UNIVERSIDAD DE SEVILLA.
DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA, LOGICA Y FILOSOFIA DE LA CIENCIA Y ESTETICA Y TEORIA DE LAS ARTES.

LOGICA DE SEGUNDO ORDEN: PROBLEMAS METATEORETICOS.

Tesis Doctoral presentada por:
ANGEL NEPOMUCENO FERNANDEZ,
Realizada bajo la Dirección del Profesor
DR. D. EMILIO DIAZ ESTEVEZ.

SEVILLA, JULIO DE 1.990.

INDICE

INTRODUCCION 1

CAPITULO I

CUANTIFICACION DE SEGUNDO ORDEN EN FREGE.

§ 1 El lenguaje de fórmulas 16

§ 2 Categorías de variables 21

§ 3 La noción de generalidad 25

§ 4 Aplicación de la generalidad 28

§ 5 Jerarquía de funciones. La paradoja de Russell . 32

CUANTIFICACION DE SEGUNDO ORDEN EN RUSSELL.

§ 6 Teoría de los tipos 41

§ 7 Cuantificación de variable predicativa 50

EL LOGICISMO COMO LOGICA DE SEGUNDO ORDEN. COCCHIARELLA.

§ 8 La doctrina logicista y la lógica de predicados de segundo orden 57

§ 9 El sistema de cálculo 65

§ 10 Paradoja de Russell 76

§ 11 Sistema logicista consistente 80

CAPITULO II

NOCIONES GENERALES DE LOGICA DE SEGUNDO ORDEN.

§ 12 Noción de lógica 91

§ 13 Sistemas de segundo orden 92

§ 14 Semántica estándar de $\mathcal{L}$ 104

CALCULO DE SEGUNDO ORDEN EN HILBERT-ACKERMANN.

§ 15 Teoría de la cuantificación 110

§ 16 Sistema de cálculo 114

§ 17 Independencia de los axiomas de Hilbert-Ackermann 117

§ 18 Ampliación y aplicaciones del sistema de cálculo 125

CALCULO DE SEGUNDO ORDEN EN CHURCH.

§ 19 Sistema de cálculo 129

LA DEMARCACION DE LA LOGICA DE SEGUNDO ORDEN Y LA ARITMETICA

§ 20 Los cálculos de lógica de segundo orden 131

§ 21 El cálculo $\mathfrak{C}\mathfrak{D}(3)$ 139

CAPITULO III

LOGICA Y FORMALIZACION DE LA ARITMETICA.

§ 22 Sistemas aritméticos 144

§ 23 El problema de la categoricidad 148

§ 24 Teoría de la recursividad y métodos de Gödel ... 152

§ 25 Teorema de Gödel 162

§ 26 Consecuencias del teorema de Gödel 167

CAPITULO IV

SOBRE LA COMPLETUD RESTRINGIDA.

§ 27 La corrección de $\mathfrak{C}\mathfrak{D}(2)$ 173

§ 28 Método de Henkin 180

§ 29 Semántica no estándar 186

§ 30 Completud relativa de la lógica de segundo orden 196

§ 31 Categoricidad y modelos no estándar 204

§ 32 Alcance del método de Henkin 207

RELACIONES ENTRE INTERPRETACIONES NORMALES.

§ 33 Homomorfía entre interpretaciones 210

§ 34 Interpretaciones normales que verifican determinadas condiciones 214

§ 35 Consideraciones finales sobre ampliación de resultados a determinadas clases de fórmulas 228

APENDICE

1.-SISTEMA DE HILBERT-ACKERMANN.

Cálculo restringido de predicados 242

Cálculo generalizado de predicados 244

2.-SISTEMA DE CHURCH.

Cálculo de segundo orden 247

BIBLIOGRAFIA

Nota 252

Relación de títulos 253

INTRODUCCION

Estas líneas contienen la explicación de por qué una investigación en lógica de segundo orden y no en otros aspectos, más o menos relevantes, del ámbito de la lógica. Como es evidente, hay un ejercicio de la propia voluntad, pero interesan más otros puntos. En primer lugar, hemos suscrito la opinión según la cual la lógica de segundo orden es lógica; esta afirmación no es trivial, aunque el término "lógica" aparezca tanto en el sujeto como en lo que se predica de éste en el anterior enunciado. ¿Acaso los lógicos -designe este nombre la clase de investigadores que designe- no están de acuerdo en considerar que la lógica de segundo orden es lógica?. En efecto, no están de acuerdo. Veamos una muestra de opiniones dispares:

"... algunos lógicos ... entienden por F una variable de atributos ... . La confusión empieza en forma de confusión de signo con objeto, que es confusión entre la mención de un signo y su uso. En vez de entender sistemáticamente, coherentemente F como *algo que se encuentra en el lugar* de un predicado por precisar, el lógico confundido lo entiende la mitad de las veces como algo que *nombra* un predicado por precisar"[1].

---

[1]W. O. Quine, *Filosofía de la lógica*, p. 118.

(*)"... entiendo que la axiomatización Neumann-Bernays-Gödel de la teoría de conjuntos era un gran triunfo, porque eliminó la lógica de segundo orden de la teoría de conjuntos"; (**)"... quiero decir únicamente que, en mi opinión, la lógica de segundo orden es una parte de la teoría de conjuntos. Así pues, me parece que es una parte de la matemática perfectamente sólida y sus teoremas, tanto como los teoremas metamatemáticos probados para sistemas basados en esta lógica, no son ni erróneos ni falsos"[2].

