



GRADO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

Escuela Politécnica Superior

Curso académico 2022-2023

Trabajo fin de grado

CIRCUITO DE CHUA LINEAL A TROZOS: ÓRBITAS HOMOCLINAS Y COMPORTAMIENTO CAÓTICO

Autor: Alexandro Moya Montes

Tutor: Victoriano Carmona Centeno

Departamento: Matemática Aplicada II

A lo largo de mi vida, has sido mi mayor apoyo. Tus palabras de aliento y tu amor incondicional han sido fundamentales en mi camino académico. Gracias por creer en mí, por sacrificarte, por enseñarme el valor del esfuerzo y la perseverancia y por enseñarme a quedarme siempre con el lado bueno de las cosas. Este logro no hubiera sido posible sin ti. Te dedico este trabajo como muestra de mi profundo agradecimiento y amor.

Te quiero Mamá.

Agradecimientos

A mi tutor, Victoriano, por su orientación experta y su invaluable conocimiento.

A mi padre, Salvador, por brindarme la oportunidad de cumplir mis metas.

A mi hermano, Adrián, por iluminarme siempre que se me oscurecía el porvenir.

A mi apoyo incondicional, Cristina, por creer en mi cuando yo mismo no lo hacía.

A mi compañero de batallas, Camacho, por acabar juntos lo que empezamos juntos.

Y a mi.

Sevilla, 21 de Julio de 2023

Alexandro Moya Montes

Resumen

Este trabajo se centra en el estudio de un sistema dinámico específico, el circuito de Chua lineal a trozos. En los diferentes capítulos, se aborda la descripción detallada del circuito, incluyendo su historia y las ecuaciones diferenciales que lo rigen. Se presentan las ecuaciones adimensionalizadas que simplifican el análisis y se exploran los sistemas dinámicos lineales a trozos en general, destacando sus propiedades y elementos básicos. Se introduce el principio de Shilnikov y se profundiza en la existencia de órbitas homoclínicas y su relación con el caos. Finalmente se prueba mediante métodos numéricos la existencia de una homoclina.

Además, se incluye un capítulo dedicado a la implementación práctica de Matlab, donde se proporcionan los códigos utilizados para el estudio.

El objetivo principal de este trabajo es profundizar en el análisis de los sistemas dinámicos lineales a trozos, buscando obtener resultados significativos y contribuir al conocimiento en este campo de estudio.

Índice general

1. Introducción	1
2. Circuito de Chua lineal a trozos	3
2.1. Sistemas caóticos y sus características	3
2.1.1. Características del caos	3
2.1.2. Sistemas caóticos	4
2.2. Breve revisión histórica	5
2.3. Génesis del circuito	6
2.4. Ecuaciones diferenciales dimensionadas	7
2.4.1. Leyes de Ohm y Kirchoff	7
2.4.2. Elementos almacenadores de energía	8
2.4.3. Diodo de Chua	8
2.4.4. Ecuaciones del circuito	10
2.5. Ecuaciones diferenciales adimensionadas	11
3. Sistemas dinámicos lineales a trozos	16
3.1. Definición del sistema	16
3.2. Propiedades del sistema	18
3.2.1. Existencia y unicidad	18
3.3. Puntos de equilibrio	20
3.4. Elementos dinámicos básicos y estabilidad de los puntos de equilibrio .	20
3.5. Semiaplicaciones de Poincaré	21
4. Resolución de los sistemas lineales asociados	23
4.1. Puntos de equilibrio	23
4.2. Variedades invariantes	26
4.3. Solución del sistema diferencial (lineal a trozos)	28
5. Órbitas homoclinas: Comportamiento caótico y Teorema de Shilnikov	31
5.1. Puntos de tangencia	32

6. Existencia de orbitas homoclinas	34
6.1. Contexto y Objetivos	34
6.2. Resultados y Metodología	34
6.3. Limitaciones	36
6.3.1. Limitaciones de la función ODE45	36
6.3.2. Necesidad de utilizar el método ode78	37
6.3.3. Consideraciones sobre la fiabilidad de los resultados	37
6.4. Discusión y Conclusiones	39
7. Códigos en Matlab	41
7.1. Coeficientes zona derecha	41
7.2. Matriz A zona derecha	41
7.3. Coeficientes zona central	42
7.4. Matriz A zona central	42
7.5. Calculo de punto de interseccion	43
7.6. Representacion gráfica zona central	43
7.7. Representacion gráfica zona derecha	43
7.8. Representacion orbita homoclina	44
7.9. Solucion del sistema zona derecha	45
7.10. Solucion del sistema zona izquierda	45
7.11. Sistema para ODE derecho	46
7.12. Sistema para ODE central	46
7.13. Sistema para ODE	46
7.14. ODE45	46
7.15. ODE45 con baja tolerancia	47
7.16. ODE78	48
7.17. Cálculo de tiempo. Zona central 1	48
7.18. Cálculo de tiempo. Zona central 2	49
7.19. Cálculo de tiempo. Zona derecha	49
7.20. Comprobaciones	49
7.21. Puntos de tangencia	50
7.21.1. Punto de tangencia T	50
7.21.2. Punto de tangencia S	50
Bibliografía	52

Índice de figuras

2.1. Comportamiento caótico del sistema de Lorenz. Mariposa de Lorenz.	4
2.2. Diciembre de 1993. Leon Ong Chua sosteniendo el primer modelo de su circuito.	6
2.3. Esquema del circuito de Chua.	7
2.4. Curva característica del diodo de Chua: intensidad I_D frente a tensión V_1	10
2.5. Nudo 1.	10
2.6. Nudo 2.	11
3.1. Representación gráfica de los 3 semiespacios $\mathcal{R}_R, \mathcal{R}_C, \mathcal{R}_L$ y los planos de separación Σ_R y Σ_C	18
3.2. Ejemplo gráfico de la primera semiaplicación de Poincaré definida para nuestro sistema 3.6.	22
3.3. Ejemplo gráfico de la segunda semiaplicación de Poincaré definida para nuestro sistema 3.6. Nótese el cambio en los semiespacios \mathcal{R}_C y \mathcal{R}_R respecto a la primera figura.	22
5.1. Ejemplo gráfico de una órbita homoclina.	31
6.1. $\alpha = 14,43746643008159, \beta = 19$. Dos órbitas homoclinas (simétricas) tipo Shilnikov. Cada color representa un cambio de semiespacio. Prestar especial atención al origen de coordenadas donde vemos que ambas trayectorias se "enrollan" lo que quieren a decir que tienden al infinito en dicho punto. Ver Figura 6.2 para apreciar una vista detallada	35
6.2. Imagen detallada del origen de coordenadas de la Figura 6.1 donde se aprecia claramente la tendencia de ambas órbitas (celeste y amarilla) a "enrollarse" en el origen de coordenadas.	35
6.3. Resultado de utilizar la función ode45 con tolerancia por defecto. Es evidente que el resultado no es el esperado, pues se espera una órbita que retorne a su punto de origen.	36

6.4. Resultado mejorado usando tolerancia de 1^{-15} . Se puede apreciar claramente como la órbita no tiende al punto de equilibrio. 37

6.5. Solución obtenida usando ode78. A simple vista parece satisfactorio, sin embargo, en la Figura 6.5. podemos apreciar como las trayectorias no tienden a infinito en el punto de origen. 38

6.6. Detalle de la solución obtenido usando ode78. Se puede observar claramente como no se tiende al punto de equilibrio, pues ambas orbitas (amarilla y morada) debería "enrollarse" al origen de coordenadas. . . 38

Capítulo 1

Introducción

El mundo actual está en constantes cambios, ya sean naturales o artificiales. Todo fenómeno natural sufre cambios constantes. Algunos de estos cambios son de fácil percepción, como por ejemplo, la migración de las aves o el cambio en la duración de los días. Sin embargo, otros son infinitamente más complicados, como el transporte de energía o la propagación de una enfermedad, fenómenos a la orden del día, que se sitúan a la cabeza de la problemática mundial.

Para ordenar y sistematizar todas estas formas de cambio con el fin de estudiar y predecir su comportamiento, sería ideal poder representarlos de una manera comprensible. Fue en este punto donde nació una rama de la matemática conocida como los sistemas dinámicos. Todo proceso en el que hay movimiento, entendido como variación a lo largo del tiempo, puede ser considerado como un sistema dinámico. Esto deja en evidencia que el cambio y el movimiento son sinónimos y no pueden existir el uno sin el otro.

Para construir un sistema dinámico a partir de un fenómeno en evolución a lo largo del tiempo es necesario seguir un proceso científico que consiste, principalmente en:

- Detectar las variables que influyen en el fenómeno de interés
- Analizar su comportamiento relativo, es decir, determinar cómo influyen unas sobre otras y cómo se comportan a lo largo del tiempo.

Como resultado de este proceso se obtendrá una ecuación diferencial (o un sistema de ellas).

En este trabajo, se abordará el estudio de un sistema dinámico particular: el circuito de Chua lineal a trozos. En el Capítulo 2, se describirá en detalle este circuito, incluyendo su historia y las ecuaciones diferenciales que lo gobiernan. Además, se presentarán las ecuaciones adimensionalizadas que permiten un análisis simplificado,

dando lugar al Capítulo 3, donde se explorarán los sistemas dinámicos lineales a trozos en general, describiendo las propiedades más relevantes para este caso de estudio, como sus elementos dinámicos básicos o las semiaplicaciones de Poincaré, que serán fundamentales en el estudio del comportamiento del sistema.

El Capítulo 4 se dedicará a la resolución de los sistemas lineales asociados a las zonas externas del circuito de Chua, en concreto la derecha o superior. En el Capítulo 5 se introducirá el principio de Shilnikov y seguidamente en el Capítulo 6, se centrará en la existencia de órbitas homoclínicas, presentando las ecuaciones necesarias que permiten determinar su existencia. Se realizará la solución numérica de existencia utilizando Matlab.

Por último, en el Capítulo 7 se proporcionarán los códigos utilizados en para el estudio y análisis de los sistemas dinámicos lineales a trozos.

Capítulo 2

Circuito de Chua lineal a trozos

En este capítulo se dan las definiciones y principales características de los sistemas caóticos. A continuación se describe el circuito clásico de Chua y su modelo normalizado, entrando en detalle de la obtención del sistema de ecuaciones diferenciales que lo gobierna desde el mundo físico-eléctrico a su adimensionamiento.

2.1. Sistemas caóticos y sus características

Como mencionamos en el Capítulo 1, un sistema dinámico es aquel que sufre variaciones a lo largo del tiempo, si sumamos esto a la definición de caos (ver Capítulo 5), obtenemos un sistema caótico.

2.1.1. Características del caos

El comportamiento de muchos sistemas dinámicos no siempre sigue trayectorias simples, en algunas ocasiones describen trayectorias casi aleatorias e irregulares, similares al ruido. Este comportamiento se entiende y se reconoce como caótico. El caos, aunque sea muy difícil de definir, abarca un grupo de conceptos y de características comúnmente aceptadas pues el comportamiento irregular y aperiódico, de los estados de un sistema caótico pareciera reflejar que éstos, se generan mediante un proceso estocástico. Sin embargo, este comportamiento aparentemente aleatorio del sistema dinámico es de naturaleza íntegramente determinista, pues se puede llegar a conocer con precisión la secuencia que les da origen, debido a que existe una ecuación o sistema de ecuaciones que gobierna su conducta, como ya hemos comentado anteriormente. Sin embargo, en este aspecto, el conocimiento de las condiciones iniciales juega un papel fundamental.

2.1.2. Sistemas caóticos

Los ya mencionados sistemas caóticos, son aquellos sistemas cuyas variables de estado se mueven de manera acotada, no periódica y aparentemente aleatoria. Además, son caracterizados por una propiedad especial, que afecta a las condiciones iniciales, conocida como *sensibilidad*. Esta propiedad se refiere a como a partir de dos condiciones iniciales extremadamente cercanas se producen trayectorias que divergen de manera exponencial al evolucionar el sistema en el tiempo.

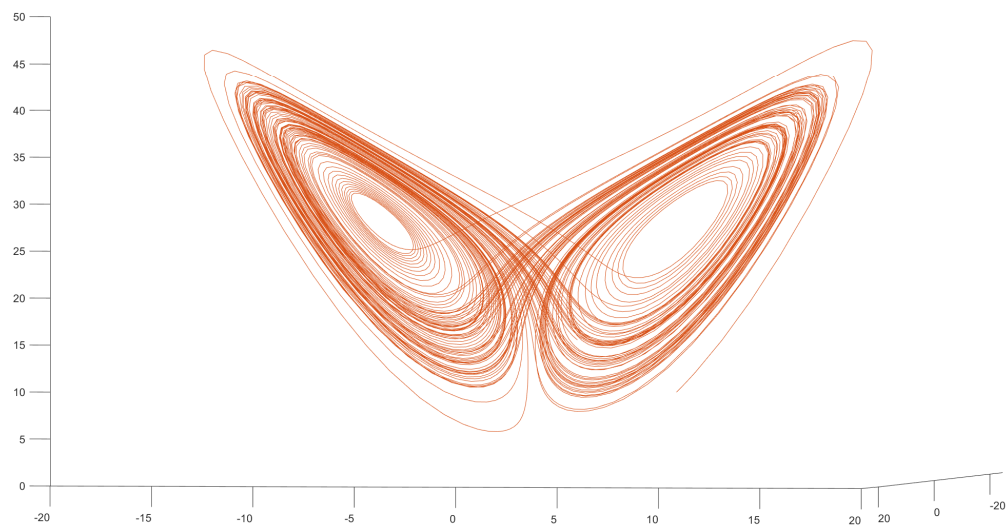


Figura 2.1: Comportamiento caótico del sistema de Lorenz. Mariposa de Lorenz.

Un ejemplo destacado de sistema caótico es el sistema de Lorenz, propuesto por Edward Lorenz en 1963 [6]. Lorenz desarrolló un modelo matemático simplificado para la convección atmosférica. Las ecuaciones relacionan las propiedades de una capa de fluido bidimensional (aire) calentada uniformemente desde abajo y enfriada desde arriba. En concreto, las ecuaciones describen la tasa de cambio en función del tiempo de 3 variables. Este sistema de ecuaciones es ampliamente reconocido por su comportamiento caótico, en el cual pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden dar lugar a trayectorias divergentes y aparentemente aleatorias a lo largo del tiempo. Este fenómeno, popularmente conocido como el efecto mariposa, ilustrado en la Figura 2.1, ejemplifica cómo un sistema aparentemente simple puede generar una complejidad impredecible.

2.2. Breve revisión histórica

Leon Ong Chua (ver Figura 2.2) es un ingeniero eléctrico filipino de ascendencia china, nacionalizado estadounidense, que en 1971 se especializó en investigación científica comenzando en la Universidad de Purdue gracias a una beca del Instituto Tecnológico de Massachusetts, para luego continuar su carrera en la Universidad de California, Berkeley. En octubre de 1983, doce años después de comenzar su carrera docente y tras asistir a la Universidad de Waseda en Japón a un intento fallido de implementar electrónicamente el sistema de Lorenz, Leon se propuso diseñar un circuito electrónico capaz de oscilar de forma caótica; naciendo así el circuito de Chua.

