INVARIANTES INTEGRALES EN

GRUPOS DE LIE

por

Jose Luis Cabrerizo Jaraiz

Trabajo realizado bajo la dirección del Prof. Dr. D. Francisco J. Echarte Reula, para obtener el grado de doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas, por la Universidad de Sevilla.

El doctorando:

Jose Luis Cabrerizo

Tesis Revisada y Conforme.

28 de Junio 1973

El Director y Padrino :

SEVILLA, JUNIO DE 1973

-INDICE-

INTRODUCCION 1

CAPITULO I

1. VECTOR INTEGRAL DE UNA CURVA 3

1-1. Definición de vector integral 4

1-2. Existencia de vector integral 9

1-3. Invariancia del vector integral 15

1-4. Casos particulares 23

2. LONGITUD EN GRUPOS DE LIE 30

2-1. Definición de longitud 31

2-2. Longitud invariante 34

2-3. Casos particulares 37

CAPITULO II

1. N-VECTOR INTEGRAL DE UNA N-SUPERFICIE 42

1-1. Definición de n-vector integral 43

1-2. Invariancia del n-vector integral. 48

1-3. Casos particulares 63

N-MEDIDA DE N-SUPERFICIES 68

2-1.Definición de n-medida 69

2-2.Existencia de n-medida 76

2-3.Invariancia de n-medida 81

2-4.Casos particulares 92

CAPITULO III

LONGITUD Y N-MEDIDA EN ESPACIOS HOMOGENEOS . . . 96

3-1.Definición de longitud en G/H 100

3-2.N-medida en G/H 103

3-3.Casos particulares 105

APENDICE 108

1.Coordenadas canonicas 108

2.Cierto grupo es de Lie 109

3.Calculo de la matriz de la representación adjunta para :

3-1.S^3 111

3-2.GL(2,R) 112

BIBLIOGRAFIA 113

0

INTRODUCCION

En este trabajo, damos el cálculo de longitudes de curvas y n-medidas de n-superficies contenidas en un grupo de Lie, por un procedimiento original. Por construcción estas medidas son invariantes a izquierda por elementos de G(grupo de Lie ambiente). A continuación se analizan los casos en que dichas medidas son invariantes a derecha.

En el cálculo de estas medidas, hemos partido de las definiciones de vector integral de una curva y n-vector integral de una n-superficie dadas por Radziszewski, habiendo obtenido las condiciones bajo las cuales dicho vector y n-vector, son invariantes a derecha por elementos de G.

La forma de hallar longitudes y n-medidas consiste en trasladar a izquierda una porción infinitesimal de curva(o n-superficie), consiguiendo que uno de los vertices coincida con el punto unidad del grupo base. El arco infinitesimal trasladado(o cada uno de los n arcos infinitesimales de la n-superficie trasladada), define un subgrupo uniparametrico, y este a su vez un vector en el espacio tangente $T_e(G)$, del que definimos como módulo el dado por la metrica euclidea en dicho espacio tangente. La longitud de un arco de curva será por tanto, la suma de los módulos de los vectores correspondientes a cada arco infinitesimal de la partición. Esta suma se calculará por medio de una integral al tender a cero la longitud de los intervalos de la partición considerada. De forma parecida procedemos con una n-superficie, resultando la longitud como caso particular de n-medida con n=1.

El trabajo queda dividido claramente en tres partes; la primera referente a curvas; la segunda a n-superficies, y la tercera reservada a realizar medidas sobre espacios homogeneos. Cada una de estas, da lugar a un Capitulo.

Hemos añadido en todos los casos ejemplos seleccionados en los cuales se aplican las teorias expuestas.

Deseo hacer constar mi mayor agradecimiento al Profesor D. Francisco Javier Echarte por la dirección de esta tesis, así como a todos los miembros de la Sección de Matemáticas de esta Facultad, y especialmente a D. Antonio Alcaraz Martinez.

0

CAPITULO I

§1.- VECTOR INTEGRAL DE UNA CURVA.

Tengamos un grupo de Lie G, de dimensión r, y analitico. Una curva $\Gamma \subset G$, se define como la imagen homeomorfa en una carta local U de G, de un intervalo $\{t_0, \hat{t}\}$ R. La expresaremos:

$$\Gamma : g^i = g^i(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \hat{t}, \quad i=1,\ldots,r$$

DEFINICION 1-1.-

Diremos que dos curvas Γ_1: $g=g_1(t)$, Γ_2: $g=g_2(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \hat{t}$, son congruentes, si existe un elemento $a \in G$ tal que: $\Gamma_2 = a.\Gamma_1$.

Vamos a determinar las funciones aditivas (en el sentido de la teoria de la medida), $\Omega(g(t_1),g(t_2)) = \Omega(g_1,g_2)$ del arco $(g(t_1),g(t_2)) = (g_1,g_2)$, $t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \hat{t}$, de la curva :

$$\Gamma: g = g(t), \ g_i \varepsilon \Gamma$$

tales que sus valores correspondientes de dos curvas congruentes son iguales, y reciprocamente, si estos valores son iguales, las curvas serán congruentes.

1-1. DEFINICION DE VECTOR INTEGRAL.-

Sea U(e) una carta local de G, $e\varepsilon G$ el elemento unidad, y

$$\gamma: g = y(u), \ y(0) = e, \quad -\hat{u} \leqslant u \leqslant \hat{u}$$

un subgrupo uniparametrico de G. Supongamos que el arco $y(u)$, $-\hat{u} \leqslant u \leqslant \hat{u}$, está dentro de U(e), y que g^i son las coordenadas canonicas de primera especie en U(e) (ver apéndice). Entonces, la ecuación del subgrupo, puede escribirse:

$$\gamma: g^i = \alpha^i u, \quad -\hat{u} \leqslant u \leqslant \hat{u}$$

o sea :

$$y^i(u) = \alpha^i u, \quad -\hat{u} \leqslant u \leqslant \hat{u}, \quad i=1,\ldots,r$$

donde α^i son las coordenadas del vector $\alpha = \alpha^i e_i$, tangente a $g=y(u)$, en el punto $e\varepsilon G$, y los vectores (e_i) forman la base natural del álgebra de Lie L(G) de G.

Hagamos una partición del intervalo $\{0,\hat{u}\}$, por los puntos u_i tal que :

$$u_0=0,\ldots,u_s=\hat{u}, \quad u_i < u_{i+1}, \quad \Delta u_i=u_{i+1}-u_i, \quad \Delta u_i=\Delta u_j$$

donde $i,j=0,1,\ldots,s-1$.

Consideremos los dos puntos $y(u_i)$, $y(u_{i+1})$. Multiplicandolos a izquierda por $y^{-1}(u_i)$, obtenemos :

$$y^{-1}(u_i).y(u_i) = e$$

$$y^{-1}(u_i).y(u_{i+1}) = \Delta y(\Delta u_i) = y(u_{i+1}-u_i) = y(\Delta u_i).$$

En coordenadas :

$$\Delta y^k(\Delta u_i) = y^k(\Delta u_i) = \alpha^k.\Delta u_i$$

La ultima igualdad por ser las coordenadas canonicas. Formemos ahora en L(G) el siguiente vector :

$$\omega(\Delta u_i) = \Delta y^k(\Delta u_i).e_k = \alpha^k.\Delta u_i.e_k, \quad i=0,1,\ldots,s-1$$

Sumando en i :

$$\omega^s(\hat{u}) = \sum_{i=0}^{s-1}\omega(\Delta u_i) = \sum_{i=0}^{s-1}\alpha^k.\Delta u_i.e_k = \alpha^k.e_k\sum_{i=0}^{s-1}\Delta u_i = \alpha u$$

ya que $\Delta u_i=\Delta u_j$.

Hagamos ahora $\Delta u_i\to 0$, $s\to\infty$:

$$\omega(\hat{u}) = \omega(y(0),y(\hat{u})) = \lim_{s\to\infty}\omega^s(\hat{u}) = \alpha\hat{u}$$

Luego hemos hecho corresponder a cada arco $(y(0),y(\hat{u}))$ del subgrupo γ, el vector $\omega(\hat{u})$, del álgebra L(G).

Si hubieramos utilizado otras coordenadas diferenciables tendriamos el mismo resultado.

Pasemos ahora a una curva :

$$\Gamma :\ g = g(t),\ t_0 \leqslant t \leqslant \hat{t}$$

Hagamos una partición del intervalo $\{t_0,\hat{t}\}$, por los puntos

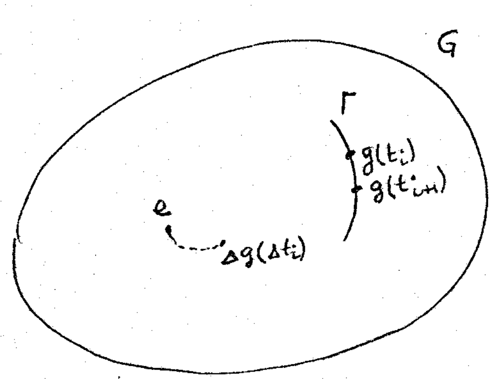
$$t_0 < t_1 < \dots < t_s = \hat{t}$$

Con sideremos dos de ellos consecutivos : $g(t_i)$, $g(t_{i+1})$. Multiplicandolos a izquierda por $g^{-1}(t_i)$, obtenemos :

$$g^{-1}(t_i).g(t_i) = e$$

$$g^{-1}(t_i).g(t_{i+1}) = \Delta g(\Delta t_i).$$

Si Δt_i es suficientemente pequeño, los dos puntos $g(t_i)$, $g(t_{i+1})$, estarán muy próximos, y por tanto tambien los puntos <u>e</u> y $\Delta g(\Delta t_i)$. Entonces existirá un un subgrupo uniparametrico que contiene a $\Delta g(\Delta t_i)$; este subgrupo existe y es único, ya que existe un entorno $U(e)$, y un entorno $V(0)$ en $L(G)$, tal que cualquier $g \varepsilon G$ se pue- de poner de manera única : $g = \exp X$, $X \varepsilon V \subset L(G)$. Este X, define un único subgrupo uniparametrico que contie-



ne al punto g. En nuestro caso, el punto $\Delta g(\Delta t_i)\varepsilon U$, si como decimos Δt_i es suficientemente pequeño. Denotaremos este subgrupo por $\gamma(\Delta t_i)$:

$$\gamma(\Delta t_i) \ : \ y=y(u_i), \quad 0 \leqslant u_i \leqslant \hat{u}_i$$

de tal forma que se cumple :

$$y(\hat{u}_i) = \Delta g(\Delta t_i), \quad \hat{u}_i = \Delta t_i = t_{i+1}-t_i$$

En la figura, el subgrupo $\gamma(\Delta t_i)$ lo dibujamos con linea discontinua.

Como ya hemos visto, cada subgrupo uniparametrico determina un vector :

$$\omega(\hat{u}_i) = \alpha(\Delta t_i).\Delta t_i$$

pues Δt_i es la longitud del intervalo en este caso. El vector $\alpha(\Delta t_i)$ es tangente a $\gamma(\Delta t_i)$ en el punto $\underline{e}$. Observemos que la elección del parametro u_i sobre $\gamma(\Delta t_i)$ es posible, siendo que se puede elegir el vector $\alpha(\Delta t_i)$ tangente a $\gamma(\Delta t_i)$ en $\underline{e}$.

Cada Δt_i nos determina pues, un vector de este tipo. Sumando en i, obtenemos el vector :

$$\Omega_s(\Gamma) = \sum_{i=0}^{s-1} \omega(\Delta t_i) = \sum_{i=0}^{s-1} \Delta g^j(\Delta t_i).e_j = H_s^j(t_0,\hat{t},\Gamma).e_j$$

donde :

$$H_s^j(t_0,\hat{t},\Gamma) = \sum_{i=0}^{s-1} \Delta g(\Delta t_i) = \sum_{i=0}^{s-1} \alpha^j(\Delta t_i).\Delta t_i \qquad (1.1)$$

Si existe el limite :

$$\Omega(\Gamma) = H^j(t_0,\hat{t},\Gamma).e_j = \lim_{\substack{s\to\infty \\ \lambda\to 0}} H_s^j(t_0,\hat{t},\Gamma).e_j$$

donde $\lambda = \max(\Delta t_i)$, $j=1,\dots,r$

y además es independiente de la partición de $\{t_0,\hat{t}\}$, entonces $\Omega(\Gamma)$ será llamado "vector integral" del arco de curva $g(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \hat{t}$.

Vemos que si Γ es un arco de la curva Γ_0, entonces $\Omega(\Gamma)$ es función aditiva de Γ. Pongamos $\Omega(t) = \Omega(g(t_0),g(t))$. Si ahora hacemos una traslación a izquierda de Γ, multiplivando por $a\in G$, obtenemos los puntos :

$$a.g(t_i),\ a.g(t_{i+1})$$

y al realizar el proceso de construcción del vector integral para la curva $a.\Gamma$, obtenemos los puntos :

$$\{a.g(t_i)\}^{-1}.\{a.g(t_{i+1})\} = g^{-1}(t_i).a^{-1}.a.g(t_{i+1}) =$$

$$= g^{-1}(t_i).g(t_{i+1}) = \Delta g(\Delta t_i).$$

Así pues, nos determina el mismo vector integral que la curva Γ, correspondiente a cada intervalo Δt_i. Con esto tenemos el siguiente resultado :

Dos curvas congruentes tienen el mismo vector integral : $\Omega(\Gamma) = \Omega(a.\Gamma)$, para todo $a\in G$.

1-2. EXISTENCIA DEL VECTOR INTEGRAL.-

Para estudiar el problema de existencia del vector integral, calcularemos las coordenadas del punto $\Delta g(\Delta t_i)$ a partir del cual hemos definido dicho vector.

En el grupo G, dados dos puntos x,y el producto (x.y) es función analitica de x,y :

$$(x.y) = f(x,y), \text{ f analitica}$$

En coordenadas :

$$(x.y)^i = f^i(x^1,\dots,x^r,y^1,\dots,y^r) = f^i(x,y)$$

siendo r la dimensión de G. Además se verifica :

$$f^i(x,e) = (x.e)^i = x^i$$

$$f^i(e.y) = (y.e)^i = y^i$$

Desarrollando en serie $f^i(x,y)$ en x=e, y=e :

$$f^i(x,y) = f^i(x,e) + f^i(e,y) + a^i_{jk}x^jy^k + b^i_{jkl}x^jx^ky^l +$$

$$+ c^i_{jkl}x^jy^ky^l + d^i_{jklm}x^jx^kx^ly^m + e^i_{jklm}x^jx^ky^ly^m + \dots \qquad (1.2.1)$$

Esta serie es absolutamente y uniformemente convergente en $\bar{U}(e)$:

$$-r^i \leqslant x^i \leqslant r^i, \qquad -R^i \leqslant y^i \leqslant R^i$$

Sea Γ: $g = g(t)$, tal que $g(t)\varepsilon\bar{U}(e)$, $g^{-1}(t)\varepsilon\bar{U}(e)$. Designemos las coordenadas de $g^{-1}(t)$ con $x^j(t)$.

Como $\Delta g(\Delta t_j) = g^{-1}(t_j).g(t_{j+1})$, aplicamos a este producto el desarrollo anterior, con lo que :

$$\Delta g^i(\Delta t_j) = x^i(t_j) + g^i(t_{j+1}) + a^i_{kl}x^k(t_j).g^l(t_{j+1}) + \ldots$$

Pero poniendo :

$$g^i(t_{j+1}) = g^i(t_j) + \eta^i(\Delta t_j)$$

y sustituyendo en la ecuación anterior :

$$\Delta g^i(\Delta t_j) = x^i(t_j) + g^i(t_j) + a^i_{kl}x^k(t_j).g^l(t_j) +$$

$$+ a^i_{kl}x^k(t_j).\eta^l(\Delta t_j) + \ldots$$

Para $\Delta t_j=0$, se tiene :

$$\Delta g^i(\Delta t_j) = 0, \quad \eta^i(\Delta t_j) = 0$$

ya que coinciden en este caso $g(t_j)$ y $g(t_{j+1})$, con lo cual $\Delta g(\Delta t_j) = e$. Así pues, en el desarrollo solamente nos quedarán los elementos en η :

$$\Delta g^i(\Delta t_j) = \eta^i(\Delta t_j) + a^i_{kl}x^k(t_j).\eta^l(\Delta t_j) + \ldots =$$

$$= \eta^p(\Delta t_j).F^i_p(x(t_j),g(t_j)) + \eta^p(\Delta t_j).\eta^q(\Delta t_j).F^i_{pq}(x,g,\eta). \quad (1.2.$$

donde F^i_p resulta ser la serie :

$$F^i_p = \frac{\partial f^i(x,y)}{\partial y^p}, \quad x^i = x^i(t), \quad y^i = y^i(t) \qquad (1.2.$$

Siendo la serie $f^i(x,y)$ convergente en $\bar{U}(e)$, la serie F^i_p es convergente tambien, absolutamente y uniformemente en

$\tilde{U}(e)$, de donde :

$$|F^i_{pq}| < M \quad \text{para todo } t_j \varepsilon \{t_0, \hat{t}\}$$

Las series F^i_p son funciones continuas de $x(t)$, $g(t)$ en $\tilde{U}(e)$. Así pues, de (1.1) se deduce :

$$H^i_s(t_0,t,\Gamma) = \sum_{j=0}^{s-1} F^i_p(x(t_j),g(t_j)).\eta^p(\Delta t_j) + \sum_{j=0}^{s-1} \eta^p\eta^q F^i_{pq} =$$

$$= \sum_{j=0}^{s-1} F^i_p\{g^p(t_{j+1})-g^p(t_j)\} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{s-1} F^i_{pq}.\{g^p(t_{j+1})-g^p(t_j)\}.\{g^q(t_{j+1})-g^q(t_j)\}.$$

y si $\lambda = \text{máx}(\Delta t_j) \to 0$, entonces para las funciones $g^p(t)$ de variación acotada, el limite :

$$H^i = \lim_{s\to\infty} H^i_s$$

se expresa mediante la integral de Stieltjes :

$$H^i(\Gamma) = \lim_{o} H^i_s = \int_\Gamma F^i_p(g^{-1}(t),g(t))dg^p$$

$$\Omega(\Gamma) = H^i(\Gamma).e_i$$

Decimos que la curva Γ: $g = g(t)$ es de variación acotada si existe homeomorfismo $g^i = g^i(t)$ tal que $g^i(t)$ son de variación acotada, y el cambio de coordenadas $t'=\phi(t)$ es de clase C^1 satisfaciendo la condición : $d\phi/dt \quad 0$.

El resultado obtenido se puede expresar :

TEOREMA 1-2.1.-

Si la curva Γ *contenida en un grupo de Lie G, es de variación acotada, entonces existe en el álgebra de Lie L(G) un vector integral finito* $\Omega(\Gamma)$.

DEFINICION 1-2.1.-

El vector integral $\Omega(t) = \Omega(g(t_0),g(t))$, *determina en el álgebra de Lie* $L(G)=T_e(G)$ *una curva* $\Omega=\Omega(t)$ *llamada indicatriz integral de* Γ.

Se deduce inmediatamente que la indicatriz integral es la misma para todas las curvas congruentes.
Damos a continuación el siguiente teorema del cual omitimos la demostración :

TEOREMA 1-2.2.-

Si dos curvas Γ_1: $g=g_1(t)$, Γ_2: $g=g_2(t)$, $t_0 \leq t \leq \hat{t}$ *en un grupo de Lie G son absolutamente continuas y tienen la misma indicatriz integral, entonces son congruentes :* $\Gamma_2=a.\Gamma_1$.

TEOREMA 1-2.3.-

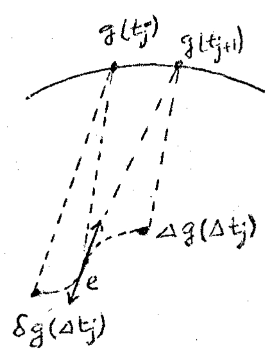
Sea la curva Γ: $g=g(t)$, $t_0 \leq t \leq \hat{t}$. *Al recorrer* Γ *en un sentido o en otro, obtenemos vectores integrales* *opuestos en $T_e(G)$.*

Demostración :

Recorriendo la curva en el sentido de los valores crecientes de t, obtenemos los puntos :

$$\Delta g(\Delta t_j) = g^{-1}(t_j).g(t_{j+1})$$

Si la recorremos en sentido contrario conservando la misma partición, obtenemos los puntos :



$$\delta g(\Delta t_j) = g^{-1}(t_{j+1}).g(t_j)$$

Si Δt_j es suficientemente pequeño, los puntos $g(t_j), g(t_{j+1})$ son próximos, y por tanto los $\Delta g(\Delta t_j)$, $\delta g(\Delta t_j)$ serán próximos a <u>e</u>. Cada uno de estos puntos define un único subgrupo uniparametrico, según vimos. Pero tenemos :

$$\Delta g(\Delta t_j).\delta g(\Delta t_j) = \delta g(\Delta t_j).\Delta g(\Delta t_j) = e$$

luego pertenecen al mismo subgrupo. Aplicando al producto anterior el desarrollo (1.2.1) :

$$0 = e^i = (\delta g(\Delta t_j).\Delta g(\Delta t_j))^i =$$

$$= \delta g^i(\Delta t_j) + \Delta g^i(\Delta t_j) + a^i_{kl}\delta g^k(\Delta t_j).\Delta g^l(\Delta t_j) +$$

$$+ b^i_{klm}\delta g^k(\Delta t_j).\delta g^l(\Delta t_j).\Delta g^m(\Delta t_j) + \ldots$$

Para despejar $\delta g^i(\Delta t_j)$ en función de $\Delta g^i(\Delta t_j)$, hagamos una primera aproximación en la ecuación anterior con :
$\delta g^i(\Delta t_j) = -\Delta g^i(\Delta t_j)$, con lo cual :

$$\delta g^i(\Delta t_j) = -\Delta g^i(\Delta t_j) + a^i_{kl}\Delta g^k(\Delta t_j).\Delta g^l(\Delta t_j) -$$

$$- b^i_{klm}\Delta g^k(\Delta t_j).\Delta g^l(\Delta t_j).\Delta g^m(\Delta t_j) + \ldots$$

Y sustituyendo la expresión (1.2.2) de $\Delta g^i(\Delta t_j)$:

$$\Delta g^i(\Delta t_j) = \eta^p(\Delta t_j).F^i_p(g^{-1}(t_j),g(t_j)) +$$

$$+ \eta^p(\Delta t_j)\eta^q(\Delta t_j).F^i_{pq}(g(t_j),g^{-1}(t_j),\eta(\Delta t_j))$$

$$\delta g^i(\Delta t_j) = -\eta^p(\Delta t_j).F^i_p - \eta^p(\Delta t_j)\eta^q(\Delta t_j).F^i_{pq} +$$

$$+ a^i_{kl}\eta^p(\Delta t_j)\eta^q(\Delta t_j)F^k_p.F^l_q + O(\Delta t_j)^3$$

Analogamente a como se hizo para $\Delta g(\Delta t_j)$, formemos para $\delta g(\Delta t_j)$ la suma :

$$\bar{H}^i_s(t_0,\hat{t},\Gamma) = -\sum_{j=0}^{s-1} \eta^p(\Delta t_j).F^i_p - \sum_{j=0}^{s-1} \eta^p(\Delta t_j).\eta^q(\Delta t_j).F^i_{pq} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{s-1} a^i_{kl}\eta^p(\Delta t_j)\eta^q(\Delta t_j).F^k_p.F^l_q + \ldots$$

$$\bar{H}^i(t_o,\hat{t},\Gamma) = \lim_{s\to\infty} \bar{H}^i_s(t_0,t,\Gamma) = -\int_\Gamma F^i_p dg^p$$

pues al ser los restantes sumandos en orden mayor de η, con coeficientes acotados, se anulan. Así pues :

$$\bar{H}^i(t_o,\hat{t},\Gamma) = -H^i(t_0,\hat{t},\Gamma),$$

1-3. INVARIANCIA DEL VECTOR INTEGRAL.-

Vimos al final del párrafo (1-1) que el vector integral de una curva es invariante por traslaciones a izquierda. Nos ocuparemos ahora de buscar las condiciones para el grupo de Lie G, bajo las cuales este vector integral es invariante por traslaciones a derecha.