"... Consideramos las presentes investigaciones relevantes para los fundamentos de la teoría de conjuntos, porque desde cierto punto de vista los diversos sistemas conocidos de teoría de conjuntos pueden verse como fragmentos de una simple lógica de orden superior..."[3].

Un trabajo de investigación que aporte nuevos elementos de discusión, a partir de los cuales se pueda optar por una opinión u otra, tiene ya interés.

---

[2]Respectivamente, (*) L. Kalmár, "On the role of second order theories", (**) A. Mostowski, "Replay", en "Recent results in set theory (discussion)", ponencia presentada por Mostowski en "International Colloquium in the philosophy of science", editado por I. Lakatos, *Philosophy of mathematics*, pp. 105-106 (la traducción es mía).

[3]D. Kaplan, R. Montague, "Foundations of Higher-order Logic" en *Proceedings of the 1.964 international congress*, Ed. por Y. Bar-Hillel, p. 101 (la traducción es mía).

La aparición de una serie de resultados, que podemos denominar limitativos, a lo largo de los años 30, explican, al menos en parte, el surgimiento de perspectivas contrapuestas. En concreto, la incompletud de los cálculos de orden superior habría coadyuvado al rechazo de los mismos. Los trabajos de Henkin suponen una actitud más abierta. Desde este punto de vista, que admite una teoría de la cuantificación no restringida a variables de individuo, era necesaria la investigación en el orden superior.

A partir de la lectura de determinados trabajos de Henkin comienza nuestra preocupación por estos temas. Que los sistemas de cálculo de orden superior no sean completos -que sean esencialmente incompletables- no debe significar que se renuncie a la lógica de segundo orden; tal renuncia sería análoga a un abandono de la lógica de predicados de primer orden por el solo hecho de que ésta sea esencialmente indecidible. La lógica es algo más que lógica proposicional, donde no se plantean los problemas derivados de los resultados limitativos; de la misma manera, tiene que ser algo más que cálculo de predicados de primer orden. Si nos preguntamos, pues, por la naturaleza de la lógica, habremos de estudiar los cálculos de segundo orden. Por otra parte, determinadas certezas no deben abortar iniciativas de investigación como, por ejemplo, la certeza de la muerte no es óbice para el desarollo de la medicina geriátrica.

Estas razones son igualmente válidas si se trata de justificar la investigación en lógica de orden superior, por lo que habría que estudiar sistemas de cálculo de teoría de los tipos; sin embargo, la generalización de la cuantificación a variables predicativas constituye un hito importante para determinar la naturaleza de la lógica. La posibilidad de reducir expresiones, que contienen predicados de predicados, a otras en las cuales éstos se suprimen, al menos en algunos casos, nos indujo a descartar los sistemas de orden ω (o de teoría de los tipos) como punto central del trabajo, sin que ello signifique su rechazo. Es decir, adoptanto un principio de orden ascendente, nos parecía más interesante centrarnos en el ámbito del segundo orden que abarcar directamente la teoría de los tipos.

Sin entrar en una serie de detalles de importancia secundaria, recorramos algunos momentos e intuiciones, útiles para comprender el período -siempre vivo y apasionante- durante el cual se va forjando este trabajo. El método seguido por Henkin para demostrar la completud de la lógica de primer orden, y su aplicación a cualquier orden, ponía de manifiesto la existencia de modelos especiales para sistemas de orden superior; la caracterización de estos modelos ha sido un constante motivo de reflexión. También era de gran importancia conocer a fondo la naturaleza de la cuantificación predicativa, con sus semejanzas formales al par que profundas diferencias con la cuantificación objetual. A este respecto, el sentido de "$\Lambda P\alpha$" desde una perspectiva inicial, en interpretaciones cuyo universo de discurso fuera de cardinal infinito, venía a ser que "se da α para todos los valores de P", lo cual sería prácticamente sinónimo de "se da α para los siguientes valores de P: $\emptyset$, $\mathbf{D}^n$, $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$"[4].

Un primer paso, en la caracterización de las interpretaciones para sistemas de segundo orden, consiste en exigir que ningún dominio relacional sea $\emptyset$; ello es muy poco, pero suficiente para establecer asignaciones del lenguaje formal a una familia de dominios $\mathbf{D}$, $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$, ... tales que $\mathbf{D} \neq \emptyset$ y $\mathbf{D}_i \neq \emptyset$, para todo $i \geq 1$. Por este motivo, podemos hablar de una clase muy amplia de interpretaciones. Sin embargo, en este sentido se pueden presentar unas interpretaciones un tanto extrañas. La noción de *interpretación de una fórmula para determinadas variables individuales* permite "nombrar" relaciones definidas en $\mathbf{D}$ (miembros de $\mathbf{D}_i$, para algún $i \geq 1$, a los que se denomina "dominios relacionales"). La expresión anterior, $\Lambda P\alpha$, indica que "se da α para todos los valores de P", y entre éstos se cuentan las relaciones "nom-

---

[4]$\mathbf{D}^n$ representa el conjunto potencia n de $\mathbf{D}$, para $\mathbf{D} \neq \emptyset$ como universo de discurso de la interpretación en cuestión; n es la aridad de P; $\mathbb{R}$ es una relación n-ádica cualquiera y $\overline{\mathbb{R}}$ su complemento.

bradas" por las interpretaciones de fórmulas; pero en algunas de estas interpretaciones podían faltar ciertas relaciones que sin embargo son nombrables. De aquí que la expresión $\Lambda P\alpha \rightarrow \alpha(\beta/Px_1,\ldots,x_n)$ -donde $\alpha(\beta/Px_1,\ldots,x_n)$ representa la fórmula resultante de sustituir en α las ocurrencias libres de $Px_1,\ldots,x_n$ por la fórmula β[5]- no sea verdadera en todas las interpretaciones de este tipo, lo cual no es deseable pues se trata de la expresión hilbertiana, específica para el segundo orden, del axioma de Aristóteles. Teniendo todo ello en cuenta, consideramos conveniente denominar *normales* a las interpretaciones en que el axioma de Aristóteles es válido; esta denominación, por otra parte, no es nueva en la literatura lógica.

