

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Facultad de Matemáticas
DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

FUNCIONES DE MORSE DISCRETAS
SOBRE COMPLEJOS INFINITOS.

Memoria presentada por José Antonio Vilches Alarcón para optar
al grado de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.



Fdo.: José Antonio Vilches Alarcón.

Vº. Bº. LOS DIRECTORES:



Fdo.: Rafael Ayala Gómez.
Profesor Titular de Universidad,
del Departamento de Geometría
y Topología de la Universidad
de Sevilla.



Luis Manuel Fernández Fernández
Profesor Titular de Universidad
del Departamento de Geometría
y Topología de la Universidad
de Sevilla.

Sevilla, Febrero de 2002.

0413
397

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
BIBLIOTECA

Carta registrada esta María Encarnación
al folio 187 rubricado Cal del Libro
Correspondiente.

Sevilla, 18 de Marzo de 2007

El Jefe del Negociado de Tesía,

Eda Jello

Indice

0	Preliminares	21
1	Teoría de Morse Discreta.	26
2	El Flujo Gradiente Discreto.	54
3	Campos Gradientes.	74
4	Funciones de Morse Discretas Minimales.	99
5	Construcción de funciones de Morse discretas en superficies infinitas.	117
	Bibliografía	131

RESUMEN

Esta memoria está dedicada a la extensión para complejos simpliciales infinitos de los conceptos y resultados de la teoría de Morse discreta ya estudiados en el caso finito. En un principio, dicho estudio se centrará en el caso de los 1-complejos infinitos, haciendo especial énfasis en las diferencias con el caso finito y desarrollándose una nueva versión de las desigualdades de Morse en este contexto. Asimismo, se usará la noción de flujo gradiente discreto para caracterizar el carácter crítico o no de aristas y vértices, resaltando que los caminos gradientes determinados por dicho flujo inducen una estructura de árbol en el 1-complejo considerado.

Con el objetivo de ampliar este estudio a complejos de dimensión cualquiera, se usarán los diagramas de Hasse de tales complejos modificados por una función de Morse discreta, de modo que los problemas planteados puedan expresarse en términos de la teoría de grafos. De este modo y, partiendo del concepto de cancelación introducido por R. Forman, se establece la noción de función de Morse minimal y su obtención se consigue mediante transferencias destinadas a la obtención de emparejamientos maximales acíclicos en el diagrama de Hasse mencionado. La noción de campo gradiente se extiende de manera natural al caso infinito dando lugar al estudio de la integración de dichos campos. Se prueba un resultado que caracteriza los campos gradientes en el caso de 1-complejos infinitos.

Por último, con idea de comenzar un estudio sistemático para 2-complejos infinitos, se desarrollará un método de definición de funciones de Morse discretas sobre superficies infinitas y se estudiarán con detalle algunos ejemplos que resaltan las diferencias con el caso unidimensional.

Introducción

En palabras de R. Bott [2], la teoría de Morse es una extensión natural del principio del mínimo para funciones continuas sobre espacios compactos. Esta importante área de la Topología Diferencial fue creada por M. Morse en 1934 [30] y, para describir su objetivo sucintamente, podemos decir que es el estudio de la relación entre los puntos críticos de las funciones reales definidas sobre una variedad diferenciable (es decir, aquellos en los que el gradiente de dicha función es nulo) y las propiedades globales de ésta. Pretende establecer conexiones entre su topología y las funciones definidas sobre ella mediante la información proporcionada por los puntos críticos. La teoría de Morse no es sólo una técnica útil, sino que desarrolla una serie de ideas y conceptos sencillos, que permiten establecer relaciones de gran alcance y profundidad entre el Análisis, la Geometría, la Topología y, recientemente, la Física.

Antes de esbozar una breve reseña de los conceptos básicos de la teoría necesarios para facilitar al lector la memoria que presentamos, citemos algunos importantes resultados en los que desempeñó un papel esencial. Tras el trabajo pionero de Morse, en el que se aborda la estructura de las geodésicas sobre una variedad, el periodo moderno de la teoría comienza con los trabajos de Bott en los años 50 sobre los grupos de homología y homotopía de los espacios simétricos compactos, que culminaron con su famoso Teorema de Periodicidad sobre los grupos de homotopía de los grupos unitario y ortogonal, herramienta esencial de la teoría K . Si bien la influencia de la teoría de Morse en este área quedó relegada por la potencia de los nuevos métodos de la Topología Algebraica, todavía hoy la naturaleza geométrica de la demostración de Bott conserva su atractivo.

Durante la década de los 60, la teoría de Morse fue usada sobre todo en el estudio de la topología de variedades, especialmente en los trabajos de

Smale [35], [36] y [37] que le permitieron demostrar la conjetura de Poincaré en dimensiones mayores o iguales a cinco.

Aunque desempeñó un papel relevante en el desarrollo de la teoría de Yang-Mills sobre los fibrados vectoriales, su influencia fue superada por el rápido desarrollo de los aspectos algebraicos y analíticos de la teoría de la Forma (gauge) y fue durante los años 80 cuando la teoría de Morse resurge de forma espectacular, debido principalmente al nuevo enfoque adoptado por Witten [42] inspirado por las ideas y técnicas de la Mecánica Cuántica Supersimétrica y a los trabajos de Floer [9], [10] y [11], en los que se pone especial énfasis en las líneas de flujo del gradiente de una función de Morse y que se han revelado de gran importancia en la teoría cuántica de campos.

No vamos ni siquiera a exponer los rudimentos de las teorías mencionadas, porque ello desbordaría ampliamente el marco y el propósito de esta introducción. Nos hemos limitado a señalar las referencias que pueden ser de utilidad al lector, que con una sólida formación en Física Teórica, esté interesado en una exposición panorámica de las áreas de la Geometría en que los diversos aspectos de la teoría de Morse son claves.

Tras estos brevísimos comentarios históricos, trataremos de exponer sucintamente los ingredientes básicos de la teoría clásica de Morse, introduciendo algunas definiciones y resultados que serán utilizados a lo largo de este trabajo. Para ello, seguiremos el clásico libro de Milnor [28] que, por otra parte, es referencia obligada para todo aquel que desee iniciarse en este área de la Topología Diferencial. También es recomendable el texto de Matsumoto [27], quizá más enfocado a la teoría de asas y la cirugía de variedades y, por supuesto, el libro de Gramain [20], donde se obtiene el teorema de clasificación de las superficies en el marco de la teoría de Morse.

Recordemos algunas definiciones básicas de la Geometría Diferencial. Si M es una n -variedad diferenciable y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, un punto $p \in M$ se llama punto crítico de f si $(df)_p = 0$.

En términos de una carta $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde U es un entorno abierto de p en M y $\Phi(p) = 0$, f corresponde a la función $f \circ \Phi^{-1} : \Phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ y $(df)_p$ se representa por la matriz

$$\left(\frac{\partial(f \circ \Phi^{-1})}{\partial x_1}(0), \dots, \frac{\partial(f \circ \Phi^{-1})}{\partial x_n}(0)\right)$$

Si, por abuso de notación, se escribe f en vez de $f \circ \Phi^{-1}$, el teorema de Taylor proporciona la igualdad:

$$f(x) - f(0) = \sum a_i x_i + \frac{1}{2} \sum a_{ij} x_i x_j + \text{resto}$$

donde

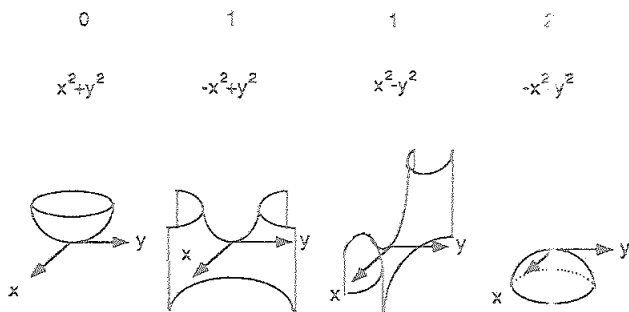
$$a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \quad \text{y} \quad a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0).$$

Si p es un punto crítico, es decir, si $\sum a_i x_i = 0$, se prueba que la matriz (a_{ij}) es una forma bilineal simétrica en el espacio tangente $T_p(M)$ llamada hessiano de f en p . El número de autovalores negativos del hessiano de f en p se llama índice de p y se denota por $\lambda(f, p)$ ó $\lambda(p)$. Se dice que p es un punto crítico no degenerado si el rango del hessiano de f en p es n .

La función f se llama función de Morse si todos sus puntos críticos son no degenerados. Entonces, existe una carta local Φ en p tal que:

$$f(x) - f(0) = - \sum_{i=1}^{\lambda(p)} x_i^2 + \sum_{i=\lambda(p)+1}^n x_i^2.$$

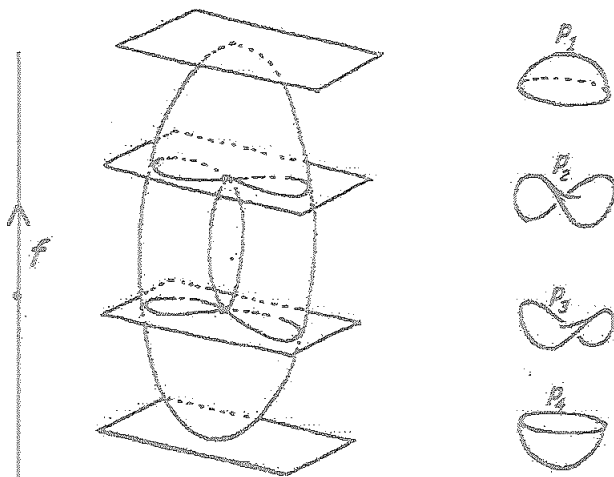
Por ejemplo, si se tiene una función de Morse f definida sobre una superficie $M \subseteq \mathbb{R}^3$ y el origen es un punto de M que es además punto crítico de f en M , el aspecto de M en un entorno del origen vendría dado por la siguiente figura, en la que en la primera fila aparece el índice como punto crítico del origen y en la segunda fila se indica la forma canónica de la función en cada caso:



Se prueba que toda aplicación diferenciable $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ puede aproximarse por una función de Morse y que los puntos críticos de este tipo de funciones son aislados, por lo que si M es compacta, su número es finito.

La teoría de Morse provocó una verdadera revolución en el estudio de la topología de variedades diferenciables debido, en último término, a que permitió demostrar que la complejidad topológica del espacio subyacente se refleja en la naturaleza de los puntos críticos de las funciones reales definidas sobre él. Para establecer con precisión qué significa esto, usaremos un ejemplo ilustrativo, que también nos será de utilidad para aclarar otros puntos de nuestra exposición.

Sea M la inmersión del toro en \mathbb{R}^3 que se indica en la figura y f la proyección sobre el eje OZ . Este es el ejemplo típico de función altura sobre una variedad inmersa en un espacio euclídeo, cuyos puntos críticos son aquellos en los que el plano tangente a la variedad es perpendicular a dicho eje. En nuestro caso, f tiene 4 puntos críticos: el máximo p_1 , el mínimo p_2 y 2 puntos de silla, p_3 y p_4 .



Así, en el ejemplo de la función altura sobre el toro, se observa que el índice de cada punto crítico es el número de direcciones principales a lo largo de las que una partícula situada en él puede descender.

Nótese que en nuestro ejemplo se tiene que $m_0 = 1$, $m_1 = 2$ y $m_2 = 1$, y $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$ donde cada m_i denota el número de puntos críticos de índice i de la función altura definida sobre el toro y cada b_i es el i -ésimo número de Betti del toro. En este caso, se dan las igualdades $m_i = b_i$ y $\sum_{i=0}^2 m_i = \chi(T)$ (característica e Euler-Poincaré del toro).

Consideremos los conjuntos

$$M^a = \{x \in M; f(x) \leq a\}$$

llamados conjuntos de subnivel. Es evidente que se producen los siguientes cambios geométricos en los mismos:

- (1) Si $a < 0 < f(p_4)$, $M^a = \emptyset$.
- (2) Si $f(p_4) < a < f(p_3)$, M^a es homeomorfo al disco bidimensional cerrado, D^2 .
- (3) Si $f(p_3) < a < f(p_2)$, entonces M^a es homeomorfo al cilindro.
- (4) Si $f(p_2) < a < f(p_1)$, M^a es una superficie de género 1 con borde S^1 .

(5) Si $f(p_1) < a$, M^a es el toro.

Así pues, el tipo de homotopía de un conjunto de subnivel cambia cuando supera la altura de un punto crítico. Pero, además, se observa la siguiente relación topológica entre dichos conjuntos:

- (a) El subnivel (2) es del mismo tipo de homotopía que el (1) tras pegarle una 0-célula.
- (b) El subnivel (3) es del mismo tipo de homotopía que el (1) con una 1-célula pegada.
- (c) El subnivel (4) es homotópicamente equivalente al (3) tras pegarle una 1-célula.
- (c) El conjunto subnivel (5) es homotópicamente equivalente al (4) con una 2-célula pegada.

En resumen, M puede obtenerse, salvo tipo de homotopía, pegando células a los conjuntos M^a determinados por los puntos críticos.

La mayor virtud del ejemplo estudiado es que ilustra bien a las claras el sentido del que puede considerarse el teorema principal de la teoría de Morse, que caracteriza el tipo de homotopía de una variedad en términos de puntos críticos de funciones de Morse:

Sea M una variedad compacta y sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse. Entonces M tiene el tipo de homotopía de un complejo celular con una célula de dimensión λ para cada punto crítico de índice λ .

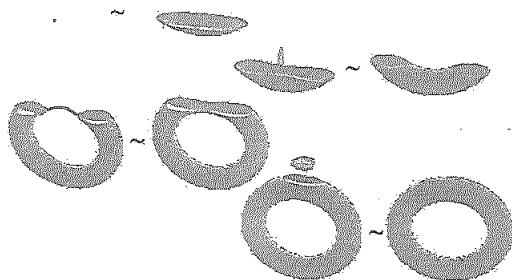
Más precisamente, este teorema significa que M es homotópicamente equivalente a un espacio de la forma

$$X_r = D^{\lambda_1} \bigcup_{f_1} D^{\lambda_2} \bigcup_{f_2} D^{\lambda_3} \bigcup_{f_3} \dots$$

donde $0 = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_r = m$ son los índices de los puntos críticos de f en orden creciente y con repeticiones si fuera necesario, siendo f_1, \dots, f_{r-1} aplicaciones de pegamiento $f_i : \partial D^{\lambda_i+1} \rightarrow X_i$.

Es evidente que si dos variedades tienen el mismo conjunto de células en sus descomposiciones de Morse no tienen porqué ser del mismo tipo de homotopía, pues ello depende de las aplicaciones de pegamiento.

En el anterior ejemplo, se observa que, al ser los índices de los puntos críticos 0, 1, 1 y 2, respectivamente, M se construye siguiendo los pasos que se indican en la figura:



Para la demostración del teorema anterior, remitimos al lector al libro de Milnor [28]. Nos limitaremos a señalar aquí que se obtiene como consecuencia de dos resultados fundamentales, que describen cómo se modifica la estructura topológica de los conjuntos M^a cuando a varía:

- (1) Si $f^{-1}([a, b])$ no contiene puntos críticos de f , entonces M^b es difeomorfo a M^a .
- (2) Si $f^{-1}([a, b])$ contiene un único punto crítico de f , entonces M^b es del mismo tipo de homotopía que $M^a \cup_{g_\lambda} D^\lambda$, para cierta aplicación $g_\lambda : \partial D^\lambda \rightarrow M^a$, donde λ es el índice del punto crítico.

En el trabajo de Morse no aparece el teorema anterior, sino que la relación entre la topología de M y los puntos críticos de funciones reales definidas sobre ella se obtienen en términos de las llamadas desigualdades de Morse, que afirman lo siguiente:

Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse definida sobre una variedad compacta M , entonces $m_i \geq b_i$, donde m_i es el número de puntos críticos de índice i y b_λ es el λ -ésimo número de Betti de M , es decir, $b_\lambda = \dim(H_\lambda(M))$.

Aquí $H_i(M)$ representa el i -ésimo módulo de homología simplicial de M con coeficientes enteros. Supondremos al lector familiarizado con las nociones básicas de dicha homología, que pueden encontrarse en cualquier libro de Topología Algebraica, o bien le remitimos a las breves líneas dedicadas a la homología simplicial en el Capítulo 0 de esta Memoria.

Existen varias maneras de probar las desigualdades de Morse, pero, sin entrar en detalles técnicos, cabe decir que todas se basan en que en virtud del resultado (2) anterior

$$H_*(M^b, M^a; Z) = \begin{cases} Z & \text{si } * = \lambda \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Una demostración de las desigualdades de Morse puede encontrarse en el libro ya citado de Milnor [28] y en la exposición, muy completa y autocontenida, de Levesque [24], donde aparecen enunciadas del siguiente modo:

Sea M una variedad compacta y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse. Si $m_\lambda(f)$ denota el número de puntos críticos de índice λ de f , se verifica que:

- (a) $m_\lambda \geq b_\lambda(M)$.
- (b) $\chi(M) = \sum_0^d (-1)^\lambda m_\lambda(f)$.

Aquí, $\chi(M)$ denota la característica de Euler-Poincaré de M .

Puesto que las desigualdades de Morse proporcionan una cota inferior del número de puntos críticos de una función de Morse sobre una variedad, surge, de manera natural, la siguiente pregunta: dada una función de Morse, ¿se puede obtener la homología de la variedad?. La respuesta es afirmativa y los primeros pasos de la definición de una homología intrínseca definida en términos de elementos de la teoría de Morse pueden observarse en los trabajos de Thom [41], Smale [35] y Milnor [28]. Nótese que este problema es consubstancial al de poder minimizar el número de puntos críticos de una función de Morse sobre una variedad, observación que debe tenerse en cuenta a la hora de evaluar el interés de los resultados del Capítulo 4 de este trabajo.

Para un tratamiento más exhaustivo de esta cuestión, recomendamos al lector la consulta del libro de Schwarz [32], donde se define el complejo de

Morse de una función de Morse y se prueba que su homología coincide con la homología singular de la variedad.

Una vez que ha quedado de manifiesto el grado de conexión existente entre la topología de una variedad y las propiedades de las singularidades de las funciones reales definidas sobre ella, parece oportuno recordar que Poincaré, que fue quien inició el análisis topológico de las 3-variedades, en sus célebres trabajos sobre Analysis Situs en los que inventó muchas de las herramientas básicas de la Topología Algebraica, se apoyó en gran medida en técnicas combinatoriales. De hecho, en los primeros 30 años del pasado siglo, la mayoría de los topólogos se dedicó al desarrollo de los métodos algebraicos y combinatoriales. Ello no debe extrañar, pues si el propósito de la Topología Diferencial consiste en el estudio de las propiedades globales de las variedades, como por ejemplo, si una variedad se puede sumergir en otra (problema de la inmersión), o qué variedades son el borde de otra (cobordismo), es evidente que los invariantes algebraicos que pretenden ser útiles en la resolución de tales problemas han de cumplir el requisito mínimo de que su cálculo (o computabilidad) no se convierta en una tarea aún más difícil de abordar que el problema original. Ya desde la definición de los grupos de homología se observó que la clave de la determinación de su estructura algebraica fueron los algoritmos de cálculo matricial introducidos por Veblen, gracias a que dichos grupos estaban definidos sobre un complejo simplicial y que se tenía garantizado que no dependían de la triangulación escogida.

No vamos a fatigar al lector trayendo aquí a colación los numerosos e importantes ejemplos de la potencia de los métodos de la Topología Algebraica aplicados a las variedades diferenciables suponiéndolas dotadas de una triangulación. En primer lugar, porque sería excesivamente prolijo y no es este el lugar apropiado para una exposición de tal envergadura. Además, afortunadamente existen excelentes textos de Topología Algebraica o Diferencial, donde el lector interesado puede encontrar más detalles y referencias, como por ejemplo [19], [21] y [40].

Por otra parte, hacia los años 60 se inicia lo que muchos autores consideran la edad de oro de la Topología Poliedral, gracias, por un lado, a la introducción y desarrollo de nuevas técnicas para atacar viejos problemas, como la conjetura de Poincaré o la clasificación de las variedades bajo relaciones más débiles que la de difeomorfismo, y al estudio de la complejidad de los algorit-

mos de cálculo de invariantes. Por tro, se produce lo que podríamos llamar, por decirlo en términos muy burdos, un acercamiento entre la Informática y la Topología Algebraica, via la Algorítmica, pues el estudio de algoritmos en problemas topológicos puso cada vez más de manifiesto la importancia de la existencia sobre un espacio de una estructura adicional de complejo celular o simplicial que lo haga susceptible de ser tratado con las técnicas de la matemática discreta.

Naturalmente, ello acrentó el interés por trasladar a los objetos combinatoriales y a los objetos discretos (complejos simpliciales, variedades trianguladas, variedades combinatoriales, etc.) conceptos, métodos y herramientas que tan fructíferos resultados proporcionaron en el estudio de los modelos continuos.

Pero la influencia ha sido recíproca, debido, sobre todo, al enorme desarrollo de las técnicas de procesamiento de imágenes digitales, de múltiples y bien conocidas aplicaciones tanto en la industria (control automático de calidad, lectura automática de documentos,...) como en otra áreas científicas (meteorología, geología, radiología,...). En general, tales aplicaciones requieren manipular imágenes digitalizadas obtenidas al discretizar el objeto continuo bajo estudio, a través de una serie de operaciones, algunas de las cuales se basan en propiedades geométricas y topológicas. Las técnicas puramente discretas, acordes con la naturaleza de las imágenes digitales, son las más apropiadas para realizar este tratamiento, dando así lugar al nacimiento de una nueva disciplina, conocida como Topología Computacional.

Como cabía esperar en este contexto digital, la teoría de Morse convenientemente adaptada está llamada a desempeñar un papel destacado en la representación por niveles de imágenes digitales de objetos espaciales o datos volumétricos, problema esencial en multitud de ejemplos de todos los campos científicos, debido al espectacular avance de las técnicas de Informática Gráfica y la computación avanzada en ciencias e ingeniería.

Una de las principales dificultades que es preciso solventar es la adaptación del concepto de punto crítico para funciones de altura definidas sobre una aproximación simplicial de una superficie diferenciable, ya que si restringimos tal concepto a los vértices, pudiera ocurrir que pequeñas perturbaciones en las coordenadas de éstos condujeran a configuraciones muy dispares. Es

decir, es primordial utilizar una noción que podríamos llamar "zona crítica", para garantizar la estabilidad de la descripción de una superficie por secciones y que, intuitivamente, corresponde a los elementos de la triangulación perpendiculares al eje de avance de la función.

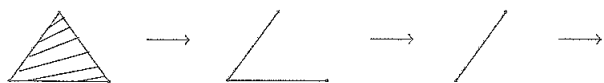
Recientemente, Forman ha introducido y desarrollado una teoría de Morse combinatorial de naturaleza puramente discreta sobre los complejos celulares finitos [12], [14], [16], que aparte de ser un método eficaz para el tratamiento de una gran variedad de problemas combinatorios y topológicos, se ha revelado como una herramienta de gran utilidad en la Topología Computacional, gráficas por ordenador y modelización geométrica, gracias en gran medida a su adecuada y sencilla solución al problema indicado, siguiendo las pautas de la teoría clásica sobre las variedades diferenciables. Los resultados análogos obtenidos tienen la misma profundidad geométrica, pero cuentan con la ventaja de que muchos de ellos son más fáciles de probar. En efecto, esta perspectiva combinatorial permite realizar cálculos y definir algoritmos para la construcción de funciones de Morse discretas sobre los complejos simpliciales, sin necesidad de disponer de ninguna estructura adicional sobre ellos, lo que evita tener que usar técnicas de Análisis avanzado.

Como no supone pérdida de generalidad y permite simplificar el lenguaje técnico, así como hacer más intuitivos los conceptos, indicaremos brevemente las ideas básicas de dicha teoría refiriéndonos a complejos simpliciales.

Así, en términos informales, diremos que una función de Morse discreta sobre un complejo simplicial asigna un valor real a cada símplice, de manera que los valores correspondientes a sus caras son menores, con una posible excepción como máximo. Si dicha excepción no se produce, el símplice correspondiente se llama crítico. Por tanto, el hecho de que un p -símplice sea crítico o no, depende sólo de la comparación de los valores de la función en sus caras y los $(p + 1)$ -símplices que los contienen.

Se obtienen los resultados similares a los teoremas principales de la versión diferenciable, pero sustituyendo las nociones y propiedades básicas de la teoría de homotopía por las correspondientes en la categoría de la homotopía simple, que viene a ser algo así como la adaptación, realizada por J.H.C. Whitehead, de la homotopía clásica a los poliedros. Aquí, por ejemplo, la idea de deformación continua sobre un punto, es sustituida por el concepto

más fuerte de colapso, mucho más adecuado al ámbito combinatorial. Sin entrar en detalles, podemos decir que un complejo K es colapsible a un punto si podemos ir "empujando" por caras libres de sus símplexes hasta terminar en un vértice como indica la siguiente figura:



Forman también define los campos gradientes discretos y los flujos correspondientes. Ello le permite formular el concepto de sistema dinámico combinatorial sobre un complejo, y reescribir en este lenguaje gran parte del trabajo [13]. Estos resultados son de gran interés, pues, por un lado, el estudio de los puntos críticos y de sus índices es una herramienta esencial en la teoría de los campos vectoriales sobre variedades, ya que las propiedades de éstos están estrechamente ligadas a la topología de las mismas. Por ejemplo, el conocido teorema del índice de Poincaré-Hopf afirma que la suma de los índices de los puntos críticos de un campo sobre una variedad es la característica de Euler-Poincaré de la misma.

Por otra parte, es sabido que la teoría de Morse diferenciable puede desarrollarse desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, ya que los puntos críticos de una función de Morse son precisamente los puntos fijos del flujo correspondiente a su gradiente. Este enfoque fue el adoptado por Smale en sus trabajos [36] y [37], que culminaron en la demostración de la conjetura de Poincaré en dimensión mayor o igual que 5. Pero en el caso de la teoría discreta, esta forma de proceder presenta la ventaja añadida de que es mucho más fácil de manejar el gradiente de una función de Morse que la propia función, debido a su sencilla caracterización geométrica y a su cómoda visualización. En efecto, en [3], se prueba que un campo de vectores discreto definido sobre un complejo K es un emparejamiento parcial en el diagrama de Hasse asociado a K , es decir, el conjunto de sus símplexes ordenados por la relación "ser cara de" (que puede ser considerado como un grafo dirigido), y Forman demuestra que es el gradiente de una función de Morse si y sólo si dicho emparejamiento es acíclico.

En los trabajos de Lewiner [25] y [26], se muestra cómo se simplifican los métodos de visualización y los algoritmos para definir campos gradientes discretos sobre superficies con un número mínimo de células críticas. El hecho de que esta clase de campos estén desligados de la geometría de los modelos es la clave de su potencia como herramienta para determinar la estructura topológica.

Pero uno de los principales problemas en la teoría de Morse, tanto diferenciable como combinatorial, es, precisamente, encontrar funciones de Morse con el menor número posible de puntos críticos. En general, esta es una cuestión muy difícil de resolver, pues en ella queda englobada la conjetura de Poincaré, ya que las esferas son las variedades que admiten funciones de Morse con 2 puntos críticos. En [29], Milnor presenta la demostración de Smale (ver [38]) de dicha conjetura en dimensión mayor o igual que 5 en el lenguaje de la teoría de Morse. Simplificando mucho, puede decirse que la idea de tal demostración es la siguiente: Si M es una n -variedad diferenciable, con $n \geq 5$, del mismo tipo de homotopía que la esfera S^n , se define sobre ella una función de Morse cuyos puntos críticos pueden eliminarse por parejas, hasta llegar a otra con exactamente 2 puntos críticos, lo que implica que M es homeomorfa a la esfera.

El punto clave que justifica el proceso anterior es lo que Milnor llama "Primer Lema de Cancelación". Forman obtiene una versión combinatorial del mismo, mucho más sencilla porque, por su propia naturaleza no tiene sentido considerar "vectores próximos" en un campo vectorial discreto. De esta manera, la prueba de la conjetura de Poincaré para variedades combinatoriales se simplifica notablemente.

El Lema de Cancelación, junto con las desigualdades de Morse, permite simplificar las demostraciones que caracterizan las 3-variedades colapsibles. Además, ésta es la base de una reciente aplicación de la Teoría de Morse Discreta a la Geometría Riemanniana, obtenida por K. Crowley (ver [6]):

"Sea K una 3-variedad combinatorial con borde. Si K es $CAT(0)$, entonces K es colapsible."

La noción de $CAT(0)$ es una condición global que significa esencialmente que K es simplemente conexo y de curvatura no positiva. Nótese la seme-

janza de este resultado con el Teorema de Hadamard, que afirma que una variedad Riemanniana completa, simplemente conexa y de curvatura no positiva, es contráctil (realmente, homeomorfa a \mathbb{R}^n). De hecho, la idea de la demostración de Crowley es análoga a la de este teorema: se escoge un vértice $v \in K$ y se utiliza la función distancia a v para construir un campo gradiente sobre K con un único símplice crítico.

En esta Memoria pretendemos iniciar el desarrollo de la teoría de Forman dentro de la categoría combinatorial propia. Es decir, la constituida por los complejos localmente finitos y aplicaciones propias entre ellos, que son las que verifican la propiedad de que la imagen inversa de un compacto es compacta. En este sentido, podría pensarse, por ejemplo, en la extensión de los resultados de Crowley para variedades compactas.

Por otra parte, queda pendiente incluso para complejos finitos, el desarrollo de una versión digital de la teoría de Forman, siguiendo las pautas del trabajo de Karron [5], pero adaptada al enfoque teórico de la Topología Digital.

Para abordar el estudio de funciones de Morse discretas en complejos de dimensión cualquiera y, como los trabajos de Forman [16] y Chari [4] sugieren, la definición de funciones de Morse sobre tales complejos de modo que tengan el menor número posible de puntos críticos se apoya en el estudio de las propiedades de ciertos grafos dirigidos asociados a dicho complejo, los diagramas de Hasse.

A continuación pasaremos a detallar los contenidos de cada capítulo de esta Memoria. Tras un primer capítulo de preliminares, donde se presentan los conceptos y resultados conocidos que van a ser utilizados posteriormente, comenzaremos el Capítulo 1 recordando las definiciones elementales de la teoría de Morse discreta en complejos simpliciales fácilmente adaptables al caso infinito, centrándonos en las nociones de función de Morse discreta y punto crítico, así como enunciando algunos de los resultados básicos de dicha teoría, como son los teoremas de equivalencia homotópica y colapsos para los conjuntos de nivel, así como las desigualdades de Morse. A continuación, se introducirán algunos ejemplos de funciones de Morse discretas definidas sobre complejos infinitos, en concreto, en 1-complejos o grafos infinitos.

Probaremos la relación existente en 1-complejos entre los puntos críticos de una función de Morse discreta definida sobre ellos y los extremos de dicha función. Por otra parte, la ausencia de puntos críticos de una función de Morse discreta definida sobre un 1-complejo infinito, está, a su vez, estrechamente relacionada con la simplicidad homotópica del complejo. Más precisamente, se probará que si es posible definir sobre dicho 1-complejo una función de Morse sin puntos críticos, éste ha de ser un árbol.

Se introducirán las nociones combinatoriales de rayo y final y, al dotar al 1-complejo de una función de Morse discreta, surge la noción de rayo monótono y, en particular, de rayo decreciente, que será de gran utilidad al plantear las desigualdades de Morse en 1-complejos infinitos. Éstas establecen cotas inferiores e igualdades entre los números de vértices y aristas críticos de una función definida sobre un 1-complejo infinito, y elementos relacionados con la topología y la función mencionada.

Con idea de extender al caso de complejos infinitos algunos resultados sobre equivalencia homotópica de conjuntos de nivel, se define la noción de función de Morse discreta propia. Este concepto pretende fundamentalmente evitar la existencia de puntos de acumulación en la imagen de una función de Morse discreta. Para finalizar el capítulo, se usará la teoría de Morse discreta para estudiar los puntos de bifurcación y de bifurcación de finales de un grafo infinito.

El Capítulo 2 se centra en el estudio del flujo gradiente discreto Φ asociado a una función de Morse discreta f . Para comenzar, se definirá el concepto de gradiente de f , como una extensión al caso discreto del concepto de gradiente ya conocido en el ámbito diferenciable y de flujo gradiente. Pasaremos a estudiar el flujo gradiente Φ sobre 1-complejos infinitos. En concreto, se probarán resultados que caracterizan los vértices y aristas críticos de una función de Morse definida sobre un 1-complejo por su imagen a través de Φ . La estabilización de Φ no tiene que verificarse para complejos infinitos, es más, se demostrará que si ello ocurre, entonces las funciones de Morse discretas asociadas son especialmente poco efectivas en el sentido de que serán lo opuesto a la noción de función de Morse minimal, es decir, función de Morse con la menor cantidad posible de puntos críticos. Este concepto se introducirá en el Capítulo 4.

Para estudiar el comportamiento de f en un 1-complejo, desde las aristas críticas a los vértices críticos o a los rayos decrecientes, resulta útil tener en cuenta el flujo Φ asociado a f sobre el 1-complejo. Surge la noción de f -conexión que, a su vez, da lugar al concepto de camino gradiente o camino de f -conexión. Al considerar todos los caminos gradientes que convergen en un mismo vértice crítico o rayo decreciente, aparece el concepto de árbol gradiente enraizado en dicho vértice o rayo. Se prueba que, al considerar todos los caminos gradientes de un grafo, se construye un bosque que es la unión de todos los árboles gradientes y, además, que dicho bosque puede obtenerse directamente sin más que eliminar las aristas críticas.

El Capítulo 3 se dedica al estudio del campo gradiente asociado a una función de Morse discreta. Comenzaremos por introducir la noción de campo vectorial discreto V y, asociada a ésta, la de V -camino. Pasaremos a definir el campo gradiente discreto, V_f , asociado a una función de Morse, comprobando que es un caso particular de campo vectorial discreto y que, esencialmente, los V_f -caminos son aquellos caminos del 1-complejo sobre los que f decrece. A modo de conclusión se probará que no existen V -caminos cerrados para un campo gradiente V . Es más, se verifica que esta propiedad realmente caracteriza a los campos gradientes. Para probar este hecho, se usarán las técnicas introducidas por Forman, que consisten en reducir la caracterización anterior en un complejo cualquiera a un problema de grafos dirigidos, mediante el uso del diagrama de Hasse de dicho complejo con algunas modificaciones.

En el caso de grafos infinitos es posible dar una caracterización análoga a la dada por Forman en complejos finitos. En primer lugar y con idea de usarlo como herramienta para la prueba del resultado principal, probaremos que todo campo vectorial discreto definido sobre un árbol infinito es el campo gradiente de una cierta función de Morse discreta. Finalmente, se demostrará el resultado fundamental de caracterización de campos gradientes en grafos infinitos que generaliza el obtenido por Forman para el caso finito.