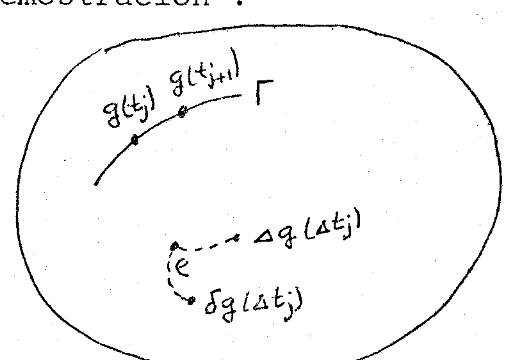
TEOREMA 1-3.1.-

Dada la curva Γ: $g=g(t)\subset U\subset G$, $t_0\leq t\leq \hat{t}$, *el vector integral operando a izquierda coincide con el vector integral operando a derecha si y solo si se verifica :*

$$a_k^i(g(t)).F_p^k(g^{-1}(t),g(t)) = F_p^i(g^{-1}(t),g(t)),$$

donde $a_k^i = a_k^i(g(t))$ *son los elementos de la matriz de la representación adjunta de G, y* $F_p^i(g^{-1}(t),g(t))$ *son las series (1.2.3).*

Demostración :



Operando a izquierda obtenemos los puntos :

$$\Delta g(\Delta t_j) = g^{-1}(t_j).g(t_{j+1})$$

Si operamos a derecha los :

$$\delta g(\Delta t_j) = g(t_{j+1}).g(t_j)$$

Pero observemos que :

$$\delta g(\Delta t_j) = g(t_j).\Delta g(\ t_j).g^{-1}(t_j) = \sigma_{g(t_j)}(\Delta g(\Delta t_j))$$

donde σ_b es el automorfismo interno :

$$\sigma_b : g \longrightarrow b.g.b^{-1}, \quad b,g\varepsilon G \tag{1.3.1}$$

Pero en coordenadas canonicas tenemos :

$$(b.g.b^{-1})^i = a^i_j(b).g^j \tag{1.3.2}$$

donde $a^i_j(b)$ son los elementos de la matriz de la representación adjunta de G. En nuestro caso :

$$\delta g^i(\Delta t_j) = a^i_k(g(t_j)).\Delta g^k(\Delta t_j) \tag{1.3.3}$$

Las componentes del vector integral definido a partir de los puntos $\delta g^i(\Delta t_j)$ son :

$$\bar{H}^i_s(t_0,\hat{t},\Gamma) = \sum_{j=0}^{s-1} \delta g^i(\Delta t_j), \tag{1.3.4}$$

Pero de (1.2.2) tenemos :

$$\Delta g^k(\Delta t_j) = \eta^p(\Delta t_j).F^k_p + \eta^p(\Delta t_j)\eta^q(\Delta t_j).F^k_{pq}$$

con lo cual, sustituyendo en (1.3.3) y en (1.3.4) :

$$\bar{H}^i_s(t_0,\hat{t},\Gamma) = \sum_{j=0}^{s-1} a^i_k(g(t_j).\ \eta^p(\Delta t_j).F^k_p + \eta^p(\Delta t_j)\eta^q(\Delta t_j).F^k_{pq} =$$

$$= \sum_{j=0}^{s-1} a^i_k(g(t_j)).\eta^p(\Delta t_j).F^k_p + \sum_{j=0}^{s-1} a^i_k(g(t_j)).\eta^p.\eta^q.F^k_{pq} \ .$$

Considerando : $\eta^p(\Delta t_j) = g^p(t_{j+1}) - g^p(t_j)$:

$$\bar{H}^i_s(t_0,\hat{t},\Gamma) = \sum_{j=0}^{s-1} a^i_k(g(t_j)).F^k_p.\{g^p(t_{j+1})-g^p(t_j)\} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{s-1} a^i_k(g(t_j)).\{g^p(t_{j+1})-g^p(t_j)\}.\{g^q(t_{j+1})-g^q(t_j)\}.F^k_{pq}$$

que para las curvas de variación acotada, pasando al limite : $s\to\infty$:

$$\bar{H}^i(t_0,\hat{t},\Gamma) = \int_\Gamma a^i_k(g(t)).F^k_p.dg^p$$

Pero siendo :

$$H^i(t_0,\hat{t},\Gamma) = \int_\Gamma F^i_p.dg^p$$

Para que sea $\bar{H}^i(t_0,\hat{t},\Gamma) = H^i(t_0,\hat{t},\Gamma)$ para cualquier arco de curva Γ G, se ha de verificar :

$$a^i_k(g(t)).F^k_p(g(t),g^{-1}(t)) = F^i_p(g(t),g^{-1}(t))$$

TEOREMA 1-3.2.-

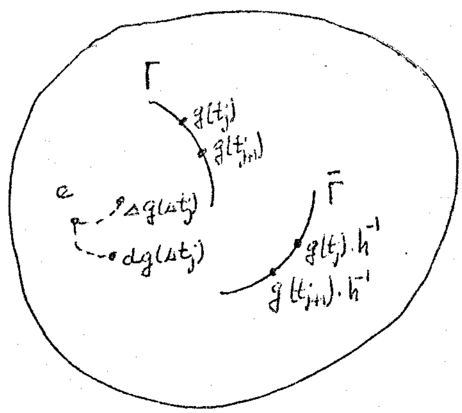
Dada la curva Γ: $g = g(t)$, $t_0 \leq t \leq \hat{t}$, el vector integral es invariante a derecha ~~y~~ por tanto bi-invariante, si y solo si se verifica :

$$a^i_k(h).F^k_p(g(t),g^{-1}(t)) = F^i_p(g(t),g^{-1}(t))$$

para todo elemento $h\in G$, tal que $\Gamma.h^{-1}\subset U\subset G$.

Demostración :

Queremos que el vector integral de Γ: $g = g(t)$ sea el mismo que el de $\bar{\Gamma}$: $\bar{g} = g(t).p$, para todo $p\varepsilon G$ tal que $\bar{\Gamma}$ U G.



Pongamos mejor $p=h^{-1}$. La curva Γ, nos define los puntos :

$$\Delta g(\Delta t_j) = g^{-1}(t_j).g(t_{j+1})$$

La curva $\bar{\Gamma}$ los :

$$dg(\Delta t_j) =$$

$$= \{g(t_j).h^{-1}\}^{-1}.\{g(t_{j+1}).h^{-1}\} =$$

$$= h.g^{-1}(t_j).g(t_{j+1}).h^{-1} = h.\Delta g(\Delta t_j).h^{-1}$$

Pero en coordenadas esto se expresa :

$$dg^i(\Delta t_j) = a^i_k(h).\Delta g^k(\Delta t_j)$$

Lo mismo que en el teorema anterior, el vector integral definido por $\bar{\Gamma} = \Gamma.h^{-1}$, es de componentes :

$$\bar{H}^i(t_0,\hat{t},\Gamma) = \int_\Gamma a^i_k(h).F^k_p dg^p = a^i_k(h).\int_\Gamma F^k_p dg^p$$

Para que sea el mismo que el definido por Γ, de componentes :

$$H^i(t_o,\hat{t},\Gamma) = \int_\Gamma F^i_p dg^p$$

para culquier curva $\Gamma \subset U \subset G$ se ha de verificar :

$$a^i_k(h).F^k_p(g(t),g^{-1}(t)) = F^i_p(g(t),g^{-1}(t))$$

TEOREMA 1-3.3.-

Existe un entorno $U_1(e)\subset U(e)$, donde para toda curva $\Gamma\subset U_1$, y todo elemento $h\varepsilon U_1$ los teoremas (1-3.1) y (1-3.2), son equivalentes.

Demostración :

Es evidente que existe un entorno $U_1(e)\subset U(e)$ tal que : $U_1.U_1^{-1}\subset U$. Si se verifica el teorema (1-3.1), coinciden el vector integral operando a derecha y a izquierda de cualquier curva de U_1. Sea $h\varepsilon U_1$, $\Gamma\subset U_1$. En particular se verifica el teorema para la curva $\bar{\Gamma}$: $\Gamma.h^{-1}\subset U_1\subset U$, y calculando el vector integral de esta operando a derecha por ejemplo, nos encontramos con los puntos :

$$\{g(t_{j+1}).h^{-1}\}.\{g(t_j).h^{-1}\}^{-1} = g(t_{j+1}).h^{-1}.h.g^{-1}(t_j) =$$

$$= g(t_{j+1}).g^{-1}(t_j)$$

puntos que coinciden con los obtenidos para la curva Γ operando a derecha. Asi pues, Γ, y $\bar{\Gamma}$ tienen el mismo vector integral, con lo cual queda demostrado el teorema (1-3.2). Reciprocamente, si se verifica el teoreme (1-3.2), tenemos la igualdad :

$$a_k^i(h).F_p^k(g(t),g^{-1}(t)) = F_p^i(g(t),g^{-1}(t)),\ h\varepsilon U_1 \qquad (*)$$

En particular para h = g(t) donde t $\{t_0,\hat{t}\}$pues siempre $\Gamma.\Gamma\subset U_1\subset U$ si $\Gamma\subset U$.Asi se puede escribir (*) con h=g(t).

TEOREMA 1-3.4.-

El vector integral de una curva es invariante a derecha si y solo si el grupo de Lie es conmutativo.

Para la demostración de este teorema, nos apoyaremos en el siguiente :

LEMA 1-3.1.-

El determinante $|F_j^i|$, $i,j=1,\ldots,r$, *donde las* F_j^i *son las series (1.2.3) es distinto de cero para cualquier grupo de Lie G.*

Demostración :

Supongamos que es cero dicho determinante :

$$\begin{vmatrix} F_1^1 & F_1^2 & \ldots & F_1^r \\ F_2^1 & F_2^2 & \ldots & F_2^r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_r^1 & F_r^2 & \ldots & F_r^r \end{vmatrix} = 0$$

Entonces existe una columna combinación lineal de las demás, por ejemplo la primera :

$$\begin{array}{ll} F_1^1 = \lambda_2 . F_1^2 + \ldots + \lambda_r . F_1^r & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \lambda_2,\ldots,\lambda_r \varepsilon R, \text{ algun } \lambda_i \neq 0 \\ F_r^1 = \lambda_2 . F_r^2 + \ldots + \lambda_r . F_r^r & \end{array}$$

Entonces, dada una curva cualquiera Γ: $g = g(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \hat{t}$ su vector integral que viene dado por :

$$\Omega(\Gamma) = H^i(\Gamma).e_i, \quad H^i(t_0,\hat{t},\Gamma) = \int_\Gamma F^i_p.dg^p$$

cumple segun las anteriores relaciones :

$$H^1(t_0,\hat{t}\Gamma) = \int_\Gamma F^1_p.dg^p = \int_\Gamma (F^1_1.dg^1 + \ldots + F^1_r.dg^r) =$$

$$= \int_\Gamma \{(\lambda_2.F^2_1 + \ldots + \lambda_r.F^r_1).dg^1 + \ldots +$$

$$+ (\lambda_2.F^2_r + \ldots + \lambda_r.F^r_r).dg^r\} = \int_\Gamma \lambda_2.(F^2_1.dg^1 + \ldots + F^2_r dg^r) +$$

$$+ \ldots + \int_\Gamma \lambda_r.(F^r_1.dg^1 + \ldots + F^r_r.dg^r) =$$

$$= \lambda_2 \int_\Gamma F^2_p.dg^p + \ldots + \lambda_r \int_\Gamma F^r_p,dg^p =$$

$$= \lambda_2.H^2(t_0,\hat{t},\Gamma) + \ldots + \lambda_r.H^r(t_0,\hat{t},\Gamma) \qquad (*)$$

O sea que la primera componente del vector integral de cualquier curva, debe ser combinación lineal de las restantes. Pero podemos escoger siempre un vector $v \varepsilon T_e(G)$, tal que en la base natural de $T_e(G)$ su primera componente no verifique tal condición:

$$v = v_1 e_1 + \ldots + v_r e_r, \quad v_1 \neq \lambda_2.v_2 + \ldots + \lambda_r.v_r$$

Este vector v, induce en L(G) un campo invariante a izquierda X, y este un subgrupo uniparametrico exptX, cuyo vector integral para $0 \leq t \leq \hat{t}$, es proporcional a v, y por tanto no cumple la condición (*). Entonces debe ser :

$$|F_j^i| \neq 0$$

Demostración del teorema :

Si el vector integral de una curva Γ: $g = g(t)$, $t_0 \leq t \leq \hat{t}$ se verifica según el teorema (1-3.2) la relación :

$$a_k^i(h).F_p^k(g(t),g^{-1}(t)) = F_p^i(g(t),g^{-1}(t)),$$

donde $h \in G$ tal que $\Gamma.h \subset U(e) \subset G$.

Escribamos desarrollado este sistema para p=1,...,r :

$$\begin{array}{ll}
a_1^i.F_1^1 + a_2^i.F_1^2 + \ldots + a_r^i.F_1^r = F_1^i & \\
a_1^i.F_2^1 + a_2^i.F_2^2 + \ldots + a_r^i.F_2^r = F_2^i & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & i=1,\ldots,r \\
a_1^i.F_r^1 + a_2^i.F_r^2 + \ldots + a_r^i.F_r^r = F_r^i &
\end{array}$$

Son r ecuaciones con r incógnitas $a_1^i,\ldots,a_r^i$. Como por el lema el determinante de los coeficientes es distinto de cero, podemos despejar por la regla de Crámer, llamando $\Delta = |F_j^i| \neq 0$:

$$a_1^i = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} F_1^i & F_1^2 & \ldots & F_1^r \\ F_2^i & F_2^2 & \ldots & F_2^r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_r^i & F_r^2 & \ldots & F_r^r \end{vmatrix}, \quad a_2^i = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} F_1^1 & F_1^i & \ldots & F_1^r \\ F_2^1 & F_2^i & \ldots & F_2^r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_r^1 & F_r^i & \ldots & F_r^r \end{vmatrix}$$

$$a_r^i = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} F_1^1 & \dots & F_1^{r-1} & F_1^i \\ F_2^1 & \dots & F_2^{r-1} & F_2^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_r^1 & \dots & F_r^{r-1} & F_r^i \end{vmatrix}$$

y como se comprueba facilmente se verifica :

$$a_j^i(h) = \delta_j^i \quad \text{para todo } h \in G$$

Asi pues la matriz de la representación adjunta de G, tiene la forma :

$$\mathrm{Adj}(h) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Luego el grupo G es conmutativo. Con esto tenemos una caracterización de los grupos de Lie conmutativos.

§1-4. CASOS PARTICULARES.-

a) <u>G = R x R</u> :

Los subgrupos uniparametricos de R^2 son las rectas pasando por e(0,0). La operación producto de dos puntos viene dada por :

$$P(x_1,x_2),\ Q(y_1,y_2)$$

$$P^{-1}.Q = f(P^{-1},Q) = (-x_1,-x_2).(y_1,y_2) = (-x_1+y_1,-x_2+y_2)$$

de donde :

$$f^1(P^{-1}.Q) = (P^{-1}.Q)^1 = -x_1 + y_1$$

$$f^2(P^{-1}.Q) = (P^{-1}.Q)^2 = -x_2 + y_2$$

y recordando la expresión (1.2.3) :

$$F^i_p = \frac{\partial f^i(P^{-1}.Q)}{\partial y^p}$$

$$F^1_1 = 1;\ F^1_2 = 0;\ F^2_1 = 0;\ F^2_2 = 1$$

Sea ahora una curva en R^2: Γ: $g = g(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \hat{t}$. El vector integral, si Γ es de variación acotada viene dado por :

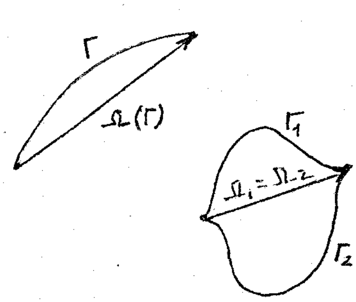
$$\Omega(\Gamma) = H^i(t_0,\hat{t},\Gamma).e_i, \quad H^i = \int_{t_0}^{\hat{t}} F^i_p.dg^p, \quad e_1 = \left.\frac{\partial}{\partial x}\right)_e \ e_2 = \left.\frac{\partial}{\partial y}\right)_e$$

$$H^1 = \int_{t_0}^{\hat{t}} F^1_1.dg^1 + F^1_2.dg^2 = \int_{t_0}^{\hat{t}} dg^1 = g^1(\hat{t}) - g^1(t_0)$$

$$H^2 = \int_{t_0}^{\hat{t}} F^2_1.dg^1 + F^2_2.dg^2 = \int_{t_0}^{\hat{t}} dg^2 = g^2(t) - g^2(t_0)$$

$$\Omega(\Gamma) = \{g^1(\hat{t})-g^1(t_0)\}.e_1 + \{g^2(\hat{t})-g^2(t_0)\}.e_2 = \Omega(t_0,\hat{t})$$

Como vemos solo depende de los extremos de la curva, pues resulta ser el vector integral de la curva Γ, la cuerda de dicha curva



Según esto, dos curvas con los extremos coincidentes, tienen el mismo vector integral. Se deduce que toda curva ce-

rrada en R^2, tiene el vector integral cero.
Al ser R^2 conmutativo, el vector integral es invariante a derecha.
La indicatriz integral de una curva en R^2 es la misma curva trasladada a $e(0,0)$. Todo lo dicho para R^2, se puede aplicar tambien, por ejemplo al cilindro, pues la ley de composición es tambien la suma de coordenadas. Unicamente existe la diferencia de que la indicatriz de una curva es el resultado de dearrollarla sobre el plano tangente en e.

b) $G \equiv x_1 . x_4 = x_2 . x_3 \subset R^4$, $x_i \neq 0$, $i=1,\ldots,4$

En el apéndice se demuestra que este conjunto con la operación :

$$(x_1,x_2,x_3,x_4).(y_1,y_2,y_3,y_4) = (x_1.y_1,x_2.y_2,x_3.y_3,x_4.y_4)$$

es un grupo de Lie conmutativo, de dimensión 3, con ocho componentes conexas.
Sea una curva Γ: $g = g(t) \subset G$, $t_0 \leq t \leq \hat{t}$. Tomemos dos puntos :

$$x = (x_1,x_2,x_3,x_4),\ y = (y_1,y_2,y_3,y_4)$$

$$x^{-1}.y = f(x^{-1},y) = (\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3},\frac{1}{x_4}).(y_1,y_2,y_3,y_4) =$$

$$= (\frac{y_1}{x_1},\frac{y_2}{x_2},\frac{y_3}{x_3},\frac{y_4}{x_4}),\ x_i \neq 0,\ y_i \neq 0,\ i=1,2,3,4$$

de donde las F^i_j son :

$$F_1^1 = \frac{1}{x_1} \qquad F_1^2 = 0 \qquad F_1^3 = 0 \qquad F_1^4 = 0$$

$$F_2^1 = 0 \qquad F_2^2 = \frac{1}{x_2} \qquad F_2^3 = 0 \qquad F_2^4 = 0$$

$$F_3^1 = 0 \qquad F_3^2 = 0 \qquad F_3^3 = \frac{1}{x_3} \qquad F_3^4 = 0$$

$$F_4^1 = 0 \qquad F_4^2 = 0 \qquad F_4^3 = 0 \qquad F_4^4 = \frac{1}{x_4}$$

de donde las componentes del vector integral de Γ son :

$$H^i(t_0,\hat{t},\Gamma) = \int_\Gamma F_p^i . dg^p = \int_\Gamma \frac{1}{g^i}.dg^i =$$

$$= \int_{t_0}^{\hat{t}} \frac{\dot{g}^i}{g^i}.dt = \ln \frac{g^i(\hat{t})}{g^i(t_0)} ; \qquad \dot{g}^i = \frac{dg^i}{dt}$$

de donde el vector integral es :

$$\Omega(\Gamma) = \{\ln \frac{g^i(\hat{t})}{g^i(t_0)}\} e_i, \quad e_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_e$$

Observemos que en este grupo toda curva cerrada tiene el vector integral cero. En efecto : si $g(t_0) = g(\hat{t})$

$$g^i(t_0) = g^i(\hat{t}),\ H^i = \ln \frac{g^i(\hat{t})}{g^i(\hat{t})} = \ln 1 = 0, \text{ para todo } i.$$

Es sencillo ver aquí en particular, que si dos curvas tienen la misma indicatriz integral, son congruentes: Sean $\Gamma_1 : g = g(t)$, $\Gamma_2 : h = h(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \hat{t}$

La indicatriz tiene de componentes :

$$H_1^i(t) = \ln \frac{g^i(t)}{g^i(t_0)} = \ln \frac{h^i(t)}{h^i(t_0)} = H_2^i(t)$$

tomando antilogaritmos :

$$\frac{g^i(t)}{g^i(t_0)} = \frac{h^i(t)}{h^i(t_0)}, \qquad g^i(t) = \frac{g^i(t_o)}{h^i(t_o)}\cdot h^i(t)$$

de donde :

$$g^i(t) = a^i.h^i(t), \quad g(t) = a.h(t), \; a = \frac{g(t_o)}{h(t_o)}\varepsilon G$$

<u>c) : G = S^3</u>.-

La esfera $G = S^3$ es un grupo de Lie no conmutativo. Viene dada S^3 por la correspondencia biunívoca que existe entre los puntos $P(x_1,x_2,x_3,x_4)\varepsilon S^3 \subset R^4$, y los cuaternios unimodulares Q:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) \longrightarrow (x_1+ix_2+jx_3+kx_4)$$

donde $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$

Por este motivo se tiene :

$$x^{-1} = \bar{x} = (x_1-ix_2-jx_3-kx_4), \; \bar{x} \text{ conjugado de } x.$$

Calculemos las funciones F_p^i :

$$(x^{-1}.y) = f(x^{-1},y) = (x_1-ix_2-jx_3-kx_4).(y_1+iy_2+jy_3+ky_4) =$$

$$= x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 + x_4 \cdot y_4 + i.(x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 +$$

$$+ x_4 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_4) + j.(x_1 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_4 - x_4 \cdot y_2) +$$

$$+ k.(x_1 \cdot y_4 - x_4 \cdot y_1 + x_3 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_3)$$

Con esto , las F_p^i son sin más que derivar con respecto a y_p cada una de las componentes de ese producto :

$$\begin{array}{llll}
F_1^1 = x_1 & F_1^2 = -x_2 & F_1^3 = -x_3 & F_1^4 = -x_4 \\
F_2^1 = x_2 & F_2^2 = x_1 & F_2^3 = -x_4 & F_2^4 = x_3 \\
F_3^1 = x_3 & F_3^2 = x_4 & F_3^3 = x_1 & F_3^4 = -x_2 \\
F_4^1 = x_4 & F_4^2 = -x_3 & F_4^3 = x_2 & F_4^4 = x_1
\end{array}$$

Sea la curva Γ: $g = g(t) \subset S^3$. Las componentes del vector integral de Γ:

$$H^1(t_0,\hat{t},\Gamma) = \int_{t_0}^{\hat{t}} (g_1 \cdot g_1' + g_2 \cdot g_2' + g_3 \cdot g_3' + g_4 \cdot g_4')dt = 0 \quad (*)$$

$$H^2(t_0,\hat{t},\Gamma) = \int_{t_0}^{\hat{t}} (g_1 \cdot g_2' - g_2 \cdot g_1' + g_4 \cdot g_3' - g_3 \cdot g_4')dt$$

$$H^3(t_0,\hat{t},\Gamma) = \int_{t_0}^{\hat{t}} (g_1 \cdot g_3' - g_3 \cdot g_1' + g_2 \cdot g_4' - g_4 \cdot g_2')dt$$

$$H^4(t_0,\hat{t},\Gamma) = \int_{t_0}^{\hat{t}} (g_1 \cdot g_4' - g_4 \cdot g_1' + g_3 \cdot g_2' - g_2 \cdot g_3')dt$$

Al no ser conmutativo, el vector integral no es invariante a derecha.

