



Aplicaciones de la Ecuación de Reacción-Difusión

Universidad de Sevilla

Facultad de Física

Departamento de Análisis Matemático

Trabajo Fin de Grado

Grado en Física

Curso 2022-2023

Dirigido por :

María Anguiano Moreno

Fdo: *Mario Pérez Diego*

Sevilla, Mayo de 2023

*A mis padres
Manuel y Nieves,
mi familia y a
todos mis amigos
que me han ayudado
durante este camino
a llegar hoy aquí*

Resumen

En este documento se presenta un estudio de la ecuación de Reacción-Difusión, tanto matemáticamente cómo sus aplicaciones en física, química, biología, etc.. En la primera parte veremos la parte teórica de dicha ecuación y trabajando en los espacios de funciones y gracias al Teorema de Hille-Yosida podremos garantizar la existencia y unicidad de sus soluciones. Después, en la segunda parte veremos aplicaciones y ejemplos de esta ecuación en distintos contextos. Aparte la resolveremos para algunos casos de interés.

Abstract

In this work, we present a study of the Reaction-Diffusion equation, mathematically and its applications in physics, chemistry, biology, etc... In the first part, we will study the theoretical aspect of this equation, working in function spaces and using the Hille-Yosida theorem we will be able to ensure the existence and uniqueness of its solutions. Then, in the second part, we will explore applications and examples in different contexts. Additionally, we will solve it for some interesting cases.

Índice

1. Introducción	1
2. La ecuación de Reacción-Difusión	3
2.1. Los espacios L^p : Definición y propiedades elementales	3
2.2. Espacios de Hilbert	12
2.3. Teorema de Hille-Yosida	13
2.3.1. El caso Autoadjunto	21
2.4. Espacios de Sobolev	22
2.5. Ecuación de Reacción-Difusión: Existencia y unicidad	24
2.5.1. Ecuación del calor	24
2.5.2. Ecuación general del calor	28
3. Aplicaciones de la ecuación de reacción-difusión	30
3.1. Ejemplos de reacciones típicas	31
3.1.1. Dinámica de poblaciones	31
3.1.2. Presa-depredador	33
3.1.3. Competición	35
3.1.4. Simbiosis	38
3.1.5. Reacciones químicas	40
3.1.6. Otras aplicaciones	41
3.2. Ecuación de difusión	42
3.2.1. Ley de Flick	42
3.2.2. Solución fundamental de la ecuación de difusión homogénea	43
3.2.3. Solución general de la ecuación de difusión no homogénea	46
3.2.4. Camino aleatorio y Movimiento Browniano	48

4. Resumen y conclusiones	51
Bibliografía	52

Capítulo 1

Introducción

En la naturaleza hay muchos sistemas diferentes de reacción-difusión, algunos manejables, otros no tanto, algunos simples y otros que presentan un comportamiento muy complejo. El sistema de reacción-difusión más simple es la propia ecuación de difusión:

$$u_t = \Delta u \tag{1.1}$$

dónde $u(\mathbf{x}, t)$ puede representar muchas cosas, cómo la densidad de una población, la temperatura, etc... en cierto instante de tiempo t en un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Δ denota el operador laplaciano con respecto a las variables espaciales \mathbf{x} .

Si tenemos (1.1) en todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, con la condición inicial apropiada

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \tag{1.2}$$

Entonces podemos resolver la ecuación de reacción difusión usando métodos de transformadas de Fourier. Sin embargo, si tenemos (1.1) en un cierto subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, tendremos que imponer ciertas condiciones de contorno de u sobre $\partial\Omega$, el contorno de Ω . El estudio de las soluciones de (1.1) es bien conocido y estudiado, y existen varios métodos para ellos, cómo la transformadas de Fourier, el desarrollo en autofunciones, separación de variables, etc... que permiten expresar la solución en términos de cosas conocidas.

Sin embargo, al ver la ecuación (1.1) podemos hacernos una pregunta, si sabemos como esta distribuido u en un instante inicial de tiempo, ¿cómo evolucionará este a medida que pase el tiempo? Por estas razones es natural referirse a estos sistemas y otros parecidos como ecuaciones de **evolución**. Afortunadamente (1.1) tiene una propiedad que la mayoría de ecuaciones de evolución carecen, y es la linealidad, esto es lo que permite la resolución de la ecuación via transformadas o desarrollo en autofunciones. No obstante, nos podríamos plantear un caso más general añadiendo un término de **reacción** $f(u)$

$$u_t = \Delta u + f(u) \quad (1.3)$$

o otro incluso aún más complicado

$$u_t = \Delta u + f(x, t, u, \nabla u) \quad (1.4)$$

**¿Podemos asegurar que hay una única solución que cumple estas ecuaciones?,
¿Podemos siquiera asegurar que esta solución exista?**

Resulta coherente hacerse estas preguntas debido a que este tipo de ecuaciones aparecen continuamente en muchas ramas de la ciencia. Esta es la motivación de este trabajo. En el **Capítulo 2**, se va a estudiar la existencia y unicidad de soluciones (trabajaremos con el problema en que $f = f(\mathbf{x}, t)$ ya que los casos en que la función f depende de la propia u o del gradiente son mucho más complicados), para ello necesitaremos introducir los conceptos de espacios L^p , de Hilbert y de Sobolev.

En el **Capítulo 3** estudiaremos las aplicaciones de dicha ecuación en diferentes ámbitos, cómo son la dinámica de poblaciones, movimiento aleatorio, reacciones químicas, etc... e incluso resolveremos la ecuación para algunos casos particulares de la Ecuación de transferencia del calor.

Capítulo 2

La ecuación de Reacción-Difusión

2.1. Los espacios L^p : Definición y propiedades elementales

Los espacios L^p son los espacios vectoriales normados más importantes en el contexto de la teoría de la medida y de la integral de Lebesgue. A partir de ahora Ω designará un abierto de \mathbb{R}^N dotado de la medida de Lebesgue dx . Se definirá por $L^1(\Omega)$ al espacio de las funciones integrables sobre Ω con valores de \mathbb{R} . Se escribe:

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f(x)| dx$$

Cuando no haya confusión se denotará L^1 en vez de $L^1(\Omega)$ y $\int f$ en vez de $\int_{\Omega} f(x) dx$. Cómo es habitual en este contexto, dos funciones pertenecientes a L^1 serán iguales si coinciden c.t.p⁽¹⁾. Recordemos algunos resultados de integración extremadamente útiles que es necesario conocer

Teorema 1. (*Convergencia monótona de Beppo Levi*).- Sea (f_n) una sucesión creciente de funciones de L^1 tal que $\text{Sup}_n \int f_n < \infty$.

Entonces $f_n(x)$ converge c.t.p en Ω a un límite finito denotado por $f(x)$; además $f \in L^1$ y $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$

¹c.t.p= para casi todo punto excepto en un conjunto de medida nula

Teorema 2. (Convergencia dominada de Lebesgue).- Sea (f_n) una sucesión creciente de funciones de L^1 . Supongamos que

a) $f_n \rightarrow f(x)$ c.t.p en Ω

b) Existe una función $g \in L^1$ tal que para cada n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ c.t.p en Ω ⁽²⁾

Entonces $f \in L^1(\Omega)$ y $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$

Lema 1. (Fatou).- Sea (f_n) una sucesión de funciones de L^1 tal que

I) Para cada n , $f_n(x) \geq 0$ c.t.p en Ω

II) $\sup_n \int f_n < \infty$

Para cada $x \in \Omega$ se pone $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Entonces $f \in L^1(\Omega)$ y

$$\int f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x)$$

Definición. Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$; se define

$$L^p(\Omega) = \{f; \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ medible y } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

Esto quiere decir que:

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \tag{2.1}$$

y se usará la notación siguiente para denotar la norma:

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p} \tag{2.2}$$

Más adelante comprobaremos que efectivamente $\| \cdot \|_{L^p}$ es norma.

Definición. Se define $L^\infty(\Omega)$ cómo:

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ es medible y } \exists C \in \mathbb{R} \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ c.t.p en } \Omega\}$$

y se nota cómo:

$$\|f\|_{L^\infty} = \text{Inf}\{ C ; |f(x)| \leq C \text{ c.t.p en } \Omega\} \tag{2.3}$$

Se comprobará más adelante que efectivamente $\| \cdot \|_{L^\infty}$ también es una norma.

²Se dice que g es una mayorante integrable de las funciones f_n

Nota 1. Si $f \in L^\infty$, entonces:

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \text{ c.t.p en } \Omega$$

Notación. Sea $1 \leq p \leq \infty$; se denomina cómo q al exponente conjugado de p , i.e:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Teorema 3. (Desigualdad de Young).- Si se tiene p y q exponentes conjugados, entonces se cumple que:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad \forall a, b \geq 0 \quad (2.4)$$

Demostración. Para demostrar esta desigualdad usaremos que la función $\log(x)$ es cóncava en el intervalo $]0, \infty[$ ⁽³⁾. Una función cóncava cumple que:

$$h(cx_1 + dx_2) \geq ch(x_1) + dh(x_2) \quad \text{con } c + d = 1$$

Por lo que para $h(x) = \log(x)$, $c = 1/p$ y $d = 1/q$ se tiene que

$$\log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q = \log ab$$

Por lo que queda probada la desigualdad de Young □

Teorema 4. (Desigualdad de Hölder).- Sean $f \in L^p$ y $g \in L^q$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $f \cdot g \in L^1$ y:

$$\int |f \cdot g| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \quad (2.5)$$

Demostración. El caso $p = 1$ y $p = \infty$ es evidente. Supongamos que tenemos ahora $1 < p < \infty$. Usando la **desigualdad de Young** obtenemos:

$$|f(x)||g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega$$

³Una función es cóncava si y solo si $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Efectivamente, $\log\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\log(x)+\log(y)}{2} \rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \rightarrow x^2 + y^2 \geq 0 \Rightarrow \log(x)$ es cóncava

De donde se puede deducir que $fg \in L^1$. Esto es evidente y se puede probar fácilmente:

$$f \in L^p, g \in L^q \Rightarrow \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty, \int_{\Omega} |g(x)|^q dx < \infty$$

Luego tenemos que integrando (2.4):

$$\int |f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p} \int |f(x)|^p + \frac{1}{q} \int |g(x)|^q < \infty \Rightarrow fg \in L^1$$

Entonces tenemos que:

$$\int |fg| \leq \frac{1}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{q} \|g\|_{L^q}^q \quad (2.6)$$

Ahora definimos dos nuevas funciones $F(x)$ y $G(x)$ pertenecientes a L^p y L^q respectivamente tal que cumplen (2.6):

$$F(x) = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}} \quad G(x) = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}} \quad (2.7)$$

Por lo que se tiene según la desigualdad de Young que:

$$|F(x)G(x)| \leq \frac{1}{p} \|F(x)\|_{L^p}^p + \frac{1}{q} \|G(x)\|_{L^q}^q$$

Integramos y sustituimos por la definición (2.7) de $F(x)$ y $G(x)$:

$$\int \frac{|fg|}{\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}} \leq \frac{1}{p} \int \frac{|f|^p}{\|f\|_{L^p}^p} + \frac{1}{q} \int \frac{|g|^q}{\|g\|_{L^q}^q} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}} \int |fg| \leq \frac{1}{p} \frac{1}{\|f\|_{L^p}^p} \int |f|^p + \frac{1}{q} \frac{1}{\|g\|_{L^q}^q} \int |g|^q$$

Usando la definición de norma de los espacios L^p (2.2) y multiplicando por $\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$

se obtiene fácilmente lo que queríamos demostrar :

$$\int |fg| \leq \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

□

Nota 2. Resulta muy útil nombrar una consecuencia de la desigualdad de Hölder:

Sean $f_1, f_2, \dots, f_i, \dots, f_k$ funciones tales que

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega) \quad 1 \leq i \leq k \quad \text{con} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1$$

Entonces el producto $f = f_1 f_2 \dots f_k$ pertenece a $L^p(\Omega)$ y además

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \dots \|f_k\|_{L^{p_k}}$$

Y en el caso particular de que $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ para $1 \leq p \leq q \leq \infty$, entonces $f \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ tal que se verifica la **desigualdad de interpolación**

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^\alpha \|f\|_{L^q}^{1-\alpha} \quad \text{donde} \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

Teorema 5. L^p es un espacio vectorial para todo $1 \leq p \leq \infty$

Demostración. El caso $p = 1$ es trivial de demostrar usando la desigualdad triangular, mientras que el caso $p = \infty$ se puede ver fácilmente utilizando la nota 1.

Supongamos ahora que nos encontramos en el caso $1 < p < \infty$. Para demostrar que L^p es un espacio vectorial, basta con partir de dos funciones $f(x), g(x) \in L^p$ y probar que $\alpha f(x) + \beta g(x) \in L^p$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Para probarlo vamos a necesitar la siguiente expresión:

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^{p-1} (|f(x)|^p + |g(x)|^p) \quad (2.8)$$

Aquí se ha usado el hecho de que la función $h(x) = |x|^p$ es convexa para $p > 1$ y por lo tanto cumple que $h(ax_1 + bx_2) \leq ah(x_1) + bh(x_2)$, con $a + b = 1$. Tenemos entonces que eligiendo $a = b = \frac{1}{2}$:

$$\left| \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}g(x) \right|^p = 2^{-p} |f(x) + g(x)|^p \leq 2^{-p} (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq \frac{1}{2}h(f(x)) + \frac{1}{2}h(g(x))$$

Por lo que multiplicando toda la inecuación por 2^p y sustituyendo $h(x)$ obtenemos lo que queríamos:

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^{p-1} (|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

Ahora podemos demostrar que L^p es espacio vectorial:

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \in L^p \Leftrightarrow \int |\alpha f(x) + \beta g(x)|^p dx < \infty$$

Usando (2.8):

$$\int |\alpha f(x) + \beta g(x)|^p dx < \int 2^{p-1} (|\alpha f(x)|^p + |\beta g(x)|^p) dx$$

Por lo que obtenemos

$$\int |\alpha f(x) + \beta g(x)|^p dx \leq 2^{p-1} \left(|\alpha|^p \cdot \int |f(x)|^p dx + |\beta|^p \cdot \int |g(x)|^p dx \right)$$

Se puede ver claramente que $\alpha f(x) + \beta g(x) \in L^p$ ya que las constantes $|\alpha|$ y $|\beta|$ son siempre mayores o iguales que cero y que $f(x), g(x) \in L^p$, por lo que cumplen individualmente (2.1). Esto demuestra que efectivamente L^p es un espacio vectorial:

$$\int |\alpha f(x) + \beta g(x)|^p dx < \infty \rightarrow \alpha f(x) + \beta g(x) \in L^p \Leftrightarrow L^p \text{ es un espacio vectorial}$$

□

Teorema 6. *.-* $\| \cdot \|_{L^p}$ es una norma $\forall 1 \leq p \leq \infty$.

