



TESIS DOCTORAL



**APORTACIONES AL
CONTROL H_∞ DE SISTEMAS MULTIVARIABLES**

Manuel Gil Ortega Linares

Sevilla, Junio de 2001



TESIS DOCTORAL



APORTACIONES AL
CONTROL H_∞ DE SISTEMAS MULTIVARIABLES

por

Manuel Gil Ortega Linares

Ingeniero Industrial por la Escuela Superior de Ingenieros
de la Universidad de Sevilla

Presentada en la

Escuela Superior de Ingenieros

de la

Universidad de Sevilla

para la obtención del

Grado de Doctor Ingeniero Industrial

Sevilla, Junio de 2001



TESIS DOCTORAL



APORTACIONES AL
CONTROL H_∞ DE SISTEMAS MULTIVARIABLES

Autor: Manuel Gil Ortega Linares

Director: Francisco Rodríguez Rubio

A mi familia

Resumen

La teoría de control H_∞ ha irrumpido con mucho auge en las dos últimas décadas dadas las características de robustez proporcionadas por sus controladores. Su diseño parte de hipótesis más realistas respecto a las restricciones impuestas a las distintas señales que aparecen en el esquema de control, no suponiendo ninguna distribución estadística en especial e indicando que sólo se ha de cumplir que la energía de dichas señales deba estar acotada.

Esta Tesis está constituida por una serie de contribuciones relacionadas con la *Teoría de Control H_∞* multivariable, tanto a sistemas lineales como a sistemas no lineales.

Respecto a las de los sistemas lineales, el objetivo principal de esta Tesis es aportar una metodología de diseño de forma que se automatice la síntesis del controlador. Para ello se ha propuesto un método sencillo y fácil de utilizar, válido tanto para sistemas monovariantes o como multivariantes, y en el que no es necesario un conocimiento profundo de esta teoría de control para poder aplicarlo.

Esta metodología utiliza el *planteamiento de sensibilidad mixta*, enmarcado dentro de la teoría de control H_∞ , para el que se proponen unas reglas de diseño de las funciones de ponderación involucradas en el mismo. Dichas reglas han sido diseñadas de forma que el comportamiento de cada salida del sistema dependa básicamente de un sólo parámetro, el cual es fácil de sintonizar.

La validez de la metodología propuesta ha sido corroborada con resultados experimentales, ya que ha sido aplicada a sistemas reales de distinta índole, tanto monovariantes (planta solar, sistema de seguimiento visual, servomecanismo de corriente continua) como multivariantes (planta piloto), obteniéndose en todos ellos resultados satisfactorios.

Respecto a las contribuciones realizadas al control H_∞ no lineal, éstas han sido realizadas en el ámbito de la robótica. Se ha propuesto un controlador basándose en la ampliación de una ecuación diferencial del error, añadiendo la ponderación del término integral y aportando una solución a la ecuación de *Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs*

planteada.

El controlador ha sido reescrito en una estructura similar a la del control por par calculado, de forma que el controlador externo resultante tiene la ecuación de un PID no lineal. Además, se ha mostrado cómo una elección particular de unas matrices de ponderación permite encontrar un controlador cuyas ecuaciones no dependen del parámetro de atenuación.

Dado que los anteriores controladores se basan en un conocimiento perfecto del sistema, para solventar los problemas de robustez del controlador PID no lineal se ha propuesto una modificación del método conocido como *control por funciones de saturación*. Se ha reformulado dicho método de forma que se obtenga un incremento de señal de control que pueda ser añadida a la proporcionada por el controlador PID no lineal externo, compensando así el error debido a las incertidumbres del modelo.

Para comprobar la validez de los controladores propuestos, éstos han sido implementados con éxito tanto en el modelo de un robot de dos grados de libertad como en el simulador de un robot industrial, considerándose en ambos casos diferencias apreciables entre el modelo nominal y el “supuestamente real”. En los resultados de las simulaciones se observa cómo los controladores propuestos mejoran sensiblemente los errores obtenidos tanto con un controlador clásico por par calculado como con el controlador tipo PD de partida.

Agradecimientos

En primer lugar, quisiera hacer constar mi agradecimiento a mi director de Tesis, el profesor Francisco Rodríguez Rubio, por sus consejos y comentarios que han servido para el desarrollo de esta Tesis, así como por el continuo seguimiento del trabajo realizado.

En segundo lugar, he de expresar mi gratitud a los miembros del grupo de investigación al que pertenezco y en el que me he sentido muy arropado, y especialmente a los profesores Fernando Castaño y Carlos Vivas, a Manuel Román, a Carlos Pérez y a mi querido compañero de “fatigas” el profesor Manuel Vargas, con el que tan buenos ratos he pasado a lo largo de estos años.

Asimismo, quiero agradecer el apoyo y la ayuda recibida por parte de diferentes personas pertenecientes al departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática. He de dar gracias a los profesores Javier Aracil, Francisco Gordillo, Teodoro Álamo, Federico Cuesta y Manuel Ruiz Arahall por sus sugerencias y correcciones que han contribuido a la elaboración de este trabajo. También quiero hacer público mi agradecimiento al resto de los miembros de este departamento por su compañerismo y amistad, haciendo una mención especial a la templanza y paciencia de mi estimado compañero de despacho, el profesor Francisco Salas.

Por último, quiero expresar mi especial agradecimiento a mi familia por el apoyo incondicional que siempre he recibido de ellos.

Manuel Gil Ortega Linares

Glosario

CN	Comportamiento Nominal.
CR	Comportamiento Robusto.
DSP	Digital Signal Processing.
EN	Estabilidad Nominal.
ER	Estabilidad Robusta.
$E(s)$	Incertidumbre.
F_G	Familia de plantas.
GDL	Grados de libertad.
$G(s)$	Sistema nominal.
$G^*(s)$	Sistema genérico perteneciente a la familia de plantas F_G .
$G_r(s)$	Sistema real.
$G(q)$	Vector de términos gravitatorios de un robot manipulador.
H_γ	Función hamiltoniana.
$HJBI$	Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs.
$K(s)$	Controlador.
$L_i(s)$	Función de lazo a la entrada.
$L_o(s)$	Función de lazo a la salida.
LIT	Lineal e invariante en el tiempo.
$M(q)$	Matriz de inercias de un robot manipulador.
$MIMO$	Sistema multivariable (<i>Multiple Input Multiple Output</i>).
$P(s)$	Planta aumentada o generalizada.
QFT	Terminología anglosajona <i>Quantitative Feedback Theory</i> .
$SISO$	Sistema monovariable (<i>Single Input Single Output</i>).
$S_i(s)$	Función de sensibilidad a la entrada.
$S_o(s)$	Función de sensibilidad a la salida.
$T_i(s)$	Función de sensibilidad complementaria a la entrada.
$T_o(s)$	Función de sensibilidad complementaria a la salida.
TFL	Transformación fraccional lineal.
$V(q, \dot{q})$	Vector de términos centrípetos y de Coriolis de un robot manipulador.
$V(x, t)$	Solución a la ecuación de <i>Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs</i> .
W	Matriz de ponderación en formulación H_∞ no lineal.
$W_S(s)$	Matriz de funciones de peso que pondera a $S(s)$.

$W_T(s)$	Matriz de funciones de peso que pondera a $T(s)$.
$W_U(s)$	Matriz de funciones de peso que pondera a la señal de control.
$\Delta(s)$	Incertidumbre normalizada.
$\gamma(M)$	Número de condición de M .
$\mu(M)$	Valor singular estructurado de M .
$\rho(M)$	Radio espectral (máximo del valor absoluto de los autovalores) de la matriz M .
$\bar{\sigma}(M)$	Valor singular máximo de M , también conocido como norma espectral.
$\sigma_i(M)$	Valor singular i -ésimo de M .
$\underline{\sigma}(M)$	Valor singular mínimo de M .

Índice General

Lista de figuras	vii
1 Introducción	1
1.1 Generalidades	1
1.2 Perspectiva histórica	1
1.3 Motivación y objetivos	4
1.4 Estructura de la tesis	5
2 El Problema del Control Robusto	7
2.1 Introducción	7
2.2 Objetivos de control	9
2.3 Comportamiento nominal. Relaciones fundamentales	11
2.4 Descripción de las incertidumbres	14
2.4.1 Incertidumbres según su origen	15
2.4.2 Incertidumbres según su representación	16
2.4.3 Incertidumbres según su estructura	19

2.5	Representación de la incertidumbre en la frecuencia	20
2.6	Elección del modelo nominal	22
2.7	Normalización de las incertidumbres	23
2.8	Estabilidad robusta	25
2.8.1	Estabilidad robusta para incertidumbres no estructuradas	28
2.8.2	Estabilidad robusta para incertidumbres estructuradas	30
2.9	Comportamiento robusto	32
3	Síntesis de Controladores H_∞ Lineales	37
3.1	Introducción	37
3.2	Formulación general del problema de control	37
3.3	Cálculo de la norma H_∞ de un sistema	40
3.4	Algoritmo general para el cálculo del controlador H_∞	41
3.5	Transformaciones sobre la planta generalizada	46
3.6	Construcción de la planta generalizada	52
3.7	Moldeo de la función de lazo	55
3.7.1	Especificaciones en la función de lazo	56
3.7.2	Factorización coprima de un sistema	57
3.7.3	Robustificación del sistema con incertidumbres descritas mediante factorización coprima	59
3.7.4	Metodología de diseño	61
3.8	Moldeo de funciones en bucle cerrado	62

3.9	Sensibilidad mixta	65
3.10	Resumen del proceso de síntesis H_∞	69
4	Diseño de Funciones de Ponderación	71
4.1	Introducción	71
4.2	Diseño de las funciones de ponderación	73
4.2.1	Elección del modelo nominal y estimación de la incertidumbre	73
4.2.2	Cálculo de la matriz de ponderación $W_T(s)$	77
4.2.3	Cálculo de la matriz de ponderación $W_S(s)$	79
4.2.4	Cálculo de la matriz de ponderación $W_U(s)$	83
4.3	Metodología de diseño	85
4.4	Comentarios acerca del método de diseño	86
5	Aplicaciones del Problema de Sensibilidad Mixta	89
5.1	Introducción	89
5.2	Control H_∞ de una planta solar	91
5.2.1	Descripción del sistema	92
5.2.2	Modelo dinámico	93
5.2.3	Síntesis del controlador	94
5.2.4	Resultados de simulación	99
5.2.5	Resultados experimentales	103
5.3	Control H_∞ discreto de un sistema de seguimiento visual	105

5.3.1	Modelo del sistema de seguimiento visual	106
5.3.2	Síntesis del controlador	111
5.3.3	Resultados de simulación	116
5.3.4	Resultados experimentales	118
5.4	Control H_∞ de un motor de corriente continua	121
5.4.1	Descripción del sistema	121
5.4.2	Síntesis del controlador	123
5.4.3	Resultados experimentales	128
5.5	Control H_∞ de una planta piloto	128
5.5.1	Descripción del sistema	130
5.5.2	Síntesis del controlador	135
5.5.3	Resultados de simulación	146
5.5.4	Resultados experimentales	150
5.6	Conclusiones	153
6	Síntesis de Controladores H_∞ No Lineales	155
6.1	Introducción	155
6.2	Formulación general	156
6.3	Control H_∞ no lineal por realimentación del estado	158
6.4	Particularización para sistemas afines en la actuación	159
7	Aplicaciones del Control H_∞ No Lineal a la Robótica	163

7.1	Introducción	163
7.2	Enfoque de control H_∞ no lineal	165
7.3	Control H_∞ no lineal de robots manipuladores	166
7.4	Ley de control como un PID no lineal	171
7.5	Robustificación de la ley de control	174
7.6	Aplicación a un robot de 2 GDL	181
7.7	Aplicación a un robot industrial	189
	7.7.1 Descripción del robot	189
	7.7.2 Resultados de simulación	190
7.8	Conclusiones	195
8	Conclusiones	199
	8.1 Contribuciones y conclusiones de la Tesis	199
	8.2 Líneas futuras de investigación	201
A	Fundamentos Matemáticos	203
	A.1 Normas	203
	A.1.1 Definición de norma	203
	A.1.2 Normas de vectores	204
	A.1.3 Normas de matrices	205
	A.1.4 Normas de señales temporales	206
	A.1.5 Normas de sistemas	207

A.2	Transformaciones fraccionales lineales	208
B	Síntesis de Controladores H_∞ Discretos	211
B.1	Formulación del problema	211
B.2	Cálculo de la norma H_∞ de un sistema discreto	213
B.3	Algoritmo para el cálculo del controlador H_∞ discreto.	214
C	Demostración del Teorema de la Sección 7.3	219
	Bibliografía	224

Índice de Figuras

2.1	Familia de plantas debido a incertidumbres.	8
2.2	Formulación general del control robusto.	10
2.3	Sistema de control.	11
2.4	Especificaciones en un sistema de control.	15
2.5	Sistema de control con incertidumbres en la planta.	17
2.6	Modelos de incertidumbre más empleados.	18
2.7	Combinación de dos modelos de incertidumbre	19
2.8	Representación de incertidumbre en un diagrama polar.	21
2.9	Aproximación de la región de incertidumbre paramétrica por un círculo.	22
2.10	Opciones de diseño del modelo nominal.	23
2.11	Normalización de la incertidumbre.	24
2.12	Esquema de interconexión para la estabilidad robusta.	25
2.13	Esquema para el cálculo de la matriz $M(s)$	26
2.14	Escalado del bloque de incertidumbres.	30
2.15	Esquema de interconexión para el comportamiento robusto.	34

2.16	Comportamiento robusto como estabilidad robusta.	35
3.1	Formulación general del problema de control.	38
3.2	Estructura del controlador H_∞	45
3.3	Transformaciones sobre la planta ampliada.	49
3.4	Transformaciones sobre la planta ampliada utilizando TFL.	51
3.5	Ejemplo de cálculo de la planta ampliada.	53
3.6	Especificaciones sobre la función de lazo.	57
3.7	Sistema perturbado con factorización coprime por la izquierda.	59
3.8	Metodología de diseño del moldeo de lazo.	63
3.9	Control por realimentación con funciones de ponderación.	64
3.10	Estructura general para problemas de control H_∞	64
3.11	Configuración de sensibilidad mixta S/KS	66
3.12	Configuración de sensibilidad mixta S/T	67
3.13	Configuración de sensibilidad mixta $S/KS/T$	68
4.1	Ejemplo de estimación de incertidumbre multiplicativa.	75
4.2	Incertidumbre multiplicativa debido a un tiempo muerto $L = 1$ segundo.	76
4.3	Diseño de la matriz de ponderación $W_T(s)$	79
4.4	Diseño de $W_{S\ddot{u}}(s)$	83
4.5	Estimación de la frecuencia de oscilación de la respuesta temporal.	84
4.6	Diseño de $W_U(s)$ con $\omega_d = 1$ rad/s y $\rho = 3$	85

5.1	Esquema del campo de colectores distribuidos.	93
5.2	Respuesta en frecuencia del campo de colectores en distintos puntos de funcionamiento.	95
5.3	Modelo nominal y máxima incertidumbre para cada frecuencia.	97
5.4	Función $W_T(s)$ como cota superior de la máxima incertidumbre multiplicativa.	98
5.5	Radiación solar de un día típico.	99
5.6	Resultados de simulación con $\kappa = 0$	100
5.7	Funciones $W_T(s)$ and $W_S(s)$ con $\kappa = 0.65$	100
5.8	Resultados de simulación con $\kappa = 0.65$	101
5.9	Resultados de simulación con $\kappa = 1$	101
5.10	Resultados de simulación con $\kappa = 1.1$	102
5.11	Detalle comparativo de los controladores anteriores.	102
5.12	Resultados experimentales con $\kappa = 0.65$	104
5.13	Modelo detallado para cada grado de libertad cartesiano.	108
5.14	Modelo detallado del lazo de un grado de libertad multifrecuencia.	109
5.15	Modelo de sensibilidad mixta $S/KS/T$ discreto.	111
5.16	Función $W_T(s)$ como cota superior de la máxima incertidumbre multiplicativa.	114
5.17	Resultados de simulación con tres diseños diferentes de las funciones de ponderación.	116
5.18	Funciones de ponderación discretas diseñadas para el tercer experimento.	117
5.19	Comparación de respuestas temporales del tercer y cuarto controlador.	119

5.20	Resultados experimentales con los tres primeros diseños de las funciones de ponderación.	119
5.21	Resultados experimentales con el tercer y cuarto controlador.	120
5.22	Resultados experimentales con distintos tipos de controladores.	120
5.23	Esquema de conexiones.	122
5.24	Característica estática del servomecanismo para valores positivos de la entrada.	122
5.25	Estructura del sistema de control.	123
5.26	Descripción de la bifurcación del servomecanismo en cinco cuadros (rojo: cuenca de atracción de la banda de puntos de equilibrios; azul: cuenca de atracción del ciclo límite estable).	125
5.27	Respuesta frecuencial del sistema (tensión entrada/velocidad).	126
5.28	Función $W_T(s)$ como cota superior de la máxima incertidumbre multiplicativa.	127
5.29	Resultados experimentales con el <i>controlador 1</i>	129
5.30	Resultados experimentales con el <i>controlador 2</i>	129
5.31	Planta piloto.	131
5.32	Eficiencia del intercambiador de calor.	134
5.33	Característica estática de la válvula V_8	134
5.34	Espacio de trabajo de las acciones de control.	136
5.35	Resultados experimentales y simulados de la identificación.	137
5.36	Respuesta ante escalón del sistema linealizado.	138
5.37	Modelos del sistema en distintos puntos de trabajo.	142

5.38	Valores singulares de la incertidumbre multiplicativa a la salida.	143
5.39	Matriz $W_T(s)$ como cota superior de los valores singulares de la incertidumbre multiplicativa a la salida.	145
5.40	Resultados simulador con $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$	147
5.41	Resultados simulador con $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$	148
5.42	Resultados simulador con $\kappa_1 = \kappa_2 = 1.5$	148
5.43	Resultados simulador con $\kappa_1 = 3$ y $\kappa_2 = 1$	149
5.44	Matrices de estados del controlador propuesto.	150
5.45	Resultados experimentales en el punto nominal de trabajo.	151
5.46	Resultados experimentales en un punto de trabajo no nominal.	152
6.1	Formulación general del problema de control.	157
7.1	Esquema de control por la técnica de par calculado.	176
7.2	Robot de dos grados de libertad.	182
7.3	Trayectoria de referencia de las articulaciones.	184
7.4	Resultados con técnica <i>par calculado clásico</i>	184
7.5	Resultados con controlador <i>PD no lineal</i>	185
7.6	Resultados con controlador <i>PID no lineal</i>	186
7.7	Resultados con controlador <i>PID no lineal robustificado</i>	188
7.8	Comparación de los resultados con los distintos controladores.	189
7.9	Robot manipulador RM-10.	190
7.10	Resultados con técnica <i>par calculado clásico</i>	192

7.11 Resultados con controlador <i>PD no lineal</i>	193
7.12 Resultados con controlador <i>PID no lineal</i>	194
7.13 Resultados con controlador <i>PID no lineal robustificado</i>	196
7.14 Comparación de los resultados con los distintos controladores.	196
A.1 Transformaciones fraccionales lineales.	208
B.1 Formulación general del problema de control en discreto.	211

Capítulo 1

Introducción

1.1 Generalidades

En esta tesis se van a presentar distintas contribuciones relacionadas con el control H_∞ multivariable, aplicadas tanto a sistemas lineales como no lineales. Para ello, se ha creído conveniente enmarcar previamente las distintas aportaciones teóricas relacionadas con esta materia, exponiendo en la sección 1.2 una breve perspectiva histórica las mismas.

Posteriormente, en la sección 1.3 se explicarán las motivaciones de esta Tesis y se expondrán los objetivos perseguidos en ella. Finalmente, en la sección 1.4 se mostrará la estructura de la misma.

1.2 Perspectiva histórica

Durante la primera parte del siglo XX aparecieron trabajos relevantes relacionados con la teoría del control automático, dando lugar a los métodos del *Control Clásico* ([D'a66, Dor83, Fra86]). Estos métodos, que utilizan exhaustivamente el dominio de la frecuencia, se basan en una serie de procedimientos simples e intuitivos destinados a controlar sistemas de una entrada y una salida. A menudo el modelado de estos sistemas se reduce a ecuaciones diferenciales de segundo orden, lo que permite traducir

fácilmente las especificaciones impuestas en el dominio temporal al dominio frecuencial. Medidas como el margen de fase, margen de ganancia y picos en la frecuencia del módulo de las funciones de sensibilidad aportan índices tanto de *robustez* como de comportamiento. Durante esta época destacan nombres tan reconocidos como el de Bode, Nyquist y Nichols ([Bod45]). Sin embargo, a pesar de que todavía siguen siendo ampliamente utilizados en la actualidad, estos métodos se presentan inadecuados cuando se tratan con sistemas más complejos y con especificaciones más restrictivas.

A finales de los años cincuenta surge la descripción interna de los sistemas mediante variables de estado, lo que permite utilizar una formulación equivalente para tratar tanto a sistemas monovariantes como multivariantes ([Kwa72, Zad63]). La aparición de las computadoras anima al desarrollo de nuevos algoritmos de control, aportando éstas un medio físico donde poder implementarlos. Estos algoritmos están diseñados para conseguir objetivos de control específicos, lo que da lugar a la obtención de controladores de una forma más directa, y no a base de prueba y error como sucedía con los métodos clásicos. Se consigue plantear problemas de forma más elegante desde el punto de vista matemático, si bien se pierde intuición en el proceso de diseño. En esta época, conocida como *Control Moderno*, aparece el concepto de optimización. Se desarrolla una teoría dual para reguladores óptimos (*LQR*, siglas de *Linear Quadratic Regulator*) y observadores óptimos (*KBF*, siglas de *Kalman Bucy Filter*), dando lugar al controlador conocido como *LQG* (*Control Lineal Cuadrático y Gaussiano*) en referencia al tipo de sistema, clases de funciones a optimizar y distribución estadística del ruido de estado y de medición. En esta época destacan nombres como Kalman, Bucy, Pontryagin y Luenberger ([Kal61, Lue64, Pon62, Zad63]).

A pesar del gran avance teórico aportado durante este periodo, muchos de los controladores desarrollados no resuelven problemas reales debido a la escasa robustez obtenida frente a incertidumbres en el modelo ([Doy78]). Sólo se obtiene la robustez necesaria cuando el estado es accesible y las mediciones de éste son perfectas ([Saf77]).

Con el objetivo de recuperar la robustez perdida con el método *LQG*, Doyle y Stein ([Doy81]) desarrollan el controlador denominado como *Control Lineal Cuadrático Gaussiano con Recuperación de la Función de Transferencia de Lazo* (*LQG/LTR*) ([Ath86, Rub92]). Asimismo surge una generalización del método de diseño clásico para sistemas multivariantes basado en los valores singulares de la matriz de lazo ([Doy81, Saf81]). Este método es conocido con el nombre de *moldeo de la función de lazo*. En estas últimas publicaciones aparece el término *Control Robusto*.

A finales de los setenta Youla y colaboradores desarrollan métodos que dan un enfoque algebraico a los sistemas de control ([You76a, You76b]), proporcionando herramientas para ligar definitivamente el planteamiento en variables de estado con el de matrices de transferencia ([Net84]). Esto permite que se pueda obtener una parametrización de todos los controladores que estabilizan a una determinada planta

([You76a, You76b, Des80]).

En 1981, Zames ([Zam81]) propone un método para modificar de forma óptima los valores singulares de la función de transferencia de lazo. Se expuso cómo la norma H_∞ era apropiada para especificar tanto el nivel de incertidumbre de la planta como la ganancia de señales desde las entradas de las perturbaciones hasta las salidas de las señales a controlar. Así pues, esta norma era utilizada para resolver el problema de estabilidad robusta de un sistema con incertidumbre no estructurada o el problema de comportamiento nominal ante una familia de señales perturbadoras. Este método fue extendido por otros autores hasta conseguir una resolución del problema general en variables de estado en 1984 ([Saf84, Glo84, Doy84]). Estos métodos son conocidos como *Control óptimo H_∞* . En 1989, Doyle y colaboradores ([Doy89]) desarrollan un método de cómputo muy eficiente y un paralelismo con el control *LQG*, obteniendo incluso propiedades de dualidad entre los problemas de regulación y observación.

Durante esta época se establecen las relaciones entre el control H_∞ con otros enfoques del control. Algunos ejemplos los tenemos con el *Control sensible a riesgos* (traducción del inglés Risk Sensitive Control) ([Whi81, Whi90]), la *Teoría de juegos diferenciales* ([Bas91, Gre95]) o *Métodos de máxima entropía* ([Dym86, Mus90]).

Otra área a destacar es la reducción de orden tanto del modelo de la planta como de los controladores obtenidos. Un procedimiento de reducción muy popular es el basado en una realización interna balanceada de los sistemas ([Moo81]). En 1984, Glover ([Glo84]) relaciona este procedimiento con la minimización de la norma infinito de un operador bajo la restricción de estabilidad interna de lazo cerrado.

Los métodos anteriores proporcionan robustez al sistema ante incertidumbres no estructuradas, lo cual puede dar lugar a un controlador excesivamente conservador. A fin de adoptar hipótesis más realistas, en la década de los ochenta y noventa se desarrollan métodos para tratar con incertidumbres estructuradas. Uno de los más conocidos es el denominado *Síntesis- μ* , propuesto por Doyle ([Doy82]), en el que se manejan incertidumbres dinámicas estructuradas. Para el caso de incertidumbres paramétricas estructuradas cabe destacar los trabajos de Rotstein ([Rot91]) entre otros.

Por otra parte, a mediados de los ochenta comenzaron los primeros esfuerzos por extender el problema de control H_∞ a sistemas no lineales. En 1987, Ball y colaboradores formula el problema no lineal para sistemas en tiempo discreto y demuestra que se puede hallar soluciones razonablemente aceptables utilizando desarrollos en series de Volterra ([Bal87a, Bal87b]). Trabajos más recientes en esta línea se pueden encontrar en ([Foi95, Foi96, Foi98]).

La solución para sistemas continuos no lineales fue aportada por *van der Schaft* en una serie de trabajos a principios de la década de los noventa ([van91, van92, van00]).

Se basa en la ganancia L_2 de sistemas no lineales como extensión de la norma H_∞ para los sistemas lineales en el dominio frecuencial, ya que estas técnicas frecuenciales no son aplicables a sistemas no lineales.

En un planteamiento general, el problema da lugar a unas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales del tipo *Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs* (las cuales hacen las veces de las ecuaciones de *Riccati* para sistemas lineales), cuyo principal inconveniente es que a diferencia de lo que sucede con estas últimas, no existe un método general para poder resolverlas, debiendo hallar la solución de las mismas para cada caso particular. A pesar de la existencia de conocidos algoritmos (por ejemplo [Luk69]) que permiten aproximar la solución local de dichas ecuaciones por expresiones polinómicas cuadráticas, éstos no son aplicables cuando el tiempo aparece de forma explícita en las ecuaciones.

1.3 Motivación y objetivos

Como se ha podido comprobar en la exposición de la perspectiva histórica, ha sido grande el auge con el que ha irrumpido la teoría del control H_∞ lineal durante el final del pasado siglo.

Las numerosas publicaciones realizadas sobre esta materia durante la década de los noventa pueden ser divididas, a grandes rasgos, en dos clases: por una parte, artículos con excesiva carga teórica, difíciles de entender sin una buena base de conocimiento sobre esta materia; y por otra parte, aplicaciones prácticas en las que raramente se justifica el diseño de los controladores.

Basándose en esta apreciación, el principal objetivo de la parte de esta Tesis dedicada al control H_∞ lineal (la cual ha sido realizada dentro del marco del proyecto *Controladores Robustos de Procesos Industriales*, otorgado por la *CICYT* con referencia *TAP95-0370*) es aportar una metodología de diseño de forma que se automatice la síntesis del controlador. Las premisas utilizadas para el desarrollo de dicha metodología han sido las siguientes:

- La síntesis del controlador ha de realizarse de forma sencilla e intuitiva.
- Debe ser válida tanto para sistemas monovariantes como multivariantes.
- No debe ser necesario un conocimiento profundo de esta teoría de control.

Estos objetivos han sido alcanzados utilizando un *planteamiento de sensibilidad mixta*, suponiendo un modelo de incertidumbre multiplicativa no estructurada del sistema.

Por otra parte, la asignación del proyecto *Control Robusto de Robots Industriales* (otorgado por la *CICYT* con referencia *TAP98-0541*) indujo al desarrollo de controladores dentro del ámbito de la robótica. Dado el carácter no lineal de la dinámica de los brazos manipuladores, se inició el estudio del control H_∞ no lineal, materia en la cual se ha pretendido (y conseguido) avanzar en el diseño de controladores, mejorando tanto el comportamiento como la robustez del sistema.

1.4 Estructura de la tesis

Esta Tesis consta de ocho capítulos complementados con tres apéndices. Este primer capítulo es una introducción al resto de los capítulos donde se ha situado históricamente esta Tesis y donde se ha dado una perspectiva general de la motivación y los objetivos de la misma.

El *segundo capítulo* está destinado a introducir nociones de control robusto lineal para enmarcar el tipo de incertidumbres que se van a considerar y cómo hallar condiciones de estabilidad y comportamiento robusto.

En el *tercer capítulo* se expone el algoritmo utilizado para la síntesis de controladores. Asimismo se realiza una exposición de cómo imponer especificaciones al problema de control y se introduce el planteamiento del problema de sensibilidad mixta.

En el *cuarto capítulo* se presenta una metodología de diseño de las funciones de ponderación que intervienen en el problema de sensibilidad mixta, la cual permitirá automatizar la síntesis de un controlador. La validez de dicha metodología será corroborada en el *quinto capítulo* con aplicaciones reales de diversa índole, presentando resultados experimentales tanto de sistemas monovariantes como multivariantes.

El objetivo del *sexto capítulo* será el de realizar un breve resumen de teoría de control H_∞ no lineal, enfocándola como una extensión de la desarrollada para sistemas lineales. En este capítulo se establecerán las bases teóricas de las aportaciones realizadas en el capítulo siete.

En el *séptimo capítulo* se exponen las aportaciones realizadas del control H_∞ no lineal a la robótica. Se desarrollarán controladores que mejorarán sensiblemente tanto el comportamiento como la robustez del sistema. Asimismo, se presentarán resultados simulados para un robot de dos grados de libertad y para el robot industrial *RM-10*.

Finalmente, en el *capítulo ocho* se realizará una exposición de las conclusiones de esta Tesis y se propondrán futuras líneas de investigación como continuación del trabajo

realizado en la misma.

Capítulo 2

El Problema del Control Robusto

2.1 Introducción

El primer paso para diseñar un sistema de control para una planta real consiste en obtener información sobre ésta y diseñar un modelo matemático que la represente. Este modelo, que a partir de ahora se denominará *sistema nominal*, es utilizado para diseñar un controlador de tal forma que se verifiquen las especificaciones requeridas.

Sin embargo, el objetivo final de todo sistema de control es que sea capaz de obtener ciertas prestaciones cuando se controle al sistema real y no sólo al sistema nominal. Para tener en cuenta esto, no se puede obviar el hecho de que, por muy bueno que sea el diseño del modelo, siempre existirán diferencias entre éste y el sistema real. Estas diferencias entre el sistema real y el nominal son conocidas como errores de modelado, o simplemente como *incertidumbres*.

Existen muchas disciplinas de control que proponen metodologías de diseño de controladores basándose en el modelo obtenido. Sin embargo, para ser consecuentes con el objetivo final, se tendrían que introducir hipótesis más realistas en las que se tengan en cuenta las incertidumbres del sistema nominal (sobre todo cuando éstas son grandes), siendo éste el propósito del *control robusto*.

Los sistemas reales suelen ser suficientemente complejos como para no poder evitar cometer el más mínimo error de modelado. Esto implica que no se puede conocer totalmente la dinámica del sistema real y, por lo tanto, no se puede calcular la diferencia

exacta entre el sistema real y el modelo. Para resolver este inconveniente se realiza la hipótesis de que, si bien la incertidumbre no puede ser conocida con exactitud, su valor sí que puede ser acotado superiormente. Según esta hipótesis, existe una familia de posibles plantas al variar el valor de la incertidumbre, siendo el sistema real una de las plantas contenida en dicha familia. Por ende, la incertidumbre de un sistema dependerá del sistema nominal que se elija.

A partir de ahora se adoptará la siguiente notación para representar a los distintos sistemas considerados:

- $G(s)$: sistema nominal
- $G_r(s)$: sistema real
- F_G : familia de plantas para los distintos valores de la incertidumbre.
- $G^*(s)$: planta genérica perteneciente a la familia de plantas.

En la figura 2.1 se muestra un diagrama polar en el que se representa una familia de plantas F_G formando una banda correspondiente a distintos sistemas monovariables, dentro de la cual se ha incluido el modelo nominal $G(j\omega)$ y el sistema real $G_r(j\omega)$.

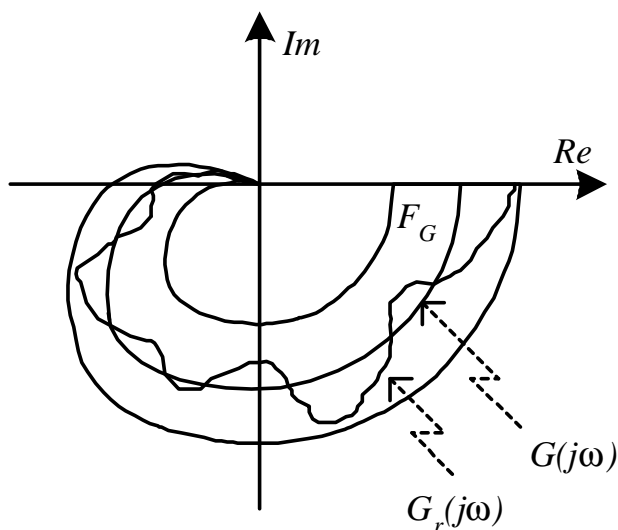


Figura 2.1: Familia de plantas debido a incertidumbres.

A menudo se tiende a utilizar modelos simplificados que sólo muestren las características esenciales del sistema. También es usual utilizar modelos *lineales e invariantes con el tiempo*, ya que la teoría para este tipo de sistemas está muy desarrollada. Por

tanto, para estos casos, la finalidad del *control robusto* será el diseño de un controlador fijo, lineal e invariante en el tiempo que obtenga buenas prestaciones, desde el punto de vista del control, no sólo con el sistema nominal $G(s)$, sino también para cualquier sistema $G^*(s)$ perteneciente a la familia de plantas F_G , y en concreto, para el sistema real $G_r(s)$.

A lo largo de este capítulo se realizará un repaso general a la teoría básica del control robusto. En la siguiente sección se expondrá una clasificación de los objetivos de control típica de la teoría del control robusto y en las secciones sucesivas se presentarán las condiciones necesarias para cumplir cada uno de estos subobjetivos. Se comenzará con el problema del comportamiento nominal (sección 2.3), definiendo las relaciones fundamentales necesarias para especificar condiciones de comportamiento. A continuación se empezará a abordar el problema de la robustez realizando una exposición de las distintas clasificaciones de las incertidumbres, forma de representarlas en la frecuencia (secciones 2.4 y 2.5 respectivamente) y presentando la problemática de la elección del modelo nominal (sección 2.6). En la sección 2.7 se expondrá cómo normalizar la incertidumbre, abordando posteriormente el problema de estabilidad robusta (sección 2.8). Finalmente, en la sección 2.9 se planteará el problema del comportamiento robusto, el cual será resuelto con una formulación similar a la utilizada en el caso de la estabilidad robusta.

2.2 Objetivos de control

El principal objetivo que persigue el diseño de un sistema de control es que el controlador funcione bien cuando se implante en el proceso real. Sin embargo, debido a que se utiliza un modelo nominal para el diseño del controlador y a la existencia de incertidumbres en dicho modelo, este objetivo de control se puede descomponer en una serie de subobjetivos.

Para realizar este estudio se va a utilizar la formulación general del problema de control robusto representado en el esquema de la figura 2.2, donde $P(s)$ representa a una *planta generalizada* (también conocida como *planta aumentada*) que depende exclusivamente del sistema nominal y de algunas funciones de ponderación (ver sección 3.6), $K(s)$ es el controlador, $\Delta(s)$ representa a la incertidumbre (normalizada) del sistema (la cual será descrita a lo largo de este capítulo), ω representa al conjunto de señales perturbadoras del sistema (referencias, perturbaciones, ruidos, ...), z es el conjunto de señales objetivos a controlar, v es el vector de señales medibles que alimentará al controlador y u será el vector de señales de control que generará un controlador a partir de las señales v . Basándose en esta configuración, los subobjetivos de control que se plantean son los siguientes:

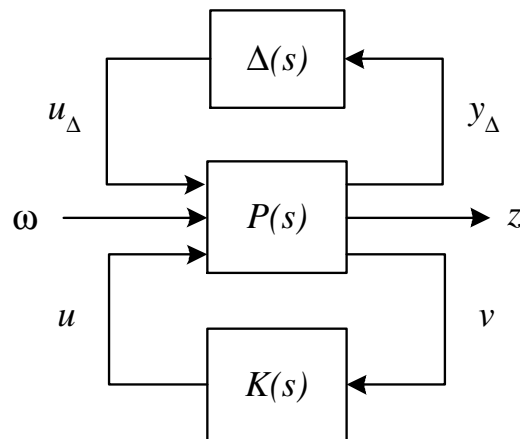


Figura 2.2: Formulación general del control robusto.

- **Estabilidad Nominal (EN)**

Este objetivo consiste en conseguir que el controlador $K(s)$ diseñado estabilice al sistema nominal $G(s)$ elegido para representar al sistema real. La formulación del problema de EN se obtendrá eliminando ω y $\Delta(s)$ en el esquema de la figura 2.2.

- **Comportamiento Nominal (CN)**

Una vez conseguida la estabilidad nominal, se debe exigir que el sistema nominal $G(s)$ se comporte adecuadamente, según algún índice de funcionamiento o función de coste. Este problema es conocido como el de *comportamiento nominal*. Para obtener la formulación del CN habrá que anular $\Delta(s)$ en la formulación general del problema del control robusto.

- **Estabilidad Robusta (ER)**

Con el término robusto se hace referencia a la familia de sistemas F_G (en la que está incluida la planta real $G_r(s)$) que se obtiene de considerar que el sistema nominal no es un modelo perfecto. Por tanto, se consigue la *estabilidad robusta* si el controlador diseñado es capaz de estabilizar no sólo al sistema nominal $G(s)$ sino también a cualquier planta $G^*(s)$ perteneciente a la familia de sistemas F_G . Esta formulación se consigue anulando las señales ω en el esquema de la figura 2.2.

- **Comportamiento Robusto (CR)**

Este es el objetivo final del diseño de un controlador robusto y consiste en que éste sea capaz de hacer que cualquier sistema $G^*(s)$ perteneciente a la familia de plantas F_G (y en concreto $G_r(s)$) se comporte adecuadamente según algún índice de desempeño o función de coste.

De la definición de los subobjetivos se deduce que para conseguir CR es necesario obtener previamente CN (y por tanto EN) junto con ER. Sin embargo, el recíproco no es cierto, esto es, conseguir CN y ER no implica obtener CR (al menos para sistemas multivariables).

2.3 Comportamiento nominal. Relaciones fundamentales

Sea el diagrama de bloques general de un sistema de control de la figura 2.3 ([Rub96b]), donde $G(s)$ representa al modelo nominal, $K(s)$ es el controlador de la planta, d_i y d_o representan a las perturbaciones sobre el sistema en la entrada y en la salida de éste respectivamente, r es la referencia o consigna, y es la salida del sistema y n es el ruido ligado a las medidas de los sensores.

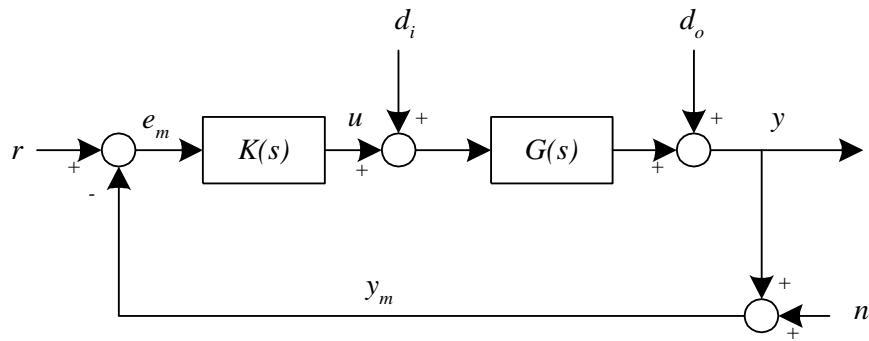


Figura 2.3: Sistema de control.

Para el sistema de la figura anterior se define una serie de matrices de funciones de transferencia que son de especial interés, pues caracterizan al comportamiento del sistema en bucle cerrado.

En primer lugar se definen la *función de lazo*¹ a la salida ($L_o(s)$) y a la entrada ($L_i(s)$) como:

$$\begin{aligned} L_o(s) &= G(s)K(s) \\ L_i(s) &= K(s)G(s) \end{aligned}$$

¹En esta Tesis se utilizará la terminología *función de lazo* como sinónimo de *función de transferencia en bucle abierto*, a pesar de que el término *lazo* pueda considerarse equivalente a *bucle*, independientemente de si éste está o no cerrado

Estas son funciones de bucle abierto y se obtienen de relacionar la salida del lazo con su entrada dependiendo de si el bucle de realimentación se rompe a la salida o a la entrada de la planta respectivamente.

A partir de las funciones de lazo se pueden definir las siguientes funciones de bucle cerrado, conocidas como *funciones de sensibilidad*:

- *Función de sensibilidad a la salida* ($S_o(s)$) y *a la entrada* ($S_i(s)$):

$$\begin{aligned} S_o(s) &= (I + L_o(s))^{-1} \\ S_i(s) &= (I + L_i(s))^{-1} \end{aligned}$$

- *Función de sensibilidad complementaria a la salida* ($T_o(s)$) y *a la entrada* ($T_i(s)$):

$$\begin{aligned} T_o(s) &= I - S_o(s) = L_o(s)(I + L_o(s))^{-1} \\ T_i(s) &= I - S_i(s) = L_i(s)(I + L_i(s))^{-1} \end{aligned}$$

Por la propia definición de $S_o(s)$ y $T_o(s)$ ($S_i(s)$ y $T_i(s)$ respectivamente) se deduce que:

$$S_o(s) + T_o(s) = I \quad (2.1)$$

$$S_i(s) + T_i(s) = I \quad (2.2)$$

He aquí el porqué de que los nombres de $T_o(s)$ y $T_i(s)$ incluyan el adjetivo de *complementaria*.

Suponiendo que el sistema nominal con el controlador $K(s)$ es internamente estable (véase, por ejemplo, [Zho96]), el sistema en bucle cerrado cumple las siguientes relaciones:

$$y = T_o(r - n) + S_o G d_i + S_o d_o \quad (2.3)$$

$$e = S_o(r - d_o) + T_o n - S_o G d_i \quad (2.4)$$

$$u = K S_o(r - n - d_o) - T_i d_i \quad (2.5)$$

donde $e = r - y$ es el error de seguimiento a referencias. Nótese que este error es distinto al error medido e_m , diferencia entre la señal de referencia r y la salida medida y_m . Por otra parte, véase que la función de transferencia que relaciona a la señal de control u con la referencia r , el ruido n y las perturbaciones a la salida d_o es $K(s)S_o(s)$. Por este motivo esta función de transferencia es conocida con el nombre de *función de sensibilidad del control*.

De las ecuaciones anteriores se puede deducir cuales son los requerimientos de un sistema de control para que el sistema en bucle cerrado se comporte adecuadamente. Tomando como medida de la ganancia de un sistema su máximo valor singular (ver apéndice A), las especificaciones en un sistema de control se pueden expresar de la siguiente manera:

- *Rechazo de perturbaciones:* se pretende que la salida y se mantenga en un valor constante cuando se introducen perturbaciones en el sistema. Por lo tanto, si se desea que y se vea poco afectada por d_o y d_i habrá que diseñar un controlador que haga que la ganancia de $S_o(s)$ y de $S_o(s)G(s)$ sea pequeña (ver ecuación (2.3)), esto es:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(S_o(j\omega)) &\ll 1 \\ \bar{\sigma}(S_o(j\omega)G(j\omega)) &\ll 1\end{aligned}$$

- *Seguimiento de referencias:* se pretende que la salida y sea lo más parecida posible a la referencia r , por lo que se desea que el error de seguimiento e se haga lo más pequeño posible frente a cambios de referencias. Para conseguir esto, aplicando (2.4) se requiere que la ganancia de S_o sea pequeña, o lo que es lo mismo, teniendo en cuenta la ecuación (2.1), que la ganancia de T_o sea lo más parecida posible a la unidad, esto es:

$$\bar{\sigma}(T_o(j\omega)) \approx \underline{\sigma}(T_o(j\omega)) \approx 1$$

- *Atenuación de ruidos:* se pretende que los ruidos n , inherentes en cualquier medida, se reflejen lo menos posible en la salida y del sistema. Para ello, según la ecuación (2.3) se debe conseguir que la ganancia de la función T_o sea lo más pequeña posible, esto es:

$$\bar{\sigma}(T_o(j\omega)) \ll 1$$

- *Reducción de la energía de control:* para evitar que el sistema de control consuma una energía excesiva, se desea que el controlador genere una actuación no demasiado enérgica, lo cual se traduce en que se desea que la señal de control sea lo más pequeña posible. Esto se consigue, según (2.5), haciendo que la ganancia de las funciones KS_o y T_i sean lo más pequeñas posibles, esto es:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(K(j\omega)S_o(j\omega)) &\ll 1 \\ \bar{\sigma}(T_i(j\omega)) &\ll 1\end{aligned}$$

De lo recién expuesto se observa que existen objetivos de control que son contradictorios. Por ejemplo, teniendo en cuenta la relación (2.1), no se pueden hacer pequeñas simultáneamente S_o (deseable para problema de seguimiento y rechazo de perturbaciones) y T_o (deseable para problema de atenuación de ruidos). Por lo tanto, en cada caso se debe adoptar una solución de compromiso entre los distintos requisitos de control.

Afortunadamente estos requisitos de control suelen estar localizados en distintas zonas en la frecuencia. En general, los ruidos suelen ser de alta frecuencia mientras que las perturbaciones al sistema y los cambio de consigna suelen tener unas componentes frecuenciales mucho más bajas. Esto implica que se puede plantear cada requisito de control en una zona de frecuencia diferente, con lo cual se puede dar una solución al problema.

Habitualmente se suele diferenciar tres zonas de frecuencias, dentro de las cuales se plantean distintos objetivos de control:

- *Zona de baja frecuencia:* En esta zona se plantean los problemas de seguimiento de referencias y rechazo de perturbaciones.
- *Zona de frecuencia intermedia:* En esta zona se marcarán la estabilidad (márgenes de estabilidad) y la velocidad de respuesta (ancho de banda).
- *Zona de alta frecuencia:* Se deberá diseñar para rechazar el efecto de los ruidos de los sensores y reducir la energía utilizada en controlar al sistema. Además, en este rango de frecuencias se impondrá la cota de estabilidad robusta, como se expondrá en secciones posteriores.

En la figura 2.4 se muestran estas especificaciones en una gráfica en la que se representa la forma requerida que deben adoptar las funciones de sensibilidad para cumplir estos requerimientos.

2.4 Descripción de las incertidumbres

Como se expuso anteriormente, el objetivo del control robusto consiste en diseñar un sistema de control basándose en el conocimiento de las incertidumbres. Para ello es necesario saber qué factores influyen en la existencia de dichas incertidumbres. A continuación se presentan distintas clasificaciones de las incertidumbres según diversos criterios.

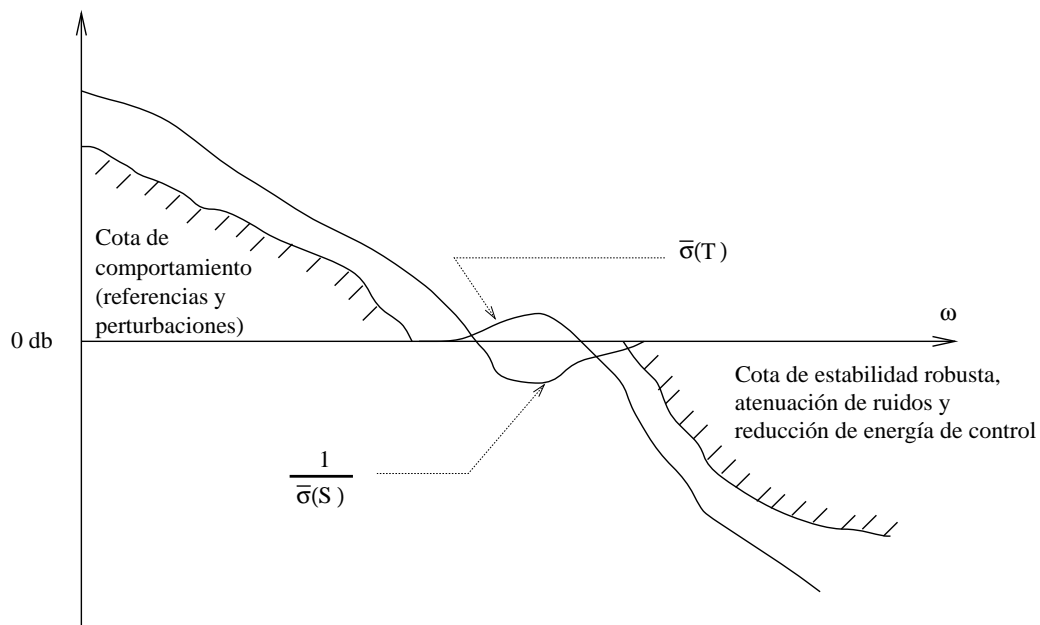


Figura 2.4: Especificaciones en un sistema de control.

2.4.1 Incertidumbres según su origen

El origen de las incertidumbres puede ser de lo más variado. En este apartado se va a dividir la incertidumbre en dos grupos, dependiendo de si interviene en ella algún elemento dinámico o depende sólo del valor de algún parámetro.

1. Incertidumbres estructurales

En este caso la estructura dinámica de la familia de plantas cambia respecto a la estructura dinámica del sistema nominal elegido. Algunos ejemplos de este tipo de incertidumbres podrían ser:

- *Modificación del sistema al cambiar de punto de trabajo:* En este caso podría suceder que, por ejemplo, el orden de un sistema linealizado en un punto de operación varíe al cambiar a otro punto.
- *Dinámica no lineal:* Sucede en sistemas en los que se separa la parte lineal de la parte no lineal, considerando esta última como incertidumbre.
- *Dinámica despreciada:* Un ejemplo típico es la no inclusión de las dinámicas de alta frecuencia de actuadores y sensores en el modelo nominal por no considerarlas suficientemente importantes o ser desconocidas.
- *Dinámica no modelada:* Este es el caso en el que no se incluye en el sistema nominal alguna dinámica conocida para no aumentar su complejidad, a pesar de que ésta influya significativamente en el comportamiento del sistema. La

no consideración del retardo de un sistema en el diseño del sistema nominal puede ser un ejemplo representativo para este caso.

- *Reducción del orden del controlador:* Aunque no constituya en sí una incertidumbre en el modelado de la planta, es interesante incluir aquí este punto por ser una técnica muy empleada. En este caso, el origen de la incertidumbre se debe a que el controlador calculado para soportar cierta incertidumbre ha sido reducido de orden por considerar que éste era muy alto. Así, el controlador reducido introduce una incertidumbre adicional debido al cambio de la estructura a considerar en el sistema en bucle cerrado

2. Incertidumbres paramétricas

En este caso se considera que el sistema nominal posee parámetros (polo, cero, ganancia, ...) que pueden variar entre un rango de valores determinado, si bien la familia de plantas mantiene la misma estructura. Algunos ejemplos típicos podrían ser:

- Parámetros no identificados con precisión.
- Cambios del valor de parámetros por cambio de punto de trabajo.
- Modificación del valor de parámetros por deterioro del sistema.

2.4.2 Incertidumbres según su representación

A pesar de que la incertidumbre de un sistema es siempre la misma, ésta puede ser representada utilizando distintas expresiones matemáticas.

Sea el diagrama de bloques general de un sistema de control de una planta con incertidumbres de la figura 2.5 (similar al de la figura 2.3 pero incluyendo el bloque $E(s)$ representando los errores de modelado existentes en la planta). Las señales y_E y u_E interconectan al bloque de incertidumbre con el sistema nominal y representan los vectores de entrada y salida respectivamente al bloque de incertidumbre de forma que

$$u_E = E(s)y_E$$

Los modelos de incertidumbres más empleados son los siguientes:

1. Incertidumbre aditiva:

$$\begin{aligned} G^*(s) &= G(s) + E_a(s) \\ E_a(s) &= G^*(s) - G(s) \end{aligned}$$

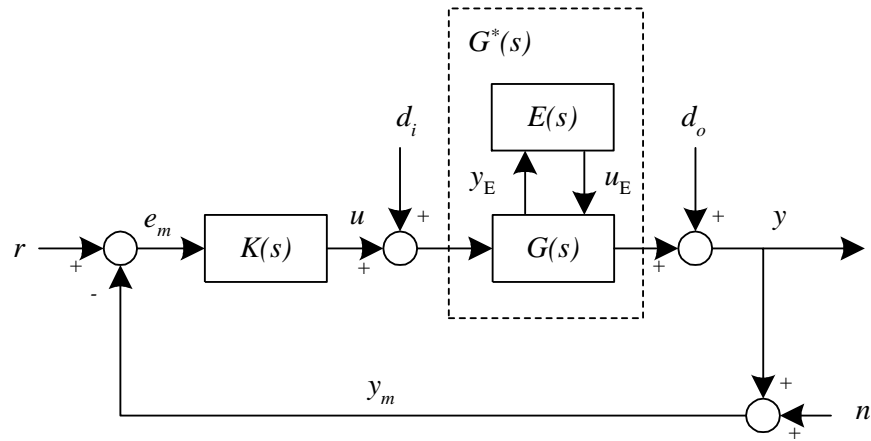


Figura 2.5: Sistema de control con incertidumbres en la planta.

2. Incertidumbre multiplicativa en la entrada:

$$\begin{aligned} G^*(s) &= G(s)(I + E_{me}(s)) \\ E_{me}(s) &= G(s)^{-1}(G^*(s) - G(s)) \end{aligned}$$

3. Incertidumbre multiplicativa en la salida:

$$\begin{aligned} G^*(s) &= (I + E_{ms}(s))G(s) \\ E_{ms}(s) &= (G^*(s) - G(s))G(s)^{-1} \end{aligned}$$

4. Incertidumbre aditiva inversa:

$$\begin{aligned} G^*(s) &= (I - G(s)E_{ai}(s))^{-1}G(s) \\ E_{ai}(s) &= G(s)^{-1}(G(s)G^*(s)^{-1} - I) \end{aligned}$$

5. Incertidumbre multiplicativa inversa en la entrada:

$$\begin{aligned} G^*(s) &= G(s)(I - E_{mie}(s))^{-1} \\ E_{mie}(s) &= I - G^*(s)^{-1}G(s) \end{aligned}$$

6. Incertidumbre multiplicativa inversa en la salida:

$$\begin{aligned} G^*(s) &= (I - E_{mis}(s))^{-1}G(s) \\ E_{mis}(s) &= I - G(s)G^*(s)^{-1} \end{aligned}$$

En la figura 2.6 se muestra un esquema de cada una de estas configuraciones. Existe una relación entre las distintas expresiones de la incertidumbre de forma que a partir

de cualquiera de ellas pueden encontrarse expresiones para el resto de manera que la familia de planta F_G sea la misma. Dicha relación es la siguiente:

$$E_a(s) = G(s)E_{me}(s) = E_{ms}G(s) = [(I + G(s)E_{ai}(s))^{-1} - I] G(s) =$$

$$G(s) [(I + E_{mie}(s))^{-1} - I] = [(I + E_{mis}(s))^{-1} - I] G(s)$$

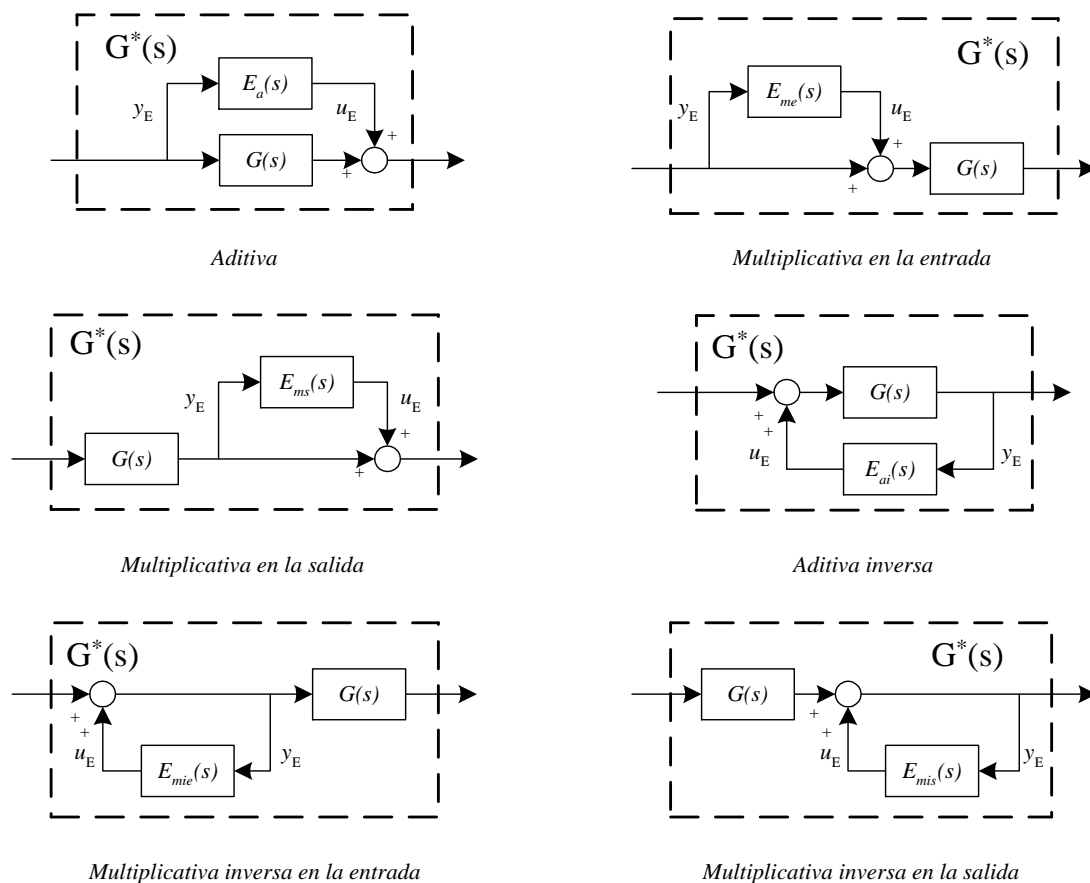


Figura 2.6: Modelos de incertidumbre más empleados.

De los modelos anteriores, el más utilizado es el de *incertidumbre multiplicativa* debido a que expresa errores relativos en el modelado. El nivel de incertidumbre suele aumentar con la frecuencia, debido principalmente a dinámicas no modeladas en alta frecuencia (actuadores, sensores, modelos de ruidos de la planta). Por lo tanto, las incertidumbres multiplicativas suelen ser pequeñas en baja frecuencia (rango en el cual la planta suele ser bien conocida) y grandes en alta frecuencia (rango en el cual el modelo es más impreciso).

Por otra parte, en los modelos anteriores se ha distinguido entre incertidumbres a la entrada y a la salida de la planta, dependiendo de en qué punto del lazo se encuentre el

bloque de incertidumbres. Esta distinción tiene sentido sólo en sistemas multivariables, siendo equivalentes para sistemas monovariables.

Por último, comentar que es posible combinar estos modelos en un mismo sistema, es decir, se podría modelar, por ejemplo, un sistema con dos fuentes de incertidumbres: una multiplicativa a la entrada y otra multiplicativa a la salida (ver figura 2.7).

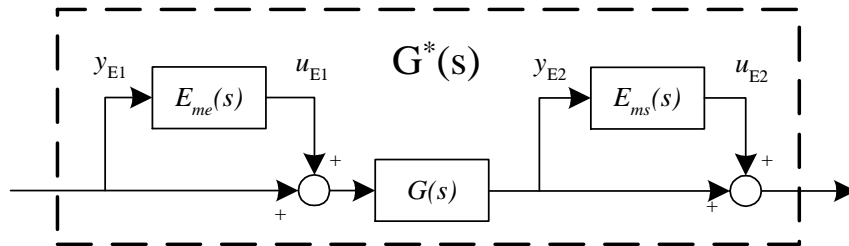


Figura 2.7: Combinación de dos modelos de incertidumbre

2.4.3 Incertidumbres según su estructura

En general, el bloque de incertidumbre $E(s)$ (ver figura 2.5) será una matriz de funciones de transferencia, donde como caso particular se admite que algunos elementos no posean dinámica, como sucede cuando el origen de incertidumbre es paramétrico. Dependiendo de la estructura de ésta se puede hacer una distinción entre incertidumbre estructurada o no estructurada.

1. Incetidumbre no estructurada

En este caso se considera que el bloque de incertidumbre $E(s)$ es una matriz de funciones de transferencia completa, no pudiéndose establecer ninguna estructura dentro de ella. Lo que se puede conocer de $E(s)$ en este tipo de incertidumbre es una cota de su magnitud, que generalmente dependerá de la frecuencia, expresada mediante algún índice o norma.

Este tipo de incertidumbre se produce cuando se supone una sola fuente de incertidumbre o bien cuando, aun suponiendo distintas fuentes, se admite un acoplamiento total entre ellas, considerando así el peor caso posible.

2. Incetidumbre estructurada

Cuando se puede determinar claramente el origen de cada una de las incertidumbres, la matriz $E(s)$ puede ser escrita de forma que ésta posea algún tipo de estructura. Se supone entonces que no existirá acoplamiento entre los distintos focos de incertidumbre.

Las estructuras más frecuentes son las diagonales, donde la matriz de incertidumbres se puede escribir como:

$$E(s) = \text{diag}(E_1(s), \dots, E_q(s))$$

donde $E_i(s)$ se corresponde con cada uno de los bloques que componen la matriz de incertidumbres. Estos bloques son a su vez matrices de funciones de transferencia, las cuales pueden poseer algún tipo de estructura o ser completas. Como caso particular, en caso de incertidumbre paramétrica las matrices $E_i(s)$ se podrían escribir como un parámetro δ_i multiplicado por la matriz identidad con la dimensión adecuada, esto es:

$$E(s) = \text{diag}(\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_q I_{r_q})$$

En la figura 2.7 se presenta un ejemplo de incertidumbre estructurada a bloques. Teniendo en cuenta que:

$$u_E = E(s)y_E$$

y tomando:

$$u_E = \begin{bmatrix} u_{E1} \\ u_{E2} \end{bmatrix} \quad y_E = \begin{bmatrix} y_{E1} \\ y_{E2} \end{bmatrix}$$

la matriz de incertidumbre $E(s)$ tendrá la siguiente expresión:

$$E(s) = \begin{pmatrix} E_{me}(s) & 0 \\ 0 & E_{ms}(s) \end{pmatrix}$$

siendo $E_{me}(s)$ y $E_{ms}(s)$ matrices de funciones de transferencia, cuyas dimensiones dependerán del número de entradas y salidas del mismo.

2.5 Representación de la incertidumbre en la frecuencia

Para representar la incertidumbre de un sistema se ha utilizado una familia de plantas posibles F_G , la cual origina una banda en un diagrama polar (ver figura 2.1) dentro de la que está incluido el sistema real $G_r(s)$. Sin embargo, como este tipo de gráfica está parametrizada en la frecuencia, se está enmascarando que para cada frecuencia ω existe una región determinada dentro de la cual puede estar situada la planta real. Este hecho está reflejado en la figura 2.8, el la que se expone un ejemplo de

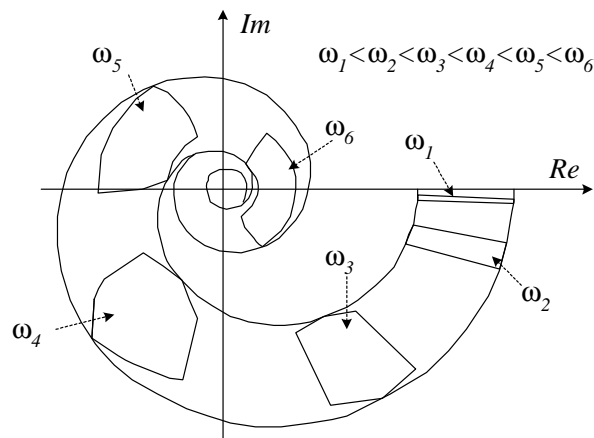


Figura 2.8: Representación de incertidumbre en un diagrama polar.

incertidumbre de un sistema monovariante cuando ésta es de origen paramétrico para varias frecuencias.

A menudo se suele evitar describir la incertidumbre en forma paramétrica². Algunas razones para ello son las siguientes:

- Como se puede observar en la figura 2.8, las regiones de incertidumbre pueden tener formas más o menos complejas dependiendo del tipo de incertidumbre. En caso de tener *incertidumbre paramétrica*, si el número de parámetros que pueden variar es alto, la región puede llegar a tener una forma muy compleja (en el ejemplo de la figura 2.8 sólo varían tres parámetros). Esto induce a pensar que determinar la forma exacta de la región de incertidumbre para cada frecuencia puede suponer un alto esfuerzo de cálculo.
- Un modelo paramétrico de la incertidumbre puede resultar a veces engañoso en el sentido de que proporciona una descripción muy detallada y exacta, aunque en muchas ocasiones las hipótesis sobre el parámetro en el sistema real pueden que no sean tan precisas.
- Se requiere que el modelo nominal tenga la estructura exacta que describe al sistema real, con lo que no se podría manejar con incertidumbres de dinámicas no modeladas.

Para evitar estas contrariedades se suele sustituir la región de incertidumbre paramétrica por una región en forma de disco centrado en el valor del modelo nominal para

²A este respecto, es conveniente señalar que se existen *otros enfoques del control robusto*, como por ejemplo, las técnicas denominadas como *QFT* (del inglés *Quantitative Feedback Theory*) o técnicas desarrolladas a partir del *teorema de Kharitonov*, que permiten manejar las incertidumbres paramétricas de forma cómoda. Por supuesto, cada método tiene sus ventajas y sus inconvenientes.

cada frecuencia y que englobe a la región anterior (ver figura 2.9). La gran ventaja de esta sustitución es que es muy fácil describir un círculo (sólo es necesario conocer el centro y el radio). La desventaja es que se está ampliando la región de incertidumbre, ya que se consideran plantas que están en el interior del círculo que no pertenecían al interior de la región original.

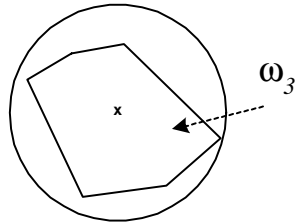


Figura 2.9: Aproximación de la región de incertidumbre paramétrica por un círculo.

Describir la región de incertidumbre con un círculo para cada frecuencia es equivalente a suponer que se tiene incertidumbre no estructurada, lo que implica que en general los componentes de la matriz de incertidumbre serán números complejos que varíen con la frecuencia. El radio del círculo vendrá determinado por una función que depende de la ganancia de las matrices que normalizan a la incertidumbre (ver sección 2.7). Esta será la forma en la que se describirá la incertidumbre en los capítulos sucesivos.

2.6 Elección del modelo nominal

A lo largo de este capítulo se ha introducido el control robusto partiendo de un modelo nominal y una incertidumbre asociada. Esta incertidumbre es la que diferencia al sistema nominal del sistema real y en función de ésta se plantea diseñar un controlador de tal forma que el sistema controlado sea robusto.

Teniendo en cuenta que, en general, a mayor incertidumbre más conservador será el controlador y que la incertidumbre del modelo nominal depende de la elección del mismo, es razonable hacer algunos comentarios sobre el diseño del modelo nominal.

Partiendo de la base de que para representar las incertidumbres se utilizarán círculos cuyos radios varían con la frecuencia, en líneas generales existen tres opciones para la elección del modelo nominal:

1. *Elección de un modelo de bajo orden y sin retardos.* Con esta elección se obtendrá un sistema nominal simple, lo cual beneficia el proceso de cálculo del controlador.

Como inconveniente se tiene que la región de incertidumbre es muy extensa. En este caso es muy probable que se esté incluyendo en la familia de plantas demasiados sistemas que no van a ser posibles desde el punto de vista físico, incluyendo al propio sistema nominal.

2. *Diseño del modelo nominal de forma que se minimice la región de incertidumbre.* Esta elección es la menos conservadora, quedando un modelo nominal complejo que puede que no sea racional, y donde una aproximación racional dará lugar a un sistema nominal de orden muy alto. En este caso, el esfuerzo de diseño del sistema nominal puede ser demasiado alto.
3. *Elección de los parámetros del modelo como media de los parámetros de las distintas posibles plantas.* Esta opción es una solución intermedia en la cual la región de incertidumbre no es excesivamente alta y el diseño del modelo nominal no requiere gran esfuerzo.

