UNIVERSIDAD DE SEVILLA

TRABAJO FIN DE GRADO

Análisis en Cuaterniones

Realizado por

Andrei Núñez Mancinas

Para la obtención del título de

Grado en Física

Dirigido por

Juan Carlos García Vázquez

Realizado en el departamento de

Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas

Convocatoria de Julio, curso 2022/23

Agradecimientos

Quiero dar mis más sinceros agradecimientos a Juan Carlos, el tutor de este trabajo de fin de grado. Fue él el profesor que me introdujo en el mundo de la lectura matemática y que nunca ha dudado en darme recomendaciones y guía, motivo por el cual no tuve duda a la hora de decidir qué tutor era el adecuado para la realización de este trabajo. Por otro lado, quiero agradecer también a José Manuel Casado Vázquez(†), quien el 21 de agosto de 2021 tuvo la generosidad de hablar conmigo en calidad de guía en un momento incierto como estudiante de física. Quiero agradecer a Cristina, quien me ha apoyado en todo momento para la realización de este trabajo. Por último, quiero agradecer a mi hermana y a mi madre por el apoyo, ayuda y confianza incondicional que depositan en mí.

Resumen

En este trabajo se caracteriza el conjunto de los cuaterniones como un álgebra de división normado, se proporcionan técnicas para tratar con ellos de manera análoga a los números complejos, siendo crucial la identificación del conjunto de los cuaterniones como una reunión de infinitos planos complejos que cortan con el eje real tanto para propiedades algebraicas como para la exploración de una definición de derivada que reproduzca resultados análogos a la teoría de funciones holomorfas.

Palabras clave: Cuaterniones, Álgebra de división, Rotaciones espaciales, Regularidad, Derivada de Cullen

Abstract

This paper characterizes the set of quaternions as a normed division algebra, provides techniques for dealing with them in a manner analogous to complex numbers, with the identification of the set of quaternions as an union of infinite complex planes meeting at the real axis being crucial both for algebraic properties and for the exploration of a definition of derivative that reproduces results analogous to the theory of holomorphic functions.

Keywords: Quaternions, Division algebra, Spatial rotations, Regularity, Cullen derivative

Índice general

1. Introducción

Durante el siglo XIX el establecimiento del cuerpo de los complejos $\mathbb{C}$ para la descripción exitosa de vectores del plano y rotaciones en el mismo dio lugar a la búsqueda de un sistema algebraico adecuado para describir el espacio euclídeo tridimensional como uno de los objetivos científicos principales de la época [1]. El matemático irlandés William Rowan Hamilton (1805-1865) persiguió este objetivo tras haber introducido los complejos como pares ordenados de números reales el 4 de noviembre de 1833 con su artículo *Teoría de funciones conjugadas, o parejas algebraicas* presentado a la Real Academia Irlandesa. No fue hasta el 16 de octubre de 1843 cuando, mientras caminaba a lo largo del Royal Canal junto a su mujer, descubrió que necesitaría tres unidades imaginarias, i, j, k, que cumplieran las ecuaciones fundamentales

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

En [2] se ofrece un desarrollo histórico y se muestran partes del proceso que llevó al abandono de las tripletas. Convencido de que los cuaterniones eran el sistema algebraico ideal para la física matemática, Hamilton pasó el resto de su vida desarrollando la teoría y aplicaciones para estos. A pesar de gozar de cierto éxito inicial, sobre todo en Irlanda y Estados Unidos, desde 1890 hubo un fuerte debate durante años entre los seguidores del álgebra vectorial de Josiah Willard Gibbs -quien introdujo la noción de producto escalar y vectorial actual- y los seguidores de Hamilton, terminando por adoptarse el formalismo de Gibbs debido en parte a la descripción más clara y sencilla de la teoría electromagnética gracias a la contribución de Oliver Heaviside. Además, en 1908 Hermann Minkowski siguió esta tendencia al rechazar los cuaterniones como objetos espacio-temporales y optar por extender el sistema de vectores tridimensionales de Gibbs a cuatro dimensiones donde el tratamiento con trasnformaciones de Lorentz era más sencillo.

Este trabajo nace del deseo de profundizar en los conceptos del álgebra y análisis vectorial que se aprenden al estudiar física, donde las generalizaciones a dimensiones superiores de operaciones básicas como suma y producto por escalares son simples pero por ejemplo no parece inmediato el cómo se podría generalizar el producto vectorial, cuya definición le da una situación forzosamente en $\mathbb{R}^3$. Calculamos integrales de superficie usando dicha operación, ¿qué ocurre al tratar con hipersuperficies? Ante preguntas de este estilo, uno puede llegar al estudio de las formas diferenciales y/o del álgebra geométrica con afán de encapsular lo aprendido en un marco teórico más general. Aunque los cuaterniones no son este marco teórico general, son una suerte de paso intermedio del cual podremos extraer analogías con formalismos más generales (como rotores en álgebra geométrica y cuaterniones de rotación) y el estudio de los mismos abre las puertas al estudio de álgebras como los octoniones, álgebras de Clifford y, quizá, ir más allá con la construcción de Cayley-Dickson, todo ello introducido en el artículo [3]. Basada precisamente en este artículo y escrita consultando el libro [4], se consigna una introducción al concepto de álgebra, álgebra de división y álgebra de división normado en el Anexo A por completitud.

Una rama de las matemáticas que es fundamental para la física es el análisis complejo. Si bien inicialmente el cuerpo complejo tenía interés mayormente algebraico y geométrico, el definir el concepto de derivada para funciones complejas supuso el desarrollo de una teoría soprendentemente rica y exitosa. Es por ello que en este trabajo tras establecer formalmente el álgebra de división de los cuaterniones, $\mathbb{H}$, exploraremos distintas definiciones del concepto de derivabilidad para funciones cuaterniónicas y veremos qué consecuencias podemos extraer de ello. Al proponer el tema sobre el que realizamos el estudio, desconocíamos la existencia de un trabajo de fin de grado [5] reciente que trata con cuaterniones y derivabilidad. Tras esto, se estimó que la diferencia entre ambos era suficiente como para continuar con la realización del documento presente. En realidad, se pretendía tener una parte de cuaterniones aplicados a la física ene este, con la exposición de ciertas expresiones de relatividad especial y de electromagnetismo tomando inspiración del libro [6]. Sin embargo, durante la redacción de los contenidos se vió que era un objetivo demasiado ambicioso si se quería poner cada parte con un mínimo de detalle, pues estaba asegurado sobrepasar la extensión máxima del documento. Así pues, el contenido está dividido solo en dos partes:

- Los cuaterniones, sus propiedades algebraicas, representaciones y rotaciones.
- Intento de definición de derivabilidad para los cuaterniones.

La primera de las dos partes es una introducción muy completa de los cuaterniones, optando por el enfoque de definición con componentes como se hace en el artículo [7] y llevando una progresión lógica inspirada en la introducción de los números complejos dada en el libro [8]. Esta convención acorta algunas demostraciones. Sin embargo, no todas están en el cuerpo principal del trabajo, aquellas que se consideran de cálculo directo -pero posiblmente extenso- o no muy complicadas son omitidas por concisión, pero pueden ser consultadas si se desea en el Anexo B. La segunda parte se basa en el artículo [7] para dar las dos primeras definiciones de derivabilidad que no serán muy fructíferas. Consultamos el trabajo [5] para demostrar un teorema importante (teorema 3.3). La definición de derivabilidad que nos reproducirá resultados interesantes está basada en el artículo [9]. Si bien es cierto que existe una definición de función *regular* en $\mathbb{H}$ -análogo a holomorfa para $\mathbb{C}$- dada por Rudolf Feuter en 1935 como una extensión de las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

que reproduce algunos resultados análogos a los de variable compleja como el teorema de Cauchy, la fórmula integral de Cauchy o la expansión de Laurent, resulta que la función identidad $f(q) = q$ no es regular en sentido Feuter y por tanto no lo son los polinomios ni las series. En el artículo [7] se desarrolla desde un enfoque más moderno y riguroso esta teoría utilizando el cálculo diferencial exterior.

2. Los cuaterniones

2.1. El álgebra de los cuaterniones

Los cuaterniones $\mathbb{H}$ son un álgebra de división sobre el cuerpo de los reales, $\mathbb{R}$, cuyo espacio vectorial subyacente es $\mathbb{R}^4$, es decir, son de dimensión cuatro. En particular, son un álgebra asociativa, lo cual nos asegura que cada elemento no nulo tiene un único inverso multiplicativo igual por ambos lados[1]. Esta sección estará dedicada a mostrar que, tras definir las operaciones adecuadas, efectivamente $\mathbb{H}$ es un álgebra asociativa de división.

Una manera útil de considerar los elementos del conjunto de los cuaterniones es como una suma directa:

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus P = \{q = (q^0, \boldsymbol{q}) \mid q^0 \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{q} \in P\} \tag{2.1}$$

donde P es el espacio vectorial euclídeo orientado $\mathbb{R}^3$. Esto conlleva la definición de la operación suma, que es componente a componente. Definimos también el resto de operaciones que conciernen a los cuaterniones usando esta convención. Sean $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,

- **Suma**. $q_1 + q_2 = (q_1^0 + q_2^0, \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2)$
- **Multiplicación por escalares**. $\lambda q_1 = (\lambda q_1^0, \lambda \boldsymbol{q}_1)$
- **Multiplicación de cuaterniones**. $q_1 q_2 = (q_1^0 q_2^0 - \boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{q}_2, q_1^0 \boldsymbol{q}_2 + q_2^0 \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_1 \times \boldsymbol{q}_2)$

Sabemos que la suma y multiplicación por escalares coinciden con la que dotan a $\mathbb{R}^4$ de estructura de espacio vectorial, por lo que los cuaterniones tienen elemento identidad para la suma, $(0, \boldsymbol{0})$; y cada $q \in \mathbb{H}$ tiene inverso aditivo, $-q = (-q^0, -\boldsymbol{q}) = (-1)(q^0, \boldsymbol{q})$. Algo destacable es que la multiplicación de cuaterniones no es conmutativa en general. Consideremos

$$q_2 q_1 = (q_2^0 q_1^0 - \boldsymbol{q}_2 \cdot \boldsymbol{q}_1, q_2^0 \boldsymbol{q}_1 + q_1^0 \boldsymbol{q}_2 + \boldsymbol{q}_2 \times \boldsymbol{q}_1)$$

$$q_1 q_2 - q_2 q_1 = (0, \boldsymbol{q}_1 \times \boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_2 \times \boldsymbol{q}_1) = (0, 2\boldsymbol{q}_1 \times \boldsymbol{q}_2) \tag{2.2}$$

por lo que $q_1 q_2 = q_2 q_1$ si y solo si $\boldsymbol{q}_1 \times \boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{0}$, es decir, que $\boldsymbol{q}_1$ y $\boldsymbol{q}_2$ sean vectores paralelos en P.

[1] Anexo A.

Para demostrar que $\mathbb{H}$ es un álgebra (asociativa) debemos comprobar que la multiplicación de cuaterniones es bilineal, tiene asociada un elemento identidad por ambos lados y es una operación asociativa.

Teorema 2.1. *El cuaternión $(1, \mathbf{0})$ es una identidad por ambos lados para el producto de cuaterniones y por tanto la identidad multiplicativa asociada a esta operación.*

Demostración. Para cada $q \in \mathbb{H}$,

$$(1, \mathbf{0})q = (1, \mathbf{0})(q^0, \boldsymbol{q}) = (1q^0 - \mathbf{0} \cdot \boldsymbol{q}, 1\boldsymbol{q} + q^0\mathbf{0} + \mathbf{0} \times \boldsymbol{q}) = (q^0, \boldsymbol{q}) = q$$

En virtud de (2.2), $q(1, \mathbf{0}) = (1, \mathbf{0})q = q$. ∎

Teorema 2.2. *La multiplicación de cuaterniones es una operación bilineal, esto es, dados a, b y c en $\mathbb{H}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:*

i) $a(b + c) = ab + ac, \qquad (a + b)c = ac + bc$

ii) $(\lambda a)b = \lambda(ab), \qquad a(\lambda b) = \lambda(ab)$

Demostración. Anexo B. ∎

Notemos que del primer enunciado del punto ii) del teorema 2.2 tenemos que, dado $\lambda \in \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{H}$, el cuaternión $\lambda(1, \mathbf{0})$ multiplicado por q da el mismo efecto que la multiplicación del escalar λ por q:

$$[\lambda(1, \mathbf{0})]q = \lambda[(1, \mathbf{0})q] = \lambda q$$

Es por ello que la identificación de $\mathbb{R}$ como subconjunto de $\mathbb{H}$ a través de $\lambda \mapsto \lambda(1, \mathbf{0})$ es razonable. De aquí en adelante, cualquier cuaternión de la forma $(\lambda, \mathbf{0})$ se podrá denotar simplemente como λ. En particular, las identidades aditiva y multiplicativa de $\mathbb{H}$ pasan a compartir símbolo con las identidades aditiva y multiplicativa de $\mathbb{R}$: 1 y 0. Según la expresión (2.2) los cuaterniones de la forma $(\lambda, \mathbf{0}) \equiv \lambda$ conmutan con cualquier otro cuaternión. Cabe mencionar que para la suma esto dará la apariencia de una operación externa entre reales y cuaterniones pero, por insistir en la idea, una expresión del tipo $\lambda + q$ realmente quiere decir $(\lambda, \mathbf{0}) + q$.

Hasta ahora, hemos identificado $\mathbb{H}$ como un álgebra. Nos resta por ver que es asociativa y de división. Antes de continuar, es de interés introducir la notación habitual para los cuaterniones, en contraposición a la que damos en 2.1. Esta consiste en tomar la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y llamar a los vectores base como sigue

$$1 \equiv (1,0,0,0) \qquad i \equiv (0,1,0,0) \qquad j \equiv (0,0,1,0) \qquad k \equiv (0,0,0,1) \tag{2.3}$$

En la página anterior hemos justificado por qué es razonable llamar 1 al primer cuaternión. El resto de ellos se dicen *unidades imaginarias*. Veamos el por qué considerando el producto de un cuaternión q por sí mismo:

$$q^2 = (\left(q^0\right)^2 - \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q}, q^0\boldsymbol{q} + q^0\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{q}) = (\left(q^0\right)^2 - |\boldsymbol{q}|^2, 2q^0\boldsymbol{q}) \tag{2.4}$$

donde aquí $|\ |$ indica la norma asociada a P. Vemos entonces que se cumple que $i^2 = j^2 = k^2 = (-1, \mathbf{0}) \equiv -1$. También es sencillo comprobar que $ij = k$, $jk = i$ y $ki = j$. Algo especialmente relevante es que este producto de unidades imaginarias es un ejemplo sencillo de que la multiplicación de cuaterniones no cumple la propiedad conmutativa en general: $ij = -ji$, $jk = -kj$ y $ki = -ik$. Presentamos entonces la forma usual con la que se expresa un cuaternión

$$q = t + xi + yj + zk \qquad\qquad t, x, y, z \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

y las relaciones que cumplen las unidades imaginarias

$$\begin{gathered} i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \\ ij = -ji = k; \quad jk = -kj = i; \quad ki = -ik = j \end{gathered} \tag{2.6}$$

Hemos escrito ijk en (2.6) sin preocuparnos por poner paréntesis para indicar el orden de operación porque, como ya hemos mencionado y enunciamos en el siguiente teorema, la multiplicación de cuaterniones es asociativa.

Teorema 2.3. *La multiplicación de cuaterniones cumple la propiedad asociativa, esto es, para cada a, b y c en $\mathbb{H}$:*

$$(ab)c = a(bc)$$

Demostración. Demostración extensa pero algebraicamente sencilla. Anexo B. ∎

Solo nos resta comprobar que $\mathbb{H}$ es un álgebra de división. Para ello bastará con demostrar que cada $q \in \mathbb{H}$ no nulo tiene una inversa multiplicativa por uno de los lados. En esta parte recuperamos la expresión de cuaterniones en la forma 2.5 para definir conceptos útiles para el fin que perseguimos.

Definición 2.1. *El conjugado de un cuaternión, $q = t + xi + yj + zk$, es*

$$\bar{q} = t - xi - yj - zk$$

Observación 2.1. En la notación 2.1 la operación conjugación queda $\bar{q} = \overline{(q^0, \boldsymbol{q})} = (q^0, -\boldsymbol{q})$.

La conjugación es una *involución* en $\mathbb{H}$, es decir, es su propia inversa $\bar{\bar{q}} = q$, lo cual es inmediato de su definición.

Proposición 2.1. La operación conjugación es lineal en $\mathbb{R}$, esto es, dados $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,

i) $\overline{q_1 + q_2} = \overline{q_1} + \overline{q_2}$

ii) $\overline{\lambda q_1} = \lambda \overline{q_1}$

Demostración. Para la demostración usamos la notación 2.1, que es más compacta.
i) $\overline{q_1 + q_2} = \overline{(q_1^0 + q_2^0, \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2)} = (q_1^0 + q_2^0, -\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2) = (q_1^0, -\boldsymbol{q}_1) + (q_2^0, -\boldsymbol{q}_2) = \overline{q_1} + \overline{q_2}$
ii) $\overline{\lambda q_1} = \overline{(\lambda q_1^0, \lambda \boldsymbol{q}_1)} = (\lambda q_1^0, -\lambda \boldsymbol{q}_1) = \lambda(q_1^0, -\boldsymbol{q}_1) = \lambda \overline{q_1}$ ■

Vemos que esta operación es ciertamente parecida a la conjugación en el cuerpo de los complejos, $\mathbb{C}$. Sin embargo, con en el siguiente resultado la no conmutatividad en $\mathbb{H}$ impide una analogía total:

Lema 2.1. Sean $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, entonces

$$\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\,\overline{q_1}$$

Demostración. $\overline{q_1 q_2} = (q_1^0 q_2^0 - \boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{q}_2, -(q_1^0 \boldsymbol{q}_2 + q_2^0 \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_1 \times \boldsymbol{q}_2)) = (q_2^0 q_1^0 - \boldsymbol{q}_2 \cdot \boldsymbol{q}_1, -q_1^0 \boldsymbol{q}_2 -$
$-q_2^0 \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 \times \boldsymbol{q}_1) = (q_2^0 q_1^0 - (-\boldsymbol{q}_2) \cdot (-\boldsymbol{q}_1), q_2^0(-\boldsymbol{q}_1) + q_1^0(-\boldsymbol{q}_2) + (-\boldsymbol{q}_2) \times (-\boldsymbol{q}_1)) =$
$= (q_2^0, -\boldsymbol{q}_2)(q_1^0, -\boldsymbol{q}_1) = \overline{q_2}\,\overline{q_1}$ ■

Consideremos el producto de un cuaternión q por su propio conjugado:

$$q\bar{q} = (q^0 q^0 - \boldsymbol{q} \cdot (-\boldsymbol{q}), q^0(-\boldsymbol{q}) + q^0 \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q} \times (-\boldsymbol{q})) = ((q^0)^2 + \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q}, \boldsymbol{0})$$

Esto es un cuaternión que asumimos como real y, con la forma usual de los cuaterniones 2.5, queda

$$q\bar{q} = t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \tag{2.7}$$

Notemos que este resultado es no negativo y solo será nulo para el cuaternión nulo 0. A partir de esto podemos definir una norma para $\mathbb{H}$:

Definición 2.2. *Sea $q \in \mathbb{H}$. La norma de q se denota mediante $|q|$ y es*

$$|q| = \sqrt{q\bar{q}}$$

Observación 2.2. Para tomar la norma es necesario hacer el mapping $((q^0)^2 + \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q}, \mathbf{0}) \mapsto (q^0)^2 + \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q}$ para tomar la raíz de un número real. Es decir, $|q| \in \mathbb{R}$ estrictamente. La norma que hemos definido coincide con la usual del espacio euclídeo $\mathbb{R}^4$, por lo que sabemos que está bien definida como norma (cumple todos los axiomas que debe) y $\mathbb{H}$ hereda la topología de $\mathbb{R}^4$.

