

**AGUJEROS NEGROS SEGÚN LA  
RELATIVIDAD GENERAL.  
APLICACIÓN AL AGUJERO NEGRO  
SUPERMASIVO DE LA GALAXIA M87**

**JOSÉ MARÍA VÁZQUEZ MARTÍN**

**Trabajo fin de Grado**

**Supervisado por Dr. Diego Gómez García**



**Universidad de Sevilla**

**6 de julio de 2023**



*A mis padres, por apoyarme e inspirarme a partes iguales.*

---



---

# RESUMEN

En este trabajo introduciremos la física de agujeros negros a través de las predicciones de la Relatividad General. Además, se repasarán algunos resultados obtenidos por la *Event Horizon Telescope Collaboration* sobre los estudios de la fuente de radiación emitida en el núcleo de la galaxia M87. Por ello, comenzaremos introduciendo la Relatividad General y las ecuaciones de Einstein, aportando algunas propiedades que se deducen de ellas. Tras esto, expondremos las principales soluciones de agujeros negros: Schwarzschild, Reissner-Nordström y Kerr. Estudiaremos la estructura causal de estas soluciones, además de algunas propiedades geométricas importantes. Finalmente, se realiza un resumen de los resultados obtenidos al estudiar la imagen del agujero negro de la galaxia M87.



---

# ABSTRACT

In this work we introduce black hole physics through the predictions of General Relativity. Moreover, we expose some results of the *Event Horizon Telescope Collaboration* about the radio source emitted by the core of the galaxy M87. Thus, we start introducing General Relativity and Einstein's field equations, giving some properties deduced by them. After this, we show the main solutions of black holes: Schwarzschild, Reissner-Nordström and Kerr. We study the causal structure of these solutions and some important geometrical properties. Finally, we make a review about the results obtained from the image of galaxy M87.



# ÍNDICE GENERAL

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación y objetivos . . . . .	1
1.2. Resumen de convenios . . . . .	2
<b>2. Introducción a la relatividad General</b>	<b>5</b>
2.1. Relatividad General y Geometría. Principio de Equivalencia . . . . .	5
2.2. Ecuaciones de campo de Einstein . . . . .	9
2.3. Física en espacios curvos . . . . .	14
2.3.1. Acción de Hilbert-Einstein . . . . .	15
2.3.2. Efecto Doppler gravitacional . . . . .	16
2.3.3. Cantidades Conservadas . . . . .	18
2.3.4. Singularidades . . . . .	19
<b>3. Soluciones de la Ecuación de Einstein: Agujeros negros</b>	<b>21</b>
3.1. Solución de Schwarzschild. El agujero negro de Schwarzschild . . . . .	21
3.1.1. Estructura causal de la solución de Schwarzschild . . . . .	23
3.1.2. Geodésicas . . . . .	27
3.2. Agujero negro de Reissner-Nordström . . . . .	30

3.2.1.	Estructura causal. Horizontes de Reissner-Nordström . . . . .	32
3.3.	Agujeros negros en rotación . . . . .	35
3.3.1.	Arrastre de sistemas inerciales. Ergosfera . . . . .	36
3.3.2.	Estructura causal. Los horizontes de Kerr . . . . .	38
3.3.3.	Solución de Kerr-Newman . . . . .	40
<b>4.</b>	<b>El agujero negro supermasivo de la galaxia M87</b>	<b>43</b>
4.1.	El proyecto EHT . . . . .	43
4.2.	El agujero negro supermasivo de M87 . . . . .	44
4.3.	Imagen y resultados . . . . .	45
<b>A.</b>	<b>Apéndice A: Breve repaso de la relatividad especial</b>	<b>49</b>
A.1.	El espacio de Minkowski . . . . .	50
A.2.	Tensores . . . . .	52
A.3.	Mecánica Relativista . . . . .	53
A.4.	Leyes de Maxwell . . . . .	54
<b>B.</b>	<b>Apéndice B: Nociones matemáticas</b>	<b>57</b>
B.1.	Variedades diferenciables: Definición . . . . .	57
B.2.	Algebra de tensores en variedades . . . . .	58
B.3.	Transporte paralelo y derivada covariante . . . . .	60
B.4.	Conexión Levi-Civita . . . . .	62
B.5.	Geodésicas . . . . .	63

B.6. Densidades Tensoriales. Determinante de la métrica . . . . . 64

B.7. Operadores diferenciales . . . . . 66

B.8. Integración en variedades . . . . . 66

B.9. Curvatura . . . . . 67

**Referencias bibliográficas** . . . . . **70**

# INTRODUCCIÓN

## 1.1 MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS

Las últimas publicaciones sobre las imágenes del agujero negro supermasivo de la galaxia M87 y de Sagitario A, obtenidas por el Event Horizon Telescope (EHT) en 2019 y 2022, han supuesto un paso de gran importancia para la física moderna. Estos hallazgos constituyen los primeros tests reales de la teoría de la Relatividad General en entornos donde la gravedad y los efectos de la curvatura del espacio-tiempo son extremos. Esto, junto con el detector de ondas gravitatorias LIGO, amplía el marco experimental de esta teoría, que hasta hace poco se caracterizaba por ser una rama mayormente teórica. La Figura §1.1 se corresponde con la primera imagen tomada de un agujero y será nuestro objeto de estudio.

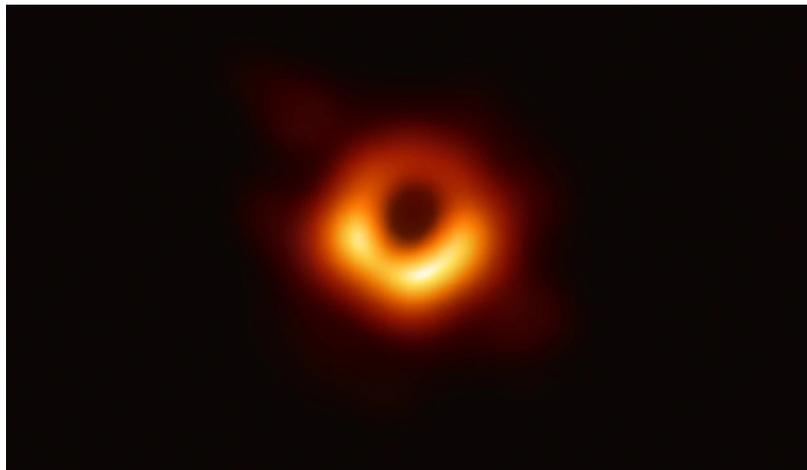


Figura 1.1: Imagen del agujero negro supermasivo de la galaxia M87 (Fuente: [6]).

Los objetivos de este trabajo serán, en consecuencia, introducir teóricamente la Teoría de la Relatividad General para seguidamente estudiar la física de agujeros

negros dentro de este marco teórico, y en segundo lugar, exponer los resultados obtenidos por el EHT y compararlos con las principales predicciones previamente expuestas.

Durante todo el texto, aunque sí se expondrán todas las herramientas matemáticas necesarias para poder construir nuestro marco teórico, no se hará especial énfasis en las definiciones matemáticas ni demostraciones rigurosas. Esta omisión es debida a que la intención de este trabajo es ir más allá de lo que sería un curso introductorio sobre Relatividad General, aportando información “física” al lector sobre agujeros negros con el fin de poder entender los resultados experimentales obtenidos. Introducir correctamente estos conceptos sería incompatible con las limitaciones en la extensión del propio TFG.

## 1.2 RESUMEN DE CONVENIOS

En los textos sobre Relatividad podemos encontrar muchos convenios de notación y de signos diferentes, aquí resumiremos los más importantes y expondremos aquellos que seguiremos a lo largo de este trabajo.

En primer lugar, introducimos el *convenio de sumación de Einstein* con el fin de anotar fórmulas de una manera más compacta. Cuando un índice aparece repetido arriba y abajo, se supone un sumatorio implícito para todos los valores de ese índice. Por ejemplo, sea un vector  $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ , este se descompone en la base  $\{\vec{e}_i\}$  de la forma

$$\vec{v} = \sum_{n=1}^N v^n \vec{e}_n \quad (1.1)$$

Con la notación introducida, esta expresión se escribiría como

$$\vec{v} = v^i \vec{e}_i \quad (1.2)$$

A los índices repetidos se les denomina *mudos* mientras que los que no están sumados se llaman *libres*. Supondremos N ecuaciones por cada índice libre.

Por otro lado, a la hora de expresar la signatura de la métrica usaremos el *Convenio temporal*, introducido por Landau y Lifshitz (1972) [12]. Con esta elección la signatura de la métrica en el espacio de Minkowsky es de la forma  $(+ - - -)$ . Esto quiere decir que el producto escalar entre dos cuadvectores es:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 \quad (1.3)$$

Otros convenios de signos importantes son para el tensor de Riemann y para la ecuación de campo de Einstein:

$$[+]R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda = \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \quad (1.4)$$

$$G_{\mu\nu} = [-]8\pi G \mathcal{T}_{\mu\nu} \quad (1.5)$$

donde los corchetes en rojo muestran la elección del signo. Según la literatura consultada, estos signos pueden cambiar.

Por último, de ahora en adelante, salvo que se indique lo contrario, usaremos el *sistema de unidades naturales*, donde  $c = 1$ . En este sistema el tiempo se comporta como una coordenada espacial más y estas tienen la misma dimensión  $[t] = [x] = \mathbf{L} = \mathbf{T}$ . Por otro lado, la energía y la masa también tienen la misma dimensión (dado que estas se pueden relacionar mediante  $E = mc^2$ ) y la energía puede expresarse en unidades de masa y viceversa:  $[E] = [m] = \mathbf{M} = \mathbf{E}$ .



# INTRODUCCIÓN A LA RELATIVIDAD GENERAL

## 2.1 RELATIVIDAD GENERAL Y GEOMETRÍA. PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA

Tras el éxito de la Teoría de la Relatividad Especial los físicos empiezan a poner atención en la estructura de las teorías físicas y tanto la mecánica de Newton como las leyes de Maxwell son reformuladas como teorías relativistas dentro del marco del espacio de Minkowski. Mientras que las ecuaciones de Maxwell pueden ser descritas por cuadvectores de manera natural, las leyes de la mecánica son completamente reformuladas y aunque análogas al caso newtoniano presentan una estructura completamente diferente (Véase el apéndice §A). Sin embargo, existe una teoría que se resistía a ser descrita bajo los principios de la relatividad de Einstein: la gravedad newtoniana. La principal razón por la que esto ocurre es que el campo gravitatorio en la teoría de Newton se propaga a velocidad infinita, esto es, un cambio en la distribución de masa de un cuerpo produce un cambio instantáneo del campo gravitatorio en todo el espacio. Esto se deduce de la ecuación de Poisson que describe el potencial gravitatorio,  $\phi(\vec{r}, t)$ , generado por una distribución de masa  $\rho_m(\vec{r}, t)$  [10]:

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}, t) = 4\pi G \rho_m(\vec{r}, t) \quad (2.1)$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal y  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  es el operador laplaciano. Su solución general viene dada por

$$\phi(\vec{r}, t) = -G \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 \vec{r}' \quad (2.2)$$

Como vemos, el tiempo en ambas expresiones aparece únicamente como un parámetro externo y no influye en la dinámica del potencial gravitatorio. Otra de las

razones por las que la teoría de la gravitación de Newton no es compatible con la Relatividad Especial es debido a que no es covariante Lorentz, esto es, no está expresada en función de cuadvectores que transforman "bien" bajo transformaciones de Lorentz.

Por otro lado, el principal problema a la hora de tratar con la gravedad es que implica necesariamente observadores acelerados debido a que esta actúa sobre todos los cuerpos. Esto no es así en otras teorías físicas, sin ir más lejos, el electromagnetismo afecta a las partículas con carga pero no a las neutras por lo que siempre podemos definir a una partícula que no siente fuerza alguna como un observador inercial. Sin embargo, si todas las partículas son afectadas por la gravedad, ¿cómo podemos definir un observador inercial?. Además, existe un hecho que diferencia a la gravedad de cualquier otra fuerza y es que todos los cuerpos son acelerados de igual forma en presencia de un campo gravitatorio. Esto quiere decir que el equivalente gravitatorio a la carga eléctrica, que denominamos masa gravitatoria, es independiente de la naturaleza de los cuerpos (por ejemplo, su composición química) y es directamente proporcional a su masa inercial, de modo que con la elección de unidades apropiadas se pueden considerar como iguales. Aunque esto era ya conocido desde Galileo y está presente en la teoría de gravitación de Newton, nadie le dió el importante papel que Einstein le otorga (Capítulo 5 de [15]).

Imaginemos una nave espacial que se mueve por el espacio en una dirección con aceleración,  $a$ , constante. Puesto que por la acción de la gravedad todos los cuerpos son acelerados de igual forma, un observador dentro del cohete no puede distinguir si los objetos sueltos dentro de la nave son acelerados por un campo gravitatorio homogéneo o por las fuerzas de inercia debidas a que el cohete es realmente un observador acelerado no inercial. Además, un objeto en reposo respecto a la nave tendrá un "peso" igual a la fuerza necesaria para seguir acelerándolo junto a la nave del mismo modo que en la gravedad la fuerza es proporcional a la masa. Por tanto, podemos decir que un campo gravitatorio constante es equivalente a un observador con aceleración constante ya que es imposible determinar la diferencia

a base de experimentos físicos. Esto se conoce como *Principio de Equivalencia entre aceleración y gravedad constantes*[15]. Podemos dar la vuelta a este razonamiento y, al igual que los cuerpos que caen en la nave espacial serían los "verdaderos" observadores inerciales, los cuerpos en caída libre en un campo gravitatorio constante pueden también considerarse inerciales en el sentido de que estos ven a los demás cuerpos que están en caída libre en reposo o a velocidad constante. Basándose en este principio, Einstein, en 1907, predijo tres efectos relativistas que debían darse en presencia de gravedad: la trayectoria de la luz se curva en presencia de un campo gravitatorio, el corrimiento al rojo gravitacional y la desincronización de dos relojes en reposo relativo en distintos puntos de un campo gravitatorio [11].

Hasta ahora, hemos enunciado el Principio de Equivalencia únicamente para campos gravitatorios homogéneos. Sin embargo, este principio tal y como lo hemos descrito no es cierto para campos inhomogéneos (que son los que encontramos en el mundo "real"). Por ejemplo, un observador en caída libre en la Tierra ve cómo dos cuerpos también en caída se acercan debido a que siguen trayectorias radiales. Estos efectos causados por las inhomogeneidades del campo gravitatorio se conocen como fuerzas de marea y son debidos a que existe un gradiente en el campo. Podemos suponer un observador en caída libre pero que únicamente realiza medidas locales, esto es, en una región del espacio y del tiempo en la que el gradiente del campo gravitatorio es despreciable o indetectable por los instrumentos de medida utilizados, de esta forma, podemos recuperar el Principio de Equivalencia de manera local: un observador que solo realiza medidas a distancias suficientemente cercas de su origen de referencia y en tiempos suficientemente cortos no notará estas fuerzas de marea y verá dos cuerpos próximos a él y en caída libre en reposo relativo uno del otro y podrá considerarse, al menos localmente, como un observador inercial. Esta observación puede parecer trivial: si solo realizamos medidas en el entorno de un punto, entonces las inhomogeneidades del campo se anulan en primera aproximación. Sin embargo, lo que hace de esto una idea muy profunda y no una trivialidad es el hecho de que las masas gravitacional e inercial son iguales.

Por ejemplo, para el campo electromagnético, por mucho que solo realicemos medidas locales, las partículas con carga neutra no se verán afectadas por el campo, y las partículas aceleradas por este nunca podrán considerarse inerciales, ya que desde su punto de vista las partículas sobre las que no se ejerce ninguna fuerza están aceleradas. Podemos enunciar el Principio de Equivalencia en su versión más general como (Capítulo 9 de [10]):

**Principio de Equivalencia:** Observadores en caída libre en un campo gravitatorio cualquiera son equivalentes localmente a observadores inerciales. No hay experimentos locales que puedan distinguir entre estas dos situaciones.

El hecho de que localmente un observador en caída libre no pueda distinguirse de un observador inercial quiere decir que existe un cambio de coordenadas que elimina el campo gravitatorio en esa pequeña región (pero en general no de forma global) y hace que el espacio localmente sea equivalente al espacio de Minkowski, donde la relatividad especial es aplicable. Esto puede hacerse en cada punto del espacio dando como resultado un espacio que parece de Minkowski (plano) localmente, pero que no lo es globalmente. El concepto matemático que describe este espacio es el de variedad diferenciable con curvatura, esto es, el Principio de Equivalencia nos lleva a asumir que el espacio-tiempo en el que vivimos es un espacio con curvatura. Concretamente, el espacio-tiempo vendrá descrito por una variedad lorentziana, donde la métrica,  $g_{\mu\nu}$ , tiene una signatura del tipo  $(+ - - -)$  pero que no tiene por qué ser la métrica de Minkowski, que denotaremos como  $\eta_{\mu\nu}$ , y donde las partículas "libres" (hasta ahora llamadas en caída libre) siguen curvas geodésicas.

