



Introducción al proceso de la decoherencia cuántica

Trabajo de Fin de Grado

6 Julio 2023

Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear

Universidad de Sevilla

escrito por

Álvaro Ledo Antúnez

tutorizado por

Dr. Jesús Casado Pascual

Resumen

En este Trabajo de Fin de Grado se presenta el concepto de la decoherencia cuántica como fenómeno natural derivado de las interacciones existentes entre el sistema estudiado y el entorno que lo rodea. La comprensión de la decoherencia juega un papel fundamental en el desarrollo de aplicaciones prácticas de cualquier sistema cuántico, siendo el ejemplo más destacado la computación cuántica tan vigente en la actualidad.

En la primera sección se proporciona una breve introducción sobre el tema a tratar, además de herramientas básicas para el estudio de la evolución temporal de los sistemas cuánticos, primero para el caso de sistema cerrado y posteriormente extendemos las ideas a los sistemas cuánticos abiertos.

En la segunda sección se presenta el formalismo de las ecuaciones maestras, claves en el estudio de la decoherencia. Para ello, se introducen una serie de aproximaciones cuyo motivo es facilitar el estudio de los sistemas cuánticos. Se introduce también el formalismo de Kraus, que nos permite deducir la forma general de la ecuación maestra de Lindblad, con la que se trabaja en múltiples modelos.

En la tercera sección se aborda el concepto de decoherencia de forma completamente teórica, y se muestra su carácter puramente cuántico, derivándose exclusivamente de aplicar el formalismo estudiado a un sistema cuántico abierto.

En la cuarta y en la quinta sección se estudian dos modelos, el de espín-bosón y el del oscilador armónico. Estos modelos son sencillos y ofrecen buenos resultados de forma analítica, por lo que ilustran a la perfección el fenómeno descrito en las secciones previas en casos prácticos.

Abstract

In this Bachelor's Thesis the concept of quantum decoherence is presented as a natural phenomenon derived from the existing interactions between the studied system and the surrounding environment. The understanding of the decoherence plays a fundamental role in the development of practical applications of any quantum system, with quantum computation being the most outstanding example nowadays.

The first section starts with a brief introduction related to the chosen topic, and a set of basic tools for the study of temporal evolution in quantum systems, firstly treating the case of a closed system and then extending the ideas to open quantum systems.

In the second section the master equation formalism is presented, key to the study of decoherence. In that regard, a series of approximations are introduced in order to ease the study of quantum systems. The Kraus formalism is also introduced in this section, which let us deduce the general form of the Lindblad master equation, used in different models.

In the third section the concept of decoherence is treated in a completely theoretical way, and its purely quantic nature is shown, derived from the application of the formalism used in open quantum systems.

In the fourth and fifth section two models are studied, the spin-boson model and the harmonic oscillator model. These models are simple yet they show good analytical results, so they perfectly illustrate the phenomenon described in previous sections in a practical case.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Conceptos básicos	2
1.2. Evolución temporal en sistemas cuánticos cerrados	4
1.3. Evolución temporal en sistemas cuánticos abiertos	7
2. Procesos cuánticos markovianos	9
3. Decoherencia cuántica	16
4. Modelo espín-bosón	22
5. El oscilador armónico amortiguado	34
6. Conclusiones	41
Apéndice	42
Apéndice A	42
Bibliografía	46

1. Introducción

El primer atisbo de la teoría que acabaría siendo conocida como la Mecánica Cuántica se observó en la solución revolucionaria propuesta por Max Planck para el problema de radiación de cuerpo negro. En dicha teoría, Planck estableció que la luz era emitida y absorbida en *cuantos* de luz, paquetes discretos de energía $E = h\nu$. Desde entonces, la Mecánica Cuántica ha crecido hasta convertirse en uno de los pilares fundamentales de la física moderna, siendo clave para el desarrollo de la física y de la tecnología por igual.

En este contexto surge la teoría de la decoherencia cuántica, propuesta por primera vez por H. D. Zeh en un artículo original de 1970 [1]. En dicho artículo, Zeh trató el problema del entrelazamiento entre los grados de libertad en un sistema y el entorno, que resultó fundamental para entender mejor el paso del régimen cuántico al clásico en un sistema. En este sentido, podemos decir que la decoherencia es el proceso a través del cual aparecen las distribuciones de probabilidad clásicas a partir de las distribuciones de probabilidad cuánticas.

La constante evolución de la tecnología actual y la perseverante búsqueda de nuevos y mejores aparatos que nos permitan superar las barreras impuestas por la capacidad de cálculo actual es, sin duda, la mayor motivación que me guía para comenzar a entender este fenómeno, cuya importancia es capital en un concepto tan presente en la actualidad como es la computación cuántica. Es la pérdida de la coherencia en los cúbits que componen un ordenador cuántico uno de los mayores inconvenientes en su construcción, mantenimiento y uso.

El desarrollo de la computación cuántica, por consiguiente, pasa por formular una teoría cuántica adecuada del fenómeno de la decoherencia, partiendo de la teoría de sistemas cuánticos abiertos. A través de estas ideas, podemos establecer un marco en el que estudiar los casos reales en los que surge este fenómeno, y constatar la validez de dichos modelos a partir de los resultados experimentales.

Por tanto, el objetivo fijado para este trabajo consiste en introducir las herramientas matemáticas necesarias para el tratamiento general de los sistemas cuánticos abiertos y presentar de forma clara y concisa el concepto de la decoherencia cuántica, a partir del cuál estudiar este fenómeno en situaciones particulares como en un oscilador armónico o en un sistema binivel.

1.1. Conceptos básicos

Comenzaremos esta sección introduciendo el espacio de Hilbert con el que trabajaremos normalmente, \mathcal{H}_{SE} , que será el espacio total correspondiente a nuestro sistema de estudio S y al entorno E. Este espacio vendrá dado por el producto tensorial de los espacios individuales de S y E

$$\mathcal{H}_{SE} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E, \quad (1)$$

con $\{|\psi_j\rangle_S\}$ y $\{|\phi_\alpha\rangle_E\}$ bases ortonormales de los subespacios S y E respectivamente. La dimensión de \mathcal{H}_S y \mathcal{H}_E será finita y arbitraria. La base de \mathcal{H}_{SE} será $\{|\psi_j\rangle_S \otimes |\phi_\alpha\rangle_E\}$. Etiquetaremos aquellos estados pertenecientes a \mathcal{H}_S con subíndices latinos (j, k, \dots), mientras que para aquellos pertenecientes a \mathcal{H}_E utilizaremos subíndices griegos (α, β, \dots).

En lo siguiente, todos los espacios de Hilbert nombrados serán considerados de dimensión finita. Múltiples pruebas presentadas no son válidas en el caso de dimensión infinita, y su correspondiente generalización solo complica de forma innecesaria los conceptos.

A su vez, trabajaremos con operadores densidad, que representan el estado en el que se encuentra el sistema. Recordemos que estos operadores tienen algunas propiedades interesantes, como que son definidos positivos y tienen traza unidad. Para un colectivo de estados $\{|\Phi_j\rangle\}$ (no necesariamente ortogonales) pertenecientes al espacio de Hilbert correspondiente, podemos escribirlos de la forma

$$\rho = \sum_j p_j |\Phi_j\rangle\langle\Phi_j|, \quad (2)$$

donde p_j denota la probabilidad del sistema de encontrarse en cada uno de los estados $|\Phi_j\rangle$. Según uno de los postulados de la Mecánica Cuántica, la relación entre un estado del sistema $|\Phi(t)\rangle$ en dos instantes de tiempo t_0 y t viene dada mediante una transformación unitaria

$$|\Phi(t)\rangle = U(t, t_0) |\Phi(t_0)\rangle, \quad (3)$$

siendo $U(t, t_0)$ el operador de evolución temporal, que enlaza el estado dado en el instante t_0 inicial con el estado en un instante cualquiera t , con $U(t, t)$ igual al operador identidad. Este operador de evolución a su vez satisface la siguiente relación

$$U(t, t_0) = U^\dagger(t_0, t) = U^{-1}(t_0, t), \quad (4)$$

de forma que para un estado $|\Phi(t)\rangle$ se cumple que

$$|\Phi(t)\rangle = U(t, t_0) |\Phi(t_0)\rangle = U(t, t_0)U(t_0, t) |\Phi(t)\rangle = \mathbb{1} |\Phi(t)\rangle = |\Phi(t)\rangle, \quad (5)$$

Siendo $\mathbb{1}$ el operador identidad del espacio de Hilbert correspondiente. Utilizando la definición (2) de la matriz densidad, podemos encontrar que la transformación de evolución temporal actúa de la forma

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \sum_j p_j |\Phi_j(t)\rangle\langle\Phi_j(t)| \\ &= \sum_j p_j U(t, t_0) |\Phi_j(t_0)\rangle\langle\Phi_j(t_0)| U^\dagger(t, t_0) \\ &= U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0). \end{aligned} \quad (6)$$

Hemos considerado que el sistema total está cerrado, por lo que las probabilidades p_j son independientes del tiempo. Por último, para facilitar el estudio de nuestro sistema, definiremos la traza parcial en un espacio de Hilbert compuesto $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{x_1} \otimes \mathcal{H}_{x_2} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{x_j} \otimes \dots$ y base $\{|\phi_{m_1}\rangle \otimes |\phi_{m_2}\rangle \otimes \dots\}$ de la siguiente forma:

Definición 1.1: Sea un operador $O = O_{x_1} \otimes \dots \otimes O_{x_j} \otimes \dots$ que actúa sobre los estados de \mathcal{H} . La traza parcial Tr_{x_j} es una aplicación lineal sobre O tal que

$$\text{Tr}_{x_j} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}' = \mathcal{H}_{x_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{x_{j-1}} \otimes \mathcal{H}_{x_{j+1}} \otimes \dots \quad (7)$$

$$\text{Tr}_{x_j} [O_{x_1} \otimes \dots \otimes O_{x_j} \otimes \dots] \rightarrow [O_{x_1} \otimes \dots \otimes O_{x_{(j-1)}} \otimes O_{x_{(j+1)}} \otimes \dots] \text{Tr} [O_{x_j}]. \quad (8)$$

Veamos como se define en el caso que nos ocupa ($\mathcal{H}_{\text{SE}} = \mathcal{H}_{\text{S}} \otimes \mathcal{H}_{\text{E}}$). Sea un operador A que actúa sobre el espacio \mathcal{H}_{SE} cuya base ortonormal es $\{|\Psi_{j,\alpha}\rangle\} = \{|\psi_j\rangle_{\text{S}} \otimes |\phi_\alpha\rangle_{\text{E}}\} = \{|\psi_j\rangle_{\text{S}} |\phi_\alpha\rangle_{\text{E}}\}$. Su descomposición espectral es

$$A = \sum_{j,k} \sum_{\alpha,\beta} \langle\psi_j| \langle\phi_\alpha| A |\psi_k\rangle |\phi_\beta\rangle |\psi_j\rangle |\phi_\alpha\rangle \langle\psi_k| \langle\phi_\beta|. \quad (9)$$

Denotemos el término $\langle\psi_j| \langle\phi_\alpha| A |\psi_k\rangle |\phi_\beta\rangle = A_{j\alpha,k\beta}$. Recordemos a su vez que el término $|\psi_j\rangle |\phi_\alpha\rangle \langle\psi_k| \langle\phi_\beta|$ es equivalente a $|\psi_j\rangle\langle\psi_k| \otimes |\phi_\alpha\rangle\langle\phi_\beta|$. La traza parcial (respecto al subespacio

E) se define como

$$\text{Tr}_E(A) = \sum_{j,k} \sum_{\alpha,\beta} A_{j\alpha,k\beta} |\psi_j\rangle\langle\psi_k| \text{Tr} [|\phi_\alpha\rangle\langle\phi_\beta|] \quad (10)$$

$$= \sum_{j,k} \sum_{\alpha,\beta} A_{j\alpha,k\beta} |\psi_j\rangle\langle\psi_k| \delta_{\alpha,\beta} \quad (11)$$

$$= \sum_{j,k} \sum_{\alpha} A_{j\alpha,k\alpha} |\psi_j\rangle\langle\psi_k|. \quad (12)$$

Análogamente, podemos definir la traza parcial respecto al subespacio S como

$$\text{Tr}_S(A) = \sum_j \sum_{\alpha,\beta} A_{j\alpha,j\beta} |\phi_\alpha\rangle\langle\phi_\beta|. \quad (13)$$

En el caso que nos ocupa, establecemos que la traza parcial del operador densidad nos definirá el operador densidad reducido del subsistema. Este operador densidad reducido contiene toda la información concerniente al subsistema S que podemos obtener sin conocer el estado del subsistema E. Aplicando la definición de operador densidad vista en (2) tenemos que

$$\rho_S = \text{Tr}_E(\rho_{SE}) = \sum_{j,k} \sum_{\alpha} \sum_l p_l \langle\Psi_{j,\alpha}|\Phi_l\rangle \langle\Phi_l|\Psi_{k,\alpha}\rangle |\psi_j\rangle\langle\psi_k|. \quad (14)$$

1.2. Evolución temporal en sistemas cuánticos cerrados

Comenzaremos con una introducción a las distintas herramientas para conocer la evolución de un sistema cuántico cerrado. Definiremos el sistema cerrado como aquel que no interacciona de forma cuántica con su entorno. Esto significa que, o bien no intercambia información de ningún tipo, o bien lo hace clásicamente. Tomemos la ecuación de Schrödinger que describe a un sistema cuántico cerrado

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\phi(t)\rangle = H(t) |\phi(t)\rangle, \quad (15)$$

donde $|\phi(t)\rangle$ es el vector estado que describe al sistema, y $H(t)$ es el hamiltoniano que describe al sistema. La energía varía (el hamiltoniano no es constante), por lo que el sistema intercambia información con el entorno. No obstante, el sistema descrito es cerrado, debido a que la interacción responsable (un potencial electromagnético variable por ejemplo) está descrita clásicamente.

