

Dispersión electrón-positrón en procesos electromagnéticos.



TRABAJO FIN DE GRADO

Andrés Collado Soto

Tutores: Juan Antonio Caballero Carretero y

Guillermo Daniel Megías Vázquez

Grado en Física

Curso 2022/2023

ÍNDICE

| | |
|---|----|
| RESUMEN | 1 |
| I. INTRODUCCIÓN | 2 |
| 1.- Ecuación de Dirac..... | 2 |
| ➤ 1.1.- Contexto histórico..... | 2 |
| ➤ 1.2.- Deducción de la ecuación | 3 |
| ➤ 1.3.- Soluciones de la ecuación de Dirac..... | 4 |
| 2.- Soluciones de energía negativa..... | 5 |
| ➤ 2.1.- El mar de Dirac | 5 |
| ➤ 2.2.- Descubrimiento del positrón | 6 |
| ➤ 2.3.- Interpretación de Feynmann y Stückelberg..... | 8 |
| 3.- Teoría cuántica de campos | 9 |
| 4.- Dispersión electrón-positrón | 12 |
| II. ESTUDIO DE LA INTERACCIÓN ELECTRÓN-POSITRÓN | 14 |
| 5.- Formalismo de la QED..... | 14 |
| ➤ 5.1.- Campo fermiónico..... | 15 |
| ➤ 5.2.- Campo electromagnético..... | 16 |
| ➤ 5.3.- Propagador..... | 17 |
| ➤ 5.4.- Matriz S de Dyson | 19 |
| 6.- Sección eficaz | 21 |
| 7.- Cálculo de los elementos de matriz | 25 |
| ➤ 7.1.- Scattering Bhabha: $(e^-e^+ \rightarrow e^-e^+)$ | 25 |
| ➤ 7.2.- Producción de muones: $(e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+)$ | 28 |
| 8.- Cálculo de las amplitudes invariantes..... | 29 |
| ➤ 8.1.- Scattering Bhabha: $(e^-e^+ \rightarrow e^-e^+)$ | 29 |
| ➤ 8.2.- Producción de muones: $(e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+)$ | 34 |

| | |
|--|----|
| III. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS | 36 |
| 9.- <i>Scattering</i> Bhabha | 36 |
| 10.- Producción de muones | 40 |
| 11.- Producción de fotones (aniquilación) | 43 |
| 12.- Comparación con los tres sabores leptónicos | 45 |
| IV. CONCLUSIÓN | 48 |
| V. ANEXOS | 49 |
| A.- Matrices de Dirac | 49 |
| B.- Cálculo de la matriz S de Dyson | 49 |
| C.- Hipótesis adiabática | 51 |
| D.- Sistema centro de momentos..... | 52 |
| E.- Propiedad de las deltas | 53 |
| F.- Teoremas de las trazas | 55 |
| G.- Producción de muones y tauones | 57 |
| BIBLIOGRAFÍA | 58 |

RESUMEN

El objetivo principal de este trabajo consiste en estudiar los procesos resultantes de la interacción electromagnética electrón-positrón mediante el cálculo y posterior análisis de sus secciones eficaces. En concreto, se examina el denominado *scattering* Bhabha ($e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$) y la producción de leptones en el estado final ($e^-e^+ \rightarrow l^-l^+$), haciendo especial énfasis en el caso de los muones. Además, aunque durante el trabajo no se aborde el cálculo que conduce a su sección eficaz, también se presentará la producción de fotones con la finalidad de compararlo con el resto de los procesos estudiados.

En primer lugar, durante la introducción se presenta la ecuación de Dirac y el concepto de antipartículas, ideas fundamentales para el trabajo y que sientan los precedentes de la teoría cuántica de campos, el formalismo utilizado para la descripción de partículas relativistas. A continuación, en el capítulo II se detalla el formalismo de la electrodinámica cuántica presentando, entre otros, el concepto de la matriz de dispersión, esencial para el cálculo de las secciones eficaces de los procesos estudiados. Finalmente, el capítulo III se enfoca en un estudio de la cinemática de dichas secciones eficaces analizando la contribución de cada proceso en la interacción electromagnética electrón-positrón y, de manera general, leptón-antileptón. Además, se comprobará la validez de las expresiones teóricas comparándolas con datos experimentales.

Por último, merece la pena resaltar que la motivación y relevancia de este estudio reside en que constituye una introducción al cálculo de secciones eficaces en régimen relativista a través del formalismo de la electrodinámica cuántica. De este modo, se sientan las bases para el estudio de proceso más complejos que involucren partículas con estructura interna, fuerzas nucleares o sistemas ligados.

I. INTRODUCCIÓN

Antes de abordar el cálculo principal del trabajo, así como el posterior análisis de resultados, resulta crucial presentar los conceptos fundamentales que se van a manejar. Para ello, durante este capítulo se explorarán las teorías y resultados más importantes de comienzos del siglo XX, que fundamentaron la idea de antipartícula y el formalismo de la teoría cuántica de campos, imprescindibles para el estudio de la interacción electrón-positrón.

1.- Ecuación de Dirac

➤ 1.1.- Contexto histórico

A comienzos del siglo pasado, debido a la violación del principio de relatividad galileano por parte de las ecuaciones de Maxwell, Albert Einstein concibió en 1905 su teoría de la relatividad especial (TR). Postulando un nuevo principio de relatividad y la velocidad de la luz como una constante universal, consiguiendo desentrañar el comportamiento de la naturaleza a altas velocidades. De este modo, el científico alemán había abandonado la idea de espacio y tiempo absoluto, propia de la física Newtoniana, en virtud de una visión relativa de los mismos. Entre otros, uno de los resultados más significativos de la teoría fue establecer una relación entre masa y energía a través de una nueva expresión para la energía mecánica:

$$E^2 = m^2 + p^2. \quad (1)$$

Paralelamente Max Planck, debido a la aparición de la denominada catástrofe ultravioleta [1], dio el primer paso hacia la creación de la mecánica cuántica (MC) con la discretización de la energía. Esta idea fue respaldada con el trabajo de Einstein referido al efecto fotoeléctrico, que describía la luz a través de unos constituyentes mínimos (cuantos) que recibieron el nombre de fotones. Veinte años más tarde, en 1925, Erwin Schrödinger dio a conocer su famosa ecuación de onda, permitiendo la descripción precisa de los sistemas cuánticos con gran acuerdo a los resultados experimentales. Su concepción proviene del principio de correspondencia, que aplicándose a la expresión clásica de la energía se deduce:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(r) \rightarrow i \frac{\partial \Psi(r, t)}{\partial t} = \left[\frac{-1}{2m} \nabla^2 + V(r) \right] \Psi(r, t). \quad (2)$$

Debido al gran éxito de ambas teorías, en los años posteriores se intentó aunar el comportamiento de ambas bajo un mismo marco de estudio, la mecánica cuántica relativista (MCR). Los primeros en abordar el problema fueron Oskar Klein y Walter Gordon quienes, procediendo de manera análoga a Schrödinger mediante el principio de correspondencia, pero partiendo de la expresión para la energía de Einstein (1), intentaron deducir la primera ecuación cuántica y relativista (KG). Sin embargo, la ecuación resultante presentaba ciertas complicaciones que dejaron insatisfecha a la comunidad. Las principales fueron [2]:

- 1) La imposibilidad de definir la función de onda unívocamente a través de su valor en un instante previo, una característica fundamental de la MC. Esto a su vez conlleva una densidad de probabilidad que no se define positiva, dando lugar a graves problemas de interpretación. La fuente de estos problemas radica en que se trata de una ecuación diferencial de segundo orden en el tiempo, siendo por tanto necesarias dos condiciones iniciales.
- 2) La presencia de soluciones de energía negativa debido al carácter cuadrático de la expresión de (1). En otra situación se habrían desechado estas soluciones por su aparente carencia de significado físico, pero su presencia era necesaria para construir un conjunto completo de soluciones [3].

➤ 1.2.- Deducción de la ecuación

Es en este contexto que Dirac se propone desarrollar una nueva ecuación que solviera los problemas expuestos para KG mediante una expresión linealizada para (1) dada por:

$$E = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \cdot p_i + \beta m = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m . \quad (3)$$

Los coeficientes $\vec{\alpha}$ y β , en principio desconocidos, los dedujo imponiendo una serie de condiciones que debía respetar la expresión (3), como es la siguiente relación:

$$E^2 = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)^2 = p^2 + m^2 , \quad (4)$$

de donde se derivan las relaciones de anticonmutación para estos coeficientes. En consecuencia, tras considerar otros requisitos como la hermiticidad del operador

hamiltoniano, se deduce que estos coeficientes deben ser matrices de, al menos, de dimensión 4 [2]. Esto constituye una diferencia fundamental respecto a los resultados de Klein y Gordon que se detallará en la siguiente sección al examinar las soluciones de la ecuación.

Finalmente, expresando (3) en términos de las matrices de Dirac presentadas en el anexo A y aplicando el principio de correspondencia, se puede deducir la ecuación:

$$(i\cancel{\partial} - m)\Psi = 0, \quad (5)$$

donde se comprueba que la derivada temporal pasa a ser de primer orden y desaparecen los problemas asociados a la ecuación diferencial de segundo orden. No obstante, al analizar las soluciones de la ecuación, el problema referido a las energías negativas seguirá presente.

➤ 1.3.- Soluciones de la ecuación de Dirac

Es sencillo comprobar que, debido a que la ecuación la conforman matrices 4x4, las funciones de onda deben tratarse de elementos matemáticos constituidos por una columna de cuatro componentes, radicalmente diferente al caso de KG donde las soluciones eran escalares. Sin embargo, estas soluciones deben ser espinores en lugar de vectores, pues al efectuar una rotación completa de la función de onda esta adquiere una fase -1. Una demostración más detallada puede encontrarse en la referencia [4].

Esta característica expone porque en una de sus charlas el propio Pauli afirmó que esta ecuación era más inteligente que su autor, según se cita en [4]. Aun sin perseguirlo, había concebido la ecuación que explica el comportamiento de partículas con espín ½.

Admitiendo soluciones con energía, momento y helicidad (proyección de espín) bien definidos se diferencian las siguientes cuatro soluciones para la ecuación:

- Energía positiva:

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{m}{EV}} u(\vec{p}, s) e^{-ipx} \quad \text{con} \quad u(\vec{p}, s) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi_s \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

- Energía negativa:

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{m}{EV}} v(\vec{p}, s) e^{ipx} \quad \text{con} \quad v(\vec{p}, s) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ E+m \\ \xi_s \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Donde $u(\vec{p}, s)$ y $v(\vec{p}, s)$ son los espinores de Dirac (de cuatro componentes) para energías positivas y negativas respectivamente, mientras que χ_s y ξ_s son los espinores de Pauli (de dos componentes), de nuevo, para energía positiva y negativa. Entre sus propiedades fundamentales, la más relevante para el desarrollo que se presentará en el trabajo es su relación con el operador proyección de energía. Las relaciones en cuestión son:

$$[\hat{\Lambda}_+(\vec{p})]_{\alpha\beta} = \left(\frac{\not{p} + M}{2M} \right)_{\alpha\beta} = \sum_{\pm s} u_\alpha(\vec{p}, s) \bar{u}_\beta(\vec{p}, s) \quad (7.1)$$

$$[\hat{\Lambda}_-(\vec{p})]_{\alpha\beta} = \left(\frac{-\not{p} + M}{2M} \right)_{\alpha\beta} = - \sum_{\pm s} v_\alpha(\vec{p}, s) \bar{v}_\beta(\vec{p}, s), \quad (7.2)$$

donde se han introducido los espinores adjuntos de Dirac definidos como:

$$\bar{u}(\vec{p}, s) = u^\dagger(\vec{p}, s) \gamma^0 \quad \bar{v}(\vec{p}, s) = v^\dagger(\vec{p}, s) \gamma^0. \quad (8)$$

2.- Soluciones de energía negativa

➤ 2.1.- El mar de Dirac

De este modo Dirac, al contrario que Schrödinger, consiguió no solo elaborar una ecuación de primer orden en el tiempo, con la consiguiente densidad de probabilidad definida positiva, sino también introducir el espín en el formalismo de manera natural. Aun así, Dirac no solucionó el inevitable inconveniente de las soluciones de energía negativa, intrínsecas al carácter cuadrático de (1). Como consecuencia, debido a la tendencia de los sistemas a evolucionar hacia el estado de mínima energía, las partículas siempre podrían transitar hacia estados de menor energía emitiendo radiación indefinidamente.

Para solucionar esta catástrofe radiativa [5] Dirac postuló que todos los estados de energía negativa debían encontrarse ocupados por un “mar” uniforme de electrones, de modo que no se manifestara una fuerza neta. En consecuencia, el principio de exclusión de Pauli impediría

a los electrones de energía positiva descender a niveles de energía negativa. Así pues, Dirac había concebido el primer modelo del vacío el cual, paradójicamente, se encontraba infinitamente poblado [6].

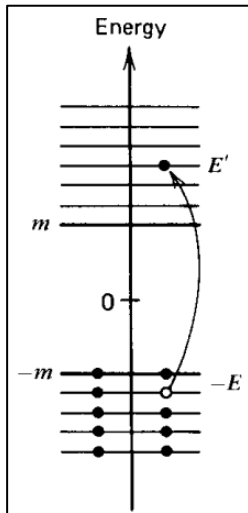


Figura 1. Formación de vacantes en el mar de Dirac [7].

Por otro lado, según se ilustra en la figura 1, un electrón de energía negativa podría absorber radiación y ser excitado a un nivel de energía positiva, dejando tras de sí una vacante que podría interpretarse como una partícula cuyo efecto neto fuese el mismo que la presencia de la vacante. Por ello, dicha partícula debía presentar carga positiva (lo que hizo pensar a Dirac que se trataba del protón) y la masa del electrón (razón por la que se descartó la hipótesis).

Debido a la aparente inexistencia de una partícula con tales propiedades, la teoría de Dirac se puso en duda hasta que en 1932 Carl David Anderson evidenció la existencia del positrón. La consolidación de su teoría le mereció a Dirac, junto con Schrödinger, el premio nobel en 1933 debido

a “El descubrimiento de nuevas formas productivas de la teoría atómica” [8].

➤ 2.2.- Descubrimiento del positrón

La primera observación de rayos cósmicos fue realizada por el ruso Dmitri Skobelzyn, quien advirtió la presencia de trazas inusuales en su cámara de niebla durante una medición de radiación. Impulsado con la idea de cuantizar la energía de los rayos cósmicos, tras terminar su doctorado en 1930, Anderson se dedicó a la investigación de este campo en auge junto a Millikan, su director de tesis. Seis años más tarde, Anderson recibiría el premio nobel gracias a este experimento, pero no por lo referido a los rayos cósmicos, sino por el descubrimiento del positrón [9].

La idea del científico estadounidense era exponer la cámara de niebla a un campo magnético y determinar la energía de las partículas cargadas incidentes analizando la curvatura de su trayectoria. La ley de Lorentz dicta que $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, así que para discernir la carga de las partículas bastaba con comprobar la dirección de curvatura.

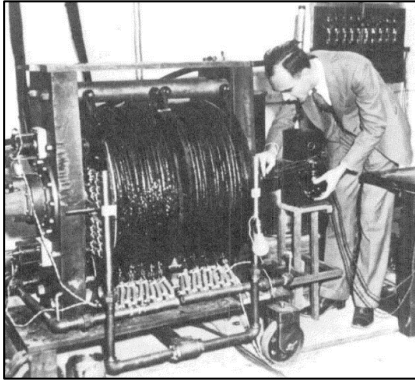


Figura 2. Anderson ajustando la cámara para las mediciones [9].

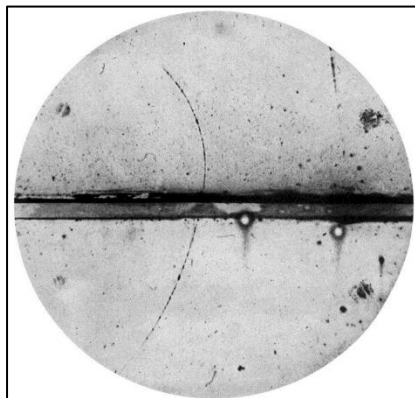


Figura 3. Trazas del positrón [9].

Para aplicar el campo magnético, Anderson precisaba de dos enormes bobinas (como la que se muestra en la figura 2) que requerían de una décima parte del suministro eléctrico del campus de Caltech, por lo que solo le estaba permitido trabajar de noche. Además, para registrar las trazas de las partículas disponía de una cámara fotográfica y, como no era posible predecir cuándo serían visibles, realizó más de 1600 fotografías. La mayoría inservibles.

Por último, Anderson instaló una delgada lámina de cobre (línea horizontal en la figura 3) que permitiría discernir si las partículas provenían de arriba o abajo, ya que al penetrarla el radio de curvatura se vería atenuado por la pérdida de energía. Aunque Millikan se opuso a este último elemento del montaje, pues argumentaba que no podían provenir rayos cósmicos desde abajo, resultó crucial en la detección del positrón. El motivo es que de considerar que

la traza de la figura 3 es el resultado de una partícula que viene desde arriba, entonces de la ley de Lorentz se deduciría erróneamente que su carga se correspondería a la del electrón.

Al analizar sus resultados, Anderson advirtió la traza de una partícula de carga positiva que no podía ser el protón, debido a que su masa se encontraba en el orden de la masa del electrón. Aunque desconocía el trabajo de Dirac, debido a su complejidad y carácter teórico, Anderson llegó a la conclusión que necesitaba la teoría del físico británico. Según él, había detectado un “electrón positivo”.

Es importante resaltar que el positrón que se detectó procedía de abajo, lo cual, tal y como indicaba Millikan, resulta desconcertante pues se trataba de mediciones de rayos cósmicos procedentes del espacio. Sin embargo, parece que fue un hecho ignorado por la comunidad científica del momento, debido a la falta de artículos al respecto. Aunque hoy día se barajan diversas hipótesis sobre lo ocurrido, como que los fuertes campos magnéticos desviarán al positrón de forma que incidiera en la cámara desde la parte inferior, resulta difícil llegar a una conclusión exacta. Uno de los principales inconvenientes es la poca información que se conserva de los detalles del montaje de Anderson.

➤ 2.3.- Interpretación de Feynmann y Stückelberg

Aunque la ecuación de KG sería rescatada más adelante reinterpretando la densidad de probabilidad como una densidad de corriente, la ecuación de Dirac fue la primera en unar, de forma consistente, la MC y TR. Sin embargo, su gran éxito iba más allá, pues solucionaba problemas como la predicción del espín o correcciones en la estructura fina del átomo al desarrollarla en el límite no relativista. Además, su teoría de huecos (el mar de Dirac), también explicaba ciertos fenómenos hasta entonces desconocidos [5]. Para empezar, explica la polarización del vacío. Entendiendo este como un conjunto infinito de partículas, el campo producido por otra partícula puede alterar los estados de energía negativa, de modo que estos perturben el valor original del campo. Por otro lado, también describe el Zitterbewegung, que consiste en rápidas oscilaciones que realiza el electrón en su movimiento. Debido a la perturbación que ocasiona el movimiento del electrón sobre el vacío, puede producirse un par electrón-positrón (huevo), de forma que el antiguo electrón rellene el huevo y el nuevo electrón ocupe la posición del primero.

Aun así, la teoría de huecos presentaba ciertas carencias que dejaron disconforme al colectivo científico. Para empezar, tratar con un modelo del vacío de carga y energía infinitas requerían de un proceso de renormalización que dotara al vacío con valores nulos de estas magnitudes. Esta renormalización ocasionaba cierto rechazo pues, aunque factible, resultaba poco estética. Además, la teoría de huecos hace aguas al tratar con bosones, pues como no respetan el principio de exclusión de Pauli no se ven forzados a permanecer en los estados de energía positiva, volviendo a la catástrofe radiativa [7]. Por último, se trataba de una teoría de muchos cuerpos y por tanto impedía seguir concediendo a la función de onda su carácter probabilístico en el estudio de una partícula, pues no se trata realmente de un sistema único y aislado.