Proposición 2.2. Todo cuaternión q no nulo tiene inverso multiplicativo dado por

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$$

Demostración. Tratamos $1/|q|^2$ como el cuaternión $(1/|q|^2, \mathbf{0})$[2] para poder usar las propiedades de la multiplicación de cuaterniones que hemos ido introduciendo a lo largo de esta sección.

$$qq^{-1} = q\frac{\bar{q}}{|q|^2} = q\left(\bar{q}\frac{1}{|q|^2}\right) = (q\bar{q})\frac{1}{|q|^2} = |q|^2\frac{1}{|q|^2} = 1 \qquad \blacksquare$$

Queda entonces demostrado que los cuaterniones son un álgebra asociativa de división. Veamos ahora más propiedades de la operación conjugación y la norma. Aprovechando que acabamos de definirlo, notemos que el inverso multiplicativo de un cuaternión no nulo q cumple que

$$\overline{q^{-1}} = (\bar{q})^{-1} \tag{2.8}$$

ya que $\bar{q}\overline{q^{-1}} = \overline{q^{-1}q} = \bar{1} = 1$. Todo cuaternión se puede expresar como suma de dos cuaterniones con únicamente primera componente y únicamente segunda componente respectivamente:

$$q = (q^0, \mathbf{0}) + (0, \boldsymbol{q}) \tag{2.9}$$

El conjugado nos sirve para obtener estos dos, los cuales llamamos *parte real* y *parte imaginaria*.

Definición 2.3. *Dado un cuaternión q, sus partes real e imaginaria son*

$$\Re(q) = \frac{q+\bar{q}}{2} \qquad \Im(q) = \frac{q-\bar{q}}{2}$$

[2]Nótese que para $\lambda \in \mathbb{R}$ la expresión q/λ considerando λ como un cuaternión real no es como tal una división de cuaterniones sino el producto $(1/\lambda, \mathbf{0})q = (1/\lambda)q$.

A lo largo de esta sección hemos hecho el esfuerzo de identificar a la parte real como un número real puro. De la misma forma, la parte imaginaria puede considerarse como un elemento de P. Un par de consecuencias inmediatas de la definición 2.3 son

$$\Re(\bar{q}) = \Re(q) \qquad\qquad \Re(q_1 q_2) = \Re(q_2 q_1) \tag{2.10}$$

La primera es inmediata de la definición. La segunda se justifica usando (2.2):

$$\Re(q_1 q_2) = \frac{q_1 q_2 + \overline{q_1 q_2}}{2} = \frac{1}{2}[q_2 q_1 + (0, 2\boldsymbol{q_1} \times \boldsymbol{q_2}) + \overline{q_2 q_1 + (0, 2\boldsymbol{q_1} \times \boldsymbol{q_2})}] =$$
$$= \frac{1}{2}[q_2 q_1 + (0, 2\boldsymbol{q_1} \times \boldsymbol{q_2}) + \overline{q_2 q_1} + (0, -2\boldsymbol{q_1} \times \boldsymbol{q_2})] = \frac{q_2 q_1 + \overline{q_2 q_1}}{2}$$

Ahora que ya hemos definido el inverso de un cuaternión (no nulo), presentamos un teorema que cimenta por completo la identificación de cuaterniones con parte imaginaria nula como números reales:

Teorema 2.4. *Dados dos cuaterniones,* $(\lambda, \mathbf{0})$ *y* $(\mu, \mathbf{0})$ *se tiene que*

i) $(\lambda, \mathbf{0}) + (\mu, \mathbf{0}) = (\lambda + \mu, \mathbf{0})$

ii) $(\lambda, \mathbf{0})(\mu, \mathbf{0}) = (\lambda\mu, \mathbf{0})$

iii) $(\lambda, \mathbf{0})(\mu, \mathbf{0})^{-1} = (\lambda/\mu, \mathbf{0}) \qquad$ si $\mu \neq 0$.

Demostración. Los enunciados i) y ii) son inmediatos de de las definiciones de suma y producto de cuaterniones. Prueba de iii) en anexo B. ■

Una vez desarrollado esto, podemos adoptar la notación más laxa (y ciertamente más cómoda) para la expresión (2.9):

$$q = q^0 + \boldsymbol{q} \tag{2.11}$$

donde ya consideramos q^0 como puramente real y $\boldsymbol{q} \in P$. Esto es consistente con la forma usual con la que se expresa a los cuaterniones, 2.5. Nótese que hacemos la identificación de las unidades imaginarias 2.3 como vectores base de P ignorando sus primeras componentes.

Para acabar con esta sección, veamos que la norma que hemos definido en $\mathbb{H}$ lo dota de estructura de álgebra de división normado[3]:

Proposición 2.3. La norma definida en $\mathbb{H}$, 2.2, cumple que dados $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$

$$|q_1 q_2| = |q_1|\,|q_2|$$

[3]Anexo A.

Demostración. Observemos que

$$q_1q_2\overline{q_1q_2} = q_1q_2\overline{q_2}\,\overline{q_1}$$

Recordando que los cuaterniones de la forma $q\bar{q}$ son de solo parte real -y por tanto conmutan con cualquier otro cuaternión- cambiamos de orden $q_2\overline{q_2}$ y $\overline{q_1}$:

$$q_1q_2\overline{q_1q_2} = q_1\overline{q_1}q_2\overline{q_2}$$

Del teorema 2.4 sabemos que el producto de dos cuaterniones de solo parte real es de nuevo un cuaternión de solo parte real, por lo que podemos realizar el mapping $(\lambda, \mathbf{0}) \mapsto \lambda \in \mathbb{R}$ en la expresión anterior y tomar raíz cuadrada:

$$|q_1q_2| = \sqrt{(q_1q_2)\overline{(q_1q_2)}} = \sqrt{q_1\overline{q_1}q_2\overline{q_2}} = \sqrt{q_1\overline{q_1}}\sqrt{q_2\overline{q_2}} = |q_1|\,|q_2| \qquad \blacksquare$$

De esta proposición junto al lema 2.1 se tiene que, dados dos cuaterniones q_1 y q_2,

$$(q_1q_2)^{-1} = q_2^{-1}q_1^{-1} \tag{2.12}$$

pues $(q_1q_2)^{-1} = (\overline{q_1q_2})/(|q_1q_2|) = (\overline{q_2}\,\overline{q_1})/(|q_1|\,|q_2|) = (\overline{q_2}/\,|q_2|)(\overline{q_1}/\,|q_1|)$

Proposición 2.4. Dado $q \in \mathbb{H}$,

i) $|\bar{q}| = |q|$

ii) $|q^{-1}| = 1/\,|q| \qquad$ si $q \neq 0$.

Demostración. El primer enunciado es inmediato de la definición de norma 2.2 y que la conjugación sea una involución en $\mathbb{H}$.
Probemos el segundo:

$$\left|q^{-1}\right| = \left|\frac{\bar{q}}{|q|^2}\right| = \frac{1}{|q|^2}\,|\bar{q}| = \frac{1}{|q|^2}\,|q| = \frac{1}{|q|}$$

donde hemos usado el primer enunciado como paso intermedio. $\blacksquare$

Corolario 2.1. Dados $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ con $q_2 \neq 0$,

$$\left|q_1q_2^{-1}\right| = \frac{|q_1|}{|q_2|}$$

2.2. Representación de los cuaterniones

En la sección anterior hemos introducido el conjunto de los cuaterniones con dos convenios distintos: como una suma directa entre $\mathbb{R}$ y el espacio vectorial euclídeo orientado $\mathbb{R}^3$ (que denotamos por P) 2.1; y como se suelen introducir en la mayoría de textos: como combinación $\mathbb{R}$-lineal de la unidad y tres objetos matemáticos que llamamos unidades imaginarias 2.5 que cumplen ciertas propiedades (2.6). También llegamos a una notación «conciliadora» de estas anteriores dada por 2.11, cada cuaternión como suma de un cuaternión de solo parte real y otro de solo parte imaginaria denotado como:

$$q = q^0 + \boldsymbol{q} = q^0 + q^1 i + q^2 j + q^3 k$$

Vimos que los cuaterniones de solo parte real cumplen las propiedades aritméticas de $\mathbb{R}$ para la suma y multiplicación de cuaterniones, actuán como escalares sobre los cuaterniones como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y conmutan con cualquier otro cuaternión. Al introducir la notación anterior mencionamos que el cuaternión de solo parte imaginaria -que se suele llamar cuaternión *puro*- se puede considerar como un elemento de P y de ahí que abreviáramos en lugar de escribir $(0, \boldsymbol{q})$. Aunque es claro que la suma y producto por escalares para cuaterniones dotan a los cuaterniones puros de estructura de espacio vectorial, para estos objetos solo está definida la multiplicación para cuaterniones y no tenemos por tanto noción de que formen un espacio euclídeo orientado. Sin emabrgo, veamos que esto tiene fácil solución. Para mayor claridad, retomemos brevemente nuestra notación en dos componentes y consideremos el producto de dos cuaterniones puros, q_1 y q_2:

$$q_1 q_2 = (0, \boldsymbol{q}_1)(0, \boldsymbol{q}_2) = (-\boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_1 \times \boldsymbol{q_2}) \tag{2.13}$$

Denotemos mediante $\mathbb{H}_P$ al conjunto de los cuaterniones puros y definamos pues las siguientes operaciones:

Definición 2.4. *Dados $q_1, q_2 \in \mathbb{H}_P$, esto es, cuaterniones con parte real nula o puros, se define el producto escalar entre ellos, $\cdot : \mathbb{H}_P \to \mathbb{R}$, como*

$$q_1 \cdot q_2 = -\Re(q_1 q_2)$$

Definición 2.5. *Dados $q_1, q_2 \in \mathbb{H}_P$, esto es, cuaterniones con parte real nula o puros, se define el producto vectorial entre ellos, $\times : \mathbb{H}_P \to \mathbb{H}_P$, como*

$$q_1 \times q_2 = \Im(q_1 q_2)$$

De (2.13) es claro que estas operaciones cumplen todas las propiedades que deben cumplir el producto escalar y vectorial de $\mathbb{R}^3$ respectivamente, por lo que el isomorfismo entre los cuaterniones puros y el espacio P, $(0, \boldsymbol{q}) \mapsto \boldsymbol{q}$ junto a las operaciones recién definidas, está totalmente caracterizado. Queda justificado entonces que estos cuaterniones puros ya sin problema alguno sean denotados simplemente como $\boldsymbol{q} = q^1 i + q^2 j + q^3 k$[4]. En esta notación el producto de cuaterniones queda

$$q_1 q_2 = q_1^0 q_2^0 - \boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{q}_2 + q_1^0 \boldsymbol{q}_2 + q_2^0 \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_1 \times \boldsymbol{q}_2$$

2.2.1. Los complejos como subálgebra de los cuaterniones

Consideremos el producto de un cuaternión puro por sí mismo:

$$\boldsymbol{q}\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q} = -|\boldsymbol{q}|^2 \tag{2.14}$$

Nótese que en esta expresión $|\ |$ denota la norma en P. Ya hemos usado en la sección anterior este símbolo indistintamente para esta y para la norma en $\mathbb{H}$. Evaluemos entonces la norma de $\boldsymbol{q}$ como cuaternión que, insistimos, se denota de la misma manera que la norma en P:

$$|\boldsymbol{q}|^2 = \boldsymbol{q}\bar{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q}(-\boldsymbol{q}) = -\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}$$

Podemos ver entonces que esta indistinción está justificada, pues las normas coinciden para cuaterniones puros. Además, para cuaterniones de parte imaginaria nula o reales la norma en $\mathbb{H}$ coincide con el valor absoluto en $\mathbb{R}$.

Definición 2.6. *Un cuaternión q se dice unidad si $|q| = 1$.*

Atendiendo a (2.14), un cuaternión puro unidad, que llamamos $\boldsymbol{u}$, cumple que $\boldsymbol{u}^2 = -1$[5]. De hecho, lo converso también es cierto: cada cuaternión q tal que $q^2 = -1$ debe ser un cuaternión puro unidad:

$$q^2 = \left(q^0\right)^2 - |\boldsymbol{q}|^2 + 2q^0\boldsymbol{q} = -1 \iff \begin{cases} \left(q^0\right)^2 - |\boldsymbol{q}|^2 = -1 \\ 2q^0\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

De la primera condición se tiene que $\left(q^0\right)^2 - |\boldsymbol{q}|^2 < 0$, por lo que $|\boldsymbol{q}|^2 > \left(q^0\right)^2 \geq 0$, es decir, $\boldsymbol{q}$ es no nulo. Llevando esto a la segunda condición se sigue entonces que necesariamente

[4]Nótese que los únicos cuaterniones que a pesar de ser puros no los denotamos como se menciona aquí son precisamente las unidades imaginarias i, j y k. Cuestión de convención.

[5]Tomamos la notación $qq \equiv q^2$, la cual no se debe confundir con una segunda componente y menos aún para una expresión del tipo $\boldsymbol{q}^2$ donde dicha interpretación no tiene cabida.

$q^0 = 0$ y q es un cuaternión puro, lo que a su vez implica de la primera condición que es unidad.

Se define entonces el conjunto de todos los cuaterniones cuyo cuadrado es igual a -1, $\mathbb{S}$:

$$\mathbb{S} = \{q \in \mathbb{H} \mid q^2 = -1\} \tag{2.15}$$

Observación 2.3. Acabamos de ver que este conjunto es el mismo que el de todos los cuaterniones puros unidad, $\mathbb{S} = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{H}_P \mid |\boldsymbol{u}| = 1\}$.

Proposición 2.5. El conjunto de combinaciones $\mathbb{R}$-lineales de 1 y un cuaternión puro unidad $\boldsymbol{u}$, que llamamos $C_{\boldsymbol{u}}$, es un subálgebra de $\mathbb{H}$ isomorfo al cuerpo de los complejos.

$$C_{\boldsymbol{u}} = \{\lambda + \mu\boldsymbol{u} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{u} \in \mathbb{S}\} \cong \mathbb{C}$$

Demostración. Primero mostramos que este conjunto forma un subálgebra de $\mathbb{H}$. Sean $z_1 = \lambda + \mu\boldsymbol{u},\ z_2 = \alpha + \beta\boldsymbol{u}$ elementos de $C_{\boldsymbol{u}}$,

$$z_1 + z_2 = (\lambda + \mu\boldsymbol{u}) + (\alpha + \beta\boldsymbol{u}) = (\lambda + \alpha) + (\mu + \beta)\boldsymbol{u}$$

El conjunto es cerrado bajo la suma de cuaterniones, es decir, $z_1 + z_2 \in C_{\boldsymbol{u}}$. Ahora, veamos que también lo es bajo multiplicación por escalares y de cuaterniones. Sea $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$\gamma z_1 = \gamma(\lambda + \mu\boldsymbol{u}) = \gamma\lambda + \gamma\mu\boldsymbol{u}$$

$$z_1 z_2 = (\lambda + \mu\boldsymbol{u})(\alpha + \beta\boldsymbol{u}) = \lambda\alpha + \lambda\beta\boldsymbol{u} + \mu\alpha\boldsymbol{u} + \mu\beta\boldsymbol{u}^2 = (\lambda\alpha - \mu\beta) + (\lambda\beta + \mu\alpha)\boldsymbol{u}$$

y así $\gamma z_1,\ z_1 z_2 \in C_{\boldsymbol{u}}$. En particular, nótese que cualquier par de elementos de $C_{\boldsymbol{u}}$ tienen parte imaginaria $\mathbb{R}$-proporcional, por lo que siempre conmutan. Ahora, el isomorfismo en cuestión es $\phi : C_{\boldsymbol{u}} \to \mathbb{C}$ caracterizado por

$$(\lambda + \mu\boldsymbol{u}) \mapsto (\lambda + i\mu)$$

donde i es ahora la unidad imaginaria en $\mathbb{C}$. Veamos que, efectivamente, preserva la estructura de las operaciones suma y producto:

$$\phi\,(z_1 + z_2) = (\lambda + \alpha) + i(\mu + \beta) = (\lambda + i\mu) + (\alpha + i\beta) = \phi(z_1) + \phi(z_2)$$

$$\phi\,(z_1 z_2) = (\lambda\alpha - \mu\beta) + i(\lambda\beta + \mu\alpha) = (\lambda + i\mu)(\alpha + i\beta) = \phi(z_1)\phi(z_2)$$

Un último paso es comprobar que ϕ lleva a la unidad de $C_{\boldsymbol{u}}$ a la unidad de $\mathbb{C}$, algo inmediato

$$\phi(1) = \phi(1 + 0\boldsymbol{u}) = 1 + i0 = 1 \qquad \blacksquare$$

Así como $\mathbb{R}$ está incluido en $\mathbb{H}$, la proposición 2.5 nos dice que $\mathbb{C}$ tiene infinitas maneras de incluirse en $\mathbb{H}$, pues existe un $C_{\boldsymbol{u}}$ para cada $\boldsymbol{u} \in \mathbb{S}$. Una notación alternativa para este conjunto es

$$C_{\boldsymbol{u}} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\boldsymbol{u} \tag{2.16}$$

y además el conjunto de los cuaterniones puede expresarse en función de estos conjuntos:

$$\mathbb{H} = \bigcup_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{S}} C_{\boldsymbol{u}} \tag{2.17}$$

Un ejemplo simple es considerar que $\mathbb{C}$ está contenido en $\mathbb{H}$ usando $\boldsymbol{u} = i$, unidad imaginaria cuaterniónica, para el conjunto 2.16. Una vez hecho esto, podemos introducir una identificación alternativa de cada cuaternión $q = t + xi + yj + zk$ mediante dos de estos números complejos, v y w:

$$q = v + wj \qquad\qquad v = t + xi, \; w = y + zi \tag{2.18}$$

Esta convención no es única y de hecho la identifiación de $\mathbb{H}$ mediante $\mathbb{C}^2$ será utilizada de nuevo cuando introduzcamos conceptos de derivación para los cuaterniones.