## 2.2 ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN

En la sección anterior hemos dado argumentos heurísticos con los que describir el campo gravitatorio como un espacio-tiempo con curvatura. En la práctica, la forma de tratar las ecuaciones físicas en espacios curvos es muy parecida a la de la relatividad especial, dentro del marco del espacio de Minkowski. La principal diferencia es que la métrica de Minkowski,  $\eta_{\mu\nu}$ , se intercambia por una métrica general,  $g_{\mu\nu}$ , que resume las propiedades geométricas del espacio-tiempo. Es común expresar la métrica mediante el elemento de línea  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ . La forma de la métrica  $\eta_{\mu\nu}$  expresada así sería

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.3)$$

en coordenadas cartesianas. En espacios curvos ya no solo se consideran las transformaciones de Lorentz  $\Lambda_{\mu}^{\nu}$ , sino transformaciones generales de coordenadas  $y^\alpha = y^\alpha(x^\mu)$ . Los objetos tensoriales transforman de forma parecida a como lo hacen en el espacio de Minkowski, pero sustituyendo la matriz de transformación de Lorentz por la matriz  $\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}$  para componentes contravariantes y por  $\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}$  para componentes covariantes. De esta forma, la métrica transforma bajo un cambio general de coordenadas como

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} g_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

El Principio de Equivalencia nos dice que cualquier observador en caída libre puede considerarse inercial localmente, de forma que podemos recuperar la métrica de Minkowski en un entorno de este. Esto se traduce en que para cualquier métrica  $g_{\mu\nu}$  y un punto  $p$  del espacio-tiempo, existe un cambio de coordenadas que hace que  $g_{\mu\nu} \stackrel{\circ}{=} \eta_{\mu\nu}$  en dicho punto. A estas coordenadas se les conoce como *coordenadas localmente inerciales*.

El hecho de que podamos escribir cualquier ley física en cualquier sistema de coordenadas arbitrario implica que las leyes de la física deben transformar bien bajo cualquier cambio de coordenadas. Es por ello que el principio de relatividad de Galileo se sustituye por el *principio de covariancia* (Capítulo 9 de [10]):

**Principio de Covariancia:** Las leyes de la física deben tener la misma forma en todos los sistemas de referencia. Por tanto, deben transformar de manera covariante bajo cambios generales de coordenadas.

Nótese que ya no se hace distinción entre observadores inerciales y no inerciales, esta es una propiedad de la relatividad general: cualquier sistema de referencia puede considerarse inercial en presencia o no de gravedad.

Los dos principales objetos que describen la geometría del espacio son la conexión de Levi-Civita,  $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ , que establece la definición de paralelismo; y el tensor de Riemann,  $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho}^{\lambda}$ , que contiene la información acerca de la curvatura del espacio. Estos objetos están determinados por la métrica y veremos su expresión más adelante. Para una introducción de estos conceptos y otros relacionados con espacios curvos (variedades diferenciables) véase el apéndice §B.

Por otro lado, tampoco sabemos cómo se curva el espacio-tiempo. Mediante un análogo clásico, sabemos que la masa es la fuente del campo gravitatorio por lo que también debería ser la causante de esta curvatura. Sin embargo, de la relatividad especial se deduce que la masa es sólo una de las manifestaciones posibles de la energía de una partícula y por el Principio de Equivalencia, se debe exigir que la gravedad no solo se acople a la masa, sino a cualquier tipo de energía (Capítulo 10 de [10]).

En la mayoría de casos de interés, es común tratar la fuente del campo gravitatorio como un fluido ideal. Podemos entender un fluido como un continuo caracterizado por funciones continuas. La diferencia principal es que estas funciones hacen referencia a propiedades globales del sistema (como presión, temperatura...) en lugar de considerar el movimiento individual de cada partícula. El objeto que describe la energía y momento en un fluido se conoce como el tensor de energía-momento y se denota por  $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ .

El tensor energía-momento se define como el flujo de momento  $p^{\mu}$  a través de

una superficie  $x^v$  constante y es, por construcción, simétrico. Para un sistema de partículas no interaccionantes, también conocido como *polvo*, puede expresarse en la forma (Capítulo 4 de [15])

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu \quad (2.5)$$

donde  $\rho$  es la densidad de energía en reposo de un elemento de volumen y  $u^\mu$  su cuadrivelocidad. El tensor  $\mathcal{T}^{\mu\nu}$  cumple la ley de conservación:

$$\nabla_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.6)$$

El operador  $\nabla_\mu$  es la derivada covariante. En geometría diferencial este operador se define como (Capítulo 1 de [13])

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu V^\rho \quad (2.7)$$

$$\nabla_\mu W_\nu = \partial_\mu W_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho W_\rho \quad (2.8)$$

siendo  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  la conexión de Levi-Civita que puede expresarse en función de la métrica  $g_{\mu\nu}$  como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \quad (2.9)$$

Otro ejemplo algo más complicado de tensor  $\mathcal{T}^{\mu\nu}$  es el de un fluido perfecto [15]

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu - P g_{\mu\nu} \quad (2.10)$$

siendo  $P$  la presión a la que se encuentra dicho fluido.

Existen muchas formas de obtener las ecuaciones de campo de Einstein. Aquí seguiremos la derivación original debido a su simplicidad y a que es más física. Hemos visto que la fuente del campo gravitatorio puede describirse mediante el tensor  $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ , por tanto, las ecuaciones de campo más simples que podemos proponer son de la forma

$$G_{\mu\nu} = -\kappa \mathcal{T}_{\mu\nu} \quad (2.11)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  debe ser un tensor que describa la curvatura del espacio. Existen ciertas restricciones matemáticas y físicas que tiene que cumplir este tensor (Capítulo 10 de [10]):

1.  $G_{\mu\nu}$  debe ser simétrico, ya que  $T_{\mu\nu}$  lo es.
2. Como  $G_{\mu\nu}$  es un objeto puramente geométrico, debe de ser función solamente de la métrica y sus derivadas.
3. Debe de poder recuperar en cierto límite la gravedad newtoniana y la ecuación de Poisson (2.1). Puesto que esta ecuación es de segundo orden,  $G_{\mu\nu}$  debe de contener derivadas segundas de la métrica. La forma más sencilla de conseguirlo es mediante el tensor de Riemann y sus contracciones.
4. La conservación del tensor de energía-momento implica también que  $G_{\mu\nu}$  tenga divergencia nula:  $\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = 0$ .
5. El espacio de Minkowski debe ser una solución en ausencia de materia, esto es, cuando  $T_{\mu\nu} = 0$ . Esto implica que  $G_{\mu\nu}$  debe anularse para la métrica de Minkowski:  $G_{\mu\nu}(\eta) = 0$ .

El tensor de rango 2 más general que se puede construir cumpliendo las condiciones anteriores es

$$G_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} \quad (2.12)$$

$\mathcal{R}_{\mu\nu}$  y  $\mathcal{R}$  son las dos únicas contracciones independientes del tensor de Riemann,  $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho}{}^{\lambda}$ , que viene dado por

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\rho}{}^{\lambda} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}\Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \quad (2.13)$$

donde  $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$  es la conexión de Levi-Civita. El tensor  $\mathcal{R}_{\mu\nu}$  se conoce como tensor de Ricci y se define como la contracción de la segunda y cuarta componente del tensor de Riemann:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\rho\nu}{}^{\rho} \quad (2.14)$$

La cantidad  $\mathcal{R}$  es el escalar de Ricci y es la contracción del tensor  $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ :

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu} \quad (2.15)$$

Además, puede demostrarse (Ver Capítulo 4 de [5]) que para alcanzar el límite newtoniano correcto debe cumplirse que  $\kappa = 8\pi G$ , siendo  $G$  la constante de gravitación universal.

Finalmente, las ecuaciones de Einstein, presentadas en 1915, son

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = -8\pi G\mathcal{T}_{\mu\nu} \quad (2.16)$$

Al igual que las ecuaciones de Maxwell rigen cómo los campos eléctricos y magnéticos son afectados por las cargas y corrientes, las ecuaciones de campo de Einstein rigen cómo la métrica del espacio-tiempo se ve afectada por la energía y el momento. La ecuación (2.16) es en realidad un sistema de 10 ecuaciones diferenciales parciales no lineales y de segundo orden para la métrica  $g_{\mu\nu}$ , lo que hace que sean muy difíciles de resolver. La condición  $\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = 0$  impone 4 ligaduras, por lo que el número de incógnitas independientes es realmente 6, lo cual es compatible con que la métrica es independiente de la elección de coordenadas elegidas [10].

Podemos escribir las ecuaciones de campo de una forma alternativa mucho más adecuada para nuestros objetivos. Tomando la traza (2.16) encontramos la relación [5]

$$\mathcal{R} = 8\pi G\mathcal{T} \quad (2.17)$$

donde  $\mathcal{T} = g^{\mu\nu}\mathcal{T}_{\mu\nu}$  es la traza del tensor energía-momento. Sustituyendo la ecuación (2.17) en las ecuaciones de campo de Einstein, vemos que

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = 8\pi G\left(\mathcal{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{T}\right) \quad (2.18)$$

Las ecuaciones (2.18) son conocidas como las ecuaciones de Einstein sin traza. La principal ventaja de trabajar con estas ecuaciones es que en el caso del vacío, las ecuaciones de campo se reducen a

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.19)$$

El espacio de Minkowski es obviamente una solución de estas ecuaciones en el vacío. Sin embargo, la expresión de (2.19) es lo suficientemente compleja pa-

ra admitir diversos tipos de soluciones, como la solución de Schwarzschild (que veremos más adelante) o de ondas gravitacionales [10].

Una vez conocido cómo la materia y la energía curvan el espacio, queda por ver cómo las partículas se mueven por este. Por definición, una partícula en caída libre es aquella que se mueve libremente por el espacio-tiempo. Por tanto, se moverá siguiendo las líneas rectas naturales de dicho espacio curvo (aquellas curvas que hacen extremal la distancia entre dos puntos). Estas trayectorias se conocen como geodésicas y vienen dadas por la ecuación (Capítulo 1 de [13]):

$$\dot{x}^\mu \nabla_\mu \dot{x}^\rho = \ddot{x}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \quad (2.20)$$

siendo  $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$  y donde  $\lambda$  es el parámetro usado para la curva. Nos interesan especialmente las geodésicas temporales y nulas, ya que son las trayectorias de partículas con masa (temporales) y de fotones (nulas). En el caso de geodésicas temporales el parámetro  $\lambda$  se puede interpretar como el tiempo propio,  $\tau$ , de la partícula y en ese caso  $\frac{dx^\mu}{d\tau} = u^\mu$ . Por tanto, para geodésicas temporales debemos añadir a la ecuación (2.20) la condición

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 1 \quad (2.21)$$

y en el caso de geodésicas nulas

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \quad (2.22)$$

### 2.3 FÍSICA EN ESPACIOS CURVOS

Antes de entrar de lleno en el estudio de las soluciones de agujeros negros de las Ecuaciones Einstein, debemos introducir algunos conceptos generales sobre la física en espacios con curvatura que nos serán útiles posteriormente.

### 2.3.1 Acción de Hilbert-Einstein

Ya hemos comentado que, en general, dispondremos de una métrica general  $g_{\mu\nu}$  determinada por las ecuaciones de campo de Einstein y que en estos espacios definimos la conexión  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  como un objeto que, de cierta forma, contiene la definición de paralelismo y el tensor de Riemann,  $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho}^\lambda$ , que cuantiza la curvatura. A estas generalizaciones debemos añadir el denominado Principio de Mínimo Acoplo. Este principio puede resumirse de manera práctica de la siguiente forma: las leyes de la física en un espacio-tiempo con curvatura son tal que son equivalentes a las de la relatividad especial, pero cambiando la métrica  $\eta_{\mu\nu}$  por una métrica general  $g_{\mu\nu}$ , los operadores  $\partial_\mu$  por el operador  $\nabla_\mu$  definido en (2.7) y el elemento de volumen  $dx^4$  por  $\sqrt{|g|}dx^4$ , siendo  $|g|$  el valor absoluto del determinante de la métrica. Esta no es la única forma de obtener expresiones generales para las leyes físicas pero sí es la más simple (Capítulo 4 de [5]).

Un ejemplo son las leyes de Maxwell, que vienen dadas por  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$  en el espacio de Minkowski y que por el Principio de Mínimo Acoplo escribiremos

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (2.23)$$

$F^{\mu\nu}$  es el tensor electromagnético. Para una breve descripción de sus propiedades véase §A.

Conviene introducir las ecuaciones de Einstein en el contexto de una teoría de campos. En este marco teórico, deben poder obtenerse a partir de un lagrangiano que describa el sistema y que aplicando la condición de mínimo a la acción obtenemos las ecuaciones (2.16) y (2.19). Esta es conocida como la acción de Hilbert-Einstein y viene dada por (Capítulo 10 de [10]):

$$\mathcal{S} = \frac{1}{8\pi G} \int \sqrt{|g|} dx^4 \mathcal{R} \quad (2.24)$$

De esta expresión se obtienen las ecuaciones de Einstein en el vacío (2.19) variando la acción respecto a la métrica inversa  $g^{\mu\nu}$ . La ecuación de Einstein en presencia de

materia se obtiene añadiendo a la acción (2.24) el lagrangiano correspondiente a la materia

$$\mathcal{S} = \int \sqrt{|g|} dx^4 \left( \frac{1}{8\pi G} + \mathcal{L}_{mat} \right) \quad (2.25)$$

La notación lagrangiana de la Relatividad General tiene la ventaja de que nos permite obtener la forma en la que se acoplan los campos electromagnéticos a la gravedad. En efecto, si introducimos la acción (A.37) en la expresión (2.24) obtenemos la acción general para el acople con el campo electromagnético

$$\mathcal{S} = \int \sqrt{|g|} dx^4 \left( \frac{1}{8\pi G} \mathcal{R} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \quad (2.26)$$

Puede comprobarse que variando la acción (2.26) respecto de los potenciales electromagnéticos se obtienen las ecuaciones de Maxwell en el vacío

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = 0 \quad (2.27)$$

y si la variamos respecto a  $g^{\mu\nu}$ , derivamos las ecuaciones de campo de Einstein en presencia del campo electromagnético

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = 8\pi G \left( F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\lambda} F^{\rho\lambda} \right) \quad (2.28)$$

De estas ecuaciones se infiere que el tensor energía-momento electromagnético es

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = -F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^{\rho} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\lambda} F^{\rho\lambda} \quad (2.29)$$

que es la misma expresión que la obtenida para el espacio de Minkowski (ver Capítulo 5 de [12]) pero sustituyendo la métrica  $\eta_{\mu\nu}$  por  $g_{\mu\nu}$ , lo cual es consistente con el Principio de Mínimo Acoplo.

### 2.3.2 Efecto Doppler gravitacional

Del Principio de Equivalencia puede intuirse que en un campo gravitatorio debe existir un efecto Doppler. Sin embargo, hasta ahora no hemos dispuesto de las herramientas matemáticas para describirlo. Supongamos un espacio-tiempo estático. Esto quiere decir que la métrica  $g_{\mu\nu}$  debe ser independiente del tiempo y

además el elemento de línea debe permanecer invariante bajo un cambio de coordenadas  $t \rightarrow t' = -t$ . Por ello, los términos cruzados  $g_{ti}$  de la métrica deben de ser nulos de modo que una métrica estática debe ser de la forma

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 - g_{ij}dx^i dx^j \quad (2.30)$$

Supongamos ahora dos observadores, un emisor y un receptor, en diferentes posiciones. La línea de vida (trayectoria que sigue en el espacio-tiempo) de cada observador es  $x_e^\mu = x_e^\mu(\tau_e)$  y  $x_r^\mu(\tau_r)$ , respectivamente, donde  $\tau$  hace referencia al tiempo propio. El emisor emite señales cada cierto periodo de tiempo dado por

$$d\tau_e^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (2.31)$$

Supondremos tanto al emisor como el receptor como observadores estáticos en nuestro sistema de coordenadas, por lo que esta expresión se reduce a

$$d\tau_e^2 = g_{tt}(x_e)dt^2 \quad (2.32)$$

De la misma forma, el receptor medirá un tiempo entre dos señales dado por

$$d\tau_r^2 = g_{tt}(x_r)dt^2 \quad (2.33)$$

Por otro lado, resulta obvio que  $d\tau_r = \frac{g_{tt}(x_r)}{g_{tt}(x_e)}d\tau_e$  y la relación entre el periodo de dos señales consecutivas será

$$T_r = T_e \sqrt{\frac{g_{tt}(x_r)}{g_{tt}(x_e)}} \quad (2.34)$$

y equivalentemente, las frecuencias estarán relacionadas por

$$\nu_r = \nu_e \sqrt{\frac{g_{tt}(x_e)}{g_{tt}(x_r)}} \quad (2.35)$$

Este efecto Doppler se ha medido en el régimen de campo débil con una precisión hasta del 0,01% (Capítulo 11 de [10]).

De este resultado se deduce que el significado físico de la componente  $g_{tt}$  de la métrica está ligado con la dilatación temporal debida a un campo gravitatorio. Veremos que es por este efecto que el tiempo parece ir mucho más lento, desde el punto de vista de un observador lejano, en zonas cercanas a objetos masivos.