Es por ello que, en la década de 1940, Feynman y Stückelberg concibieron una interpretación más sencilla de las soluciones de energía negativa [7]. La idea principal es que una partícula de energía negativa, que se propaga hacia atrás en el tiempo, puede reinterpretarse como una antipartícula de energía positiva que se propaga hacia delante en el tiempo.

Esta idea nace de la correspondencia biunívoca que se presenta matemáticamente entre ambas funciones de onda, la de partícula de energía negativa ($\Psi(E < 0)$) y la de antipartícula

$(\Psi_c(E > 0))$). Para entenderlo, primero hay que introducir las antipartículas como soluciones de la misma ecuación que las partículas, pero con carga opuesta. Es decir, tendrían la misma masa, pero carga y demás números cuánticos aditivos opuestos. De este modo:

$$(i\hbar c\vec{\partial} - mc^2 - e\mathcal{A}) \Psi = 0 \quad \rightarrow \quad \Psi(E < 0) \sim v(\vec{p}, s)e^{-iEt} \sim v(\vec{p}, s)e^{i|E|t} \quad (9.1)$$

$$(i\hbar c\vec{\partial} - mc^2 + e\mathcal{A}) \Psi_c = 0 \quad \rightarrow \quad \Psi_c(E > 0) \sim u(\vec{p}, s)e^{-iEt} \sim u(\vec{p}, s)e^{-i|E|t}, \quad (9.2)$$

donde se comprueba que cambiar el signo de t en la solución de partícula conduce al mismo factor exponencial que en la segunda solución. La correspondencia entre ambas interpretaciones se consigue matemáticamente por medio del operador conjugación de carga, que permite pasar de una solución a otra de la siguiente manera:

$$\hat{C}\Psi = i\gamma^2\Psi^* = \Psi_c \quad (10)$$

En resumen, la teoría de huecos de Dirac entiende las soluciones *problemáticas* como partículas que, efectivamente, poseen energía negativa y no pueden ser observadas directamente (pues el conjunto de estados negativos no tiene efecto neto). Por otro lado, esta nueva visión reinterpreta las soluciones negativas como partículas de energía positiva con las mismas propiedades, aunque carga opuesta (antipartículas), y que son matemáticamente equivalentes a partículas de energía negativa viajando hacia atrás en el tiempo. Lo que en la teoría de huecos eran precisamente las vacantes.

Aun así, ambas interpretaciones asientan una dualidad crucial e intrínseca a la futura teoría cuántica de campos y es que a cada partícula le corresponde una antipartícula. Este hecho se verificaría en los años venideros con los descubrimientos del antiprotón, observado por primera vez en 1955 por Berkely Bevaton, o el antineutrón [6].

3.- Teoría cuántica de campos

De acuerdo con lo expuesto hasta ahora, la MCR ha logrado grandes hazañas, tales como la predicción de las antipartículas y la explicación de diversos procesos ya mencionados. Sin embargo, aunque por separado la MC y la TR son teorías muy satisfactorias, al intentar aunarlas en una sola teoría emanan numerosas inconsistencias. El principal problema reside

en como ambas teorías abordan de formas muy diferentes dos aspectos fundamentales, que son la conservación de la materia y el tratamiento del espacio y el tiempo [10].

La TR permite la conversión de materia en energía y viceversa, pero contrario a esto, la MC establece una condición de normalización tal que la probabilidad de encontrar una partícula en todo el espacio es constante. Este comportamiento contradictorio se ejemplifica perfectamente en la paradoja de Klein [11].

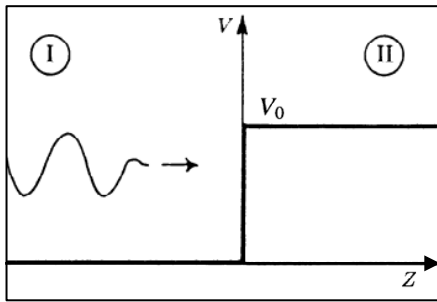


Figura 4. Electrón incidiendo en una barrera de potencial [10][11].

Analizando el comportamiento de un electrón incidiendo sobre una barrera de potencial de extensión infinita como ilustra la figura 4, se observa como surgen problemas al considerar $V_0 > E_e$. En concreto, para $V_0 > E_e + m_e c^2$, se admite la propagación de una onda por el interior de la barrera, así como un coeficiente de reflexión $R > 1$, es decir, regresan más partículas de las que entran.

En la teoría de huecos se considera que los electrones incidentes promueven electrones de los estados negativos del vacío en la región II, de modo que las vacantes (positrones) correspondientes fluyan en la región del potencial. Sin embargo, para la interpretación que se ha presentado en la sección previa, resolver la paradoja precisa de admitir que el exceso de energía en la barrera permite la creación de pares electrón-positrón y, según se ha expuesto, esto no es admisible en primera instancia debido a la condición de normalización de la MC.

Este concepto, la creación de pares, se manifiesta matemáticamente a través de la denominada longitud de Compton [12]. El concepto es sencillo, al igual que la longitud de onda de De Broglie constituye la escala a partir de la cual surge la naturaleza ondulatoria de la materia, la de Compton es aquella en la que el concepto de partícula individual deja de tener sentido. A partir del principio de Heisenberg, sería la escala en la que la incertidumbre en energía sea, al menos, la energía requerida para la creación de más partículas. Viene dada por:

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \hbar \quad \rightarrow \quad \frac{\lambda}{c} \geq \frac{\hbar}{mc^2} \quad \rightarrow \quad \lambda \geq \frac{\hbar}{mc}.$$

Se comprueba como el recorrido libre medio o, análogamente, su tiempo de vida medio se reduce según la creación de la partícula requiera más energía. Es decir, al igual que en la teoría de Dirac, este nuevo modelo atribuye al vacío una naturaleza dinámica al introducir la

posibilidad de crear y destruir las denominadas partículas virtuales, denominadas así debido a su efímera presencia.

Por todo ello surge la necesidad de desarrollar una teoría más completa, que permita la unificación de la TR y MC sin la presencia de paradojas. Es así que nace la teoría cuántica de campos (TCC) cuya diferencia más fundamental con la MCR es que generaliza el concepto de función de onda al de campo, prescindiendo de la condición de normalización ya mencionada en virtud de la creación y destrucción de partículas. Este concepto de campo ya era conocido, siendo primeramente concebido para el electromagnetismo. La novedad radicaba en su cuantización y entender estos cuantos de campo como las partículas ordinarias, extendiendo el concepto de campo, no solo a los fotones del electromagnetismo, sino a todas las partículas.

En la concepción clásica, el campo se presenta para evitar la acción a distancia, es decir, que el movimiento de un cuerpo indefinidamente alejado de otro se vea afectado inmediatamente por el segundo. Debido a que la TR también exige en las leyes de la naturaleza un carácter local al postular una velocidad límite, la presencia de campos resulta inevitable para una teoría satisfactoria. Además, los campos también solventan el problema asociado al hecho de que partículas del mismo tipo son indistinguibles pues, independientemente de su procedencia, todas serían manifestaciones del mismo campo, extendido por todo el universo [12].

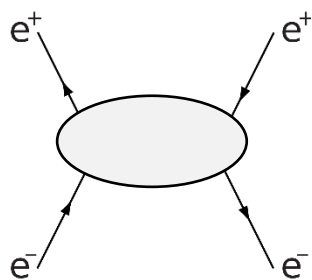
Aun así, es importante resaltar que la TCC tampoco constituye una teoría completamente satisfactoria. El motivo principal se presenta en que se ha dotado al vacío de un carácter dinámico que permite la creación y destrucción constante de partículas virtuales. De este modo, debido a las contribuciones de partículas virtuales de altas energías, al calcular cuánto se modifican las magnitudes de partículas reales aparecen divergencias indeseadas.

Sin embargo, Feynman, Schwinger y Tomonaga habían desarrollado el novedoso procedimiento de regularización, que excluía las contribuciones problemáticas, resultando en un cálculo perturbativo con un número finito de términos [10]. Este procedimiento tuvo gran éxito en el ámbito de la electrodinámica cuántica (QED), donde cortar el desarrollo está justificado debido a que los términos de mayor orden tienen cada vez menor relevancia. Se pueden lograr por tanto resultados de gran precisión considerando los términos más bajos del desarrollo perturbativo. Sin embargo, en la interacción fuerte, debido a la intensidad de la fuerza, los términos de orden superior son cada vez más significativos, impidiendo la

justificación de este procedimiento y la capacidad de adquirir resultados precisos con un número bajo de términos. Es por ello que, para este ámbito, surge nuevamente la necesidad de elaborar una teoría que resuelva el problema de la divergencia [10].

4.- Dispersión electrón-positrón

Aun con todo lo expuesto en el último párrafo, la QED resulta ser, hasta la fecha, la teoría que presenta el mejor acuerdo con los resultados experimentales. El mejor ejemplo de esto es el momento anómalo del electrón, que se sitúa en una posición privilegiada entre las mediciones de constantes en la naturaleza, con una concordancia de hasta la décima cifra significativa [13]. Con todo ello, el marco de trabajo más adecuado para abordar los objetivos de este trabajo es, precisamente, la QED, cuyo formalismo se desarrollará en secciones posteriores para el cálculo de secciones eficaces. A continuación, se define el proceso a analizar, así como su relevancia y motivación de estudio.



El proceso en cuestión es la dispersión electromagnética electrón-positrón, que consiste en la interacción de ambas partículas de forma que el estado final quede constituido por otros dos leptones (partículas de espín $\frac{1}{2}$ que no sienten la interacción fuerte) o fotones. Es importante apreciar cómo se considera la posibilidad de que las partículas resultantes tras la interacción no sean las iniciales, de hecho, se analizará en detalle la situación en la que el estado final lo constituyan una pareja de muón-antimuón. Este hecho no resulta sorprendente considerando que se maneja un formalismo que permite la creación y destrucción de partículas, siempre que las leyes de conservación lo permitan. Generalmente, la dispersión que resulta en las mismas partículas para el estado final recibe el nombre de “*Scattering Bhabha*” en honor a Homi J. Bhabha, el primero en analizar este proceso con el formalismo de la QED [14].

Este proceso de dispersión tiene una gran relevancia en el ámbito de la física teórica, sin ir más lejos, en el análisis experimental de las secciones eficaces de otros procesos. Concretamente M. N. Frary y D. J. Miller resaltaron que únicamente a través del análisis del *scattering Bhabha* sería posible un estudio de la masa del quark top [15]. Además, debido a

que son partículas elementales, también se han utilizado para analizar la validez de modelos atómicos y moleculares simplificados en otros procesos de dispersión [16].

Por otro lado, también es un proceso de gran relevancia en numerosos ámbitos. Pueden mencionarse los siguientes: desarrollo de nuevas tecnologías, semiconductores, técnicas de espectrometría, análisis en la estructura de átomos y moléculas, física del plasma, modelos atmosféricos, astrofísica de altas energías e incluso medicina. Para este último caso, se puede destacar el uso del PET (tomografía de emisión de positrones) para el diagnóstico de cáncer o trastornos de las funciones cerebrales [17].

En conclusión, resulta ser un proceso de enorme importancia, tanto en el ámbito académico como en multitud de disciplinas. Por esta razón y por ser un cálculo relativamente sencillo, durante el resto del trabajo se obtendrá y estudiará la sección eficaz del proceso ya mencionado como introducción al uso del formalismo que proporciona la QED para el cálculo de secciones eficaces.

II. ESTUDIO DE LA INTERACCIÓN ELECTRÓN-POSITRÓN

Después de revisar los conceptos fundamentales, se introduce el capítulo con el formalismo teórico que proporciona la QED para el cálculo de la sección eficaz de los procesos a estudiar, definiéndose los campos (fermiónico y electromagnético), el propagador y la matriz S de Dyson. Durante el resto del capítulo se llevará a cabo el objetivo principal del trabajo, deducir las secciones eficaces para procesos de dispersión de electrones y positrones.

5.- Formalismo de la QED

En primer lugar, es necesario comprender que, a diferencia de la MCR, la TCC permite trabajar con sistemas de infinitos grados de libertad a través de una teoría lagrangiana. La idea es describir el comportamiento de partículas libres mediante una densidad lagrangiana libre (\mathcal{L}_0) e incorporar la interacción a través de una densidad lagrangiana de interacción (\mathcal{L}_I) junto con un desarrollo perturbativo. Sin embargo, dentro del desarrollo aparecen términos de orden superior que presentan problemas de divergencia debido a esta \mathcal{L}_I que, aún si la partícula está aislada, permite contribuciones de autointeracción [18].

De este modo, el primer paso es deducir una \mathcal{L}_0 para cada tipo de partícula (fermiónica o bosónica) cuyas ecuaciones de movimiento coincidan con las presentadas en la MCR. Además, también debe satisfacer otras consideraciones, como su carácter escalar o ciertas propiedades de simetría. En cuanto a las ecuaciones de movimiento, estas se definen con las ecuaciones de Euler-Lagrange tras imponer el principio de Hamilton (minimización de la acción), igual que en la teoría clásica de campos [18].

Por último, es importante mencionar una de las herramientas más importantes de la TCC, el teorema de Noether. Este dicta que cada transformación continua que deje invariante el sistema (simetría) lleva asociada una magnitud conservada, con su correspondiente ecuación de conservación. Es por ello que, sabiendo las simetrías que debe obedecer un sistema, es posible deducir sus magnitudes fundamentales y expresarlas en términos de los operadores de creación y destrucción mediante un desarrollo en serie de Fourier [18].

➤ 5.1.- Campo fermiónico

En el caso fermiónico, es evidente que la \mathcal{L}_o que se defina debe conducir a la ecuación de Dirac (5). Además, considerando que ha de ser un escalar y las soluciones de las ecuaciones de movimiento deben ser espinores, se comprueba que para fermiones sería [18]:

$$\mathcal{L}_o = \bar{\Psi}(x)[i\cancel{\partial} - m]\Psi(x). \quad (11)$$

Es importante destacar que en este caso $\Psi(x)$ no será una función de onda sino, como ya se adelantó, un campo, siendo $\bar{\Psi}(x)$ su campo adjunto definido como $\bar{\Psi}(x) = \Psi(x)\gamma^0$. Considerando que (11) conduce a la ecuación de Dirac, es evidente que las soluciones serán las presentadas en (6). Por tanto, admitiendo un desarrollo en serie de Fourier en ondas planas, donde r designa las dos posibles valores de la helicidad, la solución general quedaría:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{r=1}^2 (c_r(\vec{p})u_r(\vec{p})e^{-ipx} + d_r^\dagger(\vec{p})v_r(\vec{p})e^{ipx}). \quad (12)$$

El comportamiento de campo surge al interpretar los coeficientes del desarrollo (c y d), no como simples escalares, si no operadores de creación y aniquilación, propios del formalismo de segunda cuantización [18]. Sus relaciones de conmutación se deducen de aplicar las siguientes reglas de conmutación sobre el campo (12), su adjunto y los campos conjugados (π_Ψ y $\pi_{\bar{\Psi}}$), cuyos papeles son los mismos que juegan las variables canónicas (q_i) y sus momentos conjugados (p_i) en la teoría clásica:

$$\{\Psi(\vec{x}), \pi_\Psi(\vec{x}')\} = \{\bar{\Psi}(\vec{x}), \pi_{\bar{\Psi}}(\vec{x}')\} = i\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad \text{donde} \quad \pi_\Psi = \frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial \dot{\Psi}} \quad \pi_{\bar{\Psi}} = \frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial \dot{\bar{\Psi}}}. \quad (13)$$

De este modo, considerando una simetría gauge global, a través del teorema de Noether puede expresarse el operador carga en términos de c y d como sigue:

$$Q = q \sum_{\vec{p}} \sum_{r=1}^2 (N_r^c(\vec{p}) - N_r^d(\vec{p})). \quad (14)$$

Se puede comprobar como las contribuciones a la carga total del sistema por parte de las partículas asociadas a c y d son opuestas. Si a esto se le une el hecho de que los operadores tienen reglas de conmutación independientes, se concluye que deben tratarse de los

operadores asociados a un fermión y su correspondiente antifermión. Como resultado, si nos referimos al caso del electrón, cada término de los campos Ψ y $\bar{\Psi}$ corresponde a:

$$\text{Destrucción } e^-: \quad \Psi^{(+)}(x) = \sqrt{\frac{m}{VE}} \sum_{r=1}^2 c_r(\vec{p}) u_r(\vec{p}) e^{-ipx} \quad (15.1)$$

$$\text{Creación } e^+: \quad \Psi^{(-)}(x) = \sqrt{\frac{m}{VE}} \sum_{r=1}^2 d_r^\dagger(\vec{p}) v_r(\vec{p}) e^{ipx} \quad (15.2)$$

$$\text{Destrucción } e^+: \quad \bar{\Psi}^{(+)}(x) = \sqrt{\frac{m}{VE}} \sum_{r=1}^2 d_r(\vec{p}) \bar{v}_r(\vec{p}) e^{-ipx} \quad (15.3)$$

$$\text{Creación } e^-: \quad \bar{\Psi}^{(-)}(x) = \sqrt{\frac{m}{VE}} \sum_{r=1}^2 c_r^\dagger(\vec{p}) \bar{u}_r(\vec{p}) e^{ipx} . \quad (15.4)$$

Por último, es importante destacar que en el formalismo de la TCC no intervienen soluciones de energía negativa, ni es necesario realizar reinterpretaciones de las mismas, sino que de forma natural surge el concepto de partícula y antipartícula.

➤ 5.2.- Campo electromagnético

De la expresión (11) se deduce que un sistema de fermiones no presenta simetría gauge local, aunque sí la respeta de forma global, como se comprueba al deducir el operador carga (14). Para exigir esta simetría de forma local es necesario incluir un término extra en (11) tal que, al realizar la transformación, esta nueva \mathcal{L}_o permanezca invariante. Dicho término sería [18]:

$$\mathcal{L}_I = -q\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)A_\mu(x) = -j^\mu(x)A_\mu(x) = -q\bar{\Psi}(x)\not{A}\Psi(x) . \quad (16)$$

Merece la pena hacer dos puntualizaciones al respecto:

- Este nuevo término incorpora en la expresión de \mathcal{L}_o un nuevo campo $A_\mu(x)$ con estructura del cuadvivector que puede asociarse al campo electromagnético.
- El nuevo término denotado como \mathcal{L}_I es precisamente la densidad lagrangiana de interacción que se mencionaba anteriormente. Puede identificarse como tal porque acopla el nuevo campo con la cuadviviente del campo fermiónico j^μ .

La lagrangiana libre de este nuevo campo puede deducirse a través de propiedades básicas que debe respetar. Es evidente que esta lagrangiana debería respetar la simetría gauge local, pero para que además tenga significado físico ha de ser invariante ante transformaciones Lorentz e inversión espacial. Por último, exigiendo que tenga las dimensiones correctas para que la acción asociada sea adimensional ($L^{-4} = M^4$), se concluye que una opción es:

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad \text{con} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (17)$$

Puede deducirse que esta \mathcal{L}_0 desemboca en las ecuaciones de Maxwell y por tanto A_μ puede identificarse con el campo electromagnético. En este caso, la solución general sería:

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_{m=0}^3 \mathcal{E}_m^\mu(\vec{k}) [a_m(\vec{k})e^{-ikx} + a_m^\dagger(\vec{k})e^{ikx}] , \quad (18)$$

donde $\mathcal{E}_m^\mu(\vec{k})$ son los vectores de polarización cuyas propiedades pueden encontrarse de forma detallada en el capítulo 8 de [18]. Al igual que en el caso fermiónico, el carácter de campo surge de cuantizar la expresión, esta vez, mediante las reglas de conmutación de los bosones, resultando en que el operador a se asocia a los fotones.