A principios de los años ochenta, aún había quien argumentaba que los fenómenos caóticos eran puramente abstractos, extraños comportamientos propios del mundo matemático, que carecían de existencia en el mundo físico. En ese contexto, muchos investigadores de la física no-lineal se propusieron implementar de forma electrónica algún sistema caótico que demostrara lo erróneo de tal afirmación. Tras asistir al fracaso del intento de la Universidad de Waseda, Chua llegó a la conclusión de que la no-linealidad tipo multiplicación de variables era demasiado compleja para el nivel de desarrollo de la electrónica analógica del momento, por lo que era necesario diseñar otro tipo de sistema dinámico.

El enfoque de diseño debía ser totalmente diferente: se trataba de encontrar un circuito simple y consistente, con las mismas características de los sistemas de Lorenz, es decir, que tuviera dos o más puntos de equilibrio inestables. Siguiendo los principios que el mismo Chua había escrito años antes, el investigador de Berkeley fue capaz de enunciar ocho alternativas que cumplían esos principios, y descartar las que no podían exhibir caos. Al final del proceso, todo había quedado reducido a evaluar dos topologías de circuito. Discriminar entre ambas opciones se basó, en un principio, más en la intuición que en argumentos razonados, pues la elegida era la más simple. Años después, en 1992, Chua finalmente publicó un artículo [7] donde demostraba matemáticamente que la topología escogida, en efecto, exhibía caos. Siendo a día de hoy la forma más simple de montar un circuito electrónico que tenga dicho comportamiento.

Finalmente, en 1993, se optó por simular el circuito finalmente escogido y analizar los resultados en busca de caos. Como resultado evidente, el experimento fue todo un éxito, [16].



Figura 2.2: Diciembre de 1993. Leon Ong Chua sosteniendo el primer modelo de su circuito.

2.3. Génesis del circuito

A partir de esta sección y hasta el final del capítulo nos centraremos en la obtención de las ecuaciones que tomaremos de base para desarrollar esta memoria, desde el mundo real (eléctrico) al mundo abstracto (matemático).

Tal y como menciona M.P. Kennedy en su artículo [5], para que pueda existir caos en un circuito eléctrico éste debe contener como mínimo:

- Un elemento eléctrico no lineal.
- Uno o más resistores localmente activos.
- Al menos tres elementos eléctricos almacenadores de energía.

Como hemos mencionado en la sección anterior 2.2, el circuito más simple que satisface este criterio es el circuito de Chua. Está formado por dos bloques, constando la primera parte de los cuatro elementos lineales que indicamos a continuación:

- Una resistencia: R_1 .
- Una bobina: L_1 .
- Dos condensadores: C_1 y C_2 .

La otra parte del circuito es no lineal y es conocida como diodo de Chua, al que denotaremos M ; este tiene una curva tensión-intensidad lineal a trozos que estudiaremos mas adelante. Distribuiremos los elementos tal y como se muestra en la Figura 2.3.

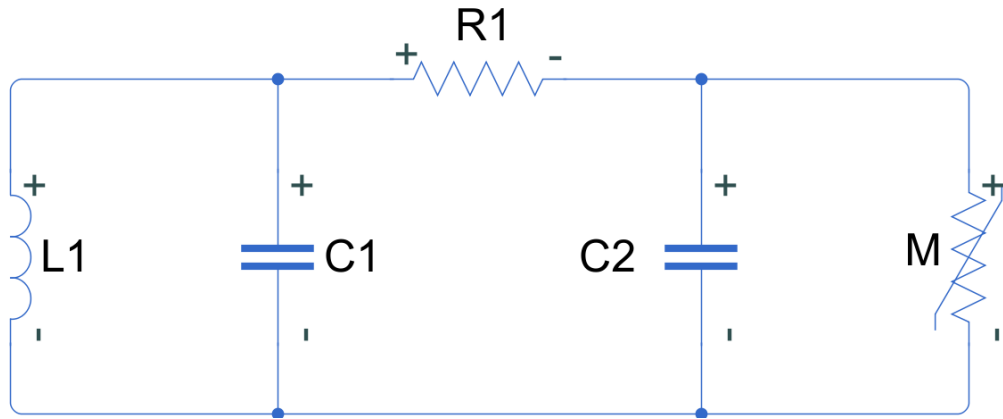


Figura 2.3: Esquema del circuito de Chua.

2.4. Ecuaciones diferenciales dimensionadas

2.4.1. Leyes de Ohm y Kirchoff

La ley de Ohm es fundamental para entender cómo funcionan los circuitos eléctricos. Esta establece que la corriente que fluye a través de un conductor es proporcional a la diferencia de potencial aplicada a través de él. Esto significa que si la resistencia de un conductor aumenta, la corriente disminuye y viceversa. Esta relación se puede expresar matemáticamente como

$$V = IR, \quad (2.1)$$

donde V es la diferencia de potencial, I es la corriente y R es la resistencia del conductor.

Las leyes de Kirchoff son herramientas esenciales para analizar circuitos eléctricos complejos. Tanto la ley de tensiones como la de intensidades, se basan en el principio de conservación de la carga y energía, que establecen que la energía eléctrica no se crea ni se destruye, se transfiere.

- La ley de Kirchoff de nudos establece que la suma de las corrientes que entran en un nodo debe ser igual a la suma de las corrientes que salen del mismo nudo:

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0, \quad (2.2)$$

donde n es el número total de corrientes que entran o salen de un nodo e I_i representa la corriente i -ésima que entra o sale del nodo:

- La ley de Kirchhoff de mallas establece que la suma algebraica de las caídas de tensión en un lazo cerrado de un circuito debe ser igual a cero:

$$\sum_{i=1}^m V_i = 0, \quad (2.3)$$

donde m es el número total de caídas de tensión en una malla cerrada y V_i representa el voltaje i -ésimo en la malla.

A pesar de ser menos popular en aplicaciones en el mundo real, es especialmente útil para analizar circuitos con varias fuentes de alimentación y bucles de diferentes tamaños.

2.4.2. Elementos almacenadores de energía

Será necesario definir las ecuaciones que rigen el comportamiento de los elementos que conforman nuestro circuito. Para ello, también nos basaremos en los principios de conservación de la carga (condensador) y energía (bobina).

La ecuación del condensador, muestra que este se opone al cambio en la tensión a través de él y almacena energía en forma de campo eléctrico:

$$I_C = C \frac{dV_C}{dt}, \quad (2.4)$$

donde I_C es la corriente que fluye a través del condensador, C es la capacidad del condensador y $\frac{dV_C}{dt}$ es la tasa de cambio de la tensión a través del condensador en el tiempo.

La ecuación de la Bobina, muestra que una bobina se opone al cambio en la corriente que fluye a través de ella y almacena energía en forma de campo magnético:

$$V_L = L \frac{dI}{dt}, \quad (2.5)$$

donde V_L es la caída de voltaje a través de la bobina, L es la inductancia de la bobina y $\frac{dI}{dt}$ es la tasa de cambio de la corriente a través de la bobina en el tiempo.

2.4.3. Diodo de Chua

El diodo de Chua, es en realidad un conjunto de diodos y amplificadores operacionales que se comporta como un sistema lineal a trozos. Su función es

retroalimentar el circuito y mantenerlo oscilando actuando como una resistencia negativa. La curva de tensión-intensidad puede tener diversas formas, pero el circuito de Chua original especifica una función continua definida a trozos, donde en cada uno de los tramos la función es lineal.

La expresión de la función tensión-intensidad depende del valor de la variable tensión V_1 , y se determina teniendo en cuenta que $-V_0$ y V_0 son los puntos de quiebre de la función lineal a trozos del diodo de Chua.

En la Figura 2.4 podemos observar como en el tramo central, cuando $-V_0 \leq V_1 \leq V_0$, la función es una recta de pendiente $m_0 < 0$ que pasa por el origen de coordenadas. Por tanto, la función en este tramo es un segmento de la recta, $I_D = m_0 V_1$, cuyos puntos terminales son $(-V_0, -m_0 V_0)$ y $(V_0, m_0 V_0)$.

Para los otros dos tramos restantes, la función lineal es continua y las pendientes de las rectas coinciden, siendo su valor $m_1 < 0$. Cuando el valor de la tensión es menor que $-V_0$, la recta de pendiente m_1 debe pasar por el punto $(-V_0, -m_0 V_0)$. Sustituyendo dicho punto en la expresión $I_D = m_1 V_1 + n$ se obtiene el término $n = m_1 - m_0$. Por lo que, cuando $V_1 \leq -V_0$, la expresión de la recta es $I_D = m_1 V_1 - (m_0 - m_1) V_0$.

Por otro lado, cuando el valor de la tensión es mayor o igual que V_0 , la recta de pendiente m_1 debe pasar por el punto $(V_0, m_0 V_0)$. Por lo que, en este tramo, la función tensión-intensidad viene dada por la expresión $I_D = m_1 V_1 + (m_0 - m_1) V_0$, para todo $V_1 \geq V_0$.

Teniendo en cuenta la definición de la función tensión-intensidad en cada uno de los tramos, la función no lineal I_D está definida como:

$$I_D(V_1) = \begin{cases} m_1 V_1 - (m_0 - m_1) V_0 & \text{si } V_1 \leq -V_0, \\ m_0 V_1 & \text{si } |V_1| \leq V_0, \\ m_1 V_1 + (m_0 - m_1) V_0 & \text{si } V_1 \geq V_0. \end{cases} \quad (2.6)$$

donde m_0 y m_1 son las pendientes de las rectas en los diferentes tramos de linealidad, y $-V_0$ y V_0 son los puntos de quiebre de la función lineal a trozos del diodo de Chua.

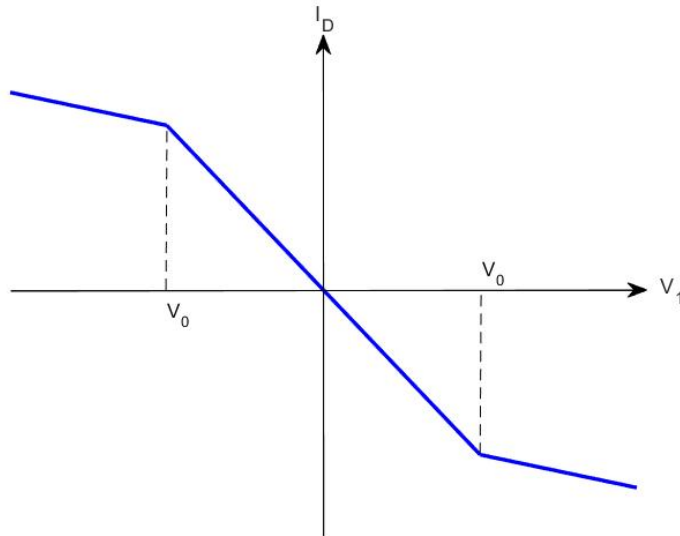


Figura 2.4: Curva característica del diodo de Chua: intensidad I_D frente a tensión V_1 .

2.4.4. Ecuaciones del circuito

Una vez que conocemos el valor que toma la función intensidad frente a tensión (2.6) en el diodo de Chua, el siguiente paso es obtener el sistema de ecuaciones dinámicas que describe al circuito. Para ello, vamos a aplicar todas las ecuaciones que hemos estado estudiando en apartados anteriores. Se ha denotado por I_1 e I_2 a las intensidades que pasan por los condensadores C_1 y C_2 , respectivamente. Por I_R se denota a la intensidad que pasa por la resistencia, por I_L a la intensidad que pasa por la bobina y por I_D a la intensidad que hay en el diodo de Chua.

En primer lugar, vamos a analizar el nudo 1. Aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff (2.2), se deduce que la suma de las corrientes que pasan por el nudo 1 (ver Figura 2.5) es igual a cero

$$I_2 - I_R + I_D = 0, \quad (2.7)$$

donde I_R , I_2 e I_D vienen dadas por las expresiones (2.1), (2.6) y (2.4), respectivamente. Las expresiones de las intensidades I_R e I_2 en (2.7) obtenemos la siguiente ecuación

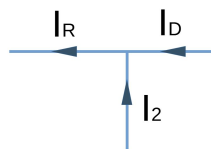


Figura 2.5: Nudo 1.

diferencial:

$$C_2 \frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{R}(V_1 - V_2) - I_D. \quad (2.8)$$

Aplicando de nuevo la ley de corrientes de Kirchoff en el nudo 2 (ver Figura 2.6):

$$I_L - I_1 - I_R = 0, \quad (2.9)$$

donde las expresiones de las intensidades I_R e I_1 (2.1) y (2.4), y la intensidad que pasa por la bobina, I_L , satisface la relación (2.5). Reemplazando en la ecuación (2.9),

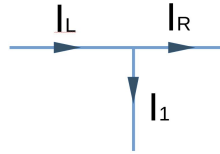


Figura 2.6: Nudo 2.

obtenemos:

$$C_1 \frac{dV_1}{dt} = \frac{1}{R}(V_2 - V_1) + I_L. \quad (2.10)$$

Por ultimo, aplicando la ley de tensiones de Kirchhoff (2.3) en el bucle que contiene al condensador C_1 y la bobina, podemos determinar que la tensión total. Esto es:

$$\frac{dI_L}{dt} L = -V_1. \quad (2.11)$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones diferenciales que describe el circuito de Chua está compuesto por las ecuaciones (2.8), (2.10) y (2.11)

$$\begin{cases} C_2 \frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{R}(V_1 - V_2) - I_D, \\ C_1 \frac{dV_1}{dt} = \frac{1}{R}(V_2 - V_1) + I_L, \\ \frac{dI_L}{dt} L = -V_1. \end{cases} \quad (2.12)$$

2.5. Ecuaciones diferenciales adimensionadas

Es evidente que dada la complejidad del sistema (2.12), hay que tomar acción. Para ello procedemos a simplificarlo, de esta manera nos ahorraremos tiempo en cálculos posteriores y el manejo de unidades.

Denotaremos a los potenciales de los condensadores C_1 y C_2 como $V_1 = x$ e $V_2 = y$, respectivamente, y se considerará una tensión ficticia que va a ser $V_3 = I_L R = z$. Una vez definido las tensiones, se procede a adimensionalizar las nuevas variables introducidas dividiendo por V_0 , valor del punto de quiebre de la función no lineal del diodo de Chua. De este modo, se obtienen las siguientes expresiones:

$$x = \frac{V_1}{V_0}, \quad (2.13)$$

$$y = \frac{V_2}{V_0}, \quad (2.14)$$

$$z = \frac{V_3}{V_0} = \frac{I_L R}{V_0}. \quad (2.15)$$

El sistema evoluciona a lo largo del tiempo, por lo que deberemos tenerlo en cuenta a la hora de adimensionalizar. Para ello, realizamos la siguiente transformación

$$\tau = \frac{t}{RC_2}, \quad (2.16)$$

donde τ es el tiempo característico del circuito y t en tiempo en segundos. Nótese que la unidad de medida de la resistencia es el ohmio y la del condensador es el faradio, midiéndose el producto de ambas en segundos. Una vez obtenido el tiempo característico del sistema, vamos a obtener las ecuaciones que rigen el sistema en función de la variable temporal τ . Para ello, derivaremos las expresiones dadas respecto a τ .

