



Universidad de Sevilla

Grado en Física

Trabajo de Fin de Grado

El Agujero negro de Reissner-Nordström

Autora:

María Cordero Ramírez

Tutores:

Jose María Tornero Sánchez

Francisco Javier Moreno González

Departamento de Álgebra

Facultad de Física

25 de mayo de 2023

Resumen

En el presente trabajo se analiza la estructura causal de agujeros negros esféricamente simétricos, estáticos y con carga eléctrica, denominados agujeros negros de Reissner-Nordström, presentes en la teoría de la relatividad general. Estos agujeros negros aparecen como soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein, que describen la curvatura del espacio-tiempo en presencia de masa. Con este fin, introduciremos en primer lugar la formulación de la teoría en términos geométricos así como las herramientas matemáticas necesarias. Posteriormente, nos centraremos en obtener las ecuaciones de campo de Einstein empleando el principio de mínima acción en la denominada acción de Einstein-Hilbert. Para obtener intuición sobre la derivación de la solución a partir de las ecuaciones de Einstein estudiaremos primeramente el caso sin carga, que corresponde al agujero negro de Schwarzschild. Asimismo, estudiaremos su estructura causal empleando diagramas de Penrose, una representación pictórica que nos permite acceder a ciertas relaciones causales entre diferentes puntos del espacio-tiempo. Una vez revisado el caso de Schwarzschild procederemos a estudiar la generalización al incluir carga eléctrica, que obtenemos como solución a la denominada acción de Einstein-Maxwell. En este caso, observaremos que el agujero de Reissner-Nordström presenta una estructura causal mucho más complicada y podremos, simplemente inspeccionando el diagrama de Penrose, realizar argumentos heurísticos acerca de la inestabilidad de esta solución.

Índice general

1	Introducción	2
2	Gravedad como teoría geométrica	5
2.1	Tensor métrico	5
2.2	Transporte paralelo y conexión	6
2.3	Derivada covariante	7
2.4	Curvatura	8
2.5	La conexión Levi-Civita	9
2.6	Tensor de Riemann	10
2.7	La acción de Einstein-Hilbert	11
2.8	Ecuaciones de campo de Einstein con materia	13
3	La solución de Schwarzschild	15
3.1	Derivación de la solución de Schwarzschild	15
3.2	Cálculo de Γ_{ab}^c para la métrica de Schwarzschild	16
3.3	Estructura causal de la solución de Schwarzschild	17
3.4	Coordenadas de Eddington-Finkelstein	18
3.4.1	Coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes (o avanzadas)	19
3.4.2	Coordenadas de Eddington-Finkelstein salientes (o retardadas)	20
3.5	Diagrama de Penrose	22
3.5.1	Bloque regular	22
3.5.2	Bloque singular	24
3.5.3	Construcción del diagrama	25
4	La solución de Reissner-Nordström	28
4.1	Teoría de Maxwell en espacios curvos	28
4.2	La acción de Einstein-Maxwell	29

ÍNDICE GENERAL

4.2.1	Variación con la métrica	30
4.2.2	Variación con la 1-forma A	31
4.3	Derivación de la solución de Reissner-Nordström	32
4.3.1	Ecuación de Maxwell	32
4.3.2	Ecuación de Einstein	33
4.4	Estructura causal de la solución de Reissner-Nordström	34
4.5	Nuevas coordenadas de Eddington-Finkelstein	36
4.6	Diagrama de Penrose	37
4.6.1	Caso sub-extremal	38
4.6.2	Caso extremal	42
4.6.3	Caso sobre-extremal	43
5	Conclusiones	45
	Apéndices	47
A	Conmutador de las derivadas covariantes	47
B	Variación del elemento de volumen $\sqrt{ g }$	48
C	Variación del tensor de Ricci	49
	Bibliografía	50

Capítulo 1

Introducción

En 1915, Albert Einstein publica la teoría de la relatividad general convirtiéndose en la teoría de la gravedad con mayor éxito hasta la fecha [1]. Sus predicciones basadas en ella se han podido verificar en numerosos experimentos o tests tanto clásicos como modernos. En el primer grupo encontramos la precesión de perihelio de Mercurio o la desviación de la luz por el sol. En relación a los modernos tenemos la primera detección de ondas gravitacionales procedentes de la fusión de varios agujeros negros y estrellas binarias de neutrones por la colaboración de LIGO y Virgo [2]. También, gracias al Event Horizon Telescope, se han obtenido imágenes de dos agujeros negros supermasivos, M87* y más recientemente Sagitario A*. Ambos se encuentran en el centro de las galaxias M87 y la Vía Láctea respectivamente [3, 4].

Esta teoría describe la interacción gravitatoria entre los cuerpos por la curvatura del espacio-tiempo mediante las ecuaciones de campo de Einstein. Es decir, plantea la gravedad como un reflejo de la geometría del mismo en lugar de una fuerza a distancia como en la teoría newtoniana. Las ecuaciones de movimiento se determinan aplicando el principio variacional a la acción de Einstein-Hilbert. La cual también puede complementarse con campos de materia, como veremos más adelante.

Dado que las ecuaciones de campo de Einstein son no-lineales y en general plantean una gran dificultad a la hora de encontrar soluciones exactas. No obstante, se pueden proponer soluciones con un alto número de simetrías, restringiendo el número de variables a ser determinadas. Entre ellas, destacan las soluciones con curvatura constante, como son Minkowski, de Sitter y anti-de Sitter. Poco después, en 1916, Karl Schwarzschild encontró la primera solución esféricamente simétrica y estática (SSS) que representa un agujero negro, conocida como métrica de Schwarzschild [5]. Seguidamente se obtuvo la solución SSS para la acción de Einstein-Maxwell, el cual incluye el término electromagnético. Esta solución se conoce como la métrica de Reissner-Nordström [6, 7]. Ambos casos describen una singularidad envuelta por un horizonte de sucesos, una superficie cerrada que

desconecta causalmente la región interior de la exterior.

En los años posteriores hubo un gran trabajo para entender la naturaleza de las singularidades, tanto matemáticas como físicas, que planteaban estas soluciones y una mejor comprensión de los horizontes de sucesos. Para ello se describieron diferentes transformaciones de coordenadas que cubrían de forma parcial o total el espacio-tiempo con el fin de identificar las singularidades de origen matemático.

Posteriormente, surge una de las herramientas matemáticas para analizar los espaciotiempos conocida como diagramas de Penrose-Carter o simplemente diagramas de Penrose. Estos diagramas bidimensionales conservan la información sobre las regiones causales entre diversos puntos del espacio-tiempo y permiten representar regiones infinitas en superficies finitas. Los diagramas de Penrose [8] se han convertido en una herramienta muy útil que se emplea tanto para la ilustración de soluciones concretas y el estudio de su estructura causal, como para explorar ciertas propiedades características de la solución, tales como su estabilidad.

Aunque el agujero negro de Reissner-Nordström sea una solución fenomenológicamente poco realista como se discutirá más adelante, existe motivación adicional para que sea sujeta a estudio. Entre ellas, podemos mencionar su relevancia en el marco de la correspondencia anti de-Sitter/teorías cuánticas de campos conformes (AdS/CFT). Esta realización del principio holográfico [9] establece la equivalencia entre teoría de cuerdas definida en un espacio AdS de dimensión D y una CFT definida en $D - 1$. Existe un diccionario holográfico formado por el conjunto de relaciones entre cantidades a un lado y a otro de la correspondencia y cuya entrada principal es la relación GKP-W (Gubser-Klebanov-Polyakov-Witten). Este vínculo establece la igualdad entre las funciones de partición de la gravedad en un espacio AdS de dimensión D y la CFT que vive en su frontera $D - 1$ [10]. En el marco de esta correspondencia un agujero negro cargado es un estado térmico con una temperatura determinada por la radiación de Hawking [11] y, por medio de la dualidad, representa el estado térmico de una CFT.

El trabajo se organiza como sigue. En el capítulo 2 introducimos conceptos pertenecientes a geometría diferencial y definimos objetos que usaremos a lo largo del trabajo como la variedad, la métrica o el tensor de Riemann, concluyendo con el principio variacional de la acción de Einstein-Hilbert del cual obtenemos las ecuaciones de campo de Einstein. A continuación, en el capítulo 3, para obtener intuición sobre la derivación

de la solución a partir de las ecuaciones de Einstein estudiaremos primero la solución de Schwarzschild. Para ello, derivaremos la métrica y analizaremos su estructura causal construyendo el diagrama de Penrose. Seguidamente, en el capítulo 4 nos centraremos en la solución de Reissner-Nordström que obtenemos a partir de la acción de Einstein-Maxwell. Al igual que con Schwarzschild, derivaremos la métrica y estudiaremos la estructura causal donde obtendremos tres casos distintos en función de la relación entre la masa y la carga eléctrica. Posteriormente, construiremos los correspondientes diagramas de Penrose y veremos la complejidad que presentan en comparación al caso sin carga. Finalmente, presentamos algunas conclusiones donde recogemos los resultados de los casos estudiados.

Asimismo, durante todo el trabajo hemos usado el sistema de unidades natural, es decir, tomamos la velocidad de la luz como una constante adimensional igualada a la unidad de la misma forma que la constante reducida de Planck y la constante de Boltzmann $c = \hbar = k_B = 1$.

Capítulo 2

Gravedad como teoría geométrica

La relatividad general es una teoría geométrica del campo gravitatorio. En ella, el espacio-tiempo se modela como una variedad diferenciable semiriemanniana y el marco matemático que nos permite su estudio es la geometría diferencial.

En términos matemáticos, una variedad semiriemanniana \mathcal{M} es un espacio equipado con un tensor métrico diferenciable de rango 2. Ejemplos de variedades semiriemannianas son las variedades de Lorentz, caracterizadas por poseer una signatura $(1, D - 1)$ (D la dimensión de la variedad). Esto quiere decir que para $D = 4$, el espacio-tiempo puede modelizarse como una variedad formada por una dimensión espacial y tres espaciales.

En nuestro espacio-tiempo, existe un procedimiento específico para medir distancias, el tensor métrico, así como una derivada covariante y transporte paralelo asociados. Estas magnitudes nos permiten definir tanto la curvatura como relacionar magnitudes físicas medidas por observadores que se encuentren en distintos puntos del espacio-tiempo. Para poder realizar estudios en relatividad general debemos conocer cómo se definen estas magnitudes y sobre todo, cómo operamos con ellas. Este capítulo está basado en las referencias [12, 13].

2.1. Tensor métrico

El tensor métrico o métrica, como utilizaremos en adelante para referirnos a él, es el objeto matemático que permite calcular distancias y todo lo relacionado con conceptos métricos en nuestra teoría. Es un tensor covariante y simétrico de rango 2 a partir del cual podemos definir el elemento de línea, ds^2 . Resume las propiedades geométricas del espacio-tiempo y su expresión, independientemente del sistema de coordenadas usado, es:

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b, \tag{2.1}$$

donde hemos empleado la notación de Einstein —donde los índices toman los valores $a, b = 1, \dots, D$ y cuando alguno se repiten supone un sumatorio respecto a ese índice $x^a y_a = \sum_{a=1}^D x^a y_a$ — para simplificar la expresión. La propiedad de simetría implica que las componentes satisfacen $g_{ab} = g_{ba}$.

Un aspecto importante de la métrica es la signatura que viene dada por el número de autovalores positivos, negativos y nulos que tiene en su representación matricial en un sistema de coordenadas arbitrario. En el presente trabajo tomamos el convenio $(-, +, +, +)$, donde el signo negativo se reserva para la coordenada temporal mientras que el positivo para las tres coordenadas espaciales restantes.

Como consecuencia de la signatura, la norma de los vectores no es definida positiva, por tanto, podremos hablar de vectores temporales, vectores espaciales y vectores nulos (norma al cuadrado negativa, positiva y nula respectivamente). Consecuentemente, tendremos curvas temporales si en cada punto de la curva el vector tangente es temporal y curvas espaciales (nulas) si es espacial (nulo). Al conjunto de rectas nulas que pasan por un punto, se le denomina cono de luz y delimita la trayectoria de cualquier partícula masiva a través del espacio-tiempo.

Una vez determinada la métrica, el siguiente paso es cómo definir la curvatura de la variedad.

2.2. Transporte paralelo y conexión

En un espacio-tiempo curvo no existe una forma obvia de relacionar vectores o tensores medidos en distintos puntos de la variedad \mathcal{M} . Esto es resultado de que el espacio tangente en cada uno de esos puntos, donde viven estos elementos, es diferente. Para solventar este problema usamos el transporte paralelo. Sin embargo, para poder definirlo, es necesario previamente determinar una conexión métrica. Esta conexión no es más que un conjunto de D^3 funciones, Γ_{ab}^c , que definen cómo hacer el transporte paralelo entre dos puntos.