➤ 5.3.- Propagador

A continuación, es necesario introducir la herramienta matemática que permite describir la interacción entre las partículas involucradas en el proceso que se pretende estudiar, así como su energía y momento intercambiado. En la teoría clásica, este papel lo interpreta el campo electromagnético, sin entrar en más detalle sobre el mecanismo de transmisión de la información. En la TCC, debido a la cuantización del campo, este mecanismo lo constituirán los cuantos de los campos fermiónicos y fotónicos que intervienen en el proceso, es decir, electrones y fotones virtuales que sean emitidos y absorbidos por partículas reales. En concreto, para este trabajo únicamente será necesario considerar el campo fotónico, hecho que se justificará en secciones posteriores al analizar los diagramas de Feynman del proceso.

Esta idea puede expresarse matemáticamente a través de la operación de contracción de campos, que mide la amplitud de probabilidad de que una partícula surja en un punto del espacio-tiempo y sea aniquilada en otro. Para un campo bosónico sería [18]:

$$\underbrace{\phi(x)\phi(x')} = \langle 0|T(\phi(x)\phi(x'))|0\rangle = i\Delta_F(x-x') = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C_F} \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - m^2} d^4k. \quad (19)$$

El propagador para los fotones sería precisamente la expresión (19) en el límite de masa nula y multiplicada por el tensor métrico $g^{\mu\nu}$, que refleja el carácter cuadvectorial del campo. De este modo, el propagador fotónico quedaría como [18]:

$$\underbrace{A^\mu(x)A_\nu(x')} = iD_F^{\mu\nu}(x-x') = -ig^{\mu\nu} \lim_{m \rightarrow 0} \Delta_F(x-x'). \quad (20)$$

A partir de esta expresión puede realizarse un interesante análisis sobre la causalidad en la TCC [19]. Es lógico pensar que la transmisión de información entre dos eventos alejados una distancia espacial ($(x-x')^2 < 0$) debería ser nula, pues no pueden interferir entre ellos. Sin embargo, puede comprobarse que la amplitud en el propagador (19) decae exponencialmente como $e^{-m|\vec{x}-\vec{y}|}$ y por tanto, aunque sea pequeña, dicha amplitud no será nula para dos eventos separados una distancia espacial.

En principio, tal y como se ha expuesto, esto violaría el principio fundamental de causalidad porque se admite la transmisión de información. A pesar de ello, se puede comprobar que el hecho de que el propagador no se anule no implica que ambos eventos interfieran mutuamente. Para demostrarlo basta comprobar que el conmutador de los campos en ambos puntos es nulo, es decir, la medida de uno de los eventos no afecta al otro.

Al ser un invariante Lorentz, la distancia espacio-temporal entre estos dos hipotéticos eventos es la misma en cualquier sistema de referencia. Además, como (19) también es un invariante Lorentz [18], su valor será el mismo en cualquier sistema de referencia. Por tanto, calculando el conmutador para tiempos iguales quedaría demostrado. El cálculo quedaría como sigue:

$$[\phi(x), \phi(x')] = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega_k} \left(e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} - e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \right) = \{\vec{k} \rightarrow -\vec{k}\} = 0, \quad (21)$$

donde el último paso hace referencia a que en la segunda integral se realiza el cambio de variable indicado. Esto conlleva la aparición de un signo menos en el diferencial $d^3\vec{k}$ que se cancela por haber intercambiado también los límites de integración, resultando en dos integrales idénticas pero de signo opuesto. La interpretación de este resultado viene de la mano de la siguiente expresión, que puede demostrarse si se integra la variable k_0 en (19):

$$[\phi(x), \phi(x')] = i\Delta_F(x-x') - i\Delta_F(x'-x) = \{(x-x')^2 < 0\} = 0 \quad (22)$$

Es decir, que aun permitiéndose la propagación de partículas virtuales de x a x' , la amplitud de que se envía otra desde x' hasta x es la misma y, como los bosones neutros son su propia antipartícula, ambas contribuciones se cancelan.

➤ 5.4.- Matriz S de Dyson

Hasta ahora, con \mathcal{L}_0 se ha introducido el estudio de sistemas libres sin presencia de interacciones, pero para el análisis de este trabajo es necesario incluir la contribución de \mathcal{L}_I , como ya se ha mencionado, mediante teoría de perturbaciones. La matriz S de Dyson resulta de gran utilidad pues, además de contener la información de todas las posibles colisiones, permite extraer la amplitud de probabilidad del suceso deseado en cualquier orden de teoría de perturbaciones [18].

En una colisión donde los estados final ($|\Phi(\infty)\rangle$) e inicial ($|\Phi(-\infty)\rangle$) están perfectamente caracterizados, la matriz S de Dyson se define como:

$$|\Phi(\infty)\rangle = S|\Phi(-\infty)\rangle, \quad (23)$$

donde el estado final $|\Phi(\infty)\rangle$ representa cualquiera de las posibles configuraciones finales del sistema ($|\Phi_f\rangle$). Definiendo el elemento de matriz S_{fi} como la proyección de S sobre ciertos estados $|\Phi_f\rangle$ y $|\Phi(-\infty)\rangle$ se puede deducir su significado desarrollando $|\Phi(\infty)\rangle$ en términos de la base de estados $|\Phi_f\rangle$ como sigue:

$$|\Phi(\infty)\rangle = \sum_f |\Phi_f\rangle \langle \Phi_f | \Phi(\infty) \rangle = \sum_f |\Phi_f\rangle \langle \Phi_f | S | \Phi(-\infty) \rangle = \sum_f S_{fi} |\Phi_f\rangle. \quad (24)$$

Proyectando sobre el estado f' y considerando la ortogonalidad de la base, se comprueba que el módulo al cuadrado de cada elemento de matriz $S_{f'i}$ se corresponde con la amplitud de probabilidad de que tras la interacción, dado un estado inicial i , se alcance el estado final f' . Se tiene entonces que:

$$\langle \Phi_{f'} | \Phi(\infty) \rangle = \langle \Phi_{f'} | S | \Phi(-\infty) \rangle = \sum_f \langle \Phi_{f'} | \Phi_f \rangle \langle \Phi_f | S | \Phi_i \rangle = \sum_f \delta_{ff'} S_{fi} = S_{f'i}, \quad (25)$$

donde, considerando el carácter unitario de la matriz ($S^\dagger S = \mathbb{I}$), se comprueba que efectivamente dicha probabilidad se normaliza a la unidad de la siguiente manera:

$$1 = \langle \Phi_i | S^\dagger S | \Phi_i \rangle = \langle \Phi(\infty) | S | \Phi_i \rangle = \{14\} = \sum_f S_{fi}^* \langle \Phi_f | S | \Phi_i \rangle = \sum_f |S_{fi}|^2. \quad (26)$$

Esta última expresión es de gran importancia, pues juega en la TCC el mismo papel que la condición de normalización de la densidad de probabilidad en la MCR. La diferencia es que en la MCR dicha condición conservaba las partículas y en la TCC se garantiza la transición desde un estado inicial a un estado final con la posibilidad de creación y destrucción de partículas.

En cuanto a la expresión de la matriz S de Dyson, como era de esperar, se parte de la ecuación diferencial que marca la evolución temporal de los estados según H_I . Integrándola se obtiene:

$$i \frac{\partial |\Phi(t)\rangle}{\partial t} = H_I(t) |\Phi(t)\rangle \rightarrow |\Phi(t)\rangle = |\Phi(-\infty)\rangle - i \int_{-\infty}^t dt_1 H_I(t_1) |\Phi(t_1)\rangle. \quad (27)$$

Repitiendo este procedimiento para $|\Phi(t_1)\rangle$ se obtendría una nueva variable temporal t_2 definida para instantes previos a t_1 . Si se repite el proceso indefinidamente se obtiene la expresión (B.2) que, tomando el límite $t \rightarrow \infty$, adquiere la forma de la ecuación (23) que relaciona los estados final e inicial y define la matriz S . Reescribiendo conveniente dicha expresión según figura en el anexo B, se deduce que la matriz S quedaría:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_n T \{ (\bar{\Psi} \not{A} \Psi)_{x_1} (\bar{\Psi} \not{A} \Psi)_{x_2} \cdots (\bar{\Psi} \not{A} \Psi)_{x_n} \}. \quad (28)$$

Por otro lado, en el anexo C se incluye una discusión sobre los estados final e inicial y porque restringiendo el desarrollo hasta el segundo orden se evitan problemas a la hora de definirlos. Además, se puede comprobar que el término de primer orden es nulo y no será necesario considerarlo, pues con un solo vértice es imposible respetar las reglas de conservación en este. Por consiguiente, el desarrollo perturbativo de menor orden posible se restringirá al término de segundo orden.

Es importante resaltar que el tratamiento perturbativo de la interacción aparece precisamente en esta expresión de S . Esta característica se manifiesta al aplicar repetidas veces la ecuación de evolución temporal, pues por cada vez que se aplica aparece la densidad hamiltoniana en otro instante de tiempo, es decir, se considera una nueva interacción. Es por ello que n manifiesta el número de interacciones que se consideran en el desarrollo, coincidiendo con el orden de este. Además, se comprueba cuanto mayor sea n (el orden) menor contribución tendrá ese término del desarrollo debido al factor e^n , que disminuye

rápidamente gracias a que la constante de acoplo e es mucho más pequeña que la unidad. De este modo se justifica porqué en la sección 4 se comentó que el desarrollo puede restringirse a ordenes bajos e igualmente obtener resultados con gran acuerdo experimental.

Finalmente puede abordarse el cálculo de las secciones eficaces, para el cual se seguirá un procedimiento similar al desarrollado en [20]. Sin embargo, antes de abordar el procedimiento que se muestra en las siguientes secciones, es conveniente especificar el sistema de referencia desde el que se abordará el problema. Para este trabajo se escoge el sistema centro de momentos. Las principales consecuencias de esta elección se recogen en el anexo D.

6.- Sección eficaz

Se trata de la magnitud fundamental de cualquier proceso de dispersión y se define como la probabilidad por unidad de tiempo, centro dispersor y flujo incidente de que se produzca dicho proceso. Para un experimento en el que un haz de partículas incide sobre un blanco, la sección eficaz diferencial cuantifica el número de partículas que son dispersadas al interactuar con dicho blanco, ya que pueden no hacerlo y continuar con su trayectoria original.

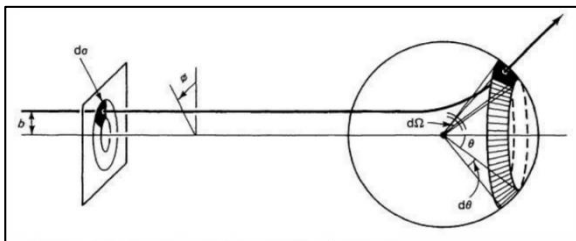


Figura 6. Descripción gráfica de la sección eficaz [21].

Debido a la interacción electromagnética entre las partículas, la dispersión no se basa en si estas colisionan o no, sino que depende de muchos factores como sus velocidades o parámetro de impacto. Así pues, el concepto de una sección transversal que cuantifica la probabilidad de dispersión puede asociarse a una expresión que, incorporando la interacción, relacione la amplitud de dispersión ($D(\theta, E)$) con el ángulo sólido de dispersión ($d\Omega$) y el área de incidencia ($d\sigma$) que se muestra en la figura 6. Por tanto, la sección eficaz diferencial ($d\sigma/d\Omega$) determina la probabilidad de detectar una partícula en una dirección determinada por unidad de ángulo sólido según se expone en:

$$d\sigma = D(\theta, E)d\Omega \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = D(\theta, E), \quad (29)$$

A continuación, se deducirá la expresión general de la sección eficaz para los casos de interés. Debido a que se estudiarán el *scattering* Bhabha ($e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$) y la creación de muones

($e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$), en la expresión para la sección eficaz se considerará que las masas de las partículas finales e iniciales pueden ser distintas, de modo que pueda recuperarse la expresión para la dispersión Bhabha igualando las masas. Para obtener la sección eficaz, se comienza deduciendo la probabilidad de transición por unidad de tiempo y volumen (W_{fi}), donde entra en juego el papel de la matriz de dispersión (28) pues sus elementos de matriz S_{fi} corresponden con esta probabilidad de transición (25). Por tanto, W_{fi} quedaría como:

$$W_{fi} = \frac{|\langle \Phi_f | S | \Phi_i \rangle|^2}{\int d^4x} = \frac{m^2 M^2}{V^4 E^2 E'^2} \cdot (2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_f) \cdot |\mathcal{M}_{fi}|^2, \quad (30)$$

donde se ha hecho uso de la expresión (E.1) del anexo E dedicado a las propiedades de la delta de Dirac. Además, se ha expresado el elemento de matriz en términos de una constante dependiente de la energía, el factor asociado a la delta de Dirac y la denominada amplitud invariante (\mathcal{M}_{fi}), expresión que se probará al calcular los elementos de matriz. Es conveniente obtener, a partir de (30), la probabilidad de llegar a los estados finales circundantes a $|\Phi_f\rangle$ en un intervalo diferencial del espacio de momentos, es decir, la probabilidad de que las partículas finales tengan un momento en concreto. Para ello, se multiplica (30) por la densidad de estados de las dos partículas finales usando la densidad de estados que se deduce del problema de una onda estacionaria encerrada en una cavidad, que puede encontrarse en la primera sección de [20]. La expresión quedaría:

$$dW_{fi} = \left(\prod_{f=1}^{N_f} \frac{V}{(2\pi)^3} d^3\vec{p}'_f \right) W_{fi} = \{\text{dos partículas}\} = V^2 \frac{d^3\vec{p}' d^3\vec{q}'}{(2\pi)^6} W_{fi}. \quad (31)$$

Finalmente, considerando que en (6) las funciones de onda se normalizaron de forma que una partícula ocupa un volumen V , si se divide (31) entre el flujo de partículas incidentes $|J_{inc}|$ y el número de centros dispersores por unidad de volumen (en este caso uno) se deduce que:

$$d\sigma = \frac{dW_{fi}}{\frac{1}{V} |J_{inc}|} = \frac{dW_{fi}}{\frac{1}{V} \frac{|\vec{v}_{rel}|}{V}} = \frac{mM}{E^2 |\vec{v}_{rel}|} \cdot |\mathcal{M}_{fi}|^2 \cdot (2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_f) \cdot \frac{m}{E'} \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{M}{E'} \frac{d^3\vec{q}'}{(2\pi)^3}, \quad (32)$$

donde $|\vec{v}_{rel}|$ es la velocidad relativa de las partículas. Según ya se ha mencionado, el último término representa el volumen tridimensional del espacio fásico el cual, aunque no es manifiestamente covariante, puede deducirse que se trata de un invariante Lorentz [20]. De este modo, cada partícula tendrá una contribución distinta a la sección eficaz según su

densidad de estados finales en el espacio fásico, lo cual es lógico, pues a mayor cantidad de estados accesibles más probabilidad de transición. El factor referido a la delta impondrá la conservación del momento y la energía una vez sea integrado. Por otro lado, a diferencia del resto de elementos que constituyen la parte cinemática, la amplitud invariante contiene la información de la interacción. Se trata precisamente de un invariante Lorentz, pues al calcular los elementos de matriz se comprobará que se trata de la contracción de cuadvectores.

Finalmente, el primer término constituye el denominado factor de flujo por unidad de tiempo y área, que también se trata de un invariante Lorentz, aunque solo bajo la condición de colinealidad dada por $(p \cdot q)^2 = p^2 q^2$. Esto quiere decir que los momentos del electrón y el positrón deben estar alineados antes de la interacción, lo cual es falso para situaciones más complejas (como la física del plasma), pero válido para el proceso de estudio [20]. Aplicando esta condición, el término en cuestión de (32) se deduce que:

$$\frac{mM}{E^2 |\vec{v}_{rel}|} = \frac{mM}{\sqrt{(p \cdot q)^2 - m^4}} = \frac{mM}{E^2} \frac{1}{\frac{2|\vec{k}|}{E}}. \quad (33)$$

A continuación, hay que tener en cuenta que esta magnitud es una medida experimental sujeta a cómo se diseña el propio experimento. Suponiendo un montaje que no permite detectar la polarización de las partículas, para comparar (32) con los resultados del experimento primero habría que hacer la media de las posibles helicidades. Además, como tampoco suele determinarse el estado final concreto de las dos partículas finales (solo de una de ellas), se integrará (32) sobre los momentos finales de modo que θ y E sean las únicas variables que se medirán en el experimento. De este modo, la expresión quedaría:

$$d\bar{\sigma} = \frac{m^2 M^2}{2(2\pi)^2 |\vec{k}| E} \cdot \int \overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} \cdot \delta^4(P_i - P_f) \cdot 4 \frac{d^3 \vec{p}'}{2E'} \frac{d^3 \vec{q}'}{2E'}, \quad (34)$$

donde el acento en forma de barra en la amplitud invariante y la sección eficaz denota que se hace la media sobre las helicidades. Dado que el integrando contiene una delta de cuatro dimensiones, es conveniente reescribir la expresión para transformarla en una integral de cuatro dimensiones y facilitar la manipulación de la delta. Haciendo uso de la identidad (E.4) del anexo E, la expresión (34) quedaría como:

$$d\bar{\sigma} = \frac{2m^2 M^2}{(2\pi)^2 |\vec{k}| E} \cdot \int \overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} \cdot \delta^4(p + q - p' - q') \cdot \delta(q'^2 - m^2) \Theta(q'_0) \cdot \frac{d^3 \vec{p}'}{2E'} d^4 q' =$$

$$= \frac{2m^2 M^2}{(2\pi)^2 |\vec{k}| E} \cdot \int \overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} \cdot \delta((p + q - p')^2 - m^2) \Theta(p_o + q_o - p'_o) \cdot \frac{|\vec{p}'|^2 d|\vec{p}'| d\Omega}{2E'} \quad (35)$$

Es importante apreciar como integrando la delta se impone la conservación de la energía y el momento, lo cual implica que las energías finales e iniciales coincidan, tanto en el *scattering* Bhabha como en la creación de muones. Puede deducirse de forma sencilla como sigue:

$$p_o + q_o = p'_o + q'_o \Rightarrow 2E = 2E' \Rightarrow E = E' \quad (36)$$

A continuación, se considera el cambio de variable $|\vec{p}'| d|\vec{p}'| = p'_o dp'_o$, que surge de la expresión para la energía de Einstein (1): $p'_o{}^2 = |\vec{p}'|^2 + M^2$. Después de este cambio, los límites de integración para p'_o vendrían marcados por:

$$- \text{Cota máxima: } \Theta(p_o + q_o - p'_o) = \Theta(2E - p'_o) \Rightarrow p'_o \leq 2E. \quad (37.1)$$

$$- \text{Cota mínima: } p'_o{}^2 = |\vec{p}'|^2 + M^2 = \{|\vec{p}'| = 0\} = M^2 \Rightarrow p'_o \geq M. \quad (37.2)$$

Las cotas manifiestan que el reparto de energía entre las partículas finales debe ser tal que ninguna adquiera una energía mayor a la disponible inicialmente (37.1), ni inferior a la necesaria para producir la propia partícula (37.2). Estos límites en la energía de una de las partículas del estado final resultan evidentes, pero lo interesante es que aparecen de manera natural, sin necesidad de imponerlos de forma externa.

Por otro lado, si se desarrolla la delta de (35) se obtiene la expresión:

$$\delta((p + q - p')^2 - m^2) = \delta(4E^2 - 4Ep'_o) = \frac{\delta(p'_o - E)}{4E}, \quad (38)$$

donde se ha aplicado la propiedad para la delta mencionada en (E.6). Finalmente, introduciendo los límites de integración (37) para eliminar la función de Heaviside en (35) y sustituyendo la expresión (38), se concluye que la sección eficaz diferencial sería:

$$d\bar{\sigma} = \frac{m^2 M^2}{(2\pi)^2 |\vec{k}| E^2} \cdot \int_m^{2E} \overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} \cdot \frac{\delta(p'_o - E)}{4E} \cdot p'_o |\vec{p}'| dp'_o d\Omega$$

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{m^2 M^2}{16\pi^2 E^2} \cdot \frac{|\vec{k}'|}{|\vec{k}|} \cdot \overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2}, \quad (39)$$

donde hay que tener presente que la amplitud invariante tiene la restricciones impuestas por la delta que se ha integrado, es decir, la conservación de la energía y el momento.