Al derivar la expresión (3), podemos escribirla de la forma

$$\frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} = \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} \mathbb{1} = \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} U^\dagger(t, t_0) U(t, t_0) = A(t, t_0) U(t, t_0), \quad (16)$$

Donde hemos llamado $A(t, t_0)$ a

$$A(t, t_0) = \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} U^\dagger(t, t_0). \quad (17)$$

La derivada temporal del operador identidad se puede escribir a su vez como

$$\frac{\partial \mathbb{1}}{\partial t} = \frac{\partial U(t, t_0) U^\dagger(t, t_0)}{\partial t} = \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} U^\dagger(t, t_0) + U(t, t_0) \frac{\partial U^\dagger(t, t_0)}{\partial t} = 0, \quad (18)$$

de forma que

$$\frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} U^\dagger(t, t_0) = -U(t, t_0) \frac{\partial U^\dagger(t, t_0)}{\partial t}. \quad (19)$$

Usando esta relación, se demuestra que el operador $A(t, t_0)$ es antihermítico

$$A(t, t_0) = \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} U^\dagger(t, t_0) = -U(t, t_0) \frac{\partial U^\dagger(t, t_0)}{\partial t} = -A^\dagger(t, t_0). \quad (20)$$

Para un instante t_1 comprendido entre t y t_0 , tenemos que el operador de evolución cumple que

$$U(t, t_0) = U(t, t_1) U(t_1, t_0). \quad (21)$$

Si reexpresamos el operador $A(t, t_0)$ utilizando esta relación, llegamos al siguiente resultado

$$\begin{aligned} A(t, t_0) &= \frac{\partial U(t, t_1) U(t_1, t_0)}{\partial t} U^\dagger(t_1, t_0) U^\dagger(t, t_1) = \frac{\partial U(t, t_1)}{\partial t} U(t_1, t_0) U^\dagger(t_1, t_0) U^\dagger(t, t_1) \\ &= \frac{\partial U(t, t_1)}{\partial t} U^\dagger(t, t_1) = A(t, t_1). \end{aligned} \quad (22)$$

Esto nos demuestra que $A(t, t_0) = A(t, t_1) = A(t)$, es decir, que no depende del instante inicial, sino únicamente del estado final. Para transformar $A(t)$ en un operador hermítico, multiplicamos por $i\hbar$. Al resultado lo denominaremos $H(t)$, de forma que la ecuación (16) queda

$$\frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} = A(t) U(t, t_0) = \frac{H(t)}{i\hbar} U(t, t_0) \rightarrow i\hbar \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} = H(t) U(t, t_0), \quad (23)$$

donde el operador $H(t)$ hermítico coincide con el hamiltoniano del sistema. A esta ecuación se le conoce como ecuación de Schrödinger hacia delante, y su condición inicial es

$$U(t_0, t_0) = \mathbb{1}. \quad (24)$$

Utilizando un razonamiento similar pero derivando respecto a t_0 en la ecuación (3), obtenemos

la ecuación de Schrödinger hacia atrás

$$i\hbar \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t_0} = -U(t, t_0)H(t_0), \quad (25)$$

con la misma condición inicial (24).

La evolución temporal viene dada por la ecuación de Liouville-Von Neumann, que se obtiene fácilmente utilizando la ecuación de Schrödinger hacia delante. Para ello, derivamos el operador densidad descrito en (6) y multiplicamos por $i\hbar$, de forma que

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho(t) = i\hbar \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} \rho(t_0) U^\dagger(t, t_0) + i\hbar U(t, t_0) \rho(t_0) \frac{\partial U^\dagger(t, t_0)}{\partial t}. \quad (26)$$

Usando la ecuación de Schrödinger hacia delante (23) y su adjunta

$$-i\hbar \frac{\partial U^\dagger(t, t_0)}{\partial t} = U^\dagger(t, t_0)H(t), \quad (27)$$

obtenida transponiendo y conjugando la ecuación de Schrödinger hacia delante, podemos sustituir en (26) para obtener

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho(t) = H(t)U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0) - U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0)H(t) = H(t)\rho(t) - \rho(t)H(t), \quad (28)$$

de donde finalmente llegamos a la expresión de la ecuación de Liouville-Von Neumann

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho(t) = [H(t), \rho(t)], \quad (29)$$

donde H es el hamiltoniano del sistema total. La ecuación de Liouville-Von Neumann describe la evolución del operador densidad. Por los postulados de la Mecánica Cuántica, sabemos que la evolución de un estado cuántico sigue la ecuación (6) respectivamente. Para el caso en el que el hamiltoniano del sistema es independiente del tiempo ($H(t) = H_0 = \text{cte}, \forall t$) obtenemos que el operador de evolución se expresa como

$$U(t, t_0) = e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar}. \quad (30)$$

En caso de que el hamiltoniano fuera dependiente del tiempo, la expresión viene dada por

$$U(t, t_0) = \mathcal{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t') \right], \quad (31)$$

donde \mathcal{T} es el súperoperador de ordenación temporal. Para entender esta expresión debemos entender cómo funciona el súperoperador \mathcal{T} . Para dos operadores A y B que actúan en tiempos distintos t y t' , se tiene que

$$\mathcal{T}[A(t)B(t')] = \begin{cases} A(t)B(t') & t \geq t', \\ B(t')A(t) & t < t', \end{cases} \quad (32)$$

donde hemos supuesto que $A(t)$ y $B(t')$ no conmutan entre sí. Matemáticamente esto lo podemos representar mediante la función escalón de Heaviside

$$\mathcal{T}[A(t)B(t')] = \theta(t - t')A(t)B(t') + \theta(t' - t)B(t')A(t). \quad (33)$$

Conocidos $U(t, t_0)$ y el valor del operador densidad en un instante inicial, $\rho(t_0)$, la ecuación (6) nos da la evolución completa del sistema.

1.3. Evolución temporal en sistemas cuánticos abiertos

En este apartado, generalizaremos los resultados anteriores a sistemas cuánticos compuestos, donde ahora aplicaremos lo estudiado a un sistema compuesto cuyos elementos vienen descritos en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{SE} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$. El sistema completo que analizamos sigue siendo un sistema cerrado y, por tanto, está sujeto a las ecuaciones de evolución que describen a los sistemas cuánticos cerrados. Esto es debido a que estamos representando a nuestro sistema cuántico de interés S junto al entorno E que lo rodea como el sistema total. Sin embargo, el sistema S está abierto, ya que puede interactuar cuánticamente con el entorno.

Para estudiar este nuevo sistema, nos valdremos del concepto de operador densidad reducido. Este operador contiene toda la información relativa al subsistema S, que es el que nos concierne. La relación entre operador densidad y operador densidad reducido viene dada por (14), por lo que, en un instante cualquiera t , tendremos que $\rho_S(t)$ viene dado por

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_E [\rho_{SE}(t)] = \text{Tr}_E [U(t, t_0)\rho_{SE}(t_0)U^\dagger(t, t_0)]. \quad (34)$$

Esta ecuación nos define la evolución del subsistema S para cualquier instante t a partir de un estado inicial $\rho_{SE}(t_0)$. Del mismo modo, podemos trazar sobre el entorno E en la ecuación (29) para obtener que

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_S(t) = \text{Tr}_E [H(t), \rho_{SE}(t)]. \quad (35)$$

No obstante, el cálculo directo de estas ecuaciones es complejo, por lo que realizaremos aproximaciones buscando simplificar la expresión de la evolución.

2. Procesos cuánticos markovianos

En esta sección buscaremos reescribir las ecuaciones anteriores utilizando el formalismo de las ecuaciones maestras aplicadas a la Mecánica Cuántica. Para ello, vamos a realizar ahora algunas aproximaciones. En primer lugar, tomaremos que, en el estado inicial, el operador densidad total del sistema se puede factorizar de la forma

$$\rho_{SE}(t_0) = \rho_S(t_0) \otimes \rho_E(t_0), \quad (36)$$

donde $\rho_S(t_0) = \text{Tr}_E [\rho_{SE}(t_0)]$ es el operador densidad reducido del subsistema S en el instante inicial, y $\rho_E(t_0) = \text{Tr}_S [\rho_{SE}(t_0)]$ es el operador densidad reducido del subsistema E. Tomar esta forma del operador densidad total inicial implica asumir que no existe correlación entre el ambiente y el sistema de estudio en el instante inicial, por lo que podemos tomar el operador densidad en el instante inicial como factorizado, y es a partir de dicho instante inicial que la evolución del subsistema y la del entorno ya están entrelazadas.

A continuación vamos a definir la evolución de una forma equivalente mediante la introducción de los mapas dinámicos.

Definición 1.2: Un mapa dinámico es una aplicación $\nu_{(t,t_0)}$ tal que

$$\nu_{(t,t_0)} : \rho(t_0) \rightarrow \rho(t). \quad (37)$$

Es fácil observar que la ecuación (34) define un mapa dinámico que actúa como

$$\nu_{(t,t_0)}\rho_S(t_0) \equiv \text{Tr}_E [U(t, t_0)(\rho_S(t_0) \otimes \rho_E(t_0))U^\dagger(t, t_0)]. \quad (38)$$

Podemos comprobar que este mapa dinámico se puede expresar en la forma de suma de operadores

$$\rho_S(t) = \sum_{\alpha,\beta} K_{\alpha,\beta}\rho_S(t_0)K_{\alpha,\beta}^\dagger, \quad (39)$$

donde los operadores $K_{\alpha,\beta}(t, t_0)$ son los llamados operadores de Kraus, que se definen según la condición

$$\sum_{\alpha,\beta} K_{\alpha,\beta}^\dagger(t, t_0)K_{\alpha,\beta}(t, t_0) = \mathbb{1}_S, \quad (40)$$

donde $\mathbb{1}_S$ es el operador identidad en \mathcal{H}_S . Para demostrarlo, vamos a partir de un mapa del tipo

$$\nu(A \otimes \mathbb{1}_E) = \text{Tr}_E [U(A \otimes \mathbb{1}_E)U^\dagger], \quad (41)$$

donde A es un operador cualquiera que actúa sobre \mathcal{H}_S , U es un operador que más tarde identificaremos con el producto del operador de evolución temporal por otro operador, y $\mathbb{1}_E$ es el operador identidad asociado a \mathcal{H}_E . Por definición de la traza parcial, podemos desarrollar la expresión anterior y obtener

$$\begin{aligned} \nu(A \otimes \mathbb{1}_E) &= \text{Tr}_E [U(A \otimes \mathbb{1}_E)U^\dagger] = \sum_{j,k} \sum_{\alpha} \langle \psi_j | \langle \phi_\alpha | \left(U(A \otimes \mathbb{1}_E)U^\dagger \right) | \psi_k \rangle | \phi_\alpha \rangle | \psi_j \rangle \langle \psi_k | \\ &= \sum_{j,k} \sum_{\alpha} \left(U(A \otimes \mathbb{1}_E)U^\dagger \right)_{j\alpha, k\alpha} | \psi_j \rangle \langle \psi_k |, \end{aligned} \quad (42)$$

donde $\{|\psi_j\rangle_S\}$ y $\{|\phi_\alpha\rangle_E\}$ son las bases ortonormales de los espacios \mathcal{H}_S y \mathcal{H}_E respectivamente, con $j, k = 1, 2, \dots, \dim(\mathcal{H}_S)$, $\alpha = 1, 2, \dots, \dim(\mathcal{H}_E)$. El elemento de matriz $\left(U(A \otimes \mathbb{1}_E)U^\dagger \right)_{j\alpha, k\alpha}$ lo podemos desarrollar más introduciendo la relación de cierre, de forma que nos queda

$$\begin{aligned} \left(U(A \otimes \mathbb{1}_E)U^\dagger \right)_{j\alpha, k\alpha} &= \langle \psi_j | \langle \phi_\alpha | \left(U(A \otimes \mathbb{1}_E)U^\dagger \right) | \psi_k \rangle | \phi_\alpha \rangle \\ &= \sum_{l,m} \sum_{\beta, \gamma} (U)_{j\alpha, l\beta} (A \otimes \mathbb{1}_E)_{l\beta, m\gamma} (U^\dagger)_{m\gamma, k\alpha}. \end{aligned} \quad (43)$$

El término $(A \otimes \mathbb{1}_E)_{l\beta, m\gamma}$ es

$$(A \otimes \mathbb{1}_E)_{l\beta, m\gamma} = \langle \psi_l | \langle \phi_\beta | (A \otimes \mathbb{1}_E) | \psi_m \rangle | \phi_\gamma \rangle = \langle \psi_l | A | \psi_m \rangle \langle \phi_\beta | \mathbb{1}_E | \phi_\gamma \rangle = (A)_{l,m} \delta_{\beta, \gamma}, \quad (44)$$

por lo que reescribimos (43) como

$$\sum_{l,m} \sum_{\beta, \gamma} (U)_{j\alpha, l\beta} (A \otimes \mathbb{1}_E)_{l\beta, m\gamma} (U^\dagger)_{m\gamma, k\alpha} = \sum_{l,m} \sum_{\beta} (U)_{j\alpha, l\beta} (A)_{l,m} (U^\dagger)_{m\beta, k\alpha}. \quad (45)$$

La suma en α del término $\left(U(A \otimes \mathbb{1}_E)U^\dagger \right)_{j\alpha, k\alpha}$ es

$$\sum_{\alpha} \left(U(A \otimes \mathbb{1}_E)U^\dagger \right)_{j\alpha, k\alpha} = \sum_{l,m} \sum_{\alpha, \beta} (U)_{j\alpha, l\beta} (A)_{l,m} (U^\dagger)_{m\beta, k\alpha}. \quad (46)$$

Ahora, definimos los siguientes operadores del espacio de operadores lineales en \mathcal{H}_S

$$K_{\alpha, \beta} \rightarrow (K_{\alpha, \beta})_{j,l} = (U)_{j\alpha, l\beta}. \quad (47)$$

Del mismo, modo, definimos

$$(U^\dagger)_{m\beta, k\alpha} = (U)_{k\alpha, m\beta}^* = (K_{\alpha, \beta})_{k, m}^* = \left(K_{\alpha, \beta}^\dagger\right)_{m, k}. \quad (48)$$

Sustituyendo esto en la ecuación (46), obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{l, m} \sum_{\alpha, \beta} (U)_{j\alpha, l\beta} (A)_{l, m} (U^\dagger)_{m\beta, k\alpha} &= \sum_{\alpha, \beta} \sum_{l, m} (K_{\alpha, \beta})_{j, l} (A)_{l, m} \left(K_{\alpha, \beta}^\dagger\right)_{m, k} \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \left(K_{\alpha, \beta} A K_{\alpha, \beta}^\dagger\right)_{j, k}. \end{aligned} \quad (49)$$

Utilizamos esto en la ecuación inicial (42) para finalmente llegar a

$$\nu(A \otimes \mathbb{1}_E) = \sum_{j, k} \sum_{\alpha, \beta} \left(K_{\alpha, \beta} A K_{\alpha, \beta}^\dagger\right)_{j, k} |\psi_j\rangle\langle\psi_k| = \sum_{\alpha, \beta} K_{\alpha, \beta} A K_{\alpha, \beta}^\dagger. \quad (50)$$

Vamos a transformar la ecuación (38) en una expresión del tipo (41). Debido a que los operadores densidad reducidos son definidos positivos, podemos tomar la raíz cuadrada de un operador densidad cualquiera como

$$\sqrt{\rho} = \sum_j \sqrt{p_j} |\Phi_j\rangle\langle\Phi_j|, \quad (51)$$

donde hemos utilizado la definición de operador densidad dada en (2). Así, el argumento de la traza se reescribe como

$$(\rho_S(t_0) \otimes \rho_E) = \left(\mathbb{1}_S \otimes \sqrt{\rho_E(t_0)}\right) (\rho_S(t_0) \otimes \mathbb{1}_E) \left(\mathbb{1}_S \otimes \sqrt{\rho_E(t_0)}\right). \quad (52)$$

Podemos definir el siguiente operador

$$\begin{aligned} W(t, t_0) &= U(t, t_0) \left(\mathbb{1}_S \otimes \sqrt{\rho_E(t_0)}\right); \\ W^\dagger(t, t_0) &= \left(\mathbb{1}_S \otimes \sqrt{\rho_E(t_0)}\right) U^\dagger(t, t_0), \end{aligned} \quad (53)$$

de forma que el mapa dinámico queda

$$\nu_{(t, t_0)} \rho_S(t_0) = \text{Tr}_E [W(t_0) (\rho_S(t_0) \otimes \mathbb{1}_E) W^\dagger(t, t_0)], \quad (54)$$

luego la expresión obtenida es equivalente a (41) como queríamos demostrar, teniendo final-

mente la expresión

$$\nu_{(t,t_0)}\rho_S(t_0) = \sum_{\alpha,\beta} K_{\alpha,\beta}(t,t_0)\rho_S(t_0)K_{\alpha,\beta}^\dagger(t,t_0). \quad (55)$$