Dado un campo vectorial discreto V y, una vez garantizada la existencia de una función de Morse discreta f tal que V coincide con el campo gradiente inducido por f , queda por resolver el problema de su cálculo. Para ello, se usará la noción de equivalencia entre funciones de Morse discretas, que desempeñará un papel análogo al que juega la constante de integración en el caso de integración de funciones diferenciables. En este sentido, se probará

que, dado un campo vectorial gradiente V definido sobre un grafo, existen una infinidad de funciones de Morse discretas f tales que $V = V_f$ y de modo que son todas equivalentes entre sí.

El Capítulo 4 está dedicado al estudio de la noción de cancelación. Este concepto proviene de un resultado de Forman, en cuya demostración se explicita en qué consiste la cancelación de pares de símlices críticos. Mediante el uso del diagrama de Hasse modificado, probaremos que la cancelación es equivalente a una operación combinatoria elemental: la transferencia a lo largo de un camino alternado en un subgrafo del diagrama de Hasse. Dado que se han probado resultados que relacionan el número de símlices críticos de una función de Morse discreta definida sobre un complejo con el tipo de homotopía de dicho complejo, surge la necesidad de, con idea de obtener una representación de éste lo más sencilla posible homotópicamente hablando, determinar funciones de Morse con la menor cantidad posible de símlices críticos. Este mínimo queda fijado por las desigualdades de Morse conocidas en el caso finito y extendidas en este trabajo para el caso infinito unidimensional. Con este objetivo, se utilizará la cancelación para reducir el número de símlices críticos de una función de Morse definida sobre un complejo y de esta forma obtener, tras aplicaciones sucesivas de dicha técnica, funciones de Morse con la menor cantidad posible de símlices críticos, es decir, funciones de Morse minimales. Al trasladar este problema al diagrama de Hasse, conviene medir cuánto dista una función de Morse dada de ser minimal en este contexto. Para ello se contará el número de vértices de dicho diagrama que quedan fuera del emparejamiento inducido por dicha función, o directamente, se comparará el emparejamiento inducido con el mayor posible.

Al centrar este estudio en los grafos, podemos plantear para estos la búsqueda de funciones de Morse minimales, incluso en el caso infinito, como hemos mencionado. En este contexto surgen las nociones de vértice crítico, arista crítica y rayo crítico cancelables. Se prueba que las aristas críticas no cancelables están en biyección con las aristas que quedan fuera de un árbol maximal cualquiera y, se establece la relación natural de estas nociones con la de función de Morse minimal, demostrando que una función de Morse es minimal si y sólo si todos sus símlices críticos son no cancelables. Por último, se introduce un método constructivo para obtener funciones de Morse minimales definidas sobre cualquier grafo infinito.

Finalmente, el Capítulo 5 está dedicado a la definición de funciones de Morse discretas sobre 2-complejos infinitos, en particular, sobre una superficie infinita S . Para ello, se consideran sobre la superficie dos grafos, un árbol maximal T y su grafo complementario D , que corresponde al 2-complejo complementario de T . Se definirá una función sobre ambos de modo que sobre la superficie sea de Morse.

Además, y con idea de ir definiendo dicha función a la vez en ambos grafos, se expresará S como una unión infinita de compactos crecientes K_n y se definirá dicha función sobre cada K_n de manera inductiva. Quedará justificado que dicha construcción produce una función con una reducida cantidad de simplices críticos, si bien no es posible asegurar que esta sea mínima al no disponer de desigualdades de Morse generalizadas en 2-complejos.

Profundizando en la noción de minimalidad para funciones de Morse definidas sobre superficies infinitas, hemos estudiado en este capítulo dos ejemplos de funciones de Morse discretas definidas sobre el plano y el cilindro, de modo que en ambos casos dichas funciones carecen de puntos críticos.

Agradecimientos

Quiero aprovechar estas líneas para expresar mi profunda gratitud por el interés y apoyo recibido de todos los que de un modo u otro han estado conmigo durante todo el proceso de la elaboración de este trabajo.

En primer lugar, agradecer a los profesores Rafael Ayala Gómez y Luis Manuel Fernández Fernández, la labor de dirección de este trabajo. Su constante apoyo, tanto a nivel científico como humano, su dedicación y orientación han posibilitado la consecución de este trabajo.

Por otra parte, deseo agradecer a mis compañeros de departamento el interés mostrado por mi trabajo. En especial quiero destacar la valiosa ayuda del profesor Juan Carlos Benjumea Acevedo a la hora de crear e incluir multitud de gráficos y figuras en esta memoria. Asimismo, quiero agradecer a mi compañera de despacho, la profesora Desamparados Frenández Ternero su disposición para ayudar en cualquier tipo de dificultad, y por nuestra proximidad, su infinita paciencia. También quiero destacar la disponibilidad de los profesores Antonio Quintero Toscano, José Luis Cabrerizo Jaraíz, Juan Núñez Valdés, Eduardo Díaz Delgado y María Trinidad Villar Liñan, a los que, en cualquier momento, he podido formular consultas de todo tipo relacionadas con este trabajo y que han brindado todo tipo de facilidades para la elaboración de este trabajo.

Por último, aunque no menos importante, estoy agradecido a toda mi familia comenzando por Mayka, ya que ella es la que más paciencia, apoyo y dedicación ha tenido que emplear conmigo. A mis hermanos y a mis padres, especialmente a estos últimos también quiero expresarles mi gratitud por poner tanto de su parte en mi formación, así como por haber sabido transmittirme su apoyo en todo momento. A modo de agradecimiento, deseo mostrarles la importancia que todos ellos han tenido en este trabajo.

Capítulo 0

Preliminares

Este primer capítulo está destinado a recoger todos aquellos conceptos, resultados y notaciones que se usarán en el desarrollo de esta Memoria.

Dado el conjunto $T = \{a_0, \dots, a_n\}$ de puntos de R^n se denomina *cierre afín* de T a

$$\text{aff}(T) = \left\{ \sum_{i=0}^n t_i a_i / \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}.$$

Se dice que T es *afinmente independiente* si $\text{aff}(T)$ es distinto del cierre afín de cualquier subconjunto propio de T . Se define el *cierre convexo* de T como

$$\text{conv}(T) = \{x \in \text{aff}(T) / t_i \geq 0\}$$

para todo i . Se define un k -símplice como el cierre convexo de $k+1$ puntos afínmente independientes. Llamaremos *vértice* a todo 0-símplice, *arista* a los 1-símplices, *triángulo* a los 2-símplices y *tetraedro* a los 3-símplices. Se dirá que la *dimensión* de un símplice σ es k si $\sigma = \text{conv}(T)$ donde $T = \{a_0, \dots, a_k\}$ es un conjunto afínmente independiente. Se llama *cara* de un símplice σ a un símplice τ tal que $\tau = \text{conv}(U)$ siendo $U \subseteq T$. Denotaremos que σ es cara de β por $\sigma < \beta$. Las caras de σ distintas del propio σ se denominan *caras propias* de σ . Su unión constituye el *borde* de σ , denotado por $\partial(\sigma)$. El interior de σ , denotado por $\text{Int}(\sigma)$, está definido por la expresión $\text{Int}(\sigma) = \sigma - \partial(\sigma)$. El conjunto $\text{Int}(\sigma)$ se denomina *símplice*

abierto. Se definen las coordenadas baricéntricas de un punto $x \in \sigma$ como los números reales t_i tales que

$$\sum_{i=0}^k t_i a_i = x \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^k t_i = 1.$$

El baricentro de σ es el punto $b(\sigma)$ cuyas coordenadas baricéntricas son $t_i = \frac{1}{k+1}$ para todo i .

Un complejo simplicial K en R^n es una colección de símlices en R^n tales que cada cara de uno de ellos es, a su vez, un símlice de K y además la intersección de cualesquiera dos símlices de K es cara de de ambos. La dimensión de K se define como el máximo de las dimensiones de los símlices de K . Si K tiene una cantidad finita de símlices, se dice que K es un complejo simplicial finito. Un subcomplejo L de K es una subcolección de símlices de K que contiene todas las caras de sus elementos. Se denotará por K^p a la subcolección de K formada por todos los p -símlices de K . En particular, los elementos de K^0 se llaman también vértices de K y los elementos de K^1 se denominan aristas de K . La clausura de un subconjunto $L \subseteq K$ es el menor de subcomplejo de K que contiene a L .

Se denotará por $|K|$ al subconjunto de R^n formado por la unión de todos los símlices de K . Dotando a cada símlice de la topología inducida como subespacio de R^n , se topologiza $|K|$ de modo que un subconjunto A de $|K|$ sea cerrado en $|K|$ si y sólo si $A \cap \sigma$ es cerrado en σ para todo σ símlice de K . El espacio $|K|$ se llama espacio subyacente de K . En general, la topología de $|K|$ es más fina que la que hereda como subespacio de R^n . Sin embargo, dichas topologías coinciden si K es finito. Dados dos complejos simpliciales K y K' tales que $|K| = |K'|$, se dirá que K' es una subdivisión de K si todo símlice de K' está contenido en un símlice de K .

Un complejo simplicial abstracto es una familia de conjuntos K de modo que si $\sigma \in K$ y $\tau \subseteq \sigma$, se tiene que $\tau \in K$. Las dimensiones de σ y K son respectivamente $\dim(\sigma) = \text{card}(\sigma) - 1$ y $\dim(K) = \max\{\dim(\sigma) / \sigma \in K\}$. El conjunto de vértices de un complejo abstracto K , denotado por $\text{vert}(K)$, se define como $\text{vert}(K) = \cup_{\sigma \in K} \sigma$ donde $\dim(\sigma) = 0$. Un grafo es un complejo simplicial abstracto 1-dimensional. Una realización

geométrica de un complejo simplicial abstracto K es una aplicación $f : \text{vert}(K) \rightarrow R^n$ para la que $A = \{\text{conv}(f(X))/X \in K\}$ es un complejo simplicial. Se verifica que todo complejo simplicial abstracto de dimensión k tiene una realización geométrica en R^d para d suficientemente grande.

Para todo vértice v de K , se define la estrella de v en K , denotada por $St(v)$, como la unión de los interiores de los símlices de K que tienen a v como vértice. La estrella cerrada de v en K , denotada por $\overline{St}(v)$, es la clausura de $St(v)$, es decir, la unión de todos los símlices de K que tienen a v como vértice. Al conjunto $\overline{St}(v) - St(v)$ se le llama engarce de v en K y se denota por $Lk(v)$.

Una triangulación de un espacio topológico X viene dada por un complejo simplicial K y un homeomorfismo $h : |K| \rightarrow X$. Si existe una triangulación de X , se dirá que X es un espacio triangulable o poliedro.

Una retracción de X en un subespacio Y es una aplicación $r : X \rightarrow Y$ tal que $r(y) = y$ para todo $y \in Y$. Se dirá que un subespacio Y de X es un retracto de deformación si existe una homotopía entre la identidad id_X y una retracción $r : X \rightarrow Y$ de modo que todos los puntos de Y permanecen fijos por la deformación. Dos espacios X e Y se dicen homotópicamente equivalentes si existen aplicaciones $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tales que $g \circ f$ es homotópica a id_X y $f \circ g$ es homotópica a id_Y . Un espacio se dice contráctil si es homotópicamente equivalente a un punto.

Sea K un complejo simplicial y α un p -símlice de K . Si β es una cara $(p-1)$ -dimensional de α que no es cara de ningún otro símlice de K , se dice que β es una cara libre de K y se dirá que existe un colapso elemental de K a $K - \{\alpha \cup \beta\}$. Si $K = K_0 \supseteq K_1 \supseteq \dots \supseteq K_n = L$ son complejos simpliciales tales que existe un colapso elemental de K_{i-1} a K_i , $i = 1, \dots, n$, se dirá que K colapsa a L .

Sean K_1 y K_2 dos complejos simpliciales y sea $\phi : K_1^0 \rightarrow K_2^0$ una aplicación entre los vértices de ambos complejos de modo que si los vértices v_0, \dots, v_n de K_1 generan un símlice de K_1 , los vértices $f(v_0), \dots, f(v_n)$ generan un símlice de K_2 . Es posible extender ϕ de manera única a una aplicación continua $|\phi| : |K_1| \rightarrow |K_2|$ tal que si $x = \sum_{i=0}^n t_i v_i$, entonces $|\phi|(x) = \sum_{i=0}^n t_i \phi(v_i)$. La aplicación $|\phi|$ se llama aplicación simplicial in-

ducida por la aplicación de vértices ϕ .

Si K es un complejo simplicial, un camino en K desde el vértice v hasta el vértice v' es una sucesión de vértices y aristas tal que cada par de vértices consecutivos v_i y v_{i-1} forman una arista. Si $v = v_1, \dots, v_k, v_{k+1} = v'$, se dirá que dicho camino tiene longitud k . Si $v = v'$ se dirá que dicho camino es cerrado. Si existe un camino desde v hasta v' de longitud k , pero no existe ningún camino combinatorio de longitud menor que k , se dirá que cualquier camino combinatorio de longitud k desde v a v' es una geodésica combinatoria desde v hasta v' .

Un símplice σ de un complejo simplicial K se llama símplice interior de K si $\sigma \subset \text{int}|K|$. Se define la valencia de un vértice v como el número de aristas que inciden en él.

Un espacio topológico de Hausdorff y $2N$ M se denomina d -variedad si todo punto $x \in M$ tiene un entorno homeomorfo a R^d . De manera análoga, se dirá que M es una d -variedad con borde si todo punto $x \in M$ tiene un entorno homeomorfo a R^d o H^d siendo H^d a un semiespacio d -dimensional. Al conjunto de puntos que tienen entornos homeomorfos a H^d se les llama borde de M . El borde de una d -variedad es, ó vacío, ó una $(d-1)$ -variedad. Se verifica que todas las d -variedades con $d \leq 3$ son triangulables.

Un k -símplice ordenado es un k -símplice junto a una permutación de sus vértices, y se denotará por $\sigma = [p_0, p_1, \dots, p_n]$. Se dice que dos ordenaciones son equivalentes si difieren en una permutación de orden par. Todo símplice de dimensión mayor que cero tiene dos posibles orientaciones. La orientación inducida por σ en una $(k-1)$ -cara es

$$\tau = (-1)^i [p_0, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n]$$

donde un signo menos delante denota cambio de orientación.

En este trabajo sólo consideraremos homología simplicial con coeficientes enteros. Sea K un complejo simplicial. Asignemos a cada símplice de K un orden arbitrario sobre sus vértices. Sea $K^j \subseteq K$ el conjunto de j -símplices ordenados. Una j -cadena es una función $c : K^j \rightarrow Z$. Se escribirá dicha cadena como una suma formal $c = \sum_{\sigma \in K^j} c(\sigma)\sigma$.

Dos j -cadenas se suman componente a componente. Todas las j -cadenas junto con su suma constituyen el grupo de j -cadenas, denotado por C_j . El operador borde transforma un j -símplice ordenado $\sigma = [p_0, p_1, \dots, p_j]$ en una $(j-1)$ -cadena dada por $\partial_j(\sigma) = \sum_{i=0}^j (-1)^i [p_0, \dots, p_{-1}, p_{i+1}, \dots, p_j]$.

El homomorfismo borde, $\partial : C_j \rightarrow C_{j-1}$ está definido por extensión lineal de la aplicación anterior.

Se llama complejo de cadenas a la sucesión $\dots \xrightarrow{\partial_{j+2}} C_{j+1} \xrightarrow{\partial_{j+1}} C_j \xrightarrow{\partial_j} C_{j-1} \xrightarrow{\partial_{j-1}} \dots$. La imagen y el núcleo del homomorfismo se denotan por $\text{im}\partial_j$ y $\text{ker}\partial_j$. Se dice que $c \in C_j$ es un j -ciclo si $c \in \text{ker}\partial_j$ y c se llama j -borde si $c \in \text{im}\partial_{j+1}$. Nótese que $B_j \subseteq Z_j \subseteq C_j$. Se define el j -ésimo grupo de homología como el cociente $H_j(K, Z) = \frac{Z_j(K, Z)}{B_j(K, Z)}$.

Se define el j -ésimo número de Betti de un complejo simplicial K , denotado por b_j , como $b_j = \dim(H_j(K, Z))$ y se define la característica de Euler de K , denotada por $\chi(K)$, como $\chi(K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i$. Se verifica que, tanto los números de Betti como la característica de Euler son invariantes topológicos.

Un espacio X se llama CW -complejo o complejo celular si existe una sucesión $X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^n \subset \dots$ tal que:

- (1) X^0 es un conjunto discreto, cuyos elementos son llamados 0-células.
- (2) Existen aplicaciones de pegamiento $\phi_\alpha : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$, tal que X^n , llamado n -esqueleto de X , es el espacio cociente de la unión disjunta de X^{n-1} con una colección de n -discos D_α^n bajo las identificaciones $x \sim \phi_\alpha(x)$ para todo $x \in \partial D_\alpha^n$. Es decir,

$$X^n = X^{n-1} \sqcup_{\phi_\alpha} e_\alpha^n$$

- (3) Este proceso inductivo puede detenerse tras un número finito de etapas, resultando que $X = X^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, o puede continuar de manera indefinida, resultando que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$. En el primer caso se obtiene un CW -complejo finito y en el segundo, un CW -complejo infinito.

Capítulo 1

Teoría de Morse Discreta.

1.1 La Teoría de Morse Discreta de Forman para complejos simpliciales.

La noción de función de Morse discreta establecida por Forman está basada en un resultado que se tiene en el caso diferenciable [12] y que afirma que dado un punto crítico x de índice 1 de una función de Morse f definida sobre una variedad diferenciable de dimensión n , existe un sistema de coordenadas (t_1, \dots, t_n) centrado en x tal que:

$$f(t_1, \dots, t_n) = f(x) - t_1^2 + \sum_{i=2}^n t_i^2.$$

Es decir, partiendo de x , f decrece en ambos sentidos de la dirección t_1 y crece en todas las demás direcciones coordenadas. En el caso discreto, al considerar un complejo simplicial M de dimensión al menos 2 sobre el que está definida una función de Morse discreta f , todo símplice crítico e de dimensión 1 o índice 1 verifica que f es mayor estrictamente sobre él que sobre sus dos vértices, es decir, f decrece en los dos sentidos al pasar a símplices de dimensión inferior. Además, al movernos desde e hacia cualquier 2-símplice adyacente, f siempre crece.

En lo que sigue, M será un complejo simplicial. Como definición de función de Morse discreta y de símplice crítico, vamos a adoptar las mismas que dio Forman en [12], tanto para complejos finitos como infinitos.

Definición 1.1.1. Una función de Morse discreta definida sobre M es una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para todo p -símplice $\sigma^{(p)}$ se verifica:

(i) Si $\tau^{(p+1)}$ es un $(p+1)$ -símplice de M , se tiene que

$$\text{card}\{\tau^{(p+1)} > \sigma / f(\tau) \leq f(\sigma)\} \leq 1.$$

(ii) Si $v^{(p-1)}$ es un $(p-1)$ -símplice de M , se tiene que

$$\text{card}\{v^{(p-1)} < \sigma / f(v) \geq f(\sigma)\} \leq 1.$$

Esencialmente, puede decirse que una función de Morse discreta f es aquella que asigna a toda cara de un símplice σ un valor estrictamente menor que $f(\sigma)$ con a lo más una excepción y, a todo símplice del que σ es cara un valor estrictamente mayor que $f(\sigma)$ con a lo más una excepción.

Asociado a la noción de función de Morse discreta está el concepto de símplice crítico de una función de Morse discreta que pasamos a exponer:

Definición 1.1.2. Dada una función de Morse discreta f definida sobre M , diremos que σ es un p -símplice crítico de f en M si se verifican las siguientes condiciones:

(i) $\text{card}\{\tau^{(p+1)} > \sigma / f(\tau) \leq f(\sigma)\} = 0$

(ii) $\text{card}\{v^{(p-1)} < \sigma / f(v) \geq f(\sigma)\} = 0.$

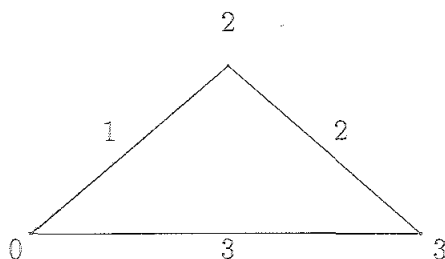
De las condiciones (i) e (ii) de la Definición anterior, se deduce inmediatamente que σ es un p -símplice no crítico si y sólo si se verifica una de las siguientes condiciones:

(i') Existe $\tau^{(p+1)} > \sigma$ tal que $f(\tau^{(p+1)}) \leq f(\sigma)$,

(ii') Existe $v^{(p-1)} < \sigma$ tal que $f(v^{(p-1)}) \geq f(\sigma)$.

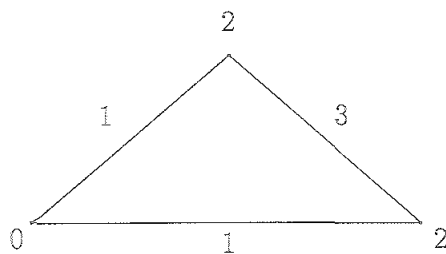
Es importante destacar que estas dos condiciones no pueden darse simultáneamente en virtud del Lema 2.5 de [12].

Ejemplos 1.1.1. La siguiente figura muestra una función discreta definida sobre el grafo cíclico C_3 que no es de Morse por un doble motivo.



Por un lado, en los vértices $f^{-1}(2)$ y $f^{-1}(3)$ se verifica que f es mayor o igual en ellos que en las dos aristas incidentes en cada uno, lo que contradice la condición (i) de la Definición 1.1.1 Por otro lado, la arista $f^{-1}(3)$ verifica que f es menor o igual sobre ella que sobre sus dos vértices extremos, en contra de la condición (ii).

En el segundo ejemplo, se indica una función de Morse discreta f que tiene dos símplices críticos: $f^{-1}(0)$ es un vértice crítico y $f^{-1}(3)$ es un arista crítica.



A continuación estudiaremos las relaciones existentes entre los extremos de una función de Morse discreta y el carácter crítico de los símplices sobre los que se alcanza.

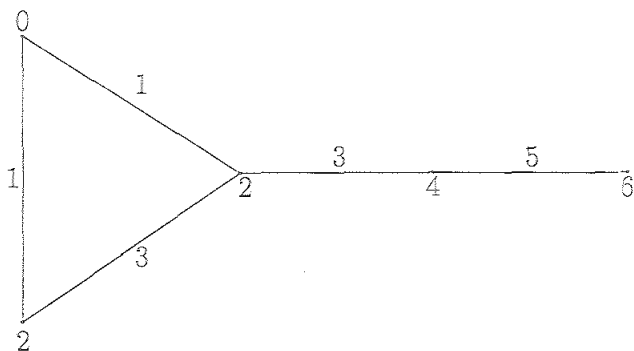
Proposición 1.1.1. *Sea f una función de Morse discreta definida sobre un complejo simplicial M . Se verifica que todo mínimo de f se alcanza sobre un 0-símplice de M que además es punto crítico de f en M .*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, probemos que todo mínimo de f debe alcanzarse necesariamente sobre un 0-símplice. En efecto, si se alcanzara en un símple de dimensión $p \geq 1$, éste tiene $p + 1$ símple en su borde y, por tanto, no se cumpliría la condición (ii) de la definición de función de Morse discreta.

Veamos ahora que los 0-símple sobre los que se alcanzan los mínimos de f han de ser críticos. Dado que los mínimos se alcanzan sobre símple de dimensión 0, sólo tiene sentido plantearse para éstos la condición (i) de la Definición 1.1.2 y ésta se tiene precisamente por ser mínimos.

□

El recíproco del resultado anterior no se verifica en general, como muestra el siguiente ejemplo:



Proposición 1.1.2. *Sea f una función de Morse discreta definida sobre un complejo simplicial M tal que su borde es vacío. Se verifica que todo máximo de f se alcanza sobre un símple de dimensión máxima de M que es, además, punto crítico de f en M .*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, recordemos que en un complejo simplicial de dimensión n cuyo borde es vacío, todo p -símple tal que $p \leq n - 1$ es cara de al menos dos $(p + 1)$ -símple. Sea σ un símple de dicho complejo sobre el cual f alcanza un máximo y supongamos que su dimensión es $p \leq n - 1$. Sabemos que han de existir al menos dos $(p + 1)$ -símple τ_1 y τ_2 tales que σ es cara de ambos. Dado que f alcanza un máximo sobre σ , en particular se verifica que $f(\sigma) > f(\tau_i)$, con $i = 1, 2$. Esta última afirmación está en contradicción con la condición (i) de la Definición 1.1.1. Por tanto, σ ha

de ser un s3mplice de dimensi3n m3xima. Para concluir, probemos que σ es s3mplice cr3tico de f . Dado que σ es de dimensi3n m3xima, no existen s3mplices que lo tengan como cara y por tanto, s3lo tiene sentido comprobar la condici3n (ii) de la Defini3n 1.1.2., pero 3sta se verifica directamente ya que equivale a afirmar f alcanza sobre σ un m3ximo.

□

Vamos ahora a introducir algunas notaciones. Dada una funci3n de Morse discreta f definida sobre un complejo simplicial M , se denota por $m_p(f)$ al n3mero de (p) -s3mplices cr3ticos de f . Dicho n3mero se llama *n3mero de Morse de f de 3ndice p* . Por otra parte, se denota por b_i al i -3simo *n3mero de Betti* de M con coeficientes en \mathbb{Z} , es decir, $b_i = \dim H_i(M)$, donde $H_i(M)$ es el i -3simo grupo de homolog3a de M .

Forman estableci3 para el caso finito relaciones entre los n3meros de Betti de M y los n3meros de Morse de una funci3n de Morse definida sobre M . Dichas relaciones ya se ten3an para el caso diferenciable y se denominaban desigualdades de Morse. Las llamaremos del mismo modo en el marco combinatorio:

Teorema 1.1.1. [12](Desigualdades fuertes de Morse). *Sea M un complejo simplicial finito sobre el que est3 definida una funci3n de Morse discreta f . Para todo $p \geq 0$ se tiene que*

$$m_p(f) - m_{p-1}(f) + \dots \pm m_0(f) \geq b_p - b_{p-1} + \dots \pm b_0$$

Teorema 1.1.2. [12](Desigualdades d3biles de Morse). *Sea M un complejo simplicial finito sobre el que est3 definida una funci3n de Morse discreta f . Entonces*

(i) *Para todo $p \geq 0$ se tiene que $m_p(f) \geq b_p$.*

(ii) $m_0(f) - m_1(f) + m_2(f) - \dots \pm m_{\dim(M)}(f) = b_0 - b_1 + b_2 - \dots \pm b_{\dim(M)}$.

Obs3rvese que de la desigualdad (i) se deduce que siempre existen 0-s3mplices cr3ticos para funciones de Morse sobre complejos finitos.

1.2 Funciones de Morse discretas definidas sobre 1-complejos infinitos.

En esta sección iniciaremos el estudio de las funciones de Morse discretas sobre 1-complejos infinitos y localmente finitos, donde las situaciones que se presentan difieren del caso finito. Recuerdese que si M es un 1-complejo finito y f es una función de Morse discreta definida sobre M , entonces, en virtud del Teorema 1.1.2, se tiene que $m_0(f) \geq b_0 \geq 1$ y $m_0(f) - m_1(f) = b_0 - b_1$.

Ahora, en un 1-complejo infinito M , pueden darse las siguientes posibilidades para una función de Morse discreta

- (1) Que dicha función no tenga puntos críticos:

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & -3 & -1 & 1 & 3 & 5 & \dots \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 6 & \dots \end{array}$$

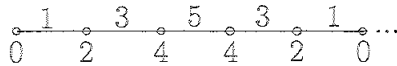
En este caso $m_0 = 0$, $m_1 = 0$, $b_0 = 1$ y $b_1 = 0$. Por tanto no se cumplen las desigualdades débiles, ya que $m_0 = 0 < b_0$ y $m_0 - m_1 = 0 \neq b_0 - b_1 = 1$.

- (2) Que tenga infinitos puntos críticos:

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \dots \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \dots \end{array}$$

En este caso $m_0 = \infty$, $m_1 = \infty$, $b_0 = 1$ y $b_1 = 0$. Ahora no tienen sentido ni la desigualdad fuerte para $p = 1$, ni la desigualdad débil (ii).

(3) Que la función tenga una cantidad finita de puntos críticos:



Tenemos $m_0 = 1$, $m_1 = 1$, $b_0 = 1$ y $b_1 = 0$. Ahora la desigualdad débil (ii) no se cumple, ya que $m_0 - m_1 = 0 \neq 1 = b_0 - b_1$.

Evidentemente, los dos primeros situaciones no pueden darse en el caso finito. Sin embargo, considerando un grafo finito con $b_0 = 1$ y $b_1 = 0$, es claro que, en virtud de las desigualdades de Morse, cualquier función de Morse discreta que se defina sobre él debería verificar que $m_0 = m_1 + 1$, algo que no ocurre en el tercer caso descrito.

Comenzaremos este estudio enunciando un resultado general, de gran utilidad posterior, cuya demostración es obvia.

Lema 1.2.1. *Sean M y N dos complejos tales que $N \subseteq M$ y sea f una función de Morse discreta definida sobre M . Se tiene que la restricción de f a N es también una función de Morse.*

A continuación, vamos a caracterizar los puntos críticos de una función de Morse discreta f definida sobre cualquier 1-complejo G (finito o infinito) como extremos locales de f . Además, la valencia de un vértice será, por tanto, el número de 1-símplices de los que es cara.

Proposición 1.2.1. *Sea G un 1-complejo sobre el que está definida una función de Morse discreta f . Se verifica que todo vértice crítico de f en G es un mínimo de f y toda arista crítica de f en G es un máximo de f .*

DEMOSTRACIÓN. Si $v_0 \in M$ es un vértice crítico de f en G , por definición, se tiene que $f(v_0) < f(\tau_i)$ para toda arista τ_i que contiene a v_0 . Por tanto, al restringir f a la estrella abierta de v_0 se comprueba que f tiene un mínimo local en v_0 . De manera análoga, sea τ_0 una arista crítica de f en G tal que

$\partial\tau_0 = v_0 - v_1$. Por definición, se tiene que $f(\tau_0) > f(v_0)$ y $f(\tau_0) > f(v_1)$. De este modo, al restringir f a τ_0 , tenemos que f alcanza sobre τ_0 un máximo local. □

Es fácil encontrar ejemplos de que el recíproco del resultado anterior no se verifica. Para ello basta con considerar un grafo que contenga vértices de valencia 1 y definir f sobre dichos vértices de modo que alcance un máximo local sobre ellos. Estos vértices serán extremos locales de f en G aunque no serán vértices críticos. Evitando este tipo de situaciones podemos dar un recíproco del resultado anterior.

Proposición 1.2.2. *Sea G un 1-complejo que no tenga vértices de valencia 1 y sea f una función de Morse discreta definida sobre G . Se verifica que todo mínimo de f se alcanza sobre un vértice crítico de f en G y todo máximo de f se alcanza sobre una arista crítica de f en G .*

DEMOSTRACIÓN. Si $a_0 \in \mathbb{R}$ tal que f alcanza un extremo sobre σ_0 . Tenemos dos posibilidades:

En primer lugar, si f alcanza un máximo sobre el símplice σ_0 y éste es un vértice de G , se tiene que $f(\sigma_0) > f(\tau_i)$ para toda arista τ_i tal que $\sigma_0 < \tau_i$. Como todo vértice tiene al menos valencia 2, σ_0 está en al menos dos aristas. Esto está en contradicción con el hecho de que f sea función de Morse. Por tanto, σ_0 ha de ser una arista, y como sobre ella f alcanza un máximo, se tiene que $f(\sigma_0) > f(v_0)$ y $f(\sigma_0) > f(v_1)$, donde $\partial\sigma_0 = v_0 - v_1$. Así pues σ_0 es una arista crítica de M .

Por otra parte, si f alcanza un mínimo sobre el símplice σ_0 y σ_0 es una arista, entonces, $f(\sigma_0) < f(v_0)$ y $f(\sigma_0) < f(v_1)$, donde $\partial\sigma_0 = v_0 - v_1$. Esto está en contradicción con el hecho de que f sea función de Morse. Por tanto, σ_0 ha de ser un vértice, que por ser mínimo de f es crítico. □

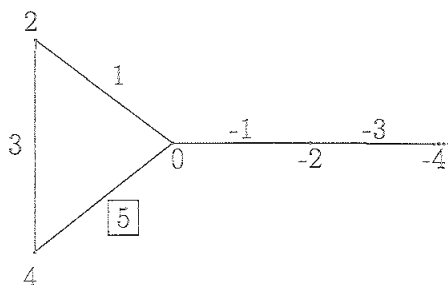
A la vista de los dos resultados anteriores podemos enunciar la siguiente caracterización de los símplices críticos.

Proposición 1.2.3. *Sea G un 1-complejo sin vértices de valencia 1 y sea f una función de Morse discreta definida sobre G . Se verifica que todo extremo de f se alcanza sobre un símplice crítico de G , y recíprocamente.*

Vamos a dar otro resultado general, cuya prueba es evidente, que relaciona los puntos críticos de un complejo M y los de cualquier subcomplejo $N \subseteq M$ y que nos será de útil más adelante.

Lema 1.2.2. Sean $N \subseteq M$ complejos simpliciales y f una función de Morse discreta definida sobre M . Si σ^p es un p -símplice crítico de f en M tal que $\sigma \subseteq N$, entonces σ es un p -símplice crítico de f en N .

Es claro que no se verifica el recíproco del lema anterior, es decir, dado un símplice crítico de N , éste no tiene que ser un símplice crítico de M . Para ilustrar esta afirmación obsérvese el siguiente ejemplo, en el que los símplices críticos aparecen recuadrados:



Si consideramos el subcomplejo formado por el ciclo, es claro que el vértice $f^{-1}(0)$ es vértice crítico de la restricción de f a dicho subcomplejo, ya que es mínimo de dicha restricción. Sin embargo, considerado en el complejo total, dicho vértice no es crítico puesto que no es extremo de f .

En consecuencia, el número de puntos críticos de un subcomplejo $N \subseteq M$ es mayor o igual que el número de puntos críticos del complejo M .

Proposición 1.2.4. Sea G un 1-complejo, $S \subseteq G$ un subcomplejo y f una función de Morse discreta definida sobre G . Se verifica que toda arista crítica de f en S es también arista crítica de f en G .

DEMOSTRACIÓN. Sea σ una arista crítica de f en G tal que también está en S . Si denotamos por v_0 y v_1 los dos vértices borde de σ , ha de verificarse que $f(\sigma) > f(v_i)$, con $i = 1, 2$. Además, puesto que v_0 y v_1 también están en S , σ también es arista crítica de la restricción de f a S . \square

Es conveniente destacar que este resultado no se verifica para vértices críticos, es decir, pueden existir vértices críticos de f en S que no sean vértices críticos de f en G como muestra el ejemplo anterior.