7.- Cálculo de los elementos de matriz

Después de haber obtenido la expresión para la sección eficaz (39) únicamente quedarían por deducir los elementos de matriz para los procesos considerados, más concretamente, la amplitud invariante. Se comenzará con el cálculo del *scattering* Bhabha, donde se abordará el caso general y el límite ultrarrelativista, y se continuará con la creación de muones, que reutilizará muchos de los procedimientos de la dispersión Bhabha. Aun así, conviene comentar las características generales de ambos procesos.

En primer lugar, es fundamental tener definidos los estados inicial y final que definen el elemento de matriz, tal y como se expuso en la sección 5.4 dedicada a la matriz S de Dyson. En ambos procesos, tanto el estado inicial como final están constituidos por una pareja de leptón-antileptón. Los vectores estados serían pues el resultado de aplicar los siguientes operadores de creación sobre el estado de vacío:

$$|\Phi_i\rangle = c_r^\dagger(\vec{p})d_s^\dagger(\vec{q})|0\rangle \quad |\Phi_f\rangle = c_{r'}^\dagger(\vec{p}')d_{s'}^\dagger(\vec{q}')|0\rangle. \quad (40)$$

En segundo lugar, como se trata de un desarrollo perturbativo, hay que establecer cuando se interrumpirá el mismo. En este caso, ya se examinaron al final de las secciones 3 y 5.4 y durante del anexo C los motivos por los que se limitará al término de segundo orden.

De este modo, desarrollado el producto temporal en la expresión (28) a través del teorema de Wick [18] aparecen ocho términos. De entre todos, habría que escoger aquel que presente dos líneas fermiónicas externas, pues se trata del único término que presenta los operadores de creación y destrucción necesarios para conectar los estados definidos previamente. Denotando con el superíndice (2) el orden del término, este quedaría como:

$$S^{(2)} = \frac{-e^2}{2} \int \int d^4x_1 d^4x_2 : (\bar{\Psi} \not{A} \Psi)_{x_1} (\bar{\Psi} \not{A} \Psi)_{x_2} : . \quad (41)$$

➤ 7.1.- Scattering Bhabha: ($e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$)

Sin embargo, aun definiendo el elemento de matriz, el proceso no está completamente determinado. La razón es porque los estados inicial y final pueden conectarse de diferentes maneras según la ordenación de las interacciones intermedias y, como en el experimento solo

pueden identificarse los estados inicial y final, en el elemento de matriz habrá que considerar la contribución de todos los posibles procesos intermedios. Para el *scattering* Bhabha se ilustran en las figuras 7 y 8, donde se ha tomado la evolución temporal en dirección vertical.

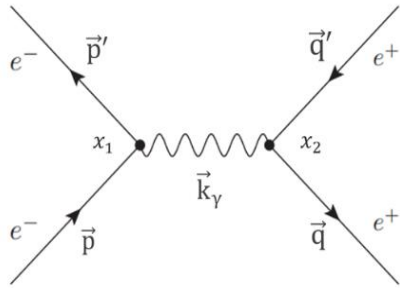


Figura 7. Diagrama directo de la figura 3.25 a) en la sección 3.4 de [20].

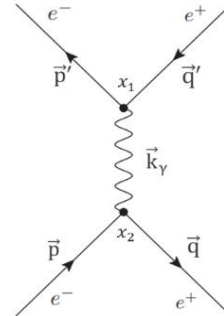


Figura 8. Diagrama de intercambio de la figura 3.25 b) en la sección 3.4 de [20].

Es importante subrayar que, aunque las figuras 7 y 8 parezcan ilustrar únicamente dos de los cuatro diagramas mencionados, la realidad es que en cada una de ellas se considera la contribución de dos diagramas. Para entender esto es conveniente examinar el hamiltoniano de interacción de uno de los diagramas, por ejemplo, el de la figura 7.

En cada vértice hay dos campos fermiónicos representados por las líneas externas en los diagramas y, atendiendo a la estructura de (16), debe tratarse de una pareja constituida por un término del campo y otro del campo adjunto. Los términos que intervienen en el hamiltoniano del vértice x_1 en (41) deberían ser el asociado a la destrucción de un electrón (15.1) y la creación de otro (15.4) y para x_2 sería análogo, pero con los términos del campo asociados al positrón. Sin embargo, la estructura de (16) permite intercambiar los campos de ambos vértices sin afectar a los estados final e inicial, de modo que en x_1 sean los del positrón y en x_2 los del electrón. Como en el diagrama de intercambio (figura 12) puede hacerse un razonamiento análogo se comprueba que cada diagrama presenta realmente una contribución doble y por tanto los elementos de matriz deberán multiplicarse por dos.

1) Diagrama directo:

Como se acaba de explicar, los campos del vértice x_1 deben asociarse a la destrucción y creación de un electrón y los de x_2 a un positrón. Introduciendo en la expresión (41) los campos de (15) correspondientes a estas líneas externas quedaría:

$$S^D = \frac{-e^2}{2} \int \int d^4x_1 d^4x_2 : \underbrace{(\bar{\Psi}^{(-)} \gamma^\mu A_\mu \Psi^{(+)})_{x_1} (\bar{\Psi}^{(+)} \gamma^\nu A_\nu \Psi^{(-)})_{x_2}} : , \quad (42)$$

donde el superíndice denota que es el término directo. Debido a la presencia del producto normal, los operadores se deben reordenar de modo que los de destrucción actúen primero, por lo que intercambiar $\Psi^{(+)}(x_1)$ con $\Psi^{(-)}(x_2)$ introducirá un signo menos en la expresión.

A continuación, según se ilustra en (25) el elemento de matriz se calcula multiplicando a cada lado por los vectores estado, de forma que todos los operadores de creación y destrucción se cancelan, ya que este término de S debe conectar ambos estados para no ser nulo. Como resultado aparece el producto del estado de vacío consigo mismo que vale la unidad.

Si se sustituyen las expresiones (15) para los campos, se extraen de la integral las constantes asociadas a m , E y V y se agrupan las exponenciales asociadas al mismo vértice, la expresión del elemento de matriz quedaría:

$$S_{fi}^D = \frac{e^2 m^2}{2E^2 V^2} \int \int d^4x_1 d^4x_2 (\bar{u}_{r'} \gamma^\mu A_\mu u_r e^{i(p'-p)x_1}) (\bar{v}_s \gamma^\nu A_\nu v_{s'} e^{i(q'-q)x_2}), \quad (43)$$

donde se ha omitido la dependencia con el momento en la notación, así que de aquí en adelante se entenderá que:

$$u_r(\vec{p}) = u_r \quad \bar{u}_{r'}(\vec{p}') = \bar{u}_{r'} \quad v_{s'}(\vec{q}') = v_{s'} \quad \bar{v}_s(\vec{q}) = \bar{v}_s. \quad (44)$$

A continuación, si se introduce la expresión del propagador del campo electromagnético dada por (20) y se hace uso del punto 2 del anexo E, la expresión final sería:

$$S_{fi}^D = \frac{m^2}{E^2 V^2} (2\pi)^4 \delta^4(p' + q' - p - q) [\bar{u}_{r'}(\vec{p}') \gamma^\mu u_r(\vec{p})] \frac{-ie^2}{(q - q')^2} [\bar{v}_s(\vec{q}) \gamma_\mu v_{s'}(\vec{q}')]. \quad (45)$$

2) Diagrama de intercambio:

El procedimiento sería análogo al caso anterior a excepción de dos diferencias referidas a las líneas externas de los vértices. La primera sería que mientras que en el diagrama directo cada vértice contiene líneas de creación y destrucción, ahora hay líneas de un solo tipo. De este modo, la expresión (41) para este caso sería:

$$S^I = \frac{-e^2}{2} \int \int d^4x_1 d^4x_2 : (\bar{\Psi}^{(+)} \gamma^\mu A_\mu \Psi^{(+)})_{x_1} (\bar{\Psi}^{(-)} \gamma^\nu A_\nu \Psi^{(-)})_{x_2} : , \quad (46)$$

donde ahora el producto normal introduce dos permutaciones en lugar de una y como consecuencia no aparece un signo menos como en el término directo.

La segunda diferencia consiste en que para el diagrama directo cada vértice tiene únicamente líneas de electrón o positrón, pero en el de intercambio aparecen líneas de ambos tipos en cada vértice y la expresión del elemento de matriz mezclará los espinores de partícula y antipartícula dentro del mismo corchete, al contrario que en (45). Además, como la pareja electrón-positrón se aniquila momentáneamente, el cuadrimomento del fotón virtual que transmite la interacción debe coincidir con el total del estado inicial, es decir, $k_\gamma = p + q$ en lugar de $k_\gamma = q - q'$. De este modo, la expresión resultante para el elemento de matriz sería:

$$S_{fi}^I = \frac{m^2}{E^2 V^2} (2\pi)^4 \delta^4(p' + q' - p - q) [\bar{u}_{r'}(\vec{p}') \gamma^\mu v_{s'}(\vec{q}')] \frac{ie^2}{(p+q)^2} [\bar{v}_s(\vec{q}) \gamma_\mu u_r(\vec{p})]. \quad (47)$$

Así pues, agrupando las contribuciones del término directo y de intercambio, puede justificarse porque en (30) se dio esa expresión para el elemento de matriz. Comparando este resultado con lo expuesto en (30) se deduce que la amplitud invariante sería:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi} = & [\bar{u}_{r'}(\vec{p}') \gamma^\mu v_{s'}(\vec{q}')] \frac{ie^2}{(p+q)^2} [\bar{v}_s(\vec{q}) \gamma_\mu u_r(\vec{p})] \\ & - [\bar{u}_{r'}(\vec{p}') \gamma^\mu u_r(\vec{p})] \frac{ie^2}{(q-q')^2} [\bar{v}_s(\vec{q}) \gamma_\mu v_{s'}(\vec{q}')] \end{aligned} \quad (48)$$

➤ 7.2.- Producción de muones: ($e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$)

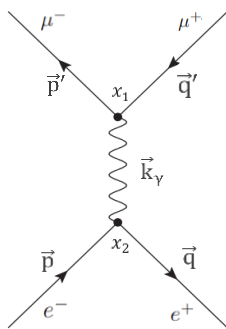


Figura 9. Diagrama producción de muones de la figura 6.5 en la sección 6.5 de [22].

En este caso, la única contribución al elemento de matriz es el diagrama ilustrado en la figura 9. El motivo de no considerar un diagrama análogo a la contribución directa en el *scattering* Bhabha es porque violaría la conservación de los números cuánticos en cada vértice. En concreto, si en el mismo vértice se incluye un electrón entrante y un muón saliente (además del fotón virtual), aunque se respete la conservación de la carga, energía y momento, se viola la conservación del número leptónico.

Además, aunque se comprobará al deducir su sección eficaz, este proceso tiene una condición añadida y es que la energía mínima en el estado inicial debe ser al menos la necesaria para producir los muones, es decir, $p_o + q_o = 2E \geq 2M$. El motivo de que no aparezca en el caso anterior es porque, al ser las mismas partículas, esta condición se satisface siempre. Es importante aclarar que no se trata de la misma condición que (37.2), pues es una exigencia en la energía inicial, no en el reparto de dicha energía entre las partículas del estado final.

En cuanto al elemento de matriz, resulta evidente que debe coincidir con la expresión (47) a excepción de la masa de las partículas del estado final, así que la amplitud invariante quedaría:

$$\mathcal{M}_{fi} = [\bar{u}_{r'}(\vec{p}')\gamma^\mu v_{s'}(\vec{q}')] \frac{ie^2}{(p+q)^2} [\bar{v}_s(\vec{q})\gamma_\mu u_r(\vec{p})]. \quad (49)$$

8.- Cálculo de las amplitudes invariantes

Finalmente, solo quedaría expresar las amplitudes invariantes en términos de las variables independientes que se especificaron durante el cálculo de la expresión general de la sección eficaz en la sección 6, el ángulo de dispersión θ y la energía de una de las partículas E .

➤ 8.1.- Scattering Bhabha: ($e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$)

En primer lugar, realmente en (39) interviene el módulo al cuadrado y promediado de la amplitud invariante, de modo que, para la expresión (48), esta magnitud quedaría como:

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} &= \frac{e^4}{4} \sum_{rr'ss'}^4 \left\{ [\bar{u}_{r'}\gamma^\mu v_{s'}][\bar{u}_{r'}\gamma^\nu v_{s'}]^\dagger \frac{1}{(p+q)^4} [\bar{v}_s\gamma_\mu u_r][\bar{v}_s\gamma_\nu u_r]^\dagger \right. \\ &\quad + [\bar{u}_{r'}\gamma^\mu u_r][\bar{u}_{r'}\gamma^\nu u_r]^\dagger \frac{1}{(q-q')^4} [\bar{v}_s\gamma_\mu v_{s'}][\bar{v}_s\gamma_\nu v_{s'}]^\dagger \\ &\quad - [\bar{u}_{r'}\gamma^\mu v_{s'}][\bar{u}_{r'}\gamma^\nu u_r]^\dagger \frac{1}{(p+q)^2(q-q')^2} [\bar{v}_s\gamma_\mu u_r][\bar{v}_s\gamma_\nu v_{s'}]^\dagger \\ &\quad \left. - [\bar{u}_{r'}\gamma^\mu u_r][\bar{u}_{r'}\gamma^\nu v_{s'}]^\dagger \frac{1}{(p+q)^2(q-q')^2} [\bar{v}_s\gamma_\mu v_{s'}][\bar{v}_s\gamma_\nu u_r]^\dagger \right\}, \quad (50) \end{aligned}$$

A continuación, haciendo uso de la relaciones de cierre (7), se deduce que cada uno de los términos en (50) puede expresarse como una traza o el producto de ellas. En concreto,

nombrando al producto de espinores en cada línea de la ecuación (50) como $\mathcal{M}^{(i)}$, en los términos $\mathcal{M}^{(1)}$ y $\mathcal{M}^{(2)}$ (de intercambio y directo respectivamente) aparecerá el producto de dos trazas. El motivo es porque los espinores con el mismo índice del sumatorio (misma helicidad) se encuentran separados en los dos productos que hay a cada lado del cociente de los cuadvectores. Por el contrario, en $\mathcal{M}^{(3)}$ y $\mathcal{M}^{(4)}$ (los términos de interferencia) estos índices se reparten por todos los corchetes, de modo que resultarán en una única traza.

Como el procedimiento es análogo en todos los términos se demostrará únicamente para una de las trazas de $\mathcal{M}^{(1)}$, ya que es el mismo cálculo que aparecerá para la creación de muones. Además, en lugar de escribir las expresiones explícitas de los espinores y matrices, se denotarán los productos a través de índices. De este modo, usando (7) la traza quedaría:

$$\begin{aligned}
& \sum_{r's'}^4 [\bar{u}_{r'} \gamma^\mu v_{s'}] [\bar{u}_{r'} \gamma^\nu v_{s'}]^\dagger = \sum_{r's'}^4 \bar{u}_{r'} \gamma^\mu v_{s'} \cdot \bar{v}_{s'} \gamma^\nu u_{r'} = \tag{51} \\
& = \sum_{r'}^4 \sum_{ijkl} (\bar{u}_{r'})_i (\gamma^\mu)_{ij} \sum_{s'}^4 [(v_{s'})_j (\bar{v}_{s'})_k] (\gamma^\nu)_{kl} (u_{r'})_l = \\
& = \sum_{r'}^4 \sum_{ijkl} (\bar{u}_{r'})_i (\gamma^\mu)_{ij} \left(\frac{\not{q}' - m}{2m} \right)_{jk} (\gamma^\nu)_{kl} (u_{r'})_l = \sum_{il}^4 \sum_{r'}^4 [(u_{r'})_l (\bar{u}_{r'})_i] \left(\gamma^\mu \frac{\not{q}' - m}{2m} \gamma^\nu \right)_{il} = \\
& = \sum_{il}^4 \left(\frac{\not{p}' + m}{2m} \right)_{ii} \left(\gamma^\mu \frac{\not{q}' - m}{2m} \gamma^\nu \right)_{il} = \sum_l^4 \left(\frac{\not{p}' + m}{2m} \gamma^\mu \frac{\not{q}' - m}{2m} \gamma^\nu \right)_{ll} = \text{Tr} \left\{ \frac{\not{p}' + m}{2m} \gamma^\mu \frac{\not{q}' - m}{2m} \gamma^\nu \right\}.
\end{aligned}$$

De este modo, los términos de la amplitud invariante se pueden expresar como:

$$\mathcal{M}^{(1)} = \text{Tr} \left\{ \frac{\not{p}' + m}{2m} \gamma^\mu \frac{\not{q}' - m}{2m} \gamma^\nu \right\} \cdot \text{Tr} \left\{ \frac{\not{q} - m}{2m} \gamma_\mu \frac{\not{p} + m}{2m} \gamma_\nu \right\} \tag{52.1}$$

$$\mathcal{M}^{(2)} = \text{Tr} \left\{ \frac{\not{p}' + m}{2m} \gamma^\mu \frac{\not{p} + m}{2m} \gamma^\nu \right\} \cdot \text{Tr} \left\{ \frac{\not{q} - m}{2m} \gamma_\mu \frac{\not{q}' - m}{2m} \gamma_\nu \right\} \tag{52.2}$$

$$\mathcal{M}^{(3)} = \text{Tr} \left\{ \gamma_\nu \frac{\not{q} - m}{2m} \gamma_\mu \frac{\not{p} + m}{2m} \gamma^\nu \frac{\not{p}' + m}{2m} \gamma^\mu \frac{\not{q}' - m}{2m} \right\} \tag{52.3}$$

$$\mathcal{M}^{(4)} = \text{Tr} \left\{ \gamma_\nu \frac{\not{q} - m}{2m} \gamma_\mu \frac{\not{q}' - m}{2m} \gamma^\nu \frac{\not{p}' + m}{2m} \gamma^\mu \frac{\not{p} + m}{2m} \right\}. \tag{52.4}$$

Por consiguiente, tan solo faltaría deducir el valor de las trazas (52), para lo cual se hará uso de los teoremas de trazas, que pueden encontrarse en el anexo F. Mediante estos, las

expresiones (52) pueden escribirse en función del producto de cuadvectores que, a su vez, pueden expresarse en función de θ y E a través de las expresiones del anexo D.

Llegados a este punto, se presentan dos posibles maneras de abordar el problema, de forma general o considerando el límite ultrarrelativista, tal y como se muestra a continuación.