(*): se deduce derivando : $g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + g_4^2 = 1$

d) : <u>G = Gl(2,R)</u>

No es conmutativo, y la operaci´on viene dada por :

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \qquad x^{-1} \doteq \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

donde $\Delta = x_{11} \cdot x_{22} - x_{12} \cdot x_{21} \neq 0$.

$$x^{-1}.y = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} y_{11}.x_{22} - x_{12}.y_{21} & y_{12}.x_{22} - y_{22}.x_{12} \\ -y_{11}.x_{21} + y_{21}.x_{11} & -y_{12}.x_{21} + y_{22}.x_{11} \end{pmatrix}$$

Derivando con respecto a $y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}$ las componentes de esta matriz considerada como un vector de R^4, se obtienen las F_j^i :

$$\begin{array}{llll} F_1^1 = \frac{1}{\Delta}x_{22} & F_1^2 = 0 & F_1^3 = -\frac{1}{\Delta}x_{21} & F_1^4 = 0 \\ F_2^1 = 0 & F_2^2 = \frac{1}{\Delta}x_{22} & F_2^3 = 0 & F_2^4 = -\frac{1}{\Delta}x_{21} \\ F_3^1 = -\frac{1}{\Delta}x_{12} & F_3^2 = 0 & F_3^3 = \frac{1}{\Delta}x_{11} & F_3^4 = 0 \\ F_4^1 = 0 & F_4^2 = -\frac{1}{\Delta}x_{12} & F_4^3 = 0 & F_4^4 = \frac{1}{\Delta}x_{11} \end{array}$$

Sea entonces una curva Γ:

$$g = g(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{pmatrix} \subset Gl(2,R) \qquad t_0 \leqslant t \leqslant \hat{t}$$

Las componentes de su vector integral :

$$H^1(\Gamma) = \int_{t_0}^{\hat{t}} F_p^1.dg^p = \int_{t_0}^{\hat{t}} \frac{1}{\Delta}(g_{22}.g'_{11} - g_{12}.g'_{12})dt$$

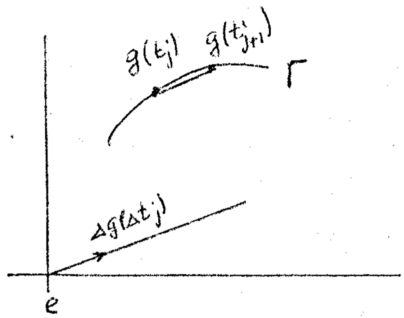
$$H^2(\Gamma) = \int_{t_0}^{\hat{t}} F_p^2.dg^p = \int_{t_0}^{\hat{t}} \frac{1}{\Delta}(g_{22}.g'_{12} - g_{12}.g'_{22})dt$$

$$H^3(\Gamma) = \int_{t_0}^{\hat{t}} F_p^3.dg^p = \int_{t_0}^{\hat{t}} \frac{1}{\Delta}(g_{11}.g'_{21} - g_{21}.g'_{11})dt$$

$$H^4(\Gamma) = \int_{t_0}^{\hat{t}} F_p^4.dg^p = \int_{t_0}^{\hat{t}} \frac{1}{\Delta}(g_{11}.g'_{22} - g_{21}.g'_{21})dt$$

2.- LONGITUD EN GRUPOS DE LIE

Observemos en primer lugar cómo se calcula la longitud de una curva en el plano R^2 :



Dada la curva Γ: $g = g(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \hat{t}$, hagamos una partición del intervalo $\{t_o, \hat{t}\}$. Entonces, el arco de curva $(g(t_j), g(t_{j+1}))$, se confunde en el límite con su cuerda, y tomamos la longitud de esta como la del arco correspondiente. Sumando para todos los arcos, se obtiene la longitud de Γ.

Esto podemos verlo desde otro punto de vista según la línea seguida :

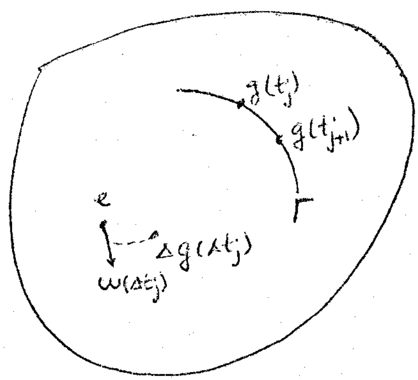
Si trasladamos el arco $(g(t_j), g(t_{j+1}))$ haciendo coincidir $g(t_j)$ con $e(0,0)$, entonces $g(t_{j+1})$ pasa a ser el punto $\Delta g(\Delta t_j)$. Existe una recta pasando por e y por $\Delta g(\Delta t_j)$. El vector tangente en e a esta recta, no es otra cosa que el mismo vector cuerda del arco $(g(t_j), g(t_{j+1}))$. El módulo de este vector, es el que tomamos como longitud de dicho arco. Sumando para todos los t_j, el límite es por definición la longitud de Γ.

Vamos a generalizar esta idea a un grupo de Lie cualquiera G.

2-1. DEFINICION DE LONGITUD.-

Consideremos en primer lugar, definida en $T_e(G)$ la métrica euclidiana.

Sea Γ: $g = g(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \hat{t}$, $\Gamma \subset U(e) \subset G$ una curva. Hagamos una partición del intervalo $\{t_0, \hat{t}\}$, por los puntos :



$t_0 < t_1 < \ldots < t_{s-1} = \hat{t}$.

A partir del proceso bien conocido ya, el punto :

$$\Delta g(\Delta t_j) = g^{-1}(t_j).g(t_{j+1})$$

determina un vector tangente en e, al subgrupo uniparametrico que lo contiene : $\gamma(\Delta t_j)$:

$$\gamma(\Delta t_j) : g = y(u_j),\ 0 < u_j < \hat{u}_j,\ \hat{u}_j = \Delta t_j$$

Llamando $\omega(\Delta t_j)$ a dicho vector, tenemos :

$$\omega(\Delta t_j) = \Delta g^i(\Delta t_j).e_i = \alpha^i(\Delta t_j).\Delta t_j.e_i$$

siendo $\alpha = \alpha^i(\Delta t_j).e_i$ el vector tangente a $\gamma(\Delta t_j)$ en e.

Tomemos el módulo de este vector :

$$|\omega(\Delta t_j)| = \left[\sum_{i=1}^{r} \{\Delta g^i(\Delta t_j)\}^2\right]^{1/2} = \Delta t_j . \left[\sum_{i=1}^{r} \{\alpha^i(\Delta t_j)\}^2\right]^{1/2}$$

Sumando en $j=0,1,\ldots,s-1$:

$$\sum_{j=0}^{s-1} |\omega(\Delta t_j)| = \sum_{j=0}^{s-1} \left[\sum_{i=1}^{r} \{\alpha^i(\Delta t_j)\}^2\right]^{1/2} . \Delta t_j$$

Si existe limite para esa suma cuando $\lambda = \text{máx}(\Delta t_j) \to 0$, y $s \to \infty$, será la longitud de Γ.

Observemos que para cada arco $(g(t_j), g(t_{j+1}))$, el vector $\omega(\Delta t_j)$ es el vector integral de dicho arco si la partición es suficientemente fina. Si conservamos fijo $g(t_j)$, y vamos hallando el vector integral de cada arco $(g(t_j), g(t_{j+1}))$, $(g(t_j), g(t_{j+2}))$,..., el extremo de estos vectores describe en $T_e(G)$ la indicatriz integral del arco correspondiente al intervalo de t considerado. La longitud de dicha indicatriz, al ser $T_e(G)$ con la metrica euclidea, se calcula mediante la suma de las longitudes de las curedas correspondientes a la partición hecha de $\{t_0, \hat{t}\}$, y pasando al limite. Pero estas cuerdas no son otra cosa que los módulos de los vectores integrales correspondientes a cada intervalo $\{t_0, \hat{t}\}$. Asi pues, tenemos la siguiente :

DEFINICION 2-1.1.-

Sea Γ*:* $g = g(t)$, $t_0 \leq t \leq \hat{t}$ *una curva tal que* $\Gamma \subset U \subset G$. *Llamamos longitud de* Γ*, a la longitud de su indicatriz integral, definida la metrica euclidea en* $T_e(G)$*:*

$$\ell(\Gamma) = \ell(\Omega(t)), \quad t_0 \leq t \leq \hat{t}$$

supuesta Γ *de variación acotada.*

Consecuencia de la definición :

La longitud de una curva Γ, es independiente del sentido de recorrido de la misma.

En efecto : Al recorrerla en un sentido o en otro, vamos obteniendo vectores integrales opuestos en $T_e(G)$, y en consecuencia las indicatrices integrales para cada caso son curvas simetricas con respecto a e en $T_e(G)$, y por tanto de igual longitud.

PROPOSICION 2-1.1.-

La longitud de un subgrupo uniparametrico o una traslación a izquierda o derecha de este, es igual al módulo de su vector integral.

Demostración :

Es inmediato para un subgrupo uniparametrico, pues la indicatriz integral de cualquier subgrupo es una recta, ya que el vector integral de γ: $g = y(u)$, $0 \leq u \leq \hat{u}$ es, según vimos en (1-1) :

$$\Omega(\gamma) = \alpha^i . \hat{u} . e_i = \hat{u} . \alpha$$

siendo α el vector tangente a γ en e. Al variar u, se describe una recta en $T_e(G)$. Coincide entonces la suma de módulos con el módulo de la suma. Entonces queda claro que su longitud es $l(\gamma) = \hat{u} . |\alpha|$.

Si trasladamos el subgrupo a izquierda : $\bar{\gamma} = a.\gamma$, obtenemos una curva cuya indicatriz integral es la misma que la de γ, o sea una recta, con lo cual su longitud es el módulo de su vector integral.

Si trasladamos γ a derecha : $\bar{\bar{\gamma}} = \gamma.a$, la indicatriz de esta curva es la misma que la de :

$$\tilde{\gamma} = a^{-1}.\ \bar{\bar{\gamma}} = a^{-1}.\gamma.a$$

pero esta curva es un subgrupo uniparametrico y por tanto su longitud tambien es el módulo de su vector integral, aunque sea distinto del de γ. Que es un subgrupo se comprueba sin más que considerar :

$$\tilde{\gamma}(s+t) = a^{-1}.\gamma(s+t).a = a^{-1}.\gamma(s).\gamma(t).a =$$

$$= a^{-1}.\gamma(s).a.a^{-1}.\gamma(t).a = \tilde{\gamma}(s).\tilde{\gamma}(t)$$

si s y t son pequeños.

2-2. LONGITUD BI-INVARIANTE.-

Como siempre, consideraremos curvas $\Gamma : g = g(t) \subset U \subset G$ y traslaciones que sean dentro de U(e).

Es conocido que en un grupo de Lie existe siempre metrica bi-invariante si y solo si la matriz de la representación adjunta de G es ortogonal. Vamos a deducir esto haciendo uso de lo visto hasta el momento en este trabajo, para comprender más tarde la generalización a n-superficies, objeto del Capitulo II.

TEOREMA 2-2.1.-

La longitud de una curva $\Gamma: g = g(t) \subset U \subset G$ es invariante a derecha y por tanto bi-invariante si y solo si la matriz de la representación adjunta de G es ortogonal.

Demostración :

Al ser la indicatriz integral invariante por traslaciones a izquierda, la longitud tambien lo es. Así pues, veamos cuándo es invariante a derecha.

Sea entonces la curva Γ: $g = g(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \hat{t}$. Considerando una partición del intervalo $\{t_0, \hat{t}\}$:

$$t_o < t_1 < \ldots < t_{s-1} = \hat{t}$$

tomemos el arco de curva $(g(t_j), g(t_{j+1}))$. Si Δt_j es suficientemente pequeño, la longitud de este arco viene dada por el módulo del vector :

$$\omega(\Delta t_j) = \Delta g^i(\Delta t_j).e_i, \quad \Delta g(\Delta t_j) = g^{-1}(t_j).g(t_{j+1})$$

$$|\omega(\Delta t_j)|^2 = (\Delta g^1(\Delta t_j))^2 + \ldots + (\Delta g^r(\Delta t_j))^2$$

Traslademos ahora la curva Γ a derecha : $\bar{\Gamma} = \Gamma.h^{-1}$

Para esta curva tenemos el arco $(g(t_j).h^{-1}, g(t_{j+1}).h^{-1})$.

La longitud de este arco de la misma forma que antes viene dada por el módulo $\bar{\omega}(\Delta t_j)$, que se define :

$$\delta g(\Delta t_j) = \{g(t_j).h^{-1}\}^{-1}.\{g(t_{j+1}).h^{-1}\}$$

$$\delta g(\Delta t_j) = h.\Delta g(\Delta t_j).h^{-1}, \quad \bar{\omega}(\Delta t_j) = \delta g^i(\Delta t_j).e_i$$

Pero según vimos, al ser las coordenadas canonicas, se tiene :

$$\delta g^i(\Delta t_j) = a^i_k(h).\Delta g^k(\Delta t_j)$$

$$\bar{\omega}(\Delta t_j) = a^i_k(h).\Delta g^k(\Delta t_j).e_i = (a^1_1.\Delta g^1 + \ldots + a^1_r.\Delta g^r).e_1 +$$

$$+ \ldots + (a^r_1.\Delta g^1 + \ldots + a^r_r.\Delta g^r).e_r$$

$$|\bar{\omega}(\Delta t_j)|^2 = (\Delta g^1)^2.\{(a^1_1)^2 + \ldots + (a^r_1)^2\} + \ldots +$$

$$+ (\Delta g^r)^2.\{(a^1_r)^2 + \ldots + (a^r_r)^2\} +$$

$$+ 2.\Delta g^p.\Delta g^q.(a^1_p.a^1_q + \ldots + a^r_p.a^r_q), \ p < q, \ p=1,\ldots,r-1$$

Para que los arcos considerados tengan igual longitud, los vectores correspondientes $\omega(\Delta t_j)$, $\bar{\omega}(\Delta t_j)$ deben ser de igual módulo, con lo cual :

$$(\Delta g^1)^2 + \ldots + (\Delta g^r)^2 = (\Delta g^1)^2.\{(a^1_1)^2 + \ldots + (a^r_1)^2\} + \ldots$$

$$+ (\Delta g^r)^2.\{(a^1_r)^2 + \ldots + (a^r_r)^2\} +$$

$$+ 2.\Delta g^p.\Delta g^q.(a^1_p.a^1_q + \ldots + a^r_p.a^r_q), \ p < q, \ p=1,\ldots,r-1$$

En particular, se ha de verificar para aquellos subgrupos inducidos por los elementos de la base de $T_e(G)$, o sea, para vectores de coordenadas $(1,0,\ldots,0),\ldots,$ $(0,\ldots,0,1)$ con lo que :

$$(a^1_1)^2 + \ldots + (a^r_1)^2 = 1, \ldots, (a^1_r)^2 + \ldots + (a^r_r)^2 = 1$$

Tambien en particular, se ha de verificar la igualdad para aquellas curvas inducidas por e_i+e_j, $i\neq j$, o sea para vectores de coordenadas (1,1,0,...,0),..... (0,...,0,1,0,..,0,1,0,...,0),...,(0,...,0,1,1), con lo que se obtiene :

$$a_p^1.a_q^1 +\dots+ a_p^r.a_q^r = 0,\ p<q,\ p=1,\dots,r-1$$

Asi vemos que la matriz adjunta es ortogonal.

COROLARIO 2-2.1.-

Si el vector integral de las curvas es invariante a derecha, tambien lo es su longitud.

Demostración :

Es inmediato, pues el grupo será conmutativo.

2-3. CASOS PARTICULARES.

a) $G = R^2$:

Dada la curva Γ: $g = g(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \hat{t}$, la indicatriz integral viene dada por :

$$\Omega(t) = \{g^1(t) - g^1(t_0)\}.e_1 + \{g^2(t) - g^2(t_0)\}.e_2$$

que como curva en un espacio euclideo, su longitud es :

$$l(\Gamma) = l(\Omega(t)) = \int_{t_0}^{\hat{t}} \left[((g^1)')^2 + ((g^2)')^2\right]^{1/2} dt$$

expresión ya conocida por la geometria diferencial clasica.

b) $G \equiv x_1.x_4 = x_2.x_3,\ x_i \neq 0$

Sea la curva Γ: $x = x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \hat{t}$. Su indicatriz integral es :

$$\Omega(t) = H^i(t).e_i,\quad H^i(t) = \ln \frac{x_i(t)}{x_i(t_o)}$$

$$\Omega'(t) = \frac{x_i(t_0)}{x_i(t)} \cdot \frac{x_i'(t)}{x_i(t_0)} .e_i$$

$$l(\Gamma) = l(\Omega(t)) = \int_{t_o}^{\hat{t}} \left[(\frac{x_1'}{x_1})^2 + (\frac{x_2'}{x_2})^2 + (\frac{x_3'}{x_3})^2 + (\frac{x_4'}{x_4})^2\right]^{1/2} dt$$

Observemos que esta metrica no es la inducida por R^4, cosa logica, pues la operación en G no es la suma de componentes.

c) $G = Gl(2,R)$.

Sea la curva Γ:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{pmatrix} \qquad t_0 \leqslant t \leqslant \hat{t}$$

La indicatriz integral de Γ, tiene de componentes :

$$H^1(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\Delta}(x_{22}x'_{11} - x_{12}x'_{21})dt$$

$$H^2(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\Delta}(x_{22}x'_{12} - x_{12}x'_{22})dt$$

$$H^3(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\Delta}(x_{11}x'_{21} - x_{21}x'_{11})dt \qquad \Delta = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} \neq 0$$

$$H^4(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\Delta}(x_{11}x'_{22} - x_{21}x'_{12})dt$$

De donde sin más que derivar :

$$l(\Gamma) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\Delta} \{(x_{22}x'_{11} - x_{12}x'_{21})^2 + (x_{22}x'_{12} - x_{12}x'_{22})^2 +$$

$$+ (x_{11}x'_{21} - x_{21}x'_{11})^2 + (x_{11}x'_{22} - x_{21}x'_{12})^2\}^{1/2}.dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\Delta} \Big[\{(x'_{11})^2 + (x'_{12})^2\}\{(x_{22})^2 + (x_{21})^2\}+$$

$$+ \{(x'_{21})^2 + (x'_{22})^2\}.\{(x_{12})^2 + (x_{11})^2\}-$$

$$- 2.(x'_{11}x'_{21} + x'_{12}x'_{22}).(x_{12}x_{22} + x_{11}x_{21})\Big]^{1/2}.dt$$

Para ver si esta longitud es bi-invariante, la matriz adjunta cuyo calculo está en el apéndice debe ser ortog. :

$$Ad(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta} x_{11}x_{22} & \frac{1}{\Delta} x_{12}x_{22} & -\frac{1}{\Delta} x_{11}x_{21} & -\frac{1}{\Delta} x_{12}x_{21} \\ \frac{1}{\Delta} x_{21}x_{22} & \frac{1}{\Delta} x_{22}^2 & -\frac{1}{\Delta} x_{21}^2 & -\frac{1}{\Delta} x_{22}x_{21} \\ -\frac{1}{\Delta} x_{12}x_{11} & -\frac{1}{\Delta} x_{12}^2 & \frac{1}{\Delta} x_{11}^2 & \frac{1}{\Delta} x_{11}x_{12} \\ -\frac{1}{\Delta} x_{12}x_{21} & -\frac{1}{\Delta} x_{22}x_{12} & \frac{1}{\Delta} x_{21}x_{11} & \frac{1}{\Delta} x_{11}x_{22} \end{pmatrix}$$

Al no ser ortogonal esta matriz, la longitud en el grupo Gl(2,R) no es invariante a derecha.

d) $G = S^3$

Sea la curva Γ: $x = x(t)$, $t_0 \leq t \leq \hat{t}$, tal que :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

Las coordenadas de la indicatriz integral son :

$$H^1(t) = \int_{t_0}^{t} (x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3' + x_4x_4').dt = 0$$

$$H^2(t) = \int_{t_0}^{t} (x_1x_2' - x_2x_1' + x_4x_3' - x_3x_4').dt$$

$$H^3(t) = \int_{t_0}^{t} (x_1x_3' - x_3x_1' + x_2x_4' - x_4x_2').dt$$

$$H^4(t) = \int_{t_0}^{t} (x_1x_4' - x_4x_1' + x_3x_2' - x_2x_3').dt$$

y en consecuencia su longitud es :

$$l(\Gamma) = \int_{t_0}^{\hat{t}} \{(x_1x_2' - x_2x_1' + x_4x_3' - x_3x_4')^2 +$$

$$+ (x_1x_3' - x_3x_1' + x_2x_4' - x_4x_2')^2 +$$

$$+ (x_1x_4' - x_4x_1' + x_3x_2' - x_2x_3')^2\}^{1/2}.dt =$$

$$= \int_{t_0}^{\hat{t}} \{(x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2 + (x_4')^2\}^{1/2}.dt$$

Como vemos esta metrica coincide con la inducida por R^4

Para ver si la longitud es invariante a derecha, observemos que la matriz de la representación adjunta de S^3 cuyo calculo damos en el apéndice es ortogonal :

$$\mathrm{Adj}(x) = \begin{pmatrix} x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2 & 2(x_2x_3-x_1x_4) & 2(x_1x_3+x_2x_4) \\ 2(x_1x_4+x_2x_3) & x_1^2-x_2^2+x_3^2-x_4^2 & 2(x_3x_4-x_2x_1) \\ 2(x_2x_4-x_1x_3) & 2(x_3x_4+x_1x_2) & x_1^2-x_2^2-x_3^2+x_4^2 \end{pmatrix}$$

Con lo cual la longitud si que es invariante a derecha.

——— 0 ———

C A P I T U L O II

§1. N-VECTOR INTEGRAL DE UNA N-SUPERFICIE.

Sea G un grupo de Lie de dimensión r, y analitico. Sea $S \subset G$ una n-superficie definida por :

$$g = g(u^1,\dots,u^n),\ g^i = g^i(u^1,\dots,u^n),\ i = 1,\dots,r$$

en una carta local U de G, donde el punto $u = (u^1,\dots,u^n)$ recorre el intervalo D :

$$u_0^i \leqslant u^i \leqslant \hat{u}^i,\ i = 1,\dots,n$$

en el espacio euclidiano E_n.

Damos a continuación una definición analoga a (1-1) CapI :

DEFINICION 2-1.-

Decimos que las n-superficies S_1, S_2, son congruentes, si existe un elemento $a \varepsilon G$ tal que : $S_2 = a.S_1$.

1-1.DEFINICION DE N-VECTOR INTEGRAL.-

Hagamos una partición del intervalo D : $u_0^i \leqslant u^i \leqslant \hat{u}^i$:

$$u_0^i < u_1^i < \ldots < u_{s_i}^i = \hat{u}^i$$

Así hemos descompuesto D en suma de intervalos $D_{j_1 \ldots j_n}$:

$$u_{j_i}^i \leqslant u^i \leqslant u_{j_i+1}^i, \quad i = 1,\ldots,n; \; j_i = 1,\ldots,s_i$$

Fijando el punto $g(u_{j_1}^1,\ldots,u_{j_n}^n)$ en S, y tomando n puntos :

$$g(u_{j_1+1}^1, u_{j_2}^2,\ldots,u_{j_n}^n),\ldots,g(u_{j_1}^1,\ldots,u_{j_k+1}^k,\ldots,u_{j_n}^n),\ldots$$

$$g(u_{j_1}^1,\ldots,u_{j_{n-1}}^{n-1},u_{j_n+1}^n) \quad .$$

que forman los vertices correspondientes a $D_{j_1 \ldots j_n}$ adyacentes a $(u_{j_1}^1,\ldots,u_{j_n}^n)$.

Multiplicando a izquierda cada uno de esos n puntos por

$$g^{-1}(u_{j_1}^1,\ldots,u_{j_n}^n)$$

obtenemos :

$$g^{-1}(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n}).g(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n}) = e$$

$$g^{-1}(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n}).g(u^1_{j_1+1},\dots,u^n_{j_n}) = \Delta_1 g(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n})$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$g^{-1}(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n}).g(u^1_{j_1},\dots,u^k_{j_k+1},\dots,u^n_{j_n}) = \Delta_k g(u^1_{j_1}\dots u^n_{j_n})$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$g^{-1}(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n}).g(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n+1}) = \Delta_n g(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n})$$

Las coordenadas canonicas de primera especie del punto $\Delta_k g(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n})$ serán designadas por :

$$\Delta_k g^i(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n}),\ i = 1,\dots,r$$

Si : $\Delta_k u_{j_k} = u^k_{j_k+1} - u^k_{j_k}$

es suficientemente pequeño, define un subgrupo uniparametrico que lo contiene :

$$\gamma_k(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n}) : g = y_k(t)$$

que en U(e) estará representado por la ecuación :

$$\gamma_k(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n}) : g^i = \alpha^i_k(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n}).t$$

$$y^i_k(t) = \alpha^i_k.t; \quad y^i_k(\hat{t}_{j_k}) = \Delta_k g^i(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n}); \ \Delta_k u_{j_k} = \hat{t}_{j_k}$$

Tomemos en el álgebra de Lie L(G) el vector :

$$\omega_k(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n}) = \alpha^i_k(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n}).\Delta_k u_{j_k}.e_i =$$

$$= \Delta_k g^i(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n}).e_i;\ k = 1,\dots,n;\ j_i = 1,\dots,s_i$$

donde e_i son la base natural de L(G) en e. El vector :

$\alpha_k = \alpha^i_k.e_i$ es el vector tangente a γ_k en e.