1.3 Desigualdades de Morse generalizadas para 1-complejos infinitos.

Al estudiar el primer ejemplo que aparece al inicio de la Sección 1.2, hemos comprobado que, a diferencia de lo que ocurre en el caso finito, existen funciones de Morse discretas definidas sobre grafos infinitos que carecen de puntos críticos. Es interesante comprobar cómo la ausencia o existencia de puntos críticos de una función de Morse f condiciona la topología del 1-complejo infinito sobre el que está definida. En este sentido, probaremos que la ausencia de puntos críticos únicamente puede darse para un tipo muy especial de 1-complejos: los árboles. A continuación caracterizaremos esta situación especial mediante un comportamiento monótono en los rayos del grafo dado.

Proposición 1.3.1. Sea G un 1-complejo infinito conexo y sea f una función de Morse discreta definida sobre G si vértices ni aristas críticos. Se verifica que G ha de ser un árbol infinito.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que G no es un árbol, es decir, que contiene al menos un ciclo. Sea K un subcomplejo finito de G que contiene al menos un ciclo. En consecuencia, $\widehat{b}_1 = \dim(H_1(K)) \geq 1$ y, en virtud de las desigualdades de Morse para el caso finito, tenemos que $\widehat{m}_1 \geq \widehat{b}_1 \geq 1$. Por la Proposición 1.2.4, sabemos que toda arista crítica de K es también arista crítica de G . Por tanto, se tiene que $m_1 \geq \widehat{m}_1 \geq 1$, esto es, queda probado que G tiene al menos una arista crítica, lo cual entra en contradicción con la hipótesis de que f no tiene puntos críticos sobre G . □

Definición 1.3.1. Un rayo en G en un 1-complejo infinito es cualquier subcomplejo no acotado de G tal que todos sus vértices son de valencia 2 excepto uno, al que se denomina vértice inicial, que tiene valencia 1. Un birrayo en G es cualquier subcomplejo no acotado tal que todos sus vértices tienen valencia 2. Dados dos rayos en un mismo 1-complejo, se dirá que son equivalentes o cofinales si se diferencian en un subcomplejo finito. Las clases de equivalencia definidas por la relación anterior se denominan finales del 1-complejo G .

Es decir, un rayo es un 1-camino infinito homeomorfo a $[a, +\infty)$ y un birrayo es un 1-camino infinito homeomorfo al intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Cuando sobre un 1-complejo infinito está definida una función de Morse discreta f , existe un tipo especial de rayos determinados por el comportamiento "monótono" de f sobre ellos. Son los llamados rayos crecientes o decrecientes, que pasamos a definir.

Definición 1.3.2. *Sea G un 1-complejo infinito y sea f una función de Morse discreta definida sobre G . Fijado un rayo r en M , cuyos vértices serán denotados por v_i y sus aristas por σ_i , donde $\partial\sigma_i = v_{i+1} - v_i$ con v_0 como vértice inicial, se dirá que f es débilmente monótona en r si se verifica una y sólo una de las siguientes condiciones:*

$$(1) f(v_0) < f(\sigma_0) \leq f(v_1) < f(\sigma_1) \leq f(v_2) < f(\sigma_2) \leq \dots$$

$$(2) f(v_0) \geq f(\sigma_0) > f(v_1) \geq f(\sigma_1) > f(v_2) \geq f(\sigma_2) > \dots$$

En el caso (1) se dice que f es débilmente creciente en r y en el caso (2) f es débilmente decreciente. Si todas las desigualdades son estrictas, se dirá que f es estrictamente monótona, creciente o decreciente según el caso.

Intuitivamente, esta definición significa que, una vez fijado el sentido de recorrido en el rayo desde el vértice, f crezca o decrezca a medida que recorremos el rayo siguiendo dicho sentido.

Puede probarse sin dificultad que la definición anterior equivale a cualquiera de las dos afirmaciones siguientes

- (a) Para toda arista σ_i del rayo tal que $\partial\sigma_i = v_{i+1} - v_i$, se tiene que, o siempre $f(v_i) < f(\sigma_i) \leq f(v_{i+1})$, para el caso creciente, o siempre $f(v_i) \geq f(\sigma_i) > f(v_{i+1})$, para el caso decreciente.
- (b) Para todo vértice v_i del rayo perteneciente a las aristas σ_{i-1} y σ_i , se tiene que, o siempre $f(\sigma_{i-1}) \leq f(v_i) < f(\sigma_i)$ para el caso creciente, o siempre $f(\sigma_{i-1}) > f(v_i) \geq f(\sigma_i)$ para el caso decreciente.

La caracterización de las funciones de Morse discreta que son monótonas sobre un rayo es la siguiente.

Proposición 1.3.2. *Sea G un 1-complejo infinito y sea f una función de Morse discreta definida sobre G . Fijado un rayo r en M , son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

- (i) f es monótona decreciente sobre r .
- (ii) f no tiene puntos críticos en r .
- (iii) f no alcanza extremos en r .

DEMOSTRACIÓN. (i) \Rightarrow (ii). Si f es monótona decreciente restringida al rayo r , se verifica que para todo vértice v_i de r siempre existe una única arista e_i tal que $f(v_i) \geq f(e_i)$ y para toda arista e_j siempre existe un único vértice v_j tal que $f(e_j) \leq f(v_j)$. En consecuencia, ningún símplice de r es crítico.

(ii) \Rightarrow (iii). En virtud de la Proposición 1.2.1, sabemos que todo vértice crítico es un mínimo de f y toda arista crítica es un máximo; por tanto, la ausencia de puntos críticos de f en r implica la inexistencia de extremos de f en este rayo.

(iii) \Rightarrow (i). Dado que f no tiene extremos en r , el comportamiento de f en r es monótono. Además, f no puede ser creciente en r , ya que si así fuera, el vértice inicial del rayo sería mínimo y, en consecuencia, punto crítico. □

En virtud de las desigualdades débiles de Morse en el caso finito (Teorema 1.1.2), dado que cualquier complejo tiene $b_0 \geq 1$, tenemos asegurada la existencia de al menos un vértice crítico (el mínimo global) para funciones de Morse discretas definidas sobre el complejo. Sin embargo, hemos visto en el Ejemplo (1) del inicio de esta sección que las funciones de Morse discretas sin puntos críticos sí aparecen en complejos infinitos y, por tanto, diferencian claramente el caso finito del infinito. El siguiente resultado justifica la existencia de las mismas, y proporciona un método para construir este tipo especial de funciones de Morse discretas sobre 1-complejos infinitos sin ciclos.

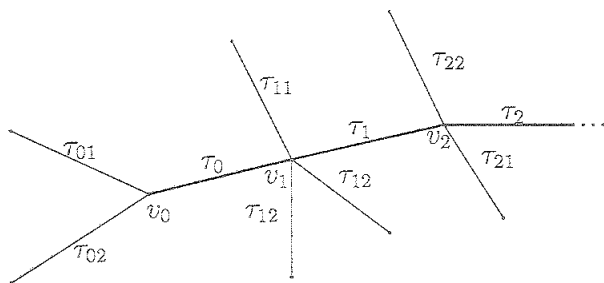
Teorema 1.3.1. *Sea T un árbol infinito. Entonces, existen funciones de Morse discretas sobre T que no tienen puntos críticos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea v_0 un vértice cualquiera de T . Como T es un árbol infinito, contiene al menos un rayo que comienza en v_0 cuyos vértices y aristas denotaremos por $v_0, \tau_0, v_1, \tau_1, \dots$.

Definiremos f sobre este rayo de manera débilmente decreciente, es decir, verificando que:

$$f(v_0) \geq f(\tau_0) > f(v_1) \geq f(\tau_1) > f(v_2) \geq f(\tau_2) > \dots$$

Ahora, sean τ_{0i} ($1 \leq i \leq n$) las aristas incidentes con v_0 distintas de τ_0 . Dado que $f(v_0) \geq f(\tau_0)$, para que f sea de Morse tomamos $f(v_0) < f(\tau_{0i})$. Si v_{0i} son los extremos de τ_{0i} distintos de v_0 , definimos f de modo que $f(v_0) < f(\tau_{0i})$. A medida que nos alejamos de v_0 por caminos distintos del rayo fijado, hacemos que el comportamiento de f sea débilmente creciente. De manera más precisa, si τ_{1i} es una arista incidente con v_{0i} , definimos f tal que $f(\tau_{1i}) > f(v_{0i})$, siendo $n + 1$ la valencia de v_{0i} . Siguiendo este proceso, queda definida f en todo el 1-complejo, excepto en todas las ramificaciones que deriven del rayo fijado. Dado que hemos tomado f débilmente decreciente en dicho rayo, para conseguir que dicha función sea de Morse y sin puntos críticos, hemos de definirla como débilmente creciente en cada ramificación que se aleja del rayo.



La función f así definida es de Morse y no tiene puntos críticos. En efecto, si v es un vértice del rayo, en su estrella existe una única arista τ tal que $f(v) \geq f(\tau)$. Dicha arista está en el rayo decreciente fijado al inicio de la demostración. Para el resto de aristas σ_i de la estrella de v , tenemos que $f(v) < f(\sigma_i)$ ya que, según hemos definido f , hacia cualquier otra arista f

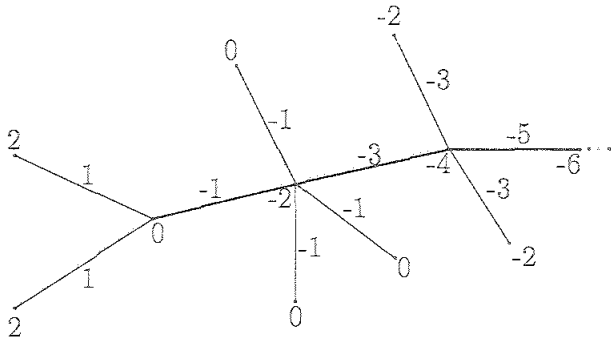
crece débilmente. Por tanto, v no es vértice crítico y f es de Morse en un entorno suyo.

Si v no está en el rayo, podemos encontrar un único camino que lo une con él. Por construcción, f se ha definido de modo que es débilmente decreciente sobre dicho camino (desde el rayo a v) y por tanto, ya hemos detectado una arista τ sobre la que se verifica que $f(\tau) \leq f(v)$. No existen más aristas incidentes con v verificando esta desigualdad ya que por definición, f es débilmente creciente al alejarnos del rayo, luego v no es crítico.

Si τ es una arista del rayo prefijado, como f es débilmente decreciente sobre éste, para sus vértices extremos v_1 y v_2 se verifica que $f(v_1) \geq f(\tau) \geq f(v_2)$. Por tanto, τ no es crítica.

Finalmente, si τ es una arista situada fuera del rayo prefijado, al haber definido f de manera débilmente creciente al alejarnos del rayo, tenemos que sobre sus vértices v_1 y v_2 , se verifica que $f(v_1) < f(\tau) \leq f(v_2)$, y en consecuencia τ no es crítica. □

A modo de aplicación de este resultado, puede considerarse la siguiente función de Morse sin puntos críticos definida sobre el árbol anterior:



El siguiente resultado muestra cómo la construcción de la función de Morse de la Proposición anterior está determinada de manera única sobre un rayo fijado. Esto concuerda con la intuición de que al pasar del caso finito al infinito pueden "perdersen" vértices críticos (mínimos) cuando éstos son conectados a un rayo decreciente. Con ello, dichos vértices pierden la propiedad de ser mínimos y, por tanto, dejan de ser críticos.

Proposición 1.3.3. *Sea G un 1-complejo infinito y sea f una función de Morse discreta definida sobre G sin puntos críticos. Se verifica que dado un*

vértice cualquiera v_0 de G , existe un único rayo con vértice inicial v_0 tal que f es débilmente decreciente sobre él.

DEMOSTRACIÓN. Dado que G es un 1-complejo sobre el que f no tiene puntos críticos, en virtud de la Proposición 1.3.1., G ha de ser un árbol infinito, ya que no puede contener ciclos. Sea v_0 un vértice cualquiera de G ; como f no tiene puntos críticos en G , v_0 no es vértice crítico. Por tanto, existe una única arista τ_0 incidente en v_0 que verifica $f(v_0) \geq f(\tau_0)$. Sea v_1 el otro vértice de τ_0 . Para que f sea de Morse, ha de verificarse que $f(\tau_0) > f(v_1)$, ya que, de lo contrario, τ_0 sería una arista tal que $f(v_0) \geq f(\tau_0) < f(v_1)$, lo cual contradice la definición de función de Morse discreta. De nuevo, dado que v_1 no puede ser un vértice crítico de f , de entre todas las aristas incidentes con v_1 , exceptuando τ_0 , existe una y sólo una, τ_1 , que verifica $f(v_1) \geq f(\tau_1)$. Sea v_2 el otro vértice extremo de τ_1 . Repitiendo el mismo argumento que para τ_0 , se tiene que $f(\tau_1) > f(v_2)$. Si el proceso se detuviera tras un número finito de pasos, es decir, si dado el último vértice v_n , no existiera una arista τ_n con la que continuar, v_n sería un mínimo y, por tanto, vértice crítico de f en G , en contradicción con la hipótesis de que f no tiene puntos críticos en G .

Hemos encontrado, pues, un rayo débilmente decreciente con vértice inicial v_0 y tal que

$$f(v_0) \geq f(\tau_0) > f(v_1) \geq f(\tau_1) > f(v_2) \geq \dots$$

Dicho rayo es único. Para ello, basta con suponer que existen dos finales distintos de G unidos por rayos decrecientes a un mismo vértice v_0 . Esto implica que ha de existir un vértice común a ambos rayos (que podría ser v_0), v_i , verificando $f(v_i) \geq f(\tau_i)$ y $f(v_i) \geq f(\sigma_i)$, lo que contradice la definición de función de Morse, ya que tendríamos un vértice sobre el que f es mayor o igual que en dos de las aristas incidentes en él.

□

Como ya se ha visto, dados un complejo finito M y una función de Morse f definida sobre dicho complejo, existen igualdades y desigualdades entre elementos dependientes de la topología de M , sus números de Betti, y los números de símlices críticos de f en M . Son las desigualdades débiles y fuertes de Morse. También se ha visto que dichas relaciones no son generalizables para el caso infinito salvo que introduzcamos hipótesis más restrictivas, que implican la finitud de ciertos elementos de f y M . Este es el problema

que nos ocupa a continuación.

En primer lugar veremos un resultado que muestra cómo la ausencia de vértices críticos de una función de Morse definida sobre un grafo proporciona información sobre dicho grafo y sobre el comportamiento de f sobre éste.

Proposición 1.3.4. *Sea f una función de Morse discreta definida sobre un 1-complejo G tal que $m_0(f) = 0$. Se tiene que G es infinito y f posee al menos un rayo decreciente en G .*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, supongamos que G fuera finito. Necesariamente existiría mínimo global de f en G y, por tanto, f tendría al menos un vértice crítico en G , lo cual entra en contradicción con la suposición de que $m_0(f) = 0$.

Por otro lado, supongamos que f carece de rayos decrecientes en G . La inexistencia de rayos críticos implica la existencia de cotas inferiores (mínimos) de f sobre G , que necesariamente se alcanzan sobre vértices críticos de f en G y, en consecuencia, concluimos que $m_0(f) > 0$, lo cual es una contradicción. \square

El siguiente teorema proporciona una versión generalizada de las desigualdades de Morse para el caso de funciones de Morse discretas definidas sobre 1-complejos infinitos. Como ya se ha mencionado y se probará a continuación, en esta nueva situación los rayos decrecientes jugarán un papel destacado. Asimismo, se introducirán ciertas restricciones sobre el 1-complejo y sobre la función de Morse discreta. Al primero le exigiremos que tenga una cantidad finita de ciclos y una cantidad finita de finales, y a la segunda que tenga una cantidad finita de puntos críticos sobre dicho 1-complejo.

Teorema 1.3.2. *Sea G un 1-complejo infinito con un número finito de finales y de ciclos sobre el que está definida una función de Morse discreta f verificando que $m_0(f) < +\infty$ y $m_1(f) < +\infty$. Se tiene que:*

(1) $m_0 + d_0 \geq b_0$ y $m_1 \geq b_1$, donde d_0 es el número de rayos decrecientes no cofinales de G , $b_i = \dim(H_i(G, \mathbf{Z}))$ y m_i es el número de i -símplices críticos de f en G . En lo sucesivo, se denotará por \widehat{m}_0 a $m_0 + d_0$.

(2) $b_0 - b_1 = \widehat{m}_0 - m_1$.

DEMOSTRACIÓN. Como $m_0(f) < +\infty$ y $m_1(f) < +\infty$, tenemos en G una cantidad finita de símplices críticos de f . En particular, dado que $m_1(f) < +\infty$, se tiene que G contiene una cantidad finita de ciclos ya que, de lo contrario, aplicando la Proposición 1.2.4 tomando como subcomplejo cada ciclo, tendríamos una infinidad de aristas críticas de f en G . Sea \bar{G} un subcomplejo finito de G que contiene a todos los símplices críticos de f y a todos los ciclos de G .

Aplicando el Lema 1.2.2 y la Proposición 1.2.4, se tiene que $\bar{m}_0(f) \geq m_0(f)$ y $\bar{m}_1(f) = m_1(f)$. Además, por contener \bar{G} a todos los ciclos de G , se tiene que $\bar{b}_1 = b_1$. Si se restringe f a \bar{G} , puesto que éste es un subcomplejo finito, es posible aplicar las desigualdades de Morse para complejos finitos ya probadas por Forman (Teoremas 1.1.1. y 1.1.2.), que en este caso afirman que

$$\bar{m}_0(f) \geq \bar{b}_0, \quad \bar{m}_1(f) \geq \bar{b}_1, \quad \bar{b}_1 - \bar{b}_0 = \bar{m}_1(f) - \bar{m}_0(f).$$

Dado que $\bar{b}_1 = b_1$, concluimos que $m_1 \geq b_1$. Para probar las dos igualdades restantes se plantean dos posibilidades en función de la cantidad de componentes conexas de G :

Si $b_0 < +\infty$, ya se ha probado que $\bar{b}_1 = b_1$ y si $b_0 < +\infty$, es posible construir \bar{G} de modo que tenga tantas componentes conexas como G , es decir, verificando que $\bar{b}_0 = b_0$. Para ello puede razonarse del siguiente modo:

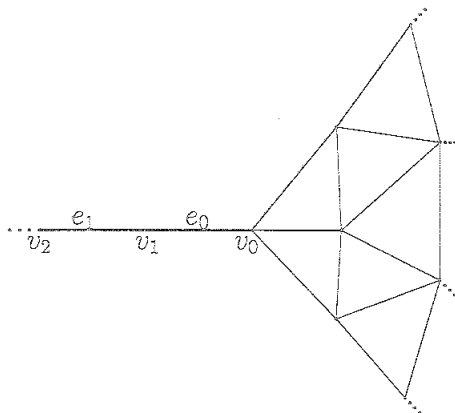
En cada componente conexa de G que contenga puntos críticos o ciclos, dado que sólo hay una cantidad finita de ellos, consideramos un subcomplejo finito que contenga a todos los ciclos y puntos críticos de dicha componente. Por otro lado, en cada componente conexa de G que carezca de puntos críticos, que sabemos que necesariamente ha de ser un árbol infinito, consideramos como subcomplejo finito a cualquier árbol finito.

Si consideramos a f definida en todo G y su restricción a \bar{G} , la cuestión ahora es comparar el número de vértices críticos de ambas funciones de Morse discretas. Sabemos, en virtud del lema 1.2.2, que $\bar{m}_0 \geq m_0$, es decir, el número de vértices críticos de f en G es una cota inferior del número de vértices críticos de f en \bar{G} y por tanto pueden existir vértices críticos de f en \bar{G} que no son vértices críticos de f en G . De nuevo surgen dos posibilida-

des:

La primera es que los vértices críticos de f en G y en su restricción a \overline{G} sean los mismos, es decir, que $\overline{m}_0 = m_0$. Dado que el subcomplejo finito \overline{G} verifica las desigualdades de Morse para complejos finitos, éstas implican las desigualdades para este caso infinito.

La segunda posibilidad es que existan vértices críticos de f restringida al subcomplejo finito \overline{G} que no son vértices críticos del complejo total G . En este caso, cada uno de ellos está conectado a un rayo decreciente en el complejo total G . En efecto, sea v_0 un vértice crítico de la restricción de f a \overline{G} que no es vértice crítico de f en G . En virtud de la definición de vértice crítico, ha de existir una única arista, e_0 , en $G - \overline{G}$ tal que $f(v_0) \geq f(e_0)$. Al no estar en \overline{G} , e_0 no puede ser crítica y, en consecuencia, su otro vértice v_1 , ha de verificar que $f(v_1) < f(e_0)$. Además, v_1 no puede estar en \overline{G} , ya que, si así fuera, ello implicaría que e_0 también está en el subcomplejo \overline{G} . Por tanto, v_1 no es vértice crítico de f en G y ha de existir una única arista e_1 tal que $f(e_1) \leq f(v_1)$. Razonándose del mismo modo, de nuevo se tiene que e_1 no está en \overline{G} y no es crítica. Por tanto, el otro vértice de e_1 , v_2 , verifica que $f(v_2) < f(e_1)$. Además, v_2 no puede estar en \overline{G} , ya que si así fuera, tendríamos dos caminos que unen v_0 y v_2 : uno a través de \overline{G} , ya que estamos dentro de la misma componente conexa y otro, el que hemos construido, v_0, e_0, v_1, e_1, v_2 . De esta forma, al unir ambos caminos tendríamos un ciclo que no está incluido en \overline{G} , ya que el segundo camino está fuera de \overline{G} por construcción, y ello es imposible.



El camino que se ha construido partiendo de un vértice crítico de f en \overline{G} que no es crítico en G puede prolongarse indefinidamente, ya que si fuera finito, se tiene que el último vértice, o bien ha de ser crítico para f en G , lo cual es imposible por definición de \overline{G} , o bien está en \overline{G} y, de manera análoga a lo que ocurre tras dos pasos, esto implica la existencia de un ciclo que no está contenido en \overline{G} , lo cual es imposible por definición de \overline{G} .

Sabemos que las desigualdades de Morse se verifican para cualquier sub-complejo finito de G , en particular para \overline{G} . Por el resultado que acabamos de probar, tenemos que cada vértice crítico de la restricción de f a \overline{G} que no es vértice crítico de f en G está conectado a un rayo decreciente y, en consecuencia, para extender el resultado del caso finito a todo el grafo infinito debemos sustituir cada vértice crítico de f restringida a \overline{G} por el rayo decreciente correspondiente, y así, el número total de vértices críticos de f en G puede expresarse como suma del número de vértices críticos de f en \overline{G} más el número de rayos decrecientes no equivalentes de f en G , es decir:

$$m_0(f) = \overline{m}_0(f) + d_0.$$

Si $b_0 = +\infty$, esto es, si G tiene una cantidad infinita de componentes conexas, hay que tener en cuenta que \overline{G} sólo incluirá una cantidad finita de ellas y, en consecuencia, fuera de \overline{G} quedará una cantidad infinita de componentes conexas de G . Cada una de éstas últimas componentes, al no estar en \overline{G} , carecen de puntos críticos para f y aplicando las Proposiciones 1.3.1. y 1.3.3., cada una de ellas ha de ser un árbol infinito con un único

rayo decreciente. De esta forma cada una de estas componentes conexas aporta un rayo decreciente no equivalente a ningún otro y, por tanto, existe una cantidad infinita de rayos decrecientes en M , es decir, $d_0 = +\infty$. Así, la desigualdad $m_0 + d_0 \geq b_0$ se verifica trivialmente. De modo análogo se verifica la igualdad $\widehat{m}_0 - m_1 = b_0 - b_1$. □

El teorema anterior incluye como caso particular el resultado de Forman para grafos finitos sin más que hacer $d_0 = 0$ en las igualdades y desigualdades del teorema anterior.

Al igual que ocurre con las desigualdades de Morse para el caso finito, las desigualdades generalizadas establecen cotas inferiores para las cantidades de vértices, aristas y rayos decrecientes de f , en función de invariantes topológicos del 1-complejo infinito G . De esta forma y teniendo en cuenta la interpretación que se ha dado de los elementos críticos de f en un 1-complejo G como extremos de f sobre G , puede afirmarse que:

- i) $\widehat{m}_0 \geq b_0$ es equivalente a afirmar que f alcanza al menos tantos mínimos en G como componentes conexas tiene G .
- ii) $m_1 \geq b_1$ es equivalente a afirmar que f tiene al menos tantas aristas críticas (máximos sobre símplices de dimensión uno) sobre G como ciclos independientes tiene G .

1.4 Funciones de Morse discretas propias y equivalencia homotópica.

En esta sección se abordará la generalización para complejos infinitos de los resultados relativos al estudio del tipo de homotopía de un complejo presentados por Forman ([12]) en el caso finito. Para este estudio será necesario exigir a las funciones de Morse discretas consideradas una hipótesis adicional, la de ser propias. La razón de exigir esta hipótesis para el caso infinito es evitar que las imágenes de las funciones de Morse discretas consideradas presenten puntos de acumulación. De este modo, podemos separar sus valores, como se verá en las pruebas de los resultados que obtendremos a continuación. Precisemos la noción de función de Morse discreta propia.

Definición 1.4.1. Sea f una función de Morse discreta definida sobre un complejo infinito. Se dirá que f es propia si $f^{-1}([a, b])$ es un compacto de M para todo $a, b \in \mathbb{R}$, es decir, el conjunto de símplices de M tales que sus valores por f están comprendidos entre a y b ha de ser finito.

La noción de conjunto de nivel en el caso de complejos infinitos será la misma que se tiene para complejos finitos y se empleará la misma notación.

Definición 1.4.2. Sea $c \in \mathbb{R}$, se define:

$$M(c) = \bigcup_{f(\sigma) \leq c} \bigcup_{\tau \leq \sigma} \tau$$

Es decir, $M(c)$ denota todos los símplices en los que f es menor o igual que c , así como todas sus caras. En particular, $M(c)$ es un subcomplejo de M .

A partir de ahora comenzaremos a probar los resultados análogos a los de Forman para complejos infinitos.

Lema 1.4.1. Sea f una función de Morse discreta y propia definida sobre un complejo infinito M . Sea σ un p -símplice de M y sea $\tau > \sigma$. Se verifica que existe un $(p+1)$ -símplice $\hat{\tau}$ tal que $\sigma < \hat{\tau} \leq \tau$ y $f(\hat{\tau}) \leq f(\tau)$.

DEMOSTRACIÓN. Dado que $\tau > \sigma$, se tiene que $\dim(\tau) > \dim(\sigma)$. Si $\dim(\tau) = p+1$, puede tomarse $\hat{\tau} = \tau$ y se tiene el resultado. Puede suponerse por tanto que $\dim(\tau) = p+r$ con $r > 1$. Al ser M un complejo simplicial, se tiene que dado el $(p+r)$ -símplice τ , existen dos $(p+r-1)$ -símplices, v_1 y v_2 , tales que $\tau > v_i > \sigma$ con $i = 1, 2$. A partir de la condición (ii) de la Definición 2.1.1, se tiene que, o bien $f(v_1) < f(\tau)$, ó bien $f(v_2) < f(\tau)$. En consecuencia, basta tomar $\hat{\tau}$ como el correspondiente v_i . □

El siguiente resultado establece la equivalencia homotópica, en el caso de los complejos infinitos, de los conjuntos de nivel entre cuyos valores no existen valores críticos (valores correspondientes a símplices críticos) de una función de Morse discreta propia.

Teorema 1.4.1. Sea f una función de Morse discreta propia definida sobre un complejo infinito M . Sean a y b dos números reales tales que el intervalo $[a, b]$ no contiene ningún valor crítico de f . Se tiene que $M(b)$ colapsa a $M(a)$.

DEMOSTRACIÓN. Probaremos en primer lugar que, dada una función de Morse discreta propia, siempre es posible modificarla sin variar los simplices críticos de manera que ésta resulte ser una biyección sobre su imagen. En efecto, si consideramos los simplices $\tau^{(p+1)} > \sigma^{(p)}$ tales que $f(\tau) \leq f(\sigma)$, tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, puede reemplazarse $f(\tau)$ por $f(\tau) - \varepsilon$ ó $f(\sigma)$ por $f(\sigma) + \varepsilon$ de modo que $f(\sigma)$ ó $f(\tau)$ no coincidan con ningún otro valor de f y no varíen los simplices críticos. Puede razonarse de un modo similar si $\sigma^{(p)}$ verifica que $f(\tau^{(p+1)}) \neq f(\sigma^{(p)}) \neq f(v^{(p+1)})$ donde $\tau^{(p+1)} > \sigma^{(p)} > v^{(p-1)}$, reemplazando $f(\sigma)$ por $f(\sigma) \pm \varepsilon$. Combinando ambas operaciones, es posible modificar f sin cambiar los simplices críticos, de manera que f sea inyectiva y, en consecuencia, biyectiva sobre la imagen.

Es interesante mencionar que la hipótesis de que f sea propia es clave en el razonamiento que acabamos de concluir. En efecto, si f no fuera propia, podrían existir puntos de acumulación en su imagen y, como consecuencia, sería imposible separar algunos valores de f tal y como se ha hecho.

Veamos ahora la prueba del resultado. Supongamos que $f^{-1}([a, b]) = \emptyset$. Ello implica que no existe ningún simple σ de M tal que $a \leq f(\sigma) \leq b$ y, por tanto, $M(a) = M(b)$.

Supongamos ahora que $f^{-1}([a, b]) \neq \emptyset$. Si fuera necesario y dado que f es propia, es posible subdividir $[a, b]$ en subintervalos de modo que en cada uno esté a lo más una única imagen por f de un simple no crítico de M . Sea $\sigma^{(p)}$ el único simple no crítico de M tal que $f(\sigma) \in [a, b]$. Sabemos por (i') e (i'') de la Definición 1.1.2 que se ha de verificar una y sólo una de las dos afirmaciones siguientes:

- (i') Existe $\tau^{(p+1)} > \sigma$ tal que $f(\tau^{(p+1)}) \leq f(\sigma)$,
- (ii') Existe $v^{(p-1)} < \sigma$ tal que $f(v^{(p-1)}) \geq f(\sigma)$.

En el caso de que se verifique (i'), se tiene que $f(\tau) < a$. Por tanto $\tau \subseteq M(a)$. Además, dado que σ es cara de τ , se tiene que $\sigma \subseteq M(a)$ y, en consecuencia, se concluye que $M(a) = M(b)$.

Para el caso de que se cumpla (ii'), como ello excluye la posibilidad de que se tenga (i'), para todo $\tau^{(p+1)} > \sigma$ se tiene que $f(\tau) > f(\sigma)$. En particular, $f(\tau) > b$. En virtud del Lema 1.4.1, todo simple $\tau > \sigma$ verifica que

$f(\tau) > b$. Por ello, tenemos que $\sigma \cap M(a) = \emptyset$, ya que sabemos que $f(\sigma) > a$ y que σ no es cara de ningún símplice τ tal que $f(\tau) \leq a$.

Por otra parte, si se tiene (ii'), existe $v^{(p-1)} < \sigma$ tal que $f(v^{(p-1)}) \geq f(\sigma)$ y, en particular, $f(v) > b$. Sea $\widehat{v} \neq v$ cualquier otra $(p-1)$ -cara de σ . Se ha de verificar que $f(\widehat{v}) < f(\sigma)$ y, por tanto, $f(\widehat{v}) < a$. Ello implica que tanto \widehat{v} como todas sus caras están en $M(a)$.

Sea $\widehat{\sigma}^{(p)} \neq \sigma$ cualquier otro p -símplice de M tal que $\widehat{\sigma} > v$. En virtud de (ii) de la Definición 2.1.1, se tiene que $f(\widehat{\sigma}) > f(v) > b$. Por el Lema 1.4.1, si $\widehat{\sigma}$ es tal que $\widehat{\sigma} > v$, entonces $f(\widehat{\sigma}) > b$ y, en conclusión, $v \cap M(a) = \emptyset$. De esta forma, $M(b)$ puede expresarse como la siguiente unión disjunta,

$$M(b) = M(a) \cup \sigma \cup v,$$

donde v es una cara libre de σ y, en consecuencia, $M(b)$ colapsa a $M(a)$. □

Teorema 1.4.2. *Sea f una función de Morse discreta y propia definida sobre un complejo simplicial infinito M y sea $\sigma^{(p)}$ un p -símplice crítico de f verificando que $f(\sigma) \in [a, b]$ si $f^{-1}([a, b])$ no contiene otros puntos críticos. Se tiene que $M(b)$ es homotópicamente equivalente a $M(a) \cup_{\partial_p} e^p$.*

DEMOSTRACIÓN. Empleando el mismo argumento de la prueba del resultado anterior y basándonos en que f es propia, podemos suponer que f es biyectiva sobre su imagen. Por ello y usando de nuevo que f es propia, existen números reales a' y b' tales que $a < a' < b' < b$ de modo que σ es el único símplice de M tal que $f(\sigma) \in [a', b']$. En virtud del Teorema 2.4.1 se tiene que $M(b)$ colapsa a $M(b')$ y $M(a)$ colapsa a $M(a')$ y, por tanto, realmente hay que probar que $M(b')$ es homotópicamente equivalente a $M(a') \cup_{\partial_p} e^p$.

Como σ es p -símplice crítico de f , se verifica que si $\tau^{(p+1)} > \sigma$ entonces $f(\sigma) < f(\tau)$ y, por tanto, $f(\tau) > b'$. Aplicando ahora el Lema 1.4.1, se tiene, para todo símplice τ tal que $\tau > \sigma$, que $f(\tau) > b'$. Ello implica que $\sigma \cap M(a') = \emptyset$, ya que $f(\sigma) > a'$ y σ no es cara de ningún símplice τ tal que $f(\tau) \leq b'$.

Como σ es p -símplice crítico de f en M , para todo $v^{(p-1)} < \sigma$ se verifica que $f(v^{(p-1)}) < f(\sigma)$. En consecuencia, $f(v) < a'$ y, por tanto, $v \subseteq M(a')$.

Dado que ello se tiene para todo $v^{(p-1)} < \sigma$, se deduce que $\partial\sigma \subseteq M(a')$ y, en consecuencia

$$M(b') = M(a') \bigcup_{\dot{\sigma}} \sigma.$$

Finalmente, basta tener en cuenta que σ es homeomorfo a e^p para tener el resultado. □

1.5 Una aplicación de la Teoría de Morse Discreta al estudio de grafos infinitos: puntos de bifurcación.

Ahora pasaremos a estudiar algunos resultados que relacionan el comportamiento de una función de Morse discreta f sin puntos críticos definida sobre un 1-complejo infinito G con la topología de dicho complejo. En particular, vamos a ver cómo determinar si un vértice de dicho 1-complejo es un punto de bifurcación, es decir, cómo saber en qué vértices la topología no es la de una recta o un segmento. Comenzaremos definiendo dicho concepto de un modo más preciso.