1) Caso general:

Para empezar, las expresiones de (52) pueden simplificarse prescindiendo de los términos que tienen un factor m^{impar} , porque presentan un número impar de matrices γ^μ multiplicándose y, según dicta el teorema (F.1), esas trazas serán nulas. De este modo, se procede con el cálculo de las trazas, que se limitará a los términos $\mathcal{M}^{(1)}$ y $\mathcal{M}^{(3)}$, ya que los dos restantes tienen la misma estructura y el cálculo sería completamente análogo. Comenzando con $\mathcal{M}^{(1)}$, si se sacan fuera de las trazas los factores $1/2m$, la expresión (52.1) se simplifica como sigue:

$$\mathcal{M}^{(1)} = \left(\frac{1}{2m}\right)^4 [\text{Tr}\{\not{p}'\gamma^\mu\not{q}'\gamma^\nu\} - m^2\text{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu\}] \cdot [\text{Tr}\{\not{q}\gamma_\mu\not{p}\gamma_\nu\} - m^2\text{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu\}]. \quad (53)$$

Como este término consiste en el producto de dos corchetes con las mismas trazas, el cálculo se centrará en el primero de ellos, siendo idéntico para el segundo. Empezando con la traza de cuatro matrices gamma, primero hay que definir dos cuadvectores auxiliares A y B tales que únicamente sus componentes μ y ν sean distintas de cero, respectivamente, y valiéndose estas 1 en ambos casos. De este modo, la primera traza de $\mathcal{M}^{(1)}$ puede reescribirse como:

$$\text{Tr}\{\not{p}'\gamma^\mu\not{q}'\gamma^\nu\} = \text{Tr}\{\not{p}'A\not{q}'B\} \quad (54)$$

Por tanto, aplicando los teoremas de trazas (F.2) y (F.3), se deduce que:

$$\text{Tr}\{\not{p}'A\not{q}'B\} = 4(p'^\mu q'^\nu - (p' \cdot q')g^{\mu\nu} + p'^\nu q'^\mu). \quad (55)$$

En cuanto a la segunda traza, aplicando el teorema (F.4) esta se reduce a:

$$\text{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu\} = \text{Tr}\{g^{\mu\nu}\gamma_\nu\gamma^\nu\} = \{(F.4)\} = g^{\mu\nu}g_\nu{}^\nu\text{Tr}\{\mathbb{I}\} = 4g^{\mu\nu}. \quad (56)$$

Repetiendo el cálculo en el segundo corchete y contrayendo los cuadvectores quedaría como:

$$\mathcal{M}^{(1)} = \frac{2}{m^4} [(p' \cdot q)(q' \cdot p) + (p' \cdot p)(q' \cdot q) + (q' \cdot p' + q \cdot p)m^2 + 2m^4]. \quad (57)$$

En cuanto a (52.3), su expresión se vuelve más complicada apareciendo un total de ocho trazas que se muestran a continuación:

$$\mathcal{M}^{(3)} = \left(\frac{1}{2m}\right)^4 \text{Tr}\{\gamma_\nu \not{A} \gamma_\mu \not{p} \gamma^\nu \not{p}' \gamma^\mu \not{q}' - m^2 \gamma_\nu \not{A} \gamma_\mu \not{p} \gamma^\nu \gamma^\mu - m^2 \gamma_\nu \not{A} \gamma_\mu \gamma^\nu \not{p}' \gamma^\mu + m^2 \gamma_\nu \not{A} \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu \not{q}' + m^2 \gamma_\nu \gamma_\mu \not{p} \gamma^\nu \not{p}' \gamma^\mu - m^2 \gamma_\nu \gamma_\mu \not{p} \gamma^\nu \gamma^\mu \not{q}' - m^2 \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma^\nu \not{p}' \gamma^\mu \not{q}' + m^4 \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu\}. \quad (58)$$

Como el primer término es el mismo que aparecerá en el régimen ultrarrelativista, únicamente se calculará este de forma explícita, pues los cálculos son análogos para todas las trazas involucradas. Volviendo a hacer uso de un vector auxiliar A , se puede deducir que:

$$\left(\frac{1}{2m}\right)^4 \cdot \text{Tr}\{\gamma_\nu \not{A} \not{A} \not{p} \gamma^\nu \not{p}' \gamma^\mu \not{q}'\} = \{(F. 7)\} = \left(\frac{1}{2m}\right)^4 \cdot (-2) \text{Tr}\{\not{p} \not{A} \not{q}' \not{p}' \gamma^\mu \not{q}'\}. \quad (59)$$

Deshaciendo el vector A en función de γ^μ y aplicando los teoremas (F.2) y (F.6) se tiene que:

$$\frac{-1}{8m^4} \cdot \text{Tr}\{\not{p} \gamma^\mu \not{q}' \not{p}' \gamma^\mu \not{q}'\} = -\frac{2}{m^4} (q \cdot p')(p \cdot q'). \quad (60)$$

Tras obtener el resto de las trazas para $\mathcal{M}^{(3)}$, así como las expresiones de $\mathcal{M}^{(2)}$ y $\mathcal{M}^{(4)}$, se puede deducir la amplitud invariante para el régimen relativista. Considerando que muchos de los productos de cuadvectores son idénticos según lo expuesto en el anexo D, la expresión de la amplitud invariante quedaría como:

$$\overline{|\mathcal{M}_{fi}^e|^2} = \frac{e^4}{2m^4} \left[\frac{(p \cdot q')^2 + (p' \cdot p)^2 + 2(p \cdot q)m^2 + 2m^4}{(p + q)^4} + \frac{(p \cdot q')^2 + (p \cdot q)^2 - 2(p \cdot p')m^2 + 2m^4}{(q - q')^4} + \frac{2[(p \cdot q') + m^2]^2 - m^4}{(p + q)^2(q - q')^2} \right]. \quad (61)$$

Es importante resaltar que ahora la expresión (61) solo tiene tres términos, en lugar de los cuatro que había antes. La razón es porque, tras calcular las trazas, los dos términos de interferencia resultan idénticos y como consecuencia el último cociente tiene un factor 2.

Sin embargo, como ya se ha comentado, esta expresión debe reducirse a una dependencia exclusiva con θ y E , lo cual se consigue sustituyendo los productos de los cuadvectores según los resultados del anexo D. De este modo, solo habría que incluir esta expresión de la amplitud invariante en la fórmula general para la sección eficaz dada en (39) e imponer que $m = M$ y $|\vec{k}| = |\vec{k}'|$. Si además se sustituye la expresión de e en términos de la constante de estructura fina ($e^2 = 4\pi\alpha$) se concluye que la sección eficaz general del *scattering* Bhabha sería:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{8E^2} \cdot \left\{ \frac{3m^4 + 4(E^2 - m^2)m^2 + (E^2 - m^2)^2(1 + \cos^2 \theta)}{2E^4} \right. \\ \left. + \frac{m^4 + 4(E^2 - m^2)m^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) + 2(E^2 - m^2)^2 \left(1 + \cos^4 \left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{2(E^2 - m^2)^2 \text{sen}^4 \left(\frac{\theta}{2}\right)} \right. \\ \left. - \frac{3m^4 + 8(E^2 - m^2)m^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) + 4(E^2 - m^2)^2 \cos^4 \left(\frac{\theta}{2}\right)}{2E^2(E^2 - m^2) \text{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)} \right\}. \quad (62)$$

2) Límite ultrarrelativista:

La diferencia fundamental respecto al caso anterior es que ahora también se puede prescindir de los términos con factores m^{par} , porque al trabajar en el límites de altas energías se admite que $E \gg m$. Como los términos de m^{imp} seguirán siendo nulos, ya que es un resultado independiente del régimen que se escoja, únicamente quedarían los que no tienen factores de masa. Restringiendo de nuevo los cálculos a $\mathcal{M}^{(1)}$ y $\mathcal{M}^{(3)}$, estas se simplifican como sigue:

$$\mathcal{M}^{(1)} = \left(\frac{1}{2m}\right)^4 \text{Tr}\{\not{p}'\gamma^\mu \not{q}'\gamma^\nu\} \cdot \text{Tr}\{\not{q}\gamma_\mu \not{p}\gamma_\nu\} \quad \mathcal{M}^{(3)} = \left(\frac{1}{2m}\right)^4 \cdot \text{Tr}\{\gamma_\nu \not{q}\gamma_\mu \not{p}\gamma^\nu \not{p}'\gamma^\mu \not{q}'\}. \quad (63)$$

Se comprueba que la única diferencia reside en que ahora no aparecen las trazas ligadas a factores m^{par} . De este modo, aplicando los mismos procedimientos que antes se deduce que la amplitud invariante para el *scattering* Bhabha en el límite ultrarrelativista es:

$$\overline{|\mathcal{M}_{fi}^e|^2} = \frac{e^4}{2m^4} \left[\frac{(p \cdot q')^2 + (p' \cdot p)^2}{(p + q)^4} + \frac{(p \cdot q')^2 + (p \cdot q)^2}{(q - q')^4} + \frac{2(p \cdot q')^2}{(p + q)^2(q - q')^2} \right]. \quad (64)$$

Aplicando de nuevo los resultados del anexo D, las contracciones de (64) pueden expresarse en función de θ y E , de modo que se concluye que la expresión general para la sección eficaz ultrarrelativista del *scattering* Bhabha quedaría como:

$$\left. \frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} \right|_{UR} = \frac{\alpha^2}{8E^2} \cdot \left\{ \frac{1 + \cos^2(\theta)}{2} + \frac{1 + \cos^4 \left(\frac{\theta}{2}\right)}{\text{sen}^4 \left(\frac{\theta}{2}\right)} - 2 \frac{\cos^4 \left(\frac{\theta}{2}\right)}{\text{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)} \right\}. \quad (65)$$

Además, como es lógico, comparando (62) y (65) se verifica que la segunda puede deducirse de la primera imponiendo $E \gg m$ y despreciando los términos que tienen factores de masa.

Estas expresiones coinciden con las expuestas en la bibliografía [20], en concreto, puede demostrarse que (62) resulta equivalente a la expresión (21) del ejemplo 3.8 y (65) coincide con el resultado (3.143) de la sección 3.4.

➤ **8.2.- Producción de muones:** ($e^-e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$)

En este segundo proceso, como solo existía la contribución de un diagrama al elemento de matriz (figura 9), la expresión de la matriz invariante (49) estaba constituida por un único término. Tomando su módulo al cuadrado y promediando sobre las helicidades se obtiene:

$$\overline{|\mathcal{M}_{fi}^\mu|^2} = \frac{e^4}{4} \sum_{rr's's'}^4 \left\{ [\bar{u}_{r'} \gamma^\mu v_{s'}] [\bar{u}_{r'} \gamma^\nu v_{s'}]^\dagger \frac{1}{(p+q)^4} [\bar{v}_s \gamma_\mu u_r] [\bar{v}_s \gamma_\nu u_r]^\dagger \right\}, \quad (66)$$

donde, tal y como se adelantó en el proceso anterior, la expresión (66) coincide con $\mathcal{M}^{(1)}$ definido en (50). De este modo, el siguiente paso sería expresar (66) en términos de la traza de matrices, pero este cálculo ya se detalló al deducir (52.1), por lo que este caso sería completamente idéntico y se obtendría:

$$\overline{|\mathcal{M}_{fi}^\mu|^2} = \frac{e^4}{4(p+q)^4} \cdot \text{Tr} \left\{ \frac{\not{p} + M}{2M} \gamma^\mu \frac{\not{q}' - M}{2M} \gamma^\nu \right\} \cdot \text{Tr} \left\{ \frac{\not{q} - m}{2m} \gamma_\mu \frac{\not{p} + m}{2m} \gamma_\nu \right\}. \quad (67)$$

La única diferencia respecto al caso anterior es que, como las partículas finales se tratan de muones en vez de electrones, los espinores asociados a estas tienen una masa distinta, denotada por M en lugar de m . Además, el cálculo de las trazas también se abordó en la sección previa, resultando en la expresión (57) en el caso general. De este modo, considerando que los momentos finales tendrán asociados un factor M en vez de m , puede deducirse que:

$$\overline{|\mathcal{M}_{fi}^\mu|^2} = \frac{e^4}{m^2 M^2} \frac{(p' \cdot q)(q' \cdot p) + (p' \cdot p)(q' \cdot q) + (q' \cdot p')M^2 + (q \cdot p)m^2 + 2m^2 M^2}{2(p+q)^4}. \quad (68)$$

Además, como en este proceso se pierde parte de la simetría que había antes debido a que las partículas finales son distintas a las iniciales, algunos de los productos de cuadvectores que antes coincidían ahora no lo harán. Atendiendo a lo expuesto en el anexo D, quedaría:

$$\overline{|\mathcal{M}_{fi}^\mu|^2} = \frac{e^4}{m^2 M^2} \frac{(q' \cdot p)^2 + (p' \cdot p)^2 + (q' \cdot p')M^2 + (q \cdot p)m^2 + 2m^2 M^2}{2(p+q)^4}. \quad (69)$$

Finalmente, introduciendo (69) en (39) y expresando los productos de los cuadvectores en términos θ y E , la sección eficaz para el proceso de creación de muones sería:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{16} \cdot \frac{\sqrt{E^2 - M^2}}{\sqrt{E^2 - m^2}} \cdot \frac{E^4(1 + \cos^2(\theta)) + E^2(m^2 + M^2)\text{sen}^2(\theta) + m^2M^2 \cos^2(\theta)}{E^6}. \quad (70)$$

Comparando este resultado con la bibliografía [20] se comprueba que, tomando el límite ultrarrelativista, la expresión (70) coincide con la 3.144 de la sección 3.4. Sin embargo, en este trabajo se ha deducido una expresión general, no solo por la limitación que impone el límite ultrarrelativista en el valor de la energía, sino con el objetivo de poder utilizar este resultado (70) para estudiar cualquier proceso de creación de leptones. Debido a que la única diferencia entre este tipo de partículas es su masa, la expresión (70) puede utilizarse para cualquier proceso sean cualesquiera (e, μ, τ).

Por último, es importante comentar que, a diferencia de los resultados (62) y (65), para deducir (70) no se satisface $|\vec{k}| = |\vec{k}'|$ y como consecuencia aparece un factor en forma de raíz cuadrada en la expresión de la sección eficaz. Es precisamente este término el que impone la restricción $E \geq M$ que se comentó en la sección 7.2 al presentar el diagrama del proceso.

Se comprueba fácilmente que si no se satisface la condición $E \geq M$ entonces el término dentro de la raíz sería negativo y la sección eficaz imaginaria, lo cual carece de sentido. Además, se podría pensar que para $E < m$ tanto el numerador como el denominador del cociente serían negativos y no habría problemas, pero esto es imposible de satisfacer, pues las partículas iniciales no pueden tener menos energía que la que les aporta su masa.

III. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Finalmente, en vista de los resultados del capítulo anterior, a lo largo de este se presenta el estudio de las secciones eficaces obtenidas. Se prestará especial interés al *scattering* Bhabha y la producción de muones, aunque se incluirán otros procesos relevantes en la interacción electrón-positrón, como es la producción de fotones¹. Durante el análisis se examinará la dependencia de cada proceso con la energía y ángulo de dispersión, exponiendo que contribución es más relevante en cada caso.

Además, para comprobar la validez de los resultados, se compararán las predicciones teóricas con los resultados experimentales publicados en [23-26] y recogidos en los aceleradores PETRA y LEP durante 1982 y 1994. Los valores experimentales y sus correspondientes errores pueden encontrarse en la base de datos [27]. Por último, hay que mencionar que todas las figuras mostradas a continuación han sido realizadas con el *software* de MATLAB.

9.- Scattering Bhabha

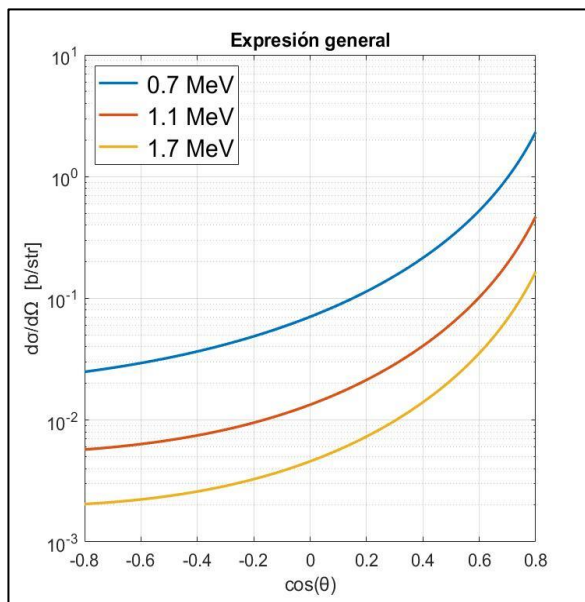


Figura 10. Sección eficaz diferencial del scattering Bhabha frente al $\cos(\theta)$ para energías en torno al MeV.

En la figura 10 se ilustra la dependencia de la sección eficaz diferencial (62) con el $\cos(\theta)$ para tres energías distintas no muy superiores a la masa del electrón. Lo primero que destaca es que, aunque $\cos(\theta) \in [-1, 1]$, el dominio se ha restringido a $[-0.8, 0.8]$. El motivo es porque los dos últimos términos de (62) tienen una función seno en el denominador que para $\theta = 0^\circ$ ($\cos(\theta) = 1$) se anula y la sección eficaz diverge.

La explicación de esta divergencia reside en que la interacción electromagnética tiene alcance infinito, de modo que el electrón siempre interactuará con el positrón

¹ La sección eficaz de este proceso no ha sido deducida en el trabajo y, aunque con el formalismo ya presentado no supondría una dificultad añadida, a falta de espacio se dará la expresión que figura en la literatura [20].

independientemente del parámetro de impacto. Es por ello que aun si las partículas están muy alejadas efectivamente existiría interacción, aunque su efecto será prácticamente nulo y las partículas no se desviarán de la trayectoria inicial, dando como resultado infinitas contribuciones a la sección eficaz para $\cos(\theta) = 1$.

Otra característica fundamental es la falta de simetría en la función, pues se observa que a medida que disminuye el coseno la sección eficaz decrece, comenzando en un valor divergente para $\theta = 0^\circ$ y alcanzando el mínimo en $\theta = 180^\circ$. Para estudiar correctamente esta característica es preciso analizar la contribución de cada término en la sección eficaz (62), que incluye el término de intercambio ($\mathcal{M}^{(1)}$), el directo ($\mathcal{M}^{(2)}$) y los de interferencia ($\mathcal{M}^{(3)}$ y $\mathcal{M}^{(4)}$), que ya se comprobó que eran idénticos analizando la expresión (61).

En la figura 11 se comprueba que la contribución principal procede del término directo debido a lo expuesto sobre la divergencia para ángulos pequeños. Mientras que en el proceso directo contribuye cualquier electrón, independientemente de su distancia al positrón, en el de intercambio ambas partículas deben estar suficientemente cerca para aniquilarse momentáneamente en un fotón virtual, siendo por tanto menos significativo.

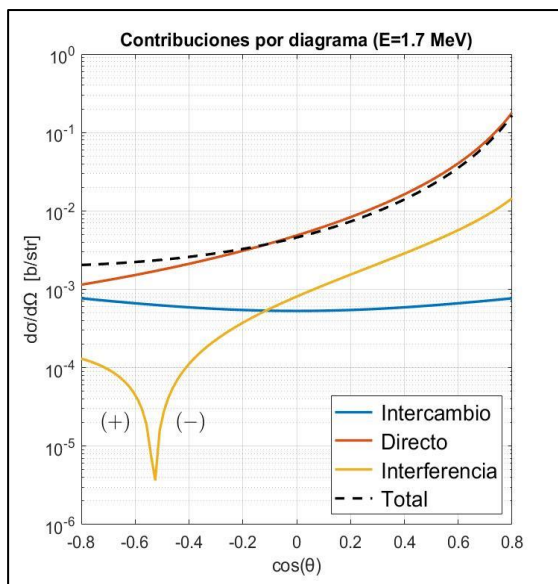


Figura 11. Contribución de cada término de la sección eficaz diferencial del scattering Bhabha frente al $\cos(\theta)$.

En cuanto a las simetrías de cada proceso, en el de intercambio las partículas finales surgen de forma espontánea tras la aniquilación en un fotón virtual. Por esta razón es de esperar que, para una misma dirección de salida de las partículas finales, las contribuciones de los dos posibles sentidos sean idénticas, resultando en una función simétrica. Por otro lado, la falta de simetría en el término directo se debe a la ya comentada divergencia para ángulos pequeños por culpa del alcance infinito de la interacción electromagnética. Por consiguiente, debido a la

dominancia de la contribución directa, el carácter simétrico del término directo no se aprecia y la sección eficaz exhibe un comportamiento asimétrico, tal y como ilustra la figura 11.

Por último, el término de interferencia de la figura 11 ha sido representado en valor absoluto para poder observar su contribución para todos los ángulos en escala logarítmica. Realmente, tal y como como muestran los signos de la figura 11, solo tiene valores positivos en el intervalo $\cos(\theta) \in [-1, 0.5]$ siendo este más grande cuanto menor sea la energía. En general, cuando toma valores positivos su contribución es mucho menor que la de los otros dos términos, pero una vez se vuelve negativo crece muy rápidamente, llegando a divergir también cuando el $\cos(\theta)$ es próximo a la unidad. Sin embargo, como siempre se mantiene por debajo del término directo, en la figura 11 se observa como el valor total de la sección eficaz para ángulos pequeños es prácticamente la contribución directa, aunque ligeramente reducida.