Demostración. Para que sea norma tienen que cumplirse tres condiciones $\forall f, g \in L^p$ y $k \in \mathbb{R}$:

1. $\|f(x)\|_{L^p} \geq 0$ si $f(x) \neq 0$ y $\|f(x)\|_{L^p} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$
2. $\|k \cdot f(x)\| = |k| \cdot \|f(x)\|$
3. $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$ (**Desigualdad de Minkowski**)

Las propiedades 1 y 2 son triviales de demostrar usando la definición de norma (2.2). Entonces lo que queda es probar la desigualdad de Minkowski: Los casos $p = 1$ y $p = \infty$ son evidentes. Vamos a centrarnos en el caso $1 < p < \infty$:

$$\|f + g\|_{L^p}^p = \int |f + g|^{p-1} |f + g| \leq \int |f + g|^{p-1} |f| + \int |f + g|^{p-1} |g|$$

Podemos ver que $|f + g|^{p-1} \in L^q$.

$$|f + g|^{p-1} \in L^q \Rightarrow \int |f + g|^{q(p-1)} = \int |f + g|^p < \infty$$

Esto es claro usando la definición de los exponentes conjugados ($q(1 - p) = p$):

$$f + g \in L^p \Rightarrow |f + g|^{p-1} \in L^q$$

Tenemos, por tanto, que se cumple la desigualdad de Hölder en los términos de la derecha:

$$\int |f + g|^{p-1} |f| \leq \|f\|_{L^p} \cdot \| |f + g|^{p-1} \|_{L^q} = \|f\|_{L^p} \cdot \|f + g\|_{L^p}^{p-1}$$

$$\int |f + g|^{p-1} |g| \leq \|g\|_{L^p} \cdot \| |f + g|^{p-1} \|_{L^q} = \|g\|_{L^p} \cdot \|f + g\|_{L^p}^{p-1}$$

Si sumamos ambas desigualdades:

$$\|f + g\|_{L^p}^p \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|f + g\|_{L^p}^{p-1} + \|g\|_{L^p} \cdot \|f + g\|_{L^p}^{p-1}$$

Dividiendo por $\|f + g\|_{L^p}^{p-1}$ la inecuación obtenemos la desigualdad de Minkowski

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \quad (2.9)$$

y por tanto tenemos probada que $\| \cdot \|_{L^p}$ es efectivamente una norma. □

Teorema 7. L^p es un espacio de Banach ⁽⁴⁾ para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Demostración.

1) Supongamos primero que $p = \infty$. Sea f_n una sucesión de Cauchy en L^∞ . Dado un entero $k \geq 1$ existe un N_k tal que

$$\|f_m - f_n\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{k} \quad \forall m, n \geq N_k$$

Y existe E_k de medida cero tal que usando la definición de $\| \cdot \|_{L^\infty}$ en (2.3)

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \setminus E_k \quad \forall m, n \geq N_k \quad (2.10)$$

Escribiendo $E = \bigcup_k E_k$ (E es de medida cero), se observa que, $\forall x \in \Omega \setminus E$, la sucesión $f_n(x)$ es de Cauchy en \mathbb{R} . Al pasar al límite en (2.1) cuando $m \rightarrow \infty$ se obtiene

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \setminus E_k \quad \forall n \geq N_k$$

Así $f \in L^\infty$ y $\|f - f_n\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{k} \quad \forall n \geq N_k$. Por tanto $\|f - f_n\|_{L^\infty} \rightarrow 0$.

⁴Un espacio de Banach es un espacio vectorial V , normado y completo sobre \mathbb{R} o \mathbb{C} con una norma $\| \cdot \|$ tal que toda sucesión de Cauchy tiene un límite en V .

2) Supongamos ahora que $1 \leq p < \infty$. Sea f_n una sucesión de Cauchy en L^p . Para la demostración es suficiente con probar que existe una subsucesión es convergente en L^p , porque una sucesión de Cauchy que tiene una subsucesión convergente es siempre convergente

Se extrae una subsucesión (f_{n_k}) tal que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1$$

[Para tener esto, elegimos n_1 tal que $\|f_m - f_n\|_{L^p} \leq \frac{1}{2} \quad \forall m, n \geq n_1$, luego elegimos $n_2 \geq n_1$ tal que $\|f_m - f_n\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^2} \quad \forall n \geq n_2$, etc...]. Demostraremos que f_{n_k} converge en L^p . Para una mayor simplificación de la notación escribiremos f_k en lugar de f_{n_k} , de forma que se tiene

$$\|f_{k+1} - f_k\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1 \quad (2.11)$$

Definimos

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_{k+1} - f_k| \quad (2.12)$$

Haciendo un pequeño cálculo usando la Desigualdad de Minkowski

$$\|g_n(x)\|_{L^p} = \left\| \sum_{k=1}^n |f_{k+1} - f_k| \right\|_{L^p} \leq \sum_{k=1}^n \|f_{k+1} - f_k\|_{L^p} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$$

Usando un resultado conocido de series geométricas ⁽⁵⁾, obtenemos que

$$\|g_n(x)\|_{L^p} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1/2(1 - 1/2^n)}{1 - 1/2} = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leq 1$$

Por lo que

$$\|g_n(x)\|_{L^p} \leq 1$$

Esto implica que la función $g(x)$ definida por $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$ pertenece a L^p . Para ver esto, se observa que $|g_n|^p \leq |g_{n+1}|^p$, luego g_n es decreciente en L^p . Además, tenemos el límite puntual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |g_n(x)|^p = \left| \sum_{k=1}^n |f_{k+1} - f_k| \right|^p = |g(x)|^p$$

por lo cual, las condiciones del teorema de la convergencia monótona de Lebesgue son satisfechas (es decir, g_n es creciente en L^p y $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$).

⁵La suma enésima de una serie geométrica de razón r es $\sum_{k=1}^n r^k = \frac{r(1 - r^n)}{1 - r}$ si $|r| < 1$

Además ⁽⁶⁾

$$\int_{\Omega} |g|^p dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |g_n|^p dx < 1 \Rightarrow g \in L^p(\Omega) \tag{2.13}$$

Por otro lado, para $n, m \geq 2$ tenemos

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + |f_{m-1}(x) - f_{m-2}(x)| + \dots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x)$$

con $g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$.

Cómo $f_n(x)$ es de Cauchy, converge a un límite finito llamado $f(x)$. Entonces, pasando al límite en la anterior desigualdad:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n \geq 2$$

dónde $g(x)$ es un sumatorio con ∞ términos positivos. Por tanto

$$f(x) \leq g(x) + f_n(x) \Rightarrow f \in L^p$$

donde se ha demostrado que $g(x) \in L^p$ anteriormente y $f_n(x) \in L^p$ por hipótesis.

Finalmente aplicamos el Teorema de la convergencia dominada (T.C.D) de Lebesgue

$$\left. \begin{array}{l} f_n \rightarrow f \text{ puntualmente} \\ |f_n - f|^p \leq g(x)^p \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{T.C.D}} \|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$$

donde $g(x)^p \in L^p(\Omega)$ ya que $\int_{\Omega} g^p dx < +\infty$ pues $g \in L^p$.

□

Teorema 8. Sean (f_n) una sucesión en L^p y $f \in L^p$, tales que $\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$. Entonces existe una subsucesión (f_{n_k}) tal que

(a) $f_{n_k} \rightarrow f(X)$ c.t.p en Ω

(b) $|f_{n_k}| \leq h(x) \forall k$ y c.t.p en Ω , con $h \in L^p$

⁶Aquí se ha usado que $\|g_n\|_{L^p} \leq 1 \Rightarrow \|g_n\|_{L^p}^p = \int_{\Omega} |g_n|^p dx \leq 1$

Demostración. El resultado es evidente para $p = \infty$. Supongamos entonces el caso $1 \leq p \leq \infty$. Como la sucesión (f_n) es de Cauchy, se puede repetir la demostración del Teorema 7 y extraer una subsucesión (f_{n_k}) verificando (2.11). Desarrollando cómo en la demostración del Teorema 7 se puede ver que f_{n_k} converge c.t.p a un límite, que designaremos por $\bar{f}(x)$ ⁽⁷⁾. Además se tiene, gracias a (2.13) que

$$|\bar{f} - f_{n_k}| \leq g(x) \quad \forall k \quad \text{c.t.p en } \Omega, \text{ con } g \in L^p \quad (2.14)$$

De dónde resulta que $\bar{f} \in L^p$ y que $f_{n_k} \rightarrow \bar{f}$ en L^p por el teorema de Lebesgue. Por consiguiente se pueden demostrar las proposiciones (a) y (b) haciendo en cada caso lo siguiente

(a) $f(x) = \bar{f}(x)$

(b) $h(x) = |\bar{f}(x)| + g(x)$

□

2.2. Espacios de Hilbert

Los espacios de Hilbert son un concepto que permiten la generalización de los métodos usados en Álgebra lineal y Cálculo para espacios euclídeos (dimension finita) a espacios que pueden llegar a ser de dimensión infinita. Normalmente los espacios de Hilbert son conocidos como espacios de funciones y se definen de la siguiente forma.

Definición. Sea H un espacio vectorial. Un **producto escalar** (u, v) es una forma bilineal de $H \times H$ en \mathbb{R} , simétrica, definida positiva, esto es que

$$(u, v) = (v, u) \quad \forall u, v \in H \quad (\text{Simetría})$$

$$(u, v) \geq 0 \quad \forall u, v \in H \quad (\text{Positividad})$$

$$(u, u) > 0 \quad \forall u \neq 0 \quad (\text{Positividad})$$

$$(u, u) \neq 0 \quad \forall u \neq 0 \quad (\text{Definida})$$

Definición. Un espacio de **Hilbert** es un espacio vectorial H dotado de un producto escalar (u, v) y que es **completo** para la norma $(u, u)^{1/2}$.

⁷A priori es necesario distinguir entre f y \bar{f} : sabemos que $f_n \rightarrow f$ en L^p y que $f_{n_k} \rightarrow \bar{f}$ c.t.p en Ω

A continuación, H designará siempre un **espacio de Hilbert**. Un ejemplo básico es $L^2(\Omega)$, que dotado del producto escalar

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \quad (2.15)$$

es efectivamente un espacio de Hilbert ⁽⁸⁾.

Recordemos que todo producto escalar cumple la **desigualdad de Cauchy-Schwarz**⁽⁹⁾:

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{1/2}(v, v)^{1/2} \quad \forall u, v \in H \quad (2.16)$$

Notemos que $|u| = (u, u)^{1/2}$ es una norma ⁽¹⁰⁾ también.

[En efecto, $|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2(u, v) \leq |u|^2 + |v|^2 + 2|u||v|$].

La demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz es sencilla habiéndolo usando la ya demostrada desigualdad de Hölder, ya que es un caso particular de esta para $p = q = 2$

$$\int |u(x) \cdot v(x)| \leq \|u(x)\|_{L^2} \|v(x)\|_{L^2} \rightarrow (u, v) \leq \left(\int |u|^2 \right)^{1/2} \left(\int |v|^2 \right)^{1/2}$$

Por lo que se demuestra sustituyendo por (2.15)

$$(u, v) = (u, u)^{1/2}(v, v)^{1/2}$$

2.3. Teorema de Hille-Yosida

Definición. Sea $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un operador lineal **no acotado**. Se dice que \mathbf{A} es **monótono**⁽¹¹⁾ si:

$$(\mathbf{A}v, v) \geq 0 \quad \forall v \in D(A)$$

y \mathbf{A} es **máximal monótono** si además $R(I + A) = H$, es decir, que:

$$\forall f \in H, \quad \exists u \in D(A) \text{ tal que } u + \mathbf{A}u = f$$

Vamos a ver ahora una serie de definiciones y propiedades que necesitaremos para la demostración del teorema de Hille-Yosida.

⁸el espacio de Sobolev H^1 en el capítulo 2.4 es un espacio de Hilbert "modelado" sobre L^2 .

⁹Para establecer la desigualdad de Cauchy-Schwarz no se ha usado la hipótesis $(u, u) > 0$ si $u \neq 0$.

¹⁰La norma asociada a un producto escalar, a menudo, se notará como $| \cdot |$ en vez de $\| \cdot \|$.

¹¹También se puede expresar cómo que \mathbf{A} es **acretivo o disipativo**.

Definiciones.-Sea A un operador maximal monótono. Se dice que $\forall \lambda > 0$

$$\mathbf{J}_\lambda = (\mathbf{I} + \lambda\mathbf{A})^{-1} \quad y \quad \mathbf{A}_\lambda = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{I} - \mathbf{J}_\lambda)$$

dónde \mathbf{J}_λ es la resolvente de \mathbf{A} y \mathbf{A}_λ es la **regularización Yosida** de \mathbf{A}

Proposición 1. *Sea A un operador monótono. Se cumplen las siguientes propiedades:*

- a) $\mathbf{A}_\lambda v = \mathbf{A}(\mathbf{J}_\lambda v) \quad \forall v \in \mathbf{H} \text{ y } \forall \lambda > 0$
- b) $\mathbf{A}_\lambda v = \mathbf{J}_\lambda(\mathbf{A}v) \quad \forall v \in \mathbf{D}(\mathbf{A}) \text{ y } \forall \lambda > 0$
- c) $|\mathbf{A}_\lambda| \leq |\mathbf{A}v| \quad \forall v \in \mathbf{D}(\mathbf{A}) \text{ y } \forall \lambda > 0$
- d) $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathbf{J}_\lambda v = v \quad \forall v \in \mathbf{H}$
- e) $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathbf{A}_\lambda v = \mathbf{A}v \quad \forall v \in \mathbf{D}(\mathbf{A})$
- f) $(\mathbf{A}_\lambda, v) \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{H} \text{ y } \forall \lambda > 0$
- g) $|\mathbf{A}_\lambda v| \leq \frac{1}{\lambda}|v| \quad \forall v \in \mathbf{H} \text{ y } \forall \lambda > 0$
- h) $|\mathbf{J}_\lambda v| \leq |v| \quad \forall v \in \mathbf{H} \text{ y } \forall \lambda > 0$

Demostración. La demostración de estas propiedades se puede encontrar en el capítulo VII del *Haïm Brézis* [1].