Por un lado, se calcula la derivada de la variable z respecto a τ utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{dz}{dI_L} \frac{dI_L}{dt} \frac{dt}{d\tau}. \quad (2.17)$$

La expresión de la derivada de z respecto a la intensidad de la bobina es inmediata y viene dada por

$$\frac{dz}{dI_L} = \frac{R}{V_0}. \quad (2.18)$$

A partir de la expresión (2.11), se obtiene el valor de la derivada de la intensidad I_L respecto a la variable temporal t

$$\frac{dI_L}{dt} = -\frac{V_2}{L}.$$

Por otro lado, a partir de la expresión (2.16) podemos obtener la relación $t = RC_2\tau$, cuya derivada respecto a la variable τ es inmediata y viene dada por la expresión

$$\frac{dt}{d\tau} = RC_2.$$

Sustituyendo las ambas expresiones en (2.17), obtenemos

$$\frac{dz}{d\tau} = -\frac{V_2}{V_0} \cdot \frac{R_2 C_2}{L}.$$

Teniendo en cuenta la definición dada en (2.14), denotando por $\beta = \frac{R_2 C_2}{L}$, se transforma en la siguiente

$$\frac{dz}{d\tau} = -\beta \cdot y. \quad (2.19)$$

Calculando la derivada de la variable y respecto a τ , utilizando la regla de la cadena

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{dy}{dV_2} \frac{dV_2}{dt} \frac{dt}{d\tau},$$

donde la derivada de la variable temporal t respecto de τ viene dada por la expresión (2.16). Es inmediato comprobar que las expresiones de las otras dos derivadas vienen dadas por:

$$\frac{dy}{dV_2} = \frac{1}{V_0},$$

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{RC_2}(V_1 - V_2) + \frac{I_L}{C_2},$$

Sustituyendo las expresiones de las derivadas dadas, se tiene, realizando algunas manipulaciones, la siguiente expresión

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{V_1}{V_0} - \frac{V_2}{V_0} + \frac{I_L R}{V_0}.$$

Ahora, teniendo en cuenta la notación introducida, se obtiene que la expresión se transforma en la siguiente

$$\frac{dy}{d\tau} = x - y + z. \quad (2.20)$$

Por último, vamos a calcular la derivada de la variable x respecto a τ . Para ello, usando la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dV_1} \frac{dV_1}{dt} \frac{dt}{d\tau}. \quad (2.21)$$

donde la derivada de la variable temporal t respecto de τ viene dada por la expresión (2.16), la derivada de x respecto de la variable V_1 se obtiene directamente a través de la definición de la función

$$\frac{dx}{dV_1} = \frac{1}{V_0}.$$

Y la derivada del voltaje V_1 respecto de t se calcula directamente, siendo su valor

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{1}{RC_1} \cdot (V_2 - V_1) + \frac{I_D}{C_1}.$$

Sustituyendo cada una de estas derivadas en la expresión (2.21), se deduce tras realizar algunas simplificaciones la siguiente relación:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{C_2}{C_1} \cdot \left(\frac{V_2}{V_0} - \frac{V_1}{V_0} + \frac{R}{V_0} I_D \right).$$

Denotando por $\alpha = \frac{C_2}{C_1}$ y teniendo en cuenta la definición de las variables dadas, la expresión se transforma en la siguiente:

$$\frac{dx}{d\tau} = \alpha \cdot \left(y - x + \frac{RI_D}{V_0} \right), \quad (2.22)$$

donde la función no lineal del diodo de Chua, I_D , está dada por la expresión (2.6). Para obtener la expresión de la derivada de x respecto a la variable temporal en cada una de las zonas de linealidad, introduciremos la siguiente función:

$$k(x) = x - \frac{RI_D}{V_0}. \quad (2.23)$$

En la zona central comprendida entre los dos puntos de quiebre de la función tensión-intensidad, la función no lineal está definida por $I_D = m_0V_1$. Por lo que, la expresión de la función $k(x)$ en esta zona será:

$$k(x) = x - \frac{R(m_0V_1)}{V_0}.$$

Teniendo en cuenta la expresión de la variable x dada, se tiene que:

$$k(x) = x - \frac{R(m_0V_1)}{V_0} = (1 - m_0R)x = ax,$$

donde hemos llamado $a = 1 - m_0R$.

En la zona derecha, cuando la tensión $V_1 \geq V_0$, la función no lineal tensión-intensidad está definida mediante $I_D = m_1V_1 + (m_0 - m_1)V_0$. Siguiendo el mismo procedimiento, a partir de (2.24) se obtiene la expresión

$$k(x) = x - \frac{R[m_1V_1 + (m_0 - m_1)V_0]}{V_0} = (1 - m_1R)x - R(m_0 - m_1) = bx + a - b,$$

siendo $b = 1 - m_1R$.

En el tramo izquierdo, cuando $V_1 \leq -V_0$, la función no lineal está definida mediante $I_D = m_1V_1 - (m_0 - m_1)V_0$. Sustituyendo dicha expresión en (2.24) se obtiene que

$$k(x) = x - \frac{R[m_1V_1 - (m_0 - m_1)V_0]}{V_0} = (1 - m_1R)x + (m_0 - m_1)R = bx - a + b.$$

Teniendo en cuenta la definición de la función $k(x)$ en las tres zonas de linealidad

$$k(x) = \begin{cases} bx - a + b & \text{si } x \leq -1, \\ ax & \text{si } |x| \geq 1, \\ bx + a - b & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \quad (2.24)$$

podemos reescribir la expresión de la derivada de x respecto a la variable temporal en función de dichas zonas como

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(y - k(x)).$$

Finalmente, utilizando las ecuaciones (2.19), (2.20) y (2.5) y las variables adimensionadas, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal de primer orden

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - k(x)), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -\beta y, \end{cases} \quad (2.25)$$

donde los parámetros $\alpha = \frac{C_2}{C_1}$ y $\beta = \frac{R_2 C_2}{L}$ son estrictamente positivos.

Capítulo 3

Sistemas dinámicos lineales a trozos

3.1. Definición del sistema

Para definir el tipo de sistema dinámico que consideramos en la memoria, en primer lugar debemos introducir una notación general. En todo lo que sigue, $\dot{\mathbf{x}}$ denota la derivada de \mathbf{x} respecto de la variable temporal t , \mathbf{e}_i el i -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^n , y $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices cuadradas de orden n con elementos en \mathbb{R} . Mediante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotamos al producto escalar usual de \mathbb{R}^n y por $\| \cdot \|$ a la norma euclídea, asociada a dicho producto escalar.

En general, un sistema dinámico n -dimensional se puede representar por la ecuación

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}),$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ y $F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Conocido esto, un sistema lineal puede formularse mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + b = F(\mathbf{x}).$$

donde $A \in \mathcal{M}_n$ y $b \in \mathcal{R}^n$.

En el caso de que un sistema dinámico esté representado por una o varias ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas o no forzadas, es decir que no depende de la variable temporal, de la forma $\dot{x} = F(\mathbf{x})$, el sistema dinámico se dice que es autónomo. Por el contrario, si la ecuación que modela al sistema es no autónoma o forzada $\dot{x} = F(\mathbf{x}, t)$, es decir depende de su variable temporal, el sistema dinámico es no autónomo. Teniendo en cuenta lo anterior mencionado, podemos definir el sistema que será objeto de estudio en este trabajo.

Definición 3.1 *Decimos que la ecuación diferencial autónoma $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ define un sistema dinámico continuo lineal a trozos tri-zonal en \mathbb{R}^3 si existen cuatro vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, tres matrices $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ y dos*

escalares $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$, con $\delta_1 < \delta_2$, tales que

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} A_0\mathbf{x} + \mathbf{b}_0 & \text{si } \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle + \delta_1 < 0, \\ A_1\mathbf{x} + \mathbf{b}_1 & \text{si } -\delta_1 \leq \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle \leq \delta_2, \\ A_2\mathbf{x} + \mathbf{b}_2 & \text{si } \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle + \delta_2 > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Los planos de ecuación $\{\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle + \delta_i = 0\}$ ($i = 1, 2$) se denominan planos de separación.

Los planos de separación dividen el espacio en tres regiones, en cada uno de las cuales el sistema (3.1) es lineal. Además, por ser el campo vectorial del sistema una función continua se verifica

$$\begin{aligned} A_0\mathbf{x} + \mathbf{b}_0 &= A_1\mathbf{x} + \mathbf{b}_1, \quad \forall \mathbf{x} \in \{\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle - \delta_1\}, \\ A_1\mathbf{x} + \mathbf{b}_1 &= A_2\mathbf{x} + \mathbf{b}_2, \quad \forall \mathbf{x} \in \{\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle - \delta_2\}. \end{aligned}$$

Realizando un adecuado cambio de variable podemos transformar los planos de separación en los planos de ecuación $\{x = 1\}$ y $\{x = -1\}$ y, por tanto, el sistema (3.1) puede escribirse de la siguiente forma

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) = \begin{cases} A_L\mathbf{x} + \mathbf{b}_L & \text{si } x < -1, \\ A_C\mathbf{x} + \mathbf{b}_C & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ A_R\mathbf{x} + \mathbf{b}_R & \text{si } x > 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

donde $A_L, A_C, A_R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ y $\mathbf{b}_L, \mathbf{b}_C, \mathbf{b}_R$ son vectores de \mathbb{R}^3 .

Los planos $x = -1$ y $x = 1$, dividen al espacio en tres semiespacios, que denotamos por $\mathcal{R}_L, \mathcal{R}_C$ y \mathcal{R}_R , denominamos semiespacio izquierdo, central y derecho respectivamente.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_L &= \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x < -1\} \\ \mathcal{R}_C &= \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1\} \\ \mathcal{R}_R &= \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x > 1\} \end{aligned}$$

Los planos de separación se denotarán por $\Sigma_L = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x = -1\}$ y $\Sigma_R = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x = 1\}$ (ver Figura 3.1).

Definición 3.2 *Un sistema $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$, es simétrico respecto al origen si $F(x) = -F(-x)$ para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.*

Obviamente, el sistema será simétrico respecto al origen si y solo si $A_R = A_L, \mathbf{b}_R = -\mathbf{b}_L$ y $\mathbf{b}_C = 0$.

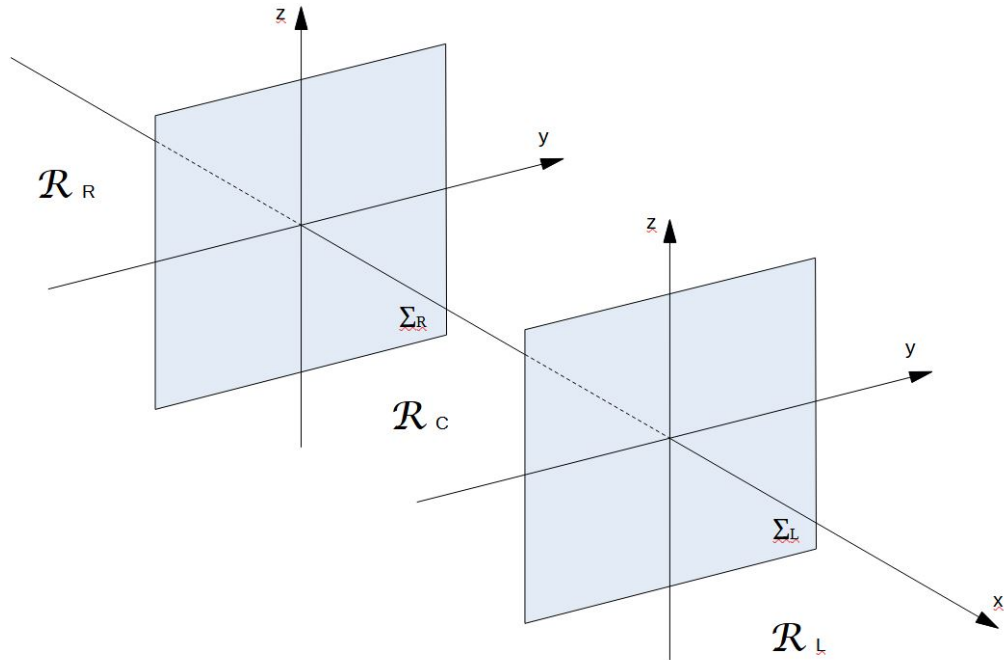


Figura 3.1: Representación gráfica de los 3 semiespacios \mathcal{R}_R , \mathcal{R}_C , \mathcal{R}_L y los planos de separación Σ_R y Σ_C

3.2. Propiedades del sistema

3.2.1. Existencia y unicidad

La existencia y unicidad de solución de un problema de valores iniciales asociado a un sistema definido a trozos puede no estar siempre garantizada (ver [2]). En este apartado, vamos a probar que el problema de valores iniciales asociado al sistema posee una única solución definida. Sin embargo, antes de esto es necesario introducir varios conceptos asociados a la existencia y unicidad de soluciones.

A continuación, enunciaremos el resultado clásico de existencia y unicidad de solución para un problema de valores iniciales. Los detalles de su prueba pueden consultarse en [10].

Una función f es globalmente lipschitziana si existe una constante $k > 0$ tal que para todo $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ se verifica

$$\|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\| \leq k \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|. \quad (3.3)$$

Teorema 3.1 *Si f es una función globalmente lipschitziana, entonces el problema de valores iniciales asociado a (3.2) tiene una única solución definida en todo \mathbb{R} .*

Proposición 3.1 Considerando f como una función que define al sistema diferencial (3.2) y siendo \mathbf{x}_0 un vector cualquiera perteneciente a \mathbb{R}^3 , el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (3.4)$$

tiene una única solución definida en todo \mathbb{R} .

Demostración 1 Para probar la existencia y unicidad de solución del problema de valores iniciales (3.2) es suficiente comprobar que el campo vectorial f del sistema (3.2) verifica la condición global de Lipschitz (3.3). La prueba depende de la posición relativa de $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ con respecto a los planos de separación:

- Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{R}_L \cup \Sigma_L$, entonces

$$\|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\| = \|A_L(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\| \leq \|A_L\| \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|,$$

donde la norma matricial es la subordinada a la norma euclídea.

- De igual manera puede probarse el carácter Lipschitziano de f cuando $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{R}_R \cup \Sigma_R$ o $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{R}_C \cup \Sigma_L \cup \Sigma_R$

- Si $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{R}_L \cup \Sigma_L$ y $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{R}_C \cup \Sigma_L \cup \Sigma_R$, tomaremos \mathbf{x}_3 como el punto del segmento que une \mathbf{x}_1 con \mathbf{x}_2 y que está en el plano de separación Σ_L . Entonces,

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\| &\leq \|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_3)\| + \|f(\mathbf{x}_3) - f(\mathbf{x}_2)\| = \\ &= \|A_L \mathbf{x}_1 - A_L \mathbf{x}_3\| + \|A_C \mathbf{x}_3 - A_C \mathbf{x}_2\| \leq \\ &\leq \|A_C\| \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3\| + \|A_C\| \|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2\| \leq \\ &\leq (\|A_L\| + \|A_C\|) \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|. \end{aligned}$$

- De forma análoga, puede probarse si $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{R}_C \cup \Sigma_L \cup \Sigma_R$ y $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{R}_R \cup \Sigma_R$.