La idea de condensar todos los valores posibles de un signo de predicado, bajo determinadas condiciones, en los conjuntos $\emptyset$, universal (de la potencia de que se trate, según la aridad del predicado), una relación cualquiera (también según aridad) y su complemento, podría aplicarse ahora al análisis de las interpretaciones para determinar si eran normales. Si en cualquier dominio relacional una relación $\mathbb{R}$ se puede nombrar a partir de la fórmula β, es evidente que así mismo se nombrarían $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R} \cup \overline{\mathbb{R}}$ y $\mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{R}}$, pues basta tomar en consideración las fórmulas $\neg\beta$, $\beta \vee \neg\beta$ y $\beta \wedge \neg\beta$, respecti-

---

[5]En el sentido definido más abajo.

vamente. Es decir, si a partir de β se puede nombrar una relación n-ádica $\mathbb{R}$, también se pueden nombrar $\bar{\mathbb{R}}$; $\mathbf{D}^n$ se puede nombrar a partir de $\beta \vee \neg\beta$, mientras que $\emptyset$, de acuerdo con esta regla y por ser el complementario de $\mathbf{D}^n$, se nombraría a partir de $\neg(\beta \vee \neg\beta)$. Una interpretación en alguno de cuyos dominios no se diera esta circunstancia no sería normal, dado que en ella no valdría la mencionada versión del axioma de Aristóteles. Por otra parte, un dominio relacional $\mathbf{D}_n$ y otro $\mathbf{D}_{n+1}$, para $n\geq 1$, debían estar relacionados, en el sentido de que una misma fórmula permitiría definir un miembro de $\mathbf{D}_n$ y un miembro de $\mathbf{D}_{n+1}$ (con una n-pla de variables individuales distintas entre si y la n+1-pla resultante de añadir a la anterior una nueva variable individual, respectivamente).

Una primera conclusión de todo ello es que las interpretaciones normales poseen determinadas características algebraicas, en cuanto a sus dominios relacionales. La Doctora Manzano había estudiado lo que denomina "sistemas intermedios", cada uno de cuyos dominios, respecto de la unión e intersección, es un álgebra de Boole. En su trabajo[σ], pues, hallamos, por así decir, una confirmación a nuestra posición inicial; también los dominios relacionales de las interpretaciones normales poseen las propiedades del álgebra de cla-

[σ]M. Manzano, *Sistemas intermedios*.

ses. Un criterio semejante se puede mantener desde diversos puntos de vista[7]. Por todo ello, se hacía necesaria una definición alternativa de interpretación normal; esta definición -de las "condiciones de normalidad" de una interpretación- no podía dar la espalda totalmente al lenguaje formal, sobre todo teniendo en cuenta que las expresiones de las propiedades del álgebra de clases no son más que paráfrasis de las palabras "no" y "o", o de los signos $\neg$ y $\vee$, respectivamente. Mediante un teorema establecemos la equivalencia entre la exigencia de validez de la versión mencionada del axioma de Aristóteles y determinadas condiciones.

Habíamos de tener en cuenta el procedimiento de Henkin para probar la completud restringida de los cálculos de orden superior. En relación con ello, el Doctor Díaz Estévez[8] había indicado la poca relevancia de la prueba de Henkin, en cuanto que un cálculo es completo respecto del con-

---

[7]P. B. Andrews, "General models, descriptions, and choice in type theory" y "General models and extensionality", *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 37, nº 2, pp. 385-394 y 395-397, respectivamente, y J. C. Boudreaux, "Defining general structures", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. XX, nº 3, pp. 465-488. En ambos casos se trata de orden superior, no restringido a segundo orden, pero se plantean, por así decir, determinar cómo las estructuras generales deben ser cerradas para ciertos operadores y definirlas estrictamente en términos de conjuntos, respectivamente.

[8]Cfr. "Lógica de segundo orden: Los dos axiomas de Hilbert-Ackermann".

junto de las fórmulas demostrables en el mismo; de esta manera, los esquemas axiomáticos de Hilbert-Ackermann, por ejemplo, sintácticamente independientes si consideramos sistemas como el de Church, no serían válidos en todas las interpretaciones normales. El problema de la completud se podría plantear en los siguientes términos: los cálculos de segundo orden, esencialmente incompletos en el sentido de Gödel, pueden ser incompletos porque no contienen determinadas fórmulas elementales que son universalmente válidas. La incompletud esencial es insalvable en principio, pero esta otra tiene solución. Si todo ello minimiza la demostración de completud, el "método de Henkin", no obstante, tiene aplicación en los estudios metateoréticos.

La necesidad de profundizar en la investigación de las interpretaciones era evidente. La clase de las interpretaciones normales quizá fuera demasiado amplia, aunque la exigencia de normalidad suponía desechar un buen número de interpretaciones en el sentido muy general del que hablamos más arriba.