Tomamos ahora el n-vector :

$$\omega(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n}) = \omega_1\wedge\dots\wedge\omega_n =$$

$$= \Delta_1 g^{i_1}.\Delta_2 g^{i_2}\dots\Delta_n g^{i_n}.e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_n}$$

Sumando con respecto a todos los intervalos $D_{j_1\dots j_n}$:

$$\Omega(S,\Delta u) = \sum_{j_1\dots j_n} \omega(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n};\Delta u) =$$

$$= \sum_{j_1\dots j_n} \Delta_1 g^{i_1}\dots\Delta_n g^{i_n}.e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_n}$$

Del mismo modo que en (1-2) Cap. I, se puede aplicar a $\Delta_k g(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n})$ el desarrollo (1.2.1), con lo que :

$$\Delta_k g(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n}) = \eta^p_k(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n}).F^i_p(x(u^1_{j_1}..u^n_{j_n}),g(u^1_{j_1}..u^n_{j_n}))$$

$$+ \eta^p_k.\eta^q_k.F^i_{pq}$$

donde :

$$\eta^p_k(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n}) = g^p(u^1_{j_1},\dots,u^k_{j_k+1},\dots,u^n_{j_n})-g(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n})$$

$$\{g^{-1}(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n})\}^i = x^i(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n})$$

Analogamente que en Cap.I la serie F^i_p es convergente, y es funcion continua de las variables x,g en $\bar{U}(e)$. Además F^i_{pq} es acotada en $\bar{U}(e)$. Así pues tenemos :

$$\Omega(S,\Delta u) = \sum_{j_1\dots j_n} F^{i_1}_{p_1}\dots F^{i_n}_{p_n}.\eta^{p_1}_1\dots\eta^{p_n}_n.e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_n} + \delta$$

donde δ contiene exclusivamente sumandos con al menos (n+1) factores η^p_s y F^i_p, F^i_{pq}.

Supongamos que S tiene el plano tangente continuo, es decir, un n-dimensional subespacio del espacio vectorial tangente a G. Entonces la anterior suma tiene el limite igual a la integral de Riemann :

$$\Omega(S) = \{\int_D F^{i_1}_{p_1}\dots F^{i_n}_{p_n}.\partial_1 g^{p_1}\dots\partial_n g^{p_n}.du^1\dots du^n\}e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_n}$$

siempre que el mayor diametro de los $D_{j_1\dots j_n}$ tienda a cero. Pongamos :

$$\partial_s g^p.du^s = d_s g^p \text{ (no hay suma)}$$

$$\Omega(S) = \{\int_D F^{i_1}_{p_1}\dots F^{i_n}_{p_n}.\ \frac{D(g^{p_1}\dots g^{p_n})}{D(u^1,\dots,u^n)}\ du^1\dots du^n\}e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_n} =$$

$$= \{\int_D F^{i_1}_{p_1}\dots F^{i_n}_{p_n}.dg^{p_1}\wedge\dots\wedge dg^{p_n}\}\ e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_n};\ i_1<\dots<i_n$$

De esta formula se deduce que $\Omega(S)$ no depende de la elección de las coordenadas u^i sobre S, y de las g^i en G. Resulta que $\Omega(S)$ es invariante respecto a las traslaciones a izquierda de G. Sera llamado el n-vector integral de S.

Los coeficientes :

$$\Omega^{i_1 \ldots i_n}(S) = \int_S F^{i_1}_{p_1} \ldots F^{i_n}_{p_n} . dg^{p_1} \wedge \ldots \wedge dg^{p_n}; \quad i_1 < \ldots < i_n \quad (*)$$

Son invariantes por traslaciones a izquierda de la superficie S, y no dependen de las coordenadas u^i sobre S. Pero dependen de la elección de los vectores e_i del álgebra de Lie L(G). Los coeficientes (*) serán invariantes absolutos si los vectores e_i están determinados univocamente por S, es decir, si la superficie S determina en el punto $g \varepsilon S$ r vectores $e_i^!$ linealmente independientes que por la traslación a izquierda transformando g en e, pasan a ser vectores e_i de la base natural de L(G).

Los invariantes integrales de S serán las funciones de (*) que no dependan de la base e_i. Puede ocurrir que para la superficie S no existan mas que algunos de los coeficientes (*).

Evidentemente la superficie S puede ser un subconjunto de la superficie S_o. Si σ es toda la familia de tales subconjuntos S de S_o, entonces, la función aditiva $\Omega(S)$ se llamará indicatriz integral de S_o.

1-2.BI-INVARIANCIA DEL N-VECTOR INTEGRAL.-

Analogamente que hicimos con las curvas, damos la condición de bi-invariancia del n-vector integral de una n-superficie por elementos de G. Tambien suponemos que realizamos traslaciones dentro de U(e).

Sea entonces la n-superficie S :

$$g = g(u^1,\dots,u^n),\ u_0^i \leq u^i \leq \hat{u}^i$$

TEOREMA 1-2.1.-

El n-vector integral de la n-superficie S es invariante a derecha y por tanto bi-invariante, si y solo si se cumple :

$$\begin{vmatrix} a_{\ell_1}^{i_1} & \dots & a_{\ell_n}^{i_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{\ell_1}^{i_n} & \dots & a_{\ell_n}^{i_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_{p_1}^{\ell_1} & \dots & F_{p_n}^{\ell_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ F_{p_1}^{\ell_n} & \dots & F_{p_n}^{\ell_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_{p_1}^{i_1} & \dots & F_{p_n}^{i_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ F_{p_1}^{i_n} & \dots & F_{p_n}^{i_n} \end{vmatrix}$$

expresión sumada en $\ell_k = 1,\dots,r$, *y donde* : $i_k=1,\dots,r$ $i_1<\dots<i_n$, $p_k=1,\dots,r$, $p_i\neq p_j$; *los elementos* :

$a_{\ell_j}^{i_k}(h)$ *son los de la matriz de la representación adjunta de G, y* $F_{p_j}^{\ell_k}$ *las series* :

$$F_{p_j}^{\ell_k} = \frac{\partial f^{\ell_k}(x^{-1}.y)}{\partial y^{p_j}},\quad x,y\in G$$

Demostración :

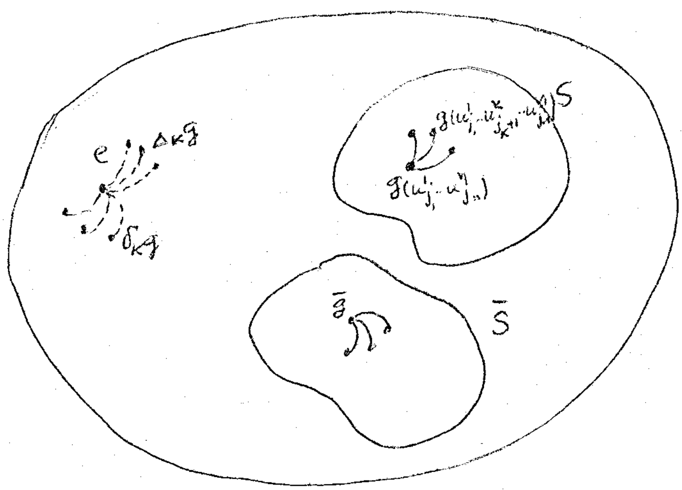
El n-vector integral de S viene dado según acabamos de ver por :

$$\Omega(S) = \{\int_D F^{i_1}_{p_1}\ldots F^{i_n}_{p_n}.dg^{p_1}\wedge\ldots\wedge dg^{p_n}\}e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_n}$$

donde $i_1 < \ldots < i_n$, $i_k=1,\ldots,r$; $p_k=1,\ldots,r$

Traslademos S a derecha por h^{-1} :

$$\bar{S} = S.h^{-1} : \bar{g} = g(u^1,\ldots,u^n).h^{-1},\ h\varepsilon G$$



Repitiendo el proceso de construcción del n-vector integral para la n-superficie $\bar{S} = S.h^{-1}$, nos encontramos con los puntos :

$$\delta_k g(u^1_{j_1},\ldots,u^n_{j_n}) = h.\Delta_k g(u^1_{j_1},\ldots,u^n_{j_n}).h^{-1}$$

o en coordenadas :

$$\delta_k g^i(u^1_{j_1},\ldots,u^n_{j_n}) = a^i_j(h).\Delta_k g^j(u^1_{j_1},\ldots,u^n_{j_n}) =$$

$$= a^i_j(h).\{\eta^p_k(u^1_{j_1},\ldots,u^n_{j_n}).F^j_p + \eta^p_k.\eta^q_k.F^j_{pq}\}$$

donde $a^i_j(h)$ son los elementos de la matriz de la representación adjunta de G.

Formemos ahora los vectores :

$$\bar{\omega}_k(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n}) = \delta_k g^i(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n}).e_i$$

y de aquí el n-vector :

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1\wedge\dots\wedge\bar{\omega}_n = \delta_1 g^{i_1}.\delta_2 g^{i_2}\dots\delta_n g^{i_n}.e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_n}$$

Sumando para todo el intervalo D :

$$\Omega(\bar{S},\Delta u) = \sum_{j_1\dots j_n} \bar{\omega}(u^1_{j_1},\dots,u^n_{j_n},\Delta u) =$$

$$= \sum_{j_1\dots j_n} \delta_1 g^{i_1}\dots\delta_n g^{i_n}.e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_n} =$$

$$= \sum_{j_1\dots j_n} a^{i_1}_{l_1}.\Delta_1 g^{l_1}\dots a^{i_n}_{l_n}.\Delta_n g^{l_n}.e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_n} =$$

$$= a^{i_1}_{l_1}(h)\dots a^{i_n}_{l_n}(h).\sum_{j_1\dots j_n} \Delta_1 g^{l_1}\dots\Delta_n g^{l_n}.e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_n} =$$

$$= a^{i_1}_{l_1}\dots a^{i_n}_{l_n}.\sum_{j_1\dots j_n} F^{l_1}_{p_1}\dots F^{l_n}_{p_n}.\eta^{p_1}_1\dots\eta^{p_n}_n.e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_n}$$

que en el limite, si S tiene el plano tangente continuo es :

$$\Omega(\bar{S}) = a^{i_1}_{l_1}\dots a^{i_n}_{l_n}.\int_D F^{l_1}_{p_1}\dots F^{l_n}_{p_n}.\frac{\partial g^{p_1}}{\partial u^1}\dots\frac{\partial g^{p_n}}{\partial u^n}.du^1\dots du^n.e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_n}$$

Si reordenamos los sumandos con $i_1<\dots<i_n$, obtenemos el n-vector integral de $\bar{S}$:

$$\bar{\Omega}(\bar{S}) = \int_D a_{l_1}^{i_1}\dots a_{l_n}^{i_n}.F_{p_1}^{l_1}\dots F_{p_n}^{l_n}.dg^{p_1}\wedge\dots\wedge dg^{p_n}.e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_n}$$

y para que los n-vectores $\Omega(S)$, $\bar{\Omega}(\bar{S})$ coincidan cualquiera que sea la n-superficie y $h\varepsilon G$ debe verificarse la igualdad de los integrandos, o sea los coeficientes de la n-forma :

$$dg^{p_1}\wedge\dots\wedge dg^{p_n}$$

lo que se expresa por medio de los determinantes del enunciado del teorema.

TEOREMA 1-2.2.-

El n-vector integral de la n-superficie S coincide al operar a izquierda y al operar a derecha si y sólo si :

$$\begin{vmatrix} a_{\ell_1}^{i_1} & \dots & a_{\ell_n}^{i_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{\ell_1}^{i_n} & \dots & a_{\ell_n}^{i_n} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} F_{p_1}^{\ell_1} & \dots & F_{p_n}^{\ell_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ F_{p_1}^{\ell_n} & \dots & F_{p_n}^{\ell_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_{p1}^{i_1} & \dots & F_{p_1}^{i_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ F_{p_1}^{i_n} & \dots & F_{p_n}^{i_n} \end{vmatrix}$$

donde $a_{\ell_j}^{i_k} = a_{\ell_j}^{i_k}(\overline{g(u^1,\dots,u^n)})$, $i_1<\dots<i_n$

Demostración :

Basta considerar :

$$\delta_k g = g(u_{j_1}^1,\dots,u_{j_k+1}^k,\dots,u_{j_n}^n).g^{-1}(u_{j_1}^1,\dots,u_{j_n}^n);\ k=1,..,n$$

y analogamente que en las curvas :

$$\Delta_k g = g^{-1}(u^1_{j_1},\ldots,u^n_{j_n}).g(u^1_{j_1},\ldots,u^k_{j_k+1},\ldots,u^n_{j_n})$$

se tiene la relación :

$$\delta_k g = g(u^1_{j_1},\ldots,u^n_{j_n}).\Delta_k g.g^{-1}(u^1_{j_1},\ldots,u^n_{j_n})$$

que en coordenadas se expresa :

$$(\delta_k g)^i = a^i_l(g(u^1_{j_1},\ldots,u^n_{j_n})).(\Delta_k g)^l;\ k=1,\ldots,n$$

Con un proceso analogo al del teorema anterior, el n-vector determinado por los puntos $\delta_k g$ coincide con el determinado por los $\Delta_k g$ si y solo si se verifica la igualdad del enunciado.

COROLARIO 1-2.1.-

Existe un entorno $U_1(e) \subset U$ donde son equivalentes : a) el n-vector integral de S es invariante a derecha; b) el n-vector integral de S coincide operando a izquierda y derecha.

Demostración :

Es semejante que la dada para curvas.

Vamos a dar ahora un teorema sobre invariancia del n-vector integral, generalización del dado para curvas de forma que en el caso de n=1, se deducirá facilmente algún resultado ya conocido pero naturalmente con más complejidad en la parte operatoria.

LEMA 1-2.1.-

En el sistema :

$$\begin{vmatrix} a_{\ell_1}^{i_1} & \dots & a_{\ell_n}^{i_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{\ell_1}^{i_n} & \dots & a_{\ell_n}^{i_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} F_{p_1}^{\ell_1} & \dots & F_{p_n}^{\ell_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ F_{p_1}^{\ell_n} & \dots & F_{p_n}^{\ell_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_{p_1}^{i_1} & \dots & F_{p_n}^{i_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ F_{p_1}^{i_n} & \dots & F_{p_n}^{i_n} \end{vmatrix}$$

donde $n<r$, $i_1<\dots<i_n$, $p_k,\ell_h=1,\dots,r$ desarrollado en p_k, el determinante formado por los coeficientes :

$$\begin{vmatrix} F_{p_1}^{\ell_1} & \dots & F_{p_n}^{\ell_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ F_{p_1}^{\ell_n} & \dots & F_{p_n}^{\ell_n} \end{vmatrix},$$ *es distinto de cero.*

Demostración :

Para abreviar, usamos la notación :

$$A_{l_1\dots l_n}^{i_1\dots i_n} = \begin{vmatrix} a_{l_1}^{i_1} & \dots & a_{l_n}^{i_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{l_1}^{i_n} & \dots & a_{l_n}^{i_n} \end{vmatrix} ; \quad F_{p_1\dots p_n}^{l_1\dots l_n} = \begin{vmatrix} F_{p_1}^{l_1} & \dots & F_{p_n}^{l_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ F_{p_1}^{l_n} & \dots & F_{p_n}^{l_n} \end{vmatrix}$$

y escribamos desarrollado el sistema en $p_1<\dots<p_n$, donde $p_k = 1,\dots,r$, que en total serán :

$$C_{r,n} = \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{1.2\dots\dots\dots n} \quad \text{ecuaciones}$$

$$A^{i_1 \dots i_n}_{12\dots n-1,n} . F^{12\dots n-1,n}_{12\dots n-1,n} + \dots + A^{i_1 \dots i_n}_{r-n+1\dots r} . F^{r-n+1\dots r}_{12\dots n-1,n} = F^{i_1 \dots i_n}_{12\dots n-1,n}$$

$$A^{i_1 \dots i_n}_{12\dots n-1,n} . F^{12\dots n-1,n}_{12,\dots n-1,n+1} + \dots + A^{i_1 \dots i_n}_{r-n+1\dots r} . F^{r-n+1\dots r}_{12\dots n-1,n+1} = F^{i_1 \dots i_n}_{12\dots n-1,n+1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (1.2.1)$$

$$A^{i_1 \dots i_n}_{12\dots n-1,n} . F^{12,\dots n-1,n}_{r-n+1\dots r} + \dots + A^{i_1 \dots i_n}_{r-n+1\dots r} . F^{r-n+1\dots r}_{r-n+1\dots r} = F^{i_1 \dots i_n}_{r-n+1\dots r}$$

Tomemos el determinante de los coeficientes y supongamos que es cero :

$$\Delta = \begin{vmatrix} F^{12\dots n-1,n}_{12\dots n-1,n} & F^{12\dots n-1,n+1}_{12\dots n-1,n} & \dots & F^{r-n+1\dots r}_{12\dots n-1,n} \\ F^{12\dots n-1,n}_{12\dots n-1,n+1} & F^{12\dots n-1,n+1}_{12\dots n-1,n+1} & \dots & F^{r-n+1\dots r}_{12\dots n-1,n+1} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ F^{12\dots n-1,n}_{r-n+1\dots r} & F^{12\dots n-1,n+1}_{r-n+1\dots r} & \dots & F^{r-n+1\dots r}_{r-n+1\dots r} \end{vmatrix} = 0$$

Entonces existe una combinación lineal entre,por ejemplo las columnas. Sea la primera de ellas combinación lineal de las otras.

Existen entonces :

$$\lambda_{12\dots n-1,n+1}, \dots, \lambda_{r-n+1\dots r} \varepsilon R$$

alguno de ellos distinto de cero, tal que :

$$F^{12\ldots n-1,n}_{12\ldots n-1,n} = \lambda_{12\ldots n-1,n+1}.F^{12\ldots n-1,n+1}_{12\ldots n-1,n} +\ldots+$$

$$+ \lambda_{r-n+1\ldots r}.F^{r-n+1\ldots r}_{12\ldots n-1,n}$$

$$F^{12\ldots n-1,n}_{12\ldots n-1,n+1} = \lambda_{12\ldots n-1,n+1}.F^{12\ldots n-1,n+1}_{12\ldots n-1,n+1} +\ldots+$$

$$+ \lambda_{r-n+1\ldots r}.F^{r-n+1\ldots r}_{12\ldots n-1,n+1}$$

....

$$F^{12\ldots n-1,n}_{r-n+1\ldots r} = \lambda_{12\ldots n-1,n+1}.F^{12\ldots n-1,n+1}_{r-n+1\ldots r} +\ldots+$$

$$+ \lambda_{r-n+1\ldots r}.F^{r-n+1\ldots r}_{r-n+1\ldots r}$$

Pero las componentes del n-vector integral de S, que vienen dadas por :

$$\Omega^{i_1\ldots i_n}(S) = \int_D F^{i_1}_{p_1}\ldots F^{i_n}_{p_n}.dg^{p_1}\wedge\ldots\wedge dg^{p_n}$$

verifican la relación siguiente :

$$\Omega^{12\ldots n-1,n}(S) = \int_D F^1_{p_1}.F^2_{p_2}\ldots F^{n-1}_{p_{n-1}}.F^n_{p_n} dg^{p_1}\wedge\ldots\wedge dg^{p_n} =$$

$$= \int_D \{F^{12\ldots n-1,n}_{12\ldots n-1,n}.dg^1\wedge\ldots\wedge dg^n + F^{12\ldots n-1,n}_{12\ldots n-1,n+1} dg^1\wedge\ldots\wedge dg^{n+1} +$$

$$+\ldots+ F^{12\ldots n-1,n}_{r-n+1\ldots r}.dg^{r-n+1}\wedge\ldots\wedge dg^r\}=$$

$$= \int_D \{\lambda_{12\ldots n-1,n+1}.F^{12\ldots n-1,n+1}_{12\ldots n-1,n} +\ldots+ \lambda_{r-n+1..r}F^{r-n+1..r}_{12..n-1,n+1}\}$$

$$. dg^1\wedge\ldots\wedge dg^n \quad + \text{(continúa)}$$

$$+\int_D\{\lambda_{12\ldots n-1,n+1}.F^{12\ldots n-1,n+1}_{12\ldots n-1,n+1}+\ldots+\lambda_{r-n+1\ldots r}F^{r-n+1\ldots r}_{12\ldots n-1n+1}\}.$$

$$.dg^1{}_\wedge\ldots{}_\wedge dg^{n-1}{}_\wedge dg^{n+1}+\ldots+$$

$$+\int_D\{\lambda_{12\ldots n-1,n+1}F^{12\ldots n-1,n+1}_{r-n+1\ldots r}+\ldots+\lambda_{r-n+1\ldots r}F^{r-n+1\ldots r}_{12\ldots n-1,n+1}\}.$$

$$.dg^{r-n+1}{}_\wedge\ldots{}_\wedge dg^r=$$

$$=\lambda_{12\ldots n-1,n+1}.\int_D\{F^{12\ldots n-1,n+1}_{12\ldots n-1,n}.dg^1{}_\wedge\ldots{}_\wedge dg^{n-1}\ dg^n+$$

$$+F^{12\ldots n-1,n+1}_{12\ldots n-1,n+1}.dg^1{}_\wedge\ldots{}_\wedge dg^{n-1}{}_\wedge dg^{n+1}+\ldots+$$

$$+F^{12\ldots n-1,n+1}_{r-n+1\ldots r}.dg^{r-n+1}{}_\wedge\ldots{}_\wedge dg^r\}+\ldots\ldots+$$

$$+\lambda_{r-n+1\ldots r}.\int_D\{F^{r-n+1\ldots r}_{12\ldots n-1,n}.dg^1{}_\wedge\ldots{}_\wedge dg^n+$$

$$+F^{r-n+1\ldots r}_{12\ldots n-1,n+1}.dg^1{}_\wedge\ldots{}_\wedge dg^{n-1}{}_\wedge dg^{n+1}+\ldots+$$

$$+F^{r-n+1\ldots r}_{r-n+1\ldots r}.dg^{r-n+1}{}_\wedge\ldots{}_\wedge dg^r\}=$$

$$=\lambda_{12\ldots n-1,n+1}.\Omega^{12\ldots n-1,n+1}+\ldots+$$

$$+\lambda_{r-n+1\ldots r}.\Omega^{r-n+1\ldots r}$$

O sea, que la primera componente del n-vector integral de cualquier n-superficie de G, es combinación lineal de las demás componentes. Pero siempre podemos encontrar n vectores $v_1,\ldots,v_n \varepsilon T_e(G)$ tal que en la base $e_1,\ldots,e_r$ la primera componente del n-vector :

$$v = v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$$

no verifique la condición anterior. Estos n vectores definen sendos subgrupos uniparametricos, los cuales, junto con traslaciones de ellos mismos forman un elemento de n-superficie, cuyo n-vector integral es proporcional a v, y por tanto no verificando la condición deducida para cualquier n-vector. Asi pues, debe ser el determinante del enunciado del Lema distinto de cero.

Recordemos que para que el vector integral de una curva fuera invariante a derecha, debia ser G conmutativo. La generalización, nos la da el siguiente :

TEOREMA 1-2.3.-

El n-vector integral de una n-superficie, $n < r$, siendo r la dimensión de G es invariante a derecha y por tanto bi-invariante si y solo si se verifica : a) si n es par, G conmutativo o anticonmutativo; b) si n es impar, G conmutativo.