- Si $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{R}_L \cup \Sigma_L \cup \Sigma_R$ y $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{R}_R \cup \Sigma_R$, tomaremos \mathbf{x}_3 como el punto del segmento que une \mathbf{x}_1 con \mathbf{x}_2 y que está en el plano de separación Σ_L y \mathbf{x}_4 como el punto del segmento que une \mathbf{x}_1 con \mathbf{x}_2 y que está en el plano de separación Σ_R

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\| &\leq \|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_3)\| + \|f(\mathbf{x}_3) - f(\mathbf{x}_4)\| + \|f(\mathbf{x}_4) - f(\mathbf{x}_2)\| = \\ &= \|A_L \mathbf{x}_1 - A_L \mathbf{x}_3\| + \|A_C \mathbf{x}_3 - A_C \mathbf{x}_4\| + \|A_R \mathbf{x}_4 - A_R \mathbf{x}_2\| \leq \\ &\leq \|A_L\| \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3\| + \|A_C\| \|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4\| + \|A_R\| \|\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2\| \leq \\ &\leq (\|A_L\| + \|A_C\| + \|A_R\|) \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|. \end{aligned}$$

De ese modo, la función f es globalmente lipschitziana y, por tanto, el problema de valores iniciales (3.2) posee una única solución definida en todo \mathbb{R} .

3.3. Puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio son puntos en los cuales el sistema dinámico no experimenta cambios en el tiempo, es decir, las soluciones se mantienen constantes. En el contexto de los sistemas dinámicos lineales a trozos, es necesario examinar los puntos de equilibrio en cada una de las zonas o regiones del sistema. Se explorarán las condiciones para determinar la estabilidad de estos puntos y su relevancia en el comportamiento global del sistema.

Una solución $\bar{\mathbf{x}}$ del sistema

$$A_i \mathbf{x} + b_i = 0 \quad (3.5)$$

con $\bar{\mathbf{x}} \in \bar{\mathcal{R}}_i^1$, para $i \in \{R, C, L\}$, se dice que es un punto de equilibrio del sistema (3.2).

Si $\bar{\mathbf{x}}$ es sol de (3.5) pero $\bar{\mathbf{x}} \notin \bar{\mathcal{R}}_i$, se dice que $\bar{\mathbf{x}}$ es un punto de equilibrio virtual del sistema (3.2).

3.4. Elementos dinámicos básicos y estabilidad de los puntos de equilibrio

En esta sección se describirán los elementos dinámicos básicos que aparecen en los sistemas dinámicos lineales a trozos. Estos elementos, como los puntos de equilibrio y las trayectorias, entre otros, son fundamentales para comprender el comportamiento dinámico de los sistemas. Se presentarán las definiciones y propiedades clave de cada uno de estos elementos.

Supongamos que $\bar{\mathbf{x}}$ es un punto de equilibrio del sistema (3.2) y $\bar{\mathbf{x}} \in \bar{\mathcal{R}}_i$, para $i \in \{R, C, L\}$, entonces la estabilidad del punto de equilibrio $\bar{\mathbf{x}}$ esta dada por los autovalores de la matriz A_i . Si todos los autovalores de A_i tienen parte real estrictamente negativa, entonces $\bar{\mathbf{x}}$ es estrictamente estable. Si A_i posee un autovalor con parte real estrictamente positiva, entonces el punto de equilibrio $\bar{\mathbf{x}}$ es inestable.

Si $\bar{\mathbf{x}}$ es un punto de equilibrio perteneciente a uno de los planos de separación, entonces la naturaleza de los autovalores de las matrices a uno y otro lado del plano de separación no determinan la estabilidad del punto de equilibrio ([13]).

Si $\bar{\mathbf{x}}$ es un punto de equilibrio del sistema (3.2) con $\bar{\mathbf{x}} \in \bar{\mathcal{R}}_i$, para $i \in \{R, C, L\}$, los autovalores de A_i asociados a autovalores reales proporcionan variedades invariantes lineales del sistema, que pueden, o no, ser acotadas. Si la matriz A_i posee un par de autovalores complejos, entonces el subsistema posee un plano (semiplano o trozo de el)

¹Nótese que la notación de la barra superior es distinta, para $\bar{\mathcal{R}}_i$ indica la clausura del conjunto, esto es, la zona \mathcal{R}_i incluyendo su frontera.

invariante, llamado plano focal.

Estos elementos geométricos invariantes tendrán especial relevancia para encontrar orbitas homoclinas en el sistema dinámico descrito por el circuito de Chua.

3.5. Semiaplicaciones de Poincaré

En el análisis del comportamiento dinámico de los sistemas lineales, es común utilizar la construcción de una aplicación de Poincaré. Esta técnica es especialmente útil en los sistemas continuos lineales a trozos, donde implica la composición de varias aplicaciones de transición o semiaplicaciones de Poincaré. Los trabajos de Kahlert [3, 4] proporcionan información sobre las propiedades analíticas de estas semiaplicaciones y destacan su comportamiento complejo. En numerosas ocasiones se ha analizado las semiaplicaciones de Poincaré relacionadas con sistemas de planos trizonales con simetría. Un ejemplo de esto se encuentra en [12].

En esta sección, se introducirán las semiaplicaciones de Poincaré asociadas al sistema continuo lineal a trozos (3.2). Para enunciar la definición necesaria de las citadas aplicaciones utilizaremos la siguiente notación:

Dado un punto $\mathbf{p} = (x_{\mathbf{p}}, y_{\mathbf{p}}, z_{\mathbf{p}}) \in \mathbb{R}^3$, denotamos por $\mathbf{x}_{\mathbf{p}}(t) = (x_{\mathbf{p}}(t), y_{\mathbf{p}}(t), z_{\mathbf{p}}(t))$ a la solución del sistema (3.2) que verifica la condición inicial $\mathbf{x}_{\mathbf{p}}(0) = \mathbf{p}$.

Definición 3.3 *Supongamos un punto $\mathbf{p} = (1, y_{\mathbf{p}}, z_{\mathbf{p}})$ que pertenece al plano de separación Σ_R . Si existe $\tau > 0$ tal que $\mathbf{x}_{\mathbf{p}}(t)$ verifica que*

$$\mathbf{x}(\tau) \in \Sigma_R \quad y \quad x_p(t) > 1 \quad \forall t \in (0, \tau).$$

Entonces el punto $\mathbf{q} = \mathbf{x}(\tau)$ es la imagen de \mathbf{p} mediante la semiaplicación de Poincaré, y se denota como

$$\Pi_R^R(\mathbf{p}) = \mathbf{q}. \tag{3.6}$$

Definición 3.4 *Supongamos un punto $\mathbf{p} = (1, y_{\mathbf{p}}, z_{\mathbf{p}})$, que pertenece al plano de separación Σ_R . Si existe $\tau > 0$ tal que $\mathbf{x}_{\mathbf{p}}(t)$ verifica que*

$$\mathbf{x}(\tau) \in \Sigma_R \quad y \quad |x_p(t)| < 1 \quad \forall t \in (0, \tau).$$

Entonces el punto $\mathbf{q} = \mathbf{x}(\tau)$ es la imagen de \mathbf{p} mediante la semiaplicación de Poincaré, y se denota como

$$\Pi_R^C(\mathbf{p}) = \mathbf{q}. \tag{3.7}$$

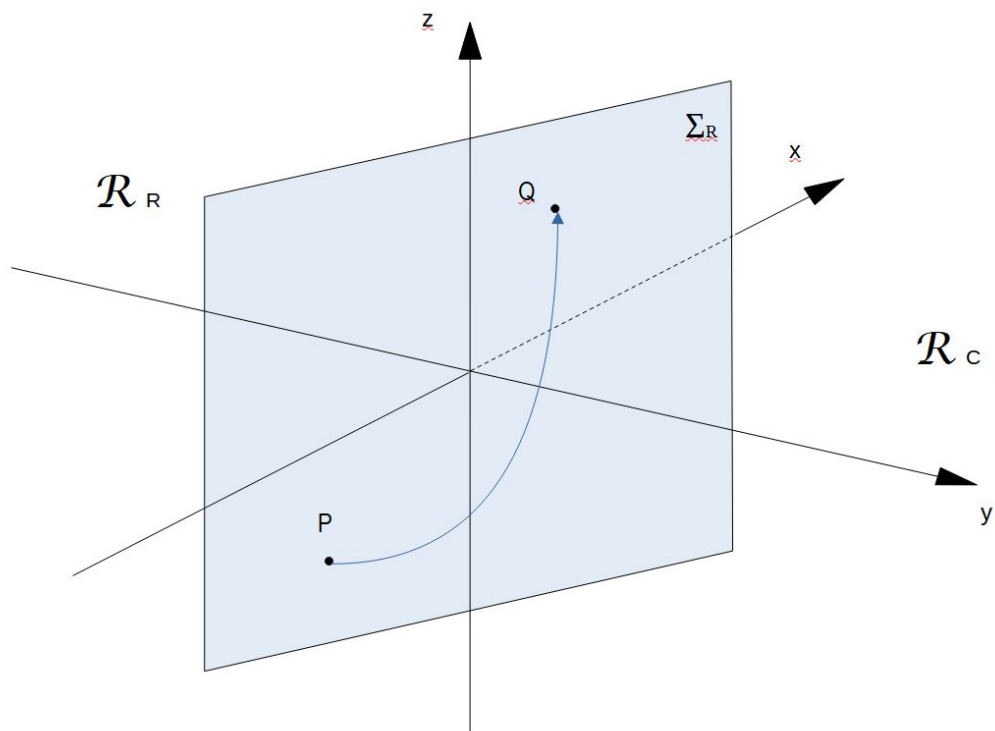


Figura 3.2: Ejemplo gráfico de la primera semiaplicación de Poincaré definida para nuestro sistema 3.6.

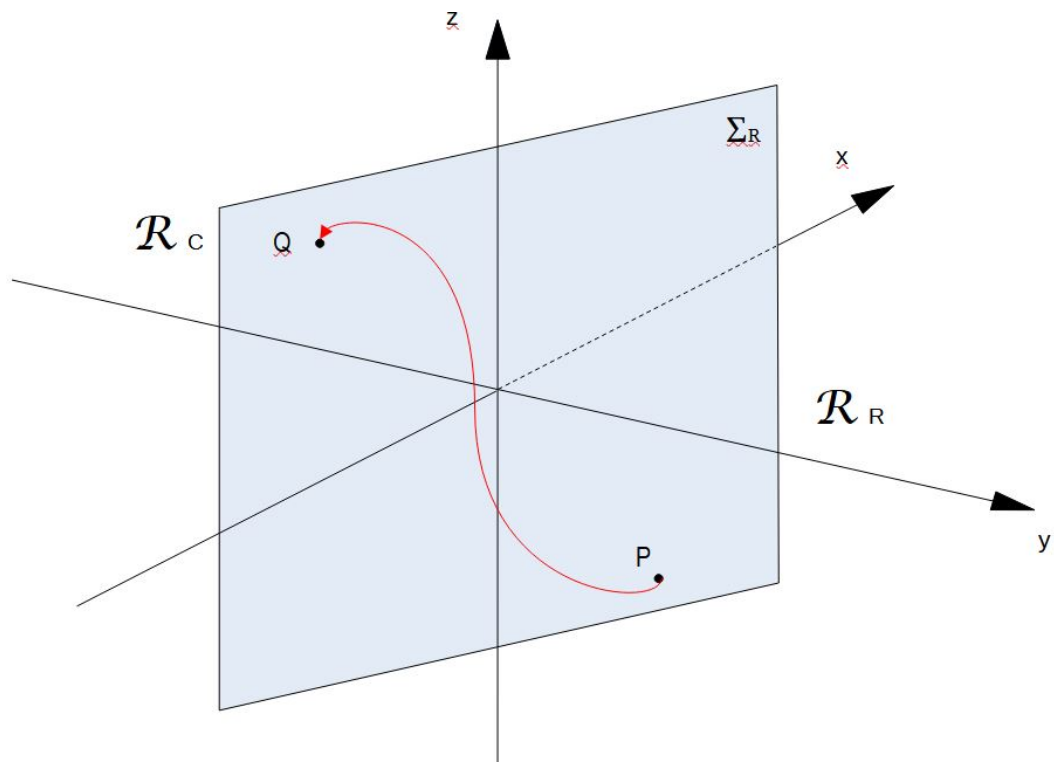


Figura 3.3: Ejemplo gráfico de la segunda semiaplicación de Poincaré definida para nuestro sistema 3.6. Nótese el cambio en los semiespacios \mathcal{R}_C y \mathcal{R}_R respecto a la primera figura.

Capítulo 4

Resolución de los sistemas lineales asociados

Nuestro enfoque en este capítulo estará centrado en abordar la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales en las regiones de mayor interés, obteniendo los puntos de equilibrio del sistema y determinando las variedades invariantes asociadas a estos puntos. Para lograrlo, haremos uso de métodos numéricos y técnicas de resolución apropiadas.

En particular, emplearemos MatLab [9], una herramienta ampliamente utilizada en el ámbito de la computación científica, para llevar a cabo la solución numérica del sistema. MatLab es un entorno de programación y cálculo que nos brinda una amplia gama de funciones y herramientas para la resolución de problemas matemáticos y científicos. Su capacidad para realizar cálculos numéricos y su amplia biblioteca de funciones nos serán de gran utilidad en nuestro análisis.

4.1. Puntos de equilibrio

En cada semiespacio, la naturaleza dinámica está definida por el carácter topológico del punto de equilibrio del sistema lineal respectivo. Este punto de equilibrio puede ubicarse en el mismo semiespacio o en alguno de los otros dos. Si el punto de equilibrio se encuentra en el mismo semiespacio, se considera un punto real; de lo contrario, como hemos dicho en el Capítulo 2, el punto se denomina punto de equilibrio virtual.

Para calcular los puntos de equilibrio del sistema (3.2) en cada uno de los subespacios, se impone

$$\dot{\mathbf{x}} = \vec{0}.$$

De este modo, se deduce a partir de la tercera ecuación del sistema (2.25) que la segunda coordenada de los puntos de equilibrio debe ser nula, $y = 0$, pues β no es nulo. Ahora, sustituyendo el valor de y obtenido en la segunda ecuación del sistema (2.25) y teniendo en cuenta que $y = 0$, se obtiene que $z = -x$. Por último, como la segunda

componente de los puntos de equilibrio también debe ser nula y el parámetro tampoco α es nulo, para que exista un punto de equilibrio en el sistema, la función $k(x)$ (2.24), debe anularse en dicho punto. Como ya sabemos, esta función es lineal a trozos, por lo que calcularemos sus valores en la zona central y en una de las zonas exteriores, pues recordemos que nuestro sistema es simétrico.