2.2.2. Descomposición polar. Potencias enteras y raíces

Para esta sección usamos [10] como texto de referencia. Una manera de denotar un cuaternión que tiene gran interés es la llamada *descomposición polar*. Claramente lo que se pretende es emular lo que se hace en el cuerpo de los complejos. Para ello, consideremos un cuaternión expresado como el producto de su módulo por otro cuaternión, que necesariamente (siempre que no sea nulo) es el cuaternión que definimos a continuación:

Definición 2.7. *Sea $q \in \mathbb{H}$ no nulo. Se define el versor de q como*

$$U(q) = \frac{q}{|q|}$$

Así pues, trivialmente cada cuaternión no nulo se puede expresar como

$$q = ru$$

con $r = |q| \in \mathbb{R}$ y $u = U(q) \in \mathbb{H}$, unidad. Esta notación no nos dice mucho aún, sin embargo, continuemos desarrollándola y llegaremos a algo interesante:

$$q = ru = |q|\frac{q}{|q|} = |q|\left(\frac{q^0 + \boldsymbol{q}}{|q|}\right) = |q|\left(\frac{q^0}{|q|} + \frac{\boldsymbol{q}}{|q|}\right)$$

Siempre que la parte imaginaria del cuaternión no sea nula, multipliquemos y dividamos el segundo sumando por $|\boldsymbol{q}|$:

$$q = |q| \left(\frac{q^0}{|q|} + \frac{|\boldsymbol{q}|}{|q|} \frac{\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{q}|} \right) = |q| \left(\frac{q^0}{|q|} + \frac{|\boldsymbol{q}|}{|q|} U(\boldsymbol{q}) \right) \tag{2.19}$$

De la siguiente igualdad válida para cualquier cuaternión

$$|q|^2 = \left(q^0\right)^2 + |\boldsymbol{q}|^2$$

obtenemos las siguientes desigualdades:

$$|q^0| \leq |q| \qquad\qquad |\boldsymbol{q}| \leq |q|$$

Por tanto, para cuaterniones no nulos se cumple que

$$-1 \leq \frac{q^0}{|q|} \leq 1 \qquad\qquad 0 \leq \frac{|\boldsymbol{q}|}{|q|} \leq 1 \tag{2.20}$$

De la primera desigualdad concluimos que para cada cuaternión no nulo podemos asignar un único $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{q^0}{|q|}$$

Para este dominio de θ se cumple la ecuación $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$, por lo que

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{q^0}{|q|}\right)^2} = \sqrt{\frac{|q|^2 - (q^0)^2}{|q|^2}} = \sqrt{\frac{|\boldsymbol{q}|^2}{|q|^2}} = \frac{|\boldsymbol{q}|}{|q|}$$

lo cual es consistente con la segunda desigualdad en (2.20). Así pues, la expresión de un cuaternión de parte imaginaria no nula que dábamos en (2.19) queda

$$q = |q| \left(\cos\theta + U(\boldsymbol{q}) \sin\theta\right) \tag{2.21}$$

Esta es la llamada descomposición polar de un cuaternión. Recordemos que al presentar esta descomposición asumimos que la parte imaginaria del cuaternión es no nula para que $U(\boldsymbol{q})$ estuviera definido. En caso de ser un cuaternión tipo real se tendrá

$$q = q^0 = |q^0| \cos\theta$$

con $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ según q^0 sea positivo o negativo respectivamente, lo cual se puede considerar como un caso particular de (2.21) donde $\sin\theta = 0$ se traduzca en hacer que $\boldsymbol{q}$ tienda a cero en la expresión:

$$\lim_{\boldsymbol{q}\to\boldsymbol{0}} U(\boldsymbol{q}) \sin\theta = \lim_{\boldsymbol{q}\to\boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{q}|} \frac{|\boldsymbol{q}|}{|q|} = \lim_{\boldsymbol{q}\to\boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{q}}{|q|} = \boldsymbol{0}$$

Aunque hemos restringido el dominio posible de este ángulo θ que asociamos al cuaternión, de la periodicidad de las funciones trigonométricas seno y coseno sabemos que cualquier ángulo que sea suma de este θ y $2\pi n$ donde n es un entero también es válido para usar la descomposición polar del cuaternión. Distinguimos entonces entre el *argumento principal* del cuaternión, denotado mediante $\mathrm{Arg}(q)$, que es único y en el intervalo $[0, \pi]$; y el conjunto de *argumentos* del cuaternión, $\arg(q) = \{\mathrm{Arg}(q) + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Ya hemos visto en la proposición 2.5 que los cuaterniones que son combinación $\mathbb{R}$-lineal de 1 y un cuaternión puro unidad forman una estructura isomorfa a $\mathbb{C}$ y por tanto podemos introducir la descomposición polar típica de este cuerpo. Sin embargo, la forma polar en el cuerpo de los complejos admitía ángulos en el intervalo $(-\pi, \pi]$ para el argumento principal (típico) que se define allí. En el caso de los cuaterniones -considerando un cuaternión $q \notin \mathbb{R}$[6]- fijamos un cuaternión puro $\boldsymbol{q}$ del que a su vez podemos obtener un cuaternión puro unidad, $U(\boldsymbol{q})$, para formar el plano complejo asociado, $C_{U(\boldsymbol{q})}$. La expresión (2.19) nos indica que solo podemos acceder al semiplano «superior» de este plano complejo contenido en $\mathbb{H}$, pues la parte que multiplica a $U(\boldsymbol{q})$ es positiva y es por ello que nos basta el dominio $[0, \pi]$ para identificar este cuaternión (con 0 y π contenidos en el intervalo para identificar cuaterniones reales). Todos los cuaterniones cuya parte imaginaria tenga misma dirección y sentido que $\boldsymbol{q}$ tiene asociado un ángulo en dicho intervalo, pero ¿qué ocurre con los del semiplano «inferior»? Estos cuaterniones son aquellos con parte imaginaria con la misma dirección y sentido que $-\boldsymbol{q}$. A partir de ellos obtenemos un nuevo plano complejo, $C_{U(-\boldsymbol{q})}$, cuyo eje imaginario es positivo en sentido contrario al del plano previo. Llamemos q' a un cuaternión como el descrito anteriormente, es decir, con $\boldsymbol{q}' = -\alpha\boldsymbol{q}$, $\alpha > 0$. Cada q' tiene asociado un argumento principal para el semiplano superior que define, $\theta' \in [0, \pi]$:

$$q' = |q'| \left(\cos\theta' + U(\boldsymbol{q}')\sin\theta'\right)$$

Notemos que

$$U(\boldsymbol{q}') = \frac{\boldsymbol{q}'}{|\boldsymbol{q}'|} = \frac{-\alpha\boldsymbol{q}}{|-\alpha\boldsymbol{q}|} = \frac{-\alpha}{|-\alpha|}\frac{\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{q}|} = -\frac{\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{q}|} = -U(\boldsymbol{q})$$

y así

$$q' = |q'| \left(\cos\theta' - U(\boldsymbol{q})\sin\theta'\right) = |q'| \left(\cos(-\theta') + U(\boldsymbol{q})\sin(-\theta')\right) \tag{2.22}$$

donde hemos usado las relaciones

[6] Un cuaternión $q \notin \mathbb{R}$ es una manera abreviada de decir que tiene parte imaginaria no nula.

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

Con (2.22) englobamos estos cuaterniones en el plano complejo definido a través de $\boldsymbol{q}$ con un ángulo $-\theta' \in [-\pi, 0]$ para la expresión (2.21), lo cual es totalmente análogo a la descomposición polar definida en $\mathbb{C}$ con ángulos en el intervalo $(-\pi, \pi]$ para $C_{U(\boldsymbol{q})}$.

Hemos llevado a cabo todo este razonamiento también para poder interpretar correctamente el producto de dos cuaterniones con partes imaginarias $\mathbb{R}$-proporcionales expresados en su descomposición polar, independientemente de si van en el mismo sentido o no. Sean entonces dos cuaterniones, q_1, q_2, con partes imaginarias no nulas $\mathbb{R}$-proporcionales, es decir, $\boldsymbol{q}_2 = \lambda \boldsymbol{q}_1$ con $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Ambos admiten una respectiva descomposición polar:

$$q_1 = |q_1| \left(\cos\theta_1 + U(\boldsymbol{q}_1)\sin\theta_1\right) \qquad q_2 = |q_2| \left(\cos\theta_2 + U(\boldsymbol{q}_2)\sin\theta_2\right)$$

Consideremos el producto de estos cuaterniones:

$$|q_1||q_2| \left(\cos\theta_1\cos\theta_2 + U(\boldsymbol{q}_1)\sin\theta_1\cos\theta_2 + U(\boldsymbol{q}_2)\cos\theta_1\sin\theta_2 + U(\boldsymbol{q}_1)U(\boldsymbol{q}_2)\sin\theta_1\sin\theta_2\right)$$

En este momento elegimos un cuaternión de los dos que nos servirá para expresar ambos como elementos de un solo plano complejo contenido en $\mathbb{H}$ tal como se ha descrito previamente. En este caso elegimos q_1, por lo que nos interesa expresar el versor de $\boldsymbol{q}_2$ en función del de $\boldsymbol{q}_1$:

$$U(\boldsymbol{q}_2) = \frac{\boldsymbol{q}_2}{|\boldsymbol{q}_2|} = \frac{\lambda\boldsymbol{q}_1}{|\lambda\boldsymbol{q}_1|} = \frac{\lambda}{|\lambda|}\frac{\boldsymbol{q}_1}{|\boldsymbol{q}_1|} = \begin{cases} U(\boldsymbol{q}_1) & \text{si } \lambda > 0 \\ -U(\boldsymbol{q}_1) & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

$\underline{\lambda > 0}$:

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= |q_1||q_2| \left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + U(\boldsymbol{q}_1)(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right] = \\ &= |q_1||q_2| \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + U(\boldsymbol{q}_1)\sin(\theta_1 + \theta_2)\right] \end{aligned} \tag{2.23}$$

$\underline{\lambda < 0}$:

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= |q_1||q_2| \left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + U(\boldsymbol{q}_1)(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)\right] = \\ &= |q_1||q_2| \left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + U(\boldsymbol{q}_1)\sin(\theta_1 - \theta_2)\right] \end{aligned} \tag{2.24}$$

Si consideramos $\lambda = 0$ entonces q_2 es un cuaternión real. Para ese caso -considerando el argumento principal- teníamos $\theta_2 = 0$ o $\theta_2 = \pi$ según q_2 sea positivo o negativo, respectivamente. Así pues,

$$q_1 q_2 = |q_1||q_2| \cos\theta_2 \left(\cos\theta_1 + U(\boldsymbol{q}_1)\sin\theta_1\right)$$

Esta expresión es consistente con las dos anteriores (con $\lambda > 0$ o $\lambda < 0$): para $\theta_2 = 0$ inmediatamente y para $\theta_2 = \pi$ teniendo en cuenta que $\cos(\theta_1 + \pi) = \cos(\theta_1 - \pi) = -\cos\theta_1$ y $\sin(\theta_1 + \pi) = \sin(\theta_1 - \pi) = -\sin\theta_1$.

Pasamos a introducir un teorema que tiene su análogo directo en $\mathbb{C}$, la fórmula de De Moivre. Para ello, establecemos la operación *potencia de un cuaternión por un entero*. Hasta ahora hemos considerado cuaterniones al cuadrado. Definir q^n para $n \in \mathbb{N}$ es sencillo y, dicho de manera intuitiva, es el producto de q por sí mismo n veces. Sabemos que de esta familiar definición, dados $n, m \in \mathbb{N}$, se obtienen las propiedades

$$q^n q^m = q^{n+m} \qquad\qquad (q^n)^m = q^{nm} \tag{2.25}$$

Definimos un cuaternión -no nulo- elevado a un entero negativo a partir de la definición para enteros positivos como $q^{-n} := (q^{-1})^n$ con $n \in \mathbb{N}$. La propiedad de suma de exponentes se cumple para enteros negativos. Es sencillo probar que $q^n (q^{-1})^n = 1$ gracias a la asociatividad de la multiplicación, por lo que se tiene que

$$(q^{-1})^n = (q^n)^{-1}$$

De este resultado se puede deducir que también se cumple la propiedad de multiplicación de exponentes para esta definición. Nos faltaría considerar un cuaternión elevado a 0, pero es conocido que la definición adecuada es $q^0 = 1$ ya que vemos natural extender la propiedad de la suma de exponentes dada en (2.25) para cualquier par de enteros, obteniendo entonces el siguiente resultado:

$$q^n q^{-n} = q^{n-n} = q^0$$

y acabábamos de ver que el producto con el que se comienza es la unidad, pues q^{-n} es el inverso multiplicativo de q^n.

Teorema 2.5 (Fórmula de De Moivre). *Sea un cuaternión $q \notin \mathbb{R}$ unidad:*

$$q = \cos\theta + U(\boldsymbol{q})\sin\theta$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$q^n = \cos(n\theta) + U(\boldsymbol{q})\sin(n\theta)$$

Demostración. Para $n = 0$ el resultado es inmediato. Probemos por inducción para los enteros positivos. El caso $n = 1$ se cumple trivialmente. Supongamos que el resultado es válido para cierto $n \geq 1$ y evaluemos el caso $n + 1$:

$$q^{n+1} = q^n q = (\cos\theta + U(\boldsymbol{q})\sin\theta)^n (\cos\theta + U(\boldsymbol{q})\sin\theta) =$$
$$= (\cos(n\theta) + U(\boldsymbol{q})\sin(n\theta))(\cos\theta + U(\boldsymbol{q})\sin\theta)$$

Estamos en el caso de poder usar (2.23), por lo que

$$q^{n+1} = \cos(n\theta+\theta) + U(\boldsymbol{q})\sin(n\theta+\theta) = \cos((n+1)\theta) + U(\boldsymbol{q})\sin((n+1)\theta)$$

Pasemos ahora al caso de los enteros negativos. Sea $-n$ un entero negativo,

$$(\cos\theta + U(\boldsymbol{q})\sin\theta)^{-n} = \left[(\cos\theta + U(\boldsymbol{q})\sin\theta)^n\right]^{-1} = (\cos(n\theta) + U(\boldsymbol{q})\sin(n\theta))^{-1} =$$
$$= (\cos(n\theta) - U(\boldsymbol{q})\sin(n\theta))/(\cos^2(n\theta)+\sin^2(n\theta)) = \cos(-n\theta) + U(\boldsymbol{q})\sin(-n\theta) \quad \blacksquare$$

Podemos servirnos de la fórmula de De Moivre para definir las raíces de un cuaternión. Consideremos $q \notin \mathbb{R}$ y sea $k \in \mathbb{N}$. En virtud de que los números reales conmutan con cualquier cuaternión, tenemos de la definición de potencias naturales que hemos dado previamente que

$$q^k = |q|^k (\cos k\theta + U(\boldsymbol{q})\sin k\theta) \tag{2.26}$$

de donde podemos notar que la potencia natural de un cuaternión no lo «desbanca» del plano complejo $C_{U(\boldsymbol{q})}$. Así pues, definiendo una *raíz k-ésima* de un cuaternión $q \notin \mathbb{R}$ como un cuaternión p que cumpla $p^k = q$, los candidatos a raíz solo podrán ser aquellos que estén contenidos en $C_{U(\boldsymbol{q})}$ y así obtenemos un teorema completamente análogo al del caso complejo sobre raíces:

Teorema 2.6. *Dado $k \in \mathbb{N}$, todo cuaternión $q \notin \mathbb{R}$, $q = |q|(\cos\theta + U(\boldsymbol{q})\sin\theta)$, tiene exactamente k raíces k-ésimas distintas dadas por*

$$p_m = |q|^{1/k}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi m}{k}\right) + U(\boldsymbol{q})\sin\left(\frac{\theta+2\pi m}{k}\right)\right]; \qquad m = 0, 1, ..., k-1$$

Nótese que este teorema -que presentamos sin demostración por ser idéntica a la del caso complejo sustituyendo i por $U(\boldsymbol{q})$- requiere que el cuaternión tenga parte imaginaria no nula. Para cuaterniones reales este teorema no es válido y de hecho cada número real no nulo tiene infinitas raíces k-ésimas para $k \geq 2$. Esto lo podemos ver recordando que un cuaternión real es de la forma $q = |q|\cos\theta$ con su argumento principal nulo o igual a π según su signo. Notemos que podemos expresarlo como

$$q = |q|(\cos\theta + \boldsymbol{u}\sin\theta)$$

Para cada $\boldsymbol{u} \in \mathbb{S}$. Así pues, cada plano complejo $C_{\boldsymbol{u}}$ aporta k raíces y el número de planos complejos contenidos en $\mathbb{H}$ es incontablemente infinito.