En la figura 2.10 se muestran numeradas cada una de estas opciones para una frecuencia determinada, marcando el centro (valor del modelo nominal para esa frecuencia) en cada una de ellas. Puede observarse que en la opción (1) el centro queda fuera de la zona de incertidumbre paramétrica, lo que indica que el sistema nominal no puede ser el sistema real a esa frecuencia.

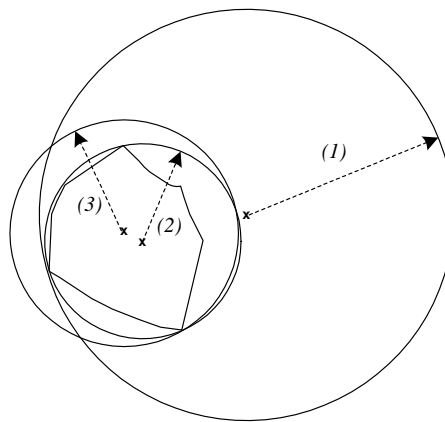


Figura 2.10: Opciones de diseño del modelo nominal.

2.7 Normalización de las incertidumbres

Como ya se expuso en la introducción de este capítulo, si bien no es posible conocer con exactitud la incertidumbre respecto a un modelo nominal (debido a que no se puede conseguir un modelo que represente a la dinámica de un sistema real de forma exacta),

se puede realizar la hipótesis de que el tamaño de dicha incertidumbre puede ser acotada superiormente.

Dado que los errores de modelado pueden ser representados por una matriz de funciones de transferencia $E(s)$ (ver figura 2.5), al sustituir la variable compleja s por $j\omega$ dicha matriz será una matriz de números complejos para cada frecuencia ω . Como consecuencia de que la incertidumbre puede ser acotada superiormente, se puede hallar un valor dependiente de la frecuencia que sea mayor que la norma utilizada (ver apéndice A) para acotar superiormente a la matriz.

La idea de la normalización se basa en descomponer la matriz de incertidumbres en tres módulos, dos que representen la magnitud de la incertidumbre ($W_1(s)$ y $W_2(s)$) y el tercero ($\Delta(s)$) que represente la dirección de la misma (ver figura 2.11). Según esto, la matriz de incertidumbres podrá ser escrita de la siguiente manera:

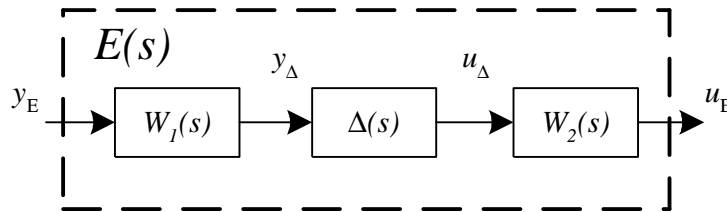


Figura 2.11: Normalización de la incertidumbre.

$$E(s) = W_2(s)\Delta(s)W_1(s) \quad (2.6)$$

de forma que

$$\|\Delta(s)\|_\infty \equiv \sup_{\omega} \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq 1 \quad (2.7)$$

Las matrices $W_1(s)$ y $W_2(s)$ de la ecuación (2.6) se eligen de forma que sean estables y de fase mínima. La restricción de estabilidad se debe a que la incertidumbre debe estar acotada. La condición de fase mínima es importante puesto que dichas matrices serán incluidas en la planta generalizada (ver figura 2.13), la cual será utilizada en el siguiente capítulo para el cálculo del controlador.

Por otra parte, es interesante notar que si la matriz de incertidumbres $E(s)$ posee una estructura diagonal (o diagonal a bloques), la matriz de incertidumbre normalizada $\Delta(s)$ podrá ser escrita de la forma

$$\Delta(s) = \text{diag}(\Delta_1(s), \dots, \Delta_q(s))$$

de manera que

$$\|\Delta_i(s)\|_\infty \equiv \sup_\omega \bar{\sigma}(\Delta_i(j\omega)) \leq 1$$

simplemente tomando las matrices $W_1(s)$ y $W_2(s)$ diagonales (o diagonales a bloques).

2.8 Estabilidad robusta

Como se expuso anteriormente, el problema de estabilidad robusta consiste en el diseño de un controlador de forma que el sistema en bucle cerrado permanezca estable para cualquier planta $G^*(s)$ perteneciente a la familia de sistemas F_G obtenida a partir del modelo nominal $G(s)$ junto con la incertidumbre asociada $E(s)$. Hay que hacer notar que al hablar de estabilidad robusta no se tienen en cuenta señales externas que perturben al sistema (cambios de referencias, perturbaciones, ruidos, ...), constituyendo la inclusión de éstos el problema de comportamiento robusto.

Para el estudio de la estabilidad robusta se va a utilizar el esquema de interconexión de la figura 2.12, donde $\Delta(s)$ representa el bloque de incertidumbre normalizada y $M(s)$ es una matriz de funciones de transferencia obtenida de relacionar el vector de salida hacia la incertidumbre normalizada (y_Δ) frente al de la entrada desde la misma (u_Δ).

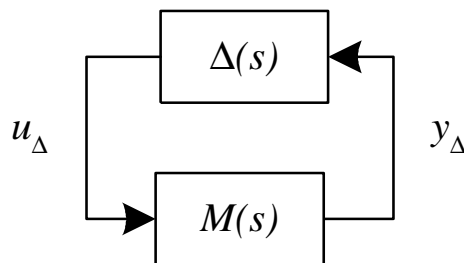


Figura 2.12: Esquema de interconexión para la estabilidad robusta.

Para obtener $M(s)$ se utiliza el esquema de la figura 2.5, anulando todas las entradas externas al sistema (r , d_i , d_o y n) y sustituyendo $E(s)$ por $W_2(s)\Delta(s)W_1(s)$, obteniendo así el esquema de la figura 2.13. En esta figura se ha marcado el bloque $P(s)$ (planta generalizada) para relacionar este esquema con el de la formulación general del control robusto (ver figura 2.2). De aquí puede observarse que $M(s)$ no es más que una transformación fraccional lineal inferior (ver apéndice A) de $P(s)$ con el controlador:

$$M(s) = F_l(P(s), K(s))$$

donde previamente se han extraído de $P(s)$ las columnas correspondientes a la entrada ω .

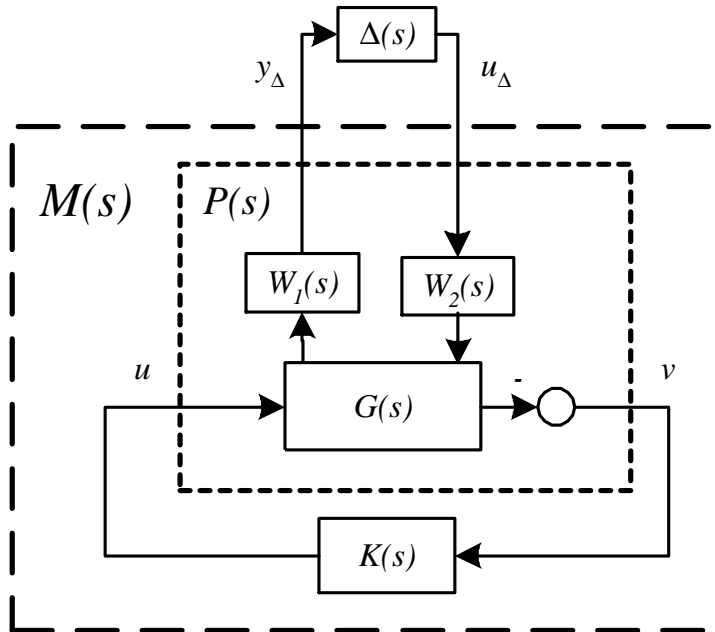


Figura 2.13: Esquema para el cálculo de la matriz $M(s)$.

La base del estudio sobre estabilidad robusta es el *Teorema de la Pequeña Ganancia* ([Zam66]), el cual establece una condición suficiente que garantiza la *robustez de la estabilidad* de un sistema. Su aplicación se basa en la separación del sistema nominal y de las incertidumbres del sistema en dos bloques distintos, de tal forma que su interconexión dé origen a la familia de plantas. Por tanto, establecer que el sistema de interconexión es estable implica establecer que cualquier sistema perteneciente a la familia será estabilizado, que es la definición de estabilidad robusta.

Teorema de la Pequeña Ganancia

Sea el sistema de interconexión de la figura 2.12, donde $M(s)$ y $\Delta(s)$ son matrices de transferencia estables.

Entonces el sistema de interconexión (sistema en bucle cerrado) es estable si se cumple:

$$\|M(s)\Delta(s)\| < 1$$

siendo $\|\cdot\|$ cualquier norma compatible con el sistema que satisfaga $\|M_1M_2\| \leq \|M_1\|\|M_2\|$ (ver desigualdad (A.3) en el apéndice matemático).

A continuación se exponen algunos comentarios de interés a la hora de aplicar este teorema:

- Este teorema sólo ofrece una condición suficiente en caso de que la incertidumbre sea estructurada. Por lo tanto, los resultados de robustez obtenidos aplicando este teorema pueden ser conservadores al no establecer también una condición necesaria.
- La hipótesis de estabilidad de la función de transferencia $M(s)$ implica que el sistema necesita ser *nominalmente estable* para poder poseer *estabilidad robusta*. La misma hipótesis aplicada sobre $\Delta(s)$ implica que la incertidumbre tendrá una ganancia acotada.
- El teorema especifica que la norma del producto debe ser menor que la unidad, no haciendo referencia a la norma de cada uno de los sistemas por separado. Esto implica que $\Delta(s)$ no tendría por qué ser la matriz de incertidumbre normalizada del sistema. Teniendo en cuenta que

$$\|M(s)\|\|\Delta(s)\| < 1 \quad \Rightarrow \quad \|M(s)\Delta(s)\| < 1$$

se tiene que si $\|\Delta(s)\| < \gamma$, la condición de estabilidad robusta se traduce en diseñar un controlador $K(s)$ para el sistema nominal $G(s)$ de forma que $\|M(s)\| < \frac{1}{\gamma}$. Ahora bien, si se considera que $\Delta(s)$ es la incertidumbre *normalizada* del sistema y esta normalización se ha realizado de forma que $\|\Delta(s)\| < 1$, entonces se puede establecer que el sistema será robustamente estable si $\|M(s)\| < 1$.

- En la formulación del teorema no se considera la fase del sistema (sólo su ganancia). Por lo tanto, el resultado del teorema es independiente del signo de la realimentación, lo cual es otro síntoma del conservadurismo del mismo.
- Este teorema es aplicable tanto a sistemas lineales como no lineales ([Des75]). En este último caso no podrá hablarse de funciones de transferencia, pero sí de normas que acoten la ganancia del sistema.
- Para sistemas lineales e invariantes en el tiempo (*LIT*) se puede utilizar cualquier norma inducida del sistema (ver apéndice A), y en concreto la *norma 2 inducida*, que es la *norma infinito* del sistema.

El teorema anterior proporciona una herramienta muy potente pero excesivamente general para algunos casos (de ahí que sólo aporte condiciones suficientes). Para el caso de *sistemas lineales*, la estabilidad del sistema de interconexión de la figura 2.12 podría estudiarse utilizando el *Teorema de Nyquist Generalizado* ([DeC77]), que es aplicable a sistemas multivariables.

De especial interés es el teorema conocido como *Condición de Estabilidad del Determinante*, obtenido a partir del *Criterio de Nyquist Generalizado* suponiendo realimentación positiva (ver figura 2.12) y que proporciona una condición de estabilidad robusta en función del valor de un determinante.

Teorema: Condición de Estabilidad del Determinante

Sea el sistema de interconexión de la figura 2.12, donde $M(s)$ y $\Delta(s)$ son matrices de transferencia estables, siendo $\Delta(s)$ cualquier matriz perteneciente al conjunto convexo de incertidumbres permitidas Δ . Entonces este sistema de interconexión será estable para cualquier valor de $\Delta(s)$ permitido (esto es, será robustamente estable) si y sólo si:

$$\det(I - M(j\omega)\Delta(j\omega)) \neq 0, \quad \forall \omega, \quad \forall \Delta \in \Delta$$

Es interesante observar que si bien este teorema tiene un dominio de aplicabilidad inferior respecto al del *Teorema de la Pequeña Ganancia*, como contraprestación aporta condiciones necesarias y suficientes para estabilidad robusta.

2.8.1 Estabilidad robusta para incertidumbres no estructuradas

Como ya se expuso en la sección 2.4.2, la expresión de la familia de plantas puede variar en función de la representación de la incertidumbre que se elija. Por tanto, es lógico que la condición de estabilidad robusta que se obtenga también dependa de dicha representación.

A continuación se van a exponer las condiciones de estabilidad robusta para las distintas representaciones de la incertidumbre descritas en la sección 2.4.2, suponiendo que existe una sola fuente de incertidumbre (incertidumbre no estructurada). Para ello se va a partir de la normalización de la incertidumbre (ver ecuaciones (2.6) y (2.7)) y se hallará el valor de la matriz:

$$M(s) = W_1(s)M_0(s)W_2(s)$$

utilizada en el *Teorema de la Pequeña Ganancia*. Según este teorema, al ser $\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$, para obtener la estabilidad robusta se ha de cumplir que

$$\|M(s)\|_\infty \leq 1$$

Por lo tanto, lo que cambiará de una representación de la incertidumbre a otra será la expresión de $M_0(s)$. A continuación se exponen las distintas expresiones de dicha matriz en función de las distintas representaciones de la incertidumbre:

- Incertidumbre aditiva:

$$G^*(s) = G(s) + E_a(s)$$

$$M_0(s) = K(s)(I + G(s)K(s))^{-1} = K(s)S_o(s)$$

- Incertidumbre multiplicativa en la entrada:

$$G^*(s) = G(s)(I + E_{me}(s))$$

$$M_0(s) = K(s)G(s)(I + K(s)G(s))^{-1} = T_i(s)$$

- Incertidumbre multiplicativa en la salida:

$$G^*(s) = (I + E_{ms}(s))G(s)$$

$$M_0(s) = G(s)K(s)(I + G(s)K(s))^{-1} = T_o(s)$$

- Incertidumbre aditiva inversa:

$$G^*(s) = (I - G(s)E_{ai}(s))^{-1}G(s)$$

$$M_0(s) = (I + G(s)K(s))^{-1}G(s) = S_o(s)G(s)$$

- Incertidumbre multiplicativa inversa en la entrada:

$$G^*(s) = G(s)(I - E_{mie}(s))^{-1}$$

$$M_0(s) = (I + K(s)G(s))^{-1} = S_i(s)$$

- Incertidumbre multiplicativa inversa en la salida:

$$G^*(s) = (I - E_{mis}(s))^{-1}G(s)$$

$$M_0(s) = (I + G(s)K(s))^{-1} = S_o(s)$$

En las ecuaciones anteriores se ha omitido algún cambio de signo, si bien esto no afecta al valor de la norma de dichas funciones.

Hay que hacer notar que el sistema $M_0(s)$ depende exclusivamente del sistema nominal, por lo que las condiciones que se establecen incluyen, a parte de las funciones de peso $W_1(s)$ y $W_2(s)$, funciones de sensibilidad de dicho sistema.

Finalmente, es conveniente comentar que cuando la incertidumbre a tratar es no estructurada, el *Teorema de la Pequeña Ganancia* no sólo aporta una condición suficiente sino también necesaria.

2.8.2 Estabilidad robusta para incertidumbres estructuradas

En el caso de que la matriz $\Delta(s)$ posea una estructura diagonal o diagonal a bloques, el *Teorema de la Pequeña Ganancia* utilizando el sistema de interconexión de la figura 2.12 ofrece sólo una condición suficiente. Sin embargo, en este caso se puede plantear sacar partido del conocimiento de la estructura de la incertidumbre para obtener una condición de estabilidad robusta más ajustada.

Una idea es utilizar el hecho de que la estabilidad es independiente de un escalado. Según esto, se podría definir una matriz diagonal a bloques de escalado:

$$D = \text{diag}(d_1 I_{r_1}, \dots, d_i I_{r_i}, \dots, d_q I_{r_q})$$

donde d_i es un escalar e I_{r_i} es la matriz identidad con la misma dimensión que cada uno de los bloques de la diagonal de $\Delta_i(s)$. Reescalando la entradas y las salidas de la incertidumbre (ver figura 2.14) se obtiene un nuevo sistema de interconexión $M'(s) - \Delta'(s)$, equivalente al compuesto por $M(s) - \Delta(s)$, donde

$$\begin{aligned} M'(s) &= DM(s)D^{-1} \\ \Delta'(s) &= D\Delta(s)D^{-1} \end{aligned}$$

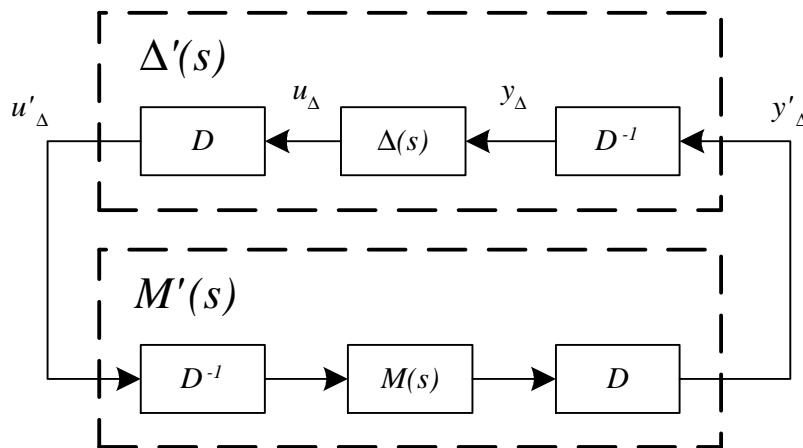


Figura 2.14: Escalado del bloque de incertidumbres.

La definición realizada de $\Delta'(s)$ implica que si $\|\Delta(s)\|_\infty < 1$, entonces $\|\Delta'(s)\|_\infty < 1$. Por lo tanto, utilizando el nuevo sistema de interconexión, la condición de estabilidad robusta se puede expresar como

$$ER \iff \|M'(s)\|_\infty = \|DM(s)D^{-1}\|_\infty < 1$$

La idea anterior puede ser aplicada no sólo a matrices D diagonales a bloques con coeficientes reales, sino que en realidad se puede hacer extensiva a cualquier matriz compleja $D(\omega)$ diagonal a bloques que tenga una estructura compatible con $\Delta(s)$, esto es, matrices $D(\omega)$ que cumplan

$$\Delta D = D \Delta$$

Por lo tanto, una condición menos conservadora de *estabilidad robusta* se consigue minimizando para cada frecuencia el valor singular máximo, obteniendo que

$$ER \iff \min_{D(\omega) \in \mathcal{D}} \|D(\omega)M(s)D^{-1}(\omega)\|_\infty < 1$$

donde \mathcal{D} es el conjunto de matrices diagonales a bloques cuya estructura es compatible con $\Delta(s)$. Es interesante comprobar que si $\Delta(s)$ es una matriz completa (incertidumbre no estructurada), la elección de $D(\omega)$ debe ser $D = dI$, obteniendo que en este caso $\bar{\sigma}(D(\omega)M(j\omega)D^{-1}(\omega)) = \bar{\sigma}(M(j\omega))$. Sin embargo, si la matriz de incertidumbre es estructurada se tiene más grados de libertad en $D(\omega)$, con lo que $\bar{\sigma}(D(\omega)M(j\omega)D^{-1}(\omega))$ puede ser significativamente menor que $\bar{\sigma}(M(j\omega))$.

Las condiciones de estabilidad robusta para incertidumbres estructuradas proporcionadas hasta ahora son sólo condiciones suficientes. Si además se quisiera aportar condiciones necesarias habría que acudir a la *Condición de Estabilidad del Determinante*. Puesto que este teorema postula que el sistema poseerá estabilidad robusta mientras no se anule el determinante de $I - M(j\omega)\Delta(j\omega)$, una forma de obtener una condición necesaria y suficiente será *encontrar la matriz $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ más pequeña (medida en términos de $\bar{\sigma}(\Delta(j\omega))$) que hace que $\det(I - M\Delta) = 0$* , donde $\mathbf{\Delta}$ es el conjunto de matrices normalizadas con la estructura de la incertidumbre. El máximo valor singular de esta matriz es conocido como *margen de estabilidad multivariable (k_m)* ([Saf82]), esto es:

$$k_m(M) \equiv \min_{\Delta \in \mathbf{\Delta}} \{\bar{\sigma}(\Delta) \mid \det(I - M\Delta) = 0\}$$

Sin embargo es más conocido (y utilizado) la inversa de este índice, que es denominada como *valor singular estructurado $\mu(M)$* ([Doy82]), que matemáticamente queda definido como

$$\mu(M) \equiv \frac{1}{\min_{\Delta \in \mathbf{\Delta}} \{\bar{\sigma}(\Delta) \mid \det(I - M\Delta) = 0\}}$$

En caso de no existir ninguna matriz $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ que anule el determinante, se dice que $k_m(M)$ es infinito y que $\mu(M) = 0$.

Entre los motivos por los que $\mu(M)$ es más utilizado que $k_m(M)$, a pesar de que la definición de éste último es más natural, destaca el hecho de que el valor singular estructurado es una generalización del radio espectral ($\rho(M)$) y de la norma espectral ($\bar{\sigma}(M)$), cumpliéndose que

$$\rho(M) \leq \mu(M) \leq \bar{\sigma}(M)$$

Utilizando la definición del valor singular estructurado se obtiene la siguiente condición (necesaria y suficiente) para la estabilidad robusta de sistemas con incertidumbre estructurada:

Sea el sistema de interconexión de la figura 2.12. Suponiendo que tanto $M(s)$ como $\Delta(s)$ son matrices de transferencia estables y que $\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$, entonces el sistema de interconexión será robustamente estable si y sólo si

$$\mu(M(j\omega)) < 1, \quad \forall \omega$$

La condición anterior puede ser reescrita de la forma:

$$ER \Leftrightarrow \mu(M(j\omega))\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < 1, \quad \forall \omega$$

Esta expresión puede ser interpretada como una generalización del *Teorema de la Pequeña Ganancia* donde se tiene en cuenta la estructura de la incertidumbre. Obviamente, de este teorema se deduce que el valor singular estructurado debe cumplir la condición:

$$\mu(M) \leq \min_{D \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(DMD^{-1})$$

la cual puede ser utilizada para hallar una cota superior del mismo. En anterior problema de minimización puede ser resuelto de una manera eficiente si se expresa como un problema LMI ([Boy94]).

2.9 Comportamiento robusto

Una vez conseguida la estabilidad robusta y el comportamiento nominal, el último subobjetivo es conseguir que cualquier sistema $G^*(s)$ perteneciente a la familia de

plantas F_G cumpla las especificaciones de control establecidas. Estas especificaciones aluden a aspectos relacionados con los errores de seguimiento, rechazo de perturbaciones externas al sistema, esfuerzo de control, etc.

Como se expuso en la sección 2.3, las especificaciones de control se pueden expresar mediante una relación frecuencial basada en el modelo nominal de la planta. Por tanto, si se desea obtener una forma determinada de la función de sensibilidad, ésta se podría especificar imponiendo la condición

$$\begin{aligned} \|W_S(s)S_o(s)\|_\infty &\equiv \max_\omega \bar{\sigma}(W_S(j\omega)S_o(j\omega)) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \\ \bar{\sigma}(W_S(j\omega)S_o(j\omega)) &\leq 1, \quad \forall \omega \end{aligned}$$

donde $W_S(s)$ es una matriz de funciones de transferencia que pondera en la frecuencia a $S(s)$ de tal forma que la función de sensibilidad obtenga el perfil deseado en cada canal (determinado por cada valor singular) y frecuencia.

Para analizar el problema de comportamiento robusto habrá que sustituir el modelo nominal $G(s)$ en la condición anterior por una planta cualquiera $G^*(s)$ perteneciente a la familia F_G . Según esto, se obtendrá comportamiento robusto si se satisface:

$$\bar{\sigma}(W_S(j\omega)S_o^*(j\omega)) \leq 1, \quad \forall \omega$$

donde $S^*(s)$ es la función de sensibilidad calculada con una planta genérica $G^*(s) \in F_G$.

Como se expondrá en el siguiente capítulo, se pueden plantear especificaciones sobre más de una función de sensibilidad de forma simultánea, dando lugar al problema de *sensibilidad mixta*.

Si se representa al sistema mediante la figura 2.15, donde $N(s)$ se obtiene del esquema de la configuración general del control robusto (ver figura 2.2) como una transformación fraccional lineal inferior de $P(s)$ con el controlador:

$$N(s) = F_l(P(s), K(s))$$

resulta que establecer especificaciones de comportamiento consiste en establecer una relación entre el vector de señales externas que perturban al sistema ω y el vector de señales objetivos z . Supóngase que esta relación viene especificada por una matriz de

transferencia $E_C(s)$ ³ de forma que:

$$z = E_C^{-1}(s)\omega$$

Entonces, utilizando esta relación el problema de comportamiento robusto se puede plantear como un problema de estabilidad robusta([Pac93]), donde la matriz $E_C(s)$ hace las veces de una incertidumbre ficticia. Para ello, al igual que se planteó con la incertidumbre del sistema $E(s)$, la incertidumbre ficticia $E_C(s)$ puede ser normalizada (ver sección 2.7), de forma que:

$$E_C(s) = W_{C2}(s)\Delta_C(s)W_{C1}(s)$$

tal que:

$$\|\Delta_C(s)\|_\infty \equiv \sup_\omega \bar{\sigma}(\Delta_C(j\omega)) \leq 1$$

donde las matrices $W_{C1}(s)$ y $W_{C2}(s)$ serán matrices de funciones de ponderación que se elegirán de forma que impongan restricciones frecuenciales sobre las distintas funciones de sensibilidad.

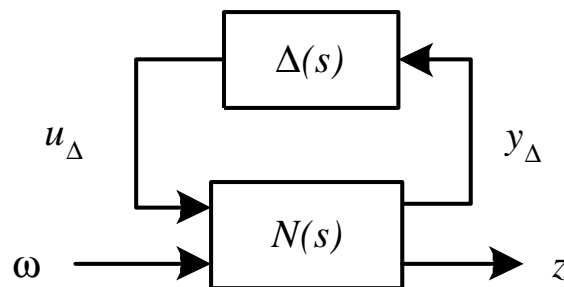


Figura 2.15: Esquema de interconexión para el comportamiento robusto.

A continuación habrá que reagrupar en una sola matriz de incertidumbre $\Delta'(s)$ al bloque de incertidumbre de la planta $\Delta(s)$ y al bloque de incertidumbre ficticia de comportamiento $\Delta_C(s)$ no estructurada de forma que:

$$\Delta'(s) = \begin{pmatrix} \Delta(s) & 0 \\ 0 & \Delta_C(s) \end{pmatrix}$$

Nótese que, por ser $\Delta'(s)$ diagonal a bloques, se cumple que

³El subíndice C hace referencia a Comportamiento

$$\|\Delta'(s)\|_\infty \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \|\Delta(s)\|_\infty \leq 1 \\ \|\Delta_C(s)\|_\infty \leq 1 \end{cases}$$

Una vez realizadas estas transformaciones, el problema de comportamiento robusto puede ser planteado como uno de estabilidad robusta, donde el sistema de interconexión está formado por las matrices $N(s)$ y $\Delta'(s)$ (ver figura 2.16), donde la incertidumbre tiene una estructura diagonal a bloques, siendo uno de ellos el correspondiente a la incertidumbre del sistema y el otro el correspondiente a las especificaciones de comportamiento.

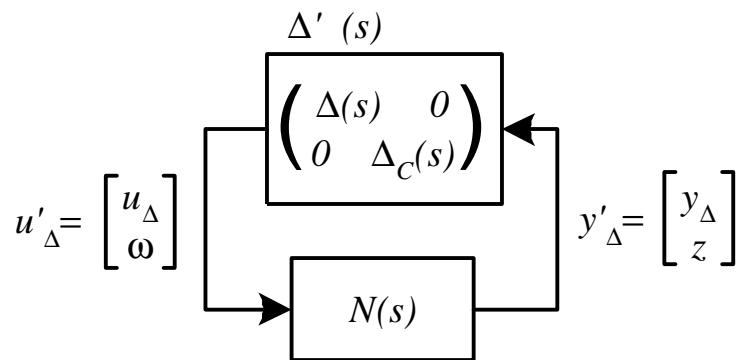


Figura 2.16: Comportamiento robusto como estabilidad robusta.

Por lo tanto, estas transformaciones permiten enunciar la siguiente condición de comportamiento robusto ([Mor89]) utilizando la *Condición de Estabilidad del Determinante*:

Sea el sistema de interconexión de la figura 2.16, donde las matrices $N(s)$ y $\Delta'(s)$ son estables y $N(s)$ cumple las especificaciones de comportamiento nominal. Entonces el sistema de interconexión será robustamente estable (esto es, el sistema original tendrá comportamiento robusto) si y sólo si se cumple que:

$$\mu(N(j\omega)) < 1, \quad \forall \omega$$

donde $\mu(N)$ se calcula respecto a la incertidumbre estructurada $\Delta' = \text{diag}\{\Delta, \Delta_C\}$.

Capítulo 3

Síntesis de Controladores H_∞ Lineales

3.1 Introducción

En este capítulo se repasa de manera muy somera los conceptos básicos que permiten plantear la síntesis de un controlador H_∞ lineal. Se comienza con el planteamiento de una formulación general del problema. A continuación se muestra cómo poder hallar la norma infinito de un sistema lineal racional y estable. En la sección 3.4 se expone un método para hallar un controlador H_∞ subóptimo, junto con un proceso iterativo que permite disminuir el valor de norma infinito. En la sección 3.5 se muestra cómo relajar algunas hipótesis en la planta generalizada mediante transformaciones sobre ella para que pueda ser procesada por el algoritmo de la sección anterior. A continuación, en la sección 3.6, se plantea la construcción de la planta generalizada, donde han de incluirse las especificaciones sobre el sistema de control. Este problema se divide en dos vertientes: moldeo de la función de lazo en bucle abierto (sección 3.7) y moldeo de funciones de transferencia en bucle cerrado (sección 3.8).

3.2 Formulación general del problema de control

La formulación del problema de control que se presenta aquí fue introducida por Doyle ([Doy83, Doy84]) y se basa en el esquema representado en la figura 3.1.

En ella se propone una planta generalizada $P(s)$ definida como:

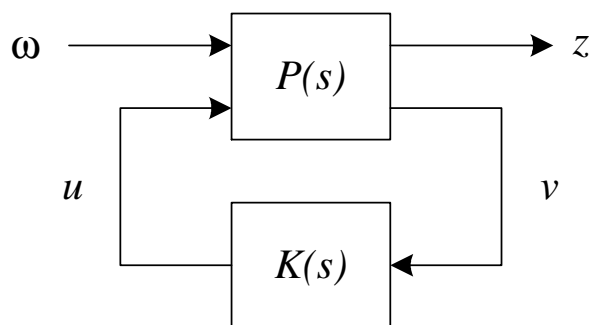


Figura 3.1: Formulación general del problema de control.

$$\begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} \omega \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ u \end{bmatrix}$$

donde ω representa un vector perturbaciones externas a la planta (referencias, perturbaciones, ruidos, etc.), z representa el vector de señales de error, cuya magnitud (calculada utilizando alguna norma) será indicadora del comportamiento del sistema, v es el vector de señales medibles que alimentará a algún controlador y u será el vector de señales de control que generará un controlador a partir de las señales v . Supóngase que las dimensiones de ω , u , z y v son respectivamente l , m , p y q y que $P(s)$ posee una descripción interna con n estados definida por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \omega(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

Por otra parte, sea un controlador $K(s)$ que genere señales de control u para la planta generalizada $P(s)$ a partir de las señales medibles v , esto es,

$$u = K(s)v$$

Según esta configuración, la función de transferencia desde las señales perturbadoras externas ω hasta las señales de error z cerrando el bucle con el controlador $K(s)$ viene dada por la transformación fraccional lineal inferior (ver apéndice A):

$$z = T_{z\omega}(s)\omega = F_l(P(s), K(s))\omega$$

donde:

$$F_l(P(s), K(s)) = P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)[I - P_{22}(s)K(s)]^{-1}P_{21}(s)$$

El problema de control con esta configuración consiste en calcular un controlador de forma que se atenúe la relación entre una medida de la magnitud del vector de errores, z , frente a una medida de la magnitud del vector de señales perturbadoras, ω . A partir de este punto, al nivel de atenuación conseguido se le denominará γ .

Para hallar la magnitud de un vector se ha de utilizar algún índice que proporcione una medida escalar a partir de las componentes del vector. La elección de estos índices dependerá del planteamiento que se desea realizar. En principio es perfectamente válido utilizar índices distintos para el vector de perturbaciones y para el vector de errores. En el control H_∞ el índice que indica la magnitud de los vectores es la *energía* de las señales que componen el vector (ver apéndice A), y se utiliza el mismo índice tanto para las señales de entrada como para las de salida.

Por tanto, el objetivo del control H_∞ es hallar un controlador que atenúe la relación de energía del vector de errores frente a la energía del vector de perturbaciones, siendo γ el nivel de atenuación requerido. A continuación se plantea este problema de manera más formal.

El problema *subóptimo* de síntesis de un controlador H_∞ se puede formular de la siguiente forma:

Dado un nivel de atenuación γ , hallar un controlador $K(s)$ tal que se cumplan las siguientes condiciones:

- *La función de transferencia $T_{zw}(s)$ sea estable.*
- *La norma infinito de la función de transferencia $T_{zw}(s)$ sea inferior a γ , o sea,*

$$\|T_{zw}(s)\|_\infty \equiv \sup_{\omega} \bar{\sigma}(T_{zw}(j\omega)) < \gamma$$

El problema *óptimo* de síntesis se formula de forma equivalente, salvo que habrá que encontrar el controlador que minimice dicha cota de atenuación γ , esto es,

Hallar un controlador $K(s)$ tal que se cumplan las siguientes condiciones:

- *La función de transferencia $T_{zw}(s)$ sea estable.*

- Se minimice la norma infinito de la función de transferencia $T_{zw}(s)$, o sea,

$$\min_{K(s)} \|T_{zw}(s)\|_\infty \equiv \sup_{\omega} \bar{\sigma}(T_{zw}(j\omega)) = \gamma_0 < \gamma$$

3.3 Cálculo de la norma H_∞ de un sistema

La norma infinito de un sistema $G(s)$ se define como el máximo en la frecuencia del máximo valor singular de la función de transferencia evaluada sobre el semieje imaginario positivo:

$$\|G(s)\|_\infty \equiv \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega))$$

Una primera opción para calcular esta norma es elegir un conjunto discreto de frecuencias $\{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ y evaluar el máximo valor singular del sistema para esas frecuencias. Una estimación de la norma infinito del sistema se obtendrá como el máximo de las evaluaciones realizadas, esto es,

$$\|G(s)\|_\infty \simeq \max_{1 \leq k \leq N} \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega_k))$$

Para elegir el conjunto de frecuencias $\{\omega_k\}$ ($1 \leq k \leq N$) es de gran utilidad dibujar un diagrama de Bode generalizado del sistema a fin de observar gráficamente en qué rango de frecuencias se encuentra el pico en frecuencia del valor singular máximo.

A pesar de su sencillez, este procedimiento no es utilizado en la práctica debido a que no es fácil automatizarlo, requiriendo la supervisión en el cálculo (por ejemplo, para la elección del rango de frecuencias) si se quiere obtener cierto grado de precisión.

Para evitar este inconveniente se desarrolló un procedimiento de cálculo de la norma infinito ([Boy89, Doy89, Rob89]) basada en la descripción interna del sistema. Este método se basa en el siguiente lema:

Sea γ un número real positivo y sea una función de transferencia $G(s)$ racional y estable con una descripción interna

$$G(s) \equiv \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

Entonces, la norma infinito de $G(s)$ es menor que γ si y sólo si $\bar{\sigma}(D) < \gamma$ y la matriz H no tiene autovalores en el eje imaginario, siendo:

$$H = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}D^TC & BR^{-1}B^T \\ -C^T(I + DR^{-1}D^T)C & -(A + BR^{-1}D^TC)^T \end{bmatrix}$$

donde:

$$R = \gamma^2 I - D^T D$$

Utilizando este lema es posible calcular de forma iterativa la norma infinito de $G(s)$. Un posible algoritmo de iteración es el método de la bisección, en el cual el cálculo de $\|G(s)\|_\infty$ quedaría automatizado con el siguiente pseudocódigo:

1. Elegir inicialmente una cota superior γ_s y otra inferior γ_i de tal forma que $\gamma_i \leq \|G(s)\|_\infty \leq \gamma_s$.
2. Si el error relativo $\frac{(\gamma_s - \gamma_i)}{\gamma_i}$ es menor que la tolerancia máxima admitida entonces $\|G(s)\|_\infty = \frac{(\gamma_s + \gamma_i)}{2}$ y parar.
3. Hacer $\gamma = \frac{(\gamma_s + \gamma_i)}{2}$.
4. Construir la matriz H para el nuevo valor de γ y calcular sus autovalores.
5. Si H tiene autovalores en el eje imaginario o $\bar{\sigma}(D) \geq \gamma$ hacer $\gamma_i = \gamma$. En caso contrario hacer $\gamma_s = \gamma$.
6. Ir al punto 2.

3.4 Algoritmo general para el cálculo del controlador H_∞

En la práctica no suele ser necesario hallar el controlador H_∞ óptimo, siendo mucho más simple, tanto desde el punto de vista computacional como teórico, hallar un controlador subóptimo para un nivel de atenuación γ predeterminado e iterar sucesivamente con dicho nivel de atenuación. Este problema fue resuelto por Doyle y colaboradores en un famoso artículo en 1989 ([Doy89]).

Para que se pueda hallar un controlador que resuelva el problema se suelen hacer las siguientes hipótesis sobre la planta generalizada:

1. La terna (A, B_2, C_2) debe ser estabilizable y detectable. Esta hipótesis es necesaria para garantizar la existencia de controladores estabilizantes.
2. Las matrices D_{12} y D_{21} han de tener rango completo, o sea,

$$\begin{aligned}\text{rango}(D_{12}) &= m \\ \text{rango}(D_{21}) &= q\end{aligned}$$

Esta hipótesis garantiza que los controladores obtenidos sean propios, por lo que serán realizables. Además, el algoritmo exige que las matrices D_{12} y D_{21} sean tales que verifiquen

$$\begin{aligned}D_{12}^T D_{12} &= I_m \\ D_{21} D_{21}^T &= I_q\end{aligned}$$

Nótese que estas condiciones indican restricciones sobre las dimensiones de D_{12} y D_{21} . En particular, esto implica que:

$$\begin{aligned}\text{número de salidas de errores} &\geq \text{número de señales de control} \\ \dim(z) = p &\quad \dim(u) = m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{número de entradas perturbadoras} &\geq \text{número de medidas para el controlador} \\ \dim(\omega) = l &\quad \dim(v) = q\end{aligned}$$

3.

$$\text{rango} \left(\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \right) = m + n \quad \forall \omega \in \Re$$

o sea, esta matriz ha de tener rango completo respecto a las columnas para cualquier valor de ω .

4.

$$\text{rango} \left(\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \right) = q + n \quad \forall \omega \in \Re$$

o sea, esta matriz ha de tener rango completo respecto a las filas para cualquier valor de ω . Esta condición, junto con la anterior, aseguran que el controlador no cancele polos y ceros situados en el eje imaginario, lo que provocaría inestabilidad interna en bucle cerrado.

5. Tanto la matriz D_{11} como la matriz D_{22} deben ser nulas.

Suponiendo que se verifican estas hipótesis, un algoritmo basado en ([Doy89]) que calcula un controlador subóptimo para el problema general de control (ver figura 3.1) concluye que:

Dado un nivel de atenuación γ , existe un controlador estabilizante $K(s)$ tal que $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$ si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. *Existe una matriz X_∞ definida positiva que es solución de la ecuación algebraica de Riccati:*

$$A_x^T X_\infty + X_\infty A_x + X_\infty (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty + \hat{C}_1^T \hat{C}_1 = 0$$

y que satisfaga la desigualdad:

$$\text{Re}(\lambda_i [A_x + (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty]) < 0 \quad \forall i$$

donde:

$$\begin{aligned} A_x &= A - B_2 D_{12}^T C_1 \\ \hat{C}_1 &= (I - D_{12} D_{12}^T) C_1 \end{aligned}$$

2. *Existe una matriz Y_∞ definida positiva que es solución de la ecuación algebraica de Riccati:*

$$A_y Y_\infty + Y_\infty A_y^T + Y_\infty (\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y_\infty + \hat{B}_1 \hat{B}_1^T = 0$$

y que satisfaga la desigualdad:

$$\text{Re}(\lambda_i [A_y + Y_\infty (\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2)]) < 0 \quad \forall i$$

donde:

$$\begin{aligned} A_y &= A - B_1 D_{21}^T C_2 \\ \hat{B}_1 &= B_1 (I - D_{21} D_{21}^T) \end{aligned}$$

3. *El radio espectral del producto de las matrices X_∞ e Y_∞ ha de cumplir:*

$$\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$$

Si se cumplen estas tres condiciones, todos los controladores que consiguen que $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$ están parametrizados mediante la transformación fraccional lineal inferior $K = F_l(K_c, Q)$, donde $Q(s)$ puede ser cualquier función de transferencia propia y estable tal que $\|Q\|_\infty < \gamma$ y donde $K_c(s)$ tiene la siguiente descripción interna:

$$K_c(s) \equiv \left[\begin{array}{c|cc} A_\infty & -Z_\infty L_\infty & Z_\infty (B_2 + \gamma^{-2} Y_\infty C_1^T D_{12}) \\ \hline F_\infty & 0 & I \\ -(C_2 + \gamma^{-2} D_{21} B_1^T X_\infty) & I & 0 \end{array} \right]$$

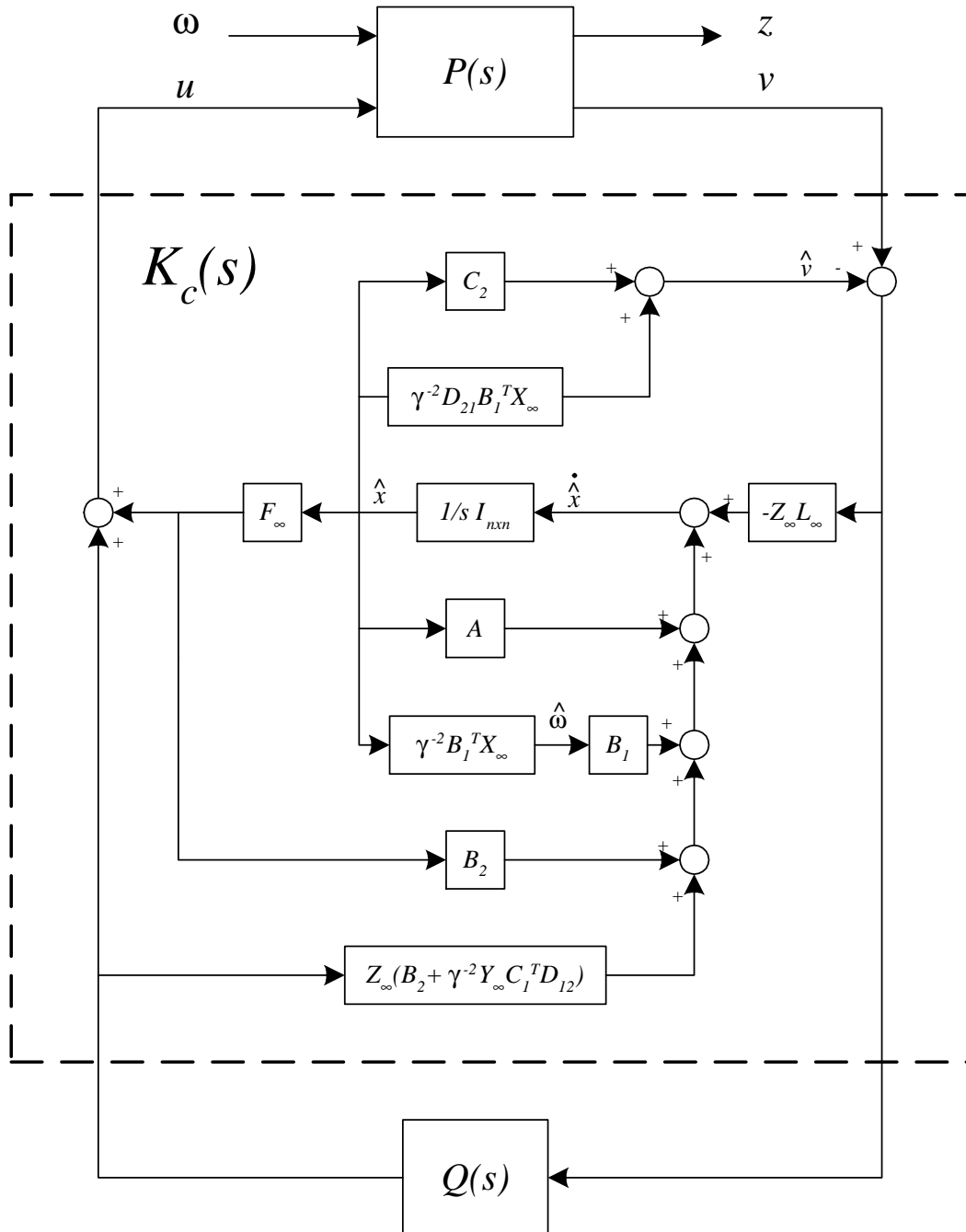
donde:

$$\begin{aligned} F_\infty &= -(B_2^T X_\infty + D_{12}^T C_1) \\ L_\infty &= -(Y_\infty C_2^T + B_1 D_{21}^T) \\ Z_\infty &= (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} \\ A_\infty &= A + B_2 F_\infty + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + Z_\infty L_\infty (C_2 + \gamma^{-2} D_{21} B_1^T X_\infty) \end{aligned}$$

En la figura 3.2 se muestra un esquema de bloques con la estructura general del controlador. En ella se puede comprobar que el controlador se puede dividir en una estructura de observador del estado más una ley de control por realimentación lineal del vector de estado estimado \hat{x} . Si se compara este esquema con el de un controlador LQG junto con una parametrización de Youla se puede observar que son muy similares. La diferencia radica en que en el controlador H_∞ aparecen los bloques adicionales $\gamma^{-2} D_{21} B_1^T X_\infty$, $\gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty$ y $Z_\infty (B_2 + \gamma^{-2} Y_\infty C_1^T D_{12})$, además de que aparece la matriz Z en la ganancia del observador. El término $\hat{\omega} = \gamma^{-2} B_1^T X_\infty \hat{x}$ puede ser interpretado como una *estimación* de la “peor” perturbación ω posible, en el sentido que maximiza la cantidad $\|z\|_2^2 - \|\omega\|_2^2$ para una entrada dada u .

Sin embargo, es fácil comprobar que a medida que el valor de γ aumenta, los términos $\gamma^{-2} D_{21} B_1^T X_\infty$, $\gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty$ tienden a desaparecer mientras que el término $Z_\infty (B_2 + \gamma^{-2} Y_\infty C_1^T D_{12})$ tiende a B_2 , ya que Z_∞ tiende hacia I . Esto indica que a medida que γ aumenta, el controlador se va asemejando cada vez más a un LQG , pudiéndose decir que éste es el caso límite de un control H_∞ para γ igual a ∞ . De hecho, lo único que diferencia a las ecuaciones de Riccati que se obtienen a partir del planteamiento del LQG respecto al del H_∞ es la aparición en estas últimas de los términos $\gamma^{-2} B_1 B_1^T$ y $\gamma^{-2} C_1 C_1^T$, términos que se anulan en el caso límite.

Respecto a la parametrización del controlador, un caso especial se obtiene eligiendo $Q(s) = 0$. El controlador obtenido en este caso es conocido como *controlador central*. La expresión de este controlador es:


 Figura 3.2: Estructura del controlador H_∞ .

$$K(s) = -F_\infty(sI - A_\infty)^{-1}Z_\infty L_\infty$$

y tiene como propiedad que su orden es el mismo que el de la planta generalizada $P(s)$. La división de este controlador en la estructura de observador y regulador se simplifica al no tener efecto la aparición de algunos bloques, quedando estas ecuaciones como sigue:

Observador:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \gamma^{-2}B_1B_1^T X_\infty \hat{x} + B_2u + Z_\infty L_\infty((C_2 + \gamma^{-2}D_{21}B_1^T)\hat{x} - y)$$

Regulador:

$$u = F_\infty \hat{x}$$

Es conveniente recordar que el algoritmo expuesto resuelve no el problema óptimo, sino el subóptimo. A la hora de calcular un controlador sería deseable que éste proporcionara un nivel de atenuación γ lo más pequeño posible. Sin embargo, en el cálculo de controladores subóptimos hay que fijar a priori el valor del nivel de atenuación γ . La solución más comúnmente utilizada para resolver este inconveniente es iterar con γ hasta encontrar un valor suficientemente cercano al valor óptimo, lo cual se puede especificar con un valor de tolerancia en la iteración. En este punto hay que hacer notar que este problema de optimización es no convexo, por lo cual algunos métodos de iteración comúnmente utilizados, como por ejemplo el de la bisección, pueden no converger al valor óptimo de γ .

Para finalizar, como se expuso anteriormente, el control LQG se puede ver como un caso límite del control H_∞ . Este es el motivo por el que algunos autores proponen hallar inicialmente un controlador H_2 (extensión del LQG que permite incluir ponderaciones frecuenciales sobre las señales) antes de empezar a iterar con el valor de γ .

3.5 Transformaciones sobre la planta generalizada

Según la sección anterior, para calcular un controlador es necesario que la planta generalizada cumpla una serie de restricciones, las cuales en general no tienen por qué ser verificadas. En particular, no siempre se tiene por qué cumplir que $D_{11} = 0$, como sucede en los casos en los que existan canales directos desde las perturbaciones

hasta las variables a controlar, o que $D_{22} = 0$, indicando que el sistema a controlar es bipropio. Asimismo, rara vez se dará el caso en que las matrices D_{12} y D_{21} cumplan las condiciones

$$\begin{aligned} D_{12}^T D_{12} &= I_m \\ D_{21} D_{21}^T &= I_q \end{aligned}$$

Sin embargo, el hecho de que la planta generalizada no cumpla estas restricciones no implica que no se pueda calcular un controlador H_∞ para ellas. Para solucionar este problema Safonov y colaboradores ([Saf89]) propusieron realizar una serie de transformaciones sobre la planta generalizada, de tal forma que ésta se convierta en otra con la que se pueda plantear un problema equivalente al formulado con la planta original, pero donde la planta transformada sí cumpla dichas restricciones. El controlador es calculado para dicha planta transformada, y para hallar el controlador válido para la planta original sólo habrá que seguir un proceso inverso de los cambios realizados sobre la planta original, pero aplicándolos al controlador obtenido.

A continuación se expone el planteamiento del problema y los pasos necesarios para realizar dichas transformaciones y hallar el controlador correspondiente.

Sea una planta generalizada $P(s)$ definida por

$$P = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \equiv \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right]$$

cumpliendo las siguientes condiciones:

1. (A, B_2, C_2) es estabilizable y detectable.

2.

$$\begin{aligned} \text{rango}(D_{12}) &= m \\ \text{rango}(D_{21}) &= q \end{aligned}$$

3.

$$\text{rango} \left(\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \right) = m + n \quad \forall \omega \in \Re$$

4.

$$\text{rango} \left(\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \right) = q + n \quad \forall \omega \in \Re$$

El objetivo es hallar, a partir de $P(s)$, una planta generalizada modificada $\hat{P}(s)$ definida por

$$\hat{P}(s) = \begin{bmatrix} \hat{P}_{11}(s) & \hat{P}_{12}(s) \\ \hat{P}_{21}(s) & \hat{P}_{22}(s) \end{bmatrix} \equiv \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_1 & 0 & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & 0 \end{array} \right]$$

que cumpla las siguientes condiciones:

1. $(\hat{A}, \hat{B}_2, \hat{C}_2)$ es estabilizable y detectable.

2.

$$\begin{aligned} \hat{D}_{12}^T \hat{D}_{12} &= I_m \\ \hat{D}_{21} \hat{D}_{21}^T &= I_q \end{aligned}$$

3.

$$\text{rango} \left(\begin{bmatrix} \hat{A} - j\omega I & \hat{B}_2 \\ \hat{C}_1 & \hat{D}_{12} \end{bmatrix} \right) = m + n \quad \forall \omega \in \Re$$

4.

$$\text{rango} \left(\begin{bmatrix} \hat{A} - j\omega I & \hat{B}_1 \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} \end{bmatrix} \right) = q + n \quad \forall \omega \in \Re$$

y que sea tal que el problema de hallar un controlador $K(s)$ que satisfaga $\|F_l(P(s), K(s))\|_\infty < \gamma$ sea equivalente al de hallar un controlador $\hat{K}(s)$ que satisfaga $\|F_l(\hat{P}(s), \hat{K}(s))\|_\infty < \gamma$.

En la figura 3.3 se presenta el esquema de bloques de la planta generalizada transformada $\hat{P}(s)$. Los pasos que se enumeran a continuación servirán para hallar el valor de cada una de las matrices que aparecen en los bloques de esta figura.

Paso 1: Factorizar las matrices D_{12} y D_{21} utilizando una descomposición en valores singulares.

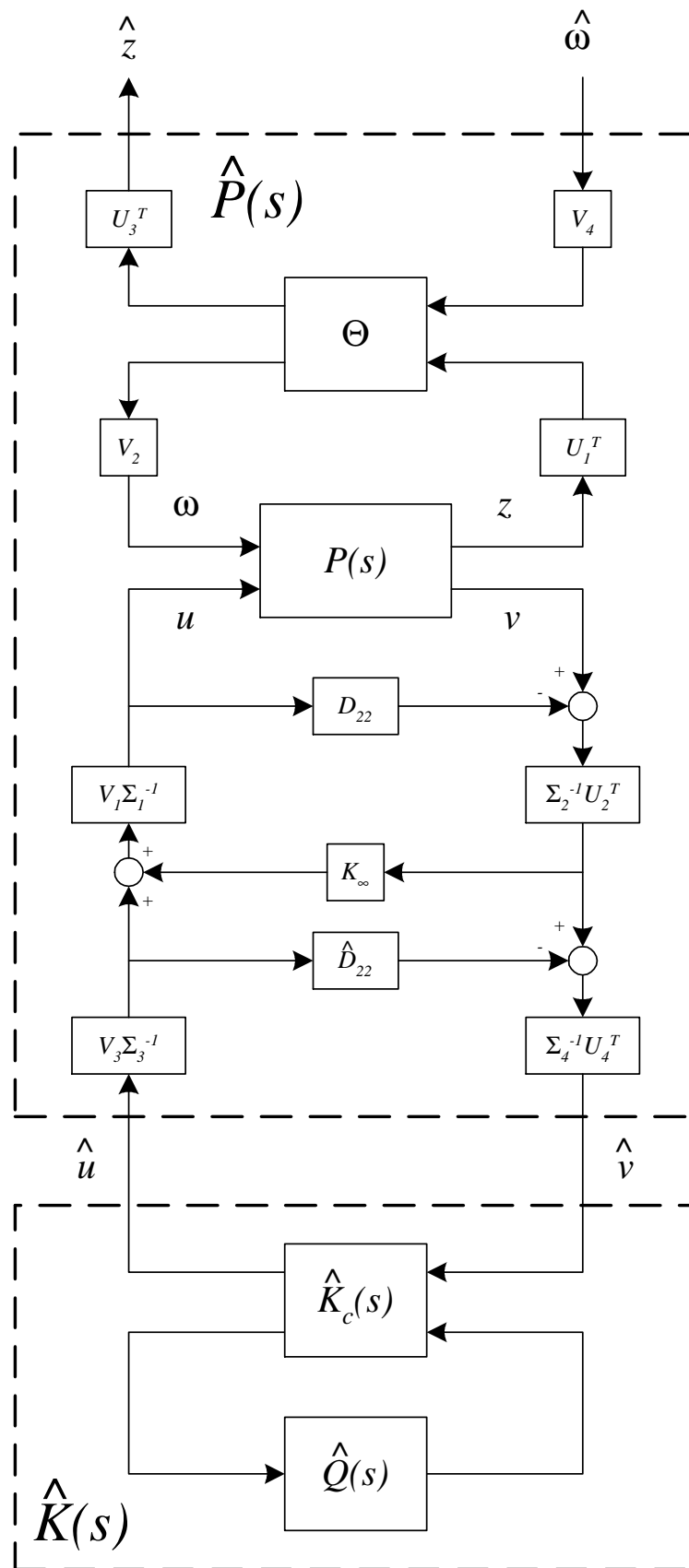


Figura 3.3: Transformaciones sobre la planta ampliada.

$$D_{12} = U_1 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \Sigma_1 \end{bmatrix} \right) V_1^T$$

$$D_{21} = U_2 \left(\begin{bmatrix} 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \right) V_2^T$$

Paso 2: Escalar la matriz D_{11} y hacer una partición de ella en una matriz de 2×2 bloques de manera que la submatriz D_{1122} tenga las mismas dimensiones que la matriz D_{22}^T .

$$U_1^T D_{11} V_2 = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1112} \\ D_{1121} & D_{1122} \end{bmatrix}$$

Paso 3: Calcular la matriz K_∞ como:

$$K_\infty = -(D_{1122} + D_{1121}(\gamma^2 I - D_{1111}^T D_{1111})^{-1} D_{1111}^T D_{1112})$$

Paso 4: Calcular la matriz M y a partir de esta la matriz de transformación Θ como sigue¹:

$$M = U_1^T D_{11} V_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1112} \\ D_{1121} & D_{1122} + K_\infty \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M & (I - \gamma^{-2} M M^T)^{1/2} \\ (I - \gamma^{-2} M M^T)^{1/2} & \gamma^{-2} M^T \end{bmatrix}$$

En este punto, la matriz \hat{D}_{11} del sistema transformado es nula. El valor de las otras tres componentes de la matriz \hat{D} vienen dadas por:

$$\hat{D}_{12} = (I - \gamma^{-2} M M^T)^{-1/2} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$\hat{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} (I - \gamma^{-2} M^T M)^{-1/2}$$

$$\hat{D}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \gamma^{-2} M^T (I - \gamma^{-2} M M^T)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

Paso 5: Utilizar la descomposición en valores singulares para factorizar \hat{D}_{12} y \hat{D}_{21}

$$\hat{D}_{12} = U_3 \begin{bmatrix} 0 \\ \Sigma_3 \end{bmatrix} V_3^T$$

$$\hat{D}_{21} = U_4 \begin{bmatrix} 0 & \Sigma_4 \end{bmatrix} V_4^T$$

¹La raíz cuadrada de una matriz simétrica definida positiva R se calcula mediante su descomposición en valores singulares. Primero se factoriza $R = U \Sigma U^T$ donde $U U^T = I$ y $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Entonces se hace $R^{1/2} = U \Sigma^{1/2} U^T$, donde $\Sigma^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{\sigma_1}, \dots, \sqrt{\sigma_n})$.

Una vez realizados estos pasos, todos los bloques que aparecen en el diagrama de la figura 3.3 son conocidos. Estas transformaciones pueden ser representadas de una forma conjunta utilizando transformaciones fraccionales lineales. Así, a partir del esquema de la figura 3.3 se puede calcular el de la figura 3.4, donde los valores de las matrices T_1 y T_2 son los siguientes:

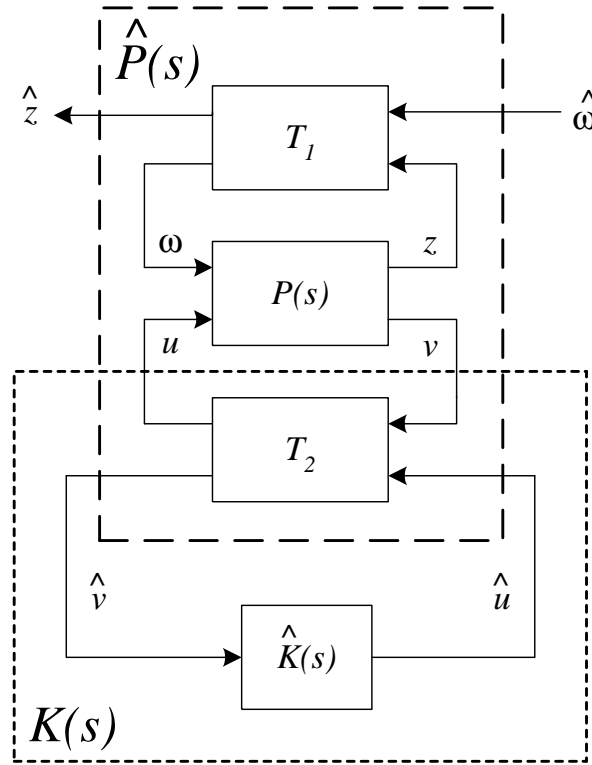


Figura 3.4: Transformaciones sobre la planta ampliada utilizando TFL.

$$T_1 = \begin{bmatrix} -U_3^T M V_4 & U_3^T (I - \gamma^{-2} M M^T)^{1/2} U_1^T \\ V_2 (I - \gamma^{-2} M^T M)^{1/2} V_4 & \gamma^{-2} V_2 M^T U_1^T \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} V_1 \Sigma_1^{-1} K_\infty \Sigma_2^{-1} U_2^T (I - L_1)^{-1} & V_1 \Sigma_1^{-1} (I - L_2)^{-1} V_3 \Sigma_3^{-1} \\ \Sigma_4^{-1} U_4^T \Sigma_2^{-1} U_2^T (I - L_1)^{-1} & -\Sigma_4^{-1} U_4^T [\Sigma_2^{-1} U_2^T D_{22} V_1 \Sigma_1^{-1} (I - L_2)^{-1} - \hat{D}_{22}] V_3 \Sigma_3^{-1} \end{bmatrix}$$

donde:

$$L_1 = -D_{22} V_1 \Sigma_1^{-1} K_\infty \Sigma_2^{-1} U_2^T L_1$$

$$L_2 = -K_\infty \Sigma_2^{-1} U_2^T D_{22} V_1 \Sigma_1^{-1}$$

Según el esquema de la figura 3.4, la planta generalizada modificada $\hat{P}(s)$ se calcula como:

$$\hat{P}(s) = F_u(F_l(P(s), T_2), T_1)$$

Con estas transformaciones se consigue no sólo que $\hat{D}_{11} = 0$ y $\hat{D}_{22} = 0$, sino también que $\hat{D}_{12} = [0 \ I_m]^T$ y $\hat{D}_{21} = [0 \ I_q]^T$, las cuales obviamente cumplen las restricciones $\hat{D}_{12}^T \hat{D}_{12} = I_m$ y $\hat{D}_{21} \hat{D}_{21}^T = I_m$.

Una vez obtenida la planta $\hat{P}(s)$, ésta se utiliza para hallar un controlador $\hat{K}(s)$ utilizando el algoritmo expuesto en la sección anterior. El controlador requerido para la planta original, $K(s)$, se puede hallar a partir de $\hat{K}(s)$ deshaciendo el cambio realizado con el sistema original $P(s)$ respecto a la matriz T_2 , esto es:

$$K(s) = F_l(T_2, \hat{K}(s))$$

Nótese que, según el esquema de la figura 3.4, no es necesario utilizar T_1 para hallar $K(s)$ a partir de $\hat{K}(s)$.

La mayoría de las transformaciones realizadas son simplemente multiplicaciones de señales por matrices ortogonales, las cuales no modifican el valor de sus normas, por lo que la norma infinito del sistema se mantiene inalterada. Sin embargo, la transformación con Θ no cumple dicha condición, aunque sí que preserva su cota superior. En otras palabras, la norma infinito del sistema original y del sistema modificado serán diferentes, aunque sí se asegura que ambas tendrán valores inferiores a γ .

Además, hay que hacer notar que el valor de γ interviene en el cálculo de las matrices utilizadas en la transformación. Esto implica que esta transformación ha de realizarse cada vez que el algoritmo intente hallar un controlador para un nuevo valor de γ .

3.6 Construcción de la planta generalizada

El procedimiento para poder determinar las ecuaciones de la planta generalizada se basa en plantear un diagrama donde se pueda identificar cada una de las componentes de los vectores ω , z , u y v , aislando el controlador del esquema. Una vez realizada esta tarea, habrá que establecer las relaciones entre cada salida de la planta generalizada (vectores z y v) con cada una de sus entradas (vectores ω y u) (ver figura 3.1).

A continuación se expone un ejemplo ([Sko96]) para aclarar este procedimiento. Con este ejemplo se intenta, además, mostrar la versatilidad que tiene esta formulación

general del planteamiento de control.

Ejemplo: Sea el sistema de la figura 3.5. En este esquema se plantea controlar un sistema determinado por las funciones de transferencia $G_1(s)$ y $G_2(s)$ mediante un controlador por prealimentación ($K_{ff}(s)$), un controlador local en la cadena de realimentación ($K_{fb}(s)$) y un controlador de dos grados de libertad formado por $K_r(s)$ y $K_e(s)$.

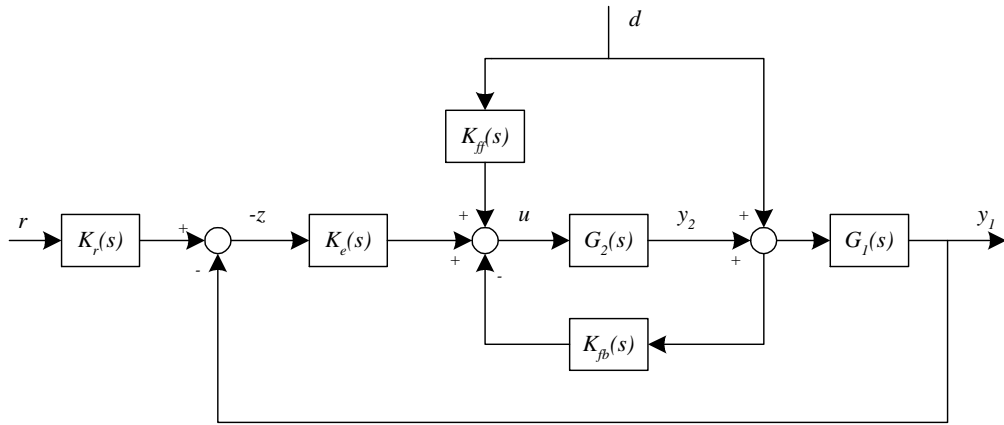


Figura 3.5: Ejemplo de cálculo de la planta ampliada.

En este esquema las perturbaciones externas vienen dadas por cambios de referencia y por perturbaciones a la entrada de $G_1(s)$. La señal de control a calcular será u , aplicada a la entrada de $G_2(s)$. Como señales medibles v que alimentarán a los controladores tendremos, según el esquema, la referencia (r), la perturbación (d), la salida del sistema $G_1(s)$ (y_1) y la del sistema $G_2(s)$ (y_2). Según el esquema, se supone que tanto y_1 como y_2 son medidas perfectas, aunque no habría ningún problema en incluir también posibles ruidos de medición. Finalmente, supongamos que como especificación se decide minimizar la diferencia entre la salida de $G_1(s)$ y la referencia.

Con esta configuración se habrán elegido los siguientes valores:

$$\omega = \begin{bmatrix} d \\ r \end{bmatrix} \quad z = y_1 - r \quad v = \begin{bmatrix} r \\ y_1 \\ y_2 \\ d \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones que ligan a cada salida con las entradas son las siguientes:

$$\begin{aligned}
z &= y_1 - r = G_1(d + G_2u) - r = G_1d + G_1G_2u - r \\
r &= r \\
y_1 &= G_1d + G_1G_2u \\
y_2 &= G_2u \\
d &= d
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si:

$$\begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} \omega \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ u \end{bmatrix}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
P_{11}(s) &= [G_1(s) \quad -I] \\
P_{12}(s) &= [G_1(s)G_2(s)] \\
P_{21}(s) &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ G_1(s) & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \\
P_{22}(s) &= \begin{bmatrix} 0 \\ G_1(s)G_2(s) \\ G_2(s) \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Por último, habrá que tener en cuenta que el controlador $K(s)$ obtenido al utilizar esta planta $P(s)$ en el algoritmo de síntesis tendrá la siguiente estructura:

$$K(s) = [K_e(s)K_r(s) \quad -K_e(s) \quad -K_{fb}(s) \quad K_{ff}(s)]$$

Hay que hacer notar que existen programas comerciales que aportan herramientas para automatizar el cálculo de la planta generalizada, como por ejemplo [Chi98, Bal95].

Introducción de funciones de ponderación en la planta generalizada

En el ejemplo anterior, el vector de error z es directamente el error de salida de la planta respecto a la referencia. Sin embargo, en un caso más general (y más habitual)

se puede introducir una función de ponderación dependiente de la frecuencia que dé forma (en la frecuencia) a la señal que se le aplique. Es más, lo normal es que se introduzca simultáneamente más de una función de ponderación para distintas señales dentro del esquema, formando así un vector de objetivos z con más de una componente.