### 2.3.3 Cantidades Conservadas

En función del sistema de coordenadas elegidas, puede ocurrir que algunas de las componentes del cuádrimomento  $p_\mu$  de una partícula en presencia de un campo gravitatorio sean constantes a lo largo de su trayectoria. Esto puede deducirse de las ecuaciones (2.20) de las geodésicas. En el caso de geodésicas temporales, puesto que  $p^\mu = m_0 u^\mu$ , siendo  $m_0$  la masa en reposo de la partícula, podemos escribir (Capítulo 7 de [15])

$$p^\mu \nabla_\mu p_\nu = p^\mu \partial_\mu p_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho p_\rho = 0 \quad (2.36)$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{dp_\nu}{d\tau} = \Gamma_{\mu\nu}^\rho p^\mu p_\rho \quad (2.37)$$

Sustituyendo la expresión para la conexión Levi-Civita (A.26) queda

$$\frac{dp_\nu}{d\tau} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} \left( \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} \right) p^\mu p_\rho = \frac{1}{2} \left( \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} \right) p^\mu p^\lambda \quad (2.38)$$

Mientras que el producto  $p^\mu p^\lambda$  es simétrico, el primer y tercer término dentro del paréntesis son antisimétricos respecto a las coordenadas  $\mu$  y  $\alpha$ , y por tanto, se anulan. La expresión anterior se reduce en consecuencia a

$$\frac{dp_\nu}{d\tau} = \frac{1}{2} \partial_\nu g_{\mu\lambda} p^\mu p^\lambda \quad (2.39)$$

De esta ecuación se deduce que si la métrica es independiente de una coordenada  $\alpha$  concreta, entonces la cantidad  $p_\alpha$  es una constante del movimiento. Aunque la expresión (2.39) se ha obtenido para partículas con masa, realmente no existe ningún motivo por el cual no deba cumplirse también para objetos sin masa. La única diferencia es que el parámetro  $\lambda$  no puede corresponderse con el tiempo propio. Sin embargo, podemos definir el momento como  $(p_\gamma)_\mu = \frac{dx_\mu}{d\lambda}$ .

Supongamos un campo gravitatorio estacionario, esto es, tal que  $g_{\mu\nu}$  no depende del tiempo en un sistema de coordenadas concreto. En este caso, la componente

temporal del momento,  $p_t = E$ , es constante. Por tanto, la independencia de la métrica con el tiempo implica la conservación de la energía de la partícula en este sistema de coordenadas. Usualmente,  $E$  se expresa como la energía de la partícula sin especificar el sistema de coordenadas.

### 2.3.4 Singularidades

En muchas ocasiones la métrica obtenida de las ecuaciones de Einstein puede ser singular en ciertas regiones del espacio-tiempo. Diremos que una métrica es singular si se hace cero o infinito en alguna de las componentes en uno o en un conjunto de puntos. No contamos como singularidades aquellas componentes de la métrica que son nulas en cualquier punto.

Existen dos tipos de singularidades: *singularidades físicas* y *singularidades de coordenadas*. Estas últimas aparecen debido a la elección de coordenadas y no se diferencian de cualquier otro punto de la variedad. Un ejemplo de esto es la métrica plana en coordenadas esféricas

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (2.40)$$

que es singular para  $r = 0$  y  $\theta = 0$  independientemente. Las singularidades de coordenadas tienen la propiedad de que desaparecen con un cambio de coordenadas. Aunque estas singularidades no son propiamente inherentes al espacio-tiempo, en el sentido de que son dependientes del sistema de coordenadas, sí que pueden tener significado físico. Un ejemplo especial son aquellos puntos en los que  $g_{tt} = 0$ . En la sección §2.3.2 hemos visto que esta componente de la métrica está ligada con la dilatación temporal y el efecto Doppler gravitacional. De hecho, de la ecuación (2.34) vemos que si esta componente de la métrica se anula en un punto, entonces el efecto Doppler es infinito y el tiempo parece detenerse en un entorno de este. Otro ejemplo de singularidad de coordenadas con significado físico puede darse cuando la componente  $g^{rr}$  de la métrica inversa se anula en una superficie cerrada. Esto indica un cambio de signo en esta componente y, más concretamente, pue-

de significar que las superficies con  $r = cte$  pasan de ser espaciales (como cabe esperar) a ser temporales o viceversa. Veremos en el siguiente capítulo que esta condición se da en el horizonte de sucesos de un agujero negro y se corresponde con una región del espacio-tiempo completamente aislada del exterior, esto es, que no puede influir causalmente a nada fuera de ella.

Las singularidades físicas, por otro lado, son aquellas que no pueden desaparecer bajo cambios de coordenadas, ya que son una propiedad inherente al espacio-tiempo descrito por la métrica  $g_{\mu\nu}$ . Una forma de saber si una singularidad es física es estudiando la curvatura del espacio-tiempo. Si algún invariante de curvatura es infinito en ese punto, entonces lo será para todos los sistemas de coordenadas puesto que, por construcción, estos son independientes de las coordenadas empleadas. Los invariantes de curvatura más comunes y los que emplearemos en este estudio son el escalar de Ricci (2.15), el invariante  $\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu}$  y el invariante de Kretschmann  $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\lambda}\mathcal{R}^{\mu\nu\rho\lambda}$ .

Una singularidad física puede estar rodeada o no de un horizonte de sucesos. En el caso de que no lo esté se le denomina *singularidad desnuda*. Una singularidad puede influir en el resto del universo creando problemas de causalidad (Capítulo 10 de [10]).

# SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN DE EINSTEIN: AGUJEROS NEGROS

En este capítulo expondremos las soluciones de agujeros negros aislados predichos por la Relatividad General. Veremos que cualquier agujero negro puede ser descrito en términos de tres parámetros: la masa, la carga y el momento angular.

## 3.1 SOLUCIÓN DE SCHWARZSCHILD. EL AGUJERO NEGRO DE SCHWARZSCHILD

La primera solución exacta encontrada de las ecuaciones de Einstein fue la solución de Schwarzschild, poco tiempo después de que Einstein publicara su versión de las ecuaciones de campo [16]. Schwarzschild supuso una solución estática y simétricamente esférica de las ecuaciones del vacío.

Resolver de forma general la ecuación (2.19) es imposible debido a su complejidad. Sin embargo, es posible hacerlo escogiendo un buen *Ansatz*, que no es más que una forma concreta de la métrica que respete las simetrías del sistema. La estaticidad de la solución impone que la métrica debe ser independiente del tiempo e invariante ante inversiones temporales. Esto se traduce en que las componentes de la métrica no dependen del tiempo y que los términos cruzados  $g_{ti}$  son idénticamente cero. Por otro lado, la simetría esférica implica que en cada esfera de radio  $r$ , la métrica debe de ser constante. Es fácil ver que la métrica más general que podemos construir y que respeta las simetrías mencionadas es

$$ds^2 = e^{2\phi(r)} dt^2 - e^{2\Lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.1)$$

Para calcular el valor concreto de las funciones  $\phi(r)$  y  $\Lambda(r)$  debemos resolver las ecuaciones de Einstein para el vacío introduciendo el *ansatz* propuesto. Obtene-

mos (Capítulo 5 de [5])

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (3.2)$$

donde hemos hecho  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$  por simplicidad. La constante  $R_S$  surge como una constante de integración sin determinar. Para conocer su valor debemos aplicar el límite Newtoniano. Puede demostrarse que (ver Capítulo 4 de [5]) en el límite de campo débil la componente  $g_{tt}$  de la métrica puede escribirse como

$$g_{tt} = 1 + 2\Phi \quad (3.3)$$

y que la curva geodésica seguida por una partícula es

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \partial_i \Phi \quad (3.4)$$

con  $\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0$ . En este límite, que se da cuando  $r \rightarrow \infty$ , debemos recuperar la mecánica newtoniana. Las ecuaciones de Newton de una partícula en un campo gravitatorio newtoniano vienen dadas por  $\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\partial_i \left(\frac{Gm}{r}\right)$ . Por tanto, para que se alcance este límite debe cumplirse que

$$R_S = 2Gm = 2M \quad (3.5)$$

En otras palabras, la constante de integración  $R_S$  puede interpretarse como una medida de la masa que causa la curvatura.  $M$  suele denominarse como la masa geométrica.

Finalmente, la métrica de Schwarzschild viene dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (3.6)$$

Hemos visto que el parámetro  $M$ , obtenido como una constante de integración, tiene la interpretación de la masa del objeto que crea el campo gravitatorio. Esto parece contradictorio con el hecho de que la solución de Schwarzschild es una solución del vacío. Existen dos maneras de interpretar esta aparente contradicción (Capítulo 12 de [10]). La primera, es que en realidad la métrica (3.6) no engloba a todo el espacio, sino que describe la parte exterior de una estrella de radio  $R_0 > 2M$ .

Es por esto que usualmente la métrica obtenida se conoce como la *solución exterior de Schwarzschild*. El interior de la estrella viene descrito por la *solución interior de Schwarzschild* y se calcula introduciendo el ansatz (3.1) en las ecuaciones de Einstein en presencia de materia. Una elección posible para el tensor  $\mathcal{T}_{\mu\nu}$  es la de un fluido perfecto de densidad constante, dado por (2.10). Aunque la solución interior de Schwarzschild no es nuestro objeto de estudio, una propiedad importante que se obtiene de ella es que la presión en el centro de la estrella está determinada únicamente por la masa y la densidad mediante la relación (Capítulo 7 de [15])

$$P_c = \rho \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2M}{R_0}}}{3\sqrt{1 - \frac{2M}{R_0}} - 1} \quad (3.7)$$

Nótese que  $P_c$  se hace infinita para  $R_0 = \frac{9M}{4}$ . Este es un límite general incluso para estrellas más realistas y es conocido como el teorema de Buchdahl. Este límite nos dice que configuraciones con radios menores a  $\frac{9M}{4}$  están condenadas a colapsar a menos que otro tipo de fuerza repulsiva las detenga.

La segunda forma de entender la solución (3.6) es tomarla para todos los valores de la coordenada radial  $r$ . Como veremos, esta es una solución del vacío con una singularidad física en el origen. En este caso el valor de  $M$  es debido a la presencia de una singularidad que actúa como una masa. En este sentido, la solución exterior de Schwarzschild es el equivalente del campo gravitatorio creado por una masa puntual.

### 3.1.1 Estructura causal de la solución de Schwarzschild

Una primera propiedad geométrica que podemos inferir de la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.8)$$

es que en el límite cuando  $r \rightarrow +\infty$  obtenemos el espacio de Minkowski. Los sistemas de coordenadas que cumplen esta propiedad se dice que son *asintóticamente planos* (capítulo 12 de [10]).

Las singularidades de la métrica de Schwarzschild (3.8) se dan para  $\theta = 0, \pi$  y cuando  $r = 0$  y  $r = 2M$ . Las singularidades en  $\theta$  se deben a la elección de coordenadas esféricas, por lo que no tienen significado físico. Un caso diferente son las singularidades en  $r = 0$  y  $r = 2M$ , donde ya no queda tan claro. En la sección anterior vimos que una forma de saber si una singularidad es física es si algún invariante de curvatura diverge en los puntos de la singularidad. Puesto que la métrica de Schwarzschild es una solución del vacío, es obvio que el escalar de Ricci es  $\mathcal{R} = 0$  y que el invariante  $\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu} = 0$ . Sin embargo, la expresión del invariante de Kretschmann es para la métrica (3.8)

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\lambda}\mathcal{R}^{\mu\nu\rho\lambda} = \frac{48M^2}{r^6} \quad (3.9)$$

la cual es claramente divergente para  $r = 0$ . Que el invariante de Kretschmann no sea singular para  $r = 2M$  no demuestra que esta sea una singularidad de coordenadas, puesto que otro invariante de curvatura podría ser divergente en esta región. La forma más sencilla de demostrar que una singularidad no es física es encontrando un sistema de coordenadas que la elimine. En efecto, existen sistemas de coordenadas en las que la singularidad en  $r = 2M$  se elimina. Un ejemplo son las coordenadas de Eddington-Finkelstein y las coordenadas de Kruskal (ver Capítulo 5 de [5]).

Aunque la singularidad en  $r = 2M$  no es física sí que podemos atribuirle significado físico, de hecho, esta cantidad se conoce como el radio de Schwarzschild y se denota por  $R_S$ . En la sección §2.3.2 vimos que el efecto Doppler gravitacional se hace infinito cuando  $g_{tt} = 0$  en un conjunto de puntos. Esto ocurre con el radio de Schwarzschild para la métrica (3.8), por lo que esta es una *superficie de corrimiento infinito hacia el rojo*. Por otro lado, es fácil comprobar que la componente de la métrica inversa  $g^{rr} = \frac{1}{g_{rr}}$  se anula en el radio de Schwarzschild, lo que se corresponde con un *horizonte de sucesos*. Para ilustrarlo mejor, estudiemos las geodésicas nulas radiales, esto es, tales que  $d\theta = d\varphi = 0$ . De la condición (2.22) obtenemos la relación [10]

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 = 0 \quad (3.10)$$

Dividiendo ambos términos tenemos

$$\left(\frac{dt}{dr}\right) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \quad (3.11)$$

cuya solución viene dada por

$$t = \pm \left[ r + 2M \log \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| + C_0 \right] \quad (3.12)$$

donde el signo  $\pm$  indica la dirección de las geodésicas y  $C_0$  es una constante de integración. El signo positivo se corresponde con geodésicas salientes y el negativo con las entrantes. La pendiente de los conos de luz es por definición  $\frac{dt}{dr}$  que por la ecuación (3.11) viene dada por [5]

$$\left(\frac{dt}{dr}\right) = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \quad (3.13)$$

Para regiones donde  $r \gg 2M$  las geodésicas (3.12) son asintóticamente planas y los conos de luz forman  $45^\circ$  con los ejes de coordenadas. Esto es lógico, ya que hemos comentado que la solución de Schwarzschild recupera la métrica de Minkowski cuando  $r \rightarrow \infty$ . Sin embargo, a medida que nos acercamos al radio de Schwarzschild el término logarítmico se hace más importante y los conos de luz parecen cerrarse poco a poco. En el límite  $r \rightarrow 2M$  existe una asíntota para las geodésicas radiales y los conos de luz se encuentran totalmente degenerados, esto es, forman un ángulo de  $90^\circ$  con el eje espacial. Dentro del radio de Schwarzschild, las trayectorias tanto salientes como entrantes se encuentran atrapadas en esta zona debido a la asíntota en  $r = 2M$ . Los conos de luz ahora apuntan a la singularidad  $r = 0$  (ver figura §3.1). Esto se debe a que las componentes  $g_{tt}$  y  $g_{rr}$  cambian de signo e intercambian papeles en la estructura causal del espacio-tiempo.

Por tanto, parece que ninguna señal es capaz de entrar en el horizonte de sucesos ni al revés. Sin embargo, esto es de esperar ya que, como hemos comentado, el radio de Schwarzschild es también una superficie de corrimiento infinito hacia el rojo y la dilatación temporal tiende a infinito por lo que nunca veríamos a un objeto llegar a este punto. Por tanto, la solución de Schwarzschild no es adecuada para describir lo que ocurre cerca del radio de Schwarzschild. Un sistema

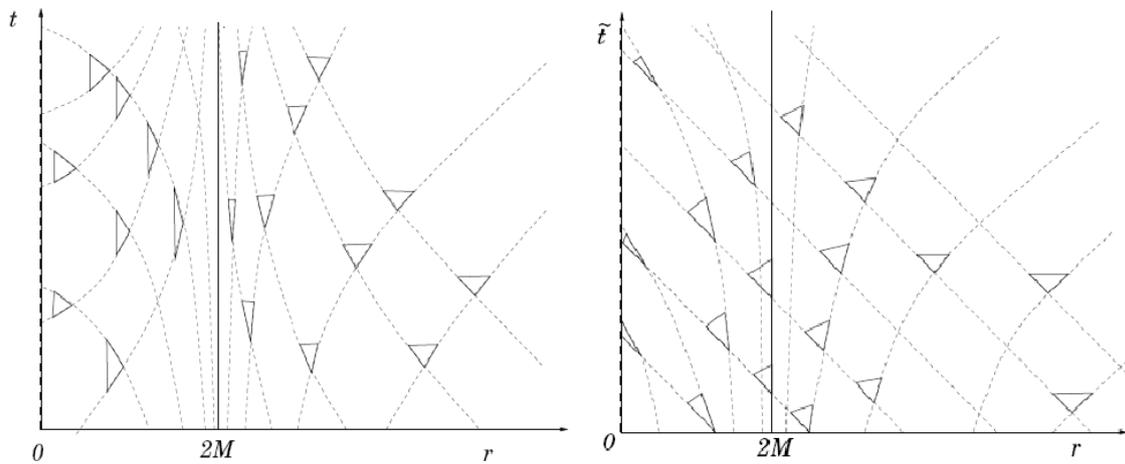


Figura 3.1: Representación de las geodésicas radiales nulas en la solución de Schwarzschild. A la izquierda en coordenadas de Schwarzschild y a la derecha en las coordenadas avanzadas de Eddington-Finkelstein. (Fuente: [10]).

de coordenadas más adecuado para describir qué ocurre cerca de  $r = 2M$  son las coordenadas (avanzadas) de Eddington-Finkelstein, que se obtienen realizando el siguiente cambio en la coordenada temporal [10]

$$\tilde{t} = t + 2M \log \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \quad (3.14)$$

La métrica en estas coordenadas se expresa como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tilde{t}^2 + \frac{4M}{r} d\tilde{t}dr - \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (3.15)$$

Es fácil comprobar que las expresiones para las geodésicas entrantes y salientes en estas coordenadas son

$$\tilde{t} = -r - C_0 \quad (3.16)$$

$$\tilde{t} = r + 4M \log \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| + C_0 \quad (3.17)$$

En estas coordenadas, los conos de luz se comportan bien en el radio de Schwarzschild y no hay problema en trazar geodésicas que entran dentro de él. Sin embargo, aunque los conos de luz no degeneran, estos se inclinan al igual que en la solución de Schwarzschild a medida que se acercan a esta región. Una vez dentro, de nuevo las componentes espacial y temporal de la métrica intercambian el signo y todas

las geodésicas tienen dirección decreciente en  $r$ . Queda claro, que el horizonte de sucesos funciona como una superficie de la cual no puede salir nada. Dentro del horizonte de sucesos todos los caminos terminan en la singularidad física  $r = 0$  y es por ello que se le denomina como una *singularidad en el futuro*.