Demostración :

Por ser bi-invariante el n-vector integral de la n-superficie S, se verifica el sistema de ecuaciones (1.2.1) considerando las incógnitas las :

$$A^{i_1\ldots i_n}_{l_1\ldots l_n};\ n^o \text{ de incóg.} = C_{r,n}$$

Acabamos de demostrar que el determinante de los coeficientes de este sistema es distinto de cero, con lo cual se puede resolver por la regla de Cramer :

$$A^{i_1\ldots i_n}_{12..n-1,n} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} F^{i_1\ldots i_n}_{12..n-1,n} & F^{12..n-1,n+1}_{12..n-1,n} & \ldots F^{r-n+1\ldots r}_{12..n-1,n} \\ F^{i_1\ldots i_n}_{12..n-1,n+1} & F^{12..n-1,n+1}_{12..n-1,n+1} & \ldots F^{r-n+1\ldots r}_{12..n-1,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ F^{i_1\ldots i_n}_{r-n+1\ldots r} & F^{12..n-1,n+1}_{r-n+1\ldots r} & \ldots F^{r-n+1\ldots r}_{r-n+1\ldots r} \end{vmatrix}$$

....

$$A^{i_1\ldots i_n}_{r-n+1\ldots r} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} F^{12..n-1,n}_{12..n-1,n} & F^{12..n-1,n+1}_{12..n-1,n} & \ldots F^{i_1\ldots i_n}_{12..n-1,n} \\ F^{12..n-1,n}_{12..n-1,n+1} & F^{12..n-1,n+1}_{12..n-1,n+1} & \ldots F^{i_1\ldots i_n}_{12..n-1,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ F^{12..n-1,n}_{r-n+1\ldots r} & F^{12..n-1,n+1}_{r-n+1\ldots r} & \ldots F^{i_1\ldots i_n}_{r-n+1\ldots r} \end{vmatrix}$$

de donde, al tomar $i_1,\ldots,i_n$ todos los valores de 1 a r siendo $i_1<\ldots<i_n$, sin más que observar la forma de estos determinantes, y recordando el valor de Δ', se tiene:

$$A^{i_1 \ldots i_n}_{l_1 \ldots l_n} = \delta^{i_1}_{l_1} \ldots . \delta^{i_n}_{l_n}$$

donde los $\delta^{i_k}_{l_j}$ son los simbolos de Kronecker.

Entonces esto quiere decir que en la matriz de la representación adjunta de G, todos los menores de orden n tienen determinante cero, excepto los diagonales que tienen determinante igual a uno. Sea dicha matriz :

$$\mathrm{Adj}(h) = \begin{pmatrix}
a^1_1 & a^2_1 & . & . & . & . & . & . & a^r_1 \\
a^1_2 & a^2_2 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & a^i_i & a^{i+1}_i & . & a^{i+n}_i & . & . & . \\
. & . & a^i_{i+1} & a^{i+1}_{i+1} & . & a^{i+n}_{i+1} & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & a^i_{i+n} & a^{i+1}_{i+n} & . & a^{i+n}_{i+n} & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
a^1_r & . & . & . & . & . & . & . & a^r_r
\end{pmatrix}$$

Considerando el menor diagonal $D_{i+1,\ldots,i+n}$, su determinante sabemos que vale 1. Si le orlamos con la fila y columna i, obtenemos un menor de orden n+1, que desarrollado por la primera columna vale :

$$|D_{i,\ldots,i+n}| = a^i_i$$

Si le desarrollamos por la columna i+k, vale :

$$|D_{i,\ldots,i+n}| = a_{i+k}^{i+k}$$

lo cual implica que :

$$a_i^i = a_{i+k}^{i+k} = \ldots = a_{i+n}^{i+n}$$

para todo i, de forma que los elementos de la diagonal principal de Adj(h) son todos iguales :

$$a_i^i = a_j^j, \quad i,j=1,\ldots,r$$

Observemos ahora que si son cero los menores de orden n no diagonales, tambien lo son los de orden n+1,...,r-1 no diagonales. LLamando A_j^i al adjunto del elemento a_j^i, se tiene :

$$A_j^i = 0, \ i \neq j; \ A_i^i \neq 0$$

Aplicando la propiedad de que los elementos de una fila o columna por los adjuntos de una paralela vale cero, obtenemos considerando la fila i y la j :

$$a_j^1.A_i^1 + a_j^2.A_i^2 + \ldots + a_j^j.A_i^j + \ldots + a_j^i.A_i^i + \ldots + a_j^r.A_i^r = 0$$

con lo cual :

$$a_j^i = 0 \text{ para todo } i,j \text{ con } i \neq j$$

Nos queda entonces la matriz adjunta en la forma :

$$\mathrm{Adj}(h) = \begin{pmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{pmatrix}$$

siendo $a = a_i^i$, $i=1,\ldots,r$

Como teniamos ya que los menores de orden ń tienen determinante 1, se tiene :

$$(a)^n = 1$$

Al ser $a \in R$, se verifica :

si n es par : a=1, y a=-1, con lo cual la matriz de la representación adjunta puede ser :

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{o bien} \quad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

Si n es impar : a=1, y solo tenemos el primer caso. Evidentemente el primer caso corresponde a grupos de Lie conmutativos, y el caso Adj = $-I_r$ a grupos de Lie anticonmutativos.

COROLARIO 1-2.2.-

El vector integral de una curva es invariante a derecha si y solo si G es conmutativo.

Demostración :

Es evidente, pues en este caso n=1, impar

COROLARIO 1-2.3.-

Si r es par, para que el r-1-vector integral de una hipersuperficie sea invariante a derecha debe ser G conmutativo, y si r es impar, o bien G conmutativo *o bien anticonmutativo.*

Demostrción :

Es inmediato.

COROLARIO 1-2.4.-

El r-vector integral de una r-superficie en un grupo de Lie de dimensión r es invariante a derecha si y solo si G es unimodular.

Demostración :

El Lema (1-2.1) sirve para este caso con n=r, pero solo tenemos una ecuación por ser $i_1 < \dots < i_n$, $l_1 < \dots < l_n$, $p_1 < \dots < p_n$, $i_k, l_j, p_i = 1, \dots, r$

$$\begin{vmatrix} a_1^1 \dots a_r^1 \\ \dots\dots \\ a_1^r \dots a_r^r \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_1^1 \dots F_r^1 \\ \dots\dots \\ F_1^r \dots F_r^r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1^1 \dots F_r^1 \\ \dots\dots \\ F_1^r \dots F_r^r \end{vmatrix}$$

y al ser según el Lema (1-3.1) Cap.I el determinante $|F_j^i| \neq 0$, nos queda :

$$|Adj(h)| = 1$$

luego G es unimodular.

COROLARIO 1-2.5.-

Si el vector integral de una curva es invariante a *derecha, tambien es invariante a derecha el n-vector integral de las n-superficies, para todo n.*

Demostración :

Es inmediato, pues G es conmutativo.

1-3. CASOS PARTICULARES.-

a) $G = R^3$, S = porción finita de plano :

Sea S la porción de plano definida : $g = g(u,v)$:

$$x = g^1 = g^1(u,v) = \lambda_1 u + \mu_1 v + c_1$$

$$y = g^2 = g^2(u,v) = \lambda_2 u + \mu_2 v + c_2 \quad ; \quad D\begin{cases} u_0 \leq u \leq \hat{u} \\ v_0 \leq v \leq \hat{v} \end{cases}$$

$$z = g^3 = g^3(u,v) = \lambda_3 u + \mu_3 v + c_3$$

En este caso conocemos ya las :

$$F^i_j = \delta^i_j$$

Co lo cual, el 2-vector integral de S es :

$$\Omega(S) = \int_D F^{i_1}_{p_1} . F^{i_2}_{p_2} . dg^{p_1} \wedge dg^{p_2} \; e_{i_1} \wedge e_{i_2} \; ; \; i_1 < i_2$$

$$\Omega^{12}(S) = \int_D F^1_1 . F^2_2 \; dg^1 \wedge dg^2 = \int_D dg^1 \wedge dg^2 =$$

$$= \int_D (\lambda_1 du + \mu_1 dv) \wedge (\lambda_2 du + \mu_2 dv) = \int_D (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) du dv$$

$$\Omega^{13}(S) = \int_D F^1_1 . F^3_3 \, dg^1 \wedge dg^3 = \int_D (\lambda_1 du + \mu_1 dv) \wedge (\lambda_3 du + \mu_3 dv) =$$

$$= \int_D (\lambda_1 \mu_3 - \lambda_3 \mu_1) du dv$$

$$\Omega^{23}(S) = \int_D F^2_2 . F^3_3 \, dg^2 \wedge dg^3 = \int_D (\lambda_2 du + \mu_2 dv) \wedge (\lambda_3 du + \mu_3 dv) =$$

$$= \int_D (\lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2) du dv$$

Co lo cual :

$$\Omega(S) = \begin{vmatrix} e_2 \wedge e_3 & e_3 \wedge e_1 & e_1 \wedge e_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix} \int_D du dv$$

b) $G = S^3$, $S: \; g = g(u^1, u^2)$

Conocida la expresión de los F^i_j para S^3 y la formula del 2-vector integral, se tiene :

$$\Omega(S) = \Big[\int_D (F^1_1 F^2_2 - F^1_2 F^2_1) dg^1 \wedge dg^2 + \int_D (F^1_1 F^2_3 - F^1_3 F^2_1) dg^1 \wedge dg^3 +$$

$$+ \int_D (F^1_1 F^2_4 - F^1_4 F^2_1) dg^1 \wedge dg^4 + \int_D (F^1_2 F^2_3 - F^1_3 F^2_2) dg^2 \wedge dg^3 +$$

$$+ \int_D (F^1_2 F^2_4 - F^1_4 F^2_2) dg^2 \wedge dg^4 + \int_D (F^1_3 F^2_4 - F^1_4 F^2_3) dg^3 \wedge dg^4 \Big] e_1 \wedge e_2 +$$

$$+ \Big[\int_D (F^1_1 F^3_2 - F^1_2 F^3_1) dg^1 \wedge dg^2 + \int_D (F^1_1 F^3_3 - F^1_3 F^3_1) dg^1 \wedge dg^3 +$$

$$+\int_D (F^1_1F^3_4-F^1_4F^3_1)dg^1\wedge dg^4 + \int_D (F^1_2F^3_3-F^1_3F^3_2)dg^2\wedge dg^3 +$$

$$+\int_D (F^1_2F^3_4-F^1_4F^3_2)dg^2\wedge dg^4 + \int_D (F^1_3F^3_4-F^1_4F^3_3)dg^3\wedge dg^4\Big] e_1\wedge e_3 +$$

$$+\Big[\int_D (F^2_1F^3_2-F^2_2F^3_1)dg^1\wedge dg^2 + \int_D (F^2_1F^3_3-F^2_3F^3_1)dg^1\wedge dg^3 +$$

$$+\int_D (F^2_1F^3_4-F^2_4F^3_1)dg^1\wedge dg^4 + \int_D (F^2_2F^3_3-F^2_3F^3_2)dg^2\wedge dg^3 +$$

$$+\int_D (F^2_2F^3_4-F^2_4F^3_2)dg^2\wedge dg^4 + \int_D (F^2_3F^3_4-F^2_4F^3_3)dg^3\wedge dg^4\Big] e_2\wedge e_3 \quad =$$

$$=\Big[\int_D \{(g^1)^2+(g^2)^2\}dg^1\wedge dg^2 + \int_D (g^1g^4+g^2g^3)dg^1\wedge dg^3 -$$

$$-\int_D (g^1g^3-g^2g^4)dg^1\wedge dg^4 + \int_D (g^2g^4-g^1g^3)dg^2\wedge dg^3 -$$

$$-\int_D (g^1g^4+g^2g^3)dg^2\wedge dg^4 - \int_D \{(g^3)^2+(g^4)^2\}dg^3\wedge dg^4\Big] e_1\wedge e_2 +$$

$$+\Big[\int_D (g^2g^3-g^1g^4)dg^1\wedge dg^2 + \int_D \{(g^1)^2+(g^3)^2\}dg^1\wedge dg^3 +$$

$$+\int_D (g^1g^2+g^3g^4)dg^1\wedge dg^4 + \int_D (g^1g^2+g^3g^4)dg^2\wedge dg^3 +$$

$$+\int_D \{(g^2)^2+(g^4)^2\}dg^2\wedge dg^4 + \int_D (g^2g^3-g^1g^4)dg^3\wedge dg^4\Big] e_1\wedge e_3 +$$

$$+\Big[\int_D (g^2g^4+g^1g^3)dg^1\wedge dg^2 + \int_D (g^3g^4-g^1g^2)dg^1\wedge dg^3 -$$

$$-\int_D \{(g^2)^2+(g^3)^2\}dg^1\wedge dg^4 + \int_D \{(g^1)^2+(g^4)^2\}dg^2\wedge dg^3 +$$

$$+ \int_D (g^1g^2-g^3g^4)dg^2{\wedge}dg^4 + \int_D (g^2g^4+g^1g^3)dg^3{\wedge}dg^4\Big] e_2{\wedge}e_3$$

Conocida la expresión de Adj(G)(Cap.I,2-3,caso d), se tiene que el 2-vector integral de una 2-superficie no es invariante a derecha, pero por el Corolario (1.2.4), al ser Adj(G) ortogonal, el 3-vector integral de una 3-superficie si es invariante a derecha, pues en particular S^3 es unimodular.

c) $G = Gl(2,R)$, $S = g(u^1,u^2)$.-

Lo mismo que en el caso anterior, llamando :

$$\Delta = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} \neq 0$$

el 2-vector integral de S es :

$$\Omega(S) = \Big[\int_D \frac{1}{\Delta^2}\{(g_{22})^2dg_{11}{\wedge}dg_{12}-g_{12}g_{22}(dg_{11}{\wedge}dg_{22} +$$

$$+ dg_{12}{\wedge}dg_{21}) + (g_{12})^2dg_{21}{\wedge}dg_{22}\}\Big] e_1{\wedge}e_2 +$$

$$+\Big[\int_D \frac{1}{\Delta} dg_{11}{\wedge}dg_{21}\Big] e_1{\wedge}e_3 + \Big[\int_D \frac{1}{\Delta^2} (-g_{21}g_{22}dg_{11}{\wedge}dg_{12} +$$

$$+ g_{11}g_{22}dg_{11}{\wedge}dg_{22} + g_{12}g_{21}dg_{12}{\wedge}dg_{21} -$$

$$- g_{11}g_{12}dg_{21}{\wedge}dg_{22}\Big] e_1{\wedge}e_4 + \Big[\int_D \frac{1}{\Delta^2} (g_{21}g_{22}dg_{11}{\wedge}dg_{12} +$$

$$+ g_{11}g_{22}dg_{12}{\wedge}dg_{21} + g_{12}g_{21}dg_{11}{\wedge}dg_{22} -$$

$$- g_{11}g_{22}dg_{21}\wedge dg_{22}\; e_2\wedge e_3 + \int_D \frac{1}{\Delta}\, dg_{12}\wedge dg_{22}\Big]\, e_2\wedge e_4 +$$

$$+ \left[\int_D \frac{1}{\Delta^2}\, (g_{21})^2 dg_{11}\wedge dg_{12} - g_{11}g_{21}(dg_{11}\wedge dg_{22} -\right.$$

$$\left. - dg_{12}\wedge dg_{21}) + (g_{11})^2 dg_{21}\wedge dg_{22}\right] e_3\wedge e_4$$

Conocida la matriz Adj(Gl(2,R))(Cap.I,2-3,caso c),se deduce que el 4-vector integral de las 4-superficies, es invariante a derecha por ser :

$$|Adj(G)| = 1$$

y por el Corolario(1-2.4). Los casos n=1,2,3 no es invariante el n-vector.

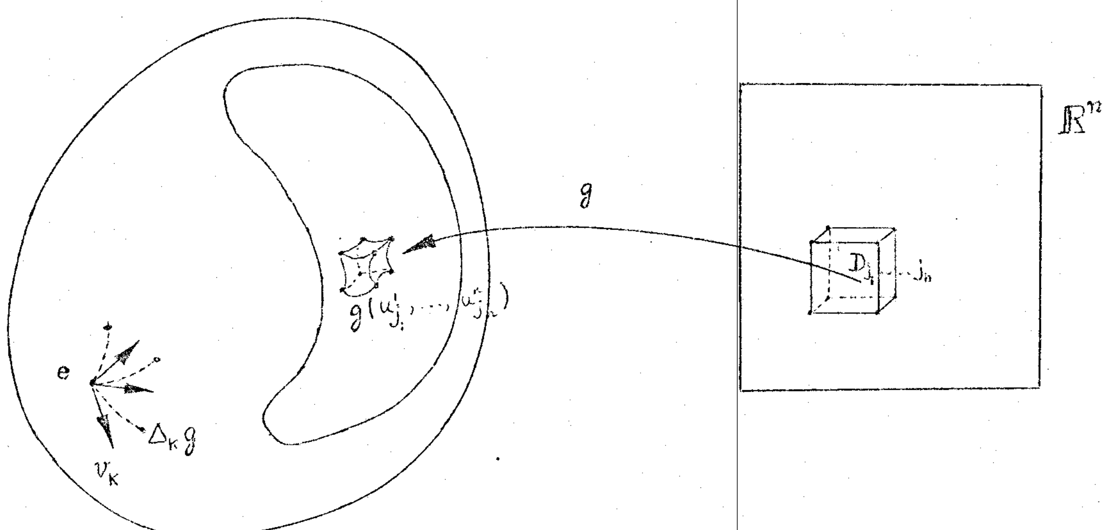
0

2. N-MEDIDA DE N-SUPERFICIES.

Tengamos una n-superficie en un grupo de Lie G^r, dada por :

$$S : g = g(u^1,\ldots,u^n);\; u_0^i \leqslant u^i \leqslant \hat{u}^i;\; i=1,\ldots,n$$

Hemos definido S, como imagen homeomorfa de un n-intervalo $D \subset R^n$, en una carta local $U \subset G$.



Cada intervalo $D_{j_1\ldots j_n}$, considerada una partición de D, nos determina en $T_e(G)$ n vectores linealmente independientes, por ser las curvas que unen $g(u^1_{j_1},\ldots,u^n_{j_n})$ con los vertices adyacentes independientes. Al trasladar estos puntos a izquierda por $g^{-1}(u^1_{j_1},\ldots,u^n_{j_n})$ determinan n subgrupos uniparametricos independientes, o sea que sus vectores tangentes considerados en el espacio vectorial $T_e(G)$ son independientes.

Es una condición generalizada de la conocida para el estudio de las superficies en R^3. Allí, dada la superficie:

$$g = g(u,v),\ u_0 \leqslant u \leqslant \hat{u},\ v_0 \leqslant v \leqslant \hat{v}$$

se supone se verifica :

$$g_u \wedge g_v \neq 0$$

o sea, los vectores g_u, g_v independientes en el intervalo de definición de la superficie.

Así como en R^3 el módulo del producto vectorial de dos vectores nos da el area comprendida por ellos, y el producto mixto de tres vectores nos da el volumen del paralelepípedo formado, vamos a generalizarlo a n dimensiones dentro de un grupo de Lie r-dimensional

2-1. DEFINICION DE N-MEDIDA DE UNA N-SUPERFICIE.-

Antes de dar la definición, probaremos el siguiente :

LEMA 2-2.1.-

Dados los vectores independientes en $T_e(G)$ $v_1,\ldots,v_n$, se pueden determinar $r-n$ vectores ortonormales y ortogonales a los $v_1,\ldots,v_n$.

Demostración :

Sea $e_1,\ldots,e_r$ la base natural de L(G) en e. Los vectores $v_1,\ldots,v_n$ se expresarán :

$$v_1 = a_{11}e_1 +\ldots+ a_{1r}e_r$$

$$v_2 = a_{21}e_1 +\ldots+ a_{2r}e_r$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$v_n = a_{n1}e_1 +\ldots+ a_{nr}e_r$$

Tomemos r-n vectores en $T_e(G)$ e impongamos que sean ortogonales a los v_i. Sean estos : $T_{n+1},T_{n+2},\ldots,T_r$. Por ejemplo, supongamos que es :

$$T_{n+1} = b_{n+1,1}e_1 +\ldots+ b_{n+1,r}e_r$$

$$T_{n+2} = b_{n+2,1}e_1 +\ldots+ b_{n+2,r}e_r$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$T_r = b_{r1}e_1 +\ldots\ldots+ b_{rr}e_r$$

Por ejemplo, para T_{n+1}, imponiendo que sea ortogonal a $v_1,\ldots,v_n$:

$$a_{11}b_{n+1,1} + a_{12}b_{n+1,2} +\ldots+ a_{1r}b_{n+1,r} = 0$$

$$a_{21}b_{n+1,1} + a_{22}b_{n+1,2} +\ldots+ a_{2r}b_{n+1,r} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n1}b_{n+1,1} + a_{n2}b_{n+1,2} +\ldots+ a_{nr}b_{n+1,r} = 0$$

Como $v_1,\ldots,v_n$ son linealmente independientes, la caracteristica de la matriz (a_{ij}) es n.

Supongamos por comodidad que el menor de determinante distinto de cero es :

$$\Delta_{12\ldots n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Podemos despejar entonces :

$$a_{11}b_{n+1,1} +\ldots+ a_{1n}b_{n+1,n} = -(a_{1,n+1}b_{n+1,n+1}+\ldots+a_{1r}b_{n+1,r})$$

$$a_{21}b_{n+1,1} +\ldots+ a_{2n}b_{n+1,n} = -(a_{2,n+1}b_{n+1,n+1}+\ldots+a_{2r}b_{n+1,r})$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$a_{n1}b_{n+1,1} +\ldots+ a_{nn}b_{n+1,n} = -(a_{n,n+1}b_{n+1,n+1}+\ldots+a_{nr}b_{n+1,r})$$

Aplicando la regla de Cramer :

$$b_{n+1,1}=\frac{-1}{\Delta_{12..n}} \begin{vmatrix} (a_{1,n+1}b_{n+1,n+1}+..+a_{1r}b_{n+1,r}) & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ (a_{2,n+1}b_{n+1,n+1}+..+a_{2r}b_{n+1,r}) & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_{n,n+1}b_{n+1,n+1}+..+a_{nr}b_{n+1,r}) & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$b_{n+1,n}=\frac{-1}{\Delta_{12..n}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}..a_{1,n-1} & (a_{1,n+1}b_{n+1,n+1}+..+a_{1r}b_{n+1,r}) \\ a_{21} & a_{22}..a_{2,n-1} & (a_{2,n+1}b_{n+1,n+1}+..+a_{2r}b_{n+1,r}) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2}..a_{n,n-1} & (a_{n,n+1}b_{n+1,n+1}+..+a_{nr}b_{n+1,r}) \end{vmatrix}$$

Así pues, quedan r-n parametros libres. Hagamos por ejemplo :

$$b_{n+1,n+1}=1,\ b_{n+1,n+2}=0,\ldots,\ b_{n+1,r}=0$$

Con lo cual :

$$b_{n+1,1} = \frac{-1}{\Delta_{12\ldots n}} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,n+1} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{2,n+1} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,n+1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{-\Delta_{n+1,23..n}}{\Delta_{12\ldots n}}$$

Analogamente :

$$b_{n+1,2} = - \frac{\Delta_{1,n+1,3,\ldots,n}}{\Delta_{12\ldots\ldots n}}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$b_{n+1,r} = - \frac{\Delta_{12\ldots n-1,n+1}}{\Delta_{12,\ldots\ldots,n}}$$

Así nos queda determinado T_{n+1} :

$$T_{n+1} = (b_{n+1,1};b_{n+1,2};\ldots;b_{n+1,n};1;0;\ldots;0)$$

Lo mismo hacemos con $T_{n+2},\ldots,T_r$, pero dando a los r-n parametros libres valores distintos en cada caso. Antes hemos dado los valores (1,0,...,0); ahora damos los valores : (0,1,0,...,0),...,(0,...,0,1) respectivamente para obtener $T_{n+2},\ldots,T_r$.