Probemos ahora que, efectivamente, los operadores $K_{\alpha,\beta}(t,t_0)$ cumplen (40). Para ello vamos a sustituir los operadores $W(t,t_0)$ en un término j,l de la suma. Utilizando (47) y (48), obtenemos que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\alpha,\beta} K_{\alpha,\beta}^\dagger(t,t_0)K_{\alpha,\beta}(t,t_0) \right)_{j,l} &= \sum_{\alpha,\beta} \sum_m (K_{\alpha,\beta}^\dagger(t,t_0))_{j,m} (K_{\alpha,\beta}(t,t_0))_{m,l} \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \sum_m \left(\left(\mathbb{1}_S \otimes \sqrt{\rho_E(t_0)} \right) U^\dagger(t,t_0) \right)_{j\beta,m\alpha} \\ &\quad \left(U(t,t_0) \left(\mathbb{1}_S \otimes \sqrt{\rho_E(t_0)} \right) \right)_{m\alpha,l\beta} \\ &= \sum_{\beta} \left(\left(\mathbb{1}_S \otimes \sqrt{\rho_E(t_0)} \right) U^\dagger(t,t_0) U(t,t_0) \left(\mathbb{1}_S \otimes \sqrt{\rho_E(t_0)} \right) \right)_{j\beta,l\beta} \\ &= \sum_{\beta} (\mathbb{1}_S \otimes \rho_E(t_0))_{j\beta,l\beta} \\ &= \delta_{j,l} \sum_{\beta} (\rho_E(t_0))_{\beta,\beta} \\ &= \delta_{j,l} \text{Tr}[\rho_E] = 1, \end{aligned} \quad (56)$$

de donde se deduce que

$$\sum_{\alpha,\beta} K_{\alpha,\beta}^\dagger K_{\alpha,\beta} = \sum_{j,l} \left(\sum_{\alpha,\beta} K_{\alpha,\beta}^\dagger K_{\alpha,\beta} \right)_{j,l} |\psi_j\rangle\langle\psi_l| = \sum_{j,l} \delta_{j,l} |\psi_j\rangle\langle\psi_l| = \sum_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| = \mathbb{1}_S, \quad (57)$$

como queríamos demostrar. En el trabajo de Griffiths [2] se proporciona una visión más profunda de los operadores de Kraus.

Al poder descomponer el mapa dinámico en la forma de suma de operadores, el mapa cumple con las tres propiedades que definen a las operaciones cuánticas. Estas propiedades implican la existencia de una descomposición en suma de operadores y viceversa (ver el trabajo de Nielsen y Chuang [3] para una prueba):

- **P1.** El mapa $\nu_{(t,t_0)}$ debe conservar la traza en cualquier instante t para que $\nu_{(t,t_0)}\rho(t_0)$ sea un operador densidad válido, es decir, que cumpla que

$$\text{Tr}[\nu_{(t,t_0)}\rho(t_0)] = 1. \quad (58)$$

- **P2.** El mapa $\nu_{(t,t_0)}$ es linealmente convexo si, para una matriz densidad definida como $\rho(t_0) = \sum_k p_k \rho_k(t_0)$, con p_k probabilidades que cumplen $\sum_k p_k = 1$, tenemos que

$$\nu_{(t,t_0)} \left[\sum_k p_k \rho_k(t_0) \right] = \sum_k p_k \nu_{(t,t_0)} [\rho_k(t_0)]. \quad (59)$$

- **P3.** El mapa $\nu_{(t,t_0)}$ debe ser completamente positivo, lo que significa no solo que $\nu_{(t,t_0)} \rho_S(t_0)$ debe ser positivo para cualquier $\rho_S(t_0)$ positivo perteneciente a S , sino que además, en caso de introducir un nuevo espacio R , debe cumplirse que $(\mathbb{1} \otimes \nu_{(t,t_0)}) \rho_{RS}(t_0)$ debe ser positivo también para cualquier $\rho_{RS}(t_0)$ positivo perteneciente ahora al sistema compuesto RS .

Esto implica que el mapa dinámico definido en (38) es una operación cuántica. Si permitimos ahora que el instante t varíe, tenemos una familia monoparamétrica de mapas dinámicos $\{\nu_{(t,t_0)} | t \geq t_0\}$. Se plantea ahora la siguiente cuestión. Supongamos conocido el estado inicial tomado en (36). Si queremos conocer el estado en un instante t_1 , basta con utilizar la ecuación (34) para $t = t_1$. Para un instante $t = t_2$ se obtiene de manera idéntica. Sin embargo, si queremos conocer la evolución entre t_1 y t_2 surge un problema de concatenación de aplicaciones, pues generalmente la expresión

$$\nu_{(t_2,t_0)} = \nu_{(t_2,t_1)} \nu_{(t_1,t_0)} \quad (60)$$

no tiene por qué cumplirse. A esta expresión se le llama *condición de semigrupo* y tiene gran importancia a la hora de escribir las llamadas ecuaciones de Lindblad. Para una explicación más extensa sobre la condición de semigrupo se puede consultar el trabajo de Ángel Rivas [4]. Veamos por qué ocurre esto y cuándo será válida la relación anterior. La expresión para $\nu_{(t_2,t_1)}$ es

$$\nu_{(t_2,t_1)} \rho_S(t_1) = \text{Tr}_E [U(t_2, t_1) \rho_{SE}(t_1) U^\dagger(t_2, t_1)], \quad (61)$$

donde, a diferencia de las expresiones de $\nu_{(t_2,t_0)}$ y $\nu_{(t_1,t_0)}$, ahora no tenemos una expresión factorizada para $\rho_{SE}(t_1)$. Para el operador densidad en un instante de tiempo t cualquiera, definimos los operadores densidad reducidos como

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_E [\rho_{SE}(t)]; \quad (62)$$

$$\rho_E(t) = \text{Tr}_S [\rho_{SE}(t)]; \quad (63)$$

$$\delta\rho(t) = \rho_{SE}(t) - \rho_S(t) \otimes \rho_E(t), \quad (64)$$

donde hemos denominado $\delta\rho(t)$ a la diferencia entre el operador densidad total en t y el producto de los operadores densidad reducidos en t . Debido a que el sistema S está interaccionando con el entorno, este término por lo general será no nulo, y dará cuenta de las interacciones entre los mismos.

Para que se cumpla la condición de semigrupo, debemos hacer aproximaciones. Vamos a suponer en primer lugar que el operador densidad reducido del entorno $\rho_E(t)$ se mantiene invariante a lo largo del tiempo, de forma que tendremos que

$$\rho_E(t_0) = \rho_E(t) = \rho_E. \quad (65)$$

Normalmente, el entorno que vamos a considerar se suele modelar como un baño, por lo que el operador densidad reducido que describe al entorno apenas experimenta cambios debido a la interacción con el sistema. De esta forma, podemos tomar esta aproximación sin pérdida de generalidad.

Aún requerimos de otra aproximación para que se cumpla la condición de semigrupo. Para ello, vamos a considerar que el término $\delta\rho(t)$ definido en la ecuación (64) es despreciable para cualquier instante de tiempo t . Esto implica que el operador densidad total se puede tomar como un producto de sus operadores densidad reducidos para cualquier instante de tiempo. A esta aproximación se le conoce como aproximación de Markov [5], y podemos asumirla ya que, como se verá posteriormente, la escala de tiempo a la que se pierden las correlaciones es muy pequeña frente al tiempo en el que se considera que el sistema ha interactuado con el entorno. Es fácil ver que si se cumplen dichas aproximaciones, la condición de semigrupo (60) es válida ya que el estado del sistema está factorizado para cualquier instante de tiempo t

$$\rho_{SE}(t) = \rho_S(t) \otimes \rho_E, \quad (66)$$

por lo que $\rho_{SE}(t)$ es factorizable para cualquier instante t , y el mapa definido cumple la condición (60).

Los procesos cuánticos que cumplen todo lo anterior son los llamados procesos de Markov, y las ecuaciones que los rigen son las llamadas ecuaciones de tipo Lindblad. Para encontrar estas ecuaciones, tomemos el límite

$$\lim_{t_1 \rightarrow t^-} \frac{\rho_S(t) - \rho_S(t_1)}{t - t_1} = \lim_{t_1 \rightarrow t^-} \frac{\nu_{(t,t_1)} - \mathbb{1}}{t - t_1} \rho_S(t_1), \quad (67)$$

donde hemos hecho uso de la condición de semigrupo. El primer término lo podemos tomar como

la propia definición de derivada de la matriz densidad, mientras que en el segundo renombramos el límite como un nuevo súperoperador. Obtenemos finalmente la expresión

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{L}(t)\rho_S(t), \quad (68)$$

que nos definirá la conocida como *ecuación de Lindblad*. El operador $\mathcal{L}(t)$ se conoce como el generador del semigrupo y actúa sobre $\rho_S(t)$. El siguiente teorema nos proporciona la forma general que toma dicho súperoperador y define la ecuación maestra que se utiliza en muchos casos del formalismo de la decoherencia.

Teorema 1. *El generador del semigrupo $\mathcal{L}(t)$ se puede expresar de forma general en la llamada forma de Lindblad*

$$\mathcal{L}(t)\rho_S(t) = -\frac{i}{\hbar}[H(t), \rho_S(t)] + \sum_{k=1}^{N^2-1} \gamma_k(t) \left(L_k(t)\rho_S(t)L_k^\dagger(t) - \frac{1}{2}\{L_k^\dagger(t)L_k(t), \rho_S(t)\} \right) \quad (69)$$

donde el conmutador representa la evolución unitaria debido al hamiltoniano $H(t)$ (no es necesariamente el mismo hamiltoniano del sistema, sino que puede haber sido renormalizado), los operadores $L_k(t)$ son los llamados operadores de Lindblad y los coeficientes $\gamma_k(t)$ satisfacen que $\gamma_k(t) \geq 0$ para todo k y para cualquier instante t cuyas dimensiones son $[\gamma_k] = T^{-1}$ si se toman los operadores de Lindblad adimensionales.

Demostración. La demostración formal de esta ecuación es compleja y se aleja del objetivo de este trabajo. Una demostración general se puede encontrar en el trabajo de Ángel Rivas [4]. A su vez, una demostración más sencilla extraída de libro de Breuer y Petruccione [5], suponiendo el operador $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}$ independiente del tiempo se incluye en el Apéndice A. \square

3. Decoherencia cuántica

En esta sección introduciremos la teoría de la decoherencia cuántica y la definición formal de este fenómeno físico. En teoría de sistemas cuánticos abiertos hemos estudiado un sistema total SE cerrado compuesto por nuestro subsistema de interés S en contacto con el entorno E que lo rodea. Al trazar sobre los grados de libertad de E, se observa que un cierto conjunto de estados del espacio de Hilbert del sistema S presentan propiedades robustas en el tiempo, mientras que las superposiciones de estos estados desaparecen muy rápidamente con el tiempo. A este proceso de la destrucción de las coherencias cuánticas lo llamamos decoherencia.

Formalmente veamos cómo definir este proceso. Partimos de un hamiltoniano del sistema total SE de la forma

$$H_{SE} = H_S + H_E + H_I = H_0 + H_I, \quad (70)$$

donde el hamiltoniano inicial $H_0 = H_S + H_E$ representa la suma de los hamiltonianos del sistema y el entorno y el hamiltoniano de interacción H_I toma la forma

$$H_I = \sum_n |n\rangle\langle n| \otimes E_n. \quad (71)$$

Aquí $|n\rangle$ es un conjunto específico de estados ortonormales que forma una base de \mathcal{H}_S , mientras que E_n son operadores arbitrarios hermíticos que actúan sobre \mathcal{H}_E . También asumiremos que el hamiltoniano total conmuta con los proyectores $\Pi_n = |n\rangle\langle n| \otimes \mathbb{1}_E$, de forma que

$$[H_{SE}, \Pi_n] = [H_0, \Pi_n] = [H_S, \Pi_n] + [H_E, \Pi_n] = 0, \quad (72)$$

donde hemos utilizado que $[H_E, \Pi_n] = 0$ (es inmediato a partir de la definición de Π_n). Esto implica que los operadores Π_n representan cantidades conservadas, y, por tanto, la energía media del sistema S es constante en el tiempo

$$\frac{d\langle H_S(t) \rangle}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \langle [H_S(t), H_{SE}(t)] \rangle = 0. \quad (73)$$

Podemos ver que esto es cierto ya que, en la imagen de Heisenberg, se comprueba que

$$[H_S(t), H_{SE}(t)] = [H_S(t), H_0(t)] + [H_S(t), H_I(t)] = \left[H_S(t), \sum_n \Pi_n(t) \otimes E_n(t) \right] = 0. \quad (74)$$

El conmutador $[H_S(t), H_0(t)]$ es trivialmente cero para el mismo instante t , mientras que el conmutador $[H_S(t), H_I(t)]$ es nulo debido a que hemos asumido que $H_S(t)$ conmuta con los pro-

vectores $\Pi_n(t)$ en el mismo instante t . Debido a que las imágenes de Heisenberg y de Schrödinger deben proporcionar los mismos resultados, esta propiedad se mantiene para todo instante t .