En el semiespacio central, tenemos que $k(x) = ax$, donde $a = 1 - m_0R \neq 0$. Como hemos dicho, para que exista un punto de equilibrio en este semiespacio, la primera componente de éste debe anularse. Por tanto, teniendo en cuenta los razonamientos anteriores, se deduce que el punto de equilibrio en \mathcal{R}_C es el origen de coordenadas, al que denominaremos $\mathbf{p}_0 = (0, 0, 0)$.

En el semiespacio derecho \mathcal{R}_R , la función no lineal está definida por $k(x) = bx + a - b$, donde $a = 1 - m_0R$ y $b = 1 - m_1R$. Teniendo en cuenta que a y b son distintos de 0 e imponiendo $k(x) = 0$ se obtiene $x = 1 - \frac{a}{b}$. El punto de equilibrio en el semiespacio derecho queda definido como

$$\mathbf{p}_R = \begin{pmatrix} \frac{b-a}{b} \\ 0 \\ \frac{a-b}{b} \end{pmatrix},$$

donde se tiene que verificar que $1 - \frac{a}{b} > 1$.

Teniendo en cuenta la ya mencionada simetría 3.2 del sistema, en el semiespacio izquierdo \mathcal{R}_L , el punto de equilibrio queda definido como

$$\mathbf{p}_L = \begin{pmatrix} \frac{a-b}{b} \\ 0 \\ \frac{b-a}{b} \end{pmatrix},$$

donde se tiene que verificar que $\frac{a}{b} - 1 < -1$.

Para determinar la configuración local de dichos puntos de equilibrio, tendremos que calcular los autovalores de las matrices de coeficientes asociadas al sistema (3.2). De nuevo, recordar que debido a que el sistema es simétrico, los autovalores asociados a la matriz de coeficientes en el semiespacio derecho e izquierdo coinciden.

El polinomio característico de la matriz

$$A_R = \begin{pmatrix} -\alpha b & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

está dado por

$$P_{A_R}(\lambda) = -\lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3, \quad (4.1)$$

donde $p_1 = -1 - \alpha b$, $p_2 = \alpha(1 - b) - \beta$, y $p_3 = -\alpha\beta b$. Notese que el término independiente del polinomio característico no se anula, lo que quiere decir que no pueden existir autovalores nulos. Este polinomio característico tiene grado impar y coeficientes reales, por lo que al menos tiene una raíz real. Las otras dos raíces del polinomio característico las supondremos complejas conjugadas [11].

A continuación vamos a determinar el valor de las raíces del polinomio P_{A_R} en el semiespacio derecho \mathcal{R}_R . En esta zona, la raíz real del polinomio característico la denotaremos por λ_R , y las raíces complejas conjugadas de dicho polinomio por $\sigma_R \pm \omega_R i$. Para determinar dichas raíces, se utilizarán algunas propiedades que verifican los autovalores asociados a la matriz A_R .

En primer lugar, sabemos que la traza de la matriz A_R , $-1 - \alpha b$, tiene que coincidir con la suma de los autovalores, $\lambda_R + 2\sigma_R$. A partir de aquí, se deduce que el valor de σ_R en función de λ_R y el parámetro b

$$\sigma_R = \frac{1}{2}(-\lambda_R - \alpha b - 1). \quad (4.2)$$

Por otro lado, la parte imaginaria de los autovalores complejos se determina utilizando que el determinante de A , cuyo valor $-\alpha\beta b$, ha de coincidir con el producto de los autovalores, $\lambda_R(\sigma_R^2 + \omega_R^2)$. De esta relación, se determina que el valor de ω_R es el siguiente:

$$\omega_R = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\lambda_R} b - \sigma_R^2}. \quad (4.3)$$

En el semiespacio central \mathcal{R}_C , la raíz real del polinomio característico la denotaremos por λ_C , y por $\sigma_C \pm \omega_C i$ a las raíces complejas conjugadas de dicho polinomio.

Determinaremos dichas raíces utilizando las propiedades que tienen que verificar los autovalores asociados a la matriz A_C .

$$A_C = \begin{pmatrix} -\alpha a & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de la matriz es

$$P_{A_C}(\lambda) = -\lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3, \quad (4.4)$$

donde $p_1 = -1 - \alpha a$, $p_2 = \alpha(1 - a) - \beta$, y $p_3 = -\alpha\beta a$. Notese que el término independiente del polinomio característico no se anula, lo que quiere decir que no pueden existir autovalores nulos.

En primer lugar, sabemos que la traza de la matriz, $-1 - \alpha a$, tiene que coincidir con la suma de los autovalores, $\lambda_C + 2\sigma_C$. A partir de aquí, se deduce que el valor de σ_C en función de λ_C y el parámetro b

$$\sigma_C = -\frac{1}{2}(\lambda_C + \alpha b + 1). \quad (4.5)$$

Por otro lado, la parte imaginaria de los autovalores complejos se determina utilizando que el determinante, cuyo valor $-\alpha\beta a$, ha de coincidir con el producto de los autovalores, $\lambda_C(\sigma_C^2 + \omega_C^2)$. De esta relación, se determina que el valor de ω_C es el siguiente:

$$\omega_C = \sqrt{\frac{-\alpha\beta}{\lambda_C} a - \sigma_C^2}. \quad (4.6)$$

4.2. Variedades invariantes

De cara a obtener una solución, es necesario obtener las variedades invariantes asociadas a los puntos de equilibrio del sistema (3.2). En concreto nos centraremos en la zona central, pues es la única que nos resulta de interés. Ver el trabajo de M. Camacho [1], donde se calculan las variedades de las zonas externas.

Recordemos que A_C posee un par de autovalores complejos conjugados, $\sigma_C \pm \omega_C i$, que determinan la variedad bidimensional, y un autovalor real λ_C , que determina la variedad unidimensional. Denotaremos ambas variedades por $\mathcal{P}_F(\mathbf{p}_0)$ y $R_C(\mathbf{p}_0)$, respectivamente.

A partir de este punto tomaremos, como se hace en Medrano [8], $a = \frac{-8}{7}$ y $b = \frac{-5}{7}$.

La variedad $R_C(\mathbf{p}_0)$ es localmente una variedad lineal unidimensional la región central \mathcal{R}_C . Más concretamente, en este semiespacio dicha variedad es una recta que pasa por el punto de equilibrio \mathbf{p}_0 y tiene como vector director un autovector asociado al autovalor real λ_C . El primer paso para determinar las ecuaciones de esta variedad será calcular un autovector de A_C asociado al autovalor λ_C . Para ello, resolveremos el sistema de ecuaciones $(A_C - \lambda_C I)\vec{v} = 0$, siendo I la matriz identidad,

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{7} - \lambda_C & \alpha & 0 \\ 1 & -1 - \lambda_C & -\beta \\ 0 & -\beta & -\lambda_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0}. \quad (4.7)$$

Se obtiene que el subespacio propio asociado al autovalor λ_C es

$$\vec{V}(\lambda_C) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha\lambda_C}{\beta\left(\frac{\alpha}{7} - \lambda_C\right)} \\ \frac{-\lambda_C}{\beta} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Recordando el carácter linealmente dependiente de los autovectores, podemos expresarlo como

$$\vec{V}(\lambda_C) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha\lambda_C}{\frac{\alpha}{7} - \lambda_C} \\ -\lambda_C \\ \beta \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Se determinan las ecuaciones de $R_C(\mathbf{p}_0)$ localmente en \mathcal{R}_C sabiendo que es una variedad lineal que pasa por el origen de coordenadas que está generada por el autovector $\vec{V}(\lambda_C)$.

$$R_C(\mathbf{p}_0) = \mathbf{p}_0 + \mu \vec{V}(\lambda_C) = \vec{0} + \begin{pmatrix} \frac{\alpha\lambda_C}{\frac{\alpha}{7} - \lambda_C} \mu \\ -\lambda_C \mu \\ \beta \mu \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad -\frac{\frac{\alpha}{7} - \lambda_C}{\alpha\lambda_C} \leq \mu \leq \frac{\frac{\alpha}{7} - \lambda_C}{\alpha\lambda_C} \quad (4.9)$$

Observemos que en el caso de que el valor de μ sea igual a cero obtendremos el punto de equilibrio \mathbf{p}_0 , y si el valor de μ coincide con el límite superior de la desigualdad, la recta interseca al plano de separación Σ_R en el punto

$$\mathbf{I}_R = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\frac{\alpha}{7} - \lambda_C}{\alpha\lambda_C} \\ \beta \left(\frac{\frac{\alpha}{7} - \lambda_C}{\alpha\lambda_C} \right) \end{pmatrix}.$$

La variedad $\mathcal{P}_F(\mathbf{p}_0)$, está localmente contenida en el semiplano que pasa por el origen de coordenadas y que está generado por los autovalores complejos asociados a la matriz A_C , $\sigma_C \pm \omega_C i$.

Teorema 4.1 *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, con autovalores conocidos $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\sigma \pm \omega i$, el subespacio propio de A^T asociado a λ es ortogonal al plano generado por los autovectores de A asociados a los autovalores complejos, y por lo tanto un vector normal al plano.*

A la luz del Teorema 4.1, el primer paso para obtener la ecuación general de dicho semiplano focal P_F es determinar el subespacio propio de A_C^T asociado al autovalor real λ_C , el cual está generado por los autovectores que verifican el sistema

$$(A_C^T - \lambda_C I) \vec{n}_{\lambda_C} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{7} - \lambda_C & 1 & 0 \\ \alpha & -1 - \lambda_C & -\beta \\ 0 & 1 & -\lambda_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0}. \quad (4.10)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene fácilmente que

$$\vec{n}_{\lambda_C} = \begin{pmatrix} -\lambda_C \\ \frac{\alpha}{7} - \lambda_C \\ \lambda_C \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un autovector de A_C^T que genera el subespacio propio asociado a λ_C . Este autovector es ortogonal a P_F y por tanto, su vector director. La ecuación del semiplano focal central se determina imponiendo que pase por el punto \mathbf{p}_0 y tenga por vector normal a \vec{n}_{λ_C} . De ese modo, se obtiene que su ecuación es

$$P_F = \left\{ \left(\frac{-\lambda_C}{\frac{\alpha}{7} - \lambda_C} \right) x + \lambda_C y + z = 0 \right\} \text{ donde } -1 \leq x \leq 1 \quad (4.11)$$

Es obvio que, la intersección del semiplano focal central P_F con el plano de separación Σ_R es una recta dada por

$$R_{I_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{r}{\lambda_C} + \frac{1}{\frac{\alpha}{7} - \lambda_C} \\ r \end{pmatrix},$$

donde $r \in \mathbb{R}$.

De forma similar, podríamos obtener todas las variedades invariantes para el resto de zonas. Véase el trabajo de M. Camacho [1].

4.3. Solución del sistema diferencial (lineal a trozos)

Esta sección esta dedicada a describir detalladamente la solución analítica del sistema diferencial en la zona central \mathcal{R}_R . En el trabajo realizado por M. Camacho[1], se encuentra la solución analítica para la zona central.

Vamos a determinar la solución del problema de valores iniciales asociado al sistema 3.2 en el semiespacio derecho \mathcal{R}_R con una condición inicial arbitraria, $X(0) = \mathbf{p} = (x_{\mathbf{p}}, y_{\mathbf{p}}, z_{\mathbf{p}})$. Esto es

$$\begin{cases} X' = A_R X(t) + \mathbf{b}_R \\ X(0) = \mathbf{p} \end{cases} \quad \text{donde } X(t) = X(t)_{SGH} + X(t)_{SPNH}$$

En primer lugar para calcular $X(t)_{SGH}$, el sistema a resolver sería

$$\begin{pmatrix} \frac{-2}{7}\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Recordemos que este sistema posee un autovalor real denominado λ_R , y dos autovalores complejos conjugados, los cuales son $\sigma_R \pm i\omega_R$. A partir de estos autovalores, obtendremos el autovector asociado al autovalor λ_R

$$\vec{v}_R = \begin{pmatrix} \frac{\alpha\lambda_R}{\alpha\left(1 + \frac{-2}{7}\alpha\right) + \lambda_R} \\ \lambda_R \\ -\beta \end{pmatrix},$$

y un autovector complejo asociado al par de autovalores complejos conjugados, que denominaremos $\vec{\gamma}_R = \vec{u}_R \pm \vec{q}_R i$

$$\vec{u}_R \pm \vec{q}_R i = \begin{pmatrix} (1 + \sigma_R)\sigma_R - \omega_R^2 \\ \sigma_R \\ -\beta \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \omega_R(1 + 2\sigma_R) \\ \omega_R \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una vez conocidos los vectores \vec{v}_R , \vec{u}_R y \vec{q}_R , la expresión de la solución particular no homogénea del sistema será

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + c_3 X_3(t). \quad (4.13)$$

donde c_1 , c_2 y c_3 son coeficientes constantes y

$$\begin{aligned} X_1(t) &= e^{\lambda_R t} \vec{v}_R, \\ X_2(t) &= e^{\sigma_R t} (\cos(\omega_R t) \vec{u}_R - \text{sen}(\omega_R t) \vec{q}_R), \\ X_3(t) &= e^{\sigma_R t} (\cos(\omega_R t) \vec{q}_R + \text{sen}(\omega_R t) \vec{u}_R). \end{aligned}$$

Obteniendo

$$X = c_1 X_1(0) + c_2 X_2(0) + c_3 X_3(0).$$

Las soluciones particulares X_1 , X_2 y X_3 en el instante $t = 0$ serán

$$\begin{aligned} X_1(0) &= \vec{v}_R, \\ X_2(0) &= \cos(0) \vec{u}_R - \sin(0) \vec{q}_R = \vec{u}_R = \vec{u}_R, \\ X_3(0) &= \cos(0) \vec{q}_R + \sin(0) \vec{u}_R = \vec{q}_R = \vec{q}_R. \end{aligned}$$

Por otro lado, $X(t)_{SPNH}$ es la solución del sistema $AX + B = 0$

$$\begin{pmatrix} -\alpha(1+b) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha(b-a) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}, \quad (4.14)$$

Cuya solución, no es ni mas ni menos que el punto de equilibrio en la zona derecha

$$\mathbf{p}_R = \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2} \right)^T.$$

Entonces, imponiendo nuestra condición inicial,

$$X(0) = \mathbf{p},$$

la solución del PVI vendrá dada por la expresión

$$c_1 \vec{v}_C + c_2 \vec{u}_C + c_3 \vec{q}_C + \mathbf{p}_R = \mathbf{p}.$$

Despejando \mathbf{p}_R y desarrollando

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha \lambda_R}{\alpha(1+b) + \lambda_R} & (1 + \sigma_R)\sigma_R - \omega_R^2 & \omega_R(1 + 2\sigma_R) \\ \lambda_R & \sigma_R & \omega_R \\ -\beta & -\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\mathbf{p}} - \frac{3}{2} \\ y_{\mathbf{p}} \\ z_{\mathbf{p}} + \frac{3}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

De forma análoga, podríamos proceder con los sistemas diferenciales, lineales en las zonas restantes [1].