Definición 1.5.1. *Sea T un árbol y v_0 un vértice de T . Se dirá que v_0 es un vértice de bifurcación de T si la valencia de v_0 es mayor o igual que 3.*

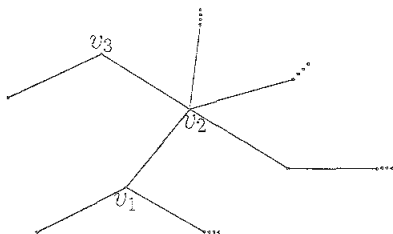
En el caso de grafos infinitos podemos contemplar la posibilidad de que dicha bifurcación se prolongue hasta finales distintos a través de rayos disjuntos. Definamos este concepto.

Definición 1.5.2. *Sea T un árbol infinito y sea v_0 un vértice de T . Se dirá que v_0 es un vértice de bifurcación de finales de T si existen al menos 3 rayos disjuntos que inciden en v_0 .*

Se verifica de manera inmediata que si v_0 es vértice de bifurcación de finales, entonces v_0 es vértice de bifurcación. Sin embargo, el recíproco no es cierto como puede comprobarse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.5.1. *En el árbol infinito de la siguiente figura, el vértice v_1 es de bifurcación, pero no es de bifurcación de finales. Sin embargo, el vértice v_2*

es de bifurcación en ambos sentidos. Cualquier otro vértice cuya estrella sea la unión de dos aristas, como v_3 , no será de bifurcación en ningún sentido.



Veamos en primer lugar, un resultado que proporciona una caracterización de los vértices de bifurcación de finales usando funciones de Morse discretas sin puntos críticos.

Teorema 1.5.1. *Sea G un árbol infinito y sea f una función de Morse discreta sobre G sin puntos críticos. Se verifica que un vértice v_0 de M es vértice de bifurcación de finales de G si y sólo si existe un subcomplejo propio $N \subset G$ homeomorfo a una recta, tal que la restricción f a N es una función de Morse discreta con un único punto crítico en v_0 , donde alcanza el mínimo global.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos en primer lugar que v_0 es punto de bifurcación de finales de G . Por definición, tenemos que existen al menos tres rayos disjuntos que inciden en v_0 . Como v_0 no puede ser vértice crítico de f en G , ha de existir una única arista τ_0 de entre todas las incidentes en v_0 tal que $f(v_0) \geq f(\tau_0)$. Para las demás se tiene que $f(v_0) < f(\tau_i)$, con $1 \leq i \leq n$. De todo ello se deduce que, si descartamos τ_0 , podemos tomar como N cualquier subcomplejo propio homeomorfo a una recta que contenga a v_0 y no contenga a τ_0 . Por la elección hecha, se tiene que la restricción de f a N alcanza un mínimo en v_0 y, en consecuencia, tiene un punto crítico en v_0 . Nótese que al confluir al menos tres rayos disjuntos en v_0 , tenemos garantizada la existencia de al menos un subcomplejo N con las características del razonamiento anterior. En general, si el número de rayos que confluyen en v_0 es n , podemos construir exactamente $\binom{n-1}{2}$ rectas distintas con las propiedades deseadas.

Veamos ahora que en cada uno de tales subcomplejos no hay más puntos críticos que v_0 . Sean τ_1 y τ_2 las dos aristas de N incidentes con v_0 . Entonces $f(v_0) < f(\tau_i)$, con $1 \leq i \leq 2$. Sea v_i el otro vértice extremo de cada

arista τ_i . Como en N no puede haber aristas críticas, pues también serían aristas críticas en G , se verifica que $f(v_i) \geq f(\tau_i)$. Denotaremos por τ_{i1} a la arista siguiente a τ_i en el rayo correspondiente. Por ser f de Morse sobre N , $f(v_i) < f(\tau_{i1})$. Sea v_{i1} el otro vértice extremo de τ_{i1} . Se tiene, ya que τ_{i1} no es arista crítica, que $f(v_{i1}) \geq f(\tau_{i1})$. De esta forma, razonando sucesivamente en las aristas de cada uno de los dos rayos que forman N , se prueba que f es débilmente creciente en cada rayo y, por tanto, que la restricción de f a N tiene en v_0 su único punto crítico.

Recíprocamente, sea v_0 un vértice de G , tal que existe un subcomplejo $N \subseteq G$ homeomorfo a una recta verificando que la restricción de f a N alcanza un mínimo en v_0 y, en consecuencia, tiene un punto crítico en v_0 , siendo éste su único punto crítico. Como por hipótesis f no tiene puntos críticos sobre G , se verifica que ha de existir una tercera arista τ_0 en $G - N$, incidente con v_0 , tal que $f(v_0) \geq f(\tau_0)$. Con ello, hemos probado que v_0 es un punto de bifurcación, es decir, su valencia es mayor o igual a tres. Queda probar que v_0 es punto de bifurcación de finales. Por la construcción de N , tenemos dos rayos disjuntos que inciden en v_0 . Por ser f de Morse, se ha de verificar que $f(\tau_0) > f(v_{01})$, donde v_{01} es el otro vértice de τ_0 . Además, v_{01} no está en el borde de G , ya que si así fuera, sería un mínimo de f y, por tanto, un punto crítico, lo que es imposible. Como f no tiene puntos críticos, entre todas las aristas incidentes con v_{01} , excepto τ_0 , existe una única τ_{01} tal que $f(\tau_{01}) \leq f(v_{01})$, ya que f no tiene puntos críticos en G . Sea v_{02} el otro vértice de τ_{01} . Como f es de Morse, se verifica que $f(v_{02}) < f(\tau_{01})$. Repitiendo sucesivamente los argumentos anteriores, se construye un rayo débilmente decreciente incidente con v_0 . Por ello, hemos construido un tercer rayo incidente en v_0 , disjunto con los dos que forman N y, en consecuencia, éste es un vértice de bifurcación de finales de M .

□

El siguiente resultado generaliza este último teorema. Esencialmente, probaremos la misma caracterización para vértices de bifurcación ordinarios, es decir, vértices de valencia tres.

Teorema 1.5.2. *Sea G un árbol infinito y sea f una función de Morse discreta sobre G sin puntos críticos. Un vértice v_0 de G es vértice de bifurcación de G si y sólo si existe un subcomplejo propio $N \subset G$ tal que la restricción de f a N es una función de Morse con un único punto crítico en v_0 , donde*

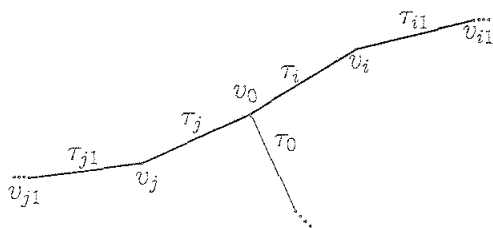
alcanza el mínimo global, v_0 es interior en N y N es homeomorfo a una recta, o a un rayo, o a un camino finito.

DEMOSTRACIÓN. Para el caso en que v_0 sea vértice de bifurcación de finales, la caracterización ya está probada en el teorema anterior.

Supongamos que v_0 es un vértice de bifurcación que no es vértice de bifurcación de finales, es decir, de valencia mayor ó igual que tres, con dos rayos disjuntos incidentes en él como máximo. En este caso, la tercera o sucesivas aristas incidentes en v_0 que no forman parte de un rayo, son el inicio de caminos simples finitos y son disjuntos con dichos rayos. En cada uno de estos caminos finitos, f ha de ser débilmente creciente ya que, de lo contrario, el último vértice sería mínimo. Por el mismo motivo, cualquier bifurcación que se encuentre en dichos caminos finitos, son bifurcaciones de tipo ordinario (no de finales) que conducirán mediante un camino débilmente creciente a vértices borde, es decir, de valencia uno.

Para encontrar N verificando las condiciones requeridas tenemos dos posibilidades: podemos tomar N como la unión de un camino simple finito y un rayo, y en este caso es homeomorfo a un rayo y contiene a v_0 en su interior, o podemos tomar N como la unión de dos caminos simples finitos y es homeomorfo a un camino finito que contiene a v_0 en su interior.

Obsérvese que no es posible tomar N como la unión de dos rayos, ya que, hemos probado que a partir de v_0 , f únicamente crece en la dirección de los caminos finitos y, por tanto, en uno de los rayos f ha de ser decreciente y en el otro decreciente.



Recíprocamente, supongamos que existe un subcomplejo $N \subset G$ homeomorfo a un camino o un rayo, tal que la restricción de f a N tiene un mínimo

en v_0 . Como f no tiene puntos críticos en G , además de las dos aristas de N , τ_1 y τ_2 , que verifican que $f(v_0) < f(\tau_1)$ y $f(v_0) < f(\tau_2)$ ha de existir al menos otra arista τ_0 tal que $f(\tau_0) \leq f(v_0)$. De todo ello se deduce que la valencia de v_0 es mayor o igual que tres, y en consecuencia v_0 es punto de bifurcación ordinario de G . □

Existe otra alternativa para generalizar el Teorema 1.4.2 en el caso particular de que el 1-complejo G tenga borde no vacío, es decir, cuando no todas las bifurcaciones son de finales. La formulamos en el siguiente resultado.

Teorema 1.5.3. *Sea G un árbol infinito cuyo borde es no vacío y sea f una función de Morse discreta sobre G sin puntos críticos. Se verifica que un vértice v_0 de G es vértice de bifurcación de G si y sólo si existe un 1-complejo \widehat{G} tal que:*

1. $G \subset \widehat{G}$.
2. El borde de \widehat{G} es vacío.
3. Existe una función de Morse discreta sobre \widehat{G} , \widehat{f} , tal que $\widehat{f}|_G = f$, verificando que no tiene puntos críticos.
4. v_0 es punto de bifurcación de finales de \widehat{G} .

DEMOSTRACIÓN. La construcción, a partir de G , de un complejo \widehat{G} tal que contenga a G , cuyo borde sea vacío y tal que se puede extender f a todo \widehat{G} de modo que no tenga ningún punto crítico, puede llevarse a cabo prolongando indefinidamente los caminos finitos que en G terminan en un vértice de valencia 1. En cuanto a \widehat{f} , basta con definirla de manera débilmente creciente en cada nuevo rayo que construyamos. De este modo, \widehat{f} no añade ningún punto crítico. □

Capítulo 2

El Flujo Gradiente Discreto.

2.1 El Flujo Gradiente asociado a una función de Morse Discreta.

De manera análoga a lo que ocurre en el caso diferenciable (ver[2]), el gradiente de una función de Morse discreta será una herramienta esencial en el estudio de la relación existente entre los puntos críticos de la función y la topología del complejo sobre el que está definida.

Comenzaremos esta sección definiendo los conceptos de campo gradiente discreto y de flujo asociado. Dichas nociones son las introducidas por Forman en [12] y [13], aunque en este estudio serán usadas para complejos infinitos.

En todo lo que sigue, M será un complejo simplicial infinito, localmente finito y orientado. Se denotará por $C_p(M, \mathbf{Z})$ al grupo abeliano libre con coeficientes en \mathbf{Z} generado por los símlices orientados de M . Definiremos en primer lugar el operador borde.

Definición 2.1.1. Se llama operador borde a la aplicación

$$\partial : C_p(M, \mathbf{Z}) \longrightarrow C_{p-1}(M, \mathbf{Z})$$

que actúa sobre cada p -símlice σ del siguiente modo,

$$\partial(\sigma) = \sum_{v^{(p-1)} < \sigma} \langle \partial(\sigma), v \rangle v,$$

siendo los valores $\langle \partial(\sigma), v \rangle$ los números de incidencia de cada $(p-1)$ -cara v en el p -símplice σ , es decir, $+1$ ó -1 dependiendo de que la orientación fijada en v y la inducida por σ coincidan o no. Para definir ∂ en todo $C_p(M, Z)$, se extiende por linealidad a cualquier combinación de p -símplices.

A continuación vamos a extender la noción de campo gradiente al caso discreto. Pasamos a definir este concepto de un modo preciso.

Definición 2.1.2. Sea f una función de Morse discreta definida sobre un complejo simplicial M . Se llama gradiente de f sobre M a una aplicación lineal $\nabla : C_p(M, Z) \rightarrow C_{p+1}(M, Z)$ definida de la siguiente forma: Dado un p -símplice orientado σ de M , si existe un $(p+1)$ -símplice τ tal que $\tau > \sigma$ y verificando que $f(\tau) \leq f(\sigma)$, entonces $\nabla(\sigma) = -\langle \partial\tau, \sigma \rangle \tau$. En otro caso $\nabla(\sigma) = 0$. Fijado p , ∇ se extiende por linealidad a cualquier combinación lineal de p -símplices.

Obsérvese que, en general, $\nabla(\sigma) = 0$ no implica que σ sea crítico. Basta con considerar un símplice de dimensión máxima σ , que no sea crítico. Al no existir ningún símplice de dimensión superior que lo contenga, por la definición anterior tenemos que $\nabla(\sigma) = 0$.

Ahora vamos a definir el flujo Φ asociado a una función de Morse f .

Definición 2.1.3. Se llama flujo gradiente asociado a una función de Morse discreta f a una aplicación lineal

$$\Phi : C_p(M, Z) \rightarrow C_p(M, Z),$$

definida como $\Phi(\sigma) = \sigma + \partial(\nabla(\sigma)) + \nabla(\partial(\sigma))$, para todo p -símplice orientado σ y extendida por linealidad a $C_p(M, Z)$.

El siguiente resultado debido a Forman ([12]), nos muestra las principales propiedades de ∇ y Φ .

Teorema 2.1.1. Dada una función de Morse discreta f sobre un complejo M , se tienen las siguientes propiedades:

(i) $\nabla \circ \nabla = 0$.

(ii) Para cualquier p -símplice orientado σ de M se verifica que:

$$\text{card}\{v^{(p-1)}/\nabla(v) = \pm\sigma\} \leq 1.$$

(iii) Un p -símplice orientado σ de M verifica que:

σ es crítico si y sólo si $\sigma \notin \text{Im}(\nabla)$ y $\nabla(\sigma) = 0$.

(iv) $\Phi \circ \partial = \partial \circ \Phi$.

(v) Sean $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ p -símplices de M tales que :

$$\Phi(\sigma_i) = \sum_j a_{ij} \sigma_j.$$

Se verifica que para todo i , $a_{ii} = 0$ o 1 . Además $a_{ii} = 1$ si y sólo si σ_i es crítico. Si $i \neq j$, $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ y si $a_{ij} \neq 0$, entonces $f(\sigma_j) < f(\sigma_i)$.

2.2 El Flujo Gradiente en el caso de 1-complejos infinitos.

El teorema que se expone a continuación caracteriza la imagen por Φ de una arista de un grafo dependiendo de si ésta o sus vértices son críticos o no. El resultado es válido para cualquier tipo de 1-complejos, tanto infinitos como finitos.

Teorema 2.2.1. *Sea f una función de Morse discreta sobre un 1-complejo G . Sea e_i una arista de G . Entonces, se verifica que:*

- (i) e_i no es crítica y sólo uno de sus vértices es crítico si y sólo si $\Phi(e_i) = 0$.
- (ii) e_i no es crítica y ninguno sus vértices es crítico si y sólo si $\Phi(e_i) = e_k$, con $k \neq i$.
- (iii) e_i es crítica y sólo uno de sus vértices es crítico si y sólo si $\Phi(e_i) = e_i \pm e_k$, con $k \neq i$.
- (iv) e_i es crítica y sus dos vértices son críticos si y sólo si $\Phi(e_i) = e_i$.
- (v) e_i es crítica y ninguno de sus vértices es crítico si y sólo si $\Phi(e_i) = e_i \pm e_k \pm e_l$, con $k \neq i$, $k \neq l$ e $i \neq l$.

DEMOSTRACIÓN. (i) Supongamos que e_i es una arista no crítica de G tal que sólo uno de sus dos vértices es crítico. Denotemos por v_0 y v_1 a dichos vértices, siendo v_0 el único vértice crítico de e_i . Entonces

$$\Phi(e_i) = e_i + \partial\nabla(e_i) + \nabla\partial(e_i).$$

Como e_i es un símplice de dimensión máxima en G se tiene que $\nabla(e_i) = 0$ y, por tanto

$$\Phi(e_i) = e_i + \nabla\partial(e_i).$$

Dependiendo de la orientación que tenga e_i y teniendo en cuenta la linealidad de ∇ , se verifica que, o bien

$$\Phi(e_i) = e_i + \nabla(v_0 - v_1) = e_i + \nabla(v_0) - \nabla(v_1)$$

o bien

$$\Phi(e_i) = e_i + \nabla(v_1 - v_0) = e_i + \nabla(v_1) - \nabla(v_0).$$

Dado que v_0 es crítico, ambas expresiones se reducen a

$$\Phi(e_i) = e_i - \nabla(v_1)$$

o a

$$\Phi(e_i) = e_i + \nabla(v_1).$$

Por definición de ∇ y teniendo en cuenta las dos posibles orientaciones, tenemos que $\Phi(e_i) = 0$.

Recíprocamente, supongamos que $\Phi(e_i) = 0$. Dependiendo de la orientación elegida sobre e_i , se verifica que:

$$e_i + \nabla(v_0) - \nabla(v_1) = 0 \quad \text{o} \quad e_i + \nabla(v_1) - \nabla(v_0) = 0.$$

Por la definición de ∇ , la única posibilidad de que la expresión anterior sea nula se tiene cuando

$$\nabla(v_0) = 0 \quad \text{y} \quad \nabla(v_1) = e_i \quad \text{o} \quad \nabla(v_0) = -e_i \quad \text{y} \quad \nabla(v_1) = 0.$$

para una orientación

$$\nabla(v_0) = 0 \quad \text{y} \quad \nabla(v_1) = -e_i$$

y para la otra

$$\nabla(v_0) = e_i \quad \text{y} \quad \nabla(v_1) = 0.$$

De ello se deduce que, o bien v_0 es crítico y $f(e_i) \leq f(v_1)$, o bien v_1 es crítico y $f(e_i) \leq f(v_0)$.

Como conclusión, se obtiene que independientemente de la orientación fijada e_i no es crítica y uno sólo de sus vértices es crítico.

(ii) Supongamos que e_i es una arista no crítica de G y que ninguno de sus vértices v_0 y v_1 son críticos. Por ser e_i no crítica ha de verificarse una de las dos cadenas de desigualdades:

$$f(v_1) \geq f(e_i) > f(v_0) \quad \text{o} \quad f(v_0) \geq f(e_i) > f(v_1).$$

Dado que v_0 no es crítico, ha de existir otra arista e_k , con $k \neq i$, incidente con v_0 y tal que $f(v_0) \geq f(e_k)$. Entonces:

$$\Phi(e_i) = e_i + \nabla \partial(e_i).$$

Dependiendo de la orientación elegida en e_i y en virtud de la linealidad de ∇ , tenemos que

$$\Phi(e_i) = e_i + \nabla(v_1) - \nabla(v_0) \quad \text{ó} \quad \Phi(e_i) = e_i + \nabla(v_0) - \nabla(v_1).$$

Por la definición de ∇ , se tiene

$$\Phi(e_i) = e_i + \langle \partial e_i, v_0 \rangle e_i + \langle \partial e_k, v_0 \rangle e_k$$

o

$$\Phi(e_i) = e_i + \langle \partial e_k, v_0 \rangle e_k + \langle \partial e_i, v_0 \rangle e_i.$$

En ambos casos, dado que los valores de los números de incidencia hacen que se cancelen los e_i , se tiene que $\Phi(e_i) = \pm e_k$.

Recíprocamente, supongamos que $\Phi(e_i) = \pm e_k$, con $k \neq i$. Como e_i es símplice de dimensión máxima en G , tenemos que $\nabla(e_i) = 0$ y, en consecuencia, $\partial\nabla(e_i) = 0$. Por tanto,

$$\Phi(e_i) = e_i + \nabla\partial(e_i) = \pm e_k,$$

es decir,

$$\nabla\partial(e_i) = -e_i \pm e_k.$$

Dependiendo de la orientación elegida en e_i y teniendo en cuenta la linealidad de ∇ , se verifica que:

$$\nabla\partial(e_i) = -e_i \pm e_k = \nabla(v_1) - \nabla(v_0) \quad \text{o} \quad \nabla(v_0) - \nabla(v_1).$$

Eligiendo la primera opción y debido a la definición de ∇ , tenemos dos posibilidades:

$$\nabla(v_1) = -e_i \quad \text{y} \quad \nabla(v_0) = \mp e_k$$

o

$$\nabla(v_1) = \pm e_k \quad \text{y} \quad \nabla(v_0) = -e_i.$$

De la primera deducimos que $f(v_1) \geq f(e_i)$ y $f(v_0) \geq f(e_k)$. Por tanto, de la primera desigualdad e_i y v_1 no son críticos y de la segunda deducimos que tampoco v_0 lo es.

Si elegimos la orientación opuesta sobre e_i , la demostración es análoga.

(iii) Supongamos que e_i es una arista crítica tal que sólo uno de sus vértices es crítico. Denotemos a dicho vértice por v_0 y sea v_1 el otro vértice. Por ser e_i crítica se verifica que $f(e_i) > f(v_i)$, con $i = 0, 1$ y por ser v_0 crítico se tiene que $\nabla(v_0) = 0$.

Como e_i es un símplice de dimensión máxima en G , entonces

$$\Phi(e_i) = e_i + \nabla\partial(e_i).$$

Dependiendo de la orientación elegida en e_i , teniendo en cuenta la linealidad de ∇ y el hecho de que v_0 es crítico, se verifica que

$$\Phi(e_i) = e_i + \nabla(v_1) - \nabla(v_0) = e_i + \nabla(v_1)$$

o

$$\Phi(e_i) = e_i + \nabla(v_0) - \nabla(v_1) = e_i - \nabla(v_1).$$

Debido a la definición de ∇ y considerando que v_1 no es crítico, existe una única arista e_j verificando que $f(v_1) \geq f(e_j)$ y, en consecuencia,

$$\Phi(e_i) = e_i \pm \langle \partial e_j, v_1 \rangle e_j = e_i \pm e_j,$$

Por tanto

$$\nabla(v_1) = -\langle \partial e_j, v_1 \rangle e_j.$$

Obsérvese que $j \neq i$ ya que e_i es arista crítica.

Recíprocamente, supongamos que $\Phi(e_i) = e_i \pm e_j$, con $j \neq i$. Se verifica, en virtud de la definición de Φ , que

$$e_i \pm e_j = e_i \pm \nabla \partial(e_i)$$

y, por tanto, eliminando e_i , usando la linealidad de ∇ y fijando una orientación en e_i , se tiene que

$$\pm e_j = \nabla \partial(e_i) = \nabla(v_1) - \nabla(v_0) \quad \text{o} \quad \pm e_j = \nabla(v_0) - \nabla(v_1).$$

Si nos quedamos con la primera orientación, en virtud de la definición de ∇ tenemos dos posibilidades:

$$\nabla(v_1) = \pm e_j \quad \text{y} \quad \nabla(v_0) = 0 \quad \text{o} \quad \nabla(v_0) = \pm e_j \quad \text{y} \quad \nabla(v_1) = 0$$

De la primera se deduce que v_0 es crítico y que v_1 no lo es. Además, e_i es crítica ya que v_0 lo es, es decir, $f(e_i) > f(v_0)$ y $\nabla(v_1) = \pm e_j$, con $j \neq i$, esto es, $f(e_i) > f(v_1)$. De manera análoga se razona con la segunda posibilidad. Si elegimos la otra posible orientación de e_i , la demostración es completamente análoga.

(iv) Supongamos que e_i es una arista crítica tal que sus dos vértices v_0 y v_1 son críticos. Teniendo en cuenta que e_i es símplice de dimensión máxima en G ,

$$\Phi(e_i) = e_i + \nabla\partial(e_i).$$

Al considerar las dos posibles orientaciones de e_i y la linealidad de ∇ tenemos dos casos:

$$\Phi(e_i) = e_i + \nabla(v_1) - \nabla(v_0) \quad \circ \quad \Phi(e_i) = e_i + \nabla(v_0) - \nabla(v_1).$$

Puesto que v_0 y v_1 son ambos críticos, tenemos que $\nabla(v_0) = \nabla(v_1) = 0$. Por ello, la expresión anterior se reduce en ambos casos a e_i , es decir, hemos probado que

$$\Phi(e_i) = e_i.$$

Recíprocamente, supongamos que $\Phi(e_i) = e_i$. Por definición de Φ , ello implica que $e_i + \nabla\partial(e_i) = e_i$, luego $\nabla\partial(e_i) = 0$. Pero por la linealidad de ∇ y considerando las dos posibles orientaciones de e_i , esto equivale a afirmar que

$$\nabla(v_1) - \nabla(v_0) = 0 \quad \circ \quad \nabla(v_0) - \nabla(v_1) = 0$$

No puede ocurrir que $\nabla(v_1) = \nabla(v_0) \neq 0$ ya que, si así fuera $\nabla(v_1) = \nabla(v_0) = e_i$. Pero entonces tendríamos que $f(v_0) \geq f(e_i)$ y $f(v_1) \geq f(e_i)$ y ello va en contra de que f sea una función de Morse discreta.

Así pues, en ambos casos, ha de ser $\nabla(v_0) = \nabla(v_1) = 0$ y, por tanto, ambos son vértices críticos. En particular $f(v_0) < f(e_i)$ y $f(v_1) < f(e_i)$, y concluimos que e_i es arista crítica.

(v) Supongamos que e_i es una arista crítica tal que ninguno de sus dos vértices es crítico. Teniendo en cuenta que e_i es símplice de dimensión máxima en G , se tiene que

$$\Phi(e_i) = e_i + \nabla\partial(e_i).$$

Al considerar las dos posibles orientaciones de e_i y la linealidad de ∇ tenemos dos casos

$$\Phi(e_i) = e_i + \nabla(v_1) - \nabla(v_0) \quad \circ \quad \Phi(e_i) = e_i + \nabla(v_0) - \nabla(v_1).$$

Si elegimos la primera orientación y, dado que ni v_0 ni v_1 son críticos aunque e_i sí lo es, se tiene, por la definición de ∇ que existen aristas e_j y e_k tales que

$$\Phi(e_i) = e_i - \langle \partial e_j, v_1 \rangle e_j + \langle \partial e_k, v_0 \rangle e_k$$

o

$$\Phi(e_i) = e_i - \langle \partial e_k, v_0 \rangle e_k + \langle \partial e_j, v_1 \rangle e_j,$$

donde, dado que e_i es crítica y por tanto $f(e_i) > f(v_0)$ y $f(e_i) > f(v_1)$, e_j y e_k son las únicas aristas de G tales que $f(e_j) \leq f(v_1)$ y $f(e_k) \leq f(v_0)$ o viceversa, ya que ni v_0 ni v_1 son críticos. Como conclusión, tenemos que

$$\Phi(e_i) = e_i \pm e_j \pm e_k.$$

con $j \neq i$, $j \neq k$ e $i \neq k$.

Recíprocamente, supongamos que $\Phi(e_i) = e_i \pm e_j \pm e_k$ con $j \neq i$, $j \neq k$ e $i \neq k$. Por definición de Φ ello implica que $e_i + \nabla \partial(e_i) = e_i \pm e_j \pm e_k$, luego $\nabla \partial(e_i) = \pm e_j \pm e_k$. Pero, por la linealidad de ∇ y fijando una de las dos posibles orientaciones de e_i , esto equivale a afirmar que $\nabla(v_1) - \nabla(v_0) = \pm e_j \pm e_k$. Se plantean, entonces, dos posibilidades

$$\nabla(v_1) = \pm e_j \quad \text{y} \quad \nabla(v_0) = \pm e_k$$

o

$$\nabla(v_1) = \pm e_k \quad \text{y} \quad \nabla(v_0) = \pm e_j.$$

En cualquier caso, se tiene que ni v_0 ni v_1 son críticos. Además, como $j \neq i$, $j \neq k$ e $i \neq k$, por ser f función de Morse se tiene que $f(e_i) > f(v_0)$ y $f(e_i) > f(v_1)$. Por tanto, e_i es arista crítica. □

Por otra parte, es importante mencionar que este teorema es coherente con el resultado de Forman sobre la imagen por Φ de un símplice cualquiera. Realmente lo mejora para el caso particular de dimensión uno, ya que pasamos de tener una implicación a una caracterización.

Para un vértice crítico de una función de Morse discreta definida sobre un complejo cualquiera, existe una caracterización muy sencilla en función de su imagen mediante Φ , como muestra el siguiente resultado.

Proposición 2.2.1. *Sea M un complejo simplicial sobre el que está definida una función de Morse discreta f y sea v_0 un vértice de M . Se tiene que v_0 es crítico si y sólo si $\Phi(v_0) = v_0$.*

DEMOSTRACIÓN. Si v_0 es crítico, $\nabla(v_0) = 0$ y como $\partial v_0 = 0$, entonces, por definición $\Phi(v_0) = v_0$.

Recíprocamente, supongamos que $\Phi(v_0) = v_0$. Por tanto, tenemos que $v_0 + \partial\nabla(v_0) = v_0$. Así, se ha de verificar que $\partial\nabla(v_0) = 0$. Como $\nabla(v_0)$ es de dimensión 1, decir que su borde es nulo implica que $\nabla(v_0) = 0$. Dado que v_0 no puede ser imagen por ∇ de ningún símplice, se tiene que v_0 es crítico. \square

Teniendo en cuenta que $\partial\nabla(v_0) = 0$ implica que $\nabla(v_0) = 0$, ya que el borde de una arista no puede ser nulo, se tiene que el resultado anterior equivale a este otro:

Corolario 2.2.1. *Sea M un complejo simplicial sobre el que está definida una función de Morse discreta f y sea v_0 un vértice de M . Entonces, v_0 es crítico si y sólo si $\nabla(v_0) = 0$.*

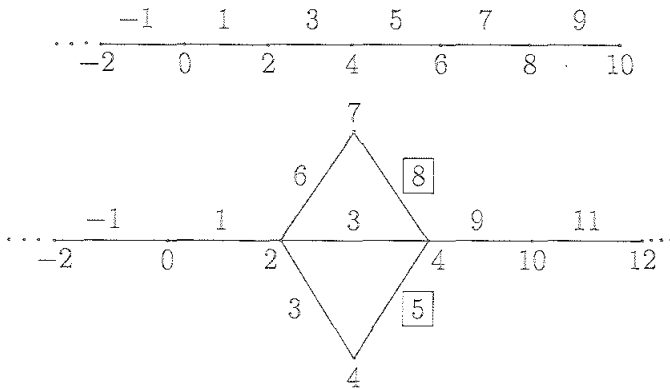
En virtud del resultado anterior, podemos considerar los vértices críticos como los puntos fijos de dimensión cero de Φ . Desde este punto de vista, los vértices no críticos de un grafo finito "fluyen" mediante Φ en tiempo finito hacia un vértice crítico donde dicho flujo se detiene. Esto queda justificado por el siguiente resultado de Forman ([12]) en el que se prueba que, en el caso de complejos finitos, la aplicación Φ se estabiliza a partir de un cierto valor.

Teorema 2.2.2. *En un complejo simplicial finito M existe un $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, tal que:*

$$\Phi^n(\sigma) = \Phi^{n+1}(\sigma) = \dots,$$

para todo símplice σ de M .

Aplicando el teorema anterior al caso de 1-complejos finitos, este flujo conecta vértices no críticos con vértices críticos a través de caminos decrecientes finitos determinados por Φ . Sin embargo este resultado no es cierto en el caso infinito. De hecho, existen multitud de ejemplos sencillos en los que puede comprobarse que Φ no se estabiliza en el caso de 1-complejos infinitos como los dos que incluimos a continuación, donde para destacar los valores críticos, éstos aparecen recuadrados:



El primer ejemplo ilustra cómo la existencia de un rayo decreciente impide que Φ estabilice en dicho rayo; es decir, fijado un vértice cualquiera de dicho rayo, v_0 , no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Phi^n(v_0) = \Phi^{n+1}(v_0) = \dots$. Ello se debe a que, dado que Φ actúa conectando vértices a través de caminos decrecientes, en este caso, dicho camino puede prolongarse indefinidamente a lo largo del rayo decreciente.

El segundo ejemplo, aparte del rayo decreciente en el que podemos afirmar lo expuesto sobre el primer ejemplo, aparece un rayo creciente y ello hace imposible la estabilización de la aplicación Φ . En efecto, a pesar de que dado un vértice cualquiera de dicho rayo, v_1 , siempre existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Phi^n(v_1) = \Phi^{n+1}(v_1) = \dots$, no es posible encontrar un único n para todos los vértices del rayo. Pues si fijamos cualquier $n \in \mathbb{N}$, siempre puede encontrarse un vértice w en dicho rayo lo suficientemente alejado del vértice crítico inicial para el que $\Phi^n(w) \neq \Phi^{n+1}(w)$.

Así pues, ambos ejemplos muestran cómo en el caso infinito la existencia de rayos monótonos de uno u otro tipo imposibilitan la estabilización de Φ .

En cualquier caso, al contrario de lo que ocurre en el caso finito, parece poco interesante plantear el estudio de la estabilización de Φ para grafos infinitos. En este sentido, la siguiente proposición prueba que si ello ocurre sobre un 1-complejo infinito conexo, la función de Morse f de la cual proviene Φ ha de ser poco eficiente en el sentido de que ha de tener una cantidad infinita de vértices críticos, ya que, como veremos más adelante, uno de los objetivos de este trabajo será, dado un complejo simplicial, construir sobre éste funciones de Morse discretas con la menor cantidad posible de símlices críticos.

Proposición 2.2.2. *Sea G un 1-complejo infinito conexo sobre el que está definida una función de Morse discreta f . Si el flujo gradiente discreto Φ asociado a f se estabiliza, se tiene que no existen rayos en G sobre los que f es monótona y f tiene una cantidad infinita de vértices críticos en G .*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar probaremos que G no contiene rayos sobre los que f sea monótona. En efecto, puesto que Φ se estabiliza, se verifica que todo vértice no crítico de f en G debe estar conectado, mediante un 1-camino finito y decreciente, a su vértice crítico correspondiente. Ello hace imposible la existencia de rayos monótonos, ya que en éstos, sean crecientes o decrecientes, los 1-caminos decrecientes se prolongan indefinidamente y ello entra en contradicción con la noción de estabilización.