2.2.3. Cuaterniones y matrices

Volvamos a la definición que hemos dado de los mismos al principio de este trabajo: un álgebra de división con el espacio vectorial subyacente $\mathbb{R}^4$. Por tanto, un representación totalmente lícita de los mismos es

$$q = q^0 + q^1 i + q^2 j + q^3 k = (q^0, q^1, q^2, q^3)$$

algo que ya habíamos adelantado en la definición de las unidades imaginarias 2.3. Fijemos un cuaternión p y definamos las siguientes funciones de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{H}$:

$$\begin{aligned} L_p(q) &= pq \\ R_p(q) &= qp \end{aligned} \tag{2.27}$$

Como el producto de cuaterniones es bilineal, ambas funciones (2.27) son $\mathbb{R}$-lineales. Por tanto, admiten una representación matricial. Las columnas de la matriz de una función lineal son las coordenadas de la acción de la función sobre cada elemento de la base. Obtengamos la matriz de L_p:

$$L_p(1) = p1 = p^0 + p^1 + p^2 j + p^3 k$$
$$L_p(i) = pi = p^0 i + p^1 i^2 + p^2 ji + p^3 ki = -p^1 + p^0 i + p^3 j - p^2 k$$
$$L_p(j) = pj = p^0 j + p^1 ij + p^2 j^2 + p^3 kj = -p^2 - p^3 i + p^0 j + p^1 k$$
$$L_p(k) = pk = p^0 k + p^1 ik + p^2 jk + p^3 k^2 = -p^3 + p^2 i - p^1 j + p^0 k$$

Así pues, tomando q como un vector columna, el cuaternión pq -también como vector columna- es

$$pq = L_p(q) = \begin{pmatrix} p^0 & -p^1 & -p^2 & -p^3 \\ p^1 & p^0 & -p^3 & p^2 \\ p^2 & p^3 & p^0 & -p^1 \\ p^3 & -p^2 & p^1 & p^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^0 \\ q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

Análogamente, evaluamos $1p$, ip, jp y kp para construir la matriz de R_p:

$$qp = R_p(q) = \begin{pmatrix} p^0 & -p^1 & -p^2 & -p^3 \\ p^1 & p^0 & p^3 & -p^2 \\ p^2 & -p^3 & p^0 & p^1 \\ p^3 & p^2 & -p^1 & p^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^0 \\ q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

Esta representación del producto de cuaterniones es especialmente relevante para el estudio que haremos posteriormente sobre la derivabilidad de funciones de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{H}$.

Ahora presentamos una nueva representación matricial de los cuaterniones, pero esta vez asociando a cada uno de ellos una matriz. Un espacio vectorial de dimensión cuatro es de las matrices complejas 2×2, $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Una base especialmente conocida de este espacio son las llamadas matrices de Pauli junto a la matriz identidad, que denotamos como σ_0:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

Estas matrices cumplen la relación general

$$\sigma_a \sigma_b = \delta_{a,b}\sigma_0 + i\sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{a,b,c}\sigma_c \tag{2.31}$$

con i la unidad imaginaria de $\mathbb{C}$ y para los índices $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$. Los símbolos $\delta_{a,b}$ y $\varepsilon_{a,b,c}$ son la delta de Kronocker y el tensor de Levi-Civita respectivamente. El primer objeto matemático se supone conocido. El tensor de Levi-Civita se define como sigue:

$$\varepsilon_{a,b,c} = \begin{cases} 1 & \text{si } (a,b,c) \text{ es una permutación par de } (1,2,3) \\ -1 & \text{si } (a,b,c) \text{ es una permutación impar de } (1,2,3) \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{2.32}$$

Ahora bien, la multiplicación de cuaterniones se puede definir postulando las propiedades (2.6) de las unidades imaginarias 2.3 e imponiendo distributividad respecto a la suma de cuaterniones. Podemos resumir dichas propiedades en una sola expresión introduciendo la siguiente notación:

$$e_1 = i \qquad e_2 = j \qquad e_3 = k \tag{2.33}$$

$$e_a e_b = -\delta_{a,b} + \sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{a,b,c} e_c \tag{2.34}$$

Es tentador pensar que una función $\mathbb{R}$-lineal que lleve cada unidad imaginaria e_a a una matriz de Pauli σ_a y la unidad a σ_0 puede ser un morfismo, esto es, que preserve las operaciones definidas en cada espacio. Aunque sí lo sería considerando únicamente el aspecto vectorial de ambos espacios (suma y multiplicación por escalares), podemos ver que en realidad las expresiones (2.34) y (2.31) no son completamente análogas y por tanto no reproducen una multiplicación análoga. Consideremos entonces lo siguiente: cada matriz de Pauli multiplicada por la unidad imaginaria -compleja- e invirtiendo su índice, es decir, haciendo $a \mapsto 4-a$. Así, (2.31) queda

$$i\sigma_{4-a} i\sigma_{4-b} = i^2 \left(\delta_{4-a,4-b}\sigma_0 + i \sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{4-a,4-b,c}\sigma_c \right) = -\delta_{a,b}\sigma_0 - \sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{4-a,4-b,c} i\sigma_c$$

Nótese que hemos usado que $\delta_{4-a,4-b} = \delta_{a,b}$. Intentemos escribir el sumatorio de manera que podamos interpretar más fácilmente la expresión. Para ello cambiamos de variable de suma por un índice $c' = 4-c$ que tiene el mismo recorrido que c:

$$\sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{4-a,4-b,c} i\sigma_c = \sum_{c'=1}^{3} \varepsilon_{4-a,4-b,4-c'} i\sigma_{4-c'}$$

El invertir los índices haciendo $a \mapsto 4-a$ hace que $a = 2$ sea un punto fijo, con lo que solo se intercambian 1 y 3. Por tanto, para los casos en los que el tensor no se anula se tiene simplemente una permutación del 1 y el 3 y así $\varepsilon_{4-a,4-b,4-c'} = -\varepsilon_{a,b,c'}$ en general. Rebautizamos al índice c' como c ya que es mudo y obtenemos finalmente:

$$i\sigma_{4-a} i\sigma_{4-b} = -\delta_{a,b}\sigma_0 + \sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{a,b,c} i\sigma_{4-c} \tag{2.35}$$

Esta expresión sí es totalemente análoga a (2.34) haciendo las identificaciones entre unidades cuaterniónicas y matrices:

$$1 \leftrightarrow \sigma_0 \qquad\qquad e_a \leftrightarrow i\sigma_{4-a}$$

Por tanto, podemos identificar cualquier cuaternión $q = q^0 + q^1 i + q^2 j + q^3 k$ con una matriz del espacio $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ usando el morfismo inyectivo $\Phi : \mathbb{H} \to M_{2\times 2}(\mathbb{C})$,

$$\Phi(q) = q^0\sigma_0 + q^1 i\sigma_3 + q^2 i\sigma_2 + q^3 i\sigma_1 \tag{2.36}$$

Esta última expresión se puede escribir más compactamente como

$$\Phi(q) = q^0\sigma_0 + i\sum_{a=1}^{3} q^a \sigma_a$$

Sin embargo, lo más usual es presentarla matricialmente:

$$\Phi(q) = \begin{pmatrix} q^0 + iq^1 & q^2 + iq^3 \\ -q^2 + iq^3 & q^0 - iq^1 \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

Podemos enunciar algunas propiedades básicas de esta representación matricial de los cuaterniones.

i) Para cuaterniones que pertenecen al plano complejo C_i (recordar la proposición 2.5), es decir, con $q^2 = q^3 = 0$, $\Phi(q)$ es diagonal.

ii) $|q|^2 = \det(\Phi(q))$

iii) $\Phi(\bar{q}) = [\Phi(q)]^{\dagger}$[7]

iv) Para q unidad se tiene de ii) que $\det(\Phi(q)) = 1$ y además $\Phi(q)$ es unitaria:

$$\Phi(q)\,[\Phi(q)]^{\dagger} = \sigma_0$$

2.3. Rotaciones espaciales

Parte del motivo del resurgimiento relativamente reciente de los cuaterniones fue su uso para representar rotaciones espaciales para gráficos en ordenador y sistemas de navegación. Las rotaciones codificadas mediante cuaterniones se almacenan con menos memoria respecto al uso de matrices; y el producto de cuaterniones como concatenación de rotaciones es computacionalmente más eficiente que el matricial. Además de evitar distintos problemas como el Gimbal Lock[8], un aspecto de gran interés de este método es la fácil interpolación entre rotaciones. En esta sección presentaremos brevemente este tratamiento apoyándonos en el texto [10].

En la sección 2.2 discutimos que el conjunto de los cuaterniones puros y P, el espacio euclídeo y orientado $\mathbb{R}^3$, son isomorfos:

$$\mathbb{H}_P \cong P$$

Sea entonces $\boldsymbol{v} \in \mathbb{H}_P$ un vector (no hacemos distinción entre vector y cuaternión puro) que deseamos rotar un ángulo φ alrededor de un eje con dirección dada por el vector unitario $\boldsymbol{u} \in \mathbb{S} \subset \mathbb{H}_P$. Supongamos conocida la fórmula de Euler-Rodrigues, la cual nos dice que el vector rotado, $\boldsymbol{v}'$, es

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u})(1 - \cos\varphi) + \boldsymbol{v}\cos\varphi + (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})\sin\varphi \tag{2.38}$$

El sentido de rotación se dice respecto al semieje para el que $\boldsymbol{v}$ tiene proyección positiva. En la construcción de esta fórmula se supone $\boldsymbol{u}$ tal que $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} > 0$, de modo que se tiene que la rotación es en sentido antihorario para ángulos positivos; y horario para ángulos negativos, es decir, el convenio usual.

[7] $\dagger$ denota matriz traspuesta conjugada o adjunta.

[8] El Gimbal Lock es la situación de pérdida de uno de los tres grados de libertad que usamos para describir la orientación de un objeto al usarlos de manera jerarquizada.

Proposición 2.6. Dado un vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{H}_P$, el vector $\boldsymbol{v}'$ resultante de rotar $\boldsymbol{v}$ un ángulo φ alrededor de un eje con dirección dada por el unitario $\boldsymbol{u} \in \mathbb{S}$ es el siguiente producto cuaterniónico

$$\boldsymbol{v}' = r\boldsymbol{v}r^{-1}$$

con r el cuaternión que codifica la rotación en cuestión de la siguiente manera:

$$r = \cos(\varphi/2) + \boldsymbol{u}\sin(\varphi/2)$$

Demostración. Por cálculo directo se llega a la fórmula de Euler-Rodrigues (2.38) para nuestro vector rotado. Desarrollo en anexo B. ∎

Observación 2.4. El cuaternión que codifica la rotación,

$$r = \cos(\varphi/2) + \boldsymbol{u}\sin(\varphi/2)$$

está contenido en el plano complejo $C_{\boldsymbol{u}}$, por lo que admite ser expresado como $e^{\boldsymbol{u}\frac{\varphi}{2}}$.

La fórmula de Euler-Rodruigues es compacta, pues solo hay que almacenar cuatro escalares para codificar una rotación: los tres que identifican al eje y el ángulo. Sin embargo, componer rotaciones sucesivas resultará en expresiones cada vez más complicadas y, por tanto, de difícil interpretación a primera vista, cuando quizá nos interese saber el eje y ángulo de rotación equivalentes a dos rotaciones distintas sucesivas. La notación cuaterniónica es ventajosa en este sentido y para ver esta y algunas otras propiedades introducimos la rotación de un vector caracterizada por el cuaternión r como la restriccón a $\mathbb{H}_P$ de una función más general:

Definición 2.8. *Dado $r \in \mathbb{H}$ no nulo se define la función rotación $\rho_r : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ como*

$$\rho_r(q) = rqr^{-1}$$

Para enunciar algunas propiedades de esta función sean $r_1, r_2 \in \mathbb{H}\backslash\{0\}$, $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

i) $\mathbb{R}$-linealidad. $\quad \rho_{r_1}(\lambda q_1) = \lambda\rho_{r_1}(q_1) \qquad \rho_{r_1}(q_1 + q_1) = \rho_{r_1}(q_1) + \rho_{r_1}(q_2)$

ii) Automorfismo isométrico de $\mathbb{H}$. $\quad \rho_{r_1}(q_1q_2) = \rho_{r_1}(q_1)\rho_{r_1}(q_2) \qquad |\rho_{r_1}(q_1)| = |q_1|$

iii) $\rho_{r_2}[\rho_{r_1}(q_1)] = \rho_{r_2r_1}(q_1)$

Demostración. La primera propiedad i) es inmediata de la asociatividad del producto de cuaterniones y la conmutatividad de los reales con cualquier cuaternión, así como de la bilinealidad de esta operación. Para comprobar la segunda ii) veamos primero que ρ_{r_1} tiene inversa:

$$\rho_{r_1}^{-1}(q) = r_1^{-1} q r_1$$

Efectivamente, para todo $q \in \mathbb{H}$, $\rho_{r_1}^{-1}[\rho_{r_1}(q)] = r_1^{-1}(r_1 q r_1^{-1}) r_1 = (r_1^{-1} r_1) q (r_1^{-1} r_1) = q$. Nótese que

$$\rho_{r_1}^{-1} = \rho_{r_1{}^{-1}}$$

Ahora probemos que $\rho_{r_1}(q_1 q_2) = \rho_{r_1}(q_1)\rho_{r_1}(q_2)$

$$\rho_{r_1}(q_1 q_2) = r_1(q_1 q_2) r_1^{-1} = r_1 q_1 r_1^{-1} r_1 q_2 r_1^{-1} = \rho_{r_1}(q_1)\rho_{r_1}(q_2)$$

Ya visto que es un automorfismo (isomorfismo sobre sí mismo) vemos que es isométrico usando las proposiciones 2.3 y 2.4:

$$|\rho_{r_1}(q_1)| = \left|r_1 q_1 r_1^{-1}\right| = |r_1| \, |q_1| \left|r_1^{-1}\right| = |q_1|$$

Pasamos a demostrar la última propiedad iii), quizás la más interesante en cuanto a rotaciones espaciales:

$$\rho_{r_2}[\rho_{r_1}(q_1)] = r_2(r_1 q_1 r_1^{-1}) r_2^{-1} = (r_2 r_1) q_1 (r_1^{-1} r_2^{-1}) = (r_2 r_1) q_1 (r_2 r_1)^{-1} = \rho_{r_2 r_1}(q_1) \quad \blacksquare$$

Cuando r es un cuaternión unidad escrito en la forma dada en la proposición 2.6 y q un cuaternión puro entonces ρ_r es la función que rota q un ángulo φ alrededor del eje marcado por $\boldsymbol{u}$, como hemos comprobado previamente. Dijimos que la propiedad iii) es interesante para las rotaciones espaciales porque nos dice que rotar un vector mediante una rotación caracterizada por r_1 y rotar este resultado a su vez mediante otra caracterizada por r_2 es equivalente a realizar una rotación codificada por el cuaternión $r_2 r_1$ ya que, como debe ser, es de nuevo un cuaternión unidad. Tenemos entonces un método de cálculo de un eje y ángulo de giro equivalente a dos rotaciones sucesivas mediante un simple producto cuaterniónico.

Para finalizar esta sección, veamos que este método de cálculo de rotaciones -y equivalentemente la fórmula de Euler-Rodrigues- es consistente con el uso de matrices para rotar un vector. Consideremos pues el vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{H}_P$ y $r \in \mathbb{H}$ el cuaternión unidad dado por

$$r = \cos(\varphi/2) + \boldsymbol{u}_3 \sin(\varphi/2)$$

con $\boldsymbol{u}_3 \in \mathbb{S}$ que además cumple que $\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{v} > 0$. Sea ahora $\boldsymbol{u}_1$ otro vector unitario, perpendicular a $\boldsymbol{u}_3$, es decir, cualquiera tal que $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_3 = 0$. Definimos por último un nuevo vector unitario a partir de estos últimos: $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1$. Es claro que estos vectores son ortogonales entre sí por lo que el conjunto $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ forma una base ortogonal del espacio tridimensional. La restricción de la función rotación definida en 2.8 al conjunto de cuaterniones puros tiene su recorrido en este mismo conjunto como demostramos en la proposición 2.6. Esto junto a la $\mathbb{R}$-linealidad de ρ_r nos conduce a concluir que esta función admite representación matricial. Para conseguirla debemos obtener las componentes de la acción de ρ_r sobre cada vector base. Para este cálculo usamos la fórmula de Euler-Rodrigues (2.38):

$$\rho_r(\boldsymbol{u}_1) = r\boldsymbol{u}_1 r^{-1} = \boldsymbol{u}_3(\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_3)(1-\cos\varphi) + \boldsymbol{u}_1 \cos\varphi + (\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1)\sin\varphi =$$
$$= \boldsymbol{u}_1 \cos\varphi + \boldsymbol{u}_2 \sin\varphi$$

$$\rho_r(\boldsymbol{u}_2) = r\boldsymbol{u}_2 r^{-1} = \boldsymbol{u}_3(\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3)(1-\cos\varphi) + \boldsymbol{u}_2 \cos\varphi + (\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_2)\sin\varphi =$$
$$= \boldsymbol{u}_2 \cos\varphi + \boldsymbol{u}_3 \times (\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1)\sin\varphi = \boldsymbol{u}_2 \cos\varphi + [\boldsymbol{u}_3(\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1) - \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_3)]\sin\varphi =$$
$$= -\boldsymbol{u}_1 \sin\varphi + \boldsymbol{u}_2 \cos\varphi$$

$$\rho_r(\boldsymbol{u}_3) = r\boldsymbol{u}_3 r^{-1} = \boldsymbol{u}_3(\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_3)(1-\cos\varphi) + \boldsymbol{u}_3 \cos\varphi + (\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_3)\sin\varphi =$$
$$= \boldsymbol{u}_3(1-\cos\varphi) + \boldsymbol{u}_3 \cos\varphi = \boldsymbol{u}_3$$

Así pues, la igualdad planteada en la proposición 2.6 en representación matricial queda

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

lo cual reconocemos como la rotación del vector $\boldsymbol{v}$ alrededor del eje marcado por el vector unitario $\boldsymbol{u}_3$ un ángulo φ.

3. Análisis en cuaterniones

3.1. Funciones elementales

En esta sección introducimos algunas funciones elementales de variable cuaterniónica. Las más relevantes para este trabajo son las lineales y polinómicas, en las cuales nos extenderemos más. Las restantes estarán más a modo de presentación de las mismas.

3.1.1. Funciones lineales

A lo hora de extender nuestra noción de función lineal para los cuaterniones debemos tener en cuenta el hecho de que la multiplicación de cuaterniones no goza de la propiedad conmutativa.