En la figura §3.1 podemos observar las geodésicas radiales lumínicas en coordenadas de Schwarzschild y de Eddington-Finkelstein, junto con los conos de luz en cada región. Todas las propiedades geométricas descritas pueden deducirse de ellas.

En resumen, hemos visto que la métrica de Schwarzschild predice la existencia de agujeros negros creados por configuraciones simétricamente esféricas con un radio menor al radio de Schwarzschild  $R_S = 2Gm$ . A este se le conoce como el *agujero negro de Schwarzschild*. Aunque hemos supuesto que la solución de nuestro problema debe de ser estática, el Teorema de Birkhoff nos dice que la solución de Schwarzschild es la única solución del vacío con simetría esférica (ver Capítulo 5 de [5]). Por tanto, incluso en configuraciones que no parecen estáticas, como una estrella colapsando gravitacionalmente, la solución en el exterior es (3.8).

### 3.1.2 Geodésicas

Aunque ya hemos hecho una pequeña discusión de las geodésicas radiales nulas, en esta sección estudiaremos las geodésicas de forma más general, incluso para partículas con masa. Estas curvas admiten soluciones en forma de órbitas aunque en general no serán cerradas, sino que se caracterizarán por presentar una precesión en el perihelio (las trayectorias no cierran completamente).

En la sección §2.3.3 vimos que si una métrica es independiente de una coordenada, entonces la componente del cuadvivector momento asociada a dicha coordenada se conserva para cualquier cuerpo. La independencia de la métrica (3.8) respecto de las coordenadas  $t$  y  $\varphi$  implica la conservación de las componentes  $p_t = E$  y  $p_\varphi = -L$ , donde  $E$  y  $L$  son la energía y el momento angular. Es común redefinir

estas cantidades por su equivalente por unidad de masa. De esta forma definimos (Capítulo 11 de [15])

$$E = \frac{p_0}{m_0} \quad (3.18)$$

$$L = \frac{p_\varphi}{m_0} \quad (3.19)$$

De nuevo, podemos calcular la parte radial de las trayectorias resolviendo la ecuación

$$g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = \epsilon \quad (3.20)$$

con  $\epsilon = 1$  para geodésicas temporales y  $\epsilon = 0$  para geodésicas nulas. Como la simetría es esférica, el movimiento siempre estará confinado en un plano. Podemos tomar el plano considerado como aquel en el que  $d\theta = 0$  y por tanto  $p^\theta = 0$  [15]. Introduciendo la métrica de Schwarzschild en esta ecuación y teniendo en cuenta las definiciones anteriores junto con que  $p^r = \frac{dr}{d\tau}$  se obtiene la ecuación (Capítulo 5 de [5]):

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V_{ef}(r) = \frac{1}{2} E^2 \quad (3.21)$$

donde

$$V_{ef}(r) = \frac{1}{2} \epsilon - \frac{M}{r} \epsilon + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3} \quad (3.22)$$

Recordemos que  $\lambda = \tau$  para geodésicas temporales. Para  $\epsilon = 1$  esta ecuación es equivalente a la ley de conservación de energía monodimensional en el caso clásico para una partícula de energía  $\tilde{E} = \frac{1}{2} E^2$ . Es más, esta ecuación es completamente análoga al problema monodimensional equivalente de una partícula en un campo gravitatorio newtoniano, pero añadiendo al potencial efectivo el término  $-\frac{ML^2}{r^3}$ . Por tanto, este término puede entenderse como la corrección que da la relatividad general a las trayectorias de los cuerpos que se mueven en un campo gravitatorio (al menos para la parte radial). En mecánica clásica, las trayectorias descritas por ecuaciones del tipo (3.21) están ampliamente estudiadas. Un resultado interesante es el conocido Teorema de Bertrand (ver Capítulo 3 de [8]), que establece que las únicas formas posibles del potencial gravitatorio para que las trayectorias sean cerradas son  $V(r) \sim \frac{1}{r}$  y  $V(r) \sim r^2$ . Como el término  $\frac{L^2}{2r^2}$  no es parte del potencial,

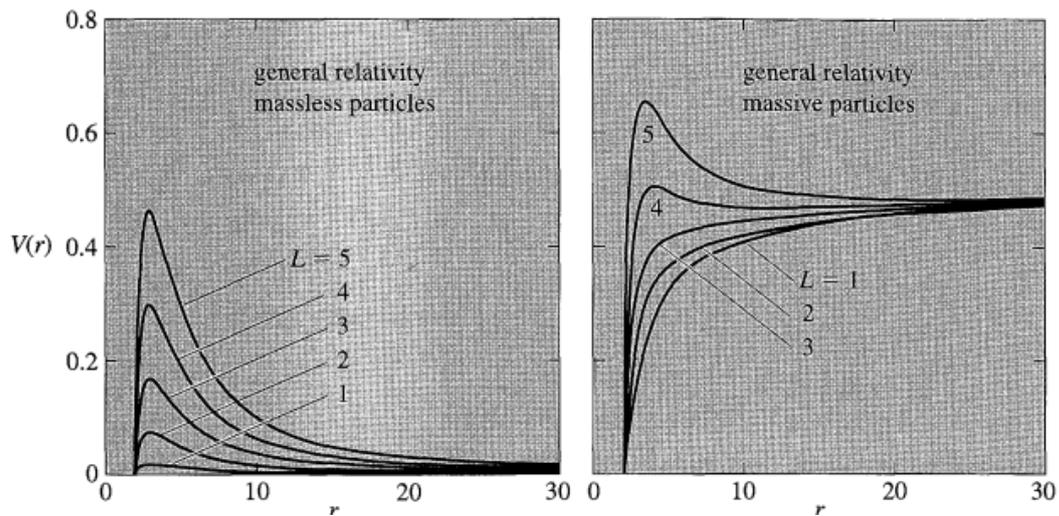


Figura 3.2: *Potencial efectivo en las trayectorias de partículas en el espacio de Minkowski.* (Fuente: [5]).

sino de la energía cinética, las trayectorias son cerradas para el caso clásico. En cambio, como el término introducido en la solución (3.22) es  $\sim \frac{1}{r^3}$ , las geodésicas en un campo gravitatorio esféricamente simétrico no lo serán. Esta es una de las predicciones más importantes de la Relatividad General y predice la precesión del perihelio de Mercurio con una precisión de 0,04 arcosegundos por siglo [10]. Aunque no conocemos las soluciones para las coordenadas  $t(\tau)$  y  $\varphi(\tau)$ , resulta instructivo estudiar el movimiento de los cuerpos únicamente describiendo su coordenada radial. En la figura §3.2 se representa el potencial efectivo (3.22) tanto para fotones como partículas masivas.

En el caso de partículas sin masa observamos una barrera de potencial para un cierto radio crítico. Si la energía del fotón es menor que la barrera de potencial y se encuentra dentro de este radio, caerá inexorablemente hasta el radio de Schwarzschild y será atrapada por el agujero negro. En caso de que se encuentre a una distancia mayor que dicho radio crítico, la fuerza gravitatoria no es suficiente para atraparlo. Si el fotón tiene energía suficiente como para superar la barrera de potencial, un fotón que se acerca desde el infinito caerá inevitablemente hasta  $r = 0$ . En el radio crítico el potencial efectivo es máximo y existen por tanto órbitas cir-

culares inestables. Aplicando la condición de extremo  $\frac{dV_{ef}}{dr} = 0$  a la ecuación (3.22) para  $\epsilon = 0$  obtenemos que este radio crítico es

$$r_c = 3M \quad (3.23)$$

En el caso de partículas con masa, existen dos posibles órbitas circulares, una estable y otra inestable. Aplicando la misma condición de extremo a  $V_{ef}$  obtenemos

$$r_c = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12M^2L^2}}{2M} \quad (3.24)$$

En el límite cuando  $L \rightarrow \infty$  estos radios tienden a  $r_{c-} = 3M$  y  $r_{c+} = \frac{L^2}{M}$ . A medida que  $L$  disminuye, las órbitas circulares se van acercando. En el límite cuando  $L = \sqrt{12}M$  las órbitas coinciden. En este límite se tiene que

$$r_c = 6M \quad (3.25)$$

Para valores del momento angular  $L < \sqrt{12}M$  no existen órbitas circulares para partículas con masa. Hemos encontrado por tanto, que la solución de Schwarzschild tiene órbitas circulares inestables para  $3M < r < 6M$  y estables para  $r > 6M$ . Además, existen trayectorias de órbitas no circulares y no cerradas para  $r > 3M$ .

### 3.2 AGUJERO NEGRO DE REISSNER-NORDSTRÖM

Hemos visto que la solución más general de un agujero negro esféricamente simétrico y de masa  $m$  es la solución de Schwarzschild. Una generalización natural es añadir una carga eléctrica  $q$ . Un objeto así parece poco realista, ya que un objeto macroscópico con carga neta atraería partículas de carga opuesta que lo neutralizarían. Sin embargo, resulta interesante desde el punto de vista físico estudiar su estructura causal. Este objeto viene descrito por la solución de Reissner-Nordström.

En la sección §2.3.1 vimos que las ecuaciones de Einstein en presencia del campo electromagnético vienen dadas por

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = 8\pi G \left( F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda} \right) \quad (3.26)$$

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = 0 \quad (3.27)$$

Puesto que volvemos a buscar una solución estática y esféricamente simétrica proponemos el ansatz (3.1) para la métrica

$$ds^2 = e^{2\phi(r)} dt^2 - e^{2\Lambda(r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (3.28)$$

Además, debemos elegir un Ansatz para el campo electromagnético. De nuevo, por las simetrías de la configuración supondremos que el tensor electromagnético solo está formado por un campo eléctrico en la dirección radial y que solo depende de la coordenada  $r$ . Esto es (Capítulo 13 de [10])

$$F_{tr} = E(r) \quad (3.29)$$

Para calcular la forma del campo eléctrico introducimos el ansatz (3.29) en la expresión (3.27) de las ecuaciones de Maxwell. Un resultado conocido en geometría diferencial es que podemos escribir la divergencia de un tensor antisimétrico como (Capítulo 1 de [13])

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\mu} \left[ \sqrt{|g|} F^{\mu\nu} \right] = 0 \quad (3.30)$$

De esta forma, obtenemos que

$$E(r) = e^{(\phi+\Lambda)} \frac{Q}{r^2} \quad (3.31)$$

donde  $Q$  es una constante de integración. Veremos en breve que es una medida de la carga eléctrica  $q$ .

Introduciendo la relación (3.31) en el lado derecho de la ecuación de Einstein y la métrica propuesta en el izquierdo, obtenemos que

$$\phi(r) = -\Lambda(r) \quad (3.32)$$

$$\phi(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa Q^2}{2r^2} \quad (3.33)$$

Por tanto, la solución de Reissner-Nordström viene dada por

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa Q^2}{2r^2} \right) dt^2 - \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa Q^2}{2r^2} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (3.34)$$

$$F_{tr} = \frac{Q}{r^2} \quad (3.35)$$

con  $\kappa = 8\pi G$ . De nuevo, puede demostrarse con el límite de campo débil que la constante  $M$ , obtenida como una constante de integración, puede considerarse como una medida de la masa del cuerpo que crea el campo gravitatorio.

Por otro lado, podemos calcular la carga eléctrica usando la ley de Gauss. Aprovechando la simetría esférica del sistema, podemos calcular el flujo del campo eléctrico a través de una esfera de radio  $R$ . En este caso

$$q = \int_{S^2} \frac{Q}{R^2} R^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi Q \quad (3.36)$$

por lo que efectivamente la constante  $Q$  es proporcional a la carga del sistema (de hecho  $Q$  es la carga en unidades gaussianas mientras que  $q$  lo es en unidades de Heaviside-Lorentz, que son las empleadas en este texto). Es importante notar que la solución de Schwarzschild es un caso particular de la solución Reissner-Nordström cuando  $Q \rightarrow 0$  y que el espacio de Minkowski es el límite cuando  $M \rightarrow 0$  y  $Q \rightarrow 0$  simultáneamente.

### 3.2.1 Estructura causal. Horizontes de Reissner-Nordström

Debido al término  $\frac{\kappa Q^2}{2r^2}$  la estructura causal del agujero negro de Reissner-Nordström es algo más compleja. Existen varias regiones en las que la métrica (3.34) es singular. De nuevo,  $\mathcal{R}$  es nulo. Sin embargo, ahora no es necesario calcular el invariante de Kretschmann, puesto que la contracción del tensor de Ricci  $\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu}$  nos da

$$\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu} = \frac{\kappa^2 Q^4}{r^8} \quad (3.37)$$

Por tanto, la singularidad en  $r = 0$  es física. De nuevo, esto sugiere que las demás singularidades son de coordenadas. Como vimos en secciones anteriores, la posición de un horizonte corresponde a los puntos en los que la componente  $g^{rr}$  de la métrica inversa se anula, esto es

$$1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa Q^2}{2r^2} = 0 \quad (3.38)$$

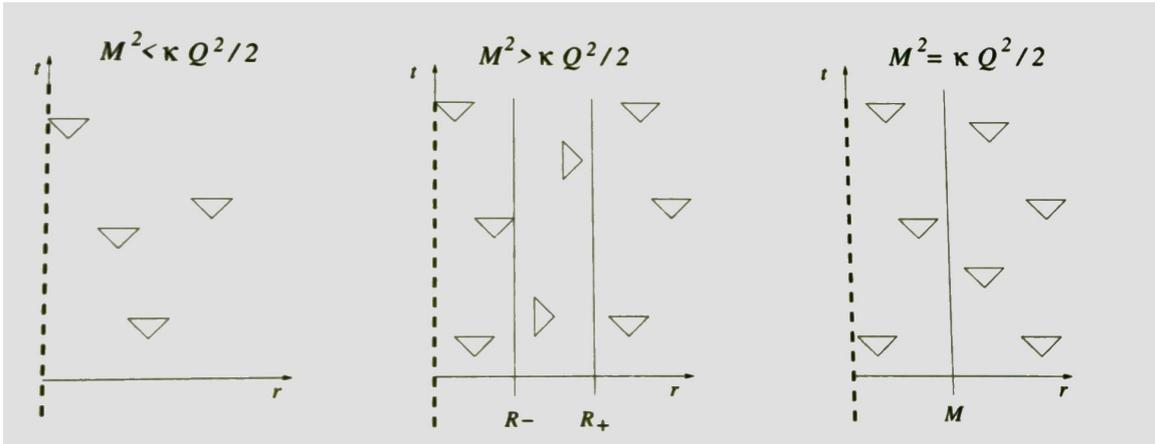


Figura 3.3: Estructura causal de los tres tipos de agujeros negros de Reissner-Nordström. La orientación de los conos de luz en el caso subextremal sugiere que en la región intermedia ( $R_- < r < R_+$ ) las coordenadas temporal y espacial son espacial y temporal respectivamente (Fuente: [10]).

Existen tres casos en función del número de soluciones de esta ecuación (Capítulo 13 de [10]):

- Caso sobre-extremal ( $M^2 < \frac{1}{2}\kappa Q^2$ ): la ecuación (3.38) no tiene soluciones reales. En este caso la singularidad en  $r=0$  no tiene horizontes. Se dice que es una *singularidad desnuda*. Además, como no hay cambios de signos en las componentes  $g_{tt}$  y  $g_{rr}$  de la métrica, es una singularidad temporal. Esto tiene consecuencias catastróficas para la causalidad y la trataremos como una solución no física.

Suele introducirse la *conjetura del censor cósmico*, propuesta por Penrose en 1969, que propone que no pueden conseguirse singularidades desnudas en un proceso físico que inicialmente no contiene singularidades físicas.