Como conclusión de lo expuesto hasta ahora, las figuras 10 y 11 muestran que la sección eficaz predomina principalmente para ángulos pequeños. De este modo, la situación más favorable será observar las partículas finales en la misma dirección y sentido que las iniciales, reduciéndose la probabilidad del proceso según aumenta el ángulo de dispersión.

Por otro lado, en la figura 10 se comprueba que la energía inicial de las partículas no afecta a la forma de la función pues, más allá de un descenso en el valor global, el comportamiento de la sección eficaz es el mismo para las tres energías. El motivo de este descenso es que, al aumentar la energía, la velocidad de la partícula también se incrementa y como consecuencia el tiempo de interacción entre ambas disminuye. Como resultado, la transferencia de momento será menor y, con ella, el cambio en la dirección de movimiento, por lo que de forma general la contribución a todos ángulos disminuye, aunque para $\cos(\theta) = 1$ seguirá divergiendo por los motivos ya comentados, tal y como se aprecia en la figura 10.

Además, examinando la expresión (62), también puede comprobarse que cuando la energía coincide con la masa del electrón los dos últimos términos divergen nuevamente, en este caso, porque el denominador es de la forma $(E^2 - m^2)$. Sin embargo, esta situación carece de sentido pues, si inicialmente se consideran infinitamente alejadas y toda la energía de las partículas reside en sus masas, entonces estas no pueden acercarse para que tenga lugar la interacción. De todos modos, según disminuye la energía, aumenta la sección eficaz y por tanto la probabilidad de que tenga lugar el proceso, que se maximiza si las energías iniciales de las partículas son ligeramente superiores a sus masas.

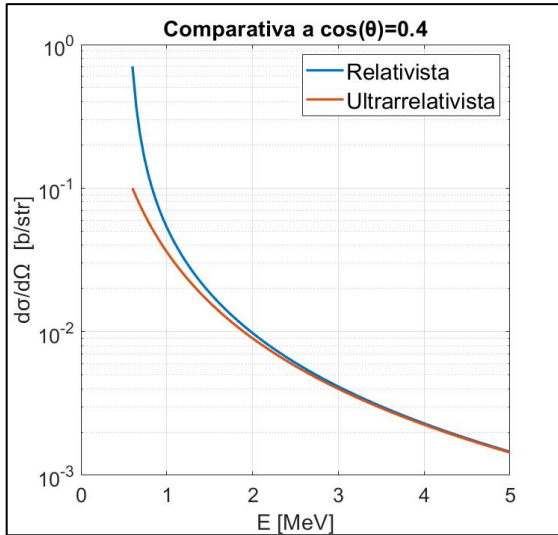


Figura 12. Sección eficaz diferencial del scattering Bhabha general y en el límite ultrarrelativista frente a la energía para un valor fijo de $\cos(\theta) = 0.4$.

En cuanto al límite ultrarrelativista, ya se comentó al final de la sección 8.1 que para altas energías la expresión (62) se reduce a la (65), de modo que, representando ambas funciones frente a la energía para un valor fijo del coseno, se verifica que para energías del orden del GeV sus comportamientos son idénticos. Sin embargo, en la figura 12 se aprecia claramente que para energías bajas el límite ultrarrelativista (65) no coincide con la expresión general (62). A partir de esto, puede identificarse que, como

para todos los valores del coseno las funciones exhiben un comportamiento similar al de la figura 12, el límite ultrarrelativista empieza a tener validez en torno a $E \sim 4 \text{ MeV}$, pues a partir de esa energía se asegura que la diferencia entre ambas predicciones será menor al 2 %.

Por otro lado, en la figura 13 se comprueba como las secciones eficaces deducidas para este proceso se adaptan con gran precisión a los resultados experimentales, coincidiendo en un amplio rango de valores del $\cos(\theta)$ y para tres energías distintas. En este caso, en base a lo comentado sobre la validez del límite ultrarrelativista, es evidente que tanto (62) como (64) predicen los valores experimentales porque se encuentran en el orden del GeV.

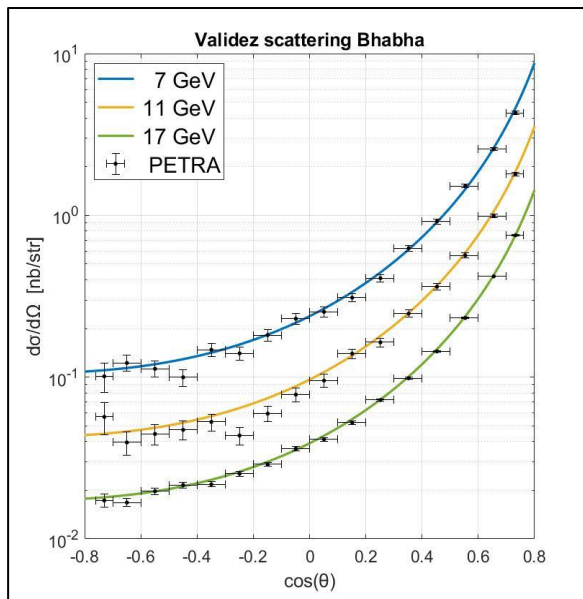


Figura 13. Sección eficaz diferencial del scattering Bhabha y datos experimentales de [23] frente a $\cos(\theta)$.

No obstante, es importante resaltar que para las energías de 7 GeV y 11 GeV, aunque la mayoría se mantiene en el margen de error, los valores correspondientes a ángulos grandes difieren apreciablemente de la predicción teórica. Aunque para estos ángulos hay menor estadística porque se registran menos eventos, lo cual aumenta el error de la medida, otro motivo a considerar para explicar la discordancia reside en el hecho de que el tratamiento perturbativo empleado se restringe al orden más bajo posible. Si se

considerasen más términos en el desarrollo probablemente estas diferencias con los valores experimentales se reducirían. A pesar de ello, la figura 13 justifica porqué los cálculos pueden restringirse al primer orden no nulo y porque tiene sentido que Feynman, Schwinger y Tomonoga propusieran detener el desarrollo perturbativo, tal y como se comentó al final de la sección 3, pues aún en el orden más bajo posible las predicciones resultan muy acertadas.

10.- Producción de muones

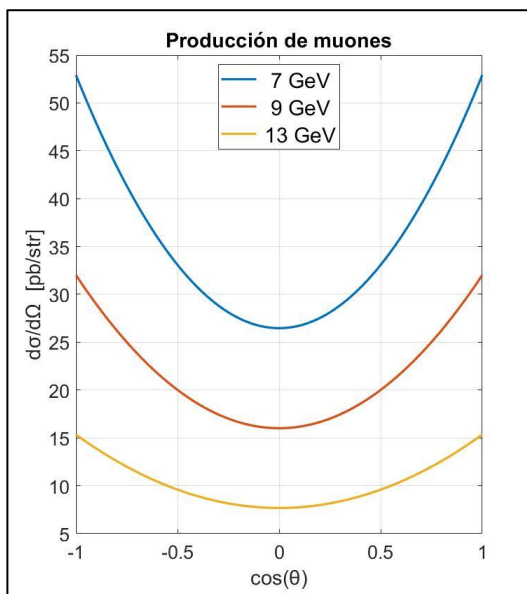


Figura 14. Sección eficaz diferencial de la producción de muones frente al $\cos(\theta)$ para energías en torno al GeV.

En la figura 14, se ilustra el comportamiento de la sección eficaz (70) frente al $\cos(\theta)$ para varias energías y comparándola con la figura 10 se pueden apreciar ciertas diferencias. La primera es que ahora no hay divergencia para $\cos(\theta) = 0$, porque el denominador en (70) no tiene términos divergentes para ningún ángulo.

La segunda y más evidente es que ahora la función sí es simétrica, presentando un mínimo para $\cos(\theta) = 0$, de modo que en este caso la situación menos favorable será observar a los muones en una dirección perpendicular a la de las partículas

incidentes. De todos modos, la probabilidad seguirá siendo máxima cuando los muones conserven la dirección de las partículas iniciales, pues los máximos de la función se encuentran en $\cos(\theta) = \pm 1$. La diferencia es que ahora, debido a la simetría, la probabilidad de que la partícula (antipartícula) final se propague en sentido opuesto a la partícula (antipartícula) inicial coincide con la probabilidad de que se propaguen en el mismo sentido.

El motivo de ambas diferencias se encuentra en que para este proceso solo hay que considerar el diagrama de intercambio de la figura 9. Como este es completamente análogo al correspondiente del *scattering* Bhabha, sus propiedades serán idénticas y por tanto la sección eficaz resultante será simétrica. Además, la ausencia de un término directo y la condición que se examinó al final de la sección 8.2, la cual impone que solo las partículas suficientemente energéticas pueden dar lugar a los muones, evita la divergencia para $\cos(\theta) = 0$.

Una consecuencia directa de que las partículas iniciales tengan una cota mínima en la energía para dar lugar a la interacción es que, en general, la sección eficaz se reducirá respecto a la dispersión Bhabha. Esto se comprueba comparando las figuras 13 y 14 para valores muy negativos del coseno, donde el valor de la magnitud se reduce casi un orden de magnitud para la energía de 7 GeV . Además, para valores grandes del coseno, la divergencia resultante del término directo en el *scattering* Bhabha introduce una diferencia de casi tres órdenes de magnitud. Por tanto, aunque el *scattering* Bhabha y la creación de muones sean procesos que compiten en la interacción electrón-positrón, el primero siempre dominará sobre el segundo.

Por otro lado, la sección eficaz para la producción de muones (70) se reduce con el aumento de la energía y, a diferencia de la sección eficaz del *scattering* Bhabha (62), esta vez no se concentra en torno a ángulos pequeños. Sin embargo, mientras que en la fórmula (62) aparece una divergencia cuando $E = m$, ahora la expresión (70) se anula si $E = M$ debido al término de la raíz. Aun con esa diferencia se comprueba que, al igual que antes, la probabilidad se incrementa según E tiende a la masa del muón, siendo máxima cuando la supera ligeramente.

En cuanto a la validez de (70), la figura 15 ilustra que para este caso los datos experimentales no se adaptan a la predicción teórica igual de bien que en la figura 13. Además, ahora no puede argumentarse que sea debido a no considerar términos de orden superior en el desarrollo, pues estos introducen pequeñas correcciones y la predicción de la figura 15 difiere considerablemente de los experimentos. El motivo real de esta discrepancia surge principalmente de haber ignorado la interacción débil en los cálculos.

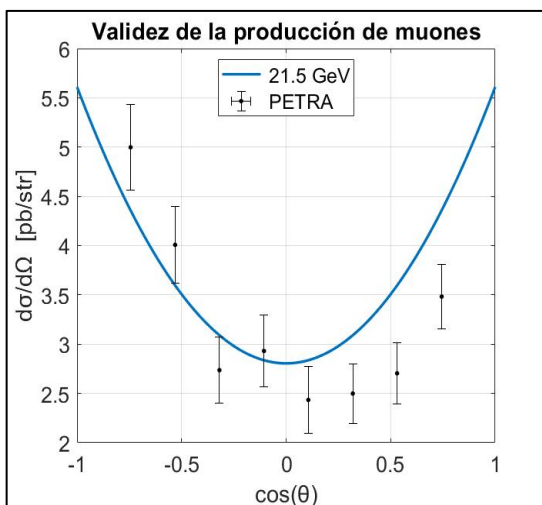


Figura 15. Sección eficaz diferencial de la producción de muones y datos experimentales de [24] frente a $\cos(\theta)$.

Aunque no se haya abordado en este trabajo, realmente muchos de los procesos que pueden tener lugar a través de la interacción electromagnética compiten con la interacción débil. En concreto, todos los procesos que involucren diagramas de intercambio (figura 8) pueden ser mediados por el bosón neutro Z^0 en lugar del fotón virtual, ya que respeta la conservación de la carga. Como consecuencia, todos los procesos de la forma $e^-e^+ \rightarrow l^-l^+$ (donde l denota leptón), como es la creación de

muones, no son descritos de forma satisfactoria por la QED cuando la energía disponible se acerca a la masa del bosón Z^0 [28].

La principal repercusión de la contribución débil es que esta interacción viola la paridad y como consecuencia la sección eficaz manifiesta una ruptura de simetría. Comparando la predicción teórica de la figura 15 con los datos experimentales se aprecia como, aunque presentan una forma similar a la función, están centrados en un valor mayor del $\cos(\theta)$.

Sin embargo, aunque la distribución angular de la sección eficaz presente errores, la distribución en energía presenta una gran concordancia con los resultados experimentales a bajas energías con respecto a la masa del bosón Z^0 . Para deducirla, es necesario sumar la contribución de cada ángulo sólido, es decir, integrar la expresión (70) sobre las variables angulares de modo que la única variable independiente sea la energía, resultando en:

$$\bar{\sigma} = \frac{\pi\alpha^2}{12} \sqrt{\frac{E^2 - M^2}{E^2 - m^2}} \frac{(M^2 + 2E^2)(m^2 + 2E^2)}{E^6}. \quad (71)$$

En la figura 16² los datos se ajustan con gran precisión a bajas energías y, aunque seguirán presentes los efectos de la interacción débil, en este caso también se podría argumentar que las ligeras discrepancias son debidas a no considerar los términos superiores del desarrollo.

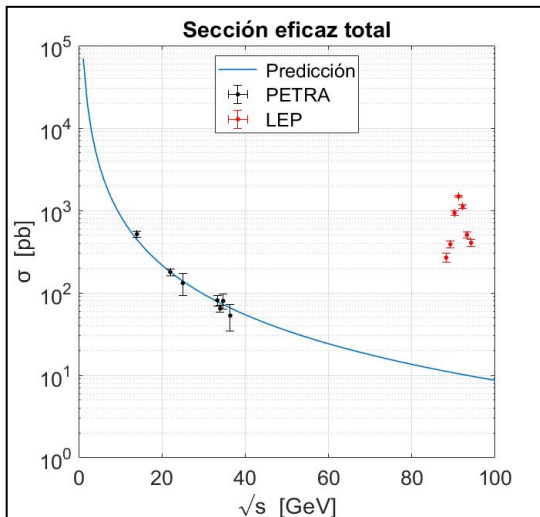


Figura 16. Sección eficaz total de la producción de muones, datos experimentales [25] y resonancia Z^0 [26] frente a la energía total del estado inicial.

Sin embargo, puede comprobarse que este comportamiento solo se respeta a bajas energías respecto a la masa del bosón Z^0 , en torno a los 90 GeV. La razón es que, como el propagador de Z^0 sigue la expresión (19), pues es válida para cualquier bosón, según la energía se acerque a la masa de la partícula el denominador del propagador tenderá a cero y el proceso quedará dominado por la interacción débil. Como resultado, aunque la predicción teórica de la expresión (71) ilustra un descenso continuo en la

sección eficaz, la figura 16 muestran como para energías cercanas a los 90GeV aparece un pico

² La variable s del eje x en la figura 16 coincide con $(2E)^2$ y se corresponde con una de las tres variables de Mandelstam presentadas en el ejercicio 3.8 de [20], cuyo uso está muy extendido para las colisiones binarias.

en la representación denominado polo o resonancia de Z^0 . Además, de la figura 16 también se puede comentar que la sección eficaz total del proceso decrece con el aumento de la energía, hecho que no podía comprobarse en el *scattering* Bhabha pues, aunque para ángulos grandes exhibía ese comportamiento, debido a la divergencia para $\theta = 0$ no puede integrarse.

11.- Producción de fotones (aniquilación)

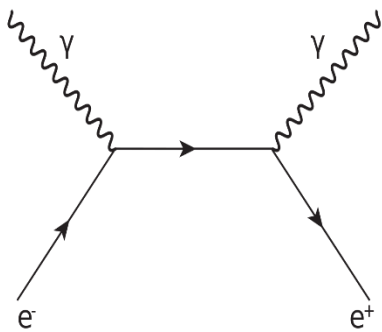


Figura 17. Diagrama de aniquilación.

Como ya se ha comentado, aunque no se haya abordado el cálculo, también se analizará la sección eficaz para el proceso de aniquilación, cuyo diagrama se ilustra en la figura 17. Una de las principales diferencias consiste en que, al tratar con fotones en el estado final, será necesario emplear las expresiones de sus campos que hasta ahora no habían sido requeridas. La otra diferencia es que, como bien indica la línea

interna de la figura 17, el propagador para este proceso es fermiónico en vez de bosónico, pero deduciendo la expresión equivalente a (19) para fermiones el cálculo sería análogo.

De este modo, la sección eficaz para este proceso en el límite ultrarrelativista resulta en la expresión (24) del ejercicio 3.14 en [20] que se muestra a continuación:

$$\left. \frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} \right|_{UR} = \frac{\alpha^2}{4E^2} \frac{1 + \cos(\theta)}{\sin^2(\theta)}. \quad (72)$$

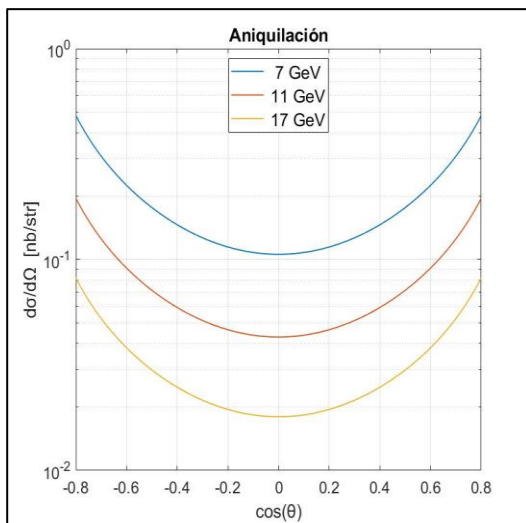


Figura 18. Sección eficaz diferencial de la aniquilación frente al $\cos(\theta)$ para energías en torno al GeV.

Comparando la figura 17 y 7 se puede deducir que el diagrama de este proceso es análogo al diagrama directo para el *scattering* Bhabha, de modo que compartirá algunas similitudes con la contribución directa de la figura 11. En concreto, también presenta una divergencia en la distribución angular debido a que el parámetro de impacto puede ser indefinidamente grande porque la interacción tiene alcance infinito. Sin embargo, a diferencia del *scattering* Bhabha, ahora

la divergencia se presenta por igual tanto para ángulos grandes como pequeños. El motivo de este comportamiento radica en que los fotones del estado final son indistinguibles uno de otro y por tanto tampoco podrá distinguirse la situación con $\theta = 0^\circ$ de aquella con $\theta = 180^\circ$, por lo que se presenta la divergencia a ambos lados. Debido a que este comportamiento se extiende para todo par de ángulos a la misma distancia de 90° , la sección eficaz (72) es simétrica en torno a $\cos(\theta) = 0$.

Asimismo, la dependencia con la energía también es parecida a la del *scattering* Bhabha, reduciéndose la sección eficaz para ángulos grandes con el aumento de la energía y aumentando para ángulos pequeños, debido a los motivos expuestos en la página 38 de la sección 9. Sin embargo, aparece una diferencia respecto al resto de los procesos pues, mientras que en estos se comprobó que la sección eficaz se maximizaba cuando la energía inicial de las partículas era ligeramente superior a la masa de las partículas finales, en este caso no es así. Con la expresión (72) se comprueba que, efectivamente, si la energía se hace cero entonces la sección eficaz diverge, es decir, cuando la energía coincide con la masa del fotón. No obstante, esta situación es imposible de satisfacerse, porque como mínimo las partículas iniciales deben tener una energía ligeramente superior a sus masas y por tanto los fotones no pueden tener $E = 0$. Es por ello que ahora la situación más favorable se corresponde a aquella en la que las partículas iniciales tienen una energía ligeramente superior a sus masas.

Por otro lado, comparando las figuras 18 y 13, se aprecia como las secciones eficaces de los procesos de aniquilación y dispersión Bhabha presentan el mismo orden de magnitud, en torno al n_b para energías del orden del GeV. Por tanto, aunque al igual que la producción de muones este proceso tenga únicamente la contribución de un diagrama, será mucho más relevante. Además de por la divergencia asociada al diagrama directo, el motivo de esto es que no aparece una cota mínima en la energía inicial pues, aunque las partículas finales son distintas a las iniciales, la masa de los fotones es nula.