Se puede ponderar cualquier señal, tenga o no significado físico. Sin embargo, lo habitual es elegir funciones que ponderen a señales de las que tenemos cierta información frecuencial (perturbaciones, ruidos, ...) o señales en las que se conoce qué distribución debe tener su módulo en la frecuencia para que sea beneficioso en el control (por ejemplo, se suele requerir errores pequeños en baja frecuencia, no siendo tan restrictivo en alta frecuencia). Este planteamiento del diseño de las especificaciones es conocido como *diseño basado en señales*.

Existe otro enfoque basado en introducir funciones de ponderación en la planta generalizada de manera que especifiquen qué forma deben adoptar el módulo de algunas funciones de transferencia. Este enfoque es conocido como *diseño por moldeo de funciones de transferencia*.

En este segundo enfoque se pueden distinguir dos casos:

1. Ponderación de la función de lazo.

Con esta opción se intenta hallar un controlador que moldee adecuadamente la magnitud (o valores singulares para sistemas MIMO) de la función de lazo $L(s)$. Los parámetros que se suelen especificar en este caso son el ancho de banda, pendiente en baja frecuencia, etc. Este caso será expuesto con más detalle en la sección 3.7 de este capítulo.

2. Ponderación de funciones de transferencia en bucle cerrado.

Con esta opción se intenta hallar un controlador que moldee adecuadamente la magnitud de algunas funciones de transferencia en bucle cerrado, como por ejemplo, la función de sensibilidad, sensibilidad complementaria o sensibilidad al control. Este caso se detallará en la sección 3.8 de este capítulo.

3.7 Moldeo de la función de lazo

Como se comentó al final de la sección 3.6, el método de moldeo de la función de lazo consiste en hallar un controlador que proporcione la forma adecuada a la función de lazo del sistema $L(s) = G(s)K(s)$. Las características generales que debe poseer la función de lazo para obtener buenas propiedades en el sistema en bucle cerrado son

bien conocidas desde el desarrollo de la teoría del control clásico. Sin embargo, para sistemas complejos no suele bastar con calcular directamente el controlador basado en estos conceptos. McFarlane y Glover [McF90, McF92] proponen un método para hallar un controlador en el que además de cumplir con los requisitos del control clásico, se garantice la robustez del sistema para incertidumbres que se puedan describir mediante una factorización coprima. Esto último se consigue mediante un problema de optimización en H_∞ sin iteración con γ .

A continuación se expone un breve resumen teórico relacionado con este método. Para mayor profundización en el tema, se remite a las referencias que se incluyen en esta exposición.

3.7.1 Especificaciones en la función de lazo

Como se expuso en la sección 2.3 del capítulo anterior, las especificaciones de un sistema de control pueden ser expresadas sobre la forma que debe adoptar en la frecuencia las funciones de sensibilidad en bucle cerrado.

Estas especificaciones pueden ser traducidas a la función de lazo teniendo en cuenta las siguientes desigualdades:

$$\underline{\sigma}(L_o(j\omega)) - 1 \leq \frac{1}{\overline{\sigma}(S_o(j\omega))} \leq \underline{\sigma}(L_o(j\omega)) + 1$$

donde $L_o(s) = G(s)K(s)$ es la función de lazo y $S_o(s) = (1 + L_o)^{-1}$ es la función de sensibilidad.

Por lo tanto, en las frecuencias donde se requiera que $\overline{\sigma}(S_o(j\omega))$ sea pequeña se tendrá que $\underline{\sigma}(L_o(j\omega))$ debe tener un valor alto (aproximadamente la inversa de $\overline{\sigma}(S_o(j\omega))$). La misma conclusión se obtiene para frecuencias en las que se desee que $\overline{\sigma}(T_o(j\omega)) \approx \underline{\sigma}(T_o(j\omega)) \approx 1$, donde $T_o(s) = L_o(s)(1 + L_o(s))^{-1}$ es la función de sensibilidad complementaria. Por otra parte, en las frecuencias en las que se requiera que $\overline{\sigma}(T_o(j\omega))$ sea pequeña se obtiene que $\overline{\sigma}(L_o(j\omega))$ debe ser pequeño (aproximadamente igual a $\overline{\sigma}(T_o(j\omega))$).

Esto implica las siguientes restricciones en la función de lazo:

1. Para rechazo a perturbaciones: $\underline{\sigma}(L_o(j\omega)) \gg 1$
2. Para seguimiento de referencias: $\underline{\sigma}(L_o(j\omega)) \gg 1$

3. Para atenuación de ruidos: $\bar{\sigma}(L_o(j\omega)) \ll 1$
4. Para reducción de energía de control: $\bar{\sigma}(K(j\omega)) \ll 1$, lo que implica $\bar{\sigma}(L_o(j\omega)) \ll 1$
5. Para estabilidad robusta frente a incertidumbre aditiva: $\bar{\sigma}(K(j\omega)) \ll 1$, y por lo tanto $\bar{\sigma}(L_o(j\omega)) \ll 1$
6. Para estabilidad robusta frente a incertidumbre multiplicativa: $\bar{\sigma}(L_o(j\omega)) \ll 1$

Estas especificaciones están recogidas en la figura 3.6, en que se muestra una región en baja frecuencia que impone una cota inferior sobre $\underline{\sigma}(L(j\omega))$ para obtener comportamiento, y otra región en alta frecuencia que impone una cota superior sobre $\bar{\sigma}(L(j\omega))$ para conseguir robustez, atenuación de ruidos y baja energía de control.

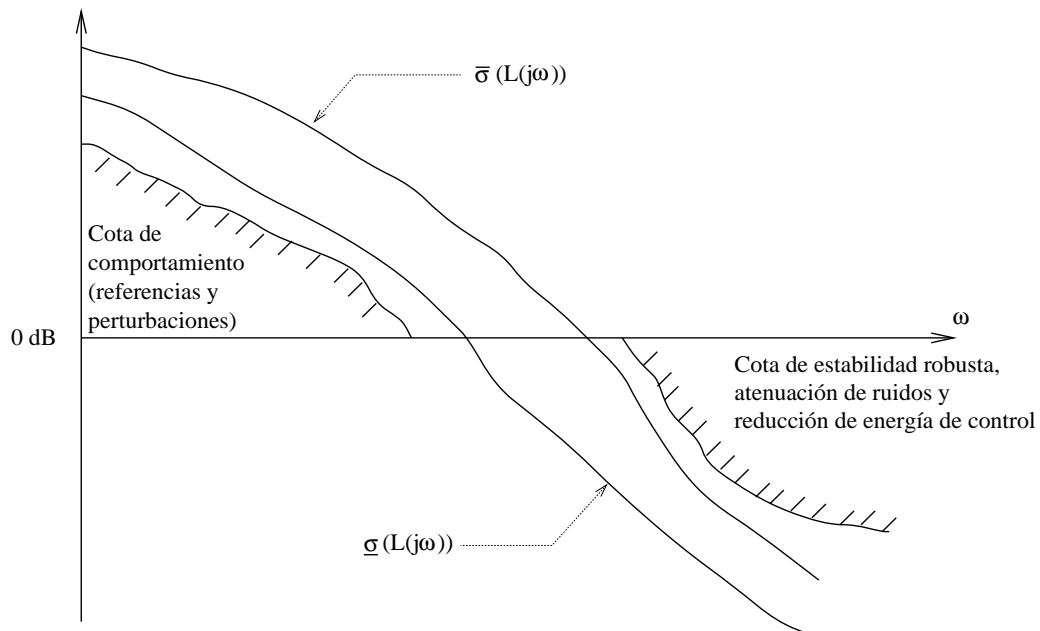


Figura 3.6: Especificaciones sobre la función de lazo.

3.7.2 Factorización coprima de un sistema

La factorización coprima de un sistema consiste simplemente en una forma útil de representar una matriz de funciones de transferencia. En este apartado sólo se va a exponer las definiciones necesarias para los siguientes apartados. Una descripción más profunda sobre el tema se puede encontrar prácticamente en cualquier libro de control, como por ejemplo [Zho96, Gre95, Zho98].

Sea una sistema $G(s)$ racional y propio. Se dice que $N_d(s)$ y $D_d(s)$ forman una *factorización coprime por la derecha* de $G(s)$ si se cumple que:

$$G(s) = N_d(s)D_d(s)^{-1}$$

donde $N_d(s)$ y $D_d(s)$ son funciones de transferencia estables y coprimas por la derecha².

De forma similar, se dice que $N_i(s)$ y $D_i(s)$ forman una *factorización coprime por la izquierda* de $G(s)$ si se cumple que:

$$G(s) = D_i(s)^{-1}N_i(s)$$

donde $N_i(s)$ y $D_i(s)$ son funciones de transferencia estables y coprimas por la izquierda³.

De las definiciones se deduce que tanto $D_d(s)$ como $D_i(s)$ deben ser matrices cuadradas invertibles. Por otra parte, las condiciones de estabilidad establecen que tanto $N_d(s)$ como $N_i(s)$ deben tener como ceros los polos en el semiplano derecho de $G(s)$, y que tanto $D_d(s)$ como $D_i(s)$ deben tener como polos los polos en el semiplano derecho de $G(s)$.

Las factorizaciones coprimas no son únicas. De entre todas las posibles, se dice que $N_d(s)$ y $D_d(s)$ forman una *factorización coprime normalizada por la derecha* de $G(s)$ si cumplen que⁴:

$$N_d^*(s)N_d(s) + D_d^*(s)D_d(s) = I$$

De igual forma, se dice que $N_i(s)$ y $D_i(s)$ forman una *factorización coprime normalizada por la izquierda* de $G(s)$ si cumplen que:

$$N_d(s)N_d^*(s) + D_d(s)D_d^*(s) = I$$

²Dos matrices de funciones de transferencia $N_d(s)$ y $D_d(s)$ son coprimas por la derecha si existen matrices de funciones de transferencia $X_d(s)$ y $Y_d(s)$ estables que verifiquen:

$$\begin{bmatrix} X_d(s) & Y_d(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_d(s) \\ D_d(s) \end{bmatrix} = X_d(s)N_d(s) + Y_d(s)D_d(s) = I$$

³Dos matrices de funciones de transferencia $N_i(s)$ y $D_i(s)$ son coprimas por la izquierda si existen matrices de funciones de transferencia $X_i(s)$ y $Y_i(s)$ estables que verifiquen:

$$\begin{bmatrix} N_i(s) & D_i(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i(s) \\ Y_i(s) \end{bmatrix} = N_i(s)X_i(s) + D_i(s)Y_i(s) = I$$

⁴ $G^*(s) = G^T(-s)$

3.7.3 Robustificación del sistema con incertidumbres descritas mediante factorización coprime

Sea una factorización coprime por la izquierda de sistema nominal $G(s)$:

$$G(s) = D_i(s)^{-1}N_i(s)$$

Se dice que la incertidumbre de este sistema puede ser descrita mediante una factorización coprime si la familia de posibles plantas puede ser expresada en los términos:

$$G^*(s) = (D_i(s) + \Delta_D(s))^{-1}N_i(s) + \Delta_N(s)$$

donde $\Delta_N(s)$ y $\Delta_D(s)$ son funciones de transferencias estables y desconocidas que representan la incertidumbre del sistema nominal. Supongamos que la incertidumbre puede ser acotada mediante la norma infinito, de forma que:

$$\| [\Delta_N(s) \quad \Delta_D(s)] \|_\infty \leq \epsilon$$

donde el parámetro $\epsilon > 0$ es el margen de estabilidad. En la figura 3.7 se muestra el esquema de esta descripción de incertidumbre.

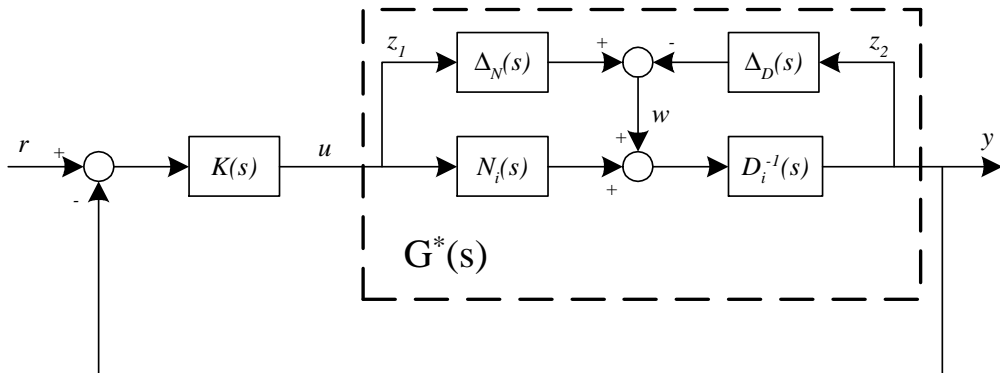


Figura 3.7: Sistema perturbado con factorización coprime por la izquierda.

A partir del *Teorema de la Pequeña Ganancia* (ver sección 2.8) se demuestra que el sistema en bucle cerrado será robustamente estable si se cumple que:

$$\left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I - GK)^{-1} D_i^{-1} \right\|_\infty \leq \frac{1}{\epsilon}$$

El objetivo de la robustificación es hallar un controlador $K(s)$ que estabilice a cualquier posible sistema perturbado que se incluya dentro de la descripción de la incertidumbre vía factorización coprima. Esto es posible realizarlo mediante el algoritmo de cálculo de controladores subóptimos expuesto anteriormente en este capítulo.

Para ello, supongamos que se puede hallar una realización mínima de $G(s)$ establezable y detectable dada por:

$$G(s) \equiv \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

y sea Z una matriz tal que $A + ZC$ sea estable. Entonces una factorización coprima por la izquierda de $G(s) = D_i(s)^{-1}N_i(s)$ viene dada por:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} N_i(s) & D_i(s) & A + ZC & B + ZD & Z \\ \hline & & C & D & I \end{array} \right]$$

Si se define $K(s)^-$ como:

$$K(s)^- = -K(s)$$

entonces se puede reescribir el problema en la forma de la formulación general expuesta en la sección 3.2, donde la planta generalizada tendrá la siguiente expresión:

$$P(s) = \left[\begin{array}{cc|cc} P_{11}(s) & P_{12}(s) & 0 & I \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) & \begin{bmatrix} D_i(s)^{-1} \\ D_i(s)^{-1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} G(s) \\ G(s) \end{bmatrix} \end{array} \right]$$

y con la siguiente descripción interna:

$$P(s) \equiv \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} A & -Z & B \\ \hline \begin{bmatrix} 0 \\ C \\ C \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I \\ D \\ D \end{bmatrix} \end{array} \right]$$

Esta será la planta generalizada que se le proporciona como entrada al algoritmo de cálculo del controlador subóptimo (ver sección 3.4).

Sin embargo, a diferencia de lo que sucede en el cálculo de controladores ponderando funciones de sensibilidad en bucle cerrado, en este caso existe una forma explícita para la cota mínima de atenuación γ_{min} que puede ser conseguida ([Glo89]):

$$\gamma_{min} = \frac{1}{\epsilon_{max}} = \left\{ 1 - \left\| \begin{bmatrix} N_i(s) & D_i(s) \end{bmatrix} \right\|_H^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} = (1 + \rho(XY))^{\frac{1}{2}}$$

donde $\|\cdot\|_H$ es la norma de Hankel, ρ es el radio espectral, X es la única solución definida positiva de la ecuación de Riccati:

$$(A - BS^{-1}D^TC)^TX + X(A - BS^{-1}D^TC) - XBS^{-1}B^TX + C^TR^{-1}C = 0$$

e Y es la única solución definida positiva de la ecuación de Riccati:

$$(A - BS^{-1}D^TC)Y + Y(A - BS^{-1}D^TC)^T - YC^TR^{-1}CY + BS^{-1}B^T = 0$$

donde:

$$\begin{aligned} R &= I + DD^T \\ S &= I + D^TD \end{aligned}$$

Esto implica que en este caso no es necesario iterar con el valor de γ para hallar el controlador óptimo.

3.7.4 Metodología de diseño

Como se expuso al comienzo de esta sección, el objetivo de esta metodología es conseguir los compromisos entre comportamiento y robustez del sistema especificados sobre la función de lazo, utilizando las propiedades de robustez del control H_∞ . Para ello, este enfoque realiza el diseño del controlador en dos etapas: primero se especifica mediante funciones de ponderación la forma que debe adoptar $L(s)$ y a continuación se diseña un controlador que robustifique a esta función de lazo.

De forma resumida, los pasos a realizar para hallar el controlador son los siguientes:

Paso 1: Utilizar un precompensador $W_1(s)$ y/o un postcompensador $W_2(s)$ de tal forma que los valores singulares de la función de lazo del sistema nominal adquieran la forma deseada para satisfacer los compromisos entre robustez y comportamiento (ver sección 3.7.1). Denominemos $G_m(s) = W_2(s)G(s)W_1(s)$ al sistema moldeado (ver figura 3.8.a), y supongamos que $G_m(s)$ no tiene modos ocultos.

Paso 2: Hallar un controlador $K_m(s)$ que robustifique a $G_m(s)$. Para ello, hallar una factorización coprime normalizada por la izquierda (ver sección 3.7.2) de $G_m(s)$:

$$G_m(s) = D_{mi}^{-1}(s)N_{mi}(s)$$

y calcular el margen de estabilidad máximo como:

$$\epsilon_{max} = \sqrt{1 - \left\| \begin{bmatrix} N_{mi}(s) & D_{mi}(s) \end{bmatrix} \right\|_H^2} < 1$$

Posteriormente elegir un valor de $\epsilon < \epsilon_{max}$ y calcular un controlador $K_m(s)$ mediante el algoritmo de síntesis de controladores subóptimos tal que satisfaga:

$$\left\| \begin{bmatrix} K_m \\ I \end{bmatrix} (I - G_m K_m)^{-1} D_{mi}^{-1} \right\|_\infty \leq \frac{1}{\epsilon}$$

Para ello, construir una planta aumentada $P_m(s)$ utilizando los conceptos expuestos en la sección 3.7.3.

De la expresión del controlador obtenida (ver, por ejemplo, [Zho98]) se deduce que si se toma $\epsilon = \epsilon_{max}$, la función de lazo se haría singular y por lo tanto el controlador no sería implementable. Algunas variaciones de este método que evitan este problema pueden encontrarse en [Saf89, Glo89].

Paso 3: Finalmente, a partir $K_m(s)$ calcular el controlador $K(s)$ que será aplicado a la planta original $G(s)$ (ver figura 3.8.b):

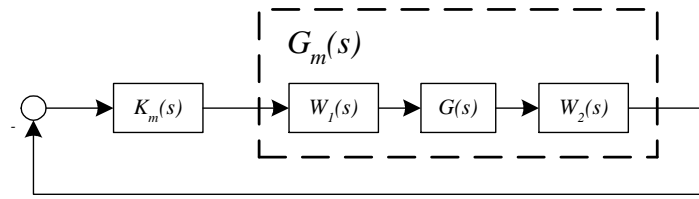
$$K(s) = W_1(s)K_m(s)W_2(s)$$

En [Glo89] se demuestra que si el valor $\frac{1}{\epsilon}$ no es muy grande (por ejemplo, menor que 4) el controlador $K(s)$ no modifica mucho la forma deseada de la función de lazo.

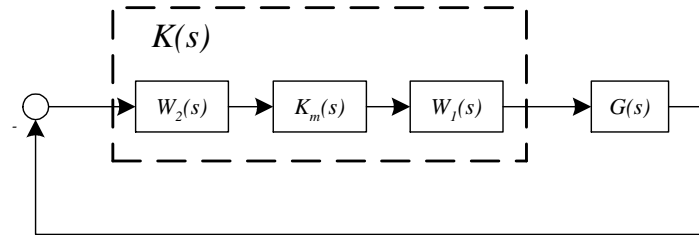
En ([Sko96]) se puede hallar consideraciones más detalladas sobre el cálculo de las funciones de las ponderación y otras posibles configuraciones del problema.

3.8 Moldeo de funciones en bucle cerrado

Este es el segundo caso expuesto en la sección 3.6 y consiste en diseñar un controlador $K(s)$ que dé la forma deseada a la magnitud (valores singulares en sistemas MIMO) de algunas funciones de transferencia en bucle cerrado.



a) Cálculo de la planta modificada



b) Cálculo del controlador para la planta original

Figura 3.8: Metodología de diseño del moldeo de lazo.

Considérese el diagrama de bloques de la figura 3.9, donde se refleja un sistema general de control por realimentación ([Rub96b]). En él aparecen señales externas que perturban al sistema (referencias (r), perturbaciones tanto a la entrada (d_i) como a la salida (d_o) y ruidos (n)) ponderadas por funciones dependientes de la frecuencia ($W_r(s)$, $W_{d_i}(s)$, $W_{d_o}(s)$ y $W_n(s)$ respectivamente). El módulo de cada una de estas funciones debe reflejar una cota superior de la amplitud de la señal correspondiente para cada frecuencia.

Por otra parte, en el diagrama también se incluyen funciones que ponderan a señales internas del sistema, susceptibles de ser controladas. Estas señales son el error de seguimiento (e), la señal de control (u) y la salida del sistema (y) y están ponderadas por $W_S(s)$, $W_U(s)$ y $W_T(s)$ respectivamente, que son también funciones dependientes de la frecuencia. Nótese que se ha distinguido entre el error real e (diferencia real entre la referencia ponderada y salida) y el error medido e_m (diferencia entre la referencia ponderada y la salida medida y_m). Este es el enfoque que se denominó anteriormente como *diseño basado en señales*.

El esquema de la figura 3.9 puede transformarse en un diagrama de bloques equivalente más compacto, como el de la figura 3.10, en el que se han agrupado los bloques de tal forma que se dispongan según la formulación general del problema de control utilizada en la figura 3.1.

Con este esquema, la planta generalizada $P(s)$ que se obtiene está compuesta por

los siguientes términos:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ v \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} W_S W_r & 0 & -W_S W_{do} & -W_S W_{di} & -W_S G \\ 0 & 0 & 0 & W_U W_{di} & W_U \\ 0 & 0 & W_T W_{do} & W_T G W_{di} & W_T G \\ \hline W_r & -W_n & -W_{do} & -G W_{di} & -G \end{bmatrix}}_{P(s)} \begin{bmatrix} r \\ n \\ d_o \\ d_i \\ u \end{bmatrix}$$

mientras que la función de transferencia en bucle cerrado $T_{z\omega}(s) = F_l(P(s), K(s))$ que relaciona las señales a controlar con las señales externas queda de la siguiente manera:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}}_z = \underbrace{\begin{bmatrix} W_S S_o W_r & W_S T_o W_n & -W_S S_o W_{do} & -W_S S_o G W_{di} \\ W_U K S_o W_r & -W_U K S_o W_n & -W_U K S_o W_{do} & W_U S_i W_{di} \\ W_T T_o W_r & -W_T T_o W_n & W_T S_o W_{do} & W_T S_o G W_{di} \end{bmatrix}}_{T_{z\omega}} \underbrace{\begin{bmatrix} r \\ n \\ d_o \\ d_i \end{bmatrix}}_\omega$$

Como se observa en la expresión de $T_{z\omega}(s)$, las funciones de sensibilidad en bucle cerrado son moldeadas por las funciones de ponderación que las premultiplican y postmultiplican. He aquí el porqué del título de esta sección.

3.9 Sensibilidad mixta

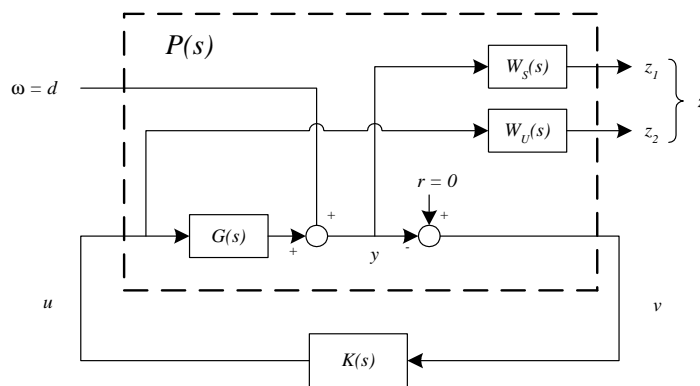
En la matriz de funciones de transferencia $T_{z\omega}(s)$ descrita anteriormente aparecen muchas funciones de ponderación. Sin embargo, en casos prácticos no suele ser habitual utilizarlas todas para calcular el controlador deseado debido a que, por ejemplo, se obtendría un controlador con un orden muy alto. Si en el esquema anterior se hacen los términos $W_r(s)$, $W_{do}(s)$, $W_{di}(s)$ y $W_n(s)$ igual a la identidad, entonces se ponderan las distintas funciones de sensibilidad en bucle cerrado mediante una sola función de ponderación en cada término. Al hacer pequeña la norma infinito de $T_{z\omega}(s)$ lo que se consigue es ponderar de forma conjunta las distintas funciones de sensibilidad en bucle cerrado. De aquí que este planteamiento reciba el nombre de *enfoque de sensibilidad mixta*.

En función de qué variables consideremos dentro del esquema general, se pueden

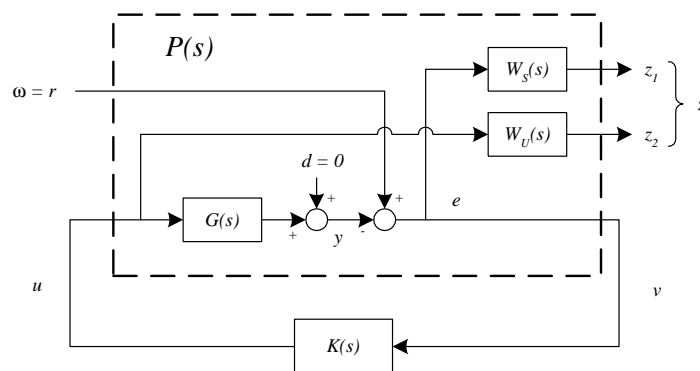
distinguir casos simples ampliamente conocidos. A continuación se exponen algunos de ellos.

Configuración de sensibilidad mixta S/KS

En este caso se considera las salidas z_1 y z_2 en función de d_o o de r . En función de qué opción se elija se tendrá una configuración de sensibilidad mixta S/KS para regulación (ver figura 3.11.a) o para seguimiento (ver figura 3.11.b).



a) Problema de regulación



b) Problema de seguimiento

Figura 3.11: Configuración de sensibilidad mixta S/KS .

Con esta configuración se pondera simultáneamente la función sensibilidad ($S_o(s)$) y la función sensibilidad al control ($K(s)S_o(s)$) mediante las funciones de ponderación $W_S(s)$ y $W_U(s)$ respectivamente. Por este motivo a la función de ponderación $W_S(s)$ se le ha otorgado el subíndice S . Asimismo, esto justifica que en alguna bibliografía especializada a la función $W_U(s)$ se le denomine como $W_{KS}(s)$.

Eliminando las filas y columnas correspondientes del caso general se obtiene que $T_{z\omega}(s)$ tiene la siguiente expresión para el problema de regulación:

$$T_{z\omega}(s) = \begin{bmatrix} -W_S(s)S_o(s) \\ -W_U(s)K(s)S_o(s) \end{bmatrix}$$

mientras que se obtiene esta otra para el problema de seguimiento:

$$T_{z\omega}(s) = \begin{bmatrix} W_S(s)S_o(s) \\ W_U(s)K(s)S_o(s) \end{bmatrix}$$

Se puede observar que ambas se diferencian en un signo, por lo que el problema de hallar un controlador que acote superiormente a:

$$\|T_{z\omega}(s)\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} W_S(s)S_o(s) \\ W_U(s)K(s)S_o(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty$$

se hace equivalente para ambos problemas.

Configuración de sensibilidad mixta S/T

Para esta configuración se eligen las salidas z_1 y z_3 del caso general en función de la referencia (ver figura 3.12).

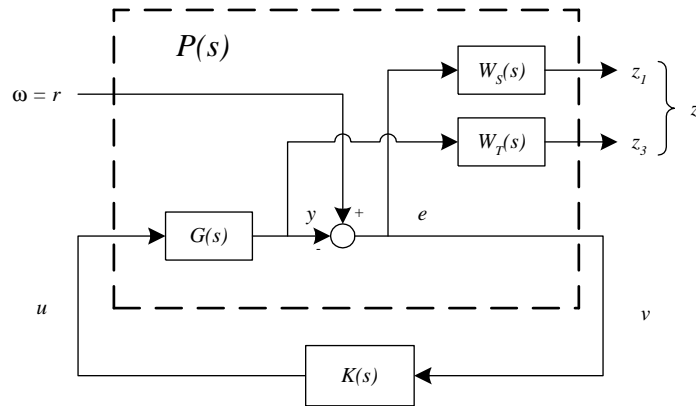


Figura 3.12: Configuración de sensibilidad mixta S/T .

Con esta configuración se ponderan simultáneamente la función sensibilidad ($S_o(s)$) y la función sensibilidad complementaria ($T_o(s)$) por medio de las funciones de ponderación $W_S(s)$ y $W_T(s)$ respectivamente, obteniéndose en este caso que habrá que calcular un controlador que acote superiormente a:

$$\|T_{z\omega}(s)\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} W_S(s)S_o(s) \\ W_T(s)T_o(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty$$

Aquí se vuelve a poner de manifiesto el motivo del subíndice S de la función $W_S(s)$, mientras que se justifica el por qué se le otorga el subíndice T a la función $W_T(s)$.

Configuración de sensibilidad mixta $S/KS/T$

En esta configuración se consideran todas las salidas del caso general en función de la referencia (ver figura 3.13), ponderándose simultáneamente las funciones sensibilidad $S(s)$, sensibilidad al control $K(s)S(s)$ y sensibilidad complementaria $T(s)$ mediante las funciones de ponderación $W_S(s)$, $W_U(s)$ y $W_T(s)$ respectivamente.

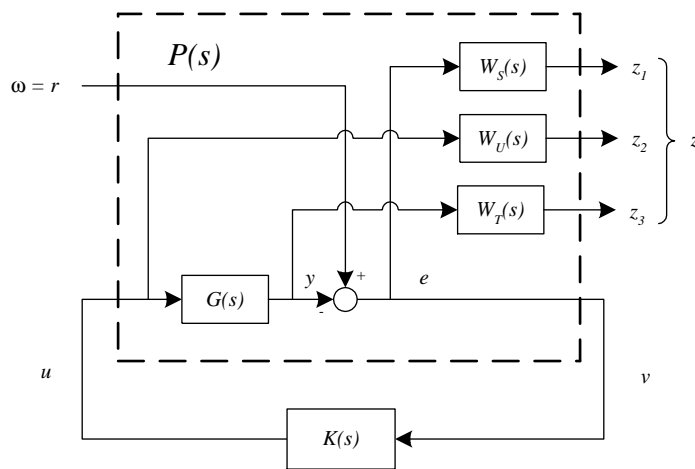


Figura 3.13: Configuración de sensibilidad mixta $S/KS/T$.

La expresión a minimizar en este caso queda como sigue:

$$\|T_{z\omega}(s)\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} W_S(s)S_o(s) \\ W_U(s)K(s)S_o(s) \\ W_T(s)T_o(s) \end{bmatrix} \right\|_{\infty}$$

Otras configuraciones

Si bien las anteriores son las más conocidas, es perfectamente válido utilizar cualquier otra combinación en la que se puedan implementar las especificaciones necesarias de robustez y comportamiento.

Véase como ejemplo la configuración GS/T utilizada en [Chr97] para impedir que el controlador invierta el sistema nominal, evitando problemas en plantas mal condicionadas con incertidumbres a la entrada.

Para hallar la forma que adopta la planta generalizada en cada uno de los casos anteriores sólo habrá que eliminar las correspondientes filas y columnas del caso general.

3.10 Resumen del proceso de síntesis H_∞

La materia expuesta a lo largo de este capítulo incluye la teoría básica para poder sintetizar un controlador H_∞ . El procedimiento para calcular un controlador en este caso será el siguiente:

1. Elegir la configuración para crear la planta aumentada.
2. Diseñar adecuadamente las funciones de ponderación que intervienen en la planta aumentada.
3. Crear la planta aumentada a partir de las funciones de ponderación y del conocimiento de la planta.
4. Calcular el controlador $K(s)$ mediante el algoritmo de síntesis expuesto en la sección 3.4, iterando con γ hasta conseguir un valor satisfactorio.

Este procedimiento es sistemático salvo en el diseño de las funciones de ponderación. Por lo tanto, la bondad del controlador dependerá exclusivamente de la elección de la forma de estas funciones.

La elección de estas funciones no suele ser trivial, requiriendo por parte del diseñador conocimientos sobre cómo afecta cada una de ellas al sistema controlado. En el siguiente capítulo se propone un método que automatiza el diseño de estas funciones de ponderación utilizando configuraciones de sensibilidad mixta, de forma que resulte simple sintonizar un controlador que haga que el sistema controlado tenga propiedades de comportamiento y robustez suficientemente buenas.

Capítulo 4

Diseño de Funciones de Ponderación

4.1 Introducción

Como se indicó al final del capítulo anterior, en el presente capítulo se va a exponer una metodología de diseño de las funciones de ponderación para el planteamiento de sensibilidad mixta.

Han sido muchas las publicaciones en estos últimos años en las que se propone resolver un problema de control aplicando el planteamiento de sensibilidad mixta (véase como ejemplos representativos [Ath94, Lop95, Ban95, Ber96b, Yan96, Lee97, Ima97, Kit98, Lin98, Bit98]). Sin embargo, a pesar de la importancia que supone diseñar bien las funciones de ponderación, en la mayoría de dichas publicaciones no aparece justificada la elección de las mismas.

Por otra parte, existen publicaciones cuyo objetivo es exponer consideraciones respecto a la elección de estas funciones ([Lun91, Hun92, Anw93, Mei95, Sko96, Seb99]), si bien en estos casos es necesario tener amplios conocimientos sobre teoría de control para poder aplicarlas.

Existen muchas aplicaciones industriales en las que los ingenieros encargados de controlarlas no poseen dichos conocimientos, por lo que el control de dichas aplicaciones

se suele realizar mediante la implementación de leyes de control simples, normalmente de tipo PID, destinadas a controlar lazos monovariantes, y en los que además en muchos casos ni siquiera están suficientemente bien sintonizados.

En estos casos es deseable poder aplicar leyes de control más avanzadas que mejoren el comportamiento del sistema. Sin embargo, sería interesante poder ajustar dichos controladores de una manera cómoda e intuitiva, a lo sumo con uno o dos parámetros que fuesen representativos del comportamiento del sistema controlado.

En este capítulo se propone una metodología de diseño de las funciones de ponderación de forma que, tras un ajuste inicial basado en la incertidumbre del sistema, el comportamiento del mismo va a depender básicamente del valor de un parámetro adimensional por cada salida a controlar, al que se denominará κ_i ($i = 1, \dots, n^o \text{ salidas}$).

Para que la elección de dicho parámetro sea cómoda e intuitiva, los valores de κ_i se han normalizado de forma que sean positivos, proponiéndose una elección inicial de sus valores igual a uno, de forma que a mayor valor de dicho parámetro, más rápido será el sistema en bucle cerrado. Como se comprobará con ejemplos de distintas aplicaciones, para *sistemas monovariantes* un valor aceptable de κ suele estar entre 0.5 y 1. Valores más bajos suelen ser requeridos cuando se desee que el sistema apenas sobreoscile mientras que no es conveniente elegir valores cercanos a 1 ya que se podrían obtener grandes oscilaciones, e incluso se podría llegar a inestabilizar al sistema si el valor elegido fuera mayor que esta cota superior. Para *sistemas multivariantes*, este valor superior no será tan restrictivo, pudiendo ser superado para alguna salida en concreto (ver sección 5.6).

El comportamiento del sistema obtenido con esta metodología es más que aceptable, a la vez que es fácil de aplicar. Sólo es necesario elegir los valores deseados de κ_i y ejecutar un programa para obtener el controlador. Por lo tanto, desde el punto de vista de un usuario final todo este proceso es simple de realizar, ya que la ejecución del programa es transparente para el mismo.

En la exposición anterior se ha comentado que se necesita un ajuste previo de las funciones de ponderación. En esta capítulo también se propone una metodología para la realización de dicho preajuste de forma que resulte muy sencillo llevarlo a cabo. Para ello se necesita cierto conocimiento básico de teoría de control, pero no de técnicas de control avanzado. Por lo tanto, mediante esta metodología cualquier ingeniero con conocimientos generales podría implementar el controlador sin necesidad de ser un experto en la materia.

En el siguiente capítulo se comprobará la validez de esta metodología mediante su aplicación a sistemas reales de distinta índole, tanto en sistemas rápidos, como motores o sistemas de seguimiento visual, así como en sistemas lentos típicos de la industria de

procesos, como puede ser un sistema para obtener energía solar o una planta piloto. En esta última se comprobará además la validez del método también para sistemas multivariantes.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera: en la siguiente sección se mostrará cómo diseñar las matrices de funciones de ponderación para moldear a la función de sensibilidad complementaria (para lo cual habrá que elegir previamente un modelo nominal y estimar las incertidumbres respecto a dicho modelo), la de sensibilidad y la de sensibilidad al control. Seguidamente, en la sección 4.3 se expone la metodología de cómo aplicar el método, una vez que es conocido cómo diseñar las funciones de ponderación. Finalmente, en la sección 4.4 se expone una serie de comentarios que justifican la aplicación de este método de diseño.

4.2 Diseño de las funciones de ponderación

Como se ha comentado en la introducción, en este capítulo se pretende aportar unas reglas que automatizan el proceso de síntesis de controladores H_∞ mediante los planteamiento de sensibilidad mixta. Estas reglas proporcionan un método de selección de las distintas funciones de peso que ponderarán a las distintas funciones de sensibilidad en bucle cerrado.

A continuación se expone cómo diseñar dichas funciones de ponderación, para lo cual habrá que elegir previamente un modelo nominal $G(s)$ y estimar las incertidumbres asociadas a dicho modelo.

4.2.1 Elección del modelo nominal y estimación de la incertidumbre

Como se expuso en el capítulo 2, la síntesis de un controlador robusto se ha de basar en el conocimiento de la incertidumbre del sistema. En este capítulo se va a hacer uso de la incertidumbre multiplicativa no estructurada del sistema, donde para poder estimarla lo primero que habrá que hacer será la elección del modelo nominal.

El modelo nominal se tomará de bajo orden y sin retardos, o sea, según la primera opción expuesta en la sección 2.6. Esta propuesta se basa en la concordancia con el objetivo de que el prediseño de las funciones de ponderación debe resultar un proceso sencillo para un ingeniero con conocimientos generales.

Una vez elegido el modelo nominal, se estimará la incertidumbre multiplicativa a la salida del sistema como:

$$E_{ms}(s) = (G^*(s) - G(s))G(s)^{-1}$$

Este cálculo habrá que realizarlo con cada uno de los puntos de trabajo donde se pretenda que el controlador funcione adecuadamente, esto es, habrá que repetirlo tantas veces como funciones $G^*(s)$ distintas se estén considerando.

Por definición, la incertidumbre multiplicativa indica el porcentaje de desconocimiento que se tiene de la planta en cada frecuencia. Este porcentaje suele aumentar con la frecuencia y siempre habrá una frecuencia a partir de la cual el desconocimiento del sistema sea total, o sea, una frecuencia a partir de la cual el valor de la incertidumbre multiplicativa supere la unidad.

Sin embargo, el cálculo de la incertidumbre utilizando la fórmula anterior puede dar lugar a confusión en casos en los que $G^*(s)$ corresponda a funciones de transferencias obtenidas a partir de la identificación del sistema en distintos puntos de trabajo. A continuación se expone un ejemplo con un sistema monovariable para aclarar este punto:

Supongamos que se elige como modelo nominal una función de transferencia de primer orden sin retardo donde sus parámetros han sido calculados como media de los resultados de una serie de indentificaciones del sistema en distintos puntos de trabajo. Según esto, se tendría que:

$$G(s) = \frac{\overline{K}}{\overline{\tau}s + 1}$$

donde

$$\overline{K} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N K_i \quad \overline{\tau} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tau_i$$

Supongamos que se desea estimar la incertidumbre multiplicativa respecto a uno de los sistemas identificados en cierto punto de trabajo, donde:

$$G_i^*(s) = \frac{K_i}{\tau_i s + 1}$$

El cálculo de la incertidumbre multiplicativa en este caso proporcionaría la siguiente función de transferencia:

$$E_{ms}(s) = \frac{G_i^*(s) - G(s)}{G(s)} = \frac{(K_i\bar{\tau} - \bar{K}\tau_i)s + K_i - \bar{K}}{\bar{K}(\tau_i s + 1)}$$

Esta función de transferencia toma un valor en baja frecuencia igual al correspondiente a la incertidumbre multiplicativa de la ganancia, mientras que tiene un cero en $s = \frac{-(K_i - \bar{K})}{K_i\bar{\tau} - \bar{K}\tau_i}$ y un polo en $s = -1/\tau_i$.

Si el valor absoluto del polo fuera inferior al del cero, la incertidumbre multiplicativa estimada disminuiría con la frecuencia. En la figura 4.1 se muestra un ejemplo con valores de K_i , τ_i , \bar{K} y $\bar{\tau}$ iguales a 1.2, 1.1, 1 y 1 respectivamente (línea continua), donde se ha supuesto una incertidumbre del 20% en la ganancia y del 10% en la constante de tiempo.

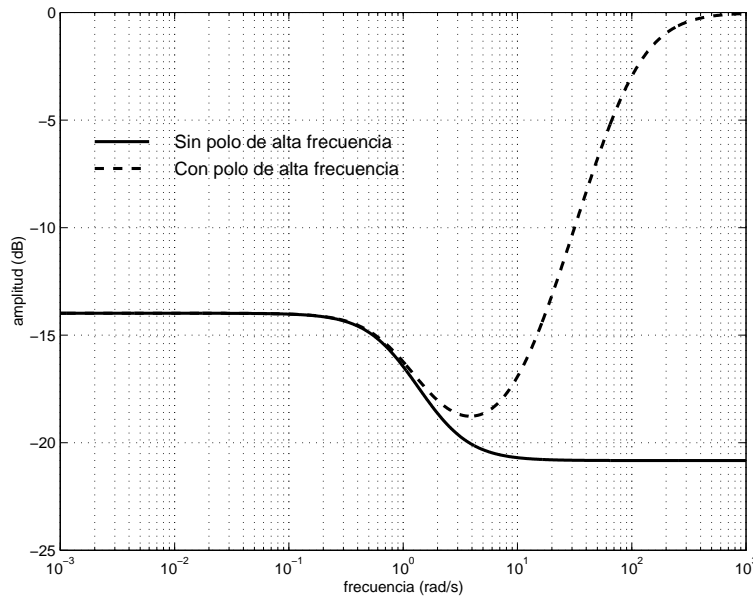


Figura 4.1: Ejemplo de estimación de incertidumbre multiplicativa.

Al estimar la incertidumbre multiplicativa podría ser sorprendente observar que dicha incertidumbre disminuye con la frecuencia, contradiciendo lo expuesto anteriormente. Para poder explicar este fenómeno es necesario recordar que en estos casos $G_i^*(s)$ no es más que otro modelo del sistema operando en otro punto de trabajo. Por lo tanto, éste también tendrá incertidumbres respecto a lo que se podría considerar el sistema real $G_{ri}(s)$ en dicho punto de trabajo. Esto quedará en evidencia de una forma más clara con la siguiente modificación en el ejemplo anterior.

Supongamos que el sistema $G_i^*(s)$ posee una dinámica no modelada anteriormente, la cual va a ser representada como un polo de alta frecuencia. Según esto, la nueva función de transferencia a considerar para la estimación de la incertidumbre será de la forma:

$$G_i^*(s) = \frac{K_i}{(\tau_i s + 1)(\tau_{ri} s + 1)} \quad \tau_{ri} \ll \tau_i$$

Si se realiza de nuevo el cálculo de la incertidumbre se obtiene que el módulo de dicha incertidumbre, a pesar de que pueda disminuir en algún rango de frecuencia, al final tenderá a subir a medida que la frecuencia aumenta. En la figura 4.1 se representa en línea discontinua este efecto, donde se ha elegido un valor de τ_{ri} igual a 0.01 segundos.

El caso anterior no hubiera inducido a error si el sistema $G_i^*(s)$ tuviera incluido un tiempo muerto. En este caso, el módulo de la incertidumbre del sistema siempre superará el valor unidad si se tiene en cuenta que el sistema nominal no incluye al retardo. Si la única incertidumbre del sistema se debiera el tiempo muerto, esto es:

$$G_i^*(s) = G(s)e^{-sL}$$

la incertidumbre multiplicativa se correspondería con la expresión:

$$E_{ms}(s) = \frac{G_i^*(s) - G(s)}{G(s)} = 1 - e^{-sL}$$

alcanzando el valor del 100% para una frecuencia (en rad/s) aproximadamente igual a la inversa del retardo en segundos (ver figura 4.2, donde se ha supuesto $L = 1$).

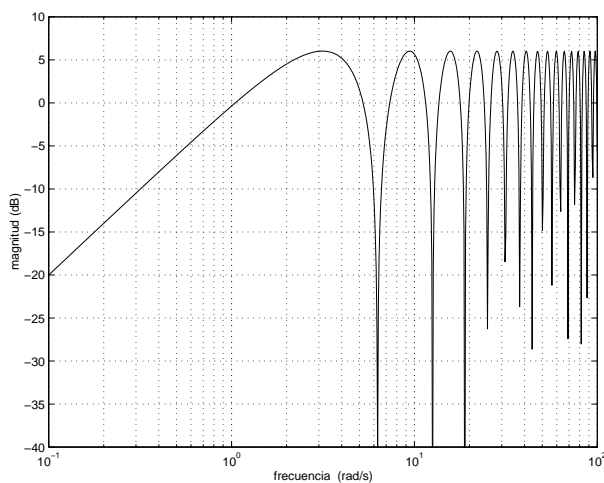


Figura 4.2: Incertidumbre multiplicativa debido a un tiempo muerto $L = 1$ segundo.

En cualquier caso, para evitar problemas sería conveniente obtener la *respuesta frecuencial* del sistema siempre que fuera posible (no lo sería, por ejemplo, si el sistema fuera inestable) y utilizar dicha respuesta frecuencial para evaluar la incertidumbre del sistema en cada frecuencia.

4.2.2 Cálculo de la matriz de ponderación $W_T(s)$

Como el tipo de incertidumbre utilizado es el correspondiente a la multiplicativa a la salida, la condición de estabilidad robusta asociada a ella viene dada por (ver sección 2.8.1):

$$\|W_1(s)T_o(s)W_2(s)\|_\infty \leq 1$$

donde $T_o(s)$ es la función de sensibilidad complementaria en la salida y las matrices $W_1(s)$ y $W_2(s)$ son tales que normalizan a la incertidumbre, esto es:

$$E_{ms}(s) = W_2(s)\Delta_{ms}(s)W_1(s) \quad \|\Delta(s)_{ms}\|_\infty \leq 1$$

Si se toma un valor de $W_2(s)$ igual a la identidad y se renombra a $W_1(s)$ como $W_T(s)$, la condición de estabilidad robusta resultante tiene la siguiente expresión:

$$\|W_T(s)T_o(s)\|_\infty \equiv \sup_{\omega} \bar{\sigma}(W_T(j\omega)T_o(j\omega)) \leq 1$$

Como puede observarse, el término $W_T(s)T_o(s)$ es el mismo que aparece en los modelos de sensibilidad mixta en los que se ve involucrada la función de sensibilidad complementaria. Por lo tanto, hacer pequeño el valor de la norma infinito en el planteamiento de sensibilidad mixta implica hacer pequeño a su vez la norma infinito de $W_T(s)T_o(s)$, con lo que se estará robustificando al sistema frente a este tipo de incertidumbre. Al final del capítulo se realizarán unos comentarios sobre esta disquisición.

Puesto que se pretende que $W_T(s)$ normalice a la incertidumbre multiplicativa a la salida, para su elección se ha de tener en cuenta que para cada frecuencia se ha de cumplir la siguiente condición:

$$\sigma_i(E_{ms}(j\omega)) = \sigma_i(W_T(j\omega)\Delta_{ms}(j\omega)) \leq \sigma_i(W_T(j\omega))\bar{\sigma}(\Delta_{ms}(j\omega)) \leq \sigma_i(W_T(j\omega))$$

donde se ha aplicado la propiedad de los valores singulares:

$$\sigma_i(AB) \leq \sigma_i(A)\bar{\sigma}(B)$$

además de que $\bar{\sigma}(\Delta_{ms}(j\omega)) \leq 1 \forall \omega$.

La propuesta realizada para diseñar la matriz $W_T(s)$ consiste en escogerla como una matriz de funciones de transferencia cuadrada y diagonal, de la forma:

$$W_T(s) = \begin{bmatrix} W_{T11}(s) & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & W_{Tii}(s) & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & W_{Tqq}(s) \end{bmatrix}$$

donde la dimensión de la matriz q es igual al número de salidas del sistema. Cada función de transferencia $W_{Tii}(s)$ de su diagonal deberá ser estable y de fase mínima. Además, al ser la matriz $W_T(s)$ diagonal, sus valores singulares para cada frecuencia serán iguales al módulo de las correspondientes funciones de transferencia evaluadas en $s = j\omega$, esto es:

$$\sigma_i(W_T(j\omega)) = |W_{Tii}(j\omega)|$$

donde se ha supuesto que:

$$|W_{Tii}(j\omega)| \geq |W_{Tkk}(j\omega)|, \quad \forall i \geq k \quad \forall \omega$$

Una vez elegida la forma de $W_T(s)$, para el cálculo de las funciones de transferencias de su diagonal se seguirá el siguiente procedimiento:

1. Estimar la incertidumbre multiplicativa a la salida mediante la expresión:

$$E_{ms}(s) = (G^*(s) - G(s))G(s)^{-1}$$

y evaluar $E_{ms}(s)$ en $s = j\omega$. Dado que en general la incertidumbre $E_{ms}(s)$ será una matriz de funciones de transferencias, el cálculo de su expresión analítica puede ser tediosa, sobre todo si en el sistema $G^*(s)$ se incluyen tiempos muertos. Por esto, en muchos casos resultará más sencillo evaluar previamente las $G(s)$ y $G^*(s)$ en $s = j\omega$, con lo que dichas matrices serán constantes (con números complejos como coeficientes) para cada frecuencia. Para el cálculo de $E_{ms}(j\omega)$ bastará con realizar operaciones matriciales sencillas con matrices constantes para cada frecuencia.

2. Calcular los valores singulares de $E_{ms}(j\omega)$ y representarlos en la frecuencia. Con esto se obtendrán q curvas en la frecuencia, tales que:

$$\sigma_i(E_{ms}(j\omega)) \geq \sigma_k(E_{ms}(j\omega)) \quad \Leftrightarrow \quad i \geq k$$

siendo cada una de ellas similar a las dibujadas en la figura 4.1. Nótese que se está utilizando el concepto de valores singulares como extensión de la magnitud del diagrama de Bode para sistemas multivariables.

3. Elegir las funciones $W_{Tii}(s)$ ($i = 1, \dots, q$) tales que sean estables, de fase mínima y de forma que para cada frecuencia se cumpla que el módulo de cada una de ellas sea superior al i -ésimo valor singular de la incertidumbre, esto es:

$$|W_{Tii}(j\omega)| \geq \sigma_i(E_{ms}(j\omega)) \quad \forall \omega \quad i = 1, \dots, q$$

Además, teniendo en cuenta que $W_T(s)$ debe ponderar a la función de sensibilidad complementaria, para imponer que ésta tenga ganancia pequeña en alta frecuencia (ver sección 2.3) se diseñará cada función $W_{Tii}(s)$ de forma que su módulo posea un valor alto en alta frecuencia.

Para aclarar conceptos, en la figura 4.3 se muestra un ejemplo en el que se ha considerado un sistema multivariable con tres salidas. Puede observarse como se han diseñado tres funciones de ponderación $W_{T11}(s)$, $W_{T22}(s)$ y $W_{T33}(s)$ de forma que sean cotas superiores de $\sigma_1(E_{ms}(s))$, $\sigma_2(E_{ms}(s))$ y $\sigma_3(E_{ms}(s))$ respectivamente. Nótese además como el módulo de las funciones $W_{Tii}(s)$ es grande en alta frecuencia.

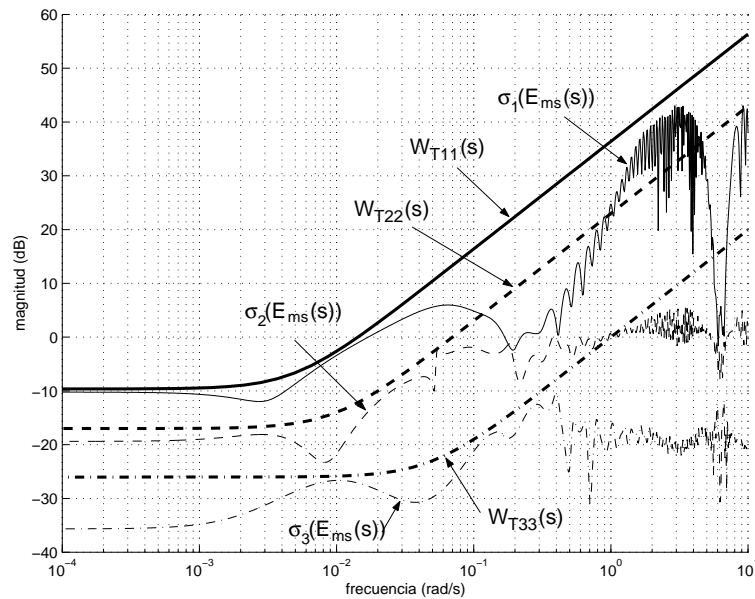


Figura 4.3: Diseño de la matriz de ponderación $W_T(s)$.

4.2.3 Cálculo de la matriz de ponderación $W_S(s)$

De la misma manera que la matriz $W_T(s)$ es utilizada en el sentido de estabilizar robustamente a la planta, la matriz $W_S(s)$ va a ser utilizada para imponer condiciones de comportamiento sobre el sistema.

Como es sabido, la función de sensibilidad es especialmente interesante desde el punto de vista del control al poseer unas propiedades que caracterizan tanto a la calidad como a la rapidez de la respuesta temporal del sistema en bucle cerrado.

Respecto a la calidad, el pico en frecuencia del módulo (del valor singular máximo en sistemas multivariables) de la función $S(s)$ (esto es, la norma infinito de la función $S(s)$) proporciona una idea de cuánto va a sobreoscilar el sistema (comportamiento) y de la distancia del sistema a la inestabilidad (robustez). En este sentido, se puede establecer un margen de estabilidad relativa basándose en esta función de sensibilidad.

Respecto a la rapidez del sistema, el ancho de banda de $S(s)$ es un índice muy indicativo del tiempo característico de la respuesta temporal del sistema en bucle cerrado. El ancho de banda de esta función se define para sistemas monovariantes como la frecuencia a la cual el módulo de $S(j\omega)$ corta por primera vez y en sentido ascendente al valor $1/\sqrt{2}$ ($-3dB$ aproximadamente) en un diagrama de Bode, mientras que para sistemas multivariables este ancho de banda se corresponde con una franja de frecuencias entre los cortes de los valores singulares máximo y mínimos por $1/\sqrt{2}$. Teniendo en cuenta que la función de sensibilidad relaciona al error con los cambios de referencia y con las perturbaciones al sistema (ver sección 2.3), este ancho de banda será interpretado como la frecuencia hasta la cual el control es efectivo en términos de comportamiento. Por lo tanto, a mayor ancho de banda de $S(s)$, más grande será el rango de frecuencias para el cual el control es efectivo y por tanto con más rapidez responderá el sistema.

Es especialmente interesante resaltar el hecho de que se exija que la función de sensibilidad sea pequeña para que los errores sean pequeños. Esto implica que en el rango de frecuencia donde el módulo (valores singulares en sistemas MIMO) de $S(s)$ sea pequeño el error será pequeño, “independientemente de la fase” del sistema. Si las mismas especificaciones se impusieran sobre la función de sensibilidad complementaria, la condición que obtendríamos sería que su módulo debería ser muy cercano a la unidad. Sin embargo, esta condición por sí sola no garantiza que el error sea pequeño, ya que en un caso extremo el sistema podría estar en contrafase aún siendo uno el módulo de $T(s)$, con lo cual se estaría realimentando positivamente en el rango de frecuencias donde esto sucediera (normalmente en torno a la frecuencia de corte), y en consecuencia no se estaría controlando al sistema en absoluto. Este es el motivo por el que las especificaciones de comportamiento se suelen imponer sobre la función de sensibilidad.

Considerando que en el planteamiento de sensibilidad mixta la matriz de ponderación $W_S(s)$ pondera a la función de sensibilidad $S(s)$, para el diseño de $W_S(s)$ se van a tener en cuenta las ideas expuestas anteriormente. La propuesta realizada es tomar $W_S(s)$ como una matriz de funciones de transferencia cuadrada y diagonal, de la forma:

$$W_S(s) = \begin{bmatrix} W_{S11}(s) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & W_{Sqq}(s) \end{bmatrix}$$

donde la dimensión de la matriz, q , de nuevo es igual al número de salidas del sistema. Se diseñará cada función de transferencia $W_{Sii}(s)$ de la diagonal teniendo en cuenta que su inversa, $W_{Sii}(s)^{-1}$, será la que intente moldear a $\sigma_i(S(s))$ en forma de cota superior. Por ello se propone diseñar cada $W_{Sii}(s)$ de la forma

$$W_{Sii}(s) = \left(\frac{\alpha_i s + \omega_{Si}}{s + \beta_i \omega_{Si}} \right)^N$$

donde se obviará el subíndice i cuando se trate de un sistema monovariable.

A continuación se expone cómo elegir cada uno de los parámetros que aparecen en estas funciones para un valor de $N = 1$.

- α_i : es la ganancia de la función en alta frecuencia. Como es sabido, un valor característico del pico máximo que debe tener el módulo de la función de sensibilidad para que el comportamiento del sistema sea aceptable es de aproximadamente 2, lo cual sucede en torno a la frecuencia de corte. Puesto que $W_{Sii}(s)^{-1}$ debe imponer cotas superiores a $\sigma_i(S(s))$, es deseable que la ganancia en alta frecuencia de $W_{Sii}(s)^{-1}$ ($1/\alpha_i$) sea del orden de 2. Por lo tanto, un valor apropiado para cada α_i debería ser del orden de 0.5.
- β_i : es la ganancia de la función a baja frecuencia. Siguiendo el mismo razonamiento que se hizo en el punto anterior sobre la inversa de $W_{Sii}(s)$, el valor de β_i hace las veces de la cota superior del error en régimen permanente permitido. Desde el punto de vista del control podría ser deseable tener errores nulos en régimen permanente, lo cual implicaría que el valor de β_i deseado debería ser cero. Sin embargo, por problemas numéricos en el algoritmo de cálculo del controlador (ver sección 3.4), la planta aumentada no puede tener autovalores en el eje imaginario, cosa que sucedería si se anulase el valor de β_i . Por lo tanto, puesto que β_i no puede ser nulo, habrá que proporcionarle un valor suficientemente pequeño para que los errores en régimen permanente sean aceptables y a su vez suficientemente grande para que no dé lugar a problemas numéricos. Un valor apropiado para este valor puede estar entre 10^{-6} y 10^{-4} dependiendo de la aplicación.

- ω_{S_i} : es la frecuencia de corte de la función y marcará la frecuencia de corte mínima que se requiere de la función a la que pondera. Para el diseño de este parámetro se propone una *elección inicial* de una década por debajo de la frecuencia de corte de la función $W_{T11}(s)$ previamente diseñada. A esta frecuencia se la denominará ω_T , cuyo valor en el ejemplo de la figura 4.4 es de 0.015 rad/s aproximadamente. Según el diseño propuesto de $W_T(s)$, esta frecuencia se corresponderá aproximadamente con la frecuencia a la cual el valor singular máximo de la incertidumbre alcanza el valor unidad. Con esta elección inicial se obtendrán respuestas lentas y raramente oscilatorias. A medida que se aumenta ω_{S_i} se irán obteniendo respuestas más rápidas pero más oscilatorias. En los distintos experimentos realizados se ha comprobado que las variaciones del valor de ω_{S_i} se deben hacer con una escala logarítmica para que tengan un efecto similar en todos ellos. Basándose en esto, se propone expresar el valor de ω_{S_i} mediante la expresión:

$$\omega_{S_i} = 10^{(\kappa_i - 1)} \omega_T$$

donde una vez obtenida ω_T , el parámetro κ_i será el encargado de variar el valor de ω_{S_i} . La elección inicial se obtiene para un valor de κ_i igual a cero, mientras que para un valor igual a uno se obtendría que ω_{S_i} sería igual a ω_T . Por lo tanto, la elección final de esta frecuencia queda determinada por el valor de un parámetro cuyo valor debe ser más elevado a medida que se desee una respuesta más rápida.

Para finalizar el diseño de $W_{S_{ii}}$ habrá que elegir el valor deseado de N . Este parámetro determina la pendiente que tiene la función de ponderación en frecuencias por debajo de la frecuencia de corte. Dado que para valores pequeños de la función de sensibilidad (deseable en baja frecuencia) se tiene que ésta es aproximadamente igual a la inversa de la función de lazo (ver sección 3.7.1), para ese rango de frecuencia ambas funciones tendrán la misma pendiente. Basándose en este hecho, se elegirá el valor de N para especificar la pendiente deseada de la función de lazo a baja frecuencia, siendo esta pendiente igual a $-20N$ dB/dec. Esto será especialmente útil cuando el tipo del sistema sea superior a cero. En estos casos, eligiendo un valor de N superior a 1 se impondrá como especificación que el controlador posea efecto integral, lo cual es especialmente deseable cuando se han de rechazar perturbaciones mantenidas a la entrada de la planta.

Hay que hacer notar que al variar el valor de N también se cambia la ganancia de la función de ponderación en baja y alta frecuencia. Para mantener esta ganancia habrá que sustituir el valor de α_i por $\sqrt[N]{\alpha_i}$ y el de β_i por $\sqrt[N]{\beta_i}$. Véase que la elección de N prácticamente no influye en el parámetro ω_{S_i} .

Teniendo en cuenta todas estas disquisiciones, finalmente se propone la siguiente expresión para esta función de ponderación:

$$W_{Sii}(s) = \left(\frac{\sqrt[N]{\alpha_i} s + 10^{(\kappa_i-1)\omega_T}}{s + \sqrt[N]{\beta_i} 10^{(\kappa_i-1)\omega_T}} \right)^N$$

en la que el parámetro α_i debe ser del orden de 0.5, β_i debe tener un valor mucho menor que 1 y κ_i adoptará valores positivos, donde mientras más alto sea su valor más rápidamente evolucionará el sistema. En la figura 4.4 se muestra la forma deseada del módulo de estas funciones de ponderación.

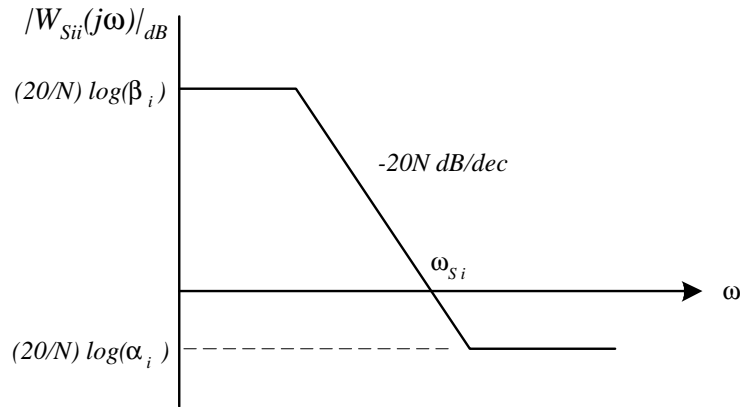


Figura 4.4: Diseño de $W_{Sii}(s)$.

4.2.4 Cálculo de la matriz de ponderación $W_U(s)$

Como se expuso en la sección 3.9, la función $W_U(s)$ pondera a la sensibilidad al control, función que relaciona la referencia y perturbaciones con la actuación que proporciona el controlador (ver sección 2.3). Por lo tanto, el uso de esta función permite penalizar la señal de control en el rango de frecuencia deseado.

Además del enfoque anterior, la inclusión de esta función de ponderación permite eliminar problemas numéricos en el algoritmo de síntesis del controlador. Una de las hipótesis realizadas en la sección 3.4 indica que la matriz D_{12} ha de ser de rango completo. Observando que dicha matriz es la submatriz de D (matriz directa de la descripción interna de la planta aumentada $P(s)$) que relaciona al vector de objetivos de control z con la señal de control u , la inclusión de $W_U(s)$ permite que se pueda cumplir dicha hipótesis. Es conveniente aclarar que con esto no se quiere indicar que sea necesaria la inclusión de esta función de ponderación para verificar esta hipótesis, sino que puede hacer que se cumpla en casos en los que sin su inclusión no se verificaba.

El objetivo que se va a perseguir con el uso de la función $W_U(s)$ será el de disminuir la sobreoscilación de la respuesta temporal del sistema sin que con esto se afecte signi-

Como puede observarse, la forma de $W_U(s)$ propuesta es la de un filtro paso banda centrado en ω_d , con ganancia unitaria tanto en baja como en alta frecuencia y con anchura de la banda en función del parámetro ρ . El valor de este parámetro se tomará en torno a 3, siendo mayor la anchura de la banda a medida de dicho valor aumenta. En la figura 4.6 se muestra la forma de la función propuesta para unos valores de $\omega_d = 1 \text{ rad/s}$ y $\rho = 3$.

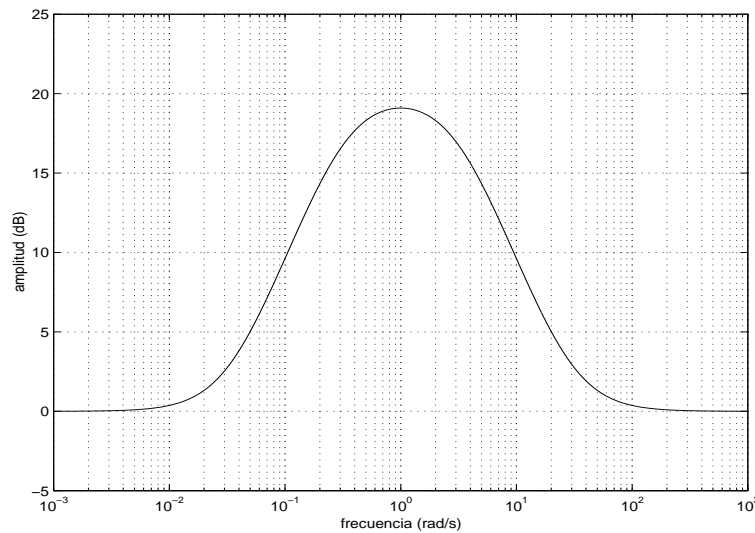


Figura 4.6: Diseño de $W_U(s)$ con $\omega_d = 1 \text{ rad/s}$ y $\rho = 3$.

Existen otras tendencias ([Lun91, Anw93]) en las cuales se propone esta función como un filtro paso alto. Esta segunda opción tiene la ventaja de que el controlador obtenido es de un orden inferior. Sin embargo, la respuesta temporal obtenida es más lenta al penalizar excesivamente las frecuencias altas.

La ganancia estática de la función propuesta es la unidad. Esta ganancia puede ser aumentada en caso de que la saturación en los actuadores del sistema sea una restricción importante. Por otra parte, si la saturación apareciera en la velocidad del actuador sería conveniente diseñar $W_U(s)$ como un filtro paso alto que penalizara la señal de control en las frecuencias superiores a la de la saturación en velocidad del actuador.

4.3 Metodología de diseño

Una vez que se ha mostrado cómo calcular cada una de las funciones de ponderación, en este apartado se van a exponer los pasos a seguir para la obtención del controlador final.

1. Elegir el modelo nominal de bajo orden y sin tiempos muertos.
2. Estimar la incertidumbre multiplicativa a la salida del sistema respecto al modelo nominal elegido.
3. Diseñar $W_T(s)$ según las condiciones expuestas en el apartado 4.2.2.
4. Diseñar $W_S(s)$ con $\kappa_i = 0$ y valores estándares de α_i y β_i (ver apartado 4.2.3).
5. Diseñar inicialmente $W_U(s)$ con valor unidad.
6. Construir la planta aumentada $P(s)$ y calcular un primer controlador $K(s)$.
7. Rediseñar $W_S(s)$ aumentando los valores de κ_i hasta conseguir un tiempo de subida de la respuesta temporal ligeramente superior al deseado.
8. Estimar la frecuencia de oscilación de la respuesta temporal ω_d obtenida con el diseño definitivo de $W_S(s)$.
9. Rediseñar $W_U(s)$ utilizando la frecuencia ω_d estimada en el punto anterior y un valor estándar de ρ (ver apartado 4.2.4).

En caso de que no se desee incluir la función de ponderación $W_U(s)$ (sensibilidad mixta S/T), se deberán omitir los pasos 5, 8 y 9.

4.4 Comentarios acerca del método de diseño

Las reglas de diseño expuestas en apartados anteriores son reglas semiempíricas diseñadas con criterios ingenieriles. El uso del adjetivo *semiempíricas* se debe a que en cierta manera es lógico diseñar las funciones de ponderación de la forma que se ha expuesto. Hasta la obtención de las reglas, han sido muchas las pruebas que se han realizado en las que el cálculo del controlador no ha sido satisfactorio, bien por la aparición de problemas numéricos o bien porque el comportamiento del sistema controlado no era el adecuado. De hecho, esta metodología ha sido el resultado de largas horas de experimentación, en las que se incluyen los resultados del capítulo siguiente.