Así por ejemplo, para T_{n+2} :

$$b_{n+2,1} = - \frac{\Delta_{n+2,23\ldots n}}{\Delta_{12,\ldots,n}} \;,\ldots,b_{n+2,n} = - \frac{\Delta_{12..n-1,n+2}}{\Delta_{12\ldots\ldots n}}$$

de donde $T_{n+2} = (b_{n+2,1};\ldots;b_{n+2,n};0;1;0;\ldots;0)$

y hasta T_r :

$$b_{r1} = -\frac{\Delta_{r,2,3,\ldots,n}}{\Delta_{1,2,\ldots,n}} ;\ldots; b_{rn} = -\frac{\Delta_{1,2,\ldots,n-1,r}}{\Delta_{1,2,\ldots\ldots,n}}$$

$$T_r = (b_{r1};\ldots;b_{rn};0;\ldots;0;1)$$

El paso siguiente es ortogonalizar los $T_{n+1},\ldots,T_r$. Para ello, basta aplicar el proceso de Smith :

$$V_{n+1} = T_{n+1} = (b_{n+1},\ldots,b_{n+1,n},1,0,\ldots,0)$$

$$V_{n+2} = T_{n+2} + \lambda.T_{n+1}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$V_r = T_r + \rho_1.T_{r-1} +\ldots+ \rho_{r-n-1}.T_{n+1}$$

donde se buscan todos esos coeficientes $\lambda,\ldots,\rho_1,\ldots,\rho_{r-n-1}$.

$$V_{n+1} = (b_{n+1,1};\ldots;b_{n+1,n};1;0;\ldots;0)$$

$$V_{n+2} = (\bar{b}_{n+2,1};\ldots;\bar{b}_{n+2,n};\lambda;1;0;\ldots;0)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$V_r = (\bar{b}_{r1},\ldots,b_{rn},\rho_{r-n-1},\ldots,\rho_1,1)$$

Una vez ortogonalizados, los normalizamos dividiendo por su módulo :

$$N_{n+1} = \left(\frac{b_{n+1,1}}{|V_{n+1}|},\ldots,\frac{b_{n+1,n}}{|V_{n+1}|},\frac{1}{|V_{n+1}|},0,\ldots,0\right)$$

$$N_{n+2} = \left(\frac{\bar{b}_{n+2,1}}{|V_{n+2}|},\ldots,\frac{\bar{b}_{n+2,n}}{|V_{n+2}|},\frac{\lambda}{|V_{n+2}|},\frac{1}{|V_{n+2}|},0,\ldots,0\right)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$N_r = \left(\frac{\bar{b}_{r1}}{|V_r|},\ldots,\frac{\bar{b}_{rn}}{|V_r|},\frac{\rho_{r-n-1}}{|V_r|},\ldots,\frac{\rho_1}{|V_r|},\frac{1}{|V_r|}\right)$$

Estos $N_{n+1},\ldots,N_r$ demuestran el Lema.

Pasemos ahora a definir el concepto de n-medida. Para ello, observemos que si $\{X_1,\ldots,X_r\}$ es una base de campos invariantes a izquierda, de forma que en la carta local U(e), se expresan :

$$X_i = \frac{\partial}{\partial g^i} \; ; \; i = 1,\ldots,r$$

y consideramos las formas duales dg^i, en e tenemos :

$$\omega_e\{(\frac{\partial}{\partial g^1})_e,\ldots,(\frac{\partial}{\partial g^r})_e\} = (dg^1\wedge\ldots\wedge dg^r)_e\{(\frac{\partial}{\partial g^1})_e,\ldots,(\frac{\partial}{\partial g^r})_e\} = 1$$

donde $\omega = dg^1\wedge\ldots\wedge dg^r$, que es una r-forma invariante a izquierda y no se anula en ningún punto de U.

Pongamos :

$$(\frac{\partial}{\partial g^i})_e = e_i, \; i = 1,\ldots,r$$

DEFINICION 2-2.1.-

Llamaremos elemento de n-medida determinado por los vectores $v_1,\ldots,v_n$ en $T_e(G)$, al resultado de aplicar ω_e a los $v_1,\ldots,v_n,N_{n+1},\ldots,N_r$:

$$dV(v_1,\ldots,v_n) = \omega_e(v_1,\ldots,v_n,N_{n+1},\ldots,N_r)$$

Considerando las expresiones de los v_i,N_j, se tiene :

$$dV(v_1,\ldots,v_n) = \omega_e(v_1,\ldots,v_n,N_{n+1},\ldots,N_r) =$$

$$= \det(V,N).\omega_e(e_1,\dots,e_r) = \det(V,N)$$

sonde (V,N) es la matriz $(r\times r)$ formada con las n primeras filas las componentes de $v_1,\dots,v_n$, y las r-n restantes las componentes de $N_{n+1},\dots,N_r$.

TEOREMA 2-2.1.-

El valor de $dV(v_1,\dots,v_n)$, es independiente de los vectores $N_{n+1},\dots,N_r$ escogidos.

Demostración :

Sean las componentes de v_i, N_j :

$$v_i = v_{i1}e_1 + v_{i2}e_2 +\dots+ v_{ir}e_r$$

$$N_j = N_{j1}e_1 + N_{j2}e_2 +\dots+ N_{jr}e_r$$

$$\Delta = dV(v_1,\dots,v_n) = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & v_{1r} \\ v_{21} & v_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & v_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & v_{nr} \\ N_{n+1,1} & N_{n+1,2} & & \cdot & \cdot & N_{n+1,r} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ N_{r1} & N_{r2} & \cdot & \cdot & \cdot & N_{rr} \end{vmatrix}$$

Veamos que Δ^2 es independiente de $N_{n+1},\dots,N_r$ realizando la operación :

$$\Delta^2 = \left|\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdot & \cdot & v_{1r} \\ v_{21} & v_{22} & \cdot & \cdot & v_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdot & \cdot & v_{nr} \\ N_{n+1,1} & N_{n+1,2} & \cdot & & N_{n+1,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ N_{r1} & N_{r2} & \cdot & \cdot & N_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdot & N_{n+1,1} & \cdot & N_{r1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdot & N_{n+1,2} & \cdot & N_{r2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{1r} & v_{2r} & \cdot & N_{n+1,r} & \cdot & N_{rr} \end{pmatrix}\right| =$$

$$= \begin{vmatrix} v_1\cdot v_1 & v_1\cdot v_2 & \cdot & \cdot & v_1\cdot v_n & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ v_1\cdot v_2 & v_2\cdot v_2 & \cdot & \cdot & v_2\cdot v_n & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_1\cdot v_n & v_2\cdot v_n & \cdot & \cdot & v_n\cdot v_n & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} |v_1|^2 & v_1\cdot v_2 & \cdot & \cdot & v_1\cdot v_n \\ v_1\cdot v_2 & |v_2|^2 & \cdot & \cdot & v_2\cdot v_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_1\cdot v_n & v_2\cdot v_n & \cdot & \cdot & |v_n|^2 \end{vmatrix}$$

que evidentemente es independiente de $N_{n+1},\ldots,N_r$

2-2. EXISTENCIA DE N-MEDIDA.-

Usaremos la ultima expresión de Δ^2 para buscar las condiciones de existencia de n-medida. Para ello, expresemos los n vectores determinados por cada intervalo $D_{j_1 \ldots j_n}$ en función de sus coordenadas :

$$v_k = \Delta_k g^i(u^1_{j_1},\ldots,u^n_{j_n}).e_i$$

$$|v_k|^2 = (\Delta_k g^1)^2 + \ldots + (\Delta_k g^r)^2$$

$$v_k . v_h = \Delta_k g^1 . \Delta_h g^1 + \ldots + \Delta_k g^r . \Delta_h g^r$$

Teniendo en cuenta que :

$$\Delta_k g^i = \eta^p_k . F^i_p + \eta^p_k . \eta^q_k . F^i_{pq}$$

y sustituyendo en las anteriores expresiones :

$$|v_k|^2 = (\eta^p_k . F^1_p)^2 + \ldots + (\eta^p_k . F^r_p)^2 + \eta^p_k . \eta^q_k . F^1_p . F^1_q + \ldots +$$

$$+ \eta^p_k . \eta^q_k . F^r_p . F^r_q + 2\left[\eta^p_k \eta^s_k \eta^m_k . F^1_p . F^1_{sm} + \ldots + \eta^p_k \eta^s_k \eta^m_k . F^r_p . F^r_{sm}\right] + O(\eta^4)$$

$$v_k . v_h = \eta^p_k \eta^q_h . F^1_p F^1_q + \ldots + \eta^p_k \eta^q_h . F^r_p F^r_q + \eta^p_k \eta^s_h \eta^m_h F^1_p F^1_{sm} +$$

$$+ \eta^p_h \eta^s_k \eta^m_k F^1_p F^1_{sm} + \ldots + \eta^p_k \eta^s_h \eta^m_h F^r_p F^r_{sm} + \eta^p_h \eta^s_k \eta^m_k F^r_p F^r_{sm} + O(\eta^4)$$

Recordemos que :

$$\eta^p_k = g^p(u^1_{j_1},\ldots,u^k_{j_k+1},\ldots,u^n_{j_n}) - g^p(u^1_{j_1},\ldots,u^n_{j_n}) =$$

$$= \frac{\partial g^p}{\partial u^k_{j_k}} . \Delta u^k_{j_k}$$

siempre que S tenga el plano tangente continuo.

$$|v_k|^2 = (\Delta u^k_{j_k})^2 . \left[\left(\frac{\partial g^p}{\partial u^k_{j_k}} F^1_p\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial g^p}{\partial u^k_{j_k}} F^r_p\right)^2 + \right.$$

$$+ \frac{\partial g^p}{\partial u^k_{j_k}} \frac{\partial g^q}{\partial u^k_{j_k}} F^1_p F^1_q + \ldots + \frac{\partial g^p}{\partial u^k_{j_k}} \frac{\partial g^q}{\partial u^k_{j_k}} F^r_p F^r_q +$$

$$+ 2\Delta u^k_{j_k} \left(\frac{\partial g^p}{\partial u^k_{j_k}} \frac{\partial g^s}{\partial u^k_{j_k}} \frac{\partial g^m}{\partial u^k_{j_k}} F^1_p F^1_{sm} + \ldots + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\partial g^p}{\partial u^k_{j_k}} \frac{\partial g^s}{\partial u^k_{j_k}} \frac{\partial g^m}{\partial u^k_{j_k}} F^r_p F^r_{sm} \right) \right] + O(\Delta u^k_{j_k})^4$$

$$v_k . v_h = \Delta u^k_{j_k} . \Delta u^h_{j_h} \left[\frac{\partial g^p}{\partial u^k_{j_k}} \frac{\partial g^q}{\partial u^h_{j_h}} F^1_p F^1_q + \ldots + \right.$$

$$+ \frac{\partial g^p}{\partial u^k_{j_k}} \frac{\partial g^q}{\partial u^h_{j_h}} F^r_p F^r_q + (\Delta u^k_{j_k}) . \left(\frac{\partial g^p}{\partial u^h_{j_h}} \frac{\partial g^s}{\partial u^k_{j_k}} \frac{\partial g^m}{\partial u^k_{j_k}} F^1_p F^1_{sm} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial g^p}{\partial u^h_{j_h}} \frac{\partial g^s}{\partial u^k_{j_k}} \frac{\partial g^m}{\partial u^k_{j_k}} F^r_p F^r_{sm} \right) + (\Delta u^h_{j_h}) . \left(\frac{\partial g^p}{\partial u^k_{j_k}} \frac{\partial g^s}{\partial u^h_{j_h}} \frac{\partial g^m}{\partial u^h_{j_h}} F^1_p F^1_{sm} + \right.$$

$$\left. \left. + \ldots + \frac{\partial g^p}{\partial u^k_{j_k}} \frac{\partial g^s}{\partial u^h_{j_h}} \frac{\partial g^m}{\partial u^h_{j_h}} F^r_p F^r_{sm} \right) \right] + O(\Delta u)^4$$

Al sustituir en Δ^2 las expresiones obtenidas para cada producto $v_k . v_h$ y cada $v_k . v_k$, nos aparece en cada elemento del determinante, o bien $(\Delta u^k_{j_k})^2$, o $(\Delta u^k_{j_k})(\Delta u^h_{j_h})$

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} (\Delta u^1_{j_1})^2\left[\ldots\right] + O(\Delta u)^4 & \ldots & \Delta u^1_{j_1}\Delta u^n_{j_n}\left[\ldots\right] + O(\Delta u)^4 \\ \Delta u^1_{j_1}\Delta u^2_{j_2}\left[\ldots\right] + O(\Delta u)^4 & \ldots & \Delta u^2_{j_2}\Delta u^n_{j_n}\left[\ldots\right] + O(\Delta u)^4 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta u^1_{j_1}\Delta u^n_{j_n}\left[\ldots\right] + O(\Delta u)^4 & \ldots & (\Delta u^n_{j_n})^2\left[\ldots\right] + O(\Delta u)^4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \left[(\frac{\partial g^p}{\partial u^1_{j_1}} F^1_p)^2 + \ldots\right] & \ldots & \left[\frac{\partial g^p}{\partial u^1_{j_1}} \frac{\partial g^q}{\partial u^n_{j_n}} F^1_p F^1_q + \ldots\right] \\ \left[\frac{\partial g^p}{\partial u^1_{j_1}} \frac{\partial g^q}{\partial u^2_{j_2}} F^1_p F^1_q + \ldots\right] & \ldots & \left[\frac{\partial g^p}{\partial u^2_{j_2}} \frac{\partial g^q}{\partial u^n_{j_n}} F^1_p F^1_q + \ldots\right] \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \left[\frac{\partial g^p}{\partial u^1_{j_1}} \frac{\partial g^q}{\partial u^n_{j_n}} F^1_p F^1_q + \ldots\right] & \ldots & \left[(\frac{\partial g^p}{\partial u^n_{j_n}} F^1_p)^2 + \ldots\right] \end{vmatrix} (\Delta u^1_{j_1})^2 \ldots (\Delta u^n_{j_n})^2$$

Pongamos : $\Delta^2 = K.(\Delta u^1_{j_1})^2 \ldots (\Delta u^n_{j_n})^2$

donde K es suma de productos de funciones continuas.

$$\Delta = (K)^{1/2}.\Delta u^1_{j_1} \ldots \Delta u^n_{j_n}$$

Sumando para todos los $D_{j_1 \ldots j_n}$ y pasando al limite, se tiene :

$$V(S) = \int_D (K)^{1/2} du^1 \ldots du^n$$

que es la n-medida de S. Hemos supuesto entonces, que S tiene el plano tangente continuo para la existencia de n-medida.

TEOREMA 2-2.2.-

La definición dada de n-medida, coincide en el caso $n=1$ con la definición (2-1.1), Cap. I de longitud.

Demostración :

Sea Γ: $g = g(u)$, $u_0 \leqslant u \leqslant \hat{u}$ una curva en G. Se trata de calcular su 1-medida por el procedimiento general.

Cada intervalo Δu_j, nos determina un vector $v \varepsilon T_e(G)$.

Hemos de construir entonces $(r-1)$ vectores $N_2,\ldots,N_r$, ortonormales y ortogonales a v. Según la definición de n-medida, la correspondiente a $v, N_2,\ldots,N_r$ viene dada por :

$$dV(\Gamma) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \cdot & \cdot & v_r \\ N_{21} & N_{22} & \cdot & \cdot & N_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ N_{r1} & N_{r2} & \cdot & \cdot & N_{rr} \end{vmatrix} =$$

$$= |v| . \begin{vmatrix} v_1 \cdot \frac{1}{|v|} & v_2 \cdot \frac{1}{|v|} & \cdot & \cdot & \cdot & v_r \cdot \frac{1}{|v|} \\ N_{21} & N_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & N_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ N_{r1} & N_{r2} & \cdot & \cdot & \cdot & N_{rr} \end{vmatrix} = |v|$$

que sumando y pasando al limite, es la longitud de la indicatriz de Γ.

Pasemos ahora a estudiar la invariancia de la n-medida.

2-3. INVARIANCIA DE LA N-MEDIDA.-

Como vimos en el Capitulo I, la longitud, o lo que es lo mismo, la 1-medida es invariante a derecha si y solo si la matriz de la representación adjunta de G es ortogonal. Es de suponer, que al ir aumentando la dimensión de la n-superficie, la condición para G vaya siendo cada vez menos fuerte. Dada la dificultad de operaciones en el caso general, vamos a dar las condiciones de invariancia de la 2-medida, para luego facilmente generalizarlo a n-superficies.

TEOREMA 2-3.1.-

La 2-medida de una 2-superficie S en un grupo de Lie G de dimensión r, es invariante a derecha si y solo si se verifican las relaciones siguientes entre los elementos de la matriz de la representación adjunta de G :

$$\{(a_k^1)^2+\dots+(a_k^r)^2\}.\{(a_h^1)^2+\dots+(a_h^r)^2\}-(a_k^1a_h^1+\dots+a_k^ra_h^r)^2=1$$

$$\{(a_k^1)^2+\dots+(a_k^r)^2\}.(a_p^1a_q^1+\dots+a_p^ra_q^r) -$$

$$- (a_k^1a_p^1+\dots+a_k^ra_p^r).(a_k^1a_q^1+\dots+a_k^ra_q^r) = 0$$

para todo $h,k,p,q=1,\dots,r$ con $k\neq h$, $p<q$

Demostración :

Sea $S : g = g(u^1,u^2)$; $\bar{S} = S.h : \bar{g} = g(u^1,u^2).h$; $u_0^i \leqslant u^i \leqslant \hat{u}^i$

Repitiendo el proceso bien conocido ya, tanto S como $\bar{S}$ nos determinan dos vectores tangentes en e a G : (v,ω), $(\bar{v},\bar{\omega})$ respectivamente, correspondientes a cada intervalo de partición de D : $\{u_0^i,\hat{u}^i\}$, $i=1,2$, y que se relacionan de la forma :

$$\bar{v} = Adj(h)v, \quad \bar{\omega} = Adj(h)\omega$$

Cada pareja de vectores de estos (v,ω), nos determinan un elemento de 2-medida dV, que tendrá que coincidir con el determinado por la pareja correspondiente $(\bar{v},\bar{\omega})$: $d\bar{V}$. Por definición, estos elementos de 2-medida vienen dados en función de los determinantes :

$$\begin{vmatrix} |v|^2 & v.\omega \\ v.\omega & |\omega|^2 \end{vmatrix} \text{ para } S, \qquad \begin{vmatrix} |\bar{v}|^2 & \bar{v}.\bar{\omega} \\ \bar{v}.\bar{\omega} & |\bar{\omega}|^2 \end{vmatrix} \text{ para } \bar{S}$$

Si estos determinantes coinciden para todos los intervalos de D, S y $\bar{S}$, tienen la misma 2-medida, y recíprocamente.

Nuestro problema se reduce entonces a estudiar las condiciones para que sea : $dV = d\bar{V}$ para todo (v,ω), o sea :

$$\begin{vmatrix} |v|^2 & v.\omega \\ v.\omega & |\omega|^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |\bar{v}|^2 & \bar{v}.\bar{\omega} \\ \bar{v}.\bar{\omega} & |\bar{\omega}|^2 \end{vmatrix}$$

para todo $v,\omega \in T_e(G)$, siendo $\bar{v} = Adj(h)v$, $\bar{\omega} = Adj(h)\omega$.

Abordaremos el problema de la siguiente forma: 1) condiciones para Adj(G) bajo las cuales esa igualdad se verifica para cada dos vectores distintos de la base natural de $T_e(G)$: $(e_1,\ldots,e_r)$; 2) Condiciones para Adj(G) bajo las cuales esa igualdad se verifica para un vector cualquiera $v\varepsilon T_e(G)$ y uno de la base $(e_1,\ldots,e_r)$ tal que v no sea proporcional a el; 3) Si se verifican las condiciones anteriores, la igualdad es cierta para todo par $(v,\omega)\varepsilon T_e(G)$.

Vayamos entonces siguiendo esos pasos :

1) Sean e_k,e_h, $k\neq h$.

Al estar definida la metrica euclidea en $T_e(G)$, se tiene :

$$\{dV(e_k,e_h)\}^2 = \begin{vmatrix} |e_k|^2 & e_k.e_h \\ e_k.e_h & |e_h|^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\{d\bar{V}(\bar{e}_k,\bar{e}_h)\}^2 = \begin{vmatrix} |\bar{e}_k|^2 & \bar{e}_k.\bar{e}_h \\ \bar{e}_k.\bar{e}_h & |\bar{e}_h|^2 \end{vmatrix}$$

donde :

$$\bar{e}_k = a^i_j.(e_k)^j.e_i = a^i_k.e_i = a^1_k e_1 +\ldots+ a^r_k e_r$$

$$\bar{e}_h = a^i_j.(e_h)^j.e_i = a^i_h.e_i = a^1_h e_1 +\ldots+ a^r_h e_r$$

y sin más que operar se obtienen los módulos de ambos vectores, así como su producto escalar, que resultan ser los siguientes :

$$|\bar{e}_k|^2 = (a_k^1)^2 + \ldots + (a_k^r)^2$$

$$|\bar{e}_h|^2 = (a_h^1)^2 + \ldots + (a_h^r)^2$$

$$\bar{e}_k . \bar{e}_h = a_k^1 a_h^1 + \ldots + a_k^r a_h^r$$

y sustituyendo en el determinante $\{d\bar{V}(\bar{e}_k, \bar{e}_h)\}^2$:

$$\{d\bar{V}(\bar{e}_k,\bar{e}_h)\}^2 = \begin{vmatrix} (a_k^1)^2 + \ldots + (a_k^r)^2 & a_k^1 a_h^1 + \ldots + a_k^r a_h^r \\ a_k^1 a_h^1 + \ldots + a_k^r a_h^r & (a_h^1)^2 + \ldots + (a_h^r)^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \{(a_k^1)^2 + \ldots + (a_k^r)^2\}.\{(a_h^1)^2 + \ldots + (a_h^r)^2\} - (a_k^1 a_h^1 + \ldots + a_k^r a_h^r)^2$$

y para que sea $(dV)^2 = (d\bar{V})^2$, debe ser :

$$\{(a_k^1)^2 + \ldots + (a_k^r)^2\}.\{(a_h^1)^2 + \ldots + (a_h^r)^2\} - (a_k^1 a_h^1 + \ldots + a_k^r a_h^r)^2 = 1$$

que es la primera de las condiciones dadas en el enunciado del teorema.

2) Sean v, e_k. Supongamos que las componentes de v son

$$v = v^1 e_1 + \ldots + v^r e_r$$

Los transformados de v, e_k por Adj son :

$$\bar{v} = a_j^i . v^j . e_i = (a_1^1 v^1 + \ldots + a_r^1 v^r) e_1 + \ldots + (a_1^r v^1 + \ldots + a_r^r v^r) e_r$$

$$\bar{e}_k = a_j^i . (e_k)^j . e_i = a_k^1 e_1 + \ldots + a_k^r e_r$$

$$|\bar{v}|^2 = (v^1)^2 . \{(a_1^1)^2 + \ldots + (a_1^r)^2\} + \ldots +$$

$$+ (v^r)^2 . \{(a_r^1)^2 + \ldots + (a_r^r)^2\} + 2 v^p v^q (a_p^1 a_q^1 + \ldots + a_p^r a_q^r); \; p < q$$

$$|\bar{e}_k|^2 = (a_k^1)^2 + \ldots + (a_k^r)^2$$

Pero teniendo en cuenta las expresiones de $|\bar{e}_k|^2$, $(\bar{e}_k.\bar{e}_h)$ se tiene :

$$|\bar{v}|^2 = (v^1)^2.|\bar{e}_1|^2 +\ldots+ (v^r)^2.|\bar{e}_r|^2 + 2v^p v^q(\bar{e}_p.\bar{e}_q)$$

$$|\bar{e}_k|^2 = |\bar{e}_k|^2$$

$$\{d\bar{V}(\bar{v},\bar{e}_k)\}^2 = \begin{vmatrix} |\bar{v}|^2 & \bar{v}.\bar{e}_k \\ \bar{v}.\bar{e}_k & |\bar{e}_k|^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (v^1)^2.|\bar{e}_1|^2.|\bar{e}_k|^2 +\ldots+ (v^k)^2.|\bar{e}_k|^4 +\ldots+$$

$$+ (v^r)^2.|\bar{e}_r|^2.|\bar{e}_k|^2 + 2v^p v^q(\bar{e}_p.\bar{e}_q).|\bar{e}_k|^2 -$$

$$- (v^1)^2.(\bar{e}_1.\bar{e}_k).(\bar{e}_1.\bar{e}_k) -\ldots- (v^k)^2.|\bar{e}_k|^4 -\ldots-$$

$$- (v^r)^2.(\bar{e}_r.\bar{e}_k).(\bar{e}_r.\bar{e}_k) - 2v^p v^q(\bar{e}_p.\bar{e}_k).(\bar{e}_q.\bar{e}_k)$$

y teniendo en cuenta que por el paso 1) :

$$\begin{vmatrix} |\bar{e}_k|^2 & \bar{e}_k.\bar{e}_h \\ \bar{e}_k.\bar{e}_h & |\bar{e}_h|^2 \end{vmatrix} = 1$$

queda la expresión :

$$\{d\bar{V}(\bar{v},\bar{e}_k)\}^2 = (v^1)^2 +\ldots+ (v^{k-1})^2 + (v^{k+1})^2 +\ldots+$$

$$+ (v^r)^2 + 2v^p v^q.(\bar{e}_p.\bar{e}_q).|\bar{e}_k|^2 - (\bar{e}_p.\bar{e}_k).(\bar{e}_q.\bar{e}_k)$$

Esto ha de coincidir con :

$$\{dV(v,e_k)\}^2 = \begin{vmatrix} |v|^2 & v.e_k \\ v.e_k & |e_k|^2 \end{vmatrix} =$$

$$= |v|^2.|e_k|^2 - (v.e_k).(v.e_k) =$$

$$= (v^1)^2 +\ldots+ (v^{k-1})^2 + (v^{k+1})^2 +\ldots+ (v^r)^2$$

Co lo cual debe ser :

$$2v^p v^q.\left[(\bar{e}_p.\bar{e}_q).\ \bar{e}_k^{\ 2} - (\bar{e}_p.\bar{e}_k).(\bar{e}_q.\bar{e}_k)\right] = 0$$

en particular para aquellos $v = e_p + e_q$, con lo cual :

$$(\bar{e}_p.\bar{e}_q).\ \bar{e}_k^{\ 2} - (\bar{e}_p.\bar{e}_k).(\bar{e}_q.\bar{e}_k) = 0$$

que se traduce en :

$$(a_p^1 a_q^1+\ldots+a_p^r a_q^r).\{(a_k^1)^2+\ldots+(a_k^r)^2\}-$$

$$-(a_p^1 a_k^1+\ldots+a_p^r a_k^r).(a_q^1 a_k^1+\ldots+a_q^r a_k^r) = 0,\ p,\ q,\ k = 1,\ldots,r$$

distintos entre si.