En la figura 19 se han representado en rojo los datos experimentales para este proceso, los cuales se adaptan con alto grado de satisfacción a la predicción teórica, comprobando la validez de la expresión (72). Además, en la misma figura se ilustran los resultados del *scattering* Bhabha, que ya se comentaron, y se observa como efectivamente ambos procesos tienen una sección eficaz del mismo orden de magnitud.

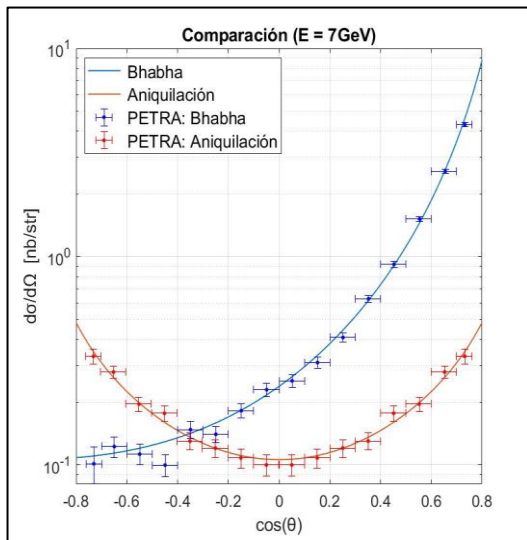


Figura 19. Sección eficaz diferencial de la aniquilación y datos experimentales de [23] a $E = 7\text{ GeV}$ frente a $\cos(\theta)$.

En general, se verifica que el *scattering* Bhabha es de nuevo el proceso dominante para valores grandes del coseno. Sin embargo, debido a la simetría de la sección eficaz (72) para el proceso de aniquilación, con valores muy altos de θ el proceso dominante pasa a ser este. Esto constituye otra diferencia con el proceso de creación de muones pues, aun siendo también simétrico, este nunca tenía preferencia.

En conclusión, esto significa que en un experimento donde interactúen electrones y

positrones, para la dirección de propagación de las partículas incidentes, la mayoría de las veces se observarán de nuevo el mismo par de partículas y con un poco menos de frecuencia se observarán fotones. Según se fijan ángulos más grandes en las mediciones, el número de veces que se observa el par electrón-positrón va reduciéndose en favor de la producción de fotones, hasta que este proceso se convierte en el preferente para valores próximos a $\cos(\theta) = -1$. Además, siempre existe la posibilidad de observar muones en el estado final si la energía inicial es suficientemente alta, pero como ya se ha estudiado, la probabilidad del proceso será mucho menor en comparación con cualquiera de los otros dos.

12.- Comparación con los tres sabores leptónicos

Para terminar, merece la pena señalar que con las expresiones (62), (65), (70) y (72) pueden estudiarse todos los procesos electromagnéticos binarios constituidos por un par leptón-antileptón que den lugar, nuevamente, a una pareja leptón-antileptón o dos fotones. El motivo es porque realmente la única diferencia entre los leptones es su masa, de forma que sustituyendo en las expresiones las masas finales e iniciales por las de las partículas correspondientes se obtendría la sección eficaz del proceso que se desee estudiar.

En cuanto al *scattering* Bhabha, este puede estudiarse también cuando las partículas involucradas no son un par electrón-positrón, sino una pareja partícula-antipartícula con

muones o tauones. En líneas generales la forma de la función seguirá teniendo las mismas propiedades y la única diferencia será el valor de las secciones eficaces.

Sin embargo, a la hora de comparar estos tres procesos aparece una dificultad. Como la energía mínima de las partículas *tau* es del orden del GeV, debido a su masa muy superior a la del electrón, si se impone una energía común para los tres procesos esta debería ser de este orden. En consecuencia, el proceso para los tauones sería relativista mientras que para los electrones y muones sería ultrarrelativista y por tanto idénticos, pues en la expresión ultrarrelativista (65) la diferencia de masa entre las partículas desaparece. Es por ello que el análisis carecería de interés, pues esta información sería análoga a la de la figura 12.

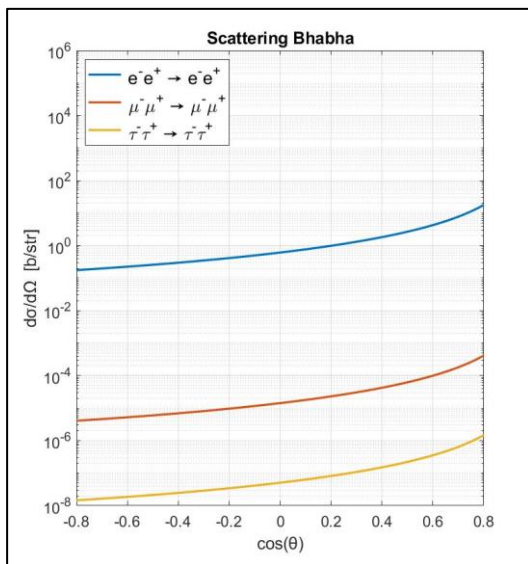


Figura 20. Sección eficaz diferencial del scattering Bhabha para todos los leptones frente a $\cos(\theta)$ para una relación $E/m = 1.1$.

Es por ello que para la comparación de los procesos de la figura 20, en vez de estudiarlos a una energía común, se ha impuesto la misma relación E/m en cada caso (concretamente $E/m = 1.1$), tomándola ligeramente superior a 1 para no entrar en el límite ultrarrelativista. De este modo, observando la figura 20 se deduce que, para la misma relación energía-masa, el proceso será más favorable según la masa de las partículas involucradas sea menor. Obviamente, aunque no tiene por qué darse simultáneamente en los tres, en el límite ultrarrelativista todos serían idénticos.

En cuanto a los procesos de creación, el estudio se limitará a aquellos que involucren exclusivamente leptones y antileptones. La razón de excluir los fotones del estudio es porque la expresión (72) para la creación de fotones es ultrarrelativista, así que no pueden estudiarse las diferencias según la masa inicial de las partículas. Además, también se excluirá del estudio el proceso $\mu^- \mu^+ \rightarrow \tau^- \tau^+$, porque sería muy similar a la creación de muones de la figura 14.

Para empezar, la figura 21 ilustra (para dos valores del coseno especificados entre paréntesis) como la probabilidad de que un par electrón-positrón se transforme en muones es mayor que para tauones a energías cercanas a la masa del tau y para cualquier valor del coseno. Según aumenta la energía, esta diferencia disminuye rápidamente hasta que se alcanzaría el límite

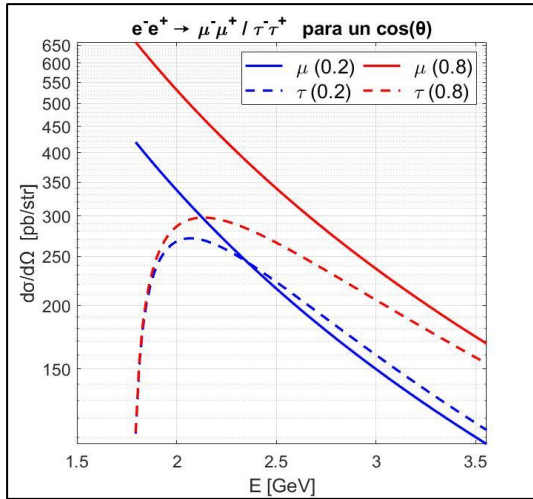


Figura 21. Sección eficaz diferencial para la creación de muones y tauones frente a la energía para dos valores del $\cos(\theta)$ especificados entre paréntesis.

ultrarelativista, momento en el que ambos valores coincidirían. De todos modos, aunque para el valor alto del coseno (líneas rojas) se aprecia como la creación de partículas tau siempre es menos probable, para el valor bajo del coseno (línea azul) existe una energía a partir de la cual la creación de muones es menos favorable. De aquí se deduce que, para direcciones perpendiculares a la de las partículas iniciales, es más probable la creación de partículas tau que de muones (a partir de una energía en torno a 2.4 GeV). De todos

modos, se han representado las secciones eficaces totales de ambos procesos en la figura G.1 del anexo G y se observa que la creación de muones domina siempre frente a la de tauones.

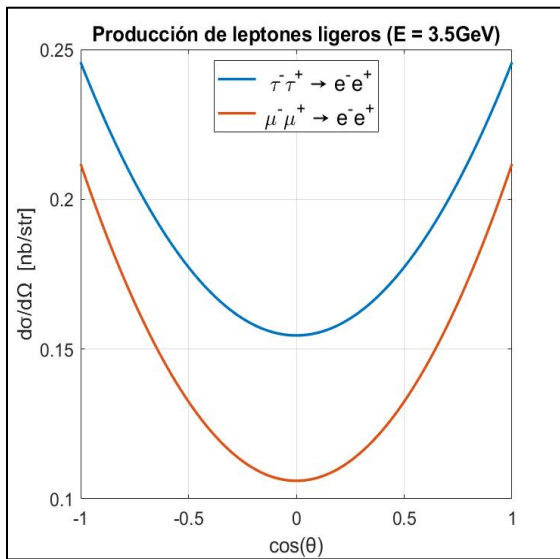


Figura 22. Sección eficaz diferencial para la creación del par electrón-positrón desde leptones más masivos frente al $\cos(\theta)$ para una energía de 3.5 GeV .

También podría estudiarse el proceso en el que las partículas iniciales fuesen más masivas que las finales. Atendiendo a la expresión (70), se puede comprobar que la sección eficaz es casi idéntica al proceso inverso, ya que las masas de las partículas finales e iniciales siempre intervienen juntas a excepción del cociente en la raíz. Como ahora este cociente será mayor según la masa inicial también lo sea, tal y como se ilustra en la figura 22 el proceso con las partículas tau será siempre más favorable.

Además, comparando las figuras 20, 21 y 22 se comprueba que el *scattering* Bhabha para cualquiera de los tres leptones es más probable que todos los procesos de creación estudiados, ya sean hacia partículas más o menos masivas.

Por último, el proceso $\tau^- \tau^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$ no se estudia porque, aunque su sección eficaz es ligeramente inferior a la de $\tau^- \tau^+ \rightarrow e^- e^+$ para energías en torno a la masa de tau, resulta inapreciable. La razón es que en (70) el único término con un cambio relevante entre ambos procesos es el del producto $m^2 M^2$ y su contribución (10^{-5} nb) es muy inferior a los otros.

IV. CONCLUSIÓN

En este trabajo se ha estudiado la interacción electromagnética electrón-positrón empleando el formalismo de la QED. Para ello, en el capítulo II se han deducido las expresiones de las secciones eficaces para los procesos de dispersión, en un principio concebidas para la pareja electrón-positrón, pero igualmente válidas para el resto de los leptones. Posteriormente, en el capítulo III se han estudiado estas expresiones obteniendo las características fundamentales de cada proceso. En líneas generales, se ha comprobado cómo se reduce la probabilidad del proceso, para direcciones que no presentan divergencias, según aumenta la energía y cómo se maximiza de la probabilidad cuando la energía es ligeramente superior a la masa de las partículas finales (excepto para el proceso de aniquilación).

En cuanto a resultados más concretos de cada proceso, se ha advertido la dominancia de la dispersión Bhabha frente al proceso de producción de leptones o fotones, aunque este último puede ser preferente para ángulos grandes. Así mismo, se ha expuesto como el *scattering* Bhabha se vuelve menos favorable según aumenta la masa de las partículas, aunque con suficiente energía se alcanza el límite ultrarrelativista (4 MeV para el caso electrón-positrón) y la sección eficaz tiende a un valor independiente de la masa de las partículas. Por otro lado, se ha comprobado que el término directo es responsable de las divergencias para $\theta = 0^\circ$.

Por último, alguno de los resultados más sorprendentes han sido la ligera preferencia de producción de tauones en lugar de muones para direcciones perpendiculares a la de las partículas incidentes, aunque de todos modos en el anexo G se ha comprobado que la sección eficaz total de muones siempre domina para todas las energías. Además, aunque en líneas generales las predicciones teóricas coinciden con los datos experimentales, se ha observado cierta discrepancia en la producción de muones, sobre todo a altas energías. Debido a esto, se abre la puerta a un estudio más detallado del proceso, incluyendo la interacción débil, de forma que se compruebe si las nuevas expresiones predicen la resonancia de Z^0 . Así mismo, también podría incluirse la interacción fuerte en el estudio, de modo que se considerase el proceso de creación de hadrones admitiendo la aparición de una pareja *quark-antiquark* [14].

En resumen, este trabajo presenta un estudio detallado de la interacción electromagnética electrón-positrón, así como de procesos similares para el resto de leptones, y sienta las bases para el análisis de procesos más complejos en el futuro.

V. ANEXOS

A.- Matrices de Dirac

En relación con lo expuesto en la sección 1.2, se desarrolla a continuación la ecuación de Dirac en términos de las conocidas como matrices de Dirac, que permiten expresar la ecuación de forma manifiestamente covariante. Esta descripción de la ecuación era precisamente uno de los objetivos de Dirac, pues se trata de la notación intrínseca a la TR que su ecuación debía respetar. Además, de este modo se facilita el estudio de la invarianza Lorentz de la ecuación, que constituye otro requisito fundamental que efectivamente satisface la ecuación, aunque no se entrará en detalle porque escapa de los contenidos del trabajo. Estas matrices, que definen el algebra de Clifford, se expresan en términos de $\vec{\alpha}$ y β y sus propiedades son:

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta\alpha_i \quad (\text{A.1})$$

$$(\gamma^0)^{-1} = (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad (\text{A.2})$$

$$(\gamma^i)^{-1} = (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \quad (\text{A.3})$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I} \quad (734)$$

Es importante resaltar que no se presentan explícitamente las componentes de las matrices porque no son necesarias a lo largo del desarrollo. Esto se comprueba durante la sección referida al cálculo de los elementos de matriz, donde empleando los teoremas de trazas se expresan estas en términos del producto de cuadvectores.

A lo largo del trabajo se emplea de la notación *slash*, utilizada para expresar de forma compacta la contracción de las matrices gamma con cuadvectores de la siguiente forma:

$$\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu \quad (\text{A.3})$$

B.- Cálculo de la matriz S de Dyson

Para empezar, es necesario considerar las expresiones del hamiltoniano libre y de interacción, pues la matriz S se define en términos de estos en lugar de lagrangianas. Para una \mathcal{L}_I que no depende de las derivadas temporales de los campos, se demuestra que [18]:

$$\mathcal{H} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \phi_i - \mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial \phi_i} \phi_i - \mathcal{L}_o - \mathcal{L}_I = \mathcal{H}_o + \mathcal{H}_I \Rightarrow \mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I \quad (\text{B.1})$$

Partiendo de la ecuación diferencial para la evolución temporal de los estados y procediendo iterativamente, tal y como se expuso en la sección 5.4 de la matriz S , se obtiene que:

$$|\Phi(t)\rangle = |\Phi(-\infty)\rangle - i \int_{-\infty}^t dt_1 H_I(t_1) \left[|\Phi(-\infty)\rangle - i \int_{-\infty}^{t_1} \dots \right], \quad (\text{B.2})$$

donde tomando el límite de t tendiendo a infinito se deduciría:

$$|\Phi(\infty)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \{H_I(t_1)H_I(t_2) \dots H_I(t_n)\} |\Phi(-\infty)\rangle. \quad (\text{B.3})$$

Sin embargo, esta expresión no resulta muy satisfactoria, pues se espera una expresión claramente covariante. Para ello, considerando ciertas propiedades de la integración que permiten expresar el integrando en términos de un producto de Dyson y que H_I es la integral espacial de \mathcal{H}_I , se demuestra que:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_n P\{\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2) \dots \mathcal{H}_I(x_n)\}. \quad (\text{B.4})$$

Aun así, conviene seguir desarrollando la expresión en términos del producto temporal de Wick en vez del de Dyson, de modo que pueda aplicarse el teorema de Wick [18] y facilitar su manejo. Para ello, recordando la expresión (16) de la densidad lagrangiana de interacción y el resultado (B.1) que relaciona la densidad lagrangiana con \mathcal{H}_I , se comprueba como este último es bilineal con el campo fermiónico, al menos en la interacción de interés. Debido a esto, sustituir el producto de Dyson por el de Wick no tiene consecuencias pues, en caso de reordenar los campos, las permutaciones serían entre parejas de campos y se añadiría un factor $(-1)^{par}$. Si además se incluye un producto normal en la expresión de \mathcal{H}_I (como es habitual en los operadores de la TCC para evitar divergencias) se obtiene:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_n T\{(\bar{\Psi}\not{A}\Psi)_{x_1} : \dots : (\bar{\Psi}\not{A}\Psi)_{x_n} :\} \quad (\text{B.5})$$

Finalmente, si se aplica el teorema de Wick y se desarrolla el producto normal, se verifica que los términos en los que haya contracciones con los elementos del mismo paréntesis (asociados

al mismo punto x_i) son nulos. Esto se debe a que el producto normal, presente en cada densidad hamiltoniana, ordena los operadores de forma que actúen primero los de destrucción. De este modo, si se considera una contracción entre estos operadores, al calcular el valor medio en el vacío debido a la contracción el resultado será siempre nulo debido a la actuación del operador de destrucción sobre el vacío. En conclusión, estos productos normales pueden omitirse si se tiene presente que no puede haber contracciones para tiempos iguales. Finalmente, la expresión general de S sería la que figura en (28).

C.- Hipótesis adiabática

En un principio los estados final e inicial se definen como estados de partículas libres, pues se suponen suficientemente alejadas para que no exista interacción entre ellas, de modo que se tratan de autoestados de H_0 y pueden caracterizarse con la aplicación de los operadores de creación y destrucción. Sin embargo, ya se ha mencionado que el término \mathcal{L}_I tiene contribuciones de autointeracción a la energía aun si se trata de partículas aisladas, por lo que la energía no se corresponde únicamente con la correspondiente a H_0 y, por tanto, dejan de ser autoestados.

En general, esto se soluciona con la hipótesis adiabática, basada en el hecho de que la colisión no puede depender de un estado muy anterior a esta. Consiste en asumir nula la constante de acoplo de \mathcal{L}_I para $t \rightarrow -\infty$, de modo que se aumenta progresivamente hasta alcanzar su verdadero valor un tiempo $-T$ antes de la colisión, suficientemente grande como para poder seguir considerando a las partículas tan alejadas que no interactúen. Tras la interacción, que tendrá lugar casi instantáneamente en un intervalo de tiempo mucho menor que $[-T, T]$, la constante volvería a disminuir tendiendo a cero para $t \rightarrow \infty$. Finalmente se toma $T \rightarrow \infty$.

Sin embargo, este procedimiento solo es necesario cuando se considera un desarrollo perturbativo de orden cuatro o superior. El motivo es que las contribuciones de autointeracción solo pueden considerarse incluyendo, al menos, dos interacciones (vértices) más a parte de las principales, es decir, según se expuso en la sección 5.4, dos órdenes más en el desarrollo. Por este motivo no se tiene en cuenta en el trabajo, pues se aborda un cálculo hasta segundo orden debido a que, según lo expuesto al final de la sección 3, esto proporciona igualmente resultados muy satisfactorios.