Supongamos dos vectores, $V(P)$ y $V(Q)$, con origen en puntos distintos de la variedad (P, Q) y por tanto viven en espacios tangentes distintos, $T_P(\mathcal{M})$ y $T_Q(\mathcal{M})$. Necesitamos, de algún modo, un vector $V_P(Q)$ que viva en $T_Q(\mathcal{M})$, que tenga toda la información sobre el vector $V(P)$. Este vector que buscamos es el transportado paralelo de $V(P)$. La pregunta es cómo podemos identificar ese vector en $T_Q(\mathcal{M})$. Dada una conexión, Γ_{ab}^c , y

dada una curva entre los puntos, γ , $V_P(Q)$ se identifica a través de la fórmula:

$$(V_P)^c(Q) = V^c(P) - \Gamma_{ab}^c \delta x^a V^b(P). \quad (2.2)$$

Ahora bien, en ningún momento hemos especificado cuál es la conexión adecuada o cómo determinamos la forma de estas D^3 funciones. En una variedad determinada existen muchas conexiones posibles que definen de manera distinta el vector $V_P(Q)$ y la elección del conjunto Γ_{ab}^c es arbitraria. En la práctica la conexión suele estar determinada de antemano y posteriormente veremos como en las variedades equipadas con una métrica existe una especial —la conexión Levi-Civita— que simplifica muchas de las ecuaciones geométricas y aparece de forma natural en la relatividad general.

2.3. Derivada covariante

Como ya hemos visto, cada punto del espacio-tiempo soporta un espacio tangente distinto y a la hora de derivar una magnitud tensorial es necesario tener en cuenta la variación de las componentes, además de la propia base, de un punto a otro. Suponiendo que tenemos una conexión, y por consiguiente como hacer el transporte paralelo de un punto a otro, podemos definir un nuevo tipo de operador diferencial que se transforma como un tensor bajo cambios generales de coordenadas. Este operador diferencial es la derivada covariante y viene dada por:

$$\nabla_a V^b = \partial_a V^b + \Gamma_{ac}^b V^c. \quad (2.3)$$

Actúa como una derivada parcial, pero con un término de corrección debido al transporte paralelo. La derivada covariante sigue manteniendo las propiedades de linealidad y regla del producto que conocemos de la derivada parcial,

$$\nabla_a (AV^b + BW^b) = A\nabla_a V^b + B\nabla_a W^b, \quad (2.4)$$

$$\nabla_a (V^b W^b) = (\nabla_a V^b) W^b + V^b (\nabla_a W^b). \quad (2.5)$$

Debemos tener en cuenta que si actúa sobre un vector covariante, el término de la conexión cambia de signo en la ecuación (2.3). De esta forma podemos definir cómo actúa

sobre un tensor de rango (m, n) :

$$\begin{aligned} \nabla_c T^{a_1 a_2 \dots a_k}_{b_1 b_2 \dots b_l} = & \partial_c T^{a_1 a_2 \dots a_k}_{b_1 b_2 \dots b_l} \\ & + \Gamma_{cd}^{a_1} T^{da_2 \dots a_k}_{b_1 b_2 \dots b_l} + \Gamma_{cd}^{a_2} T^{a_1 d \dots a_k}_{b_1 b_2 \dots b_l} + \dots \\ & - \Gamma_{cb_1}^d T^{a_1 a_2 \dots a_k}_{db_2 \dots b_l} - \Gamma_{cb_2}^d T^{a_1 a_2 \dots a_k}_{b_1 d \dots b_l} - \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.4. Curvatura

Una vez entendida la idea del transporte paralelo y cómo podemos relacionar magnitudes medidas en distintos puntos de la variedad, podemos definir una variedad curva como aquella en la que el transporte paralelo de un vector a través de una curva cerrada resulta en un vector distinto al volver al punto de partida.

Para definir la curvatura de manera cuantitativa, podemos considerar el transporte paralelo de un vector a lo largo de un paralelogramo infinitesimal de lados, dx^a y dx^b . En concreto, nos interesa calcular la diferencia entre realizar el traslado por dos caminos distintos: primero a lo largo de dx^a , seguido de dx^b y luego empezar por dx^b y después dx^a . Esto equivale a calcular el conmutador de las derivadas covariantes actuando sobre el vector transportado:

$$[\nabla_a, \nabla_b] V^d = \nabla_a \nabla_b V^d - \nabla_b \nabla_a V^d. \quad (2.7)$$

Desarrollando la expresión y tras el cálculo de cada uno de los términos, que se encuentran en el apéndice A, llegamos a:

$$[\nabla_a, \nabla_b] V^d = R_{abc}{}^d V^c - T_{ab}^c \nabla_c V^d, \quad (2.8)$$

donde

$$R_{abc}{}^d = \partial_a \Gamma_{bd}^c - \partial_b \Gamma_{ad}^c - \Gamma_{be}^d \Gamma_{ad}^e + \Gamma_{be}^d \Gamma_{ac}^e, \quad (2.9)$$

$$T_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c. \quad (2.10)$$

Podemos ver que el conmutador consta de dos partes, la primera de ellas, proporcional al vector V^c , donde el factor de proporcionalidad es el tensor de Riemann (2.9) y la segunda, proporcional a la derivada covariante de V^d , donde el factor es el tensor de torsión que es antisimétrico $T_{ab} = -T_{ba}$ (2.10).

El tensor de Riemann mide la diferencia del transporte paralelo de V^c a través de las dos trayectorias y por tanto es una medida de la curvatura del espacio encerrado en el paralelogramo. Por otro lado, el tensor de torsión mide el grado en que cierra el paralelogramo.

2.5. La conexión Levi-Civita

En cualquier variedad existe siempre una conexión única, la conexión de Levi-Civita, que está completamente determinada por la métrica del mismo modo que el tensor de Riemann. La conexión Levi-Civita cumple dos condiciones:

1. Es simétrica: $\Gamma_{ab}^c = \Gamma_{ba}^c$.
2. La derivada covariante de la métrica es nula: $\nabla_a g_{bc} = 0$.

Si nos fijamos en la definición del tensor de torsión (2.10) la primera de las condiciones implica que es cero. Por tanto, el conmutador (2.8), depende exclusivamente del tensor de Riemann. La segunda condición se llama compatibilidad con la métrica e implica dos importantes propiedades. La primera de ellas es que cualquier producto escalar $V_a W^a = g_{ba} V^b W^a$ es invariante bajo transporte paralelo, lo que implica que la norma de cualquier vector también lo es. La segunda es en relación a la derivada covariante, la cual conmuta con subir, bajar o contraer índices.

En consecuencia la conexión de Levi-Civita queda determinada en función de las componentes de la métrica y sus derivadas de la siguiente forma:

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{db} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}). \quad (2.11)$$

Estas expresiones reciben el nombre de símbolos de Christoffel¹.

Al determinar completamente la conexión, los conceptos de transporte paralelo y curvatura, en particular el tensor de Riemann, quedan unívocamente definidos en términos de la métrica.

¹Cabe mencionar que los símbolos de Christoffel (2.11) no son tensores.

2.6. Tensor de Riemann

Una vez hemos especificado la conexión (2.11), la expresión del tensor de Riemann, vista en la ecuación (2.9), en función de la métrica, queda:

$$R_{abcd} = g_{ea} R^e{}_{bcd} = \frac{1}{2} (\partial_b \partial_c g_{ad} - \partial_a \partial_c g_{bd} - \partial_b \partial_d g_{ac} + \partial_a \partial_d g_{bc}). \quad (2.12)$$

También resulta útil estudiar algunos tensores formados por contracciones como el tensor de Ricci o el escalar de Ricci. Pero antes veamos algunas propiedades algebraicas del tensor de Riemann. A partir de la expresión anterior se pueden deducir las siguientes simetrías:

$$R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc} = R_{cdab}, \quad (2.13)$$

$$R_{abcd} + R_{adbc} + R_{acdb} = 0, \quad (2.14)$$

$$\nabla_e R_{abcd} + \nabla_d R_{abec} + \nabla_c R_{abde} = 0. \quad (2.15)$$

La primera igualdad (2.13) el tensor de Riemann es antisimétrico cuando se intercambia una de dos: el primer o el último par de índices. Sin embargo, es simétrico cuando se intercambian dichos pares entre sí. En la segunda igualdad se cambia cíclicamente la posición de los tres últimos índices y se le conoce como primera identidad de Bianchi. La cuarta corresponde a la segunda identidad de Bianchi.

Veamos ahora los tensores contruidos a partir de sus contracciones. En primer lugar, el tensor de Ricci, es la contracción del primer y tercer índice:

$$R_{ab} = g^{cd} R_{cabd} = R^c{}_{acb}. \quad (2.16)$$

Es la única contracción independiente posible, ya que el resto dan lugar a un tensor nulo o bien son el tensor de Ricci con el signo cambiado. Se trata de un tensor simétrico de rango 2 y posee diez componentes independientes. Su expresión en términos de los símbolos de Christoffel queda:

$$R_{ab} = \partial_c \Gamma_{ab}^c - \partial_a \Gamma_{cb}^c - \Gamma_{ad}^c \Gamma_{cb}^d + \Gamma_{ab}^c \Gamma_{dc}^d. \quad (2.17)$$

Por último definimos el escalar de Ricci como la contracción del tensor de Ricci:

$$R = g^{ab} R_{ab}. \quad (2.18)$$

Al tratarse de un escalar es invariante bajo cambios generales de coordenadas y además es el único escalar que se puede construir de la contracción del tensor de Riemann. Por esta razón, es el candidato idóneo para construir una acción en gravedad que nos permita encontrar las ecuaciones de movimiento de la teoría.

2.7. La acción de Einstein-Hilbert

De la mecánica analítica sabemos las ventajas del formalismo lagrangiano: variando con respecto a los grados de libertad podemos obtener las ecuaciones de movimiento que satisface una partícula. Por este motivo, el lagrangiano en cierta forma es un resumen de la dinámica del sistema o de la teoría.

Centrémonos en el caso más sencillo, encontrar las ecuaciones de campo de Einstein para el vacío. En este caso, la acción que da lugar a dichas ecuaciones es la llamada acción de Einstein-Hilbert y toma la forma:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{|g|} (R - 2\Lambda), \quad (2.19)$$

donde κ es una constante definida como $\kappa = 8\pi G$, Λ la constante cosmológica² y denominamos $\mathcal{L} = \sqrt{|g|}R$ el lagrangiano de Einstein-Hilbert construido a partir del escalar de Ricci, R , definido en la ecuación (2.18), que se integra en la variedad³ \mathcal{M} .

Las ecuaciones de campo Einstein se obtienen a través del principio de mínima acción respecto a la métrica inversa, g^{ab} :

$$\delta_g S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left(\delta_g \sqrt{|g|} (R - 2\Lambda) + \sqrt{|g|} \delta_g R \right) = 0. \quad (2.20)$$

En la última expresión, simplemente hemos aplicado la derivada del producto y como se puede observar obtenemos dos términos que analizaremos individualmente.

En el primero de ellos nos encontramos con la variación del elemento de volumen,

²La constante cosmológica no apareció en la primera publicación de Einstein de 1915. Fue añadida dos años más tarde cuando se interesó por la cosmología con el fin de obtener un universo estático [14]. Su valor depende de la curvatura en la región asintótica $\Lambda = \pm \frac{(D-1)(D-2)}{2L^2}$, donde el signo positivo corresponde a dS y el negativo a AdS.

³Por claridad en la lectura omitiremos \mathcal{M} en la integral cuando no sea relevante.

$\sqrt{|g|}$, la cual podemos escribir:

$$\delta\sqrt{|g|} = -\frac{1}{2}\sqrt{|g|}g_{ab}\delta g^{ab}. \quad (2.21)$$

El desarrollo completo de la variación se encuentra en el apéndice B.