Finalmente, es notable que el cálculo de los coeficientes posee un grado de dificultad elevado, incluso podríamos concluir que dicho sistema es imposible de resolver de forma convencional. Por lo que se ha recurrido, a un método alternativo: desarrollar una serie de scripts en MatLab (ver Capítulo 7) con la finalidad de abordar el sistema usando metodología numérica.

Capítulo 5

Órbitas homoclinas: Comportamiento caótico y Teorema de Shilnikov

Anteriormente hemos mencionado en varias ocasiones que nuestro trabajo está enfocado en la identificación de órbitas homoclinas de tipo Shilnikov, en este capítulo definiremos qué son las órbitas homoclinas, exhibir la estrecha relación que poseen con el caos y cómo probar su existencia.

Teorema 5.1 (Teorema de Shilnikov [11])¹

Supongamos que el sistema diferencial $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, siendo f una función continua, con derivadas parciales de 1^o y 2^o orden continuas, posee una órbita homoclina \mathcal{H} asociada a un punto de equilibrio cuya matriz de linealización posee un autovalor real λ y un par de autovalores complejos conjugados $\sigma \pm \omega i$. Si se satisface la condición

$$|\lambda| > |\sigma|, \quad (5.1)$$

entonces el sistema posee un régimen caótico en un entorno de la homoclina.

La condición (5.1) se denomina condición de Shilnikov.

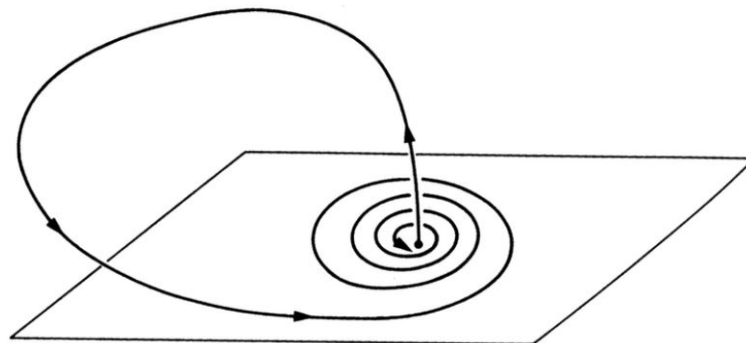


Figura 5.1: Ejemplo gráfico de una órbita homoclina.

¹C.Tresser probó que este teorema aplica en sistemas lineales a trozos continuos[15] [14].

En la sección 6.2, hemos obtenidos para un valor fijado de $\beta = 19$ que $\alpha = 14,43746643008159$. Utilizando la función *autmatAC* (ver 7.4) para estos valores y un comando básico de MatLab, podremos verificar fácilmente cómo se cumple la condición 5.1 en nuestro sistema central, donde se encuentra el punto de equilibrio.

```
>>abs(lambdaC)
ans =
    3.5181

>>abs(real(autovalorcomplejoC))
ans =
    1.2278
```

5.1. Puntos de tangencia

En el plano de separación Σ_R , existe una recta donde las órbitas del sistema diferencial son tangentes al plano Σ_R . Tomemos como T al punto de intersección de esa recta de tangencia con el plano focal de la zona central P_F . Entendemos una homoclina directa como aquella que corta al plano de separación \mathcal{R}_R y excatamente en dos puntos \mathbf{I}_R y $\Pi_R^R(\mathbf{I}_R)$.

Recordando las semiaplicaciones defendidas en el Capítulo 3 (3.6 y 3.7), tomemos $\mathbf{S} = \Pi_R^C(\mathbf{T})^{-1}$. Existirá una homoclina directa, si y solo si $\Pi_R^R(\mathbf{I}_R) \in \overline{ST}$.

Para corroborar esto, partiendo de

$$A_C = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{7} & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & -\beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

y teniendo en cuenta que nuestro punto T está contenido en el plano de separación \mathcal{R}_R .

Es fácil concluir que la recta de tangencia R_T viene dada por

$$y = \frac{-x}{7}.$$

Por último, es obvio que la intersección de R_T con P_F será un punto, al que denominaremos T .

$$T = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1}{7} \\ \frac{\lambda_C}{\frac{\alpha}{7} - \lambda_C} + \frac{\lambda_C}{7} \end{pmatrix}.$$

Como hemos mencionado previamente, en la sección 6.2, hemos obtenido para un valor fijado de $\beta = 19$ un valor de $\alpha = 14,43746643008159$. Haciendo uso de la función *puntodetangencia* 7.21.1 para estos valores, obtenemos

$$T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,1429 \\ 1,1082 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, utilizando la función *solucionzonaCT* 7.21.2 obtenemos el punto S.

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1,2917 \\ 2,1297 \end{pmatrix}.$$

Conocidos estos puntos es fácilmente demostrable que $\Pi_R^R(\mathbf{I}_R) \in \overline{ST}$.

Visto que ambos requisitos, cuando $\beta = 19$ y $\alpha = 14,43746643008159$ quedan satisfechos, podemos concluir que existe una homoclina tipo Shilnikov que induce al sistema a un comportamiento caótico para estos valores.

Capítulo 6

Existencia de orbitas homoclinas

En este capítulo, presentaremos gráficamente las soluciones obtenidas en el marco de nuestro trabajo. Utilizando las poderosas herramientas desarrolladas en MatLab (ver Capítulo 7), hemos logrado realizar un análisis exhaustivo y demostrar la existencia de una órbita homoclínica en un sistema dinámico.

6.1. Contexto y Objetivos

El estudio de las órbitas conectivas, o conexiones globales, constituye un tema de gran importancia en la teoría de sistemas dinámicos. Estas órbitas poseen propiedades fascinantes y desempeñan un papel fundamental en la comprensión del comportamiento caótico y no lineal de los sistemas.

En nuestro trabajo, nos propusimos investigar la existencia de una órbita homoclínica en un sistema específico, cuyos parámetros han sido cuidadosamente seleccionados.

6.2. Resultados y Metodología

Utilizando las herramientas desarrolladas en MatLab, hemos llevado a cabo un minucioso análisis del sistema en cuestión. Mediante la implementación de algoritmos y técnicas especializadas, hemos logrado determinar los valores críticos de los parámetros α y β que conducen a la existencia de la órbita homoclínica, corroborando así el estudio de Medrano [8]. Nuestros resultados revelan que cuando $\alpha = 14,43746643008159$ y $\beta = 19$, el sistema exhibe de manera clara y contundente una órbita homoclínica de tipo Shilnikov.

Para llegar a estas conclusiones, hemos realizado una cuidadosa manipulación de ecuaciones y hemos utilizado métodos numéricos avanzados para resolver las ecuaciones diferenciales asociadas al sistema. Además, hemos validado nuestros resultados mediante técnicas de simulación y análisis gráfico, lo que nos ha permitido visualizar la órbita homoclínica en todo su esplendor (Ver figura 6.1).

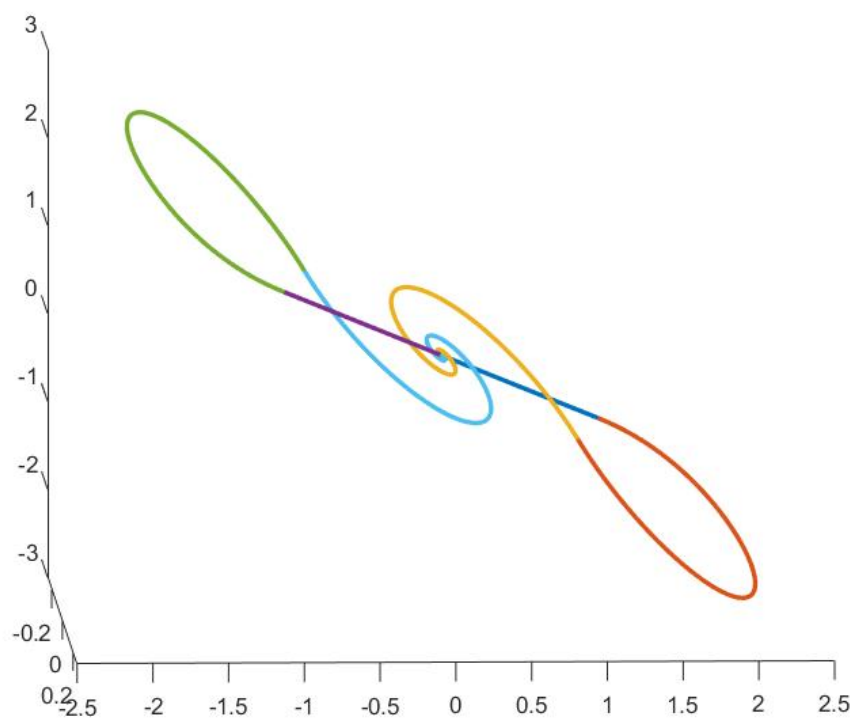


Figura 6.1: $\alpha = 14,43746643008159$, $\beta = 19$. Dos órbitas homoclinas (simétricas) tipo Shilnikov. Cada color representa un cambio de semiespacio. Prestar especial atención al origen de coordenadas donde vemos que ambas trayectorias se "enrollan" lo que quieren a decir que tienden al infinito en dicho punto. Ver Figura 6.2 para apreciar una vista detallada

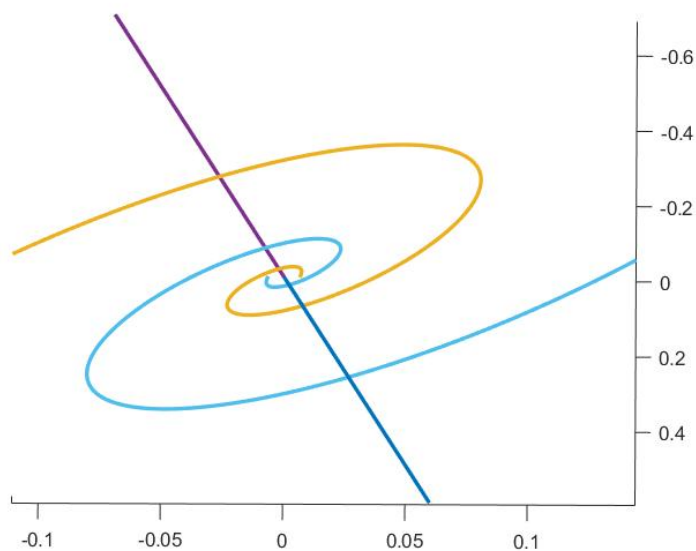


Figura 6.2: Imagen detallada del origen de coordenadas de la Figura 6.1 donde se aprecia claramente la tendencia de ambas órbitas (celeste y amarilla) a "enrollarse" en el origen de coordenadas.

6.3. Limitaciones

A lo largo de nuestro estudio, hemos hecho uso extensivo de MatLab, una poderosa herramienta, llevándola hasta su extremo. Sin embargo, es importante reconocer que, a pesar de su potencia, existen ciertas limitaciones y consideraciones que deben tenerse en cuenta al utilizar esta herramienta para obtener resultados concluyentes y precisos.

6.3.1. Limitaciones de la función ODE45

En nuestro trabajo, inicialmente empleamos la función `ode45` de MatLab, la cual es ampliamente utilizada para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Para corroborar que nuestro análisis era correcto, sin embargo, descubrimos que al utilizar esta función, no obteníamos resultados satisfactorios para nuestro sistema en particular. La función `ode45` utiliza un algoritmo de integración numérica basado en el método de Runge-Kutta de cuarto y quinto orden. Aunque esta función es generalmente confiable y adecuada para muchas aplicaciones, encontramos que no era suficientemente precisa y estable para obtener resultados concluyentes en nuestro caso específico. Visto esto, realizamos una nueva pasada a muy alta tolerancia pero la órbita no tendía hacia el punto de equilibrio.

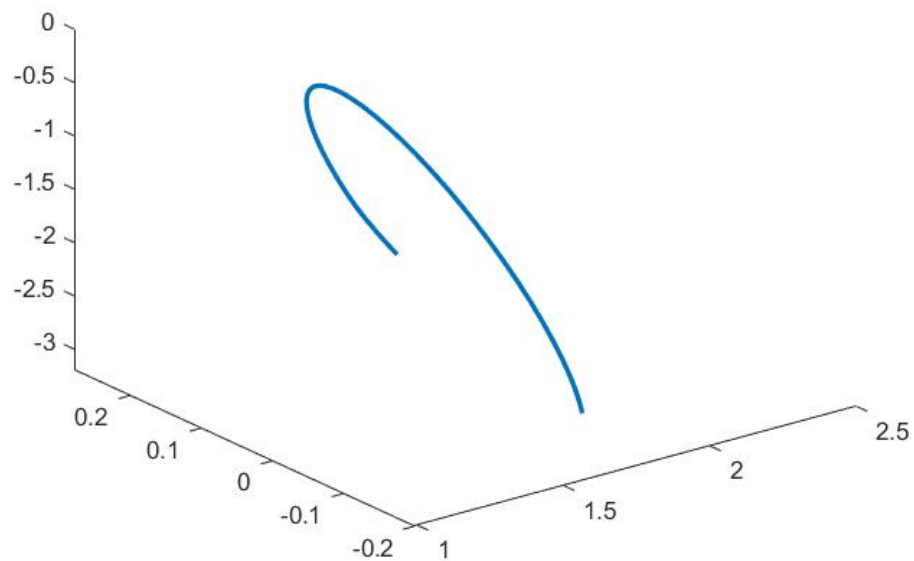


Figura 6.3: Resultado de utilizar la función `ode45` con tolerancia por defecto. Es evidente que el resultado no es el esperado, pues se espera una órbita que retorne a su punto de origen.

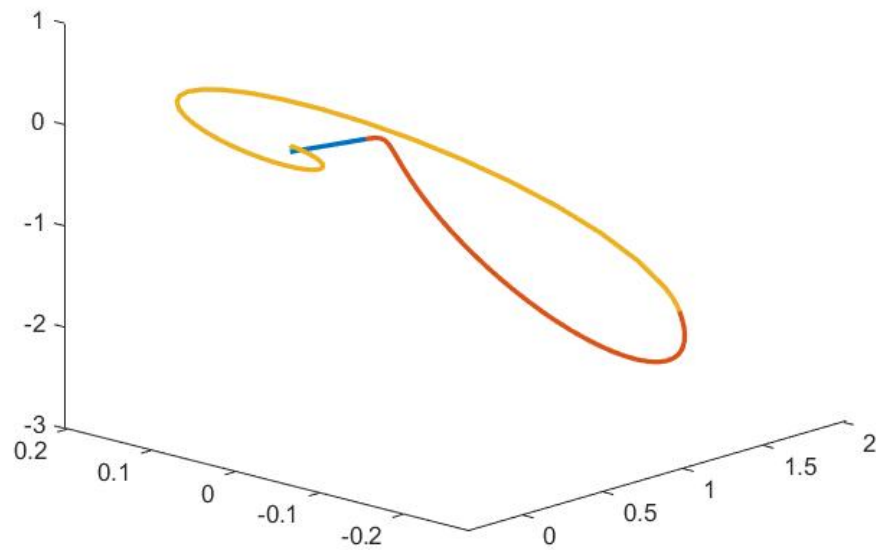


Figura 6.4: Resultado mejorado usando tolerancia de 1^{-15} . Se puede apreciar claramente como la órbita no tiende al punto de equilibrio.