D.- Sistema centro de momentos

Es fundamental definir el sistema de referencia que se tomará para el cálculo de la sección eficaz. En este trabajo se escoge el sistema centro de momentos, definido como aquel en el que el momento total es nulo en el estado inicial y, por conservación del momento, también en el estado final. Denominando \vec{p} y \vec{q} a los momento del electrón y positrón inicial respectivamente se obtienen las siguientes relaciones:

$$\vec{p} + \vec{q} = \vec{p}' + \vec{q}' = 0 \Rightarrow \vec{p} = -\vec{q} \text{ y } \vec{p}' = -\vec{q}', \quad (\text{D.1})$$

donde \vec{p}' y \vec{q}' denotan los momentos de la partícula y antipartícula resultantes de la interacción, no necesariamente una pareja electrón-positrón. Para el *scattering* Bhabha, teniendo en cuenta que el electrón y el positrón tienen la misma masa, resulta sencillo comprobar como la energía individual de cada partícula en el estado inicial y final coincide. Por tanto, si las energías coinciden, el módulo de todos los momentos individuales también debe coincidir, de forma que se pueden deducir las siguientes identidades:

$$E = E_p = E_q = E_{p'} = E_{q'} \quad (\text{D.2})$$

$$\vec{k} = \vec{p} = -\vec{q} = \vec{p}' = -\vec{q}' \quad (\text{D.3})$$

Sin embargo, para la producción de muones, las partículas del estado final no tienen la misma masa que las partículas iniciales y por ello, aunque seguirá verificándose la relación (D.1), no se satisfacen (D.2) ni (D.3). De todos modos, según se expresa en (30), la restricción de conservación de la energía surge de manera natural y, aunque (D.3) seguirá sin satisfacerse por la diferencia de masas, si se verificará (D.2). Es por ello que, en la producción de muones, se considera que la energía satisface (D.2) pero los momentos no cumplen (D.3), sino:

$$\vec{k} = \vec{p} = -\vec{q} \quad (\text{B.4})$$

$$\vec{k}' = \vec{p}' = -\vec{q}' . \quad (\text{B.5})$$

A continuación, se presentan una serie de productos de cuadvectores de los que se hacen uso para expresar la sección eficaz en términos de E y θ . Estos productos se presentan primero de la forma más general posible considerando masas iniciales y finales distintas (creación de muones). Usando la relación (1) los productos se simplifican resultando en:

$$p \cdot q = 2E^2 - m^2 \quad (\text{B.6})$$

$$p' \cdot q' = 2E^2 - M^2 \quad (\text{B.7})$$

$$p \cdot q' = p' \cdot q = EE' + \sqrt{E^2 - m^2} \sqrt{E^2 - M^2} \cos(\theta) \quad (\text{B.8})$$

$$p \cdot p' = q \cdot q' = EE' - \sqrt{E^2 - m^2} \sqrt{E^2 - M^2} \cos(\theta) \quad (\text{B.9})$$

$$(p + q)^4 = 16E^4. \quad (\text{B.10})$$

Para el caso del *scattering* Bhabha en el que las masas coinciden, quedarían:

$$p \cdot q = p' \cdot q' = 2E^2 - m^2 = \{E \ll m\} = 2E^2 \quad (\text{B.11})$$

$$p \cdot q' = p' \cdot q = (E^2 - m^2) \cos(\theta) + E^2 = \{E \ll m\} = E^2(1 + \cos(\theta)) \quad (\text{B.12})$$

$$p \cdot p' = q \cdot q' = (m^2 - E^2) \cos(\theta) - E^2 = \{E \ll m\} = E^2(1 - \cos(\theta)) \quad (\text{B.13})$$

$$(p + q)^4 = 16E^4 \quad (\text{B.5})$$

$$(q - q')^4 = 16(E^2 - m^2)^2 \text{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right) = \{E \ll m\} = 16E^4 \text{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (\text{B.14})$$

$$(p + q)^2 (q - q')^2 = 16E^2 (m^2 - E^2) \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \{E \ll m\} = -16E^4 \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (\text{B.15})$$

donde se ha introducido también el resultado para el límite ultrarrelativista en el que la masa de la partícula es despreciable frente a su energía, así como dos expresiones más que no son necesarias para la producción de muones. Además, a partir de estas expresiones puede definirse el ángulo de dispersión θ como aquel que forman las direcciones de propagación de las partículas finales e iniciales, es decir, el que resulta del producto entre \vec{p} y \vec{p}' o \vec{q} y \vec{q}' .

E.- Propiedad de las deltas

- 1) Para deducir la expresión (30), la integral del volumen espacio temporal ha sido calculada a partir de la siguiente propiedad de las deltas de Dirac:

$$|(2\pi)^4 \delta(P_i - P_f)|^2 = (2\pi)^4 \delta(P_i - P_f) \int d^4x e^{-i(P_i - P_f)x} = (2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_f) \int d^4x,$$

$$\int d^4x = \frac{|(2\pi)^4 \delta(P_i - P_f)|^2}{(2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_f)} \quad (\text{E.1})$$

2) Introduciendo en (43) la expresión del propagador del campo electromagnético (20) y agrupando las exponenciales, se obtendría un término de la forma:

$$S_{fi}^D = \frac{e^2 m^2}{2E^2 V^2} \frac{-i g_{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int \int \int d^4x_1 d^4x_2 d^4k_\gamma \frac{\bar{u}_r' \gamma^\mu u_r \cdot \bar{v}_s \gamma^\nu v_{s'}}{k_\gamma^2} e^{i(p' - p - k_\gamma)x_1} e^{i(q' - q + k_\gamma)x_2}. \quad (\text{E.2})$$

Como el resto de los espinores no dependen de las variables de integración, pueden integrarse las exponenciales de modo que se obtendría:

$$S_{fi}^D = \frac{-e^2 m^2}{2E^2 V^2} \cdot i g_{\mu\nu} (2\pi)^4 \int d^4k_\gamma \frac{\bar{u}_r' \gamma^\mu u_r \cdot \bar{v}_s \gamma^\nu v_{s'}}{k_\gamma^2} \cdot \delta^4(p' - p - k_\gamma) \delta^4(q' - q + k_\gamma). \quad (\text{E.3})$$

Finalmente, si se integra una de las deltas de modo que desaparezca la variable k_γ y se multiplica por dos la expresión del elemento de matriz, por los motivos mencionados al final de la sección 7.1, se deduce el resultado (45).

3) Se pretende demostrar la siguiente propiedad:

$$\frac{d^3 \vec{q}'}{2E'} = \int_{-\infty}^{\infty} dq'_0 \delta(q'^2 - m^2) \Theta(q'_0) d^3 \vec{q}'. \quad (\text{E.4})$$

Para ello, partiendo del miembro a la derecha de la igualdad, se recuperará la expresión inicial:

$$\int_0^{\infty} d^4 q' \delta(q'^2 - m^2) = \int_0^{\infty} d^4 q' \delta(q_0'^2 - E^2) = \int_0^{\infty} d^4 q' \delta[(q'_0 - E)(q'_0 + E)]. \quad (\text{E.5})$$

A continuación, se emplea la siguiente propiedad de la delta de Dirac:

$$\delta(f(x)) = \sum_k \frac{\delta(x - x_k)}{|f'(x_k)|} \Rightarrow \delta[(q'_0 - E)(q'_0 + E)] = \frac{\delta(q'_0 - E) + \delta(q'_0 + E)}{2q'_0}. \quad (\text{E.6})$$

Aplicando este resultado se deduce que:

$$\int_0^{\infty} d^4 q' \delta[(q'_0 - E)(q'_0 + E)] = \int_0^{\infty} d^4 q' \frac{\delta(q'_0 - E)}{2q'_0} + \int_0^{\infty} d^4 q' \frac{\delta(q'_0 + E)}{2q'_0} = \frac{d^3 \vec{p}'}{2E'}, \quad (\text{E.7})$$

donde se ha considerado que la segunda integral es nula, ya que el cero de la delta no pertenece al intervalo de integración. Además, también puede extenderse el dominio de integración en (E.5) de modo que coincida con (E.4) incluyendo una función escalón de Heaviside, de modo que igualmente el integrando siga siendo nulo para $q'_0 \leq 0$.

F.- Teoremas de trazas

En el estudio de las secciones eficaces interviene el cálculo de trazas compuestas por el producto de las matrices de Dirac, cuyas propiedades fundamentales, a las que se les dará uso durante esta sección, fueron presentadas en el anexo A. En lugar de abordar el cálculo con las expresiones explícitas de las matrices, es más cómodo recurrir a los teoremas de trazas. De entre todos ellos, los necesarios para el cálculo presentado en este trabajo son:

- **Teorema 1:** La traza de un número impar de matrices gammas es nula. (F.1)

- **Teorema 2:** $\text{Tr}\{\not{a}\not{b}\} = 4(a \cdot b)$. (F.2)

- **Teorema 3:** $\text{Tr}\{\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\} = (a \cdot b)\text{Tr}\{\not{c}\not{d}\} - (a \cdot c)\text{Tr}\{\not{b}\not{d}\} + (a \cdot d)\text{Tr}\{\not{b}\not{c}\}$. (F.3)

- **Teorema 4:** $\gamma_\mu \gamma^\mu = g_\mu^\mu \mathbb{I}$. (F.4)

- **Teorema 5:** $\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = -2\not{a}$. (F.5)

- **Teorema 6:** $\gamma_\mu \not{a}\not{b}\gamma^\mu = 4(a \cdot b)\mathbb{I}$. (F.6)

- **Teorema 7:** $\gamma_\mu \not{a}\not{b}\not{c}\gamma^\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a}$. (F.7)

A continuación, se presentan las demostraciones de estos teoremas.

- **Demostración 1:**

Haciendo uso de la matriz γ_5 , cuyas propiedades principales son $\gamma_5 \gamma_5 = \mathbb{I}$ y que anticonmuta con el resto de las matrices gammas, se tiene que:

$$\text{Tr}\{\not{a} \cdots \not{n}\} = \text{Tr}\{\not{a} \cdots \not{n} \gamma_5 \gamma_5\} = (-1)^n \text{Tr}\{\gamma_5 \not{a} \cdots \not{n} \gamma_5\}.$$

Considerando la propiedad cíclica de las trazas $\text{Tr}\{AB\} = \text{Tr}\{BA\}$, se concluye que:

$$\text{Tr}\{\not{a} \cdots \not{n}\} = (-1)^n \text{Tr}\{\not{a} \cdots \not{n} \gamma_5 \gamma_5\} = (-1)^n \text{Tr}\{\not{a} \cdots \not{n}\},$$

de donde se deduce que para n impar la traza debe ser nula.

- **Demostración 2:**

$$\begin{aligned}\text{Tr}\{\not{a}\not{b}\} &= \text{Tr}\{\not{b}\not{a}\} = \frac{1}{2}\text{Tr}\{\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a}\} = \frac{1}{2}\text{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu\}a_\mu b_\nu = \\ &= \frac{1}{2}\text{Tr}\{2g^{\mu\nu}\mathbb{I}\}a_\mu b_\nu = \text{Tr}\{\mathbb{I}\}a_\mu g^{\mu\nu} b_\nu = 4(a \cdot b).\end{aligned}$$

- **Demostración 3:**

Se considera la siguiente relación entre dos cuadvectores cualquiera, resultado de la anticonmutación de las matrices gammas:

$$\not{a}\not{b} = \gamma^\mu a_\mu \gamma^\nu b_\nu = (2g^{\mu\nu}\mathbb{I} - \gamma^\nu\gamma^\mu)a_\mu b_\nu = 2(a \cdot b)\mathbb{I} - \not{b}\not{a}.$$

Aplicando este resultado reiteradamente en la expresión de la traza se deduce que:

$$\begin{aligned}\text{Tr}\{\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\} &= 2(a \cdot b)\text{Tr}\{\not{c}\not{d}\} - \text{Tr}\{\not{b}\not{a}\not{c}\not{d}\} = \dots = \\ &= 2(a \cdot b)\text{Tr}\{\not{c}\not{d}\} - 2(a \cdot c)\text{Tr}\{\not{b}\not{d}\} + 2(a \cdot b)\text{Tr}\{\not{b}\not{c}\} - \text{Tr}\{\not{b}\not{c}\not{d}\not{a}\}.\end{aligned}$$

Considerando el carácter cíclico de las trazas, puede trasladarse \not{a} en el último término de vuelta a la primera posición. De este modo, pasado este último término al otro lado de la igualdad se deduce que:

$$\begin{aligned}2\text{Tr}\{\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\} &= 2(a \cdot b)\text{Tr}\{\not{c}\not{d}\} - 2(a \cdot c)\text{Tr}\{\not{b}\not{d}\} + 2(a \cdot b)\text{Tr}\{\not{b}\not{c}\} \\ \text{Tr}\{\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\} &= (a \cdot b)\text{Tr}\{\not{c}\not{d}\} - (a \cdot c)\text{Tr}\{\not{b}\not{d}\} + (a \cdot b)\text{Tr}\{\not{b}\not{c}\}.\end{aligned}$$

- **Demostración 4:**

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = \frac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma^\mu + \gamma_\mu \gamma^\mu) = \frac{1}{2}(2g_\mu{}^\mu \mathbb{I}) = g_\mu{}^\mu \mathbb{I} = 4\mathbb{I}.$$

- **Demostración 5:**

$$\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = \gamma_\mu \gamma_\nu a^\nu \gamma^\mu = (2g_{\mu\nu} \mathbb{I} - \gamma_\nu \gamma_\mu) a^\nu \gamma^\mu = 2\not{a} - 4\not{a} = -2\not{a}.$$

- **Demostración 6:**

$$\begin{aligned}\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu &= \gamma_\mu \not{a} b_\nu \gamma^\nu \gamma^\mu = \gamma_\mu \not{a} b_\nu (2g^{\nu\mu} \mathbb{I} - \gamma^\mu \gamma^\nu) = 2\not{a}\not{b} - \gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu \not{b} = \\ &= 2\not{a}\not{b} + 2\not{a}\not{b} = 2[2(a \cdot b)\mathbb{I} - \not{a}\not{b}] + 2\not{a}\not{b} = 4(a \cdot b)\mathbb{I}.\end{aligned}$$

- **Demostración 7:**

$$\begin{aligned}\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu &= \gamma_\mu \not{a} b_\nu \gamma^\nu \gamma^\mu = \gamma_\mu \not{a} b_\nu (2g^{\nu\mu} \mathbb{I} - \gamma^\mu \gamma^\nu) = 2\not{c}\not{a}\not{b} - \gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu \not{c} = \\ &= 2\not{c}[2(a \cdot b)\mathbb{I} - \not{b}\not{a}] - 4(a \cdot b)\not{c} = -2\not{c}\not{b}\not{a}.\end{aligned}$$

G.- Producción de muones y tauones

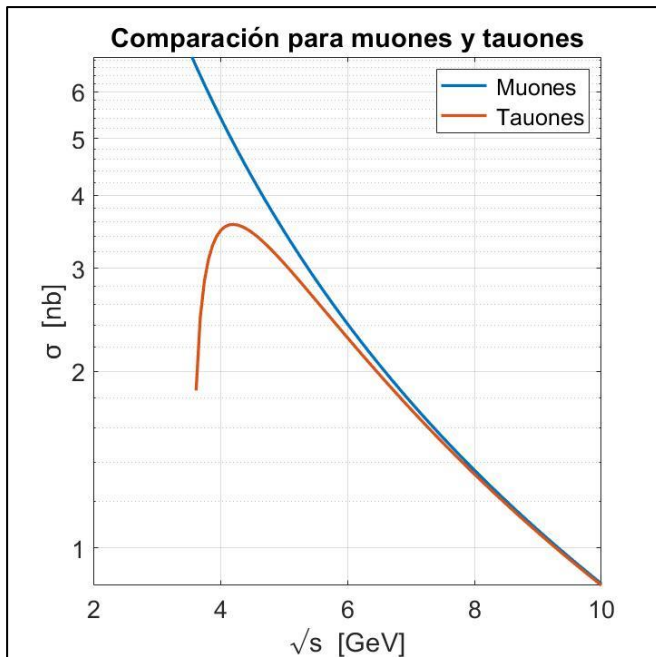


Figura G1. Sección eficaz total para la producción de muones y tauones frente a la energía total del estado inicial.

Como se comentaba en la sección 12, para el proceso de creación de muones y partículas tau se comprueba que para todas las energías el proceso dominante es el primero. También se puede apreciar que para energías altas aparece el límite ultrarrelativista y ambas secciones eficaces tienden a un mismo valor, pues la diferencia debido a las masas de las partículas involucradas desaparece.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] L. J. Boya, «The Thermal Radiation Formula of Planck (1900)», *Rev. Academia de Ciencias*, vol. 58, pp. 91-114 (2003).
- [2] J. A. Caballero, Cap. 4 y 5 de *Mecánica cuántica relativista*, Universidad de Sevilla (2023).
- [3] D. Griffiths, Cap. 7 de *Introduction to Elementary Particles*, 2ª Ed., WILEY-VCH (2008).
- [4] D. Tong, Cap. 4 de *Lectures on Quantum Field Theory*, University of Cambridge (2006).
- [5] W. Greiner, Cap. 12 de *Relativistic Quantum Mechanics Wave Equation*, 3ª Ed., Springer (2013).
- [6] D. Griffiths, Cap.1 de *Introduction to elementary particles*, 2ª Ed., WILEY-VCH (2008).
- [7] F. Halzen, A. D. Martin, Cap. 3 de *Quarks and Leptons*, 1ª Ed., John Wiley and Sons (1984).
- [8] «The Nobel Prize»: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1933/dirac/facts/> [Último acceso: 01-07-2023].
- [9] A. Lawncizak, V. Åsbrink, *On the 1932 Discovery of the Positron*, Royal institute of technology (KTH), Department of Physics (2014).
- [10] F. Wilczek, «Nobel Lecture: Asymptotic freedom: From paradox to paradigm», *American Physical Society*, vol. 77, nº 3, pp. 857-870 (2005).
- [11] W. Greiner, Cap. 13 de *Relativistic Quantum Mechanics Wave Equation*, 3ª Ed., Springer (2013).
- [12] D. Tong, Cap. 0, de *Lectures on Quantum Field Theory*, University of Cambridge (2006).
- [13] T. Kinoshita, «Tenth-order qed contribution to the electron g-2 and high precision test of quantum electrodynamics», *International Journal of Modern Physics A*, vol. 29, nº 2, pp. 1-25 (2014).
- [14] D. Griffiths, Cap. 8 de *Introduction to Elementary Particles*, 2ª Ed., WILEY-VCH (2008).

- [15] M. N. Frary, D. J. Miller, «Monitoring the luminosity spectrum», *The Physics Potential*, pp. 379–391 (1991).
- [16] S. Poss, A. Sailer, «Differential Luminosity Measurement using Bhabha Events», *LCD-Note-2013-008*.
- [17] D. H. Jakubassa-Amundsen, «Electron and Positron Scattering from Precious Metal Atoms in the eV to MeV Energy Range», *Atoms*, vol. 10, nº 3, pp. 82 (2022).
- [18] I. G. Fuentes, *Notas de Electrodinámica Cuántica*, Universidad de Sevilla (2023).
- [19] D. Tong, Cap. 2 de *Lectures on Quantum Field Theory*, University of Cambridge (2023).
- [20] W. Greiner, J. Reinhardt, Cap. 3 de *Quantum Electrodynamics*, 4ª Ed., Springer (2009).
- [21] D. Griffiths, Cap. 6 de *Introduction to Elementary Particles*, 2ª Ed., WILEY-VCH (2008).
- [22] F. Halzen, A. D. Martin, Cap. 6 de *Quarks and Leptons*, 1ª Ed., John Wiley & Sons (1984).
- [23] W. Bartel and others, «Measurement of the Processes $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$ and $e^+ e^- \rightarrow \gamma\gamma$ at PETRA», *Z. Phys. C*, vol. 19, DESY-83-035, p. 197 (1983).
- [24] H. J. Behrend and others, «A Search for substructure of leptons and quarks with the CELLO detector», *Z. Phys. C*, vol. 51, DESY-90-149, pp. 149-156 (1991).
- [25] H. J. Behrend and others, «Measurement of the Reaction $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ for $14 \text{ GeV} < \sqrt{s} < 36.4 \text{ GeV}$ », *Z. Phys. C*, vol. 14, DESY-82-019, p. 283 (1982).
- [26] M. Acciarri and others, «Measurement of cross-sections and leptonic forward - backward asymmetries at the z pole and determination of electroweak parameters», *Z. Phys. C*, vol. 62, CERN-PPE-94-045, pp. 551-576 (1994).
- [27] Durham University, CERN, «HEPData»: <https://www.hepdata.net/>, [Último acceso: 02-07-2023].
- [28] F. Halzen, A. D. Martin, Cap. 13 de *Quarks and Leptons*, 1ª Ed., John Wiley & Sons (1984).