En el segundo término tenemos que considerar la variación del escalar de Ricci, que si tenemos en cuenta su definición a partir del tensor de Ricci:

$$\delta_g R = \delta(g^{ab}R_{ab}) = R_{ab}\delta g^{ab} + g^{ab}\delta R_{ab}, \quad (2.22)$$

su variación se traduce en obtener la del propio tensor de Ricci. De nuevo el cálculo detallado queda recogido en el apéndice C y la expresión resultante queda:

$$\delta R_{ab} = \nabla_c(\delta\Gamma_{ab}^c) - \nabla_a(\delta\Gamma_{cb}^c). \quad (2.23)$$

Una vez tenemos las variaciones de cada término, podemos reescribir la variación de la acción como:

$$\begin{aligned} \delta_g S = & \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{|g|} \left(R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + g_{ab}\Lambda \right) \delta g^{ab} \\ & + \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{|g|} g^{ab} [\nabla_c(\delta\Gamma_{ab}^c) - \nabla_a(\delta\Gamma_{cb}^c)]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Analicemos primero en el segundo término. Teniendo en cuenta que la conexión viene determinada por la de Levi-Civita y por tanto la derivada de la métrica es nula, vamos a reescribir el término:

$$\int d^4x \sqrt{|g|} [\nabla_c(g^{ab}\delta\Gamma_{ab}^c) - \nabla_a(g^{ab}\delta\Gamma_{cb}^c)], \quad (2.25)$$

si además renombramos índices mudos,

$$\int d^4x \sqrt{|g|} \nabla_a(g^{cb}\delta\Gamma_{cb}^a - g^{ab}\delta\Gamma_{cb}^c). \quad (2.26)$$

Podemos definir un vector X^a tal que,

$$X^a = g^{cb}\delta\Gamma_{cb}^a - g^{ab}\delta\Gamma_{cb}^c, \quad (2.27)$$

perteneciente a una región de la variedad \mathcal{M} con una frontera $\partial\mathcal{M}$. De esta forma podemos

aplicar el teorema de Stokes resultando:

$$\int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{|g|} \nabla_a X^a = \int_{\partial\mathcal{M}} \sqrt{|h|} n_a X^a, \quad (2.28)$$

donde n_a es el vector unitario normal a la hipersuperficie $\partial\mathcal{M}$ y h el determinante de la métrica inducida. Si desarrollamos nuestro vector X^a en términos de la variación de los símbolos de Christoffel, vemos que existe una dependencia en la derivada de la variación de la métrica. Este término, presente para espacios cerrados —es decir, compactos y con borde— es incompatible con un principio variacional bien definido, ya que imponiendo $\delta g^{ab}|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ no se satisfecería la condición de extremización. Por este motivo es necesario suplementar el término de Einstein-Hilbert, con el denominado término de borde de Gibbons-Hawking-York para cancelarlo [15, 16]. Añadiendo este resultado a la ecuación (2.24) la variación total de la acción respecto a la métrica es:

$$\delta_g S = -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{|g|} \left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R + g_{ab} \Lambda \right) \delta g^{ab}. \quad (2.29)$$

Por último, como sabemos, debemos igualar a cero la variación para obtener las ecuaciones de Einstein en el vacío:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R + g_{ab} \Lambda = 0. \quad (2.30)$$

Nos vamos a centrar en buscar soluciones con $\Lambda = 0$, es decir, soluciones asintóticamente planas.

2.8. Ecuaciones de campo de Einstein con materia

Lo que hemos visto hasta ahora solo nos ha proporcionado la ecuaciones de Einstein del vacío. Para obtener la ecuaciones completas debemos añadir a la acción un lagrangiano que describa la dinámica de la materia.

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|} \left[\frac{1}{2\kappa} R + \mathcal{L}_m(\phi, g) \right], \quad (2.31)$$

donde $m(\phi, g)$ contiene los campos de materia ϕ , y la métrica g .

Al variar de nuevo la acción total respecto a la métrica obtenemos las ecuaciones de

movimiento buscadas:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \kappa T_{ab}. \quad (2.32)$$

T_{ab} es el tensor de energía-momento que se define a partir del lagrangiano de materia como:

$$T_{ab} = 2 \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{ab}} - g_{ab} \mathcal{L}_m. \quad (2.33)$$

Una vez realizado todo este trabajo introductorio de conceptos claves que usaremos de ahora en adelante, concluyendo con la obtención de las ecuaciones de campo de Einstein, vamos a centrarnos en las soluciones a las ecuaciones (2.30).

Capítulo 3

La solución de Schwarzschild

En general, encontrar soluciones para las ecuaciones (2.30) no es sencillo aunque imponemos $\Lambda = 0$. El primer paso para simplificar las ecuaciones es tomar la traza y comprobar que $R = 0$, por consiguiente, tenemos:

$$R_{ab} = 0, \tag{3.1}$$

un sistema de ecuaciones diferenciales para la métrica g_{ab} . Sin embargo, debido a la no linealidad que presentan las ecuaciones es muy difícil resolverlas directamente. Además, si tenemos en cuenta la covarianza, las ecuaciones de Einstein no determinan la forma explícita de la métrica, con esto nos referimos a que el mismo espacio-tiempo escrito en otras coordenadas será también solución. Por estas razones, lo importante es elegir un buen *ansatz*, es decir, una propuesta para la posible forma de la métrica, basada en las simetrías del sistema y consideraciones físicas.

3.1. Derivación de la solución de Schwarzschild

Como hemos mencionado la elección de un buen *ansatz* es clave para resolver este tipo de sistema de ecuaciones. La solución de Schwarzschild es esféricamente simétrica y estática. Teniendo en cuenta estas limitaciones, la métrica más general posible tiene la forma:

$$ds^2 = -e^{2A(r)}dt^2 + e^{2B(r)}dr^2 + r^2d\Omega_2^2, \tag{3.2}$$

donde $d\Omega_2^2$ denota la métrica de la esfera bidimensional \mathbb{S}^2 ,

$$d\Omega_2^2 = \sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2. \tag{3.3}$$

Buscamos determinar $A(r)$ y $B(r)$ usando la ecuación reducida de Einstein (3.1). Antes de ver el sistema al que llegamos para las funciones $A(r)$ y $B(r)$, debemos calcular una

serie de elementos que emplearemos en el proceso.

3.2. Cálculo de Γ_{ab}^c para la métrica de Schwarzschild

Como vimos en la ecuación (2.17) las componentes del tensor de Ricci se definen a partir de los símbolos de Christoffel, y estos, a su vez, por los elementos de la métrica. Debemos conocer su forma para poder llegar al sistema de ecuaciones mencionado anteriormente. Teniendo en cuenta como se definen (2.11) y la forma diagonal de nuestro ansatz, el número de símbolos no nulos se reduce a los siguientes:

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2}g^{tt}\partial_r g_{tt} = A', \quad \Gamma_{tt}^r = -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{tt} = A'e^{2(A+B)}, \quad (3.4)$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{rr} = B', \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_r g_{\theta\theta} = r^{-1}, \quad (3.5)$$

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}\partial_r g_{\phi\phi} = r^{-1}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{\theta\theta} = -re^{2(A+B)}, \quad (3.6)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}\partial_\theta g_{\phi\phi} = \tan^{-1}\theta, \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{\phi\phi} = -e^{-2B}r\text{sen}^2\theta \quad (3.7)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_\theta g_{\phi\phi} = -\text{sen}\theta\cos\theta. \quad (3.8)$$

Donde $A = A(r)$ y $B = B(r)$ y la prima denota la derivada con respecto a r . De esta forma podemos escribir las componentes del tensor de Ricci en función de la métrica y obtener el sistema buscado. Conociendo la relación (2.17) y tomando solo las componentes distintas de cero llegamos a:

$$R_{tt} = e^{2(A-B)} \left[A'^2 + 2A'r^{-1} - A'B' + A'' \right], \quad (3.9)$$

$$R_{rr} = -A'^2 + 2B'r^{-1} + A'B' - A'', \quad (3.10)$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-2B} [-1 - rA' + rB'] + 1, \quad (3.11)$$

$$R_{\phi\phi} = \text{sen}^2\theta R_{\theta\theta}. \quad (3.12)$$

Para resolver el sistema, multiplicamos R_{tt} por $e^{-2(A-B)}$, lo sumamos con R_{rr} e igualándolo a cero llegamos a:

$$B = -A + c_0. \quad (3.13)$$

La constante de integración no tiene significado físico por lo que podemos elegir $c_0 = 0$.

Sustituyendo la relación que acabamos de encontrar en $R_{\theta\theta}$; obtenemos:

$$e^{2A} = 1 - \frac{C}{r}, \quad (3.14)$$

donde escogemos $C = 2M$, una constante con unidades de longitud. Este resultado se obtiene de identificar el potencial gravitatorio en el límite newtoniano, con M la masa del agujero negro.

Finalmente, sustituyendo en la ecuación (3.2), obtenemos la métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2. \quad (3.15)$$

Esta solución describe el espacio-tiempo exterior de cualquier objeto estático esféricamente simétrico sin rotación y depende de un único parámetro M .

De acuerdo con el teorema de Birkhoff [17, 18], la solución de Schwarzschild resulta ser la única solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein en el vacío.

3.3. Estructura causal de la solución de Schwarzschild

Una vez obtenida la métrica de Schwarzschild vamos a realizar un estudio de su geometría, en concreto, la estructura causal y sus efectos físicos.

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2. \quad (3.16)$$

Suponiendo un objeto cuya masa se encuentra en el origen, no es complicado ver cómo existen determinados valores de las coordenadas que hacen divergente o degenerada la métrica.

El primer caso surge para $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, haciendo nulo $g_{\phi\phi}$. Sin embargo, esta degeneración aparece como consecuencia del uso de coordenadas esféricas, dejando claro que se trata de una singularidad de coordenadas. Es decir, existe un cambio de coordenadas tal que los puntos $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ se vuelven regulares.

Otras singularidades aparecen para $r = 0$ y $r = 2M$, donde g_{tt} diverge y se anula respectivamente. En este caso, no es tan fácil identificar si se tratan de singularidades

de coordenadas o por el contrario, físicas. Para ello, nos apoyaremos en los invariantes de curvatura, ya que son una cantidad independiente del sistema de referencia y nos permitirá encontrar una respuesta rápidamente. Para la solución de Schwarzschild, tanto R como $R_{ab}R^{ab}$ no son útiles puesto que son cero por construcción. Por este motivo nos ayudaremos del invariante de Kretschmann:

$$K = R_{abcd}R^{abcd} = \frac{48M^2}{r^6}. \quad (3.17)$$

Queda claro que el invariante diverge para $r = 0$, pero es completamente regular para $r = 2M$. Por tanto, en el primer caso estamos ante una singularidad física, mientras en el segundo tenemos otra singularidad de coordenadas. En cambio, esta última, a diferencia de las primeras comentadas para θ , sí que tiene un significado físico que veremos posteriormente.

Otra forma de esclarecer que $r = 2M$ no es singular es realizar un cambio de coordenadas. Es lo que haremos en el siguiente capítulo con Eddington-Finkelstein.

3.4. Coordenadas de Eddington-Finkelstein

El radio $r = 2M$ recibe el nombre de radio de Schwarzschild y queremos estudiar el comportamiento de objetos en sus proximidades.

Empleando las coordenadas de Schwarzschild —las que conocemos hasta ahora— al acercarnos a dicho radio los conos de luz se cierran cada vez más hasta el punto de degenerarse en $r = 2M$. Esto conduce a que una partícula que se dirige hacia el centro desde un punto exterior $r > 2M$, parece acercarse asintóticamente al radio de Schwarzschild, pero nunca cruzarlo.

Esta conclusión es errónea y se debe a que las coordenadas de Schwarzschild no son apropiadas para describir lo que pasa en las proximidades del radio. Necesitamos encontrar otras coordenadas que nos permitan conectar las regiones dentro y fuera del radio de Schwarzschild y entender mejor la estructura causal de la solución.

El primer paso será introducir la nueva coordenada radial r_* definida como:

$$dr_* = \frac{dr}{f(r)}, \quad (3.18)$$

donde $f(r) = 1 - \frac{2M}{r}$. La solución de esta ecuación diferencial nos lleva a:

$$r_* = r + 2M \log \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|. \quad (3.19)$$

Este tipo de coordenada es conocida como coordenada tortuga y nos sirve para describir la trayectoria de los rayos de luz que viajan en la dirección radial. Las geodésicas nulas que siguen será:

$$ds^2 = 0 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r} \right), \quad (3.20)$$

que teniendo en cuenta la relación 3.18, vienen dadas finalmente por:

$$\frac{dr_*}{dt} = \pm 1 \Rightarrow t \pm r_* = C. \quad (3.21)$$

El valor positivo corresponde a las geodésicas entrantes (a medida que aumenta t , r_* debe disminuir) y el negativo para las salientes. Atendiendo a esto, podemos introducir un nuevo par de coordenadas nulas:

$$v = t + r_*, \quad \text{y} \quad u = t - r_*. \quad (3.22)$$

En lo que sigue, vamos a considerar la métrica de Schwarzschild escrita primero en coordenadas (v, r) , seguidamente en (u, r) y por último en (u, v) . De este modo, vamos a poder analizar como describen las zonas interior y exterior del radio de Schwarzschild.

3.4.1. Coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes (o avanzadas)

Como hemos comentado, el primer cambio de coordenadas que vamos a hacer es $(t, r, \theta, \phi) \rightarrow (v, r, \theta, \phi)$. Tenemos entonces,

$$t = v - r_* \quad \Rightarrow \quad dt = dv - dr_* = dv - \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr. \quad (3.23)$$

Realizando este cambio en la métrica de Schwarzschild expresión (3.16) encontramos la nueva métrica:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega_2^2. \quad (3.24)$$

Como podemos ver, el término dr^2 desaparece por lo que no tenemos la singularidad para $r = 2M$, haciendo posible el avance de la coordenada r y cruzar el radio de Schwarzschild.

Por el contrario, el término dv^2 se anula para dicho radio y además cambia de signo para $r < 2M$.