Si nos preguntamos qué tiene de peculiar una interpretación normal que no sea estándar, una respuesta se obtiene considerando, por ejemplo, la relación prototípica de identidad. Dados dos términos cualesquiera, x e y, son idénticos en una interpretación $\mathfrak{I}$ si, y sólo si[9], ésta satisface la fórmula del lenguaje de segundo orden $\bigwedge P(Px \rightarrow Py)$; si $\mathfrak{I}$ es estándar, entonces $\mathfrak{I}(x) = \mathfrak{I}(y)$; pero si $\mathfrak{I}$ no es estándar, se puede dar que $\mathfrak{I}(x) \neq \mathfrak{I}(y)$. Un caso extremo de interpretación normal que no es estándar es aquélla que se define sobre la familia de dominios siguiente: $\mathbf{D} \neq \emptyset$, $\mathbf{D}_i = \{\emptyset, \mathbf{D}^i\}$, para todo $i \geq 1$, la cual -valorando adecuadamente las constantes- satisface la fórmula citada, sean cuales fueren x e y. Una intepretación de tales características es poco interesante, porque, si se nos permite la expresión, un mundo en el que todos los individuos son indiscernibles no se diferencia, básicamente, de un mundo con un único individuo. La noción de homomorfía aplicada a interpretaciones permite estudiar este tipo de relaciones entre ellas.

La lógica de segundo orden, como generalización de la aplicación de la cuantificación, se puede considerar un tema clásico, a pesar de las actitudes críticas sugeridas al principio. El riesgo de alcanzar la categoría de "lógico confundido" no habría de impedir nuestro acercamiento a alguna de las fuentes de las que se ha nutrido la filosofía de la lógica contemporánea. Por estas razones nos parecía interesante

[9] Para mayor comodidad, en lo sucesivo usaremos "sii" como abreviatura de "si y sólo si".

abordar y presentar, aunque solo fuera parcialmente, el pensamiento lógico de Frege y el de Russell. Ello implicaba el riesgo de hacer más una "filosofía de la lógica", de estos autores, de carácter muy general, que hacer patente sus posiciones -si se dan éstas- acerca de los problemas del segundo orden. Ahora bien, la naturaleza del trabajo, por la amplitud de su objeto, permite un tratamiento diverso. En cierto sentido, en Frege y Russell hallamos planteamientos que tienen interés para la lógica de segundo orden; éstos se obtienen a partir de un análisis de algunas de sus concepciones conocidas, de manera que su estudio resulta pertinente.

Como es sabido, Frege y Russell pertenecen a la misma corriente de pensamiento lógico, a saber, "el logicismo". Si nos hubiéramos propuesto una investigación de carácter exclusivamente histórico, cabría pensar en las otras corrientes de filosofía de la lógica y la matemática, es decir, en la "formalista" y la "intuicionista"; pero no es el caso. Interesa, no obstante, destacar la posición que reclama una lógica de segundo orden como expresión del programa logicista. Hacia esta tesis apunta Cocchiarella en un trabajo acerca del cual hemos insertado una serie de comentarios.

En un primer momento sosteníamos que la lógica de segundo orden había nacido con la lógica contemporánea[10]. No se po

---

[10]Ello no significa que neguemos las preocupaciones por estos

dian obviar las actitudes críticas; de aquí nuestra búsqueda de algún tipo de justificación de sentido para nuestra investigación, justificación que hallamos ya en los planteamientos logicistas, no solo en los autores clásicos, sino en trabajos más modernos. El artículo de Cocchiarella es de interés a este respecto, así como para profundizar en la línea que propone de reconstrucción del cálculo fregeano.

Tanto Hilbert-Ackermann como Church se ocupan de los cálculos de segundo orden; los hemos incluido en nuestro trabajo como puntos de referencia necesarios, pero no se hace una exposición totalmente lineal, puesto que no se trata de realizar una crítica histórica. El tratamiento de Church se puede considerar paradigmático, aunque son de aplicación en este caso los comentarios anteriores sobre el sentido real de la demostración de completud de Henkin[11]. La obra de Hilbert-Ackermann *Elementos de lógica teórica* ha sido también objeto de estudio por su importancia para este campo. En ambos casos se trata de obras básicas, pero no por ello triviales; por el contrario, algunas de sus opiniones constituyen un firme sólido sobre el que asentar la investigación. El

temas a lo largo de la historia de la lógica.

[11]Puesto que Church hace uso del procedimiento henkiniano para probar la completud restringida del cálculo de segundo orden que presenta.

que los correspondientes cálculos no sean equipotentes ha supuesto un incentivo para la investigación en algunos aspectos, al par que justifica su inclusión.

Como sistema de cálculo de segundo orden hemos optado por un cálculo de deducción natural del tipo del de Gentzen. Podríamos haber tomado un cálculo axiomático, como por ejemplo el de Church; el cálculo axiomático de Hilbert-Ackermann nos parecía menos aconsejable formalmente. Con el de deducción natural teníamos la oportunidad de fijar mejor las conexiones entre reglas correspondientes a distinto orden; es decir, con este cálculo se pondrían de manifiesto más claramente las implicaciones de la ampliación de la cuantificación a variables predicativas. Los esquemas axiomáticos de Hilbert-Ackermann, como se ha dicho, eran independientes, de aquí la necesidad de ampliar las reglas hasta obtener un cálculo que fuera, si se nos permite la expresión, lo más completo posible.