Por otra parte, el objetivo de este trabajo es proponer una serie de reglas *prácticas* con las que poder obtener controladores avanzados de una forma simple para el usuario final, sin necesidad de que éste deba conocer a fondo las técnicas de control H_∞ . Ahora bien, en este punto es conveniente aclarar que se es consciente de que utilizando estas reglas en general no se está cumpliendo las condiciones matemáticas de comportamiento robusto. Esto es, el controlador final obtenido no será capaz de controlar a cualquier

sistema $G^*(s)$ perteneciente a la familia de plantas F_G considerada, salvo que el valor de κ_i elegido sea excesivamente pequeño.

Sin embargo, el uso de las reglas se justifica teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

- Debido al tipo de incertidumbre considerada, la región de incertidumbre con la que se trabaja suele ser excesivamente amplia, siendo habitual que se incluyan dentro de la familia de plantas F_G sistemas que no tengan correspondencia con ninguna situación real.
- El ajuste del controlador final se realiza partiendo de un controlador inicial bastante conservador y se va haciendo cada más agresivo basándose en la respuesta temporal del sistema real $G_r(s)$, lo cual implica que realmente el controlador está cumpliendo la misión de controlar al sistema real.
- El valor de γ (ver sección 3.4) que se suele obtener con este método es del orden de la unidad (no muy superior a 1) una vez elegido los valores finales de κ_i . Esto implica, aplicando el *Teorema de la Pequeña Ganancia*, que no se está lejos de garantizar matemáticamente el comportamiento robusto del sistema, donde además habrá que tener en cuenta lo conservador que es este teorema. En cualquier caso, se puede conseguir dicha condición matemática simplemente reduciendo los valores de κ_i , si bien se obtendrán resultados pobres en la respuesta del sistema.

Para finalizar, es conveniente recordar la importancia que tiene el escalado del sistema como paso previo al diseño del controlador, sobre todo para sistemas multivariables. Aparte de evitar problemas numéricos (por ejemplo, disminuyendo el número de condición del sistema), el uso del escalado permite normalizar las entradas, con lo que también se normaliza el valor de la saturación. Esto permite mantener la ganancia de $W_U(s)$ con valor unidad.

Además, en el caso de sistemas multivariables, el escalado permite que todas las magnitudes sean comparables en magnitud, y en concreto los errores de los distintos canales. Recordando que el control H_∞ atenúa la *energía* del vector objetivo z , al ser todas las variables de la misma magnitud, todas ellas tendrán el mismo peso relativo en el valor de la energía calculado. Esto permitirá utilizar los mismos valores de los parámetros de las funciones de ponderación (α_i, β_i, \dots) para todos los canales.

Como se comentó en la introducción, en el siguiente capítulo se comprobará la validez de esta metodología con su aplicación a sistemas reales de distinta índole.

Capítulo 5

Aplicaciones del Problema de Sensibilidad Mixta

5.1 Introducción

En este capítulo se va a probar la validez de la metodología de diseño de controladores H_∞ basada en las reglas expuestas en el capítulo anterior. Para ello se presenta el diseño de controladores para aplicaciones reales de distinta índole, exponiendo resultados experimentales en cada una de ellas.

Los objetivos que se pretenden conseguir para cada una de las aplicaciones son los siguientes:

1. Garantizar la estabilidad para cualquier punto de operación admisible de la planta.
2. Conseguir un buen comportamiento para cada uno de estos puntos de operación.

De la metodología de diseño de las funciones de ponderación propuesta se deduce que si bien no es necesario tener amplios conocimientos teóricos para aplicar esta técnica de control “avanzada”, sí que es conveniente tener una amplia información del proceso a controlar. El método de diseño del modelo nominal y de la incertidumbre asociada al mismo va a depender del conocimiento que se posea de cada aplicación en particular.

En principio, a mayor conocimiento de la dinámica del sistema mejor será el criterio de elección del modelo nominal. Por tanto, el conocimiento del sistema real será de gran importancia para saber distinguir en qué puntos de operación funcionará bien el controlador y cuáles son los motivos por los que deja de funcionar correctamente en otros.

Para la exposición de este capítulo se han elegido distintos sistemas reales como ejemplos característicos de aplicación de la metodología de diseño expuesta en la sección 4.3. A continuación se realiza una breve exposición de las características de cada uno de ellos:

Planta solar:

Se trata de un sistema de potencia para el aprovechamiento de energía solar. Éste es un sistema de grandes dimensiones con una dinámica muy lenta y en el que existe la posibilidad de trabajar en puntos de funcionamiento muy variados. Tanto las perturbaciones sobre el sistema así como las incertidumbres del mismo son importantes debido al carácter no lineal de su dinámica. Se mostrará como con un controlador H_∞ lineal fijo se podrán obtener buenos resultados en un amplio rango de puntos de operación.

Seguimiento visual:

Esta segunda aplicación consistirá en el control de la posición de un robot de realimentado por un sistema de visión, el cual es un sistema rápido con incertidumbres debidas a la calibración de la cámara, a la estimación de la posición del objeto por retardos de los algoritmos implementados y por el efecto de la velocidad de la cámara y a errores de modelado del brazo manipulador. Se expondrá cómo el diseño propuesto de la función $W_U(s)$ mejora los resultados respecto al diseño clásico de esta función de ponderación. Se volverá a comprobar cómo el controlador diseñado proporciona un buen comportamiento, realizando una comparativa con resultados obtenidos con otras metodologías de control.

Servomecanismo:

Con esta aplicación se pretende mostrar cómo el diseño del parámetro N de la función de ponderación $W_S(s)$ puede proporcionar el tipo deseado al controlador. Para ello se ha elegido un servomecanismo de corriente continua con una zona muerta y una saturación, y cuyo comportamiento en la zona de funcionamiento lineal puede ser aproximado por una función de transferencia de tipo uno. Se verá cómo la elección adecuada de dicho parámetro permitirá que el controlador posea efecto integral, lo cual será útil para rechazar perturbaciones a la entrada del sistema así como para que la señal de control pueda escapar de la zona muerta.

Planta piloto:

Finalmente, en este cuarto ejemplo se presenta la aplicación de la metodología a un sistema multivariable. Éste se corresponde con una planta piloto construida

con elementos industriales y en la que se pretende controlar dos temperaturas de forma independiente utilizando la apertura de una válvula y una resistencia como variables de control. Las experiencias anteriores con esta planta indican que este sistema es especialmente complicado de controlar debido al desconocimiento de las múltiples dinámicas que interactúan en el mismo. Se comprobará que esta metodología proporciona buenos resultados desde el punto de vista de control, además de un método sencillo de sintonizar controladores multivariables.

Esta metodología ha sido probada con éxito no sólo en los sistemas anteriores, sino también en otros muchos, tanto a nivel de simulación como a nivel de experimentación (calentadores de aire, planta de secado de orujo, sistemas de posicionamiento, sistema de doble rotor, etc.). No se han incluido más ejemplos por considerar que no aportan nada nuevo conceptualmente o bien por no poseer resultados experimentales de los mismos (a pesar de haber sido probados en simuladores suficientemente contrastados). De hecho, todos estos experimentos han sido de gran utilidad para desarrollar la metodología de diseño expuesta en el capítulo anterior.

El proceso de síntesis del controlador ha variado de una aplicación a otra. Así, tanto en la primera como en la tercera aplicación el controlador se ha diseñado totalmente en el dominio de *Laplace* y posteriormente se ha discretizado utilizando una transformación bilineal de Tustin. Por el contrario, en la segunda aplicación el controlador se ha calculado en el dominio z , discretizando las funciones de ponderación con una transformación bilineal de Tustin antes de construir la planta generalizada en tiempo discreto. Por último, en la cuarta aplicación el modelo ha sido obtenido en tiempo discreto (mediante conocidos algoritmos de identificación), el cual se ha convertido al dominio continuo (con una transformación bilineal Tustin inversa) para realizar a continuación el mismo proceso seguido en la primera aplicación.

Finalmente, apuntar que los resultados de este capítulo han sido publicados en los artículos con las referencias [Ort97, Cam97b, Ort98, Ort99, Ort00a, Ort00b, Ort01].

5.2 Control H_∞ de una planta solar

La búsqueda de nuevas fuentes de energía ha inducido a que cada vez más a menudo se utilicen sistemas de potencia que aprovechen la energía proveniente del sol. Para ello se han diseñado diferentes métodos de captación de dicha energía, como por ejemplo paneles de células fotovoltaicas para la extracción directa de electricidad, radiación directa concentrada mediante el posicionamiento de paneles reflectantes, sistemas de paneles para el calentamiento de agua o la generación directa de vapor.

El sistema con el que se va a tratar en esta sección consiste en un campo de colectores solares distribuidos. Cada colector tiene un espejo parabólico que enfoca la radiación solar sobre una tubería por la que circula aceite, provocando que el fluido aumente su temperatura.

El objetivo de control en este caso consiste en mantener la temperatura del aceite a la salida del campo de colectores al valor deseado. Para ello habrá que tener en cuenta que existen importantes perturbaciones sobre el sistema, como pueden ser la variación del nivel de radiación solar provocada a la aparición de nubes, la reflectividad de los espejos debido al ensuciamiento de los mismos o la variación de la temperatura de entrada del aceite al campo de colectores.

Puesto que la radiación solar no puede ser ajustada, el objetivo de control sólo puede conseguirse adaptando el caudal del aceite, y teniendo en cuenta la forma de la característica del ciclo diario de potencia solar, esto hace que dicho caudal deba variar sustancialmente durante el tiempo de funcionamiento de la planta. Variaciones tan altas del caudal de aceite dan lugar a modificaciones significativas en las características dinámicas del campo de colectores, como por ejemplo en la velocidad de respuesta o en el tiempo muerto del mismo, lo cual hace que aumente la dificultad en obtener un comportamiento adecuado en el rango de operación con un sólo controlador fijo.

Teniendo en cuenta estas perturbaciones y las variaciones en las características dinámicas, el diseño de un controlador robusto que garantice estabilidad y comportamiento queda plenamente justificado. El planteamiento del diseño del controlador se ha basado en un amplio conocimiento del proceso. Este conocimiento se ha obtenido a partir de experimentos sobre la planta realizados en los últimos años utilizando diferentes estrategias de control ([Rub82, Cam88, Cam92, Cam94, Rub95, Rub96a, Cam97a]).

Los resultados de esta sección han sido publicados en los artículos con las referencias [Ort97, Cam97b].

5.2.1 Descripción del sistema

La planta considerada se corresponde con el campo de colectores distribuidos ACUREX perteneciente a la planta solar SSPS ([Kal82]), situada en la localidad de Tabernas (Almería). En la figura 5.1 se muestra un esquema de la misma.

El campo consta de 480 colectores solares distribuidos que utilizan una superficie parabólica para concentrar la radiación solar que reciben perpendicularmente sobre una tubería situada en el punto focal de la parábola. Asimismo, el campo también consta

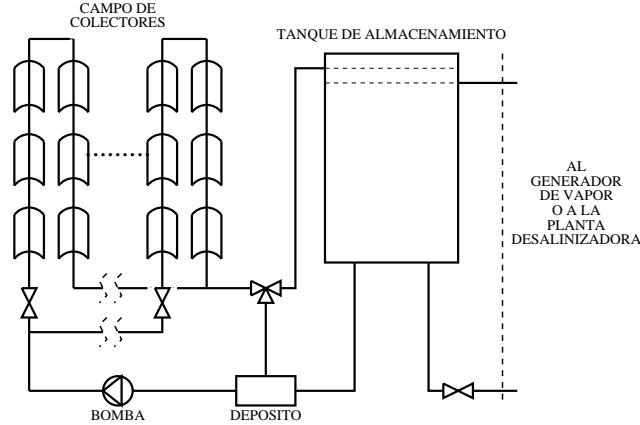


Figura 5.1: Esquema del campo de colectores distribuidos.

de un sistema de seguimiento del sol de forma que los espejos giren sobre un eje paralelo a la tubería, permitiendo que las superficies parabólicas estén siempre dirigidas hacia la posición del sol en cada instante.

El aceite frío que entra en el campo es extraído de la parte inferior de un tanque de almacenamiento, atravesando el campo gracias a una bomba situada en la entrada del mismo. La planta está provista de un sistema de válvulas que permite que el aceite sea reciclado al campo de colectores (en vez de dirigirlo de nuevo al tanque de almacenamiento), en caso de que su temperatura a la salida del campo no sea suficientemente alta.

El aceite caliente del tanque es utilizado para alimentar a un generador de vapor para producir energía eléctrica o a una planta desalinizadora.

5.2.2 Modelo dinámico

El sistema puede ser descrito como un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales de parámetros distribuidos, las cuales fueron utilizadas para desarrollar un modelo ([Ber93]) de forma que el esquema de control pueda ser validado mediante simulación.

Bajo ciertas condiciones ([Cam97a]), las temperaturas del sistema pueden obtenerse mediante las siguientes ecuaciones:

$$\rho_m C_m A_m \frac{\partial T_m}{\partial t} = I n_o G - H_l G (T_m - T_a) - L H_t (T_m - T_f)$$

$$\rho_f C_f A_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + \rho_f C_f \dot{q} \frac{\partial T_f}{\partial x} = L H_t (T_m - T_f)$$

donde los subíndices m se refieren al metal y f al fluido. Los parámetros que aparecen en estas ecuaciones tienen el siguiente significado:

ρ	:	densidad ($\frac{Kg}{m^3}$)
C	:	capacidad del campo ($\frac{KgJ}{Kg^\circ C}$)
A	:	área transversal (m^2)
T	:	temperatura ($^\circ C$)
T_a	:	temperatura ambiente ($^\circ C$)
I	:	radiación solar ($\frac{W}{m^2}$)
n_o	:	eficiencia óptica
H_l	:	coeficiente global de pérdidas térmicas ($\frac{W}{m^2^\circ C}$)
H_t	:	coeficiente de transmisión metal fluido ($\frac{W}{m^2^\circ}$)
G	:	anchura de los espejos de los colectores (m)
L	:	diámetro interior de la tubería (m)
\dot{q}	:	caudal de aceite ($\frac{m^3}{s}$)

Las ecuaciones anteriores, obtenidas al aplicar el principio de conservación de la energía al metal de la tubería y al fluido, fueron utilizadas para simular el sistema en una computadora dividiendo cada uno de los lazos en cien partes y utilizando el modelo de parámetros concentrados para cada parte. El modelo fue contrastado con datos reales obtenidos del campo ([Ber93, Cam88]), ajustando posteriormente sus parámetros de forma que reprodujeran el comportamiento del sistema real.

Para analizar el comportamiento dinámico del campo se realizaron pruebas aplicando un PRBS (*Pseudo Random Binary Sequence*) en torno a distintos puntos de operación, tanto en el sistema real como en el modelo no lineal ([Ber96a]). En la figura 5.2 se muestra la respuesta en frecuencia obtenida al realizar un análisis espectral comparando datos de salida frente a datos de entrada para distintos caudales de aceite. Esta respuesta frecuencial se corresponde con la del sistema junto a un controlador por prealimentación en serie diseñado para compensar el régimen permanente de las perturbaciones producidas por la radiación solar y la temperatura del aceite en la entrada. En esta figura puede observarse como la planta muestra varios de modos antirresonantes, que son atenuados por las pérdidas térmicas.

5.2.3 Síntesis del controlador

El problema presentado se ha resuelto utilizando el planteamiento de *optimización de sensibilidad mixta S/T*. Por lo tanto, en este caso se trata de *hallar un controlador estabilizante que minimice*

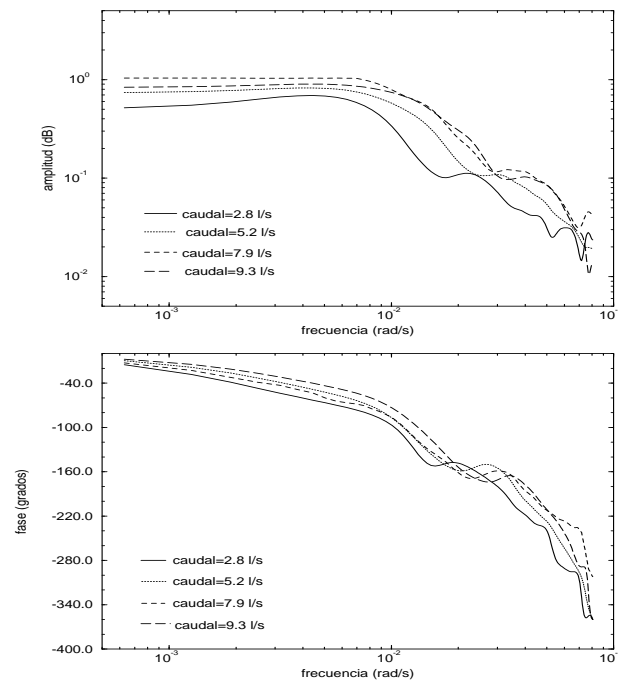


Figura 5.2: Respuesta en frecuencia del campo de colectores en distintos puntos de funcionamiento.

$$\|T_{z\omega}(s)\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} W_S(s)S(s) \\ W_T(s)T(s) \end{bmatrix} \right\|_{\infty}$$

donde $S(s)$ y $T(s)$ son las funciones de transferencia de sensibilidad y sensibilidad complementaria respectivamente y $W_S(s)$ y $W_T(s)$ son sus respectivas funciones de ponderación que permiten tener en cuenta en el diseño qué rango de frecuencias será importante para cada función de transferencia en bucle cerrado (ver figura 3.12).

Los pasos que se han llevado a cabo para obtener un controlador que cumpla los objetivos marcados han sido los siguientes:

Elección del modelo nominal

Para elegir el modelo nominal se ha de tener en cuenta que el controlador calculado será del mismo orden o un orden superior al de la planta generalizada. Por lo tanto es aconsejable tomar un sistema nominal de bajo orden. La función de transferencia elegida como sistema nominal y que relaciona la temperatura de referencia del controlador por prealimentación (el cual, como se ha mencionado anteriormente, está considerado

como parte de la planta) y la temperatura del aceite a la salida es la siguiente:

$$G(s) = \frac{0.8}{\left(\frac{s}{0.013} + 1\right)^2}$$

Esta función de transferencia ha sido seleccionada a partir del análisis frecuencial de la figura 5.2, de forma que el módulo de la función nominal esté dentro del módulo de la familia de plantas representadas en la figura. Hay que hacer notar que se ha elegido un sistema nominal sin retardo, y por tanto no se está incluyendo el tiempo muerto del sistema. Éste sólo afecta a la fase del diagrama de Bode y se está considerando como incertidumbre.

Diseño previo de las funciones de ponderación

Siguiendo las reglas expuestas en el capítulo anterior, se ha estimado la incertidumbre multiplicativa como paso previo al diseño de la función de ponderación $W_T(s)$. En el caso de sistemas monovariantes la incertidumbre multiplicativa puede estimarse mediante la expresión:

$$E_m(s) = \frac{G^*(s) - G(s)}{G(s)}$$

donde $G^*(s)$ representa a los diferentes comportamientos del sistema en cada uno de los puntos de trabajo.

En este punto se debe tener en cuenta un tiempo muerto adicional debido a la implementación del sistema de control. A pesar de que el controlador se diseña en el dominio de *Laplace*, éste se implementará en ecuaciones en diferencias, con un tiempo de muestreo de 39 segundos. Dado que el sensor de temperatura está situado en las afueras del campo y que existen variaciones en el caudal de aceite, se considerará un tiempo muerto adicional que puede ser tratado como una incertidumbre en el modelo nominal. Este tiempo ha sido acotado superiormente por un tiempo de muestreo. Así, para el cálculo de la máxima incertidumbre se ha añadido a cada sistema $G^*(s)$ un retardo de 39 segundos y posteriormente se ha tomado la mayor incertidumbre en cada frecuencia. En la figura 5.3 se muestra el módulo del sistema nominal elegido junto con el módulo de la máxima incertidumbre para cada frecuencia.

Una vez estimada la incertidumbre multiplicativa y según las reglas expuestas en el capítulo anterior, la función de ponderación $W_T(s)$ será diseñada de forma que sea de fase mínima y tal que la magnitud de su respuesta frecuencial sea superior a la de la incertidumbre multiplicativa para cualquier frecuencia.

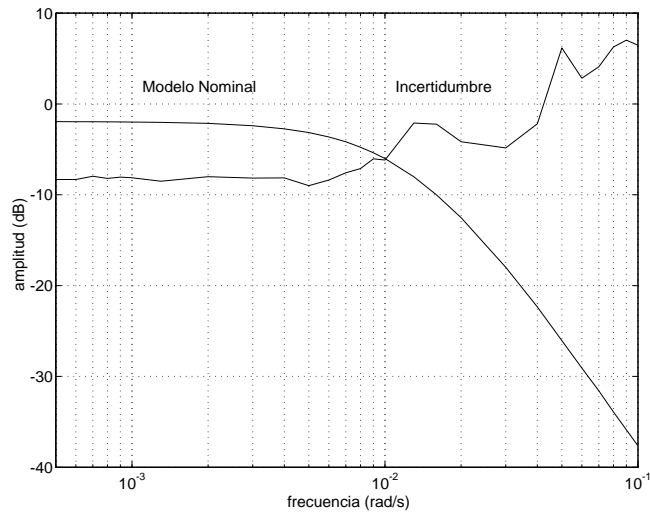


Figura 5.3: Modelo nominal y máxima incertidumbre para cada frecuencia.

La función $W_T(s)$ diseñada para esta aplicación ha sido la siguiente:

$$W_T = \frac{(143s + 1)(10s + 1)}{2.4}$$

lo cual supone una incertidumbre en la ganancia estática del sistema del 41.67% mientras que se considera un desconocimiento total de la planta a partir de la frecuencia $\omega_T = 0.01$ rad/s aproximadamente.

En la figura 5.4 se muestra el módulo de la máxima incertidumbre y el de la función de ponderación $W_T(s)$, donde puede comprobarse cómo se cumplen las condiciones anteriores. Puede resultar extraño que esta función de ponderación sea impropia. En la sección 5.2.3 se realizarán algunos comentarios al respecto.

Para el diseño de la función de ponderación $W_S(s)$, siguiendo las recomendaciones del capítulo anterior, se utiliza la expresión:

$$W_S(s) = \frac{\alpha s + 10^{(\kappa-1)}\omega_T}{s + \beta 10^{(\kappa-1)}\omega_T}$$

donde los parámetros elegidos para este caso han sido $\alpha = 0.5$, $\beta = 10^{-4}$ y, teniendo en cuenta la función $W_T(s)$ diseñada anteriormente, $\omega_T = 0.01$ rad/s.

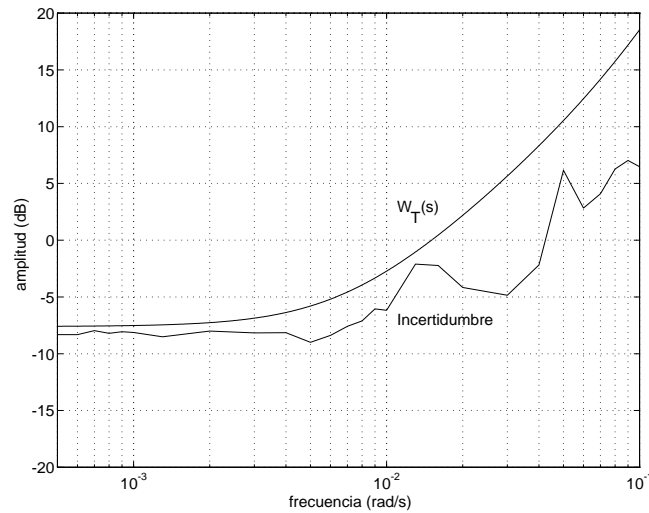


Figura 5.4: Función $W_T(s)$ como cota superior de la máxima incertidumbre multiplicativa.

Inicialmente se ha tomado $\kappa = 0$, con lo que a la función de ponderación $W_S(s)$ de partida se la asigna la siguiente expresión:

$$W_S(s) = \frac{0.5s + 10^{-3}}{s + 10^{-7}}$$

Construcción de la planta generalizada y obtención del controlador

Tal como se expuso en sección 3.10, antes de obtener el controlador habrá que construir la planta generalizada. En este caso se ha utilizado el conjunto de programas aportados en ([Chi98]), el cual permite introducir una función de ponderación $W_T(s)$ impropia siempre y cuando se cumpla que el producto $W_T(s)G(s)$ sea propio. En caso de haber utilizado cualquier otro paquete de programas, esto se podría haber solucionado simplemente introduciendo un par de polos de alta frecuencia en $W_T(s)$.

Una vez obtenida la planta generalizada, el controlador se calcula aplicando el algoritmo de síntesis expuesto en el capítulo anterior. El controlador obtenido en el dominio de *Laplace* se ha discretizado mediante una aproximación bilineal de Tustin con un tiempo de muestreo de 39 segundos.

5.2.4 Resultados de simulación

Para realizar simulaciones con los controladores obtenidos se ha utilizado el simulador basado en ecuaciones diferenciales no lineales de parámetros distribuidos al que se hace referencia en la sección 5.2.2. En las simulaciones se han utilizado valores de radiación solar correspondientes a un día solar típico. Estos datos, dibujados en la figura 5.5, han sido extraídos de una base de datos medidos del campo de colectores.

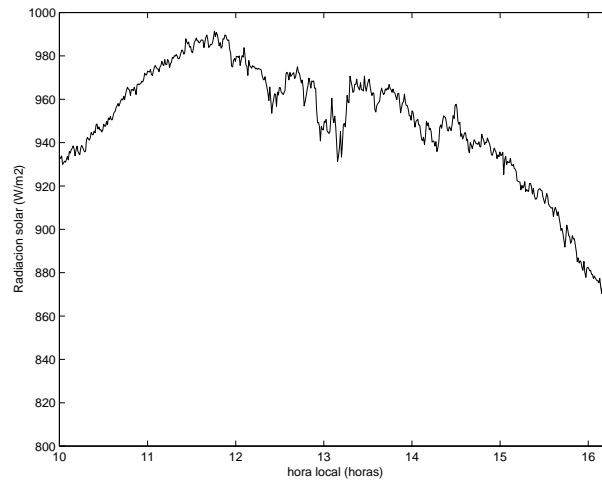


Figura 5.5: Radiación solar de un día típico.

Para las pruebas se han elegido varios puntos de operación, variando entre 230 y 290 °C. Los resultados de simulación con el controlador obtenido utilizando el diseño preliminar de las funciones de ponderación (*controlador 1*) se muestran en la figura 5.6, donde se realiza una comparación entre la respuesta del sistema con este controlador y con un controlador PID bien sintonizado ([Cam97a]). Se puede observar como el controlador H_∞ calculado inicialmente es excesivamente conservador, teniendo mejores propiedades la respuesta obtenida con el controlador PID.

A continuación se aumentó el valor de κ hasta 0.65, obteniéndose la siguiente función de ponderación:

$$W_S = \frac{0.5s + 4.4668 \cdot 10^{-3}}{s + 4.4668 \cdot 10^{-7}}$$

En la figura 5.7 se muestra una gráfica mostrando conjuntamente el módulo de $W_S(s)$ y $W_T(s)$ para este caso.

En la figura 5.8 se han expuesto los resultados de simulación obtenidos con el nuevo valor de κ (*controlador 2*), en los que aparece de nuevo la respuesta obtenida con el controlador PID. Puede observarse cómo la respuesta en este caso se hace sensiblemente más rápida si bien se vuelve algo oscilatoria.

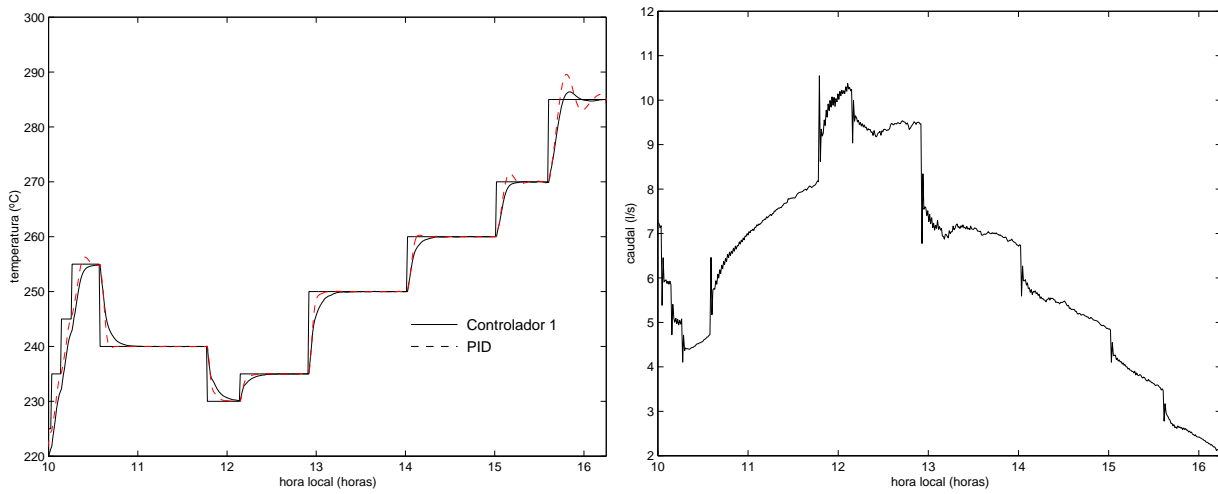


Figura 5.6: Resultados de simulación con $\kappa = 0$.

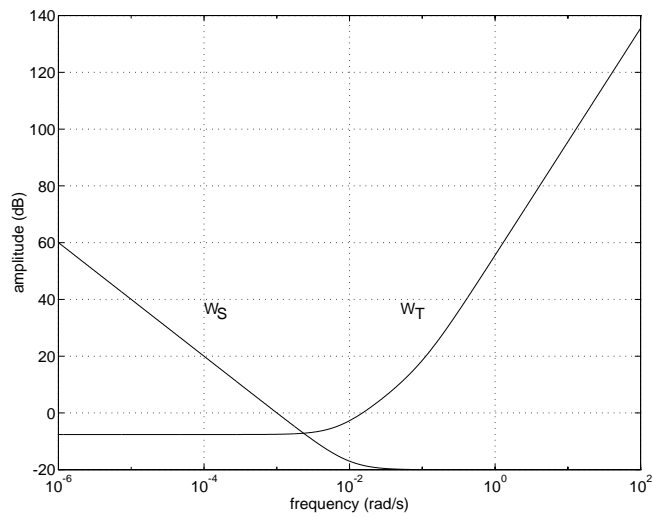
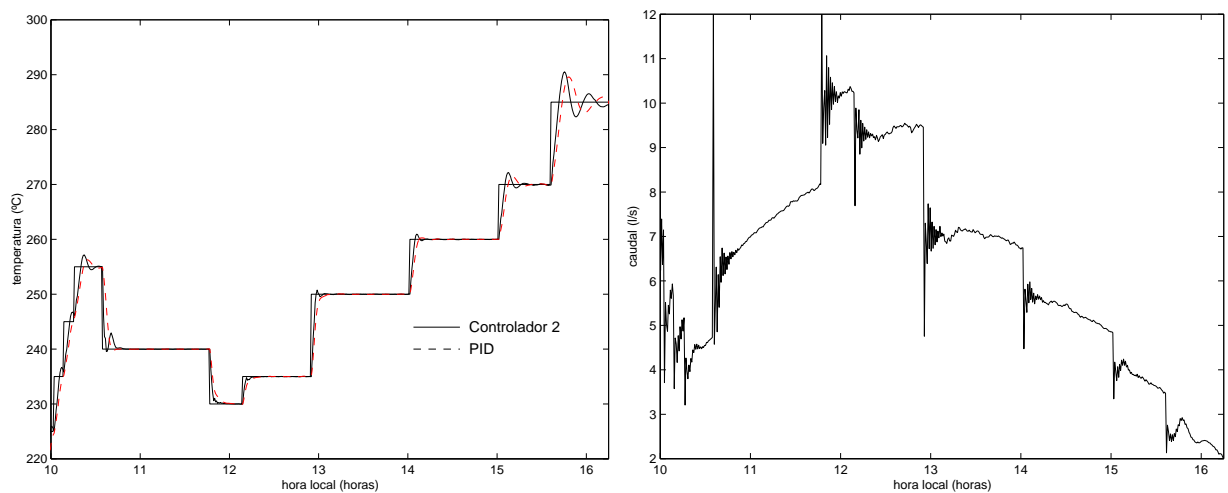
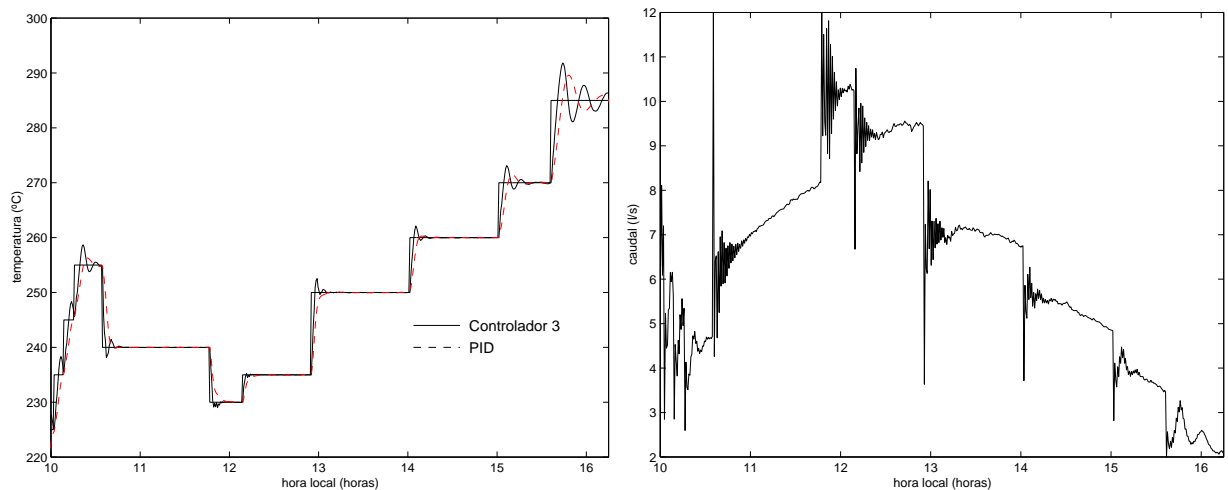


Figura 5.7: Funciones $W_T(s)$ and $W_S(s)$ con $\kappa = 0.65$.

Figura 5.8: Resultados de simulación con $\kappa = 0.65$.

Experimentos similares se realizaron aumentando de nuevo el valor de κ hasta 1 y 1.1 (ver figuras 5.9 (*controlador 3*) y 5.10 (*controlador 4*) respectivamente). La tónica de disminuir el tiempo de subida y aumentar la sobreoscilación se repite con el primer valor, mientras que para el último valor el sistema ya ha alcanzado la inestabilidad en bucle cerrado.

Figura 5.9: Resultados de simulación con $\kappa = 1$.

Finalmente, en la figura 5.11 se muestra un detalle de las gráficas anteriores correspondiente a la evolución del sistema a temperaturas intermedias. Puede comprobarse como el segundo controlador ($\kappa = 0.65$) mejora el comportamiento aportado por el controlador PID, dando por válido el diseño de dicho controlador.

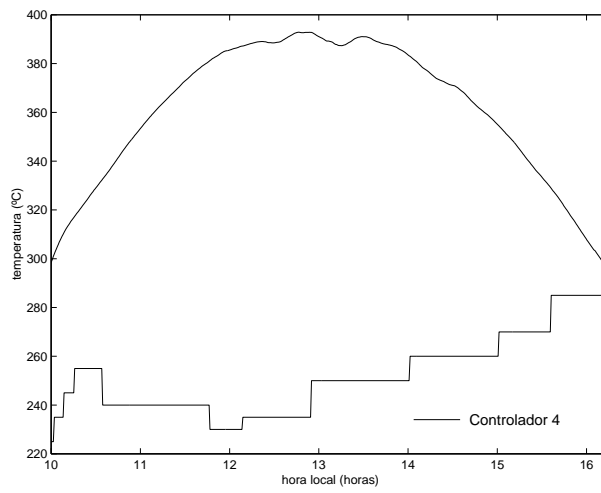


Figura 5.10: Resultados de simulación con $\kappa = 1.1$.

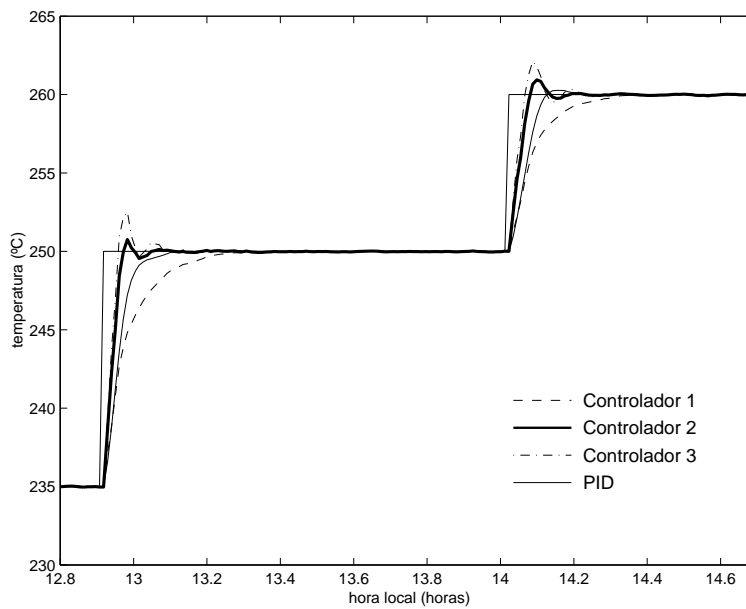


Figura 5.11: Detalle comparativo de los controladores anteriores.

5.2.5 Resultados experimentales

Para verificar los resultados obtenidos mediante simulación con el modelo no lineal del campo se realizó una campaña de pruebas sobre el sistema real.

Como ejemplo ilustrativo, en la figura 5.12 se muestra el comportamiento obtenido con el controlador diseñado con κ igual a 0.65 (*controlador 2*) y cuya expresión, tras ser discretizado con una transformación bilineal de Tustin con tiempo de muestreo igual a 39 segundos, es la siguiente:

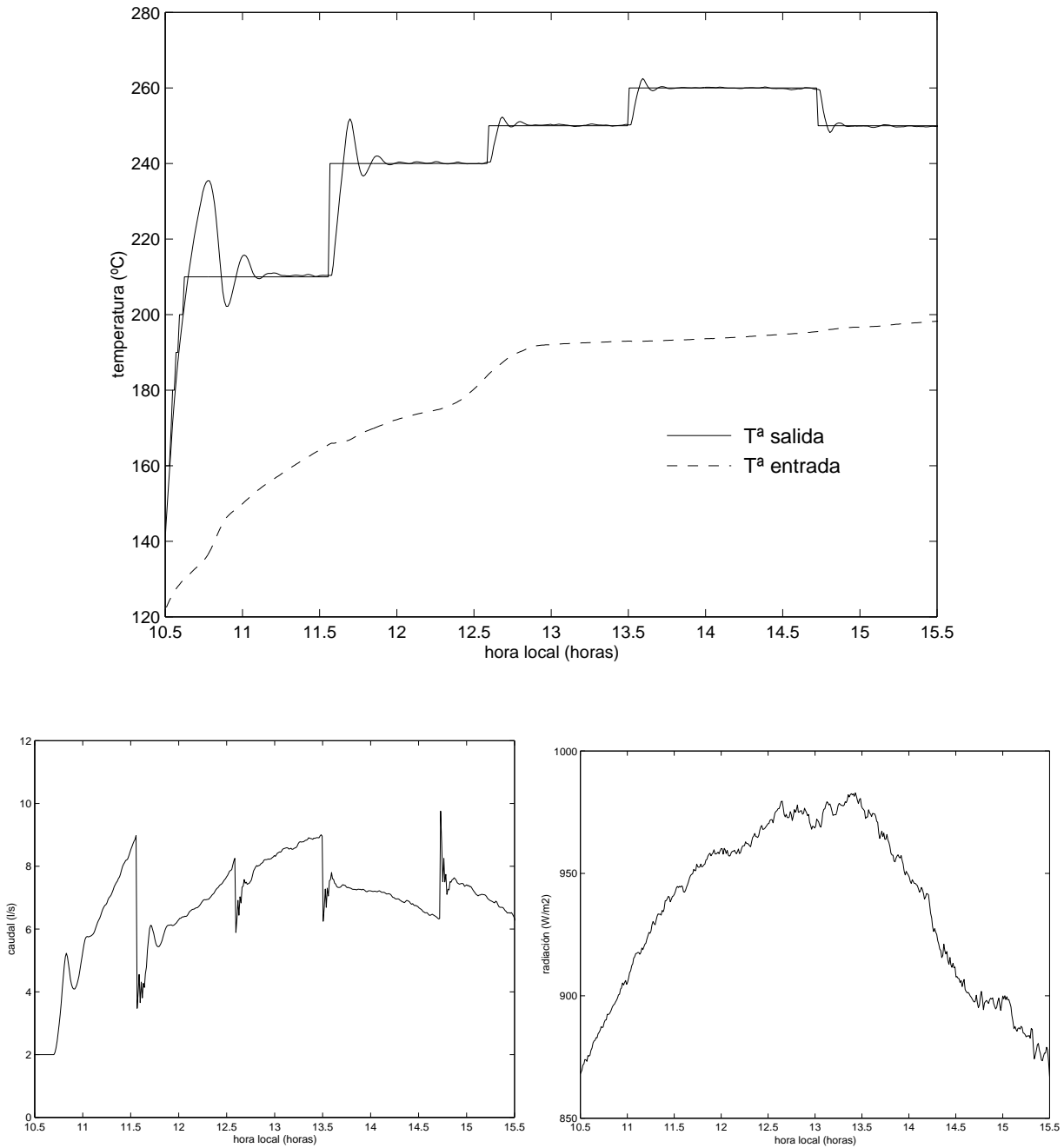
$$K(z) = \frac{2.9232z^3 - 0.55852z^2 - 2.4450z + 1.0367}{z^3 + 0.27133z^2 - 0.92438z - 0.34690}$$

Puede observarse como después de una transición inicial con una sobreoscilación alta, el comportamiento del sistema es más que aceptable a pesar de los cambios de puntos de trabajo y de las perturbaciones que actúan sobre el sistema. Los tiempos de subida son de unos 4.5 minutos, los tiempos de asentamiento son del orden de 7.5 minutos y las sobreoscilaciones del orden de 2.5 grados cuando se impone un cambio de referencia en escalón de $10^\circ C$. Estos resultados son comparables a los obtenidos con otras técnicas avanzadas de control (control adaptativo, predictivo, etc.), si bien hay que hacer notar la sencillez de la ley de control obtenida en este caso (una simple ecuación en diferencias).

La sobreoscilación inicial se debe principalmente a las condiciones irregulares del aceite en esta fase inicial. Como puede observarse en la figura 5.12, la temperatura del aceite en la entrada del campo experimenta fuertes cambios debido a la recirculación del aceite a través del campo hasta que su temperatura sea adecuada para entrar por la parte superior del tanque de almacenamiento. Esto provoca un largo transitorio en la fase inicial del experimento en el que conduce a una saturación inicial del caudal a 2 l/s.

La radiación solar también experimenta cambios debido a su ciclo diario y a la presencia de pequeñas nubes durante el tiempo de experimento.

Se realizaron otras implementaciones que permitieron obtener sobreoscilaciones menores y tiempos de subida más altos, tal como sucede en los resultados de simulación.

Figura 5.12: Resultados experimentales con $\kappa = 0.65$.

5.3 Control H_∞ discreto de un sistema de seguimiento visual

La principal ventaja de utilizar sensores de visión en aplicaciones automatizadas es que éstos proporcionan una información muy completa del entorno sin necesidad de interactuar con el entorno de trabajo (son sensores no intrusivos) ni de contactar físicamente con él. Dependiendo de la complejidad de los algoritmos de interpretación de la imagen, se puede extraer dicha información de las imágenes con diferentes grados de abstracción.

Son muchas las aplicaciones dentro de la robótica en las que es conveniente utilizar la información visual como señal de realimentación para controlar los movimientos del robot manipulador. Esto es especialmente deseable en tareas que impliquen la interacción del robot con otros objetos cuya posición no es fija dentro del área de trabajo. El término *seguimiento visual* es utilizado normalmente en aplicaciones en las que el robot es guiado visualmente durante su movimiento continuo ([Cor96, Has93]).

En el caso que se presenta en este trabajo, el objetivo del sistema de seguimiento visual es controlar al un brazo de un robot de forma que la posición relativa entre una cámara situada en el elemento terminal del mismo y un objeto que se mueve de forma arbitraria sea igual a una determinada consigna. Esta referencia puede ser tanto un valor constante como una función que varía con el tiempo.

Para hacer esto posible se ha fijado una cámara digital al elemento terminal del robot. Este sistema es habitualmente conocido con el término anglosajón *eye-in-hand configuration*, indicando que la cámara se mantiene fijada al robot, en contraposición a la configuración *static-camera configuration*, en la que la cámara observa desde el exterior del espacio de trabajo tanto al robot como al objeto a seguir.

La posición relativa deseada entre la cámara y el objeto constituirá en este caso la referencia del sistema de control, el cual aportará como salida la medida de dicha posición. El movimiento del objeto será considerado como una perturbación para el sistema. Según esto, el objetivo será diseñar un controlador que garantice la estabilidad y el comportamiento deseado en la respuesta del sistema de seguimiento visual, donde la teoría del control robusto puede ser aplicada para diseñar un controlador que consiga estos requerimientos.

Los resultados de esta sección han sido publicados en el artículo con la referencia ([Ort99]).

5.3.1 Modelo del sistema de seguimiento visual

En esta sección se va a hacer un resumen de la descripción del modelado del sistema de seguimiento visual utilizado. En ([Var98]) se puede encontrar una descripción más detallada de este proceso. Brevemente, el modelo consta de dos niveles de abstracción diferentes:

- *Nivel de control del robot* o modelo de bajo nivel, con el que se pretende aproximar el comportamiento del robot manipulador utilizado en la implementación del sistema de seguimiento visual para cada coordenada o grado de libertad que interviene en el movimiento.
- *Nivel de control visual* o modelo de alto nivel, el cual incluye el modelo anterior de bajo nivel, el proceso de captura de la imagen y la estimación de la posición del objeto como mecanismo de realimentación.

A continuación se va a realizar una breve descripción de cada uno de estos niveles de abstracción.

Nivel de control del robot

El robot manipulador utilizado en el sistema de seguimiento es el *PUMA 560* de *Unimation*, cuyo controlador es el *MARK-III*, y cuyo lenguaje de programación y sistema operativo se denomina *Unimate VAL-II*. Como gran parte de los controladores de robots disponibles comercialmente, éste ofrece facilidades de comunicación con un computador externo con un ancho de banda bastante limitado.

En este caso, todas las posibilidades se reducen a un enlace de comunicación serie estándar, haciendo uso en concreto del denominado *modo de operación ALTER*, mediante el cual se puede realizar un control de la trayectoria del brazo manipulador en tiempo real. El control es limitado, puesto que lo único que se permite es enviar de forma periódica, con ciclos de 28 ms, la próxima posición destino para el elemento terminal del brazo. Claramente, este periodo es excesivamente grande para poder realizar un estrecho control de la trayectoria. Sin embargo, esto no supone ningún problema puesto que el propio controlador del robot dispone de hardware que implementa lazos de control tipo PID para todas y cada una de las articulaciones, los cuales garantizan que se alcance la posición destino especificada (tras resolver el problema cinemático inverso), siguiendo un comportamiento adecuado. Por lo tanto, en esta etapa de control el sistema opera en bucle abierto desde el punto de vista del controlador del nivel superior.

Desde el punto de vista del nivel de control del seguimiento visual, esto supone una gran simplificación a la hora de calcular el modelo del brazo manipulador que ha de ser controlado. Entre otras ventajas, debido a que se utilizan los lazos internos de control propios del controlador (el robot no se está controlando con acceso directo a los servomotores y codificadores), esto permite que el controlador a nivel de visión sólo tenga que enviar al robot posiciones deseadas utilizando directamente coordenadas cartesianas, evitando la necesidad de calcular cinemáticas y dinámicas inversas.

Este nivel de control ha sido implementado en un pequeño programa en una computadora personal, el cual toma las referencias desde un nivel superior, las chequea por si se produjeran saturaciones, envía las posiciones de destino deseadas al robot de acuerdo al protocolo de comunicaciones establecido y recibe los mensajes de reconocimiento emitidos por el robot.

Desde el punto de vista del modelado del sistema, este nivel tiene un periodo de muestreo $T_r = 28 \text{ ms}^1$ (por imposición del protocolo de comunicación cuando se opera en modo ALTER), introduciendo de forma deliberada un integrador en la función de transferencia, puesto que en realidad lo que se envía al controlador del robot, a través de la línea serie, no es la posición cartesiana absoluta deseada, sino el incremento deseado durante el periodo actual.

Cuando la posición de destino enviada por este programa es recibida por el módulo del controlador del *PUMA* (MARK-III), éste realiza los siguientes pasos:

- 37.5 ms después de empezar cada ciclo se le proporciona a los servos la posición deseada, tras haberse realizado la transformación al espacio articular. Este paso se ha modelado como un retardo puro de un periodo de muestreo (28 ms) más un pequeño retardo de transporte puro, e^{-sT_d} , siendo $T_d = 9.5 \text{ ms}$.
- 27 ms después del paso anterior se tiene garantizado que el robot ha alcanzado la posición deseada. Para modelar el movimiento del robot durante este tiempo, se ha ajustado un sistema de segundo orden con polos reales (respuesta temporal sobreamortiguada) de forma que tenga un tiempo de subida de 27 ms. El hecho de tomar un sistema de segundo orden, en vez de uno de primer orden, se justifica por el hecho de suponer que el arranque del movimiento del brazo es suave. Tras ciertos ajustes, se adoptó como modelo estimado el siguiente:

$$R_a^*(s) = \frac{1}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}$$

donde $\tau_1 = 0.003 \text{ s}$ y $\tau_2 = 0.005 \text{ s}$.

¹El subíndice r hace referencia al nivel de control del *robot*.

En la figura 5.13 se muestra el modelo utilizado para aproximar el comportamiento de cada coordenada cartesiana en este nivel de control.

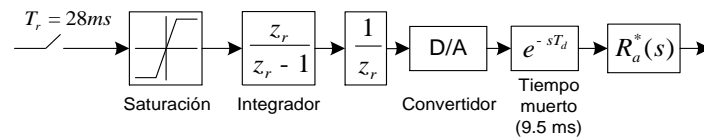


Figura 5.13: Modelo detallado para cada grado de libertad cartesiano.

Se realizaron varias pruebas moviendo más de un eje al mismo tiempo, llegando a la conclusión de que, utilizando esta configuración, las seis coordenadas del robot pueden ser consideradas como variables de control independientes. Esta es otra de las ventajas de aprovechar, en la medida de lo posible, la electrónica propia del controlador del robot y las facilidades que éste nos ofrece.

Nivel de control visual

Para construir el modelo de alto nivel se partirá del modelo de bajo nivel obtenido anteriormente y se completará el lazo de realimentación con el sensor visual. Para capturar imágenes se ha usado una cámara CCD modelo *Pulnix TM-520* mientras que para procesarlas se ha empleado un computador personal (basado en un procesador *Pentium*) que actúa como soporte para una tarjeta con un módulo de adquisición de imágenes, gobernado por un DSP (modelo *TMS320 C40*) junto con otros tres DSP funcionando en paralelo.

Respecto al modelado de la cámara, entre otras simplificaciones, se ha supuesto que el parámetro de distorsión radial es nulo. Esta suposición es tanto más aceptable cuanto que los experimentos sean realizados en las proximidades del centro de la imagen. El único parámetro que se ha necesitado modelar es una *ganancia de la lente*, K_{len} , que nos permite modelar la conversión de unidades métricas a pixels. Este parámetro depende exclusivamente de la profundidad a la que se encuentra el objeto respecto a la cámara y se expresa en pixels/m.

Respecto al proceso de captura y procesamiento de imagen, el sistema operará tomando imágenes periódicamente, proporcionando el desplazamiento relativo entre el objeto y la cámara, y pasando la correspondiente referencia al modelo de nivel de control del robot. La duración del ciclo al que se opera en este nivel se denominará T_v^2 , y se ha de tener en cuenta que buena parte de este tiempo estará ocupado por la captura y procesamiento de cada imagen. Esto provocará retrasos significativos en la estimación de la posición del objeto y en el envío del correspondiente comando al robot. De

²El subíndice v hace referencia al nivel de control *visual*.

esta forma, resulta inevitable contemplar el modelo del conjunto cámara-digitalizadora como un muestreador más un cierto retardo de un ciclo completo de operación. Por otra parte, se puede incluir en este mismo bloque el proceso de estimación de la posición del objeto. Para ello es necesario disponer de una estimación de la ganancia de la lente, la cual será representada por \hat{K}_{len} . Según todo lo expuesto, el modelo del sistema de visión junto con el procesamiento de imagen será de la forma:

$$V(z_v) = \frac{K_{len}}{\hat{K}_{len}} z_v^{-1}$$

En la figura 5.14 se muestra el esquema de control a nivel visual. Para aclarar ideas, a continuación se exponen algunas indicaciones sobre este diagrama de bloques:

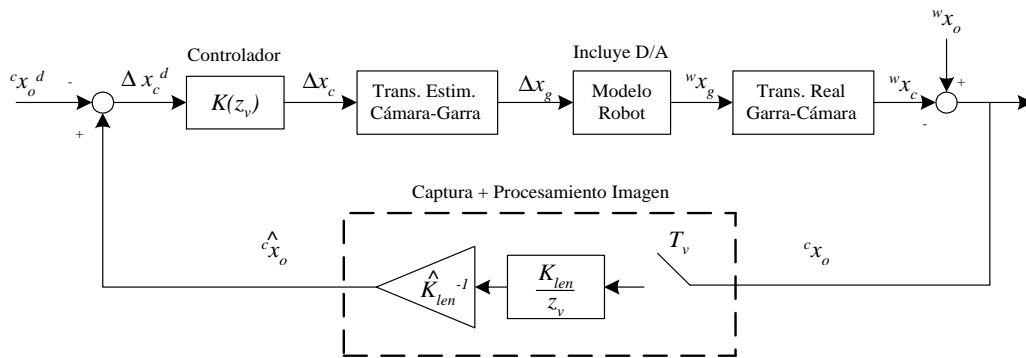


Figura 5.14: Modelo detallado del lazo de un grado de libertad multifrecuencia.

La señal de entrada al sistema es la posición relativa deseada entre cámara y objeto, $c x_o^d$. Esta entrada es comparada con $c \hat{x}_o$ (posición relativa cámara-objeto estimada a través del sensor visual), siendo el error resultante (Δx_c^d) la entrada del módulo del controlador a nivel de visión. La salida del controlador (Δx_c) será el cambio de posición requerido en la cámara, el cual habrá que transformarlo al movimiento requerido del elemento terminal del robot (Δx_g)³. Este incremento de posición será el proporcionado al modelo del robot descrito en la sección anterior.

El robot evolucionará, alcanzando su elemento terminal una determinada posición ($w x_g$)⁴, a partir de la cual, teniendo en cuenta la fijación entre la cámara y el elemento terminal, se obtendrá la posición resultante de la cámara $w x_c$.

En este punto se introduce el movimiento (variación de posición) del objeto, $w x_o$, como una perturbación que habrá que rechazar. La nueva posición relativa entre cámara y objeto ($c x_o$) es estimada por el sensor visual, obteniendo una medida $c \hat{x}_o$ que será

³El subíndice g hace referencia a la posición de la *garra* del robot

⁴El superíndice w hace referencia a un sistema de referencia global y fijo

comparada con la posición relativa cámara-objeto deseada, cerrando así el bucle de realimentación.

Este modelo de alto nivel opera con un tiempo de muestreo de $T_v = 5 T_r$, observándose cómo el sistema de seguimiento visual es claramente un sistema multi-frecuencia.

Discrepancias del modelo con el sistema real

El uso de un controlador robusto se justifica cuando existen incertidumbres significativas en el sistema respecto al modelo nominal. En este caso, los efectos más significativos que producen algún tipo de discrepancia son básicamente tres:

1. El efecto de distorsión de la lente.
2. El efecto de la velocidad en la cámara.
3. La incertidumbre en la dinámica del brazo.

En cuanto al primero, decir que en este apartado no se ha tenido en cuenta la distorsión de la lente para determinar el modelo del sistema. El parámetro que estima la ganancia de la lente, \hat{K}_{len} , se considera constante para todos los experimentos y está calibrado para una situación intermedia entre el centro de la imagen y el borde de la misma. Por consiguiente, si varía la ganancia de la lente K_{len} y no se modifica la estimación de la misma se estará alterando la ganancia del controlador que apliquemos en cada situación.

La distorsión que en general se tiene en cuenta en las lentes de TV es únicamente radial ([Tsa87]), la cual produce un acercamiento del objeto hacia el centro del marco de la imagen que es mayor cuanto mayor sea la distancia al mismo. Como consecuencia, conforme alejamos el objeto se reduce en cierta medida la ganancia real de la lente. Dado que el parámetro \hat{K}_{len} es fijo, la relación K_{len}/\hat{K}_{len} disminuirá en la misma forma que lo hará K_{len} .

En cuanto al efecto que provoca la velocidad de la cámara en la estimación de la posición, a mayor velocidad de la cámara peor será la estimación del centroide del objeto. Existen algunos métodos basados en la predicción de la velocidad del objeto que permiten mejorar esta estimación ([Cha91]), si bien en los experimentos realizados no se ha utilizado ninguna de estas estructuras predictoras.

Finalmente, en cuanto a la incertidumbre en la dinámica del brazo manipulador, éste ha sido modelado como un sistema de segundo orden con polos reales, y por lo tanto, se tendrá incertidumbres de alta frecuencia no modeladas, como sucede con cualquier sistema físico.

5.3.2 Síntesis del controlador

De nuevo se plantea la síntesis del controlador formulándolo como un problema de optimización H_∞ . En esta aplicación el problema ha sido resuelto empleando una configuración de sensibilidad mixta $S/KS/T$. Para ello, se hallará un *controlador estabilizante que minimice*:

$$\|T_{zw}(z)\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} W_S(z)S(z) \\ W_U(z)K(z)S(z) \\ W_T(z)T(z) \end{bmatrix} \right\|_\infty$$

donde $S(z)$, $K(z)S(z)$ y $T(z)$ son las funciones de transferencia de sensibilidad, sensibilidad al control y sensibilidad complementaria respectivamente y $W_S(z)$, $W_U(z)$ y $W_T(z)$ sus respectivas funciones de ponderación. Como puede observarse de la expresión anterior, en este caso se plantea el problema de sensibilidad mixta directamente en *tiempo discreto*. En el apartado 5.3.2 se expondrán algunos comentarios al respecto. La forma en la que se ha implementado la formulación del problema puede observarse en la figura 5.15.

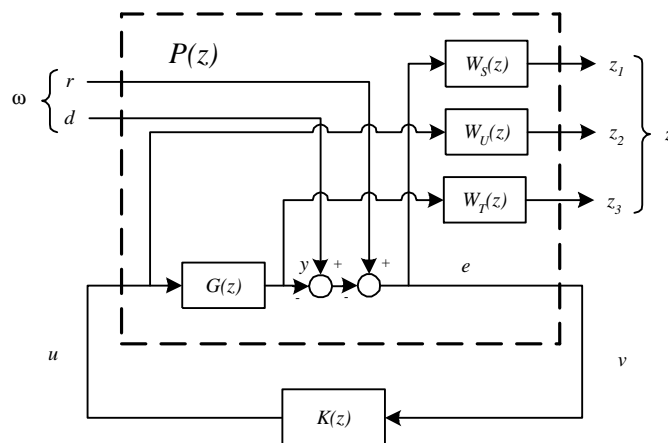


Figura 5.15: Modelo de sensibilidad mixta $S/KS/T$ discreto.

Para hallar un controlador H_∞ para el sistema de seguimiento visual se han llevado a cabo los siguientes pasos:

Elección del modelo nominal

Para simplificar la etapa de diseño del controlador, el sistema se ha aproximado por un modelo con un sólo tiempo de muestreo.

Es evidente que el modelo realizado del sistema es multifrecuencia, dado que posee dos periodos de muestreo diferentes: uno asociado al robot (T_r) y el otro el correspondiente al sistema de visión (T_v). El efecto fundamental asociado a los sistemas multi-frecuencia es que pueden introducir retrasos variables adicionales debido a la no simultaneidad de los muestreos.

Para evitar problemas de retardos no modelados, se ha elegido T_v como el múltiplo de T_r que permite realizar todas las operaciones implicadas en el proceso de estimación de la posición. Para esta aplicación se ha tomado $T_v = 5 T_r$. Además, en la implementación se han sincronizado los muestreadores para evitar retrasos adicionales.

El modelo utilizado para calcular el controlador se obtendrá remuestreando al sistema de bajo nivel (el cual ha sido previamente discretizado con un tiempo de muestreo T_r) a un tiempo de muestreo T_v , esto es, al tiempo de muestreo del modelo de alto nivel. Tras realizar las mencionadas operaciones (ver ([Var98]) para más detalles), la función de transferencia resultante es la siguiente:

$$G(z_v) = G(z) = \frac{b_1 z + b_0}{(z - 1)z^2}$$

donde ya se ha reemplazado z por z_v , y donde los coeficientes b_0 y b_1 cumplen la siguiente relación:

$$b_0 + b_1 = \frac{T_v}{T_r} = 5$$

Utilizando esta expresión, la función de transferencia anterior puede ser reescrita de la forma:

$$G(z) = \frac{(b_1 z + \frac{T_v}{T_r} - b_1)}{(z - 1)z^2} = \frac{b_1 z + (5 - b_1)}{(z - 1)z^2}$$

Tras un ajuste experimental del parámetro b_1 , se ha estimado que el valor del mismo es del orden de 4, pudiendo variar entre entre 3.5 y 6 aproximadamente dependiendo de las condiciones de trabajo. Como valor nominal se ha tomado $b_1 = 4$, con lo que el modelo nominal utilizado para calcular el controlador se corresponde con la siguiente función de transferencia:

$$G(z) = \frac{4z + 1}{(z - 1)z^2}$$

Diseño previo de las funciones de ponderación

El diseño de las funciones de ponderación que moldeará a las funciones de sensibilidad en bucle cerrado se ha realizado en dominio continuo, a pesar de que el sistema nominal esté expresado en tiempo discreto. Para formar la planta generalizada se han discretizado las funciones de ponderación, obteniendo así una planta generalizada en tiempo discreto. La discretización de las funciones de ponderación se ha realizado con una aproximación bilineal de Tustin, utilizando el mismo tiempo de muestreo que usará el controlador (T_v).

Para la función de ponderación $W_T(s)$ se ha estimado la incertidumbre multiplicativa del sistema respecto al modelo nominal variando el parámetro b_1 entre los límites establecidos. En este caso sencillo es fácil comprobar que los valores de b_1 se proporcionan mayor nivel de incertidumbre son los valores extremos (3.5 y 6). La función $W_T(s)$ será diseñada de forma que su magnitud en un diagrama de Bode sea superior a la incertidumbre en cada frecuencia y que tenga un valor elevado en alta frecuencia. La función diseñada para esta aplicación ha sido la siguiente:

$$W_T(s) = \frac{0.1s}{0.001s + 1}$$

Esta elección implica un buen conocimiento de la planta en frecuencias bajas, mientras que el modelo nominal no será preciso en absoluto para frecuencias superiores a $\omega_T = 10$ rad/s aproximadamente.

En la figura 5.16 se muestra el módulo de la máxima incertidumbre para cada frecuencia junto con el módulo de la función de ponderación $W_T(s)$. Como puede observarse, el módulo de esta función es cota superior de la magnitud de la incertidumbre máxima en cada frecuencia.

Para el diseño de $W_S(s)$ se vuelve a utilizar la fórmula propuesta en el capítulo anterior:

$$W_S(s) = \frac{\alpha s + 10^{(\kappa-1)}\omega_T}{s + \beta 10^{(\kappa-1)}\omega_T}$$

donde los parámetros elegidos para este caso han sido $\alpha = 0.5$, $\beta = 10^{-6}$ y, teniendo en cuenta la función $W_T(s)$ diseñada anteriormente, $\omega_T = 10$ rad/s.

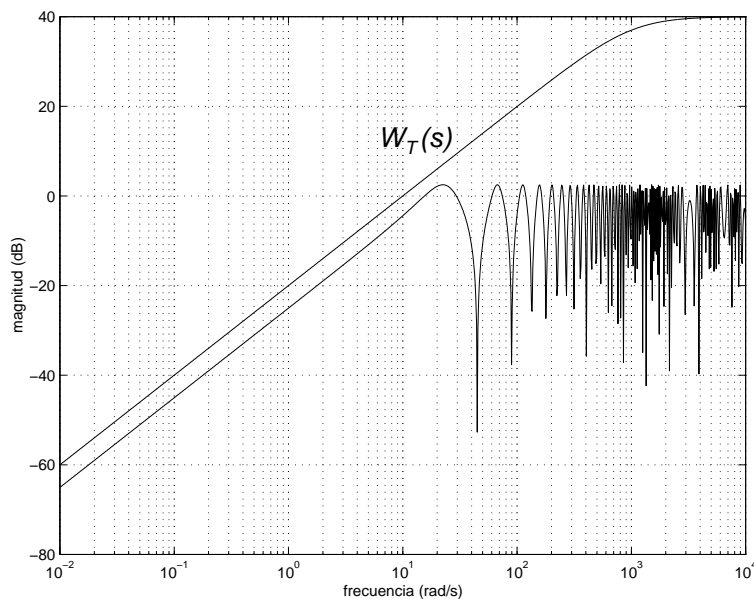


Figura 5.16: Función $W_T(s)$ como cota superior de la máxima incertidumbre multiplicativa.

Inicialmente se ha tomado $\kappa = 0$, con lo que a la función de ponderación $W_S(s)$ se le asigna en un principio la expresión:

$$W_S(s) = \frac{0,5s + 1}{s + 10^{-6}}$$

La función de ponderación $W_U(s)$ ha sido diseñada inicialmente como un valor constante e igual a 1.

Construcción de la planta generalizada y obtención del controlador

Tras el cálculo de las funciones de transferencia en tiempo discreto (utilizando una aproximación bilineal) correspondientes a las funciones de ponderación, la planta aumentada ya puede ser construida.

En este caso es interesante señalar que, debido a la presencia de un polo en $z = 1$ en el modelo nominal, es necesario hacer una transformación en la matriz dinámica de la planta antes de crear la planta generalizada para evitar problemas numéricos en el cálculo del controlador. Esta transformación podría consistir, por ejemplo, en la adición de un valor pequeño ϵ a la diagonal de dicha matriz dinámica. Para compensar esta modificación, una vez calculado el controlador se realizará la transformación inversa sobre el mismo, esto es, se restará el valor ϵ a la diagonal de la matriz dinámica del controlador obtenido ([Chi98]).

Una vez creada la planta generalizada, el controlador será obtenido mediante un algoritmo de síntesis en H_∞ que calcula el controlador directamente en tiempo discreto ([Igl91]). Este algoritmo se ha expuesto de forma resumida en el anexo B. Para ello, se ha programado en *MATLAB* una biblioteca de programas (con la misma filosofía que algunos productos comerciales existentes) que permite la síntesis de dicho controlador de forma automatizada.

En este punto es conveniente comentar que en algunos programas comerciales aparecen rutinas que calculan controladores H_∞ en tiempo discreto. Sin embargo, un examen de dichas rutinas (al menos de las más conocidas) permite comprobar que lo que implementan internamente es una transformación al plano frecuencial continuo de la planta generalizada utilizando una transformación bilineal, para posteriormente calcular el controlador H_∞ utilizando las mismas rutinas que en el caso continuo. Una vez calculado el controlador, éste se vuelve a discretizar utilizando la transformación bilineal inversa a la usada con la planta generalizada. A continuación se muestra un esquema de las transformaciones de este proceso:

$$P(z) \xRightarrow{\text{bilin}^{-1}} P(\omega) \xRightarrow{\text{bilin}} K(\omega) \Rightarrow K(\omega)$$

El cálculo del controlador directamente en tiempo discreto proporciona ciertas ventajas respecto al procedimiento anterior. A continuación se exponen algunas de ellas:

- Permite trabajar con sistemas no propios en tiempo continuo, puesto que un sistema no propio en continuo se transforma en uno propio en tiempo discreto al aplicar la transformación de Tustin. Habrá que tener cuidado con obtener controladores impropios en tiempo continuo.
- Posibilidad de diseñar las funciones de ponderación directamente en tiempo discreto, evitando el fenómeno de las deformaciones (traducción de la terminología inglesa “*warping*”). No obstante en este trabajo no se ha tenido en cuenta este fenómeno.
- Aunque la transformación bilineal proporciona fórmulas para el problema de síntesis H_∞ discreto, se obtienen ventajas desde el punto de vista teórico si se formula el problema en sus “coordenadas naturales”.