Al cruzar el radio de Schwarzschild la coordenada temporal y radial invierten sus papeles. Por esta razón, avanzar hacia radios menores dentro de la zona $r < 2M$ es avanzar en el tiempo. Esto nos lleva a considerar la singularidad $r = 0$ como una superficie en el futuro causal inevitable para cualquier observador u objeto que cruce el radio de Schwarzschild.

Vamos a fijarnos en el comportamiento de las geodésicas nulas, entrantes ($v = \text{cte}$) y salientes ($u = \text{cte}$) en la nueva métrica. En el primer caso, los rayos de luz pueden atravesar el radio de Schwarzschild cayendo inevitablemente en $r = 0$, como habíamos comentado. Sin embargo, para los rayos de luz salientes, el comportamiento depende de la zona en la que se encuentren. Para la región más exterior, ($r > 2M$), los rayos se alejarán del radio hacia el infinito. Mientras que aquellos que se propaguen en la región interior, ($r < 2M$), se alejarán del radio en dirección contraria hasta caer en la singularidad $r = 0$.

Para un observador exterior es imposible obtener información sobre lo que ocurre dentro, ya que desde la región interior ninguna señal puede escapar hacia el infinito. Se dice que la luz dentro del radio de Schwarzschild sufre un corrimiento al rojo infinito, es decir, la longitud de onda se extiende hasta el infinito y ninguna información es capaz de salir de esa región. El hecho de que tanto las señales entrantes, como las salientes emitidas en la región $r < 2M$, estén dirigidas hacia el centro, hace del radio de Schwarzschild un horizonte de sucesos: las influencias causales solo pueden atravesarlo en una dirección.

Una singularidad rodeada por un horizonte de sucesos, que evita ver que lo que pasa en el interior del horizonte se define como un agujero negro. Como venimos comentando, cualquier objeto que cruce el horizonte está destinado a avanzar hacia la singularidad.

3.4.2. Coordenadas de Eddington-Finkelstein salientes (o retardadas)

Si ahora realizamos el cambio de coordenadas $(t, r, \theta, \phi) \rightarrow (u, r, \theta, \phi)$ y tenemos en cuenta las relaciones (4.34) y (3.22), al igual que en el apartado anterior, la métrica de

Schwarzschild escrita en las nuevas coordenadas queda:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega_2^2. \quad (3.25)$$

Como podemos apreciar la única diferencia con la métrica en las coordenadas avanzadas es el signo del término cruzado. Sin embargo, el espacio-tiempo que describe es notablemente distinto.

El comportamiento de las geodésicas nulas entrantes ($v = \text{cte}$) y salientes ($u = \text{cte}$) es inverso al visto para la métrica anterior. Los rayos de luz que siguen las geodésicas nulas entrantes se aproximan asintóticamente al radio de Schwarzschild ya sea desde la zona interior o exterior, sin llegar a cruzarlo nunca. Por otro lado, los que siguen las geodésicas nulas salientes escapan de $r = 0$ hacia el infinito. Para una partícula masiva que se encuentre en el interior del horizonte, la estructura causal del espacio-tiempo la envía fuera de él.

Está claro que estamos ante un objeto claramente distinto de un agujero negro. En concreto recibe el nombre de agujero blanco: un observador puede tener información de lo que ocurre en el interior, sin embargo, es imposible aproximarse a él. En este caso $r = 0$ es una singularidad en el pasado y el radio de Schwarzschild solo deja pasar influencias causales desde el interior hacia el exterior.

La descripción que nos ofrecen cada una de las coordenadas son completamente diferentes a pesar de que provienen de la misma solución (3.16) de hecho, una es la inversión temporal de la otra. Podríamos preguntarnos cómo es posible que un simple cambio de coordenadas pueda cambiar las propiedades físicas de una solución, cuando sabemos que estas son independientes del sistema elegido.

La respuesta es que las coordenadas avanzadas de Eddington-Finkelstein y las retardadas para $r < 2M$ describen zonas distintas de la variedad. Por ello necesitamos unas nuevas coordenadas, las coordenadas de Kruskal, que nos van a permitir cubrir todo el espacio-tiempo.

No obstante, no estamos interesados en la derivación y expresión de la métrica en las coordenadas de Kruskal. Nuestro objetivo es encontrar una forma de presentar las principales relaciones causales del espacio-tiempo. Para ello nos basta con el diagrama de Penrose.

3.5. Diagrama de Penrose

Al estar trabajando con un espacio-tiempo de cuatro dimensiones no hay manera de poder visualizarlo directamente. Sin embargo, gracias a la simetría esférica que posee podemos reducir en dos la dimensión y construir una representación bidimensional en la que cada punto es una dos-esfera.

La idea entonces es representar el espacio-tiempo infinito en un espacio finito manteniendo el comportamiento de la métrica y la estructura causal de dicha variedad. Para construir el diagrama vamos a usar las nuevas coordenadas que obtuvimos al introducir la coordenada tortuga:

$$v = t + r_*, \quad dv = dt + dr_*, \quad (3.26)$$

$$u = t - r_*, \quad du = dt - dr_*, \quad (3.27)$$

con estas relaciones podemos reescribir la métrica de Schwarzschild, obviando el término $d\Omega_2^2$ como:

$$ds^2 = -f(r) dudv, \quad \text{con} \quad f(r) = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (3.28)$$

A partir de aquí y sabiendo como están relacionadas las nuevas coordenadas u y v con t y r_* ,

$$r_* = \frac{v - u}{2}, \quad t = \frac{u + v}{2}, \quad (3.29)$$

podremos definir dos tipos de bloques, analizando el comportamiento de los límites de la métrica en los puntos singulares, con los que construiremos nuestro diagrama.

3.5.1. Bloque regular

En el caso de la métrica de Schwarzschild, hemos visto cómo tenemos un solo horizonte de sucesos en $r = 2M$ que divide el espacio-tiempo en dos regiones, si atendemos a la coordenada radial.

El bloque regular es aquel en el que consideraremos las regiones delimitadas por estos horizontes que no contienen a la singularidad, en este caso, $2M < r < \infty$.

Recordando cómo se define r_* (4.34) estudiemos qué pasa con las nuevas coordenadas cuando nos acercamos a los extremos de la región:

$$\text{Para } r \rightarrow \infty, \quad r_* > 0 \rightarrow (v - u) > 0 \begin{cases} v \text{ finito, } u \rightarrow -\infty, \quad t \rightarrow -\infty, \\ u \text{ finito, } v \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

$$\text{Para } r \rightarrow 2M, \quad r_* < 0 \rightarrow (v - u) < 0 \begin{cases} v \text{ finito, } u \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty, \\ u \text{ finito, } v \rightarrow -\infty, \quad t \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Para poder representar estas fronteras en nuestro diagrama tenemos que realizar un nuevo cambio de variable (compactificación) para poder cubrir la totalidad del espacio-tiempo en un rango finito:

$$u = \tan U \quad \text{y} \quad v = \tan V, \quad (3.30)$$

de esta forma, cuando u y v tomen los valores $\pm\infty$, U y V valdrán $\pm\frac{\pi}{2}$.

Ahora ya sí, estamos en condiciones de representar gráficamente nuestro bloque que se corresponde con la figura 3.1. En ella podemos ver como las líneas temporales ($r = \text{cte}$), comienzan en i^+ y se extienden hasta alcanzar i^- . Por esto, nos referimos al punto i^+ (i^-) como infinito temporal futuro (pasado). De forma análoga i^0 representa el infinito espacial, el conjunto de los puntos iniciales y finales de las curvas espaciales ($t = \text{cte}$). Por otro lado, tenemos las geodésicas nulas, que se dirigen del infinito nulo pasado (\mathcal{I}^-) hacia el infinito nulo futuro (\mathcal{I}^+).

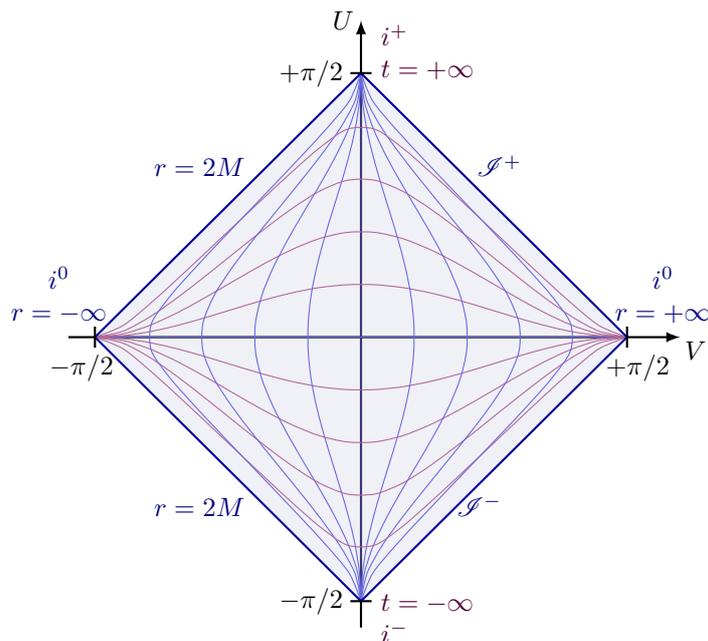


Figura 3.1: Bloque regular para la métrica de Schwarzschild. Las líneas moradas son para $t = \text{cte}$ y las azules para $r = \text{cte}$.

3.5.2. Bloque singular

Ahora realizaremos el mismo procedimiento pero para la región que contiene la singularidad, $r_0 < r < 2M$. Veamos pues lo que ocurre con u y v cuando nos acercamos a las fronteras:

Para $r \rightarrow 0$, $r_* = 0 \rightarrow v = u$.

$$\text{Para } r \rightarrow 2M, \quad r_* < 0 \rightarrow (v - u) < 0 \begin{cases} v \text{ finito, } u \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty, \\ u \text{ finito, } v \rightarrow -\infty, \quad t \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Representando nuestro bloque en los ejes U y V , obtenemos la figura 3.2:

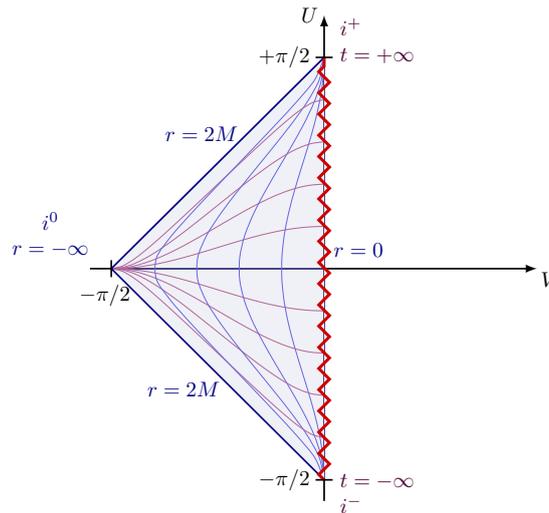


Figura 3.2: Bloque singular para la métrica de Schwarzschild. Las líneas moradas son para $t = \text{cte}$ y las azules para $r = \text{cte}$.

Sin embargo, debemos tener en cuenta un detalle que ya habíamos comentado previamente. Al cruzar el horizonte, en esta región donde se sitúa la singularidad, los papeles de la coordenada radial y temporal se invierten. Esto nos lleva a que las líneas que hemos dibujado como temporales son espaciales y viceversa. Hay que hacer una transformación y el bloque que buscamos queda representado en la figura 3.3:

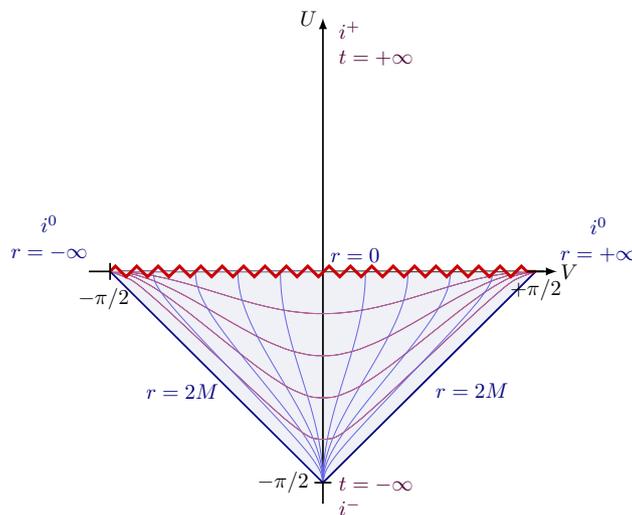


Figura 3.3: Bloque singular transformado.

3.5.3. Construcción del diagrama

Finalmente, una vez tenemos bien definidas las estructuras de nuestros bloques, para llegar al diagrama definitivo de Penrose debemos unirlos de todas las formas que nos sea

posible. Para ello debemos tener en cuenta las simetrías que presentan:

1. Se puede tomar $t \rightarrow -t$ porque el espacio es estático.
2. Se puede hacer una inversión $u \rightarrow -u$ y $v \rightarrow -v$, ya que en la métrica aparece el producto $(dudv)$.