En adelante, trabajaremos en la imagen de interacción. Representando ahora H_I en dicha imagen llegamos a que

$$\begin{aligned} H_I(t) &= e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} H_I e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} = \sum_n e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} \Pi_n e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} \otimes e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} E_n e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} \\ &= \sum_n \Pi_n \otimes E_n(t), \end{aligned} \quad (75)$$

con $E_n(t) = e^{iH_E(t-t_0)/\hbar} E_n e^{-iH_E(t-t_0)/\hbar}$. Es evidente que los proyectores Π_n no cambian ya que conmutan con H_0 y, consecuentemente, con H_S . El operador de evolución en la imagen de interacción a su vez se puede expresar como el operador de evolución usual mencionado en la ecuación (31) sustituyendo el hamiltoniano por el hamiltoniano de interacción

$$U(t, t_0) = \mathcal{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \sum_n \int_{t_0}^t ds (\Pi_n \otimes E_n(s)) \right]. \quad (76)$$

Ya que el hamiltoniano conmuta con los proyectores, la dinámica de los estados $|n\rangle$ no se ve afectada por el entorno, y, por tanto, la evolución para un estado $|\Phi(t_0)\rangle$ será del tipo

$$|\Phi(t_0)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \otimes |\phi_n(t_0)\rangle \rightarrow |\Phi(t)\rangle = U(t, t_0) |\Phi(t_0)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \otimes |\phi_n(t)\rangle, \quad (77)$$

donde el estado $|\phi_n(t)\rangle$ lo podemos expresar en función del operador de evolución temporal que actúa sobre el espacio \mathcal{H}_E . Si definimos

$$I_n(t) = \Pi_n \otimes E_n(t), \quad (78)$$

entonces para n, n' tenemos que el operador conmuta consigo mismo

$$\begin{aligned} I_{n'}(t) I_n(t) &= \Pi_{n'} \Pi_n \otimes E_{n'}(t) E_n(t) = \delta_{n,n'} \Pi_{n',n} \otimes E_{n'}(t) E_n(t) = \Pi_n \otimes E_n^2(t); \\ I_n(t) I_{n'}(t) &= \Pi_n \Pi_{n'} \otimes E_n(t) E_{n'}(t) = \Pi_n \otimes E_n^2(t); \\ I_{n'}(t) I_n(t) &= I_n(t) I_{n'}(t) \rightarrow [I_{n'}(t), I_n(t)] = 0. \end{aligned} \quad (79)$$

Como $I_n(t)$ conmuta consigo mismo para todo n, n' , tenemos que el operador de evolución

temporal lo podemos factorizar de la forma

$$\begin{aligned}
U(t, t_0) &= \mathcal{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \sum_n \int_{t_0}^t ds (\Pi_n \otimes E_n(s)) \right] \\
&= \mathcal{T} \prod_n \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \left(\int_{t_0}^t ds \Pi_n \otimes E_n(s) \right) \right].
\end{aligned} \tag{80}$$

La exponencial de cada término se puede desarrollar en serie para obtener

$$\begin{aligned}
\exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t ds (\Pi_n \otimes E_n(s)) \right] &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-i)^j}{\hbar^j j!} \left(\Pi_n \otimes \int_{t_0}^t ds E_n(s) \right)^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\Pi_n^j \otimes \frac{\left(\int_{t_0}^t ds E_n(s) \right)^j}{\hbar^j j!} \right] \\
&= \mathbb{1} + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\Pi_n^j \otimes \frac{\left(\int_{t_0}^t ds E_n(s) \right)^j}{\hbar^j j!} \right] \\
&= \mathbb{1} + \Pi_n \otimes \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-i)^j \left(\int_{t_0}^t ds E_n(s) \right)^j}{\hbar^j j!} \\
&= \mathbb{1} + \Pi_n \otimes \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t ds E_n(s) \right) - \mathbb{1}_E \right] \\
&= \mathbb{1} - \Pi_n \otimes \mathbb{1}_E + \Pi_n \otimes \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t ds E_n(s) \right],
\end{aligned} \tag{81}$$

donde nos hemos valido de la propiedad asociativa respecto a la multiplicación escalar del producto tensorial y de la propiedad de los proyectores

$$\Pi_n^j = \Pi_n \quad \forall j > 0. \tag{82}$$

La demostración de esta propiedad es trivial por la definición de Π_n . De esta forma, la evolución para un estado $|\phi_n(t)\rangle$ perteneciente a \mathcal{H}_E viene dada por el término exponencial y la podemos escribir como

$$|\phi_n(t)\rangle = \mathcal{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t ds E_n(s) \right] |\phi_n(t_0)\rangle \equiv V_n(t, t_0) |\phi_n(t)\rangle, \tag{83}$$

donde hemos definido el operador unitario $V_n(t, t_0)$ (se comprueba que es unitario recordando que los operadores $E_n(s)$ son hermíticos). El resultado es que $|\Phi(t)\rangle$ es un estado cuántico entrelazado representado por la superposición de estados $|\Phi(t)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \otimes |\phi_n(t)\rangle$. Estas su-

perposiciones contienen toda la información del estado del sistema, y además están compuestas por combinaciones de todos los posibles estados $|n\rangle$ del sistema S presentes en el estado inicial $|\Phi(t_0)\rangle$. Esto significa que la coherencia se mantiene al deducir el operador densidad reducido

$$\begin{aligned}\rho_S(t) &= \text{Tr}_E [|\Phi(t)\rangle\langle\Phi(t)|] = \text{Tr}_E \left[\sum_{n,m} c_n c_m^* |n\rangle\langle m| \otimes |\phi_n(t)\rangle\langle\phi_m(t)| \right] \\ &= \sum_{n,m} c_n c_m^* |n\rangle\langle m| \langle\phi_n(t)|\phi_m(t)\rangle.\end{aligned}\quad (84)$$

Por unitariedad $\langle\phi_n(t)|\phi_n(t)\rangle = 1$, por lo que es fácil ver que los elementos diagonales del operador densidad reducido son constantes en el tiempo. Para los elementos no diagonales $\langle n|\rho_S(t)|m\rangle$, tenemos que su dependencia vendrá dada por el solapamiento entre los estados n y m del entorno, que expresaremos como

$$|\langle\phi_n(t)|\phi_m(t)\rangle| = e^{\Gamma_{n,m}(t)},\quad (85)$$

tomando el módulo para que el argumento de la exponencial sea real. A la función $\Gamma_{n,m}(t)$ la llamaremos la *función de decoherencia*, y es fácil ver que cumple que $\Gamma_{n,m}(t) \leq 0$, ya que $\langle\phi_n(t)|\phi_m(t)\rangle$ simboliza el solapamiento entre dos estados normalizados cualesquiera del entorno E, por lo que, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que

$$\langle\phi_n(t)|\phi_m(t)\rangle \leq \langle\phi_n(t)|\phi_n(t)\rangle^{1/2} \langle\phi_m(t)|\phi_m(t)\rangle^{1/2} = 1,\quad (86)$$

lo que implica que el argumento de la exponencial debe ser menor o igual que cero (será igual a cero cuando $n = m$). Para el caso en que $n \neq m$, esta función nos describirá el comportamiento de las componentes no diagonales del operador densidad reducido.

Para obtener la forma específica de esta función, hay que estudiar el sistema específico en detalle, ya que la dependencia temporal de dicha función cambia según los parámetros del sistema estudiado, el acoplo entre sistema y entorno, etc. De forma general para muchos sistemas físicos tendremos que la interacción lleva a una rápida disminución del solapamiento entre estados cuando $n \neq m$. En el caso de tiempos largos $t \gg \tau_D$, donde τ_D será el tiempo de decoherencia (que nos proporcionará una escala de tiempo en la que actúa la decoherencia), tendremos el caso extremo

$$\langle\phi_n(t)|\phi_m(t)\rangle = \delta_{nm},\quad (87)$$

por lo que la expresión del operador densidad reducido pasa a ser

$$\rho_S(t) \rightarrow \sum_{n,m} c_n c_m^* |n\rangle\langle m| \delta_{nm} = \sum_n |c_n|^2 |n\rangle\langle n|. \quad (88)$$

En esta representación han desaparecido las correlaciones debido a la interacción del sistema con el entorno. Esta mezcla de estados es “incoherente” ya que los términos de interferencia $\langle m|A|n\rangle$ no aparecen en el valor esperado de ningún observable A con $n \neq m$. Esto significa que las superposiciones de estados $|n\rangle$ son destruidas y no se pueden observar a través de medidas sobre S . Es a esta transición observada en (88) a lo que llamamos formalmente decoherencia inducida por el entorno, siendo el ejemplo planteado el caso más puro de decoherencia. Este tipo de decoherencia se caracteriza por destruir la coherencia cuántica sin que se dé un decaimiento de las poblaciones.

La ecuación (88) implica que el operador densidad reducido se diagonaliza para un conjunto de estados específicos $\{|n\rangle\}$, que no se verán afectados por la decoherencia. Nos referiremos a esta base como la base “preferida” por el sistema, y vendrá determinada por la interacción entre sistema y entorno. Si ahora partimos de los mapas dinámicos conocidos, y de la condición inicial dada en (36) con $\rho_S(t_0) = |\psi(t_0)\rangle\langle\psi(t_0)|$, entonces podemos expresar $|\psi(t_0)\rangle$ en la base de estados preferida

$$|\psi(t_0)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle, \quad (89)$$

y expresamos la condición inicial como

$$\rho_{SE}(t_0) = |\psi(t_0)\rangle\langle\psi(t_0)| \otimes \rho_E(t_0) = \sum_{n,m} |n\rangle\langle m| \otimes \rho_E(t_0). \quad (90)$$

En este caso, la matriz densidad reducida viene dada por la expresión conocida

$$\begin{aligned} \rho_S(t) &= \text{Tr}_E [U(t, t_0) \rho_{SE}(t_0) U^\dagger(t, t_0)] = \text{Tr}_E \left[U(t, t_0) \left(\sum_{n,m} c_n c_m^* |n\rangle\langle m| \otimes \rho_E(t_0) \right) U^\dagger(t, t_0) \right] \\ &= \sum_{n,m} c_n c_m^* \text{Tr}_E \left[U(t, t_0) (|n\rangle\langle m| \otimes \mathbb{1}_E) (\mathbb{1}_S \otimes \rho_E(t_0)) U^\dagger(t, t_0) \right] \\ &= \sum_{n,m} c_n c_m^* \text{Tr}_E \left[(|n\rangle\langle m| \otimes \mathbb{1}_E) U(t, t_0) (\mathbb{1}_S \otimes \rho_E(t_0)) U^\dagger(t, t_0) \right] \\ &= \sum_{n,m} c_n c_m^* |n\rangle\langle m| \text{Tr}_E [U(t, t_0) (\mathbb{1}_S \otimes \rho_E(t_0)) U^\dagger(t, t_0)] \\ &= \sum_{n,m} c_n c_m^* |n\rangle\langle m| \text{Tr} [V_n(t, t_0) \rho_E(t_0) V_m^\dagger(t, t_0)]. \end{aligned} \quad (91)$$

Sabiendo que $\rho_E(t_0)$ lo podemos escribir de forma general como $\rho_E(t_0) = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} |\phi_{\alpha}(t_0)\rangle\langle\phi_{\alpha}(t_0)|$, siendo $\{|\phi_{\alpha}(t_0)\rangle\}$ un colectivo de estados no necesariamente ortogonales pertenecientes a \mathcal{H}_E , y utilizando la definición de traza, el término $\text{Tr} [V_n(t)\rho_E(0)V_m^{\dagger}(t)]$ se puede expresar como

$$\begin{aligned}
\text{Tr} [V_n(t, t_0)\rho_E(t_0)V_m^{\dagger}(t, t_0)] &= \text{Tr} \left[V_n(t, t_0) \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} |\phi_{\alpha}(t_0)\rangle\langle\phi_{\alpha}(t_0)| V_m^{\dagger}(t, t_0) \right] \\
&= \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \text{Tr} [V_m^{\dagger}(t, t_0)V_n(t, t_0) |\phi_{\alpha}(t_0)\rangle\langle\phi_{\alpha}(t_0)|] \\
&= \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \langle\phi_{\alpha}(t_0)|V_m^{\dagger}(t, t_0)V_n(t, t_0)|\phi_{\alpha}(t_0)\rangle \\
&= \langle V_m^{\dagger}(t, t_0)V_n(t, t_0)\rangle.
\end{aligned} \tag{92}$$

De aquí podemos obtener que la función de decoherencia será

$$|\langle V_m^{\dagger}(t, t_0)V_n(t, t_0)\rangle| = e^{\Gamma_{n,m}(t, t_0)} \rightarrow \Gamma_{n,m}(t, t_0) = \ln |\langle V_m^{\dagger}(t, t_0)V_n(t, t_0)\rangle|, \tag{93}$$

donde $\langle V_m^{\dagger}(t, t_0)V_n(t, t_0)\rangle$ es el valor esperado respecto al operador densidad reducido $\rho_E(t_0)$ inicial. De esta forma, hemos obtenido de forma analítica una expresión general para el decaimiento de los términos no diagonales en los sistemas descritos.

4. Modelo espín-bosón

Estudiamos ahora un modelo particular que ilustra a la perfección este tipo de decoherencia, el llamado modelo espín-bosón. De forma general, en esta representación tomamos un sistema de estudio S que consta de dos niveles, lo que conocemos como un cúbit, acoplado a un entorno E consistente en un baño de osciladores armónicos. Los dos niveles del sistema los podemos tomar como las dos proyecciones de espín de un fermión de espín $1/2$, mientras que el entorno de osciladores armónicos podemos entenderlo como un baño de bosones en su representación de segunda cuantización. El hamiltoniano que describe a un sistema de estas características como ya vimos es

$$H_{SE} = H_S + H_E + H_I = H_0 + H_I, \quad (94)$$

donde los distintos hamiltonianos son

$$H_S = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z, \quad (95)$$

$$H_E = \sum_k \left(\frac{p_k^2}{2m_k} + \frac{1}{2}m_k\omega_k^2 q_k^2 \right), \quad (96)$$

$$H_I = \sum_k \sigma_z \otimes (g_k a_k^\dagger + g_k^* a_k). \quad (97)$$

Analicemos con más detalle estos hamiltonianos. El término ω_0 representa la distancia entre los dos estados del cúbit, a los que llamaremos $|0\rangle$ (estado fundamental) y $|1\rangle$ (estado excitado). Podemos definir una base de vectores estado utilizando σ_z tomando que

$$\sigma_z |0\rangle = -|0\rangle, \quad \sigma_z |1\rangle = +|1\rangle, \quad (98)$$

de donde deducimos que

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (99)$$

Hemos utilizado como σ_z la matriz de Pauli usual. El hamiltoniano del entorno es el hamiltoniano usual para una serie de osciladores armónicos acoplados, con p_k y q_k los operadores asociados a los momentos y las coordenadas generalizadas respectivamente, que cumplen la relación de conmutación

$$[p_k, q_{k'}] = i\hbar\mathbb{1}\delta_{k,k'}. \quad (100)$$

A su vez, m_k son las masas de los osciladores y ω_k sus frecuencias. Este hamiltoniano lo podemos cuantizar de la siguiente forma. Llamaremos a los siguientes términos

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m_k \omega_k}{\hbar}} q_k + i \frac{p_k}{\sqrt{m_k \hbar \omega_k}} \right), \quad (101)$$

$$a_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m_k \omega_k}{\hbar}} q_k - i \frac{p_k}{\sqrt{m_k \hbar \omega_k}} \right). \quad (102)$$

Estos operadores son conocidos como los operadores bosónicos de creación y aniquilación, y cumplen

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'} \mathbb{1}. \quad (103)$$

La demostración de (103) es inmediata a partir de las definiciones de los operadores y de la propiedad (100). Despejando de las definiciones (101) y (102) podemos obtener las coordenadas p_k y q_k en función de estos operadores

$$q_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2m_k \omega_k}} (a_k^\dagger + a_k), \quad (104)$$

$$p_k = i \sqrt{\frac{m_k \hbar \omega_k}{2}} (a_k^\dagger - a_k). \quad (105)$$

Por lo que podemos reescribir el hamiltoniano H_E como

$$\begin{aligned} H_E &= \sum_k \left[\frac{\left(i \sqrt{\frac{m_k \hbar \omega_k}{2}} (a_k^\dagger - a_k) \right)^2}{2m_k} + \frac{1}{2} m_k \omega_k^2 \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m_k \omega_k}} (a_k^\dagger + a_k) \right)^2 \right] \\ &= \sum_k \left[-\frac{\hbar \omega_k}{4} (a_k^\dagger - a_k)^2 + \left(\frac{\hbar \omega_k}{4} (a_k^\dagger + a_k)^2 \right) \right] \\ &= \sum_k \frac{\hbar \omega_k}{4} \left[(a_k^\dagger + a_k)^2 - (a_k^\dagger - a_k)^2 \right] \\ &= \sum_k \hbar \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{\mathbb{1}}{2} \right). \end{aligned} \quad (106)$$

Al término $\sum_k \frac{\hbar \omega_k}{2}$ se le conoce como energía del vacío, y como solo modifica el origen de energía, puede ser despreciado sin pérdida de generalidad.

Por último, tenemos que el hamiltoniano de interacción elegido está factorizado, donde los operadores a_k y a_k^\dagger son los vistos anteriormente y las constantes g_k son escalares que dan cuenta del acoplo entre el sistema y el baño.