Teorema 9. (Hille-Yosida).-*Sea A un operador maximal monótono en un espacio de Hilbert H . Entonces $\forall u_0 \in \mathbf{D}(\mathbf{A})$ existe una única función*

$$u \in C^1([0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; D(\mathbf{A}))$$

tal que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + \mathbf{A}u = 0 & \text{en } [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 & \text{(Condición inicial)} \end{cases} \quad (2.17)$$

Y además se verifica:

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad y \quad \left| \frac{du(t)}{dt} \right| = |\mathbf{A}u(t)| \leq |\mathbf{A}u_0| \quad \forall t \geq 0$$

El interés principal del estudio del Teorema de Hille-Yosida se debe a que la resolución del problema de evolución (2.17) se reduce a comprobar que \mathbf{A} es maximal monótono, esto es, estudiar la ecuación estacionaria $\mathbf{u} + \lambda \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{f}$.

Demostración. La vamos a descomponer en 6 partes.

1°Parte: Unicidad.-

Sean u y \tilde{u} dos soluciones de (2.17). Tenemos que:

$$\frac{d}{dt}(u - \tilde{u}) = -\mathbf{A}(u - \tilde{u}) \rightarrow \left(\frac{d}{dt}(u - \tilde{u}), u - \tilde{u} \right) = -(\mathbf{A}(u - \tilde{u}), u - \tilde{u}) \leq 0$$

Usando un resultado que nos dice que podemos escribir $\frac{d}{dt}|\varphi|^2 = 2 \left(\frac{d\varphi}{dt}, \varphi \right)$ ⁽¹²⁾ tenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t) - \tilde{u}(t)|^2 = \left(\frac{d}{dt}(u(t) - \tilde{u}(t)), u(t) - \tilde{u}(t) \right)$$

por lo que

$$\frac{d}{dt} |u(t) - \tilde{u}(t)|^2 \leq 0$$

Tenemos entonces que la función $|u(t) - \tilde{u}(t)|$ es decreciente en el intervalo $[0, +\infty[$. Como tanto u como \tilde{u} son soluciones, cumplen la misma condición inicial y se tiene que $|u(0) - \tilde{u}(0)| = 0$. Tenemos entonces una función $|u(t) - \tilde{u}(t)|$ con valor inicial 0, que es decreciente y positiva en el intervalo $[0, +\infty[$, por lo que se deduce que

$$|u(t) - \tilde{u}(t)| = 0 \quad \forall t \geq 0$$

de aquí se comprueba la unicidad de las soluciones.

Para demostrar la **existencia** de u , se sustituye \mathbf{A} por su regularización Yosida \mathbf{A}_λ , se establecen diversas estimaciones **independientes de λ** y se pasa al límite cuando $\lambda \rightarrow 0$.

Sea u_λ la solución del problema

$$\begin{cases} \frac{du_\lambda}{dt} + \mathbf{A}_\lambda u_\lambda = 0 & \text{en } [0, +\infty[\\ u_\lambda(0) = u_o \in D(\mathbf{A}) \end{cases} \quad (2.18)$$

Se ve que u_λ existe gracias al teorema de Cauchy-Lipschitz-Picard ⁽¹³⁾ aplicado a un operador $F = -\mathbf{A}_\lambda$.

¹²Notar que esto solo ocurre si $\varphi \in C^1([0, +\infty[; H)$ y que, entonces, $|\varphi|^2 \in C^1([0, +\infty[; \mathbb{R})$

¹³Para la formulación y demostración completa ver el Teorema VII.3 del *H.Brézis* [1], resumidamente es un teorema que garantiza la existencia y unicidad para cierto tipo de EDO.

2° Parte.-Se cumple la estimación

$$\left| \frac{du_\lambda(t)}{dt} \right| = |A_\lambda u_\lambda(t)| \leq |A u_0| \quad \forall t \geq 0 \quad \forall \lambda \geq 0 \quad (2.19)$$

Esta desigualdad es consecuencia inmediata del

Lema 2. Sea $w \in C^1([0, +\infty[; H)$ una función que verifica

$$\frac{dw}{dt} + A_\lambda w = 0 \quad \text{en} \quad [0, +\infty[. \quad (2.20)$$

Entonces las funciones $|w(t)|$ y $\left| \frac{dw}{dt}(t) \right| = |A_\lambda w(t)|$ son decrecientes sobre $[0, +\infty[$

Demostración. Se tiene que $\left(\frac{dw}{dt}, w \right) + (A_\lambda w, w) = 0$.

Pero usando la Proposición 1f se tiene que $(A_\lambda w, w) \geq 0$ y por tanto $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w|^2 \leq 0$

Por otra parte, como A_λ es un operador lineal acotado, se deduce de (2.20) que w es C^∞ y que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dw}{dt} \right) + A_\lambda \left(\frac{dw}{dt} \right) = 0 \quad (2.21)$$

Se aplica entonces lo anterior a $\frac{dw}{dt}$.

3° Parte.- Demostraremos que para todo $t \geq 0$, $u_\lambda(t)$ converge, cuando $\lambda \rightarrow 0$, a un límite notado por $u(t)$; además esta convergencia es uniforme en t sobre cada intervalo acotado $[0, T]$.

En efecto sean $\lambda, \mu > 0$. Se tiene que

$$\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu = 0$$

y por consiguiente

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_\lambda - u_\mu|^2 + (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = 0 \quad (2.22)$$

Si desarrollamos el segundo término de (2.22) y usamos las definiciones de J_λ y A_λ y la Proposición 1 b

$$\begin{cases} (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - J_\lambda u_\lambda + J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu - u_\mu) \\ = (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) + (A(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu), J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu) \\ \geq (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) \end{cases} \quad (2.23)$$

Si usamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz (2.16) en la expresión anterior obtenemos

$$(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) \leq |A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu| \cdot |\lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu|$$

Que por la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} |A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu| \cdot |\lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu| &\leq (|A_\lambda u_\lambda| + |-A_\mu u_\mu|) (|\lambda A_\lambda u_\lambda| + |-\mu A_\mu u_\mu|) = \\ &= \lambda |A_\lambda u_\lambda|^2 + (\lambda + \mu) |A_\lambda u_\lambda| |A_\mu u_\mu| + \mu |A_\mu u_\mu|^2 \end{aligned}$$

Usando la estimación de (2.19) para λ y μ

$$\lambda |A_\lambda u_\lambda|^2 + (\lambda + \mu) |A_\lambda u_\lambda| |A_\mu u_\mu| + \mu |A_\mu u_\mu|^2 \leq 2(\lambda + \mu) |Au_o|^2$$

se obtiene que

$$(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) \leq 2(\lambda + \mu) |Au_o|^2 \quad (2.24)$$

Se tiene entonces el siguiente sistemas de ecuaciones formando por (2.22), (2.23) y (2.24)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_\lambda - u_\mu|^2 + (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = 0 \\ (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) \geq (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) \\ (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) \leq 2(\lambda + \mu) |Au_o|^2 \end{array} \right. \quad (2.25)$$

Combinándolas se puede obtener la siguiente expresión

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_\lambda - u_\mu|^2 \leq 2(\lambda + \mu) |Au_o|^2 \quad (2.26)$$

y al integrar

$$|u_\lambda(t) - u_\mu(t)|^2 \leq 4(\lambda + \mu)t |Au_o|^2$$

i.e

$$|u_\lambda(t) - u_\mu(t)| \leq 2\sqrt{(\lambda + \mu)t} |Au_o| \quad (2.27)$$

Resulta que, para cada $t \geq 0$, u_λ es de Cauchy, y por lo tanto, es convergente cuando $\lambda \rightarrow 0$ a un límite que notamos por $u(t)$. Si en (2.27) pasamos al límite cuando $\mu \rightarrow 0$ se obtiene

$$|u_\lambda(t) - u(t)| \leq 2\sqrt{\lambda t} |Au_o|$$

Consiguientemente, la convergencia es uniforme en t sobre cada intervalo acotado $[0, T]$ y $u \in C([0, +\infty[, H)$

4° Parte.- Supondremos también que $u_0 \in D(A^2)$ i.e $u_0 \in (A)$ y $Au_0 \in (A)$, por tanto $\frac{du_\lambda}{dt}(t)$ converge cuando $\lambda \rightarrow 0$ para todo $t \geq 0$ y uniformemente en t sobre cada intervalo acotado $[0, T]$.

En efecto, definamos $v_\lambda = \frac{du_\lambda}{dt}$ de forma que cumple la ecuación

$$\frac{dv_\lambda}{dt} + A_\lambda v_\lambda = 0$$

Haciendo el mismo proceso que en la 3° parte se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v_\lambda - v_\mu|^2 \leq (|A_\lambda v_\lambda| + |A_\mu u_\mu|)(|A_\lambda v_\lambda| + \mu |A_\mu u_\mu|) \quad (2.28)$$

y según el lema 2 se tiene también

$$|A_\lambda v_\lambda| \leq |A_\lambda v_\lambda(0)| = |A_\lambda A_\lambda u_0| \quad (2.29)$$

y de igual forma para μ

$$|A_\mu v_\mu| \leq |A_\mu v_\mu(0)| = |A_\mu A_\mu u_0| \quad (2.30)$$

Finalmente, cómo $Au_0 \in D(A)$ resulta

$$A_\lambda A_\lambda u_0 = J_\lambda A J_\lambda A u_0 = J_\lambda J_\lambda A A u_0 = J_\lambda^2 A^2 u_0$$

donde se han usado las propiedades **a)** y **b)** de la proposición 1.

Entonces nos queda

$$|A_\lambda A_\lambda u_0| \leq |A^2 u_0| \quad |A_\mu A_\mu u_0| \leq |A^2 u_0| \quad (2.31)$$

Combinando las ecuaciones (2.28), (2.29), (2.30) y (2.31) nos resulta

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v_\lambda - v_\mu| \leq 2(\lambda + \mu) |A^2 u_0|^2$$

Se concluye cómo en la 3° etapa, que integrando la última expresión $v_\lambda(t) = \frac{du_\lambda}{dt}(t)$ converge cuando $\lambda \rightarrow \infty$ para todo $t \geq 0$

5° Parte.- Existe una solución de (2.17) si se supone además que $u_0 \in D(A^2)$.

En efecto, por lo anterior se sabe que para todo $T < \infty$:

$$\begin{cases} u_\lambda(t) \rightarrow u(t), \text{ cuando } \lambda \rightarrow 0, \text{ uniformemente en } [0, T] \\ \frac{du_\lambda}{dt}(t) \rightarrow \frac{du}{dt}(t), \text{ cuando } \lambda \rightarrow 0, \text{ uniformemente en } [0, T] \end{cases}$$

Se reescribe (2.18) utilizando la propiedad **a)** de la proposición 1

$$\frac{du_\lambda}{dt}(t) + A(J_\lambda u_\lambda(t)) = 0 \quad (2.32)$$

Se ve que $J_\lambda u_\lambda(t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} u(t)$ pues

$$|J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)| \leq |J_\lambda u_\lambda(t) - J_\lambda u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)|$$

Usando la propiedad **h)** de la proposición 1 se obtiene que

$$|u_\lambda(t) - u(t)| \leq |u_\lambda(t) - u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)|$$

Cómo se ha demostrado en la 3° parte que $u_\lambda(t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} u(t)$ y $\lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda u(t) = u(t)$ según la propiedad **d)** tenemos que

$$|J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)| \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$$

Ahora, aplicando el hecho de que el grafo de A es cerrado, se deduce de (2.32) que $u(t) \in D(A)$, $\forall t \geq 0$ y que

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0$$

Por último, como $u \in C^1([0, +\infty[; D(A))$, la función $Au(t)$ es continua de $[0, +\infty[$ en H y entonces $u \in C([0, +\infty[; D(A))$

Por consiguiente, se ha obtenido una solución de (2.17) que cumple

$$|u(t)| \leq |u_0|$$

y

$$\left| \frac{du(t)}{dt} \right| \leq |Au_0|$$

□

Para terminar será necesario el siguiente lema

Lema 3. *Sea $\bar{u}_0 \in D(A)$. Entonces*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \bar{u}_0 \in D(A^2) \quad \text{tal que} \quad |u_0 - \bar{u}_0| < \epsilon \quad \text{y} \quad |Au_0 - A\bar{u}_0| < \epsilon$$

Dicho de otro modo, $D(A^2)$ es denso en $D(A)$ para la norma de la gráfica.

Demostración. : Sea $\bar{u}_0 = J_\lambda u_0$, de modo que $\bar{u}_0 \in D(A)$ y $\bar{u}_0 + \lambda A\bar{u}_0 = U_0$. Entonces $A\bar{u}_0 \in D(A)$, i.e $\bar{u}_0 \in D(A^2)$.