Definición 3.1. *Una función $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ se dice lineal por la derecha si ocurre que $f(q_1 + q_2) = f(q_1) + f(q_2)$ y $f(q_1 q_1) = q_1 f(q_2)$ para todo par $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$. A su vez, diremos que f es lineal por la izqueirda si $f(q_1 + q_2) = f(q_1) + f(q_2)$ y $f(q_1 q_2) = f(q_1) q_2$ para todo par $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$.*

Proposición 3.1. Una función $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ es lineal por la derecha si y solo si existe $a \in \mathbb{H}$ de modo que

$$f(q) = qa \qquad \forall q \in \mathbb{H}$$

De manera similar, f es lineal por la izquierda si y solo si existe $b \in \mathbb{H}$ de modo que

$$f(q) = bq \qquad \forall b \in \mathbb{H}$$

Demostración. Demostramos solo el caso de linealidad por la derecha, pues el de linealidad por la izquierda es análogo. Veamos primero que la forma propuesta de la función implica que es lineal por la izquierda. Sean $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, al ser la función propuesta un producto cuaterniónico tenemos en virtud de la bilinealidad del mismo que

$$f(q_1 + q_2) = (q_1 + q_2)a = q_1 a + q_2 a = f(q_1) + f(q_2)$$

y, teniendo en cuenta que el producto es asociativo, que

$$f(q_1q_2) = (q_1q_2)a = q_1(q_2a) = q_1f(q_2)$$

Ahora, probemos que una función lineal por la derecha necesariamente tiene la forma propuesta:

$$f(q) = f(q1) = qf(1)$$

Poniendo $a \equiv f(1)$ terminamos esta demostración. ■

Observación 3.1. El valor que f toma para $q = 1$ puede ser cualquier cuaternión, incluido el 0 resultando así en la *función nula*, la cual es lineal por la derecha y por la izquierda.

3.1.2. Funciones polinómicas

Definición 3.2. *Dado n, entero no negativo, un monomio cuaterniónico de grado n es una función $M_n : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ formada a partir de un conjunto de cuaterniones no nulos $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ de modo que*

$$M_n(q) = a_0qa_1q \cdots a_{n-1}qa_n$$

Cuando todos estos a_l ($l = 0, 1, ..., n$) son la unidad obtenemos el monomio más simple de grado n: q^n. Un *polinomio cuaterniónico* se define como una suma finita de monomios cuaterniónicos. Dicho polinomio se dice de grado n, el mayor grado de los monomios que lo forman. Como cabe esperar, tratar con estos no es simple ya que la suma de dos monomios del mismo grado no es igual que en el caso real o complejo, donde siempre podemos usar la propiedad distributiva y sumar coeficientes, pues en el caso cuaterniónico cada monomio tiene múltiples coeficientes, tantos como su grado. Procedemos a definir un caso particular de polinomio cuaterniónico que podemos asemejar más a los ya conocidos, siempre que se tenga en cuenta la no conmutatividad, por lo que en realidad definimos dos clases de estos polinomios:

Definición 3.3. *Dado n, entero no negativo, un polinomio unilateral por la izquierda de grado n es una función $P_n : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ dada por*

$$P_n(q) = a_nq^n + a_{n-1}q^{n-1} + \cdots + a_1q + a_0$$

donde los $a_l \in \mathbb{H}$ ($l = 0, 1, ..., n$) y $a_n \neq 0$. De la misma manera se definen los polinomios unilaterales por la derecha.

Habiendo definido este tipo de funciones de variable cuaterniónica es natural preguntarse: ¿se cumple el teorema fundamental del Álgebra para $\mathbb{H}$? De hecho, hemos respondido inadvertidamente esta pregunta en secciones anteriores. En la sección 2.2.1 donde identificamos $\mathbb{H}$ como una unión de infinitos planos complejos, resolvimos la ecuación

$$q^2 = -1$$

equivalente a buscar los ceros del polinomio $q^2 + 1$. Usamos esta ecuación como definición del conjunto $\mathbb{S}$ (2.15) y vimos que es el conjunto de los cuaterniones puros unidad, es decir, el polinomio en cuestión tiene infinitos ceros. Más aún, en la sección 2.2.2 definimos las raíces de un cuaternión y vimos que los números reales no nulos tienen infinitas raíces en $\mathbb{H}$, por lo que cualquier polinomio del tipo $q^k + \lambda$ con $k \in \mathbb{N}$ y $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ es ejemplo de que no se cumple el teorema fundamental del Álgebra para $\mathbb{H}$.

3.1.3. Función exponencial. Logaritmos de un cuaternión

A la hora de definir una *función exponencial* para $\mathbb{H}$ nos interesa que cuando $q \in \mathbb{R}$ se reproduzca la exponencial real convencional; y para $q \notin \mathbb{R}$ obtengamos algo análogo a la exponencial compleja. Una definición razonable es entonces

$$e^q = e^{q^0 + U(\boldsymbol{q})|\boldsymbol{q}|} = e^{q^0} e^{U(\boldsymbol{q})|\boldsymbol{q}|} = e^{q^0}(\cos|\boldsymbol{q}| + U(\boldsymbol{q})\sin|\boldsymbol{q}|)$$

donde incluimos el caso puramente real estipulando que $U(\boldsymbol{q})\sin|\boldsymbol{q}|\big|_{\boldsymbol{q}=0} = \mathbf{0}$. En pos de obtener una definición más satisfactoria, definamos la exponencial como la serie de potencias:

$$e^q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!} \tag{3.1}$$

Las definiciones sobre sucesiones, series infinitas, convergencia... se suponen conocidas e inmediatamente aplicables a los cuaterniones. Teoremas como aquel que nos dice que la convergencia absoluta de una serie implica la convergencia de la misma se cumplen también para $\mathbb{H}$ ya que se trata de un espacio completo, pues lo hemos definido como $\mathbb{R}^4$ con una operación mulitplicación a partir de la cual definimos una norma idéntica a la usual, por lo que se cumple el teorema de Bolzano-Weirestrass[1]. Veamos pues que efectivamente esta serie es absolutamente convergente. De la proposición 2.3 es fácil probar

[1]El teorema de Bolzano-Weirestrass nos dice que todo conjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ que tenga una infinidad de puntos tendrá por lo menos un punto de acumulación en $\mathbb{R}^n$.

que para cada entero no negativo, n, se tiene que $|q^n| = |q|^n$. Por tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{q^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|q|^n}{n!}$$

Es bien sabido que la serie del miembro derecho de la igualdad converge para todo $\mathbb{R}$, en particular para $|q|$ a $e^{|q|}$, por lo que la serie de potencias (3.1) es absolutamente convergente para cada $q \in \mathbb{H}$ y así concluimos que la función exponencial está bien definida en $\mathbb{H}$.

Consideremos ahora la exponencial de la suma de dos cuaterniones:

$$e^{q_1+q_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q_1+q_2)^n}{n!}$$

Si q_1, q_2 conmutan podemos desarrollar la potencia de la suma con el teorema del binomio

$$e^{q_1+q_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q_1^k q_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{q_1^k}{k!} \frac{q_2^{n-k}}{(n-k)!}$$

Podemos identificar que el último miembro es el producto de Cauchy de las series de potencia exponenciales de q_1 y q_2, por lo que por el teorema de Mertens (teorema 8.46 en [8]) tenemos que

$$e^{q_1+q_2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_1^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_2^n}{n!} \right) = e^{q_1} e^{q_2}$$

Concluimos entonces que la propiedad de suma de exponentes se cumple para cada par de cuaterniones que conmutan o, equivalentemente, para todos aquellos pertenecientes a un mismo plano complejo $C_{\boldsymbol{u}}$, lo cual es favorable a nuestro objetivo de propiedades que debería cumplir la exponencial. Finalmente, como cada cuaternión de parte imaginaria no nula puede ser expresado de la forma $q = q^0 + U(\boldsymbol{q})|\boldsymbol{q}|$, la exponencial del mismo podrá ponerse como

$$e^q = e^{q^0} e^{U(\boldsymbol{q})|\boldsymbol{q}|}$$

ya que los números reales conmutan con cualquier cuaternión. Del desarrollo en serie de la exponencial de $U(\boldsymbol{q})|\boldsymbol{q}|$ obtenemos la fórmula de Euler evaluada en $|\boldsymbol{q}|$ de manera completamente análoga al caso complejo. Por tanto, nuestra definición inicial coincide con la definición mediante la serie de potencias:

$$e^q = e^{q^0}(\cos|\boldsymbol{q}| + U(\boldsymbol{q})\sin|\boldsymbol{q}|) \tag{3.2}$$

Con esta expresión es sencillo mostrar que la propiedad de suma de exponentes solo se puede cumplir para cuaterniones que conmutan: para cada par de cuaterniones q_1, q_2

siempre se debe cumplir $e^{q_1+q_2} = e^{q_2+q_1}$ ya que la suma sí es conmutativa; si consideramos que para este par se cumple la propiedad de suma de exponentes entonces debe ocurrir que $e^{q_1}e^{q_2} = e^{q_2}e^{q_1}$, lo cual se cumple si y solo si $\Im(e^{q_1}) \times \Im(e^{q_2}) = \mathbf{0}$. De (3.2) es sencillo ver que esto implica que $\boldsymbol{q}_1 \times \boldsymbol{q}_2 = \mathbf{0}$, es decir, los cuaterniones q_1, q_2 deben conmutar. Junto a esta, enunciamos algunas otras propiedades:

i) $e^{q_1+q_2} = e^{q_1}e^{q_2} \quad \Longleftrightarrow \quad q_1q_2 = q_2q_1$

ii) $e^q \neq 0 \qquad \forall q \in \mathbb{H}$

iii) $\overline{e^q} = e^{\bar{q}}$

iv) $(e^q)^n = e^{nq} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$

Habiendo caracterizado la función exponencial para $\mathbb{H}$, pasamos a definir un *logaritmo* de un cuaternión q no nulo como un cuaternión p tal que

$$e^p = q$$

Suponiendo $q \notin \mathbb{R}$, estos cuaterniones p son de la forma

$$p = \log|q| + U(\boldsymbol{q})\mathrm{arg}(q) \tag{3.3}$$

lo cual podemos comprobar por cálculo directo:

$$e^{\log|q|+U(\boldsymbol{q})\mathrm{arg}(q)} = e^{\log|q|}e^{U(\boldsymbol{q})\mathrm{arg}(q)} = |q|[\cos(\mathrm{arg}(q)) + U(\boldsymbol{q})\sin(\mathrm{arg}(q))] = q$$

Notemos que al usar el argumento de q, estamos abusando de la notación ya que esto es en realidad un conjunto de valores formados a partir del argumento principal. Por tanto, la ecuación (3.3) realemente quiere decir que para cada q existen infinitos p tales que $e^p = q$, uno por cada argumento válido de q. Al considerar cuaterniones reales los logaritmos posibles son

$$p = \log|q| + \boldsymbol{u}\mathrm{arg}(q) \tag{3.4}$$

para cualquier $\boldsymbol{u} \in \mathbb{S}$. Debido a que el conjunto de argumentos para $q \in \mathbb{R}$ son $2n\pi$ si $q > 0$; y $(2n+1)\pi$ si $q < 0$ con $n \in \mathbb{Z}$, es claro el porqué la elección de $\boldsymbol{u}$ es arbitraria: al evaluar la exponencial de un cuaternión de este tipo obtenemos $\cos(\mathrm{arg}(q)) = \pm 1$ y $\sin(\mathrm{arg}(q)) = 0$, siendo entonces la parte imaginaria del resultado siempre nula. Podemos definir una *función logaritmo* para cada cuaternión no nulo usando el argumento principal en las expresiones (3.3) y (3.4).

3.2. Derivación en cuaterniones

Establecido el álgebra de división $\mathbb{H}$ y algunas funciones elementales para el mismo, nos planteamos ahora definir el concepto de derivada en este sistema algebraico. El interés reside en que la extensión de la derivación de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ lleva a una teoría rica y exitosa. Dado que $\mathbb{H}$ es el siguiente paso en la definición de un sistema algebraico que mantenga el máximo número de propiedades de los cuerpos, queremos indagar en qué teoría resultará de este estudio y si tendrá resultados análogos a los ya conocidos. Así como en $\mathbb{C}$ las funciones que poseen derivada se dicen holomorfas, en $\mathbb{H}$ aquellas funciones que posean derivada -de la cual aún no establecemos la definición- las llamaremos *regulares*. Los conceptos de análisis complejo utilizados en las secciones siguientes se han consultado en el libro [11].

3.2.1. Primer intento de regularidad. Límite de cociente de incrementos

Recordemos brevemente la derivación en el cuerpo de los complejos: una función definida sobre el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$, se dice derivable (holomorfa) en un punto $z_0 \in \Omega$ si existe el límite del cociente de incrementos

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

donde $h \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ y consideramos siempre $z_0 + h \in \Omega$ de modo que el cociente esté bien definido. Podemos expresar f en función de sus campos escalares componentes:

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = u(z) + iv(z)$$

Nótese que no hacemos distinción entre funciones de dos variables reales y funciones de una sola variable compleja, solo tenemos que tener en cuenta que el concepto de derivabilidad es distinto si hablamos estrictamente de un caso u otro. La relación entre la derivación compleja y la diferenciabilidad de f como campo vectorial de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ viene dada por el siguiente resultado:

Teorema 3.1. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con Ω un abierto y sea $z_0 \in \Omega$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. f es holomorfa en el punto z_0.

2. f es diferenciable como campo vectorial en z_0 y se verifican las llamadas ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$$

En esta sitaución se tendrá que

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)$$

Recordemos también los siguientes operadores:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{3.5}$$

que actúan sobre una función $f = u + iv$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}[f] &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)[u + iv] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}[f] &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)[u + iv] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\end{aligned}$$

Es claro entonces que las ecuaciones de Cauchy-Riemann, dadas en el teorema 3.1, son equivalentes a

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0 \tag{3.6}$$

y que si f es holomorfa en z_0 se tiene que

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \tag{3.7}$$

Una definición razonable de derivada en $\mathbb{H}$ es usar el cociente de incrementos y tomar límite. Como debemos tener en cuenta la falta de conmutatividad, este cociente de incrementos debe ser considerado por la izquierda y por la derecha.

Definición 3.4. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ con Ω un abierto y sea $q \in \Omega$. Diremos que f es derivable en q por la derecha si existe el límite*

$$f'_r(q) = \text{lím}_{h\to 0}\left[f(q + h) - f(q))h^{-1}\right]$$

De manera análoga se define la derivabilidad por la izquierda:

$$f'_l(q) = \text{lím}_{h\to 0}\left[h^{-1}(f(q + h) - f(q))\right]$$

Con esta definición es claro que las funciones constantes son derivables por la derecha y por la izquierda con derivada igual a 1 para todo $q \in \mathbb{H}$ en ambos casos. Estudiemos la derivabilidad de otra función simple: un polinomio cuaterniónico de primer grado (y unilateral por la izquierda).

$$f(q) = aq + b, \qquad a \neq 0 \tag{3.8}$$

Fijemos $q \in \mathbb{H}$ y evaluemos el cociente de incrementos por la derecha:

$$(f(q+h) - f(q))h^{-1} = (a(q+h) + b - (aq+b))\, h^{-1} = ahh^{-1} = a$$

Se concluye inmediatamente que la función (3.8) tiene derivada por la derecha para todo $q \in \mathbb{H}$ y es igual a a. El cociente de incrementos por la izquierda es

$$h^{-1}(f(q+h) - f(q)) = h^{-1}ah$$

Si $a \in \mathbb{R}$ podemos cambiar el orden de multiplicación y obtener que este cociente es igual a a llegando así a concluir que para este caso especial se tiene derivada por la izquierda. Sin embargo, consideremos $a \in \mathbb{H}$ en general, $a = a^0 + a^1 i + a^2 j + a^3 k$, y supongamos que existe el límite

$$\text{lím}_{h\to 0}\, [h^{-1}(f(q+h) - f(q))] = \text{lím}_{h\to 0}\, h^{-1}ah = L$$

Como el límite existe, debe ser igual por cualquier camino por el que hagamos $h \to 0$. Pongamos $h = \varepsilon i$:

$$L = \text{lím}_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon i)^{-1} a\varepsilon i = \text{lím}_{\varepsilon\to 0}(-\varepsilon i/\varepsilon^2) a\varepsilon i = \text{lím}_{\varepsilon\to 0} -iai = -iai$$

Atendiendo a las reglas de multiplicación de las unidades imaginarias (2.6) obtenemos que

$$L = -iai = -i(a^0 + a^1 i + a^2 j + a^3 k)i = -i^2 a^0 - i^3 a^1 - ijia^2 - ikia^3 = a^0 + a^1 i - a^2 j - a^3 k$$

Consideremos también los casos $h = \varepsilon j$ y $h = \varepsilon k$ para los que de manera análoga se obtiene

$$L = -jaj = a^0 - a^1 i + a^2 j - a^3 k$$
$$L = -kak = a^0 - a^1 i - a^2 j + a^3 k$$

de lo que podemos finalmente concluir que necesariamente $a^1 = a^2 = a^3 = 0$. Así pues, la función (3.8) tiene derivada por la izquierda si y solo si $a \in \mathbb{R}$. De manera totalmente análoga, la función

$$f(q) = qa + b, \qquad a \neq 0$$

es derivable por la izquierda en $\mathbb{H}$ para cualquier $a \in \mathbb{H}$ no nulo; y derivable por la derecha si y solo si $a \in \mathbb{R}$.