Es sencillo ver que este hamiltoniano no solo es de la forma descrita en la ecuación (70), sino que además el hamiltoniano total conmuta con el término del hamiltoniano de interacción que actúa sobre el cúbit S

$$[H_{SE}, \sigma_z] = [H_S, \sigma_z] = \left[\frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z, \sigma_z \right] = 0, \quad (107)$$

por lo que nos encontramos con las condiciones descritas en el apartado anterior. Siguiendo los pasos anteriores, calculamos ahora H_I en la imagen de interacción

$$\begin{aligned} H_I &= e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} H_I e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} \\ &= \sum_k e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} \left(\sigma_z \otimes \left(g_k a_k^\dagger + g_k^* a_k \right) \right) e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} \\ &= \sum_k e^{\frac{i}{2}\omega_0\sigma_z(t-t_0)} \sigma_z e^{-\frac{i}{2}\omega_0\sigma_z(t-t_0)} \otimes e^{i\omega_k a_k^\dagger a_k(t-t_0)} \left(g_k a_k^\dagger + g_k^* a_k \right) e^{-i\omega_k a_k^\dagger a_k(t-t_0)} \\ &= \sum_k \sigma_z \otimes e^{i\omega_k a_k^\dagger a_k(t-t_0)} \left(g_k a_k^\dagger + g_k^* a_k \right) e^{-i\omega_k a_k^\dagger a_k(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (108)$$

El segundo término lo podemos reexpresar definiendo los siguientes operadores

$$a_k(t, t_0) = e^{i\omega_k a_k^\dagger a_k(t-t_0)} a_k e^{-i\omega_k a_k^\dagger a_k(t-t_0)}; \quad a_k^\dagger(t, t_0) = e^{i\omega_k a_k^\dagger a_k(t-t_0)} a_k^\dagger e^{-i\omega_k a_k^\dagger a_k(t-t_0)}. \quad (109)$$

Si derivamos por ejemplo el término $a_k(t, t_0)$ ocurre que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [a_k(t, t_0)] &= i\omega_k e^{i\omega_k a_k^\dagger a_k(t-t_0)} a_k^\dagger a_k a_k e^{-i\omega_k a_k^\dagger a_k(t-t_0)} + (-i\omega_k) e^{i\omega_k a_k^\dagger a_k(t-t_0)} a_k a_k^\dagger a_k e^{-i\omega_k a_k^\dagger a_k(t-t_0)} \\ &= i\omega_k e^{i\omega_k a_k^\dagger a_k(t-t_0)} \left[a_k^\dagger a_k, a_k \right] e^{-i\omega_k a_k^\dagger a_k(t-t_0)} \\ &= -i\omega_k e^{i\omega_k a_k^\dagger a_k(t-t_0)} a_k e^{-i\omega_k a_k^\dagger a_k(t-t_0)} \\ &= -i\omega_k a_k(t, t_0), \end{aligned} \quad (110)$$

donde hemos utilizado que el conmutador $\left[a_k^\dagger a_k, a_k \right]$ es igual a $-a_k$ (la demostración es trivial usando la propiedad (103)). Del mismo modo, obtenemos para el término $a_k^\dagger(t, t_0)$ una ecuación diferencial del tipo

$$\frac{d}{dt} \left[a_k^\dagger(t, t_0) \right] = i\omega_k a_k^\dagger(t, t_0), \quad (111)$$

y al resolver ambas obtenemos que

$$a_k(t, t_0) = a_k e^{-i\omega_k(t-t_0)}; \quad a_k^\dagger(t, t_0) = a_k^\dagger e^{i\omega_k(t-t_0)}, \quad (112)$$

de forma que la expresión (108) se reescribe como

$$\begin{aligned}
H_I(t) &= e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} H_I e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} = \sum_k \sigma_z \otimes e^{i\omega_k a_k^\dagger a_k (t-t_0)} \left(g_k a_k^\dagger + g_k^* a_k \right) e^{-i\omega_k a_k^\dagger a_k (t-t_0)} \\
&= \sum_k \sigma_z \otimes \left(g_k a_k^\dagger e^{i\omega_k (t-t_0)} + g_k^* a_k e^{-i\omega_k (t-t_0)} \right). \tag{113}
\end{aligned}$$

A su vez, el operador de evolución temporal en la imagen de interacción tiene la forma

$$\begin{aligned}
U(t, t_0) &= \mathcal{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t ds H_I(s) \right] \\
&= \mathcal{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t ds \sum_k \sigma_z \otimes \left(g_k a_k^\dagger e^{i\omega_k (s-t_0)} + g_k^* a_k e^{-i\omega_k (s-t_0)} \right) \right] \\
&= \mathcal{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \sum_k \sigma_z \otimes \left(g_k a_k^\dagger \frac{e^{i\omega_k (s-t_0)}}{i\omega_k} - g_k^* a_k \frac{e^{-i\omega_k (s-t_0)}}{i\omega_k} \right) \Big|_{t_0}^t \right] \\
&= \mathcal{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \sum_k \sigma_z \otimes \frac{1}{i\omega_k} \left(g_k a_k^\dagger e^{i\omega_k (t-t_0)} - g_k a_k^\dagger - g_k^* a_k e^{-i\omega_k (t-t_0)} + g_k^* a_k \right) \right] \\
&= \mathcal{T} \exp \left[\sigma_z \otimes \sum_k \frac{1}{2} \left(\alpha_k a_k^\dagger - \alpha_k^* a_k \right) \right], \tag{114}
\end{aligned}$$

donde hemos simplificado y reescrito en términos de la constante α_k definida como

$$\alpha_k = 2g_k \frac{1 - e^{i\omega_k (t-t_0)}}{\hbar\omega_k}. \tag{115}$$

En el caso del hamiltoniano de interacción $H_I(t)$, vemos que no conmuta consigo mismo en otro instante de tiempo t' ya que

$$\begin{aligned}
[H_I(t), H_I(t')] &= \sum_k (\sigma_z)^2 \otimes \left(g_k a_k^\dagger e^{i\omega_k t} + g_k^* a_k e^{-i\omega_k t} \right) \left(g_k a_k^\dagger e^{i\omega_k t'} + g_k^* a_k e^{-i\omega_k t'} \right) \\
&\quad - \sum_k (\sigma_z)^2 \otimes \left(g_k a_k^\dagger e^{i\omega_k t'} + g_k^* a_k e^{-i\omega_k t'} \right) \left(g_k a_k^\dagger e^{i\omega_k t} + g_k^* a_k e^{-i\omega_k t} \right) \\
&= \sum_k (\sigma_z)^2 \otimes \left[g_k g_k a_k^\dagger a_k^\dagger e^{i(\omega_k t + \omega_k t')} + g_k^* g_k^* a_k a_k e^{-i(\omega_k t + \omega_k t')} \right. \\
&\quad \left. + |g_k|^2 a_k^\dagger a_k e^{i(\omega_k t - \omega_k t')} + |g_k|^2 a_k a_k^\dagger e^{-i(\omega_k t - \omega_k t')} \right] \\
&\quad - \sum_k (\sigma_z)^2 \otimes \left[g_k g_k a_k^\dagger a_k^\dagger e^{i(\omega_k t' + \omega_k t)} + g_k^* g_k^* a_k a_k e^{-i(\omega_k t' + \omega_k t)} \right. \\
&\quad \left. + |g_k|^2 a_k^\dagger a_k e^{i(\omega_k t' - \omega_k t)} + |g_k|^2 a_k a_k^\dagger e^{-i(\omega_k t' - \omega_k t)} \right]. \tag{116}
\end{aligned}$$

Utilizando la propiedad de conmutación de los operadores de creación y destrucción y simpli-

ficando, obtenemos que

$$\begin{aligned}
[H_I(t), H_I(t')] &= \sum_k |g_k|^2 e^{i(\omega_k t - \omega_k t')} [a_k^\dagger, a_k] + |g_k|^2 e^{-i(\omega_k t - \omega_k t')} [a_k, a_k^\dagger] \\
&= \sum_k -|g_k|^2 \left[e^{i(\omega_k t - \omega_k t')} - e^{-i(\omega_k t - \omega_k t')} \right] \mathbb{1} \\
&= \sum_k -2i |g_k|^2 \sin(\omega_k(t - t')) \mathbb{1}.
\end{aligned} \tag{117}$$

Vamos a renombrar el último término como

$$\sum_k -2i |g_k|^2 \sin(\omega_k(t - t')) \equiv -2i\gamma(t - t'). \tag{118}$$

Analicemos ahora el operador de evolución temporal para el caso en el que nos encontramos, donde $H_I(t)$ y $H_I(t')$ no conmutan entre sí, pero conmutan con el conmutador de ambos. Para ello vamos a seguir la demostración utilizada en el trabajo de H. E. Haber [6]. Ahora vamos a dividir el intervalo de tiempo entre t_0 y t en N intervalos de longitud ϵ de forma que

$$\epsilon \equiv \frac{t - t_0}{N}. \tag{119}$$

Aplicando la propiedad (21), el operador de evolución se expresa como el producto de N operadores de evolución

$$U(t, t_0) = \prod_{k=1}^N U(t_0 + k\epsilon, t_0 + (k-1)\epsilon). \tag{120}$$

Si dividimos en pequeñas sumas la exponencial en (31), podemos expresarla como

$$\begin{aligned}
U(t, t_0) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \prod_{k=0}^N \exp\left(-\frac{i\epsilon}{\hbar} H_I(t_0 + (k-1)\epsilon)\right) \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{i\epsilon}{\hbar} H_I(t_0)\right) \exp\left(-\frac{i\epsilon}{\hbar} H_I(t_0 + \epsilon)\right) \dots \exp\left(-\frac{i\epsilon}{\hbar} H_I(t - \epsilon)\right).
\end{aligned} \tag{121}$$

Para ver el desarrollo anterior en detalle se recomienda leer el trabajo de H. E. Haber [6]. Para realizar esta operación, debemos usar la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff para dos operadores que no conmutan entre sí (ver el trabajo de Ángel Rivas [7] para un tratamiento más extensivo)

$$\exp A \exp B = \exp \left[A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}([A, [A, B]] - [B, [A, B]]) + \dots \right], \tag{122}$$

donde todos los términos restantes contienen un conmutador $[A, [A, B]]$ o $[B, [A, B]]$. Particularizada para nuestro caso, la fórmula queda

$$\exp H_I(t) \exp H_I(t') = \exp \left[H_I(t) + H_I(t') + \frac{1}{2} [H_I(t), H_I(t')] \right], \quad (123)$$

ya que el resto de términos se anulan, puesto que $[H_I(t), [H_I(t), H_I(t')]]$ y $[H_I(t'), [H_I(t), H_I(t')]]$ son trivialmente nulos. La expresión (121) se transforma entonces en

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \prod_{k=0}^N \exp \left(-\frac{i\epsilon}{\hbar} H_I(t_0 + (k-1)\epsilon) \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \exp \left(-\frac{\epsilon}{2\hbar^2} \sum_{k,k'=0}^{N-1} [H_I(t_0 + k\epsilon), H_I(t_0 + k'\epsilon)] \right) \exp \left(-\frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{k=0}^{N-1} H_I(t_0 + k\epsilon) \right) \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2\hbar^2} \int_{t_0}^t ds \int_{t_0}^t ds' [H_I(s), H_I(s')] \right] \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t ds H_I(s) \right]. \end{aligned} \quad (124)$$

Utilizando el súperoperador \mathcal{T} finalmente obtenemos la siguiente expresión para el operador de evolución temporal

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= \exp \left[-\frac{1}{2\hbar^2} \int_{t_0}^t ds \int_{t_0}^t ds' [H_I(s), H_I(s')] \theta(s-s') \right] \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t ds H_I(t) \right] \\ &= \exp \left[\frac{i}{\hbar^2} \int_{t_0}^t ds \int_{t_0}^t ds' \gamma(s-s') \theta(s-s') \mathbb{1} \right] \exp \left[\sigma_z \otimes \sum_k \left(\frac{1}{2} \alpha_k a_k^\dagger - \alpha_k^* a_k \right) \right]. \end{aligned} \quad (125)$$

A este último término exponencial lo llamaremos $V(t, t_0)$, y cumple las mismas propiedades que la transformación definida en (83). De esta forma, excepto por un factor de fase dependiente del tiempo, tenemos la evolución del sistema total bien definida según el operador de evolución descrito

$$U(t, t_0) = e^{i\varphi(t, t_0)} V(t, t_0). \quad (126)$$

Partimos ahora entonces de la condición inicial usual

$$\rho_{\text{SE}}(t_0) = \rho_{\text{S}}(t_0) \otimes \rho_{\text{E}}, \quad \rho_{\text{E}} = \frac{1}{Z_{\text{E}}} e^{-\frac{H_{\text{E}}}{k_B T}}, \quad (127)$$

donde Z_{E} es la función de partición del baño. Hemos usado la descripción del colectivo canónico para el operador densidad reducido del baño. Más detalles sobre el uso del colectivo canónico para obtener una expresión del operador densidad se incluyen en el trabajo de Gerasimenko [8]. Utilizando el resultado (91), vemos que el operador densidad reducido del sistema se puede

expresar como

$$\begin{aligned}\rho_S(t) &= \text{Tr}_E [U(t, t_0)\rho_{SE}(t_0)U^\dagger(t, t_0)] \\ &= \text{Tr}_E [e^{i\varphi(t, t_0)}V(t, t_0)(\rho_S(t_0) \otimes \rho_E)e^{-i\varphi(t, t_0)}V^\dagger(t, t_0)].\end{aligned}\quad (128)$$

Para los términos de la matriz reducida, seguimos el mismo procedimiento que en las ecuaciones (91) y (92) de forma que los términos diagonales son de la forma

$$\rho_{Sii}(t) = \langle i|\rho_S(t_0) \text{Tr} [V_i^\dagger(t, t_0)V_i(t, t_0)\rho_E]|i\rangle = \langle i|\rho_S(t_0)|i\rangle = \rho_{Sii}(t_0), \quad (129)$$

ya que la traza de $V_i^\dagger(t, t_0)V_i(t, t_0)$ es 1. Para los términos no diagonales, no obstante, tenemos que

$$\rho_{Sij}(t) = \rho_{Sji}^*(t) = \rho_{Sij}(t_0) \left\langle V_j^\dagger(t, t_0)V_i(t, t_0) \right\rangle = \rho_{Sij}(t_0)e^{\Gamma(t, t_0)}, \quad (130)$$

con $i \neq j$. Calculemos la función de decoherencia

$$\begin{aligned}\Gamma(t, t_0) &= \ln \left[\text{Tr} \left\{ \exp \left(\sum_k \alpha_k a_k^\dagger - \alpha_k^* a_k \right) \rho_E \right\} \right] \\ &= \ln \left[\left\langle \exp \left(\sum_k \alpha_k a_k^\dagger - \alpha_k^* a_k \right) \right\rangle \right] \\ &= \sum_k \ln \left[\left\langle \exp \left(\alpha_k a_k^\dagger - \alpha_k^* a_k \right) \right\rangle \right].\end{aligned}\quad (131)$$

En el trabajo de Breuer y Petruccione [5] se evalúa el valor esperado de la exponencial utilizando el formalismo de las funciones de Wigner, que se aleja de los objetivos de este trabajo. Debido a ello, vamos a tratar directamente con el resultado, obteniendo que la función de decoherencia es

$$\Gamma(t, t_0) = - \sum_k \frac{4|g_k|^2}{\hbar^2 \omega_k^2} \coth(\omega_k/2k_B T)(1 - \cos \omega_k(t - t_0)). \quad (132)$$