6.3.2. Necesidad de utilizar el método ode78

Para superar las limitaciones de la función ode45, nos vimos en la necesidad de recurrir a un enfoque alternativo. Optamos por utilizar el método ode78, que es un algoritmo de integración numérica más sofisticado y preciso.

Además, ajustamos la tolerancia del método a un nivel extremadamente alto de 1^{-15} . Esto implica que el algoritmo se esforzará por mantener el error de la integración por debajo de este valor, lo que proporciona una mayor precisión en los resultados. Sin embargo, es importante tener en cuenta que trabajar con tolerancias tan altas puede incrementar significativamente el tiempo de cálculo y el consumo de recursos computacionales. Pese a esto, no se obtuvieron resultados concluyentes. Ver figuras 6.5 y 6.6

6.3.3. Consideraciones sobre la fiabilidad de los resultados

Aunque el uso del método ode78 con una tolerancia muy alta nos permitió obtener resultados algo más concluyentes en nuestro estudio, es importante reconocer que aún existen limitaciones inherentes a cualquier método numérico utilizado en el análisis de sistemas dinámicos.

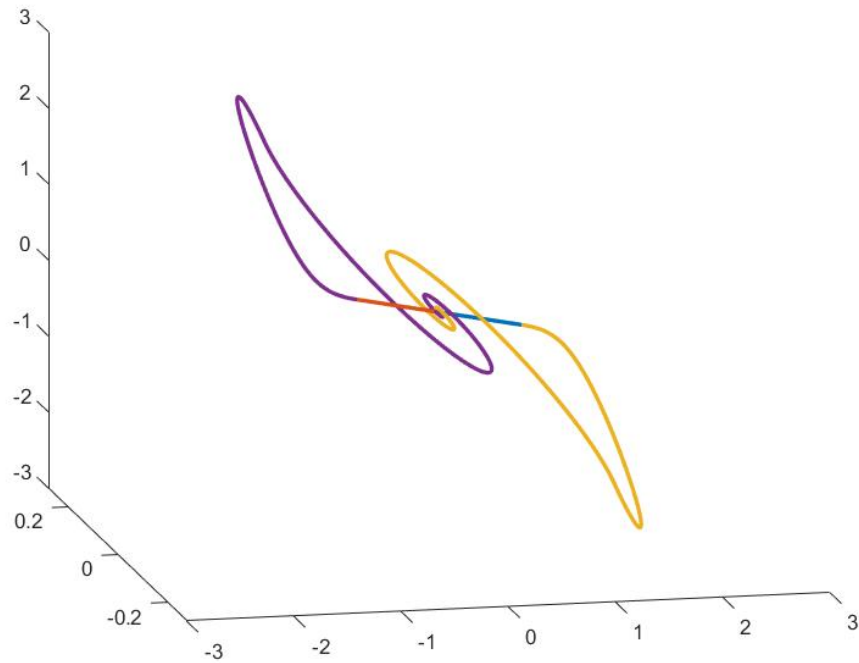


Figura 6.5: Solución obtenida usando ode78. A simple vista parece satisfactorio, sin embargo, en la Figura 6.5. podemos apreciar como las trayectorias no tienden a infinito en el punto de origen.

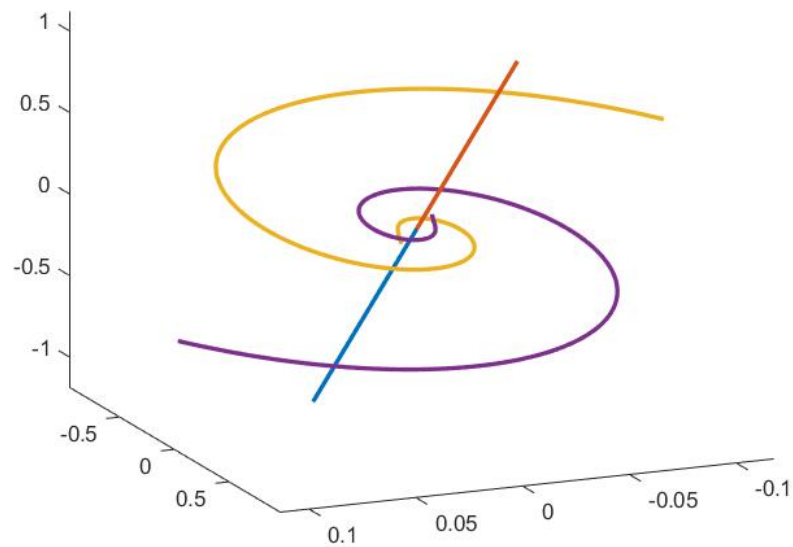


Figura 6.6: Detalle de la solución obtenido usando ode78. Se puede observar claramente como no se tiende al punto de equilibrio, pues ambas orbitas (amarilla y morada) debería "enrollarse" al origen de coordenadas.

La sensibilidad a las condiciones iniciales y a las perturbaciones, así como la presencia de fenómenos no lineales y caóticos, pueden hacer que la obtención de resultados precisos sea un desafío. A pesar de los esfuerzos realizados para mejorar la precisión y la fiabilidad de los resultados, siempre existe la posibilidad de que factores no considerados puedan influir en la validez de las conclusiones.

6.4. Discusión y Conclusiones

La demostración de la existencia de una órbita homoclínica en el sistema estudiado abre las puertas a un mayor entendimiento de su comportamiento dinámico. Estos hallazgos pueden tener importantes implicaciones en diversas áreas, como la salud o la ingeniería, donde los sistemas no lineales y caóticos desempeñan un papel fundamental.

La combinación de algoritmos, técnicas de simulación y métodos numéricos aplicados en este trabajo han demostrado ser un enfoque prometedor para abordar problemas complejos en el campo de la dinámica de sistemas. Además, nuestros resultados respaldan la eficacia y utilidad de las herramientas desarrolladas en MatLab para el análisis y estudio de sistemas dinámicos complejos, demostrando que esta herramienta está para nada anticuada, aunque sí, posee limitaciones. En la sección 6.3, hemos observado estas limitaciones y discutido las consideraciones asociadas con el uso de MatLab en nuestro estudio. Si bien MatLab es una herramienta valiosa y poderosa en el análisis de sistemas dinámicos, es importante tener en cuenta sus limitaciones y tomar precauciones adicionales al interpretar y utilizar los resultados obtenidos.

Concluyendo nuestro Trabajo de Fin de Grado, hemos abordado de manera exhaustiva la problemática planteada y hemos logrado alcanzar los objetivos propuestos. Durante el desarrollo de este proyecto, nos adentramos en un campo de estudio fascinante y desafiante, donde exploramos diversas técnicas y herramientas para comprender y analizar el comportamiento dinámico de un sistema complejo.

A lo largo de este trabajo, hemos investigado y discutido ampliamente los conceptos fundamentales relacionados con el sistema en estudio, desde la teoría matemática hasta las aplicaciones prácticas. Hemos profundizado en el análisis teórico, la modelización y las técnicas numéricas, aprovechando herramientas como Matlab para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales y obtener resultados significativos. Durante el proceso, hemos encontrado desafíos y obstáculos que nos han llevado a desarrollar soluciones innovadoras y a realizar adaptaciones en nuestras estrategias de investigación. A través de este trabajo, hemos demostrado la importancia de la creatividad, la perseverancia y el rigor científico para enfrentar los problemas y

obtener resultados confiables. Es importante resaltar que este trabajo no solo nos ha permitido profundizar en el campo de estudio elegido, sino que también hemos adquirido habilidades y conocimientos técnicos en diversas áreas, como el análisis numérico, la programación y la interpretación de resultados. Además de la redacción de texto y el uso de LaTeX. Estas habilidades son valiosas y nos han preparado para futuras investigaciones y desafíos académicos.

En resumen, este Trabajo de Fin de Grado ha sido una experiencia enriquecedora y gratificante, donde hemos aplicado y ampliado nuestros conocimientos en el campo de la ciencia y la tecnología. Nos sentimos orgullosos de haber alcanzado los objetivos planteados y esperamos que este trabajo contribuya de manera significativa al avance y la comprensión en esta área de estudio.

Capítulo 7

Códigos en Matlab

7.1. Coeficientes zona derecha

```
function sol=coefc1c2c3terminado(alpha,beta)
%Calculo de los coef. c1, c2 y c3
[~,vR,u,w]=autmatrizAR(alpha,beta); %obtenemos autovalores
zona R
%lambdaC=autmatrizAC(alpha,beta); Obtenemos autovalores
zona C (en desuso ya que se opto por calcular lambdaC
dentro de "Interseccion")
M=[vR u w]; % matriz con autovalores en forma de columna
[I1]=Interseccion(alpha,beta); %calculamos la recta
interseccion "I1"
b=I1-[3/2 0 -3/2]'; % [3/2 0 -3/2] punto de equilibrio
sol=M\b; %solucionamos el sistema
end
```

7.2. Matriz A zona derecha

```
function [lambdaR,vR,u,w,autovalorcomplejoR]=autmatrizAR(
alpha,beta)
%AUTMATRIZAR Autovalor real de matriz derecha AR en Chua

%Construimos la matriz
AR=[-alpha*(2/7),alpha,0;1,-1,1;0,-beta,0];
%Calculo de los autovalores de la matriz de la parte R
[V,D]=eig(AR);
%V contiene columnas que son autovectores. El primero es el
real y los
%demas complejos
%D contiene autovalores en la diagonal, fuera de esta son 0
lambdaR=D(1,1); % Guardo autovalor real
autovalorcomplejoR=D(2,2); % Guardo autovalor complejo
vR=V(:,1); % guardo el primer autovector (real)
u=real(V(:,2)); % guardo el segundo autovector (complejo)[
parte real]
w=imag(V(:,2));% guardo el segundo autovector (complejo)[
```

```

    parte imaginaria]

%Forma alternativa
%aut=sort(aut,'ComparisonMethod','real');
%lambdaR=aut(1);
%vR=null(AR-lambdaR*eye(3));
end

```

7.3. Coeficientes zona central

```

function sol=coefc1c2c3central(alpha,beta)

%Calculo de los coef. c1, c2 y c3 en la zona central
[~,vC,uC,wC]=autmatrizAC(alpha,beta);
M=[vC uC wC];

%[p]=fsolve(@sisparahomo,[1.1915,alpha]);

[p]=fsolve(@sisparahomo,[1.1871,alpha]);
Estrella=solucionzonaR(p(1,1),p(1,2),beta)

% t12=tiempovueloenzonaR(12.165457244,19,1.4);
% Estrella=solucionzonaR(t12,12.165457244219103,19);

sol=M\Estrella;
end

```

7.4. Matriz A zona central

```

function [lambdaC,vC,uc,wc,autovalorcomplejoC]=autmatrizAC(
    alpha,beta)
%AUTMATRIZAR Autovalor real de matriz central AC en Chua
%Construimos la matriz
AC=[alpha/7,alpha,0;1,-1,1;0,-beta,0];
%Calculo de los autovalores de la matriz de la parte C
[V,D]=eig(AC);%V contiene columnas que son autovectores. El
    primero es el real y los
%demas complejos
%D contiene autovalores en la diagonal, fuera de esta son 0
%%almaceno los valores obtenidos
lambdaC=D(1,1);
autovalorcomplejoC=D(2,2);
vC=V(:,1);
uc=real(V(:,2));
wc=imag(V(:,2));
end

```

7.5. Cálculo de punto de intersección

```
%function [I1]=Interseccion(alpha,beta,lambdac)
function [I1]=Interseccion(alpha,beta)
lambdac=autmatrizAC(alpha,beta); %calcula autovalor real
zona C
%Calculo del punto de interseccion de vC con el plano x=1
I1=[1;-((alpha/7)-lambdac)/alpha;beta*((alpha/7)-lambdac)/(
alpha*lambdac)];
```

7.6. Representación gráfica zona central

```
function dibujosolzonaC=dibsolucionzonaCmejorado(intervalo,
alpha,beta)
% Dibuja la solución en la zona C del sistema de Chua

l=length(intervalo);% Obtenemos la longitud del intervalo

% Prealocar espacio para las orbitas
orbita1 = zeros(size(intervalo));
orbita2 = zeros(size(intervalo));
orbita3 = zeros(size(intervalo));

for i=1:l %Recorremos cada valor en el intervalo
orbita=solucionzonaC(intervalo(i),alpha,beta);
orbita1(i)=orbita(1);
orbita2(i)=orbita(2);
orbita3(i)=orbita(3);
end
```

7.7. Representación gráfica zona derecha

```
function dibujosolzonaR=dibsolucionzonaRmejorado(intervalo,
alpha,beta)
% Dibuja la solución en la zona R del sistema de Chua
% Dado un intervalo y valores para los parámetros alpha y
beta, se obtiene
% la solución en la zona R del sistema de Chua para cada
valor del
% intervalo y se almacena en las variables orbita1,
orbita2 y orbita3.
% Luego se dibuja la solución en 3D utilizando la función
plot3.

l=length(intervalo); % Obtenemos la longitud del intervalo

% Prealocar espacio para las orbitas
```

```

orbita1 = zeros(size(intervalo));
orbita2 = zeros(size(intervalo));
orbita3 = zeros(size(intervalo));

for i=1:l % Recorremos cada valor en el intervalo
    orbita=solucionzonaR(intervalo(i),alpha,beta); %
        Obtenemos la solucion en la zona R
    orbita1(i)=orbita(1); % Almacenamos la posicion x de la
        solucion
    orbita2(i)=orbita(2); % Almacenamos la posicion y de la
        solucion
    orbita3(i)=orbita(3); % Almacenamos la posicion z de la
        solucion
end

dibujosolzonaR=[orbita1;orbita2;orbita3]; % Guardamos la
    solucion en una matriz
plot3(orbita1,orbita2,orbita3,'LineWidth',2) % Graficamos
    la solucion en 3D

```

7.8. Representacion orbita homoclina

```

function dibujoalfa(alpha,beta,tini,op)
% lambdaC=autmatrizAC(alpha,beta);
[I1]=Interseccion(alpha,beta);
if op == 1
plot3([0,I1(1)],[0,I1(2)],[0,I1(3)],'LineWidth',2);
hold on;
dibsolucionzonaRmejorado(0:0.01:tini+0.01,alpha,beta);
dibsolucionzonaCmejorado(0:0.01:3.3,alpha,beta);
hold off
elseif op==-1
plot3([0,-I1(1)],[0,-I1(2)],[0,-I1(3)],'LineWidth',2);
hold on;
dibsolucionzonaRsime(0:0.01:tini+0.01,alpha,beta);
dibsolucionzonaCsime(0:0.01:3.3,alpha,beta);
hold off
else
plot3([0,I1(1)],[0,I1(2)],[0,I1(3)],'LineWidth',2);
hold on;
dibsolucionzonaRmejorado(0:0.01:tini+0.01,alpha,beta);
dibsolucionzonaCmejorado(0:0.01:3.3,alpha,beta);
plot3([0,-I1(1)],[0,-I1(2)],[0,-I1(3)],'LineWidth',2);
dibsolucionzonaRsime(0:0.01:tini+0.01,alpha,beta);
dibsolucionzonaCsime(0:0.01:3.3,alpha,beta);
hold off
end
end