Por otra parte se sabe por la proposición 1 que

$$A\bar{u}_0 = A_\lambda u_0 = J_\lambda Au_0$$

y

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} |J_\lambda u_0 - u_0| = 0. \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} |J_\lambda Au_0 - Au_0| = 0$$

Elegimos por tanto $\lambda > 0$ suficientemente pequeño y obtenemos la conclusión del lema. □

6° Parte: Conclusión.- Sea $u_0 \in D(A)$. En virtud del lema anterior existe una sucesión $(u_{0n}) \in D(A^2)$ tal que $u_{0n} \rightarrow u_0$ y $Au_{0n} \rightarrow Au_0$. Sabemos de la parte 5° que existe una solución u_n del problema

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt} + Au_n = 0 & \text{en } [0, +\infty[\\ u_n(0) = u_{0n} \end{cases} \quad (2.33)$$

Además se verifica

$$|u_n(t) - u_m(t)| \leq |u_{0n}(t) - u_{0m}(t)| \xrightarrow{m,n \rightarrow \infty} 0$$

$$\left| \frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t) \right| \leq |Au_{0n}(t) - Au_{0m}(t)| \xrightarrow{m,n \rightarrow \infty} 0$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} u_n(t) &\rightarrow u(t) \text{ uniformemente sobre } [0, \infty[\\ \frac{du_n}{dt}(t) &\rightarrow \frac{du}{dt}(t), \text{ uniformemente sobre } [0, \infty[\end{aligned}$$

con $u \in C^1([0, +\infty[; H)$. Pasando al límite en (2.33) gracias a que A es cerrado, se ve que $u \in C^1([0, +\infty[; D(A))$ y que u verifica la ecuación (2.17). □

Nota 3. Sea u_λ la solución de (2.18) y supongamos $u_0 \in H$. Se puede demostrar (ver [2]) que cuando $\lambda \rightarrow 0$, u_λ converge, para todo $t \geq 0$, a un límite notado por $u(t)$. Pero puede darse el caso de que $u(t) \in D(A)$, $\forall t > 0$ y que $u(t)$ no sea diferenciable en ningún punto de $]0, \infty[$. Así, con mayor razón, $u(t)$ puede no ser una solución «clásica» de (2.17). De hecho, en este caso, el problema (2.17) no posee ninguna solución en el sentido clásico. No obstante, $u(t)$ se considera cómo **solución «generalizada»** de (2.17). Sin embargo, más adelante se verá que si A es **autoadjunto** entonces $u(t)$ es solución «clásica» de (2.17) para **todo** $u_0 \in H$, incluso si $u_0 \notin D(A)$.

2.3.1. El caso Autoadjunto

Sea $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un operador lineal no acotado con $\overline{D(A)} = H$. Si se hace la identificación $H' = H$ se puede considerar A^* cómo un operador no acotado en H .

Definición. Se dice que A es **simétrico** si

$$(Au, v) = (u, Av) = \quad \forall u, v \in D(A)$$

A es **autoadjunto**

$$A^* = A$$

y se sobrentiende que $D(A^*) = D(A)$.

Se puede probar que cuando A un operador **maximal monótono**, entonces

$$(A \text{ simétrico}) \Leftrightarrow (A \text{ autoadjunto})$$

Proposición 2. *Sea A un operador maximal monótono, simétrico. Entonces A es autoadjunto.*

Demostración. Ver Proposición VII.6 del H.Brézis [1]

Teorema 10. *Sea A un operador maximal monótono y autoadjunto. Entonces para todo $u_0 \in H$ ⁽¹⁴⁾ existe una única función*

$$u \in C^1([0, +\infty[; H) \cap C^1(]0, +\infty[; H) \cap C^1(]0, +\infty[; D(A))$$

¹⁴Hay que insistir en las diferencias entre el Teorema 9 y este teorema: aquí $u_0 \in H$ en lugar de $u_0 \in D(A)$. La conclusión es más débil porque $\frac{du}{dt}(t)$ puede ocasionalmente «explotar» cuando $t \rightarrow 0$

tal que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 & \text{en }]0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Y además se verifica:

$$\begin{aligned} |u(t)| \leq |u_0| \quad \text{y} \quad \left| \frac{du}{dt}(t) \right| = |Au(t)| \leq \frac{1}{t} |u_0| \quad \forall t \geq 0 \\ u \in C^k(]0, +\infty[; D(A^l)) \quad \forall k, l \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Demostración. La demostración de este teorema se puede encontrar en el Teorema VII.7 del *H.Brézis* [1] pero consiste esencialmente en repetir los pasos del Teorema de Hille-Yosida demostrado anteriormente.

2.4. Espacios de Sobolev

Un espacio de Sóbolev⁽¹⁵⁾, llamados así por el matemático ruso Serguéi Sóbolev, son un tipo de espacio vectorial funcional con norma de tipo L^p , tal que la función y sus derivadas hasta cierto orden tienen norma finita. Un espacio de Sóbolev puede ser considerado como un subespacio de L^p y su importancia viene dada por el hecho de que las soluciones débiles de algunas E.D.P⁽¹⁶⁾ importantes existen en un espacio de Sóbolev, incluso cuando no haya soluciones fuertes en los espacios de funciones continuas, con las derivadas entendidas en el sentido clásico.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto y sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$.

Definición. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ se define por ⁽¹⁷⁾

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \right\}$$

¹⁵Las derivadas se entienden en el sentido débil para asegurarse que el espacio es de Banach (completo)

¹⁶Ecuaciones en Derivadas Parciales

¹⁷Cuando no haya confusión, se escribirá $W^{1,p}$ en lugar de $W^{1,p}(\Omega)$

Y se pondrá

$$\mathbf{H}^1(\Omega) = \mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$$

Para $u \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ se nota

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad y \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \mathbf{grad} u$$

El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ está dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p} \quad (2.35)$$

o a veces de la norma equivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{1/p}$$

El espacio $H^1(\Omega)$ está dotado del producto escalar

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2} \quad (2.36)$$

Y la norma asociada

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

es equivalente a la norma de $\mathbf{W}^{1,2}$

Nota 4. Todas las demostraciones de los espacios de Sobolev, i.e, es un espacio vectorial, la norma está bien definida, etc... las podemos encontrar en los capítulos 8 y 9 del *Brezis*[1].

2.5. Ecuación de Reacción-Difusión: Existencia y unicidad

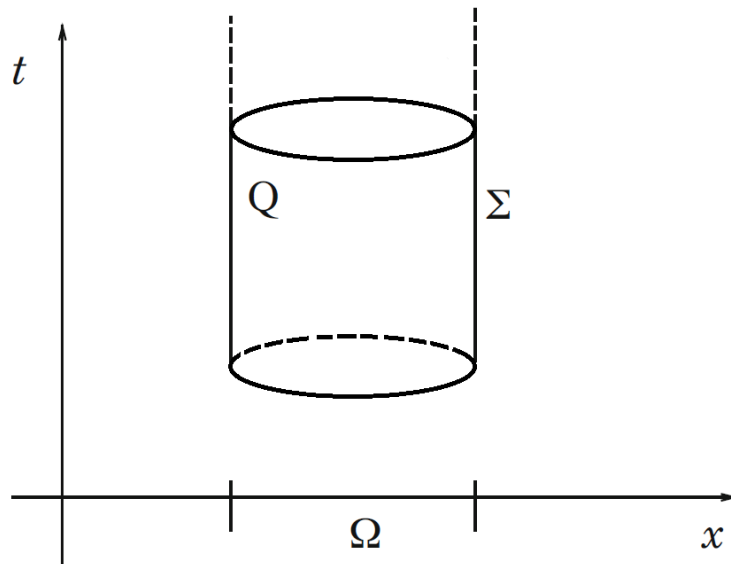
Vamos a empezar probando la existencia y unicidad de la solución de la ecuación de transmisión del calor sin fuentes ni pérdidas, que es un caso particular de la ecuación de reacción difusión en la que el coeficiente D , de difusión, es k , la constante de difusividad térmica, que consideraremos igual a 1 por simplicidad matemática, y $f = 0$. Después veremos una serie de teoremas para el caso de añadir una fuente f , que es el caso de la ecuación general del calor, o ecuación inhomogénea.

2.5.1. Ecuación del calor

Notación. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto de frontera Γ . Se nota

$$Q = \Omega \times]0, +\infty[. \quad \Sigma = \Gamma \times]0, +\infty[$$

Σ es la frontera **lateral** del cilindro Q .



Consideremos el problema siguiente. Hallar una función $u(\mathbf{x}, t) : \bar{\Omega} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad \text{en } Q \tag{2.37}$$

$$u = 0 \quad \text{sobre } \Sigma \tag{2.38}$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega \tag{2.39}$$

dónde $\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ designa el **Laplaciano respecto de las variables espaciales**, t es la **variable temporal** y $u_0(x)$ es una función dada.

La ecuación (2.37) se le denomina **ecuación del calor**, pues modela la distribución de temperatura u en el dominio Ω en un instante t . La ecuación del calor y sus variantes intervienen en numerosos **fenómenos de difusión**. La ecuación del calor es el ejemplo más sencillo de ecuación **parabólica** ⁽¹⁸⁾. La ecuación (2.38) es la **condición de contorno**

de Dirichlet, que se puede sustituir por la **condición de Neumann**

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma \quad (2.40)$$

o por la **condición de contorno tipo Robin**

$$a \frac{\partial u}{\partial n} + bu = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma \quad (2.41)$$

Dónde n es el vector unitario de la normal exterior a Σ

La condición (2.38) expresa que el borde de Γ de Ω se mantiene la temperatura 0; la condición (2.40) expresa que el flujo de calor a través de Γ es 0. La ecuación (2.39) es la **condición inicial** o dato de Cauchy.

Resolveremos el problema (2.37) (2.38) (2.39) considerando $u(x, t)$ cómo una función definida en $[0, +\infty[$ con valores en un espacio H , donde H es un espacio de funciones que sólo dependen de x ; por ejemplo $H = L^2(\Omega)$, o $H = H_0^1(\Omega)$, etc... Así pues, la notación $u(t)$ designará un elemento de H , es decir, la función $x \rightarrow u(x, t)$ con t fijo. Este planteamiento permite obtener una solución del problema (2.37) (2.38) (2.39) muy fácilmente, combinando el teorema de Hille-Yosida con los Espacios de Sobolev. Supondremos que Ω es de clase C^∞ con Γ acotada.

Teorema 11. *Supongamos que $u_0 \in L^2(\Omega)$. Entonces existe una única función que verifica (2.37) (2.38) (2.39) y*

$$u \in C([0, \infty[; L^2(\Omega)) \cap C(]0, \infty[; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad (2.42)$$

$$u \in C^1(]0, \infty[; L^2(\Omega)). \quad (2.43)$$

¹⁸La clasificación tradicional de las EDP es en tres tipos: «elípticas», «parabólicas» y «hiperbólicas»

Además

$$\mathbf{u} \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [\varepsilon, \infty[) \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (2.44)$$

Por último $u \in \mathbf{L}^2(0, \infty; \mathbf{H}_0^1(\Omega))$ y se verifica

$$\frac{1}{2} |\mathbf{u}(\mathbf{T})|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^{\mathbf{T}} |\nabla u(t)|_{L^2(\Omega)}^2 dt = \frac{1}{2} |u_0|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall \mathbf{T} > 0 \quad (19) \quad (2.45)$$

Demostración. Se aplica el teorema de Hille-Yosida en el espacio $H = L^2(\Omega)$. Para ello se introduce el operador no acotado $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ definido por

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\ Au = -\Delta u \end{cases}$$

Es importante observar que la condición de contorno (2.38) se incluye a la definición del dominio de A . Se puede comprobar que A es **maximal monótono y autoadjunto**.

Entonces podemos usar el teorema 10 y ver que existe una solución única para (2.37) (2.38) (2.39) (2.42) y (2.43).

i) A es **monótono**. En efecto, si $u \in D(A)$ se verifica

$$(Au, u)_{L^2} = \int (-\Delta u)u = \int |\nabla u|^2 \geq 0.$$

ii) A es **maximal monótono**. Basta con demostrar que $\mathbf{R}(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = \mathbf{H} = \mathbf{L}^2$. Ahora bien, para toda $f \in L^2$ existe $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}_0^1$ solución única de la ecuación $\mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}$ (20).

iii) A es **autoadjunto**. Gracias a la Proposición 2 es suficiente comprobar que A es simétrico. Si $u, v \in D(A)$ se tiene

$$\begin{aligned} (Au, v)_{L^2} &= \int (-\Delta u)v = \int \nabla u \nabla v \\ (u, Av)_{L^2} &= \int u(-\Delta v) = \int \nabla u \nabla v \end{aligned}$$

¹⁹Precisemos las notaciones

$$|u(\mathbf{T})|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u(x, \mathbf{T})|^2 dx, \quad |\nabla u(t)|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) \right|^2 dx.$$

²⁰La demostración de esto se puede ver en el Teorema IX.25 de [1].

y por tanto $(Au, v) = (u, Av)$, es decir \mathbf{A} es simétrico y por tanto autoadjunto. Hay un resultado ⁽²¹⁾ que nos dice que $D(\mathbf{A}') \subset H^2(\Omega)$ con inyección continua ⁽²²⁾; más exactamente, se tiene

$$D(\mathbf{A}') = \{u \in H^{2l}(\Omega); u = \Delta u = \dots \Delta^{l-1}u = 0 \text{ sobre } \Gamma\}$$

Por el teorema (9) tenemos que la solución u de (2.37) (2.38) (2.39) pertenece a

$$C^k(]0, +\infty[; D(\mathbf{A}^l)) \quad \forall k, \forall l$$

y entonces $u \in C^k(]0, +\infty[; H^{2l}(\Omega)) \quad \forall k, \forall l$. Resulta ⁽²³⁾ que

$$u \in C^k(]0, +\infty[; C^k(\bar{\Omega})) \quad \forall k$$

Demostremos (2.45); formalmente, podemos multiplicar (2.37) por u y se integra sobre $\Omega \times]0, T$. Pero, hay que tener cuidado, pues $u(t)$ es diferenciable en $]0, +\infty[$ pero no en $[0, +\infty[$. Consideremos una función $\varphi(t) = \frac{1}{2}|u(t)|_{L^2(\Omega)}^2$: φ es de clase C^1 en $]0, +\infty[$. Tenemos que usando (2.44) obtenemos

$$\varphi'(t) = \left(u(t), \frac{du}{dt}(t) \right)_{L^2} = (u, \Delta u)_{L^2} = - \int_{\Omega} |\nabla u|^2.$$

Por consiguiente, si $0 < \varepsilon < T < \infty$, tenemos

$$\varphi(T) - \varphi(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^T \varphi'(t) dt = - \int_{\varepsilon}^T |\nabla u(t)|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varphi(\varepsilon) \rightarrow \frac{1}{2}|u_0|_{L^2(\Omega)}^2$ y se obtiene por tanto (2.45).

Haciendo hipótesis suplementarias sobre u_0 , la función u se hace más regular en torno a $t = 0$ (recordemos que por el teorema 11 se sabe que $u \in C^\omega(\bar{\Omega}) \times]\varepsilon, \infty[\forall \varepsilon > 0$)

²¹Ver Teorema IX.25 en *H.Brezis* [1].

²²Si $X \subset Y$ con inyección continua, entonces $X \subset Y$ y además $\| \cdot \|_Y \leq \| \cdot \|_X$.