Introducimos ahora la densidad espectral $J(\omega)$ como

$$J(\omega) = 4f(\omega)|g(\omega)|^2, \quad (133)$$

donde $f(\omega)$ es la densidad de modos de vibración y $g(\omega)$ es la generalización al continuo de g_k . En nuestro caso específico, vamos a utilizar la siguiente expresión para la densidad espectral

$$J_{opt}(\omega) = A\omega e^{-\omega/\omega_c}. \quad (134)$$

$J_{opt}(\omega)$ es la expresión específica de la densidad espectral en el régimen de la óptica cuántica, que utilizaremos para ilustrar este ejemplo. El término ω_c representa una cierta frecuencia de corte, y A representa una constante que tomaremos igual a 1. Utilizamos ahora la densidad espectral para pasar al continuo la expresión de la función de decoherencia, obteniendo

$$\Gamma(t, t_0) = - \int_0^\infty d\omega J(\omega) \coth(\omega/2k_B T) \frac{1 - \cos(\omega(t - t_0))}{\hbar^2 \omega^2}. \quad (135)$$

Vamos a separar este resultado en dos funciones de decoherencia distintas, que asociaremos la primera al vacío (Γ_{vac}) y la segunda al baño térmico (Γ_{term}), debido a que la primera no depende explícitamente de la temperatura, y la segunda sí lo hace. La división es como sigue

$$\Gamma(t, t_0) = \Gamma_{vac}(t, t_0) + \Gamma_{term}(t, t_0); \quad (136)$$

$$\Gamma_{vac}(t, t_0) = - \int_0^\infty d\omega e^{-\omega/\omega_c} \frac{1 - \cos\{\omega(t - t_0)\}}{\hbar^2 \omega}, \quad (137)$$

$$\Gamma_{term}(t, t_0) = - \int_0^\infty d\omega e^{-\omega/\omega_c} [\coth(\omega/2k_B T) - 1] \frac{1 - \cos(\omega(t - t_0))}{\hbar^2 \omega}. \quad (138)$$

Resolviendo las integrales, podemos obtener que el término del vacío es

$$\Gamma_{vac}(t, t_0) = - \frac{1}{2\hbar^2} \ln [1 + \omega_c^2(t - t_0)^2], \quad (139)$$

mientras que la parte térmica es

$$\Gamma_{term}(t, t_0) = - \frac{k_B T}{\hbar^2} \int_{t_0}^t ds \int_0^\infty dx e^{-k_B T x/\omega_c} [\coth(x/2) - 1] \sin(k_B T(s - t_0)x), \quad (140)$$

donde hemos realizado el cambio de variable $x = \omega/k_B T$, y hemos reexpresado el término $(1 - \cos(\omega(t - t_0)))/\omega = \int_{t_0}^t ds \sin(\omega(s - t_0))$. Si asumimos que la frecuencia de corte es $\omega_c \gg k_B T$, entonces podemos prescindir de la exponencial $e^{-k_B T x/\omega_c}$ para llegar a que

$$\Gamma_{term}(t, t_0) \approx - \frac{k_B T}{\hbar^2} \int_{t_0}^t ds \int_0^\infty dx [\coth(x/2) - 1] \sin(k_B T(s - t_0)x), \quad (141)$$

y valiéndonos de la fórmula

$$\int_0^\infty dx [\coth(x/2) - 1] \sin(\alpha x) = \pi \coth(\pi \alpha) - \frac{1}{\alpha}, \quad (142)$$

concluimos que

$$\Gamma_{term}(t, t_0) = - \frac{1}{\hbar^2} \ln \left[\frac{\sinh((t - t_0)/\tau_\beta)}{(t - t_0)/\tau_\beta} \right], \quad (143)$$

donde hemos reescrito

$$\frac{1}{\pi k_B T} = \tau_\beta. \quad (144)$$

A τ_β lo denominaremos el tiempo de correlación térmico, y dará cuenta del tiempo de relajación del sistema, y también nos podemos referir a él como τ_R . En general, el tiempo de relajación sirve como medida para analizar el tiempo en el que la interacción entre el sistema y el entorno intercambian energía, por lo que lo usaremos para medir un intervalo en el que el intercambio de energía es suficientemente grande como para afectar a la evolución. Finalmente, la función de decoherencia total queda

$$\Gamma(t, t_0) = -\frac{1}{2\hbar^2} \ln(1 + \omega_c^2(t - t_0)^2) - \frac{1}{\hbar^2} \ln \left[\frac{\sinh((t - t_0)/\tau_\beta)}{(t - t_0)/\tau_\beta} \right]. \quad (145)$$

A partir de esta fórmula podemos establecer distintas aproximaciones para visualizar mejor el decaimiento de los términos no diagonales del operador densidad.

- **Régimen de tiempos cortos:** Como su propio nombre indica, esta aproximación será útil para tiempos cortos, es decir, para $(t - t_0) \ll 1/\omega_c$. Esta aproximación nos permite despreciar la parte térmica de la función (ya que $(t - t_0) \ll 1/\omega_c \ll 1/k_B T$), por lo que nos queda

$$\begin{aligned} \Gamma(t, t_0) &\approx -\frac{1}{2\hbar^2} \ln(1 + \omega_c^2(t - t_0)^2) = -\frac{1}{2\hbar^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(\omega_c(t - t_0))^{2n}}{n} \\ &\cong -\frac{1}{2\hbar^2} \left[(\omega_c(t - t_0))^2 - \frac{(\omega_c(t - t_0))^4}{2} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (146)$$

Al ser t pequeño, podemos cortar el desarrollo y quedarnos con los dos primeros términos, obteniendo

$$\Gamma_{t.c.}(t, t_0) \cong -\frac{1}{2\hbar^2} \left[(\omega_c(t - t_0))^2 - \frac{(\omega_c(t - t_0))^4}{2} \right]. \quad (147)$$

- **Régimen del vacío:** En este régimen hemos superado los tiempos iniciales, pero sigue dominando el término de vacío en la función. Esto ocurre cuando $1/\omega_c \ll t \ll \tau_\beta$. En este caso basta con ver que $(\omega_c t)^2 \gg 1$, por lo que tenemos que

$$\begin{aligned} \Gamma_{r.v.}(t, t_0) &\approx -\frac{1}{2\hbar^2} \ln(1 + \omega_c^2(t - t_0)^2) \\ &\cong -\frac{1}{2\hbar^2} \ln(\omega_c^2(t - t_0)^2) = -\frac{1}{\hbar^2} \ln(\omega_c(t - t_0)). \end{aligned} \quad (148)$$

- **Régimen térmico:** También conocido como régimen de Markov debido a que la función

de decoherencia es lineal en t , ahora tenemos que la parte térmica domina la función, y se cumple que $t \gg \tau_\beta$. Debido a ello, también lo llamaremos régimen de tiempos largos. Para este caso, tenemos que la función de decoherencia es de la forma

$$\begin{aligned} \Gamma_{t.l.}(t, t_0) &\approx -\frac{1}{\hbar^2} \ln \left[\frac{\sinh((t-t_0)/\tau_\beta)}{(t-t_0)/\tau_\beta} \right] = -\frac{1}{\hbar^2} \ln \left[\frac{e^{(t-t_0)/\tau_\beta} - e^{-(t-t_0)/\tau_\beta}}{(t-t_0)/\tau_\beta} \right] \\ &\approx -\frac{1}{\hbar^2} \left[\frac{(t-t_0)}{\tau_\beta} - \ln \frac{(t-t_0)}{\tau_\beta} \right] \\ &\approx -\frac{1}{\hbar^2} \frac{(t-t_0)}{\tau_\beta}. \end{aligned} \quad (149)$$

A continuación se incluye una figura con una representación de la función de decoherencia y sus aproximaciones.

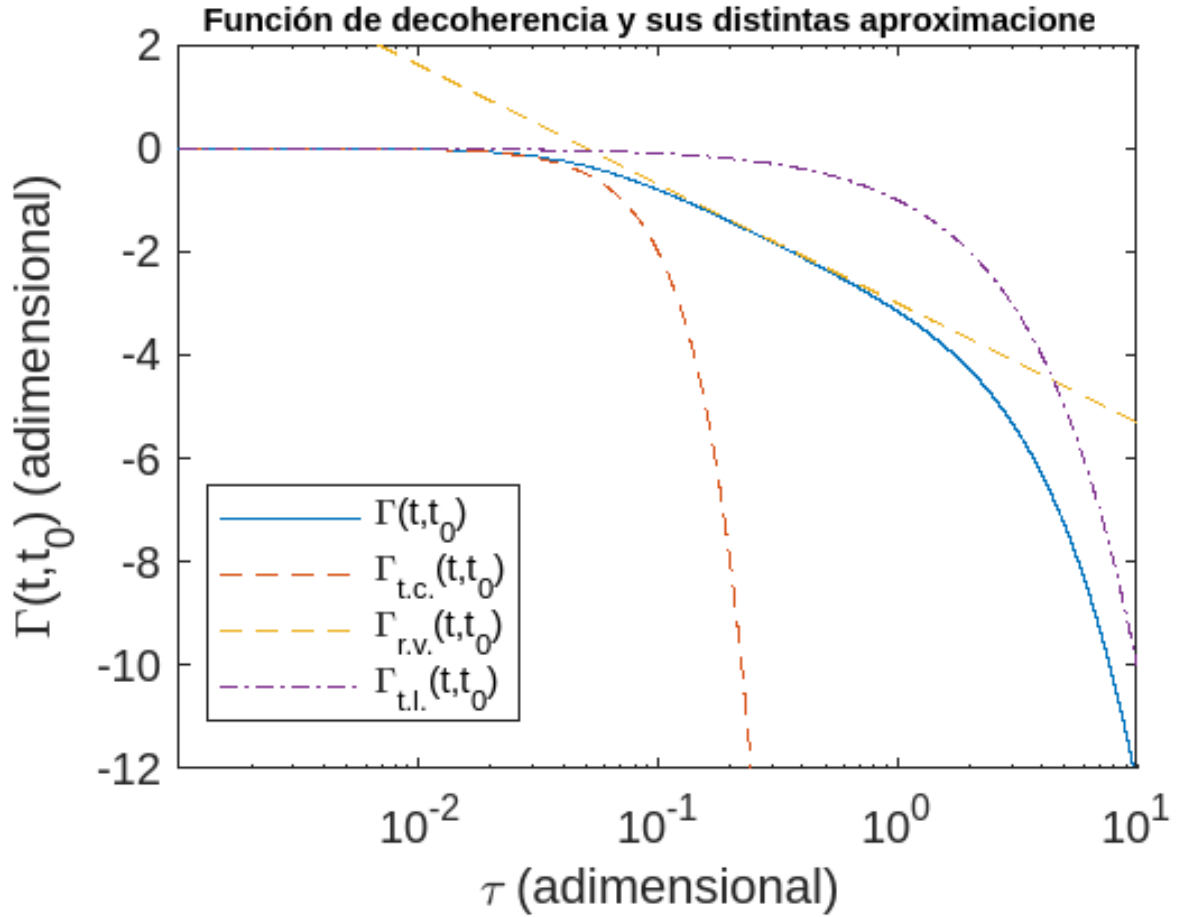


Figura 1: Gráfica semilogarítmica de $\Gamma(t, t_0)$ y sus distintas aproximaciones en función de la variable adimensional $\tau = \frac{(t-t_0)}{\tau_\beta}$, con $\tau_\beta \omega_c = 20$ (adimensional) y $\hbar = 1$.

Es sencillo observar que, según el régimen en el que nos encontremos, tendremos una aproximación más válida que otra. La importancia de este modelo consiste en su resolubilidad exacta, tal y como hemos podido comprobar. No obstante, para sistemas no tan simples no podremos actuar de esta manera, y habremos de recurrir a las ecuaciones maestras. Veamos cómo se

utilizarían en el propio caso del modelo espín-bosón. Para ello, partiremos de la ecuación (69). En primer lugar, vamos a identificar al operador de Lindblad con la matriz de Pauli σ_z . Esto se puede entender sabiendo que en este modelo de decoherencia no tenemos un decaimiento de las poblaciones, sino una reducción de la coherencia en la dirección z del espín debido a la interacción del mismo con el baño térmico. En otras palabras, el operador de Lindblad da cuenta del proceso de decoherencia al medir la proyección de espín (sin provocar transiciones entre los estados de dicho espín). Una justificación de esto se puede ver en el trabajo de Ángel Rivas al deducir la forma de Lindblad a partir de razonamientos microscópicos [4]. La forma de la ecuación maestra particularizada para este caso es

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_S(t) &= -\frac{i}{\hbar}[H_S, \rho_S(t)] + \gamma(L\rho_S(t)L^\dagger) - \frac{\gamma}{2}\{L^\dagger L, \rho_S(t)\} \\ &= -\frac{i}{\hbar}\left[\frac{\hbar\omega_0\sigma_z}{2}, \rho_S(t)\right] + \gamma\sigma_z\rho_S(t)\sigma_z^\dagger - \frac{\gamma}{2}\{\sigma_z^\dagger\sigma_z, \rho_S(t)\}.\end{aligned}\quad (150)$$

Recordando la forma del hamiltoniano del sistema H_S dada en (95), tenemos que

$$\dot{\rho}_S(t) = -\frac{i\omega_0}{2\hbar}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \rho_S(t)\right] + \gamma\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\rho_S(t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \gamma\rho_S(t).\quad (151)$$

Desarrollando $\rho_S(t)$ en sus cuatro términos, obtenemos las ecuaciones para todos los términos

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_S(t) &= -\frac{i\omega_0}{2\hbar}\left[\begin{pmatrix} \rho_{S00}(t) & \rho_{S01}(t) \\ -\rho_{S10}(t) & -\rho_{S11}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_{S00}(t) & -\rho_{S01}(t) \\ \rho_{S10}(t) & -\rho_{S11}(t) \end{pmatrix}\right] \\ &\quad + \gamma\begin{pmatrix} \rho_{S00}(t) & -\rho_{S01}(t) \\ -\rho_{S10}(t) & \rho_{S11}(t) \end{pmatrix} - \gamma\begin{pmatrix} \rho_{S00}(t) & \rho_{S01}(t) \\ \rho_{S10}(t) & \rho_{S11}(t) \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (152)$$

Donde hemos definido ρ_{Sjk} como

$$\rho_{Sjk}(t) = \langle j|\rho_S(t)|k\rangle.\quad (153)$$

Finalmente obtenemos

$$\begin{cases} \langle 0|\dot{\rho}_S(t)|0\rangle = \dot{\rho}_{S00}(t) = 0, \\ \langle 1|\dot{\rho}_S(t)|1\rangle = \dot{\rho}_{S11}(t) = 0, \\ \langle 1|\dot{\rho}_S(t)|0\rangle = \dot{\rho}_{S10}(t) = -i\omega\rho_{S10}(t) - 2\gamma\rho_{S10}(t), \\ \langle 0|\dot{\rho}_S(t)|1\rangle = \dot{\rho}_{S01}(t) = i\omega\rho_{S01}(t) - 2\gamma\rho_{S01}(t), \end{cases}\quad (154)$$

Resolviendo estas ecuaciones es fácil determinar que los términos no diagonales son constantes, o lo que es lo mismo, no decae la población a lo largo del tiempo

$$\rho_{S00}(t) = \rho_{S00}(t_0), \quad (155)$$

$$\rho_{S11}(t) = \rho_{S11}(t_0). \quad (156)$$

Sin embargo, para los no diagonales, observamos que decaen exponencialmente de la forma

$$\rho_{10}(t) = \rho_{10}(t_0)e^{-(i\omega_0+2\gamma)(t-t_0)}, \quad (157)$$

$$\rho_{01}(t) = \rho_{01}(t_0)e^{(i\omega_0-2\gamma)(t-t_0)}. \quad (158)$$

Estos términos decaen con un factor 2γ , por lo que se comprueba que los γ tienen dimensión de T^{-1} . Debido a que hemos supuesto condiciones de markovianidad, esta solución es válida en el régimen de Markov, y finalmente podemos identificar $2\gamma = \tau_\beta^{-1}$, siendo τ_β el tiempo de correlación térmico definido en (144).