Al igual que en el caso del cuerpo complejo, podemos poner las funciones de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{H}$ como funciones de $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ indistintamente tomando la notación de componentes vectorial usual, como ya hemos hecho a la hora de introducir las unidades imaginarias (2.3) en la sección 2.1; y a la hora de introducir la primera representación matricial (2.28), (2.29) en la sección 2.2.3.

$$f(q) = f(t+xi+yj+zk) = f^0(t,x,y,z) + f^1(t,x,y,z)i + f^2(t,x,y,z)j + f^3(t,x,y,z)k = \\ = f^0(q) + f^1(q)i + f^2(q)j + f^3(q)k$$

Teorema 3.2. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ con Ω un abierto y sea $q \in \Omega$. Identificando los campos escalares componentes de la función, $f = (f^0, f^1, f^2, f^3)$, se tiene que las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *f es derivable por la derecha como función cuaterniónica en q.*
2. *f es diferenciable como campo vectorial en q y se verifica la siguiente colección de igualdades:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f^0}{\partial t}(q) = \frac{\partial f^1}{\partial x}(q) = \frac{\partial f^2}{\partial y}(q) = \frac{\partial f^3}{\partial z}(q) \\
-\frac{\partial f^0}{\partial x}(q) = \frac{\partial f^1}{\partial t}(q) = -\frac{\partial f^2}{\partial z}(q) = \frac{\partial f^3}{\partial y}(q) \\
-\frac{\partial f^0}{\partial y}(q) = \frac{\partial f^1}{\partial z}(q) = \frac{\partial f^2}{\partial t}(q) = -\frac{\partial f^3}{\partial x}(q) \\
-\frac{\partial f^0}{\partial z}(q) = -\frac{\partial f^1}{\partial y}(q) = \frac{\partial f^2}{\partial x}(q) = \frac{\partial f^3}{\partial t}(q)
\end{aligned}$$

Demostración. Veamos que *(1)* implica *(2)*. Supongamos entonces f es derivable por la derecha en q y por abreviar llamemos al valor de la derivada por la derecha $a = f'_r(q)$. El límite dado en la definición 3.4 es equivalente a $\lim_{h\to 0}\left[(f(q+h) - f(q))h^{-1} - a\right] = 0$. Desarrollamos la expresión a evaluar como

$$(f(q+h) - f(q))h^{-1} - ahh^{-1} = (f(q+h) - f(q) - ah)h^{-1}$$

y, debido a que por definición un límite es cero si y solo si la norma tiende a cero, tenemos que

$$\lim_{h\to 0}\left[(f(q+h) - f(q))h^{-1}\right] = a \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{h\to 0}\frac{|f(q+h) - f(q) - ah|}{|h|} = 0$$

donde hemos usado las propiedades de la norma de $\mathbb{H}$ estudiadas previamente al final de la sección 2.1. El producto cuaterniónico ah es una función $\mathbb{R}$-lineal para h como vector de $\mathbb{R}^4$. Escribamos pues dicho producto usando la representación matricial (2.28):

$$ah = \begin{pmatrix} a^0 & -a^1 & -a^2 & -a^3 \\ a^1 & a^0 & -a^3 & a^2 \\ a^2 & a^3 & a^0 & -a^1 \\ a^3 & -a^2 & a^1 & a^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^0 \\ h^1 \\ h^2 \\ h^3 \end{pmatrix}$$

Así pues, que f sea derivable por la derecha en q implica que es diferenciable como campo vectorial en q con la matriz diferencial

$$Df(q) = \begin{pmatrix} a^0 & -a^1 & -a^2 & -a^3 \\ a^1 & a^0 & -a^3 & a^2 \\ a^2 & a^3 & a^0 & -a^1 \\ a^3 & -a^2 & a^1 & a^0 \end{pmatrix}$$

de lo que se deduce la colección de igualdades. Esto prueba *(1)* $\Longrightarrow$ *(2)*. Para probar que *(2)* implica *(1)* basta con deshacer los pasos. ■

Como es de esperar, existe un teorema análogo para derivabilidad por la izquierda. La diferencia reside en la colección de igualdades que se obtiene. El desarrollo de la demostración es similar solo que ahora obtendremos un producto hb en el límite del cociente de normas con $b = f_l'(q)$, para lo que usamos la representación matricial (2.29):

$$hb = \begin{pmatrix} b^0 & -b^1 & -b^2 & -b^3 \\ b^1 & b^0 & b^3 & -b^2 \\ b^2 & -b^3 & b^0 & b^1 \\ b^3 & b^2 & -b^1 & b^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^0 \\ h^1 \\ h^2 \\ h^3 \end{pmatrix}$$

e identificando esta matriz como la matriz diferencial de f como campo vectorial se obtienen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^0}{\partial t}(q) &= \frac{\partial f^1}{\partial x}(q) = \frac{\partial f^2}{\partial y}(q) = \frac{\partial f^3}{\partial z}(q) \\ -\frac{\partial f^0}{\partial x}(q) &= \frac{\partial f^1}{\partial t}(q) = \frac{\partial f^2}{\partial z}(q) = -\frac{\partial f^3}{\partial y}(q) \\ -\frac{\partial f^0}{\partial y}(q) &= -\frac{\partial f^1}{\partial z}(q) = \frac{\partial f^2}{\partial t}(q) = \frac{\partial f^3}{\partial x}(q) \\ -\frac{\partial f^0}{\partial z}(q) &= \frac{\partial f^1}{\partial y}(q) = -\frac{\partial f^2}{\partial x}(q) = \frac{\partial f^3}{\partial t}(q) \end{aligned}$$

Estas y las ecuaciones dadas en el punto *(2)* del teorema 3.2 juegan un papel análogo al de las ecuaciones de Cauchy-Riemann dadas en el teorema 3.1 para derivabilidad por la izquierda y por la derecha respectivamente, ya que estas últimas suponen una restricción a la clase de funciones que pueden ser holomorfas -no siendo suficiente la diferenciabilidad como campo vectorial- y, del mismo modo, las ecuaciones correspondientes en $\mathbb{H}$ suponen una restricción a la clase de funciones que admitirán derivabilidad. Sin emabrgo, a diferencia del caso complejo y como se ilustra en el siguiente teorema, en $\mathbb{H}$ esta restricción es extrema.

Teorema 3.3. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ una función derivable por la derecha para todo $q \in \Omega$, un abierto conexo. Entonces en Ω, f tiene la forma*

$$f(q) = aq + b$$

para ciertos $a, b \in \mathbb{H}$.

Demostración. Pongamos $f = f^0 + if^1 + jf^2 + kf^3$ y vamos a usar la representación de cuaterniones $q \in \Omega$ mediante dos números complejos del plano C_i tal como se hizo para obtener (2.18), aunque esta vez utilizaremos una convención distinta, cosa que mencionamos que era posible. Ponemos los campos escalares componentes como funciones de las dos variables complejas v, w:

$$q = v + kw \qquad\qquad v = t + ix,\ w = z + iy$$

A su vez, representemos la función f mediante dos funciones complejas, G y H, con el mismo procedimiento

$$f = G + kH \qquad\qquad G = f^0 + if^1,\ H = f^3 + if^2$$

Estudiemos pues G y H como funciones de $\mathbb{C}^2$ a $\mathbb{C}$. Primero consideremos w fija,

$$\frac{\partial G}{\partial \overline{v}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\partial}{\partial x}\right)[f^0 + if^1] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f^0}{\partial t} + i\frac{\partial f^1}{\partial t} + i\frac{\partial f^0}{\partial x} - \frac{\partial f^1}{\partial x}\right) = 0$$
$$\frac{\partial H}{\partial \overline{v}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\partial}{\partial x}\right)[f^3 + if^2] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f^3}{\partial t} + i\frac{\partial f^2}{\partial t} + i\frac{\partial f^3}{\partial x} - \frac{\partial f^2}{\partial x}\right) = 0$$

Estas expresiones son nulas en virtud del conjunto de ecuaciones que debe cumplir una función derivable por la derecha dadas en el teorema 3.2. Considerando ahora v fija obtenemos de la misma manera

$$\frac{\partial G}{\partial \overline{w}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)[f^0 + if^1] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f^0}{\partial z} + i\frac{\partial f^1}{\partial z} + i\frac{\partial f^0}{\partial y} - \frac{\partial f^1}{\partial y}\right) = 0$$
$$\frac{\partial H}{\partial \overline{w}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)[f^3 + if^2] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f^3}{\partial z} + i\frac{\partial f^2}{\partial z} + i\frac{\partial f^3}{\partial y} - \frac{\partial f^2}{\partial y}\right) = 0$$

Vemos que tanto G como H verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann para cada variable compleja, por lo que son holomorfas en Ω respecto de v y w por separado. Por el teorema de Hartogs (página 133 de [12]) se tiene que G y H son holomorfas en el sentido de ambas variables en $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ y por tanto tienen derivadas parciales complejas continuas de todos los órdenes y con todas ellas holomorfas.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial v} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\frac{\partial}{\partial x}\right)[f^0 + if^1] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f^0}{\partial t} + i\frac{\partial f^1}{\partial t} - i\frac{\partial f^0}{\partial x} + \frac{\partial f^1}{\partial x}\right)\\
\frac{\partial H}{\partial v} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\frac{\partial}{\partial x}\right)[f^3 + if^2] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f^3}{\partial t} + i\frac{\partial f^2}{\partial t} - i\frac{\partial f^3}{\partial x} + \frac{\partial f^2}{\partial x}\right)\\
\frac{\partial G}{\partial w} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)[f^0 + if^1] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f^0}{\partial z} + i\frac{\partial f^1}{\partial z} - i\frac{\partial f^0}{\partial y} + \frac{\partial f^1}{\partial y}\right)\\
\frac{\partial H}{\partial w} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)[f^3 + if^2] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f^3}{\partial z} + i\frac{\partial f^2}{\partial z} - i\frac{\partial f^3}{\partial y} + \frac{\partial f^2}{\partial y}\right)
\end{aligned}
$$

Utilizando de nuevo la colección de ecuaciones que debe cumplir una función regular buscando $f^0 \leftrightarrow f^3$ y $f^1 \leftrightarrow f^2$ obtenemos las relaciones

$$
\frac{\partial G}{\partial v} = \overline{\frac{\partial H}{\partial w}} \qquad\qquad \frac{\partial G}{\partial w} = -\overline{\frac{\partial H}{\partial v}}
$$

de las que concluimos que ambas derivadas parciales de cada función son funciones holomorfas y sus conjugados también, por lo que deben ser constantes para todo el abierto conexo Ω. Sean a^0, a^1, a^2, a^3 constantes reales y pongamos

$$
\frac{\partial G}{\partial v} \equiv a^0 + ia^1 \implies \frac{\partial H}{\partial w} = a^0 - ia^1 \qquad\qquad \frac{\partial H}{\partial v} \equiv a^3 + ia^2 \implies \frac{\partial G}{\partial w} = -a^3 + ia^2
$$

Con esta identificación y usando

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial v} &= \frac{\partial f^0}{\partial t} + i\frac{\partial f^1}{\partial t} = \frac{\partial f^1}{\partial x} - i\frac{\partial f^0}{\partial x}\\
\frac{\partial H}{\partial v} &= \frac{\partial f^3}{\partial t} + i\frac{\partial f^2}{\partial t} = \frac{\partial f^2}{\partial x} - i\frac{\partial f^3}{\partial x}\\
\frac{\partial G}{\partial w} &= \frac{\partial f^0}{\partial z} + i\frac{\partial f^1}{\partial z} = \frac{\partial f^1}{\partial y} - i\frac{\partial f^0}{\partial y}\\
\frac{\partial H}{\partial w} &= \frac{\partial f^3}{\partial z} + i\frac{\partial f^2}{\partial z} = \frac{\partial f^2}{\partial y} - i\frac{\partial f^3}{\partial y}
\end{aligned}
$$

llegamos a la matriz diferencial que es constante en Ω

$$
Df = \begin{pmatrix} a^0 & -a^1 & -a^2 & -a^3 \\ a^1 & a^0 & -a^3 & a^2 \\ a^2 & a^3 & a^0 & -a^1 \\ a^3 & -a^2 & a^1 & a^0 \end{pmatrix}
$$

y se corresponde con una función de la forma $f(q) = aq + b$ con $a = a^0 + a^1 i + a^2 j + a^3 k$ y $b \in \mathbb{H}$. ■

3.2.2. Segundo intento de regularidad. Serie de potencias

Para proponer una nueva definición de derivada para funciones cuaterniónicas recordemos de nuevo la teoría de derivación en el campo complejo: una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa en la región Ω (conjunto abierto y conexo) si y solo si en cada punto $z_0 \in \Omega$ la función admite un desarrollo en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

válido en un entorno de z_0. Podríamos entonces proponer que una función cuaterniónica es regular si tiene desarrollo en serie de potencias. Para indagar en ello, recordemos las definiciones sobre polinomios en $\mathbb{H}$ dadas en la sección 3.1.2, la notación para las unidades imaginarias (2.33) y definamos el siguiente tipo de función:

Definición 3.5. *Una función polinomial en $\mathbb{H}$ es una función $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$*

$$f(q) = f(t + xi + yj + zk) = f^0(t, x, y, z) + \sum_{a=1}^{3} f^a(t, x, y, z) e_a$$

cuyos campos escalares componentes, f^0 y los f^a, son polinomios reales en las variables reales t, x, y, z.

Es relativamente simple notar que cada polinomio cuaterniónico -suma finita de monomios cuaterniónicos- es una función polinomial en $\mathbb{H}$. Para ello, basta con desarrollar cada monomio al sustituir $q = t + xi + yj + zk$ y sumar. El siguiente teorema nos dice que lo converso también es cierto:

Teorema 3.4. *Cada función polinomial en $\mathbb{H}$ es un polinomio cuaterniónico.*

Demostración. Para probar el resultado bastará con probar que cada polinomio real en las cuatro variables reales t, x, y, z se puede escribir como un polinomio cuaterniónico en función de la variable cuaterniónica $q = t + xi + yj + zk$. Consideremos los siguientes productos:

$$iqi = ti^2 + xi^3 + yiji + ziki = -t - xi + yj + zk$$

$$jqj = tj^2 + xjij + yj^3 + zjkj = -t + xi - yj + zk$$

$$kqk = tk^2 + xkik + ykjk + zk^3 = -t + xi + yj - zk$$

De esto, podemos expresar cada variable real mediante

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{1}{4}(q - iqi - jqj - kqk) \\ x &= \frac{1}{4i}(q - iqi + jqj + kqk) \\ y &= \frac{1}{4j}(q + iqi - jqj + kqk) \\ z &= \frac{1}{4k}(q + iqi + jqj - kqk) \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

Sustituyendo cada una de estas variables en un polinomio real función de estas y desarrollando los productos obtenemos una suma de monomios cuaterniónicos, es decir, un polinomio cuaterniónico. ■

Corolario 3.1. La clase de funciones que están definidas en un entorno del origen de $\mathbb{H}$ y pueden ser expresadas por una serie de potencias cuaterniónica, esto es, una serie de monomios cuaterniónicos, es precisamente la misma clase de funciones que son analíticas reales en un entorno del origen.

Hemos establecido entonces que esta propuesta de regularidad es en realidad equivalente al concepto de analiticidad real para funciones $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, lo cual es sorprendente ya que en el caso complejo cualquier polinomio en la variable compleja z, $f(z)$, al ser desarrollado usando $z = x + iy$ resulta en una función polinomial en $\mathbb{C}$

$$f(z) = p_1(x, y) + ip_2(x, y)$$

pero no cualquier par de polinomios p_1, p_2 en las variables reales x, y dan lugar a un polinomio complejo, necesitando en general tanto z como su conjugado $\bar{z}$, funciones linealmente independientes respecto de x, y.

3.2.3. Un nuevo enfoque. Derivada de Cullen

Ninguna de las dos definiciones fundamentales de función holomorfa que vemos en variable compleja tienen consecuencias interesantes al extenderlas al caso de los cuaterniones. Una de ellas es demasiado restrictiva y la otra no lo es lo suficiente: las funciones de una variable cuaterniónica que tienen derivada -por la derecha o la izquierda- en el sentido clásico de límite de cociente de incrementos son las constantes y los polinomios de primer grado unilaterales; las funciones que pueden ser representadas por una serie de potencias cuaterniónica son las mismas que las que pueden ser representadas por una serie de potencias en cuatro variables reales. Como consecuencia, si se quiere desarrollar una teoría de la derivabilidad en $\mathbb{H}$ que sea interesante es necesario introducir nuevos conceptos recogidos y desarrollados en el artículo [9].

En esta sección daremos entonces una definición de regularidad que lleva a resultados análogos a los de variable compleja. Para ello, vamos a tratar con la identificación de los cuaterniones como una colección de planos complejos, concepto discutido en la sección 2.2.1. En tanto que cada cuaternión $q \notin \mathbb{R}$ puede ser escrito como $q = q^0 + U(\boldsymbol{q})|\boldsymbol{q}|$ afirmamos que para cada $q \notin \mathbb{R}$ existen unos únicos $x, y \in \mathbb{R}$ -con $y > 0$- e $I \in \mathbb{S}$ tal que

$$q = x + Iy \tag{3.10}$$

Definición 3.6. *Sea $\Omega \subset \mathbb{H}$ una región, esto es, un conjunto abierto y conexo. Una función $f : \Omega \to \mathbb{H}$ real diferenciable se dice regular si para cada $I \in \mathbb{H}$ la restricción de f al conjunto $C_I = \mathbb{R} \oplus I\mathbb{R}$ -isomorfo a $\mathbb{C}$- que denotamos por f_I es holomorfa en $\Omega \cap C_I$ en el sentido de que*

$$\overline{\partial_I} f(x + Iy) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + I\frac{\partial}{\partial y}\right) f_I(x + Iy) = 0$$

para todo $q \in \Omega \cap C_I$

Definición 3.7. *Sea $\Omega \subset \mathbb{H}$ una región y sea $f : \Omega \to \mathbb{H}$ una función real diferenciable. Para cada $I \in \mathbb{S}$ y cualquier punto $q = x + Iy$ en Ω definimos la I-derivada de f en q como*

$$\partial_I f(x + Iy) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - I\frac{\partial}{\partial y}\right) f_I(x + Iy)$$

Estamos trasladando conceptos de la teoría clásica de funciones holomorfas a cada plano complejo contenido en $\mathbb{H}$, siendo claro ejemplo de ello la definición y uso de los operadores ∂_I y $\overline{\partial_I}$ análogos a los (3.5). Notemos que si f es una función regular, del hecho de que $\overline{\partial_I} f = 0$ se tiene que

$$\partial_I f(x + Iy) = \partial_I f(x + Iy) + \overline{\partial_I} f(x + Iy) = \frac{\partial}{\partial x} f_I(x + Iy) = \frac{\partial f}{\partial x}(x + Iy)$$

Definición 3.8. *Sea $\Omega \subset \mathbb{H}$ una región y sea $f : \Omega \to \mathbb{H}$ una función regular. La derivada de Cullen de f, denotada por $\partial_C f$, se define como*

$$\partial_C f(q) = \begin{cases} \partial_I f(q), & \text{si } q = x + Iy \text{ con } y \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x), & \text{si } q = x \text{ es real} \end{cases}$$

Esta definición es correcta ya que solo se aplica a funciones regulares. Además, para cada $I \in \mathbb{S}$ es sencillo comprobar que los operadores $\overline{\partial_I}$ y ∂_C conmutan y se cumple $\overline{\partial_I}[\partial_C f] = \partial_C[\overline{\partial_I} f] = 0$, por lo que concluimos que la derivada de Cullen de funciones regulares es regular. En lo que resta de esta discusión nos centraremos a tratar con funciones regulares en la bola centrada en el origen de radio R:

$$B \equiv B(0; R)$$

Nos es conveniente la representación de una restricción de una función regular mediante un par de funciones que, como veremos, serán holomorfas. Para ello debemos introducir el siguiente resultado previo:

Lema 3.1. Sean $I, J \in \mathbb{S}$ dos elementos ortogonales de $\mathbb{S}$, esto es, $I \cdot J = 0$, y sea $K = IJ$. Entonces:

1. $K = IJ = -JI$ es un elemento de $\mathbb{S}$
2. K es ortogonal tanto a I como a J.
3. $JK = I = -KJ$ y $KI = J = -IK$.