²³Gracias al Corolario IX.15 del *H.Brezis*, [1])

2.5.2. Ecuación general del calor

Hemos probado la existencia y unicidad de la ecuación del calor, ahora vamos a ver de nuevo la existencia y unicidad de sus soluciones añadiendo un término f . En el contexto de la ecuación general del calor, esto se puede ver como añadir una fuente a nuestro sistema.

Definimos

$$Q_T = \Omega \times]0, T[\quad \Sigma_T = \Gamma \times]0, T[$$

Dónde Γ es la frontera lateral del cilindro Q , parecido al visto en la figura 3.1. Consideremos el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(\mathbf{x}, t) & \text{en } Q_T \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma_T \text{ (24)} \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \text{en } \Omega \end{cases} \quad (2.46)$$

Supongamos también, que Ω es acotado de clase C^∞ .

Teorema 12. (Regularidad L^2).- Dadas $f \in L^2(Q_T)$ y $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, existe una única solución u de (2.46) tal que

$$u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

Demostración. Para la demostración ver Lions-Magenes [3] o H.Brézis-G.Tronel [2]

Con más generalidad, en los espacios L^p se tiene el

Teorema 13. (Regularidad L^p).- Dadas $f \in L^p(\Omega \times]0, T[)$ con $1 < p < \infty$ y $u_0 = 0$ ⁽²⁵⁾ existe una única solución de (2.46) tal que

$$u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\Omega \times]0, T[) \quad \forall i, j$$

²⁴Se podría haber dado una condición de contorno no homogénea, $u(x, t) = g(x, t)$ sobre $\Gamma \times]0, T[$, pero para simplificar, nos restringimos al caso en que $g = 0$.

²⁵Para una mayor simplificación

Teorema 14. (Regularidad Hölderiana).-Sea $0 < \alpha < 1$. Supongamos que $f \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times [0, T])$ ⁽²⁹⁾ y que $u_0 \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ verifican las condiciones de compatibilidad naturales

$$u_0 = 0 \quad \text{en } \Gamma \quad \text{y} \quad -\Delta u_0 = f(x, 0) \quad \text{en } \Gamma$$

Entonces (2.46) tiene solución única tal que

$$u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times [0, T]) \quad \forall i, j$$

Demostración. Las demostraciones de los teoremas 13 y 14 son complicadas (excepto el caso $p = 2$ del teorema 13). Para la demostración de L^p ver Grisvard [6] (Sección 9) y Stroock-Varadhan [7]. Para el teorema 14 ver Ladyzhenskaya-Solonnikov-Uraltseva [8].

Nota 5. En este trabajo se ha visto la existencia y unicidad para un término de reacción $f(\mathbf{x}, t)$, pero tal y cómo hemos visto en la introducción cabría plantearse un problema en que la fuente dependiera de la propia función u , sus derivadas o incluso el Laplaciano. Estas demostraciones de existencia y unicidad no son nada sencillas ni cortas y se exige que la función f cumpla ciertas propiedades para garantizar su solución única en los diferentes casos ⁽³²⁾.

³¹Es decir, $|f(x_1, t_1) - f(x_2, t_2)| \leq C(|x_1 - x_2|^2 + |t_1 - t_2|^2)^{\alpha/2} \quad \forall x_1, x_2, t_1, t_2$

³²Se puede ver el caso en que $\mathcal{F}(u, t) = F(u) + h(t)$ en [16] o incluso casos más complicados.

Capítulo 3

Aplicaciones de la ecuación de reacción-difusión

Una ecuación de reacción-difusión, cómo su propio nombre indica, la forman un término llamado de reacción y otro de difusión de la siguiente forma

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = D\Delta \mathbf{u} + f(\mathbf{u})$$

dónde $u = u(x, t)$ puede verse en algunos casos cómo la densidad/concentración de una sustancia, población... en una posición $x \in \Omega \in \mathbb{R}^n$ para un cierto tiempo t (con Ω un conjunto abierto). Δ es el denominado operador Laplaciano. Entonces, el primer término de la derecha es el que describe la llamada «**Difusión**», con D una constante llamada coeficiente de difusión. El segundo término de la derecha, f , es el término de «**Reacción**», es una función suave $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y describe procesos que realmente cambian a u , es decir, algo que le ocurre a él (nacimiento, muerte, reacción química...) y no simplemente una difusión en el espacio. Es también posible que el término no dependa únicamente de u , sino que pueda depender de ∇u o incluso tener una dependencia explícita de las coordenadas espaciales \mathbf{x} o del tiempo t . Eso es

$$\mathbf{u}_t = D\Delta \mathbf{u} + f(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}, x, t)$$

En vez de una ecuación escalar, se pueden introducir los **sistemas de ecuaciones de reacción-difusión**, que son del tipo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial t} - D\Delta \vec{\mathbf{u}} = f(\vec{\mathbf{u}}) \\ + \text{Condiciones de contorno y dato inicial} \end{array} \right.$$

Dónde $\vec{u}(x, t)$ es un vector de m componentes, \mathbf{D} es una matriz diagonal $m \times m$ y $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una aplicación no lineal. Estas ecuaciones modelan fenómenos que aparecen en campos muy variados: química, neurofisiología, biología, epidemiología, genética de poblaciones, etc...

3.1. Ejemplos de reacciones típicas

En esta parte, vamos a considerar ecuaciones de reacción típicas. Si consideramos que estamos ignorando el término de difusión, entonces las ecuaciones en derivadas parciales se transformarán en ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs)

$$\frac{du}{dt} = \dot{u} = f(u)$$

3.1.1. Dinámica de poblaciones

La ecuación de reacción-difusión tiene su aplicación en dinámica de poblaciones, ya que es usada para describir el crecimiento de estas en el espacio. Vamos a ver unos conceptos generales de dinámica de poblaciones. Generalmente, los estados estacionarios posibles, i.e $\dot{u} = 0$, y su estabilidad son de mucho interés, ya que corresponden a poblaciones que no cambian de tamaño con el tiempo.

Crecimiento exponencial

$$f(u) = au$$

con $a \in \mathbb{R}$ una constante (tasa de crecimiento) y $u(0) = u_0$ la condición inicial. Se puede resolver fácilmente la EDO obteniéndose el sistema de crecimiento exponencial o Malthusiano⁽¹⁾

$$u(t) = u_0 e^{at}$$

que se basa en la idea de Malthus de que todas las formas de vida son propensas al crecimiento exponencial, i.e la población es proporcional a la velocidad con la que esta misma crece, cuando los recursos son abundantes, pero que esta misma está limitado por los recursos disponibles.

¹En honor a Thomas Robert Malthus, pionero en el estudio de dinámica de poblaciones

Crecimiento logístico

$$f(u) = au \left(1 - \frac{u}{K}\right)$$

Es una mejora del crecimiento exponencial ya que añade una capacidad $K \in \mathbb{R}$ cómo limitador del crecimiento, por lo que este no crecerá infinitamente sino que se mantendrá constante cuando $u(t) = K$. Podemos resolver la EDO con c.i $u(0) = u_0$ obteniéndose

$$u(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{u_0} - 1\right) e^{-at} + 1} \longrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = K$$

Efecto Allee

$$f(u) = au \left(\frac{n}{K_0} - 1\right) \left(1 - \frac{u}{K}\right)$$

Este modelo parte del crecimiento logístico pero añade que cuando la población es muy baja, esta se morirá y desaparecerá. Este fenómeno aparece debido que, al ser tan baja la población, su tasa de supervivencia y/o su tasa reproductiva desciende debido a la falta de individuos y la defensa del grupo ante los depredadores y por tanto añade a la ecuación un término adicional $\left(\frac{u}{K_0} - 1\right)$. Este efecto es más estudiado en animales.

Los sistemas anteriormente mencionados han sido descritos para el crecimiento de una única población. Por tanto, si consideramos varias poblaciones que interaccionan entre sí, tendremos la dinámica de varias poblaciones, un caso de mucho interés. El prototipo de interacción de dos poblaciones se puede formular generalmente cómo un sistema de ODEs.

$$\dot{x} = f(x, y)$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

Pudiéndose extender fácilmente a sistemas de más de 2 poblaciones. Hay tres casos típicos de interacción entre dos poblaciones.

3.1.2. Presa-depredador

Vamos a ver el origen de los sistemas presa-depredador, el sistema Lotka-Volterra. El sistema de Lotka-Volterra es de un gran interés histórico, pero, sin embargo, no es un buen modelo matemático ya que no es estable estructuralmente. Este modelo se propuso gracias a Umberto D'Ancona alrededor de los 1920s, un biólogo marino, que hizo un análisis estadístico del pescado que era vendido en el mercado de Venecia. La pesca fue suspendida por la primera guerra mundial entre 1914 y 1918 y D'Ancona observó que esto coincidió con el aumento de la frecuencia relativa de algunas especies frente al descenso de otras.

El sistema se puede describir cómo un sistema de dos ODEs, siendo $N(t)$ el número o densidad de presas y $P(t)$ el de depredadores (del inglés «Predators»)

$$\dot{N} = rN - cNP \quad (3.1a)$$

$$\dot{P} = bNP - mP \quad (3.1b)$$

Vamos a explicar brevemente el significado físico de las constantes y términos:

- rN : Las presas crecerán exponencialmente en la ausencia de depredadores.
- $-cNP$: La presas disminuirán debido a la presencia de depredadores.
- bNP : Los depredadores aumentarán debido a la presencia de presas.
- $-mP$: Los depredadores disminuirán exponencialmente en la ausencia de presas.

Hacemos el siguiente cambio de variable

$$x = \frac{b}{m}N, \quad y = \frac{c}{r}P \quad (3.2)$$

Podemos reescribir las ecuaciones (3.1), quedando

$$\dot{x} = r(1 - y)x \quad (3.3a)$$

$$\dot{y} = m(x - 1)y \quad (3.3b)$$

El efecto de esta transformación es reescalar el equilibrio positivo para que ocurra siempre en $(x, y) = (1, 1)$. Podemos definir, usando las ecuaciones (3.3), el siguiente cociente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m(x - 1)y}{r(1 - y)x} \quad (3.4)$$

que determina la pendiente del campo vectorial para cada punto del plano (x, y) . En la figura 3.1 se ha representado este campo junto a las isóclinas⁽²⁾ de crecimiento nulo de las presas y los depredadores. La primera de estas se ha obtenido haciendo $\dot{y} = 0$ en la ecuación (3.3b), obteniéndose los puntos dónde el número de depredadores se mantiene constante. Para este sistema, estas isóclinas se encuentran en $x = 1$ y $y = 0$. Para las presas se obtiene $y = 1$ y $x = 0$.

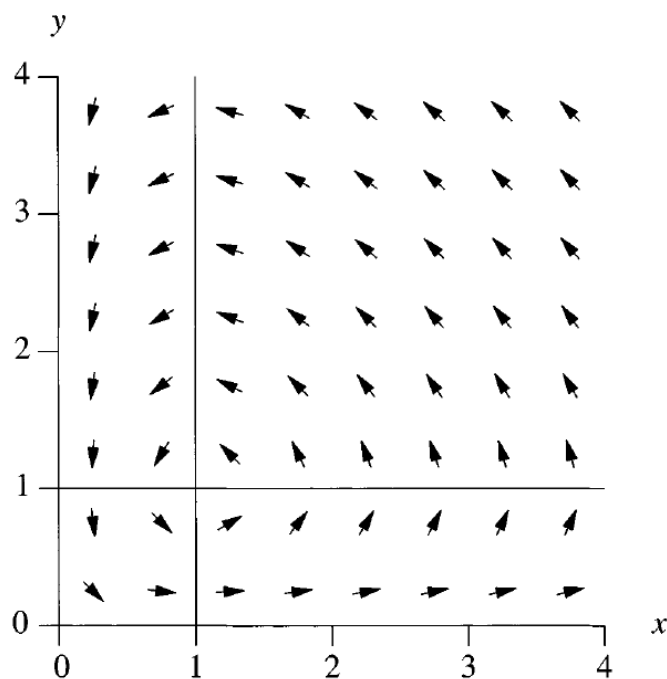


Figura 3.1: Dirección del campo vectorial del sistema presa-depredador Lotka-Volterra

Los vectores en la figura 3.1 rotan según nos movemos por el plano. Si el número de depredadores y presas son los bajos ($x < 1, y < 1$), el número de depredadores disminuye pero el número de presas aumenta. Si el número de presas es alto y el número de depredadores bajo ($x > 1, y < 1$), tanto las presas como los depredadores aumentan. Si el número de presas empieza a aumentar ($x > 1, y > 1$) esto provocará que disminuya el número de presas. Finalmente, cuando el número de presas es bajo y el número de depredadores alto ($x < 1, y > 1$), tanto las presas como los depredadores empezarán a disminuir, volviendo al inicio del ciclo, en el que había pocos depredadores y pocas presas ($x < 1, y < 1$).