5. El oscilador armónico amortiguado

En esta sección vamos a tratar la decoherencia en un oscilador armónico amortiguado. Este modelo sigue una descripción parecida a la utilizada en el baño de osciladores en la anterior sección. El hamiltoniano asociado a este sistema es

$$H_S = \hbar\omega_0 a^\dagger a. \quad (159)$$

Vamos a utilizar la representación de estados coherentes. Podemos definir un estado coherente como aquel que cumple

$$a |m\rangle = m |m\rangle, \quad (160)$$

es decir, el autoestado $|m\rangle$ del operador de aniquilación a asociado al autovalor m . Cualquier estado coherente $|m\rangle$ del oscilador lo podemos representar como

$$|m\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}|m|^2\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \exp[ma^\dagger - m^*a] |0\rangle, \quad (161)$$

donde a^\dagger y a representan los operadores de creación y destrucción de los estados del oscilador, y $|n\rangle$ son los diferentes estados numerados del oscilador armónico. Es fácil ver que cualquier estado construido así cumple (160)

$$\begin{aligned} a |m\rangle &= \exp\left[-\frac{1}{2}|m|^2\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{\sqrt{n!}} a |n\rangle \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}|m|^2\right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n} |n-1\rangle \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}|m|^2\right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^n}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle \\ &= m \exp\left[-\frac{1}{2}|m|^2\right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle \\ &= m \exp\left[-\frac{1}{2}|m|^2\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = m |m\rangle. \end{aligned} \quad (162)$$

Estos estados $|m\rangle$ además están normalizados a la unidad, pero no serán ortogonales entre ellos. Partimos entonces de un cierto estado

$$|\psi\rangle = N(|\alpha\rangle + |\beta\rangle), \quad (163)$$

donde $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ (y, por tanto, $|\psi\rangle$) son estados coherentes pertenecientes al espacio \mathcal{H}_S , N es una constante de normalización y los valores complejos α y β representan las amplitudes iniciales de estos estados. Los estados $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ no son ortogonales entre sí, por lo que su solapamiento es no nulo, pero vamos a asumir que es lo suficientemente pequeño, de forma que, en el mundo macroscópico, solo observamos dos estados bien diferenciados. El solapamiento se puede expresar como

$$\begin{aligned}
\langle\alpha|\beta\rangle &= \exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right] \exp\left[-\frac{1}{2}|\beta|^2\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{\beta^{n'}}{\sqrt{n'!}} \langle n|n'\rangle \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right] \exp\left[-\frac{1}{2}|\beta|^2\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^n \beta^n}{\sqrt{n!}\sqrt{n!}} \delta_{n,n'} \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right] \exp\left[-\frac{1}{2}|\beta|^2\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*\beta)^n}{n!} \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \alpha^*\beta\right].
\end{aligned} \tag{164}$$

El operador densidad reducido para el estado $|\psi\rangle$ en el instante inicial t_0 viene dado por

$$\rho_S(t_0) = |\psi\rangle\langle\psi| = N \left[|\alpha\rangle\langle\alpha| + |\beta\rangle\langle\beta| + |\alpha\rangle\langle\beta| + |\beta\rangle\langle\alpha| \right]. \tag{165}$$

Planteemos el caso en el vacío, donde tendremos que la temperatura es nula. Partiendo de la ecuación maestra general (69), vamos a tener dos operadores de Lindblad en este caso

$$L_1 = \sqrt{(n+1)}a, \quad L_2 = \sqrt{na}^\dagger. \tag{166}$$

En este caso, los operadores de creación y aniquilación aparecen para dar cuenta de las excitaciones o desexcitaciones de los estados del oscilador, mientras que los factores $(n+1)$ y n están asociados al número de ocupación asociado al proceso de destrucción y creación respectivamente dado por la distribución de Bose-Einstein [9]. La ecuación que describe este caso es

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_S(t) &= -\frac{i}{\hbar} [H_S, \rho_S(t)] + \gamma(n+1) \left(L_1 \rho_S(t) L_1^\dagger - \frac{1}{2} \{ L_1^\dagger L_1, \rho_S(t) \} \right) \\
&\quad + \gamma n \left(L_2 \rho_S(t) L_2^\dagger - \frac{1}{2} \{ L_2^\dagger L_2, \rho_S(t) \} \right) \\
&= -\frac{i}{\hbar} [\hbar\omega_0 a^\dagger a, \rho_S(t)] + \gamma(n+1) \left(a \rho_S(t) a^\dagger - \frac{1}{2} \{ a^\dagger a, \rho_S(t) \} \right) \\
&\quad + \gamma n \left(a^\dagger \rho_S(t) a - \frac{1}{2} \{ a a^\dagger, \rho_S(t) \} \right).
\end{aligned} \tag{167}$$

Si ahora hacemos la temperatura igual a cero, los números de ocupación n asociados a la distribución de Bose-Einstein se hacen nulos, ya que

$$n \propto \exp\left(-\frac{\epsilon - \mu}{k_B T}\right), \quad (168)$$

donde ϵ es la energía y μ es el potencial químico del estado respectivamente, con $\epsilon > \mu$. Aplicando esto y operando un poco llegamos finalmente a la expresión

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_S(t) &= -i\omega_0 [a^\dagger a, \rho_S(t)] + \gamma \left(a \rho_S(t) a^\dagger - \frac{1}{2} \{a^\dagger a, \rho_S(t)\} \right) \\ &= \left(-i\omega_0 - \frac{\gamma}{2} \right) a^\dagger a \rho_S(t) + \left(i\omega_0 - \frac{\gamma}{2} \right) \rho_S(t) a^\dagger a + \gamma a \rho_S(t) a^\dagger \equiv \mathcal{L} \rho_S(t). \end{aligned} \quad (169)$$

Para resolver esta ecuación, teniendo en cuenta que un estado coherente permanece coherente a lo largo del tiempo [5], podemos proponer una función solución del tipo

$$\sigma(t) = \exp\{\mathcal{L}t\} |\alpha\rangle\langle\beta| = f(t) |\alpha(t)\rangle\langle\beta(t)|, \quad (170)$$

con $f(t)$ una función compleja que cumple $f(t_0) = 1$, y $\alpha(t_0) = \alpha$, $\beta(t_0) = \beta$, de forma que tenemos para el instante inicial la solución $\sigma(t_0) = |\alpha\rangle\langle\beta|$. Esto nos proporciona un operador densidad reducido del tipo

$$\begin{aligned} \rho_S(t) &= N^2 (f_\alpha(t) |\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)| + f_\beta(t) |\beta(t)\rangle\langle\beta(t)| \\ &\quad + f_{\alpha,\beta}(t) |\alpha(t)\rangle\langle\beta(t)| + f_{\beta,\alpha}(t) |\beta(t)\rangle\langle\alpha(t)|). \end{aligned} \quad (171)$$

Para demostrar que (171) es, efectivamente, solución de la ecuación (169), vamos a utilizar la función solución $\sigma(t)$, cuyos resultados se pueden generalizar a cada uno de los cuatro términos que componen $\rho_S(t)$. Derivando $|\alpha(t)\rangle$ obtenemos

$$\frac{d}{dt} |\alpha(t)\rangle = \frac{d}{dt} \left[\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha(t)|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(t)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right] + \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha(t)|^2\right) \frac{d}{dt} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(t)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right]. \quad (172)$$

Veamos estos dos términos por separado. El primero queda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha(t)|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(t)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right] &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [|\alpha(t)|^2] \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha(t)|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(t)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [|\alpha(t)|^2] |\alpha(t)\rangle. \end{aligned} \quad (173)$$

Del mismo modo, el segundo término queda

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha(t)|^2\right) \frac{d}{dt} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(t)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right] &= (a^\dagger a) \frac{1}{\alpha(t)} \frac{d}{dt} [\alpha(t)] \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha(t)|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(t)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\
&= \frac{1}{\alpha(t)} \dot{\alpha}(t) \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha(t)|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(t)^n}{\sqrt{n!}} n |n\rangle \\
&= \frac{1}{\alpha(t)} \dot{\alpha}(t) \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha(t)|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(t)^n}{\sqrt{n!}} (a^\dagger a) |n\rangle \\
&= \frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)} a^\dagger a |\alpha(t)\rangle.
\end{aligned} \tag{174}$$

Donde hemos utilizado el operador número, que cumple

$$a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle. \tag{175}$$

Podemos entonces expresar la derivada de $|\alpha(t)\rangle$ como

$$\frac{d}{dt} |\alpha(t)\rangle = \left[-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\alpha(t)|^2 + \frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)} a^\dagger a \right] |\alpha(t)\rangle. \tag{176}$$

Del mismo modo, podemos derivar el bra correspondiente a un estado $\beta(t)$, y obtenemos de forma análoga

$$\frac{d}{dt} \langle\beta(t)| = \langle\beta(t)| \left[\frac{\dot{\beta}^*(t)}{\beta^*(t)} a^\dagger a - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\beta(t)|^2 \right] \tag{177}$$

Con estas relaciones y con la propiedad (160) podemos comprobar que nuestra solución propuesta resuelve la ecuación maestra. Para ello, sustituimos la solución y vemos que obtenemos para el primer término

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[f(t) |\alpha(t)\rangle \langle\beta(t)| \right] &= \dot{f}(t) |\alpha(t)\rangle \langle\beta(t)| + \left(\frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)} a^\dagger a \right) f(t) |\alpha(t)\rangle \langle\beta(t)| \\
&\quad + f(t) |\alpha(t)\rangle \langle\beta(t)| \left(a^\dagger a \frac{\dot{\beta}^*(t)}{\beta^*(t)} \right) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[|\alpha(t)|^2 \right] f(t) |\alpha(t)\rangle \langle\beta(t)| \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[|\beta(t)|^2 \right] f(t) |\alpha(t)\rangle \langle\beta(t)|.
\end{aligned} \tag{178}$$

Por otro lado, el segundo término queda de la forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}f(t) |\alpha(t)\rangle \langle\beta(t)| &= \left(-i\omega_0 - \frac{\gamma}{2} \right) a^\dagger a f(t) |\alpha(t)\rangle \langle\beta(t)| + \left(i\omega_0 - \frac{\gamma}{2} \right) f(t) |\alpha(t)\rangle \langle\beta(t)| a^\dagger a \\
&\quad + \gamma f(t) \beta^*(t) \alpha(t) |\alpha(t)\rangle \langle\beta(t)|.
\end{aligned} \tag{179}$$

Igualando términos, encontramos que nuestra solución es válida si se cumplen las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)} = (-i\omega_0 - \frac{\gamma}{2}), \\ \frac{\dot{\beta}^*(t)}{\beta^*(t)} = (i\omega_0 - \frac{\gamma}{2}) \rightarrow \frac{\dot{\beta}(t)}{\beta(t)} = (-i\omega_0 - \frac{\gamma}{2}), \\ \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [|\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2] + \gamma\beta^*(t)\alpha(t). \end{cases} \quad (180)$$

Si las resolvemos aplicando las condiciones iniciales propuestas, obtenemos de forma inmediata las siguientes expresiones para $\alpha(t)$ y $\beta(t)$

$$\begin{cases} \alpha(t) = \alpha(t_0) \exp\left[(-i\omega_0 - \frac{\gamma}{2})(t - t_0)\right] = \alpha \exp\left[(-i\omega_0 - \frac{\gamma}{2})(t - t_0)\right] \\ \beta(t) = \beta(t_0) \exp\left[(-i\omega_0 - \frac{\gamma}{2})(t - t_0)\right] = \beta \exp\left[(-i\omega_0 - \frac{\gamma}{2})(t - t_0)\right]. \end{cases} \quad (181)$$

Para $f(t)$ la expresión es un poco más compleja, y usando las soluciones obtenidas de $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ llegamos a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (|\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2) \right] + \gamma\beta^*(t)\alpha(t) \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} e^{(i\omega_0 - \frac{\gamma}{2})(t-t_0)} e^{(-i\omega_0 - \frac{\gamma}{2})(t-t_0)} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) \right] \\ &\quad + \gamma\beta^* \alpha e^{(i\omega_0 - \frac{\gamma}{2})(t-t_0)} e^{(-i\omega_0 - \frac{\gamma}{2})(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (182)$$

El primer término lo podemos escribir como

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} e^{(i\omega_0 - \frac{\gamma}{2})(t-t_0)} e^{(-i\omega_0 - \frac{\gamma}{2})(t-t_0)} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) \right] = -\frac{d}{dt} \left[-\frac{1}{2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) e^{-\gamma(t-t_0)} \right]. \quad (183)$$

A su vez, el último término lo podemos reescribir como la derivada

$$\begin{aligned} \gamma\beta^* \alpha e^{(i\omega_0 - \frac{\gamma}{2})(t-t_0)} e^{(-i\omega_0 - \frac{\gamma}{2})(t-t_0)} &= \gamma\beta^* \alpha e^{-\gamma(t-t_0)} \\ &= -\frac{d}{dt} [\beta^* \alpha e^{-\gamma(t-t_0)}]. \end{aligned} \quad (184)$$

Y podemos reescribir todo como

$$\frac{\dot{f}(t)}{f(t)} = -\frac{d}{dt} \left[\left(-\frac{1}{2} |\alpha|^2 - \frac{1}{2} |\beta|^2 + \beta^* \alpha \right) e^{-\gamma(t-t_0)} \right]. \quad (185)$$

Resolvemos para la condición inicial $f(t_0) = 1$ y usamos la expresión (164) para llegar finalmente

a la expresión

$$\begin{aligned} f(t) &= \exp \left[\left(1 - e^{-\gamma(t-t_0)} \right) \left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \beta^* \alpha \right) \right] \\ &= \langle \beta | \alpha \rangle^{(1-e^{-\gamma(t-t_0)})}. \end{aligned} \quad (186)$$

Con esto, la solución propuesta para el término $f(t) |\alpha(t)\rangle\langle\beta(t)|$ cumple la ecuación maestra. Renombrando $f(t) = f_{\alpha,\beta}(t)$ nos muestra que el término $f_{\alpha,\beta}(t) |\alpha(t)\rangle\langle\beta(t)|$ satisface la ecuación maestra. Del mismo modo, las soluciones para $f_{\beta,\alpha}(t) |\beta(t)\rangle\langle\alpha(t)|$, son las mismas, puesto que dicho término es el traspuesto conjugado de $f_{\alpha,\beta}(t) |\alpha(t)\rangle\langle\beta(t)|$ ($f_{\alpha,\beta}(t) = f_{\beta,\alpha}^*(t)$).