Demostración. Prueba punto por punto en anexo B. ■

Lema 3.2. Si $f : B \to \mathbb{H}$ es una función regular en la bola de radio R centrada en el origen, B, entonces para cada $I \in \mathbb{S}$ y cada $J \in \mathbb{S}$ ortogonal a I, existen dos funciones $F, G : B \cap C_I \to C_I$ holomorfas respecto de la variable $z = x + Iy$ tales que

$$f_I(z) = F(z) + G(z)J$$

Demostración. Dados I y J ortogonales, consideramos K el tercer elemento de la base ortonormal $\{I, J, K\}$ descrita en el lema 3.1 y escribimos $f_I(x + Iy) = f(x + Iy)$ con $f = f^0 + If^1 + Jf^2 + Kf^3$. Dado que f es regular ocurre que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + I\frac{\partial}{\partial y}\right) f_I(x + Iy) = 0$$

lo cual es equivalente a

$$\frac{\partial f^0}{\partial x} + I\frac{\partial f^1}{\partial x} + J\frac{\partial f^2}{\partial x} + K\frac{\partial f^3}{\partial x} + I\left(\frac{\partial f^0}{\partial y} + I\frac{\partial f^1}{\partial y} + J\frac{\partial f^2}{\partial y} + K\frac{\partial f^3}{\partial y}\right) = 0$$

Podemos reescribir esto utilizando las propiedades de multiplicación de las unidades imaginarias dadas en el lema 3.1:

$$\frac{\partial f^0}{\partial x} - \frac{\partial f^1}{\partial y} + I\left(\frac{\partial f^1}{\partial x} + \frac{\partial f^0}{\partial y}\right) + J\left(\frac{\partial f^2}{\partial x} - \frac{\partial f^3}{\partial y}\right) + K\left(\frac{\partial f^3}{\partial x} + \frac{\partial f^2}{\partial y}\right) = 0$$

Definiendo las funciones $F = f^0 + If^1$ y $G = f^2 + If^3$ tenemos por la expresión anterior que ambas cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann y por tanto son holomorfas en $B \cap C_I$. Por último, es claro que con estas funciones podemos escribir al restricción de f a $B \cap C_I$ como:

$$f_I(x+Iy) = F(x+Iy) + G(x+Iy)J \qquad \blacksquare$$

Proposición 3.2. Sea $f : B \to \mathbb{H}$ una función regular. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, la derivada de Cullen de orden n, $\partial_C^n f : \Omega \to \mathbb{H}$ es regular y se tiene que

$$\partial_C^n f(x+Iy) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x+Iy)$$

Demostración. Lo probamos por inducción. Al introducir la derivada de Cullen hemos establecido que $\partial_C f$ está bien definida y es regular, por lo que el caso $n = 1$ se cumple. Supongamos que se cumple para $n \geq 1$: $\partial_C^n f$ es regular y $\partial_C^n f = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}$. Evaluemos el caso $n+1$:

$$\partial_C^{n+1} f = \partial_C[\partial_C^n f]$$

esto es la derivada de Cullen de una función regular, por lo que $\partial_C^{n+1} f$ también lo es. Evaluamos entonces la derivada de Cullen de orden $n+1$ teniendo en cuenta que por hipótesis de inducción $\partial_C^n f$ es regular y por tanto cumple que $\overline{\partial_I}[\partial_C^n f] = 0$:

$$\partial_C^{n+1} f = \partial_C[\partial_C^n f] + \overline{\partial_I}[\partial_C^n f] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - I\frac{\partial}{\partial y}\right)[\partial_C^n f] + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + I\frac{\partial}{\partial y}\right)[\partial_C^n f] = \frac{\partial}{\partial x}[\partial_C^n f] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right] = \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}} \qquad \blacksquare$$

Dado $a \in \mathbb{H}\backslash\{0\}$, los monomios $q^n a$ son regulares de acuerdo a la definición 3.6. Como la suma de regulares es regular, es inmediato que los polinomios cuaterniónicos unilaterales por la derecha son regulares. Queremos dar un paso más y considerar series de potencias. Presentamos el análogo al teorema de Abel de variable compleja sin demostración ya que son prácticamente idénticas (página 14 de [11]):

Teorema 3.5. *Para cada serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n$ *existe un número* $0 \leq R \leq \infty$ *de modo que la serie converge absolutamente para* $|q| < R$ *y es divergente si* $|q| > R$. *Más aún, la convergencia es uniforme en cualquier compacto contenido en la bola de convergencia.*

Las series de potencias convergentes definen funciones regulares en el dominio de convergencia. Además, toda serie de potencias es también analítica real.

Proposición 3.3. Sea $f : B \to \mathbb{H}$ una función regular. Son equivalentes:

1. f es regular en la bola B.
2. f admite una expansión en serie de potencias del tipo $f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0)$ convergente en B.

En particular, si f es regular entonces es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en B.

Demostración. Sea $I \in \mathbb{S}$ y consideremos en el plano C_I el disco Δ_I centrado en el origen de radio a de modo que $0 < a < R$. Buscamos una representación integral de f_I en Δ_I apoyándonos en el lema 3.2, $f = F + GJ$. Como F y G son holomorfas en la región $B \cap C_I$ y ambas toman valores en C_I, tenemos que

$$(\zeta - z)^{-1} F(z) = F(z)(\zeta - z)^{-1} \qquad (\zeta - z)^{-1} G(z) = G(z)(\zeta - z)^{-1}$$

para todo $\zeta \neq z \in B \cap C_I$. Así pues, para cada $z \in \Delta_I$

$$f_I(z) = \frac{1}{2\pi I} \int_{\partial \Delta_I} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta + \left(\frac{1}{2\pi I} \int_{\partial \Delta_I} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \right) J$$

Al estar tratando con el plano complejo C_I sabemos que cada una de las integrales se puede reescribir en términos de series de potencias:

$$\int_{\partial \Delta_I} \frac{1}{1 - z/\zeta} \frac{F(\zeta)}{\zeta} \, d\zeta = \int_{\partial \Delta_I} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^n \frac{F(\zeta)}{\zeta} \, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(\int_{\partial \Delta_I} \frac{F(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \, d\zeta \right)$$

donde ponemos $(z/\zeta)^n$ a la izquierda de $F(\zeta)/\zeta$ para que en la serie de potencias nos salgan los coeficientes a derecha y así obtener una función regular en el dominio de convergencia. Se hace lo idéntico con G y entonces

$$f_I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n F}{\partial z^n}(0) + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n G}{\partial z^n}(0) J = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n (F + GJ)}{\partial z^n}(0)$$

Ahora bien, por la proposición 3.2 podemos poner

$$f_I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - I \frac{\partial}{\partial y} \right) \right]^n [f](0) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0)$$

así que f_I tiene una representación en serie de potencias en z^n con coeficientes independientes de la elección de I. ∎

Corolario 3.2. Sea $f : B \to \mathbb{H}$ regular. Si existe $I \in \mathbb{S}$ de modo que $f(C_I) \subset C_I$ entonces la expansión

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0)$$

tiene sus coeficientes en C_I.

Demostración. Como $f(C_I) \subset C_I$, para cualquier número real x tenemos que $f(x) = f_I(x) \in C_I$ y por tanto $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n} \in C_I$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y para cualquier $x \in \mathbb{R}$. ■

La expansión en serie de potencias para funciones regulares permite demostrar en este contexto muchos de los resultados que se tienen en variable compleja. Veamos el análogo del *principio de identidad.*

Teorema 3.6. *Sea $f : B \to \mathbb{H}$ una función regular. Denotemos por $Z_f = \{q \in B | f(q) = 0\}$ el conjunto de ceros de f. Si existe $I \in \mathbb{S}$ tal que $C_I \cap Z_f$ tiene un punto de acumulación entonces $f \equiv 0$ en B.*

Demostración. Con F y G las funciones holomorfas descritas por el lema 3.2, debido a que $C_I \cap Z_f$ tiene un punto de acumulación sabemos de análisis complejo que F y G son ambas nulas en el disco $C_I \cap B$. Esto implica que $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y por el punto (2) de la proposición 3.3 se tien finalmente que $f \equiv 0$ en B. ■

Corolario 3.3. Sean f y g regulares en la bola B. Si existe $I \in \mathbb{S}$ de tal modo que $f \equiv g$ en un subconjunto de C_I que tenga punto de acumulación en $C_I \cap B$ entonces $f \equiv g$ en B.

Mostremos ahora que el *principio del módulo máximo* también tiene su versión correspondiente para funciones regulares. Para ello, primero presentemos el siguiente resultado:

Proposición 3.4. Si $f : B \to \mathbb{H}$ es una función regular y si $I \in \mathbb{S}$ entonces $f_I : C_I \cap B \to \mathbb{H}$ verifica la propiedad del valor medio.

Demostración. De nuevo usando el lema 3.2 escribimos

$$f_I(x + Iy) = F(x + yI) + G(x + Iy)J$$

Para todo $a \in C_I \cap B$ y para todo $r > 0$ de modo que $\overline{\Delta(a;r)} \subset C_I \cap B$ entonces tenemos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_I(a+re^{I\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(F(a+re^{I\theta})+G(a+re^{I\theta})J\big)\,d\theta =$$
$$= F(a)+G(a)J = f_I(a) \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.7. *Sea $f : B \to \mathbb{H}$ función regular. Si $|f|$ tiene un mínimo local en un punto $a \in B$ entonces f es constante en B.*

Demostración. Supongamos que $f(a) \neq 0$, el otro caso es trivial. Expresemos a con el $I \in \mathbb{S}$ que le corresponde

$$a = x_0 + Iy_0$$

y consideremos la restricción de f al plano C_I, f_I. Poniendo $r > 0$, sea

$$M(r) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}}\{\big|f(a+re^{I\theta})\big|\}$$

Por hipótesis, $f(a) \geq M(r)$ cuando r es lo suficientemente pequeño. Por otro lado, sabemos por la proposición 3.4 que f_I satisface la propiedad del valor medio y por tanto $f_I(a) = M(r)$. Sea $z = x + Iy$ de modo que $r = |z-a|$. Para r suficientemente pequeño la función

$$g(z) = \Re(f_I(a) - f_I(z))$$

es no negativa y además $g(z) = 0$ si y solo si $f_I(z) = f_I(a)$. De la propiedad del valor medio tenemos

$$f_I(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_I(a+re^{I\theta})\,d\theta$$

y como la parte real de una función holomorfa también satisface la propiedad del valor medio obtenemos

$$g(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(a+re^{I\theta})\,d\theta = 0$$

la función g es no negativa y continua en $\partial\Delta(a,r)$, por lo que $g(a+e^{I\theta}) = 0$ para cada $\theta \in \mathbb{R}$. Esto implica que $g(z) = 0$ es nula en el disco cerrado y por tanto $f_I(z) = f_I(a)$ para cada $z \in \partial\Delta(a,r)$. Como este último conjunto es cerrado, claramente tiene un punto de acumulación en $C_I \cap B$, usamos el principio de identidad y el resultado queda demostrado. $\blacksquare$

Para concluir este trabajo, podemos probar el teorema de la fórmula integral de Cauchy para funciones regulares. Previo a ello, definamos la siguiente identificación para cada cuaternión q:

$$I_q = \begin{cases} U(\Im(q)) \in \mathbb{S}, & \text{si } q \notin \mathbb{R} \\ \text{cualquier elemento de } \mathbb{S}, & \text{si } q \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.11}$$

Para cualquier $\zeta \in C_{I_q}$, $\zeta \neq q$ la igualdad

$$(\zeta - q)^{-1} d\zeta = d\zeta (\zeta - q)^{-1}$$

se cumple.

Teorema 3.8. *Sea $f : B \to \mathbb{H}$ función regular. Sea $q \in B$. Entonces*

$$f(q) = \frac{1}{2\pi I_q} \int_{\partial \Delta_q(0,r)} \frac{d\zeta}{\zeta - q} f(\zeta)$$

donde $\zeta \in C_{I_q} \cap B$ y $r > 0$ es tal que

$$q \in \overline{\Delta_q(0,r)} = \{x + I_q y | x^2 + y^2 \leq r^2\} \subset B$$

Demostración. La prueba es por cáclulo directo usando el lema 3.2:

$$\frac{1}{2\pi I_q} \int_{\partial \Delta_q(0,r)} \frac{d\zeta}{\zeta - q} f(\zeta) = \frac{1}{2\pi I_q} \int_{\partial \Delta_q(0,r)} \frac{d\zeta}{\zeta - q} f_{I_q}(\zeta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi I_q} \int_{\partial \Delta_q(0,r)} \frac{d\zeta}{\zeta - q} \left(F(\zeta) + G(\zeta) J\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi I_q} \int_{\partial \Delta_q(0,r)} \frac{d\zeta}{\zeta - q} F(\zeta) + \left(\frac{1}{2\pi I_q} \int_{\partial \Delta_q(0,r)} \frac{d\zeta}{\zeta - q} G(\zeta) \right) J =$$

$$= F(q) + G(q) J = f(q)$$

■

4. Conclusiones

Tras un desarrollo detallado del álgebra de división normada $\mathbb{H}$ -haciendo una parada para presentar las rotaciones espaciales con el uso de estos objetos, algo prácticamente obligatorio en un documento de introducción a los cuaterniones-, hemos podido introducir las herramientas del análisis matemático en esta estructura algebraica, obteniendo distintos resultados para cada una de las tres definiciones de regularidad que hemos establecido. A pesar de haber mencionado que las extensiones de derivabilidad para $\mathbb{H}$ dadas por el límite de incrementos de cociente y la basada en series de potencias no dan resultados interesantes; y la definición basada en la derivada de Cullen sí, no quiere decir que esta es esta la más adecuada para establecer una teoría de funciones regulares. Como dijimos en la introducción, la regularidad de Feuter reproduce muchos de los resutlados del análisis complejo. Sin embargo, la elección de este enfoque se debe a su naturaleza más intuitiva y que generaliza nuestros conocimientos sobre variable compleja de manera directa al ser aplicados a cada plano complejo contenido en $\mathbb{H}$.

La presentación que hemos dado del formalismo de Cullen de la regularidad culminó con la fórmula integral de Cauchy para funciones regulares. Sin embargo, las bonanzas de dicho formalismo no acaban ahí, pues en el mismo artículo de referencia para dicha sección [9] se deducen además los teoremas de Liouville y de Morera para funciones regulares. Tras haber realizado este estudio, el autor pretende extender sus conocimientos de análisis en cuaterniones con el estudio de los conceptos del formalismo de Feuter presentados por Sudbery en [7], presentados a través del uso del cálculo diferencial exterior, rama de las matemáticas cuyo dominio es de gran provecho para el estudio de la física.

Bibliografía

[1] J. Chappell, A. Iqbal, J. Hartnett, and D. Abbott, "The vector algebra war: A historical perspective," *IEEE Access*, vol. 4, pp. 1997–2004, 03 2016.

[2] J. M. Sánchez Muñoz, "Hamilton y el descubrimiento de los cuaterniones," *Pensamiento Matemático 1*, 2011.

[3] J. Baez, "The octonions," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 39, 05 2001.

[4] K. Erdmann and T. Holm, *Algebras and Representation Theory*. Springer International Publishing, 2018. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/978-3-319-91998-0

[5] P. M. Valle, "Introducción al análisis cuaterniónico y a sus aplicaciones," 2022.

[6] P. Girard, *Quaternions, Clifford Algebras and Relativistic Physics*. Birkhäuser Basel, 2007. [Online]. Available: https://books.google.es/books?id=K8tSOQpSzVYC

[7] A. Sudbery, "Quaternionic analysis," *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 85, 04 1998.

[8] T. M. Apostol, *Mathematical analysis; 2nd ed.*, ser. Addison-Wesley series in mathematics. Reading, MA: Addison-Wesley, 1974. [Online]. Available: https://cds.cern.ch/record/105425

[9] G. Gentili and D. C. Struppa, "A new theory of regular functions of a quaternionic variable," *Advances in Mathematics*, vol. 216, no. 1, pp. 279 – 301, 2007.

[10] J. P. Morais, S. Georgiev, and W. Sprößig, *Real Quaternionic Calculus Handbook*. Springer Basel, 2014. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0622-0

[11] E. Stein and R. Shakarchi, *Complex Analysis*, ser. Princeton lectures in analysis. Princeton University Press, 2010. [Online]. Available: https://books.google.es/books?id=0ECHh9tjPUAC

[12] H. Cartan, *Elementary Theory of Analytic Functions of One Or Several Complex Variables*, ser. Dover books on mathematics. Dover Publications, 1995. [Online]. Available: https://books.google.es/books?id=SlpwANmq5xQC

Anexo A

Álgebra

Un **álgebra** A sobre un cuerpo K (o K-álgebra) es un espacio vectorial sobre K equipado con una función multiplicación interna $m : A \times A \to A$ que es *bilineal*, es decir, para cada a, b, c en A y λ en K:

- $m(a + b, c) = m(a, c) + m(b, c)$
- $m(a, b + c) = m(a, b) + m(a, c)$
- $m(\lambda a, b) = \lambda m(a, b)$
- $m(a, \lambda b) = \lambda m(a, b)$

y existe un elemento identidad para m en A (distinto del elemento identidad de la suma) que, como ya cabe esperar, denotamos mediante 1. Por tanto, para cada $a \in A$

$$m(1, a) = a \qquad \text{y} \qquad m(a, 1) = a$$

Si la multiplicación interna del álgebra cumple la propiedad asociativa estamos ante un *álgebra asociativa*. En dicho caso, notemos que A es un anillo donde m es la multiplicación asociada al mismo que cumple junto a la suma la propiedad distributiva, enunciada por los dos primeros items en la lista anterior.