Una aplicación de este cálculo consiste en sacar partido de la estructura interna propia del controlador en tiempo discreto en la aplicación de estructuras predictoras en tiempo discreto ([Gre98]). En ellas podría aprovecharse la matriz dinámica para predecir señales en una estructura similar a la del predictor de Smith, pero utilizando la descripción interna del controlador.

5.3.3 Resultados de simulación

Para evaluar el comportamiento de cada controlador se analizará la respuesta temporal frente a una entrada en escalón normalizado en la referencia en cada uno de los experimentos.

Los resultados conseguidos utilizando la elección preliminar de las funciones de ponderación descrita en la sección anterior se muestran en la figura 5.17 con una línea a trazos. Puede comprobarse como la elección inicial de $\kappa = 0$ se traduce en un controlador (*controlador 1*) excesivamente conservador.

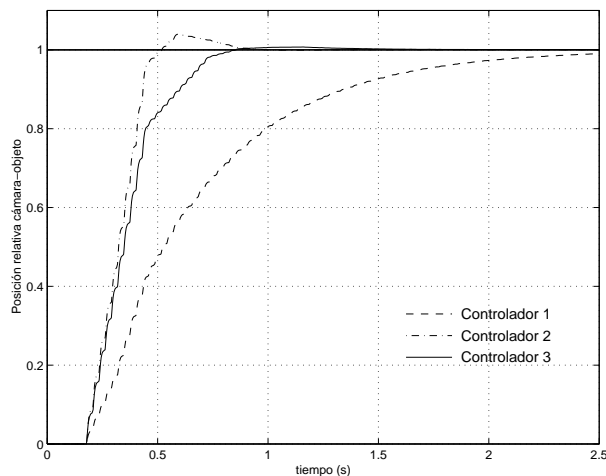


Figura 5.17: Resultados de simulación con tres diseños diferentes de las funciones de ponderación.

Tras el diseño preliminar, el parámetro κ fue aumentado hasta un valor igual a 0.65 con el objetivo de aumentar la rapidez de la respuesta del sistema. Como resultado, la nueva función de ponderación $W_S(s)$ obtenida es la siguiente:

$$W_S(s) = \frac{0.5s + 4.4668}{s + 4.4668 \cdot 10^{-6}}$$

y los resultados obtenidos con el nuevo controlador (*controlador 2*) calculado con estas funciones de ponderación se muestran en la figura 5.17 con una línea a puntos y rayas. Es obvio la reducción en el tiempo de subida con relación al experimento preliminar. Sin embargo, en este segundo experimento la respuesta obtenida es sobreoscilatoria.

La sobreoscilación de la respuesta puede ser disminuida, manteniendo constante el valor de κ , modificando la función de ponderación $W_U(s)$. Según lo expuesto en el capítulo anterior, se ha diseñado esta función con la forma:

$$W_U(s) = \frac{(s + \frac{\omega_d}{10\rho})(s + 10\rho\omega_d)}{(s + \frac{\omega_d}{\rho})(s + \rho\omega_d)}$$

donde se ha elegido un valor de $\rho = 3$. El valor de ω_d se ha estimado, como se indicaba en la sección 4.2.4, midiendo el semiperiodo de la oscilación de la respuesta temporal. Este valor es aproximadamente 0.6 segundos, con lo que se ha elegido un valor de ω_d igual a:

$$\omega_d = \frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{0.6} \simeq 5 \text{ rad/s}$$

Por lo tanto, la función $W_U(s)$ elegida para el tercer experimento tiene la siguiente expresión:

$$W_U(s) = \frac{(s + 0.16667)(s + 150)}{(s + 1.6667)(s + 15)}$$

La respuesta frecuencial (sólo el módulo) del conjunto de funciones de ponderación obtenidas con el último diseño se muestra en la figura 5.18, donde previamente se ha aplicado la aproximación bilineal con un tiempo de muestreo $T_v = 140$ ms para discretizarlas.

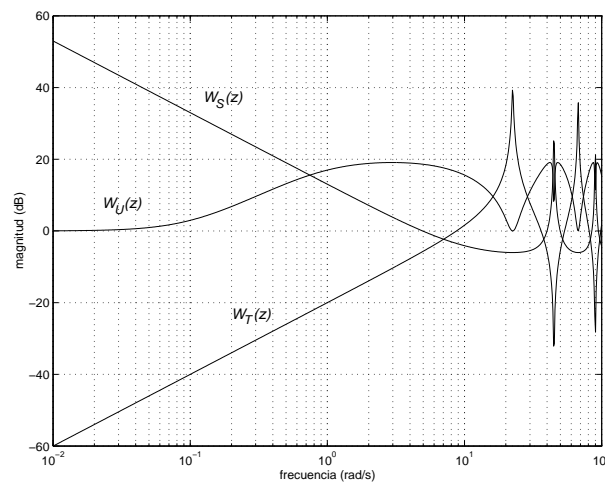


Figura 5.18: Funciones de ponderación discretas diseñadas para el tercer experimento.

El controlador obtenido (*controlador 3*) con este último diseño tiene la expresión:

$$K(z) = 0.01 \frac{7.9695z^5 - 0.99055z^4 - 6.9174z^3 + 1.5280z^2 - 1.6621 \cdot 10^{-6}z + 1.8434 \cdot 10^{-11}}{z^5 - 0.14988z^4 - 0.37385z^3 - 0.28209z^2 + 0.036340z + 0.015810}$$

donde previamente se le ha aplicado una realización mínima, lo cual justifica que su orden sea inferior al de la planta aumentada. El controlador proporciona la respuesta temporal mostrada en la figura 5.17 con línea continua. En dicha figura puede apreciarse como se ha reducido el tiempo de subida respecto al diseño inicial (línea discontinua) y sin embargo no oscila tanto como la segunda respuesta (línea a puntos y trazos).

Se ha probado a implementar el mismo controlador anulando los coeficientes del polinomio del numerador correspondientes a las potencias uno y cero (término independiente) en z (obsérvese que dichos coeficientes son muy pequeños) y no se ha notado diferencia apreciable entre la respuesta temporal obtenida con el controlador original y el modificado.

Finalmente, para justificar la elección de la función $W_U(s)$ como un filtro paso banda, se ha sintetizado un último controlador (*controlador 4*) tomando esta función como el filtro paso alto que se obtiene de anular en la anterior $W_U(s)$ el polo y el cero de alta frecuencia. Así, la función $W_U(s)$ para la síntesis de este controlador queda de la forma:

$$W_U(s) = 10 \frac{s + \frac{\omega_d}{10\rho}}{s + \frac{\omega_d}{\rho}} = 10 \frac{s + 0.16667}{s + 1.6667}$$

En la figura 5.19 se muestra una comparación entre las respuestas temporales obtenidas con el tercer y cuarto controlador (líneas continua y discontinua respectivamente). En ella se puede observar como la respuesta temporal del tercer controlador es ligeramente más rápida al no penalizar excesivamente las frecuencias altas.

5.3.4 Resultados experimentales

Los mismos controladores evaluados previamente por simulación han sido probados también sobre el sistema real.

Para evaluar los controladores sobre el sistema real se ha vuelto a emplear un escalón normalizado en la referencia del sistema. En la figura 5.20 se muestra conjuntamente

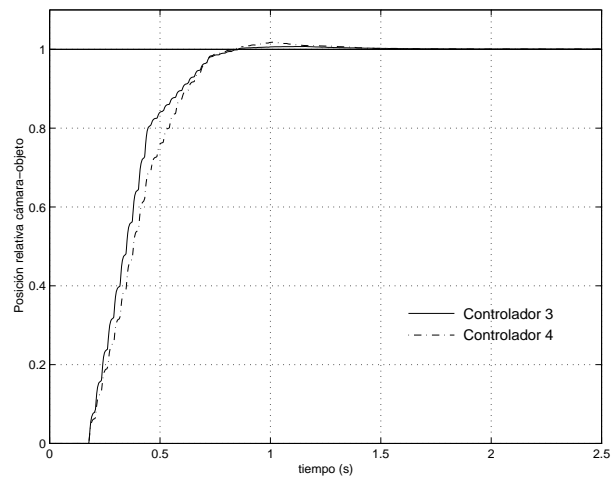


Figura 5.19: Comparación de respuestas temporales del tercer y cuarto controlador.

la respuesta temporal de los distintos controladores calculados anteriormente. Comparando estas respuestas con las representadas en la figura 5.17 puede observarse que se obtiene prácticamente el mismo comportamiento con las pruebas simuladas que con el sistema real.

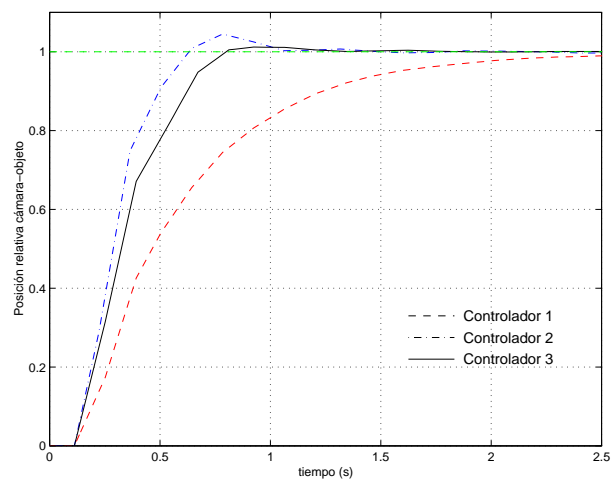


Figura 5.20: Resultados experimentales con los tres primeros diseños de las funciones de ponderación.

Asimismo, en la figura 5.21 puede comprobarse como la disquisición realizada en la figura 5.19 respecto a la función $W_U(s)$ también se verifica en el sistema real.

Este sistema ha servido como banco de pruebas para estudiar la bondad de controladores diseñados utilizando distintas técnicas de control ([Rub98]). En la figura 5.22 se muestran las respuestas temporales reales obtenidas con la síntesis de distintos tipos de controladores. Como puede comprobarse, esta técnica de control es una de las que

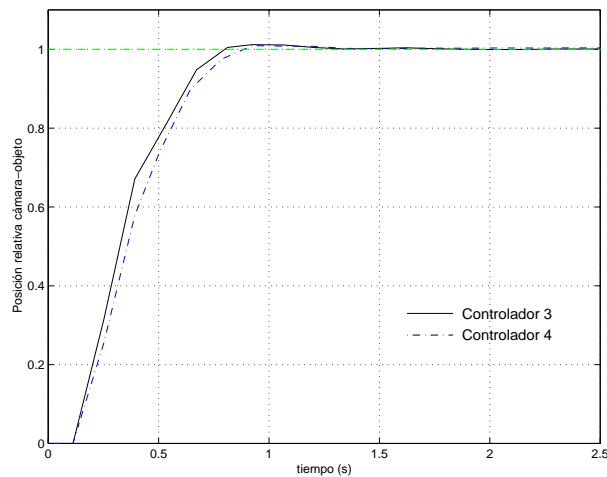


Figura 5.21: Resultados experimentales con el tercer y cuarto controlador.

mejores resultados han proporcionado sobre este sistema. Sólo un *Predictor de Smith* ha conseguido superar sus resultados. Sin embargo, hay que tener en cuenta que no existe incertidumbre en el retardo del sistema (igual a dos tiempos de muestreo). Por lo tanto, este tipo de estructura funcionará muy bien en estos casos.

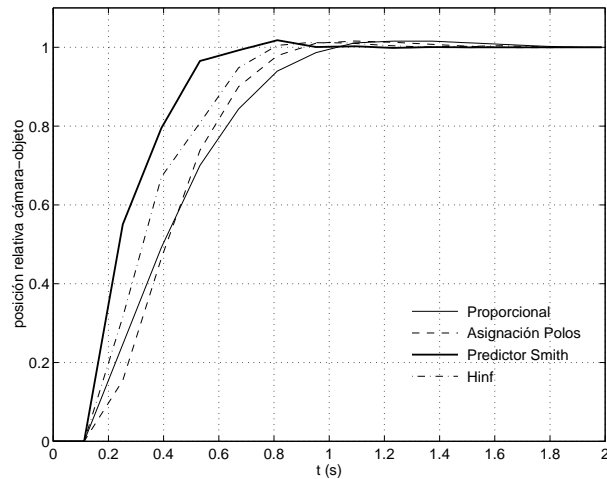


Figura 5.22: Resultados experimentales con distintos tipos de controladores.

Por último, comentar que a pesar de las ventajas expuestas en el apartado 5.3.2, no se ha apreciado mejoría aparente por diseñar el controlador directamente en tiempo discreto en vez de calcularlo en continuo y discretizarlo posteriormente.

5.4 Control H_∞ de un motor de corriente continua

Como se indicó en el capítulo anterior, la elección del parámetro N para el diseño de la función de ponderación $W_S(s)$ puede ser crucial si se requiere que el controlador tenga efecto integral.

Como es sabido, se requiere que la función de lazo sea de tipo uno para tener error en régimen permanente nulo frente a referencias en escalón o frente a perturbaciones en la salida. Sin embargo esto no es suficiente cuando se pretenda rechazar perturbaciones mantenidas en la entrada o cuando el sistema posea una zona muerta importante.

En este ejemplo se ha tomado un motor de corriente continua, el cual puede ser aproximado por una función de transferencia de segundo orden de tipo uno. Aprovechando estas características del sistema, se va a exponer cómo el diseño del parámetro N en la función $W_S(s)$ va a permitir aportar efecto integral al controlador, pudiendo así rechazar perturbaciones mantenidas en la entrada además de evitar que la señal de control permanezca permanentemente inmersa en la zona muerta.

5.4.1 Descripción del sistema

El sistema considerado es un servomecanismo muy popular utilizado en prácticas de laboratorio ([Man]). Está compuesto por una fuente de potencia, una unidad preamplificadora, un servoamplificador, un motor de corriente continua controlado por tensión en su armadura, un disco de inercia acoplado al motor, una unidad atenuadora que permite ajustar niveles de tensión a la entrada del equipo y un potenciómetro que permite medir la posición de carga acoplada al motor. Para poder controlar el motor se ha utilizado una computadora personal, la cual lleva incorporada una tarjeta de adquisición de datos, permitiendo obtener el valor de la posición del motor y aportar tensión a la entrada del sistema. En la figura 5.23 se muestra el diagrama de conexiones utilizado.

Según este diagrama, la entrada del sistema a controlar es la tensión aplicada al atenuador, mientras que la salida se obtiene por la tensión aportada por un potenciómetro. En la figura 5.24 se muestra la característica estática del motor, en la que se ha representado la velocidad angular del servomecanismo en régimen permanente frente a la tensión de entrada al sistema. Esta característica es simétrica, habiéndose representado en dicha figura sólo la parte correspondiente a tensiones positivas en la entrada.

Puede observarse como la característica estática del sistema presenta una zona

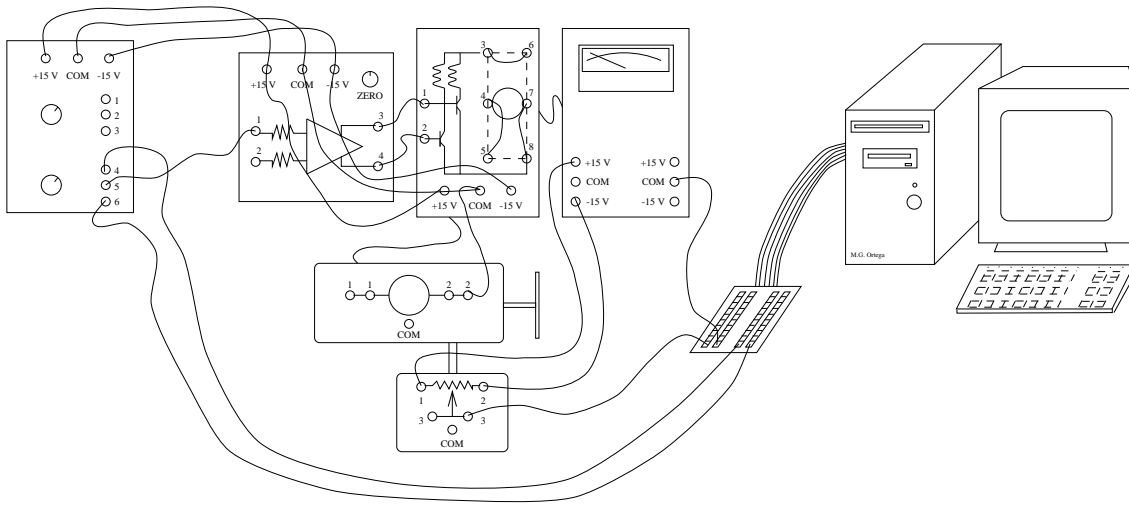


Figura 5.23: Esquema de conexiones.

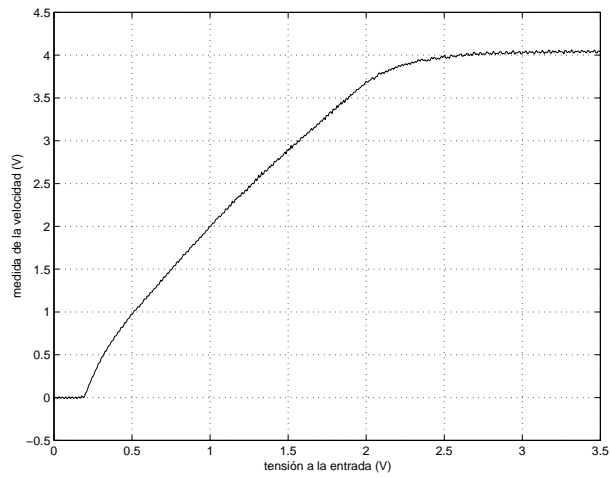


Figura 5.24: Característica estática del servomecanismo para valores positivos de la entrada.

muerta con un umbral de tensión de algo menos de 0.2 voltios. A continuación le sigue una zona en el que el sistema es casi lineal hasta que se alcanza una zona de saturación a una tensión de 2.3 voltios aproximadamente. En la figura 5.25 se muestra un gráfico de la estructura equivalente al sistema de control con la no linealidad situada a la entrada del sistema.

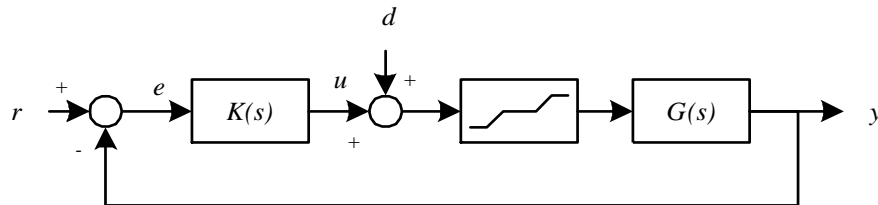


Figura 5.25: Estructura del sistema de control.

5.4.2 Síntesis del controlador

La síntesis del controlador se ha planteado como un modelo de sensibilidad mixta $S/KS/T$, por lo que se tratará de *hallar un controlador estabilizante que minimice*:

$$\|T_{zw}(s)\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} W_S(s)S(s) \\ W_U(s)K(s)S(s) \\ W_T(s)T(s) \end{bmatrix} \right\|_{\infty}$$

donde $S(s)$, $K(s)S(s)$ y $T(s)$ son las funciones de transferencia de sensibilidad, sensibilidad al control y sensibilidad complementaria respectivamente, y $W_S(s)$, $W_U(s)$ y $W_T(s)$ son sus respectivas funciones de ponderación que permiten tener en cuenta en el diseño qué rango de frecuencias será importante para cada función de transferencia en bucle cerrado (ver figura 3.13).

Veamos a continuación los pasos realizados para hallar los controladores para el sistema.

Modelado del sistema

Para la elección del modelo nominal que se utilizará en la síntesis del controlador se han realizado experimentos para identificar al sistema en distintos puntos de

funcionamiento. La función de transferencia que representa al modelo nominal se ha elegido de la forma:

$$G(s) = \frac{K_1}{(\tau s + 1)} \frac{K_2}{s}$$

donde la primera fracción corresponde a la función de transferencia desde la tensión de entrada al motor hasta la velocidad del mismo, y la segunda es un integrador con una ganancia que relaciona la velocidad del motor con la posición de la carga que lleva acoplada. Nótese que el sistema resultante es de tipo uno.

Teniendo en cuenta que el sistema tiene accesible la medida de la velocidad ($v(t)$) del motor, para hallar las constantes K_1 y τ se han analizado las respuestas temporales de la velocidad frente a una entrada en escalón en puntos de funcionamiento tanto de velocidades bajas como de velocidades altas. Por otra parte, para hallar la constante K_2 se ha relacionado la pendiente de la tensión de salida (derivada de la posición $\Omega(t)$ respecto al tiempo) con la medida de la velocidad ($v(t)$) del sistema, esto es:

$$K_2 = \frac{\frac{d\Omega(t)}{dt}}{v(t)}$$

Teniendo en cuenta que la carga está acoplada rígidamente al motor, este valor se considerará constante para cualquier punto de funcionamiento, y por lo tanto no estará sujeto a incertidumbres provocadas por trabajar el motor a distintas velocidades.

Tras la realización de dichos experimentos, los parámetros del modelo nominal han sido elegidos como la media de los valores estimados en cada punto de funcionamiento. La función de transferencia del sistema nominal obtenida es la siguiente:

$$G(s) = \frac{1.95}{(1.155s + 1)} \frac{6.45}{s} = \frac{12.5775}{s(1.155s + 1)}$$

El modelo nominal escogido es un sistema estimado a partir de la respuesta ante escalón del sistema; por lo tanto, es un modelo que aproxima bien al sistema en baja frecuencia. Para resaltar la importancia que puede tener la dinámica de alta frecuencia no modelada, en ([Ort98, Ort00a]) se realizó un análisis de bifurcaciones ([Vid93, Kha96, Gel68]) sobre este sistema (ver figura 5.26). Se comprobó cómo al controlar al sistema con un controlador proporcional, y debido a la existencia de la zona muerta junto con la saturación, aparecen dos ciclos límites (bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas en cuadro c) al aumentar el valor de la constante del controlador

(desde cuadro *a*) hasta cuadro *e*). Todo ello es explicable sólo si se tiene en cuenta al menos un polo de alta frecuencia no modelado.

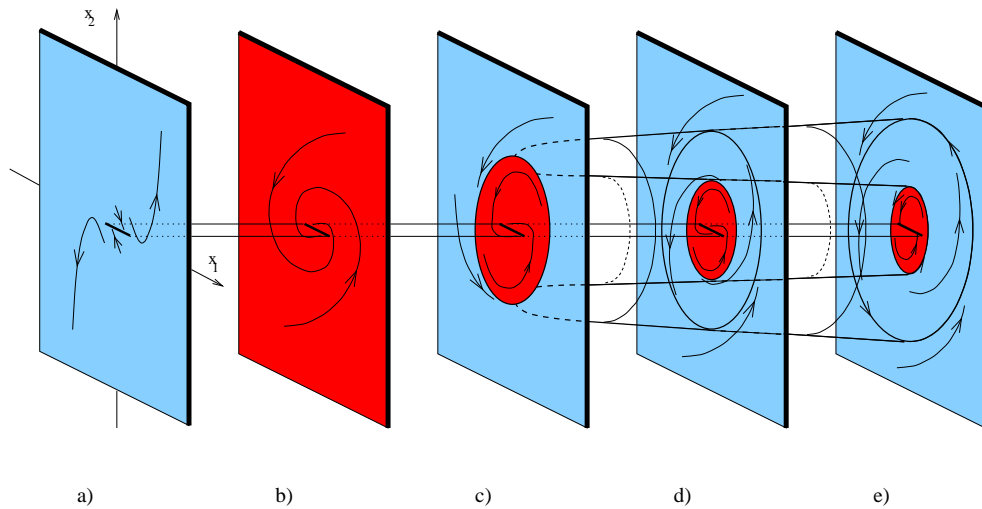


Figura 5.26: Descripción de la bifurcación del servomecanismo en cinco cuadros (rojo: cuenca de atracción de la banda de puntos de equilibrios; azul: cuenca de atracción del ciclo límite estable).

Diseño de funciones de ponderación

Repitiendo la secuencia de instrucciones aportadas en el capítulo anterior, como paso previo al diseño de la función de ponderación $W_T(s)$ habrá que realizar el cálculo de la incertidumbre multiplicativa. Siguiendo la recomendación de la sección 4.2.1, se ha obtenido la respuesta frecuencial del sistema (tensión de entrada frente a velocidad del motor) en distintos puntos de funcionamiento. En la figura 5.27 se muestra dicha respuesta junto con el diagrama de Bode del modelo nominal propuesto.

A partir de la respuesta frecuencial y una vez diseñado el sistema nominal, ya es posible realizar el cálculo de la incertidumbre multiplicativa y diseñar la función $W_T(s)$ de forma que el módulo de ésta sea superior al máximo módulo de la incertidumbre para cada frecuencia. Nótese que en el cálculo de la incertidumbre no intervendrá la parte de la función de transferencia correspondiente al integrador junto con su ganancia (K_2). La función $W_T(s)$ elegida en este caso es:

$$W_T(s) = 0.15 \frac{10s + 1}{0.001s + 1}$$

donde se ha supuesto una incertidumbre de la ganancia del 15% y un desconocimiento total del sistema a partir de la frecuencia $\omega_T = 0.65$ rad/s. En la figura 5.28 se

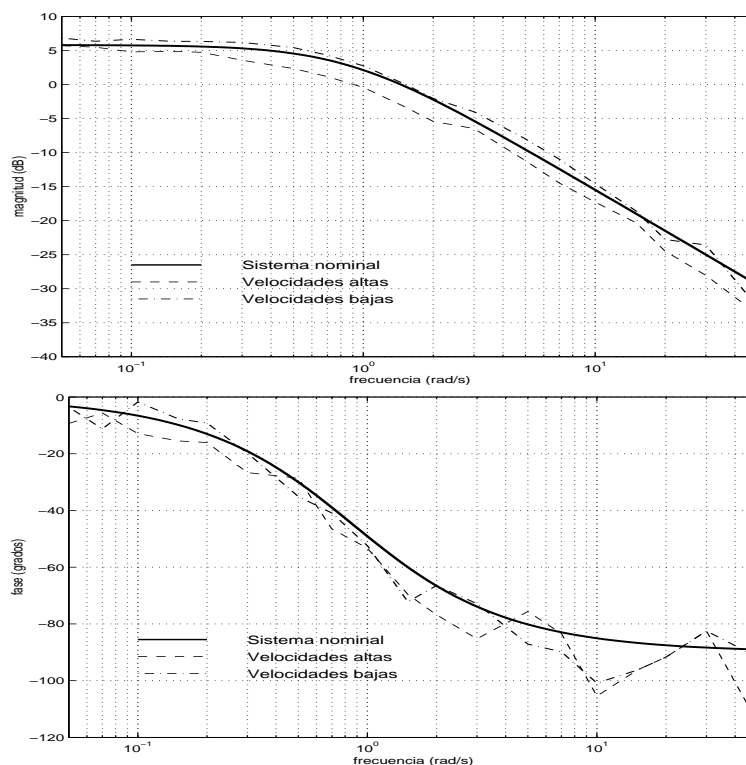


Figura 5.27: Respuesta frecuencial del sistema (tensión entrada/velocidad).

muestra el módulo de la respuesta frecuencial de la incertidumbre así como el de la función $W_T(s)$ elegida para este caso.

Respecto a la función de ponderación $W_S(s)$, la fórmula a utilizar para su diseño será recomendada en el capítulo anterior, esto es:

$$W_S(s) = \left(\frac{\sqrt[N]{\alpha}s + 10^{(\kappa-1)}\omega_T}{s + \sqrt[N]{\beta}10^{(\kappa-1)}\omega_T} \right)^N$$

Los parámetros elegidos para este caso han sido $\alpha = 0.5$, $\beta = 10^{-4}$ y $\omega_T = 0.65$ rad/s, según el diseño realizado de $W_T(s)$. Como el objetivo de este ejemplo es comprobar cómo afecta la elección del parámetro N al tipo del controlador, se va a obviar la iteración con κ , siendo el valor final adoptado para este parámetro igual a 1. Nótese que este valor es ligeramente alto respecto a los valores elegidos en ejemplos anteriores, lo cual es explicable ya que el sistema tiene que abandonar inicialmente la zona muerta.

Se han diseñado dos controladores: uno con el parámetro $N = 1$ (*controlador 1*) y otro con $N = 2$ (*controlador 2*), con lo que las funciones $W_S(s)$ obtenidas son las siguientes:

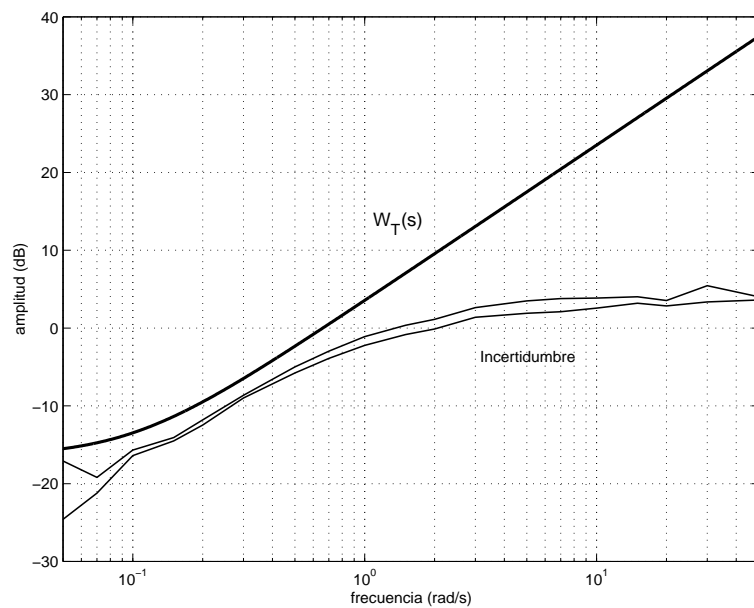


Figura 5.28: Función $W_T(s)$ como cota superior de la máxima incertidumbre multiplicativa.

Controlador 1

$$W_S(s) = \frac{0.5s + 0.65}{s + 6.5 \cdot 10^{-5}}$$

Controlador 2

$$W_S(s) = \frac{0.5s^2 + 0.91924s + 0.42250}{s^2 + 0.01300s + 4.2250 \cdot 10^{-5}}$$

Por simplicidad, la función de ponderación $W_U(s)$ se ha tomado igual a la unidad para ambos casos.

Construcción de la planta generalizada y obtención del controlador

Una vez diseñadas las funciones de ponderación, sólo resta construir la planta generalizada y obtener el controlador con el algoritmo de síntesis expuesto en el capítulo 3. Sólo habrá que recordar que el sistema tiene un polo en $s = 0$, por lo que habrá que realizar una transformación similar a la llevada a cabo en el sistema de seguimiento visual (ver apartado 5.3.2), salvo que en este caso el sistema es continuo.

5.4.3 Resultados experimentales

Como se comento al comienzo de la sección, con este ejemplo se pretende presentar la utilidad del parámetro N en la función de ponderación $W_S(s)$. Una vez ejecutado el programa de síntesis, las expresiones de los controladores obtenidos, tras haberlos discretizados con una transformación bilineal de Tustin con tiempo de muestreo igual a 0.025 segundos y haberles efectuado una realización mínima, son las siguientes:

- Controlador 1:

$$K(z) = \frac{0.49844z^3 + 0.43527z^2 - 0.47868z - 0.41551}{z^3 + 0.45421z^2 - 0.49801z - 0.13569}$$

- Controlador 2:

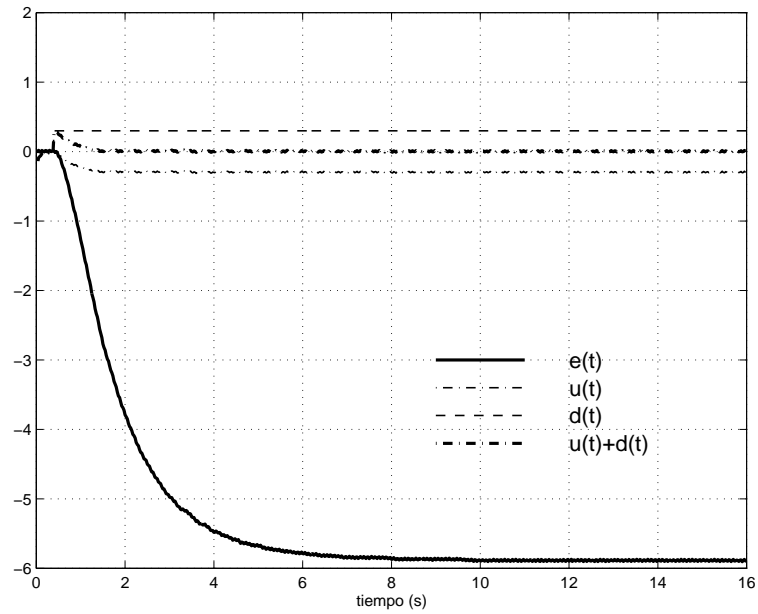
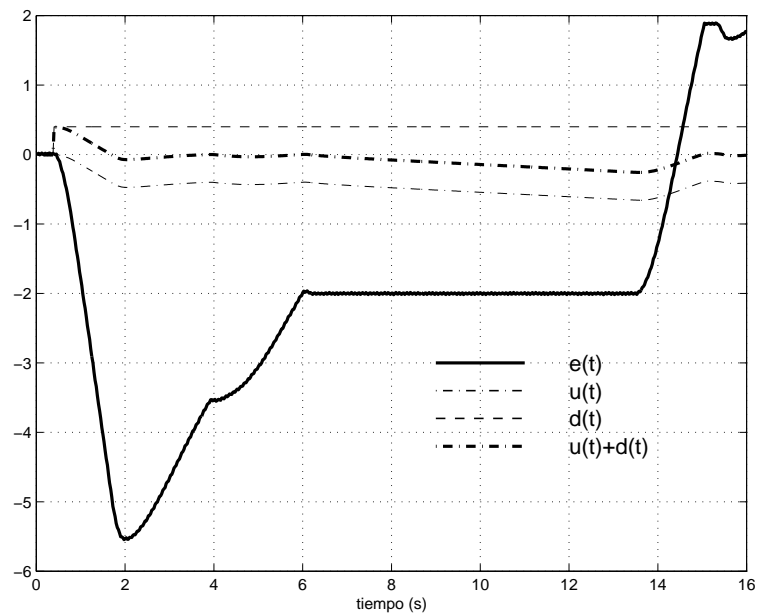
$$K(z) = 0.01 \frac{1.6075z^4 - 0.19268z^3 - 2.9379z^2 + 0.19312z + 1.3308}{z^4 - 1.7719z^3 + 0.025329z^2 + 1.2888z - 0.54225}$$

Es fácil comprobar que el segundo controlador tiene efecto integral (tiene un polo en $z = 1$), mientras que no sucede lo mismo con el primero.

En las figuras 5.29 y 5.30 se presentan resultados experimentales obtenidos con el primer y con el segundo controlador respectivamente, donde partiendo de un punto de equilibrio (error $e(t)$ nulo) se ha programado una perturbación mantenida ($d(t)$) en la entrada del sistema. Se puede observar como la señal de control $u(t)$ aportada por el primer controlador es tal que la actuación sobre el sistema (suma de la señal de control más la perturbación en la entrada) no abandona la zona muerta, por lo que el error no disminuye. Sin embargo, esto no sucede con el segundo controlador gracias a su efecto integral.

5.5 Control H_∞ de una planta piloto

En esta sección se va a exponer el diseño de un controlador robusto para una planta piloto situada en los laboratorios del departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad de Sevilla, la cual es un buen ejemplo de un proceso industrial real. Está construida a base de componentes industriales, tales como un tanque de agua, una resistencia para calentar agua, un intercambiador de calor, bombas de agua y varias válvulas neumáticas. El sistema está siendo utilizado en la actualidad como banco de pruebas para distintas estrategias de control (véase, por ejemplo, [Cas98,

Figura 5.29: Resultados experimentales con el *controlador 1*.Figura 5.30: Resultados experimentales con el *controlador 2*.

Ram89, Zaf99, Urq00]), que pueden ser implementadas sobre un SCADA industrial conectado a ella.

El objetivo del sistema de control es regular algunas temperaturas del proceso, como suele ser habitual en cualquier proceso industrial. Será necesario la introducción de un controlador robusto para obtener un buen comportamiento de la evolución de dichas temperaturas debido a que el sistema se comporta de forma diferente dependiendo del punto de trabajo en el que se esté operando. La principal causa de estas diferencias en el comportamiento se debe al intercambiador de calor, cuya eficiencia puede cambiar de forma drástica de un punto de operación a otro. Esto incorpora una no linealidad bastante influyente en el sistema, que será tratada como una incertidumbre no estructurada. Para tratar con dicha incertidumbre, se propone un controlador H_∞ multivariable que sea suficientemente robusto para trabajar de modo adecuado respecto al comportamiento de las variables a controlar.

Los resultados referentes a esta sección han sido publicados en los artículos con las referencias [Ort00b, Ort01].

5.5.1 Descripción del sistema

La planta es básicamente un sistema que utiliza agua como fluido de trabajo en la que se lleva a cabo varios procesos termodinámicos con intercambio de masa y energía. Esencialmente consiste en un tanque de agua con una resistencia en su interior y una serie de tuberías de entrada y salida y un circuito de recirculación con un intercambiador de calor.

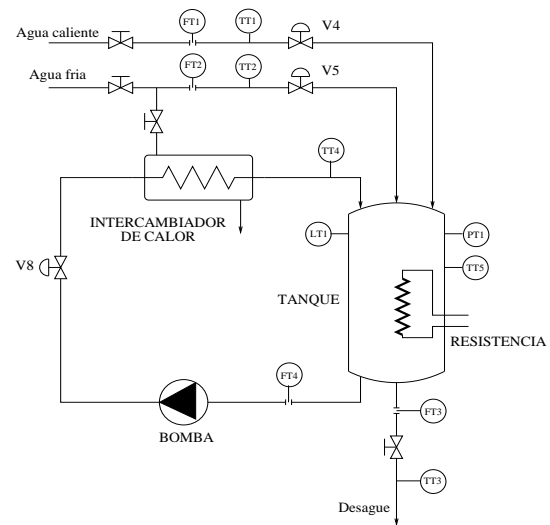
El diseño de la planta permite que se pueda probar en ella la bondad de distintas estrategias de control para un gran número de lazos. Dependiendo de la configuración elegida, será posible controlar los tipos de magnitudes más frecuentemente encontradas en la industria de procesos, tales como temperaturas, caudales, presiones o niveles. Para ello, la planta tiene disponible cuatro actuadores: tres válvulas neumáticas y un calentador eléctrico que calienta el agua del interior del tanque.

En la figura 5.31 se expone una fotografía y un esquema de la planta piloto donde se muestran sus principales elementos así como la localización de su instrumentación. A continuación se describen sus componentes más destacados:

- *Circuito de alimentación:* La planta tiene dos tuberías de entrada, una de agua fría (cuya temperatura se regula con un sistema de enfriamiento) y la otra de agua caliente (con una temperatura de unos $70\text{ }^\circ\text{C}$) con unos valores nominales



(a) Fotografía



(b) Esquema

Figura 5.31: Planta piloto.

de caudal y presión de 10 l/min y 2 bares para el agua caliente y 5 l/min y 1 bar para el agua fría. Las temperaturas y los caudales de entrada son medidos con termopares y caudalímetros de placa-orificio respectivamente. Además, la planta incorpora válvulas neumáticas automatizadas para regular los caudales de entrada.

- *Tanque:* Es cilíndrico con dimensiones de 1 m de alto y 20 cm de diámetro interior. Su volumen interior es aproximadamente de 31 l y está aislado térmicamente. Puede trabajar de forma presurizada (hasta un límite superior de 4 bares) o a la presión atmosférica dependiendo de la posición de una válvula de venteo conectada al mismo. En su interior se ha colocado una resistencia eléctrica de 15 KW para calentar el fluido que contenga. Además, el tanque tiene conectada una tubería de rebosadero, otra de evacuación de agua y una tercera para recircular el agua a través de un intercambiador.
- *Circuito de recirculación:* El agua caliente del tanque puede ser enfriada introduciendo agua fría a través de este circuito de enfriamiento. El circuito está compuesto por una bomba centrífuga que hace que el agua caliente extraída de la parte inferior del tanque circule a través de un intercambiador de calor de tubo envuelto, devolviendo el agua con una temperatura más baja a la parte superior del tanque. El caudal de este circuito puede ser controlado por una válvula neumática automatizada.

Control de la planta

Para controlar la instalación se ha implementado un sistema de control distribuido ORSI AUTOMAZIONE INTEGRAL CUBE ([Use]), compuesto de un controlador y un supervisor conectado por una red local tipo ARCNET. El controlador es el encargado de ejecutar el control digital y otras rutinas semejantes mientras que el supervisor actúa como plataforma de programación y de comunicaciones con el operador. Los algoritmos de control son, por tanto, implementados en el sistema de control distribuido. Este sistema de control constituye un típico ejemplo de controlador industrial, poseyendo la mayor parte de las características más comunes de los sistemas de tamaño mediano que se puedan encontrar en la actualidad en el mercado. Como en la mayoría de los computadores de control, los recursos de cálculo son limitados y sólo hay disponible un tiempo pequeño para ejecutar el algoritmo de control debido a la atención que debe prestarse a la realización de otras operaciones.

El sistema particular

Como se mencionó anteriormente, se podrán controlar distintas variables dependiendo de los lazos elegidos dentro de las muchas posibilidades que proporciona esta planta. En esta aplicación, el sistema considerado corresponde al tanque con el circuito de recirculación y el intercambiador de calor. Por una parte, las variables de control son la potencia calorífica (Q) suministrada por la resistencia situada en el interior del tanque y el caudal de agua (f_4) que circula por dicho circuito. La potencia calorífica es aportada por ciclos de 41 segundos y está modulada por un parámetro R , siendo éste el porcentaje de tiempo del periodo del ciclo en el que la resistencia está activa. El caudal f_4 será controlado mediante la apertura de la válvula automatizada V_8 . Por otra parte, las variables a controlar son la temperatura del agua en el interior del tanque (TT_5) y la temperatura del agua a la salida del intercambiador (TT_4). El intercambiador de calor reducirá la temperatura del agua de recirculación impulsada por la bomba utilizando un caudal constante de agua fría con temperatura (TT_2) entre 18 y 20 °C. El resto de las válvulas se cerrarán para trabajar con este sistema en particular. Por lo tanto, esta elección da lugar a un sistema multivariable con dos entradas y dos salidas.

La dinámica del sistema puede ser descrita con un conjunto de ecuaciones no lineales representando balances de masa y energía. Aplicando un balance de energía en el tanque se obtiene que:

$$\rho \cdot C_p \cdot V \cdot \frac{d(T_d(t))}{dt} = \rho \cdot f_4 \cdot C_p \cdot (TT_4(t) - T_d(t)) + R \cdot Q$$

$$TT_5(t) = T_d(t - D_1)$$

mientras que el modelo dinámico no lineal del intercambiador puede ser expresado mediante las ecuaciones:

$$\tau \cdot \frac{d(TT_4)}{dt} = T_i(t - D_2) - \xi_f(t - D_2) \cdot (T_i(t - D_2) - TT_2(t - D_2)) - TT_4(t)$$

$$T_i(t) = T_d(t - D_3)$$

$$\xi_f(t) = \xi_f(TT_4(t), f_4(t))$$

$$f_4(t) = f_4(V_8(t))$$

donde el significado de cada una de las variables implicadas es el siguiente:

- f_4 : caudal a la salida del intercambiador
- T_d : temperatura en la parte inferior del tanque
- R : porcentaje de tiempo de ciclo en el que la resistencia está activa
- Q : potencia máxima que puede aportar la resistencia
- V : volumen de agua en el interior del tanque
- C_p : capacidad calorífica del agua
- ρ : densidad del agua
- D_1 : retardo debido a la inercia térmica en el tanque
- τ : constante de tiempo de la dinámica del intercambiador de calor
- D_2 : tiempo muerto de la dinámica del intercambiador de calor
- T_i : temperatura a la entrada del intercambiador
- D_3 : retraso de transporte del agua desde el tanque hasta la entrada del intercambiador
- TT_2 : temperatura del agua refrigerante del intercambiador
- ξ_f : eficiencia del intercambiador
- V_8 : porcentaje de apertura de la válvula del circuito de recirculación

La función que define la eficiencia ξ_f se ha tabulado a partir de valores experimentales medidos en estados estacionarios de la planta en distintos puntos de trabajo y su característica se expone en la figura 5.32. Asimismo, se ha obtenido experimentalmente la característica estática de la válvula del circuito de recirculación ($f_4 - V_8$), la cual se muestra en la figura 5.33. Los retardos D_1 , D_2 y D_3 , así como la constante de tiempo τ dependen del punto de operación de la planta, y sus valores también han sido estimados experimentalmente.

Estas ecuaciones han sido utilizadas para realizar simuladores del sistema ([Cas93, Min94, Ort00b]) utilizando distintos lenguajes de modelado ([Ref, Elm]).

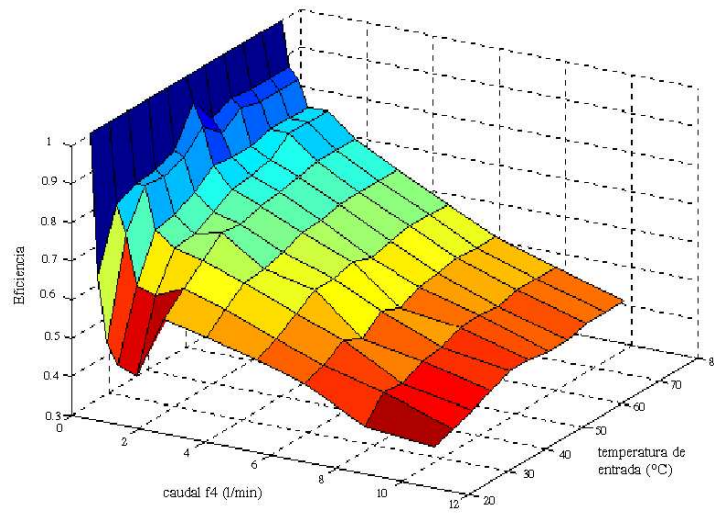


Figura 5.32: Eficiencia del intercambiador de calor.

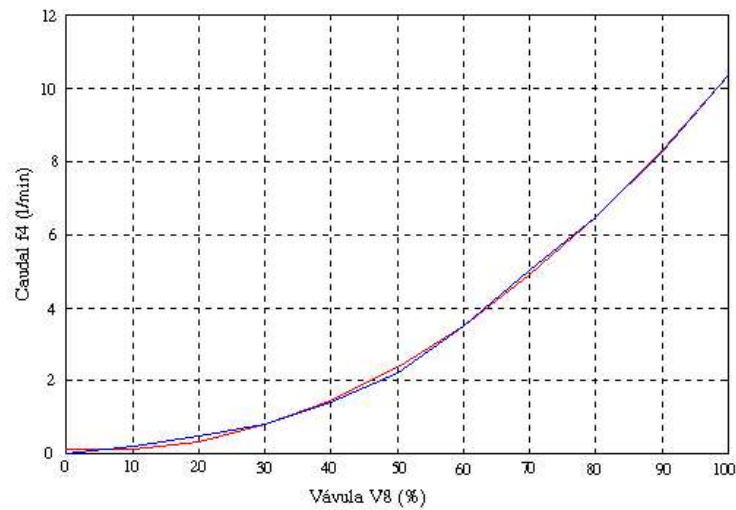


Figura 5.33: Característica estática de la válvula V_8 .

5.5.2 Síntesis del controlador

El diseño del controlador se ha resuelto utilizando la formulación del problema de *sensibilidad mixta S/T* para la planta en continuo (ver figura 3.12), el cual pretende *hallar un controlador estabilizante que minimice*:

$$\|T_{zw}(s)\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} W_S(s)S_o(s) \\ W_T(s)T_o(s) \end{bmatrix} \right\|_{\infty}$$

Debido a que el sistema es multivariable, en este caso se va a realizar un escalado de la planta como paso previo al diseño de las funciones de ponderación. A continuación se exponen los pasos a seguir para llevar a cabo la síntesis del controlador.

Elección del modelo nominal

En esta sección se obtendrá un modelo lineal del sistema por linealización en torno a un punto de trabajo. El conjunto de ecuaciones no lineales expuestas en el apartado anterior podrían ser linealizadas para obtener un modelo y posteriormente ajustar el valor de algunos parámetros mediante experimentación. Sin embargo, en este caso es mucho más simple obtener de dicha linealización sólo el orden de las funciones de transferencia ([Urq00]) y hallar el valor de sus coeficientes mediante algún algoritmo de identificación. Esto se ha llevado a cabo introduciendo secuencias binarias pseudo aleatorias (PRBS) en la entrada de cada uno de los actuadores, esto es, en la válvula V_8 y en la resistencia R .

La región de trabajo elegida para el control está limitada por condiciones físicas de la planta. Estas limitaciones son las siguientes:

- Se tendrá que asegurar que la temperatura del tanque esté dentro de los parámetros de funcionamiento del mismo. Esto se traduce en que la temperatura TT_5 debe ser menor que $75\text{ }^{\circ}\text{C}$.
- Se atenuará el efecto de la temperatura del agua de refrigeración TT_2 sobre la temperatura de salida del intercambiador. Esto supone trabajar a temperaturas TT_4 superiores a $30\text{ }^{\circ}\text{C}$.
- Se evitará la gran componente de ruido que introduce la resistencia a regímenes bajos de funcionamiento. Para ello, se trabajará con valores de R superiores al 40%.

Estas tres restricciones dan lugar a una región de trabajo respecto a los valores permitidos para los actuadores. En la figura 5.34 se muestra dicha región, en la que se puede comprobar que el valor mínimo permitido de R es de 40%, mientras que se trabajará con valores de la apertura de la válvula por encima del 30%. Puede observarse que la región no es rectangular, lo cual indica que tampoco se podrán tomar de forma independiente los valores de R y V_8 para cumplir las restricciones anteriores.

Teniendo en cuenta la región del espacio de trabajo de los actuadores, el punto nominal de operación se ha elegido en unos valores de $R = 60\%$ y $V_8 = 80\%$, el cual proporciona unos valores de equilibrio de TT_4 y TT_5 iguales a $32\text{ }^\circ\text{C}$ y $52.9\text{ }^\circ\text{C}$ respectivamente. En la figura 5.34 han sido marcados siete puntos, donde el correspondiente a este punto aparece con las siglas PN . El resto de puntos se corresponden con los diferentes puntos de trabajo en los que se han identificado los modelos que aparecen en la figura 5.37.

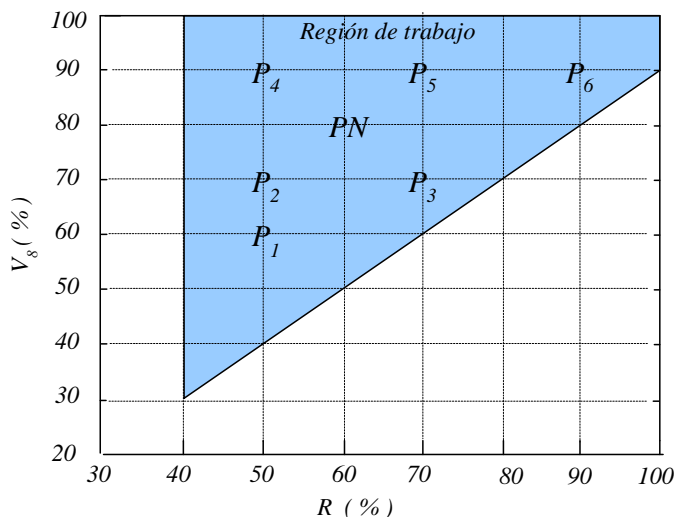


Figura 5.34: Espacio de trabajo de las acciones de control.

Los resultados experimentales obtenidos de aplicar un PRBS en torno a este punto de trabajo fueron introducidos en un algoritmo de identificación ([Lju86]), obteniéndose la siguiente matriz de funciones de transferencia utilizando un tiempo de muestreo de *un segundo*:

$$\begin{bmatrix} TT_4 \\ TT_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & G_{12}(z) \\ G_{21}(z) & G_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_4 \\ R \end{bmatrix}$$

donde:

$$G_{11}(z) = \frac{0.1412z^2 + 0.4021z - 0.5366}{z^3 - 1.127z^2 - 0.096z - 0.2286} z^{-2}$$

$$G_{12}(z) = \frac{-0.0002796z^2 - 0.0001735z + 0.0001557}{z^3 - 1.127z^2 - 0.096z - 0.2286} z^{-54}$$

$$G_{21}(z) = \frac{-0.002211z^2 + 0.004087z - 0.002198}{z^3 - 2.862z^2 + 2.795z - 0.9323} z^{-11}$$

$$G_{22}(z) = \frac{0.0000234z^2 - 0.00000386z + 0.0000639}{z^3 - 2.862z^2 + 2.795z - 0.9323} z^{-32}$$

Los resultados experimentales y simulados de la identificación se muestran en la figura 5.35, correspondiéndose los primeros con las señales con más alta componente frecuencial. En ella puede observarse como las constantes de tiempo así como los tiempos muertos han sido estimados con bastante precisión, mientras que existe un error significativo en los valores estimados en régimen permanente. Esto es debido a la gran no linealidad de la eficiencia del intercambiador de calor, que como se comentó anteriormente, puede cambiar drásticamente su valor de un punto de operación a otro.

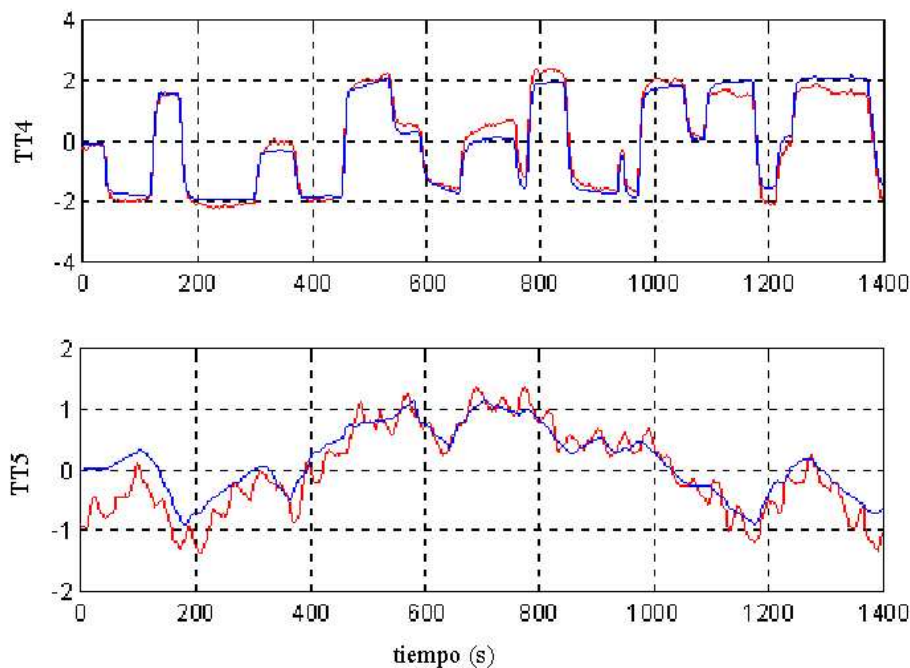


Figura 5.35: Resultados experimentales y simulados de la identificación.

En la figura 5.36 se muestra la respuesta temporal ante escalón del sistema linealizado. Como puede observarse, la influencia de una variación del porcentaje de tiempo de activación de la resistencia (R) sobre la temperatura de salida del intercambiador

(TT_4) es muy pequeña. Esto implica que dicha temperatura se deberá controlar principalmente con el caudal de agua del intercambiador (f_4) utilizando la apertura de la válvula V_8 .

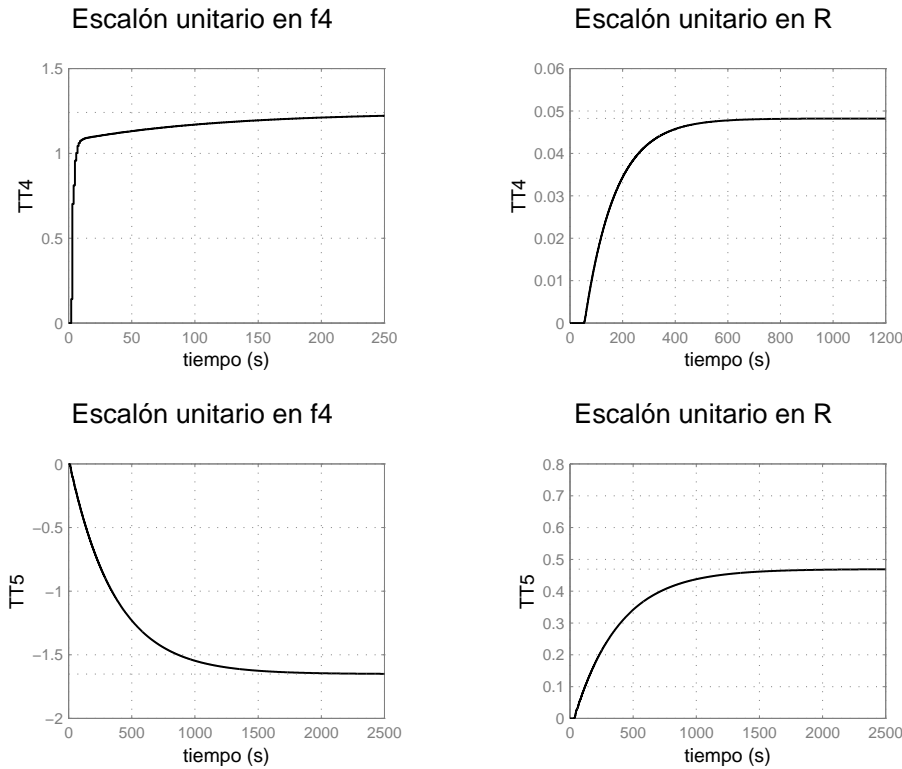


Figura 5.36: Respuesta ante escalón del sistema linealizado.

Escalado de la planta

A diferencia de los ejemplos anteriores, el sistema a tratar en este caso es un sistema multivariable. Para este tipo de sistemas es conveniente realizar un escalado de la planta antes de obtener el controlador.

Entre los principales motivos por los que se debe escalar un sistema multivariable destacan dos principalmente:

- Evitar problemas numéricos en el proceso de síntesis del controlador. Es conveniente recordar que el número de condición $\gamma(\omega)$, definido como la relación entre el valor singular máximo y mínimo del sistema para cada frecuencia, depende del escalado del sistema. Por lo tanto, se podrán evitar problemas numéricos si las matrices dejan de ser mal condicionadas.

- Al escalar el sistema se normalizan las señales de tal forma que éstas sean comparables (ver sección 4.4). No sería correcto utilizar la función de sensibilidad como medida del comportamiento del sistema si sus errores no fueran de la misma magnitud para cada canal del sistema.

Para llevar a cabo el escalado del sistema será necesario determinar la máxima variación deseada para cada una de las salidas, así como la de la señal de control en cada una de sus entradas. En esta aplicación se han elegido los siguientes valores:

$$\begin{aligned} f_4 \text{ max} &= 2 \text{ l/m} \\ R_{\text{max}} &= 10 \% \\ TT_4 \text{ max} &= 2.5 \text{ }^\circ\text{C} \\ TT_5 \text{ max} &= 5.0 \text{ }^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Por lo tanto, si se considera que $G(z)$ es el sistema sin escalar y se denomina al sistema escalado como $\hat{G}(z)$, éste podrá ser calculado según la ecuación ([Sko96]):

$$\hat{G}(z) = D_e^{-1}G(z)D_u$$

donde:

$$\begin{aligned} D_e &= \begin{bmatrix} TT_4 \text{ max} & 0 \\ 0 & TT_5 \text{ max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ D_u &= \begin{bmatrix} f_4 \text{ max} & 0 \\ 0 & R_{\text{max}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación del escalado, la función de transferencia escalada obtenida es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \hat{TT}_4 \\ \hat{TT}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{G}_{11}(z) & \hat{G}_{12}(z) \\ \hat{G}_{21}(z) & \hat{G}_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f}_4 \\ \hat{R} \end{bmatrix}$$

donde

$$\hat{G}_{11}(z) = \frac{0.1129z^2 + 0.3217z - 0.4293}{z^3 - 1.127z^2 - 0.096z - 0.2286} z^{-2}$$

$$\hat{G}_{12}(z) = \frac{0.001119z^2 - 0.000694z + 0.000623}{z^3 - 1.127z^2 - 0.096z - 0.2286} z^{-54}$$

$$\hat{G}_{21}(z) = \frac{-0.000884z^2 + 0.001635z - 0.000879}{z^3 - 2.862z^2 + 2.795z - 0.9323} z^{-11}$$

$$\hat{G}_{22}(z) = \frac{0.0000469z^2 - 0.00000773z + 0.0001279}{z^3 - 2.862z^2 + 2.795z - 0.9323} z^{-32}$$

Una vez escalado el sistema, el modelo nominal utilizado para la síntesis del controlador se ha elegido (siguiendo las recomendaciones del capítulo anterior) como el sistema anterior eliminado los retardos que aparecen en él, esto es:

$$\hat{G}(z) = \begin{bmatrix} \frac{0.1129z^2 + 0.3217z - 0.4293}{z^3 - 1.127z^2 - 0.096z - 0.2286} & \frac{0.001119z^2 - 0.000694z + 0.000623}{z^3 - 1.127z^2 - 0.096z - 0.2286} \\ \frac{-0.000884z^2 + 0.001635z - 0.000879}{z^3 - 2.862z^2 + 2.795z - 0.9323} & \frac{0.0000469z^2 - 0.00000773z + 0.0001279}{z^3 - 2.862z^2 + 2.795z - 0.9323} \end{bmatrix}$$

Estimación de incertidumbres

Son muchos los factores que introducen incertidumbre en este sistema. Entre ellos cabría destacar:

1. La eficiencia del intercambiador ξ_f , cuyo valor puede variar drásticamente de un punto de trabajo a otro al cambiar el caudal f_4 . También afecta de forma significativa al valor de ξ_f la temperatura del agua de refrigeración TT_2 , lo cual implica que aun estando en las mismas condiciones de funcionamiento, el sistema pueda comportarse de forma notablemente diferente.
2. Histéresis de la válvula V_8 , la cual es controlada en bucle abierto para obtener el caudal f_4 requerido. Esto se consigue invirtiendo la característica estática de esta válvula (ver figura 5.33).
3. Dinámicas no modeladas de actuadores y sensores.

Se han realizado distintos procesos de identificación en puntos de operación alrededor del punto nominal (ver figura 5.34), lo cual permitirá estimar la incertidumbre no estructurada del sistema en su forma multiplicativa a la salida. En la figura 5.37 se muestran las funciones de transferencia estimadas para dichos puntos.

Para obtener la expresión de la incertidumbre, antes de aplicar su fórmula habrá que escalar previamente cada uno de los modelos incluidos en la figura 5.37. Es interesante notar cómo interviene el escalado en la incertidumbre multiplicativa resultante. La expresión de esta incertidumbre utilizando los sistemas escalados es la siguiente:

$$\hat{E}_{ms}(z) = (\hat{G}^*(z) - \hat{G}(z))\hat{G}(z)^{-1}$$

Si en esta expresión se sustituye $\hat{G}(s)$ por $D_e^{-1}G(z)D_u$ y $\hat{G}^*(s)$ por $D_e^{-1}G^*(z)D_u$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} \hat{E}_{ms}(z) &= (D_e^{-1}G^*(z)D_u - D_e^{-1}G(z)D_u)D_e^{-1}G(z)D_u^{-1} \\ &= D_e^{-1}(G^*(z) - G(z))D_uD_u^{-1}G(z)^{-1}D_e \\ &= D_e^{-1}(G^*(z) - G(z))G(z)^{-1}D_e \\ &= D_e^{-1}E_{ms}(z)D_e \end{aligned}$$

Por lo tanto, la incertidumbre multiplicativa a la salida del sistema escalado sólo depende de la misma incertidumbre en el sistema sin escalar y de la matriz de escalado de los errores. Nótese que si el sistema fuera monovariable, D_e sería un escalar, lo que implica que la incertidumbre del sistema escalado y sin escalar sería la misma.

Tras escalar los sistemas, se han calculado los valores singulares de la incertidumbre de cada uno de los modelos respecto al sistema nominal elegido, tal como se indicó en la sección 4.2.2. Sólo habrá que tener en cuenta que, al estar expresados los sistemas en tiempo discreto, habrá que sustituir el cambio $s = j\omega$ por $z = e^{j\omega T}$, donde T es el tiempo de muestreo (1 segundo). En la figura 5.38 se muestran los valores singulares de estas incertidumbres estimadas para las distintas plantas identificadas alrededor del punto de trabajo nominal.

En esta figura puede observarse como existe un sistema (línea discontinua) cuyo máximo valor singular de la incertidumbre es superior a 0 dB en baja frecuencia, lo cual supone un desconocimiento total del sistema en todo el rango de frecuencias. Este sistema se corresponde con el *modelo 1* de la figura 5.37, el cual se ha obtenido en el punto de trabajo $V_8 = 60\%$ y $R = 50\%$ (ver figura 5.34). Esta incertidumbre tan grande en baja frecuencia se debe a que la apertura de la válvula es excesivamente baja, con lo que el caudal f_4 también lo será (ver figura 5.33). Un caudal tan bajo hace que la eficacia del intercambiador ξ_f varíe excesivamente respecto a su valor en las condiciones nominales. Teniendo en cuenta que el punto de trabajo donde se ha estimado el *modelo*

$$\begin{bmatrix} TT_4 \\ TT_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-0.1596z^2 + 0.7384z - 0.5549}{z^3 - 1.55z^2 + 0.3998z + 0.1626} z^{-2} & \frac{-0.0009431z^2 + 0.0008883z + 5.712 \cdot 10^{-5}}{z^3 - 1.55z^2 + 0.3998z + 0.1626} z^{-64} \\ \frac{-0.01405z^2 + 0.02796z - 0.01396}{z^3 - 2.993z^2 + 2.989z - 0.9958} z^{-14} & \frac{0.001723z^2 - 0.003436z + 0.001718}{z^3 - 2.993z^2 + 2.989z - 0.9958} z^{-32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_4 \\ R \end{bmatrix}$$

Modelo 1: $V_8 = 60\%$, $R = 50\%$

$$\begin{bmatrix} TT_4 \\ TT_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-0.04005z^2 + 0.6753z - 0.6332}{z^3 - 1.36z^2 + 0.122z + 0.2398} z^{-2} & \frac{-0.0004433z^2 + 0.0003536z + 0.0001684}{z^3 - 1.36z^2 + 0.122z + 0.2398} z^{-64} \\ \frac{-0.0103z^2 + 0.01128z - 0.002062}{z^3 - 1.845z^2 + 0.8496z - 0.004288} z^{-12} & \frac{2.597 \cdot 10^5 z^2 + 2.104 \cdot 10^{-5} z + 0.0001502}{z^3 - 1.845z^2 + 0.8496z - 0.004288} z^{-32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_4 \\ R \end{bmatrix}$$

Modelo 2: $V_8 = 70\%$, $R = 50\%$

$$\begin{bmatrix} TT_4 \\ TT_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-0.02947z^2 + 0.7877z - 0.7433}{z^3 - 1.346z^2 + 0.1179z + 0.2349} z^{-2} & \frac{0.0001706z^2 - 0.0004557z + 0.0004042}{z^3 - 1.346z^2 + 0.1179z + 0.2349} z^{-58} \\ \frac{-0.006341z^2 + 0.008913z - 0.003255}{z^3 - 2.872z^2 + 2.813z - 0.9402} z^{-12} & \frac{0.0001175z^2 - 4.085 \cdot 10^{-5} z + 1.489 \cdot 10^{-5}}{z^3 - 2.872z^2 + 2.813z - 0.9402} z^{-32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_4 \\ R \end{bmatrix}$$

Modelo 3: $V_8 = 70\%$, $R = 70\%$

$$\begin{bmatrix} TT_4 \\ TT_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.1846z^2 + 0.1831z - 0.3628}{z^3 - 1.422z^2 + 0.4677z - 0.0407} z^{-2} & \frac{0.001013z^2 - 0.0008943z + 0.0002837}{z^3 - 1.422z^2 + 0.4677z - 0.0407} z^{-50} \\ \frac{-0.004576z^2 + 0.009188z - 0.00463}{z^3 - 2.99z^2 + 2.983z - 0.9936} z^{-10} & \frac{0.001616z^2 - 0.003217z + 0.001606}{z^3 - 2.99z^2 + 2.983z - 0.9936} z^{-32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_4 \\ R \end{bmatrix}$$

Modelo 4: $V_8 = 90\%$, $R = 50\%$

$$\begin{bmatrix} TT_4 \\ TT_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.1846z^2 + 0.1831z - 0.3628}{z^3 - 1.422z^2 + 0.4677z - 0.0407} z^{-2} & \frac{0.001013z^2 - 0.0008943z + 0.0002837}{z^3 - 1.422z^2 + 0.4677z - 0.0407} z^{-50} \\ \frac{-0.004576z^2 + 0.009188z - 0.00463}{z^3 - 2.99z^2 + 2.983z - 0.9936} z^{-10} & \frac{0.001616z^2 - 0.003217z + 0.001606}{z^3 - 2.99z^2 + 2.983z - 0.9936} z^{-32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_4 \\ R \end{bmatrix}$$

Modelo 5: $V_8 = 90\%$, $R = 70\%$

$$\begin{bmatrix} TT_4 \\ TT_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.2057z^2 + 0.304z - 0.5023}{z^3 - 1.452z^2 + 0.5296z - 0.07149} z^{-2} & \frac{-0.0004286z^2 + 0.001831z - 0.001093}{z^3 - 1.452z^2 + 0.5296z - 0.07149} z^{-50} \\ \frac{-0.004829z^2 + 0.009986z - 0.005256}{z^3 - 2.974z^2 + 2.97z - 0.9957} z^{-10} & \frac{0.0003091z^2 - 0.0005452z + 0.0002527}{z^3 - 2.974z^2 + 2.97z - 0.9957} z^{-32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_4 \\ R \end{bmatrix}$$

Modelo 6: $V_8 = 90\%$, $R = 90\%$

Figura 5.37: Modelos del sistema en distintos puntos de trabajo.