Por otra parte, probaremos que f tiene una cantidad infinita de vértices críticos. Por lo anterior, al no existir rayos monótonos, se tiene que todo vértice no crítico está conectado a un vértice crítico. De nuevo, como Φ se estabiliza, dicho 1-camino ha de ser finito y decreciente. Para que esto ocurra y, dado que G es infinito, el número de vértices críticos ha de ser infinito, ya que, de lo contrario, existirían vértices no críticos tan alejados del vértice crítico al que están conectados como se quiera y ello entraría en contradicción con el hecho de que Φ se estabiliza. □

Es importante mencionar que, en la proposición anterior, la hipótesis de conexión de G es de utilidad para destacar lo poco eficientes, en el sentido del número de vértices críticos, que son las funciones de Morse definidas sobre 1-complejos infinitos cuya Φ estabiliza. En este caso, las desigualdades de Morse generalizadas acotan inferiormente el número de vértices críticos por la diferencia entre el número de componentes conexas de G , b_0 , y el número

de rayos decrecientes no cofinales de G , d_0 . Al introducir en la proposición anterior la hipótesis de conexión, hacemos que dicha cota inferior sea 1, ya que $b_0 = 1$ y, dado que hemos probado la inexistencia de rayos decrecientes, $d_0 = 0$. Sin embargo, el resultado anterior afirma que G contiene una cantidad infinita de vértices críticos.

2.3 Descomposición de un grafo infinito en árboles gradiente.

A la vista de los ejemplos y del resultado del final de la sección anterior, surge la necesidad de volver a recurrir al concepto de rayo monótono. Esencialmente se trata de formalizar la existencia de mínimo o punto crítico en el infinito. Veamos que la noción de vértice no crítico conectado a su vértice crítico correspondiente mediante un 1-camino decreciente puede formalizarse mediante el concepto de f -conexión y, además, puede extenderse al caso infinito.

Definición 2.3.1. Sea G un 1-complejo infinito sobre el que está definida una función de Morse discreta f . Dados un vértice crítico de f en G , v_0 , y un vértice no crítico v , se dirá que v está f -conectado a v_0 si existe un número natural n tal que $\Phi^n(v) = v_0$. Obsérvese que esta definición equivale a la existencia de un 1-camino finito decreciente desde v a v_0 .

Dados r , un rayo decreciente de f en G y v , un vértice no crítico de f en G , se dirá que v está f -conectado a r si existe en G un 1-camino finito decreciente desde v hasta algún vértice de r . Obsérvese que esta definición equivale a la existencia de un rayo decreciente y cofinal a r cuyo vértice inicial es v .

Dados r , un rayo creciente de G y v_0 un vértice crítico de f en G , se dirá que r está f -conectado a v_0 si existe un 1-camino finito creciente desde v_0 a un vértice de r . Obsérvese que esta definición equivale a la existencia de un rayo creciente y cofinal a r que contiene a v_0 .

Dados dos rayos de G , uno de ellos crítico, r y el otro creciente, \bar{r} , se dirá que \bar{r} está f -conectado a r si existe un 1-camino finito y decreciente

desde un vértice de r a un vértice de \bar{r} . Obsérvese que esta definición equivale a la existencia de un birrayo monótono.

A continuación, dado un grafo sobre el que está definida una función de Morse, se estudiarán todas las f -conexiones que se dan en él a través de los caminos gradientes. Comenzaremos definiendo precisamente esta noción.

Definición 2.3.2. Sea G un 1-complejo infinito sobre el que está definida una función de Morse discreta f . Dado un vértice crítico v_0 (resp., un rayo decreciente r_0) de G , se denomina camino gradiente o camino de f -conexión al 1-camino decreciente γ , que f -conecta un vértice no crítico (resp., un rayo no decreciente) con v_0 (resp., r_0), es decir,

$$\gamma = \dots v_i, e_i, v_{i-1}, e_{i-1}, \dots, v_1, e_1, v_0,$$

donde:

$$\dots f(v_i) > f(e_i) \geq f(v_{i-1}) > f(e_{i-1}) \geq \dots \geq f(v_1) > f(e_1) \geq f(v_0).$$

Es interesante observar que, por su definición, un camino gradiente señala las direcciones de decrecimiento de f dentro del grafo G .

A continuación se va a construir el subgrafo $B \subseteq G$ formado por todos los caminos gradientes de una función de Morse discreta definida sobre G . En primer lugar, probaremos que dicho subgrafo es maximal respecto a los vértices.

Proposición 2.3.1. Sea G un 1-complejo infinito sobre el que está definida una función de Morse discreta f . Se verifica que todo vértice de G está f -conectado a un único vértice o rayo crítico de G .

DEMOSTRACIÓN. Sea v_0 un vértice crítico de G . Podemos convenir que v_0 está f -conectado a sí mismo. Sea ahora v_0 un vértice no crítico de f en G . Por definición, existe una única arista e_0 incidente con v_0 tal que $f(v_0) \geq f(e_0)$. Sea v_1 el otro vértice de e_0 . Por ser f de Morse se verifica que $f(e_0) > f(v_1)$. Ahora se plantean dos posibilidades: que v_1 sea crítico o que no lo sea. Si lo es, ya hemos completado el camino de f -conexión desde v_0 a v_1 . Si no lo es, de nuevo se verifica que existe una única arista e_1 tal que $f(v_1) \geq f(e_1)$. Sea

v_2 el otro vértice de e_1 ; por ser f de Morse se verifica que $f(e_1) > f(v_2)$. De nuevo se tienen dos posibilidades: que v_2 sea vértice crítico de G o que no lo sea. Si lo es, se completa el camino de f -conexión desde v_0 a v_2 . Si no lo es, existirá una única arista e_2 tal que $f(v_2) \geq f(e_2)$.

Repitiendo esta construcción, se presentan dos posibilidades:

En primer lugar, el proceso descrito puede completarse tras un número finito de pasos, en cuyo caso el vértice inicial v_0 estará f -conectado a un vértice crítico v_n y da lugar, por tanto, a un camino gradiente finito verificando:

$$f(v_0) \geq f(e_0) > f(v_1) \geq f(e_1) > \cdots > f(v_{n-1}) \geq f(e_{n-1}) > f(v_n).$$

Por otra parte, si este proceso puede prolongarse indefinidamente, v_0 estará f -conectado a un rayo crítico y, por tanto, da lugar a un camino gradiente infinito verificando:

$$f(v_0) \geq f(e_0) > f(v_1) \geq f(e_1) > \cdots > f(v_{n-1}) \geq f(e_{n-1}) > f(v_n) \geq \dots$$

□

Obsérvese que, en cualquier caso, y en virtud de la demostración anterior, la construcción del camino gradiente es única, es decir, fijado un vértice no crítico v , el camino gradiente que lo f -conecta a un vértice o rayo crítico queda determinado de manera única por la definición de función de Morse discreta.

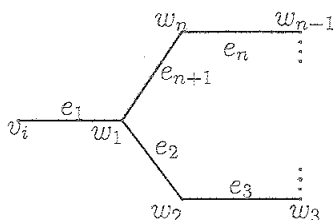
También conviene señalar que el resultado anterior justifica la maximalidad del subgrafo formado por la unión de todos los caminos gradiente ya que hemos probado que todo vértice de un grafo está f -conectado a un único vértice o rayo crítico.

El siguiente resultado muestra que el conjunto de todos los caminos gradientes que convergen en un mismo elemento crítico, vértice o rayo es un árbol.

Proposición 2.3.2. *Sea G un 1-complejo infinito sobre el que está definida una función de Morse discreta f . El conjunto de todos los caminos gradientes que convergen en un mismo vértice o rayo crítico no contiene ciclos, es decir, es un árbol.*

DEMOSTRACIÓN. Denotaremos por T_i al conjunto de todos los caminos gradientes que f -conectan vértices o rayos no decrecientes con un mismo vértice crítico v_i . Análogamente denotaremos por R_i al conjunto de todos los caminos gradientes que f -conectan vértices o rayos críticos con un mismo rayo crítico.

Supongamos que T_i contiene al menos un ciclo. La situación sería como muestra la siguiente figura,



donde se verifica que $f(w_1) \geq f(e_1)$, $f(w_1) < f(e_2) \leq f(w_2) < f(e_3) \leq f(w_3) < \dots \leq f(w_{n-1}) < f(e_n) \leq f(w_n) < f(e_{n+1}) \leq f(w_1)$. Por ello, existe un vértice, w_1 , tal que f sobre él es mayor que sobre dos de sus aristas incidentes, e_2 y e_{n+1} . Ello contradice que f sea función de Morse discreta.

La demostración para R_i es completamente análoga. □

Obsérvese que en la demostración anterior, la contradicción también puede establecerse viendo que la existencia de un ciclo implica la existencia de dos caminos gradientes distintos partiendo desde v_1 y hacia el vértice o rayo decreciente correspondiente.

Definición 2.3.3. *Sea G un 1-complejo infinito sobre el que está definida una función de Morse discreta f . El conjunto de todos los caminos gradientes que convergen en un mismo vértice o rayo decreciente se denomina árbol gradiente enraizado en el vértice crítico o rayo decreciente correspondiente.*

Obsérvese que de la definición anterior se deduce la existencia de diferentes tipos de árboles gradientes:

- (a) Los árboles gradientes enraizados en un vértice crítico y cuyas ramas son todas finitas, es decir, aquéllos definidos como el conjunto de todos los caminos de f -conexión de vértices con un mismo vértice crítico. En el caso finito y por razones obvias, éste es el único tipo de árbol gradiente que existe.
- (b) Los árboles gradientes enraizados en un vértice crítico y cuyas ramas son de dos tipos, finitas o infinitas, es decir, aquéllos definidos como el conjunto de todos los caminos de f -conexión de vértices o rayos crecientes con un mismo vértice crítico.
- (c) Los árboles gradientes enraizados en un rayo crítico y cuyas ramas son todas infinitas, es decir, aquellos definidos como el conjunto de todos los caminos de f -conexión de vértices o rayos con un mismo rayo crítico.

En el siguiente resultado se prueba que los árboles gradientes distintos son disjuntos dos a dos.

Proposición 2.3.3. *Bajo las hipótesis y notaciones anteriores se verifica que:*

$$T_i \cap T_j = \emptyset, \text{ para todo } i \neq j.$$

$$R_i \cap R_j = \emptyset, \text{ para todo } i \neq j.$$

$$T_i \cap R_j = \emptyset, \text{ para todo } i \text{ y } j.$$

DEMOSTRACIÓN. Probemos que $T_i \cap T_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Si ambos compartiesen únicamente un vértice, éste estaría f -conectado a dos vértices críticos diferentes. Si compartiesen además alguna artista y , por tanto, más vértices, la situación sería análoga. Por todo ello, lo que hay que probar es que dado un rayo o vértice f -conectado a un vértice crítico, éste no puede estar f -conectado a ningún otro vértice crítico y esto queda justificado por la Proposición 2.3.1. Cualquiera de las otras dos intersecciones resulta ser vacía usando el mismo razonamiento, ya que éste no depende del tipo de elemento crítico al que se dirigen los caminos de f -conexión.

□

Podemos resumir los resultados anteriores en el siguiente teorema que prueba que el subgrafo que contiene toda la información de los caminos gradientes de G es un bosque maximal.

Teorema 2.3.1. *Sea G un 1-complejo infinito sobre el que está definida una función de Morse discreta f . Sea B el subcomplejo de G formado por todos los caminos gradientes de f en G . Se verifica que B es el bosque maximal de G dado por la siguientes uniones disjuntas de árboles,*

$$B = \left(\bigcup_{i \in I} T_i \right) \cup \left(\bigcup_{j \in J} R_j \right),$$

donde cada T_i es el árbol formado por todos los caminos gradientes que convergen en un mismo vértice crítico v_i y cada R_j el árbol formado por todos los caminos gradientes que convergen en un mismo rayo crítico.

Al estudiar la posibilidad de que el bosque B sea conexo, es decir, que se reduzca a un único árbol, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.3.1. *B es un árbol si y sólo si G tiene un único vértice crítico o un único rayo decreciente.*

Obsérvese que si se considera definida sobre los vértices de G la relación de equivalencia

" $v \sim w$ si y sólo si v y w están f -conectados a un mismo vértice crítico o rayo decreciente,"

las clases de equivalencia son cada uno de los árboles gradientes T_i ó R_i .

Es evidente que la f -conexión implica la conexión habitual en grafos, aunque el recíproco no es cierto.

El teorema anterior exige conocer todos los vértices críticos y rayos decrecientes de f en G para construir el bosque maximal B . Sin embargo, el siguiente resultado prueba que para construir B es suficiente conocer y eliminar las aristas críticas de G .

Proposición 2.3.4. *Bajo las hipótesis anteriores, se verifica que B se obtiene eliminando las aristas críticas de G .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $H \subseteq G$ el subcomplejo maximal de G obtenido al eliminar las aristas críticas de G . Dado que ambos son maximales, es decir los vértices de G , B y H coinciden, basta con probar que tienen las mismas aristas. Probemos por doble inclusión que $A(H) = A(B)$:

Sea e una arista de B . Por construcción, e forma parte del camino de f -conexión de un vértice o rayo con un vértice o rayo crítico de G . Si v_0 y v_1 son los dos vértices de e , se verifica que $f(v_0) < f(e) \leq f(v_1)$ o $f(v_0) \geq f(e) > f(v_1)$. En cualquier caso se comprueba que e no es crítica y por tanto, $e \in A(H)$.

Por otra parte, si e es una arista de H , e no es crítica. Si denotamos por v_0 y v_1 a los vértices de e , se verifica que $f(v_0) < f(e) \leq f(v_1)$ ó $f(v_0) \geq f(e) > f(v_1)$. Por la unicidad del camino gradiente desde un vértice crítico o rayo decreciente, en el primer caso se obtiene que e es una arista que forma parte de un camino gradiente desde v_1 a v_0 y en el segundo caso que e es una arista que forma parte de un camino gradiente desde v_0 a v_1 . Es decir, $e \in T_i$ ó $e \in R_j$, para un único i ó j , luego $e \in A(B)$.

□

Hemos visto que, en general, $B \subseteq G$ es un subcomplejo maximal de G . Si se plantea cuándo se alcanza la igualdad, la respuesta es una consecuencia inmediata de la proposición anterior:

Corolario 2.3.2. *Bajo las hipótesis anteriores se verifica que $B = G$ si y sólo si f no tiene ninguna arista crítica.*

Nótese que entonces G ha de ser necesariamente un árbol.

Además, si f es una función de Morse discreta definida sobre un grafo infinito tal que sólo tiene una cantidad finita de aristas críticas, sabemos por las desigualdades de Morse que G contiene a lo más la misma cantidad de ciclos que de aristas críticas y, por tanto, es la unión de una cantidad finita de ciclos y un árbol o bosque infinito, dependiendo del número de vértices críticos o rayos decrecientes.

Finalmente, si G es un 1-complejo finito, la expresión de B se reduce a

$$F = \bigcup_{i=1}^n T_i$$

ya que en este caso no existen rayos.

Capítulo 3

Campos Gradientes.

En este capítulo se estudiarán los campos vectoriales discretos, y se caracterizarán aquellos que son el gradiente de una función de Morse discreta.

3.1 El campo gradiente asociado a una función de Morse discreta.

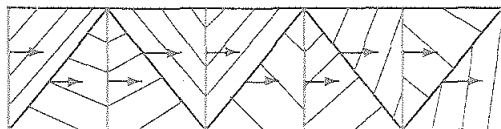
En lo que sigue, un superíndice denotará la dimensión del símplex al que afecta.

Definición 3.1.1. Sea M un complejo simplicial. Un campo vectorial discreto definido sobre M es una colección V de pares de símplexes de M de dimensiones consecutivas,

$$V = \{(\alpha^{(p)}, \beta^{(p+1)}) / \alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}\},$$

tales que cada símplex de M está a lo más en un par de V .

La siguiente figura muestra un ejemplo de campo vectorial discreto definido sobre un 2-complejo simplicial, donde cada flecha desde una arista al interior de un triángulo indica que dichos arista y triángulo son un par del campo.

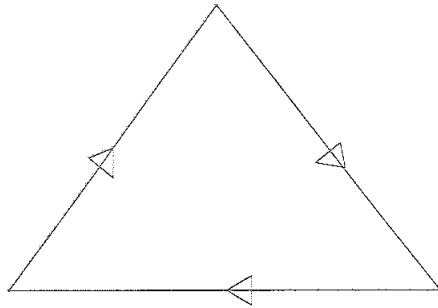


Definición 3.1.2. Sea M un complejo simplicial y V un campo vectorial discreto definido sobre M . Un V -camino es una sucesión de simplices,

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \dots, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)}$$

tal que para todo $i = 0, \dots, r$, $\alpha_i^{(p)} < \beta_i^{(p+1)}$, $(\alpha_i^{(p)} < \beta_i^{(p+1)}) \in V$ y $\beta_i^{(p+1)} > \alpha_{i+1}^{(p)} \neq \alpha_i^{(p)}$. Se dirá que un V -camino es cerrado si $r \geq 0$ y $\alpha_0 = \alpha_{r+1}$.

En la siguiente figura se da un ejemplo de V -camino cerrado definido sobre un 1-complejo, donde cada flecha desde un vértice al interior de una arista denota que dichos vértice y arista forman un par del campo.



La noción de V -camino del campo gradiente de una función de Morse es el modo natural de generalizar la noción de camino gradiente ya estudiado en 1-complejos.

Definición 3.1.3. Sea M un complejo simplicial sobre el que está definida una función de Morse discreta f . Se define el campo gradiente asociado a f , V_f , como la colección de pares de simplices de M , $(\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)})$, tales que $(\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}) \in V_f$ si y sólo si $f(\beta) \leq f(\alpha)$.

Nótese que el par $(\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)})$ pertenece al campo gradiente asociado a f si y sólo si $\nabla(\alpha^{(p)}) = \pm\beta^{(p+1)}$ siendo ∇ la aplicación gradiente asociada a f .

Proposición 3.1.1. Todo campo gradiente V_f es un campo vectorial discreto.

DEMOSTRACIÓN. Veamos que cada símplex de M está, a lo más, en un único par de V_f . Sea σ un p -símplex de M no es crítico. Se tiene que, o existe un único $\tau^{(p+1)} > \sigma^{(p)}$ tal que $f(\tau) \leq f(\sigma)$, o existe un único $\upsilon^{(p-1)} < \sigma^{(p)}$

tal que $f(v) \geq f(\sigma)$. Por tanto, σ está, de manera excluyente, o bien en un par del tipo $(\sigma^{(p)}, \tau^{(p+1)})$, o bien en uno del tipo $(v^{(p-1)}, \sigma^{(p)})$. Si σ es crítico, entonces, para todo $\tau^{(p+1)} > \sigma^{(p)}$ se tiene que $f(\tau^{(p+1)}) > f(\sigma)$, o bien para todo $v^{(p-1)} < \sigma$ se tiene que $f(v^{(p-1)}) < f(\sigma)$. Luego σ no está en ningún par de V_f . □

Definición 3.1.4. Sea M un complejo simplicial sobre el que está definida una función de Morse discreta f y sea V_f el campo gradiente asociado a f . Un camino gradiente ó V_f -camino es una sucesión de simplices

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \dots, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)},$$

tal que para todo $i = 0, \dots, r$, el par $(\alpha_i^{(p)} < \beta_i^{(p+1)})$ está en V_f . Es decir, $\nabla(\alpha_i^{(p)}) = \pm \beta_{i+1}^{(p+1)}$ y $\beta_i^{(p+1)} > \alpha_{i+1}^{(p)} \neq \alpha_i^{(p)}$, donde ∇ denota la aplicación gradiente de f sobre M .

A partir de esta última definición y, comparándola con la Definición 3.1.3, se obtiene el siguiente resultado que caracteriza los caminos gradientes de una función de Morse f como aquéllos a lo largo de los cuales f decrece.

Teorema 3.1.1. Si V_f es el campo gradiente de una función de Morse discreta f definida sobre un complejo simplicial M , una sucesión de simplices:

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \dots, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)}$$

es un V_f -camino si y sólo si $\alpha_i^{(p)} < \beta_i^{(p+1)} > \alpha_{i+1}^{(p)}$, para cada $i = 0, \dots, r$ y

$$f(\alpha_0) \geq f(\beta_0) > f(\alpha_1) \geq f(\beta_1) > \dots \geq f(\beta_r) > f(\alpha_{r+1}).$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la sucesión de simplices

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \dots, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)},$$

es un V -camino asociado al campo gradiente V , es decir, es un camino gradiente de f en M . Por definición de V -camino se verifica que $\alpha_i^{(p)} < \beta_i^{(p+1)} > \alpha_{i+1}^{(p)}$ con $i = 0, \dots, r$. Por otro lado, al ser V campo gradiente y dado que $(\alpha_i^{(p)} < \beta_i^{(p+1)}) \in V$, se tiene que $f(\beta_i^{(p+1)}) \leq f(\alpha_i^{(p)})$ y $f(\alpha_{i+1}^{(p)}) < f(\beta_i^{(p+1)})$ con $i = 0, \dots, r$. Por ello, si consideramos estas desigualdades a lo largo de todo el V -camino se tiene

$$f(\alpha_0^{(p)}) \geq f(\beta_0^{(p+1)}) > f(\alpha_1^{(p)}) \geq f(\beta_1^{(p+1)}) > \dots \geq f(\beta_r^{(p+1)}) > f(\alpha_{r+1}^{(p)}).$$

Recíprocamente, supongamos que la sucesión de simplices

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \dots, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)},$$

verifica que $\alpha_i^{(p)} < \beta_i^{(p+1)} > \alpha_{i+1}^{(p)}$, para cada $i = 0, \dots, r$ y que

$$f(\alpha_0) \geq f(\beta_0) > f(\alpha_1) \geq f(\beta_1) > \dots \geq f(\beta_r) > f(\alpha_{r+1}).$$

Entonces, $f(\alpha_i^{(p)}) \geq f(\beta_i^{(p+1)})$, con $i = 0, \dots, r$. En virtud de la definición de campo gradiente, los pares $(\alpha_i^{(p)} < \beta_i^{(p+1)})$ están en V . Por otra parte, dado que $f(\alpha_i^{(p)}) \geq f(\beta_i^{(p+1)}) > f(\alpha_{i+1}^{(p)})$, se deduce que $\alpha_{i+1}^{(p)} \neq \alpha_i^{(p)}$. □

Como consecuencia del teorema anterior, se obtiene que un campo gradiente V no puede contener V -caminos cerrados:

Corolario 3.1.1. *Si un campo vectorial discreto V es el campo gradiente de una función de Morse discreta f , entonces no existen V -caminos cerrados.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe un camino gradiente de f cerrado y no trivial

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \dots, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)},$$

donde $\alpha_{r+1}^{(p)} = \alpha_0^{(p)}$ por la condición de cerrado. El resultado anterior garantiza que $\alpha_i^{(p)} < \beta_i^{(p+1)} > \alpha_{i+1}^{(p)}$, para cada $i = 0, \dots, r$ y que

$$f(\alpha_0^{(p)}) \geq f(\beta_0^{(p+1)}) > f(\alpha_1^{(p)}) \geq f(\beta_1^{(p+1)}) > \dots \geq f(\beta_r^{(p+1)}) > f(\alpha_{r+1}^{(p)}).$$

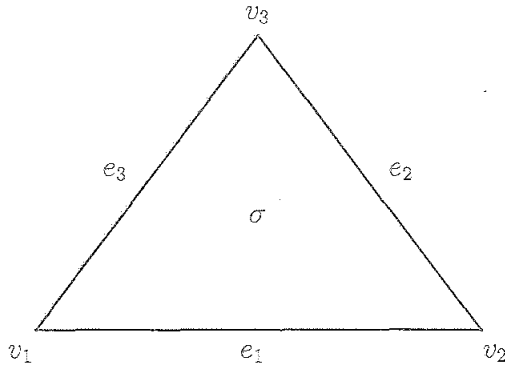
Ello implica que $f(\alpha_0^{(p)}) > f(\alpha_0^{(p)})$, lo cual es imposible. □

En realidad, este corolario es una caracterización, dado que el recíproco también es cierto. Para probarlo hay que usar un grafo especial asociado al complejo M , el diagrama de Hasse de M , con algunas modificaciones debidas a f .

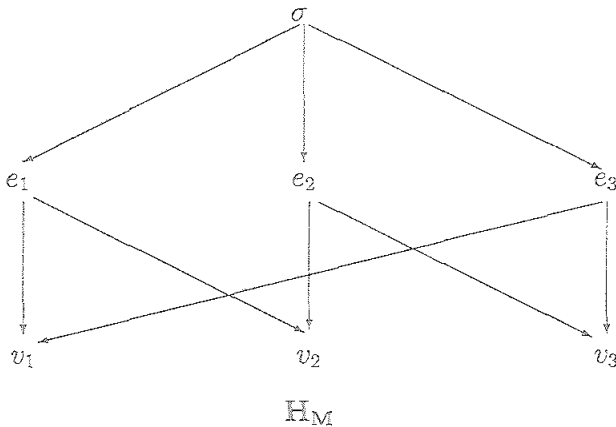
Pasamos a definir el diagrama de Hasse asociado a un complejo simplicial (ver [43]).

Definición 3.1.5. Sea M un complejo simplicial. El diagrama de Hasse asociado a M es el grafo dirigido H_M , que tiene un vértice por cada simplejo de M , y una arista dirigida entre dos vértices si éstos corresponden a dos simplejos incidentes de dimensiones consecutivas.

Ejemplo 3.1.1. Si σ es un 2-simplejo,



su diagrama de Hasse asociado es:



Obsérvese que, por definición, los vértices del diagrama de Hasse de un complejo simplicial se agrupan por niveles correspondientes a la dimensión de los simplejos que representan. De este modo, un vértice correspondiente a un p -simplejo σ , sólo podrá unirse mediante una arista con vértices de los

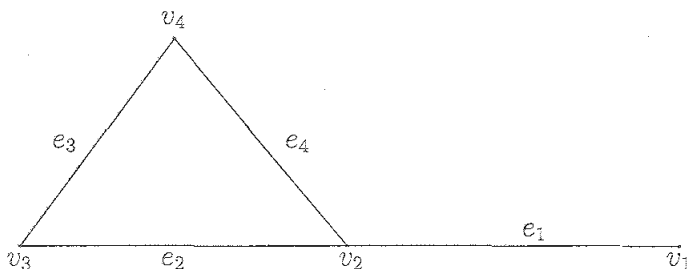
niveles inmediatamente superior o inferior, que representan a aquellos $(p+1)$ -símplices que tienen como cara a σ ó a los $(p-1)$ -símplices que son cara de σ . Por tanto, el diagrama de Hasse de un complejo de dimensión n es un grafo n -partito, en el sentido de existe una partición de sus vértices, siendo cada conjunto de dicha partición el formado por todos los vértices correspondientes a símplices de la misma dimensión. En virtud de lo anterior, es evidente que vértices de un mismo nivel no pueden ser adyacentes.

El siguiente resultado prueba que en el caso particular de que el complejo simplicial M sea un unidimensional, el diagrama de Hasse de M es topológicamente equivalente al propio M .

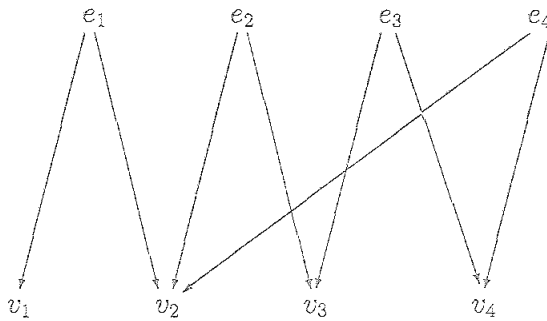
Proposición 3.1.2. *El diagrama de Hasse H_G asociado a un 1-complejo G es una subdivisión de G .*

DEMOSTRACIÓN. Sean v_0 y v_1 dos vértices adyacentes de G . Entonces, existe una única arista e_0 tal que $\partial e_0 = \pm v_0 \mp v_1$. Al pasar al diagrama de Hasse H_G , el vértice correspondiente a la arista e_0 es adyacente únicamente a los vértices correspondientes a los vértices v_0 y v_1 . Por tanto, al construir dicho diagrama de Hasse H_G , se produce una subdivisión (por bisección) de cada arista de G . □

Ejemplo 3.1.2. *Dado el siguiente grafo G*



su diagrama de Hasse asociado H_G es

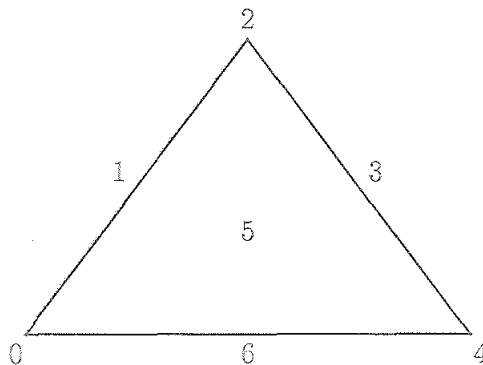


que como puede comprobarse es efectivamente una subdivisión por bisección de G .

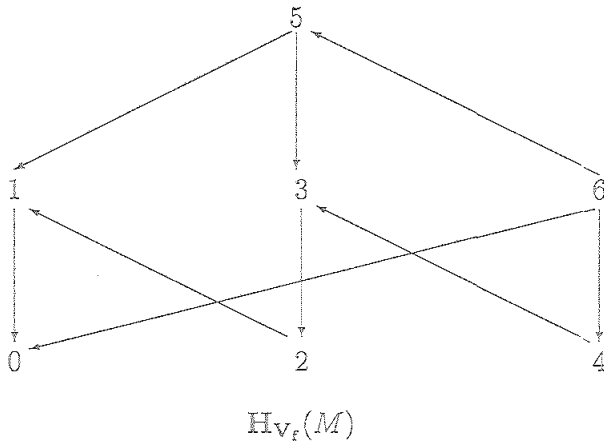
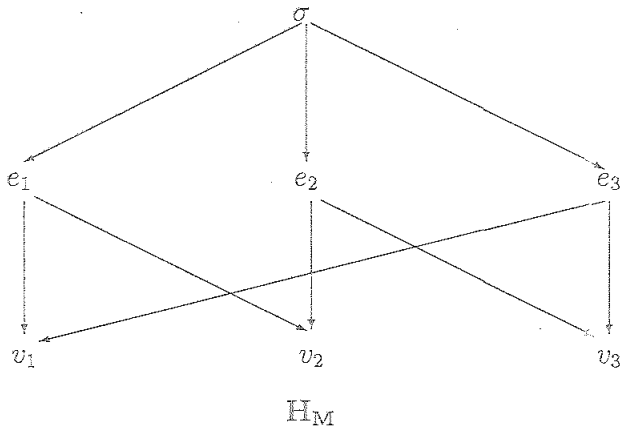
Cuando sobre el complejo simplicial M está definido un campo vectorial discreto, Forman [12] introduce una modificación sobre el diagrama de Hasse de M del siguiente modo.

Definición 3.1.6. Sea M un complejo simplicial sobre el que está definido un campo vectorial discreto V . Se define el diagrama de Hasse asociado a M y modificado por V , $H_V(M)$, como el diagrama de Hasse asociado a M en el que se cambia la orientación de cada arista si los simplices correspondientes a sus vértices, $\sigma^{(p)}$ y $\nu^{(p+1)}$, constituyen un par de V .

Ejemplo 3.1.3. Si consideramos sobre el 2-símplice del Ejemplo 4:1.1 la siguiente función de Morse discreta,



dicha función define un campo gradiente V_f , y los diagramas de Hasse de M , H_M y $H_{V_f}(M)$, resultan ser



A la vista de este ejemplo, se dará un nombre especial a los diagramas de Hasse modificados por un campo gradiente.

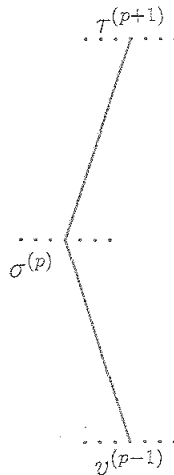
Definición 3.1.7. Al diagrama de Hasse modificado inducido por el campo gradiente de una función de Morse discreta f definida sobre un complejo M se le llamará diagrama de Hasse de M modificado por f y se le denotará por $H_f(M)$.

Para distinguir en el diagrama de Hasse modificado a aquellas aristas a las que se cambia la orientación, resulta de utilidad observar que éstas forman un emparejamiento especial en el grafo dirigido $H_f(M)$.

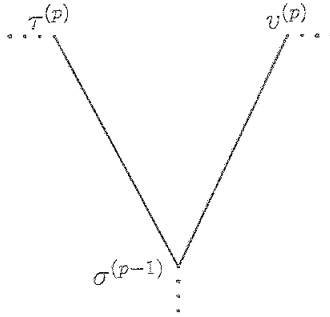
Proposición 3.1.3. *Si M es un complejo simplicial y V un campo vectorial discreto definido sobre M , las aristas de $H_V(M)$ a las que se les cambia la orientación constituyen un emparejamiento en $H_V(M)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea A el conjunto de las aristas de H_M a las que se les cambia la orientación. Se trata de probar que las aristas de A son disjuntas dos a dos. En efecto, supongamos que existen dos aristas de A que son incidentes. Se plantean dos posibilidades:

En primer lugar, supongamos que las dos aristas incidentes de A unen vértices correspondientes a dimensiones $p - 1$, p y $p + 1$, es decir, existen simplices $\nu^{(p-1)} < \sigma^{(p)} < \tau^{(p+1)}$ en M tales que $(\nu^{(p-1)}, \sigma^{(p)})$ y $(\sigma^{(p)}, \tau^{(p+1)})$ son dos pares de V . Sabemos, por definición de V , que un mismo simplejo de M no puede estar en dos o más pares distintos de V . Por tanto, esta primera posibilidad no puede darse.



Por otra parte, supongamos ahora que las dos aristas incidentes de A unen vértices correspondientes a dimensiones $p - 1$ y p , es decir, existen simplices $\sigma^{(p-1)}$, $\tau^{(p)}$ y $\nu^{(p)}$ en M tales que $\sigma^{(p-1)}$ es cara común de $\tau^{(p)}$ y $\nu^{(p)}$ y, además, $(\sigma^{(p-1)}, \nu^{(p)})$ y $(\sigma^{(p-1)}, \tau^{(p)})$ son pares de V . Por la misma razón que antes, esta posibilidad no puede darse, ya que implica que $\sigma^{(p-1)}$ está en dos pares de V .



□

Veamos ahora que todo V -camino definido sobre un complejo simplicial M induce un 1-camino orientado en el diagrama de Hasse modificado.

Proposición 3.1.4. *Sea M un complejo simplicial sobre el que está definido un campo vectorial discreto V . Se verifica que todo V -camino en M induce un camino orientado en el diagrama de Hasse de M modificado por V , $H_V(M)$.*

DEMOSTRACIÓN. Considérese el siguiente V -camino definido sobre M :

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \dots, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)}$$

donde $(\alpha_i^{(p)}, \beta_i^{(p+1)}) \in V$, $\beta_i^{(p+1)} > \alpha_i^{(p)}$ y $\beta_i^{(p+1)} > \alpha_{i+1}^{(p)}$. En virtud de la proposición anterior, al pasar al diagrama de Hasse, cada arista de dicho V -camino se subdivide en un par de aristas incidentes, transformándose así la sucesión de p -símplices y $(p - 1)$ -símplices, en una sucesión de vértices y aristas.