Un tema de interés en este contexto es el de los cálculos aritméticos. La existencia de interpretaciones no estándar se puede poner en correlación con determinados problemas, como el de la categoricidad. Por otra parte, nos ha interesado para, junto con los resultados debidos a Gödel, extraer consecuencias de gran importancia en el plano metateórico. En relación con este punto hemos de aclarar que en el texto se exponen algunos teoremas -el del propio Gödel, así como el de Henkin- que no reproducen exactamente los enunciados originales, lo cual carece de importancia pues, en todo caso, hay que ser fiel con las tesis que establecen, no con las formas que las expresan.

Para concluir, diremos que con esta investigación teníamos la esperanza de obtener alguna clarificación sobre algún punto, que pudiera quedar oscuro, en torno a ciertas cuestiones metateoréticas. Bien es verdad que contamos con una serie de resultados razonablemente indiscutibles; pero nos parecía necesario determinar su auténtico alcance y significado. Con esta actitud se corre el peligro de entrar en un callejón sin salida, si se nos permite la expresión. A pesar de todo, puesto que el conocimiento no progresa en línea recta continua, el riesgo merecía la pena, fueran cuales fueran los resultados. El trabajo ha sido elaborado a partir de esta actitud inicial, que explica en parte la estructuración del texto. En cuanto al balance final, si éste es positivo o no, no nos corresponde juzgarlo. Pero si distinguimos la exposición de la investigación propiamente dicha, solamente la primera ha terminado; la investigación, en cambio, por decirlo de algún modo, ha de seguir su curso.

Hay más puntos de interés, sin duda, que los tratados en esta introducción, pero la actividad de varios años no cabe bien en estas líneas. Ni siquiera se recogen todos los que están presentes en el texto, aunque en los comentarios precedentes se ha ofrecido una buena muestra. Hay también, por decirlo de algún modo, algunas ausencias. Determinados tópicos no han sido tratados -compacidad, formas prenexas, prenexas ordenadas, etc.- lo que no implica desechar su estudio; por el contrario, en un tratado sistemático tendrán reservado un lugar, pero al plasmar nuestras investigaciones se imponía una selección, la cual hemos ejecutado, con mayor o menor acierto.

En la bibliografía aparecen una serie de obras que pueden servir de apoyo a cualquier investigación sobre los temas tratados. No hemos procedido a elegir exhaustivamente, aunque tampoco nos hemos restringido a trabajos específicos en exclusiva. Por ello, todos los textos citados en las notas a pie de página, salvo error u omisión, están reseñados, pero no todo título de la bibliografía está citado en dichas notas. Las obras generales incluidas han sido catalogadas por su carácter fundamental; aparecen también algunas obras históricas, ya sea por su tratamiento de autores clásicos (Frege, Russell, etc.) o el de las cuestiones que inciden directamente en el ámbito que nos ocupa.

C A P I T U L O I

CUANTIFICACION DE SEGUNDO ORDEN EN FREGE

§ 1 El lenguaje de fórmulas.

El pensamiento de Frege se estructura en tres momentos, correspondiendo cada uno de ellos a sus obras más significativas, a saber, *Begriffsschrift*, *Die Grundlagen der Arithmetik* y *Grundgesetze der Arithmetik*. Entre éstas se suceden diversos trabajos de menor extensión cuya importancia es no menos destacada; la última parte de su producción está constituida por unos escritos póstumos, tardíamente publicados, elaborados tras el fracaso de su programa, que no pueden ser dejados al margen para la comprensión de la filosofía logicista.

En la primera obra ofrecerá un lenguaje de fórmulas, una ideografía o lenguaje conceptográfico. El punto de arranque para alcanzar este tipo de lenguaje está en la distinción entre el modo de llegar a una proposición y su fundamento[1]. El fundamento está relacionado con su naturaleza interna y nos sitúa en el ámbito de la lógica; la génesis de su enunciado, no. Las demostraciones de cada aserto, en el cam-

[1]*Begriffsschrift*, prólogo (p. 7 Ed. en español)

po de las ciencias formales -por ejemplo, la matemática- han de hacerse recurriendo a pruebas lógicas. Ahora bien, los investigadores matemáticos exigen el máximo rigor en las pruebas, rigor que el lenguaje natural no puede garantizar, como tampoco permite desechar expresiones que sean irrelevantes para la prueba, cuestiones de orden gramatical, etc.. Frege está interesado en la forma lógica de la proposición, forma que no tiene por qué coincidir con la forma gramatical misma (a una misma forma lógica pueden corresponder expresiones lingüísticas distintas). Por todo ello se impone un análisis del lenguaje.

La presentación del lenguaje de fórmulas, en la primera versión ofrecida en *Begriffsschrift*, es anterior a los resultados más interesantes de su análisis, la mayor parte de los cuales están presentes en el sistema último, en el sistema de *Grundgesetze*; pero la *Ideografía* aparece como una simbolización de las formas lógicas subyacentes en la lengua natural, simbolización más exacta que el lenguaje ordinario, ya que ésta queda libre, por así decir, de todo cuanto resultaba innecesario para los enunciados. Con todo, la noción de *lenguaje de fórmulas*, base del programa logicista, se mantendrá en lo esencial.

Frege simboliza las *barras de juicio y contenido*, la *negación*, la expresión *condicional*, la *igualdad de contenido* y la expresión de la *generalidad*, cuyos signos, respectivamente son: "⊢——", "⊢┬—", "⊢—┬——", "⊢—⌣—". Mediante estos signos se pueden representar las conexiones lógicas, constituyendo el grupo de signos constantes, que siempre significan lo mismo, frente a otros de carácter variable, de los que nos ocuparemos más tarde.