²Las isóclinas de una EDO genérica $y'(x) = f(x, y)$ son aquellas curvas en las que $f(x, y) = \text{cte}$

3.1.3. Competición

En este modelo, propuesto por Lotka (1932) y Volterra (1926), se basa en una competencia de interacción, es decir, se asume que las dos especies reducen el ratio de crecimiento per cápita de la otra por interacción directa. Se empieza asumiendo que las dos especies, con poblaciones N_1 e N_2 , crecen logísticamente en la ausencia de la otra, es decir, cada población tiene su propio ratio de crecimiento r_1, r_2 y un K_1, K_2 limitador del crecimiento. Se asume también que cada individuo de la segunda especie causa un descenso en el crecimiento per cápita de la primera especie y viceversa y, cómo las dos especies son diferentes, una población tendrá un efecto mayor o menor sobre la otra. Para incluir este efecto, se añaden los coeficientes α_{12} y α_{21} , que dan efecto de la fuerza de la presencia de la especie 1 sobre la 2 y viceversa. Tenemos entonces el siguiente sistema

$$\dot{N}_1 = r_1 N_1 \left(1 - \frac{x + \alpha_{12} N_2}{K_1} \right) \tag{3.5}$$

$$\dot{N}_2 = r_2 N_2 \left(1 - \frac{y + \alpha_{21} N_1}{K_2} \right) \tag{3.6}$$

Tal y cómo hemos hecho en el sistema presa depredador, podemos calcular las isóclinas de crecimiento nulo para la población 1 y 2.

$$\text{Población 1 (} N_1 \text{): } \begin{cases} N_1 = 0 \\ N_1 = K_1 - \alpha_{12} N_2 \end{cases} \tag{3.7a}$$

$$\text{Población 2 (} N_2 \text{): } \begin{cases} N_2 = 0 \\ N_2 = K_2 - \alpha_{21} N_1 \end{cases} \tag{3.7b}$$

Por lo que tenemos en el plano $N_2 N_1$ 2 rectas diferentes

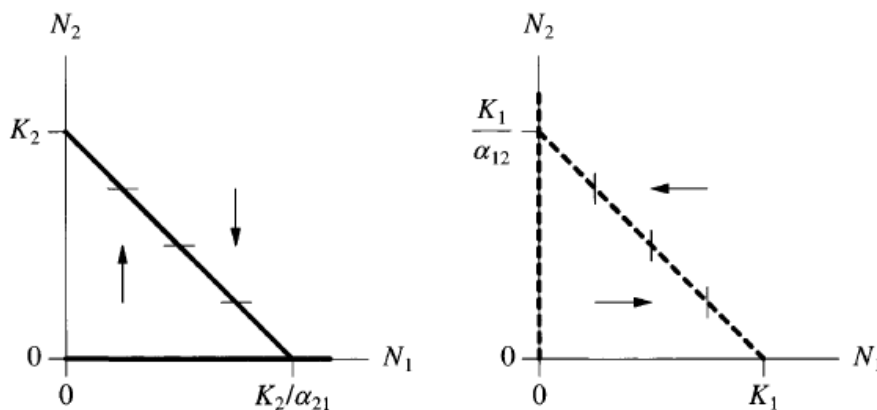


Figura 3.2: Isóclinas de crecimiento nulo para el sistema de competición

Se observa en la figura 3.2 que debajo de la recta (3.7b), y aumenta y por encima de esta línea y decrece. Por el otro lado, por encima de la recta (3.7a), x decrece y por debajo, aumenta. Queremos ver un gráfico cómo el de la figura 3.1 para el modelo de competición, pero nos encontramos con el problema de la posición relativa de las dos rectas isóclinas, que dependen de los parámetros que definen nuestro sistema, α_{12} , α_{21} , K_1 , K_2 , podemos tener que esta por debajo o por encima de la otra, mientras que también puede darse el caso en que incluso se crucen. Por tanto tenemos que distinguir entre los siguientes 4 casos.

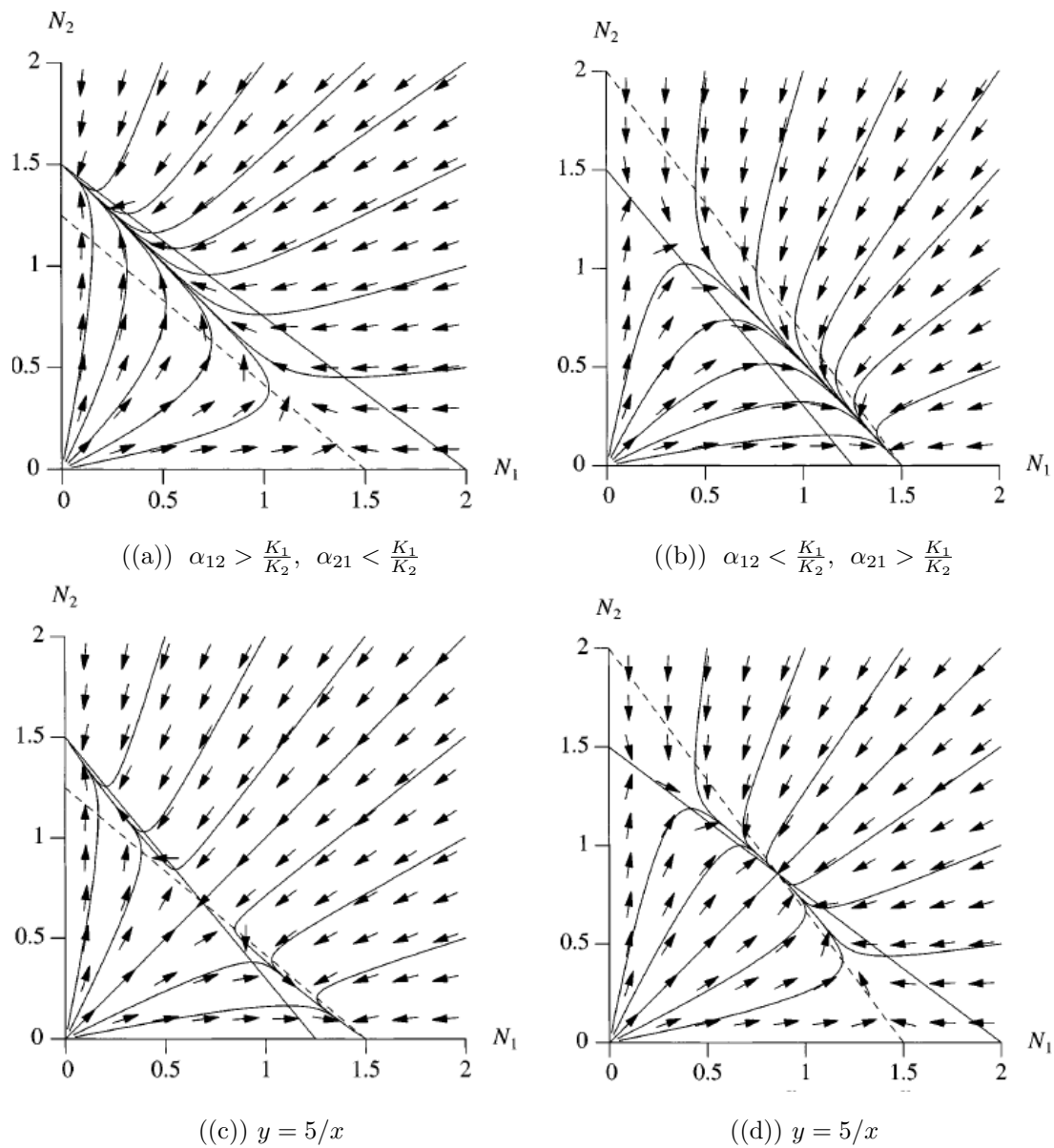


Figura 3.3: 4 casos posibles en el sistema de competición

a) $\alpha_{12} > \frac{K_1}{K_2}, \alpha_{21} < \frac{K_1}{K_2}$

Es el caso de la figura 3.3(a), que se corresponde al caso de que la recta 3.7b es mayor que 3.7a, se observa que N_2 rápidamente acaba con N_1 , por lo que si la especie 2 tiene un efecto relativamente grande sobre la 1, se espera que la especie 1 se extinga mientras que la dos llegue a su límite de capacidad.

b) $\alpha_{12} < \frac{K_1}{K_2}, \alpha_{21} > \frac{K_1}{K_2}$

Tenemos caso contrario al anterior (Figura 3.3(b)), ahora la que se extingue es la especie 2 y la que llega a su límite es la 1, en el caso de que el efecto de la 1 sobre la 2 sea grande.

c) $\alpha_{12} > \frac{K_1}{K_2}, \alpha_{21} > \frac{K_1}{K_2}$

Ahora nos encontramos en el caso de la figura 3.3(c), que es el caso en que la recta (3.7b) corta a la (3.7a) desde arriba. En este caso, los efectos competitivos son grandes para las dos especies. Los dos puntos de equilibrio, $(K_1, 0)$ y $(0, K_2)$, que corresponden a la extinción de la otra especie, son ahora nodos estables. Dependiendo de las condiciones iniciales, una de las dos especies se extinguirá. Hay un punto de silla que se encuentra entre los dos nodos, la superficie estable de este punto forma el contorno de los dos dominios de atracción.

d) $\alpha_{12} < \frac{K_1}{K_2}, \alpha_{21} < \frac{K_1}{K_2}$

Por último, tenemos el caso en que la competencia entre las especie es débil (figura 3.3(d)), los puntos de silla $(K_1, 0)$ y $(0, K_2)$ son inestables y las trayectorias tienden a un nodo estable en el interior del primer cuadrante.

Para tres de los cuatro casos que hemos descrito, una de las dos especies consigue acabar con la otra. Solo en el caso **d)**, dónde los efectos competitivos eran débiles,, las dos especies coexistían. Esto forma el *Principio de Exclusión Competitiva* (Hardin, 1960) , que decía que dos especies que son muy similares no pueden coexistir.

3.1.4. Simbiosis

En este caso, las dos especies se benefician entre sí, se puede ver cómo el caso opuesto al sistema de competición anterior. Para formar el modelo se hace lo mismo que los casos anteriores, tenemos dos poblaciones N_1 y N_2 , cuyo crecimiento es logístico en la ausencia del otro grupo. Por lo que tenemos

$$\dot{N}_1 = r_1 N_1 \left(1 - \frac{x - \alpha_{12} N_2}{K_1} \right) \tag{3.8}$$

$$\dot{N}_2 = r_2 N_2 \left(1 - \frac{y - \alpha_{21} N_1}{K_2} \right) \tag{3.9}$$

dónde los parámetros $\alpha - 12$ y $\alpha - 21$ miden el efecto positivo de una especie sobre la otra. Nosotros vamos a ver un modelo en el que $r_1, r_2 > 0$, y $K_1, K_2 > 0$, es decir un modelo en que cada grupo puede sobrevivir sin la simbiosis. Calculamos la isóclinas y se obtiene⁽³⁾

$$N_1 = K_1 + \alpha_{12} N_2 \tag{3.10}$$

$$N_2 = K_2 + \alpha_{21} N_1 \tag{3.11}$$

Las isóclinas pueden tanto converger cómo diverger. Convergeran si $\alpha_{12}\alpha_{21} < 1$ y divergeran cuando $\alpha_{12}\alpha_{21} > 1$.

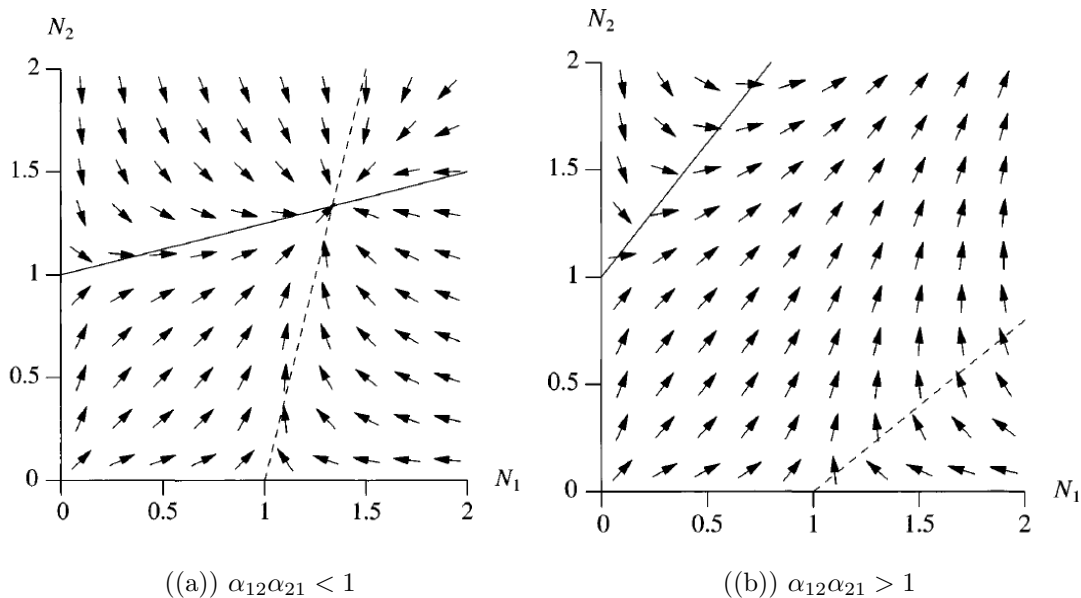


Figura 3.4: Simbiosis

³Se ha omitido las isóclinas $N_1 = 0$ y $N_2 = 0$

En el primer caso, las dos rectas se cruzan y las orbitas se dirigen a un nodo estable en el interior del primer cuadrante (ver Figura 3.4(a)). Cómo las pendientes de las dos rectas isóclinas son positivas, las coordenadas de este equilibrio son mayores que las capacidades limitadoras de crecimiento K_1 y K_2 (cada especie supera su límite gracias al mutualismo). Sin embargo, si nos encontramos en el segundo caso (ver Figura 3.4(b)), en el que $\alpha_{12}\alpha_{21} > 1$, ahora las rectas no se cortan y no hay un punto de equilibrio en el primer cuadrante, las poblaciones experimentan un crecimiento ilimitado, esto es un efecto irreal debido a la simplicidad del modelo, habría que agregar un término de saturación.