3) Sean v,ω, cualesquiera de $T_e(G)$.

$$v = v^1 e_1 +\ldots+ v^r e_r$$

$$\omega = \omega^1 e_1 +\ldots+ \omega^r e_r$$

Sus homologos :

$$\bar{v} = a_j^i v^j.e_i = (a_1^1 v^1 +\ldots+ a_r^1 v^r).e_1 +\ldots+$$

$$+ (a_1^r v^1 +\ldots+ a_r^r v^r).e_r$$

$$\bar{\omega} = a_j^i \omega^j.e_i = (a_1^1 \omega^1 +\ldots+ a_r^1 \omega^r).e_1 +\ldots+$$

$$+ (a_1^r \omega^1 +\ldots+ a_r^r \omega^r).e_r$$

con lo que sustituyendo en los determinantes correspondientes :

$$\{dV(v,\ )\}^2 = |v|^2.|\omega|^2 - (v.\omega).(v.\omega) =$$

$$= (v^p)^2.(\omega^q)^2 + (v^q)^2.(\omega^p)^2 - 2v^pv^q\omega^p\omega^q,\ p<q$$

$$\{d\bar{V}(\bar{v},\bar{\omega})\}^2 = |\bar{v}|^2.|\bar{\omega}|^2 - (\bar{v}.\bar{\omega}).(\bar{v}.\bar{\omega}) =$$

$$= \left[(v^1)^2.|\bar{e}_1|^2 +\ldots+ (v^r)^2.|\bar{e}_r|^2 + 2v^pv^q(\bar{e}_p.\bar{e}_q)\right].$$

$$.\left[(\omega^1)^2.|\bar{e}_1|^2 +\ldots+ (\omega^r)^2.|\bar{e}_r|^2 + 2\omega^p\omega^q(\bar{e}_p.\bar{e}_q)\right] -$$

$$- \quad v^1\omega^1.|\bar{e}_1|^2 +\ldots+ v^r\omega^r.|\bar{e}_r|^2 + (v^p\omega^q+v^q\omega^p).(\bar{e}_p.\bar{e}_q)\ {}^2=$$

$$= (v^1)^2(\omega^1)^2.|\bar{e}_1|^4 +\ldots+ (v^r)^2(\omega^r)^2.|\bar{e}_r|^4 +$$

$$+ \{(v^p)^2(\omega^q)^2+(v^q)^2(\omega^p)^2\}.|\bar{e}_p|^2.|\bar{e}_q|^2 \quad +$$

$$+ 2.\{(v^i)^2\omega^p\omega^q+(\omega^i)^2v^pv^q\}.(\bar{e}_p.\bar{e}_q).|\bar{e}_i|^2 +$$

$$+ 4v^pv^q\omega^p\omega^q(\bar{e}_p.\bar{e}_q).(\bar{e}_p.\bar{e}_q) + 4(v^pv^q\omega^h\omega^l+\omega^p\omega^qv^hv^l).$$

$$.(\bar{e}_p.\bar{e}_q).(\bar{e}_h.\bar{e}_l) - (v^1)^2(\omega^1)^2.|\bar{e}_1|^4 -\ldots-$$

$$- (v^r)^2(\omega^r)^2.|\bar{e}_r|^4 - \{(v^p)^2(\omega^q)^2+(v^q)^2(\omega^p)^2\}.(\bar{e}_p.\bar{e}_q)^2 -$$

$$- 2v^pv^q\omega^p\omega^q.|\bar{e}_p|^2.|\bar{e}_q|^2 - 2v^i\omega^i(v^p\omega^q+v^q\omega^p)(\bar{e}_p.\bar{e}_q)|\bar{e}_i|^2 -$$

$$- 2v^pv^q\omega^p\omega^q(\bar{e}_p.\bar{e}_q).(\bar{e}_p.\bar{e}_q) - 2v^p\omega^qv^h\omega^l(\bar{e}_p.\bar{e}_q)(\bar{e}_h.\bar{e}_l) -$$

$$- 2v^q\omega^pv^l\omega^h(\bar{e}_p.\bar{e}_q).(\bar{e}_h.\bar{e}_l) - 2v^p\omega^qv^l\omega^h(\bar{e}_p.\bar{e}_q)(\bar{e}_h.\bar{e}_l) -$$

$$- 2v^q\omega^pv^h\omega^l(\bar{e}_p.\bar{e}_q)(\bar{e}_h.\bar{e}_l)\ ;\ p<q,\ h<l,\ i,q,l=1,\ldots,r$$

Teniendo en cuenta los casos 1),2) y las igualdades :

$$|\bar{e}_k|^2 . |\bar{e}_h|^2 - (\bar{e}_k . \bar{e}_h)^2 = 1$$

$$|\bar{e}_k|^2 . (\bar{e}_p . \bar{e}_q) - (\bar{e}_p . \bar{e}_k) . (\bar{e}_q . \bar{e}_k) = 0$$

que corresponden a dichos casos, se sustituyen en la igualdad anterior, con lo que se obtiene :

$$\{d\bar{V}(\bar{v},\bar{\omega})\}^2 = (v^p)^2(\omega^q)^2 + (v^q)^2(\omega^p)^2 - 2v^p v^q \omega^p \omega^q =$$

$$= \{dV(v,\omega)\}^2$$

Asi queda demostrado el teorema para n=2.

Para el caso general, pongamos por abreviar :

$$(a_k^1)^2 + .. = (a_k^1)^2 + .. + (a_k^r)^2 ; \quad a_k^1 a_h^1 + .. = a_k^1 a_h^1 + .. + a_k^r a_h^r$$

TEOREMA 2-3.2.-

La n-medida de una n-superficie en G es invariante a derecha si y solo si se verifican las relaciones :

$$\begin{vmatrix} \{(a_{k_1}^1)^2+..\} & . & . & . & (a_{k_1}^1 a_{k_n}^1+..) \\ (a_{k_1}^1 a_{k_2}^1+..) & . & . & . & (a_{k_2}^1 a_{k_n}^1+..) \\ . & . & . & . & . \\ (a_{k_1}^1 a_{k_n}^1+..) & . & . & . & \{(a_{k_1}^1)^2+..\} \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} \{(a_{k_1}^1)^2+..\} & . & . & . & . & (a_{k_1}^1 a_p^1+..)+(a_{k_1}^1 a_q^1+..) \\ (a_{k_1}^1 a_{k_2}^1+..) & . & . & . & . & (a_{k_2}^1 a_p^1+..)+(a_{k_2}^1 a_q^1+..) \\ . & . & . & . & . & . \\ (a_{k_1}^1 a_p^1+..)+(a_{k_1}^1 a_q^1+..) & . & & & & \{(a_p^1)^2+..\}\{(a_q^1)^2+..\}+2(a_p^1 a_q^1+..) \end{vmatrix} = 2$$

para todo $k_1, k_2, \ldots, k_n = 1, \ldots, r$ *y distintos , y para todo* $p, q = 1, \ldots, r$ *distintos y distintos a* $k_1, \ldots, k_n$.

Demostración :

Generalizando el proceso conocido para n=2, se demuestra facilmente. En primer lugar, como caso particular, debe ser invariante a derecha la n-medida determinada por n cualesquiera de los r vectores de la base $(e_1, \ldots, e_r)$. Sean estos n vectores : $e_{k_1}, \ldots, e_{k_n}$, $k_i \neq k_j$. La n-medida determinada por ellos, viene en función de :

$$(dV)^2 = \begin{vmatrix} |e_{k_1}|^2 & e_{k_1}.e_{k_2} & \cdot & \cdot & e_{k_1}.e_{k_n} \\ e_{k_1}.e_{k_2} & |e_{k_2}|^2 & \cdot & \cdot & e_{k_2}.e_{k_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{k_1}.e_{k_n} & e_{k_2}.e_{k_n} & \cdot & \cdot & |e_{k_n}|^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{vmatrix} = 1$$

La n-medida determinada por sus transformados $\bar{e}_{k_1}, \ldots, \bar{e}_{k_n}$:

$$(d\bar{V})^2 = \begin{vmatrix} |\bar{e}_{k_1}|^2 & e_{k_1}.e_{k_2} & \cdot & \cdot & \cdot & e_{k_1}.e_{k_n} \\ \bar{e}_{k_1}.\bar{e}_{k_2} & |\bar{e}_{k_2}|^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{e}_{k_2}.\bar{e}_{k_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{e}_{k_1}.\bar{e}_{k_n} & \bar{e}_{k_2}.\bar{e}_{k_n} & \cdot & \cdot & \cdot & |\bar{e}_{k_n}|^2 \end{vmatrix}$$

donde sabemos que :

$$\bar{e}_{k_i} = a^1_{k_i} e_1 + \ldots + a^r_{k_i} e_r$$

$$|\bar{e}_{k_i}|^2 = (a^1_{k_i})^2 + \ldots \ ; \quad \bar{e}_{k_i}.\bar{e}_{k_j} = a^1_{k_i} a^1_{k_j} + \ldots$$

de donde para que :

$$(dV)^2 = (d\bar{V})^2$$

se tiene la primera condición del enunciado.

A continuación, tambien como caso particular, debe conservarse por traslaciones a derecha la n-medida determinada por n-1 vectores de la base con otro cualquiera, en particular, suma de otros dos distintos de la base.

Sean $e_{k_1},\ldots,e_{k_n},e_p+e_q$, n vectores independientes, $k_1,\ldots,k_n,p,q = 1,\ldots r$, $p \neq q$. La n-medida determinada en este caso viene en función de :

$$(dV)^2 = \begin{vmatrix} |e_{k_1}|^2 & e_{k_1}.e_{k_2} & \cdot & \cdot & \cdot & e_{k_1}.e_{k_{n-1}} & e_{k_1}(e_p+e_q) \\ e_{k_1}.e_{k_2} & |e_{k_2}|^2 & \cdot & \cdot & \cdot & e_{k_2}.e_{k_{n-1}} & e_{k_2}(e_p+e_q) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{k_1}(e_p+e_q) & e_{k_2}(e_p+e_q) & \cdot & & \cdot & e_{k_n}(e_p+e_q) & |e_p+e_q|^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Los transformados definen :

$$(d\bar{V})^2 = \begin{vmatrix} |\bar{e}_{k_1}|^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{e}_{k_1}.\bar{e}_{k_{n-1}} & \bar{e}_{k_1}(\bar{e}_p+\bar{e}_q) \\ \bar{e}_{k_1}.\bar{e}_{k_2} & \cdot & \cdot & \cdot & & \bar{e}_{k_2}.\bar{e}_{k_{n-1}} & \bar{e}_{k_2}(\bar{e}_p+\bar{e}_q) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{e}_{k_1}(\bar{e}_p+\bar{e}_q). & \cdot & \cdot & \cdot & & \bar{e}_{k_n}(\bar{e}_p+\bar{e}_q) & |\bar{e}_p+\bar{e}_q|^2 \end{vmatrix}$$

con lo cual, para que $(dV)^2 = (d\bar{V})^2$, considerando las expresiones de los $\bar{e}_{k_i}$ como en el teorema (2-3.1), se sigue la segunda parte del enunciado.

Como vemos, las condiciones exigidas por el teorema (2-3.1), (2-3.2), son un poco más flojas al ir aumentando la dimensión de la n-superficie. El caso n=1 es el más exigente, pues Adj(G) debe ser ortogonal para la invariancia de la 1-medida, o sea la longitud. Por tanto, se tiene :

COROLARIO 2-3.1.-

Si la 1-medida(longitud) es invariante a derecha en un grupo de Lie G, tambien lo es la n-medida.

El otro caso extremo, es un resultado conocido, que aquí se deduce como :

COROLARIO 2-3.2.-

Para el caso n=r, la r-medida es invariante a derecha si y solo si G es unimodular.

Demostración :

Es muy sencilla la demostración acudiendo a la definición de n-medida, para n=r :

Hemos de formar la matriz con las r filas las componentes de $v_1,\ldots,v_r$, y en este caso no hay que determinar los vectores ortonormales y ortogonales a los v_i. Lo mismo para sus transformados $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_r$:

$$dV = \det(v_1,\ldots,v_r)$$

$$d\bar{V} = \det(\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_r)$$

pero como $\bar{v}_i = \mathrm{Adj}(v_i)$, se sigue que para que $dV = d\bar{V}$, ha de ser :

$$|\mathrm{Adj}(G)| = 1$$

o sea, G unimodular.

Teniendo en cuenta el Corolario (1-2.4), se deduce :

COROLARIO 2-3.3.-

La r-medida de una r-superficie en un grupo de Lie de dimensión r es invariante a derecha si y solo si lo es el r-vector integral.

Demostración :

En ambos casos, se exige que G sea unimodular.

2-4. CASOS PARTICULARES.-

a) $G = R^3$, $S = g(u^1,u^2)$ $\quad u_0^i \leq u^i \leq \hat{u}^i$

Consideremos una partición de D : $u_0^i \leq u^i \leq \hat{u}^i$, y los vectores determinados por los puntos $g(u^1_{j_1},u^2_{j_2})$, $g(u^1_{j_1+1},u^2_{j_2})$, $g(u^1_{j_1},u^2_{j_2+1})$:

$$v_1 = \Delta_1 g^i . e_i, \quad v_2 = \Delta_2 g^i . e_i, \quad e_i = \frac{\partial}{\partial g^i}) e$$

$$\Delta_1 g = g(u^1_{j_1+1},u^2_{j_2}) - g(u^1_{j_1},u^2_{j_2}) = \frac{\partial g}{\partial u^1_{j_1}} \Delta u^1_{j_1}$$

$$\Delta_2 g = g(u^1_{j_1},u^2_{j_2+1}) - g(u^1_{j_1},u^2_{j_2}) = \frac{\partial g}{\partial u^2_{j_2}} \Delta u^2_{j_2}$$

con lo cual :

$$\{dV(v_1,v_2)\}^2 = \begin{vmatrix} |v_1|^2 & v_1 . v_2 \\ v_1 . v_2 & |v_2|^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_i \left(\frac{\partial g^i}{\partial u^1_{j_1}}\right)^2 & \sum_i \left(\frac{\partial g^i}{\partial u^1_{j_1}} \frac{\partial g^i}{\partial u^2_{j_2}}\right) \\ \sum_i \left(\frac{\partial g^i}{\partial u^1_{j_1}} \frac{\partial g^i}{\partial u^2_{j_2}}\right) & \sum_i \left(\frac{\partial g^i}{\partial u^2_{j_2}}\right)^2 \end{vmatrix} . (\Delta u^1_{j_1})^2 (\Delta u^2_{j_2})^2 =$$

$$= \left| \frac{D(g^1,g^2,g^3)}{D(u^1_{j_1},u^2_{j_2})} \right|^2 . (\Delta u^1_{j_1})^2 (\Delta u^2_{j_2})^2$$

donde :

$$\left| \frac{D(g^1,g^2,g^3)}{D(u^1_{j_1},u^2_{j_2})} \right|^2$$

es el cuadrado del módulo del producto vectorial de v_1, v_2.

Sin más que pasar al limite, y recordando la nomenclatura de la geometria diferencial clasica :

$$\text{Area} = \int_D \left|\frac{D(g^1,g^2,g^3)}{D(u^1,u^2)}\right| du^1 du^2 = \int_D \{EG-F^2\}^{1/2} du^1 du^2$$

b) $G \equiv x_1.x_4 = x_2.x_3$, $S = g(u^1,u^2)$

Como en el caso anterior, partiendo el intervalo D :
$u_0^i \leqslant u^i \leqslant \hat{u}^i$, y considerando los puntos :

$$\Delta_1 g = g^{-1}(u^1_{j_1},u^2_{j_2}).g(u^1_{j_1+1},u^2_{j_2}) = \frac{1}{g(u^1_{j_1},u^2_{j_2})}\, g(u^1_{j_1+1},u^2_{j_2}) =$$

$$= \{g(u^1_{j_1},u^2_{j_2}) + \frac{\partial g}{\partial u^1_{j_1}} \Delta u^1_{j_1} + ..\}.\ \frac{1}{g(u^1_{j_1},u^2_{j_2})} =$$

$$= 1 + \frac{\partial g}{\partial u^1_{j_1}} \frac{1}{g(u^1_{j_1},u^2_{j_2})} \Delta u^1_{j_1} + \ldots$$

$$\Delta_2 g = 1 + \frac{\partial g}{\partial u^2_{j_2}} \frac{1}{g(u^1_{j_1},u^2_{j_2})} \Delta u^2_{j_2} + \ldots$$

puntos que definen los vectores tangentes :

$$v_1 = \sum_i \frac{\partial g^i}{\partial u^1_{j_1}} \frac{1}{g^i(u^1_{j_1},u^2_{j_2})} \Delta u^1_{j_1} .e_i$$

$$v_2 = \sum_i \frac{\partial g^i}{\partial u^2_{j_2}} \frac{1}{g^i(u^1_{j_1},u^2_{j_2})} \Delta u^2_{j_2} .e_i$$

y formando el determinante definido por estos dos vectores:

$$\{dV(v_1,v_2)\}^2 = \begin{vmatrix} |v_1|^2 & v_1\cdot v_2 \\ v_1\cdot v_2 & |v_2|^2 \end{vmatrix}$$

haciendo operaciones y pasando al limite se obtiene para el área de S :

$$A = \int_D \frac{1}{g^1 g^2 g^3}\left[(g^1)^2.\{\frac{\partial g^2}{\partial u^1}\frac{\partial g^3}{\partial u^2} - \frac{\partial g^3}{\partial u^1}\frac{\partial g^2}{\partial u^2}\} + \right.$$

$$\left. + (g^2)^2.\{\frac{\partial g^1}{\partial u^1}\frac{\partial g^3}{\partial u^2} - \frac{\partial g^3}{\partial u^1}\frac{\partial g^1}{\partial u^2}\} + (g^3)^2.\{\frac{\partial g^1}{\partial u^1}\frac{\partial g^2}{\partial u^2} - \frac{\partial g^2}{\partial u^1}\frac{\partial g^1}{\partial u^2}\}\right]^{1/2} du^1 d$$

——————— 0 ———————

C A P I T U L O III

LONGITUD Y N-MEDIDA EN ESPACIOS HOMOGENEOS.

Sea G un grupo de Lie de dimensión r, H un subgrupo cerrado de G. Consideremos el espacio G/H de las clases de G módulo H. El espacio G/H admite estructura de variedad diferenciable de tal forma que la acción de G en G/H es diferenciable :

$$GxG/H \longrightarrow G/H, \ (g,g'H) \longrightarrow gg'H$$

En particular, la proyección :

$$\pi : G \longrightarrow G/H$$

es diferenciable. Al actuar G transitivamente sobre G/H, tenemos un espacio homogeneo. Si el subgrupo H fuera además normal, G/H sería grupo de Lie, y todo lo dicho en los Capitulos I y II se le puede aplicar.

Si H es compacto, es conocido que G/H admite una metrica invariante a izquierda. Nosotros exigiremos a H otras condiciones distintas, y dotaremos a G/H de dicha metrica. Vamos a considerar entonces H subgrupo cerrado y a definir una longitud y n-medida a partir de la de G, tal como hemos visto.

Para ello, tengamos la 1-forma canonica θ de G, que es invariante a izquierda, con valores en el álgebra de Lie L(G), definida por :

$\theta(X) = X$, para todo $X \varepsilon L(G)$

Sea $X_1,\ldots,X_r$ una base de L(G). Entonces :

$$\theta = \sum_{i=1}^{r} \theta^i . X_i$$

donde $\theta^1,\ldots,\theta^r$ forman una base del espacio de 1-formas invariantes a izquierda de G

En todo lo que sigue, trabajaremos en un entorno del punto unidad U(e), que estará contenido en la componente conexa G_e, y por tanto nos servirán los resultados de grupos de Lie conexos, en dicho entorno U.

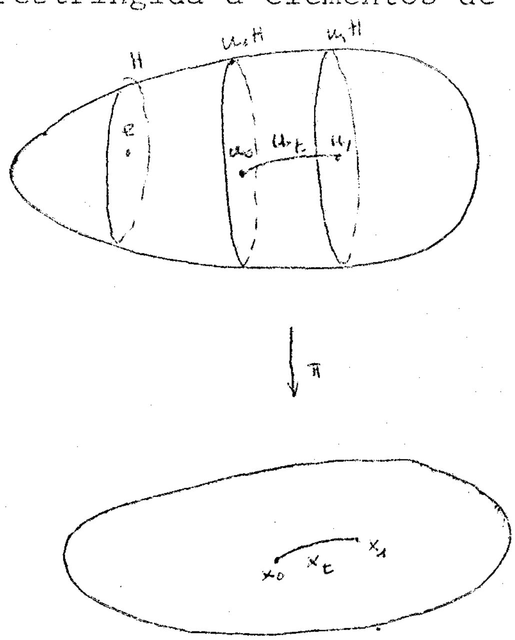
Consideremos el fibrado principal G(G/H,H). Denotaremos con L(H) el álgebra de Lie de H.

Damos a continuación el siguiente teorema que nos impondrá las condiciones para H :

<u>TEOREMA 3-1.</u>-

Sea G de Lie conexo y H un subgrupo cerrado de G. Se tiene : (1) Si existe un subespacio $\mathfrak{M}$ de $L(G)$ tal que : $L(G) = L(H) \oplus \mathfrak{M}$ y $Adj(H)\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$, entonces, la $L(H)$-componente ω de la 1-forma canonica Θ de G con respecto a la descomposición anterior, define una conexión en el fibrado $G(G/H,H)$ la cual es invariante a izquierda por elementos de G. (2) Recíprocamente, una conexión en $G(G/H,H)$ invariante a izquierda por elementos de G, si existe, determina una descomposición en $L(G) = L(H) \oplus \mathfrak{M}$, y se puede obtener de la forma descrita en (1).(Nomizu,Vol.I,Pág 103)

Supongamos que la matriz de la representación adjunta de G restringida a elementos de H, es ortogonal.



Consideremos una curva x_t, $t_0 \leq t \leq \hat{t}$ en G/H. Dada una conexión en $G(G/H,H)$, tenemos la elevación de x_t a través del punto $u_0 \varepsilon G$. Es la curva en G tal que: $\pi(u_t)=x_t$, u_t' horizontal. Consideremos la conexión dada por la 1-forma ω, L(H)-componente de la 1-forma canonica θ definida en L(G). Esta 1-forma ω es invariante a izquierda por G, y por tanto los campos horizontales invariantes a izquierda se transforman en campos invariantes a izquierda al aplicarles una traslación a izquierda. Como dice el teorema anterior, cualquier 1-forma que verifique esto, es del tipo de ω. Así pues, queda definida una correspondencia uno a uno entre los complementos $\mathfrak{M}$ de L(H) en L(G) y las 1-formas invariantes a izquierda. Cada complemento $\mathfrak{M}$ de L(H) determina una conexión, y entre todos los posibles complementos, vamos a escoger uno determinado, quedando así determinada la forma de conexión para G(G/H.H).