Como se puede observar, los diferentes signos constantes de *Begriffschrift* -las constantes lógicas, dado su carácter- se escriben modificando la denominada por Frege *barra del contenido*, o barra horizontal anotada siempre a la izquierda de un *contenido judicable*, entendiendo por tal la expresión que puede llegar a ser un juicio; así, por ejemplo, la representación "casa" no es un contenido judicable[2]. Posteriormente, al elaborar el sistema de *Grundgesetze*, modifica sus puntos de vista, viniendo a ser la barra de contenido una función de verdad.

Para Frege a la hora de representar un juicio no hay que distinguir entre sujeto y predicado; dos oraciones distintas pueden corresponder a una misma proposición, como se constata al observar una oración cuyo verbo aparezca en voz activa y la que se obtiene pasando el verbo a voz pasiva, dando lugar a dos expresiones bien distintas desde un punto de vista gramatical, pero que expresan el mismo pensamiento; es decir, son dos expresiones de una misma

[2]Ibíd. §-2.

proposición. Lo verdaderamente importante para el lenguaje simbólico es tener en cuenta que "en los juicios sólo se considera aquello que influye en las *posibles consecuencias*"[3].

Se puede decir que el objetivo de Frege es la creación de un lenguaje de fórmulas; este lenguaje debe tener las ventajas de los lenguajes matemáticos (Frege era matemático profesional) y en las expresiones de éstos no siempre es fácil distinguir entre sujeto y predicado.

El análisis del lenguaje ordinario realizado por Frege ha sido un análisis lógico, para poder elaborar un lenguaje simbólico que permita expresar mejor las formas lógicas. Dada una proposición cualquiera, por ejemplo "A", es posible imaginar un lenguaje en el cual se exprese "A es un hecho"; aquí el predicado "ser un hecho" tiene como única finalidad que el contenido de la proposición "A" se convierta en un juicio, pero no estamos ante una expresión del tipo "S es P" en el sentido habitual de estos términos. La solución de Frege consiste en presentar en su lenguaje simbólico un único predicado, "ser un hecho", con el símbolo "$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-$"[4]

Por otra parte, expresiones como "Juan es hombre" y "el hombre es racional" no tienen la misma forma lógica. Frege realiza un estudio de la "generalidad" o cuantificación

[3] *Begriffsschrift* §-3. *Conceptografía*, p. 15.

[4] Ibid. p. 15.

universal[5] mostrando cómo la segunda oración equivale a "todo hombre es racional", cuya forma lógica es "si a es hombre, entonces a es racional", mientras que la forma de la primera oración sería "a es hombre".

Más allá de la forma de cada oración, se encuentra su forma lógica, como hemos dicho anteriormente; esta forma lógica no tiene por qué coincidir necesariamente con la forma gramatical de la oración de que se trate. Pero para el estudio de las formas lógicas la estructura "S es P" no parece la más adecuada.

La estructura de la proposición no será, pues, la sujeto-predicativa. En su análisis de la lengua común, Frege halla como elementos irreductibles la *función* y el *objeto*. Sea la proposición "En Platea los griegos derrotaron a los persas"; ésta es la misma que "En Platea los persas fueron derrotados por los griegos": Estamos ante una función diádica, saturable mediante dos argumentos, siendo irrelevante que los argumentos intercambien la posición gramatical de sujeto, según se presente como oración activa o pasiva.

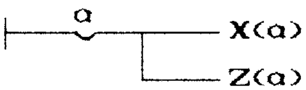
Lo característico de la función es la necesidad de completarse para ser plenamente significativa, mientras que

---

[5]*Nachgelassene Schriften* (publicados por Hermes-Kambartel --Kaulbach). En la edición *Escritos lógico-semánticos* aparecen varios de estos escritos póstumos con el título genérico de *Investigaciones lógicas*. El estudio de la cuantificación se halla en "Cuarta investigación lógica", de *Escritos lógico-semánticos*, p. 195 y ss.

objeto es todo lo que no sea función[6].

La alternativa argumentativo-funcional frente a la sujeto-predicativa, junto a la clara distinción del conjunto de constantes lógicas, permiten a Frege presentar un lenguaje de fórmulas, cuya característica esencial será la representación exacta de la forma lógica de cada proposición, así como las conexiones lógicas entre ellas. Así, la proposición anterior, "el hombre es racional", cuya forma lógica es "para todo a, si a es hombre, entonces a es racional", dado su carácter condicional, se puede representar en el lenguaje simbólico fregeano como:



La actitud de Frege ha sido crítica, pero, en cierto modo, su actitud crítica frente al lenguaje ordinario como lenguaje de la ciencia -que debe tener las mismas ventajas que los lenguajes matemáticos-, no le lleva a abandonarlo; más bien investiga su "lógica" para luego expresarla simbólicamente.

§ 2 Categorías de variables.

Los elementos irreductibles del análisis, como hemos

---

[6] "¿Qué es una función?" en *Escritos lógico-semánticos*, p. 73 y ss.. Véase también "Función y concepto" en *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Otros estudios filosóficos*, p. 215 y ss.

señalado, son objeto y función. La evolución del pensamiento de Frege tiene lo que se denomina *doctrina del sentido y la referencia* como punto de inflexión. Esta queda patente en su artículo *Ueber Sinn und Bedeutung*[7]. Considerado globalmente, podemos decir que el objeto es la referencia de nombres propios, mientras que la expresión funcional como tal, para poseer una referencia, ha de completarse; de aquí que se pueda afirmar que la función tiene naturaleza predicativa.