- Caso subextremal ( $M^2 > \frac{1}{2}\kappa Q^2$ ): existen dos soluciones reales:

$$R_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - \frac{1}{2}\kappa Q^2} \quad (3.39)$$

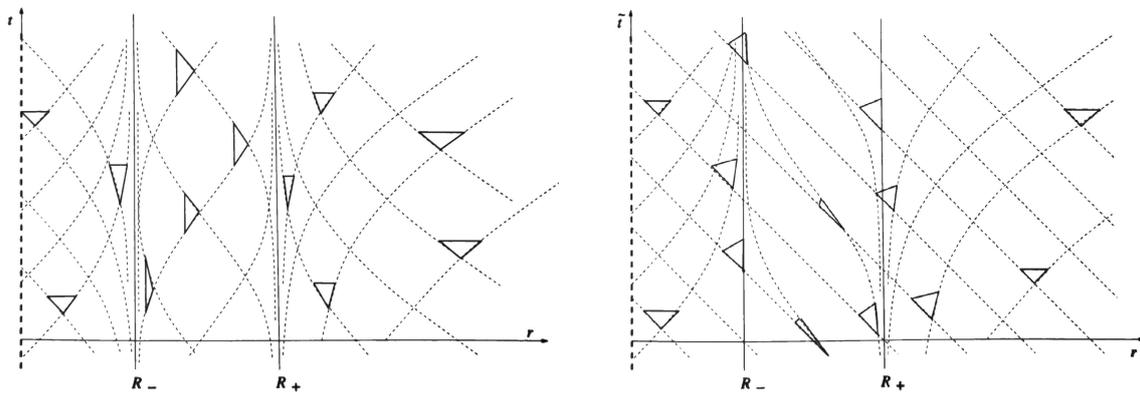


Figura 3.4: Geodésicas radiales nulas en el agujero negro de Reissner-Nordström. A la izquierda, en coordenadas de Schwarzschild. A la derecha, en coordenadas de Eddington-Finkelstein (Fuente: [10]).

- Caso extremal ( $M^2 = \frac{1}{2}\kappa Q^2$ ): caso límite en el que existe una raíz doble en  $r = M$ .

Nos centraremos brevemente en el caso subextremal, ya que tiene más relevancia física. La solución extremal es un caso límite de este.

Como hemos visto, el agujero de Reissner-Nordström subextremal tiene dos horizontes en  $r = R_{\pm}$ . Esto nos indica que las coordenadas  $t$  y  $r$  son respectivamente temporal y espacial en la parte exterior de  $R_+$  y en la interior de  $R_-$ ; e intercambian sus papeles en  $R_+ < r < R_-$ . Al igual que en la solución de Schwarzschild,  $t$  y  $r$  son nulas en los horizontes. Por otro lado, la singularidad es temporal y por lo tanto evitable. Esta estructura causal se representa en la figura §3.3 y nos indica una propiedad muy importante: si un cuerpo entra dentro de la región  $R_- < r < R_+$  no podrá salir de nuevo al exterior. Además, la estructura causal es tal que es inevitable que cruce el horizonte en  $r = R_-$  entrando a la zona interior donde hay una singularidad desnuda. Esta singularidad es evitable por lo que el cuerpo puede moverse dentro de este espacio sin caer en ella.

Un análisis detallado de las geodésicas radiales nulas análogo al realizado para la solución de Schwarzschild no hace más que confirmar esta interpretación.

Además, pueden definirse unas coordenadas de Eddington-Finkelstein para esta métrica, de forma que se pueda describir mejor el comportamiento en los horizontes, aunque la estructura causal es siempre la misma (ver figura §3.4).

Por último, nótese que en los horizontes  $r = R_{\pm}$  también se anula la componente de la métrica  $g_{tt}$ , por lo que también son zonas de corrimiento infinito al rojo en las coordenadas de Schwarzschild.

### 3.3 AGUJEROS NEGROS EN ROTACIÓN

Un caso más realista para un objeto astronómico consiste en considerar que rota. Estos son descritos por la *solución de Kerr*. En este caso, la expresión de la métrica es mucho más compleja y la principal razón es que esta no es una solución esféricamente simétrica ni estática, sino solamente es axialmente simétrica y estacionaria. Esto quiere decir que solo existe simetría de rotación respecto a un eje (que tomamos como eje  $z$ )  $\varphi \rightarrow \varphi + \Delta\varphi$  y que aunque sigue siendo invariante ante traslaciones temporales  $t \rightarrow t + \Delta t$ , ya no lo es bajo inversión temporal  $t \rightarrow -t$ . Por tanto, la métrica será independiente de  $t$  y  $\varphi$  y solo será invariante bajo una inversión simultánea de estas coordenadas,  $t \rightarrow -t$  y  $\varphi \rightarrow -\varphi$  (Capítulo 14 de [10]).

Existen muchos sistemas de coordenadas para describir la solución de Kerr. Las más conocidas son las *coordenadas de Boyer-Lindquist* que son en cierto modo análogas a las coordenadas de Schwarzschild. La expresión de la métrica en estas coordenadas viene dada por

$$ds^2 = \frac{r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} dt^2 + \frac{4Mar \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} dt d\varphi - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2Mr + a^2} dr^2 - \left( r^2 + a^2 \cos^2 \theta \right) d\theta^2 - \left[ r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (3.40)$$

De nuevo tenemos dos parámetros,  $M$  y  $a$ , que surgen como constantes de integración. Es fácil ver que en el límite de  $a \rightarrow 0$ , la métrica se reduce a la solución de Schwarzschild (3.8), por lo que otra vez más  $M = Gm$  es una medida de la masa del sistema. Otra propiedad de la solución de Kerr es que es asintóticamente

plana, esto es, cuando  $r \rightarrow \infty$  se obtiene la métrica de Minkowski en coordenadas esféricas. Por otro lado, si tomamos  $M = 0$  la métrica (3.40) se corresponde con la del espacio de Minkowski en coordenadas elípticas. Nótese que la coordenada  $r$  no está relacionada con superficies esféricas como en la métrica de Schwarzschild. El parámetro  $a$  hace que se folie el espacio en elipsoides oblatos.

Por otro lado, puede comprobarse que la métrica de Kerr es invariante ante la inversión simultánea de  $t$  y  $a$ .

Todo esto nos da argumentos para pensar que el parámetro  $a$  está de alguna forma relacionado con la rotación del objeto que produce el campo. De hecho, este parámetro se relaciona con el momento angular como

$$a = \frac{J}{m} \quad (3.41)$$

siendo  $J$  el momento angular. Por tanto, el parámetro  $a$  de dimensión  $[L]$ , puede verse como una medida del momento angular del cuerpo que genera la curvatura.

### 3.3.1 Arrastre de sistemas inerciales. Ergosfera

Existe una propiedad de la solución de Kerr esencialmente diferente a las de las soluciones de Schwarzschild y Reissner-Nordström. Esto se debe a que ahora  $g_{t\varphi} \neq 0$ . Como la métrica (3.40) no depende de las coordenadas  $t$  y  $\varphi$ , sabemos que a lo largo de la trayectoria de una partícula se conservan las cantidades  $p_t$  y  $p_\varphi$  del cuadrivector momento  $p_\mu$ . Sin embargo, debido a la presencia del término cruzado  $g_{t\varphi}$  ahora tenemos (Capítulo 11 de [15])

$$p^\varphi = g^{\varphi\mu} p_\mu = g^{\varphi\varphi} p_\varphi + g^{\varphi t} p_t \quad (3.42)$$

y de manera similar para las coordenadas temporales

$$p^t = g^{t\mu} p_\mu = g^{tt} p_t + g^{t\varphi} p_\varphi \quad (3.43)$$

Consideremos ahora una partícula con momento angular  $L = -p_\varphi = 0$ . Usando las definiciones

$$p^t = m_0 \frac{dt}{d\tau} \quad p^\varphi = m_0 \frac{d\varphi}{d\tau} \quad (3.44)$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones (3.42) y (3.43) obtenemos que la velocidad angular de la partícula es

$$\Omega_0(r, \theta) = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p^\varphi}{p^t} = \frac{g^{\varphi t}}{g^{tt}} = -\frac{g_{\varphi t}}{g_{tt}} \quad (3.45)$$

que solo se anula si  $g_{t\varphi} = 0$ , como en el caso de Schwarzschild o en el de Reissner-Nordström. Esto nos dice que aunque el momento angular de una partícula sea nulo, el espacio-tiempo de la solución de Kerr la arrastra debido a su momento angular intrínseco. Para un observador moviéndose en el plano ecuatorial ( $\theta = 2$ ) tenemos [10]

$$\Omega_0 = \frac{2Ma}{r^3 + a^2r + 2Ma^2}. \quad (3.46)$$

El efecto de arrastre gravitatorio limita el movimiento de los observadores estacionarios, esto es, aquellos que se mueven con  $\dot{r} = 0$ . Si consideramos únicamente el movimiento en el plano ecuatorial, la cuadrivelocidad de un cuerpo que se mueve con velocidad angular  $\Omega$  viene dada por

$$u^\mu = \begin{pmatrix} u_t \\ 0 \\ 0 \\ \Omega u_t \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

Puesto que estamos considerando partículas con masa, la condición para que la cuadrivelocidad tenga norma 1 es:

$$g_{tt} + 2g_{t\varphi}\Omega + g_{\varphi\varphi}\Omega^2 > 0 \quad (3.48)$$

Por tanto, un observador estacionario solo puede tener velocidades angulares comprendidas entre  $\Omega_- < \Omega < \Omega_+$  con

$$\Omega_\pm = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{tt}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}}\right)^2 + \left(\frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}\right)} \quad (3.49)$$

$\Omega_{\pm}$  son las velocidades angulares máximas (porque se alcanzaría la velocidad de la luz en estos límites) en corrotación ( $\Omega_{+}$ ) y contrarrotación ( $\Omega_{-}$ ) con las que dicho observador puede moverse. Nótese que esta expresión es general para cualquier métrica con  $g_{t\phi} \neq 0$  y no solo para la solución de Kerr. Específicamente, para la métrica (3.40) tenemos

$$\Omega_{\pm} = \frac{2Ma}{r^3 + a^2r + 2Ma^2} \pm \sqrt{\frac{4M^2a^2}{(r^3 + a^2r + 2Ma^2)^2} + \frac{r - 2M}{r^3 + a^2r + 2Ma^2}} \quad (3.50)$$

que en el límite  $r \rightarrow \infty$ , la velocidad lineal  $v_{\pm} = r\Omega_{\pm} = \pm 1$ , por lo que los observadores estacionarios en el infinito pueden moverse a cualquier velocidad menor que la luz. A medida que disminuye  $r$ , el valor de  $\Omega_{-}$  va aumentando. Un observador estático, es aquel que se encuentra en reposo respecto al observador asintótico y por tanto cumple que  $\Omega = 0$ . Un caso de interés físico es cuando  $\Omega_{-} = 0$ , que quiere decir que en esa región un observador tiene que moverse a la velocidad de la luz en contrarrotación para mantenerse estático. En la solución de Kerr esta condición se da para  $r = 2M$  en el plano ecuatorial. La zona delimitada por esta cota se conoce como la *ergosfera* y es una zona a partir de la cual no existen observadores estáticos, el arrastre gravitatorio debido a la rotación del cuerpo masivo es tan grande que un observador no puede contrarrestarlo.

### 3.3.2 Estructura causal. Los horizontes de Kerr

Al igual que en los casos anteriores, existen regiones en las que la métrica de Kerr en las coordenadas Boyer-Lindquist es singular. Como la solución de Kerr es Ricci plana ( $\mathcal{R}_{\mu\nu} = 0$ ), estudiamos el invariante de Kretschmann [10]

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\lambda}\mathcal{R}^{\mu\nu\rho\lambda} = \frac{48M^2(r^2 - a^2\cos^2\theta)}{(r^2 + a^2\cos^2\theta)^6} \left[ (r^2 + a^2\cos^2\theta)^2 - 16r^2a^2\cos^2\theta \right] \quad (3.51)$$

que como podemos comprobar diverge cuando

$$r = 0; \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad (3.52)$$

simultáneamente. En las coordenadas empleadas,  $r = 0$  se corresponde con un disco de radio  $a$  en el plano ecuatorial y la coordenada  $\theta = \frac{\pi}{2}$  corresponde al borde.

Por tanto, en la solución de Kerr, la singularidad física no se encuentra en un punto, sino en un anillo de radio  $a$ . De nuevo, que el invariante de Kretschmann solo diverja para estas condiciones sugiere que las demás singularidades de la métrica sean de coordenadas.

Como ya hemos comentado, el lugar geométrico donde las superficies  $r = \text{cte}$  se vuelven nulas es cuando la componente de la métrica inversa  $g^{rr}$  se anula. Puesto que la métrica no tiene componentes cruzadas que involucren a la coordenada  $r$ , tenemos que  $g^{rr} = \frac{1}{g_{rr}}$  y por tanto

$$g^{rr} = \frac{r^2 - 2Mr + a^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \quad (3.53)$$

que se anula cuando

$$r = R_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad (3.54)$$

Al igual que en la solución del agujero negro de Reissner-Nordström, esto implica que los conos de luz en la región  $R_- < r < R_+$  están tan inclinados que no existe contacto causal con el exterior. Por tanto, la superficie  $r = R_+$  es un horizonte de sucesos. De igual forma, cualquier objeto que entra en esta región avanzará irremediablemente hasta cruzar la superficie nula en  $r = R_-$ . Dentro de esta región, las coordenadas  $t$  y  $r$  vuelven a ser temporal y espacial respectivamente. Por tanto, la singularidad en forma de anillo en  $r = 0$  y  $\theta = \frac{\pi}{2}$  es espacial (y por tanto evitable).

A diferencia de los agujeros negros de Schwarzschild y Reissner-Nordström, las superficies de corrimiento infinito hacia el rojo ya no coinciden con los horizontes en los que la coordenada radial es nula. Esto se debe a que ya no se cumple que  $g_{tt} = g^{rr}$  como ocurría anteriormente. La condición  $g_{tt} = 0$  se da para

$$r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta = 0 \quad (3.55)$$

y por tanto

$$r = S_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (3.56)$$

Nótose la diferencia entre las expresiones (3.54) y (3.56) en la dependencia con  $\cos^2 \theta$ . Mientras que las superficies  $R_{\pm}$  forman elipsoides oblatos, las superficies

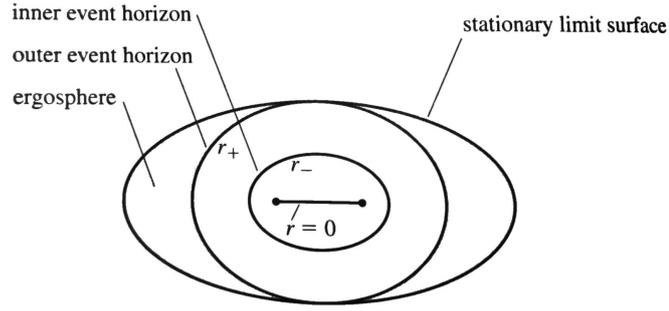


Figura 3.5: Esquema de los horizontes en la solución de Kerr (Fuente: [5])

$S_{\pm}$  forman otros elipsoides más achatados cuando  $a \ll M$  y superficies parecidas a glóbulos rojos cuando  $a \sim M$ . De las expresiones de  $R_{\pm}$  y  $S_{\pm}$  se ve fácilmente que

$$0 \leq S_- \leq R_- \leq R_+ \leq S_+ \quad (3.57)$$

Además, es fácil comprobar que la superficie  $S_+$  es, de hecho, la ergosfera. Efectivamente, sustituyendo la condición  $g_{tt} = 0$  en la ecuación (3.49) se obtiene  $\Omega_- = 0$ , que como hemos visto es la definición de la ergosfera. Por tanto, la superficie  $S_+$  es el lugar geométrico del espacio de corrimiento infinito hacia el rojo y a partir de la cual no pueden existir observadores estáticos. Dentro de la región  $R_-$  la estructura causal se vuelve muy especulativa. Comúnmente se suelen descartar las partes interiores  $r \lesssim R_+$  por razones físicas.

### 3.3.3 Solución de Kerr-Newman

Una generalización de la solución de Kerr es añadirle una carga  $q$ . En este caso, la solución de las ecuaciones de Einstein en presencia de campo electromagnético son [10]

$$\begin{aligned} ds^2 = & \frac{r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \kappa Q^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} dt^2 + 2 \frac{(2Mar - \frac{1}{2} \kappa Q^2 a) \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} dt d\varphi \\ & - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2Mr + a^2 + \frac{1}{2} \kappa Q^2} dr^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 \\ & - \left[ r^2 + a^2 + \frac{(2Ma^2 r - \frac{1}{2} \kappa Q^2 a^2) \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] \sin^2 \theta d\varphi^2 \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned}
 F_{tr} &= \frac{Q(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} & F_{t\theta} &= -\frac{2Qa^2 r \sin \theta \cos \theta}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} \\
 F_{r\varphi} &= -\frac{Qa(r^2 - a^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} & F_{\theta\varphi} &= \frac{2Qar(r^2 + a^2) \sin \theta \cos \theta}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2}
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Aunque esta parece una solución bastante más compleja que la de Kerr, realmente es bastante parecida. Ambas tienen las mismas simetrías y la misma estructura causal, con la diferencia de que ahora

$$R_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - \frac{1}{2}\kappa Q^2 - a^2} \tag{3.60}$$

$$S_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - \frac{1}{2}\kappa Q^2 - a^2 \cos^2 \theta} \tag{3.61}$$

En la década de los 60 se demostraron una serie de teoremas de unicidad sobre soluciones de agujeros negros que establecen que la solución más general de la acción (2.26) con horizontes regulares, asintóticamente plana y estacionaria es necesariamente axialmente simétrica y esféricamente simétrica si es estática. Por tanto, la solución de Kerr-Newman (Kerr, si es neutro) es la solución estacionaria más general y la de Reissner-Nordström (Schwarzschild, si es neutro) si la solución es estática. Por tanto, la solución más general posible para un agujero negro estacionario se compone únicamente de tres parámetros:  $M$ ,  $Q$  y  $L$ . Esto se conoce como el *Teorema de no pelo*.



