podemos escribir

$$v_{\parallel} = \sqrt{v_{\parallel 0}^2 + v_{\perp 0}^2 \left(1 - \frac{B}{B_0}\right)} \quad (3.5.34)$$

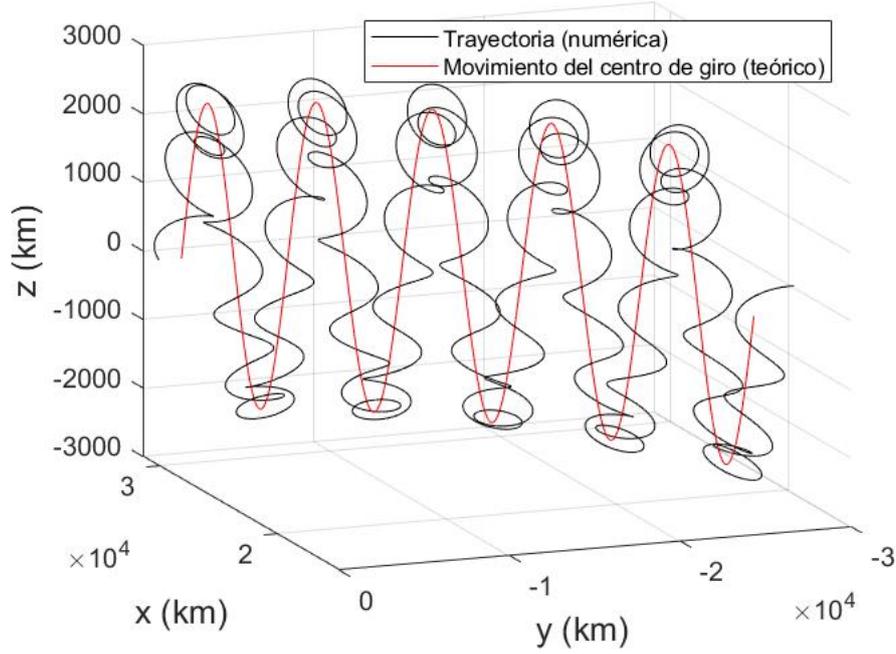


Figura 14: Representación de la trayectoria de un protón que sale del plano ecuatorial con una velocidad inicial que forma un ángulo de  $\alpha = \frac{\pi}{20}$  con respecto al plano. Se observa que el movimiento de la partícula (negro) se ajusta al que habíamos estimado (rojo).

De esta ecuación podemos ver que, si el campo magnético aumenta lo suficiente, existirá un punto de retorno en la dirección paralela al campo en el que la velocidad  $v_{\parallel}$  se anule, provocando un rebote en la trayectoria. Este punto es el que cumple la relación

$$B(\vec{r}) = B_0 \frac{v_0^2}{v_{\perp 0}^2} \quad (3.5.35)$$

Este resultado da pie al concepto de confinamiento magnético, un concepto muy importante a día de hoy debido a su aplicación en reactores de fusión nuclear. El confinamiento magnético consiste en mantener partículas cargadas en movimiento dentro de una región acotada del espacio mediante el uso de campos magnéticos.

Un ejemplo sencillo de un campo que da lugar a confinamiento magnético es el campo dipolar, el cual es el responsable de la existencia de los cinturones de Van-Allen alrededor de la Tierra. Para una partícula cargada que sale del plano ecuatorial con un ángulo  $\alpha$  a una distancia  $R$  del dipolo, obtenemos por (3.5.35)

$$B(\vec{r}) = B_0 \frac{v_0^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \rightarrow \frac{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}}{\sin^6 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (3.5.36)$$

Las soluciones de esta ecuación no lineal nos da los valores de  $\theta$  entre los cuales la partícula se quedará confinada.