Respecto a la orientación, sabemos por la definición de V -camino que cada par de símplices $(\alpha_i^{(p)} < \beta_i^{(p+1)})$ está en V y, por tanto, la arista que une los vértices correspondientes a dichos símplices está orientada de $\alpha_i^{(p)}$ a $\beta_i^{(p+1)}$. Además, y dado que $\alpha_{i+1}^{(p)} < \beta_i^{(p+1)}$ no es un par de V , la arista que une los vértices correspondientes a dichos símplices está orientada de $\beta_i^{(p+1)}$ a $\alpha_{i+1}^{(p)}$.

□

Esencialmente, una vez que se ha trasladado el problema de caracterización al diagrama de Hasse, sobre éste se usará el siguiente resultado:

Proposición 3.1.5 (Teorema 3.6 de [16]). *Si G es un grafo dirigido, existe una función con valores reales definida sobre los vértices de G que es estrictamente decreciente a lo largo de cada camino dirigido si y sólo si no existen lazos dirigidos.*

Por tanto, se tiene el siguiente teorema

Teorema 3.1.2 (Teorema 3.5 de [16]). *Un campo vectorial discreto V es el campo gradiente de una función de Morse discreta f si y sólo si no existen V -caminos cerrados.*

De esta forma, un campo gradiente V queda caracterizado como aquél que no define V -caminos cerrados en M o, de manera equivalente, como aquél que no induce 1-caminos cerrados (ciclos) orientados en el diagrama de Hasse modificado correspondiente.

Conviene destacar que no todo camino orientado en el diagrama de Hasse está inducido por un V -camino definido sobre el complejo simplicial de partida. En realidad, los caminos inducidos por un V -camino en el diagrama de Hasse modificado son de un tipo especial: son los caminos alternados, en el sentido que se precisará a continuación, tales que sus vértices consecutivos están en niveles distintos, correspondientes a dimensiones consecutivas del diagrama de Hasse.

Definición 3.1.8. *Sea E un emparejamiento definido sobre un grafo G . Un camino alternado en G es un 1-camino cuyas aristas están alternativamente en E y fuera de E .*

Veamos la relación existente entre un campo vectorial discreto definido sobre un complejo simplicial y los caminos alternados sobre el diagrama de Hasse modificado por dicho campo.

Proposición 3.1.6. *Si M es un complejo simplicial sobre el que está definido un campo vectorial discreto V , entonces todo V -camino discreto definido sobre M induce un camino alternado en $H_V(M)$.*

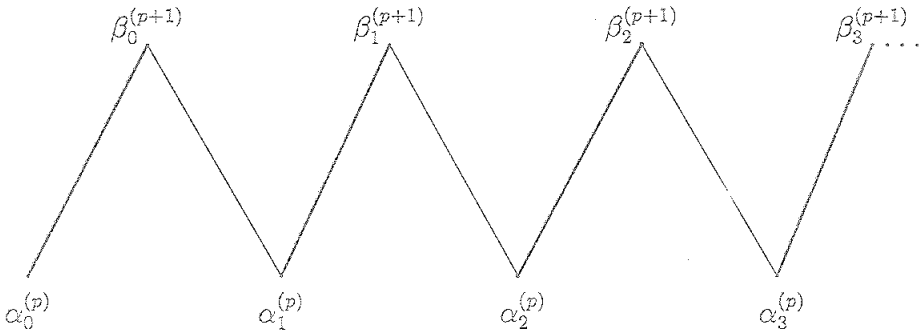
DEMOSTRACIÓN. Sabemos, en virtud de la Proposición 3.1.4, que todo V -camino en M induce un 1-camino orientado en $H_V(M)$. Sea un V -camino en M dado por la sucesión de símlices,

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \dots, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)},$$

donde $(\alpha_i^{(p)}, \beta_i^{(p+1)}) \in V$, $\beta_i^{(p+1)} > \alpha_i^{(p)}$ y $\beta_i^{(p+1)} > \alpha_{i+1}^{(p)}$.

Al considerar el diagrama de Hasse modificado por V , $H_V(M)$, debemos cambiar de orientación aquellas aristas de $H(M)$ que unen vértices cuyos símlices correspondientes, $\alpha_i^{(p)} < \beta_i^{(p+1)}$ verifican que $(\alpha_i^{(p)} < \beta_i^{(p+1)}) \in V$. Por el contrario, las aristas que unen los vértices correspondientes a los símlices $\beta_i^{(p+1)} > \alpha_{i+1}^{(p)}$ tales que $(\beta_i^{(p+1)} > \alpha_{i+1}^{(p)}) \notin V$, mantienen su orientación inicial. En virtud de la Proposición 3.1.4, las aristas del primer tipo son exactamente las que forman un emparejamiento E inducido por el campo vectorial discreto V . Por ello, las aristas que en $H_V(M)$ unen los vértices correspondientes a los símlices de la sucesión dada están alternativamente en E y fuera de él y, en conclusión, el 1-camino que determinan en $H_V(M)$ es alternado. □

Conviene destacar que otra característica de los caminos del diagrama de Hasse que están inducidos por un V -camino definido sobre el complejo simplicial original es que vértices consecutivos están en niveles (de dimensión) distintos y consecutivos del diagrama de Hasse y que, además, dichos niveles son sólo dos para un mismo V -camino. Así pues, podemos concluir que un camino en el diagrama de Hasse inducido por un V -camino en M será como muestra la siguiente figura:



donde las aristas en **negrita** forman el emparejamiento inducido por V y las aristas con trazo normal están fuera de dicho emparejamiento.

Hay que señalar que las Proposiciones 3.1.3, 3.1.4 y 3.1.6 se verifican para el caso particular de que el campo vectorial discreto V sea el campo gradiente de una función de Morse discreta f .

Es interesante estudiar bajo qué condiciones un subconjunto de simplices de un complejo dado puede ser el conjunto de simplices críticos de una función de Morse discreta definida sobre dicho complejo. Para ello resulta útil trasladar dicho problema al diagrama de Hasse

Teorema 3.1.3 ([3]). *Un subconjunto C de simplices de un complejo simplicial M es el conjunto de los simplices críticos de una función de Morse discreta definida sobre M si y sólo si existe un emparejamiento E sobre H_M tal que $H_M(E)$ es acíclico, donde $H_M(E)$ denota al diagrama de Hasse de M modificado por el emparejamiento E , y C es el conjunto de vértices de H_M no incidentes con ninguna arista de E .*

Veamos cómo sobre el diagrama de Hasse modificado es posible obtener una caracterización de los simplices críticos de f en M estudiando la orientación definida en las aristas que inciden en el vértice correspondiente a un simple dado.

Proposición 3.1.7. *Sea f una función de Morse discreta definida sobre un complejo simplicial M y $H_f(M)$ el diagrama de Hasse de M modificado por f . Sea σ un p -simple de M cuyo vértice correspondiente en $H_f(M)$ es v_σ . Se verifica que σ es crítico para f si y sólo si se cumplen las condiciones siguientes:*

- (i) *Todas las aristas e_i de $H_f(M)$ incidentes en v_σ y que lo conectan con algún vértice del nivel inmediatamente superior, v_τ , están orientadas de modo que $\partial e_i = v_\sigma - v_\tau$.*
- (ii) *Todas las aristas e_j de $H_f(M)$ incidentes en v_σ y que lo conectan con algún vértice del nivel inmediatamente inferior, v_ν , están orientadas de modo que $\partial e_j = v_\nu - v_\sigma$.*

DEMOSTRACIÓN. Usando la definición de simple crítico, se verifican simultáneamente las dos condiciones siguientes:

- (a) Para todo $(p+1)$ -símplice τ del que σ es cara, se tiene que $f(\sigma) < f(\tau)$.
- (b) Para todo $(p-1)$ -símplice ν que es cara de σ , se tiene que $f(\sigma) > f(\nu)$.

De (a) y (b) se deduce que al pasar al diagrama de Hasse, todas las aristas incidentes con v_σ y que lo unen con vértices del nivel inmediatamente superior (correspondientes a símplices de dimensión $p+1$ que tienen a σ como cara) o con vértices del nivel inmediatamente inferior (correspondientes a símplices de dimensión $p-1$ que son caras de σ) están orientadas en sentido "descendente", es decir, van desde vértices del nivel superior a los de nivel inmediatamente inferior y, por tanto, dichas aristas no modifican su orientación al construir $H_f(M)$. □

A la vista de la proposición anterior, puede afirmarse que los símplices críticos de una función de Morse discreta f definida sobre un complejo simplicial M son aquellos en los que f y el orden inducido en la estructura simplicial de M por la relación "ser cara de" son compatibles.

El resultado anterior es especialmente útil a la hora de detectar los símplices críticos de dimensión mínima y máxima.

Corolario 3.1.2. *Bajo las hipótesis de la proposición anterior se verifican las siguientes propiedades:*

- (i) σ es un vértice crítico de f en M si y sólo si todas las aristas e_i incidentes en v_σ cumplen que $\partial e_i = v_\sigma - v_\tau$.
- (ii) σ es un símplice crítico de dimensión máxima si y sólo si todas las aristas e_j incidentes en v_σ cumplen que $\partial e_j = v_\nu - v_\sigma$.

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar la proposición anterior y tener en cuenta que en el diagrama de Hasse los vértices correspondientes a símplices de dimensión máxima únicamente están conectados a los del nivel inmediatamente inferior y, por otro lado, los vértices correspondientes a símplices de dimensión mínima sólo están conectados a los de nivel inmediatamente superior. □

Obsérvese que las dos situaciones extremas que se describen en el corolario anterior son precisamente las únicas posibles cuando M es un 1-complejo, es decir, un grafo.

3.2 Caracterización de los campos gradientes para grafos infinitos.

Vamos a dar ahora una caracterización para grafos infinitos de los campos vectoriales gradientes. Nos centraremos primero en el estudio de los campos gradientes definidos sobre árboles infinitos.

Comenzaremos con varios lemas que estudian, dado un campo vectorial V definido sobre un grafo G , las relaciones entre los vértices y aristas de G que no están en V .

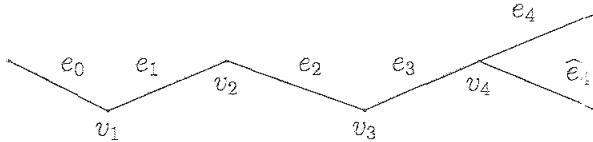
Lema 3.2.1. *Sea G un 1-complejo sobre el que está definido un campo vectorial discreto V . Dados dos vértices de G que no están en ningún par de V , se verifica que en todo camino que une ambos vértices existe al menos una arista que no está en ningún par de V .*

DEMOSTRACIÓN. Sean v_0 y v_n dos vértices de G tales que no pertenecen a ningún par de V . Sea $v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ un camino en G que une v_0 con v_n . Si e_0 está en algún par de V , es claro que $(e_0, v_1) \in V$. Ahora, si e_1 está en un par de V , entonces $(e_1, v_2) \in V$. Repitiendo el proceso, o se encuentra una arista e_i ($i < n - 1$) que no está en ningún par de V , o necesariamente e_{n-1} no está en ningún par de V , pues $(e_{n-2}, v_{n-1}) \in V$ y v_n , por hipótesis, no pertenece a ningún par de V . □

Resulta natural plantearse la cuestión relativa a la unicidad del resultado anterior, es decir, dado que dicho resultado sólo nos asegura la existencia de una arista que no está en V entre dos vértices que tampoco están en V , ¿bajo qué hipótesis adicionales podemos garantizar además que dicha arista es única?. La respuesta a esta cuestión consiste en añadir al lema anterior la hipótesis de que en el camino entre los dos vértices fijados todo vértice intermedio esté en algún par de V . Por tanto, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.2.1. *Sea G un 1-complejo sobre el que está definido un campo vectorial discreto V . Dados dos vértices de G que no están en ningún par de V y fijado un camino que los une tal que todos los vértices de dicho camino exceptuando a los vértices inicial y final están en algún par de V , se verifica que en dicho camino existe una única arista que no está en ningún par de V .*

La versión "dual" del lema anterior no es cierta, es decir, dadas dos aristas que no están en ningún par de V , puede ocurrir que todo vértice esté en algún par de V . Para comprobarlo basta con dar el siguiente ejemplo



donde e_0 y e_4 son las dos aristas entre las que existe el camino

$$e_0, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4.$$

Aunque e_0 y e_4 no estén en ningún par de V , podemos emparejar los vértices del camino del siguiente modo: $(v_1, e_1) \in V$, $(v_2, e_2) \in V$, $(v_3, e_3) \in V$ y al llegar a v_4 , basta con emparejarlo con cualquier arista incidente en él excepto e_3 y e_4 , por ejemplo, con \widehat{e}_4 y $(v_4, \widehat{e}_4) \in V$. De esta forma, todo vértice de dicho camino está en algún par de V .

Cabe pues, plantearse cuándo será posible que se verifique el resultado mencionado respecto a las aristas

Lema 3.2.2. *Sea G un 1-complejo sobre el que está definido un campo vectorial discreto V . Dadas dos aristas de G que no están en ningún par de V y, fijado un camino que une ambas aristas tal que todos sus vértices tienen valencia 2, se verifica que existe al menos un vértice en dicho camino que no está en ningún par de V .*

DEMOSTRACIÓN. Esta demostración sigue el mismo razonamiento que el Lema 3.2.1, con las modificaciones naturales. Sean e_0 y e_n dos aristas de G tales que no pertenecen a ningún par de V . Sea $e_0, v_1, e_1, v_2, \dots, e_{n-1}, v_n, e_n$ un camino en G que une v_0 con v_n . Dado que su valencia es 2, si v_0 está en algún par de V , es claro que $(v_0, e_1) \in V$. Análogamente, si v_1 está en algún par de V , necesariamente ha de verificarse que $(v_1, e_2) \in V$. Repitiendo el proceso para todos los vértices del camino, llegamos al último, v_{n-1} , que al tener valencia 2, y, dado que $(v_{n-2}, e_{n-1}) \in V$ y e_n no está en ningún par de V , necesariamente no estará en ningún par de V .

□

A continuación pasamos a enunciar y demostrar uno de los resultados fundamentales de esta sección. Se trata de probar que en un árbol infinito, cualquier campo vectorial discreto es un campo gradiente, es decir, proviene de una función de Morse discreta. Para el caso finito este resultado ya fue probado por R. Forman como un caso particular del Teorema 1.12 de [13].

Teorema 3.2.1. *Sea T un árbol infinito sobre el que está definido un campo vectorial discreto V . Se verifica que existe una función de Morse discreta f definida sobre T tal que $V = V_f$.*

DEMOSTRACIÓN. Se trata de construir f a partir de V . Para ello razonaremos por casos:

- (1) Supongamos que todos los vértices y aristas de T están en algún par de V . Para definir f , basta con seleccionar un vértice cualquiera v_0 de G sobre el que f tomará un valor arbitrario $f(v_0)$ y a partir de v_0 iremos construyendo f de manera estrictamente monótona según nos lo indiquen los V -caminos determinados por el campo vectorial V .
- (2) Supongamos que el único símplex de T que no está en ningún par de V es el vértice v_0 . Definimos f sobre v_0 de un modo arbitrario y a partir de aquí la definimos como creciente en todas las direcciones.
- (3) Supongamos que el único símplex de T que no está en ningún par de V es la arista e_0 . Definimos f sobre e_0 de modo que sea estrictamente mayor que en sus dos vértices. A partir de aquí, definimos f de manera monótona siguiendo los V -caminos determinados por V , igual que en el caso (1).
- (4) Existen al menos un vértice y una arista que no están en ningún par de V . Para definir f , en primer lugar eliminamos las aristas que no están en ningún par de V . En consecuencia, obtenemos una unión de árboles disjuntos de manera que en cada uno de ellos existe a lo más un vértice que no está en ningún par de V , en virtud del Lema 3.2.1. Ahora, dependiendo de la situación, se aplica en cada árbol lo expuesto en los casos (1) y (2) y definimos f sobre las aristas eliminadas inicialmente, de modo que en éstas sea mayor estrictamente que en sus dos vértices.

□

Nótese que cada caso de la demostración anterior se corresponde con una situación distinta respecto al número de simplices críticos de la función de Morse construida asociada al campo V . Así, el caso (1) corresponde a las funciones de Morse que carecen de puntos críticos y, como ya se ha visto, esto no puede darse en el caso finito.

En el caso (2), dicha función posee un único vértice crítico y ninguna arista crítica. Esto se corresponde con una función de Morse discreta definida sobre el árbol de modo que sólo tenga un único vértice crítico (el mínimo global) y ninguna arista crítica. Esta situación puede darse tanto en árboles finitos como infinitos.

Para el caso (3), la función de Morse construida tiene una única arista crítica y ningún vértice crítico. Esta posibilidad únicamente puede darse en árboles infinitos, ya que en los finitos tenemos asegurada la existencia de al menos un vértice crítico (el mínimo global).

El caso (4) es el caso general, aunque teniendo en cuenta los lemas previos, está sujeto a ciertas restricciones. Corresponde a una función de Morse que tiene al menos un vértice y una arista crítica.

Una vez que hemos probado que en un árbol infinito todo campo vectorial discreto deriva de una función de Morse discreta definida sobre dicho árbol, el siguiente paso es estudiar bajo qué condiciones puede afirmarse que un campo vectorial discreto definido sobre un grafo infinito es el campo gradiente de una función de Morse discreta definida sobre dicho grafo. Este problema ya fue resuelto por Forman en [12] para grafos finitos, ya que proporcionó una caracterización de los campos gradientes discretos V como aquéllos que carecen de V -camino cerrado.

Teorema 3.2.2. *Sea V un campo vectorial discreto definido sobre un 1-complejo infinito y conexo G . Se verifica que V es el campo gradiente asociado a una función de Morse discreta f definida sobre G si y sólo si no existen V -camino cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea V un campo vectorial discreto definido sobre G tal que existe una función de Morse discreta f de la que es campo gradiente, es decir, $V = V_f$, y supongamos que existe un V -camino cerrado denotado por

$$\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_r, \alpha_{r+1},$$

donde $\alpha_{r+1} = \alpha_0$, los α_i son p -símplices y los β_j son $(p+1)$ -símplices, $\alpha_i < \beta_i > \alpha_{i+1}$ para cada $i = 0, \dots, r$ y

$$f(\alpha_0) \geq f(\beta_0) > f(\alpha_1) \geq f(\beta_1) > \dots \geq f(\beta_r) > f(\alpha_{r+1}).$$

Ello implica que $f(\alpha_0) > f(\alpha_0)$ y, en consecuencia, no puede existir ningún V -camino cerrado.

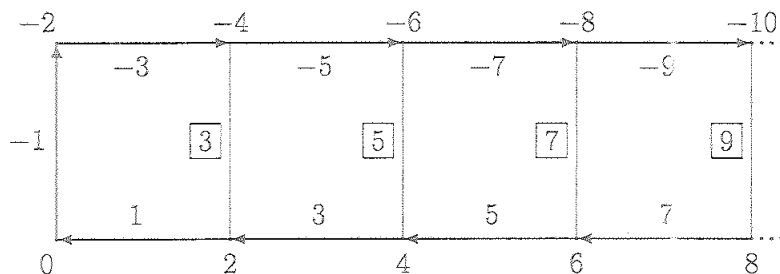
Recíprocamente, sea V un campo vectorial discreto definido sobre G que no contiene V -caminos cerrados finitos. Probemos en primer lugar que todo ciclo independiente de G contiene al menos una arista que no está en ningún par de V . Supongamos que existe un ciclo de G tal que todas las aristas que lo forman están en algún par de V . Dado que en un ciclo el número de aristas coincide con el número de vértices, esto equivale a afirmar que cada arista del ciclo está emparejada en V con alguno de sus dos vértices y, por tanto, que todo vértice del ciclo está en algún par de V . Para ello, la única configuración posible es que, si denotamos por $v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, v_n, e_n, v_0$ la sucesión de vértices y aristas incidentes que forman dicho ciclo, los pares $(v_0, e_0), (v_1, e_1), \dots, (v_n, e_n)$ estén en V , siendo v_0 y v_n los dos vértices de e_n . Sin embargo, dicha configuración no es posible, ya que produce un V -camino cerrado en G , lo que contradice la hipótesis.

Consideremos ahora el subgrafo B formado por todos los V -caminos de G , incluyendo aquellos vértices que, a pesar de no estar en ningún par de V , son extremos de una arista que sí está en algún par de V . Dado que sabemos que todo ciclo independiente posee al menos una arista que no está en ningún par de V , y como, por hipótesis G no contiene V -caminos cerrados, se verifica que B es el bosque maximal de G obtenido al eliminar todas las aristas de G que no están en ningún par de V . Aplicando el Teorema 4.2.1. podemos definir sobre B una función de Morse discreta $\hat{f} : B \rightarrow \mathbb{R}$ de manera que la restricción de V a B sea el campo gradiente asociado a \hat{f} , es decir, $V_{\hat{f}} = V_B$. Para continuar, basta añadir las aristas eliminadas para obtener G a partir de B y, entonces, para extender \hat{f} a una función de Morse f definida en todo el grafo G , basta con definirla sobre las aristas que no están en ningún par de V . Para ello será suficiente con definir f sobre dichas aristas de modo que alcance máximos locales sobre cada una de éstas, es decir, que f sea

estrictamente mayor sobre cada arista de las mencionadas que sobre cada uno de sus dos vértices. De este modo dichas aristas serán las aristas críticas de f en G y por construcción, se tiene que $V_f = V$.

□

La hipótesis del resultado anterior que exige la inexistencia de V -caminos cerrados, precisa que estos son de tipo finito. Ello se debe a que se permite la existencia en campos gradientes de V -caminos cerrados infinitos en el sentido que se expone a continuación. La noción de V -camino cerrado infinito, o de forma más general, de ciclo infinito que hemos considerado es la introducida por Diestel en [7] y [8]. Esencialmente, un ciclo infinito es la imagen homeomorfa de un ciclo finito en el grafo resultante de compactificar el 1-complejo infinito en cuestión por sus finales. Consideremos el siguiente ejemplo:



Como puede comprobarse, en la figura anterior encontramos una función de Morse discreta definida sobre un 1-complejo infinito, la escalera infinita. En este ejemplo, la escalera infinita posee un único final, en el que comienza y termina un V -camino infinito, formado por todas las aristas que contienen una flecha en el 1-complejo y que es un birrayo monótono. Al compactificar por el único final, dicho V -camino pasa a ser un ciclo infinito. Por todo ello, en el grafo anterior tenemos un V -camino cerrado infinito, a pesar de que, evidentemente, el campo V es un campo gradiente pues proviene de f .

En vista del teorema y el ejemplo anteriores, podemos asegurar que en 1-complejos infinitos, el hecho de que un campo V sea campo gradiente sólo depende de los V -ciclos finitos y no de lo que ocurra con los V -ciclos infinitos.

3.3 Integración de campos gradientes.

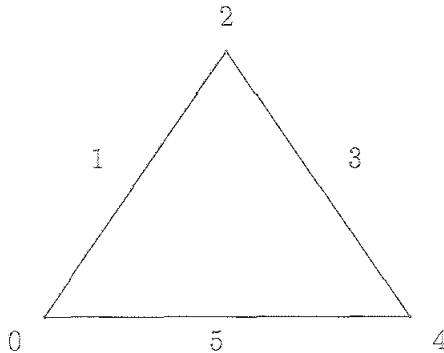
En las Secciones 3.1 y 3.2 hemos estudiado el problema de la existencia de funciones de Morse discretas asociadas a un campo vectorial discreto. En concreto hemos caracterizado los campos vectoriales gradientes como aquéllos que carecen de V -camino cerrados. Nos planteamos ahora estudiar, dado un campo gradiente discreto V definido sobre un grafo G , tanto la unicidad como el cálculo explícito de una función de Morse discreta f definida sobre G verificando $V_f = V$. Conviene recordar que la cuestión relativa a la existencia ya ha sido estudiada en la Sección 3.2.

Por analogía con el caso diferenciable, al proceso de obtención de una función verificando las condiciones anteriores lo llamaremos integración del campo V y la función la denominaremos función potencial de V .

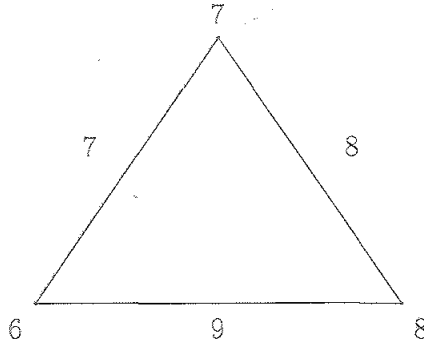
En primer lugar definiremos una noción que nos será de utilidad en el estudio de la unicidad de la función potencial: la equivalencia de funciones de Morse discretas establecida por Forman en [15].

Definición 3.3.1. Sean f y g dos funciones de Morse discretas definidas sobre un mismo complejo simplicial M . Se dirá que f y g son equivalentes si para todo par de simplices α y β tales que $\alpha < \beta$, se verifica que $f(\alpha) < f(\beta)$ si y sólo si $g(\alpha) < g(\beta)$.

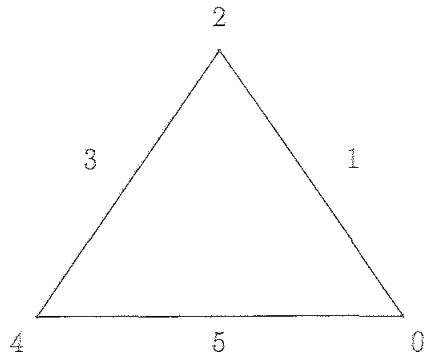
Ejemplo 3.3.1. En la figura siguiente consideramos una función de Morse discreta f definida sobre un ciclo de longitud 3



y, a continuación, tenemos otra función de Morse discreta g definida sobre el mismo grafo.



Puede comprobarse que g y f son equivalentes. Veamos ahora una función de Morse discreta definida sobre el mismo grafo que no es equivalente a ninguna de las dos funciones anteriores:



Lema 3.3.1. *Si f y g son dos funciones de Morse equivalentes definidas sobre un complejo M , entonces ambas tienen los mismos simplices críticos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\alpha^{(p)}$ un p -simplex crítico de f en M . Por definición, se verifican las dos condiciones siguientes:

- (a) $f(\alpha^{(p)}) < f(\beta^{(p+1)})$, para todo $(p + 1)$ -simplex $\beta^{(p+1)}$ tal que $\beta^{(p+1)} > \alpha^{(p)}$.
- (b) $f(\gamma^{(p-1)}) < f(\alpha^{(p)})$, para todo $(p - 1)$ -simplex $\gamma^{(p-1)}$ tal que $\alpha^{(p)} > \gamma^{(p-1)}$.

Dado que f y g son equivalentes sobre M , (a) y (b) equivalen respectivamente a:

$$(a') \quad g(\alpha^{(p)}) < g(\beta^{(p+1)}), \text{ para todo } (p+1)\text{-símplice } \beta^{(p+1)} \text{ tal que } \beta^{(p+1)} > \alpha^{(p)}$$

$$(b') \quad g(\gamma^{(p-1)}) < g(\alpha^{(p)}), \text{ para todo } (p-1)\text{-símplice } \gamma^{(p-1)} \text{ tal que } \alpha^{(p)} > \gamma^{(p-1)}.$$

En consecuencia, $\alpha^{(p)}$ es símplice crítico de g en M . Obsérvese que a la vez hemos probado el recíproco, ya que todas las implicaciones son, en realidad, equivalencias. □

Lema 3.3.2. *Si f y g son dos funciones de Morse equivalentes definidas sobre un complejo M , ambas definen los mismos campos gradientes.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}$ es un par del campo gradiente definido por f , entonces $f(\alpha^{(p)}) \geq f(\beta^{(p+1)})$. Dado que f y g son equivalentes, se tiene que $f(\alpha^{(p)}) \geq f(\beta^{(p+1)})$ si y sólo si $g(\alpha^{(p)}) \geq g(\beta^{(p+1)})$. Esta última desigualdad equivale a afirmar que el par $\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}$ pertenece al campo gradiente definido por g . □

Veamos a continuación un procedimiento de cálculo de una función potencial a partir del campo gradiente.

Proposición 3.3.1. *Sea V un campo vectorial discreto definido sobre un 1-complejo G y f una función de Morse discreta definida sobre G verificando que $V = V_f$. Cualquier función g definida sobre G que tenga a todas las aristas que no están en ningún par de V como máximos locales y a todos los vértices que no están en ningún par de V como mínimos locales y se comporte de manera monótona en el resto conforme a lo fijado por el campo V , es una función de Morse discreta tal que $V = V_f = V_g$, es decir, es una función potencial de V .*

DEMOSTRACIÓN. Sea V un campo vectorial gradiente definido sobre un 1-complejo G . Consideremos todos los vértices y aristas de G que no están en ningún par de V . Éstos van a ser los vértices y aristas críticos de la función de Morse discreta g que vamos a definir sobre G . En primer lugar, vamos a

eliminar de G todas las aristas que no están en ningún par de V , del mismo modo que se hacía en la construcción del bosque de árboles gradientes sobre un grafo. A continuación, pasamos a definir g de modo que todos los vértices que no están en ningún par de V sean sus mínimos locales (es decir, g es menor estrictamente sobre dichos vértices que sobre todas las aristas incidentes en ellos) y, a partir de dichos vértices, definimos g de manera creciente. Tenemos por tanto g definida sobre el bosque de árboles gradientes inducido por V . Para completar la definición de g basta con definirla sobre las aristas que en un principio eliminamos, de manera que dichas aristas sean sus máximos locales (es decir, de modo que g toma en cada una de ellas valores mayores estrictamente que sus vértices).

Todo lo anterior puede repetirse en caso de que G sea infinito con una salvedad, que aparezcan rayos decrecientes. Si siguiendo el proceso que acabamos de describir no logramos definir g en todo el grafo y nos queda algún rayo por cubrir, ello se debe a que dicho rayo es crítico para f y, en consecuencia, sobre éste hemos de definir g de un modo decreciente desde la arista crítica hacia el final correspondiente. En cualquier caso, ésto es algo que queda determinado por el campo gradiente V .

Se tiene directamente a partir de la construcción de g que ésta es una función de Morse discreta que verifica que $V = V_f = V_g$.

□

Corolario 3.3.1. *Dado un campo vectorial gradiente V definido sobre un 1-complejo G , existen infinitas funciones de Morse discretas f que son potenciales de V , es decir, tales que $V = V_f$.*

DEMOSTRACIÓN. Basándonos en la demostración de la proposición anterior, puede conseguirse que, fijado un campo vectorial gradiente V sobre G , se definan una infinidad de funciones potenciales de V dicho grafo. En efecto, una vez que se ha obtenido una función gradiente g , podemos ir variando los valores de g (del mismo modo que las modificaciones de la prueba del Teorema 1.4.1) sobre los símplexes de G , sustituyéndolos por otros tan próximos a ellos como se quiera, de modo que no se alteren ni los símplexes críticos, ni los caminos monótonos. De esta forma, se obtienen infinidad de funciones \hat{g} que también son potenciales del campo V .

□

Corolario 3.3.2. *Bajo las hipótesis del corolario anterior, cualesquiera dos funciones de Morse discretas f y g que son potenciales de V , es decir, tales que $V = V_f = V_g$, son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que tenemos dos funciones de Morse discretas f y g no equivalentes que son funciones potenciales de un mismo campo gradiente V definido sobre un 1-complejo G , es decir, tales que $V = V_f = V_g$. Por ser f y g no equivalentes, han de existir, al menos, un vértice v_0 y una arista e_0 tales que $f(v_0) < f(e_0)$ y $g(v_0) \geq g(e_0)$. Dado que $V = V_f = V_g$, estas dos últimas afirmaciones equivalen a decir que, por un lado, el par $(v_0, e_0) \in V$ y, por otro, que dicho par $(v_0, e_0) \notin V$, lo cual es imposible. Por todo ello concluiremos que todas las funciones de Morse que son potenciales de un mismo campo gradiente son equivalentes. □

Los dos corolarios anteriores demuestran, fijado un campo gradiente, tanto la existencia de infinitas funciones potenciales como la equivalencia de todas ellas. Esto debe interpretarse como el análogo discreto a la existencia de infinitas funciones potenciales en el caso diferenciable y la equivalencia de todas ellas salvo constante de integración.

Podemos resumir ambos corolarios en el siguiente Teorema de Caracterización:

Teorema 3.3.1. *Sean f y g dos funciones de Morse discretas definidas sobre un mismo 1-complejo G . Se tiene que f y g son equivalentes si y sólo si $V_f = V_g$.*

Capítulo 4

Funciones de Morse Discretas Minimales.

4.1 Cancelación de puntos críticos.

A continuación, vamos a estudiar el tamaño máximo de los emparejamientos inducidos por una función de Morse discreta. Para ello, comenzaremos definiendo dos tipos de emparejamiento lo más grande posible respecto del cardinal de sus aristas:

Definición 4.1.1. Sea E un emparejamiento definido sobre un grafo G . Se dirá que E es un emparejamiento perfecto si todo vértice de G está en alguna arista de E . Además, se dirá que E es un emparejamiento máximo si no existe ningún otro emparejamiento definido sobre G que tenga más aristas que E .

Definición 4.1.2. Sea E un emparejamiento definido sobre un grafo G . Un camino alternado en G tal que los vértices inicial y final no están en ninguna arista del emparejamiento se llama camino de aumento.

Tiene interés plantearse qué tipo de emparejamientos maximales podemos inducir mediante una función de Morse f en el diagrama de Hasse $H_f(M)$. En este sentido, podemos hacer las siguientes consideraciones:

- (a) En el caso de un complejo simplicial finito M , no es posible obtener ningún emparejamiento perfecto E sobre $H_f(M)$. Conviene notar que si

existiera tal emparejamiento perfecto E bajo las condiciones anteriores, esto implicaría que, por definición, todos los vértices de $H_f(M)$ estarían en alguna arista de E . En particular, esto ocurrirá con los vértices de nivel cero. Volviendo al complejo original, esta última afirmación equivale a asegurar que no existen vértices críticos, es decir, que sean mínimos de f sobre M , lo cual es imposible.

- (b) Una vez descartada la existencia de emparejamientos perfectos para el caso finito, tiene interés la búsqueda de emparejamientos máximos, puesto que este problema equivale, en virtud del Teorema 3.1.3, a encontrar funciones de Morse lo más sencillas posible en el sentido de que tengan la menor cantidad posible de simplices críticos. Existe relación entre el cardinal de un emparejamiento acíclico en $H_f(M)$ y el número de simplices críticos de f sobre M , ya que, mientras más aristas tenga el emparejamiento, menos vértices deja por cubrir, o lo que es lo mismo, más simplices críticos tendrá f sobre M . De este modo, al encontrar un emparejamiento máximo sobre el diagrama de Hasse de un complejo, alcanzamos el mínimo número de simplices críticos de cualquier función de Morse definida sobre dicho complejo.