# EL AGUJERO NEGRO SUPERMASIVO DE LA GALAXIA

## M87

Esta sección constituye una pequeña revisión de los resultados obtenidos en la colección de papers presentados por la colaboración EHT en 2019, sobre la fuente de radiación en el centro de la galaxia M87. Antes incluso del EHT ya existían fuertes evidencias de que estas fuentes de radiación son, en realidad, agujeros negros supermasivos. Sin embargo, estas mediciones eran indirectas, resultantes de estudiar el movimiento de estrellas muy cercanas al centro de las galaxias (ver [7]). La relevancia histórica de estos artículos es que se corresponden con la primera medida directa de un agujero negro, confirmando definitivamente su existencia. Así mismo, constituyen un excelente test para la Relatividad General y en concreto para las soluciones de agujeros negros tratadas en este texto.

Principalmente, usaremos la información aportada en [2], que resume los resultados obtenidos en cada uno de los artículos.

### 4.1 EL PROYECTO EHT

El proyecto *Event Horizon Telescope* (EHT) es una colaboración internacional que busca la detección directa de imágenes de agujeros negros supermasivos con el fin de estudiar los efectos de la gravedad en condiciones extremas [14]. Para ello se utiliza la tecnología de *interferometría de muy larga base* (VLBI sus siglas en inglés), que es una técnica empleada en astrofísica para poder obtener medidas con una alta resolución de cuerpos celestes muy lejanos, que en general pueden emitir radiación a grandes longitudes de onda. Esta técnica se basa en la observación simultánea y coherente de la radiación procedente de la fuente, estudiando la interferometría

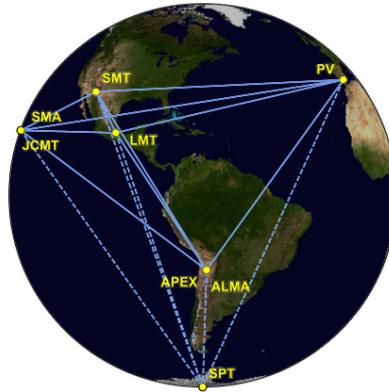


Figura 4.1: Observatorios que conforman Colaboración EHT (Fuente: [2]).

para construir la imagen. Para ello utiliza la tecnología GPS consiguiendo tiempos de sincronización del orden de los nanosegundos. De esta forma, este sistema consigue resoluciones angulares de  $\lambda/L$  siendo  $\lambda$  la longitud de onda y  $L$  es la distancia máxima en línea recta entre dos telescopios de la formación. Este sistema por tanto actúa como un único telescopio virtual prácticamente del tamaño de la Tierra [2]. Para una descripción detallada de este sistema ver [3].

## 4.2 EL AGUJERO NEGRO SUPERMASIVO DE M87

La galaxia M87 es una galaxia elíptica de unos 65kpc de extensión. En su núcleo se observa una característica lineal, usualmente referida como chorro, correspondiente a una intensa señal de radio de 1.3mm de longitud de onda. También se han detectado señales en el espectro de rayos X y de rayos gamma. En 2012, las observaciones con VLBI ya revelaron una zona de emisión de unos  $40\mu\text{as}$ , lo cual es compatible con la escala esperada de un agujero negro supermasivo en el núcleo de la galaxia M87 (nos referiremos a él como M87\* a partir de ahora). Por otro lado, mediciones realizadas recientemente, establecen que la distancia respecto de la Tierra es de  $16,8 \pm 0,8\text{Mpc}$ . Utilizando esta distancia y usando modelos para el brillo superficial y el movimiento estelar se infiere que la masa de M87\* es de  $M = 6,2 \cdot 10^9 M_{\odot}$ . Por otra parte, estudiando el movimiento cinemático del disco de gas se llega a que  $M = 3,5 \cdot 10^9 M_{\odot}$  [2]

### 4.3 IMAGEN Y RESULTADOS

A pesar de todo, los datos obtenidos mediante VLBI no son suficientes para obtener una imagen bien calibrada. Para ello se incorporan algoritmos que son capaces de producir imágenes físicamente plausibles (ver [4]). Cada uno de estos algoritmos tiene una cantidad de parámetros que pueden afectar a la imagen significativamente. Estos algoritmos fueron puestos a pruebas con un rango de valores para los parámetros, produciendo en torno a  $\sim 10^3$  y  $10^4$  imágenes, de las cuales se seleccionaron aquellas con mayor consistencia respecto a los datos observados. Las imágenes obtenidas tienen una resolución de  $20\mu\text{as}$ .

En la figura 4.2 observamos la imagen resultante para los datos recogidos por el EHT del día 11 de abril de 2017. En ella se observan un anillo brillante con asimetría azimutal y una sombra en su interior, lo cual es compatible con la existencia de un agujero negro supermasivo rodeado de un disco de acreción formado por un plasma que rota alrededor [2]. Imágenes formadas en días sucesivos corroboran la validez de los datos obtenidos.

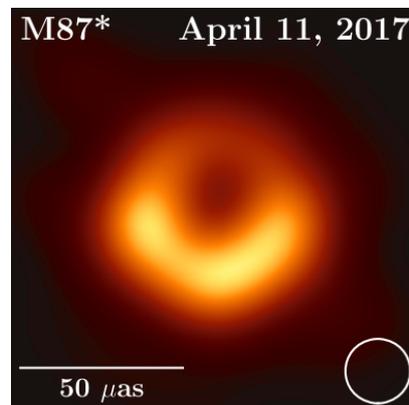


Figura 4.2: Imagen de M87\* obtenida para los datos tomados el 11 de abril de 2017. Se observa un anillo con una orientación de  $163^\circ$  [2]

Existen muchas posibles mediciones directas sobre propiedades del agujero negro M87\* que pueden derivarse de las imágenes y datos obtenidos por el EHT. En la sección anterior vimos que cualquier agujero negro general puede ser descrito

por la métrica de Kerr-Newman, aunque agujeros negros con carga neta no parecen tener presencia física debido a que se neutralizarían con el tiempo. Por tanto, podemos asumir que el agujero negro M87\* debería de poder modelarse con la métrica de Kerr. A este modelo hay que añadirle consideraciones relacionadas al flujo de materia en forma de plasma que rota alrededor de él, que actúa como un medio ópticamente grueso que emite radiación en forma de ondas de radio (entre otro tipo de emisiones). Todas estas consideraciones se resumen en el *modelo magnetohidrodinámico de la Relatividad General*, o GRMHD en sus siglas en inglés. Un agujero negro de este tipo puede ser descrito por dos parámetros: su masa  $M$  y el parámetro  $a$ , que mide el momento angular por unidad de masa. Por tanto, una primera medida pueden ser estos parámetros.

Una forma directa de hacerlo es estudiando la sombra de M87\*. Aunque pueda parecerlo, esta no se corresponde con el horizonte de sucesos debido a un proceso óptico que se da para los rayos de luz cerca del agujero negro. Este proceso se conoce como *captura fotónica*. Supongamos un observador en el infinito que lanza un fotón en dirección a un agujero negro con un parámetro de impacto  $b$ . Como el momento angular  $L$  se conserva (véase sección §2.3.3), el parámetro  $b$  es una medida del momento angular. Si consideramos un agujero negro de Schwarzschild, del potencial efectivo para fotones (3.22), sabemos que el pico de potencial observado en la figura §3.2 depende únicamente del momento angular. Por tanto, podemos discutir 3 tipos de trayectorias en función del parámetro  $b$ . Si  $b$  es mayor que un valor crítico dado,  $b > b_c$ , la energía del fotón es suficiente para superar la barrera de potencial y cae irremediamente al agujero negro. Si  $b < b_c$  entonces la energía del fotón no es suficiente para superar la barrera de potencial y es desviado hasta el infinito. Si  $b = b_c$ , la energía del fotón es igual que la de la barrera de potencial y este queda atrapado en una órbita circular (inestable) de radio  $r = 3GM/c^2$  (usaremos las unidades del SI para este capítulo). Puesto que las trayectorias de la luz son reversibles,  $b_c$  adquiere un significado especial, ya que un observador en el infinito solo puede observar fotones con un parámetro  $b > b_c$ . Por tanto,  $b_c$  es el

radio de la sombra que mide un observador en el infinito y se suele denotar como  $R_c$ . Puede demostrarse que en el caso del agujero de Schwarzschild  $R_c = \sqrt{27}R_g$  con  $R_g = GM/c^2$ . En la métrica de Kerr se puede estudiar la misma situación pero en este caso el valor de  $R_c$  depende del ángulo  $\theta$ . Simulaciones han mostrado que un agujero negro de Kerr embebido en un medio geoméricamente fino pero ópticamente grueso correspondiente al disco de acreción, el radio de captura se puede observar como un anillo de emisión dentro de la imagen del disco de acreción [1]. Este anillo de emisión es detectable mediante VLBI y tiene un diámetro proporcional a  $R_c$  y por tanto, a la masa. Es decir, usando modelos teóricos [2] puede inferirse la masa de M87\* midiendo el anillo de fotones. Simulaciones de modelos de GRMHD (ver [1]), dan como resultado una masa de

$$M = 6,5 \pm 0,7M_{\odot} \quad (4.1)$$

Lo cual es consistente con las medidas indirectas expuestas anteriormente. Modelos para la radiación electromagnética emitida nos permiten estudiar el momento angular de M87\* obteniéndose una rotación en el sentido horario de (véase [17])

$$a = 0,94 \pm 0,05 \quad (4.2)$$

en unidades en las que  $G = c = 1$ .



# APÉNDICE A: BREVE REPASO DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL

La Teoría de la Relatividad Especial se basa en los siguientes dos postulados (Capítulo 3 de [10]):

1. Las leyes de la física son válidas para todos los sistemas de referencia inerciales.
2. La velocidad de la luz en el vacío,  $c$ , es la misma para todos los observadores, independientemente de su estado de movimiento.

El primer postulado se corresponde con el Principio de la Relatividad formulado por Galileo Galilei en torno al 1600, mientras que el segundo fue propuesto por Einstein en 1905.

La primera implicación del segundo postulado es que si dos observadores,  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}'$ , a diferentes velocidades e inicialmente en la misma posición lanzan un pulso de luz en todas las direcciones, ambos observarán que se encuentran en el centro del frente esférico emitido, incluso una vez se han separado. Si asociamos a cada observador un sistema de coordenadas para las variables espaciales y temporales, podemos expresar la ecuación de dicha esfera de luz para cada uno de los observadores en función del tiempo como:

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2 \quad (\text{A.1})$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = t'^2 \quad (\text{A.2})$$

Recordemos que estamos usando que  $c = 1$ . Por tanto, independientemente de la

velocidad relativa entre los observadores se cumplirá que:

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \quad (\text{A.3})$$

Las reglas de transformación entre las coordenadas de  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}'$  y que preservan la expresión (A.3) se conocen como transformaciones de Lorentz.

Esto es una propiedad importante ya que dota al espacio y el tiempo de una estructura interna común, esto es, cualquier evento  $(t, x, y, z)$  visto por un observador  $\mathcal{O}$  cumple que la cantidad

$$s^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (\text{A.4})$$

es la misma para todos los observadores inerciales.

### A.1 EL ESPACIO DE MINKOWSKI

Introducimos el espacio de Minkowski, un espacio vectorial cuatridimensional, formado por una dimensión temporal y tres espaciales. Un evento que ocurre en un punto  $(x, y, z)$  y un instante  $t$  se corresponde con un punto del espacio de Minkowski y se representa mediante un cuadrivector columna (Capítulo 1 de [5])

$$x^\mu = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

En el espacio de Minkowski el producto escalar entre dos cuadrivectores viene dado por

$$a^\mu \cdot b^\mu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu \quad (\text{A.6})$$

con

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

De esta forma, la norma de un vector  $a^\mu$  es

$$\|a^\mu\|^2 = \eta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu \quad (\text{A.8})$$

Es fácil comprobar que la expresión (A.4) es la norma al cuadrado del cuadrivector posición, esto es  $s^2 = \|x^\mu\|^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ . Podemos definir la distancia entre dos sucesos como la norma de su diferencia: sean dos sucesos  $x_1^\mu$  y  $x_2^\mu$  la distancia entre ellos en el espacio de Minkowski será  $\Delta s = \sqrt{\eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu}$  con  $\Delta x^\mu = x_2^\mu - x_1^\mu$ . La cantidad  $\Delta s$  se conoce como el invariante intervalo.

Cabe destacar que la métrica en el espacio de Minkowski no es definida positiva y la norma al cuadrado de un cuadrivector puede ser positiva, negativa o nula. En base a esto, podemos clasificar a los cuadrivectores como [10]

- Temporales: si su norma al cuadrado es positiva
- Espaciales: si su norma al cuadrado es negativa
- Nulos o lumínicos: si su norma es idénticamente cero.

En la notación introducida, decimos que  $a^\mu$  representa un vector contravariante. La métrica relaciona de manera natural un vector contravariante con su análogo covariante de la forma

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \quad (\text{A.9})$$

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu \quad (\text{A.10})$$

donde  $\eta^{\mu\nu}$  es la métrica inversa y cumple que

$$\eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho \quad (\text{A.11})$$

En el caso del espacio de Minkowski, para la métrica (A.7), las componentes de  $\eta_{\mu\nu}$  y  $\eta^{\mu\nu}$  son idénticas. Con esta notación el producto escalar (A.6), se expresa como  $a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu$ .

Las coordenadas de un cuadrivector contravariante de dos sistemas de referencia  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}'$  diferentes, se relacionan mediante las transformaciones de Lorentz, que denotaremos como  $\Lambda_{\nu}^{\mu}$ , esto es

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (\text{A.12})$$

Para que el producto escalar sea invariante bajo transformaciones de Lorentz, las coordenadas covariantes deben transformar con la transformación inversa, que denotaremos como  $(\Lambda^{-1})_{\nu}^{\mu}$ , y por tanto

$$x'_{\mu} = (\Lambda^{-1})_{\nu}^{\mu} x_{\nu} \quad (\text{A.13})$$

con  $(\Lambda^{-1})_{\nu}^{\mu} \Lambda_{\rho}^{\nu} = \delta_{\rho}^{\mu}$ .

De las reglas de transformación (A.12) y (A.13) junto con la expresión del producto escalar, se deduce que

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\lambda} \eta_{\rho\lambda} \quad (\text{A.14})$$

Las transformaciones de Lorentz forman el denominado grupo de Lorentz y se define como el conjunto de transformaciones lineales que cumplen la expresión (A.14) [10].

## A.2 TENSORES

Definimos un tensor de rango  $(m,n)$  como un objeto de componentes  $T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m}$  que se transforma bajo cambios de sistema de referencia como

$$T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m} = \Lambda_{\rho_1}^{\mu_1} \Lambda_{\rho_2}^{\mu_2} \dots \Lambda_{\rho_m}^{\mu_m} (\Lambda^{-1})_{\nu_1}^{\lambda_1} (\Lambda^{-1})_{\nu_2}^{\lambda_2} \dots (\Lambda^{-1})_{\nu_n}^{\lambda_n} T_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}^{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_m} \quad (\text{A.15})$$

Esta definición generaliza la definición de cuadrivector. Por ejemplo, un cuadrivector contravariante es un tensor de rango  $(1,0)$  mientras que un cuadrivector covariante es un tensor de rango  $(0,1)$ . Por otro lado, la métrica  $\eta_{\mu\nu}$  es un tensor de rango  $(0,2)$  y la métrica inversa un tensor de rango  $(2,0)$ .