El diagrama que resulta de unir todos los bloques se conoce como diagrama de extensión máxima. Este nos permite estudiar la estructura causal de espacio-tiempo compatible con las ecuaciones de campo de Einstein.

En nuestro caso, la solución de Schwarzschild, el diagrama de Penrose completo toma la forma descrita en la figura 3.4 .

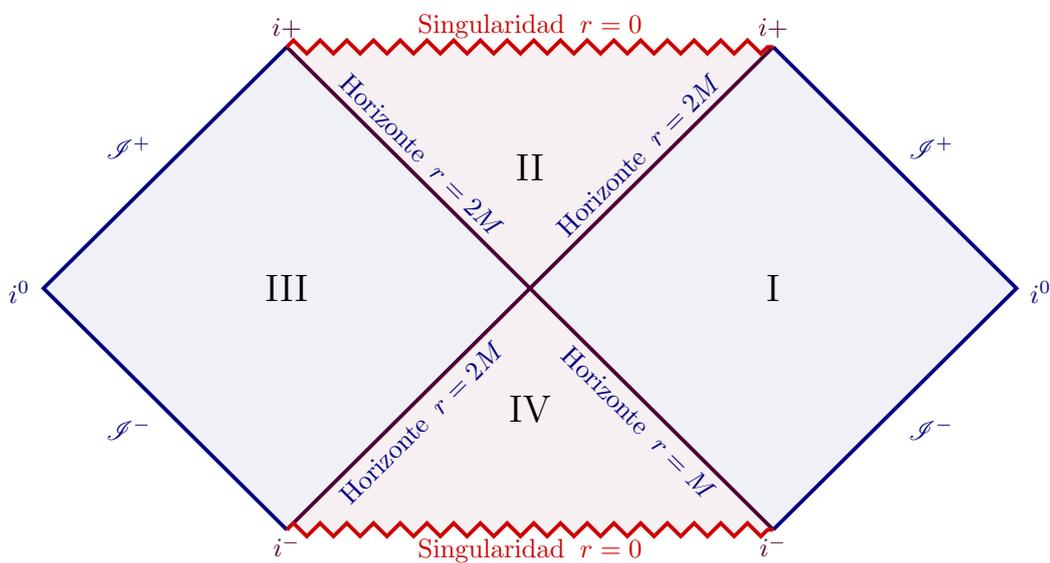


Figura 3.4: Diagrama Penrose para el agujero negro de Schwarzschild.

Los conos de luz forman ángulos de 45° lo que hace del horizonte $r = 2M$ una superficie nula, ya que también forma un ángulo de 45° . Una partícula que entra en la región II no podrá emitir señales a la región I y acabará en la singularidad inevitablemente. Por el contrario, en la región IV ocurre justo lo contrario, cualquier señal emitida tiene que salir forzosamente. Con esto, queda claro que la región II es el agujero negro y la IV corresponde al agujero blanco.

No obstante, existe una región asintóticamente plana que ninguna de las coordenadas de Eddington-Finkelstein podía ver, III. Es una especie de imagen espejo de I, desde donde observadores y partículas pueden caer a la singularidad en la región II. Están conectadas por un único punto $t, r = 0$, llamado puente de Einstein-Rosen o agujero de gusano. La

estructura causal es tal que no pueden pasar influencias causales de una región a otra, pero sí pueden ponerse en contacto observadores de distintas regiones si cruzan el horizonte y entran en la región II.

Al igual que el agujero blanco se considera que no tiene ninguna manifestación física y surge de la definición de una de las soluciones, parece probable que este nuevo universo que aparece sea también un artefacto matemático. Sin embargo existe una propuesta especulativa en la que la comunicación planteada detrás del horizonte puede ser posible.

La idea de que esta nueva región corresponda necesariamente a un universo diferente no tiene por qué ser cierta. Las dos partes asintóticamente planas podrían ser dos agujeros negros muy separados pero pertenecientes al mismo universo. Esto sería una solución aproximada ya que por muy lejos que se encuentren se atraerían.

Visto de esta forma, los dos observadores que comentábamos, que viven a años luz de distancia, podrían saltar a estos agujeros negros y encontrarse detrás del horizonte. Eso sí, inevitablemente acabarían llegando a la singularidad.

Una propuesta, que nace de la gravedad cuántica, sugiere que los dos agujeros negros están conectados si tienen alguna medida de entrelazamiento cuántico. Esta propuesta recibe el nombre de EP=EPR, donde EP denota el puente de Einstein-Rosen [19], el cual caracteriza una conexión geométrica, y EPR [20] denota el entrelazamiento de la paradoja de Einstein-Podolsky-Rosen [21]. Más información detallada sobre este tema y el entrelazamiento se encuentran [22], así como en las referencias incluidas en estos trabajos.

Capítulo 4

La solución de Reissner-Nordström

Hemos estudiado la solución para la ecuaciones de Einstein en el vacío que nos han llevado al agujero negro de Schwarzschild. Ahora vamos a considerar una generalización que podría parecer relativamente sencilla: el agujero negro con carga o agujero negro de Reissner-Nordström. Sigue siendo una solución esféricamente simétrica y estática y surge como solución a la acción, en este caso, de Einstein-Maxwell. No obstante, antes de encontrar las ecuaciones de movimiento y derivar la solución de la métrica es necesario introducir la generalización de la teoría de Maxwell en espacios curvos.

4.1. Teoría de Maxwell en espacios curvos

La teoría de Maxwell se comporta de manera covariante bajo las transformaciones de Lorentz, es decir, los objetos que aparecen toman de manera natural la forma de tensores y 1-formas.

La densidad de carga ρ y la densidad de corriente $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ forman las componentes de una 1-forma j^a y los potenciales Φ y \mathbf{A} de otra 1-forma A^a .

$$j^a = \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}, \quad A^a = \begin{pmatrix} \Phi \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Los campos eléctricos y magnéticos se definen a partir de los potenciales ϕ y \mathbf{A} mediante las siguientes relaciones:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \partial_t\mathbf{A} \quad \vec{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.2)$$

Podemos combinar ambos en un tensor antisimétrico F^{ab} , llamado tensor electromagnético

$$F^{ab} = \partial^a A^b - \partial^b A^a, \quad (4.3)$$

que escrito en forma matricial queda

$$F_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

La ecuaciones de Maxwell vienen dadas por:

$$\partial_a F_{bc} + \partial_c F_{ab} + \partial_b F_{ca} = 0 \quad \partial_a F^{ab} = j^b. \quad (4.5)$$

Podemos generalizar la teoría de Maxwell a espacios curvos, donde las leyes anteriores toman la forma:

$$\nabla_a F_{bc} + \nabla_c F_{ab} + \nabla_b F_{ca} = 0 \quad \nabla_a F^{ab} = j^b. \quad (4.6)$$

Si tenemos en cuenta la conexión Levi-Civita y la antisimetría mencionada del tensor electromagnético, permiten reescribir la ecuación homogénea como:

$$\partial_a F_{bc} + \partial_c F_{ab} + \partial_b F_{ca} = 0. \quad (4.7)$$

Retomamos la misma forma que en el espacio plano de Minkowski, es decir, el tensor electromagnético sigue teniendo la misma forma con derivadas parciales vista en la ecuación (4.3):

$$\begin{aligned} F_{ab} &= \nabla_a A_b - \nabla_b A_a \\ &= \partial_a A_b - \Gamma_{ab}^c A_c - \partial_b A_a - \Gamma_{ba}^c A_c \\ &= \partial_a A_b - \partial_b A_a. \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.2. La acción de Einstein-Maxwell

El agujero negro de Reissner-Nordström aparece, como ya hemos introducido, al considerar tanto la masa como la carga eléctrica. Para encontrar las ecuaciones de movimiento que posteriormente resolveremos, tenemos que proceder de forma equivalente al caso de Schwarzschild.

No obstante, tenemos que trabajar con una nueva acción donde se incluya el término

electromagnético. Se trata de la denominada acción de Einstein-Maxwell:

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2\kappa} R - \frac{1}{4} F^2 \right), \quad (4.9)$$

donde el primer término es equivalente al visto en la acción de Einstein (2.19) y F es el tensor electromagnético introducido en la sección anterior.

Nuevamente, las ecuaciones de movimiento las obtendremos a través del principio variacional, donde esta vez tenemos que considerar tanto la variación respecto la métrica como la 1-forma A (potencial vector magnético).

4.2.1. Variación con la métrica

Comenzaremos desarrollando la variación de la acción con la métrica.

$$\delta_g S = \int d^4x \left[\delta_g \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2\kappa} R - \frac{1}{4} F^2 \right) + \sqrt{|g|} \delta_g \left(\frac{1}{2\kappa} R - \frac{1}{4} F^2 \right) \right]. \quad (4.10)$$

Hemos aplicado simplemente la derivada del producto consiguiendo dos términos que analizaremos individualmente. El primero de ellos corresponde con la variación del elemento de volumen. Este cálculo se encuentra en el apéndice B y el resultado se recoge en la expresión (2.21).

Para el segundo, tanto el escalar de Ricci, R , como el tensor electromagnético, F , dependen de la métrica. La variación del escalar de Ricci es idéntica a la vista en el capítulo 2 para la acción de Einstein-Hilbert. Por tanto, veamos como calcular la del tensor electromagnético.

$$\begin{aligned} \delta_g F^2 &= \delta (F^{ab} F_{ab}) = \delta (g^{bd} g^{ac} F_{cd} F_{ab}) = \\ &g^{ac} \delta g^{bd} F_{cd} F_{ab} + g^{bd} \delta g^{ac} F_{cd} F_{ab} = 2F_{bd} g^{cd} F_{ac} \delta g^{ab}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Con las variaciones de cada uno de los elementos podemos reescribir la variación de la acción total:

$$\delta_g S = \int d^4x \sqrt{|g|} \left[-\frac{1}{2} g_{ab} \left(\frac{1}{2\kappa} R - \frac{1}{4} F^2 \right) + \frac{1}{2\kappa} R_{ab} - \frac{1}{2} F_{bd} g^{cd} F_{ac} \right] \delta g^{ab}. \quad (4.12)$$

Por último para llegar a las ecuaciones de movimiento para la métrica solo tenemos que

igualar a cero la variación:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \kappa \left(F_a{}^c F_{bc} - \frac{1}{4}g_{ab}F^2 \right). \quad (4.13)$$

Sin embargo, estas no son la ecuaciones completas. Ahora debemos considerar la variación respecto a la 1-forma A para hallar las eom del campo electromagnético.

4.2.2. Variación con la 1-forma A

Como vamos a ver, este cálculo es más sencillo, ya que el tensor electromagnético es el único que tiene una variación no nula respecto a A . Recordemos que F se define por la ecuación (4.3), si aplicamos la variación nos queda:

$$\begin{aligned} \delta_A (F^2) &= \delta_A (F^{ab} F_{ab}) = 2\delta_A (\partial^a A^b \partial_a A_b - \partial^a A^b \partial_b A_a) = \\ &= 2\delta_A [\partial^a A^b (\partial_a A_b - \partial_b A_a)] = 4\delta_A (\partial^a A^b) F_{ab}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Intercambiando la derivada parcial con la variación,

$$\delta_A F^2 = 4\partial^a (\delta_A A^b) F_{ab}. \quad (4.15)$$

Con ello la variación total de la acción respecto a A se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \delta_A S &= -\delta_A \int d^4x \sqrt{|g|} \frac{1}{4} F^2 = - \int d^4x \sqrt{|g|} \partial^a (\delta_A A^b) F_{ab} = \\ &= - \int d^4x \partial^a (\sqrt{|g|} F_{ab}) \delta_A A^b = - \int d^4x \sqrt{|g|} \nabla^a F_{ab} \delta_A A^b. \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde en la última igualdad hemos empleado la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \nabla_a v^a &= \partial_a v^a + \Gamma_{a\lambda}^a v^\lambda = \partial_a v^a + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\lambda \sqrt{|g|} v^\lambda = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_a (\sqrt{|g|} v^a) \\ \nabla^a v_a &= \nabla^a (g_{ab} v^b) = g_{ab} g^{ac} \nabla_c v^b = \delta_b^c \nabla_c v^b = \nabla_b v^b. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Igualando la variación a cero llegamos a las ecuaciones de movimiento,

$$\nabla^a F_{ab} = 0. \quad (4.18)$$

Ahora sí, atendiendo a los dos resultados, las ecuaciones de movimiento de la teoría de Einstein-Maxwell vienen dadas por la ecuación de Einstein y la ecuación de Maxwell en el vacío:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \kappa \left(F_a{}^c F_{bc} - \frac{1}{4}g_{ab}F^2 \right), \quad \nabla^a F_{ab} = 0. \quad (4.19)$$

4.3. Derivación de la solución de Reissner-Nordström

Con las ecuaciones ya planteadas, el siguiente paso es encontrar una solución. La solución de Reissner-Nordström, como ya hemos mencionado, es esféricamente simétrica y estática igual que la de Schwarzschild. La forma de proceder será idéntica a la desarrollada durante en el capítulo 3 ya que la métrica que buscamos es de la misma forma. Además, debemos proponer también un ansatz para el campo electromagnético. Para el segundo escogemos lo que se conoce como ansatz eléctrico¹

$$ds^2 = -e^{2A(r)}dt^2 + e^{2B(r)}dr^2 + r^2d\Omega_2^2, \quad F_{tr} = E(r). \quad (4.20)$$

Ahora tenemos que determinar las funciones $A(r)$ y $B(r)$ usando las ecuaciones de Einstein y Maxwell.