Existen resultados de Teoría de Grafos que caracterizan los emparejamientos máximos. Sin embargo, el tipo de emparejamiento en el que estamos interesados, los acíclicos, y los grafos sobre los que trabajamos, que han de ser dirigidos, hacen que los resultados mencionados no sean útiles en nuestro contexto. Por ello surge la necesidad de desarrollar nuevas técnicas.

Comenzaremos por desarrollar una técnica descrita por Forman para obtener, fijado un complejo simplicial M , funciones de Morse con el menor número posible de puntos críticos. Es lo que él llama cancelación de puntos críticos.

Teorema 4.1.1 (Teorema 11.1 de [12]). *Sea f una función de Morse discreta definida sobre el complejo simplicial M . Sean $\sigma^{(p+1)}$ y $\tau^{(p)}$ dos simplices críticos de f en M tales que existe un único camino gradiente que comienza en algún simple del borde de $\sigma^{(p+1)}$ y termina en $\tau^{(p)}$. Se verifica que existe una función de Morse discreta \hat{f} con los mismos simplices críticos que f excepto $\sigma^{(p+1)}$ y $\tau^{(p)}$.*

Incluimos una idea de la prueba, ya que nos será de utilidad para lo que

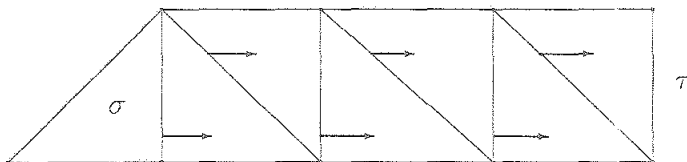
viene a continuación.

Sean $\sigma^{(p+1)}$ y $\tau^{(p)}$ tales que existe un único camino gradiente γ desde un símlice perteneciente a $\partial\sigma^{(p+1)}$ hasta $\tau^{(p)}$. Por tanto,

$$\gamma = \alpha_0^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_2^{(p+1)}, \dots, \beta_n^{(p+1)}, \alpha_n^{(p)},$$

donde $\alpha_0^{(p)} \in \partial\sigma^{(p+1)}$, $\alpha_n^{(p)} = \tau^{(p)}$ y

$$f(\alpha_0^{(p)}) \geq f(\beta_1^{(p+1)}) > f(\alpha_1^{(p)}) \geq f(\beta_2^{(p+1)}) > \dots \geq f(\beta_n^{(p+1)}) > f(\alpha_n^{(p)}).$$



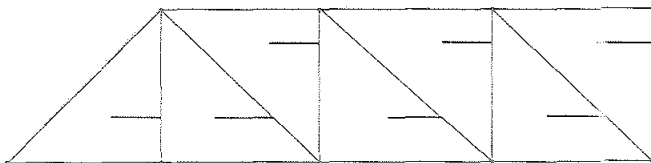
La idea clave consiste en considerar el camino inverso a γ , que denotaremos por γ^{-1} , desde $\tau^{(p)}$ hasta $\sigma^{(p+1)}$ incluyendo este último.

$$\gamma^{-1} = \alpha_n^{(p)}, \beta_n^{(p+1)}, \alpha_{n-1}^{(p)}, \dots, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}.$$

A partir de γ^{-1} podemos definir el campo vectorial discreto W dado por

$$W(v) = \begin{cases} V_f(v) & \text{si } v \neq \alpha_i \\ V_f(\alpha_{i-1}) & \text{si } v = \alpha_i \text{ con } i = 1, \dots, n \\ \sigma & \text{si } v = \alpha_0, \end{cases}$$

donde v_f denota el campo vectorial discreto gradiente definido por f .



Es importante hacer notar que la hipótesis de unicidad del camino gradiente γ garantiza que W es acíclico, ya que si existiera otro camino gradiente

ϕ distinto de γ , uniendo algún símplice del borde de $\sigma^{(p+1)}$ con $\tau^{(p)}$ y componiendo γ^{-1} y ϕ por yuxtaposición, obtendríamos un W -camino cerrado basado en $\tau^{(p)}$, y esto impediría, en virtud del Teorema 3.2.2, que W fuera el campo vectorial gradiente de una función de Morse discreta definida sobre M . En conclusión, dado que W es acíclico, sabemos por el Teorema 3.2.2 que W es el camino gradiente de una cierta función de Morse discreta definida sobre M . Por ello, ha de existir una función de Morse discreta, \widehat{f} , definida en M y cuyo campo vectorial gradiente inducido sea precisamente W . Por la definición de W , los símplices críticos de f y \widehat{f} son los mismos excepto $\sigma^{(p+1)}$ y $\tau^{(p)}$, que son críticos para f y no lo son para \widehat{f} .

Obsérvese que el teorema anterior no es constructivo, en el sentido de que no proporciona la nueva función de Morse \widehat{f} , únicamente garantiza su existencia. Por esta razón es importante trasladar el problema de reducir el número de símplices críticos al diagrama de Hasse y tratar de solucionarlo en este nuevo contexto.

Sabemos que todo camino gradiente asociado a una función de Morse definida sobre un complejo M induce un camino alternado en el diagrama de Hasse $H(M)$. Además, si dicho camino gradiente comienza y termina en dos símplices críticos de dimensiones consecutivas, el camino alternado es de aumento, ya que los vértices inicial y final no están en aristas del emparejamiento inducido por f .

Definición 4.1.3. Sea G un grafo sobre el que está definido un emparejamiento E . Si consideramos un camino alternado de aumento, γ , se define una transferencia sobre γ como el proceso que cambia la pertenencia a E de cada una de las aristas de γ , sin modificar el resto de las aristas del grafo.

Al hacer una transferencia sobre un camino alternado de aumento, obtenemos un nuevo emparejamiento sobre el grafo G , que denotaremos \bar{E} . La demostración de esta afirmación es inmediata teniendo en cuenta que E es un emparejamiento, que los vértices inicial y final del camino están fuera del emparejamiento, y que sólo se ven afectados las aristas de dicho camino.

Obsérvese, por otra parte, que una transferencia sobre un camino alternado de aumento incrementa en una unidad el número de aristas del emparejamiento \bar{E} respecto al emparejamiento inicial E .

Además, el efecto que tiene una transferencia sobre el camino alternado de aumento en el que la realizamos es que obtenemos un nuevo camino alternado, aunque éste último no es de aumento, puesto que los vértices inicial y final están en aristas del nuevo emparejamiento \bar{E} .

El siguiente teorema traslada el resultado de cancelación de puntos críticos de Forman (Teorema 4.1.1) al diagrama de Hasse modificado.

Teorema 4.1.2. *El Teorema 4.1.1 es equivalente al siguiente enunciado:*

Sea E un emparejamiento acíclico de $H_E(M)$ y sean v y w dos vértices de $H_E(M)$ de niveles consecutivos, tales que existe un único camino alternado γ que los une y que no están en ninguna arista de E . Se verifica que existe un nuevo emparejamiento \bar{E} que coincide con E fuera del camino γ y tal que v y w están en aristas de \bar{E} .

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, en virtud de la Proposición 3.1.6, sabemos que el único camino gradiente que une dos símplexes de M induce un camino alternado γ en $H_f(M)$. Además, como dichos símplexes son críticos, los vértices correspondientes v y w no están en ninguna arista del emparejamiento E inducido por f en $H_f(M)$. Por tanto, el camino alternado γ es de aumento.

A continuación, realizando una transferencia sobre γ , obtenemos un nuevo emparejamiento, \bar{E} , que coincide con E fuera de γ . Dado que los vértices v y w corresponden a dos símplexes críticos de f en M , estos no estarán en ninguna arista de E y de este modo, al realizar la transferencia en γ , dichos vértices sí están en aristas de \bar{E} . Como E proviene de una función de Morse discreta, este emparejamiento es acíclico, y por coincidir con E , \bar{E} es también acíclico fuera de γ . Teniendo en cuenta que al realizar una transferencia en γ no generamos ningún ciclo orientado en $H_{\bar{E}}(M)$, \bar{E} es también acíclico en $H(M)$. En virtud del Teorema 3.1.3, \bar{E} es el emparejamiento inducido por una función de Morse discreta definida sobre M , cuyos símplexes correspondientes a los vértices v y w no son críticos y los demás símplexes, tanto los correspondientes a los restantes vértices de γ como los correspondientes a vértices de fuera de γ , tienen el mismo carácter que tenían para E . Así, hemos llegado al resultado enunciado.

Recíprocamente, si suponemos que el enunciado es cierto, usando el Teorema 3.1.3, el emparejamiento acíclico E proviene de una función de Morse discreta definida sobre el complejo M para la que los símlices correspondientes a los vértices v y w son críticos, ya que no están en ninguna arista de E . Por ello, el camino alternado γ que une v y w es de aumento. Al pasar al complejo M , γ induce un único camino gradiente uniendo los símlices correspondientes a v y w . De esta forma estamos en las hipótesis del Teorema 4.1.1. Al realizar una transferencia en γ , obtenemos un nuevo emparejamiento \bar{E} , sobre $H(M)$, tal que es acíclico, pues sólo cambian las aristas de γ y, en particular, v y w están en aristas de \bar{E} . La construcción de \bar{E} en función de E nos garantiza que \bar{E} es acíclico y, por tanto, está inducido por una función de Morse discreta que tiene los mismos símlices críticos que la inicial, excepto los correspondientes a v y w . □

Hemos descrito un procedimiento para cancelar símlices críticos que puede realizarse directamente sobre el complejo, o de manera equivalente, sobre el diagrama de Hasse. En este sentido, hemos mencionado ya el interés que tiene, fijado un complejo simplicial y una función de Morse discreta sobre éste, eliminar la mayor cantidad posible de símlices críticos. La cuestión ahora es determinar cuándo termina este proceso, es decir, cuándo hemos alcanzado el número mínimo de símlices críticos o de manera equivalente, cuando hemos conseguido un emparejamiento máximo acíclico en el diagrama de Hasse del complejo.

En primer lugar, en virtud de la igualdad entre el número de vértices que quedan fuera de un emparejamiento acíclico en el diagrama de Hasse y el número total de símlices críticos de f en M , se tiene que:

Lema 4.1.1. Sea M un complejo simplicial finito sobre el que está definida una función de Morse discreta f . Sean s el número total de símlices de M y m_i el número de i -símlices críticos de f en M . Se verifica que $s - \sum m_i$ es un número entero par.

DEMOSTRACIÓN. Hemos visto que toda función de Morse discreta f definida sobre un complejo simplicial M induce un emparejamiento en $H_f(M)$, tal que los pares de vértices emparejados se corresponden con pares de símlices no críticos de f en M . Por definición de emparejamiento, sabemos que todas

sus aristas son disjuntas dos a dos y, por tanto, el número de símlices no críticos de f sobre M , es decir, $s - \sum m_i$, es par. □

Lema 4.1.2. *Sea M un complejo simplicial finito de dimensión n y sea $b_i = \dim(H_i(M))$ con $i = 0, \dots, n$. Se verifica que $s - \sum b_i$ es un número par.*

DEMOSTRACIÓN. Es sabido que si $\chi(M)$ es la característica de Euler-Poincaré de M entonces

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i s_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i,$$

donde s_i denota el número de i -símlices de M . En consecuencia,

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i b_i - \sum_{i=0}^n (-1)^i s_i = 0.$$

Por otro lado, se tiene que

$$s - \sum_{i=0}^n b_i = s_0 + s_1 + \dots + s_n - b_0 - b_1 - \dots - b_n.$$

Sumando miembro a miembro las dos últimas igualdades se deduce:

$$s - \sum_{i=0}^n b_i = \sum_{i=0}^n (1 + (-1)^i) s_i - \sum_{i=0}^n (1 + (-1)^i) b_i.$$

Por tanto

$$s - \sum_{i=0}^n b_i = 2s_0 + 2s_2 + \dots + 2s_k - 2b_0 - 2b_2 - \dots - 2b_k,$$

donde k es n ó $n - 1$, según n sea par o impar. □

Proposición 4.1.1. *Bajo las hipótesis del Lema 4.1.1, se verifica que el número de aristas de un emparejamiento acíclico en $H_f(M)$ es*

$$\frac{s - \sum m_i}{2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sabemos, por el Teorema 3.1.3, que los vértices correspondientes a símlices críticos son precisamente aquéllos que no están en ninguna arista del emparejamiento inducido por f . Por ello, las aristas de dicho emparejamiento son las que unen pares de vértices no críticos de M . Así, para calcular su número basta con considerar, del total de los vértices de $H_f(M)$ (que coincide con el número de símlices de M), los vértices correspondientes a símlices no críticos, $s - \sum m_i$ y, de éstos considerar sólo la mitad, ya que cada par aporta una arista del emparejamiento. □

Corolario 4.1.1. *Bajo las hipótesis del Lema 4.1.1, se verifica que*

$$\frac{s - \sum m_i}{2} \leq \frac{s - \sum b_i}{2}.$$

En consecuencia, el número máximo de aristas de un emparejamiento acíclico del diagrama de Hasse de un complejo es

$$\frac{s - \sum b_i}{2}.$$

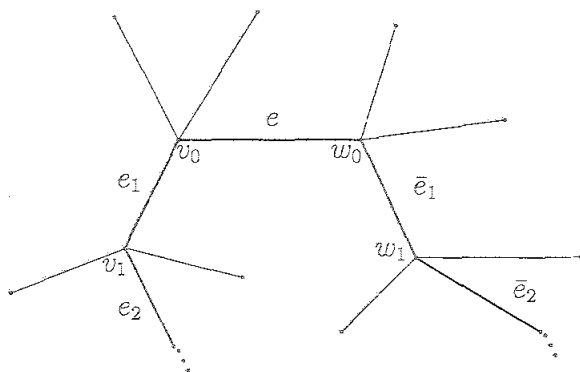
DEMOSTRACIÓN. Por las desigualdades de Morse se tiene que $m_i \geq b_i$. Por tanto, $-\sum m_i \leq -\sum b_i$ y de aquí el resultado. □

4.2 Funciones de Morse minimales en grafos infinitos.

Hemos visto mediante las desigualdades de Morse, que la topología de un complejo simplicial determina las funciones de Morse más sencillas definidas sobre éste. De manera más precisa, nos indican, fijado un complejo simplicial, el número mínimo de símlices críticos que ha de tener una función de Morse sobre tal complejo. Además, hemos estudiado un procedimiento de cancelación de símlices críticos, que aplicado sucesivas veces a una función de Morse discreta cualquiera definida sobre un complejo simplicial, nos da una función de Morse lo más sencilla posible en el sentido anterior. A la vista de todo lo estudiado, y centrándonos en el caso de los grafos, parece que existen dos tipos de símlices críticos: aquellos que pueden ser cancelados y aquellos que no pueden serlo. Precisemos estas ideas.

Lema 4.2.1. *Sea G un 1-complejo sobre el que está definida una función de Morse discreta f . Se tiene que el número de caminos gradientes que parten de una arista crítica de f en G es dos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea e una arista crítica de f en G y sean v_0 y w_0 sus dos vértices. Por definición, se tiene que $f(e) > f(v_0)$ y $f(e) > f(w_0)$. En cada uno de estos vértices se tienen dos posibilidades: que dicho vértice sea crítico o que no lo sea. Si lo es, el camino gradiente que parte de ese vértice se reduce al formado por dicho vértice y la arista e . Si no lo es, existe una única arista e_1 incidente con e en v_0 (resp., \bar{e}_1 en w_0) tal que $f(e_1) \leq f(v_0)$ (resp., $f(\bar{e}_1) \leq f(w_0)$). Para que f sea de Morse, el otro vértice de e_1 , v_1 (resp., de \bar{e}_1 es w_1), ha de verificar que $f(e_1) > f(v_1)$ (resp., $f(\bar{e}_1) > f(w_1)$). De nuevo hay que saber si v_1 (resp., w_1) es o no es crítico. Si lo es, el camino gradiente termina en él y si no, repetimos la construcción. Este proceso puede no acabar en el caso de los grafos infinitos, ya que al recorrer un rayo crítico tenemos decrecimiento sin encontrar ningún vértice crítico en el que finalice el camino gradiente. En cualquier caso, hemos construido dos caminos gradientes partiendo de e , uno que comienza en v_0 y el otro en w_0 , y hemos visto que son los únicos que salen de e .



□

En el caso más general, es decir, cuando G es un grafo infinito se plantean tres posibilidades para los dos caminos gradientes de la demostración anterior:

1. Ambos se dirigen a dos vértices críticos.

2. Ambos se dirigen a dos rayos decrecientes.
3. Uno de ellos se dirige a un vértice crítico y el otro a un rayo decreciente.

Además en cada una de las dos primeras posibilidades del apartado anterior, surgen dos opciones:

1. Si los caminos gradientes son finitos, ambos convergen en un mismo vértice crítico o se dirigen a dos vértices críticos distintos.
2. Si los caminos son infinitos, ambos pueden converger en un mismo rayo decreciente, para lo cual ha de existir un vértice de dicho rayo en el que los dos caminos gradientes convergen y, a partir del cual ambos coinciden con el rayo, o dichos caminos pueden dirigirse a dos rayos decrecientes distintos.

Teniendo en cuenta todos estos casos, vamos a definir la noción de arista y vértice cancelables:

Definición 4.2.1. Sea G un 1-complejo sobre el que está definida una función de Morse discreta f , y sea e una arista crítica de f . Se dirá que e es una arista cancelable si los dos caminos gradientes que parten de e se dirigen a dos vértices críticos distintos, dos rayos decrecientes distintos, o uno a un vértice crítico y el otro a un rayo decreciente.

En esta situación, el vértice crítico o rayo decreciente conectado con e , también se dirá vértice o rayo cancelable. Además, si un vértice crítico pertenece a un rayo creciente, también se dirá que es un vértice cancelable.

En caso contrario, es decir, si los dos caminos gradientes que parten de e se dirigen a un mismo vértice crítico o rayo decreciente, se dirá que e es una arista no cancelable o esencial. El correspondiente vértice (siempre que no esté en ningún rayo creciente) o rayo decreciente se llamará también no cancelable.

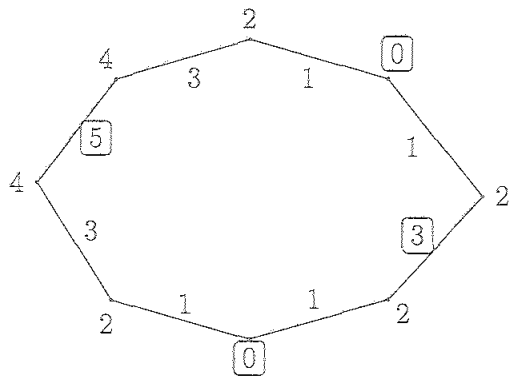
Hay que destacar que la noción de símplice cancelable deriva directamente del Teorema 4.1.1 que además proporciona el procedimiento de cancelación, ya que esta definición lleva implícita la hipótesis fundamental de dicho teorema: la unicidad del camino gradiente entre la arista crítica e y cada uno

de los correspondientes vértices o rayos críticos. También conviene insistir en que la cualidad de ser cancelable va asociada a pares de símplexes críticos.

Los árboles constituyen un ejemplo particularmente sencillo de aplicación de la definición anterior. En efecto, dado que dos vértices cualesquiera de un árbol están unidos por un único camino, en este caso toda arista crítica es cancelable.

También toda arista crítica e que sea puente es cancelable, ya que su eliminación desconecta G , y por tanto los dos caminos gradientes que parten de e no pueden converger.

Sin embargo, el recíproco no es cierto, como muestra la siguiente figura:



donde aparecen recuadrados los vértices y aristas críticos.

Este mismo ejemplo es de utilidad para comprobar cómo el proceso de cancelación se estructura en pasos. En efecto, una vez que se han identificado los vértices y aristas cancelables, puede cancelarse cualquier par vértice-arista. Ello da lugar a una nueva función de Morse con un vértice y una arista crítica menos que la inicial, y hay que estudiar si puede repetirse la cancelación.

En la definición anterior se ha añadido un caso aparte al considerar la noción de vértice crítico cancelable: aquéllos que pertenecen a un rayo creciente. La idea es que dado un vértice crítico que pertenece a un rayo creciente, éste es cancelable ya que basta con cambiar la monotonía del rayo,

es decir, hecer que pase de creciente a decreciente. Ello provoca que dicho vértice deje de ser crítico, y traslada este carácter al final del rayo. De esta forma, tenemos ahora un rayo crítico en vez de un vértice crítico.

Veamos ahora cómo las aristas críticas no cancelables están, en cierto sentido, determinadas por la topología del grafo en el que está definida la función de Morse discreta.

Proposición 4.2.1. *Sea G un 1-complejo conexo tal que $b_1 = \dim H_1(G) < +\infty$ sobre el que está definida una función de Morse discreta f . Si e es una arista crítica no cancelable de f en G , entonces existe un árbol maximal T en G tal que $e \in T$ y $e + \widehat{vw}$ es un ciclo fundamental de $H_1(G)$, donde \widehat{vw} es el único camino que en T une un vértice borde de e , v , con el otro, w .*

DEMOSTRACIÓN. Usando el Teorema 2.3.1 y la Proposición 2.3.4, sabemos que en todo grafo conexo con $b_1 < +\infty$ existe un bosque maximal T obtenido eliminando las aristas críticas de f . Como en nuestro caso sólo vamos a considerar las aristas críticas no cancelables y, dado que, por definición, son aquellas que están conectadas a un mismo vértice o rayo crítico por dos caminos gradientes distintos, al eliminarlas no desconectamos G y, por tanto, el bosque maximal T es conexo, es decir, es un árbol maximal.

Por otra parte, es conocido que existe una biyección entre los ciclos fundamentales de $H_1(G)$ y las aristas que no están en un árbol maximal de G [31]. Si aplicamos este resultado al árbol T , tenemos que cada arista crítica no cancelable de f en G define un ciclo fundamental de $H_1(G)$ que es, precisamente, el que se obtiene al unir e con los dos caminos gradientes distintos que unen e con el mismo vértice o rayo crítico; es decir, dicho ciclo se construye uniendo e con el único camino que en T une los vértices borde de $e + \widehat{vw}$. \square

Puede ocurrir que un ciclo fundamental de G no contenga ninguna arista crítica no cancelable, como muestra la figura anterior. Sin embargo, si la contiene, ésta es única y determina dicho ciclo. Por tanto, el proceso sucesivo de cancelación de simplices críticos que conduce a la obtención de una función de Morse discreta con la menor cantidad posible de simplices críticos, consiste esencialmente en redefinir la función de manera que en cada ciclo tenga una única arista crítica no cancelable. Al completar este proceso, hemos eliminado todas las aristas críticas cancelables del grafo y sólo permanecen las

no cancelables. Al estar éstas en biyección con los ciclos fundamentales del grafo, su número es $b_i = \dim H_i(G)$. Así, hemos conseguido una función de Morse discreta que alcanza uno de los mínimos fijados por las desigualdades de Morse.

Por otra parte, la hipótesis de conexión no es esencial. Si el grafo G no fuera conexo, puede razonarse de igual modo en cada componente conexa.

Hemos aludido en varias ocasiones a la noción de función de Morse discreta lo más sencilla posible, es decir, con la menor cantidad posible de símplices críticos. Definamos este concepto de un modo más preciso.

Definición 4.2.2. *Sea G un 1-complejo sobre el que está definida una función de Morse discreta f . Se dirá que f es una función de Morse minimal sobre G si alcanza los mínimos fijados por las desigualdades de Morse ordinarias o generalizadas. Es decir, si $m_i(f) = b_i$ con $i = 0, 1$ en el caso finito y $m_0 + d_0 = b_0$ y $m_1 = b_1$ en el caso infinito.*

Así pues, si G es conexo y finito, f es minimal si y sólo si $m_0(f) = 1$ y $m_1(f) = b_1$. Por otro lado, si G es conexo e infinito, f es minimal si y sólo si $m_0 = 0$ y $m_1 = b_1$.

Al explicitar la definición anterior en el caso infinito, se afirma que las funciones minimales carecen de vértices críticos. Ello equivale a afirmar que no existan mínimos de f sobre G y por tanto, surge de nuevo el concepto de rayo crítico.

Veamos ahora que en el caso infinito, los grafos conexos sobre los que está definida una función de Morse discreta minimal contienen un único rayo crítico.

Proposición 4.2.2. *Sea G un 1-complejo conexo infinito sobre el que está definida una función de Morse discreta f . Se verifica que si f es minimal entonces G contiene un único rayo crítico, es decir, $d_0 = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Aplicando las desigualdades de Morse generalizadas se tiene que $m_0 + d_0 - m_1 = b_0 - b_1$. Dado que f es minimal, sustituimos $m_0 = 0$, $m_1 = b_1$ y por ser G conexo, $b_0 = 1$. De todo ello se deduce que $d_0 = 1$.

□

En general, la ausencia de vértices críticos en un grafo infinito conexo sobre el que está definida una función de Morse discreta, implica que $d_0 \geq 1$.

Veamos ahora que para caracterizar las funciones de Morse minimales definidas sobre grafos infinitos basta con imponer una de los dos condiciones mencionadas, es decir, basta con controlar o bien el número de vértices críticos, o bien el número de aristas críticas.

Lema 4.2.2. *Sea G un 1-complejo conexo tal que $b_1 < +\infty$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

- (i) f es una función de Morse discreta minimal definida sobre G .
- (ii) $m_0(f) = 0$ y $d_0 = 1$ si G es infinito, y $m_0(f) = 1$ si G es finito.
- (iii) $m_1(f) = b_1$ y $d_0 = 1$ si G es infinito, y $m_1(f) = b_1$ si G es finito.

DEMOSTRACIÓN. (ii) se deduce directamente de (i) a partir de la definición de función de Morse discreta minimal y de la proposición anterior.

Ahora, si se verifica (ii), en el caso de que G sea infinito, aplicando las desigualdades de Morse generalizadas sabemos que $m_0 + d_0 - m_1 = b_0 - b_1$. Como $b_0 = 1$, $m_0(f) = 0$ y $d_0 = 1$, se tiene que $m_1(f) = 0$.

Si G es finito, aplicando las desigualdades de Morse, sabemos que $m_0 - m_1 = b_0 - b_1$. Como $b_0 = 1$ y $m_0 = 1$, se tiene que $m_1 = b_1$.

Finalmente, si partimos de (iii), en el caso infinito, las desigualdades de Morse generalizadas implican que $m_0 = 0$. Por tanto, no existe ningún vértice crítico de f en G . Dado que por hipótesis ya sabemos que $m_1(f) = b_1$, se verifica que f es minimal en G .

Por último, si G es finito, aplicando las desigualdades de Morse se tiene que $m_0 = 1$.

□

De la demostración del lema anterior se deduce la siguiente consecuencia:

Corolario 4.2.1. *Sea f es una función de Morse discreta minimal definida sobre un 1-complejo G . Se tiene que $m_0(f)$ coincide con el número de componentes conexas finitas de G y d_0 coincide con el número de componentes conexas infinitas de G .*

DEMOSTRACIÓN. Según hemos visto en la demostración del lema anterior, si f es minimal sobre G , al aplicar las desigualdades de Morse y teniendo en cuenta que $m_1(f) = b_1$, entonces $m_0(f) + d_0 = b_0$, es decir, el número total de componentes conexas de G ha de coincidir con la suma del número de vértices críticos de f en G y el número de rayos críticos de f en G . En cada componente conexa podemos aplicar el lema anterior, es decir, si ésta es finita, se tiene que la restricción de f a dicha componente tiene un único vértice crítico, y evidentemente no posee ningún rayo crítico. En el otro caso, si la componente conexa considerada es infinita, la restricción de f a ésta tiene un único rayo crítico y carece de vértices críticos. Por todo ello, en la expresión anterior cada componente conexa finita aporta un vértice crítico y cada componente infinita aporta un rayo crítico. □

Corolario 4.2.2. *Sea G un 1-complejo conexo sobre el que está definida una función de Morse discreta f tal que $m_1(f) = b_1$. Se tiene que, o bien existe un único vértice crítico de f en G , o bien existe un único rayo crítico de f en G .*

DEMOSTRACIÓN. Dado que G es conexo y que $m_1(f) = b_1$, se tiene que $m_0 + d_0 = 1$. De ésta última expresión se deduce que, o bien existe un único vértice crítico, o un único rayo crítico. □

La nociones de símplice cancelable y de función de Morse discreta minimal tienen una estrecha relación, como muestra el siguiente resultado.

Proposición 4.2.3. *Sea G un 1-complejo tal que $b_1 < +\infty$, sobre el que está definida una función de Morse discreta f . Se tiene que f es una función de Morse minimal sobre G si y sólo si todos sus vértices y aristas críticos son no cancelables.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f es minimal. Por definición, esto equivale afirmar que $m_1(f) = b_1$. Además, aplicando el corolario anterior, tenemos que $m_0(f)$ coincide con el número de componentes conexas finitas de G . Razonando de manera independiente en cada componente conexa, podemos suponer sin pérdida de generalidad que G es conexo. Bajo este supuesto se plantean dos posibilidades:

En primer lugar, si G es infinito y conexo, sabemos en virtud del Lema 4.2.2 que una función de Morse minimal sobre G carece de vértices críticos, tiene tantas aristas críticas como ciclos independientes y posee un único rayo crítico. La inexistencia de vértices críticos implica que dada una arista crítica de G , los dos caminos gradientes que parten de ella se dirigen a un mismo rayo crítico, el único que existe y, por tanto, que toda arista crítica de G es no cancelable.

Por otra parte, si G es finito y conexo, una función de Morse minimal sobre G tiene un único vértice crítico y tantas aristas críticas como ciclos independientes. La unicidad del vértice crítico implica que todos los pares de caminos gradientes que parten de cada arista crítica se dirigen a dicho vértice. Dada una arista crítica cualquiera de G , los dos caminos gradientes que parten de ella se dirigen al único vértice crítico y, por tanto, toda arista crítica de G es no cancelable y, evidentemente, tampoco lo es el único vértice crítico.

Recíprocamente, supongamos que todos los vértices y aristas críticos de una función de Morse discreta f definida sobre G son no cancelables. Sabemos, por la Proposición 4.2.1, que las aristas críticas no cancelables de f están en biyección con los ciclos independientes de G . Por tanto, dado que todas las aristas críticas f son no cancelables, $m_1(f) = b_1$. Al igual que en la implicación anterior, tenemos que distinguir dos casos:

Si G es un grafo infinito, entonces existe un único rayo crítico de f en G y, además, no existe ningún vértice crítico de f en G . En efecto, recordemos que, en la Proposición 2.3.4, para construir el bosque de árboles gradientes bastaba con eliminar las aristas críticas de f en G . En este caso, dado que $m_1 = b_1$, se tiene que cada arista crítica de f en G viene determinada por un ciclo independiente de G . De esta forma, al eliminarlas no perdemos la conexión y obtenemos un único árbol gradiente. Por tanto, existen dos posibilidades mutuamente excluyentes: o bien existe un único vértice crítico de f en G , o bien existe un único rayo crítico de f en G . En cualquiera de los dos casos, el vértice o rayo crítico es el elemento de G hacia el que convergen todos los caminos gradientes (finitos o infinitos). Veamos que, usando las hipótesis, la primera posibilidad no puede darse. Supongamos que $m_0(f) = 1$ y $d_0 = 0$. Por ser G infinito y poseer un único vértice crítico, que es el mínimo global de f en G , existirá al menos un rayo creciente de f en G partiendo de

dicho vértice, que podemos encontrar fácilmente al eliminar todas las aristas críticas de f en G . Ello implica, en virtud de la definición de símplice crítico cancelable, que dicho vértice es cancelable, y ello va en contradicción con la hipótesis de que todos los vértices y aristas de G son no cancelables. Por todo ello, se tiene que $m_0(f) = 0$, $m_1(f) = b_1$ y $d_0 = 1$. En consecuencia, hemos probado que f es minimal en G .

Finalmente, si G es un grafo finito, dado que es conexo y $m_1(f) = b_1$, aplicando el Lema anterior se deduce que f es minimal.

□

El resultado anterior es de utilidad para determinar cuándo debe concluir el proceso de cancelación sucesivo para la obtención de una función de Morse minimal. En efecto, acabamos de justificar que *dicho proceso debe finalizar cuando todos los vértices y aristas críticos de un grafo dado sean no cancelables*.

A continuación pasamos a probar un resultado que garantiza bajo ciertas restricciones, la existencia de una función de Morse discreta minimal para un grafo infinito.

Proposición 4.2.4. *Si G es un 1-complejo infinito y conexo tal que $b_1 < +\infty$, entonces existe una función discreta de Morse minimal sobre G .*

DEMOSTRACIÓN. Por la definición de función de Morse minimal, tenemos que probar que $m_0(f) = 0$ y $m_1(f) = b_1$. El Teorema 1.3.1 prueba de manera constructiva que dado un árbol infinito T , es posible definir una función de Morse discreta sin puntos críticos sobre T . Dado que G es conexo, consideremos un árbol maximal T en G . Definamos sobre T una función de Morse discreta f sin puntos críticos de la manera que nos indica la prueba de dicho Teorema. Como tenemos que $b_1 < +\infty$, para completar T hasta obtener G basta con adjuntar una cantidad finita de aristas, las que determinan los ciclos independientes de G . Extenderemos f sobre éstas de modo que sean aristas críticas de f en G , y para ello basta con hacer que sean máximos locales de f en G . La función de Morse discreta así definida carece de vértices críticos, tiene un único rayo crítico y posee tantas aristas críticas como ciclos independientes tiene G , es decir, es minimal en G .

□

La proposición anterior tiene una versión análoga para el caso finito. Si G es un 1-complejo finito y conexo, es posible definir sobre G una función de Morse discreta f tal que $m_0(f) = 1$ y $m_1(f) = b_1$. La demostración de este resultado es similar a la del caso infinito. Se trata de fijar un vértice cualquiera de G , v_0 , que será el mínimo global de f en G y el único vértice crítico de f en G . A continuación, fijamos un árbol maximal T en G y definimos f sobre T de modo que v_0 sea el mínimo global y a partir de él todos los caminos sean crecientes. Para completar la definición de f sobre todo el grafo G , basta con definir f sobre las aristas que no están en T como máximos locales de f en G . De este modo hemos obtenido una función de Morse discreta f definida sobre G que tiene un único vértice crítico y tantas aristas críticas como ciclos independientes tiene G . En consecuencia, f es minimal sobre G .

Por otra parte, la hipótesis de conexión no es esencial. Si la eliminamos, obtenemos un resultado análogo teniendo en cuenta que en cada componente conexa debemos actuar de un modo u otro según ésta sea finita o infinita.

En la práctica, es de utilidad señalar que el proceso de obtención de una función de Morse discreta minimal a partir de una función de Morse cualquiera mediante la cancelación de pares de simplices cancelables, no se lleva a cabo de manera simultánea, es un proceso paso a paso. En efecto, una vez que se han identificado los vértices y aristas cancelables, puede cancelarse cualquier par vértice-arista de este tipo, dando lugar a una nueva función de Morse con un vértice y una arista crítica menos que la inicial y, que habrá que estudiar para determinar cuáles son sus vértices y aristas cancelables, de modo que pueda repetirse la cancelación de un par cancelable de ésta. Así, aunque a priori dispongamos de una función de Morse discreta definida sobre un grafo con varios pares de simplices cancelables, ello no significa que para obtener una función de Morse minimal hay que cancelarlos todos. En el primer paso sólo podemos cancelar un único par, y a partir de aquí se trabaja con una nueva función de Morse.