### A.3 MECÁNICA RELATIVISTA

Las leyes de Newton no son válidas dentro del marco de la relatividad especial. Esto se debe a que no son covariantes bajo transformaciones de Lorentz o lo que es lo mismo, no se expresan en función de cuadvectores o tensores del espacio de Minkowski. Para ello, necesitamos definir los cuadvectores velocidad y aceleración. Una primera idea podría ser definir la cuadvelocidad como  $\frac{dx^\mu}{dt}$ , sin embargo, esta cantidad no transforma como un cuadvector debido a que la coordenada  $t$  no es un escalar, es decir, no es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Para ello usamos el concepto de tiempo propio, el tiempo entre dos eventos visto por un observador para el cual ambos están situados en el mismo lugar del espacio. Matemáticamente, se define como

$$d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{A.16})$$

si  $dx^\mu$  es temporal. La relación entre el tiempo propio y el tiempo medido por cualquier otro observador inercial viene dado por la conocida relación de dilatación temporal:

$$d\tau = \sqrt{1 - v^2} dt = \frac{1}{\gamma} dt \quad (\text{A.17})$$

donde  $v$  es la velocidad relativa entre ambos observadores inerciales. Por otro lado, si  $dx^\mu$  es un intervalo espacial, la distancia propia es

$$dl_0^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{A.18})$$

Definimos el cuadvector velocidad de una partícula como la derivada del cuadvector posición,  $x^\mu$ , respecto del tiempo propio asociado a dicha partícula:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

donde hemos expresado las componentes espaciales del cuadvector como un vector de  $\mathbb{R}^3$  y donde  $\vec{v}$  es la velocidad de la partícula en nuestro sistema de referencia. Una propiedad importante del cuadvector velocidad definido como lo hemos

hecho para una partícula que se mueve con velocidad  $v < 1$  es que su norma es siempre

$$u_\mu u^\mu = \gamma^2 - \gamma^2 v^2 = 1 \quad (\text{A.20})$$

De forma análoga el cuadrivector aceleración es

$$a^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \gamma \begin{pmatrix} \frac{d\gamma}{dt} \\ \vec{v} \frac{d\gamma}{dt} + \gamma \vec{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^4 \vec{v} \cdot \vec{a} \\ \gamma^4 (\vec{v} \cdot \vec{a}) \vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

El momento lineal también tiene análogo relativista y viene dado por

$$p^\mu = m_0 u^\mu = \gamma \begin{pmatrix} m_0 \\ m_0 \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

donde  $m_0$  se conoce como la masa en reposo de la partícula. La parte temporal es la energía y de ella obtenemos la famosa fórmula  $E = mc^2$  en el S.I. y donde hemos hecho  $m = \gamma m_0$ . Finalmente, las leyes de Newton relativistas son:

$$f^\mu = m_0 a^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} \quad (\text{A.23})$$

donde  $f^\mu$  es conocido como el cuadrivector fuerza.

#### A.4 LEYES DE MAXWELL

La idea de la relatividad especial surge de las leyes de Maxwell del electromagnetismo. Cabe esperar, por tanto, que estas sean consistentes con esta teoría y puedan escribirse en función de elementos que transformen bien bajo cambios de sistemas de referencia inerciales, esto es, que puedan ser escritas mediante elementos del espacio de Minkowski. Es un ejercicio instructivo comprobar que efectivamente las ecuaciones

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \partial^\nu F^{\rho\lambda} = 0 \quad (\text{A.24})$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (\text{A.25})$$

se corresponden con las ecuaciones homogéneas e inhomogéneas de Maxwell, respectivamente, donde  $\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}$  es el símbolo Levi-Civita de cuatro componentes

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu\nu\rho\lambda \text{ son una permutación par de } 0123 \\ -1 & \text{si } \mu\nu\rho\lambda \text{ son una permutación impar de } 0123 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

$F^{\mu\nu}$  es el tensor electromagnético

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

con  $E_i$  y  $B_j$  las componentes de los campos eléctrico y magnético respectivamente y el cuadvivector  $j^\mu$

$$j^\mu = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

es el cuadvivector densidad de corriente siendo  $\rho$  la densidad de carga y  $\vec{j}$  la densidad de corriente de carga. Por último, se ha introducido en las ecuaciones el operador diferencial

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix} \quad (\text{A.29})$$

Una propiedad conocida del tensor electromagnético es que es antisimétrico, esto es

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \quad (\text{A.30})$$

Las solución más general de la ecuación de Maxwell homogénea implica que los campos eléctricos y magnéticos pueden describirse mediante unos campos  $\phi$  y  $\vec{A}$  llamados potenciales electromagnéticos.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t\vec{A} \quad (\text{A.31})$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (\text{A.32})$$

que definiendo

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad (\text{A.33})$$

nos permite escribir el tensor electromagnético de la forma

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (\text{A.34})$$

Puede comprobarse que si realizamos la transformación  $A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ , donde  $\Lambda = \Lambda(x^\mu)$  es una función arbitraria, la expresión del tensor electromagnético permanece invariante. A esta propiedad de los campos electromagnéticos se le conoce como invariancia gauge. Esta invariancia nos permite fijar los potenciales  $A^\mu$  con una condición extra, llamada *gauge*. Una elección muy común es tomar el gauge de Lorentz  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . El uso de los potenciales electromagnéticos nos permite reducir las ecuaciones de Maxwell a

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = 0 \quad (\text{A.35})$$

En el gauge de Lorenz esta ecuación se reduce a

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0 \quad (\text{A.36})$$

que constituye una ecuación de ondas (Capítulo 11 de [9]).

Por último, las ecuaciones (A.24) pueden obtenerse variando la acción

$$\mathcal{S}_{em} = -\frac{1}{4} \int dx^4 F_{\mu\nu}(A(x)) F^{\mu\nu}(A(x)) \quad (\text{A.37})$$

respecto de los potenciales  $A^\mu$  (capítulo 5 de [10]).

# APÉNDICE B: NOCIONES MATEMÁTICAS

Se presenta aquí un resumen sobre las herramientas matemáticas para el cálculo vectorial y tensorial en variedades diferenciables, así como ciertos conceptos geométricos que se aplican a su estudio (como geodésicas, tensor de Riemann etc.). La gran mayoría del contenido de esta sección es obtenido de [13], excepto la definición de variedad diferenciable que se opta por usar la de [10] y la parte de integración que está basada en [5].

## B.1 VARIEDADES DIFERENCIABLES: DEFINICIÓN

Definimos una variedad diferenciable  $N$ -dimensional,  $\mathcal{M}^N$ , como un espacio topológico tipo Hausdorff, es decir, un conjunto de puntos tal que a cada punto  $p$  se le puede asociar un entorno abierto  $U_p \subset \mathcal{M}^N$  de tal forma que para dos puntos distintos cualesquiera  $p$  y  $q$ , siempre se pueden encontrar dos conjuntos  $U_p$  y  $U_q$  disjuntos,  $U_p \cap U_q = \emptyset$ .

De manera intuitiva, podemos entender este concepto como el de un espacio que localmente parece  $\mathbb{R}^N$  pero que globalmente no lo es. En cada punto  $p$  se puede definir el espacio tangente en ese punto,  $T_p(\mathcal{M}^N)$ , y este es isomorfo a  $\mathbb{R}^N$ . En cada punto  $p$ ,  $T_p(\mathcal{M}^N)$  es una buena aproximación a la variedad.

Podemos definir un *mapa*  $\phi$  como un homeomorfismo entre un subconjunto abierto  $U \subset \mathcal{M}^N$  y una parte de  $\mathbb{R}^N$ :

$$\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^N : p \mapsto \phi(p) = x \quad (\text{B.1})$$

Un mapa no es más que una manera de introducir unas coordenadas  $x^u$  en una

parte de la variedad. En general no es posible cubrir la variedad entera con una sola carta.

Si un punto  $p$  pertenece a dos subconjuntos abiertos  $U_a$  y  $U_b$ , se pueden construir dos mapas  $\phi_a$  y  $\phi_b$  que asignarán dos coordenadas  $\phi_a(p) = x^\mu$  y  $\phi_b(p) = y^\alpha$  al punto  $p$ . Decimos que los mapas son compatibles si  $\tau_{ab} = \phi_b \circ \phi_a^{-1}$  es una transformación analítica. Las transformaciones  $\tau_{ab}$  son cambios de coordenadas entre las coordenadas inducidas  $x^\mu$  y  $y^\alpha$ .

El conjunto de mapas  $\mathcal{A} = \{\phi_a | \phi_a : U \subset \mathcal{M}^N \rightarrow \mathbb{R}^N\}$  se denomina *atlas* si cada punto  $p \in \mathcal{M}^N$  pertenece al dominio de algún mapa  $\phi_a$  y dos mapas cualesquiera son compatibles.

## B.2 ALGEBRA DE TENSORES EN VARIEDADES

En esta sección introducimos la definición de tensores en variedades diferenciables. El punto de vista adoptado para ello es el de la geometría diferencial: definimos los tensores en función de cómo transforman sus componentes bajo cambios de coordenadas. Aunque la definición abstracta de tensores como mapas multilineales es más elegante, la primera tiene la ventaja de que es más simple y más sencilla de introducir y es por ello que seguiremos esta forma de introducir el cálculo tensorial y diferencial en variedades. Para una introducción usando la definición moderna de tensores ver el Capítulo 3 de [15].

Consideremos una curva,  $\gamma = \gamma(\lambda) \subset \mathcal{M}^N$ , donde  $\lambda \in \mathbb{R}$  y supongamos que puede ser descrita por las coordenadas  $x^\mu(\lambda)$ . Queremos calcular el ratio de cambio de una función  $f(x^\mu)$  a lo largo de dicha curva:

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \partial_\mu f u^\mu \quad (\text{B.2})$$

En cada punto  $p \in \gamma$  el vector tangente a dicha curva en ese punto es, por definición, el vector  $u^\mu$ . Veamos como transforma este vector bajo un cambio de coordenadas de la forma  $y^\alpha = y^\alpha(x^\mu)$  (usaremos las letras griegas del principio del

alfabeto para las "nuevas" coordenadas):

$$u^\alpha = \frac{dy^\alpha}{d\lambda} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} u^\mu \quad (\text{B.3})$$

Por otro lado,  $\partial_\mu f$  es el gradiente de la función  $f$  en cualquier punto de la curva y transforma como

$$\partial_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial y^\mu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \partial_\mu f \quad (\text{B.4})$$

De las reglas de transformación B.3 y B.4 se deduce que la expresión B.2 es invariante bajo cambios generales de coordenadas. Esto es de esperar, ya que tanto  $f$  como  $\lambda$  tal y como están definidos deben ser escalares. Por tanto, podemos decir que  $u^\mu$  y  $\partial_\mu f$  son vectores contravariantes y covariantes, respectivamente, ya que la contracción de ambos es un invariante. De manera general, diremos que es un vector contravariante cualquier objeto que transforme como

$$V^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} V^\mu \quad (\text{B.5})$$

y un vector covariante si transforma como

$$W_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} W_\mu \quad (\text{B.6})$$

Si la variedad está equipada con una métrica, podemos relacionar vectores co- y contravariantes como

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu, \quad V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu \quad (\text{B.7})$$

con  $g_{\mu\nu}$  y  $g^{\mu\nu}$  la métrica y métrica inversa, respectivamente. Es fácil comprobar que la métrica transforma bajo un cambio general de coordenadas como:

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} g_{\mu\nu}, \quad g^{\alpha\beta} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} \quad (\text{B.8})$$

Finalmente, podemos generalizar estos resultados y definimos un tensor de rango  $(m, n)$  como un objeto matemático que bajo un cambio general de coordenadas transforma como:

$$T_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \frac{\partial y^{\alpha_2}}{\partial x^{\mu_2}} \cdots \frac{\partial y^{\alpha_m}}{\partial x^{\mu_m}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial y^{\beta_1}} \frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial y^{\beta_2}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial y^{\beta_n}} T_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m} \quad (\text{B.9})$$

Por definición vectores contravariantes son tensores de rango  $(1,0)$ , vectores covariantes de rango  $(0,1)$  y la métrica  $g_{\mu\nu}$  es un tensor de rango  $(0,2)$ .

Cabe destacar que vectores y tensores no están definidos en la propia variedad. Si imaginamos una esfera y un vector tangente a esta en un punto, este se "sale" de la esfera. De hecho, un vector en un punto  $p \in \mathcal{M}^N$  se define en el plano  $T_p(\mathcal{M}^N)$  tangente a ese punto. De la misma forma, los tensores en un punto  $p$  están igualmente definidos en  $T_p(\mathcal{M}^N)$ .

### B.3 TRANSPORTE PARALELO Y DERIVADA COVARIANTE

Las reglas de transformación vistas hasta ahora, aunque son parecidas a las mostradas en el espacio de Minkowski, tienen una diferencia importante. Mientras que las transformaciones del tipo A.12 y A.13 son siempre lineales, esto no es así para cambios de coordenadas generales. Las cantidades  $\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}$  y  $\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}$  dependen, por lo general, del punto donde se apliquen. Por tanto, aunque vectores y tensores definidos en un mismo punto pueden contraerse y sumarse, un tensor en un punto  $p$  y otro en un punto  $q$  no. Esto tiene sentido desde el punto de vista de que ambos son tensores definidos en espacios distintos, en  $T_p(\mathcal{M}^N)$  y  $T_q(\mathcal{M}^N)$ , respectivamente. Por ejemplo, las operaciones  $V^\mu(q) - V^\mu(p)$  y  $V^\mu(p)V^\nu(q)$  no son tensoriales por lo general en una variedad arbitraria. Esto implica que la derivada de un campo tensorial no es una operación bien definida porque no va a transformar siguiendo la regla B.9. Para poder definir la derivada, necesitamos una regla para trasladar vectores de un punto a otro, y que se denomina como *transporte paralelo*.

Consideremos un campo vectorial,  $A^\mu$ , definido en un entorno de  $\mathcal{M}^N$ . Dados un punto  $p$  con coordenadas  $x^\mu$  y un punto  $q$  infinitamente próximo a  $p$  de coordenadas  $x^\mu + dx^\mu$ , como ya hemos comentado, la operación

$$dV^\mu \equiv V^\mu(q) - V^\mu(p) = V^\mu(x^\nu + dx^\nu) - V^\mu(X^\nu) = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (\text{B.10})$$

no es tensorial, ya que

$$\begin{aligned}\frac{\partial V^\beta}{\partial y^\alpha} &= \partial_\alpha V^\beta = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \partial_\mu \left( \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} V^\nu \right) = \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} \partial_\mu V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu} V^\nu\end{aligned}\quad (\text{B.11})$$

no transforma como un tensor. Para que la derivada mantenga el caracter tensorial el diferencial debe tener la forma  $DV^\mu = V^\mu_q(p) - V^\mu(p)$ , donde  $V^\mu_q(p)$  se define como el vector transportado paralelo de  $V^\mu(q)$  desde  $q$  a  $p$ . Podemos escribir este nuevo vector como  $V^\mu_q(p) = V^\mu(p) + \delta V^\mu$ . En pocas palabras, el vector transportado paralelo es el vector original mas un término de corrección no tensorial. Es razonable pensar que para desplazamientos pequeños este término sea lineal con  $dx^\nu$  y  $V^\mu(p)$  de forma que:

$$V^\mu_q(p) = V^\mu(p) + \Gamma^\mu_{\nu\rho} V^\rho dx^\nu \quad (\text{B.12})$$

donde  $\Gamma^\mu_{\rho\nu}$  es la denominada *conexión* y posee un caracter no tensorial. En principio, la conexión  $\Gamma^\mu_{\rho\nu}$  es arbitraria. El diferencial de  $V^\mu$  puede escribirse como

$$DV^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} V^\rho dx^\nu = \nabla_\nu V^\mu dx^\nu \quad (\text{B.13})$$

donde  $\nabla_\nu V^\mu$  se define como *derivada covariante* de  $V^\mu$ :

$$\nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} V^\rho \quad (\text{B.14})$$

Puede demostrarse que la derivada covariante comparte con la derivada parcial las propiedades de linealidad:

$$\nabla_\nu (\alpha V^\mu + \beta W^\mu) = \alpha \nabla_\nu V^\mu + \beta \nabla_\nu W^\mu \quad (\text{B.15})$$

El hecho de que  $\nabla_\nu V^\mu$  debe de transformar como un tensor de rango (1,1) nos permite deducir cómo debe transformar la conexión. Partiendo de que  $\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \nabla_\nu V^\mu - \partial_\nu V^\mu$ , llegamos a que esta debe transformar bajo cambios generales de coordenadas de la forma

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \frac{\partial x^\rho}{\partial y^\gamma} \Gamma^\mu_{\nu\rho} - \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \frac{\partial x^\rho}{\partial y^\gamma} \quad (\text{B.16})$$

Si exigimos que el operador  $\nabla_v$  cumpla la regla del producto de Leibniz podemos extender la definición de derivada covariante a tensores de rango  $(m, n)$ . Por ejemplo, si consideramos que  $\nabla_v \phi = \partial_v \phi$ , siendo  $\phi$  cualquier campo escalar, podemos calcular la derivada covariante de un vector covariante,  $W_\mu$ , haciendo uso de que la contracción  $V^\mu W_\mu$  es un escalar:

$$\partial_v(V^\mu W_\mu) = \nabla_v(V^\mu W_\mu) = (\nabla_v V^\mu)W_\mu + V^\mu(\nabla_v W_\mu) \quad (\text{B.17})$$

Usando la relación B.14 de la derivada covariante de un vector contravariante se obtiene que

$$\nabla_\mu W_\nu = \partial_\nu W_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho W_\rho \quad (\text{B.18})$$

Mediante este procedimiento puede demostrarse que en un caso general de un tensor de rango  $(m, n)$ , su derivada covariante vendrá dada por:

$$\begin{aligned} \nabla_\rho T_{v_1 v_2 \dots v_n}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m} = & \partial_\rho T_{v_1 v_2 \dots v_n}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu_1} T_{v_1 v_2 \dots v_n}^{\lambda \mu_2 \dots \mu_m} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu_2} T_{v_1 v_2 \dots v_n}^{\mu_1 \lambda \dots \mu_m} + \dots + \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu_m} T_{v_1 v_2 \dots v_n}^{\mu_1 \mu_2 \dots \lambda} \\ & - \Gamma_{\rho v_1}^\lambda T_{\lambda v_2 \dots v_n}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m} - \Gamma_{\rho v_2}^\lambda T_{v_1 \lambda \dots v_n}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m} - \dots - \Gamma_{\rho v_n}^\lambda T_{v_1 v_2 \dots \lambda}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Por último, diremos que un vector es transportado paralelamente a lo largo de una curva  $\gamma = \gamma(\lambda)$  si su derivada covariante a través de dicha curva se anula:

$$\frac{DV^\mu}{d\lambda} = u^\nu \nabla_\nu V^\mu = 0 \quad (\text{B.20})$$

donde  $u = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$  es el vector tangente a dicha curva.