También se puede estudiar un sistema de **simbiosis obligado**, esto significa que las dos especies no pueden sobrevivir por sí mismas y se necesitan una a la otra para salvarse. Esto es si $r_1, r_2 < 0$, y $K_1, K_2 < 0$. Otra vez nos encontraríamos con los dos casos en los que diverge y no diverge, obteniéndose

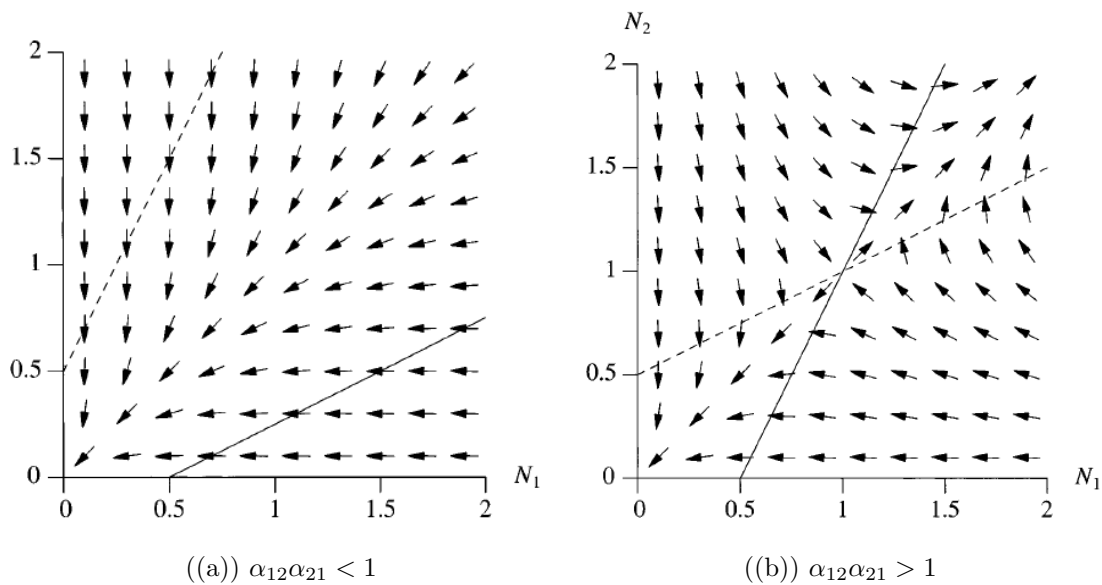


Figura 3.5: Simbiosis obligada

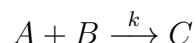
En el primer caso, $\alpha_{12}\alpha_{21} < 1$, las rectas no se cortan y el único equilibrio es la extinción de las dos especies (Figura 3.5(a)). Las dos poblaciones dependen de la otra pero la interacción es tan débil que le es imposible salvarse entre sí. En el segundo caso (Figura 3.5(b)), $\alpha_{12}\alpha_{21} > 1$, las dos rectas sí se cortan. Si tenemos pocos de las dos especies, las dos se extinguirán (la interacción es fuerte pero no hay suficientes individuos cómo para conseguir salvarse). Si tenemos muchos individuos, las dos especies aumentarían, produciéndose el mismo efecto irreal de crecimiento infinito.

3.1.5. Reacciones químicas

En muchos ámbitos, las reacciones químicas son importantes, en este apartado vamos a ver unas ideas básica de cómo transformar dichas reacciones en ODEs.

Ley de acción de masas

Consideramos una reacción irreversible simple



Dónde k es la llamada velocidad de reacción. Suponemos lo siguiente. El cambio del productor en el tiempo se debe al número de colisiones entre las moléculas A y B, multiplicada por la probabilidad de que esa reacción ocurra (r_2) en caso de la colisión⁽⁴⁾. Definimos $a = [A]$, $b = [B]$ y $c = [C]$ cómo las concentraciones de las moléculas A,B, y C. El término $r_1 ab \Delta t$ aproximará el número de colisiones que ocurren en un tiempo Δt . Por lo que el cambio de en el tiempo viene dado por

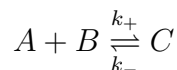
$$\Delta c = abk \Delta t$$

con $k = r_1 r_2$, si hacemos $\Delta t \rightarrow 0$ obtenemos

$$\frac{dc}{dt} = \dot{c}(t) = kab$$

la conocida «Ley de Acción de Masas»⁽⁵⁾.

Ahora vamos a ver el caso de las **Reacciones reversibles**, tal que



Con los términos de reacción k_+ y k_- . Asumimos que el proceso reversible (separación de C en A y B) es proporcional a c . El sistema de ODEs queda:

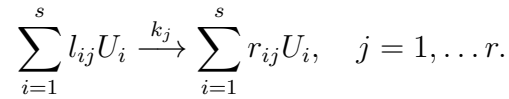
$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= k_+ ab - k_- c \\ \frac{da}{dt} &= k_- c - k_+ ab \\ \frac{db}{dt} &= k_- c - k_+ ab. \end{aligned}$$

⁴Por ejemplo, que haya suficiente energía cinética disponible para el inicio de la reacción

⁵Es en realidad un modelo matemático, no una ley. Hay que considerar también que las concentraciones son estrictamente positivas

Sistema general de reacciones

Vamos a generalizar el caso anterior para un **Sistema general de reacciones**, es decir, para un número r de reacciones entre s reactivos U_i (con concentraciones u_i), $i = 1, \dots, s$, que interaccionan a la vez:



Dónde l_{ij}, r_{ij} son los coeficientes estequiométricos, que describen las ganancia y pérdida del número de moléculas U_i en una reacción j ; $k_j(t)$ es el correspondiente velocidad de reacción, que puede llegar a depender del tiempo debido a factores cómo la temperatura. Definimos por tanto la función ratio

$$g_j(t, u) = k_j(t) \prod_{n=1}^s (u_n)^{l_{nj}}$$

que se corresponde con la velocidad de reacción j y es usada para la formulación de las ODEs para las u_j . Se obtiene cómo resultado final el sistema

$$\dot{u}_i = \sum_{j=1}^r (r_{ij} - l_{ij}) g_j(t, u(t)), \quad i = 1, \dots, s,$$

3.1.6. Otras aplicaciones

Hay otras muchas aplicaciones más de la ecuación de reacción, por ejemplo:

- Si $f(u) = u(1 - u)$, obtenemos la ecuación de Fisher o de Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov, utilizada para describir la expansión de las poblaciones biológicas, [18], [19].
- Si $f(u) = u(1 - u^2)$, obtenemos la ecuación Newell-Whitehead-Segel para describir la Inestabilidad de Benard, [21].
- Si $f(u) = u(1 - u)(u - \frac{1}{2})$ y $0 \ll 1$, obtenemos la ecuación Zeldovich que aparece en la teoría de la combustión, [20].

Estas son algunas de las muchas aplicaciones que hay de esta ecuación.

3.2. Ecuación de difusión

Imaginémonos un caso cotidiano, un terrón de azúcar, que al echarlo sobre un vaso de agua o café, las moléculas de sacarosa se difunden por todo el líquido. Esto y otros ejemplos nos muestran la distribución espacial de moléculas no debe de ser homogénea, debe existir una diferencia o gradiente de concentración entre dos puntos del medio. Esta es una idea de el origen de la ecuación de difusión.

3.2.1. Ley de Flick

La forma más sencilla de entender la difusión es usando la denominada Ley de Flick o de conservación de masas. Empezamos con $u(x, t) \in \mathbb{R}^3$, una densidad de población o concentración de una substancia dentro de un contenedor. Hay un flujo, denotado por $J(x, t) \in \mathbb{R}^3$, es decir, un vector que apunta en la dirección general de movimiento y $|J(x, t)|$ es proporcional al número de partículas que van en esa dirección por unidad de tiempo. Elejimos un volumen cualquiera Ω con contorno Γ . Si no hay reacciones, el único factor que influencia un cambio en la densidad en Ω es el flujo a través de Γ .

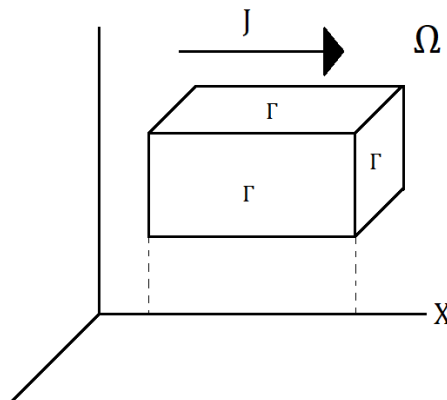


Figura 3.6: Volumen test

Esto quiere decir que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) dV = - \int_{\Gamma} J(x, t) dS \quad (3.12)$$

dónde dV denota la integral de volumen en \mathbb{R}^3 ⁽⁶⁾, dS la superficie de integración (\mathbb{R}^{3-1}).

⁶Es sencillo extenderlo a \mathbb{R}^n

El teorema de la divergencia de Gauss dice

$$\int_{\Gamma} J(x, t) dS = \int_{\Omega} (\nabla \cdot J(x, t)) dV \quad (3.13)$$

Por lo que podemos reescribir (3.12)

$$\int_{\Omega} \left(\frac{d}{dt} u + \nabla \cdot J(x, t) \right) dV = 0$$

Cómo la integral se cumple para todo los volúmenes test Ω , podemos quedarnos con

$$\frac{d}{dt} u + \nabla \cdot J(x, t) = 0 \quad (3.14)$$

la conocida cómo Ley de Flick (relación entre la primera derivada temporal de la densidad y su flujo cuando asumimos la conservación de masa).

La **Segunda Ley de Flick** dice que el flujo tiene la dirección negativa del gradiente de la distribución de partículas, i.e

$$J = -D\nabla u \quad (3.15)$$

Metiendo (3.15) en (3.14) se obtiene la ecuación de difusión.

$$u_t = D\nabla^2 u$$

también conocida cómo la ecuación del calor.

3.2.2. Solución fundamental de la ecuación de difusión homogénea

En esta sección vamos a considerar la ecuación de difusión en 1D a través del eje x , i.e $-\infty < x < \infty$ y $t \geq 0$. Sólo necesitaremos una condición inicial, no harán falta condiciones de contorno. Es decir nuestro problema es el siguiente

$$\mathbf{u}_t = D\mathbf{u}_{xx} \quad \text{para} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (3.16)$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \phi(x) \quad (3.17)$$

En un primer paso, vamos a resolver el problema para una función especial $\phi(x)$ y después, derivaremos la solución general. Para ello, vamos a usar, unas llamadas propiedades de invarianza de la ecuación (3.24):

Proposición 3. Sea una solución de (3.24), se cumple que

- a) La traslación $\mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{d}, t)$ para cada solución $u(x, t)$ es también una solución.
- b) Cualquier **derivada** ($\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx}, \mathbf{u}_t$) de una solución es también solución.
- c) Cualquier **combinación lineal** de soluciones de (3.24) es solución también.
- d) Cada **integral de una solución** es también solución. Si tenemos una función $S(x, t)$ que es solución de (3.24), por lo que existe también $S(x - d, t)$ por **a)** y

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x - y, t)g(y)dy$$
 para cada función $g(y)$ si la integral converge de manera adecuada.
- e) Cada deformación $\mathbf{u}(\sqrt{a}\mathbf{x}, at)$ con $a > 0$ de una solución es también solución. Se puede probar usando la desigualdad de la cadena.

Buscamos una solución particular, $Q(x, t)$ de (3.24) que cumpla esta condición inicial particular ⁽⁷⁾

$$Q(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Determinamos Q en tres pasos.

Paso 1: Gracias a la propiedad **e)** sabemos que $x \rightarrow \sqrt{ax}, t \rightarrow at$, dejando $Q_t = DQ_{xx}$ y la condición inicial (3.18) invariante. Esto es solo posible si la dependencia de Q con x y t es del tipo x/\sqrt{t} . La deformación lleva $\frac{x}{\sqrt{t}}$ a $\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{at}} = \frac{x}{\sqrt{t}}$. Por lo que buscamos una $Q(x, t)$ de la siguiente forma

$$Q(x, t) = g(p) \quad \text{para } p = \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \quad (3.19)$$

Dónde g es una función que tenemos que determinar y el factor $\sqrt{4D}$ es un factor adicional que nos servirá más tarde.

Paso 2: Podemos formular una ODE para g usando (3.24) y (3.19):

$$\begin{aligned} Q_t &= \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{x}{2t\sqrt{4Dt}} g'(p) \\ Q_x &= \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4Dt}} g'(p) \\ Q_{xx} &= \frac{\partial Q_x}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{4Dt} g''(p) \end{aligned}$$

⁷Esta condición inicial no varía ante **e)**

Por lo que

$$0 = Q_t - DQ_{xx} = -\frac{x}{2t\sqrt{4Dt}}g'(p) - \frac{1}{4t}g''(p) = \frac{1}{t} \left(-\frac{p}{2}g'(p) - \frac{1}{4}g''(p) \right)$$

La ODE queda:

$$g''(p) + 2pg'(p) = 0 \quad (3.20)$$

Resolviéndola para g' obtenemos $g'(p) = C_1 e^{-\int 2p dp} = C_1 e^{-p^2}$ y por tanto

$$Q(x, t) = g(p) = C_1 \int e^{-p^2} dp + C_2$$

Paso 3: Para los límites de la integral elegimos

$$Q(x, t) = g(p) = C_1 \int_0^{x/\sqrt{4Dt}} e^{-p^2} dp + C_2$$

los cuáles son válidos para $t > 0$. Teniendo en cuenta la condición inicial para $Q(x, t)$, expresada cómo un límite $t \searrow 0$ ⁽⁸⁾, obtenemos⁽⁹⁾:

$$\text{Para } x > 0 \quad \lim_{t \searrow 0} Q(x, t) = C_1 \int_0^{\infty} e^{-p^2} dp + C_2 = C_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + C_2 = 1$$

$$\text{Para } x < 0 \quad \lim_{t \searrow 0} Q(x, t) = C_1 \int_0^{-\infty} e^{-p^2} dp + C_2 = -C_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + C_2 = 0$$

por lo que se deduce que $C_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $C_2 = \frac{1}{2}$ y

$$Q(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{4Dt}} e^{-p^2} dp \quad \text{para } t > 0$$

satisface todas las condiciones que necesitamos.

Por la propiedad **b)** tenemos que, $S = \frac{\partial Q}{\partial x}$ es una solución de (3.24) también. Para una función diferenciable arbitraria ϕ con $\phi(x) = 0$ para un largo $|y|$, definimos

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x - y, t) \phi(y) dy \quad \text{para } t > 0 \quad (3.21)$$

De acuerdo con **d)**, u es también solución de (3.24). Usando integración por partes

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial Q}{\partial x}(x - y, t) \phi(y) dy = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} [Q(x - y, t)] \phi(y) dy = \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x - y, t) \phi'(y) dy - \cancel{[Q(x - y, t) \phi(y)]_{y=-\infty}^{y=+\infty}} \end{aligned}$$

⁸Esta notación significa que t tiende a 0 de forma monótona decreciente

⁹Se ha hecho uso de la integral de Gauss: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{a(x+b)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Por tanto

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x - y, 0)\phi'(y)dy = \int_{-\infty}^x \phi'(y)dy = \phi(x)$$

Por lo que (3.21) se corresponde con la fórmula de la función deseada, dónde

$$S = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad \text{para } t > 0$$

i.e

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}} \phi(y)dy \tag{3.22}$$

S es la llamada «Solución Fundamental»o «función de Green».