4.3.1. Ecuación de Maxwell

Vamos a comenzar resolviendo la ecuación de Maxwell que podemos escribirla atendiendo a la relación (4.17) como:

$$\nabla^a F_{ab} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial^a \left(\sqrt{|g|} F_{ab} \right) = 0. \quad (4.21)$$

Las componentes r , θ y ϕ de la ecuación anterior están satisfechas automáticamente ya que son nulas. sin embargo, la componente t nos da información:

$$r^{-2}e^{-(A+B)}\text{sen}^{-1}\theta\partial^r \left(-r^2e^{(A+B)}\text{sen}\theta E(r) \right) = 0. \quad (4.22)$$

Hemos tenido en cuenta que $\sqrt{|g|} = r^2e^{(A+B)}\text{sen}\theta$ y $F_{rt} = -F_{tr} = -E(r)$.

¹Aparte del ansatz eléctrico, se puede considerar un ansatz magnético $F_{\theta\phi} = B(\theta)$, que describe un monopolo magnético —ver [23] y sus referencias.

La expresión solo puede ser cierta si el término entre paréntesis es independiente de r , lo que nos lleva a que el campo eléctrico toma la forma:

$$E(r) = -\frac{Q}{r^2}e^{-(A(r)+B(r))}, \quad (4.23)$$

donde Q es una constante de integración adimensional.

4.3.2. Ecuación de Einstein

Partiendo de la ecuación (4.19), si tomamos la traza, se tiene que el escalar de Ricci es cero², $R = 0$. Con ello, la ecuación de Einstein que tenemos que resolver queda:

$$R_{ab} = \kappa \left(F_a{}^c F_{bc} - \frac{1}{4} g_{ab} F^2 \right). \quad (4.24)$$

Las componentes del tensor de Ricci las definimos a partir de los símbolos de Christoffel. No es necesario introducirlos de nuevo ya que la forma de la métrica es igual a la de Schwarzschild y en su momento los definimos de manera general sin especificar una forma concreta para las funciones A y B de acuerdo a (3.2).

Para este caso las componentes del tensor de Ricci distintas de cero son:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= e^{2(A-B)} \left[A'^2 + 2A'r^{-1} - A'B' + A'' \right], \\ R_{rr} &= -A'^2 + 2B'r^{-1} + A'B' - A'', \\ R_{\theta\theta} &= e^{-2B} [-1 - rA' + rB'] + 1, \\ R_{\phi\phi} &= \text{sen}^2\theta R_{\theta\theta}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde la prima, nuevamente, denota la derivada con respecto a r .

Sustituyendo el ansatz presentado en la ecuación (4.20), nos queda el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales para A y B :

$$\begin{aligned} e^{2(A-B)} \left[A'^2 + 2A'r^{-1} - A'B' + A'' \right] &= \frac{\kappa Q^2}{2 r^4} e^{-2(A+2B)}, \\ -A'^2 + 2B'r^{-1} + A'B' - A'' &= \frac{-\kappa Q^2}{2 r^4} e^{-2(2A+B)}, \\ e^{-2B} [-1 - rA' + rB'] + 1 &= \frac{\kappa Q^2}{2 r^2} e^{-4(A+B)}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

²Esto ocurre únicamente en $D = 4$.

La manera de resolver el sistema es multiplicando la primera ecuación por $e^{-2(2A+B)}$ y sumándola con la segunda, obtenemos la misma relación que en la expresión (3.13). Lo que simplifica la ecuación (4.23) y deja la tercera igualdad como:

$$(-re^{2A})' = \frac{\kappa Q^2}{2r^2} - 1. \quad (4.27)$$

La solución más general de esta ecuación viene dada por

$$e^{2A} = 1 - \frac{C}{r} + \frac{\kappa Q^2}{2r^2}, \quad (4.28)$$

donde C es $2M$, la misma constante de integración con dimensión de longitud vista en la solución de Schwarzschild recogida en la ecuación (3.14). Finalmente, las relaciones obtenidas llegamos a la métrica de Reissner-Nordström:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa Q^2}{2r^2}\right) dt^2 \left(+1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa Q^2}{2r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad F_{tr} = -\frac{Q}{r^2}. \quad (4.29)$$

Asimismo, veamos cómo determinar la carga eléctrica q del agujero negro y cómo está relacionada con la constante Q . Para calcularla basta con obtener el flujo de campo eléctrico a través de una esfera de radio r alrededor del origen mediante la ley de Gauss

$$q = \int \frac{Q}{r^2} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi Q. \quad (4.30)$$

Queda claro que la constante Q corresponde a la carga eléctrica del agujero negro (con un factor de normalización 4π).

4.4. Estructura causal de la solución de Reissner-Nordström

Con la métrica definida podemos estudiar la estructura causal. Al igual que lo visto para la solución de Schwarzschild, lo primero es ver los puntos en los que las componentes de la métrica se vuelven singulares y/o tienden a cero. Queremos determinar si corresponden con singularidades físicas o de coordenadas, siendo estas últimas una consecuencia del sistema de coordenadas empleado para describir la métrica.

Es fácil ver que uno de esos valores problemáticos corresponde con $r = 0$, para calcular el resto basta con ver cuando se hace cero $f(r)$, siendo la función g^{rr} .

$$1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa Q^2}{2r^2} = 0. \quad (4.31)$$

Se trata de una ecuación cuadrática en r y el número de soluciones reales pueden ser dos, una o ninguna, dependiendo del valor relativo entre M^2 y $\frac{1}{2}\kappa Q^2$.

Para determinar si se tratan realmente de singularidades físicas nos apoyaremos en los invariantes de curvatura, en concreto el invariante de Kretschmann que definimos en la ecuación (3.17) y ahora toma la forma:

$$K = R_{abcd}R^{abcd} = \frac{14\kappa^2 Q^4 + 48\kappa Q^2 M r + 48M^2 r^2}{r^8}. \quad (4.32)$$

Con esto queda claro que $r = 0$ corresponde a una singularidad física y las soluciones de la ecuación cuadrática corresponden a singularidades de coordenadas y como veremos a continuación definirán los horizontes de sucesos de este agujero negro.

Comencemos viendo la soluciones de la ecuación (4.31) y los distintos casos que podemos encontrarnos en función de ellas.

- **Caso sub-extremal** $M^2 > \frac{1}{2}\kappa Q^2$: la ecuación cuadrática posee dos raíces reales, situadas en,

$$R_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - \frac{1}{2}\kappa Q^2}. \quad (4.33)$$

Es fácil ver cómo efectivamente si sustituimos $r = R_{\pm}$ en la expresión (4.32), no se anulan y por tanto estamos ante singularidades de coordenadas. El agujero negro tiene entonces 2 horizontes, uno exterior en $r = R_+$ y otro interior en $r = R_-$. Las coordenadas t y r son respectivamente temporal y espacial fuera del horizonte exterior y dentro del horizonte interior, sin embargo, intercambian sus papeles en la zona entre los horizontes ($R_- < r < R_+$).

- **Caso extremal** $M^2 = \frac{1}{2}\kappa Q^2$: este caso límite surge cuando la carga eléctrica está exactamente ajustada a la masa del agujero negro. Se tiene una raíz doble en $r = M$ (de nuevo los invariantes en dicho punto no se anulan), de forma que los dos horizontes coinciden. Las coordenadas t y r permanecen temporal y espacial respectivamente tanto dentro como fuera del horizonte.

- **Caso sobre-extremal** $M^2 < \frac{1}{2}\kappa Q^2$: el polinomio no tiene soluciones reales, por lo que la solución de Reissner Nordström no tiene horizontes que tapen y escondan la singularidad en $r = 0$. La singularidad es temporal (las coordenadas t y r siguen siendo respectivamente temporal y espacial en todo el espacio). La singularidad es visible y está en contacto causal con cualquier otro punto del espacio-tiempo, lo que recibe el nombre de singularidad desnuda.

4.5. Nuevas coordenadas de Eddington-Finkelstein

Como ya hemos visto anteriormente en la sección 3.4, buscamos unas nuevas coordenadas en las que la métrica se vuelva regular para $r = R_{\pm}$. Vamos a derivar las coordenadas de Eddington-Finkelstein para la solución de Reissner-Nordström. Lo primero es calcular la coordenada tortuga, r_* , que ya definimos en ecuación (3.18):

$$r_* = r + \frac{R_+^2}{R_+ - R_-} \log \left| 1 - \frac{r}{R_+} \right| - \frac{R_-^2}{R_+ - R_-} \log \left| 1 - \frac{r}{R_-} \right|. \quad (4.34)$$

De esta forma las geodésicas nulas toman la expresión:

$$ds^2 = 0 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa Q^2}{2r^2} \right), \quad (4.35)$$

que en términos de la coordenada tortuga queda:

$$\frac{dr_*}{dt} = \pm 1 \Rightarrow t \pm r_* = C. \quad (4.36)$$

El valor positivo corresponde a las geodésicas entrantes y el negativo para las salientes. Ahora sí, podemos introducir el nuevo par de coordenadas nulas:

$$v = t + r_*, \quad \text{y} \quad u = t - r_*. \quad (4.37)$$

Con ellas podemos redefinir las coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes y salientes para la métrica de Reissner-Nordström:

- **Coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes (o avanzadas):**

Surgen al considerar el cambio $(t, r, \theta, \phi) \rightarrow (v, r, \theta, \phi)$. Tenemos entonces:

$$t = v - r_* \quad \Rightarrow \quad dt = dv - dr_* = dv - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa Q^2}{2r^2}\right)^{-1} dr. \quad (4.38)$$

sustituyendo en 4.29 encontramos la nueva métrica en la que desaparece el término dr^2 :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa Q^2}{2r^2}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega_2^2. \quad (4.39)$$

■ **Coordenadas de Eddington-Finkelstein salientes (o retardadas):**

Surgen al considerar ahora el cambio $(t, r, \theta, \phi) \rightarrow (u, r, \theta, \phi)$, quedando:

$$t = v + r_* \quad \Rightarrow \quad dt = du + dr_* = du + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa Q^2}{2r^2}\right)^{-1} dr. \quad (4.40)$$

sustituyendo en expresión (4.29) encontramos la nueva métrica en la que desaparece de nuevo el término dr^2 :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa Q^2}{2r^2}\right) dv^2 - 2dvdr + r^2 d\Omega_2^2. \quad (4.41)$$

Como con el agujero negro de Schwarzschild estamos interesados en representar el espacio-tiempo en su totalidad y para ello empleamos el diagrama de Penrose en cual usaremos ambas coordenadas, u y v que definimos a partir de la coordenada tortuga r_* . Recordemos que ambas coordenadas se relacionan por:

$$r_* = \frac{v - u}{2}, \quad t = \frac{u + v}{2}. \quad (4.42)$$

4.6. Diagrama de Penrose

En la sección 3.5 vimos detalladamente la estructura de los bloques, regulares y singulares, con los que formamos el diagrama de Penrose para el caso de Schwarzschild. El procedimiento para el construir el diagrama para agujero negro con carga es el mismo. Dado que tenemos casos sub-extremal, extremal y sobre-extremal —en función del número de horizontes existentes—, dividiremos la construcción de los bloques para cada uno de ellos y formaremos el diagrama de Penrose para cada caso.