Frege distingue perfectamente entre las funciones cuya saturación da lugar a un nombre, teniendo un objeto como referencia, de aquéllas cuya referencia, una vez completadas, es un valor de verdad. Son estas últimas las que ofrecen un mayor interés para sus propósitos; es decir, fija más su atención en las funciones proposicionales.

Pareja a la noción de función está la noción de concepto. Un concepto no es más que una función proposicional, una función cuyo valor es siempre un valor de verdad. Cabe preguntarse si también una función pluriargumental es un concepto. Antes de responder en términos fregeanos consideremos las relaciones entre dos objetos: estamos ante funciones de dos argumentos; si una de estas funciones se satura mediante un único argumento, la hemos convertido en una

[7] "Sobre sentido y referencia", en *Estudios sobre semántica*, versión española de Ulises Moulines, p. 49 y ss. y "Consideraciones sobre sentido y referencia" en la misma edición, p. 85 y ss..

nueva función de un solo argumento cuya saturación ya da lugar a un valor de verdad, lo que nos lleva al concepto. Ello se puede mantener respecto de funciones de más de dos argumentos.

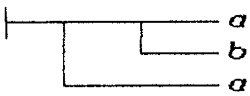
Dada una expresión completa, en la cual sea posible distinguir función de argumento, podría preguntarse qué referencia tiene cada parte. En realidad, de acuerdo con lo dicho, para Frege sólo el argumento, como nombre propio, refiere un objeto, teniendo en cuenta el carácter de la función. Sin embargo, a cada parte corresponde un sentido bien diferenciado; el significado del argumento será un nombre, mientras que el significado de la función es un concepto. Estas mismas consideraciones se pueden hacer de las funciones pluriargumentales[8].

El lenguaje de fórmulas había de tener un conjunto de signos variables, cuyo significado no está fijado de antemano. Antes reseñamos el conjunto de signos constantes usados por Frege. Todos los signos que no sean los de este grupo serán variables. Ahora bien, las variables han de corresponder, por así decir, a las dos categorías de elementos hallados en el análisis; sólo de esta manera el lenguaje simbólico puede aspirar a representar inequívoca-

[8]En cualquier caso, Frege se interesa sobre todo por funciones monádicas y diádicas, y éstas son otro tipo de conceptos. Nòtese que se acaba de usar el término "significado" como sinónimo del *Sinn* fregeano, mientras que "referencia" ha sido la traducción de *Bedeutung*.

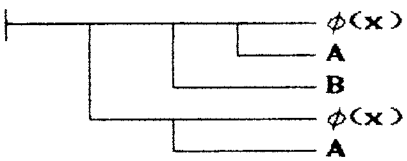
mente la forma lógica. En efecto, para Frege, dado el resultado de su análisis de la lengua común, hay dos grupos de variables: aquellos signos cuyo ámbito de variabilidad está constituido por objetos, y aquellos otros de los cuales tal ámbito son los conceptos.

En atención al primer sistema ideográfico, el de *Begriffsschrift*, hemos de decir que los grupos de signos están perfectamente diferenciados. Así "$\vdash\!\!\!-\!\!-\!\!-\, \phi(\mathbf{a})$" viene a expresar lo siguiente:
"la función ϕ para el argumento **a** es un hecho". Aquí ϕ es una variable conceptual, puesto que se trata del signo de una función cuyo valor es siempre un valor de verdad, mientras que **a** es el signo del argumento cuyo sentido es un nombre propio que denota un objeto.

Por otra parte, Frege presenta una serie de juicios y deducciones del pensamiento puro, para lo cual hace uso de ciertos esquemas. Así, 

es un esquema en el cual *a* y *b* representan una expresión más o menos compleja; si, por ejemplo, *a* es 

y *b* es **B**, una instancia de este esquema será:



, que transcrito a notación actual es:
$(\mathbf{A} \rightarrow \phi(\mathbf{x})) \rightarrow (\mathbf{B} \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \phi(\mathbf{x})))$. Sin embargo, el sistema de

Frege no consta explícitamente de una regla de sustitución. En definitiva, si para establecer los tipos de variables tomamos como criterio el ámbito de variabilidad de las mismas, las variables *a* y *b* del ejemplo anterior no denotarían más que un valor de verdad, pero no se trata de otra categoría de variables[9].

§ 3 La noción de generalidad.

Frege estableció una concavidad en la barra de contenido para expresar la generalidad: "⊢—◡—". Para su explicación conviene tener en cuenta la noción de función. Consideremos una función, por ejemplo, X(a) -los paréntesis limitan el vacío o posición argumental saturable- que puede ser tomada a su vez como argumento de una función, pues en la expresión de un juicio cabe entender "la combinación de los símbolos que están a la derecha de ⊢—— como función de uno de los símbolos que ahí aparecen"[10]. Desde este punto de vista, si X(a) se toma como argumento, la expresión "X(a) es un hecho, sea lo que fuere su argumento" constituye una proposición.

Tomemos como ejemplo "ser mayor o igual que 0" para los argumentos 0, 1, 2, ... Si "≥ 0" representa esta función,

---

[9]En el sistema fregeano no aparecen variables proposicionales, lo que carece de importancia a nuestros efectos.