Capítulo 5

Construcción de funciones de Morse discretas en superficies infinitas.

Este capítulo tiene por objetivo desarrollar un método para definir funciones de Morse discretas sobre un tipo especial de 2-complejo simplicial infinito: las superficies conexas no compactas.

En principio, el problema de definir una función de Morse discreta sobre 2-complejos infinitos presenta una dificultad mayor que la definición de funciones de Morse sobre 1-complejos. En efecto, al aumentar en una unidad la dimensión del complejo, pasamos a disponer de tres tipos de símlices atendiendo a su dimensión y, aunque a nivel de vértices y triángulos la situación es comparable al caso de los 1-complejos, el hecho de que las aristas sean símlices de dimensión intermedia (que no existían en el caso de los 1-complejos), hace que sobre éstas sea necesario tener en cuenta, tanto sus vértices borde, como los triángulos a los que pertenece.

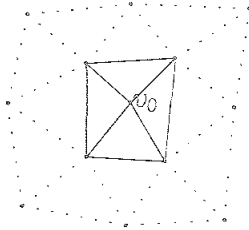
5.1 Un método de definición.

En primer lugar, y con idea de definir una función de Morse discreta en una superficie conexas y no compacta S de manera inductiva, vamos a expresarla como la unión de una familia creciente y numerable de subcomplejos finitos.

es decir,

$$S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n,$$

donde K_n es un subcomplejo finito de S , y $K_n \subseteq K_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta familia de compactos se construirá del siguiente modo: Al situarnos en un vértice cualquiera v_0 de S , tomaremos como K_1 la estrella cerrada de v_0 , es decir, el menor subcomplejo cerrado de S que contiene a todas las aristas y triángulos de los que v_0 es cara. La siguiente figura muestra la estrella cerrada del vértice v_0 con trazo continuo.



Para definir el resto de los subcomplejos K_n , basta con realizar un "en-gorde" sucesivo de K_1 , es decir, K_2 es la estrella cerrada de K_1 , o lo que es lo mismo, el menor subcomplejo cerrado de S que contiene a todas las aristas y triángulos de los que algún símplice de K_1 es cara. En general, tomaremos como K_n la estrella cerrada de K_{n-1} y por tanto, tenemos que

$$K_1 = \overline{st}(v_0, S) \quad \text{y} \quad K_n = \overline{st}(K_{n-1}, S),$$

donde $\overline{st}(A, S)$ denota a la estrella cerrada del subcomplejo A en S , es decir, el menor subcomplejo cerrado que contiene a todos las aristas y triángulos de los que algún símplice de A es cara.

Una vez que S está expresada de esta manera, pasamos a definir una función de Morse discreta f sobre S mediante la definición sucesiva de ésta en cada K_n .

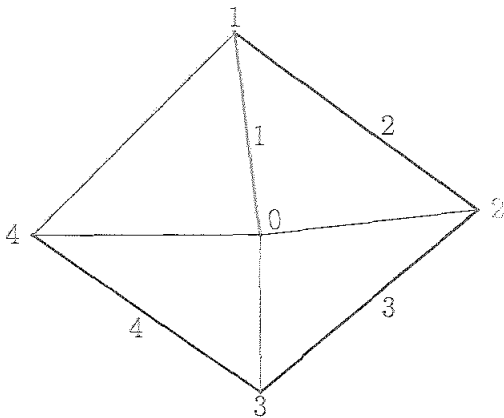
El procedimiento es el siguiente:

Dado K_1 , se construye en éste un árbol maximal T_1 de su 1-esqueleto partiendo del vértice v_0 . Para ello puede utilizarse cualquiera de los métodos

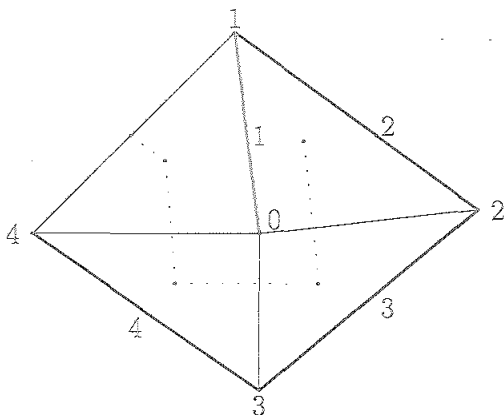
de construcción de árboles maximales disponibles, por ejemplo, el método de búsqueda en profundidad [22]. Dicho método consiste en dar una ordenación de los vértices de K_1 , situarse en el vértice inicial v_0 y considerar la arista e_1 que une dicho vértice con el menor posible en la ordenación fijada, denotado por v_{01} . De nuevo, repetimos este procedimiento para v_{01} , obteniendo la arista e_2 que lo une con el vértice v_{02} , y seguimos el procedimiento hasta llegar a un vértice en el que no sea posible agregar ninguna arista, siempre asegurándonos en cada paso que no se creen ciclos. En este punto, retrocedemos al penúltimo vértice visitado, y vemos si además de la arista considerada, es posible agregar alguna otra. Si es así, la agregamos y continuamos el razonamiento anterior aplicado al nuevo vértice extremo. El proceso termina una vez que hemos visitado todos los vértices de K_1 .

Una vez construido T_1 , definimos sobre él una función de Morse discreta del siguiente modo:

Definimos $f(v_0) = 0$ y consideramos la arista e_1 de T_1 donde el subíndice i queda determinado por la ordenación de los vértices K_1 que exige la búsqueda en profundidad para la construcción de T_1 . Hacemos $f(e_1) = 1 = f(v_{01})$ y, en general, $f(e_i) = i = f(v_{0i})$ con $i = 1, \dots, n$, donde v_{0i} denota el vértice de la arista e_i sobre el que a f aún no se le ha asignado valor en el i -ésimo paso de la búsqueda en profundidad. Como T_1 es finito, tras un número finito de pasos se consigue definir f sobre todo T_1 . La siguiente figura muestra un ejemplo de este proceso:



Para completar la definición de f en todo K_1 , vamos a definir el grafo complementario de T_1 en K_1 , que denotaremos por D_1 . Cada vértice de este grafo corresponde a un triángulo de K_1 o a una arista borde de K_1 , es decir, que está en un único triángulo de K_1 , que no pertenece a T_1 y se establece una arista entre dos vértices de D_1 si éstos representan dos triángulos que comparten una arista o un triángulo y una arista borde que es cara de éste y no está en T_1 . En el ejemplo anterior, D_1 es el grafo destacado en trazo discontinuo en la siguiente figura:



Una vez construido el grafo D_1 , pasamos a definir sobre éste una función siguiendo el siguiente procedimiento. En primer lugar, definimos el grado de un vértice correspondiente a un triángulo como el número de aristas que son cara de éste y a las que aún no se les ha asignado valor. Dado que S es una superficie, este valor puede oscilar entre 0 y 3. Son de especial interés para nuestro estudio los vértices de grado 1, es decir, los que corresponden a triángulos con una única arista no asignada, ya que sobre éstos comenzaremos a definir la función mencionada. Una vez localizados todos los vértices de grado 1 de D_1 , denotados por w_1, \dots, w_m , elegimos cualquiera de ellos, por ejemplo w_1 , y definimos f en w_1 como $n + 1$, donde n es el máximo valor alcanzado por f en T_1 . Si damos el mismo valor al vértice correspondiente a la única arista no asignada del triángulo correspondiente al vértice w_1 , denotada por a_1 , tenemos por tanto, $f(w_1) = n + 1 = f(a_1)$. A continuación, se estudia el grado del siguiente vértice adyacente a w_1 en D_1 , denotado por w_{11} , ya que al haber asignado un valor de f a una de sus aristas, dicho grado ha disminuido en una unidad.

Si el grado es 1, repetimos el procedimiento, asignando tanto a w_{11} como a a_{11} , la única arista no asignada incidente con el triángulo correspondiente a w_{11} , el valor $n + 2$, es decir, $f(w_{11}) = n + 2 = f(a_{11})$.

Si el grado es 2 o superior, pasamos a otro de los vértices de grado 1 que inicialmente se localizaron en D_1 , por ejemplo w_2 , y repetimos para éste el mismo proceso que se ha llevado a cabo con w_1 hasta encontrar un vértice de grado mayor o igual a 2.

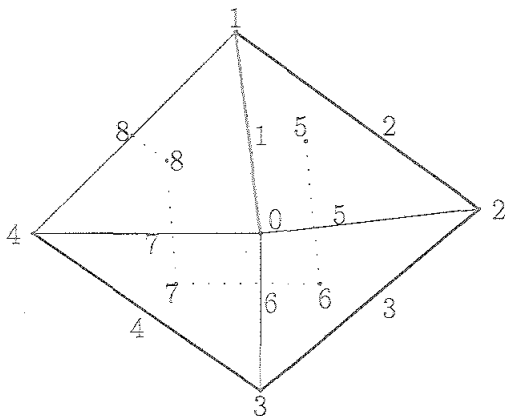
Una vez que se ha completado el proceso anterior partiendo de todos los vértices de grado 1, iniciales o que se crean al ir definiendo f sobre D_1 , tenemos dos posibilidades: o bien se ha completado la definición de f sobre D_1 y el proceso ha finalizado sobre K_1 , o bien aún quedan vértices y aristas no asignadas en D_1 .

Cuando ocurre esto último y, dado que ya no existen vértices de grado 1, se tiene que dichos vértices y aristas de grado al menos 2 forman ciclos en D_1 . En este caso se procederá del siguiente modo:

Consideremos un ciclo de los anteriores, es decir, un ciclo en D_1 formado por aristas y vértices no asignados. Dada una arista cualquiera a de dicho ciclo, de vértices w y w , hacemos $f(a) = m + 1$, donde m es máximo valor alcanzado por f hasta este momento. Una vez hecha esta asignación, el grado de w y v disminuye en una unidad, por lo que puede ser 1 ó 2. Si es 1, repetimos para éste el proceso descrito anteriormente y, si es 2, seguimos teniendo un ciclo de aristas y vértices no asignados, por lo que se repite el procedimiento que acabamos de describir.

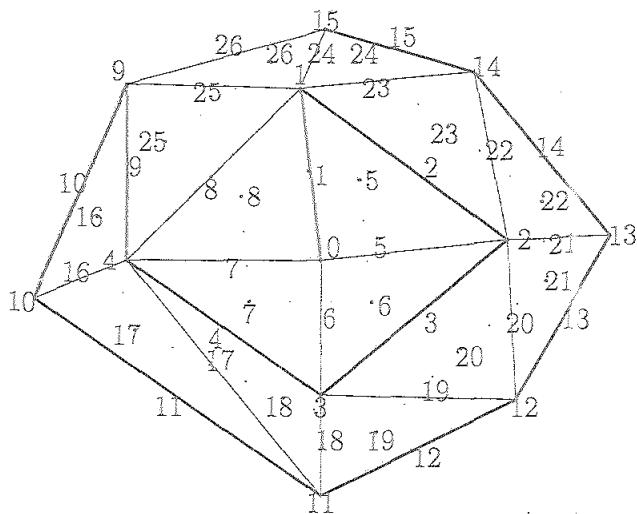
Conviene destacar que cada asignación destinada a eliminar los ciclos de aristas no asignadas produce una arista crítica de f en S .

Una vez que hemos conseguido que todos las aristas y vértices de aristas de D_1 tengan asignado valor para f y, dado que esta función ya está definida en todos los vértices y aristas de T_1 , tenemos que f está definida en todo K_1 . En la siguiente figura aparece f definida sobre todo K_1 .



Ahora extenderemos f a una función de Morse discreta sobre K_2 . En primer lugar, ampliaremos el árbol maximal T_1 hasta obtener un árbol maximal en K_2 , que se denotará por T_2 . Para ello, consideraremos T_1 fijado y nos situaremos en el último vértice visitado en éste, que será el vértice inicial al aplicar al 1-esqueleto de $K_2 - K_1$ el procedimiento de búsqueda en profundidad para la construcción de un árbol maximal. Una vez construido T_2 , pasamos a extender la definición de f a T_2 . Para ello, tomamos el máximo valor de f sobre K_1 , lo aumentamos en una unidad y lo asignamos tanto a la arista de $T_2 - T_1$ incidente con el último vértice visitado en T_1 , como al otro vértice de ésta. A partir de aquí definimos f en el resto de $T_2 - T_1$ de manera análoga a como se hizo para T_1 hasta recorrer todo el árbol T_2 .

Al tener definida f en todo T_2 , pasamos a construir D_2 , el grafo complementario de T_2 , de manera análoga a la construcción de D_1 , teniendo en cuenta que, como $T_1 \subset T_2$, se verifica que $D_1 \subset D_2$. Al igual que al definir f sobre D_1 , se buscarán los vértices de grado 1 de D_2 y continuaremos la definición de f por cualquiera de ellos, asignando al primer triángulo el valor máximo alcanzado por f en T_2 incrementado en una unidad. De esta forma, se completa la definición de f sobre todo K_2 . En la siguiente figura se muestra una extensión de f a K_2 .



Si repetimos este proceso para todo $n \in \mathbb{N}$, se consigue definir f en toda la superficie S . Ahora hay que justificar que el procedimiento anterior proporciona efectivamente una función de Morse discreta sobre S , y eso es precisamente lo que se hace en el siguiente resultado.

Teorema 5.1.1. *La función f descrita por el procedimiento anterior es una función de Morse discreta definida sobre la superficie infinita S .*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, sea v un vértice cualquiera de S . Si v es v_0 , se verifica por construcción de f que ésta es menor estrictamente sobre v_0 que sobre todas las aristas incidentes en él. La razón es que f se define de manera creciente, y dado que $f(v_0)$ es el primer valor, éste es el mínimo. Por otra parte, sea v es cualquier otro vértice de S . El procedimiento de construcción del árbol maximal T hace que éste visite todos los vértices de S , es decir, al menos una arista de dicho árbol ha de incidir en v . Precisamente, la arista que en el recorrido de construcción de T llega a v es la que verifica que f sobre ella coincide con el valor de f sobre v y, por tanto, siempre existirá una única arista e de T incidente en v de modo que $f(e) = f(v)$. Para la demás aristas incidentes en v , tanto de T como de su complementario, se tiene que f sobre ellas es estrictamente mayor que sobre v ya que, en uno u otro caso, el procedimiento de definición de f les asigna valores después de dárselo a v , lo que implica que éstos serán estrictamente mayores que $f(v)$, al ser un proceso creciente.

Por otro lado, dada e una arista cualquiera de S , se plantean dos posibilidades: que e esté en el árbol maximal T o que e esté en el complementario de T . Si $e \in T$, por construcción de este árbol, sabemos que uno sólo de sus dos vértices verifica que f sobre éste coincide con $f(e)$, siendo f mayor

estrictamente sobre e que sobre el otro vértice. Si e está en el complementario de T , se tiene que f es estrictamente mayor sobre e que sobre sus dos vértices. En efecto, al no estar e en T , la asignación de los valores de f sobre los dos vértices se ha hecho antes que la de $f(e)$, por tanto, al ser éste un proceso creciente, $f(e)$ es mayor estrictamente que los dos valores de f asignados previamente sobre sus dos vértices.

Al mismo tiempo, hemos de comparar los valores asignados a f sobre e y los triángulos de los que es cara. Como S es superficie, dada e , a lo más existen dos triángulos de los que es cara. De nuevo consideraremos dos posibilidades, que e esté o no en T . En el primer caso, si $e \in T$, entonces $f(e)$ es menor estrictamente que todos los valores de f sobre los triángulos de los que es cara. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ el primer natural tal que K_{n_0} contiene a e . Por el proceso de definición de f , sabemos que primero se asignan los valores de los vértices y aristas de $T_{n_0} - T_{n_0-1}$ y después se dan los valores de los triángulos y aristas de $K_{n_0} - K_{n_0-1}$. Al hacerse dicha asignación de manera creciente, necesariamente se tiene que $f(e)$ es estrictamente menor que los valores de f sobre todos los triángulos de los que e es cara. Para el segundo caso, si $e \notin T$, considerando el subcomplejo K_{n_0} en las mismas condiciones del caso anterior, se verifica que e ha de corresponder a uno de las aristas o vértices hoja de D_{n_0} . En consecuencia y a la vista del modo de definir f sobre D_{n_0} , se tiene que a lo más existe un único triángulo sobre el que f tiene el mismo valor que $f(e)$ (si e fuera una de las aristas de un ciclo de aristas y vértices no asignados en D_{n_0} a la que asignamos un valor para continuar con la definición de f , se tiene que $f(e)$ es estrictamente menor que los valores de f sobre los dos triángulos a los que pertenece).

Por último, dado un triángulo cualquiera τ de S , se verifica que existe una única arista e , cara de él, tal que $f(\tau) = f(e)$ y para la otras dos se tiene que $f(\tau)$ es estrictamente mayor que los valores de f sobre ambas. Probémoslo considerando los siguientes casos, atendiendo al número de aristas de τ que están en T :

Supongamos que dos de las aristas que son caras de τ están en T . En este caso, por el método de definición de T , se asigna tanto a τ como a la única arista de τ que no está en T el mismo valor para f . Respecto a las otras dos aristas, al haberles asignado su valor para f antes, en la construcción del T_n correspondiente, se tiene que $f(\tau)$ es mayor que los valores de f sobre ambas.

Consideremos ahora el caso de que sólo una de las aristas cara de τ esté en T . Por el proceso de definición de f , se tiene que sólo sobre una de las dos aristas de τ que no están en T , $f(\tau)$ coincide con el valor de f sobre esta arista. El valor de f en las otras dos aristas es menor que $f(e)$, ya que ambas han sido asignadas previamente, una por estar en T y la otra por preceder a τ en el recorrido por el correspondiente grafo complementario D_n .

Finalmente, si ninguna de las tres aristas caras de τ están en T , siguiendo el proceso de definición de f , asignaremos el valor de $f(\tau)$ cuando estén previamente asignados los valores de f sobre dos de sus aristas y posteriormente se asignará a la cara restante el mismo valor que a τ . Por tanto, de nuevo se tiene que al ser el proceso de asignación creciente, $f(\tau)$ es mayor estrictamente que los valores de f sobre dos de sus aristas y coincide con el valor de f en la tercera.

□

Por último, y a la vista de la prueba del teorema anterior, es posible determinar los simples críticos de f en S .

Corolario 5.1.1. *La función de Morse discreta f definida anteriormente posee un único vértice crítico, el vértice inicial v_0 , tantas aristas críticas como ciclos de aristas no asignadas independientes encontremos, y no tiene ningún triángulo crítico.*

DEMOSTRACIÓN. Basándonos en la demostración del teorema anterior, se tiene que para todo vértice v , excepto el inicial, existe una única arista e tal que $f(v) = f(e)$ y, en consecuencia, ninguno excepto v_0 es crítico.

Para estudiar las aristas críticas de S consideremos por separado las que están en T y las que no están en dicho árbol. Si una arista e está en T , sabemos que uno de sus vértices verifica que el valor de f sobre él coincide con $f(e)$, por tanto, ninguna de las aristas de T puede ser crítica. Por otra parte, si e no está en T , sabemos que en general siempre existirá un triángulo τ del que es cara tal que $f(\tau) = f(e)$, con una excepción: cuando dicha arista pertenezca a un ciclo de aristas no asignadas en D y no queden triángulos con una única arista no asignada. En este caso, el método de definición de f implica que, a una cualquiera de las aristas de dicho ciclo, se le asigna un valor para crear algún triángulo con sólo una arista no asignada. Dicha arista

es crítica, ya que el valor de f sobre ella es mayor que los de sus dos vértices y, menor que los alcanzados por los triángulos a los que pertenece. Por ello, cada arista crítica viene determinada por un ciclo de aristas no asignadas en D .

Por último, dado un triángulo cualquiera, hemos visto que el proceso de definición de f hace que siempre exista una única arista cara de él, de modo que los valores de f sobre el triángulo y dicha arista coincidan. Por tanto ningún triángulo es crítico.

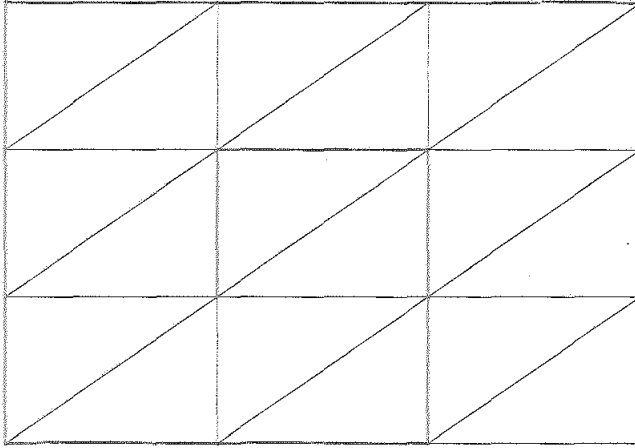
□

5.2 Funciones de Morse discretas sin puntos críticos.

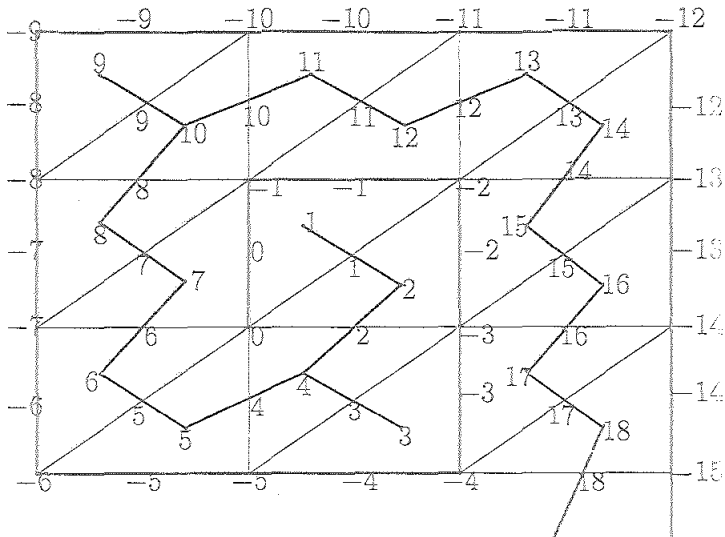
(a) El plano.

Una vez descrito el procedimiento de construcción de funciones de Morse discretas sobre superficies infinitas, es interesante destacar que, de manera análoga a lo que ocurre en 1-complejos infinitos, es posible, para ciertos 2-complejos infinitos, definir sobre éstos funciones de Morse discretas que no tengan ningún símplice crítico. En concreto, usando un procedimiento similar al que se ha descrito en la sección anterior, se consigue definir sobre una triangulación cualquiera del plano, una función de Morse discreta sin ningún símplice crítico.

A la vista de la siguiente figura, consideremos una triangulación del plano y fijemos sobre ésta un rayo T partiendo de un vértice cualquiera, que jugará el papel de árbol maximal.



A diferencia del proceso descrito en la sección anterior, en el que se construía la función paso a paso en cada subcomplejo finito K_n , ahora se definirá la función globalmente, primero sobre el rayo T (destacado en la figura anterior con trazo más grueso) de manera decreciente y, a continuación, de forma creciente sobre el 2-rayo restante, que da lugar a un 1-rayo sobre el grafo complementario de T .

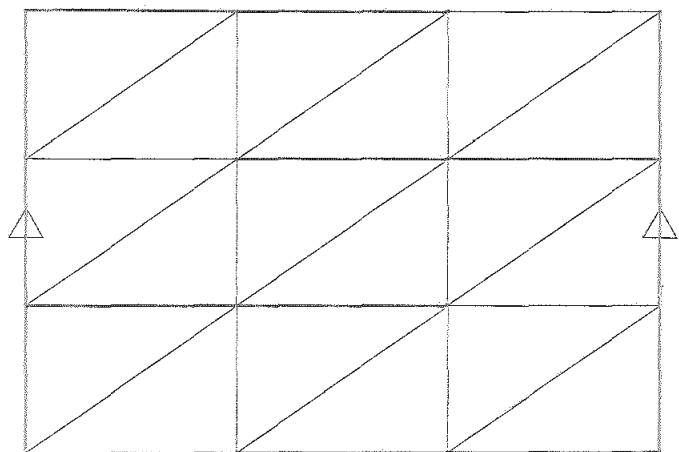


Para comprobar que esta función no posee ningún vértice crítico, basta con observar que carece de vértices sobre los que alcance un mínimo. Respecto a las aristas, dada una cualquiera, o bien está en T , en cuyo caso no es crítica, pues sobre uno de sus vértices borde la función coincide con el valor que toma en dicha arista, o bien está fuera de T , es decir, forma parte del 2-camino creciente que constituye el complementario T y, en consecuencia, tampoco es crítica, ya que se tiene que el valor de la función sobre ella coincide con el que toma sobre uno de los dos triángulos a los que pertenece. Para terminar, si tomamos un triángulo cualquiera, al pertenecer al 2-rayo determinado por el complementario de T , existe una sólo de sus aristas borde tal que la función sobre ésta coincide con el valor alcanza sobre dicho triángulo.

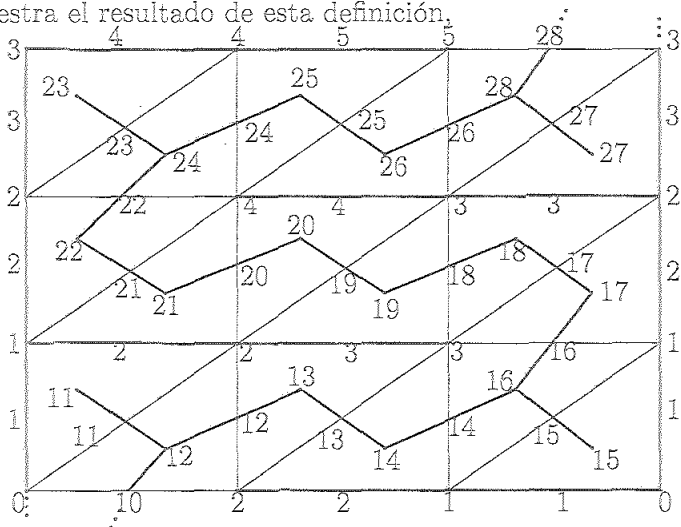
En vista de la ausencia de símlices críticos de la función anterior, puede afirmarse que ésta es minimal, en el sentido, precisado en este trabajo, de que alcanza la menor cantidad posible de símlices críticos. Es evidente que en este hecho tiene vital importancia la simplicidad topológica del complejo sobre el que está definida (el plano es contráctil) y ello da lugar a la cuestión general de dar una versión para 2-complejos infinitos de las desigualdades de Morse análoga a la que se ha probado en esta memoria para 1-complejos infinitos. En concreto, las desigualdades del caso finito dejan de ser útiles en este caso, ya que, por ejemplo, éstas afirman que la conexión del plano garantiza la existencia de al menos un vértice crítico.

(b) El cilindro.

Podemos considerar un segundo ejemplo de superficie infinita sobre la cual es posible definir una función de Morse discreta f que carezca de puntos críticos. Se trata del cilindro infinito y sin borde. Podemos emplear un método similar al utilizado en el caso del plano para definir f . Dada una triangulación del cilindro, fijaremos sobre ésta un árbol maximal T como muestra la siguiente figura,



A continuación comenzaremos la definición de f , primero sobre T y seguidamente se considerará el 2-complejo complementario de T , representado por el grafo D , sobre el que se definirá el resto de la función. La siguiente figura muestra el resultado de esta definición.



Como puede verse, f está definida de manera monótona tanto en T , como en el 2-birrayo correspondiente a D , aunque existe un "desfase" suficiente entre los valores de f sobre T y sobre D de modo que los valores de simplices de T sean menores que los que toman los simplices de D incidentes con los

primeros. De esta forma puede construirse f de Morse discreta sobre el cilindro de modo que no tenga ningún símplice crítico. La diferencia fundamental de este ejemplo con el del plano radica en que ahora nuestro 2-complejo no es contractil ($b_2 = 1$) y, en consecuencia, las desigualdades de Morse para el caso finito garantizan la existencia de al menos una arista crítica ($m_1 \geq b_1$), algo que como es evidente, no ocurre. Sin embargo, las desigualdades generalizadas para 1-complejos infinitos deducidas en el capítulo 1 de esta memoria sí aseguran que $b_1 \geq 1$ implica que existe al menos una arista crítica. Ello nos induce a conjeturar que, en el caso de 2-complejos, habrá que tener en cuenta también el análogo bidimensional de los rayos decrecientes usados para probar las desigualdades de Morse en 1-complejos infinitos.

Bibliografía

- [1] S. Biassoti, *Topological techniques for shape understanding*, Preprint 2002.
- [2] R. Bott, *Morse theory indomitable*, Publ. Math. I.H.E.S. 68 (1988), 99-114.
- [3] M. K. Chari, *On Discrete Morse functions and combinatorial decompositions*, Discrete Math., 217, (2000), 101-113.
- [4] M. K. Chari y M. Joswig, *Discrete Morse Complexes*, Preprint.
- [5] J. Cox, D.B. Karron, *Digital Morse Theory with selected Applications*, Por aparecer en Graphical Models and Image Processing.
- [6] K. Crowley, *Discrete Morse Theory and the Geometry of Non-positively Curved Simplicial Complexes*, Tesis, Rice University, 2001.
- [7] R. Diestel y D. Kuhn, *On Infinite Cycles I*, Combinatorica, (to appear).
- [8] R. Diestel y D. Kuhn, *On Infinite Cycles II*, Combinatorica, (to appear).
- [9] A. Floer, *Morse theory for Lagrangian intersections*, J. Diff. Geom. 28 (1988), 513-547.
- [10] A. Floer, *A relative Morse index for the symplectic action*, Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988), 393-407.
- [11] A. Floer, *The unregularized gradient flow of the symplectic action*, Comm. Pure Appl. Math. (1988), 775-813.
- [12] R. Forman, *Morse Theory for cell complexes*, Adv. in Math. 134 (1998), 90-145.

- [13] R. Forman, *Combinatorial Vector Fields and Dynamical Systems*, Math. Zeit., 228, (1998), 629-681.
- [14] R. Forman, *Combinatorial Differential Topology and Geometry*, New Perspectives in Geometric Combinatorics, MSRI Publications, 38, (1999), 177-206.
- [15] R. Forman, *Some Applications of Combinatorial Differential Topology*, Preprint.
- [16] R. Forman, *A user's guide to Discrete Morse Theory*, Preprint.
- [17] J. M. Franks, *Morse-Smale flows and homotopy theory*, Topology 18 (1979), 199-215.
- [18] J. M. Franks, *Homology and Dynamical Systems*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 49, A.M.S., Providence, 1980.
- [19] M. W. Hirsch, *Differential topology*, Graduate Texts in Math. 33, Springer, New York, 1976.
- [20] A. Gramain, *Topologie des surfaces*, Presses Universitaires de France, Paris, 1971.
- [21] M.J. Greenberg, *Lectures on Algebraic Topology*, Mathematics Lecture Notes Series, W.A. Benjamin Inc. Reading, Massachusetts, 1967.
- [22] R. Johnsonbaugh, *Matemáticas Discretas*, Prentice Hall, México, 1999.
- [23] D. Konig, *Theory of Finite and Infinite Graphs*, Birkhauser, Boston, 1990.
- [24] F. Levesque, *Theorie de Morse*, dissertation D.E.A., Universite Bordeaux 1, 1997.
- [25] T. Lewiner, H. Lopes, G. Tavares, *Optimal Morse functions for combinatorial 2-manifolds*, Preprint 2001.
- [26] T. Lewiner, H. Lopes, G. Tavares, *Visualizing Forman's discrete vector fields*, International Workshop "Visualization and Mathematics III". Berlin, 2002. Eds. M.C. Hege, K. Polthier (por aparecer en Springer).

- [27] Y. Matsumoto, *An Introduction to Morse Theory*, Translations of Mathematical monographs, vol. 208, A.M.S. 2002.
- [28] J. Milnor, *Morse Theory*, Annals of Math. Studies 51, Princeton Univ. Press, 1963.
- [29] J. Milnor, *Lectures on the h-Cobordism Theorem*, Princeton University Press, New Jersey, 1965.
- [30] M. Morse, *The calculus of variations in the large*, Colloquium Publications 18, Amer. Math. Soc., Providence, 1934.
- [31] J.R. Munkres, *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley, Menlo Park, 1984.
- [32] M. Schwarz, *Morse Homology*, Progress in Math. 111, Birkhauser Verlag, Basel, 1993.
- [33] Y. Shinagawa, T.L. Kunii, I.L. Kergosien *Surface Cloding Based on Morse Theory*, IEEE Computer Graphics and Applications. (1991), 66-78
- [34] J. Shareshian, *Discrete Morse theory for complexes of 2-connected graphs*, Topology, 40, (2001), 681-701.
- [35] S. Smale, *On the structure of manifolds*, Amer. Journ. Math. 84 (1962), 387-399.
- [36] S. Smale, *Morse inequalities for a dynamical system*, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 43-49.
- [37] S. Smale, *On gradient dynamical systems*, Ann. of Math. 74 (1961), 199-206.
- [38] S. Smale, *Generalized Poincare's conjecture in dimensions greater than four*, Ann. of Math. (2) 74 (1961), 391-406.
- [39] S. Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 747-817.
- [40] R.M. Switzer *Algebraic topology-homotopy and homology*, Springer-Verlag, Berlin 1975.

- [41] R. Thom, *Sur une partition en cellules associées à une fonction sur une variété*, C. R. Acad. Sci. Paris 228 (1949), 973-975.
- [42] E. Witten, *Supersymmetry and Morse Theory*, J. Diff. Geom. 17 (1982), 661-692.
- [43] G. Ziegler, *Lecture on Polytopes*, Springer, New York, 1995.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal de Doctorado de la Universidad de Sevilla en la fecha de la fecha, 25 de Mayo de 2003, el día de la fecha, en el aula de la Facultad de Ciencias Exactas y Físicas, en virtud de lo acordado por el Consejo Rectoral de la Universidad de Sevilla, se ha acordado otorgarle la calificación de **SABRECALIENTE CUM LAUDE** a **D. JOSE ANTONIO VILCHES ALARCÓN** por su tesis doctoral titulada **"FUNCIONES DE MORSE DISCRETAS SOBRE COMPLEJOS SIMPLICIALES"**.

Sevilla, 25 de Mayo de 2003

El Vocal, *José Vicente*
El Vocal, *Miguel*
El Vocal, *José Vilches Alarcón*
El Secretario, *José Vilches Alarcón*

El Presidente, *José Vilches Alarcón*

El Vocal, *José Vilches Alarcón*
El Doctorado, *José Vilches Alarcón*