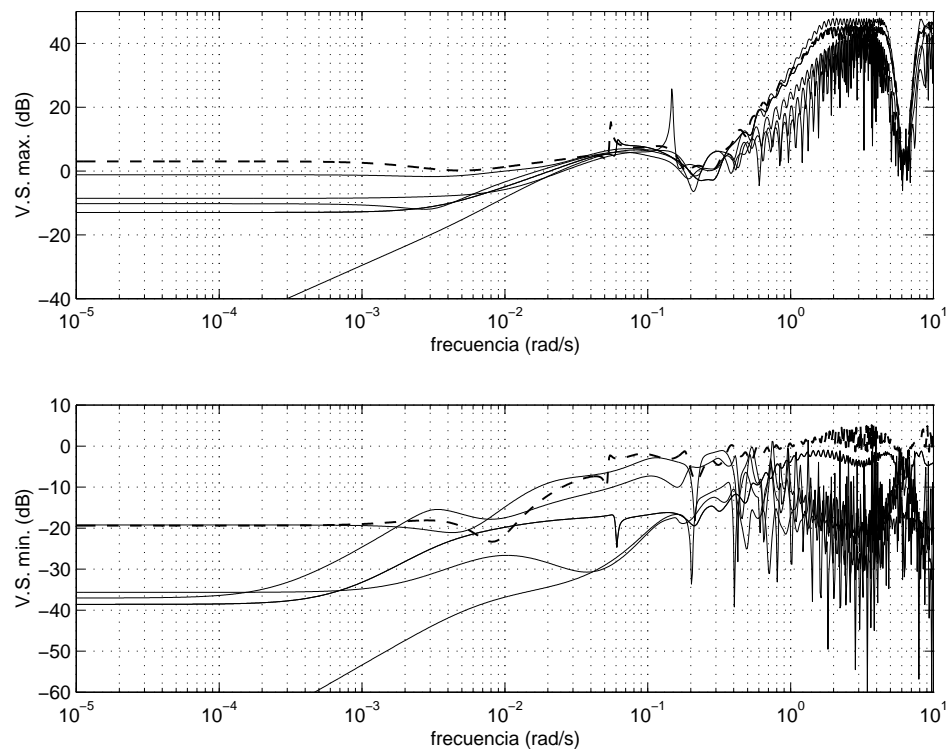


Figura 5.38: Valores singulares de la incertidumbre multiplicativa a la salida.

1 es un extremo (en el sentido de que se está utilizando simultáneamente el valor más pequeño tanto de R como de V_{δ}) no se va a considerar ese modelo, si bien habrá que tener en cuenta que en principio el controlador calculado no tiene por qué funcionar bien en ese punto de trabajo.

Diseño previo de las funciones de ponderación

Para obtener un controlador utilizando el planteamiento de sensibilidad mixta habrá que diseñar dos matrices de funciones de ponderación, una para moldear la función de sensibilidad $S_o(s)$ y la otra para moldear la función de sensibilidad complementaria $T_o(s)$. La elección de estas funciones de ponderación se basará en las reglas enunciadas en el capítulo anterior.

De nuevo las matrices de ponderación serán diseñadas en continuo, pudiendo ser discretizadas con una transformación bilineal de Tustin en caso de ser necesario (ver sección 5.5.2).

La matriz de ponderación $W_T(s)$ será diseñada como una matriz diagonal cuadrada

$$W_T(s) = \begin{bmatrix} W_{T11}(s) & 0 \\ 0 & W_{T22}(s) \end{bmatrix}$$

donde las funciones de transferencia W_{T11} y W_{T22} han de ser de fase mínima y ser tales que sus módulos sean cotas superiores respectivamente del máximo y mínimo valor singular de la incertidumbre estimada anteriormente.

En esta aplicación, la elección de la matriz $W_T(s)$ ha sido la siguiente:

$$W_T(s) = \begin{bmatrix} \frac{89.13s + 0.8913}{0.01s + 1} & 0 \\ 0 & \frac{17.783s + 0.17783}{0.01s + 1} \end{bmatrix}$$

En la figura 5.39 se ha representado el módulo de las funciones de ponderación junto con el máximo y mínimo valor singular de la incertidumbre, donde ya se ha dejado de considerar el *modelo 1* del sistema. En ella puede observarse como el diseño de $W_T(s)$ elegido cumple las especificaciones anteriores prácticamente en todo el rango de frecuencias. La función $W_{T11}(s)$ sólo deja de ser cota superior del máximo valor singular de la incertidumbre en dos franjas en la frecuencia: una en el pico del valor singular máximo de la incertidumbre en torno 0.15 rad/s y la otra en una pequeña zona entre 1 y 3 rad/s. Respecto al primer pico, éste se produce sólo para el *modelo 6* (ver figuras 5.34 y 5.37), el cual, al igual que sucedía con el *modelo 1*, también es un punto de funcionamiento extremo trabajando simultáneamente con la máxima apertura de la válvula ($V_8 = 90\%$) y el máximo valor del ciclo de la resistencia ($R = 90\%$). Por otra parte, teniendo en cuenta que el controlador se implementará en tiempo discreto con un tiempo de muestreo de 1 segundo, la segunda franja está en torno a la frecuencia de muestreo del sistema. Estas dos consideraciones justifican la elección de $W_{T11}(s)$, ya que de haber querido cumplir estrictamente con las reglas, la frecuencia del cero de esta función tendría que haber sido sensiblemente más pequeña, con lo que la frecuencia de corte ω_T tendría que haber sido considerablemente más baja, haciendo al sistema de control sensiblemente más lento.

Por otra parte, la matriz de ponderación $W_S(s)$ se ha seleccionado también cuadrada y diagonal, donde cada elemento de su diagonal tendrá la forma:

$$W_{Sii}(s) = \frac{\alpha_i s + 10^{(\kappa_i - 1)} \omega_T}{s + \beta_i 10^{(\kappa_i - 1)} \omega_T}, \quad i = 1, 2$$

Los parámetros elegidos para las funciones de ponderación han sido los recomenda-

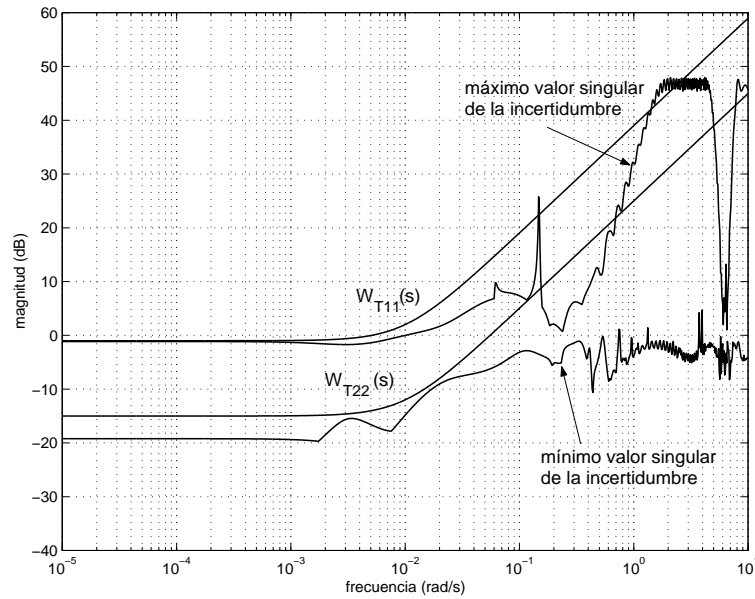


Figura 5.39: Matriz $W_T(s)$ como cota superior de los valores singulares de la incertidumbre multiplicativa a la salida.

dos en el capítulo anterior, esto es, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ y $\beta_1 = \beta_2 = 10^{-4}$. Por otra parte, del diseño de $W_T(s)$ realizado anteriormente se obtiene que ω_T (frecuencia a la que $W_{T11}(s)$ corta a 0 dB) es igual a 0.005 rad/s. Finalmente, para el diseño preliminar de κ_i se vuelve a tomar unos valores de κ_1 (asociado a la rapidez de la respuesta de la salida 1, esto es, de la temperatura TT_4) y κ_2 (asociado a la rapidez de la respuesta de la salida 2, esto es, de la temperatura TT_5) iguales a cero.

Con estas elecciones, el diseño inicial de $W_S(s)$ es el siguiente:

$$W_S(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.5s + 5 \cdot 10^{-4}}{s + 5 \cdot 10^{-8}} & 0 \\ 0 & \frac{0.5s + 5 \cdot 10^{-4}}{s + 5 \cdot 10^{-8}} \end{bmatrix}$$

Construcción de la planta generalizada y obtención del controlador

Una vez elegidas las funciones de ponderación, se tendrá que construir la planta generalizada como paso previo a la síntesis del controlador. En este caso se ha convertido el sistema nominal al plano ω mediante una bilineal inversa de Tustin con un tiempo de muestreo de 1 segundo. Tras haber realizado la conversión se ha construido la planta generalizada utilizando las funciones de ponderación diseñadas en continuo. A continuación se ha sintetizado el controlador en continuo y, finalmente, se ha discretizado el

controlador obtenido mediante una transformación bilineal de Tustin.

El proceso de síntesis queda resumido en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{bilin}^{-1} & W_T(s) & & & \text{bilin} \\
 & & \downarrow & + & & & \downarrow \\
 \hat{G}(z) & \Rightarrow & & \hat{G}(s) & \Rightarrow & \hat{P}(s) \Rightarrow \hat{K}(s) & \Rightarrow & \hat{K}(z) \\
 & & & + & & & & \\
 & & & W_S(s) & & & &
 \end{array}$$

Finalmente, es necesario recordar que el controlador ha sido obtenido con un sistema escalado. Para obtener el controlador que deberá ser implementado en el sistema real se deberá desescalar el controlador obtenido directamente del algoritmo. Esto se realiza mediante la expresión:

$$K(z) = D_u \hat{K}(z) D_e^{-1}$$

donde D_e y D_u son las matrices que se utilizaron para escalar el sistema (ver sección 5.5.2).

5.5.3 Resultados de simulación

Para evaluar el comportamiento de los controladores sintetizados se va a dibujar la respuesta ante escalón de las temperaturas de salida. Se va a proporcionar un escalón de $2.5\text{ }^\circ\text{C}$ en la referencia de la temperatura TT_4 y de $5\text{ }^\circ\text{C}$ en la temperatura TT_5 . Nótese que la magnitud de estos escalones coincide con la máxima variación utilizada en el escalado de la planta. En cada una de las figuras presentadas en este apartado se van a exponer la respuesta del sistema en el punto nominal de trabajo (línea continua gruesa) así como las respuestas de todos los modelos de la figura 5.37, haciendo especial hincapié en el *modelo 1* (línea gruesa a trozos), en el cual se supuso que el controlador no tenía por qué comportarse adecuadamente.

En la figura 5.40 se muestran los resultados obtenidos con la elección inicial de $W_S(s)$. Puede observarse que, como viene siendo habitual, el controlador resultante es muy conservador.

A continuación se aumentó los valores de κ_1 y κ_2 hasta un valor de 1, obteniendo

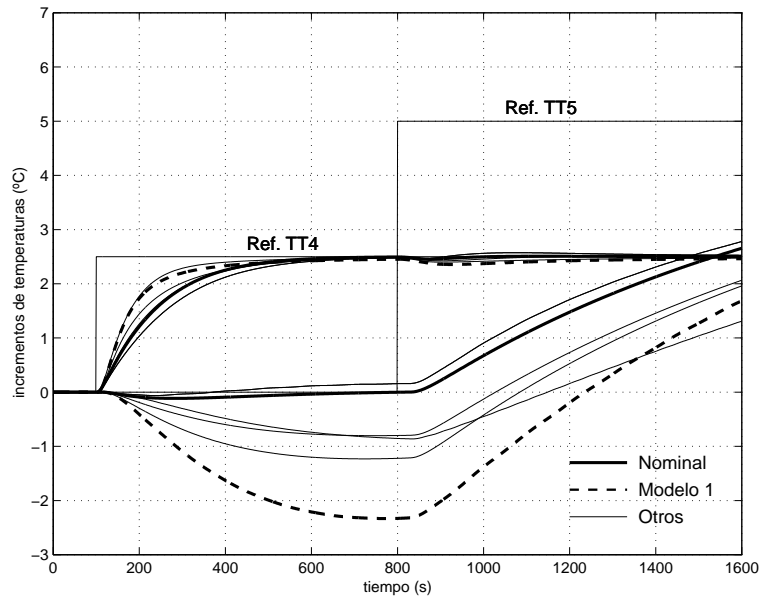


Figura 5.40: Resultados simulador con $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$.

la matriz de ponderación:

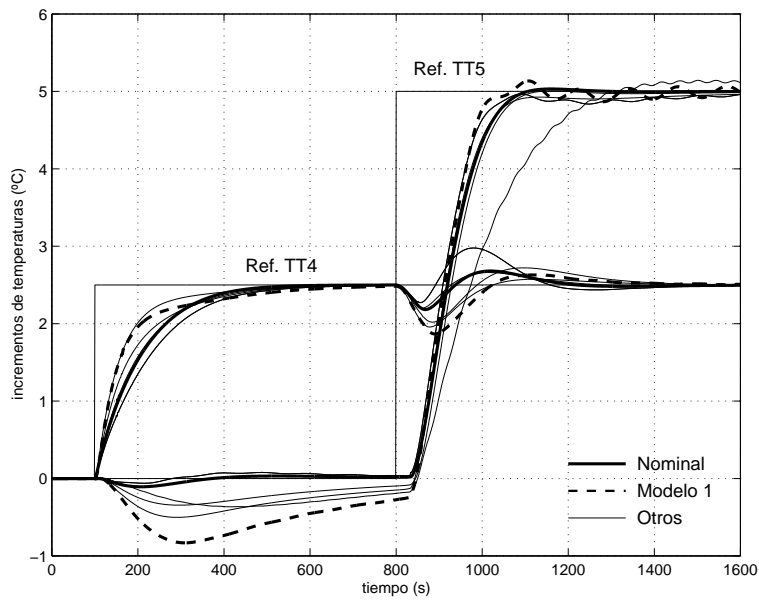
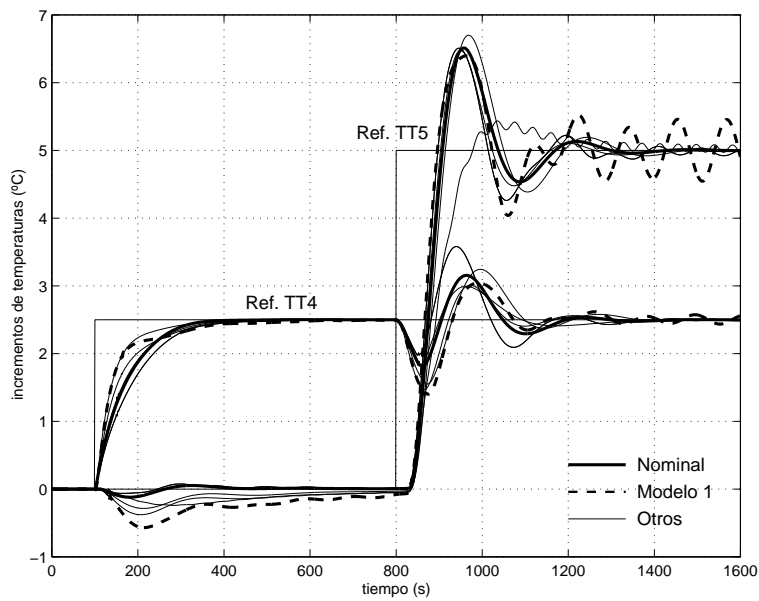
$$W_S(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.5s + 5 \cdot 10^{-3}}{s + 5 \cdot 10^{-7}} & 0 \\ 0 & \frac{0.5s + 5 \cdot 10^{-3}}{s + 5 \cdot 10^{-7}} \end{bmatrix}$$

y cuyos resultados se exponen en la figura 5.41. En ésta se puede observar como las respuestas se hacen significativamente más rápidas. La evolución de TT_5 empieza a ser algo oscilante para algunos modelos mientras que la de TT_4 no sobreoscila en ningún caso. Esto induce a pensar que se podría aumentar el valor de κ_1 mientras que no sería conveniente aumentar mucho más el valor de κ_2 .

Para comprobar el razonamiento anterior, se ha vuelto a aumentar los valores tanto de κ_1 como de κ_2 hasta 1.5. La matriz de ponderación $W_S(s)$ obtenida es:

$$W_S(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.5s + 1.5811 \cdot 10^{-2}}{s + 1.5811 \cdot 10^{-6}} & 0 \\ 0 & \frac{0.5s + 1.5811 \cdot 10^{-2}}{s + 1.5811 \cdot 10^{-6}} \end{bmatrix}$$

mientras que los resultados de simulación de este controlador se muestran en la figura 5.42. En ella puede comprobarse que la evolución de la temperatura TT_4 sigue siendo lenta mientras que la de la temperatura TT_5 es excesivamente oscilante, considerándose que este comportamiento no es admisible.

Figura 5.41: Resultados simulador con $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$.Figura 5.42: Resultados simulador con $\kappa_1 = \kappa_2 = 1.5$.

Según las ideas expuestas se deduce que para obtener un buen comportamiento habrá que aumentar el valor de κ_1 a la vez que habrá que reducir el de κ_2 . Para el controlador final se escogen unos valores de $\kappa_1 = 3$ y $\kappa_2 = 1$, donde el valor de κ_2 se podría haber tomado algo más alto si se admitiesen ciertas sobreoscilaciones en la respuesta de TT_5 . La matriz de ponderación $W_S(s)$ resultante para el controlador final es la siguiente:

$$W_S(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.5s + 5 \cdot 10^{-1}}{s + 5 \cdot 10^{-5}} & 0 \\ 0 & \frac{0.5s + 5 \cdot 10^{-3}}{s + 5 \cdot 10^{-7}} \end{bmatrix}$$

Los resultados de simulación con este controlador se exponen en la figura 5.43. Puede comprobarse como se consigue una evolución mucho más rápida en la temperatura TT_4 que en la temperatura TT_5 , lo cual es lógico puesto que la dinámica del intercambiador es mucho más rápida que la dinámica de la temperatura del tanque de agua (ver figura 5.36). Se observa que el desacoplo de las dinámicas conseguido es muy bueno para el punto de trabajo nominal y más que aceptable para el resto de modelos, incluido el *modelo 1*, para el cual, como es lógico, el comportamiento está más degradado. Además, puede observarse que, tanto en esta figura como en las anteriores, existe un modelo en el que la dinámica de TT_5 es especialmente lenta. Este modelo se corresponde con el sexto en la figura 5.37, al cual se hizo mención anteriormente (ver sección 5.5.2) por ser un punto de operación extremo.

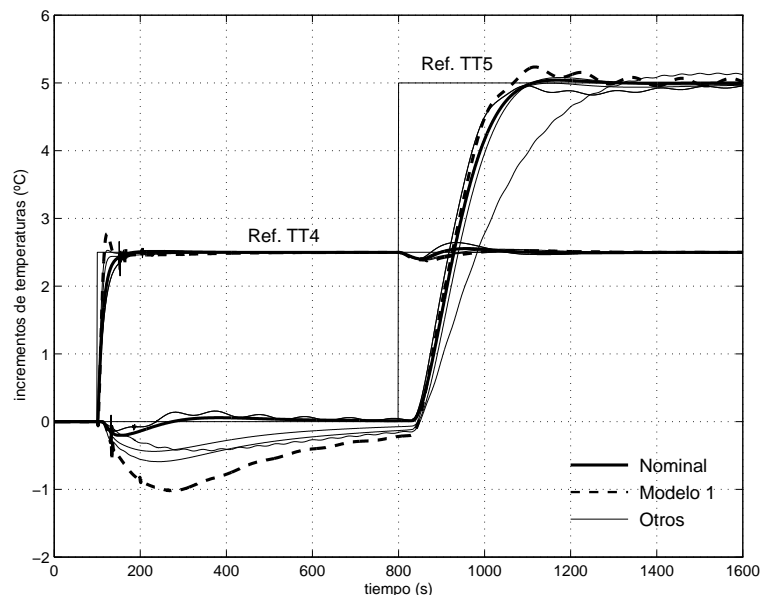


Figura 5.43: Resultados simulador con $\kappa_1 = 3$ y $\kappa_2 = 1$.

5.5.4 Resultados experimentales

La validez del controlador propuesto ha sido comprobada mediante experimentación con la planta piloto real.

En la figura 5.44 se muestra la expresión las matrices de estado del controlador propuesto, obtenido con el último diseño de las matrices de ponderación.

$$\begin{aligned}
 A_K &= \begin{bmatrix} 9.9765 \cdot 10^{-1} & -3.7109 \cdot 10^{-2} & -6.6298 \cdot 10^{-2} & 9.4900 \cdot 10^{-1} & 2.1134 & -7.4576 \cdot 10^{-1} & -1.4177 & -8.7098 \cdot 10^{-2} & -4.5422 \cdot 10^{-1} & -7.9679 \cdot 10^{-2} \\ -4.5025 \cdot 10^{-4} & 9.9531 \cdot 10^{-1} & -7.4468 \cdot 10^{-3} & 9.8543 \cdot 10^{-1} & 3.5871 \cdot 10^{-2} & -2.0139 \cdot 10^{-1} & -2.3229 \cdot 10^{-1} & -1.5014 \cdot 10^{-1} & -4.0590 \cdot 10^{-3} & 11.252 \\ -7.9019 \cdot 10^{-4} & -1.3686 \cdot 10^{-2} & 9.7508 \cdot 10^{-1} & -1.0190 \cdot 10^{-1} & 9.1651 \cdot 10^{-1} & -2.0534 \cdot 10^{-1} & -4.6057 \cdot 10^{-1} & 3.7695 \cdot 10^{-2} & -1.9345 \cdot 10^{-1} & -5.9909 \\ 2.8334 \cdot 10^{-5} & -3.0049 \cdot 10^{-3} & -6.6588 \cdot 10^{-3} & 6.7314 \cdot 10^{-2} & 2.0731 \cdot 10^{-1} & -2.0617 \cdot 10^{-1} & -7.0614 \cdot 10^{-1} & 5.8437 \cdot 10^{-2} & -4.1717 \cdot 10^{-3} & -12.231 \\ 6.4642 \cdot 10^{-6} & -6.7553 \cdot 10^{-4} & -1.7031 \cdot 10^{-3} & 2.4045 \cdot 10^{-2} & 4.6341 \cdot 10^{-1} & -4.0460 \cdot 10^{-1} & -1.3085 & 1.3861 \cdot 10^{-1} & 1.8412 \cdot 10^{-1} & 5.5419 \\ 1.2788 \cdot 10^{-6} & -1.7043 \cdot 10^{-4} & 3.3844 \cdot 10^{-4} & 5.8764 \cdot 10^{-2} & 4.2797 \cdot 10^{-2} & 9.8333 \cdot 10^{-1} & 3.0286 \cdot 10^{-1} & -3.5837 \cdot 10^{-2} & -2.5342 \cdot 10^{-1} & 1.7506 \\ 5.8996 \cdot 10^{-7} & -6.6516 \cdot 10^{-5} & -6.6157 \cdot 10^{-5} & 2.3425 \cdot 10^{-2} & 1.0095 \cdot 10^{-1} & 2.3583 \cdot 10^{-1} & 6.5655 \cdot 10^{-1} & 1.2944 \cdot 10^{-1} & 7.1715 \cdot 10^{-1} & -6.6923 \cdot 10^{-1} \\ -1.2985 \cdot 10^{-6} & 1.6123 \cdot 10^{-4} & -1.2662 \cdot 10^{-4} & -5.6070 \cdot 10^{-2} & -1.2273 \cdot 10^{-1} & -1.3508 & -1.8326 & -1.9988 & 1.7432 & -2.5998 \\ -1.1681 \cdot 10^{-6} & 1.4607 \cdot 10^{-4} & -1.3278 \cdot 10^{-4} & -5.0755 \cdot 10^{-2} & -1.0352 \cdot 10^{-1} & -1.2728 & -1.5230 & -9.4801 \cdot 10^{-1} & 4.2894 \cdot 10^{-1} & -2.3886 \\ -1.7697 \cdot 10^{-10} & 1.3449 \cdot 10^{-8} & 1.3923 \cdot 10^{-7} & -5.0478 \cdot 10^{-6} & -7.3892 \cdot 10^{-5} & 2.9400 \cdot 10^{-4} & -1.2922 \cdot 10^{-3} & 2.7424 \cdot 10^{-4} & 1.5913 \cdot 10^{-3} & -9.9949 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix} \\
B_K &= \begin{bmatrix} -6.2572 \cdot 10^{-1} & -2.1314 \\ -75.694 & 2.5353 \\ 38.647 & 4.8619 \\ -74.646 & 2.7632 \cdot 10^{-2} \\ 34.125 & 1.3307 \cdot 10^{-1} \\ 7.4332 & -2.5889 \cdot 10^{-2} \\ -1.6989 & -4.0414 \cdot 10^{-2} \\ -7.7413 & 6.0217 \cdot 10^{-2} \\ -7.5627 & 5.1486 \cdot 10^{-2} \\ 5.6170 \cdot 10^{-3} & 3.0847 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \\
C_K &= \begin{bmatrix} 1.7210 \cdot 10^{-8} & -2.2112 \cdot 10^{-6} & 3.0409 \cdot 10^{-6} & 7.6573 \cdot 10^{-4} & 1.1289 \cdot 10^{-3} & 2.2066 \cdot 10^{-2} & 1.5211 \cdot 10^{-2} & 1.6811 \cdot 10^{-2} & -1.1693 \cdot 10^{-2} & 4.1095 \cdot 10^{-2} \\ -1.8041 \cdot 10^{-6} & 1.3712 \cdot 10^{-4} & 1.4191 \cdot 10^{-3} & -5.1464 \cdot 10^{-2} & -7.5319 \cdot 10^{-1} & 2.9964 & -13.171 & 2.7951 & 16.220 & 5.1515 \end{bmatrix} \\
D_K &= \begin{bmatrix} 1.5746 \cdot 10^{-1} & -6.0758 \cdot 10^{-4} \\ 57.251 & 3.0664 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Figura 5.44: Matrices de estados del controlador propuesto.

En la figura 5.45 se muestran los resultados experimentales obtenidos para el sistema funcionando en el punto nominal de operación. Puede observarse como el comportamiento obtenido es más que aceptable, obteniendo un tiempo de subida de unos 200 segundos en la temperatura TT_5 y sobre unos 50 segundos para la temperatura TT_4 , ambas sin sobreoscilar. Además, un cambio de referencia en una variable de salida apenas tiene influencia sobre la otra salida.

En la figura 5.46 se muestran resultados experimentales obtenidos en un punto de funcionamiento cercano al correspondiente al del *modelo 1* de la figura 5.37. A pesar de que se ha expuesto uno de los resultados más desfavorables, se observa como el comportamiento del controlador también sigue siendo aceptable, obteniendo tiempos de subida menores que los anteriores, pero con una sobreoscilación del 20 % aproximadamente en un cambio de referencia en TT_5 y sobre el 5 % en el caso de la temperatura TT_4 .

Se realizaron pruebas en los otros puntos de funcionamiento no nominales, obteniendo resultados experimentales con mejor comportamiento que los expuestos en la figura 5.46. Esto prueba la robustez del controlador propuesto, dado que en el caso más desfavorable (dentro de la región de trabajo establecida) el controlador hace que el sistema se comporte adecuadamente.

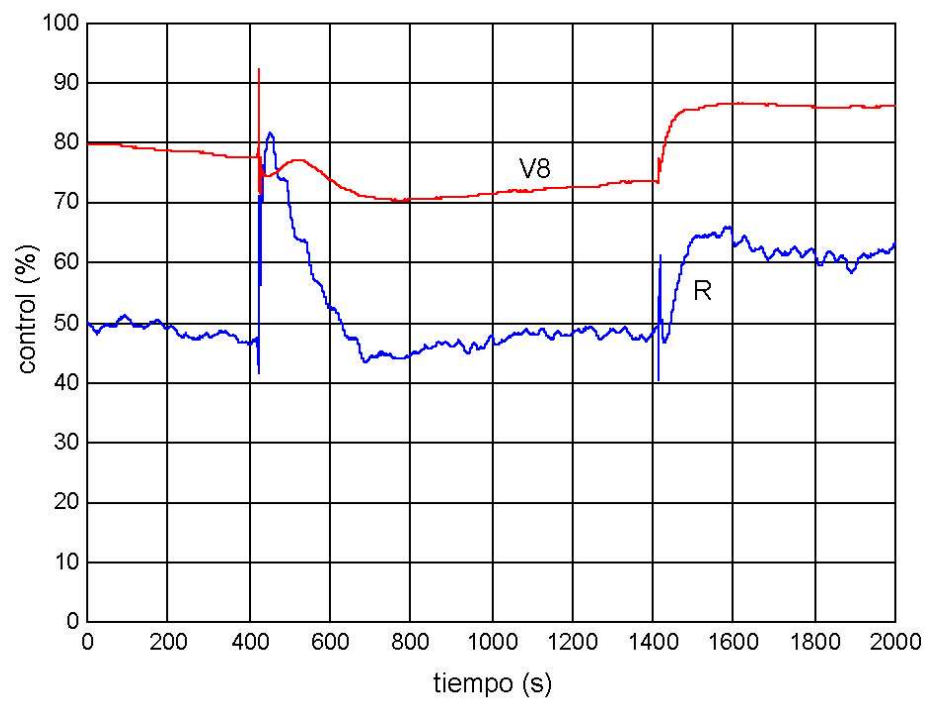
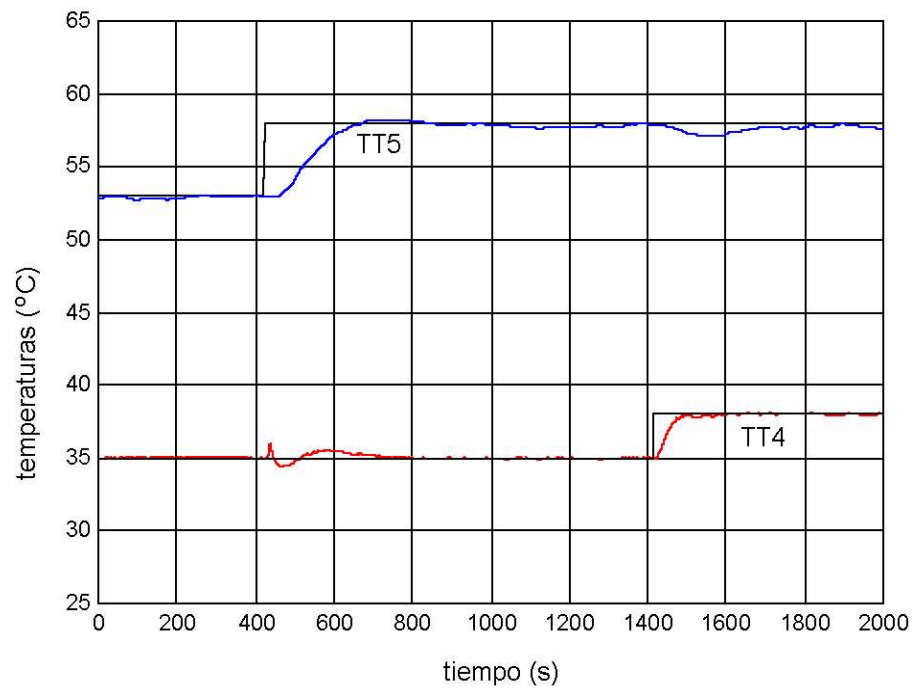


Figura 5.45: Resultados experimentales en el punto nominal de trabajo.

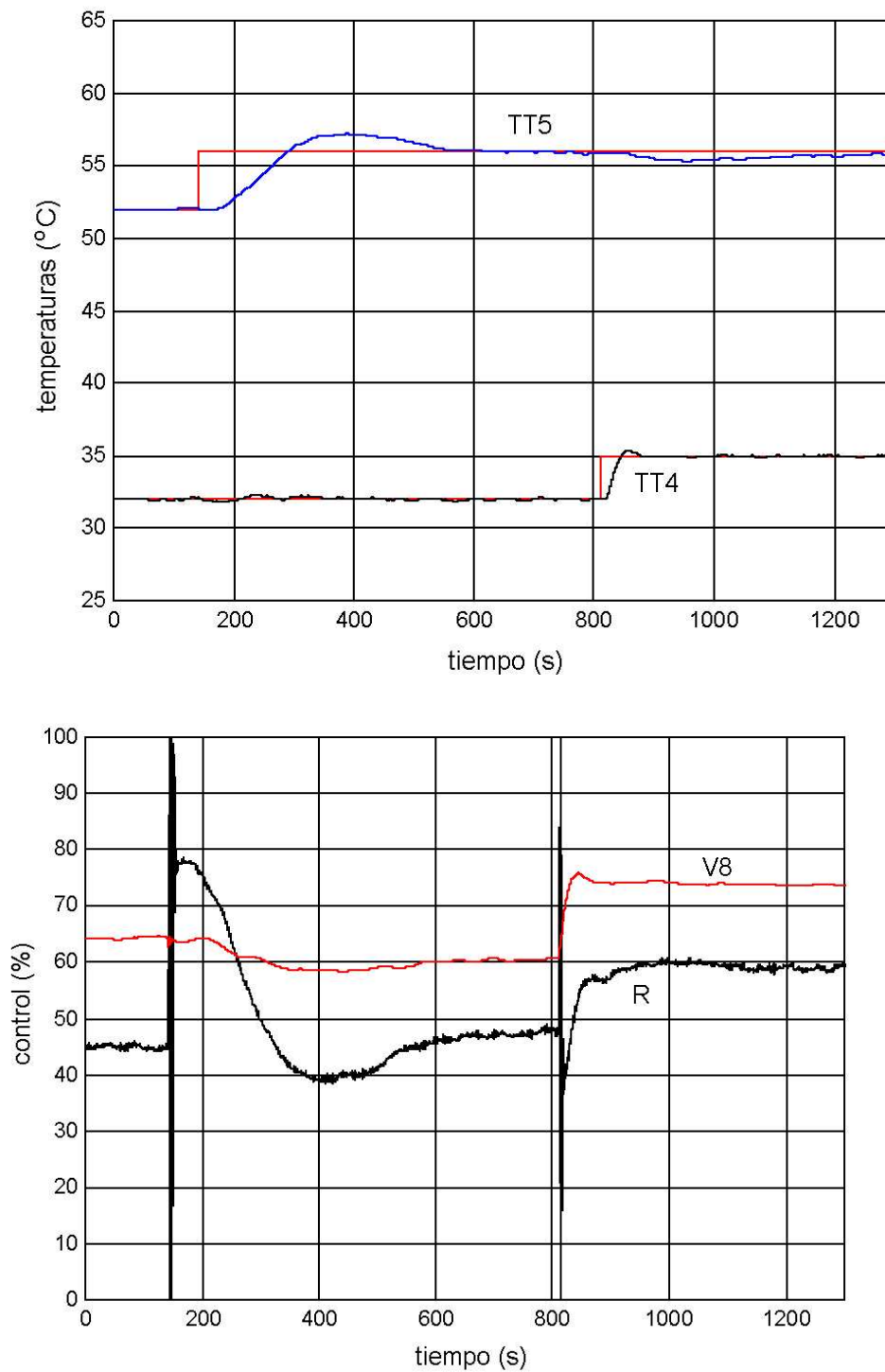


Figura 5.46: Resultados experimentales en un punto de trabajo no nominal.

5.6 Conclusiones

Se han diseñado controladores H_∞ mediante el planteamiento de *sensibilidad mixta* utilizando la metodología de diseño de las funciones de ponderación propuesta en el capítulo anterior y se ha comprobado la validez de la misma aplicándola a distintos sistemas reales.

A pesar de la sencillez del método, los resultados obtenidos han sido satisfactorios para todas las aplicaciones, monovariantes y multivariantes, tanto desde el punto de vista de robustez como de comportamiento.

Hay que hacer notar que si bien la metodología de diseño propuesta para el cálculo de controladores permite aplicar esta técnica de control sin necesidad de amplios conocimientos teóricos, sí que es conveniente tener un amplio conocimiento del sistema real para saber en qué puntos de trabajo funcionará correctamente el controlador y en cuales no.

Respecto a los distintos procesos seguidos para la síntesis del controlador (conversiones de continuo a discreto), la conclusión que se ha obtenido es que desde el punto de vista de la descripción externa del controlador obtenido no hay diferencias apreciables entre un método y otro.

Respecto a la elección de los parámetros κ_i , se puede concluir que un buen valor final para sistemas *monovariantes* puede estar entre 0.5 y 1. Esto se justifica con el hecho de que si la función $W_T(s)$ es una cota superior de la incertidumbre, se puede suponer que a partir de la frecuencia ω_T se tiene una incertidumbre multiplicativa superior a la unidad. Por tanto, el desconocimiento del sistema será total a partir de esta frecuencia. Nótese que con el valor $\kappa = 1$ se está imponiendo que la frecuencia de corte de $W_S(s)$ sea precisamente ω_T , por lo que con valores superiores de κ se estaría pidiendo al controlador que funcione bien en frecuencias donde se desconoce completamente la dirección del sistema.

El mismo razonamiento no es válido para sistemas *multivariantes*, ya que existe toda una banda de frecuencias en la que los valores singulares de la incertidumbre corta a 0 dB. Teniendo en cuenta además que en general los valores singulares de la misma no están asociados a las mismas direcciones de las salidas del sistema, no se puede saber a priori que salida se puede hacer más rápida y cual no. De hecho, en algunos casos habrá que tomar una solución de compromiso entre las rapidez de unas salidas frente otras, lo cual sucede, por ejemplo, cuando el sistema tiene ceros de transmisión en el semiplano derecho ([Sko96]). Del razonamiento expuesto se justifica el diseño de $W_S(s)$ en función de ω_T (ver sección 4.2.3), con lo que se consigue que ambas respuestas sean inicialmente lentas ($\kappa_i = 0$), evitando así la posibilidad de que el sistema se inestabilice

con el diseño preliminar del controlador.

Finalmente, comentar que los resultados obtenidos han sido probados tanto por simulación como en los distintos sistemas reales (exceptuando el tercer ejemplo en el que no se ha creído conveniente incluir resultados simulados por la sencillez del modelo), obteniendo valores similares en ambos casos.

Capítulo 6

Síntesis de Controladores H_∞ No Lineales

6.1 Introducción

La solución del planteamiento de control H_∞ no lineal para sistemas continuos no lineales fue aportada por *van der Schaft* en una serie de trabajos a principios de la década de los noventa ([van91, van92]). Se basa en utilizar el concepto de la ganancia L_2 de sistemas no lineales como extensión de la norma H_∞ para los sistemas lineales.

Como se expuso en la sección 3.3, la norma infinito de un sistema lineal se define cómo el pico en *frecuencia* del máximo valor singular del sistema, por lo que esta definición no es válida para los sistemas no lineales al no ser aplicables técnicas frecuenciales. Sin embargo, si se traslada esta definición al dominio temporal, resulta que la norma infinito del sistema puede ser entendida como su *norma 2 inducida*, siendo ésta la relación entre la *energía* (norma 2) de su salida respecto a la *energía* (norma 2) de su entrada. Esta definición de la ganancia de un sistema coincide con la norma L_2 del mismo, la cual sí puede ser utilizada en sistemas no lineales.

En un planteamiento general, el problema da lugar a unas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales del tipo *Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs* (las cuales hacen las veces de las ecuaciones de *Riccati* para sistemas lineales), cuyo principal inconveniente es que, a diferencia de lo que sucede con estas últimas, no existe un método general para poder resolverlas, debiéndose hallarse la solución de las mismas para cada caso

particular.

A pesar de la existencia de conocidos algoritmos (por ejemplo [Luk69]) que permiten aproximar la solución local de dichas ecuaciones por expresiones polinómicas cuadráticas, lo cierto es que éstos no son aplicables cuando el tiempo aparece de forma explícita en las ecuaciones (como sucede en la aplicación que se expondrá en el capítulo 7).

Con este capítulo se pretende realizar una breve exposición de los principales conceptos manejados en esta teoría de control, los cuales serán necesarios para obtener los controladores en el siguiente capítulo. Así, en la siguiente sección se presentará el planteamiento general del control, el cual se enfocará como una extensión natural del planteamiento realizado en la sección 3.2 para sistemas lineales. Seguidamente, en la sección 6.3 se mostrará cómo plantear una ley de control por realimentación del vector de estado para un sistema no lineal genérico. Finalmente, en la sección 6.4 se planteará el mismo problema particularizando para sistemas no lineales afines en la actuación.

Desarrollos más detallados sobre esta teoría pueden ser hallados en ([Isi96, van00]). Asimismo, la referencia ([Hel99]) puede ser de gran ayuda para encontrar los más variados detalles matemáticos sobre este enfoque de control.

6.2 Formulación general

Se van a considerar sistemas no lineales $P(x, u, \omega)$ (ver figura 6.1) cuyas dinámicas pueden ser expresadas mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x, u, \omega) \\ v &= c(x, u, \omega) \\ z &= h(x, u, \omega) \end{aligned} \tag{6.1}$$

Al igual que en los sistemas lineales, $\omega(t)$ representa el vector de perturbaciones externas al sistema, $z(t)$ es el vector objetivo cuya energía será indicadora del comportamiento, $v(t)$ representa el vector de señales medibles que alimentará a algún controlador, $u(t)$ es el vector de señales de control y $x(t)$ es el vector de estado del sistema. Supóngase que las dimensiones de x , ω , u , z y v son respectivamente n , l , m , p y q . Nótese la correspondencia entre este sistema y la denominada *planta generalizada* en los capítulos anteriores.

El problema de control consiste en calcular un controlador $K(x_k, v)$, siendo x_k los estados del mismo, de forma que se atenúe la relación entre la energía del vector objetivo

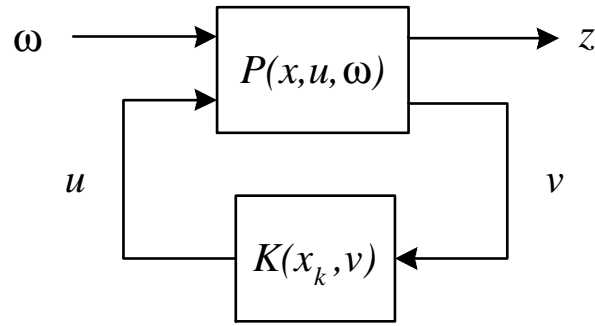


Figura 6.1: Formulación general del problema de control.

$z(t)$ frente a la energía del vector de señales perturbadoras $\omega(t)$. De nuevo, al nivel de atenuación conseguido se le denominará γ . Matemáticamente, esta condición puede ser expresada mediante la siguiente desigualdad:

$$\int_0^T \|z(t)\|_2^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|\omega(t)\|_2^2 dt \quad \forall T$$

donde $\|z(t)\|_2^2$ y $\|\omega(t)\|_2^2$ representan la potencia (energía instantánea) del vector objetivo y del vector de perturbaciones respectivamente, siendo la expresión de éstas las siguientes:

$$\|z(t)\|_2^2 = z^T(t)z(t) = \sum_{i=1}^p |z_i(t)|^2$$

$$\|\omega(t)\|_2^2 = \omega^T(t)\omega(t) = \sum_{i=1}^l |\omega_i(t)|^2$$

Tanto el control H_∞ no lineal óptimo como el subóptimo pueden ser enunciados de manera análoga a la realizada en la sección 3.2 para sistemas lineales. Esto se puede realizar simplemente modificando la definición de la norma infinito del sistema, introduciendo en su lugar la definición de *norma L_2* , también conocida como *norma 2 inducida*. La definición de esta norma ($\gamma^*(G)$) para un sistema genérico $y(t) = G(u(t))$ viene dada por la siguiente expresión:

$$\gamma^*(G) \equiv \inf(\gamma \mid \exists \varrho \in \Re \text{ t.q. } \int_0^T \|y(t)\|_2^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|u(t)\|_2^2 dt + \varrho) \quad \forall T$$

donde se supone que la señal de entrada $u(t)$ tiene una energía acotada. Nótese como esta definición coincide con la de la norma infinito de un sistema lineal.

Volviendo a hacer una analogía con la teoría H_∞ lineal, el problema de control se puede dividir en dos formulaciones duales: control por realimentación del vector de

estado y observación del mismo, donde la unión de ambas formulaciones da lugar al control por realimentación de la salida del sistema. En este capítulo sólo se va a exponer la primera de ellas puesto que en las aplicaciones realizadas en el siguiente capítulo se va a suponer que el estado es accesible (lo cual es habitual en robótica). Una exposición del problema de observación H_∞ no lineal puede encontrarse en ([van00]).

6.3 Control H_∞ no lineal por realimentación del estado

Como se indicó en la introducción de este capítulo, en esta sección se mostrará cómo hallar una ley de control basada en la realimentación del vector de estado, donde para poder implementar esta ley de control se han de tener los estados accesibles.

Siguiendo la misma tónica del capítulo 3 para sistemas lineales, se va a exponer cómo plantear un controlador H_∞ no lineal *subóptimo*, para lo cual habrá que suponer a priori un valor de la atenuación γ . Este valor de la atenuación puede ser reducido siguiendo la misma técnica planteada en la sección 3.4.

Partiendo del sistema (6.1), el control H_∞ no lineal subóptimo puede formularse a partir de la *Teoría de juegos diferenciales* eligiendo la siguiente función de coste $J_\gamma(t)$:

$$J_\gamma(t) = -\frac{1}{2}\gamma^2 \|\omega(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|z(t)\|_2^2 \quad (6.2)$$

La minimización de esta función da lugar a la siguiente formulación Hamiltoniana ([Hel99]):

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + H_\gamma^*(x, p) = 0 \quad (6.3)$$

donde $V(t, x)$ es una función escalar positiva y derivable, $p = \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}$ representa al vector de co-estados definido como el gradiente de $V(t, x)$ y donde $H_\gamma^*(x, p)$ tiene la siguiente expresión:

$$H_\gamma^*(x, p) = \min_{\omega, u} H_\gamma(x, p, \omega, u) \equiv \min_{\omega, u} \left(p^T a(x, u, \omega) - \frac{1}{2}\gamma^2 \|\omega\|_2^2 + \frac{1}{2} \|z\|_2^2 \right) \quad (6.4)$$

siendo el vector $a(x, u, \omega)$ el correspondiente a la dinámica del sistema (6.1). Para resolver el problema de minimización habrá que anular la derivada de la función H_γ respecto a ω y a u , esto es:

$$\frac{\partial H_\gamma(x, p, \omega, u)}{\partial \omega} = 0 \quad , \quad \frac{\partial H_\gamma(x, p, \omega, u)}{\partial u} = 0 \quad (6.5)$$

La resolución del sistema de ecuaciones (6.5) da lugar a las expresiones del control óptimo $u^*(x, p)$ y de la peor perturbación posible $\omega^*(x, p)$, donde se ha supuesto que dicha solución constituye un punto de ensilladura de la función hamiltoniana, esto es:

$$H_\gamma(x, p, \omega, u^*) \leq H_\gamma(x, p, \omega^*, u^*) \leq H_\gamma(x, p, \omega^*, u) \quad \forall \omega, u \text{ y } (x, p) \quad (6.6)$$

Evaluando la expresión (6.4) en $u = u^*(x, p)$ y $\omega = \omega^*(x, p)$ se obtiene la expresión de la hamiltoniana óptima:

$$H_\gamma^*(x, p, \omega^*(x, p), u(x, p))$$

Finalmente, sustituyendo el vector de co-estados p por $\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}$ se obtiene la siguiente expresión de la hamiltoniana:

$$H_\gamma^* \left(x, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}, \omega^* \left(x, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right), u \left(x, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right) \right) \quad (6.7)$$

Por tanto, el problema de control H_∞ por realimentación del vector de estado se reduce a calcular una función $V(t, x) \geq 0$ que satisfaga la ecuación (6.3), donde H_γ es la correspondiente a la expresión (6.7). Si puede hallarse dicha función, la ley de control

$$u^* \left(x, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right) \quad (6.8)$$

garantizará que el sistema en bucle cerrado formado por (6.1) y (6.8) tendrá ganancia L_2 (desde ω hasta z) menor que γ .

6.4 Particularización para sistemas afines en la actuación

Existen muchos sistemas físicos cuyos modelos, a pesar de ser no lineales, son afines en la actuación. En este caso particular, el sistema se puede representar mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u + k(x)\omega \\ z &= \begin{bmatrix} h(x) \\ u \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.9)$$

En este caso, la función de coste adopta la siguiente expresión:

$$J_\gamma(t) = -\frac{1}{2}\gamma^2 \|\omega(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|z(t)\|_2^2 = -\frac{1}{2}\gamma^2 \|\omega(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} h(x) \\ u \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (6.10)$$

Sustituyendo esta expresión en (6.4) (teniendo en cuenta la nueva expresión de la dinámica del sistema) se obtiene:

$$\begin{aligned} H_\gamma(x, p, \omega, u) &= p^T (f(x) + g(x)u + k(x)\omega) - \frac{1}{2}\gamma^2 \|\omega\|_2^2 + \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} h(x) \\ u \end{bmatrix} \right\|_2^2 \\ &= p^T (f(x) + g(x)u + k(x)\omega) - \frac{1}{2}\gamma^2 \omega^T \omega + \frac{1}{2} h^T(x)h(x) + \frac{1}{2} u^T u \end{aligned} \quad (6.11)$$

Anulando la derivada de la función H_γ respecto al vector de perturbaciones ω se tiene que:

$$\frac{\partial H_\gamma(x, p, \omega, u)}{\partial \omega} = p^T k(x) - \gamma^2 \omega^T = 0 \quad (6.12)$$

de donde se obtiene la perturbación $\omega^*(x, p)$:

$$\omega^*(x, p) = \frac{1}{\gamma^2} k(x)^T p = 0 \quad (6.13)$$

Por otra parte, anulando la derivada de la función H_γ respecto a la señal de control u se tiene que:

$$\frac{\partial H_\gamma(x, p, \omega, u)}{\partial u} = p^T g(x) + u^T = 0 \quad (6.14)$$

dando lugar a la señal de control $u^*(x, p)$:

$$u^*(x, p) = -g^T(x)p \quad (6.15)$$

Al igual que se expuso en la sección anterior, el punto $(\omega^*(x, p), u^*(x, p))$ constituye un punto de ensilladura en la función hamiltoniana $H_\gamma(x, p, \omega, u)$. Sin embargo, en el caso particular de que el sistema sea afín resulta que:

$$\begin{aligned} H_\gamma(x, p, \omega, u) &\leq H_\gamma(x, p, \omega^*, u) \quad \forall \omega, u \text{ y } (x, p) \\ H_\gamma(x, p, \omega, u^*) &\leq H_\gamma(x, p, \omega, u) \quad \forall \omega, u \text{ y } (x, p) \end{aligned}$$

que son más restrictivas que las expuestas en la ecuación (6.6). Esto indica que ω^* puede ser considerada como la perturbación posible más desfavorable mientras que u^* puede ser considerado como el control óptimo para cualquier perturbación posible.

Para hallar el hamiltoniano óptimo habrá que sustituir las expresiones de (ω^*, u^*) (ecuaciones (6.13) y (6.15) respectivamente) en la ecuación (6.11), obteniéndose, tras realizar sencillas manipulaciones matriciales, la siguiente expresión:

$$H_\gamma^*(x, p) = p^T f(x) + \frac{1}{2} p^T \left[\frac{1}{\gamma^2} k(x) k^T(x) - g(x) g^T(x) \right] p + \frac{1}{2} h^T(x) h(x)$$

Finalmente, sustituyendo el vector de co-estados p por el gradiente $\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}$ y sustituyendolo en la ecuación (6.3), se obtiene la siguiente ecuación de *Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs*:

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V^T(t, x)}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial V^T(t, x)}{\partial x} \left[\frac{1}{\gamma^2} k(x) k^T(x) - g(x) g^T(x) \right] \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) = 0 \quad (6.16)$$

Por lo tanto, el cálculo de una ley de control por realimentación del vector de estado para sistemas afines en la actuación puede hallarse mediante el siguiente teorema:

Sea un valor de la atenuación $\gamma > 0$. Si existe una función escalar $V(t, x) \geq 0$ derivable que satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs (6.16), entonces el sistema en bucle cerrado correspondiente al sistema (6.9) junto con la ley de control (6.15) tiene ganancia L_2 (desde ω hasta z) menor o igual a γ .

Este resultado será utilizado en el siguiente capítulo para hallar la expresión de un controlador para brazos manipuladores, cuyas ecuaciones de *Euler-Lagrange* tienen la particularidad de ser afines en la actuación, siendo éstas los pares aplicados en las articulaciones.

Capítulo 7

Aplicaciones del Control H_∞ No Lineal a la Robótica

7.1 Introducción

En estos últimos años están surgiendo con mucho auge publicaciones en las que se aplica la teoría de control H_∞ no lineal expuesta en el capítulo anterior. Este enfoque está siendo empleado satisfactoriamente en distintos tipos de sistemas, como por ejemplo, convertidores de potencia ([Kug99]), sistemas de orientación de naves espaciales ([Kan95]), procesos químicos ([Li99]) o aplicaciones aeronáuticas ([Har00]).

Sin embargo, el principal inconveniente de esta teoría radica en el hecho de que no existen soluciones analíticas generales para las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs planteadas en el capítulo anterior, teniendo que ser resueltas para cada aplicación en particular.

Para paliar este inconveniente, en la actualidad se están implementando métodos numéricos ([Luk69, Har00, Con00]) que permiten integrar dichas ecuaciones, si bien dichos métodos no son aplicables con carácter general.

De especial interés para esta Tesis son las numerosas aplicaciones realizadas a la robótica, área en la que se ha avanzado notoriamente, como puede observarse, entre otros, en ([Che94, Fen94, Ast94, Maa95, Pos98]).

En este capítulo se van a presentar las aportaciones de esta Tesis relacionadas con esta materia, exponiendo a continuación un resumen de las mismas.

La solución analítica para el control H_∞ no lineal de robots manipuladores aportada por *Feng* ([Fen94]) permite atenuar los efectos de perturbaciones en los pares de las articulaciones. Sin embargo, este resultado (aplicado satisfactoriamente en [Pos98]) tiene principalmente dos inconvenientes:

1. Supone que las perturbaciones en los pares son de media nula. Esta hipótesis es poco realista si se tiene en cuenta que el robot debe transportar una carga en su elemento terminal, lo cual supone una perturbación mantenida.
2. Supone que el modelo del robot es perfecto, asumiendo que las incertidumbres pueden ser interpretadas como perturbaciones englobadas en el punto anterior. Hay que hacer constar que, a pesar de realizar estas hipótesis en dicha referencia, en ella se incluye una formulación adaptativa basada en la dependencia lineal de los parámetros inciertos desarrollada por Slotine ([Slo88]) que permite atenuar el efecto de las incertidumbres del modelo.

Las aportaciones de este capítulo están enfocadas a resolver estos dos inconvenientes:

1. Por una parte se ha modificado la ecuación diferencial no lineal del error planteada por *Feng*, incluyendo un nuevo término que permite penalizar la integral del error de la posición del robot. Se aporta también una solución analítica a esta nueva ecuación (con una estructura similar a la solución de la ecuación original) y se establecen condiciones para reformular el controlador en la forma de un *PID no lineal*, en el que además de ponderar al error, a su integral y a su derivada, se podrá penalizar también a la señal de control que proporciona el controlador.
2. A pesar de la robustez del controlador anterior, hay que recordar que su formulación se ha basado exclusivamente en el rechazo a perturbaciones, suponiendo un modelo perfecto. Para resolver este inconveniente, en este capítulo también se aporta una solución a este problema basada en una extensión a sistemas no lineales del método conocido en robótica como *control con funciones de saturación*.

La validez de los controladores propuestos se comprobará primero con el modelo de un robot de dos grados de libertad y posteriormente con el modelo de un robot industrial.

7.2 Enfoque de control H_∞ no lineal

En esta sección se van a considerar sistemas no lineales afines tanto en la actuación como en las perturbaciones. La ecuación dinámica de este tipo de sistemas puede ser expresada de la forma:

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + g(x, t)u(t) + k(x, t)\omega(t) \quad (7.1)$$

donde $u(t)$ es el vector de señales de entrada, $\omega(t)$ se corresponde con el vector de perturbaciones externas y $x(t)$ es el vector de estados. Considérese que las dimensiones de los vectores u , d y x son respectivamente p , q y n respectivamente. Tal como se expuso en el capítulo anterior, el comportamiento deseado del sistema puede ser especificado por un vector objetivo z , de dimensión $m + p$, cuya energía se pretende minimizar. El vector z va a ser expresado según la expresión:

$$z = W \begin{bmatrix} h(x) \\ u \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

donde $h(x)$ representa el vector (de dimensión m) de las señales de error cuya energía se pretende hacer pequeña y W es una matriz de ponderación. Haciendo la hipótesis de que los estados $x(t)$ son accesibles (lo cual suele ser normal en robótica, pues éstos están relacionados con las posiciones de las articulaciones), el problema de control subóptimo H_∞ no lineal puede ser formulado de la siguiente manera:

Dado un nivel de atenuación γ , hallar una ley de control por realimentación del vector de estado $u = u(x, t)$ tal que la ganancia L_2 del sistema desde las perturbaciones $\omega(t)$ hasta el vector objetivo $z(t)$ (tras haber cerrado el bucle de control) es menor o igual a γ , esto es:

$$\int_0^T \|z\|_2^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|\omega\|_2^2 dt$$

El integrando del miembro de la izquierda en la desigualdad anterior puede ser reescrito como ([Fen94]):

$$\|z\|_2^2 = z^T z = \begin{bmatrix} h^T(x) & u^T \end{bmatrix} W^T W \begin{bmatrix} h(x) \\ u \end{bmatrix}$$

donde la matriz de ponderación $W^T W$ puede ser expresada de la siguiente manera:

$$W^T W = \begin{bmatrix} Q & \bar{C} \\ \bar{C}^T & R \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

y donde las matrices Q y R son simétricas y definidas positivas, cumpliéndose además la siguiente desigualdad:

$$Q - \bar{C}R^{-1}\bar{C}^T > 0$$

A diferencia de la formulación original, en este capítulo se va a considerar que las matrices Q y \bar{C} tienen la siguiente estructura:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12} & Q_2 & Q_{23} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_3 \end{bmatrix} \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \\ \bar{C}_3 \end{bmatrix}$$

En estas condiciones, se puede calcular la señal de control óptima $u^*(x, t)$ para el sistema considerado a partir de la resolución de la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales de *Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs* (HJBI):

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^T V}{\partial x} f(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^T V}{\partial x} \left[\frac{1}{\gamma^2} k(x, t) k^T(x, t) - g(x, t) R^{-1} g^T(x, t) \right] \frac{\partial V}{\partial x} \\ - \frac{\partial^T V}{\partial x} g(x, t) R^{-1} \bar{C}^T h(x) + \frac{1}{2} h^T(x) (Q - \bar{C}R^{-1}\bar{C}^T) h(x) = 0 \end{aligned} \quad (7.4)$$

Resolviendo la ecuación anterior para un valor de $\gamma > \sqrt{\bar{\sigma}(R)}$, se obtiene como solución la función escalar $V(x, t)$, a partir de la cual se calculará la ley de control óptima para el valor de γ elegido mediante la expresión ([Fen94]):

$$u^* = -R^{-1} \left(\bar{C}^T h(x) + g^T(x, t) \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (7.5)$$

7.3 Control H_∞ no lineal de robots manipuladores

Como suele ser habitual en robótica, para describir la dinámica de un brazo manipulador de n grados de libertad (*GDL*) se va a utilizar la siguiente ecuación matricial de Euler-Lagrange:

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) = \tau + d_\tau, \quad (7.6)$$

donde q representa al vector de n coordenadas generalizadas (posiciones de las articulaciones del robot, que se suponen accesibles para ser medidas), \dot{q} y \ddot{q} se corresponden con las velocidades y aceleraciones respectivamente de dichas coordenadas generalizadas, τ

representa al vector de dimensión n de pares aplicado en los ejes de las articulaciones (señales de entrada del sistema) y d_τ es considerado como un par adicional representando el efecto global de los errores de modelado del sistema y de las perturbaciones externas. El significado del resto de elementos que aparecen en esta ecuación es el siguiente:

$$\begin{aligned} M(q) & : \text{matriz de inercias del robot (simétrica y semidefinida positiva)} \\ V(q, \dot{q}) & : \text{vector de términos centrípetos y de Coriolis} \\ G(q) & : \text{vector de términos gravitatorios} \end{aligned}$$

Como es bien sabido, para controlar un brazo manipulador es necesario calcular los pares que hay que aplicar en las articulaciones del mismo para que éste siga una trayectoria deseada. Si se representa a la posición, velocidad y aceleración de referencia de las articulaciones (las cuales deben ser proporcionadas por un generador de trayectorias) como q_r , \dot{q}_r y \ddot{q}_r respectivamente, se puede calcular el error que se está cometiendo en cada instante de tiempo mediante las expresiones:

$$\begin{aligned} \ddot{e} &= \ddot{q} - \ddot{q}_r \\ \dot{e} &= \dot{q} - \dot{q}_r \\ e &= q - q_r \\ \int_0^t e \, dt &= \int_0^t (q - q_r) \, dt \end{aligned}$$

donde las expresiones anteriores se corresponden, de arriba a abajo, con los errores de seguimiento de la aceleración, de la velocidad y de la posición de las coordenadas articulares, además de la integral de estas últimas.

Para plantear en este capítulo el control H_∞ no lineal del robot manipulador, se define el vector de errores de seguimiento $x(t)$, así como su derivada, $\dot{x}(t)$, de la siguiente manera:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ e(t) \\ \int e(t) \, dt \end{bmatrix} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \ddot{e}(t) \\ \dot{e}(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

Nótese como, a diferencia de la formulación original de Feng, en el vector de errores se ha incluido un término con la integral del error, el cual permitirá conseguir errores en régimen permanente nulos frente a perturbaciones mantenidas en la entrada del sistema.

Una vez elegida la representación de la dinámica del robot mediante la ecuación (7.6), se propone una ley de control con la siguiente estructura:

$$\tau = M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) - \frac{1}{\rho}(M(q)T\dot{x} + C(q, \dot{q})Tx) + \frac{1}{\rho}u \quad (7.8)$$

donde el término $C(q, \dot{q})$ debe ser calculado mediante la expresión:

$$C(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{M}(q) + N(q, \dot{q})$$

y donde a su vez las matrices $\dot{M}(q)$ y $N(q, \dot{q})$ deben ser calculadas de la siguiente manera:

$$\dot{M}_{ij} = \frac{d}{dt} M_{ij} = \frac{\partial M_{ij}}{\partial q} \dot{q} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (7.9)$$

$$N_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \quad (7.10)$$

Nótese que, según su definición, la matriz $N(q, \dot{q})$ es antisimétrica. Esta propiedad será utilizada posteriormente en la demostración expuesta en el apéndice C. Además, puede demostrarse que ([Spo89, Qu96]):

$$V(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q}$$

la cual es una propiedad muy conocida de los robots manipuladores.

En la estructura de la ley de control propuesta en (7.8) se observa que sus tres primeros términos están diseñados para compensar la dinámica del robot (ver ecuación (7.6)). Por otra parte, aparecen términos que proporcionan par (señal de control) en función de la magnitud del vector de error $x(t)$ y su derivada $\dot{x}(t)$, pudiéndose considerar esta parte de la ley de control análoga a un controlador externo diseñado con la conocida técnica de control por par calculado (ver figura 7.1). Finalmente, se ha incluido un término u representando el esfuerzo de control adicional necesario para atenuar el efecto de las perturbaciones.

La matriz T que aparece en dicha ley de control va a ser dividida en tres bloques:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \end{bmatrix}$$

donde se considerará $T_1 = \rho I$, siendo ρ un escalar positivo e I la matriz identidad de dimensión n .

Si se sustituye la expresión de la ley de control (7.8) en la ecuación matricial de Euler-Lagrange (7.6) que modela al robot y se define $\omega = \rho d_\tau$, se obtiene que:

$$M(q)T\dot{x}(t) + C(q, \dot{q})Tx(t) = u(t) + \omega(t) \quad (7.11)$$

Esta expresión representa la *ecuación de la dinámica del error del sistema*. Es una ecuación matricial *no lineal* de dimensión $3n$, ya que los valores de las matrices $M(q)$ y $C(q, \dot{q})$ no son constantes en el tiempo, sino que variarán su valor a medida que se mueve el robot.

Nótese la diferencia entre este enfoque y el enfoque clásico del conocido método del *control por par calculado* ([Spo87, Lew93]), en el que el control por realimentación se utiliza precisamente para linealizar la ecuación diferencial del error resultante.

Teniendo en cuenta la ecuación no lineal del error (7.11), el problema de control se puede plantear en los términos que se expusieron en la sección 7.2, esto es, *hallar un controlador u de forma que la energía del vector objetivo $z = W [h(x) u]^T$ sea atenuada respecto a la energía del vector de señales perturbadoras ω , dada una relación de atenuación γ .*

Sin embargo, para poder utilizar los resultados teóricos expuestos en la sección anterior, es necesario reescribir la ecuación dinámica del error obtenida en la forma estándar del problema de control H_∞ no lineal (ver ecuación 7.1).

Si se definen las expresiones:

$$f(x, t) = T_o^{-1} \begin{bmatrix} -M^{-1}C & O & O \\ \frac{1}{\rho}I & I - \frac{1}{\rho}T_2 & -I - \frac{1}{\rho}(T_3 - T_2) \\ 0 & I & -I \end{bmatrix} T_o x$$

y

$$g(x, t) = k(x, t) = T_o^{-1} \begin{bmatrix} M^{-1} \\ O \\ O \end{bmatrix}$$

donde I es la matriz identidad y O es la matriz nula, ambas cuadradas de dimensión n , y siendo:

$$T_o = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ O & I & I \\ O & O & I \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

resulta que la ecuación dinámica del error (7.11) puede escribirse según la formulación general (7.1).

Para plantear el problema de la forma indicada anteriormente, se diseña $h(x)$ (ver ecuación (7.2)) como el vector de señales de error, esto es, $h(x) = x$. Una vez elegida esta función, para calcular la ley de control u que consiga el objetivo propuesto habrá que obtener la solución $V(x, t)$ de la ecuación de HJBI planteada en la sección anterior. Esta solución se halla a partir del siguiente teorema:

Teorema: Sea $V(x, t)$ la siguiente función escalar:

$$V(x, t) = \frac{1}{2} x^T T_o^T \begin{bmatrix} M & O & O \\ O & Y & S - Y \\ O & S - Y & Z + Y \end{bmatrix} T_o x$$

donde $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz constante, simétrica y definida positiva, Y y $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices constantes auxiliares, M es la matriz de inercias del robot, y T_o corresponde a la expresión de la ecuación (7.12). Sea $T = [T_1 \ T_2 \ T_3]$ la matriz que aparece en la ecuación dinámica no lineal del error (7.11). Si estas matrices son tales que verifican la ecuación:

$$\begin{bmatrix} O & Y & S \\ Y & 2S & Z + 2S \\ S & Z + 2S & O \end{bmatrix} + Q + \frac{1}{\gamma^2} T^T T - (\bar{C}^T + T)^T R^{-1} (\bar{C}^T + T) = 0$$

Entonces, la función $V(x, t)$ satisface la ecuación de HJBI (7.4) para un valor de γ suficientemente alto.

Demostración: Por claridad en la exposición, la demostración de este teorema se realiza en el apéndice C \diamond .