Es común identificar K como un subconjunto de A mediante el *mapping* inyectivo $\lambda \mapsto \lambda 1$. Ojo, 1 aquí denota el elemento neutro de la multiplicación interna de A, m; y no el elemento neutro de la multiplicación del cuerpo K. Sin embargo, esta ambigüedad en nuestra notación es ciertamente irrelevante para el tratamiento de los cuaterniones como un $\mathbb{R}$-álgebra.

La *dimensión* de un K-álgebra A es la dimensión de A como espacio vectorial. Por útlimo, se define el *centro de un álegbra* como el conjunto

$$C(A) = \{a \in A \mid \forall b \in A \quad m(a, b) = m(b, a)\}$$

Álgebra de división

Un tipo de álgebra central a este trabajo es el **álgebra de división**. Un álgebra A se dirá de división si para cada a y b en A tales que $m(a,b) = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$. Equivalentemente, A se dirá álgebra de división si las operaciones multiplicación por la izquierda y por la derecha por cualquier elemento no nulo de A son invertibles, esto es, para cada $a \in A$ no nulo, las siguientes funciones definidas de A en A son biyecciones:

$$L_a : x \mapsto m(a,x) \qquad \text{y} \qquad R_a : x \mapsto m(x,a)$$

Esto nos dice que existe un único $b \in A$ tal que $L_a(b) = 1$ (cada a no nulo tiene inverso por la derecha) y un único b' tal que $R_a(b') = 1$ (cada a no nulo tiene inverso por la izquierda). Nótese cómo no se presupone que estos inversos coinciden, algo que solo podríamos asegurar si $(A \backslash \{0\}, m)$ fuera un grupo, para lo que m debería cumplir la propiedad asociativa. Es por tanto posible la existencia de álgebras de división donde los inversos por cada lado no coinciden o álgebras para las que cada elemento no nulo tenga inverso multiplicativo pero no sean de división. Para un álgebra asociativa se tendrá que es de división si cada $a \in A$ no nulo tiene inverso, esto es, existe $b \in A$ tal que $m(a,b) = m(b,a) = 1$.

Ahora bien, ¿por qué son equivalentes las dos definiciones que hemos dado de álgebra de división? En virtud de la bilinealidad de la multiplicación interna del álgebra, m, las funciones anteriores, L_a y R_a, son endomorfismos de A. Para homomorfismos entre espacios vectoriales de misma dimensión finita (en particular, para endomorfismos) la biyectividad, inyectividad y sobreyectividad son equivalentes Que L_a sea inyectiva quiere decir que para cada $x, y \in A$,

$$L_a(x) = L_a(y) \implies x = y$$

La primera igualdad es $m(a,x) = m(a,y)$. Para continuar, apoyémonos en los siguientes lemas:

Lema 1. Para todo $a \in A$ se tiene que $m(a,0) = 0$ y $m(0,a) = 0$.

Demostración. Lo probamos para $m(a,0) = 0$ ya que el otro caso es totalmente análogo.

$$m(a,0) = m(a,0+0) = m(a,0) + m(a,0)$$

Como cada elemento de A tiene inverso respecto a la suma, sumamos $-m(a,0)$ a cada lado de la igualdad y obtenemos

$$m(a,0) = 0 \qquad \blacksquare$$

Lema 2. Para cualesquiera a e y en A se tiene que el inverso respecto a la suma o *inverso aditivo* de $m(a,y)$ es $-m(a,y) = m(-a,y) = m(a,-y)$.

Demostración. Demostramos solo el caso $m(a,-y) = -m(a,y)$ ya que el otro es análogo.

$$m(a,y) + m(a,-y) = m(a, y-y)^{1} = m(a,0)$$

En virtud del lema 1, tenemos entonces que

$$m(a,y) + m(a,-y) = 0 \qquad \blacksquare$$

Continuando con la ecuación que planteamos previa a los lemas:

$$m(a,x) = m(a,y) \iff m(a,x) - m(a,y) = 0 \iff$$

$$\iff m(a,x) + m(a,-y) = 0 \iff m(a, x-y) = 0$$

Si la mulitplicación interna del álgebra tiene la siguiente propiedad

$$m(a,z) = 0,\ a \neq 0 \implies z = 0$$

entonces se tiene que

$$L_a(x) = L_a(y) \implies x - y = 0 \iff x = y$$

y L_a es inyectiva. Sabiendo que cualquier $z \in A$ se puede expresar a través de otros $x, y \in A$ como $x - y$, es sencillo ver que lo recíproco es verdad: L_a inyectiva implica que $m(a,z) = 0$ con a no nulo requiere que z sea nulo. De manera análoga para R_a, esta será inyectiva si y solo si m cumple que

$$m(z,a) = 0,\ a \neq 0 \implies z = 0$$

Notemos que el lema 1 junto a que se cumplan las dos propiedades que hemos enunciado para que L_a y R_a sean inyectivas (y por tanto biyectivas o invertibles) es equivalente a

[1]Notación: $y + (-y) \equiv y - y$

que para cada $a, b \in A$ tal que $m(a, b) = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$, es decir el mismo enunciado de la primera definición de álgebra de división.

A es un *espacio vectorial normado* si tiene asociado una función de A a los reales no negativos, $|| \; || : A \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, que dados $a, b \in A$ y $\lambda \in K$ cumple las siguientes propiedades:

- $||a|| = 0 \iff a = 0$
- $||a|| > 0 \iff a \neq 0$
- $||\lambda a|| = |\lambda| \, ||a||$
- $||a + b|| \leq ||a|| + ||b||$

Proposición 1. Si un álgebra A es un espacio vectorial normado para el cual $||m(a, b)|| = ||a|| \, ||b||$[2] entonces A es un álgebra de división.

Demostración. Sean $a, b \in A$ tales que $m(a, b) = 0$,

$$m(a, b) = 0 \iff ||m(a, b)|| = 0 \iff ||a|| \, ||b|| = 0$$

La última igualdad concierne el producto de dos números reales no negativos, por lo que para que este se anule debe ser $||a|| = 0$ o $||b|| = 0$, que es equivalente a $a = 0$ o $b = 0$. ■

Un **álgebra de división normado** es un álgebra donde A es un espacio vectorial normado con $||m(a, b)|| = ||a|| \, ||b||$. Acabamos de comprobar que efectivamente esto implica que A es un álgebra de división. Además, se tiene que $||1|| = 1$, donde usamos el mismo símbolo para denotar a la identidad multiplicativa de A y la identidad multiplicativa de $\mathbb{R}$. Veámoslo:

Sea $a \in A$ no nulo,

$$||a|| = ||m(1, a)|| = ||1|| \, ||a||$$

Como a es no nulo, $||a||$ tampoco lo es y podemos multiplicar por su inverso a ambos lados de la igualdad, obteniendo así el resultado.

[2] Aunque se entiende por el contexto, cabe destacar que en esta última expresión la yuxtaposición usada en el lado derecho de la igualdad indica multiplicación usual de los reales.

Anexo B

Teorema 2.2. *La multiplicación de cuaterniones es una operación bilineal, esto es, dados* a, b *y* c *en* $\mathbb{H}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$:

i) $a(b+c) = ab + ac, \qquad (a+b)c = ac + bc$

ii) $(\lambda a)b = \lambda(ab), \qquad a(\lambda b) = \lambda(ab)$

Demostración. Demostramos el primer nunciado de cada punto, las pruebas de los segundos enunciados son análogas.

i)

$$a = (a^0, \boldsymbol{a}); \quad b = (b^0, \boldsymbol{b}); \quad c = (c^0, \boldsymbol{c})$$

Como la igualdad de pares ordenados se define como la igualdad componente a componente, revisemos estas por separado, donde las operaciones sí nos son familiares: multiplicación y suma de núemros reales, suma de vectores, producto escalar y producto vectorial. La primera componente de $a(b+c)$ es

$$a^0(b^0 + c^0) - \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = a^0b^0 + a^0c^0 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = a^0b^0 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + a^0c^0 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$$

La segunda componente es

$$a^0(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) + (b^0 + c^0)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = a^0\boldsymbol{b} + a^0\boldsymbol{c} + b^0\boldsymbol{a} + c^0\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} =$$

$$= a^0\boldsymbol{b} + b^0\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + a^0\boldsymbol{c} + c^0\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$$

Reconocemos inmediatamente que la primera componente de $a(b+c)$ es la suma de las primeras componentes de ab y ac. Análogamente, la segunda componente de $a(b+c)$ es la suma de las segundas componentes de ab y ac. De la definición de suma de cuaterniones deducimos entonces que $a(b+c) = ab + ac$.

ii)

La primera componente de $(\lambda a)b$ es

$$(\lambda a^0)b^0 - (\lambda \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \lambda(a^0b^0) - \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \lambda(a^0b^0 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$$

que es la multiplicación de λ por la primera componente de ab. La segunda componente de $(\lambda a)b$ es

$$(\lambda a^0)\boldsymbol{b} + b^0(\lambda \boldsymbol{a}) + (\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \lambda(a^0\boldsymbol{b}) + \lambda(b^0\boldsymbol{a}) + \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \lambda(a^0\boldsymbol{b} + b^0\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

que es la multiplicación de λ por la segunda componente de ab. Por la definición de producto por escalares para cuaterniones, se tiene entonces que $(\lambda a)b = \lambda(ab)$. ■

Teorema 2.3. *La multiplicación de cuaterniones cumple la propiedad asociativa, esto es, para cada a, b y c en $\mathbb{H}$:*

$$(ab)c = a(bc)$$

Demostración. Para seguir esta demostración, debemos tener muy clara la forma en dos componentes 2.1 de ab y bc:

$$ab = (a^0 b^0 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}, a^0 \boldsymbol{b} + b^0 \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

$$bc = (b^0 c^0 - \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}, b^0 \boldsymbol{c} + c^0 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$$

La primera componente de $(ab)c$ es

$$(a^0 b^0 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) c^0 - (a^0 \boldsymbol{b} + b^0 \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = a^0 b^0 c^0 - c^0(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) - a^0(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) - b^0(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$$

Se considera bien conocido el resultado $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ de álgebra vectorial en tres dimensiones (intercambio de $\cdot$ y $\times$ gracias a la invarianza del producto triple ante permutación par de los vectores). Teniendo en cuenta esto y reordenando, continuamos con la primera componente de $(ab)c$:

$$a^0 b^0 c^0 - a^0(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) - b^0(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - c^0(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = a^0(b^0 c^0 - \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a} \cdot (b^0 \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a} \cdot (c^0 \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) =$$

$$= a^0(b^0 c^0 - \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a} \cdot (b^0 \boldsymbol{c} + c^0 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$$

Notemos que esta última expresión es la primera componente de $a(bc)$. Prosigamos ahora con la segunda componente de $(ab)c$, que es

$$(a^0 b^0 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \boldsymbol{c} + c^0(a^0 \boldsymbol{b} + b^0 \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + (a^0 \boldsymbol{b} + b^0 \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} =$$

$$= a^0 b^0 \boldsymbol{c} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \boldsymbol{c} + c^0 a^0 \boldsymbol{b} + c^0 b^0 \boldsymbol{a} + c^0(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + a^0(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + b^0(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$$

Nos servimos ahora de la siguiente identidad vectorial: $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = -[\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})] = -[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a})]$. Introduciendo esto y reordenando, seguimos:

$$a^0 b^0 \boldsymbol{c} + c^0 a^0 \boldsymbol{b} + a^0(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + c^0 b^0 \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \boldsymbol{c} + b^0(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) + c^0(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) - [(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b}) \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a}) \boldsymbol{b}] =$$

$$= a^0 b^0 \boldsymbol{c} + a^0 c^0 \boldsymbol{b} + a^0(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + b^0 c^0 \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) \boldsymbol{a} + b^0(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) + c^0(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a}) \boldsymbol{b}$$

Estos dos últimos sumandos son $-[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})] = -[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})] = \boldsymbol{a}\times[-(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})] = \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$. La segunda componente de $(ab)c$ entonces queda

$$a^0(b^0\boldsymbol{c}+c^0\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+(b^0c^0-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times(b^0\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}\times(c^0\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) =$$

$$= a^0(b^0\boldsymbol{c}+c^0\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+(b^0c^0-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times(b^0\boldsymbol{c}+c^0\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

Notemos que esto es precisamente la segunda componente de $a(bc)$. Como las componentes de $(ab)c$ y $a(bc)$ coinciden, concluimos pues que $(ab)c = a(bc)$ ■

Teorema 2.4. *Dados dos cuaterniones,* $(\lambda,\mathbf{0})$ *y* $(\mu,\mathbf{0})$ *se tiene que*

i) $(\lambda,\mathbf{0})+(\mu,\mathbf{0}) = (\lambda+\mu,\mathbf{0})$

ii) $(\lambda,\mathbf{0})(\mu,\mathbf{0}) = (\lambda\mu,\mathbf{0})$

iii) $(\lambda,\mathbf{0})(\mu,\mathbf{0})^{-1} = (\lambda/\mu,\mathbf{0}) \qquad$ si $\mu\neq 0$.

Demostración. Demostramos únicamente iii), pues las pruebas de los otros dos enunciados son inmediatas de las definiciones de suma y producto de cuaterniones.

$$|(\mu,\mathbf{0})|^2=\mu^2; \qquad \frac{1}{|(\mu,\mathbf{0})|^2}\equiv(1/\mu^2,\mathbf{0}); \qquad (\mu,\mathbf{0})^{-1}=\frac{1}{|(\mu,\mathbf{0})|^2}\overline{(\mu,\mathbf{0})}=(1/\mu^2,\mathbf{0})(\mu,\mathbf{0})$$

De ii) tenemos que $(1/\mu^2,\mathbf{0})(\mu,\mathbf{0}) = (1/\mu,\mathbf{0})$ y, finalmente,

$$(\lambda,\mathbf{0})(\mu,\mathbf{0})^{-1} = (\lambda,\mathbf{0})(1/\mu,\mathbf{0}) = (\lambda/\mu,\mathbf{0})$$ ■

Proposición 2.6. Dado un vector $\boldsymbol{v}\in\mathbb{H}_P$, el vector $\boldsymbol{v}'$ resultante de rotar $\boldsymbol{v}$ un ángulo φ alrededor de un eje con dirección dada por el unitario $\boldsymbol{u}\in\mathbb{S}$ es el siguiente producto cuaterniónico

$$\boldsymbol{v}' = r\boldsymbol{v}r^{-1}$$

con r el cuaternión que codifica la rotación en cuestión de la siguiente manera:

$$r = \cos(\varphi/2)+\boldsymbol{u}\sin(\varphi/2)$$

Demostración. Procederemos por cálculo directo, llegando así a la fórmula de Euler-Rodrigues (2.38) para nuestro vector rotado.

$$r\boldsymbol{v}r^{-1} = r\boldsymbol{v}[\cos(\varphi/2)+\boldsymbol{u}\sin(\varphi/2)]^{-1} = r\boldsymbol{v}[\cos(\varphi/2)-\boldsymbol{u}\sin(\varphi/2)] =$$

$$= r[\boldsymbol{v}\cos(\varphi/2) - \boldsymbol{v}\boldsymbol{u}\sin(\varphi/2)] = r[\boldsymbol{v}\cos(\varphi/2) + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})\sin(\varphi/2) - (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u})\sin(\varphi/2)]$$

donde para el último paso hemos evaluado el producto de dos cuaterniones puros (2.13). Prosigamos:

$$r\boldsymbol{v}r^{-1} = [\cos(\varphi/2) + \boldsymbol{u}\sin(\varphi/2)][\boldsymbol{v}\cos(\varphi/2) + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})\sin(\varphi/2) + (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\sin(\varphi/2)] =$$

$$= \boldsymbol{v}\cos^2(\varphi/2) + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2) + (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2) +$$

$$+ \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2) + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})\sin^2(\varphi/2) + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\sin^2(\varphi/2)$$

Evaluemos el producto cuaterniónico del último sumando

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})$$

Recordando que $\boldsymbol{u}$ es un vector unitario tenemos que

$$r\boldsymbol{v}r^{-1} = \boldsymbol{v}\cos^2(\varphi/2) + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2) + (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2) -$$

$$-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2) + (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2) + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})\sin^2(\varphi/2) +$$

$$+\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\sin^2(\varphi/2) - \boldsymbol{v}\sin^2(\varphi/2) = \boldsymbol{v}(\cos^2(\varphi/2) - \sin^2(\varphi/2)) +$$

$$+2(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2) + 2\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})\sin^2(\varphi/2)$$

Debemos usar las fórmulas trigonométricas del ángulo doble:

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \sin(2x) = 2\sin x\cos x$$

Además, de la primera es fácil obtener

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

por lo que tenemos finalmente

$$r\boldsymbol{v}r^{-1} = \boldsymbol{v}\cos\varphi + (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\sin\varphi + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})(1-\cos\varphi) = \boldsymbol{v}' \qquad \blacksquare$$

Lema 3.1. Sean $I, J \in \mathbb{S}$ dos elementos ortogonales de $\mathbb{S}$, esto es, $I\cdot J = 0$, y sea $K = IJ$. Entonces:

1. $K = IJ = -JI$ es un elemento de $\mathbb{S}$
2. K es ortogonal tanto a I como a J.
3. $JK = I = -KJ$ y $KI = J = -IK$.

Demostración. Probamos cada punto del lema por separado:

1. Claramente $K \in \mathbb{S}$ ya que la norma del producto es el producto de las normas (proposición 2.3). Además

$$K = IJ = -I \cdot J + I \times J = I \times J$$

y como $I \times J = -J \times I$ se tiene que $JI = -IJ$.

2. $K \cdot I = (I \times J) \cdot I = 0, \qquad K \cdot J = (I \times J) \cdot J = 0$

3. Evaluemos JK:

$$JK = J(I \times J) = J \cdot (I \times J) + J \times (I \times J) = J \times (I \times J) = I(J \cdot J) - J(J \cdot I) = I$$

KJ es igual a $(I \times J) \times J = -J \times (I \times J) = -JK$. Se procede de forma análoga para KI. ■