Para ver si los términos $f_{\alpha}(t) |\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)|$ y $f_{\beta}(t) |\beta(t)\rangle\langle\beta(t)|$ satisfacen la ecuación, basta con caracterizar estas funciones para $f_{\alpha}(t) |\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)|$ y $f_{\beta}(t) |\beta(t)\rangle\langle\beta(t)|$. En este caso, las soluciones quedan

$$\begin{cases} \alpha(t) = \alpha \exp \left[(-i\omega_0 - \frac{\gamma}{2})(t - t_0) \right], \\ \beta(t) = \beta \exp \left[(-i\omega_0 - \frac{\gamma}{2})(t - t_0) \right], \\ f_{\alpha}(t) = f_{\beta}(t) = 1^{1-\exp(-\gamma(t-t_0))} = 1. \end{cases} \quad (187)$$

De aquí llegamos finalmente a que la solución total para $\rho_S(t)$ es de la forma

$$\rho_S(t) = N^2 \left(|\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)| + |\beta(t)\rangle\langle\beta(t)| + f(t) |\alpha(t)\rangle\langle\beta(t)| + f^*(t) |\beta(t)\rangle\langle\alpha(t)| \right), \quad (188)$$

donde hemos definido $f(t) = f_{\alpha,\beta}(t) = f_{\beta,\alpha}(t)^*$. Las funciones propuestas cumplen que

$$\begin{cases} \alpha(t) = \alpha \exp \left[(-i\omega_0 - \frac{\gamma}{2})(t - t_0) \right], \\ \beta(t) = \beta \exp \left[(-i\omega_0 - \frac{\gamma}{2})(t - t_0) \right], \\ f(t) = \langle \beta | \alpha \rangle^{1-\exp(-\gamma(t-t_0))}. \end{cases} \quad (189)$$

Vamos ahora a identificar la función de decoherencia con el logaritmo de la función $f(t)$, de forma que para los términos diagonales es nula (ya que $f_{\alpha}(t) = f_{\beta}(t) = 1$). Para los términos no diagonales tenemos que

$$\Gamma(t, t_0) = \ln |f(t)| = -\frac{1}{2} |\alpha - \beta|^2 \left(1 - e^{-\gamma(t-t_0)} \right). \quad (190)$$

Examinemos la función de decoherencia. Vemos que es proporcional al cuadrado de la distancia entre las amplitudes iniciales α y β en el plano complejo entre ambos estados al cuadrado, y

en el régimen de tiempos largos ($\gamma t \gg 1$) tenemos que la función se aproxima a

$$\Gamma(t, t_0) \approx -\frac{1}{2}|\alpha - \beta|^2, \quad (191)$$

y, por tanto, la exponencial de la función de decoherencia se aproxima al solapamiento entre los estados iniciales $|\langle \alpha | \beta \rangle|$, que, como hemos supuesto, es una cantidad muy pequeña, luego la coherencia es prácticamente nula en este límite.

Para el régimen de tiempos cortos, es decir, $\gamma t \ll 1$, encontramos que podemos aproximar el término exponencial de la forma

$$-\frac{1}{2}|\alpha - \beta|^2(1 - e^{-\gamma(t-t_0)}) \approx -\frac{1}{2}|\alpha - \beta|^2\gamma(t - t_0), \quad (192)$$

de forma que el término crece de forma lineal con el tiempo, y podemos introducir un tiempo de decoherencia para tener una medida cuantitativa de la pérdida de las coherencias. Para ello, definimos el término τ_D como tiempo de decoherencia, que cumple

$$\tau_D = \frac{2}{\gamma|\alpha - \beta|^2}. \quad (193)$$

De forma equivalente al término τ_β definido en la sección anterior, vamos a definir ahora el tiempo de relajación τ_R , que en este caso vendrá dado por el término γ^{-1} , y será el tiempo característico en el que el sistema intercambia energía. Si lo pasamos al otro término, podemos ver una comparativa entre estos dos tiempos

$$\frac{\tau_D}{\tau_R} = \frac{2}{|\alpha - \beta|^2}. \quad (194)$$

Viendo esta relación, observamos que para estados coherentes iniciales suficientemente separados, el tiempo de decoherencia es muy pequeño respecto al tiempo de relajación, y en este régimen podemos asumir que no existe intercambio de energía entre el sistema y el entorno, de forma que podemos considerar que el único fenómeno que afecta a la evolución del operador densidad reducido es la decoherencia, y podemos omitir los efectos debidos al intercambio de energía.

6. Conclusiones

A lo largo de este trabajo se han presentado las ideas más fundamentales del estudio de los sistemas cuánticos abiertos, indispensables para el entendimiento de la teoría de la decoherencia cuántica. A su vez, se ha introducido y entendido el concepto de la misma, y se ha aplicado a dos modelos de sistema cuántico abierto que ilustran el fenómeno y ejemplifican la importancia del mismo en la evolución de dichos sistemas.

Se ha abordado el objetivo de este trabajo, que consistía en presentar las herramientas matemáticas necesarias para tratar los sistemas cuánticos abiertos e introducir el concepto de la decoherencia cuántica. Para ello, se ha buscado la mayor claridad posible a la hora de escribir el trabajo, de forma que sea asequible para el lector familiarizado con los principios básicos de la Mecánica Cuántica, sin perder excesivo rigor matemático.

Como propuesta de futuro, existen varias opciones para profundizar en este tema que puedan dar pie a nuevos trabajos de investigación, como por ejemplo un estudio completo y detallado de algún modelo de decoherencia, el estudio de la decoherencia no markoviana, las aplicaciones físicas del estudio de la decoherencia en computación cuántica o una investigación sobre las distintas ecuaciones maestras utilizadas en sistemas cuánticos abiertos.

Como reflexión personal, el trabajo ha presentado un reto mayúsculo debido a la interdisciplinariedad del mismo, pero ha sido interesante y gratificante en cada paso. Este campo está en auge debido a la creciente demanda de tecnologías cuánticas, y los nuevos avances científicos serán vitales en el desarrollo de nuestra sociedad.

Apéndices

Apéndice A

En este apéndice vamos a probar el Teorema 1 de la sección 2 para el caso en el que $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}$, que es el caso en el que el semigrupo dinámico es homogéneo, es decir, cuando el mapa dinámico cumple que

$$\nu_{(t,t_0)} = \nu_{(t+\Delta t, t_0+\Delta t)}, \quad (195)$$

para todo instante t , t_0 y Δt . Esta demostración es compleja, y se aleja de los objetivos de este trabajo, por lo que se incluye por completitud.

Demostración. Comencemos tomando una base ortonormal completa de operadores F_i para $i = 1, \dots, N^2$ respecto al producto interior de Hilbert-Schmidt $(F_i, F_j)_{\text{H-S}} = \text{Tr}(F_i^\dagger F_j) = \delta_{ij}$. También vamos a escoger el operador $F_{N^2} = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbb{1}_S$ de forma que $\text{Tr}_S[F_i] = 0 \ \forall i \neq N^2$. Si expandimos los operadores de Kraus en esta base, obtenemos que

$$E_{\alpha,\beta}(t, t_0) = \sum_{i=1}^{N^2-1} F_i (F_i, E_{\alpha,\beta})_{\text{H-S}}. \quad (196)$$

De aquí vemos que el mapa dinámico se puede reescribir como

$$\nu_{t,t_0} \rho_S(t_0) = \sum_{i,j=1}^{N^2} c_{ij}(t, t_0) F_i \rho_S(t_0) F_j^\dagger, \quad (197)$$

donde los coeficientes $c_{ij}(t, t_0)$ se definen como

$$c_{ij}(t, t_0) \equiv \sum_{\alpha,\beta} (F_i, E_{\alpha,\beta}(t, t_0))_{\text{H-S}} (F_j, E_{\alpha,\beta}(t, t_0))_{\text{H-S}}^*. \quad (198)$$

Estos coeficientes forman una matriz c que es hermítica y positiva. De hecho, para vectores N^2 -dimensionales complejos se cumple que

$$\sum_{i,j} c_{ij}(t, t_0) v_i^* v_j = \sum_{\alpha,\beta} \left| \left(\sum_i v_i F_i, E_{\alpha,\beta}(t, t_0) \right) \right|^2 \geq 0. \quad (199)$$

Si utilizamos ahora la nueva expresión de mapa dinámico en la ecuación (68), renombrando

$t_0 \rightarrow t$ y $t \rightarrow t + \epsilon$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\rho_S(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\nu_\epsilon \rho_S - \rho_S] \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{N} \frac{c_{N^2 N^2}(\epsilon) - N}{\epsilon} \rho_S(t) + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N^2-1} \left(\frac{c_{iN^2}(\epsilon)}{\epsilon} F_i \rho_S(t) + \frac{c_{N^2 i}(\epsilon)}{\epsilon} \rho_S(t) F_i^\dagger \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} \frac{c_{ij}(\epsilon)}{\epsilon} F_i \rho_S(t) F_j^\dagger \right]. \tag{200}
\end{aligned}$$

Definimos los coeficientes a_{ij} como

$$\begin{aligned}
a_{N^2 N^2} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{c_{N^2 N^2}(\epsilon) - N}{\epsilon}, \\
a_{iN^2} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{c_{iN^2}(\epsilon)}{\epsilon}, \quad i = 1, \dots, N^2 - 1, \\
a_{ij} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{c_{ij}(\epsilon)}{\epsilon}, \quad i, j = 1, \dots, N^2 - 1, \tag{201}
\end{aligned}$$

así como F y G

$$F = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N^2-1} a_{iN^2} F_i, \tag{202}$$

$$G = \frac{1}{2N} a_{N^2 N^2} \mathbb{1}_S + \frac{1}{2} (F^\dagger + F). \tag{203}$$

Por último, definimos el operador hermítico

$$H = \frac{1}{2i} (F^\dagger - F). \tag{204}$$

Los coeficientes a_{ij} son hermíticos y positivos a su vez, lo cual se observa viendo que los coeficientes c_{ij} son hermíticos (basta ver la definición (198)). Utilizando estas definiciones, podemos reescribir el generador como

$$\mathcal{L}\rho_S(t) = -i[H, \rho_S(t)] + \{G, \rho_S(t)\} + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} a_{ij} F_i \rho_S(t) F_j^\dagger. \tag{205}$$

Como para cualquier instante t la traza de $\rho_S(t)$ se debe preservar, entonces

$$\text{Tr}_S \left[\frac{d}{dt} \rho_S(t) \right] = \frac{d}{dt} \text{Tr}_S (\rho_S(t)) = \text{Tr}_S [\mathcal{L}\rho_S(t)] = 0, \tag{206}$$

de donde deducimos que

$$\text{Tr}_S [\mathcal{L}\rho_S] = \text{Tr}_S \left[\left(2G + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} a_{ij} F_j^\dagger F_i \right) \rho_S(t) \right] = 0. \quad (207)$$

Esto lo podemos expresar como el valor esperado respecto a $\rho_S(t)$

$$\text{Tr}_S \left[\left(2G + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} a_{ij} F_j^\dagger F_i \right) \rho_S(t) \right] = \left\langle 2G + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} a_{ij} F_j^\dagger F_i \right\rangle = 0. \quad (208)$$

Esto implica que

$$G + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N^2-1} a_{ij} F_j^\dagger F_i = 0, \quad (209)$$

ya que

$$\left\langle 2G + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} a_{ij} F_j^\dagger F_i \right\rangle = \langle 0 \rangle = 0. \quad (210)$$

Como tenemos dos operadores cuyo valor esperado es el mismo, independientemente del vector estado respecto al que tomamos el valor esperado (ya que el operador densidad inicial $\rho_S(t)$ puede ser cualquier estado a priori), entonces se demuestra que ambos operadores son iguales y, por tanto se cumple (209). Uniendo esto a la ecuación (205), obtenemos la primera forma estándar del generador

$$\mathcal{L}\rho_S(t) = -i[H, \rho_S(t)] + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} a_{ij} \left(F_i \rho_S(t) F_j^\dagger - \frac{1}{2} \{ F_j^\dagger F_i, \rho_S(t) \} \right). \quad (211)$$

Dado que la matriz definida por los coeficientes a_{ij} es positiva, se le puede aplicar una transformación unitaria para diagonalizarla, obteniendo

$$UaU^\dagger = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & & \\ & \gamma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma_{N^2-1} \end{pmatrix}, \quad (212)$$

donde los valores γ_i son no negativos. Si introducimos un nuevo conjunto de operadores L_k de la forma

$$F_i = \sum_{k=1}^{N^2-1} u_{ki} L_k \quad (213)$$

podemos reescribir (211) en la segunda forma estándar o forma diagonal del generador

$$\mathcal{L}\rho_S(t) = -i[H, \rho_S(t)] + \sum_{k=1}^{N^2-1} \gamma_k \left(L_k \rho_S(t) L_k^\dagger - \frac{1}{2} \{ L_k^\dagger L_k, \rho_S(t) \} \right). \quad (214)$$

Esta es la forma más general de expresar el generador \mathcal{L} , concluyendo así esta demostración. \square

En los trabajos de Gorini, Kossakowski, Sudarshan [10] y Lindblad [11] que se encuentran en la bibliografía se puede encontrar dicha prueba con mayor rigor matemático. A su vez, una deducción microscópica de esta fórmula, en la que se identifica la forma que tienen los coeficientes γ_k y los operadores de Lindblad L_k se puede encontrar en el trabajo de Ángel Rivas y Susana Huelga [4].

Bibliografía

- [1] H. Dieter Zeh. “On the interpretation of measurement in quantum theory”. En: *Foundations of Physics* 1 (1970), págs. 69-76.
- [2] Robert B. Griffiths. “Quantum Channels, Kraus Operators, POVMs”. En: 2010.
- [3] Michael A. Nielsen e Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000.
- [4] Á. Rivas y S.F. Huelga. *Open Quantum Systems: An Introduction*. SpringerBriefs in Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2011. ISBN: 9783642233548. URL: <https://books.google.es/books?id=FGCuYsIZAA0C>.
- [5] H. P. Breuer y F. Petruccione. *The theory of open quantum systems*. Great Clarendon Street: Oxford University Press, 2002.
- [6] Howard E. Haber. *The time evolution operator as a time-ordered exponential*. 2018.
- [7] Ángel Rivas et al. “Markovian master equations: a critical study”. En: *New Journal of Physics* 12.11 (nov. de 2010), pág. 113032. DOI: 10.1088/1367-2630/12/11/113032. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/12/11/113032>.
- [8] V. I. Gerasimenko. *On Operators Generated by Density Matrix*. 2020. arXiv: 2001.01180 [math-ph].
- [9] V. P. Maslov y V. E. Nazaikinskii. *On the Bose-Einstein distribution and Bose condensation*. 2008. arXiv: 0812.4885 [math.PR].
- [10] Vittorio Gorini, Andrzej Kossakowski y E. C. G. Sudarshan. “Completely positive dynamical semigroups of N-level systems”. En: *Journal of Mathematical Physics* 17.5 (mayo de 1976), págs. 821-825. DOI: 10.1063/1.522979.
- [11] G. Lindblad. “On the generators of quantum dynamical semigroups”. En: *Communications in Mathematical Physics* 48.2 (1976), págs. 119-130.