Para poder calcular las matrices anteriores, se propone utilizar la siguiente metodología, de manera que se verifique la ecuación (7.3):

1. Calcular las matrices T_1 y T_3 resolviendo las siguientes ecuaciones de Riccati:

$$T_1^T \left(\frac{1}{\gamma^2} I - R^{-1} \right) T_1 - \bar{C}_1 R^{-1} T_1 - T_1^T R^{-1} \bar{C}_1^T - \bar{C}_1 R^{-1} \bar{C}_1^T + Q_1 = O$$

$$T_3^T \left(\frac{1}{\gamma^2} I - R^{-1} \right) T_3 - \bar{C}_3 R^{-1} T_3 - T_3^T R^{-1} \bar{C}_3^T - \bar{C}_3 R^{-1} \bar{C}_3^T + Q_3 = O$$

2. Utilizando los valores de T_1 y T_3 obtenidos del paso anterior, calcular la matriz S dada por:

$$S = - \left(T_1^T \left(\frac{1}{\gamma^2} I - R^{-1} \right) T_3 - \bar{C}_1 R^{-1} T_3 - T_1^T R^{-1} \bar{C}_3^T - \bar{C}_1 R^{-1} \bar{C}_3^T + Q_1 \right)$$

3. Finalmente, una vez hallada la matriz S , calcular la matriz T_2 resolviendo la siguiente ecuación de Riccati:

$$T_2^T \left(\frac{1}{\gamma^2} I - R^{-1} \right) T_2 - \bar{C}_2 R^{-1} T_2 - T_2^T R^{-1} \bar{C}_2^T - \bar{C}_2 R^{-1} \bar{C}_2^T + Q_2 + 2S = O$$

Una vez halladas todas las matrices, ya es conocido el valor de $V(x, t)$. Sustituyendo esta matriz en la ecuación (7.5), se obtiene una ley de control con la siguiente expresión:

$$u^*(x, t) = -R^{-1} \left(\bar{C}^T x + g^T(x, t) \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \right) = -R^{-1} (\bar{C}^T + T) x \quad (7.13)$$

donde el valor de u^* se corresponde con la señal de control óptima, según el criterio de la ganancia L_2 , desde las perturbaciones ω hasta el vector objetivo $z = W [x \ u]^T$, para un índice γ elegido con antelación.

7.4 Ley de control como un PID no lineal

El objetivo de esta sección será el de reescribir la ley de control de forma que se obtengan unos términos proporcionales al error de las coordenadas articulares, a su integral y a su derivada.

Sustituyendo las expresiones de T , \dot{x} y la de la señal de control óptima u^* hallada (7.13) en la ecuación del controlador (7.8), se obtiene un par óptimo τ^* con la siguiente expresión:

$$\tau^* = M\ddot{q}_r + V + G - \frac{1}{\rho} \left(M \begin{bmatrix} T_2 & T_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e} \\ e \end{bmatrix} + CTx \right) - \frac{1}{\rho} R^{-1} (\bar{C}^T + T) x$$

Teniendo en cuenta la definición del vector de error x realizada en la ecuación (7.7), para hallar una ley de control en función de las señales de error, de su derivada y de su integral sólo habrá que reescribir la expresión anterior, sacando factor común el vector de error x , en la forma:

$$\tau^* = M\ddot{q}_r + V + G - \frac{1}{\rho} (M \begin{bmatrix} T_2 & T_3 & 0 \end{bmatrix} x + CTx + R^{-1} (\bar{C}^T + T)) x$$

o de forma más compacta:

$$\begin{aligned} \tau^* &= M(q) \ddot{q}_r + V(q, \dot{q}) + G(q) - (K_D \dot{e} + K_P e + K_I \int e dt) \\ &= M(q) \ddot{q}_r + V(q, \dot{q}) + G(q) - K(q, \dot{q}) x \end{aligned} \quad (7.14)$$

donde K es la matriz:

$$K = \begin{bmatrix} K_D & K_P & K_I \end{bmatrix}$$

cuyos coeficientes K_P , K_I y K_D tienen las siguientes expresiones:

$$K_P = \frac{1}{\rho} (MT_3 + CT_2 + R^{-1} (\bar{C}_2^T + T_2)) \quad (7.15)$$

$$K_I = \frac{1}{\rho} (CT_3 + R^{-1} (\bar{C}_3^T + T_3)) \quad (7.16)$$

$$K_D = \frac{1}{\rho} (MT_2 + CT_1 + R^{-1} (\bar{C}_1^T + T_1)) \quad (7.17)$$

Nótese como la matriz K está multiplicando al vector de error x en la ecuación (7.14). Teniendo en cuenta que este vector está compuesto por la derivada del error, por el error y por su integral (ver ecuación (7.7)), este controlador puede ser interpretado como una ley tipo PID, siendo sus coeficientes no lineales ya que sus valores dependen de las posiciones y velocidades articulares, y por tanto varían en el tiempo.

Caso particular: Elección de W diagonal

Un caso particular de diseño de la matriz de ponderación W es elegirla diagonal, de forma que las submatrices que componen la matriz $W^T W$ (ver ecuación 7.3) se correspondan con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} Q_1 &= w_D^2 I_{n \times n} \\ Q_2 &= w_P^2 I_{n \times n} \\ Q_3 &= w_I^2 I_{n \times n} \\ R &= w_u^2 I_{n \times n} \\ Q_{12} &= Q_{13} = Q_{23} = O \\ \bar{C}_1 &= \bar{C}_2 = \bar{C}_3 = O \end{aligned}$$

donde w_D , w_P y w_I son escalares que ponderan respectivamente a las derivadas de los errores, a los errores y a las integrales de los mismos, y donde w_u es otro escalar que penaliza las actuaciones sobre las articulaciones del robot.

En este caso, las matrices T_1 , T_2 y T_3 pueden escribirse de la forma:

$$\begin{aligned} T_1 &= \rho I \\ T_2 &= \kappa I \\ T_3 &= \mu I \end{aligned}$$

donde las expresiones de los parámetros ρ , κ y μ pueden calcularse de la siguiente manera:

1. Calcular ρ y μ resolviendo las siguientes ecuaciones

$$\rho^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{w_u^2} \right) + w_D^2 = 0$$

$$\mu^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{w_u^2} \right) + w_I^2 = 0$$

2. Calcular la matriz S (que en este caso es un escalar) mediante la expresión:

$$S = -\rho\mu \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{w_u^2} \right)$$

3. Finalmente, calcular κ resolviendo la ecuación:

$$\kappa^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{w_u^2} \right) + w_P^2 + 2S = 0$$

Eliminando la matriz S en el anterior sistema de ecuaciones y resolviendo para ρ , κ y μ se obtiene que:

$$\rho = \frac{w_u \gamma}{\sqrt{\gamma^2 - w_u^2}} w_D$$

$$\kappa = \frac{w_u \gamma}{\sqrt{\gamma^2 - w_u^2}} \sqrt{w_P^2 + 2w_D w_I}$$

$$\mu = \frac{w_u \gamma}{\sqrt{\gamma^2 - w_u^2}} w_I.$$

Finalmente, la sustitución de estos valores en las expresiones generales de K_P , K_I y K_D calculadas anteriormente da lugar a:

$$K_P = \frac{w_I}{w_D} M + \frac{\sqrt{w_P^2 + 2w_D w_I}}{w_D} \left(C + \frac{1}{w_u^2} I \right)$$

$$K_I = \frac{w_I}{w_D} \left(C + \frac{1}{w_u^2} I \right)$$

$$K_D = \frac{\sqrt{w_P^2 + 2w_D w_I}}{w_D} M + C + \frac{1}{w_u^2} I$$

Obsérvese cómo en este caso particular, las ganancias no dependen del parámetro γ . Estas serán las expresiones que se utilizarán en el experimentos expuestos en las secciones 7.6 y 7.7.

Por último, comentar que, como es de suponer, la solución presentada por Feng (la cual también será implementada a modo de comparación en los experimentos realizados) es un caso particular de las expresiones expuestas, obteniéndose dicho controlador simplemente anulando el parámetro de diseño ω_I . Por lo tanto, *el controlador de Feng puede ser reinterpretado como una ley de control por par calculado con un controlador externo PD no lineal.*

7.5 Robustificación de la ley de control

Como se comentó en la introducción, a pesar de la robustez del método expuesto en la sección anterior, en dicho método se supone un conocimiento total de la dinámica del robot, incluyendo en un mismo término d_τ (ver ecuación 7.6) los efectos de las perturbaciones (pares perturbadores sobre las articulaciones) y de las incertidumbres del robot (dinámicas no modeladas, errores en la estimación de parámetros, etc.). Por tanto, este método está claramente indicado para el rechazo de perturbaciones, no abordando el problema de las incertidumbres del sistema.

Puesto que esta hipótesis no es excesivamente realista, en esta sección se propone añadir al controlador diseñado en la sección anterior una señal de control adicional que aumente la robustez del sistema respecto a errores de modelado. Para ello se va a exponer una extensión a sistemas no lineales del método conocido como *control con funciones de saturación*. En ([Sag99]) puede encontrarse una buena exposición de las distintas formas en las que se puede implementar este método basándose en la obtención de ecuaciones lineales del error.

A continuación se expone un resumen de este método para sistemas lineales basado en la exposición que se realiza en ([Spo89]), para después aplicarlo a la ley de control obtenida en la sección anterior:

Método de control de robots con funciones de saturación

Sea la dinámica de un robot a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange de la ecuación (7.6) y sean $\hat{M}(q)$, $\hat{V}(q, \dot{q})$ y $\hat{G}(q)$ las estimaciones de las matrices $M(q)$, $V(q, \dot{q})$ y $G(q)$ respectivamente. Dado que la dinámica real del robot no podrá ser conocida con total exactitud, siempre existirán diferencias entre las matrices supuestamente reales y las matrices estimadas. Como el diseño del controlador se basará en el conocimiento que se tiene del modelo (matrices estimadas), este método propone generar una señal de control que tenga en cuenta los errores de estimación de estas matrices suponiendo que se pueden obtener cotas superiores de dichas incertidumbres.

Para ello se realizan las siguientes hipótesis:

- $\sup_{t \geq 0} \|\ddot{q}_r\| < Q_1 < \infty$: esta hipótesis supone que el generador de trayectorias del robot no va a proporcionar una referencia en aceleración infinita, lo cual es bastante lógico desde el punto de vista físico.
- $\|E(q)\| \equiv \|M(q)^{-1}\hat{M}(q) - I\| \leq \alpha \leq 1$ para algún valor de α . Nótese que la definición de $E(q)$ se corresponde con la incertidumbre multiplicativa de la matriz $M(q)$, de forma que si la estimación de esta matriz fuera perfecta ($M(q) = \hat{M}(q)$), el valor de $E(q)$ sería nulo. Esta es la condición más restrictiva, por lo que se deberán estimar bien las inercias del robot para hacer el valor de α lo más pequeño posible. No obstante, siempre es posible hallar una matriz $\hat{M}(q)$ que cumpla dicha condición. De hecho, como $M(q)$ es definida positiva ([Cra89]) para cualquier valor de q , siempre es posible hallar dos valores reales positivos \underline{M} y \overline{M} tales que:

$$\underline{M} \leq \|M(q)^{-1}\| \leq \overline{M} \quad \forall q \in \mathfrak{R}^n$$

Con lo que diseñando $\hat{M} = \frac{2}{\overline{M} + \underline{M}} I_{n \times n}$ se obtiene que:

$$\|E(q)\| \equiv \|M(q)^{-1}\hat{M}(q) - I\| \leq \frac{\overline{M} - \underline{M}}{\overline{M} + \underline{M}} \equiv \alpha \leq 1$$

- $\|\Delta N(q, \dot{q})\| \equiv \|\Delta V(q, \dot{q}) - \Delta G(q)\| \leq \phi(x, t)$ para alguna función conocida $\phi(x, t)$ acotada en el tiempo, siendo en este caso $x(t) = [\dot{e}(t) \ e(t)]^T$ (obsérvese la diferencia respecto a la definición realizada en la ecuación (7.7)) y

$$\begin{aligned} \Delta V(q, \dot{q}) &= V(q, \dot{q}) - \hat{V}(q, \dot{q}) \\ \Delta G(q) &= G(q) - \hat{G}(q) \end{aligned}$$

Nótese cómo $\Delta N(q, \dot{q})$ no es más que la definición de la incertidumbre aditiva de los términos de aceleraciones centrípetas y de Coriolis ($\Delta V(q, \dot{q})$) y gravitatorias ($\Delta G(q)$), de manera que si las estimaciones de $V(q, \dot{q})$ y $G(q)$ fueran perfectas, el valor de $\Delta N(q, \dot{q})$ sería nulo.

Una vez obtenidos los valores de estas cotas, el método propone utilizar la estructura del control por par calculado (ver figura 7.1), donde se intenta linealizar por realimentación utilizando las matrices estimadas. Si la estimación fuera perfecta y se utilizara una ley de control externa tipo proporcional más derivativo (con matrices de ganancias *constantes* K_P y K_D respectivamente), la dinámica del error del sistema linealizado en bucle cerrado quedaría definida por la siguiente ecuación diferencial *lineal*:

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) = (A - BK)x(t) \quad (7.18)$$

donde las matrices A , B y K son constantes y tienen la siguiente expresión:

$$A = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix} \quad K = [K_D \quad K_P]$$

Nótese que en este caso, sólo habrá que diseñar K para especificar la dinámica del error, haciendo que la matriz \bar{A} posea los autovalores deseados.

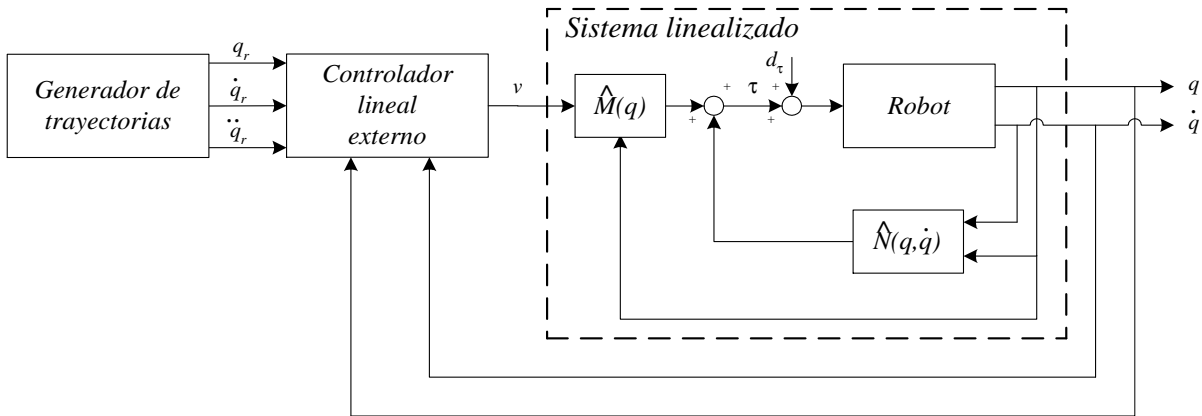


Figura 7.1: Esquema de control por la técnica de par calculado.

Debido a que la estimación no puede ser perfecta, este método propone el siguiente algoritmo para obtener una señal de control v aplicada al sistema linealizado (ver figura (7.1)):

1. Diseñar una ley de control externa v de la forma:

$$v(t) = \ddot{q}_r(t) - Kx(t) + \Delta v(t) \quad (7.19)$$

donde $K = [K_D \ K_P]$ es la matriz del control PD externo diseñado anteriormente y $\Delta v(t)$ es un incremento de señal de control que atenúa los efectos de la incertidumbre estimada del sistema. Como es fácil de adivinar, el objetivo final de este método será calcular una expresión de Δv que consiga el propósito deseado.

En este punto es interesante observar que la ecuación dinámica del error obtenida al linealizar con las matrices estimadas y realimentar con el PD externo tiene la siguiente expresión:

$$\dot{x} = \bar{A}x + B(\Delta v + \eta) \quad (7.20)$$

donde

$$\eta = E\Delta v + E(\ddot{q}_r - Kx) + M^{-1}\Delta N \quad (7.21)$$

Es ilustrativo ver cómo la ecuación (7.20) indica que en caso de que la incertidumbre fuera nula (lo cual implicaría $\eta = 0$), se ha de anular el término Δv para obtener la ecuación de la dinámica del error original (ver ecuación (7.18)).

2. Dada la ecuación dinámica del error del paso anterior, donde la matriz \bar{A} es Hurwitz, supóngase que se puede hallar una función escalar continua $\rho(x, t)$ acotada en el tiempo tal que satisface las siguientes desigualdades:

$$\|\eta\| < \rho(x, t) \quad \|\Delta v\| < \rho(x, t) \quad (7.22)$$

Nótese que lo que indica la primera expresión de la ecuación (7.22) es simplemente que la incertidumbre del sistema puede ser acotada superiormente. En tal caso, la función $\rho(x, t)$ podría ser definida implícitamente. Para ello, teniendo en cuenta las tres hipótesis realizadas anteriormente, se puede obtener que:

$$\|\eta\| = \|E\Delta v + E\ddot{q}_r - Kx - M^{-1}\Delta N\| \leq \alpha\rho(x, t) + \alpha Q_1 + \|K\|\|x\| + \overline{M}\phi(x, t) \equiv \rho(x, t)$$

De la expresión anterior se puede despejar $\rho(x, t)$, resultando:

$$\rho(x, t) = \frac{1}{1 - \alpha}(\alpha Q_1 + \|K\|\|x\| + \overline{M}\phi(x, t)) \quad (7.23)$$

3. Dado que se debe haber elegido K de forma que la matriz dinámica del error $\bar{A} = A - BK$ sea Hurwitz, elegir una matriz $Q_{n \times n}$ simétrica definida positiva y hallar la única solución $P_{n \times n}$ simétrica definida positiva de la siguiente ecuación de Lyapunov:

$$\bar{A}^T P + P\bar{A} + Q = 0 \quad (7.24)$$

4. Escoger el término $\Delta v(t)$ con la siguiente expresión:

$$\Delta v(t) = \begin{cases} -\rho(x, t) \frac{B^T P x}{\|B^T P x\|} & \text{si } \|B^T P x\| \geq \epsilon \\ \frac{-\rho(x, t)}{\epsilon} B^T P x & \text{si } \|B^T P x\| < \epsilon \end{cases} \quad (7.25)$$

donde $\epsilon \ll 1$. Nótese como se ha linealizado esta ley de control para valores de $\|B^T P x\|$ inferiores a ϵ para evitar el efecto de las vibraciones (traducción del término anglosajón *chattering*).

◇

La idea propuesta en esta sección es hacer extensivo este método (al que se denominará *método estándar*) a la ley de control PID no lineal aportada en la sección anterior. El argumento de esta idea se basa en que el controlador PID no lineal propuesto tiene un estructura similar a la del método recién expuesto. Sin embargo, en este caso habrá que tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- La matriz del control externo K en el *método estándar* consta sólo de dos submatrices (K_D y K_P), dado que es un controlador tipo PD, mientras que en la modificación propuesta, la matriz K debe constar de tres elementos (K_D , K_P y K_I), debido a que es un controlador tipo PID.

- La matriz dinámica del error $\bar{A} = A - BK$ en el *método estándar* es constante, ya que la ecuación diferencial del error es lineal con coeficientes matriciales (A , B , K) constantes. Sin embargo, el controlador PID no lineal propuesto en la sección anterior se obtiene a partir de considerar una ecuación diferencial no lineal de la dinámica del error, lo cual se traduce en que tanto la dinámica del error del sistema (ver ecuación (7.11)) como las ganancias K_D , K_P y K_I del PID (ver ecuaciones (7.15), (7.16) y (7.17)) son variables con el tiempo (ver las expresiones de estas últimas en la sección anterior).

Este último punto es especialmente importante, ya que el hecho de considerar \bar{A} constante permite plantear la ecuación de Lyapunov (7.24), de cuya solución P dependerá el incremento de control $\Delta v(t)$ deseado. Sin embargo, en el caso del PID no lineal la dinámica del error en bucle cerrado será claramente no lineal, lo cual complica el planteamiento del *método estándar*. Este inconveniente puede ser solventado teniendo en cuenta que:

- A pesar de que la dinámica del error al aplicar el control PID es no lineal, sí se tiene garantizado que para el modelo nominal es asintóticamente estable.
- La ecuación de Lyapunov en el caso lineal se obtiene de suponer una función potencial cuadrática de la forma:

$$V(x) = x^T P x$$

Es interesante observar cómo la solución P de dicha ecuación aparece en la expresión de $\Delta v(t)$ mediante la conocida expresión del control óptimo $B^T P x$.

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones junto con el hecho de que la matriz P es simétrica, se puede hacer una analogía entre el control óptimo lineal y no lineal ([Hel99]), comparando las leyes de control obtenidas en cada caso:

<u>Lineal</u>	<u>No lineal</u>
$-B^T P^T x$	$-g^T \frac{\partial V(x, t)}{\partial x}$

Basándose en esta analogía, es posible reformular el método estándar dando lugar a la metodología propuesta en esta sección.

Modificación del método de control de robots con funciones de saturación

Sea la dinámica de un robot a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange de la ecuación (7.6) y sean $\hat{M}(q)$, $\hat{V}(q, \dot{q})$ y $\hat{G}(q)$ las estimaciones de las matrices $M(q)$,

$V(q, \dot{q})$ y $G(q)$ respectivamente. Asumiendo las mismas hipótesis que en el *método estándar*, seguir el siguiente algoritmo para obtener una señal de control v aplicada al sistema linealizado con la ley de control de la ecuación (7.14) (ver figura (7.1):

1. Diseñar una ley de control externa v de la forma:

$$v(t) = \ddot{q}_r(t) - Kx(t) + \Delta v(t) \quad (7.26)$$

donde $K = [K_D \ K_P \ K_I]$ es la matriz del control correspondiente al PID no lineal que aparece en la ecuación (7.14) y donde $\Delta v(t)$ tiene el mismo significado que en el método estándar. Siguiendo el mismo método expuesto en ([Spo89]) para el controlador externo tipo PD lineal, en este caso se puede hallar una expresión de la dinámica del error en bucle cerrado, análoga a la ecuación (7.20), de la forma:

$$\dot{x} = \bar{f}(x, t) + B(\Delta v + \eta) = \bar{A}(q, \dot{q})x + B(\Delta v + \eta) \quad (7.27)$$

donde $\bar{f}(x, t) \equiv \bar{A}(q, \dot{q})x(t)$. En este caso, la matriz dinámica del error es $\bar{A}(q, \dot{q}) = A - BK(q, \dot{q})$, donde A y B son las mismas matrices que aparecen en la ecuación (7.18). Nótese que la dependencia del tiempo del vector $\bar{f}(x, t)$ se obtiene a través de la variación temporal de las posiciones y velocidades articulares.

2. Hallar una función escalar $\rho(e, t)$ mediante la expresión (7.23), donde se ha supuesto que se cumplen las desigualdades (7.22). Nótese que en este punto sólo se están acotando las incertidumbres, las cuales son las mismas independientemente del método que se utilice.
3. Dado que se debe haber elegido K de forma que en el caso nominal (incertidumbres nulas) la dinámica del error en bucle cerrado \bar{f} sea estable, hallar una función escalar $V(x, t) \geq 0$ que sea solución de la ecuación:

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^T V(x, t)}{\partial x} \bar{f}(x, t) < 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (7.28)$$

siendo $\bar{f}(x, t) = \bar{A}(q, \dot{q})x(t)$.

4. Finalmente, para completar la ley de control de la ecuación (7.26), escoger el término $\Delta v(t)$ con la siguiente expresión:

$$\Delta v(t) = \begin{cases} -\rho(x, t) \frac{B^T \frac{\partial V(x, t)}{\partial x}}{\left\| B^T \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \right\|} & \text{si } \left\| B^T \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \right\| \geq \epsilon \\ \frac{-\rho(x, t)}{\epsilon} B^T \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} & \text{si } \left\| B^T \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \right\| < \epsilon \end{cases} \quad (7.29)$$

donde se ha vuelto a linealizar este incremento de control a partir de un valor de la cota de $\|B^T \frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\|$ menor que ϵ , siendo este último valor mucho menor que la unidad.

La demostración de la estabilidad del sistema resultante aplicando (7.29) puede realizarse utilizando el segundo método de Lyapunov, de forma similar al planteamiento para sistemas lineales. Para ello, supóngase una función escalar positiva $V(x,t)$, tal que satisface la ecuación (7.28). Evaluando la derivada temporal (absoluta) de esta función se obtiene que:

$$\frac{dV(x,t)}{dt} = \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^T V(x,t)}{\partial x} \dot{x}(t)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (7.27) se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{dV(x,t)}{dt} &= \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^T V(x,t)}{\partial x} (\bar{f}(x,t) + B (\Delta v + \eta)) \\ &< \frac{\partial^T V(x,t)}{\partial x} B (\Delta v + \eta) \end{aligned}$$

donde se ha aplicado que $V(x,t)$ cumple la ecuación (7.28). Para que la derivada temporal de $V(x,t)$ sea negativa se ha de tener que:

$$\frac{\partial^T V(x,t)}{\partial x} B (\Delta v + \eta) \leq 0$$

de donde se ha de elegir Δv de forma que:

$$\frac{\partial^T V(x,t)}{\partial x} B \Delta v \leq -\frac{\partial^T V(x,t)}{\partial x} B \eta$$

Teniendo en cuenta que la norma de η está acotada por la función $\rho(x,t)$ (ver ecuación (7.22)) y tomando el caso más desfavorable, en el que los vectores $B^T \frac{\partial^T V(x,t)}{\partial x}$ y η tengan la misma dirección, se deduce que Δv se tiene que elegir en la *dirección opuesta* a $\frac{\partial^T V(x,t)}{\partial x} B$ (para contrarrestar a η) y con módulo $\rho(x,t)$, esto es:

$$\Delta v = -\rho(x,t) \frac{B^T \frac{\partial V(x,t)}{\partial x}}{\left\| B^T \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \right\|}$$

que es la expresión que aparece en la ecuación (7.29).

◇

Debido a la complejidad de la expresión de la ecuación de HJBI, aún no se dispone de una expresión analítica de la función escalar $V(x, t)$. Para resolver este inconveniente y poder implementar este controlador, esta función ha sido linealizada en cada punto de operación (t_o, x_o) (utilizando los resultados de la conjetura de Aizerman ([Vid93]), donde se ha supuesto que la derivada respecto al tiempo es suficientemente pequeña respecto a la derivada espacial), a través de la solución de una ecuación de Lyapunov:

$$\bar{A}_o^T P + P \bar{A}_o + Q = 0$$

donde Q vuelve a ser una matriz simétrica definida positiva y A_o es el jacobiano del vector $\bar{f}(x, t)$ evaluado en el punto (t_o, x_o) :

$$\bar{A}_o = \left. \frac{\partial \bar{f}(x, t)}{\partial x} \right|_{t=t_o, x=x_o}$$

En las siguientes secciones se expondrá cómo este método ha sido implementado con éxito utilizando tanto un modelo académico de un robot de 2 GDL al que se le han supuesto incertidumbres aleatorias del 20% en cada uno de sus parámetros, como en el simulador de un robot industrial donde para diseñar el controlador se ha considerado un modelo nominal simplificado.

7.6 Aplicación a un robot de 2 GDL

Para comprobar la validez de los esquemas de control propuestos, en esta sección se van a presentar los resultados de simulación obtenidos al aplicarlos al modelo de un robot de dos grados de libertad.

En la figura 7.2 se muestra un esquema del robot considerado. Como se observa, es una estructura plana compuesta por dos eslabones y dos articulaciones de rotación. Las características de cada eslabón i ($i = 1, 2$) son su masa (m_i), su longitud (l_i), la posición de su centro de gravedad (l_{ci}) y su inercia (I_i).

El vector de coordenadas articulares en este brazo manipulador está compuesto por los ángulos q_1 y q_2 y a los pares aplicados en dichas articulaciones se les denominarán τ_1 y τ_2 respectivamente.

Las expresiones de las matrices de la ecuación matricial de Euler-Lagrange de la ecuación (7.6) en este robot en particular son las siguientes:

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_1 + I_2 & m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_2 \\ m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_2 & m_2 l_{c2}^2 + I_2 \end{bmatrix}$$

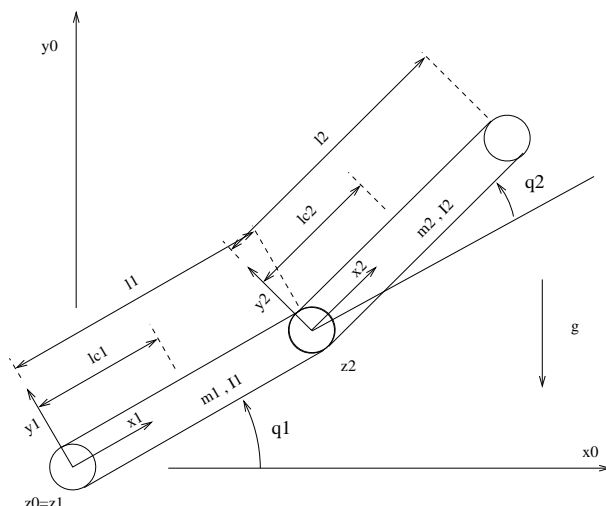


Figura 7.2: Robot de dos grados de libertad.

$$V(q, \dot{q}) = m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2 \begin{bmatrix} -(2\dot{q}_2 \dot{q}_1 + \dot{q}_2^2) \\ \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$G(q) = g \begin{bmatrix} (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) \cos q_1 + m_2 l_{c2} \cos (q_1 + q_2) \\ m_2 l_{c2} \cos (q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

A partir de estas expresiones se pueden calcular las matrices $\dot{M}(q, \dot{q})$ y $N(q, \dot{q})$, tal como se indica en las expresiones (7.9) y (7.10). Éstas son las siguientes:

$$\dot{M}(q, \dot{q}) = -m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2 \begin{bmatrix} 2\dot{q}_2 & \dot{q}_2 \\ \dot{q}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N(q, \dot{q}) = m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2 (\dot{q}_1 + \frac{1}{2}\dot{q}_2) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, conociendo las expresiones de estas dos matrices se puede calcular el valor de $C(q, \dot{q})$:

$$C(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{M} + N = m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2 \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 & -\dot{q}_2 - \dot{q}_1 \\ \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Los valores nominales que se han escogido para los distintos parámetros del robot han sido los siguientes:

$$\begin{aligned} l_1 &= l_2 = 1 \text{ m} \\ l_{c1} &= l_{c2} = 0.5 \text{ m} \\ m_1 &= m_2 = 3 \text{ Kg} \\ I_1 &= I_2 = 0.2536 \text{ Kg.m}^2 \end{aligned}$$

A lo largo de esta sección se van a presentar los resultados de cuatro experimentos, que en orden de aparición serán: control por par calculado clásico, control PD no lineal propuesto por Feng, control PID no lineal propuesto en la sección 7.4 y control utilizando la metodología de la sección anterior, al cual se le identificará en la figuras 7.8 y 7.14 como PID NLS¹.

En todos ellos las referencias de las coordenadas articulares han sido calculadas por un generador de trayectorias mediante un polinomio de quinto orden, desde una posición inicial para ambas articulaciones de 0 rad hasta una posición final, también de ambas articulaciones, de $\frac{\pi}{4}$ rad/s. En el cálculo de los coeficientes del polinomio se han impuesto condiciones de velocidades y aceleraciones nulas tanto en el instante inicial como en el final, siendo el tiempo de transición de 2 segundos para ambas articulaciones (ver figura 7.3).

Para comprobar la robustez de los distintos controladores, en la implementación del modelo del robot se ha considerado una desviación máxima del 20% de todos y cada uno de sus parámetros, mientras que los controladores han sido diseñados basándose en los parámetros nominales del robot. La desviación de los parámetros ha sido elegida de forma aleatoria con una distribución uniforme. Además, para evaluar el comportamiento ante perturbaciones externas, en los experimentos se ha introducido un par constante de 7 Nm en la primera articulación en el instante $t = 1$ s y otro de 2 Nm en la segunda articulación en el instante $t = 0.7$ s, considerándose ambas como perturbaciones mantenidas.

En la figura 7.3 se muestran las referencias de las trayectorias (expresadas en grados) de cada una de las articulaciones. Debido a que la magnitud de los errores en todos los experimentos es muy pequeña respecto a la magnitud de la referencia, en este tipo de figura no se observaría diferencia alguna entre la trayectoria de las articulaciones y su referencia, por lo que no se van a exponer más figuras de este tipo. En su lugar se mostrarán gráficas en las que se representan los errores obtenidos en los distintos experimentos, los cuales sí van a poder ser claramente comparados.

En la figura 7.4 se presentan los resultados conseguidos mediante la técnica clásica del par calculado utilizando un controlador externo tipo PID lineal (ver figura 7.1). Este controlador ha sido sintonizado de forma que el tiempo de establecimiento del error sea del mismo orden del obtenido en el resto de experimentos.

Como puede observarse, el error máximo en posición que se obtiene con este controlador es del orden de 8×10^{-4} rad, mientras que el máximo en velocidad es del orden de 3×10^{-2} rad/s.

El siguiente controlador a considerar es el PD no lineal propuesto por Feng. Para

¹Las siglas NLS hacen referencia a No Lineal con funciones de Saturación.

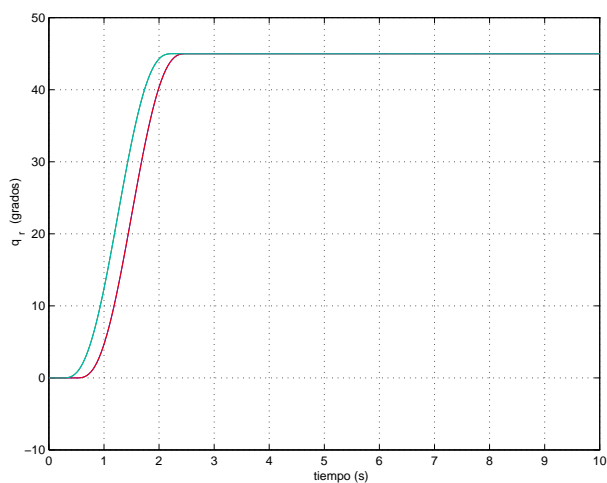
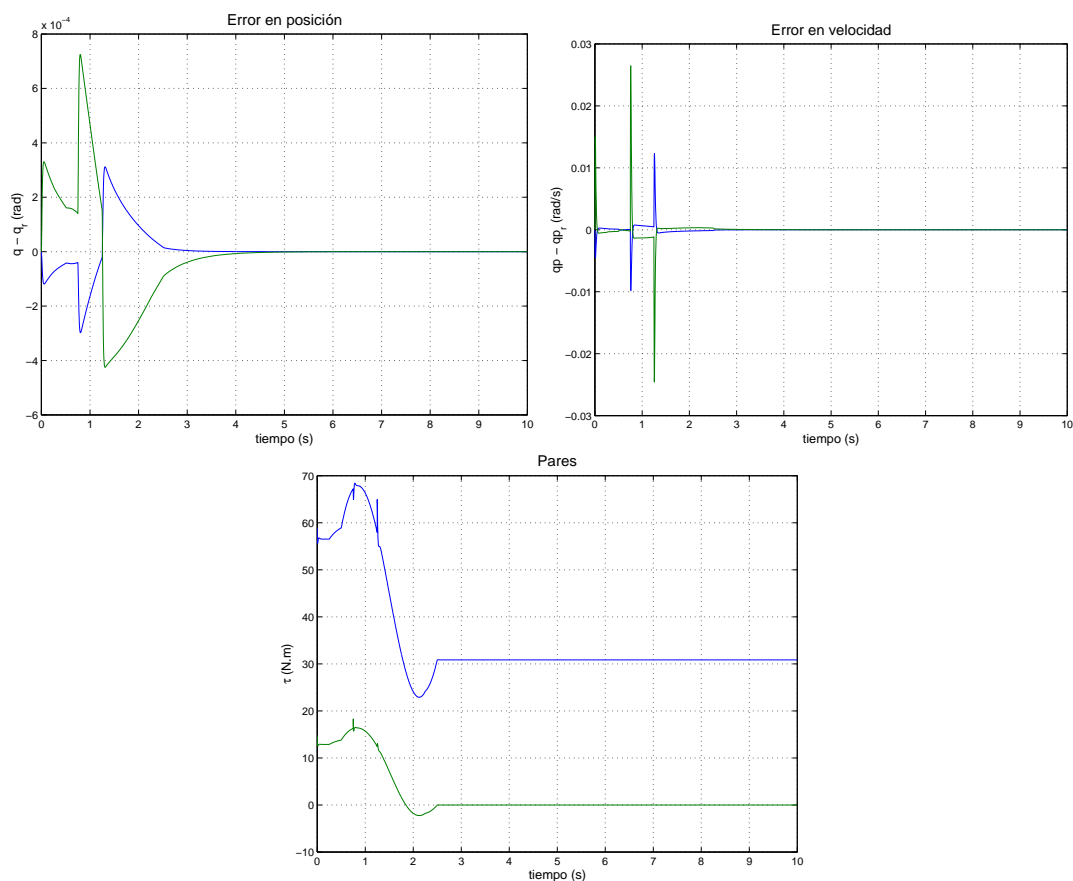


Figura 7.3: Trayectoria de referencia de las articulaciones.

Figura 7.4: Resultados con técnica *par calculado clásico*.

diseñarlo se ha considerado una matriz de ponderación W (ver ecuación (7.3)) de forma que $W^T W$ sea diagonal. La elección de los parámetros realizada para este experimento se refleja en la tabla 7.1, mientras que los resultados obtenidos con este controlador se presentan en la figura 7.5. Nótese como la reinterpretación del controlador como un PD permite sintonizar la matriz de ponderación atendiendo a las mismas ideas intuitivas desarrolladas en la teoría de control lineal.

Señal a ponderar	Matriz de ponderación
Derivada del error: \dot{e}	$Q_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 I$
Error: e	$Q_2 = I$
Esfuerzo de control: u	$R = 0.01^2 I$

Tabla 7.1: Matrices de ponderación para controlador PD no lineal.

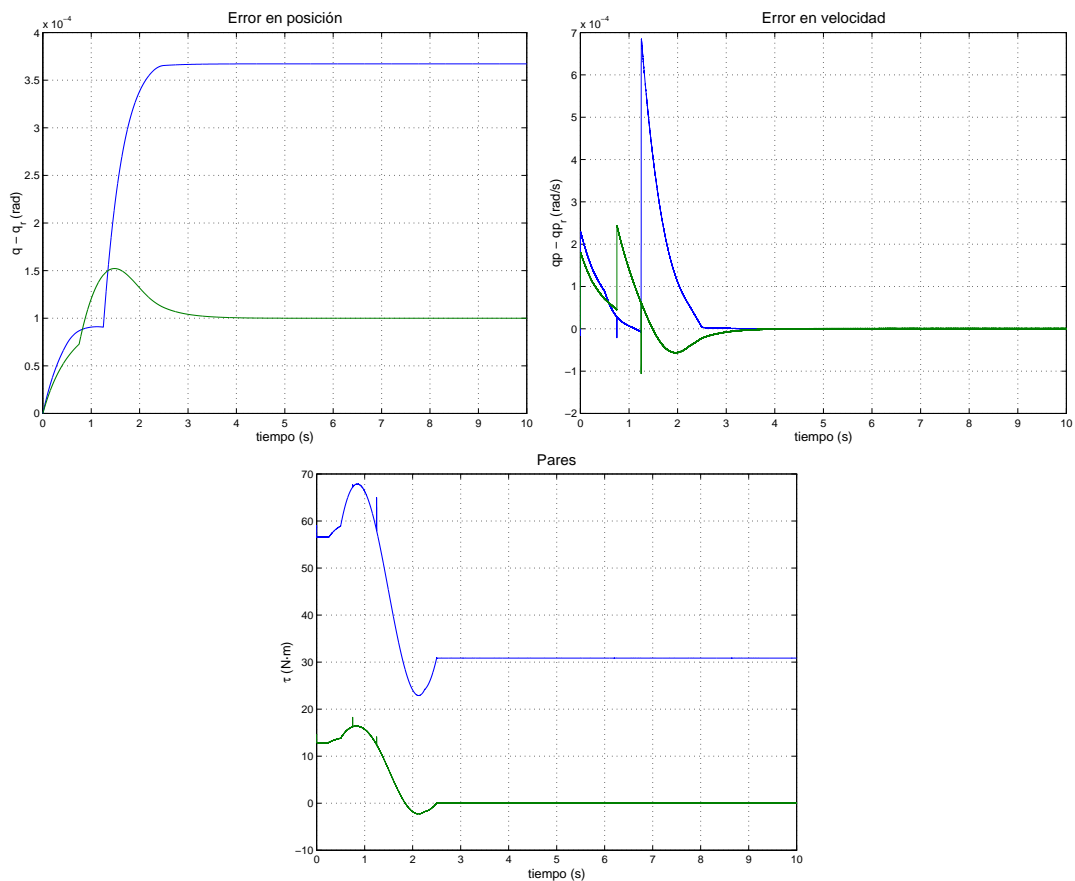


Figura 7.5: Resultados con controlador *PD no lineal*.

Al margen de que los errores máximos obtenidos tanto en posición (del orden de 4×10^{-4} rad) como en velocidad (del orden de 7×10^{-4} rad/s) sean aproximadamente la mitad que los conseguidos en el caso anterior, se quiere resaltar como principal característica de estos resultados el hecho de que se genere un error en régimen permanente no nulo cuando la perturbación en el par es mantenida. Como se expuso en la

introducción del capítulo, esto puede ser significativo si el robot debe transportar una carga pesada en su elemento terminal.

Para anular el error en régimen permanente, a continuación se exponen los resultados de diseñar el controlador PID no lineal propuesto en la sección 7.4. Para ello, a las matrices de ponderación elegidas en el caso anterior se ha añadido la correspondiente a la penalización de la integral del error. En la tabla 7.2 se muestra la elección de parámetros elegida para este experimento, mientras que sus resultados se exponen en la figura 7.6.

Señal a ponderar	Matriz de ponderación
Derivada del error: \dot{e}	$Q_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 I$
Error: e	$Q_2 = I$
Integral del error $\int edt$	$Q_3 = 2^2 I$
Esfuerzo de control: u	$R = 0.01^2 I$

Tabla 7.2: Matrices de ponderación para controlador PID no lineal.

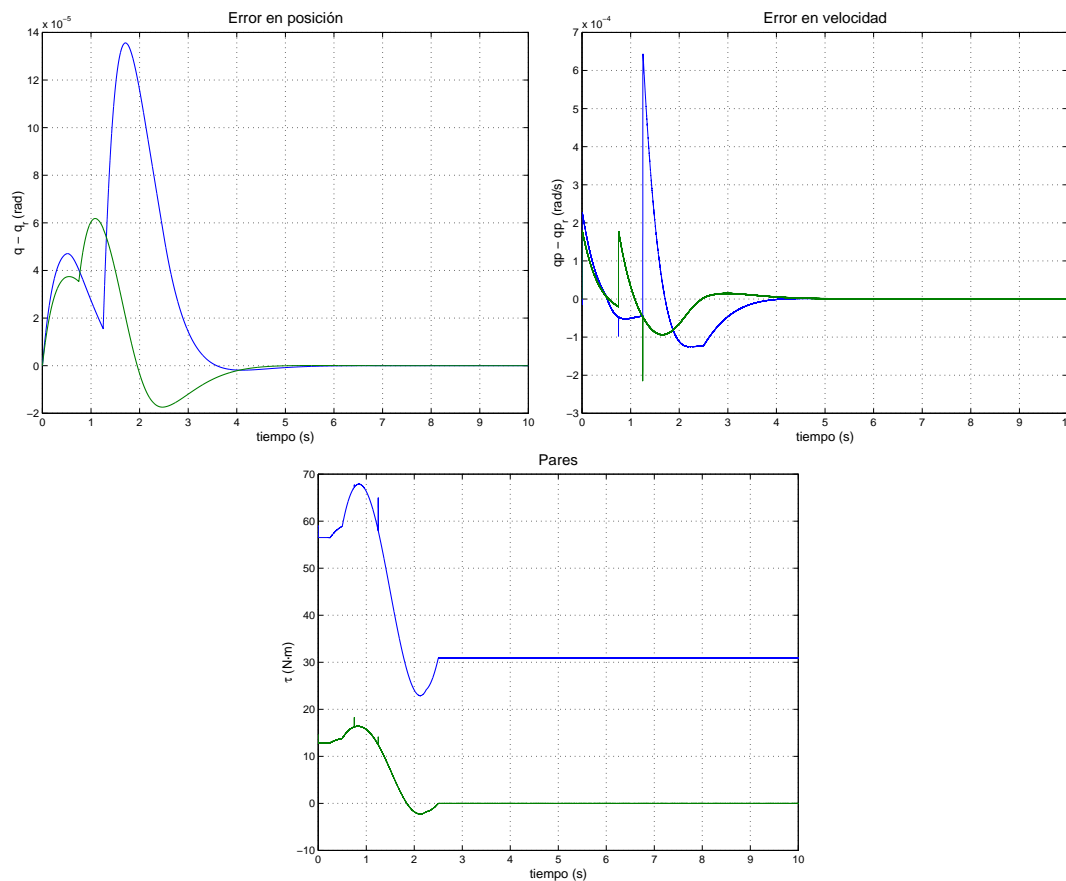


Figura 7.6: Resultados con controlador *PID no lineal*.

Los aspectos a destacar de este experimento son dos: por una parte se ha conseguido dividir por tres el error máximo en posición (del orden de 1.4×10^{-4} rad) mientras que el

de velocidad no presenta grandes variaciones; por otra parte, se ha conseguido anular el error en régimen permanente de ambas articulaciones con un tiempo de establecimiento del mismo orden que el obtenido con la técnica del par calculado clásico. Nótese que, al igual que sucedía en el controlador anterior, interpretación del controlador como un PID permite sintonizar la matriz de ponderación según las ideas intuitivas del control lineal.

Por último, a continuación se van a exponer los resultados del diseño del controlador PID no lineal añadiendo el método de robustificación propuesto en la sección 7.5.

Las matrices de ponderación para la parte del PID no lineal son las mismas que se expusieron en la tabla 7.2, mientras que el valor del resto de parámetros necesarios para hallar la función $\rho(x, t)$ de este controlador han sido diseñados de la siguiente manera:

- Para el valor de Q_1 se ha tenido en cuenta el valor singular máximo de la referencia en aceleración. En función de éste, el valor elegido ha sido $Q_1 = 6.505$.
- El cálculo de α se ha realizado explorando numéricamente el valor singular máximo de la incertidumbre multiplicativa de la matriz de inercias ($E(q) = M(q)^{-1}\hat{M}(q) - I$) para distintos valores de las posiciones articulares. El valor adoptado para este parámetro ha sido $\alpha = 0.7053$.
- El valor de la norma de $K = [K_D \ K_P \ K_I]$ se ha obtenido explorando numéricamente el valor singular máximo de dicha matriz para los distintos valores de las posiciones y velocidades articulares en cada paso de integración.
- Respecto al valor de la cota \overline{M} , ésta se ha calculado numéricamente como el máximo valor singular de la inversa de la matriz de masas estimada evaluada para distintos valores de las coordenadas articulares. El valor asignado a este parámetro ha sido 3.5981.
- El diseño de $\phi(x, t)$ se ha basado en el hecho de que se pueden acotar de forma independiente tanto $\|\Delta V(q, \dot{q})\|$ como $\|\Delta G(q)\|$ ([Lew93]), de forma que:

$$\begin{aligned} \|V(e, \dot{e})\| &\leq \gamma_v \|\dot{e}\|^2 \\ \|G(e)\| &\leq \gamma_g \end{aligned}$$

Puesto que $\phi(x, t)$ debe acotar superiormente a $\|\Delta N(q, \dot{q})\|$, se tiene que:

$$\|\Delta N\| = \|\Delta V + \Delta G\| \leq \|\Delta V\| + \|\Delta G\| \leq \gamma_v \|\dot{e}\|^2 + \gamma_g \equiv \phi(x, t)$$

Los valores de γ_v y γ_g también han sido hallados numéricamente, asignándoles unos valores a dichos parámetros iguales a 26.683 y 1.7266 respectivamente.

- Finalmente, el valor de ϵ elegido ha sido 10^{-6} .

En la figura 7.7 se muestran los resultados conseguidos con este controlador, de los que cabe destacar cómo además de seguir manteniendo nulo el error en régimen permanente, se vuelve a dividir por dos el error máximo tanto en posición (del orden de 5×10^{-5} rad) como en velocidad (del orden de 2×10^{-4} rad/s) respecto al anterior controlador con un tiempo de establecimiento no muy superior al conseguido anteriormente.

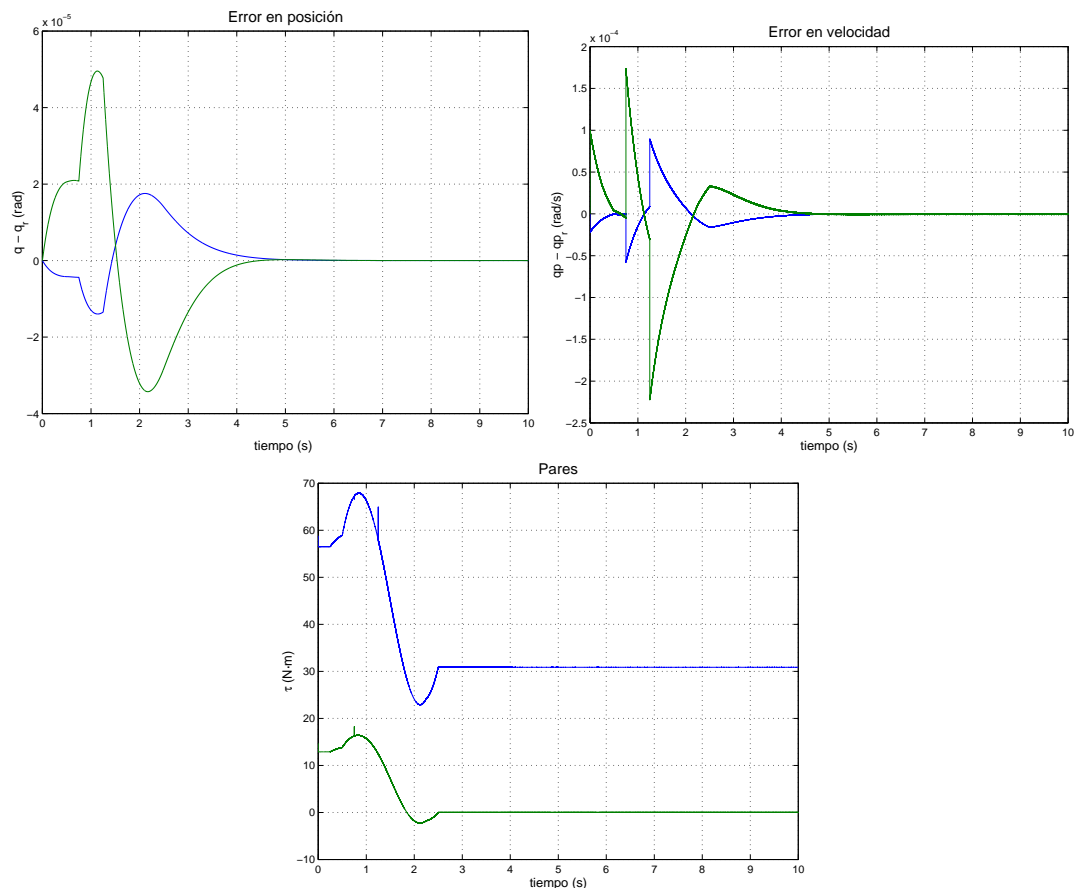


Figura 7.7: Resultados con controlador *PID no lineal robustificado*.

Para tener una imagen más clara de los beneficios conseguidos con los controladores propuestos, en la figura 7.8 se muestran unas gráficas de barras en las que se comparan los órdenes de magnitud de los errores máximos tanto en posición como en velocidad. En esta figura puede observarse claramente la bondad de los controladores diseñados a lo largo de este capítulo.

Finalmente, hay que señalar que la magnitud de los pares resultantes con todos los controladores es aproximadamente la misma.

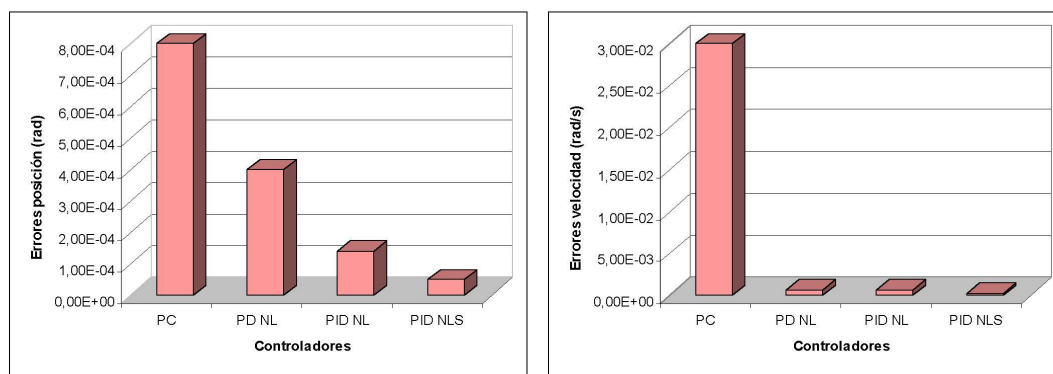


Figura 7.8: Comparación de los resultados con los distintos controladores.

7.7 Aplicación a un robot industrial

Como segunda aplicación, en esta sección se presentan los resultados de simulación obtenidos al aplicar las distintas técnicas de control expuestas en este capítulo a un robot industrial.

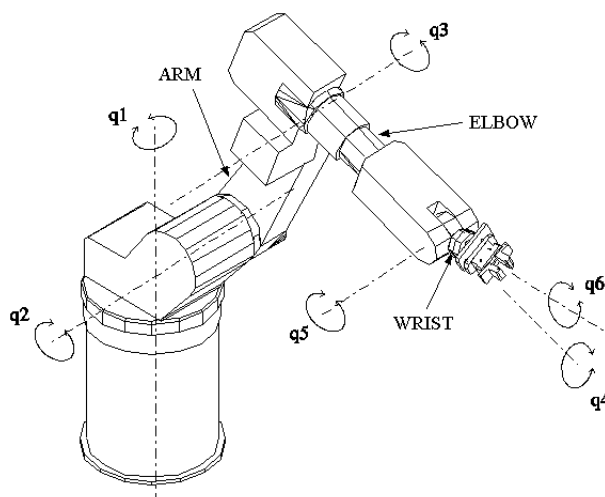
7.7.1 Descripción del robot

El robot en concreto es el RM-10 ([Sys91]), cuya apariencia se muestra en la figura 7.9 junto con un esquema del mismo. Es un brazo manipulador de seis grados de libertad, siendo todas sus articulaciones de revolución. El par de control en cada uno de sus ejes es proporcionado por un motor de corriente continua sin escobillas con una inercia pequeña. Estos motores son capaces de aplicar un par elevado en cada una de las articulaciones, permitiendo así un control donde se requiera grandes picos en los valores del par solicitado. Los motores están acoplados a los ejes del brazo manipulador a través de reductoras de engranajes, siendo por tanto un robot de accionamiento indirecto. Las articulaciones también están provistas de frenos eléctricos para poder bloquear al robot en cualquier posición.

La medida de la posición del brazo manipulador se obtiene a partir de unos sensores inductivos de dos polos acoplados a cada motor. El controlador original del robot utilizaba una arquitectura basada en un bus VME, incluyendo tarjetas de control independientes para cada uno de los ejes. Esta estructura ha sido modificada para poder implementar controladores propios. Esto se ha llevado a cabo manteniendo la parte de potencia y las tarjetas de cada eje, e introduciendo una nueva tarjeta de control en tiempo real modelo *DS1103* ([MOO98]), de la marca comercial *dSPACE* ([Imp99]), en la que son implementadas las leyes de control. Esta tarjeta de control está insertada en



(a) Fotografía



(b) Esquema

Figura 7.9: Robot manipulador RM-10.

una ranura de expansión del bus de un PC comercial, el cual dispone de un PowerPC a 333 MHz como procesador principal, además de un DSP adicional para gestionar las señales de entrada/salida del controlador del robot.

7.7.2 Resultados de simulación

A continuación se presentan los resultados de implementar las distintas metodologías de control expuestas en este capítulo en un simulador suficientemente contrastado de este robot ([Per99]). Los controladores han sido diseñados basándose en un modelo simplificado del robot, donde se han obviado, entre otros, los efectos de la fricción de las articulaciones (que sí están incluidos en el simulador del robot).

Como idea representativa del peso del robot, en la tabla 7.3 se exponen las masas de cada uno de los eslabones del robot. El resto de parámetros, así como sus ecuaciones dinámicas pueden ser encontradas en ([Per99]).

En este trabajo sólo se han controlado las *tres* primeras articulaciones del brazo manipulador, habiéndose mantenido fijas las tres últimas. Nótese que las articulaciones controladas son las correspondientes a los eslabones de mayor peso, correspondiendo las tres últimas no controladas a la *muñeca* del robot. Esta elección ha sido realizada teniendo en cuenta que prácticamente no existirá acoplamiento dinámico entre ésta (de pequeñas dimensiones) y el resto del brazo.

N Eslabón	Masa (Kg)
1	38.65
2	51.80
3	84.10
4	33.89
5	7.36
6	5.00

Tabla 7.3: Masas de los eslabones del robot RM-10.

De nuevo las trayectorias proporcionadas al robot han sido generadas utilizando un polinomio de quinto orden, con especificaciones de velocidades y aceleraciones nulas tanto en el instante inicial y como en el final. Las posiciones de referencia iniciales han sido $[q_1 \ q_2 \ q_3] = [0 \ -\frac{\pi}{2} \ 0]$ rad, mientras que las finales fueron $[q_1 \ q_2 \ q_3] = [1.5 \ \frac{\pi}{2} \ \frac{\pi}{6}]$ rad. Para probar la eficacia del efecto integral se han introducido unos pares constantes de 100 Nm en las tres articulaciones, siendo estos aplicados en los instantes $t = 0.5$ s, $t = 1$ s y $t = 1.5$ s en las articulaciones 1, 2 y 3 respectivamente.

Al igual que se realizó con el robot de dos grados de libertad, para realizar comparaciones se ha diseñado un controlador utilizando la técnica de par calculado clásico con una ley de control externa tipo PID lineal. En la figura 7.10 se presentan los resultados de aplicar este controlador, observándose un error máximo en posición del orden de 0.15 grados, mientras que el máximo de velocidad es del orden de 0.03 rad/s.

El siguiente controlador implementado ha sido el correspondiente al PD no lineal, para el cual se ha vuelto a elegir una matriz de ponderación W tal que $W^T W$ es diagonal, exponiéndose en la tabla 7.4 el valor de sus parámetros.

Señal a ponderar	Matriz de ponderación
Derivada del error: \dot{e}	$Q_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 I$
Error: e	$Q_2 = I$
Esfuerzo de control: u	$R = 0.005^2 I$

Tabla 7.4: Matrices de ponderación para controlador PD no lineal.

Los resultados obtenidos con este controlador se exponen en la figura 7.11 donde, como puede observarse, los errores máximos son comparables con los del controlador anterior, si bien en este caso se tienen errores en régimen permanente no nulos.

En la figura 7.12 se muestran los resultados al implementar el controlador PID no lineal propuesto en la sección 7.4. Para diseñarlo simplemente se ha añadido a los parámetros del controlador anterior el correspondiente a la integral del error. En la tabla 7.5 se muestran los valores de los parámetros de diseño para este experimento.

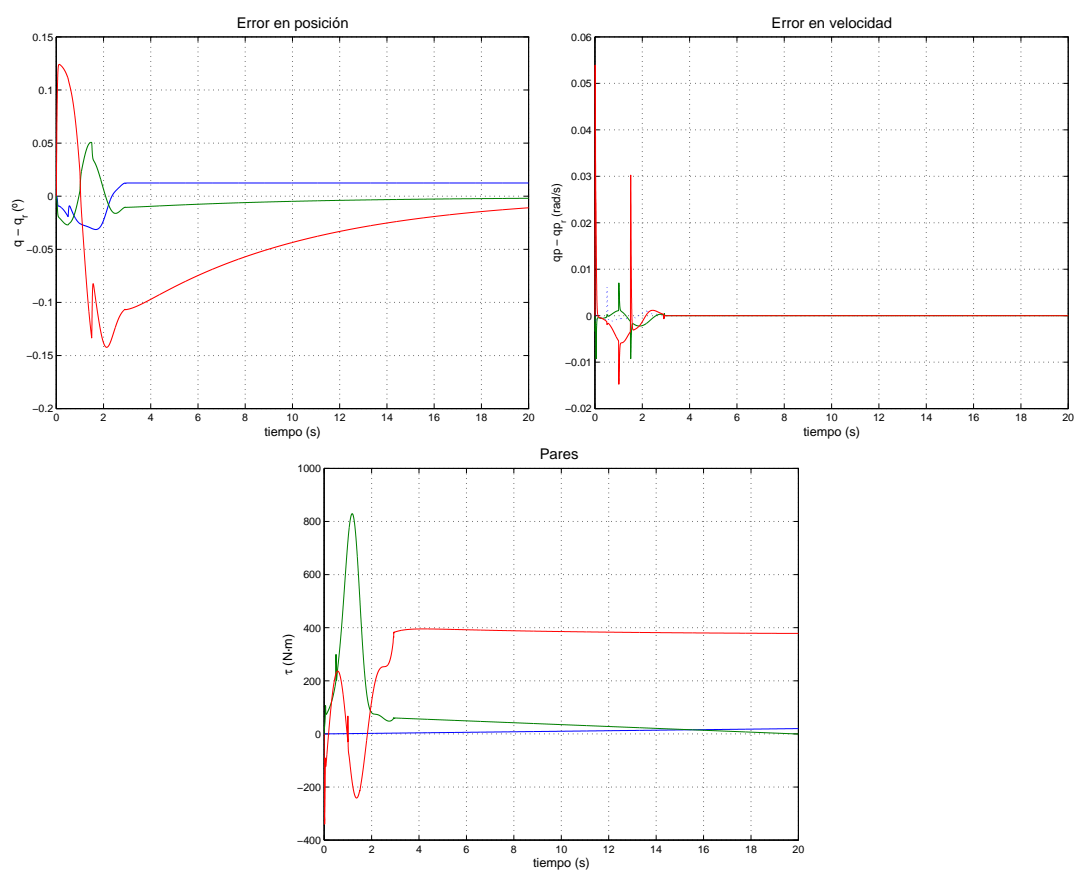
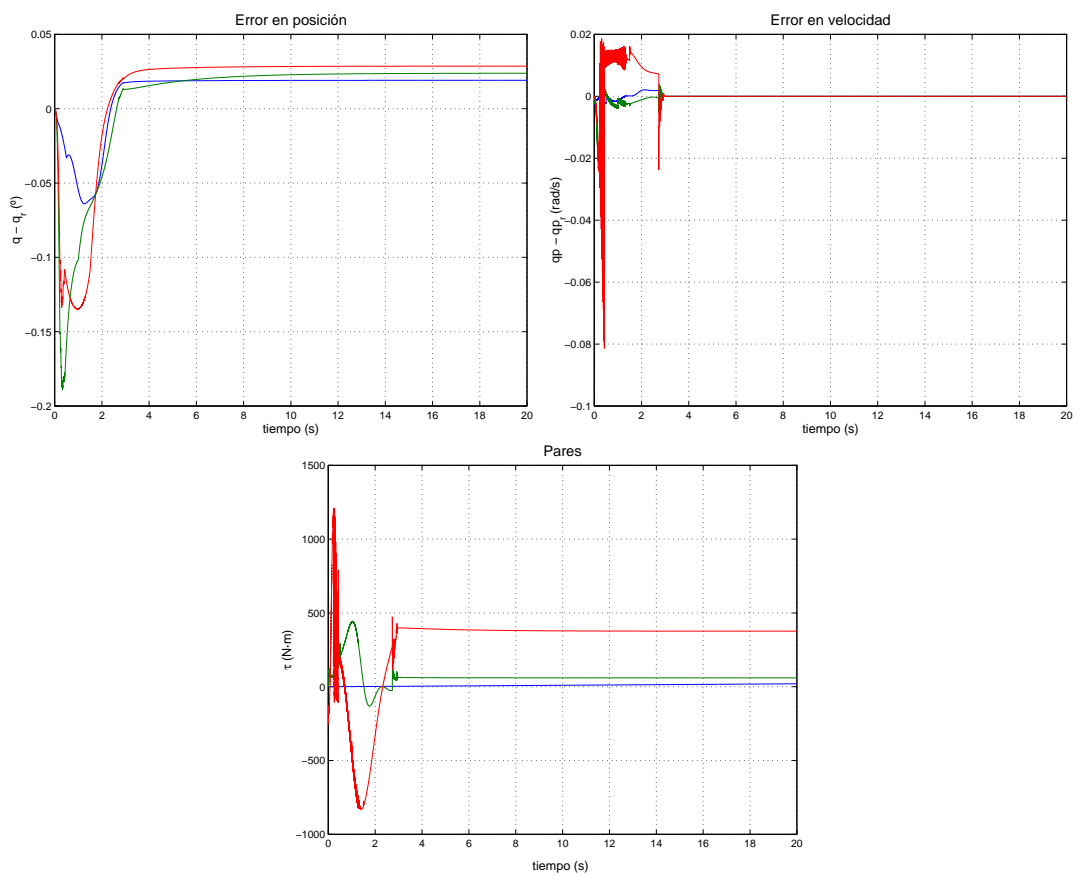


Figura 7.10: Resultados con técnica *par calculado clásico*.

Figura 7.11: Resultados con controlador PD no lineal.

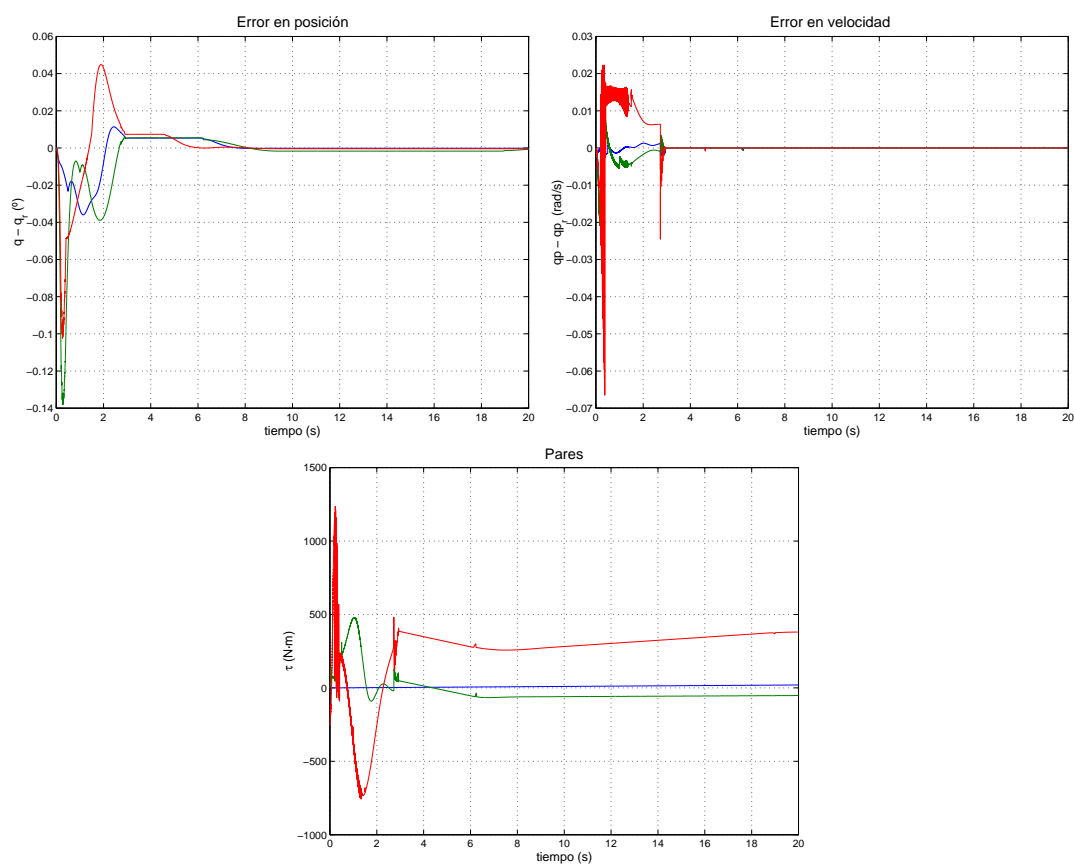


Figura 7.12: Resultados con controlador *PID no lineal*.

Señal a ponderar	Matriz de ponderación
Derivada del error: \dot{e}	$Q_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 I$
Error: e	$Q_2 = I$
Integral del error $\int e dt$	$Q_3 = 3^2 I$
Esfuerzo de control: u	$R = 0.005^2 I$

Tabla 7.5: Matrices de ponderación para controlador PID no lineal.

Como puede observarse, con este controlador se atenúan ligeramente los errores máximos tanto en tanto en posición (del orden de 0.13 grados) como en velocidad (del orden de 0.06 rad/s) respecto al controlador anterior, proporcionando además error en régimen permanente nulo.

Por último, a continuación se presentan los resultados al añadir al controlador PID no lineal el método de robustificación propuesto en la sección 7.5. Los parámetros para dicho método han sido calculados computacionalmente, de manera similar a la realizada con el robot de 2 DGL del ejemplo anterior. Simplemente indicar como parámetro de diseño más característico de este método que el valor de ϵ adoptado ha sido de 0.1.

Los resultados de este experimento se presentan en la figura 7.13, donde puede observarse una disminución drástica tanto del error máximo en posición (del orden de 0.025 grados) así como el de velocidad (del orden de 3×10^{-3} rad/s). Nótese cómo este controlador ha disminuido los errores de pico en un orden de magnitud.