En la figura 15 se ha representado la trayectoria de un protón en el plano  $xz$  bajo la acción del campo magnético terrestre, con un movimiento inicial que forma un ángulo de  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  con respecto al plano ecuatorial, siendo su momento  $\vec{p}_0 = \frac{mc}{2}(\cos \alpha, 0, \sin \alpha)$ . Podemos observar que la trayectoria calculada numéricamente corrobora el valor de la latitud máxima obtenida teóricamente

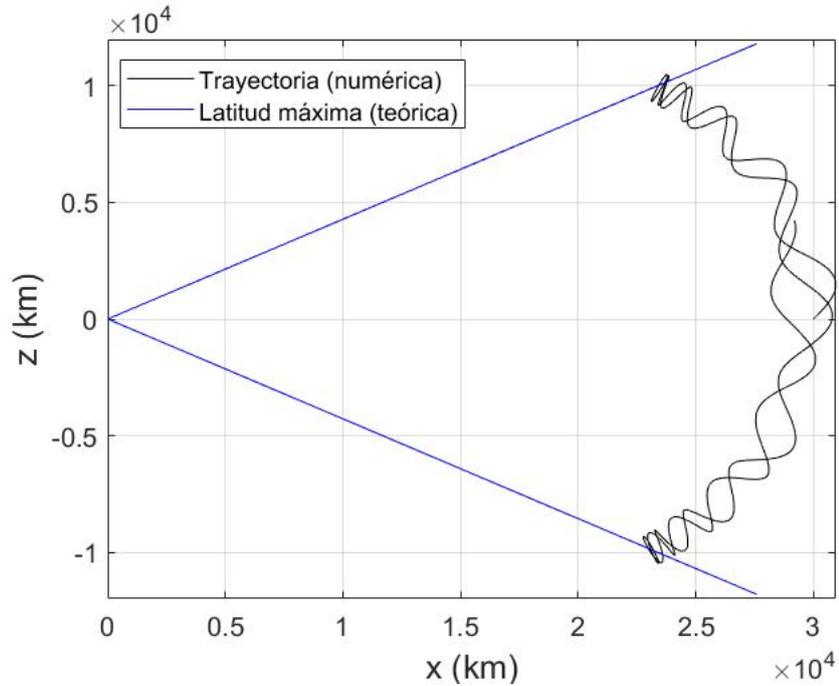


Figura 15: Representación de la trayectoria de un protón que sale del plano ecuatorial con una velocidad inicial que forma un ángulo de  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  con respecto al plano. Se observa que el movimiento de la partícula (negro) se ajusta al límite que habíamos estimado (azul).

## 4. Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo ha sido obtener las características del movimiento de partículas cargadas en campos electromagnéticos.

En primer lugar hemos analizado el movimiento en campos uniformes y constantes, obteniendo la solución exacta de sus ecuaciones de movimiento. A partir de estas hemos visto que el movimiento en campos eléctricos está asociado a funciones hiperbólicas del tiempo propio, mientras que el movimiento en campos magnéticos se puede relacionar con funciones trigonométricas.

En la segunda parte del trabajo hemos pasado a analizar el movimiento en campos no uniformes y variables, apoyándonos en los resultados obtenidos para campos constantes. Debido a que estos problemas, salvo contadas excepciones, carecen de soluciones exactas, hemos hecho uso de diversos métodos para obtener soluciones parciales o aproximadas para distintos casos.

Como conclusión, la mecánica de partículas cargadas es un problema que, pese a la gran cantidad de aplicaciones existentes en diversos ámbitos, tiene un difícil tratamiento teórico. Aún así, es posible obtener resultados parciales o aproximados que pueden tener una gran utilidad, por lo que merece la pena desarrollar métodos y técnicas que nos ayuden a predecir el comportamiento de las partículas cargadas.

## Referencias

- [1] David J. Griffiths. “Introduction to electrodynamics”. En: Cambridge University Press, 2017. Cap. 12.
- [2] John David Jackson. “Classical electrodynamics”. En: Wiley, 1999. Cap. 11, 12.
- [3] L. F. Shampine y M. W. Reichelt. “The MATLAB ODE Suite”. En: *SIAM Journal on Scientific Computing* 18.1 (1997), págs. 1-22.
- [4] Vladimir Vladimirovich Batygin, Igor’ Nikolaevich Toptygin y D. Ter Haar. “Problems in electrodynamics”. En: Academic Press, C, 1978. Cap. XI.
- [5] M. Loren Bullock. “Electrostatic Strong-Focusing Lens”. En: *American Journal of Physics* 23.5 (1955), págs. 264-268.
- [6] Herbert. Goldstein. “Mecánica Clásica”. En: Editorial Reverté, 2020. Cap. 11.