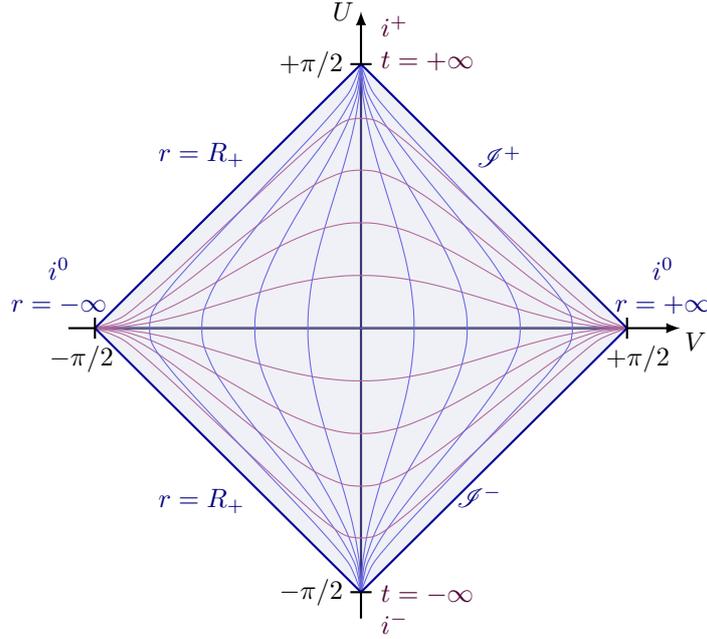


Figura 4.1: Bloque regular para la métrica de Reissner-Nordström. Las líneas moradas son para $t = \text{cte}$ y las azules para $r = \text{cte}$.

4.6.1. Caso sub-extremal

En esta caso la ecuación (4.31) tiene dos soluciones reales, $r = R_{\pm}$, que definen dos horizontes dividiendo el espacio-tiempo en tres regiones. Atendiendo a esto, podemos construir tres bloques para formar el diagrama de Penrose, dos regulares y uno singular que contiene la singularidad $r = 0$. Comencemos con los regulares:

Bloque regular-A

La primera región que consideraremos será $R_* < r < \infty$. Veamos como se comportan las nuevas coordenadas cuando nos acercamos a los extremos de la región:

$$\text{Para } r \rightarrow \infty, \quad r_* > 0 \rightarrow (v - u) > 0 \begin{cases} v \text{ finito, } u \rightarrow -\infty, \quad t \rightarrow -\infty, \\ u \text{ finito, } v \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

$$\text{Para } r \rightarrow R_+, \quad r_* < 0 \rightarrow (v - u) < 0 \begin{cases} v \text{ finito, } u \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty, \\ u \text{ finito, } v \rightarrow -\infty, \quad t \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Haciendo uso de la compactificación definida en 3.30 podemos representar nuestro bloque gráficamente en la figura 4.1.

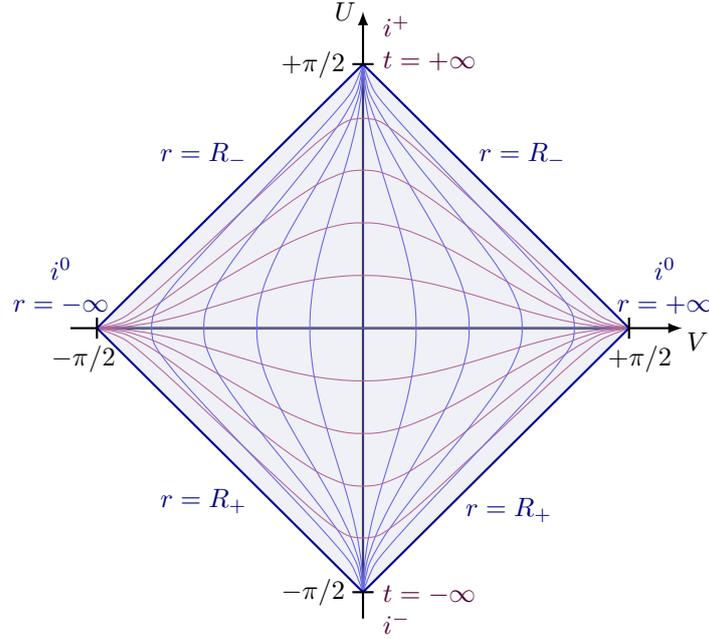


Figura 4.2: Bloque regular para la métrica de Reissner-Nordström. Las líneas moradas son para $r = \text{cte}$, coordenada temporal en este caso y las azules para $t = \text{cte}$, coordenada espacial.

Bloque regular-B

La segunda región con las que construiremos nuestro bloque es el interior entre los dos horizontes $R_- < r < R_+$. El comportamiento de las coordenadas cuando nos acercamos a los extremos es el siguiente:

$$\text{Para } r \rightarrow R_-, \quad r_* > 0 \rightarrow (v - u) > 0 \begin{cases} v \text{ finito, } u \rightarrow -\infty, \quad t \rightarrow -\infty, \\ u \text{ finito, } v \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

$$\text{Para } r \rightarrow R_+, \quad r_* < 0 \rightarrow (v - u) < 0 \begin{cases} v \text{ finito, } u \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty, \\ u \text{ finito, } v \rightarrow -\infty, \quad t \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Debemos tener en cuenta que en este intervalo la función $f(r)$ es negativa por lo que los papeles de las coordenadas r y t están intercambiados, la coordenada espacial pasa a ser de tipo tiempo y viceversa. Con la compactificación realizada, la representación gráfica para el bloque queda recogida en la figura 4.2.

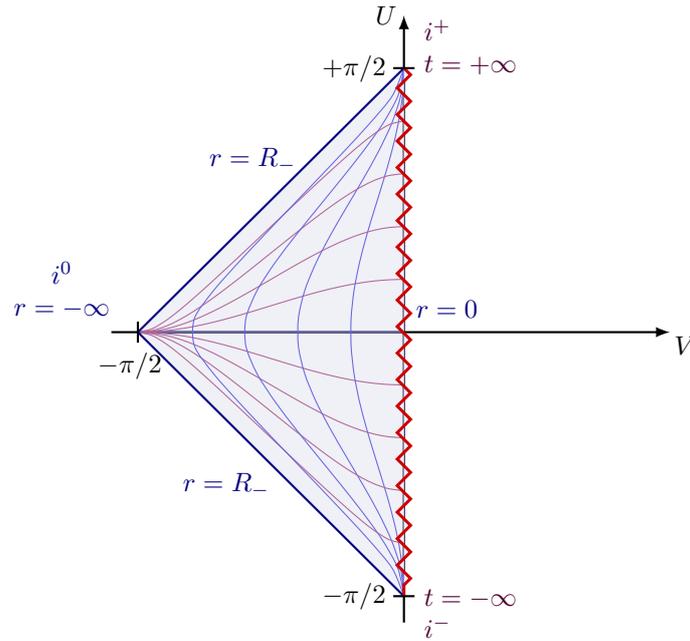


Figura 4.3: Bloque regular para la métrica de Reissner-Nordström. Las líneas moradas son para $t = \text{cte}$ y las azules para $r = \text{cte}$

Bloque singular

Finalmente nos queda estudiar la región que contiene la singularidad, $r_0 < r < R_-$. Como siempre observemos el comportamiento de las coordenadas en sus límites:

$$\text{Para } r \rightarrow 0, \quad r_* = 0 \rightarrow v = u,$$

$$\text{Para } r \rightarrow R_-, \quad r_* < 0 \rightarrow (v - u) < 0 \begin{cases} v \text{ finito, } u \rightarrow +\infty, t \rightarrow +\infty \\ u \text{ finito, } v \rightarrow -\infty, t \rightarrow -\infty \end{cases}$$

En este último bloque las coordenadas r y t vuelven a representar espacio y tiempo respectivamente. Su representación gráfica podemos verla en la figura 4.3.

Construcción del diagrama

Con las figuras de nuestros bloques bien definidas podemos dar paso a la construcción completa del diagrama. Para ello, igual que en el caso de Schwarzschild, debemos combinar los bloques de todas las formas posibles que podamos teniendo en cuenta sus simetrías recogidas en la sección 3.5.3. Finalmente obtenemos la figura 4.4

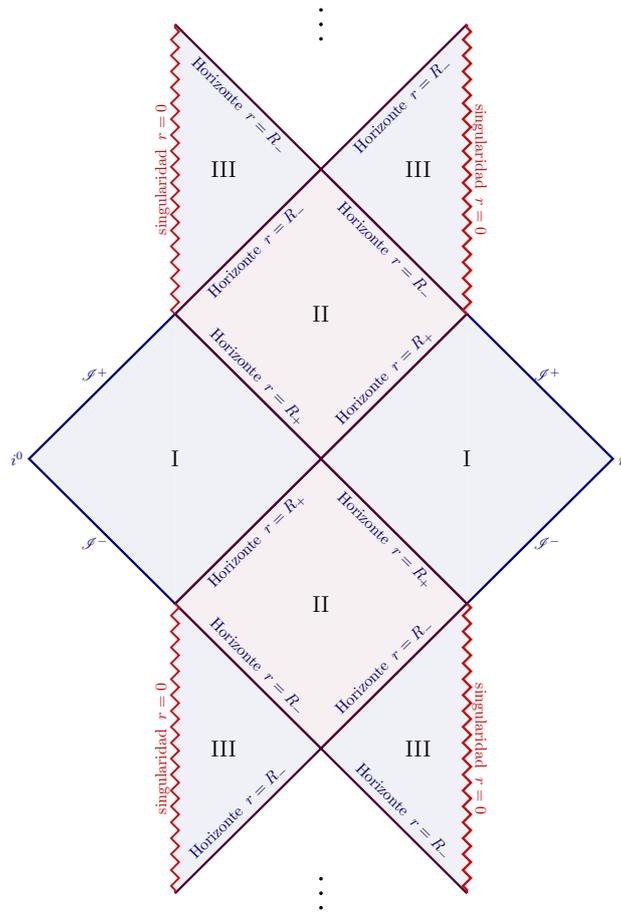


Figura 4.4: Diagrama de Penrose para el agujero negro de Reissner-Nordström caso sub-extremal

Las zonas marcadas como I, II, III, se corresponden con los bloques regulares A, B y el bloque singular respectivamente.

Podemos ver diferencias significativas al diagrama de Schwarzschild. La primera de ellas es que podemos extender el diagrama infinitamente. Es decir, nos encontramos con una serie infinita de regiones asintóticamente planas conectadas por túneles a través de horizontes mientras que en Schwarzschild la singularidad limita nuestro avance. Esto nos lleva a la siguiente, en Schwarzschild la singularidad es inevitable al contrario de lo que encontramos aquí, donde podemos atravesar el agujero negro.

Supongamos que empezamos como observadores en la región I, donde al igual que en el caso de Schwarzschild corresponde al exterior del agujero negro. Avanzamos en el tiempo y accedemos a la región II cruzando un horizonte de sucesos, lo que nos impide la opción de retorno. La única opción que nos queda es avanzar hacia la región III, que está conectada con la región II por un horizonte de Cauchy. Finalmente, entramos en la región que contiene la singularidad, la cual, podemos cruzar sin chocar necesariamente

con ella. Si seguimos avanzando, llegaríamos a una región equivalente a I. Apareceríamos en un universo exactamente igual al inicial. Por otro lado, para una partícula masiva que se encuentre en la región II inferior, la estructura causal del espacio-tiempo la envía fuera de ella. Es decir, se trata de un agujero blanco al igual que ocurre con Schwarzschild.

Este resultado es el que encontramos al analizar las soluciones desde un punto de vista teórico. No obstante, desde una perspectiva fenomenológica no se espera este comportamiento. Esto es debido a que todo lo que sigue a la región II es inestable bajo perturbaciones y no tenemos acceso a ello. Para comprenderlo vamos a plantear un experimento mental que nos llevará a entender mejor esta idea.

Supongamos que hay dos observadores fuera del agujero negro situados en la región I, uno de ellos con una linterna y otro que se lanzará hacia el interior del agujero negro. El que tiene la linterna envía un pulso de luz con una cierta frecuencia, de acuerdo a su tiempo propio. El observador que se encuentra en el interior, lo que verá cuando se acerque al horizonte de Cauchy es que los últimos pulsos que está mandando el observador del exterior se acumulan en el horizonte, resultando un pulso electromagnético muy energético. Podemos interpretar que el agujero negro focaliza las últimas señales en el horizonte de Cauchy. Esto sugiere que una perturbación mínima en el exterior se convierte en una arbitrariamente fuerte dentro del agujero negro provocando su inestabilidad [24].

4.6.2. Caso extremal

En el caso extremal tenemos una solución doble $r = M$, es decir, solo tenemos dos regiones y por tanto dos bloques. La construcción exactamente igual que para el caso anterior considerando el bloque regular-A con límite $r = M$ en vez de $r = R_+$ y el singular con el horizonte en $r = M$. El comportamiento de las coordenadas también es idéntico ya que la función $f(r)$ es positiva en todas las regiones. Es decir, las coordenadas r y t son espacial y temporal respectivamente. Considerando todo esto, el diagrama de Penrose completo para este caso es el presentado en la figura 4.5. De nuevo, como en el caso sub-extremal, nos encontramos con una singularidad evitable. Un observador que se encuentre en la zona I y se adentre en el agujero negro cruzando el horizonte de sucesos podrá continuar su trayectoria hasta una nueva zona idéntica a I sin necesidad de chocar con la singularidad. También, a diferencia del caso sub-extremal, no aparece el horizonte de Cauchy. El comportamiento del horizonte de sucesos situado en $r = M$ es equivalente

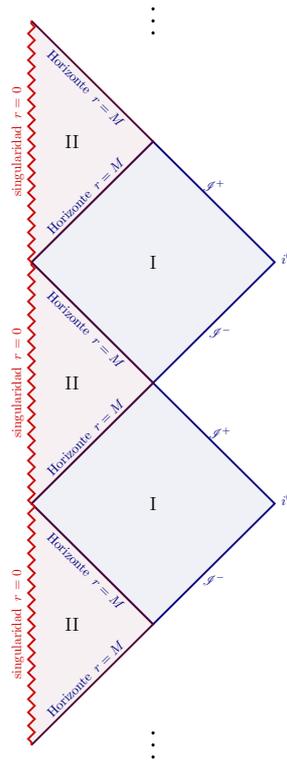


Figura 4.5: Diagrama de Penrose para el agujero negro de Reissner-Nordström caso extremo.

al visto en el agujero negro de Schwarzschild.