En la mayoría de casos, es imposible resolver la integral en (3.22) analíticamente, pero para algunos valores especiales de $\phi(x)$ se puede escribir de forma bonita usando la llamada «función error»(muy usada en estadística):

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz \tag{3.23}$$

Las propiedades principales de la función error son

$$Erf(0) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} Erf(x) = 1$$

3.2.3. Solución general de la ecuación de difusión no homogénea

En este apartado, vamos a ver la solución de la ecuación de difusión no homogénea. Es decir queremos resolver el siguiente problema

$$\mathbf{u}_t = D\mathbf{u}_{xx} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad \text{para } -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \tag{3.24}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}) \tag{3.25}$$

dónde $\phi(x)$ describe la distribución espacial inicial y $f(x, t)$ es una fuente o sumidero adicional. La solución de este problema es:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x - y, t)\phi(y)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t - s)f(y, s)dyds \tag{3.26}$$

Una idea para deducir esta fórmula es partir del siguiente problema de valores iniciales para una ODE:

$$\frac{du}{dt} + Au(t) = f(t) \quad A = Cte \tag{3.27}$$

Este problema admite tiene una solución del tipo

$$u(t) = e^{-At} + \int_0^t e^{(s-t)A} f(s) ds \quad (3.28)$$

Ahora imaginemos que tenemos $u(t) \in \mathbb{R}^n$, $\phi \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, es decir (3.27) corresponde a un sistema de n ODEs acopladas. Para $f(t) = 0$ la solución se escribe cómo $u(t) = S(t)\phi$, dónde $S(t) = e^{-At}$. Sin embargo, para $f(t) \neq 0$, multiplicamos (3.27) por un factor integrante $S(-t) = e^{At}$:

$$\frac{d}{dt}[S(-t)u(t)] = S(-t)\frac{du(t)}{dt} + S(-t)Au(t) = S(-t)f(t)$$

que si integramos desde 0 a t

$$S(-t)u(t) - \underbrace{S(0)u(0)}_{\phi} = \int_0^t S(-s)f(s)ds$$

Si multiplicamos por $S(t)$

$$u(t) = \underbrace{S(t)\phi}_{\text{Solución Ecuación Homogénea}} + \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

Esta fórmula es muy similar a (3.26), hay un término correspondiente a la solución del problema homogéneo y un segundo término que da cuenta de la inhomogeneidad. Para ver la solución de la ecuación inhomogénea usamos S , ya definida en (3.22). Se le conoce también por el nombre de «operador fuente», ya que transforma cada función ϕ en una nueva función.

Lo único que queda por demostrar es que efectivamente (3.26) es solución de (3.27) para las condiciones iniciales. Cómo el término que incluye a ϕ ya ha sido examinado, hacemos $\phi = 0$ por simplicidad para comprobar el segundo término. Derivando (3.26) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y, t-s)f(y, s)dyds \\ &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial S}{\partial t}(x-y, t-s)f(y, s)dyds + \lim_{s \rightarrow t} \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y, t-s)f(y, s)dy, \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la singularidad de $S(x-y, t-s)$ para $t-s = 0$. Cómo $S(x-y, t-s)$ satisface la ecuación de difusión, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x-y, t-s)f(y, s)dyds + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y, \varepsilon)f(y, t)dy \\ &= D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y, t-s)f(y, s)dyds + f(x, t) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \end{aligned}$$

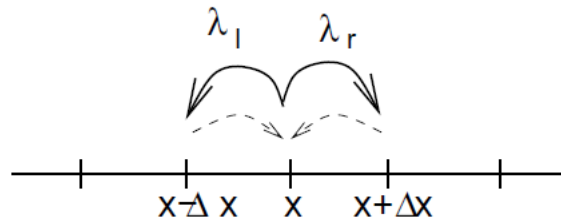
que corresponde con la ecuación inhomogénea. Vamos por último a comprobar la condición inicial, hacemos $t \rightarrow 0$ en (3.26) y obtenemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \phi(x) + \int_0^0 \dots = \phi(x)$$

Concluimos por tanto, que (3.26) es efectivamente la solución deseada.

3.2.4. Camino aleatorio y Movimiento Browniano

La ecuación de difusión se puede derivar también del llamado camino aleatorio o movimiento browniano. Aquí vamos a considerar un caso sencillo de 1D.



Para el movimiento browniano: por unidad de tiempo τ , las partículas se mueven a izquierda o derecha con una longitud de paso Δx , empezando en un x cualquiera. La dirección en la que la partícula se mueva es determinada de forma aleatoria, no hay conexión entre los pasos (asumimos que la probabilidad de saltar a la izquierda y la derecha son iguales $\lambda_l = \lambda_r = \frac{1}{2}$).

Llamamos $\xi \in (-\Delta x, \Delta x)$ al movimiento en el intervalo de tiempo $[(k-1)\Delta t], k\Delta t, 1 \leq n$ y sin pérdida de generalidad elegimos el punto de inicio en $x = 0$. Después de un tiempo $t = n\Delta t$, el recorrido completo de la partícula será $x_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. Si la partícula hace r pasos por unidad de tiempo, entonces cada paso Δx necesitará $\Delta t = \frac{1}{r}$ de unidad de tiempo. La posición de la partícula, x_n , en un tiempo $t = n\Delta t$ puede interpretarse como una variable aleatoria.

Denominamos $u(x, t) = P(x_n = x)$ a la probabilidad de la partícula de estar en una posición x en un tiempo $t = n \cdot \Delta t$. Esta puede ser dada explícitamente por una distribución binomial. Las probabilidades de las dos direcciones son iguales, por lo que podemos escribir $x = m \cdot \Delta x$, donde $m \in \mathbb{Z}$. Llamamos n_r al número de pasos a la derecha y n_l a la izquierda dados por la partícula. Obviamente $n = n_l + n_r$. Asumiendo que la partícula

se encuentra en $m \cdot \Delta x$ tras n pasos, otra condición extra será $\mathbf{n}_r - \mathbf{n}_l = \mathbf{m}$. Juntándolas se obtiene

$$2n_r = n + m \quad \Leftrightarrow \quad n_r = \frac{n + m}{2}$$

Entonces podemos aplicar ya la probabilidad correspondiente a la distribución binomial

$$P(x_n = m \cdot \Delta x) = \binom{n}{n_r} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_r} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_r} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \binom{n}{\frac{n+m}{2}} = \frac{1}{2^n} \cdot \binom{n}{\frac{n+m}{2}}.$$

El valor esperado $\langle x_n \rangle$ y la varianza $\sigma(x_n)$ pueden ser determinada

$$\langle x_n \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \xi_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n \langle \xi_k \rangle = \sum_{k=1}^n \left((-\Delta x) \cdot \underbrace{P(\xi_k = -\Delta x)}_{=\frac{1}{2}} + (\Delta x) \cdot \underbrace{P(\xi_k = \Delta x)}_{=\frac{1}{2}} \right) = 0,$$

$$\begin{aligned} V(x_n) &= V\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right) = \sum_{k=1}^n V(\xi_k) = \sum_{k=1}^n \left((-\Delta x)^2 \cdot \underbrace{P(\xi_k = -\Delta x)}_{=\frac{1}{2}} + (\Delta x)^2 \cdot \underbrace{P(\xi_k = \Delta x)}_{=\frac{1}{2}} \right) \\ &= (\Delta x)^2 \cdot n = (\Delta x)^2 \cdot \frac{n}{t} \cdot t = (\Delta x)^2 \cdot r \cdot t. \end{aligned}$$

Obtenemos entonces que $\sqrt{V(x_n)} \sim \sqrt{t}$. Esto significa que se espera que la partícula esté en el punto inicial, debido a la simetría que existe entre la probabilidad de ir en las dos direcciones, sin embargo, a medida que pasa el tiempo t , la probabilidad de que la partícula se encuentre en el punto inicial decrece.

Ahora, para abordar el caso browniano, vamos a pasar del modelo discreto al continuo, haciendo tender la longitud del paso Δx a cero y el número de pasos por unidad de tiempo $r \rightarrow \infty$, de manera que $\lim_{\Delta x \rightarrow 0, r \rightarrow \infty} (\Delta x)^2 r = 2D$, con $D \neq 0$. El número de partículas en el intervalo $[x, x + \Delta x]$ cuando ha pasado un tiempo t está descrita por $u(x, t)$. La correspondiente ecuación discreta es:

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \lambda_r u(x - \Delta x, t) - \lambda_r u(x, t) + \lambda_l u(x + \Delta x, t) - \lambda_l u(x, t) \quad (3.29)$$

Podemos usar un desarrollo de Taylor de $u(x, t)$

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t^2 + \dots \quad (3.30)$$

$$u(x \pm \Delta x, t) = u(x, t) \pm \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x^2 \pm \dots \quad (3.31)$$

Usando (3.30) y (3.31) en (3.29) y que $\lambda_l = \lambda_r = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
& u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t^2 + \dots = \\
& \frac{1}{2} \left[u(x, t) - \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x^2 + \dots \right] + \frac{1}{2} \left[u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x^2 + \dots \right] \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t^2 + \dots = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Delta x^4 + \dots
\end{aligned}$$

Si nos quedamos con el primer término de cada lado y consideramos que $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta t \rightarrow 0$ de manera que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} = D = \text{Cte}$$

obtenemos la ecuación de difusión

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.32)$$

La solución de (3.32) con una condición inicial $u(x, 0) = \delta(x)$ ⁽¹⁰⁾ es

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4\pi Dt}} \quad (3.33)$$

Observación. La suposición de que $\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}$ tiende a un límite finito $D \neq 0$, si Δx y Δt tienden los dos a cero implica que el límite $\frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \infty$. Significando esto que la velocidad de una partícula con movimiento browniano es infinitamente grande. Einstein, que en 1905 estudió el movimiento browniano y su conexión con la ecuación de difusión, explicó que la ecuación de difusión es solo un modelo válido para tiempos t muy grandes

¹⁰Denota la función δ de Dirac

Capítulo 4

Resumen y conclusiones

En muchos ámbitos, sobre todo en física, y en especial la carrera, las ecuaciones en derivadas parciales (EDP) tienen una importancia enorme, véase por ejemplo la ecuación de Dirac¹, Klein-Gordon y Schrödinger $\left(i\hbar\Psi_t = \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right]\Psi\right)$ en la física cuántica, la ecuación de Ondas $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c\nabla^2 u\right)$ en óptica, las de Laplace y Poisson² en electromagnetismo, la de Navier-Stokes en mecánica de fluidos, las de Euler-Lagrange en mecánica teórica o las ecuaciones de campo de Einstein³ en la teoría general de la relatividad, incluso también en matemáticas las de Cauchy–Riemann⁴ en análisis complejo.

Garantizar la existencia y unicidad de estas ecuaciones es de gran importancia, ya que la mayoría son imposibles de resolver analíticamente y requerimos de estas herramientas matemáticas para poder trabajar. Nosotros, que nos hemos restringido a la ecuación de reacción difusión o del calor, hemos obtenido unos resultados tanto satisfactorios como esperados, ya que esta ecuación se conoce y lleva usando desde hace mucho tiempo. Se ha proporcionado una visión matemática abstracta del problema, demostrando que tiene solución única en dimensión N , para después, abordar las implicaciones y usos en diferentes ramas, restringiéndonos normalmente a las tres dimensiones espaciales junto a la temporal. Aunque no se ha podido profundizado en todos los casos posibles que puede tomar esta ecuación (se ha estudiado el caso básico más sencillo) hemos conseguido una visión general del procedimiento que hay que seguir.

¹ $[i\cancel{\partial} - M]\Psi = 0$

² $\nabla^2 u = \rho(\vec{r})$

³ $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$

⁴ $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$

Bibliografía

- [1] HAÏM BRÉZIS *Análisis funcional: teoría y aplicaciones* Alianza Editorial, 1984.
- [2] H.BRÉZIS-G.TRONEL *Analyse Fonctionnelle, Recueil De Problèmes Et Exercices*
- [3] J. L. LIONS, E. MAGENES (Translated P. Kenneth) *Non-homogeneous boundary value problems and applications (3 volúmenes)*. Springer Verlag, 1972.
- [4] CHRISTINA KUTTLER *Reaction-Difussion equations with aplications*. Sommersemester 2011.
- [5] MARK KOT *Elements of Mathematical Ecology*. Cambbridge University Press, 2001.
- [6] PIERRE GRISVARD *Équations différentielles abstraites*, Ann. Sci. ENS 2, 1969.
- [7] DANIEL W. STROOK, S.R.SRINIVASA VARADHAN *Multidimensional diffusion processes*, Springer, 1979.
- [8] O.A.LADYZENSKAJA V.A.SOLONNIKOV and N.N.URALCEVA *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Society, 1968
- [9] PETER GRINDROD *The theory and applicarions of Reaction-Diffusion equations*, Oxford University Press, 1996
- [10] STEVE SHKOLLER *Notes in L^p and Sobolev spaces* Department of Mathematics, University of California, Davis.
- [11] SALVADOR LÓPEZ MARTINEZ *El Teorema de Hille-Yosida y sus aplicaciones en el estudio de problemas de evolución* Trabajo de fin de grado dirigido por José Carmona Tapia, Septiembre 2014.
- [12] WALTER RUDIN *Functional Analysis* McGraw-Hill, 1991.

- [13] ALBERT EINSTEIN *Sobre el movimiento de pequeñas partículas suspendidas en líquidos estacionarios*, Annalen der Physik , 1905.
- [14] ANTONIO PRADOS *Movimiento browniano. Ecuaciones de Fokker-Planck y Langevin*, universidad de Sevilla, apuntes, 2022.
- [15] ANTONIO PRADOS *Ecuación Maestra. Procesos de un paso*, apuntes, universidad de Sevilla, 2022.
- [16] MARIA ANGUIANO MORENO *Atractores para EDP parabólica no lineales y no autónomas en dominios no acotados* Universidad de Sevilla, 2011.
- [17] HAIM BREZIS *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010
- [18] ABLOWITZ, MARK J. AND ZEPPELELLA ANTHONY *Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed*, Bulletin of Mathematical Biology 41 (1979) 835–840
- [19] R.A.FISHER. *The wave of advance of advantageous genes*, Ann. Eugenics, 1937.
- [20] SALVI, GIULIANO *La combustión (teoría y aplicaciones)*, Dossat S. A
- [21] IBON ENBEITA BASTERRECHEA *Inestabilidades térmicas: Célula de Bénard*, Trabajo Fin de Grado Grado en Física, UPV, 2015.