```

7.9. Solucion del sistema zona derecha

```
function orbita=solucionzonaR(t,alpha,beta)
%Solucion del sistema en la zona R con c.i. I1. I1 es la
  recta
%interseccion del plano con el limite de la zona R

[lambdaR,vR,u,w,autovalorcomplejoR]=autmatrizAR(alpha,beta)
  ; %obtengo autovalores

% "Formulas" soluciones EDO:
X1=exp(lambdaR*t)*vR;
sigmaR=real(autovalorcomplejoR);
omegaR=imag(autovalorcomplejoR);
X2=exp(sigmaR*t).*(cos(omegaR*t)*u-sin(omegaR*t)*w);
X3=exp(sigmaR*t).*(sin(omegaR*t)*u+cos(omegaR*t)*w);

%Calculo coeficientes para satisfacer c.i:
sol=coefc1c2c3terminado(alpha,beta);
c1=sol(1);
c2=sol(2);
c3=sol(3);
%Obtengo solucion (Solucion Homo + Solucion Nohomo)
orbita=c1*X1+c2*X2+c3*X3+[3/2;0;-3/2];
```

7.10. Solucion del sistema zona izquierda

```
function orbita=solucionzonaC(t,alpha,beta)
%Solucion del sistema en la zona C con c.i. Estrella.
%Consultar "solucionzonaR.m para una mejor explicacion"

[lambdaC,vC,uC,wC,autovalorcomplejoC]=autmatrizAC(alpha,
  beta);

X1=exp(lambdaC*t)*vC;
sigmaC=real(autovalorcomplejoC);
omegaC=imag(autovalorcomplejoC);
X2=exp(sigmaC*t).*(cos(omegaC*t)*uC-sin(omegaC*t)*wC);
X3=exp(sigmaC*t).*(sin(omegaC*t)*uC+cos(omegaC*t)*wC);

sol=coefc1c2c3central(alpha,beta);

c1=sol(1);
c2=sol(2);
c3=sol(3);

orbita=c1*X1+c2*X2+c3*X3;
```

7.11. Sistema para ODE derecho

```
function Y=sisdifzonaC(~,X,alpha,beta)
%Termino derecho del sistema diferencia en la zona R. Se
  usa para ODE45.

%Matriz A en la zona central
AC=[alpha/7,alpha,0;1,-1,1;0,-beta,0];

Y=AC*X;

%Y=AR*X+[3*alpha/7;0;0];
```

7.12. Sistema para ODE central

```
function Y=sisdifzonaR(~,X,alpha,beta)
%Termino derecho del sistema diferencia en la zona R. Se
  usa para ODE45

AR=[-alpha*(2/7),alpha,0;1,-1,1;0,-beta,0];
Y=AR*X+[3*alpha/7, 0, 0]';
```

7.13. Sistema para ODE

```
function Y=sisdifzonasRyC(~,X,alpha,beta)
%Termino derecho del sistema diferencial en la zona R
if X(1)>=1
  AR=[-alpha*(2/7),alpha,0;1,-1,1;0,-beta,0];

  Y=AR*X+[3*alpha/7, 0, 0]';
else
  AC=[alpha/7,alpha,0;1,-1,1;0,-beta,0];

  Y=AC*X;
end
end
```

7.14. ODE45

```
function [t,solR,solC,solC2]=Solv2(alpha,beta,tiempo)

% %Zona Central ini
% [~,solC]=ode45(@(t,X) sisdifzonaC(t,X,alpha,beta),[0,
  tiempo],0);
%   orbita1=solC(:,1);
%   orbita2=solC(:,2);
%   orbita3=solC(:,3);
```

```

% plot3(orbita1,orbita2,orbita3,'LineWidth',2)
% hold off
[I1]=Interseccion(alpha,beta);
plot3([0,I1(1)],[0,I1(2)],[0,I1(3)],'LineWidth',2);

hold on
%Zona derecha

[~,solR]=ode45(@(t,X) sisdifzonaR(t,X,alpha,beta),[0,tiempo
],I1);
    orbita1R=solR(:,1);
    orbita2R=solR(:,2);
    orbita3R=solR(:,3);
plot3(orbita1R,orbita2R,orbita3R,'LineWidth',2)
hold on
%solR(end,:)

%Zona Central 2. tiempo vuelo en zona C
    (14.43746643008159,19,1.1871) = 0.1151
%tc2=tiempovueloenzonaC(14.43746643008159,19,1.1871);
Estrella =[1.0000, -0.2734,-1.4550]';
[~,solC2]=ode45(@(t,X) sisdifzonaC(t,X,alpha,beta),[0,2.8],
solR(end,:));
    orbita1C=solC2(:,1);
    orbita2C=solC2(:,2);
    orbita3C=solC2(:,3);
plot3(orbita1C,orbita2C,orbita3C,'LineWidth',2)
hold off

end

```

7.15. ODE45 con baja tolerancia

```

function [t,solR,solC,solC2]=Solv3(alpha,beta,tiempo)

% %Zona Central ini
% [~,solC]=ode45(@(t,X) sisdifzonaC(t,X,alpha,beta),[0,
tiempo],0);
%     orbita1=solC(:,1);
%     orbita2=solC(:,2);
%     orbita3=solC(:,3);
% plot3(orbita1,orbita2,orbita3,'LineWidth',2)
% hold off
[I1]=Interseccion(alpha,beta);
plot3([0,I1(1)],[0,I1(2)],[0,I1(3)],'LineWidth',2);
pause
hold on
plot3([0,-I1(1)],[0,-I1(2)],[0,-I1(3)],'LineWidth',2);

```

```

%Zona derecha y central
options = odeset('RelTol',1e-14,'AbsTol',1e-15);
[~,solR]=ode78(@(t,X) sisdifzonasRyC(t,X,alpha,beta)
,[0,4.63],I1,options);
    orbita1R=solR(:,1);
    orbita2R=solR(:,2);
    orbita3R=solR(:,3);
plot3(orbita1R,orbita2R,orbita3R,'LineWidth',2)
plot3(-orbita1R,-orbita2R,-orbita3R,'LineWidth',2)
hold off
%solR(end,:)

% %Zona Central 2. tiempovueloenzonaC
    (14.43746643008159,19,1.1871) = 0.1151
% %tc2=tiempovueloenzonaC(14.43746643008159,19,1.1871);
% Estrella =[1.0000, -0.2734,-1.4550]';
% [~,solC2]=ode45(@(t,X) sisdifzonaC(t,X,alpha,beta)
,[0,2.8],solR(end,:));
%     orbita1C=solC2(:,1);
%     orbita2C=solC2(:,2);
%     orbita3C=solC2(:,3);
% plot3(orbita1C,orbita2C,orbita3C,'LineWidth',2)
% hold off
%
end

```

7.16. ODE78

```

function [t,sol]=Solv(alpha,beta,tiempo)
Estrella =[1.0000,-0.17104641,-0.74666314]';
[t,sol]=ode45(@(t,X) sisdifzonasRyC(t,X,alpha,beta),[0,
tiempo],Estrella);
    orbita1=sol(:,1);
    orbita2=sol(:,2);
    orbita3=sol(:,3);
plot3(orbita1,orbita2,orbita3,'LineWidth',2)
end

```

7.17. Cálculo de tiempo. Zona central 1

```

function t1=tiempovueloenzonaC(alpha,beta,tiempoini)

%I1=Interseccion(alpha,beta);
Estrella =[1.0000,-0.17104641,-0.74666314]';
function sol11fin=primeracompsolzonaC(alpha,beta,tiempo)
[~,sol1]=ode45(@(t,X) sisdifzonaC(t,X,alpha,beta),[0,tiempo
],Estrella);
sol11=sol1(:,1)-1;

```



```

sol11fin=sol11(end);
end
t1=fzero(@(tiempo) primeracompsolzonaC(alpha,beta,tiempo)
,[0.0001,tiempoini]);
end

```

7.18. Cálculo de tiempo. Zona central 2

```

function t1=tiempovueloenzonaC1(alpha,beta,tiempoini)

function sol11fin=primeracompsolzonaC(alpha,beta,tiempo)
[~,sol1]=ode45(@(t,X) sisdifzonaC(t,X,alpha,beta),[0,tiempo]
,0);
sol11=sol1(:,1)-1;
sol11fin=sol11(end);
end
t1=fzero(@(tiempo) primeracompsolzonaC(alpha,beta,tiempo)
,[0,tiempoini]);
end

```

7.19. Cálculo de tiempo. Zona derecha

```

function t1=tiempovueloenzonaR(alpha,beta,tiempoini)
%I1=Interseccion(alpha,beta);
I1
=[0.999996373164299,-0.107934733707622,-0.439167178205539]';

function sol11fin=primeracompsolzonaR(alpha,beta,tiempo)
[t,sol1]=ode45(@(t,X) sisdifzonaR(t,X,alpha,beta),[0,tiempo]
,I1);
sol11=sol1(:,1)-1;
sol11fin=sol11(end);
end
t1=fzero(@(tiempo) primeracompsolzonaR(alpha,beta,tiempo)
,[0.0001,tiempoini]);
end

```

7.20. Comprobaciones

```

function [myvR1]=myvR(alpha,beta,lambdaR,z)
%Valor esperado de VR segun mis calculos myvR1=[(alpha*
lambdaR*z)/(beta*(-alpha*(1-5/7)-lambdaR));(-lambdaR*z)/
beta;z];
end

function x1=prisolucionzonaR(t,alpha,beta)

```

```

%Sirve para quedarnos con la primera componente de la
    solucion del sistema
%en la zona R (se usa para comprobar)
orbita=solucionzonaR(t,alpha,beta);
x1=orbita(1);
end

```

```

function x1=prisolucionzonaR(t,alpha,beta)
%Sirve para quedarnos con la primera componente de la
    solucion del sistema
%en la zona R (se usa para comprobar)
orbita=solucionzonaR(t,alpha,beta);
x1=orbita(1);
end

```

7.21. Puntos de tangencia

7.21.1. Punto de tangencia T

```

function T=puntodetangencia

a=-8/7;
alfa=14.43746643008159;
AR=[-alfa*(1+a) alfa 0;1 -1 1;0 -a 0];
autAR=eig(AR);
lambdaR=autAR(1);

T=[1; -1/7 ;lambdaR/7 + lambdaR/((alfa/7)-lambdaR)];
end

```

7.21.2. Punto de tangencia S

```

function [lambdaC,vC,uc,wc,autovalorcomplejoC]=
    autmatrizACT(alpha,beta)
%AUTMATRIZAR Autovalor real de matriz central AC en Chua
%Construimos la matriz
AC=[alpha/7,alpha,0;1,-1,1;0,-beta,0];
%Calculo de los autovalores de la matriz de la parte C
[V,D]=eig(AC);%V contiene columnas que son autovectores. El
    primero es el real y los
%demás complejos
%D contiene autovalores en la diagonal, fuera de esta son 0
%%almaceno los valores obtenidos
lambdaC=D(1,1);
autovalorcomplejoC=D(2,2);
vC=V(:,1);
uc=real(V(:,2));
wc=imag(V(:,2));
end

```

```

function sol=coefc1c2c3centralT(alpha,beta)

%Calculo de los coef. c1, c2 y c3 en la zona central
[~,vC,uC,wC]=autmatrizACT(alpha,beta);
M=[vC uC wC];

%[p]=fsolve(@sisparahomo,[1.1915,alpha]);

T=puntodetangencia;

% t12=tiempovueloenzonaR(12.165457244,19,1.4);
% Estrella=solucionzonaR(t12,12.165457244219103,19);

sol=M\T;
end

function S=solucionzonaCT(t,alpha,beta)
%Solucion del sistema en la zona C con c.i. T.
%Consultar "solucionzonaR.m para una mejor explicacion"

[lambdaC,vC,uC,wC,autovalorcomplejoC]=autmatrizACT(alpha,
    beta);

X1=exp(lambdaC*t)*vC;
sigmaC=real(autovalorcomplejoC);
omegaC=imag(autovalorcomplejoC);
X2=exp(sigmaC*t).*(cos(omegaC*t)*uC-sin(omegaC*t)*wC);
X3=exp(sigmaC*t).*(sin(omegaC*t)*uC+cos(omegaC*t)*wC);

sol=coefc1c2c3centralT(alpha,beta);

c1=sol(1);
c2=sol(2);
c3=sol(3);

S=c1*X1+c2*X2+c3*X3;

```

Bibliografía

- [1] M. Camacho Sánchez. Circuito de chua lineal a trozos: Conexiones heteroclinas y comportamiento caótico. July 2023.
- [2] V. Carmona, F. Fernández-Sánchez, E. García-Medina, and A. E. Teruel. Existence of homoclinic connections in continuous piecewise linear systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 20(1):013124, 03 2010.
- [3] C. Kahlert. The ranges of transfer and return maps in three-region piecewise-linear dynamical systems. *Internat. J. Circuit Theory Appl.*, 16:11–23, 1988.
- [4] C. Kahlert and O. E. Rössler. Analytical properties of Poincaré halfmaps in a class of piecewise-linear dynamical systems. *Z. Naturforsch. A*, 40:1011–1025, 1985.
- [5] M. Kennedy. Three steps to chaos. i. evolution. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 40(10):640–656, 1993.
- [6] E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, 20(2):130 – 141, 1963.
- [7] T. Matsumoto. A chaotic attractor from chua’s circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 31(12):1055–1058, 1984.
- [8] R. Medrano-T, M. d. Baptista, and I. Caldas. Homoclinic orbits in a piecewise system and their relation with invariant sets. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 186:133–147, December 2003.
- [9] C. B. Moler. Numerical Computing with Matlab. In *Numerical Computing with MATLAB, Revised Reprint*, chapter 0. SIAM, Philadelphia, 2008.
- [10] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1991.
- [11] C. Silva. Shil'nikov's theorem-a tutorial. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 40(10):675–682, 1993.

- [12] A. E. Teruel. *Clasificación Topológica de una Familia de Campos Vectoriales Lineales a Trozos Simétricos en el Plano*. Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona, 2000.
- [13] F. Torres, E. Ponce, E. Freire, and V. Carmona. The continuous matching of two stable linear systems can be unstable. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - DISCRETE CONTIN DYN SYST*, 16:689–703, 11 2006.
- [14] C. Tresser. About some theorems by L. P. šil'nikov. *Annales de l'I.H.P. Physique théorique*, 40(4):441–461, 1984.
- [15] Tresser, C. Homoclinic orbits for flows in \mathbb{R}^3 . *J. Phys. France*, 45(5):837–841, 1984.
- [16] G.-Q. Zhong and F. Ayrom. Experimental confirmation of chaos from chua's circuit. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 13(1):93–98, 1985.