Al igual que se hizo como el ejemplo anterior, en la figura 7.14 se muestran unas gráficas de barras en las que se comparan los órdenes de magnitud de los errores máximos obtenidos tanto en posición como en velocidad. En éstas puede observarse claramente la bondad de los controladores propuestos en este capítulo.

Finalmente, comentar que en este caso sí ha habido una reducción considerable del par de un controlador a otro, correspondiendo las magnitudes más pequeñas a los dos últimos controladores.

7.8 Conclusiones

Se ha expuesto un controlador H_∞ no lineal que resuelve satisfactoriamente lo inconvenientes del presentado por Feng ([Fen94]). Para ello se ha modificado la ecuación no lineal del error ampliándola con una ponderación del término integral.

Se ha proporcionado un controlador que atenúa (según la norma L_2) dicho error,

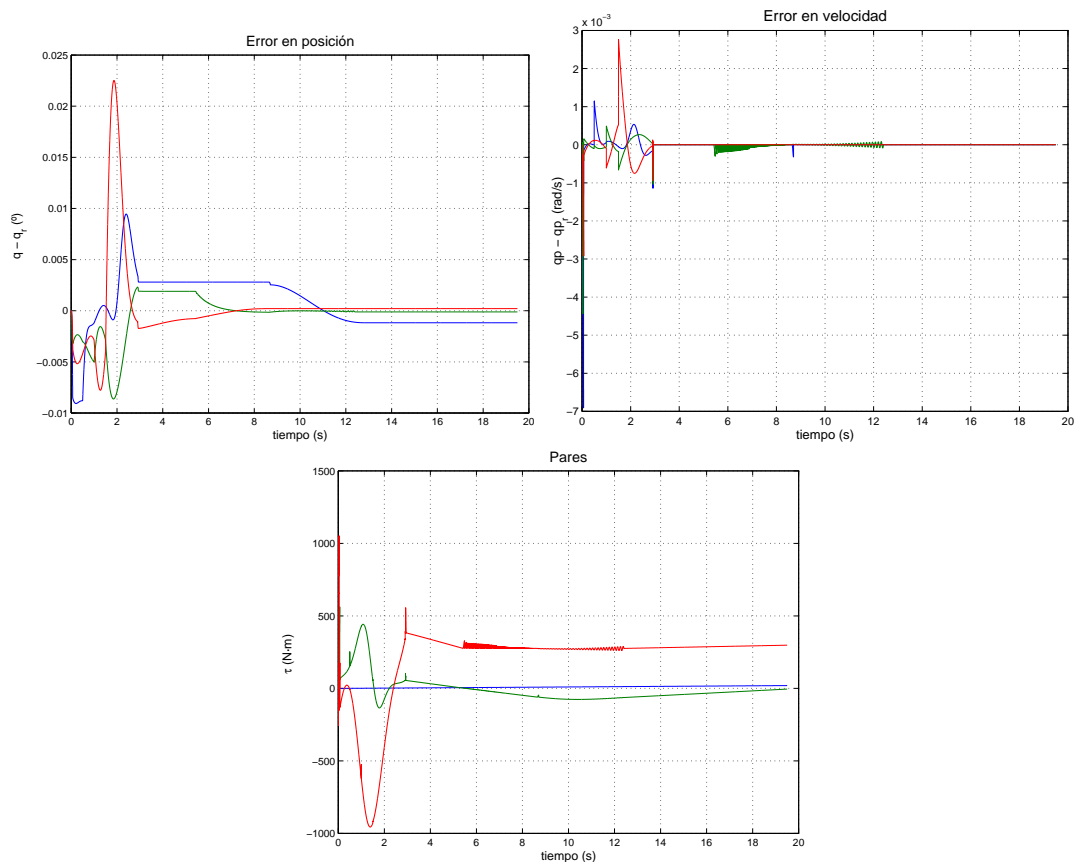


Figura 7.13: Resultados con controlador *PID no lineal robustificado*.

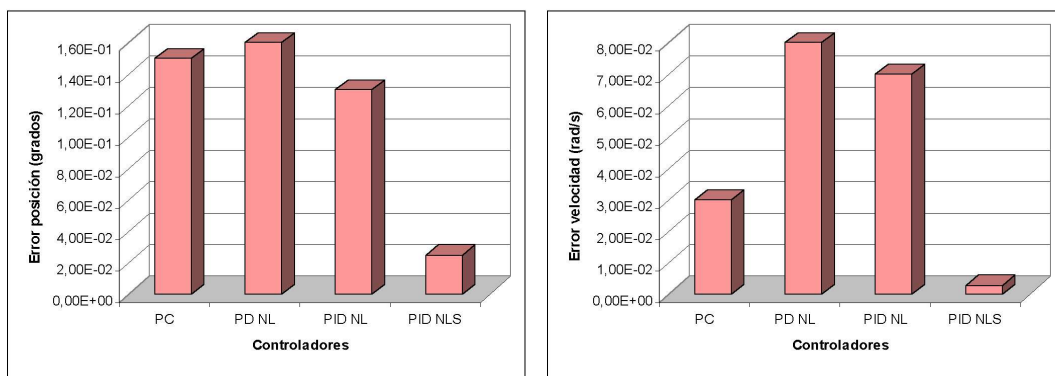


Figura 7.14: Comparación de los resultados con los distintos controladores.

hallando una solución a la ecuación de HJIB obtenida.

El controlador ha sido reescrito en una estructura similar a la del control por par calculado, de forma que el controlador externo resultante tiene la ecuación de un PID no lineal. Además, se ha mostrado cómo una elección particular de las matrices de ponderación permite encontrar un controlador cuyas ecuaciones no dependen del parámetro de atenuación γ .

Dado que los anteriores controladores se basan en un conocimiento perfecto del sistema, para solventar los problemas de robustez del controlador PID no lineal se ha propuesto una modificación del método conocido como *control por funciones de saturación*. Se ha reformulado dicho método de forma que se obtenga un incremento de señal de control que pueda ser añadida a la proporcionada por el controlador PID no lineal externo, compensando así el error debido a las incertidumbres del modelo.

Para comprobar la validez de los controladores propuestos, éstos han sido implementados con éxito tanto en el modelo de un robot de dos grados de libertad como en el simulador de un robot industrial, considerándose en ambos casos diferencias apreciables entre el modelo nominal y el “supuestamente real”. En los resultados de las simulaciones se observa cómo los controladores propuestos mejoran sensiblemente los errores obtenidos tanto con un controlador clásico por par calculado como con el controlador tipo PD de partida.

Capítulo 8

Conclusiones

8.1 Contribuciones y conclusiones de la Tesis

En este capítulo final se presentan de forma resumida las contribuciones aportadas por este trabajo de Tesis, así como las futuras vías de investigación a las que pueden dar lugar los estudios realizados.

Este trabajo es una aportación al control H_∞ , pudiéndose distinguir en él dos partes diferentes correspondientes al control de sistemas lineales y al de sistemas no lineales.

Respecto al control H_∞ de sistemas lineales, las aportaciones más destacadas de esta Tesis han sido las siguientes:

- En el capítulo 2 se ha realizado un resumen didáctico de la teoría de control robusto enfocada al control H_∞ lineal, mostrando una clasificación de las incertidumbres y dividiendo el objetivo final de control en cuatro subapartados: estabilidad nominal, comportamiento nominal, estabilidad robusta y comportamiento robusto.
- En el capítulo 3 se ha mostrado cómo sintetizar controladores una vez impuestas las especificaciones de control. Para ello se ha expuesto el algoritmo de síntesis que se ha utilizado en las aplicaciones lineales de esta Tesis, englobando toda la casuística posible de forma compacta.

Asimismo se ha mostrado cómo imponer condiciones mediante la construcción de una *planta generalizada*, dividiendo este problema en dos enfoques: moldeo de la función de lazo en bucle abierto y moldeo de las funciones de sensibilidad en bucle cerrado. Finalmente, en este capítulo se muestran los distintos planteamientos del problema de sensibilidad mixta, los cuales serán utilizados en capítulos posteriores.

- En el capítulo 4 se propone una metodología para el diseño de las distintas funciones de ponderación que intervienen en el planteamiento de *sensibilidad mixta*, automatizando así el diseño del controlador. El método propuesto se ha diseñado de forma que resulte sencilla la sintonización del controlador, sin necesidad de poseer conocimientos sobre la *Teoría de control H_∞* . La rapidez de cada salida del sistema en bucle cerrado será impuesta mediante la elección de un adimensional, denominado como κ_i , aportando además las indicaciones necesarias para elegir su valor.
- En el capítulo 5 se presentan distintas aplicaciones, obteniendo resultados experimentales que corroboran la validez del método propuesto en el capítulo anterior. A pesar de la sencillez del método, los resultados obtenidos han sido satisfactorios para todas las aplicaciones, monovariantes y multivariantes, tanto desde el punto de vista de robustez como de comportamiento.

De la experiencia obtenida durante la realización de esta Tesis se ha concluido que si bien la metodología de diseño propuesta para el cálculo de controladores permite aplicar la técnica de control H_∞ lineal sin necesidad de amplios conocimientos teóricos, sí que es conveniente tener un amplio conocimiento del sistema real para saber en qué puntos de trabajo funcionará correctamente el controlador y en cuales no.

El cálculo del controlador se ha realizado tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto (para lo cual se ha programado el algoritmo expuesto en el apéndice B), llegando a la conclusión que desde el punto de vista de la descripción externa del controlador no hay diferencias apreciables entre un método y otro.

Por último, al final de este capítulo se exponen unas disquisiciones sobre la elección del valor de κ_i , distinguiendo entre sistemas monovariantes y sistemas multivariantes.

Por otra parte, las aportaciones más destacadas de esta Tesis respecto al control H_∞ no lineal han sido las siguientes:

- En el capítulo 6 se ha realizado una breve exposición del planteamiento de control H_∞ no lineal, enfocando el problema como la extensión del control H_∞ para sistemas lineales expuesta en capítulos anteriores. Se ha expuesto un método para hallar una ley de control por realimentación del vector de estado para sistemas

no lineales en general y posteriormente se ha particularizado dicho método para sistemas no lineales afines en la actuación, obteniendo las conocidas ecuaciones de *Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs* que hacen las veces de las ecuaciones de *Riccati* en los sistemas lineales.

- En el capítulo 7 se ha presentado la aplicación del control H_∞ no lineal a la robótica, resolviendo satisfactoriamente los inconvenientes del controlador de Feng ([Fen94]). Para ello se ha modificado la ecuación no lineal del error del controlador inicial, ampliándola con una ponderación del término integral y aportando una solución a la ecuación de *Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs* obtenida.

El controlador ha sido reescrito en una estructura similar a la del control por par calculado, de forma que el controlador externo resultante tiene la ecuación de un PID no lineal. Además, se ha mostrado cómo una elección particular de las matrices de ponderación permite encontrar un controlador cuyas ecuaciones no dependen del parámetro de atenuación.

Dado que los anteriores controladores se basan en un conocimiento perfecto del sistema, para solventar los problemas de robustez del controlador PID no lineal se ha propuesto una modificación del método conocido como *control por funciones de saturación*. Se ha reformulado dicho método de forma que se obtenga un incremento de señal de control que pueda ser añadida a la proporcionada por el controlador PID no lineal externo, compensando así el error debido a las incertidumbres del modelo.

Para comprobar la validez de los controladores propuestos, éstos han sido implementados con éxito tanto en el modelo de un robot de dos grados de libertad como en el simulador de un robot industrial, considerándose en ambos casos diferencias apreciables entre el modelo nominal y el “supuestamente real”. En los resultados de las simulaciones se observa cómo los controladores propuestos mejoran sensiblemente los errores obtenidos tanto con un controlador clásico por par calculado como con el controlador tipo PD de partida.

8.2 Líneas futuras de investigación

Para concluir, en este apartado se van a apuntar posibles líneas de continuación de la investigación llevada a cabo en esta Tesis.

- Desarrollo de software para implementar controladores H_∞ lineales en sistemas de supervisión, control y adquisición de datos, de forma que sea fácilmente aplicable a plantas industriales.
- Desarrollo de una metodología de diseño para el moldeo de la función de lazo en bucle abierto similar a la presentada para el planteamiento de sensibilidad mixta.

- Combinación de la metodología de síntesis de controladores H_∞ lineales propuesta con estructuras predictoras para sistemas multivariables con retardos.
- Aplicación de los controladores H_∞ no lineales desarrollados al robot RM-10 real, lo cual se espera que se realice en un corto espacio de tiempo.
- Aplicación de dichos controladores a otros sistemas reales que pueden ser modelados mediante ecuaciones similares, como por ejemplo, un sistema de doble rotor propulsado por hélices o un sistema giroestabilizado para el control de barcos.
- Profundización en el estudio de la elección de la función de ponderación para el controlador PID no lineal propuesto.
- Formulación de otras funciones de ponderación, modificando así la expresión del vector objetivo, y por tanto, las expresiones de las ecuaciones de *Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs* resultantes.
- Aplicación de esta formulación a otros tipos de no linealidades. En concreto, en la actualidad se está trabajando en problemas relacionados con la saturación.

Apéndice A

Fundamentos Matemáticos

En este anexo se van a exponer algunos apuntes matemáticos relacionados con el desarrollo de esta Tesis. En concreto, se definirán algunas normas, haciendo hincapié en las que se utilizan en el marco de este trabajo. Por último, se hará una breve descripción de las transformaciones fraccionales lineales.

A.1 Normas

A continuación se va a desarrollar un breve resumen relacionado con las distintas normas y elementos a los que pueden ser aplicadas. Con esta exposición se pretende aclarar qué expresión de la norma habrá que utilizar en cada caso y qué se pretende hacer con ella.

En general, la definición de una norma va a depender del tipo de elemento al que se le aplique. En este apéndice se van a distinguir cuatro: vectores constantes, matrices constantes, vectores de señales temporales y matrices de funciones de transferencias o de respuestas impulsionales de un sistema.

A.1.1 Definición de norma

La norma de un elemento A perteneciente a un espacio vectorial lineal normado es un número real, al cual se le denotará por $\|A\|$, el cual debe satisfacer las cuatro

propiedades siguientes:

1. $\|A\| \geq 0$
2. $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
3. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$
4. $\|A_1 + A_2\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|$

Es interesante observar cómo un sólo número puede representar la medida de la magnitud de un vector, una matriz o una señal temporal.

A.1.2 Normas de vectores

Sea un vector v constante de n elementos:

$$V = \{v_i\} = [v_1 \ \cdots \ v_n]^T$$

Se define la *norma p* de un vector V como:

$$\|V\|_p \equiv \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{A.1})$$

De especial interés para el marco del trabajo es la definición de *norma 2* del vector, también conocida como norma euclídea, a la cual se le ha denotado como $\|\cdot\|_2$ o simplemente como $\|\cdot\|$, donde:

$$\|V\| \equiv \|V\|_2 \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}$$

siendo el lugar geométrico $\|\cdot\| = cte$ una hiperesfera centrada en el origen y de radio el valor de la constante. Nótese la diferencia respecto a otras normas, como por ejemplo, la norma infinito del vector:

$$\|V\|_\infty \equiv \lim_{p \rightarrow \infty} \|V\|_p = \max_i |v_i|$$

la cual representaría un hipercubo también centrado en el origen.

A.1.3 Normas de matrices

Sea una matriz M constante de f filas y c columnas:

$$M = \{m_{ij}\} = \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1c} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{f1} & \cdots & m_{fc} \end{bmatrix}$$

La definición de la norma de una matriz podría hacerse como una *extensión de la norma p* expuesta anteriormente para vectores, esto es:

$$\|M\|_p \equiv \left(\sum_{i=1}^f \sum_{j=1}^c |m_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

siendo las tres más conocidas las correspondientes a $p = 1$ (suma de los valores absolutos de los elementos de la matriz), $p = 2$ (norma de Frobenius) y $p = \infty$ (máximo valor absoluto de los elementos de la matriz).

Sin embargo, teniendo en cuenta el entorno de este trabajo, es mucho más conveniente trabajar con el concepto de *norma inducida* de una matriz, la cual interpreta la matriz como a *un sistema constante* al que le entra un vector cualquiera u , proporcionando un vector de salida y dependiente de la entrada:

$$y = Mu \tag{A.2}$$

Para definir la norma inducida simplemente habrá que decidir qué *norma p de los vectores* (definida en la sección (A.1.2)) de salida y entrada van a ser utilizadas y maximizar la relación de éstas para cualquier valor del vector de entrada. Matemáticamente, la norma p inducida se podrá definir mediante las siguientes expresiones equivalentes entre sí:

$$\|M\|_{ip} \equiv \max_{\|u\|_p \leq 1} \|Mu\|_p \equiv \max_{\|u\|_p = 1} \|Mu\|_p \equiv \max_{u \neq 0} \frac{\|Mu\|_p}{\|u\|_p}$$

donde el subíndice i hace referencia al adjetivo *inducida*¹.

¹Nótese que la ecuación (A.2) hace referencia a un sistema lineal. Sin embargo, con la definición de norma inducida no habría ningún inconveniente en tratar a sistemas no lineales sin más que cambiar la expresión Mu por $M(u)$.

Las normas inducidas más conocidas son de nuevo las correspondientes a valores de p iguales a 1, 2 e ∞ . Para estos casos, las expresiones resultantes son las siguientes:

$$\begin{aligned}\|M\|_{i1} &= \max_j \sum_{i=1}^f |m_{ij}| \\ \|M\|_{i2} &= \bar{\sigma}(M) = \sqrt{\rho(M^*M)} \\ \|M\|_{i\infty} &= \max_i \sum_{j=1}^c |m_{ij}|\end{aligned}$$

donde M^* simboliza la matriz traspuesta conjugada de la matriz M .

Además, dichas normas cumplen la propiedad:

$$\|M_1 M_2\| \leq \|M_1\| \|M_2\| \quad (\text{A.3})$$

la cual es muy importante cuando se está trabajando con sistemas, constituyendo ésta la base del *Teorema de la Pequeña Ganancia* (ver sección 2.8).

De las posibles normas matriciales, la norma 2 inducida (denotada como $\|\cdot\|_{i2}$ o simplemente como $\|\cdot\|$) es especialmente interesante para este trabajo, siendo ésta la definición de *norma infinito de un sistema*.

A.1.4 Normas de señales temporales

Las normas de las señales temporales pueden ser entendidas como una extensión de las normas de los vectores, sin más que considerar que los vectores de señales son vectores constantes para cada instante de tiempo.

Sea un vector temporal $e(t)$ de n señales:

$$e(t) = \{e_i(t)\} = [e_1(t) \quad \cdots \quad e_n(t)]^T$$

Al igual que se expuso en la sección A.1.2, se puede definir la *norma p* de un vector de señales temporales $e(t)$ sin más que aplicar la definición (A.1.4) e integrarla en el tiempo, dando así lugar a las conocidas normas l_p :

$$\|e(t)\|_p \equiv \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^n |e_i(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}}$$

Al igual que en los casos anteriores, las normas más usuales (ya que tienen un claro significado físico) son las correspondientes a valores de p iguales a 1, 2 e ∞ , siendo:

$$\|e(t)\|_1 \equiv \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^n |e_i(\tau)| d\tau \right) \quad (\text{A.4})$$

$$\|e(t)\|_2 \equiv \sqrt{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^n |e_i(\tau)|^2 d\tau \right)} \quad (\text{A.5})$$

$$\|e(t)\|_{\infty} \equiv \max_{\tau} \left(\max_i |e_i(\tau)| \right) \quad (\text{A.6})$$

Obsérvese cómo las ecuaciones (A.4), (A.5) y (A.6) se corresponden con la *integral del valor absoluto* de la señal, la “*energía de la señal*” (concepto que ha sido muy manejado en esta Tesis) y el *pico máximo “temporal” de la señal*, donde en caso de considerar a $e(t)$ como una señal de error, las dos primeras definiciones son las de los conocidos índices de comportamiento *IAE* e *ISE* respectivamente.

A.1.5 Normas de sistemas

Finalmente, las normas de los sistemas serán expuestas haciendo la misma extensión realizada para las señales temporales, solo que en este caso se utilizarán las *normas inducidas* de las matrices. Así, en función de qué norma inducida se escoja, se estará situado en una o otra disciplina del control.

Un sistema multivariable puede ser considerado como una matriz constante si éste es evaluado en cada instante de tiempo (utilizando la respuesta impulsional del sistema como descripción externa) o en cada frecuencia (utilizando matrices de funciones de transferencia).

La teoría de control H_{∞} se basa en la *norma 2 inducida*, lo cual indica que el problema que ésta resuelve es el de la acotación de la amplificación de la *energía* de la señal de salida respecto a la de la señal de entrada.

Con este enfoque es fácil entender otros planteamientos teóricos, como por ejemplo el del control l_1 (basado en la norma ∞ inducida), en el que se pretende atenuar la relación entre los picos temporales de las señales de salida y entrada.

A.2 Transformaciones fraccionales lineales

Las transformaciones fraccionales lineales (TFL), tal como se utilizan en el ámbito del control, están basadas en la realimentación de algunas de las salidas de una matriz (en general las salidas de un sistema dinámico) a través de otra matriz (sistema) y utilizando parte de las entradas de la misma. Dependiendo de si las salidas/entradas realimentadas son las primeras o las últimas se habla de una TFL superior o inferior respectivamente. En cualquier caso, siempre se puede reescribir las ecuaciones de un sistema para reordenar las salidas/entradas como se desee.

Siguiendo la misma terminología de los capítulos de esta Tesis, sea P una matriz de $p + q$ filas y $l + m$ columnas, de forma que esta puede ser dividida de la siguiente forma:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

Según la partición anterior, las ecuaciones que relacionan las salidas con las entradas de esta matriz (ver figura A.1) son las siguientes:

$$\begin{aligned} z &= P_{11}w + P_{12}u \\ v &= P_{21}w + P_{22}u \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

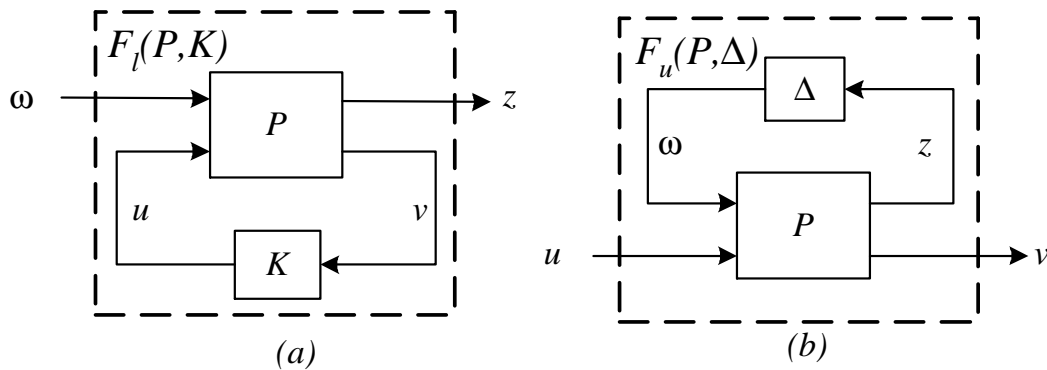


Figura A.1: Transformaciones fraccionales lineales.

Sea la matriz K de dimensiones $m \times q$, compatible con la partición realizada en P . Si se utiliza la matriz K para realimentar positivamente a P utilizando sus q últimas salidas y sus m últimas entradas (ver figura A.1.a), se tendrá la siguiente relación:

$$u = Kv \quad (\text{A.8})$$

Introduciendo la ecuación (A.8) en (A.7) y eliminando u y v se obtiene la relación entre la salida z y la entrada ω de P , una vez cerrado el bucle. Dicha relación es conocida como *transformación fraccional lineal inferior de P con K* , denotándose por:

$$F_l(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (\text{A.9})$$

Siguiendo un razonamiento análogo al anterior, sea la matriz Δ de dimensiones $l \times p$, compatible con la partición realizada en P . Si se utiliza la matriz Δ para realimentar positivamente a P utilizando sus p primeras salidas y sus l primeras entradas (ver figura A.1.b), se tendrá la siguiente relación:

$$\omega = \Delta z \quad (\text{A.10})$$

Introduciendo la ecuación (A.10) en (A.7) y eliminando ω y z se obtiene la relación entre la salida v y la entrada u de P , una vez cerrado el bucle. Dicha relación es conocida como *transformación fraccional lineal superior de P con Δ* , denotándose por:

$$F_u(P, \Delta) = P_{22} + P_{21}\Delta(I - P_{11}\Delta)^{-1}P_{12} \quad (\text{A.11})$$

Apéndice B

Síntesis de Controladores H_∞ Discretos

En este anexo se van a exponer las ecuaciones necesarias para poder implementar un algoritmo de síntesis de controladores H_∞ discretos de una forma similar a la realizada en el capítulo 3 para sistemas continuos.

B.1 Formulación del problema

Al igual que en caso continuo, se considera el problema de control en forma de una transformación fraccional lineal de una planta generalizada discreta $P(z)$ y un controlador discreto $K(z)$, tal como se expone en la figura B.1.

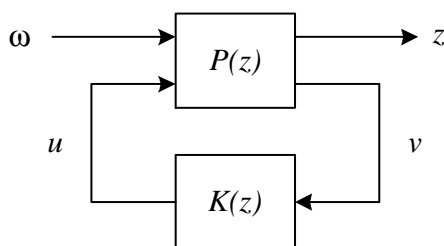


Figura B.1: Formulación general del problema de control en discreto.

Las variables de la figura anterior tienen el mismo significado que las correspondientes al caso continuo, sólo ahora representan a la transformada Z de secuencias en vez de a transformadas de Laplace de señales temporales.

En este caso se considera que la descripción externa de la planta generalizada es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} \omega \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(z) & P_{12}(z) \\ P_{21}(z) & P_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ u \end{bmatrix}$$

donde es importante no confundir la salida z de la planta generalizada (objetivos de control cuyos valores se desea atenuar) con la variable z de las que dependen las funciones de transferencia. En lo que sigue se omitirá la dependencia de z de las funciones de transferencia donde pueda crear confusión.

Asimismo se considerará que la planta generalizada posee una descripción interna representada por el siguiente conjunto de ecuaciones en diferencias:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \omega_k \\ u_k \end{bmatrix}$$

donde las dimensiones de los vectores x_k , ω_k , u_k , z_k y v_k son respectivamente n , l , m , p y q .

Según esta configuración, la función de transferencia desde las señales perturbadoras externas ω_k hasta las señales de error z_k , cerrando el bucle con el controlador $K(z)$, viene dada por la transformación fraccional lineal inferior:

$$z = T_{z\omega}\omega = F_l(P, K)\omega$$

donde:

$$F_l(P, K) = P_{11} + P_{12}K[I - P_{22}K]^{-1}P_{21}$$

El problema de síntesis *subóptimo* de un controlador H_∞ discreto se puede formular de la siguiente forma:

Dado un nivel de atenuación γ , hallar un controlador K de manera que se cumplan las siguientes condiciones:

- La función de transferencia T_{zw} sea estable.
- La norma infinito de la función de transferencia T_{zw} sea inferior a γ , o sea:

$$\|T_{zw}\|_\infty \equiv \sup_{\theta \in (-\pi, \pi]} \bar{\sigma}(T_{zw}(e^{j\theta})) < \gamma$$

B.2 Cálculo de la norma H_∞ de un sistema discreto

Las consideraciones en este apartado son las mismas que las que se realizaron en la sección 3.3, por lo que no se va a repetir la exposición.

Para el cálculo de la norma H_∞ discreta sólo habrá que cambiar la definición de esta norma, que para sistemas continuos es:

$$\|G(s)\|_\infty \equiv \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega))$$

por la definición para sistemas discretos:

$$\|G(z)\|_\infty \equiv \sup_{\theta \in (-\pi, \pi]} \bar{\sigma}(G(e^{j\theta}))$$

Este cambio provoca que el método de cálculo de esta norma utilizando la descripción interna del sistema varíe en cuanto a las condiciones a evaluar. En el caso de sistemas discretos el cálculo de la norma H_∞ se basa en el siguiente lema:

Sea γ un número real positivo y sea una función de transferencia $G(z)$ racional y estable con una descripción interna:

$$G(z) \equiv \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

Si se define la siguiente matriz a partir de la descripción interna del sistema:

$$H = \left[\begin{array}{cc} \hat{A} + \hat{B}(\hat{A}^T)^{-1}\hat{C} & -\hat{B}(\hat{A}^T)^{-1} \\ -(\hat{A}^T)^{-1}\hat{C} & (\hat{A})^{-1} \end{array} \right]$$

donde:

$$\begin{aligned}\hat{A} &= A + B(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} D^T C \\ \hat{B} &= -B(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T \\ \hat{C} &= C^T(\gamma^2 I - D D^T)^{-1} C\end{aligned}$$

Entonces la norma infinito de $G(z)$ es menor que γ si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. $\bar{\sigma}(C(I - A)^{-1}B + D) < \gamma$
2. La matriz H no tiene autovalores en la circunferencia unidad.
3. La matriz \hat{A} es no singular.

Utilizando este lema es posible calcular de forma iterativa la norma infinito de $G(z)$ utilizando la misma metodología que se expuso para el caso continuo.

B.3 Algoritmo para el cálculo del controlador H_∞ discreto.

Para poder hallar un controlador que resuelva el problema se realizan hipótesis similares a las del caso continuo. Éstas son las siguientes:

1. La terna (A, B_2, C_2) debe ser estabilizable y detectable.
2. Las matrices D_{12} y D_{21} han de tener rango completo, o sea:

$$\begin{aligned}D_{12}^T D_{12} &> 0 \\ D_{21} D_{21}^T &> 0\end{aligned}$$

3.

$$\text{rango} \left(\begin{bmatrix} A - e^{j\theta} I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \right) = m + n \quad \forall \theta \in (-\pi, \pi]$$

4.

$$\text{rango} \left(\begin{bmatrix} A - e^{j\theta} I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \right) = q + n \quad \forall \theta \in (-\pi, \pi]$$

5. $D_{22} = 0$. En estas hipótesis no se asume que D_{11} deba ser nula.

Suponiendo que se verifican estas hipótesis, un algoritmo basado en ([Igl91]) que calcula un controlador subóptimo para el problema general de control concluye que:

Dado un nivel de atenuación γ , existe un controlador estabilizante K que consigue hacer que $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$ si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. *Existe una matriz X_∞ definida positiva que es solución de la ecuación algebraica de Riccati discreta:*

$$X_\infty = \hat{C}^T J \hat{C} + A^T X_\infty A - L^T R^{-1} L$$

y que satisfaga las siguientes condiciones:

$$|\lambda_i(A - BR^{-1}L)| < 1 \quad \forall i$$

$$R_1 - R_2^T R_3^{-1} R_2 < 0$$

donde:

$$J = \begin{bmatrix} I_{p \times p} & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_{l \times l} \end{bmatrix}$$

$$R = \hat{D}^T J \hat{D} + B^T X_\infty B = \begin{bmatrix} R_1 & R_2^T \\ R_2 & R_3 \end{bmatrix} \quad \text{con } R_1 \in \mathfrak{R}^{n \times n} \text{ y } R_3 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$$

$$L = \hat{D}^T J \hat{C} + B^T X_\infty A$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ 0_{q \times n} \end{bmatrix}$$

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ I_{l \times l} & 0_{q \times m} \end{bmatrix}$$

2. *Existe una matriz Z_∞ definida positiva que es solución de la ecuación algebraica de Riccati discreta:*

$$Z_\infty = B_t \hat{J} B_t^T + A_t Z_\infty A_t^T - M_t S_t^{-1} M_t'$$

satisfaciendo:

$$|\lambda_i(A_t - M_t S_t^{-1} C_t)| < 1 \quad \forall i$$

$$S_{t1} - S_{t2} S_{t3}^{-1} S_{t2}^T < 0$$

donde:

$$\hat{J} = \begin{bmatrix} I_{l \times l} & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_{m \times m} \end{bmatrix}$$

$$M_t = \tilde{B}_t \hat{J} \tilde{D}_t^T + A_t^T Z_\infty C_t^T$$

$$S_t = \tilde{D}_t^T \hat{J} \tilde{D}_t + C_t Z_\infty C_t^T = \begin{bmatrix} S_{t1} & S_{t2} \\ S_{t2}^T & S_{t3} \end{bmatrix} \text{ con } S_{t1} \in \mathfrak{R}^{m \times m} \text{ y } S_{t3} \in \mathfrak{R}^{q \times q}$$

$$A_t = A - B_1 \nabla^{-1} L_\nabla$$

$$\tilde{B}_t = \begin{bmatrix} B_1 V_{21}^{-1} & O_{n \times m} \end{bmatrix}$$

$$C_t = \begin{bmatrix} V_{12} R_3^{-1} (L_2 - R_2 \nabla^{-1} L_\nabla) \\ C_2 - D_{21} \nabla^{-1} L_\nabla \end{bmatrix}$$

$$\tilde{D}_t = \begin{bmatrix} V_{12} R_3^{-1} R_2 V_{21}^{-1} & I_{m \times m} \\ D_{21} V_{21}^{-1} & 0_{q \times m} \end{bmatrix}$$

$$\nabla = R_1 - R_2^T R_3^{-1} R_2$$

$$L_\nabla = L_1 - R_2^T R_3^{-1} L_2$$

$$V_{12}^T V_{12} = R_3$$

$$V_{21}^T V_{21} = -\gamma^{-2} (R_1 - R_2^T R_3^{-1} R_2) = -\gamma^{-2} \nabla$$

Si se cumplen estas dos condiciones la descripción interna del controlador central $K_c(z)$ que resuelve el problema planteado es la siguiente:

$$K_c(z) \equiv \left[\begin{array}{c|c} A_t - M_{t2} S_{t3}^{-1} C_{t2} + B_2 V_{12}^{-1} [S_{t2} S_{t3}^{-1} C_{t2} - C_{t1}] & [M_{t2} - B_2 V_{12}^{-1} S_{t2}] S_{t3}^{-1} \\ \hline V_{12}^{-1} [S_{t2} S_{t3}^{-1} C_{t2} - C_{t1}] & -V_{12}^{-1} S_{t2} S_{t3}^{-1} \end{array} \right]$$

Además, todos los controladores que consiguen que $\|T_{zw}(z)\|_\infty < \gamma$ están parametrizados mediante la transformación fraccional lineal inferior $K = F_l(K_c, Q)$, donde $Q(z)$ puede ser cualquier función de transferencia propia y estable tal que $\|Q(z)\|_\infty < \gamma$.

Aparentemente en esta formulación se requiere una condición menos que en continuo, donde existían también dos ecuaciones de Riccati (una para el problema de regulación con estado accesible y la otra para el de estimación de estado) más una condición de transversalidad. Sin embargo, esto no es cierto ya que la segunda ecuación de Riccati expuesta para el caso discreto no es exactamente la correspondiente al problema de estimación, llevando ya incluida la mencionada condición de transversalidad. De ahí que a algunas matrices de dicha ecuación se la haya incluido el subíndice t de transversalidad.

Finalmente, hay que recordar que este controlador es el obtenido directamente del algoritmo donde se han supuesto una serie de hipótesis que en general no serán cumplidas por la planta generalizada. Al igual que sucedía en los sistemas continuos, pudiera ser necesario realizar una serie de transformaciones antes de obtener el controlador que se implemente en el sistema real. Estas transformaciones son las mismas que las expuestas en la sección 3.5.

Apéndice C

Demostración del Teorema de la Sección 7.3

En este anexo se va a exponer la demostración del teorema enunciado en la sección 7.3.

Teorema: Sea $V(x, t)$ la siguiente función escalar:

$$V(x, t) = \frac{1}{2} x^T T_o^T \begin{bmatrix} M & O & O \\ O & Y & S - Y \\ O & S - Y & Z + Y \end{bmatrix} T_o x$$

donde Y, S y $Z \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ son matrices constantes simétricas y definidas positivas, M la matriz de inercias del robot, y T_o corresponde a la expresión de la ecuación (7.12). Sea $T = [T_1 \ T_2 \ T_3]$ es la matriz que aparece en la ecuación dinámica no lineal del error (7.11). Si estas matrices son tales que verifican la ecuación:

$$\begin{bmatrix} O & Y & S \\ Y & 2S & Z + 2S \\ S & Z + 2S & O \end{bmatrix} + Q + \frac{1}{\gamma^2} T^T T - (\bar{C}^T + T)^T R^{-1} (\bar{C}^T + T) = 0$$

Entonces, la función $V(x, t)$ satisface la ecuación de HJBI:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^T V}{\partial x} f(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^T V}{\partial x} \left[\frac{1}{\gamma^2} k(x, t) k(x, t) - g(x, t) R^{-1} g^T(x, t) \right] \frac{\partial V}{\partial x} \\ - \frac{\partial^T V}{\partial x} g(x, t) R^{-1} C^T h(x) + \frac{1}{2} h^T(x) (Q - \bar{C} R^{-1} \bar{C}^T) h(x) = 0 \end{aligned}$$

para un valor de γ suficientemente alto.

Demostración:

Para demostrar este teorema se van a calcular por separado cada uno de los términos de la ecuación de Hamilton-Jacobi para ser sumados posteriormente:

- El gradiente de $V(x, t)$ viene dado por:

$$\frac{\partial^T V(x, t)}{\partial x} = x^T T_o^T \begin{bmatrix} M & O & O \\ O & Y & S - Y \\ O & S - Y & Z + Y \end{bmatrix} T_o + \frac{1}{2} [0_{1 \times n} \quad \Omega \quad 0_{1 \times n}]$$

donde

$$\Omega = \left(x^T T_o^T \begin{bmatrix} \frac{\partial^T M}{\partial q_1} & O & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{bmatrix} T_o x, \dots, x^T T_o^T \begin{bmatrix} \frac{\partial^T M}{\partial q_n} & O & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{bmatrix} T_o x \right)$$

Es fácil comprobar que:

$$[0_{1 \times n} \quad \Omega \quad 0_{1 \times n}] (g(x, t) u + k(x, t) \omega) = 0$$

y en consecuencia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^T(x, t)}{\partial x} f &= \left(x^T T_o^T \begin{bmatrix} M & O & O \\ O & Y & S - Y \\ O & S - Y & Z + Y \end{bmatrix} T_o + \frac{1}{2} [0_{1 \times n} \quad \Omega \quad 0_{1 \times n}] \right) f = \\ &= x^T T_o^T \begin{bmatrix} M & O & O \\ O & Y & S - Y \\ O & S - Y & Z + Y \end{bmatrix} T_o f + \frac{1}{2} [0_{1 \times n} \quad \Omega \quad 0_{1 \times n}] f + \frac{1}{2} [0_{1 \times n} \quad \Omega \quad 0_{1 \times n}] (gu + k\omega) = \\ &= x^T T_o^T \begin{bmatrix} M & O & O \\ O & Y & S - Y \\ O & S - Y & Z + Y \end{bmatrix} T_o f + \frac{1}{2} [0_{1 \times n} \quad \Omega \quad 0_{1 \times n}] \dot{x} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que:

$$f = T_o^{-1} \begin{bmatrix} -M^{-1} \left(\frac{1}{2} \dot{M} + N \right) & O & O \\ \frac{1}{\rho} I & I - \left(\frac{1}{\rho} T_2 \right) & -I - \frac{1}{\rho} (T_3 - T_2) \\ O & I & -I \end{bmatrix} T_o x$$

el primer término de la expresión anterior puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
 & x^T T_o^T \begin{bmatrix} M & O & O \\ O & Y & S - Y \\ O & S - Y & Z + Y \end{bmatrix} T_o f = \\
 & = x^T T_o^T \begin{bmatrix} M & O & O \\ O & Y & S - Y \\ O & S - Y & Z + Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -M^{-1} \left(\frac{1}{2} \dot{M} + N \right) & O & O \\ \frac{1}{\rho} I & I - \left(\frac{1}{\rho} T_2 \right) & -I - \frac{1}{\rho} (T_3 - T_2) \\ O & I & -I \end{bmatrix} T_o x = \\
 & = x^T T_o^T \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{2} \dot{M} + N \right) & O & O \\ \frac{1}{\rho} Y & S - \frac{1}{\rho} Y T_2 & -S - \frac{1}{\rho} Y (T_3 - T_2) \\ \frac{1}{\rho} (S - Y) & S + Z - \frac{1}{\rho} (S - Y) T_2 & -(S + Z) - \frac{1}{\rho} (S - Y) (T_3 - T_2) \end{bmatrix} T_o x
 \end{aligned}$$

mientras que el segundo término puede expresarse como:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0_{1 \times n} & \Omega & 0_{1 \times n} \end{bmatrix} \dot{x} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0_{1 \times n} & \Omega & 0_{1 \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{e} \\ \dot{e} \\ e \end{bmatrix} = \\
 & = \frac{1}{2} \Omega \dot{e} = \frac{1}{2} x^T T_o^T \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^T M}{\partial q_k} (\dot{q}_k - \dot{q}_{rk}) & O & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{bmatrix} T_o x
 \end{aligned}$$

- Cálculo de la derivada temporal de $V(x, t)$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2} x^T T_o^T \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^T M}{\partial q_k} \dot{q}_{rk} & O & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{bmatrix} T_o x.$$

- Suma de los resultados obtenidos hasta este punto:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V^T(x, t)}{\partial x} f = \\
 & = \frac{\partial V}{\partial t} + x^T T_o^T \begin{bmatrix} M & O & O \\ O & Y & S - Y \\ O & S - Y & Z + Y \end{bmatrix} T_o f + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0_{1 \times n} & \Omega & 0_{1 \times n} \end{bmatrix} \dot{x} = \\
 & = \frac{1}{2} x^T T_o^T \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^T M}{\partial q_k} \dot{q}_{rk} & O & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{bmatrix} T_o x +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +x^T T_o^T \begin{bmatrix} M & O & O \\ O & Y & S-Y \\ O & S-Y & Z+Y \end{bmatrix} T_o f + \frac{1}{2} x^T T_o^T \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^T M}{\partial q_k} (\dot{q}_k - \dot{q}_{rk}) & O & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{bmatrix} T_o x = \\
& = x^T T_o^T \begin{bmatrix} M & O & O \\ O & Y & S-Y \\ O & S-Y & Z+Y \end{bmatrix} T_o f + \frac{1}{2} x^T T_o^T \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^T M}{\partial q_k} \dot{q}_k & O & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{bmatrix} T_o x = \\
& = x^T T_o^T \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{2}\dot{M} + N\right) & O & O \\ \frac{1}{\rho}Y & S - \frac{1}{\rho}YT_2 & -S - \frac{1}{\rho}Y(T_3 - T_2) \\ \frac{1}{\rho}(S-Y) & S + Z - \frac{1}{\rho}(S-Y)T_2 & -(S+Z) - \frac{1}{\rho}(S-Y)(T_3 - T_2) \end{bmatrix} T_o x + \\
& \quad + \frac{1}{2} x^T T_o^T \begin{bmatrix} \dot{M} & O & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{bmatrix} T_o x = \\
& = x^T T_o^T \begin{bmatrix} -N & O & O \\ \frac{1}{\rho}Y & S - \frac{1}{\rho}YT_2 & -S - \frac{1}{\rho}Y(T_3 - T_2) \\ \frac{1}{\rho}(S-Y) & S + Z - \frac{1}{\rho}(S-Y)T_2 & -(S+Z) - \frac{1}{\rho}(S-Y)(T_3 - T_2) \end{bmatrix} T_o x
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la matriz N es antisimétrica y dada la estructura de T_o se tiene que:

$$x^T T_o^T \begin{bmatrix} -N & O & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{bmatrix} T_o x = 0,$$

con lo que expresión inicial puede ser escrita como:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V^T(x, t)}{\partial x} f = \\
& = x^T T_o^T \begin{bmatrix} O & O & O \\ \frac{1}{\rho}Y & S - \frac{1}{\rho}YT_2 & -S - \frac{1}{\rho}Y(T_3 - T_2) \\ \frac{1}{\rho}(S-Y) & S + Z - \frac{1}{\rho}(S-Y)T_2 & -(S+Z) - \frac{1}{\rho}(S-Y)(T_3 - T_2) \end{bmatrix} T_o x = \\
& = x^T \begin{bmatrix} O & O & O \\ Y & S & O \\ S & 2S+Z & O \end{bmatrix} x = \frac{1}{2} x^T \left(\begin{bmatrix} O & O & O \\ Y & S & O \\ S & 2S+Z & O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O & Y & S \\ O & S & 2S+Z \\ O & O & O \end{bmatrix} \right) x = \\
& = \frac{1}{2} x^T \begin{bmatrix} O & Y & S \\ Y & 2S & Z+2S \\ S & Z+2S & O \end{bmatrix} x
\end{aligned}$$

- Cálculo de $g^T(x, t) \frac{\partial V(x, t)}{\partial x}$

$$\begin{aligned} g^T(x, t) \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} &= [M^{-1} \quad O \quad O] (T_o^{-1})^T T_o^T \begin{bmatrix} M & O & O \\ O & Y & S - Y \\ O & S - Y & Z + Y \end{bmatrix} T_o x = \\ &= [I \quad O \quad O] T_o x = T_1 x \end{aligned}$$

Por otra parte, puesto que $g(x, t) = k(x, t)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^T V}{\partial x} \left(\frac{1}{\gamma^2} k(x, t) k(x, t) - g(x, t) R^{-1} g^T(x, t) \right) \frac{\partial V}{\partial x} &= \\ = \frac{1}{2} x^T T_1^T \left(\frac{1}{\gamma^2} I - R^{-1} \right) T_1 x \end{aligned}$$

- Sustitución de $V(x, t)$ en la ecuación de Hamilton-Jacobi:

Finalmente, sustituyendo la ecuación de $V(x, t)$ propuesta en la ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^T V}{\partial x} f(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^T V}{\partial x} \left(\frac{1}{\gamma^2} k(x, t) k(x, t) - g(x, t) R^{-1} g^T(x, t) \right) \frac{\partial V}{\partial x} - \\ - \frac{\partial^T V}{\partial x} g(x, t) R^{-1} C^T x + \frac{1}{2} x^T (Q - C R^{-1} C^T) x = 0 \end{aligned}$$

se obtiene que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x^T \begin{bmatrix} O & Y & S \\ Y & 2S & Z + 2S \\ S & Z + 2S & O \end{bmatrix} x + \frac{1}{2} x^T T_1^T \left(\frac{1}{\gamma^2} I - R^{-1} \right) T_1 x - \\ - x^T T_1^T R^{-1} C^T x + \frac{1}{2} x^T (Q - C R^{-1} C^T) x = 0 \end{aligned}$$

de donde se obtiene:

$$\begin{bmatrix} O & Y & S \\ Y & 2S & Z + 2S \\ S & Z + 2S & O \end{bmatrix} + Q + \frac{1}{\gamma^2} T_1^T T_1 - (C^T + T_1)^T R^{-1} (C^T + T_1) = 0$$

como se quería demostrar.

Bibliografía

- [Anw93] Anwar, H.A.H. Ali. *A Survey of Weighting Functions for ∞ Control*. Control Systems Centre, Manchester M60 1Qd, UK, 1993. Report No. 782.
- [Ast94] Astolfi, A., Lanari, L. Disturbance Attenuation and Setpoint of Rigid Robots via H_∞ Control. *Proc. 33rd Conf. on Decision and Control, Orlando, FL.*, pages 2578–2583, 1994.
- [Ath86] Athans, M. A Tutorial on the *LQG/LTR* Method. *ACC*, pages 1289–1296, 1986.
- [Ath94] Athans, V., Agarwal, S. Design of a Robust Controller for a Supersonic Aircraft Using ∞ Approach. *Control Eng. Practice*, (6):1051–1061, 1994.
- [Bal87a] Ball, J.A., Foias, C., Helton, J.W., Tannenbaum, A. *Computer Systems Sciences*, volume 34. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1987.
- [Bal87b] Ball, J.A., Foias, C., Helton, J.W., Tannenbaum, A. On a Local Nonlinear Commutant Lifting Theorem. *Indiana Univ. Math J.*, (36):693–709, 1987.
- [Bal95] Balas, G., Doyle, J., Glover, K., Packard, A., Smith, R. *μ -Analysis and Synthesis Toolbox User's Guide*. The MathWorks Inc., Natick, Mass, second edition, 1995.
- [Ban95] Banavar, R., Dominic, P. An *LQG/H ∞* Controller for a Flexible Manipulator. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 3(4):409–416, 1995.
- [Bas91] Basar, T., Bernhard, P. *H ∞ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems: A Dynamic Game Approach*. Systems and Control: Foundations and Applications, Birkhäuser, Boston, 1991.
- [Ber93] Berenguel, M., Camacho, E.F., Rubio, F.R. *Simulation Software Package for the Acurex Field*. E.S.I. of Seville, Spain, Internal Report, 1993.
- [Ber96a] Berenguel, M., Camacho, E.F. Frequency-Based Adaptive Control of Systems with Antiresonance Modes. *Control Engineering Practice*, 4(5):677–684, 1996.

- [Ber96b] Bergeon, B., Martinez, P., Coustal, P., Granier, J.P. Design of an Active Suspension System for a Micro-Gravity Experiment. *Control Eng. Practice*, 4(11):1491–1502, 1996.
- [Bit98] Bittar, A., Moura-Sales, R. H_2 and H_∞ Control for Maglev Vehicles. *IEEE Control Systems*, 18(4):18–25, 1998.
- [Bod45] Bode, H.W. *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. Princeton N.J., 1945.
- [Boy89] Boyd, S., Balakrishnan, V., Kabamba, P. A Bisection Method for Computing the H_∞ Norm of a Transfer Matrix and Related Problems. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 2(3):207–220, 1989.
- [Boy94] Boyd, S., El Gahoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM books, Philadelphia, 1994.
- [Cam88] Camacho, E.F., Rubio, F.R., Gutierrez, J.A. Modelling and Simulation of a Solar Power Plant with a Distributed Collector System. *Proc. International IFAC Symp. on Power Systems, Modelling and Control Applications*, 1988.
- [Cam92] Camacho, E.F., Rubio, F.R., Huges, F.M. Self-tuning Control of a Solar Power Plant with a Distributed Collector System. *IEEE Control System Magazine*, pages 72–78, 1992.
- [Cam94] Camacho, E.F., Berenguel, M., Rubio, F.R. Application of a Gain Scheduling Generalized Predictive Controller to a Solar Power Plant. *Control Engineering Practice*, 2(2):227–238, 1994.
- [Cam97a] Camacho, E.F., Berenguel, M., Rubio, F.R. *Advanced Control of Solar Plants*. Springer, first edition, 1997.
- [Cam97b] Camacho, E.F., Berenguel, M., Rubio, F.R., Arahal, M.R., Ortega, M.G. Research Activities Performed by the Control Group of the Universidad de Sevilla with Applications to the Acurex Fiel of the Plataforma Solar de Almería. *Proceedings of the 1st users workshop: Training and Movility of Researchers Programme at Plataforma Solar de Almería*, pages 133–145, 1997.
- [Cas93] Casal, A. *Desarrollo de un Sistema de Supervisión y Control sobre un Modelo Simulado para Prácticas*. Proyecto Fin de Carrera. Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla, 1993.
- [Cas98] Castaño, F., Rubio, F.R. Application of a LQG/LTR Controller to a Pilot Plant. *Prodeedings of CONTROLO'98*, 1998.

- [Cha91] Chaumette, F., Rives, P., Espian, B. Positioning of a Robot with respect to an Object, Tracking it and Estimating its Velocity by Visual Servoing. *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2248–2253, 1991.
- [Che94] Chen, B.S., Lee, T.S., Feng, J.H. A nonlinear H_∞ Control Design in Robotic Systems Under Parameter Perturbation and External Disturbance. *International Journal of Control*, 59:439–462, 1994.
- [Chi98] Chiang, R., Safonov, M. *Robust Control Toolbox User's Guide*. The MathWorks Inc., Natick, second edition, 1998.
- [Chr97] Christen, U., Musch, H., Steiner, M. Robust Control of Distillation Columns: μ - vs H_∞ Synthesis. *J. Proc. Cont.*, 7(1):19–30, 1997.
- [Con00] Conseglere, A., López, M.J. Desarrollo en Entorno Maple/Matlab para Control H_∞ No Lineal. *XXI Jornadas de Automática, Sevilla*, 2000. ISBN: 84-699-3163-6.
- [Cor96] Corke, P.I. *Visual Control of Robots*. Research Studies Press, Ltd., 1996.
- [Cra89] Craig, J.J. *Introduccion to Robotics. Mechanics and Control*. Addison-Wesley Publishing Company, second edition, 1989.
- [D'a66] D'azzo, J., Houpis, C. *Feedback Control System Analisis and Synthesis*. McGraw Hill, 1966.
- [DeC77] DeCarlo, R.A., Murray, J., Saeks, R. Multivariable Nyquist Theory. *International Journal of Control*, 25:657–675, 1977.
- [Des75] Desoer, C., Vidyasagar, M. *Feedback Systems: Input-Output Properties*. Academic Press, New York, 1975.
- [Des80] Desoer, C., Liu, R., Murray, J. Saeks, R. Feedback Design: The Fractional Representation Approach to Analysis and Synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(3), 1980.
- [Dor83] Dorf, R.C. *Modern Control Systems*. Addison Wesley, 1983.
- [Doy78] Doyle, J.C. *Robustness of Multiloop Feedback Systems*. Proc. Conference on Decision and Control, San Diego, California, 1978.
- [Doy81] Doyle, J.C., Stein, G. Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26, 1981.
- [Doy82] Doyle, J.C. Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties. *IEE Proc.*, 133(D):45–56, 1982.

- [Doy83] Doyle, J.C. Synthesis of Robust Controllers and Filters. *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 109–114, 1983.
- [Doy84] Doyle, J.C. *Lecture Notes on Advances in Multivariable Control*. ONR Honeywell Workshop, Minneapolis, 1984.
- [Doy89] Doyle, J.C., Glover, K., Khargonekar, P. Francis, B. State-space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8):831–847, 1989.
- [Dym86] Dym, H., Gohberg, H. A Maximum Entropy Principle for Contractive Intertpolants. *J. of Functional Analysis*, 30:240–247, 1986.
- [Elm] Elmquist, H., Brück, D. y Otter, M. *Dymola. Dynamy Modeling Laboratory. Users Manual*. Dynasim AB.
- [Fen94] Feng, W., Postlethwaite, I. Robust Nonlinear H_∞ /Adaptative Control of Robot Manipulation Motion. *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, 208:221–230, 1994.
- [Foi95] Foias, C., Gu, C. Tannenbaum, A. Nonlinear H_∞ Optimization: A Causal Power Series Approach . *SIAM Journal of Control Optimization*, 33:185–207, 1995.
- [Foi96] Foias, C., Gu, C. Tannenbaum, A. Nonlinear in H_∞ Control Theory, Causality in the Commutant Lifting Theorem, and Extension of Intertwining Operators. *Integral Equations Operator Theory*, 25:481–489, 1996.
- [Foi98] Foias, C., Gu, C. Tannenbaum, A. *On the Nonlinear Standard H_∞ Problem*. Oper. Theory Adv. Appl., 1998.
- [Fra86] Franklin, G., Powell, J., Emami-Naeini, A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison Wesley, 1986.
- [Gel68] Gelb, A. and van der Velde, W.E. *Multiple-input Describing Functions and Nonlinear Systems Design*. Prentice-Hall, 1968.
- [Glo84] Glover, K. All Optimal Hankel Norm Approximations of Linear Multivariable Systems and Their L_∞ Error Bounds . *International Journal of Control*, 39, 1984.
- [Glo89] Glover, K., McFarlane, D. Robust Stabilization of Normalized Coprime Factor Plant Descriptions with H_∞ Bounded Uncertainty. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 34(8):821–830, 1989.
- [Gre95] Green, M., Limebeer, D. *Linear Robust Control*. Prentice-Hall and System Sciences Series, 1995.

- [Gre98] Green, M. *LQG Controllers for Discrete-Time State-Space Systems with Transport Delays and Application to Rolling Mills*. *IEEE Conference on Control Applications, Trieste, 1998*, 1998.
- [Har00] Hardt, M., Helton, J.W., Kreutz-Delgado, Kenneth. Numerical Solution of Nonlinear H_2 and H_∞ Control Problems with Applications to Jet Engine Compressors. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 8(1):98–111, 2000.
- [Has93] Hashimoto, K. (edited by). *Visual Servoing: Real-Time Control of Robot Manipulators Based on Visual Sensory Feedback*. World Scientific, 1993.
- [Hel99] Helton, W. and James, M. *Extending H_∞ Control to Nonlinear Systems. Control of Nonlinear Systems to Achieve Performance Objectives*. SIAM, 1999.
- [Hun92] Hung, Y.S., Pokrud. An H_∞ Approach to Feedback Design with Two Objective Functions. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 37(6):820–824, 1992.
- [Igl91] Iglesias, P., Glover, K. State-space Approach to Discrete-time H_∞ Control. *International Journal of Control*, 54(5):1031–1073, 1991.
- [Ima97] Imanari, H., Morimatsu, Y., Sekiguchi, K., Ezure, H., Matuoka, R., Tokuda, A., Otake, H. Loop H_∞ Control for Hot-Strip Mills. *IEEE Trans. on Industry Applications*, 33(3):790–796, 1997.
- [Imp99] Implementation Guide. *Real Time Interface (RTI and RT-MP)*. dSPACE, 1999.
- [Isi96] Isidori, A.: *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, London, third edition, 1996.
- [Kal61] Kalman, R.E., Bucy, R.S. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. *Journal on Basic Engineering*, (83), 1961.
- [Kal82] Kalt, A. Distributed Collector System Plant Construction Report. *IEA/SSPS Operating-Agent, DFVLR, Cologne*, 1982.
- [Kan95] Kang, W. Nonlinear H_∞ Control and its Applications to Rigid Spacecraft. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-40:1281–1285, 1995.
- [Kha96] Khalil, H.K. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, second edition, 1996.
- [Kit98] Kitada, H., Kondo, O., Kusachi, H., Sasame, K. H_∞ Control of Molten Steel Level in Continuous Caster. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 6(2):200–207, 1998.
- [Kug99] Kugi, A., Schlacher, K. Nonlinear H_∞ -Controller for a DC-to-DC Power Converter. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 7(2):230–237, 1999.

- [Kwa72] Kwakernaak, H., Silvan, R. *Linear Optimal Control Systems*. Wiley Interscience, 1972.
- [Lee97] Lee, H, Hwang, H. Design of Two-degree-of-freedom Robust Controllers for a Seeker Scan Loop System. *International Journal of Control*, 66(4):517–537, 1997.
- [Lew93] Lewis, F.L., Abdallad, C.T. and Dawson, D.M. *Control of Robot Manipulators*. MacMillan Publishing Company, 1993.
- [Li99] Li, S., Zhang, W. Nonlinear H_∞ Control of Neutralization Processes. *14th World Congress of IFAC, China*, pages 133–138, 1999.
- [Lin98] Lin, J.L., Tho, B.C. Analysis and μ -Based Controller Design for an Electromagnetic Suspension System. *IEEE Trans. on Education*, 41(2):116–129, 1998.
- [Lju86] Ljung, L. *System Identification Toolbox*. The Math Works, Inc., 1986.
- [Lop95] Lopez, M.J., Rubio, F.R. H_∞ Multivariable Design Methodology for a Ship. *Proc. of 3rd European Control Conference, Rome, Italy*, pages 607–612, 1995.
- [Lue64] Luenberger, D.G. Observing the State of a Linear System. *IEEE Transactions on Mil. Electronics*, (8), 1964.
- [Luk69] Lukes, D.L. Optimal Regulation of Nonlinear Dynamical Systems. *SIAM Journal of Control*, 7(1):75–100, 1969.
- [Lun91] Lundstrom, P., Skogestad, S., Wang, Z.Q. Performance Weight Selection for H_∞ and μ -Control Methods. *Trans. Inst. MC*, 13(5):241–252, 1991.
- [Maa95] Maas, W.C.A., Dalsmo, M. Tracking of a Rigid Body in $SE(3)$ Using Singular H_∞ Control. *Preprint University of Twente*, 1995.
- [Man] Manual 150. *Modular Servo System MS150 Mk2 User's Guide*. Feedback Instruments Ltd.
- [McF90] McFarlane, D., Glover, K. *Robust Controller Desing Using Normalized Coprime Factor Plant Descriptions*, volume 138, chapter Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag, 1990.
- [McF92] McFarlane, D., Glover, K. A Loop Shaping Design Procedure Using H_∞ Synthesis. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 37(6):759–769, 1992.
- [Mei95] Meinsma, G. Unstable and Nonproper Weights in ∞ Control. *Automatica*, 31(11):1655–1658, 1995.

- [Min94] Mingo, E. *Supervisión y Control de una Planta Piloto mediante Sistema Experto*. Proyecto Fin de Carrera. Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla, 1994.
- [Moo81] Moore, B.C. Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability and Model Reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26, 1981.
- [MOO98] MOOG GmbH. *DS1103 PPc Controller User Manual*, 1998.
- [Mor89] Morari, M., Zafiriou, E. *Robust Process Control*. 1989.
- [Mus90] Mustafa, D., Glover, K. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, chapter Minimum Entropy H_∞ Control. Springer-Verlag, 1990.
- [Net84] Nett, C., Jacobson, C., Balas, M. A Connection between State-Space and Doubly Coprime Fractional Representation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(9), 1984.
- [Ort97] Ortega, M.G., Rubio, F.R., Berenguel, M. An H_∞ Controller for a Solar Power Plant. *Proceedings of the IASTED International Conference CONTROL'97*, pages: 122–125, 1997.
- [Ort98] Ortega, M.G., Aracil, J., Gordillo, F., Rubio, F.R. Análisis de Bifurcaciones en un Servomecanismo de Corriente Continua. *XIX Jornadas de Automática, Madrid*, páginas: 81–86, 1998.
- [Ort99] Ortega, M.G., Vargas, M, Rubio, F.R. An H_∞ Controller for a Visual Servoing System. *European Control Conference 99*, 1999.
- [Ort00a] Ortega, M.G., Aracil, J., Gordillo, F., Rubio, F.R. Bifurcation Analysis of a Feedback System with Dead Zone and Saturation. *IEEE Control Systems Magazine*, 20(4):91–101, August 2000.
- [Ort00b] Ortega, M.G., Castaño, F., Vivas, C. Modelado y Simulación de una Planta Piloto. *XXI Jornadas de Automática, Sevilla*, 2000. ISBN: 84-699-3163-6.
- [Ort01] Ortega, M.G., Rubio, F.R. A Multivariable Robust Controller for a Pilot Plant. *Proceedings of the European Control Conference, ECC'01*, September 2001. Aceptado para su publicación.
- [Pac93] Packard, A., Doyle, J.C. The Complex Structured Singular Value. *Automatica*, 29(1):71–109, 1993.
- [Per99] Perez, C. *Simulación y Control de un Robot Manipulador*. Proyecto Fin de Carrera. Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla, 1999.

- [Pon62] Pontryagin, L., Boltyanskii, V., Gamkrelidze, R., Mishchenko, E. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Intersciences Publishers Inc., N.Y., 1962.
- [Pos98] Postlethwaite, I., Bartoszewicz, A. Application of Nonlinear H_∞ Control to the Tetrabot Robot Manipulator. *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, 212(1):459–465, 1998.
- [Qu96] Qu, Z, Darren, M.D. *Robust Tracking Control of Robot Manipulators*. IEEE Press., N.J., 1996.
- [Ram89] Ramírez D.R., Limón-Marruedo D., Gómez-Ortega J., Camacho E.F. Model Based Predictive Control Using Genetic Algorithms. Application to a Pilot Plant. *Proceedings of the European Control Conference. ECC'99*, pages 81–85, 1989.
- [Ref] Reference Manual. *G2 V.4*. Gensym Corpotarian.
- [Rob89] Robel. On Computing the ∞ -norm. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 34(8), 1989.
- [Rot91] Rotstein, H., Sánchez Peña, R., Desages, A., Romagnoli, J. Robust Characteristic Polynomial Assignment. *Automatica*, 27(4), 1991.
- [Rub82] Rubio, F.R., Carmona, R., Camacho, E.F. Adaptive Control of the ACUREX Field. *The IEA/SSPS solar Thermal Power Plants*, 2:5.2.1–5.2.8, 1982.
- [Rub92] Rubio, F.R., Aracil, J. De Vuelta al Diagrama de Bode pasando por el Control Óptimo. 25-2:5–16, 1992.
- [Rub95] Rubio, F.R., Berenguel, M., Camacho, E.F. Fuzzy Logic Control of a Solar Power Plant. 3(4):413–416, 1995.
- [Rub96a] Rubio, F.R., Gordillo, F., Berenguel, M. LQG/LTR Control of the Distributed Collector Field of a Solar Power Plant. O:133–138, 1996. San Francisco, CA, USA.
- [Rub96b] Rubio, F.R., López-Sánchez, M. *Control Adaptativo y Robusto*. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevilla, 1996.
- [Rub98] Rubio-Malpessa, A. *Modelado, Control e Implementación de un Sistema de Seguimiento Visual*. Proyecto Fin de Carrera. Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla, 1998.
- [Saf77] Safonov, M., Athans, M. Gain and Phase Margins for Multiloop LQG Regulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22, 1977.

- [Saf81] Safonov, M., Laub, A., Hartmann, G. Feedback Properties of Multivariable Systems: The Role and Use of the Return Difference Matrix. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26, 1981.
- [Saf82] Safonov, M. Stability Margin of Diagonally Perturbed Multivariable Feedback Systems. *IEE Proceedings, Part D*, 6(126):251–256, 1982.
- [Saf84] Safonov, M., Verma, M. Multivariable L_∞ Sensitivity Optimization and Hankel Approximation. *Proc. American Control Conference*, 1984.
- [Saf89] Safonov, M., Limebeer, D., Chiang, R. Simplifying the H_∞ Theory via Loop-Shifting, Matrix-Pencil and Descriptor Concepts. *Int. Journal of Control*, 50(6):2467–2488, 1989.
- [Sag99] Sage, H.G., De Mathelin, M.F., Ostertag, E. Robust Control of Robot Manipulators: a Survey. *Int. Journal of Control*, 72(16):1498–1522, 1999.
- [Seb99] Sebe, N. A Design of Controllers for Simultaneous ∞ Control Problem. *International Journal of Systems Science*, 30(1):25–31, 1999.
- [Sko96] Skogestad, S., Postlethwaite, I. *Multivariable Feedback Control. Analysis and Design*. John Wiley & Sons, New York, 1996.
- [Slo88] Slotine, J.J.E., Li, E. Adaptive Manipulator Control: A Case Study. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 11(33):995–1003, 1988.
- [Spo87] Spong, M.W., Vidyasagar, M. Robust Linear Compensator Design for Nonlinear Robotic Control. *IEEE J. Robotics Automat.*, RA-3(4):345–351, 1987.
- [Spo89] Spong, M.W., Vidyasagar, M. *Robot Dynamics and Control*. John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [Sys91] System Robot. *RM-10 Manuale d'Uso*. Robótica Industriale, 1991.
- [Tsa87] Tsai, R.Y. A Versatile Camera Calibration Technique for High-Accuracy 3D Machine Vision Metrology Using Off-the-Shelf TV Cameras and Lenses. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, RA-3(4), 1987.
- [Urq00] Urquizar, C. *Modelado, Simulación y Control H_∞ Adaptativo de una Planta Piloto*. Proyecto Fin de Carrera. Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla, 2000.
- [Use] User's Guide. *CUBE V.4*. Orsi Automazione S. p.A.
- [van91] van der Schaft, A. On a State-Space Approach to Nonlinear H_∞ Control. *Systems and Control Letters*, 1991.
- [van92] van der Schaft, A. L_2 -Gain Analysis of Nonlinear Systems and Nonlinear State Feedback Control. *IEEE Trans. Automat. Control*, 37(6):770–784, 1992.

- [van00] van der Schaft, A. *L₂-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [Var98] Vargas, M., Malpesa, A.R., Rubio, F.R. Modelling and Control of a Visual Servoing System. *Proc. Third European Robotics, Intelligent Systems and Control Conference, EURISCON'98*, 98.
- [Vid93] Vidyasagar, M. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice-Hall, second edition, 1993.
- [Whi81] Whittle, P. Risk-sensitive LQG control. *Adv. Appl. Prob.*, 13:764–777, 1981.
- [Whi90] Whittle, P. *Risk-sensitive Optimal Control*. J. Wiley, 1990.
- [Yan96] Yan, J., Salcudean, S.E. Teleoperation Controller Design Using H_∞ -Optimization with Application to Motion-Scaling. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4(3):244–258, 1996.
- [You76a] Youla, D.C., Jabr, H., Bongiorno, J. Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers: The SISO Case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21, 1976.
- [You76b] Youla, D.C., Jabr, H., Bongiorno, J. Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers: The Multivariable Case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21, 1976.
- [Zad63] Zadeh, L., Desoer, C. *Linear System Theory: The State Space Approach*. McGraw Hill, New York, 1963.
- [Zaf99] Zafra, A. *Monitorización, Control y Simulación de Planta Piloto mediante Systema Experto G2. Interface con el SCADA CUBE*. Proyecto Fin de Carrera. Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla, 1999.
- [Zam66] Zames, G. On the Input-Output Stability of Time-Varying Nonlinear Feedback Systems, Part 1. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11, 1966.
- [Zam81] Zames, G. Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms and Approximate Inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26:301–320, 1981.
- [Zho96] Zhou, K., Doyle, J.C., Glover, K. *Robust and Optimal Control*. Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- [Zho98] Zhou, K., Doyle, J.C. *Essentials of Robust Control*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1998.