En $T_e(G)$ habiamos definido la metrica euclidea. Tomemos entonces una base ortonormal, de forma que p de esos vectores sean tangentes a la fibra por e : H, siendo p la dimensión de H. Los otros (r-p) son ortogonales a la fibra y constituirán el espacio horizontal en e. Este conjunto de r vectores induce r campos invariantes a izquierda, de ellos, p base de L(H), y (r-p) base de $\mathfrak{M}$.

La condición $Adj(H)\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$, siendo además Adj(H) ortogonal, veamos a qué equivale :

Llamando $X_1,\ldots,X_p$ la base de L(H), $X_{p+1},\ldots,X_r$ la de $\mathfrak{M}$ se verifica :

$$Adj(H)X_i = a^i_j.X_j, \quad i=1,\ldots,r; \; j=1,\ldots,r$$

siendo $a^i_j(H)$ los elementos de la matriz Adj(H). Como dicha matriz transforma campos de L(H) en campos de L(H), y debe transformar por el teorema campos de $\mathcal{M}$ en campos de $\mathcal{M}$, se verifican las relaciones :

$$\mathrm{Adj}(H)X_1 = a^1_1X_1 + \ldots + a^1_pX_p;\ a^1_1,\ldots,a^1_p \text{ ctes}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathrm{Adj}(H)X_p = a^p_1X_1 + \ldots + a^p_pX_p;\ a^p_1,\ldots,a^p_p \text{ ctes}$$
$$\mathrm{Adj}(H)X_{p+1} = a^{p+1}_{p+1}X_{p+1} + \ldots + a^{p+1}_rX_r;\ a^{p+1}_{p+1},\ldots,a^{p+1}_r \text{ ctes}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathrm{Adj}(H)X_r = a^r_{p+1}X_{p+1} + \ldots + a^r_rX_r;\ a^r_{p+1},\ldots,a^r_r \text{ ctes}$$

de forma que los demás elementos de Adj(H) que no aparecen ahí, son cero. Luego tiene la sencilla expresión :

$$\mathrm{Adj}(H) = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & \\ \hline & A_2 \end{array}\right),\ A_1, A_2 \text{ ortogonales y ctes.} \qquad (*)$$

3-1. DEFINICION DE LONGITUD EN G/H.-

Con todo lo precedente, pasemos a dar la definición de longitud. Sea para ello, un espacio homogéneo G/H, tal que se cumplen las condiciones del teorema (3-1), y tal que la matriz Adj(H) tiene la forma (*)

DEFINICION 3-1.1.-

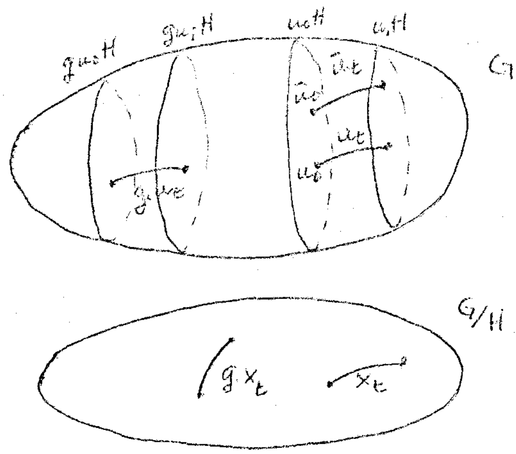
Sea Γ: x_t, $t_0 \leq t \leq \hat{t}$ *una curva en G/H. Llamamos longi-*

tud de Γ*, a la longitud de una elevación de* x_t *en el grupo G, según la conexión* ω *definida.*

Observemos que esta definición tiene sentido, pues cualquiera de las elevaciones de x_t tiene la misma longitud. En efecto : sean u_t, $\bar{u}_t$ dos elevaciones de x_t a traves de $u_o, \bar{u}_o$ respectivamente. Entonces :

$$\bar{u}_t = u_t . h, \ t_0 \leqslant t \leqslant \hat{t}, \ h \varepsilon H$$

pero al ser Adj(H) ortogonal, por el teorema (2-2.1) del Cap.I las dos curvas u_t, $\bar{u}_t$ tienen la misma longitud.



Realicemos ahora una traslación a izquierda en G/H :

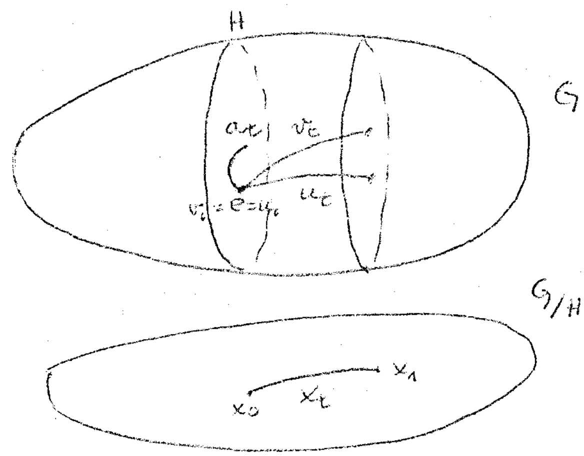
$$x_t \longrightarrow g.x_t, \ g \varepsilon G$$

Para calcular la longitud de $g.x_t$ hemos de encontrar una de sus elevaciones. Pero al ser la forma de conexión ω invariante a izquierda, se deduce que una de tales elevaciones es $g.u_t$, $t_0 \leqslant t \leqslant \hat{t}$. Como por definición las curvas u_t y $g.u_t$ son congruentes, tienen la misma longitud en G, y por tanto x_t y $g.x_t$ $t_0 \leqslant t \leqslant \hat{t}$, tienen igual longitud en G/H. Así, la longitud en G/H es invariante por traslaciones a izquierda.

TEOREMA 3-1.1.-

La longitud de una curva Γ en G/H según la forma de conexión ω, es menor que la longitud de la misma curva según otra conexión cualquiera invariante a izquierda ω'.

Demostración :



Consideremos la elevación u_t de x_t mediante la conexión ω. Sea ω' otra conexión invariante a izquierda, y v_t la elevación correspondiente.

Se tiene :

$$\pi(v_t) = \pi(u_t) = x_t, \; t_0 \leqslant t \leqslant \hat{t}$$

Hemos tomado por comodidad las elevaciones u_t y v_t de x_t a traves del mismo punto, que además vamos a suponer que es e : $u_0 = v_0 = e$

Tanto u_t como v_t cortan a cada fibra en un punto, distinto excepto a la fibra H, en que $u_0 = v_0 = e$. Se tiene entonces :

$$v_t = a_t . u_t, \; t_0 \leqslant t \leqslant \hat{t}, \; a_t \subset H$$

Hagamos una partición de $\{t_0, \hat{t}\}$ y consideremos por ejemplo el intervalo (t_0, t_1). Veremos que el arco (v_{t_0}, v_{t_1})

tiene mayor longitud que el (u_{t_0},u_{t_1}). La longitud de (u_{t_0},u_{t_1}) viene dada en función del módulo del vector tangente en e al subgrupo uniparametrico determinado por u_{t_1}, si $\Delta t_1 = t_1-t_0$ es suficientemente pequeño. Análogamente para el arco (v_{t_0},v_{t_1}). Estos vectores tangentes, se confunden con los tangentes a las curvas u_t, v_t, en e si Δt_1 es pequeño.

Aplicando a $v_t = u_t.a_t$ la formula de Leibnizt :

$$v'_t = u'_t.a_t + u_t.a'_t \qquad t_0 < t < \hat{t} \quad (\text{la } ' \text{ es derivada})$$

que en $t=t_0$:

$$v'_{t_0} = u'_{t_0}.e + e.a'_{t_0} = u'_{t_0} + a'_{t_0}$$

pero por ser a_t una curva en H, a'_{t_0} es tangente a la fibra en e, por tanto, ortogonal al vector u'_{t_0} (horizontal) de donde :

$$|u'_{t_0}| \leqslant |v'_{t_0}|$$

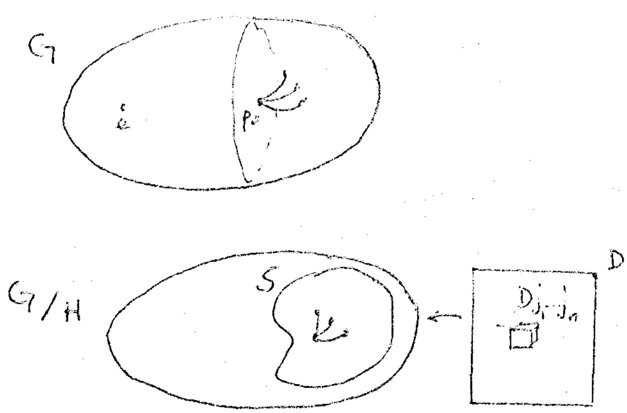
Analogamente para cualquier Δt_j, y por tanto para la suma de todos ellos. Pasando al limite, se tiene el resultado.

3-2. N-MEDIDA EN ESPACIOS HOMOGENEOS.-

Sea G de Lie de dimensión r, H subgrupo cerrado de dimensión k, y consideremos el espacio homogeneo de dimensión (r-k) : G/H. Definiremos la n-medida de una n-superficie $S \subset G/H$, donde $1 \leq n \leq (r-k)$. Lo mismo que en un grupo de Lie S viene dada como imagen homeomorfa de un intervalo $D \subset R^n$ por medio de :

$$g = g(u^1,\ldots,u^n),\quad u_0^i \leq u^i \leq \hat{u}^i,\quad i=1,\ldots,n$$

Consideramos aquí, lo mismo que en lo que va de Capitulo grupos de Lie, y subgrupos H cumpliendo las condiciones del teorema (3-1).



Tengamos una partición de D:

$$u_0^i < \ldots < u_{s_i}^i = \hat{u}^i$$

y en particular el intervalo $D_{j_1\ldots j_n}$. En G/H tenemos un n-cubo curvilineo homeomorfo a $D_{j_1\ldots j_n}$. Consideremos los arcos de curva en G/H que unen los vertices $g(u^1_{j_1+1},\ldots,u^n_{j_n}),\ldots$ $\ldots,g(u^1_{j_1},\ldots,u^n_{j_n+1})$ con $g(u^1_{j_1},\ldots,u^n_{j_n})$. Si trazamos sus elevaciones a traves de un punto $p_0 \varepsilon G$, obtenemos n curvas que nos definen un elemento de n-medida en G por el procedimiento ya conocido. Si las elevaciones las tomamos por un p_1 de la misma fibra que p_0, cada "arista" curvilinea define el mismo vector en e que la que pasa por p_0, y esto nos dice que la definición tiene sentido. Se repite el proceso para cada $D_{j_1 \dots j_n}$, y pasando al limite se obtiene la n-medida de S en G/H.

Realmente, para $n > 1$, no hace falta que Adj(H) sea ortogonal sino algo más debil.

Por un razonamiento análogo que en las curvas, se deduce que S y g.S tienen el mismo elemento de n-medida, y queda entonces :

Todas las n-superficies congruentes en G/H tienen la misma n-medida, o lo que es lo mismo : la n-medida en G/H es invariante a izquierda.

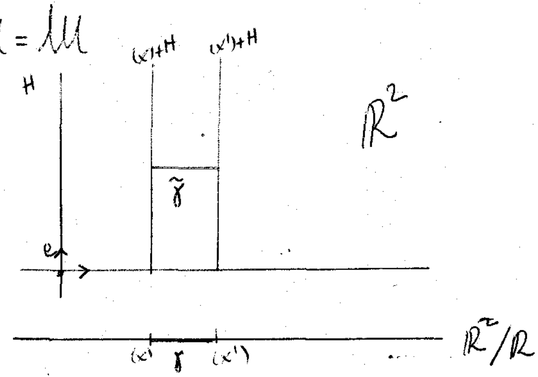
3-3.-CASOS PARTICULARES.-

a) $G = R^2$, $H = R$

Como vemos, en este caso ni G ni H son compactos, pero se verifica :

$$L(G) = L(H) \oplus \mathfrak{m}, \quad Adj(H)\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$$

siendo $L(H) = \frac{\partial}{\partial x}$, $\mathfrak{m} = \frac{\partial}{\partial y}$



Dada una curva(recta) en R: γ, su elevación es $\bar{\gamma}$, cuya longitud es la de γ. Aquí, G/H es de Lie.

b) Espacios Simetricos : (G,H,σ).

Con G de Lie conexo, H subgrupo cerrado de G, y σ un automorfismo involutivo, tal que H está entre el conjunto cerrado de todos los puntos fijos de σ, y la componente identidad de dicho conjunto.

Por ser (G,H,σ) simetrico, $(L(G),L(H),\sigma)$ donde σ es el inducido por el automorfismo de G, es un álgebra de Lie simétrica, o sea que :

$$L(G) = L(H) \oplus \mathfrak{M}$$

donde $L(H) = \{X \in L(G) | \sigma(X) = X\}$; $\mathfrak{M} = \{X \in L(G) | \sigma(X) = -X\}$

Se comprueba que :

$$[L(H),L(H)] \subset L(H); \quad [L(H),\mathfrak{M}] \subset \mathfrak{M} \quad , \quad [\mathfrak{M},\mathfrak{M}] \subset \mathfrak{M}$$

$$(\mathrm{Adj}(h)X) = \mathrm{Adj}\sigma(h).\{\sigma(X)\} = \mathrm{Adj}(h)(-X) = -\mathrm{Adj}(h)X$$

de donde :

$$\mathrm{Adj}(h)\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$$

Además necesitamos que $\mathrm{Adj}(H)$ sea ortogonal, y estamos en las condiciones del teorema (3-1).

Un ejemplo lo constituye :

$$S^3 = SO(4)/SO(3)$$

o en general :

$$S^n = SO(n+1)/SO(n)$$

si $e_0,\dots,e_n$ es la base natural de R^{n+1}, el subgrupo de isotropia en e_0 S^n es todas las A $SO(n+1)$ tal que :

$Ae_0 = e_0$, o sea :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

donde $B \in SO(n)$. Si llamamos $SO(n) = \{A \mid Ae_0 = e_0\}$, y definimos el automorfismo :

$$\sigma : SO(n+1) \longrightarrow SO(n+1) \text{ dado por : } \sigma(A) = SAS^{-1}$$

donde :

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

por lo que $SO(n)$ coincide con la componente identidad del subgrupo de todos los puntos fijos de σ. Así pues, S^n es simetrico. Se podría ver tambien que Adj(H) es ortogonal.

0

A P E N D I C E

1. COORDENADAS CANONICAS DE PRIMERA ESPECIE.

Sea G de Lie, y L(G) su álgebra de campos invariantes a izquierda.

TEOREMA 1.-

Existe un entorno $U(e)$ en G, y un entorno $V(0)$ en $L(G)$ tal que si $g \in U$, entonces g puede expresarse unicamente como : $g = \exp(X)$, $X \in V$.

La aplicación $X \longrightarrow \exp(X)$ es un difeomorfismo de V en U. (Matsushima, Cap IV, Pág. 205)

Sea $(X_1, \ldots, X_r)$ una base de L(G). Elijamos un número positivo c pequeño, de forma que el entorno V(0) pueda escribirse como :

$$V = \{\sum_{i=1}^{r} a^i X_i \,\Big|\, |a^i| < c,\ i=1,\ldots,r\}$$

Entonces la aplicación :

$$\exp(\sum_{i=1}^{r} a^i X_i) \longrightarrow (a^1, \ldots, a^r)$$

es un difeomorfismo de U en uń cubo $\{(a^i) \,\Big|\, |a^i| < c,\ i=1,\ldots,r\}$ de R^r. Así pues, podemos definir un sistema local en U por medio de $(x^1,\ldots,x^r)$ de forma que :

$$x^k\left(\exp(\sum_{i=1}^{r} a^i X_i)\right) = a^k \qquad (*)$$

El sistema de coordenadas locales $(x^1,\ldots,x^r)$ definido por (*) en el entorno U(e), es llamado el sistema de coordenadas canonicas de primera especie de G, con respecto a la base $(X_1,\ldots,X_r)$.

2. EL GRUPO G : $x_1 \cdot x_4 = x_2 \cdot x_3 \subset R^4$, $x_i \neq 0$, ES DE LIE.

Es un grupo de Lie conmutativo y tridimensional, con ocho componentes conexas, respecto de la operación :

$$(x_1,x_2,x_3,x_4).(y_1,y_2,y_3,y_4) = (x_1y_1,x_2y_2,x_3y_3,x_4y_4)$$

En efecto :

a) es variedad diferenciable. La correspondencia :

$$\Psi : G \longrightarrow R^3 - \{OXY \cup OXZ \cup OYZ\}$$

tal que :

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1,x_2,x_3) \in R^3$$

es un homeomorfismo.

b) La operación es interna. En efecto, los puntos :

$(x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)$

satisfacen :

$$x_1x_4 = x_2x_3 ; \; y_1y_4 = y_2y_3$$

y si las multiplicamos miembro a miembro, queda expresada la condición. Esta operación verifica además los axiomas de grupo conmutativo, siendo el punto unidad (1,1,1,1).

c) La aplicación :

ψ: (x,y) —— $x.y^{-1}$, es C^{∞}.

3. CALCULO DE LA MATRIZ DE LA REPRESENTACION ADJUNTA.

Haremos dicho calculo para S^3 y $Gl(2,R)$. Previamente, necesitamos los siguientes :

LEMA 1.-

Sea G un grupo de Lie de dimensión r, y $(v_1,\ldots,v_r)$ *una base de* $T_e(G)$. *Entonces existen bases de campos* $(X_1,\ldots,X_r)$, $(Y_1,\ldots,Y_r)$ *tales que :*

(a) X_i *es invariante a izquierda*

(b) Y_i *es invariante a derecha*

(c) $(Y_i)_e = (X_i)_e = v_i$

LEMA 2.-

En las condiciones del lema anterior, si $g \in G$ *y* $A=(a_{ij})$ *es la matriz de cambio de base :*

$$(Y_i)_g = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(X_j)_g$$

se verifica :

$$A = Adj(g)$$

3-1. APLICACION A S^3.-

En este caso, las bases de campos invariantes a izquierda y derecha son respectivamente :

$X_1(-x_2,x_1,x_4,-x_3);X_2(-x_3,-x_4,x_1,x_2);X_3(-x_4,x_3,-x_2,x_1)$

$Y_1(-x_2,x_1,-x_4,x_3);Y_2(-x_3,x_4,x_1,-x_2);Y_3(-x_4,-x_3,x_2,x_1)$

ambas bases ortonormales. Podemos expresar esto en la forma matricial :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 & x_1 & x_4 & -x_3 \\ -x_3 & -x_4 & x_1 & x_2 \\ -x_4 & x_3 & -x_2 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = A.E$$

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ -x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \\ -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = B.E$$

el cambio de base es entonces :

$$(Y) = B.A^{-1}(X)$$

que sin más que operar, resulta ser :

$$\mathrm{Adj} = \begin{pmatrix} x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2 & 2(x_2x_3-x_1x_4) & 2(x_1x_3+x_2x_4) \\ 2(x_2x_3+x_1x_4) & x_1^2+x_3^2-x_2^2-x_4^2 & 2(x_3x_4-x_1x_2) \\ 2(x_2x_4-x_1x_3) & 2(x_1x_2+x_3x_4) & x_1^2+x_4^2-x_2^2-x_3^2 \end{pmatrix} = B.A^{-1}$$

3-2. APLICACION A Gl(2,R).-

Las bases de campos en funcion de la base natural e_{ij}, son en este caso :

$$
\left.\begin{aligned}
X_{11} &= x_{11}e_{11} + x_{21}e_{21}\\
X_{12} &= x_{11}e_{12} + x_{21}e_{22}\\
X_{21} &= x_{12}e_{11} + x_{22}e_{21}\\
X_{22} &= x_{12}e_{12} + x_{22}e_{22}
\end{aligned}\right\} \quad X_{ij} \text{ invariantes a izquierda.}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
Y_{11} &= x_{11}e_{11} + x_{12}e_{12}\\
Y_{12} &= x_{21}e_{11} + x_{22}e_{12}\\
Y_{21} &= x_{11}e_{21} + x_{12}e_{22}\\
Y_{22} &= x_{21}e_{21} + x_{22}e_{22}
\end{aligned}\right\} \quad Y_{ij} \text{ invariantes a derecha.}
$$

que con el mismo calculo que en el caso de S^3, se tiene :

$$
\mathrm{Adj}(x) = \begin{pmatrix}
\frac{1}{\Delta} x_{11}x_{22} & \frac{1}{\Delta} x_{12}x_{22} & -\frac{1}{\Delta} x_{11}x_{21} & -\frac{1}{\Delta} x_{12}x_{21} \\
\frac{1}{\Delta} x_{21}x_{22} & \frac{1}{\Delta} x_{22}^2 & -\frac{1}{\Delta} x_{21}^2 & -\frac{1}{\Delta} x_{22}x_{21} \\
-\frac{1}{\Delta} x_{12}x_{11} & -\frac{1}{\Delta} x_{12}^2 & \frac{1}{\Delta} x_{11}^2 & \frac{1}{\Delta} x_{11}x_{12} \\
-\frac{1}{\Delta} x_{12}x_{21} & -\frac{1}{\Delta} x_{12}x_{22} & \frac{1}{\Delta} x_{11}x_{21} & \frac{1}{\Delta} x_{11}x_{22}
\end{pmatrix}
$$

donde :

$$\Delta = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} \neq 0$$

——— 0 ———

B I B L I O G R A F I A

BERGER-GOSTIAUX.

Geometrie Differentielle. Armand Colin - 1972, Paris.

BISHOP-CRITTENDEN.

Geometry of Manifolds. Academic Press - 1964, New York.

BRICKELL-CLARK.

Differentiable Manifolds. Van Nostrand, Reinhold Comp. - 1970 - London.

BOURBAKI.

Groupes et Algebres de Lie, Chapitres II et III. Elements de Mathematique - Hermann - 1972 -Paris.

CARTAN.

Formas diferenciables.- 1972 - Barcelona - Traducción.

CHEVALEY.

Theory of Lie Groups. Princeton University Press- 1964 - Princeton.

CHOQUET-BRUHAT.

Geometrie Differentielle et systemes exterieurs. Dunod - 1968 - Paris.

COHN.

Lie Groups. Cambridge at the University Press - - 1968.

ECHARTE.

Medidas en espacios foliados y en espacios homogeneos. Publicaciones de la Academia de Ciencias Exactas, Fisico-Quimicas y Naturales de Zaragoza - 1966 - Zaragoza.

ECHARTE.

Nota sobre un grupo de Lie. XI RAME - Murcia.

ECHARTE.

Representación del grupo de Lie S^3 por matrices ortogonales. I Jornadas Matematicas Luso-Españolas - 1972 - Lisboa.

GUGGENHEIMER.

Differential Geometry. Mc. Gran - Hill Series in Higher Mathematics - 1963 - New York.

HELGASON.

Differential Geometry and Symetric Spaces. Academic Press - 1962 - New York.

HOCHSCHILD.

La structure des groupes de Lie. Dunod - 1968 - - Paris.

KOBAYASHI-NOMIZU.

Foundations of Differential Geometry. Interstience Publishers -

V

Vol. I - 1963 - London.

Vol. II - 1969 - London.

KOSZUL.

Lectures on Fibre Bundles and Differential Geometry. Tata Institute of Fundamental Resarch - - 1960 - Bombay.

MALLIAVIN.

Geometrie Differentielle Intrinseque. Enseignements des Sciences - Hermann - 1972 - Paris.

MATSUSHIMA.

Differentiable Manifolds. Pure and Aplied Mathematics - 1972 - New York.

RADZISZEWSKI.

Sur les invariants integraux des courbes et surfaces dans un groupe de Lie. Bulletin de l'Academie Pölonaise des Sciences - Lublin.

SPIVAK.

Calculus on Manifolds. W. A. Benjamin Inc - - 1965 - New York.

SPIVAK.

Differential Geometry. Vol.I y Vol.II - 1970.

STERNBERG.

Lectures on Differential Geometry. Prentice Hall - 1964 - New Jersey.

VIDAL.

On regular Foliations. Ann. Inst. Fourier. XVII, 1 - 1969

YANO.

Integral fórmulas in Riemannian Geometry. Pure and Aplied Mathematics - 1970 - New York.

——— 0 ———

139

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE CIENCIAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. JOSE LUIS CABRERIZO JARAIZ titulada "INVARIANTES INTEGRALES EN GRUPOS DE LIE".

acordó otorgarle la calificación de "Sobresaliente "cum laude"

Sevilla, 24 de Septiembre 1.973.

El Vocal, El Vocal, El Vocal.

El Presidente, El Secretario, El Doctorando.

José Luis Cabrerizo