#### B.4 CONEXIÓN LEVI-CIVITA

Como ya hemos comentado, no existe una relación entre  $g_{\mu\nu}$  y la conexión  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ , ya que esta es arbitraria. Sin embargo, puede demostrarse que en cualquier variedad existe una conexión única tal que

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho \quad (\text{B.21})$$

$$\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0 \quad (\text{B.22})$$

La conexión que cumple estas dos condiciones se conoce como la conexión Levi-Civita. En Relatividad General, estas condiciones surgen como consecuencia del Principio de Equivalencia. En lo que resta de sección usaremos siempre la conexión Levi-Civita a no ser que se exprese lo contrario.

Puede demostrarse que, dadas estas dos condiciones, la conexión Levi-Civita puede expresarse en función de la métrica como

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\partial_{\mu}g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}) = \{\mu\nu\}^{\rho} \quad (\text{B.23})$$

Las coordenadas de  $\{\mu\nu\}^{\rho}$  se conocen como los símbolos de Christoffel.

## B.5 GEODÉSICAS

La geodésica trata de extender el concepto de recta a una variedad con curvatura. Puede definirse como la curva para la que su longitud entre dos puntos fijos es extremal (mínima o máxima) respecto a todas las curvas que contienen dichos puntos.

Sea  $\gamma \subset \mathcal{M}^N$  una curva con coordenadas  $x^{\mu}(\lambda)$  y sean  $p$  y  $q$  dos puntos de dicha curva. La longitud de la curva  $\gamma$  entre los dos puntos viene dada por

$$l = \int_p^q \sqrt{\pm g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}} d\lambda \quad (\text{B.24})$$

donde  $\dot{x}^{\mu} = dx^{\mu}/d\lambda$ . El signo positivo y negativo se toman para curvas temporales y espaciales, respectivamente. Para encontrar la curva que hace extremal  $l$  resolvemos las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} - \frac{\partial L}{\partial x^{\mu}} = 0 \quad (\text{B.25})$$

con  $L = \sqrt{\pm g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}}$ . Operando en la ecuación B.25 obtenemos

$$\ddot{x}^{\rho} + \{\mu\nu\}^{\rho} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} = \frac{d \ln L}{d\lambda} \dot{x}^{\rho} \quad (\text{B.26})$$

En Relatividad General los coeficientes  $\{\mu\nu\}^{\rho}$  son las componentes de la conexión. La ecuación B.24 es independiente de la parametrización elegida para la curva.

Una elección particularmente útil es una parametrización lineal de la curva (denominada parametrización afín),  $l(\lambda) = a\lambda + b$ , de manera que el lado derecho de la ecuación B.26 se anula

$$\ddot{x} + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} = 0 \quad (\text{B.27})$$

Una elección típica del parámetro afín es el tiempo propio,  $\tau$ , para geodésicas temporales o la distancia propia,  $s$ , para geodésicas espaciales. Para geodésicas nulas, no se usa ningún parámetro afín con algún significado físico especial. Por último, para distinguir los tres tipos de geodésicas en la ecuación B.27 se especifica a partir del vector tangente a la curva:

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} = \epsilon \quad (\text{B.28})$$

Con  $\epsilon = \pm 1$  en el caso de geodésicas temporales y espaciales, respectivamente, y  $\epsilon = 0$  en caso de geodésicas lumínicas.

Cabe destacar que la ecuación B.27 puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} &= \frac{d}{d\lambda} \dot{x}^{\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} = \\ \dot{x}^{\nu} \partial_{\nu} \dot{x}^{\rho} + \dot{x}^{\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \dot{x}^{\mu} &= \dot{x}^{\nu} \nabla_{\nu} \dot{x}^{\rho} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

donde en la segunda igualdad se ha usado la regla de la cadena. Si renombramos  $\dot{x}^{\mu} = u^{\mu}$  nos queda

$$u^{\nu} \nabla_{\nu} u^{\rho} = 0 \quad (\text{B.30})$$

que recordando la (B.20) puede interpretarse como que el vector  $u^{\mu}$  tangente a la curva geodésica es transportado paralelamente a través de ella. Esta es una propiedad general en la Relatividad General y se debe a la elección de la conexión Levi-Civita para el transporte paralelo.

## B.6 DENSIDADES TENSORIALES. DETERMINANTE DE LA MÉTRICA

En secciones anteriores hemos introducido el álgebra tensorial en variedades. Sin embargo, en Relatividad General nos encontraremos objetos que aunque parecen tensores, realmente no transforman como tal. Uno de estos objetos puede ser la

conexión, que como vimos en (B.16) no transforma como (B.9). Otro tipo de objetos son las densidades tensoriales. Definimos una densidad tensorial de peso  $\omega$  como el objeto  $\tilde{T}_{\beta_1\beta_2\dots\beta_m}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$  que bajo un cambio de coordenadas  $y = y(x)$  transforma como:

$$\tilde{T}_{\beta_1\beta_2\dots\beta_m}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} = \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right|^\omega \cdot \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \frac{\partial y^{\alpha_2}}{\partial x^{\mu_2}} \dots \frac{\partial y^{\alpha_m}}{\partial x^{\mu_m}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial y^{\beta_1}} \frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial y^{\beta_2}} \dots \frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial y^{\beta_n}} \tilde{T}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_m} \quad (\text{B.31})$$

La transformación (B.31) es muy parecida a la transformación de tensores de rango  $(n, m)$  excepto por un factor  $\left| \frac{\partial x}{\partial y} \right|^\omega$ .

Un ejemplo de densidad tensorial es el símbolo de Levi-Civita introducido en (A.26). Asumiendo que la transformación de coordenadas es propia, es decir, el determinante de la transformación es positivo, el símbolo de Levi-civita transforma como

$$\epsilon_{\alpha_1\dots\alpha_N} = \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right|^{-1} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial y^{\alpha_1}} \frac{\partial x^{\mu_2}}{\partial y^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial x^{\mu_N}}{\partial y^{\alpha_N}} \epsilon_{\mu_1\dots\mu_N} \quad (\text{B.32})$$

Esto es, el símbolo de Levi-Civita es una densidad tensorial de peso  $-1$ .

Otra densidad tensorial muy importante es el determinante de la métrica,  $g$ , aunque obtiene más relevancia la raíz cuadrada de su valor absoluto,  $\sqrt{|g|}$ . Tomando el valor absoluto del determinante en la relación (B.8) y tomando la raíz cuadrada en ambos miembros nos queda que

$$\sqrt{|g(y)|} = \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right| \sqrt{|g(x)|} \quad (\text{B.33})$$

Y por tanto,  $\sqrt{|g|}$  es una densidad tensorial de peso 1. La cantidad  $\sqrt{|g|}$  se usa comúnmente para definir tensores a partir de otras densidades tensoriales. Para ello solo hay que multiplicar o dividir por  $\sqrt{|g|}$  cuantas veces sea necesario hasta obtener una cantidad tensorial. Por ejemplo, podemos definir el tensor de Levi-Civita como

$$\tilde{\epsilon}_{\mu_1\dots\mu_N} = \sqrt{|g|} \epsilon_{\mu_1\dots\mu_N} \quad (\text{B.34})$$

que efectivamente transforma como (B.9).

Existe una relación importante entre  $\sqrt{|g|}$  y la conexión Levi-Civita. De la ecua-

ción (B.23) se puede deducir fácilmente que:

$$\Gamma_{\mu\rho}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}\partial_{\mu}g_{\rho\lambda} \quad (\text{B.35})$$

Por otro lado, puede demostrarse que (Demostración en Capítulo 1 de [13])

$$\partial_{\mu}\sqrt{|g|} = \frac{1}{2}\sqrt{|g|}g^{\rho\lambda}\partial_{\mu}g_{\rho\lambda} \quad (\text{B.36})$$

de donde se sigue que

$$\Gamma_{\mu\rho}^{\rho} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_{\mu}\sqrt{|g|} \quad (\text{B.37})$$

## B.7 OPERADORES DIFERENCIALES

La relación (B.37) es muy útil pues nos permite escribir las relaciones de algunos de los principales operadores diferenciales de forma compacta. Podemos expresar el gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano, respectivamente, de la forma:

$$(\vec{\nabla}\phi)^{\mu} = \partial_{\mu}\phi \quad (\text{B.38})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \nabla_{\mu}A^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_{\mu}(\sqrt{|g|}A^{\mu}) \quad (\text{B.39})$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{A})^{\rho} = \sqrt{|g|}\epsilon^{\mu\nu\rho}\nabla_{\mu}A_{\nu} = \sqrt{|g|}\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_{\mu}A_{\nu} \quad (\text{B.40})$$

$$\nabla^2\phi = \nabla_{\mu}\partial^{\mu}\phi = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_{\mu}(\sqrt{|g|}\partial^{\mu}\phi) \quad (\text{B.41})$$

Siendo  $\phi$  y  $\vec{A}$  campos escalares y vectoriales cualesquiera definidos en la variedad.

## B.8 INTEGRACIÓN EN VARIEDADES

Otra aplicación importante de  $\sqrt{|g|}$  se da en la integración en variedades. Del cálculo diferencial sabemos que sea un cambio de coordenadas del tipo  $y = y(x)$  el elemento de volumen,  $d^N y$ , en las nuevas coordenadas y  $d^N x$  en las coordenadas antiguas se relacionan mediante el jacobiano de la transformación como

$$d^N y = Jd^N x = \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| d^N x \quad (\text{B.42})$$

Por otro lado, podemos identificar el elemento de volumen  $d^N x$  como una densidad escalar antisimétrica de la forma

$$d^N x = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^N \quad (\text{B.43})$$

La razón de por qué  $d^N x$  es antisimétrico se debe a que estamos definiendo un elemento orientable. Imaginemos un paralelepípedo (en el caso sencillo de  $N=3$ ) formado por vectores infinitesimales. Puesto que  $d^N x$  debe tener una orientación, si dos de los vectores son intercambiados deberíamos obtener el mismo volumen pero con el signo cambiado. Además, la propiedad de antisimetría hace que si dos de los vectores son colineales, entonces el elemento de volumen es nulo. Esta definición del elemento de volumen nos permite escribir

$$d^N x = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^N = \frac{1}{N!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_N} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_N} \quad (\text{B.44})$$

y de la ecuación (B.42) se deduce que  $d^N x$  es una densidad tensorial de peso -1. Para construir el elemento de volumen invariante basta con multiplicar por  $\sqrt{|g|}$

$$\sqrt{|g|} d^N x \quad (\text{B.45})$$

Finalmente, en una variedad arbitraria,  $\mathcal{M}^N$ , definimos la integral de volumen de una función escalar  $f(x)$  de la forma

$$\int d^N x \sqrt{|g|} f(x) \quad (\text{B.46})$$

## B.9 CURVATURA

Aunque en las secciones anteriores hemos descrito muchas propiedades geométricas de variedades, aún no se ha introducido qué entendemos por curvatura. En la geometría diferencial el concepto de curvatura se recoge en el tensor de Riemann,  $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho}{}^\lambda$ , que se define mediante la relación

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\lambda = \nabla_\mu \nabla_\nu V^\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\lambda = \mathcal{R}_{\mu\nu\rho}{}^\lambda V^\rho \quad (\text{B.47})$$

El tensor de Riemann puede entenderse como la diferencia entre el transporte paralelo de  $V^\lambda$  a través de las dos diferentes trayectorias que definen los bordes del paralelogramo formado por  $dx^\mu$  y  $dx^\nu$ . Desarrollando la expresión (B.47) obtenemos

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda = \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \quad (\text{B.48})$$

Por construcción, el tensor de Riemann es antisimétrico en sus dos primeros índices

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\rho}{}^\lambda = -\mathcal{R}_{\nu\mu\rho}{}^\lambda \quad (\text{B.49})$$

Podemos definir la versión totalmente covariante del tensor de Riemann usando la métrica

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\lambda} = g_{\lambda\sigma} \mathcal{R}_{\mu\nu\rho}{}^\sigma \quad (\text{B.50})$$

En esta forma, el tensor de Riemann tiene más simetrías:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\lambda} = -\mathcal{R}_{\nu\mu\rho\lambda} = \mathcal{R}_{\rho\lambda\mu\nu} = -\mathcal{R}_{\mu\nu\lambda\rho} \quad (\text{B.51})$$

Y además, satisface las identidades de Bianchi:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\lambda} + \mathcal{R}_{\nu\rho\mu\lambda} + \mathcal{R}_{\rho\mu\nu\lambda} = 0 \quad (\text{B.52})$$

$$\nabla_\mu \mathcal{R}_{\nu\rho\sigma\lambda} + \nabla_\nu \mathcal{R}_{\rho\mu\sigma\lambda} + \nabla_\rho \mathcal{R}_{\mu\nu\sigma\lambda} = 0 \quad (\text{B.53})$$

Análogamente a la ecuación (B.47), para un vector covariante

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] W_\rho = -\mathcal{R}_{\mu\nu\rho}{}^\lambda W_\lambda \quad (\text{B.54})$$

y para un tensor de rango (1,1)

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] T_\rho{}^\lambda = \mathcal{R}_{\mu\nu\sigma}{}^\lambda T_\rho{}^\sigma - \mathcal{R}_{\mu\nu\rho}{}^\sigma T_\sigma{}^\lambda \quad (\text{B.55})$$

Por último, contrayendo el tensor de Riemann obtenemos el tensor de Ricci y el escalar de curvatura:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\rho\nu}{}^\rho = g^{\rho\lambda} \mathcal{R}_{\mu\rho\nu\lambda} \quad (\text{B.56})$$

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu} \quad (\text{B.57})$$

con  $\mathcal{R}_{\mu\nu}$  un tensor simétrico.



# BIBLIOGRAFÍA

- [1] K. Akiyama et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. VI. The shadow and mass of the central black hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 875:L6, 2019. [arXiv:1906.11243](#). (page 47).
- [2] K. Akiyama et al. First M87 Event Horizon Telescope Results.I. The shadow of the Supermassive Black Hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 875:L1, 2019. [arXiv:1906.11238](#). (pages 43, 44, 45 y 47).
- [3] K. Akiyama et al. First M87 Event Horizon Telescope Results.II. Array and instrumentation. *The Astrophysical Journal Letters*, 875:L2, 2019. [arXiv:1906.11239](#). (page 44).
- [4] K. Akiyama et al. First M87 Event Horizon Telescope Results.IV. Imaging the central supermassive black hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 875:L6, 2019. [arXiv:1906.11241](#). (page 45).
- [5] S. M. Carroll. *Spacetime and Geometry: an introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2019. (pages 13, 15, 22, 24, 25, 27, 28, 29, 40, 50 y 57).
- [6] D. Castelvecchi. Black hole pictured for first time in spectacular detail. *Nature*, 568:284–285, 2019. <https://doi.org/10.1038/d41586-019-01155-0>. (page 1).
- [7] A. Eckart et al. The position of Sagittarius A\*: II. Accurate positions and proper motions of stellar SiO masers near the galactic center. *The Astrophysical Journal Letters*, 587:208–220, 2003. [arXiv:astro-ph/0212273](#). (page 43).
- [8] H. Goldstein. *Classical Mechanics*, chapter 3. Addison-Wesley, 1980. (page 28).

- [9] David J. Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. Pearson, 3<sup>rd</sup> edition, 2015. (page 56).
- [10] B. Janssen. *Gravitación y geometría: una introducción moderna a la Teoría de la Relatividad General*. Universidad de Granada, 2022. (pages 5, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 20, 22, 23, 24, 26, 29, 31, 33, 34, 35, 37, 38, 40, 49, 51, 52, 56 y 57).
- [11] A. Kox, M. Kelin, and R. Schulmann. *The collected papers of Albert Einstein*, volume 2 (translation volume), chapter "The foundation of the General Theory of Relativity", pages 301–311. Princeton University Press, 1997. (page 7).
- [12] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. Princeton University Press, 2017. (pages 3 y 16).
- [13] E. Poisson. *A relativist's toolkit. The mathematics of black-hole mechanics*, chapter 1. Princeton University Press, 1997. (pages 11, 14, 31, 57 y 66).
- [14] <https://eventhorizontelescope.org/about>. (page 43).
- [15] S. Schutz. *A first course in General Relativity*. Cambridge University Press, 3<sup>rd</sup> edition, 2022. (pages 6, 7, 11, 18, 23, 28, 36 y 58).
- [16] K. Schwarzschild, S. Antoci, and A. Loinger. *On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory*. 1999. (page 21).
- [17] F. Tamburini and M. D. Valle B. Thidé. Measurement of the spin of the M87 black hole from its observed twisted light. *MNRAS Letters*, 000:1–14, 2019. [arXiv:1904.07923](https://arxiv.org/abs/1904.07923). (page 47).