4.6.3. Caso sobre-extremal

En este caso la ecuación (4.31) no tiene soluciones reales, es decir, ningún horizonte envuelve a la singularidad. Por este motivo, recibe el nombre de singularidad desnuda. Su diagrama de Penrose es distinto a todos los vistos hasta ahora, ya que tiene un único bloque, el cual construimos de la misma forma y se recoge en la figura 4.6.

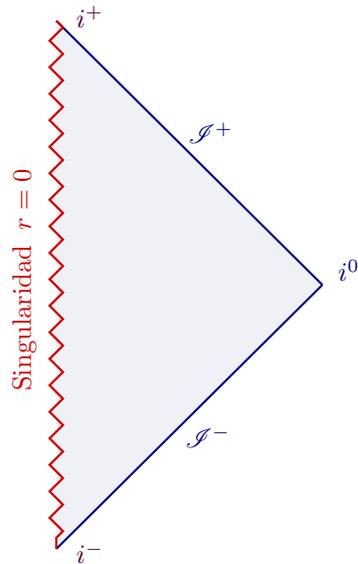


Figura 4.6: Diagrama de Penrose para el agujero negro de Reissner-Nordström sobre-extremal.

Como podemos observar, este tipo de solución permite la propagación de influencias causales desde la singularidad a cualquier punto del espacio-tiempo. Dado que esta solución no puede representar una realidad física bien definida, en 1969 Penrose propuso la conjetura del censor cósmico [25], que postula que en condiciones normales, las soluciones con singularidades desnudas no se pueden formar a partir de condiciones iniciales no-singulares genéricas. Esta conjetura está generalmente aceptada, aunque no ha sido demostrada rigurosamente.

Capítulo 5

Conclusiones

Como planteamos al inicio del trabajo hemos logrado nuestro objetivo de estudiar la estructura causal del agujero negro de Reissner-Nordström. Previamente, hemos estudiado también el caso del agujero negro de Schwarzschild para obtener intuición, ya que representa un caso más sencillo.

En primer lugar hemos introducido la teoría gravitatoria en el lenguaje de la geometría diferencial, describiendo los conceptos básicos necesarios en el desarrollo del trabajo. De igual forma, hemos conseguido derivar las ecuaciones de campo de Einstein a partir de la acción de Einstein-Hilbert por medio del principio variacional.

En segundo lugar, para familiarizarnos con la derivación de la solución a partir de las ecuaciones de Einstein nos hemos centrado en estudiar la solución de agujero negro de Schwarzschild. Al analizar su estructura causal y elaborar el diagrama de Penrose (que nos permite una representación gráfica del espacio-tiempo) hemos podido entender el agujero negro como una singularidad física envuelta por un horizonte de sucesos. Esta singularidad es inevitable y todo observador que cruce el horizonte de sucesos (situado en el radio de Schwarzschild) está destinado a llegar a ella.

Posteriormente, tras obtener intuición en el caso sin carga, hemos derivado el agujero negro de Reissner-Nordström como solución a la teoría de Einstein-Maxwell. En contraste con la situación sin carga, al analizar la estructura causal hemos encontrado diferentes casos dependiendo del valor relativo que exista entre la masa y la carga del agujero negro. Primero nos hemos centrado en el caso sub-extremal que en comparación con el caso de Schwarzschild se trata de una singularidad evitable con dos horizontes de sucesos. Hemos visto que uno de ellos representa una superficie de inestabilidad, denominada horizonte de Cauchy. Para el caso extremal, en el que la carga del agujero negro equivale a la masa, el resultado es una singularidad evitable envuelta por un horizonte de sucesos equivalente al visto en Schwarzschild. Podemos verlo como un límite del caso sub-extremal en el que hemos mantenido la carga constante y disminuyendo la masa hasta que los dos horizontes

Conclusiones

convergen en uno solo. Por último, hemos comprobado que en el caso sobre-extremal corresponde a una solución que carece de horizontes, dejando una singularidad desnuda, que se espera que no represente una situación física posible en la naturaleza, como indica la conjetura del censor cósmico.

El desarrollo de este trabajo ha servido como introducción a la teoría de la relatividad general en un aspecto tanto matemático como físico. Hemos conseguido de forma satisfactoria nuestros objetivos planteados al inicio del trabajo y nos sirve como base para la continuación de estudios más avanzados en el ámbito de la gravitación.

Apéndices

A. Conmutador de las derivadas covariantes

Veamos el cálculo del conmutador de las derivadas covariantes actuando sobre el vector V^d :

$$[\nabla_a, \nabla_b] V^d = \nabla_a \nabla_b V^d - \nabla_b \nabla_a V^d. \quad (\text{A.1})$$

Calculamos el primer término:

$$\begin{aligned} \nabla_a \nabla_b V^d &= \partial_a (\nabla_b V^d) - \Gamma_{ab}^c \nabla_c V^d + \Gamma_{ac}^d \nabla_b V^c. \\ &= \partial_a \partial_b V^d + \partial_a \Gamma_{bc}^d V^c + \Gamma_{bc}^d \partial_a V^c \\ &\quad - \Gamma_{ab}^c \partial_c V^d - \Gamma_{ab}^c \Gamma_{ce}^d V^e + \Gamma_{ac}^d \partial_b V^c + \Gamma_{ac}^d \Gamma_{be}^c V^e. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

El segundo término es idéntico intercambiando los índices a y b . De esta forma el conmutador viene dado por:

$$[\nabla_a, \nabla_b] V^d = R_{abc}{}^d V^c - T_{ab}^c \nabla_c V^d, \quad (\text{A.3})$$

donde

$$R_{abc}{}^d = \partial_a \Gamma_{bd}^c - \partial_b \Gamma_{ad}^c - \Gamma_{be}^d \Gamma_{ad}^e + \Gamma_{be}^d \Gamma_{ac}^e, \quad (\text{A.4})$$

$$T_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c. \quad (\text{A.5})$$

B. Variación del elemento de volumen $\sqrt{|g|}$

Partiendo de la identidad de Jacobi:

$$\delta A = A \operatorname{tr} (A^{-1} \delta A), \quad (\text{B.1})$$

si la aplicamos sobre la métrica, resulta:

$$\delta g = g \operatorname{tr} (g^{-1} \delta g) = g (g^{ab} \delta g_{ab}) = -g (g_{ab} \delta g^{ab}), \quad (\text{B.2})$$

donde en la última igualdad hemos empleado el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \delta (\delta_a^a) = 0 &= \delta (g^{ab} g_{ab}) = g_{ab} \delta g^{ab} + g^{ab} \delta g_{ab} \\ g^{ab} \delta g_{ab} &= -g_{ab} \delta g^{ab}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Teniendo en cuenta lo descrito anteriormente podemos calcular la variación del elemento de volumen:

$$\delta \sqrt{g} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \delta g = -\frac{1}{2\sqrt{g}} g g_{ab} \delta g^{ab} = -\frac{1}{2} \sqrt{g} g_{ab} \delta g^{ab}. \quad (\text{B.4})$$

C. Variación del tensor de Ricci

Para calcular la variación del tensor de Ricci respecto la métrica vamos a escribirlo en función de los símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned}\delta R_{ab} &= \delta (\partial_c \Gamma_{ab}^c - \partial_a \Gamma_{cb}^c - \Gamma_{ad}^c \Gamma_{cb}^d + \Gamma_{ab}^c \Gamma_{dc}^d) \\ &= \delta (\partial_c \Gamma_{ab}^c) - \delta (\partial_a \Gamma_{cb}^c) - \Gamma_{cb}^d \delta \Gamma_{ad}^c - \Gamma_{ad}^c \delta \Gamma_{cb}^d + \Gamma_{dc}^d \delta \Gamma_{ab}^c + \Gamma_{ab}^c \delta \Gamma_{dc}^d.\end{aligned}\tag{C.1}$$

Teniendo en cuenta la definición de la derivada covariante, podemos simplificar la expresión:

$$\delta R_{ab} = \nabla_c (\delta \Gamma_{ab}^c) - \nabla_a (\delta \Gamma_{cb}^c) + T_{ac}^d (\delta \Gamma_{db}^c).\tag{C.2}$$

Cuando la conexión es Levi-civita, la expresión anterior se denomina identidad de Palatini, quedando:

$$\delta R_{ab} = \nabla_c (\delta \Gamma_{ab}^c) - \nabla_a (\delta \Gamma_{cb}^c),\tag{C.3}$$

sin el último término ya que el tensor de torsión es nulo.

Bibliografía

- [1] A. Einstein, *The foundation of the general theory of relativity.*, *Annalen Phys.* **49** (1916) 769–822.
- [2] B. P. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, M. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley et al., *Observation of gravitational waves from a binary black hole merger*, *Physical review letters* **116** (2016) 061102.
- [3] EVENT HORIZON TELESCOPE collaboration, K. Akiyama et al., *First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole*, *Astrophys. J. Lett.* **875** (2019) L1, [[1906.11238](#)].
- [4] K. Akiyama, A. Alberdi, W. Alef, J. C. Algaba, R. Anantua, K. Asada et al., *First sagittarius a* event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole in the center of the milky way*, *The Astrophysical Journal Letters* **930** (2022) L12.
- [5] K. Schwarzschild, *On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory*, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* **1916** (1916) 189–196, [[physics/9905030](#)].
- [6] H. Reissner, *über die eigengravitation des elektrischen felde nach der einsteinschen theorie*, *Annalen der Physik* **355** (1916) 106–120.
- [7] G. Nordström, *On the energy of the gravitation field in einstein's theory*, *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences* **20** (1918) 1238–1245.
- [8] R. Penrose, *The light-cone at infinity*, tech. rep., KING'S COLL LONDON (ENGLAND), 1962.
- [9] J. M. Maldacena, *The Large N limit of superconformal field theories and supergravity*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231–252, [[hep-th/9711200](#)].

- [10] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, *Gauge theory correlators from non-critical string theory*, *Physics Letters B* **428** (1998) 105–114.
- [11] S. W. Hawking, *Black hole explosions*, *Nature* **248** (1974) 30–31.
- [12] B. Janssen, *Gravitación y geometría: una introducción moderna a la Teoría de la Relatividad General*. Editorial Universidad de Granada, 2022.
- [13] S. M. Carroll, *Lecture notes on general relativity*, *arXiv preprint gr-qc/9712019* (1997) .
- [14] A. Einstein, *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie*, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* (Jan., 1917) 142–152.
- [15] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, *Action integrals and partition functions in quantum gravity*, *Phys. Rev. D* **15** (May, 1977) 2752–2756.
- [16] J. W. York, *Role of conformal three-geometry in the dynamics of gravitation*, *Phys. Rev. Lett.* **28** (Apr, 1972) 1082–1085.
- [17] G. D. Birkhoff and R. E. Langer, *Relativity and modern physics*. 1923.
- [18] J. Jebsen, *On the general spherically symmetric solutions of einstein’s gravitational equations in vacuo (translation from the german original by s. antoci and d. liebscher)*, *General Relativity and Gravitation* **12** (12, 2005) .
- [19] A. Einstein and N. Rosen, *The particle problem in the general theory of relativity*, *Physical Review* **48** (1935) 73.
- [20] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete?*, *Phys. Rev.* **47** (1935) 777–780.
- [21] J. Maldacena and L. Susskind, *Cool horizons for entangled black holes*, *Fortsch. Phys.* **61** (2013) 781–811, [[1306.0533](#)].
- [22] D. Tong, *Topics in quantum mechanics, University of Cambridge Part II Mathematical Tripos* (2017) .

BIBLIOGRAFÍA

- [23] J. Maldacena, *Comments on magnetic black holes*, *JHEP* **04** (2021) 079, [[2004.06084](#)].
- [24] M. Simpson and R. Penrose, *Internal instability in a Reissner-Nordstrom black hole*, *Int. J. Theor. Phys.* **7** (1973) 183–197.
- [25] R. Penrose, *Gravitational Collapse: the Role of General Relativity*, *Nuovo Cimento Rivista Serie* **1** (Jan., 1969) 252.