[10]*Conceptografía*, p. 31.

las expresiones $\geq 0(0)$, $\geq 0(1)$, $\geq 0(2)$, etc. están bien formadas y podemos considerar el carácter fijo de la función "≥ 0" frente a la variabilidad del argumento. Este carácter se subraya mediante la expresión de una totalidad de éstos; es decir, con $\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!-\; \geq 0(\mathfrak{a})$.

La generalidad, desde el ejemplo anterior, será más correcta si se expresa condicionalmente: " Para todo $\mathfrak{a}$, si $\mathfrak{a}$ es un número entero positivo, entonces $\mathfrak{a}$ es mayor o igual que 0", cuya rerpresentación en el lenguaje simbólico de Frege es $\begin{array}{l} \vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\!-\!\!\!\!\!\top\!\!\!-\!\!\!-\; \geq 0(\mathfrak{a}) \\ \qquad\quad \llcorner\!\!-\!\!\!-\; Z(\mathfrak{a}) \end{array}$, así Z representa "ser un número", siendo necesaria la concavidad porque " delimita el dominio al que se refiere la generalidad indicada por medio de la letra. Solo dentro de su dominio mantiene su significado la letra gótica"[11]. El uso de letras latinas y góticas en los lugares de argumento viene a ser muy semejante, respectivamente, al de constantes individuales o parámetros y variables ligadas.

Mediante estos ejemplos hemos observado cómo la generalización supone el paso de un argumento a otro, tomando un dominio de objetos. En realidad, a nivel simbólico, se trata de la afirmación de una determinada

---

[11] *Conceptografía*, p. 32. En "Cuarta investigación lógica" presenta concisamente el carácter de expresión condicional de este tipo de proposiciones, como habíamos hecho observar cuando comentamos que para Frege la estructura del tipo "S es P" no es la adecuada para estudiar las formas lógicas.

propiedad poseida por los miembros de una clase dada.

Puesto que en la expresión funcional el lugar del argumento es cambiante, mientras que la función misma es fija, la generalización puede aplicarse. Ahora bien, a este mismo nivel, podemos considerar un objeto fijo y funciones que tienen como argumento el signo de éste ; es decir, podemos pensar en el paso , para un mismo argumento, de una función a otra. De esta manera, el signo funcional sería ahora cambiante, al tiempo que el argumento permanecería fijo. Bien es verdad que cabe apreciar otro tipo de función en estos casos, aunque también se abre la puerta a aplicar la generalización a la letra funcional. Ello, no obstante, requiere otras apreciaciones.

De acuerdo con la notación indicada, hay en el lenguaje ideográfico un uso de la generalización que viene a significar implícitamente una regla de introducción de la misma. En efecto, aquello que se afirma de un individuo, en tanto miembro de un dominio, se puede afirmar de todos los miembros del dominio en cuestión. Simbólicamente, de la expresión $\begin{array}{l}\vdash\!\!-\!\!\!\top\!\!-\, \phi(a)\\ \qquad\llcorner\!\!-\, A\end{array}$, se pasa a $\begin{array}{l}\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\!\top\!\!-\, \phi(\mathfrak{a})\\ \qquad\quad\llcorner\!\!-\, A\end{array}$, sustituyendo la letra latina por la gótica en $\phi(a)$, y situando una concavidad ante la expresión funcional[12]

---

[12]*Begriffsschrift*, §-11.

§ 4 Aplicación de la generalidad.

La primera aplicación de la generalidad a variables de objeto ya ha quedado establecida. En cuanto a variables funcionales, hemos señalado la posibilidad de pasar de una función a otra para un mismo argumento; ello permitirá a Frege considerar la totalidad de funciones (de una determinada clase) para un argumento constante y, en definitiva, aplicar la generalidad a las funciones, lo que resulta del mayor interés en este contexto.

En el plano simbólico, al suponer todas las funciones para un argumento fijado, se está suponiendo la generalización del signo funcional. No se puede objetar que en tal caso no hemos hecho más que un cambio de nombres, y, en realidad, lo que antes era función es ahora argumento y viceversa, puesto que atendiendo al carácter de los signos -funcional, con significación predicativa; argumento, con significación de nombre de referencia objetual- no se trata de un mero intercambio de papeles.

La noción de generalización se podía haber establecido sin apelar a ejemplificaciones en las que una función es saturable de un cierto modo; la explicación del signo la pudo haber hecho Frege hablando de "variables" situadas en la concavidad; así, dados los dos grupos de signos, hablar de aplicar la generalización a las constantes lógicas carece de sentido, pues la misma "generalidad" es una de éstas.

Sólo es posible generalizar variables y éstas pueden ser de argumentos y funciones. Por otra parte, cabía esperarlo del análisis fregeano del lenguaje ordinario, pues se presentan expresiones en la lengua natural con las cláusulas "todos", "para todo", etc., relativas a objetos o a conceptos, cuyas formas lógicas no deben diferir de estructura -la forma en relación a objetos, en cuanto a la gneralidad misma, debe ser similar a las correspondientes a conceptos-. Así, por ejemplo, "ningún hombre es inmortal" tiene la misma forma que "ninguna clase unitaria es vacía", a saber, "no hay un x tal que sea ϕ y ψ". En la primera expresión, el lugar de ϕ está ocupado por el concepto "hombre", bajo el cual caen ciertos objetos que claramente no son conceptos. Si consideramos la segunda frase, el lugar de ϕ está ocupado por el concepto "clase unitaria", bajo el cual caen conceptos bajo los cuales, a su vez, cae un objeto en cada caso[13]. "Hombre" y "clase unitaria" son conceptos que se pueden situar a distinto nivel, pero la forma lógica de los enunciados del ejemplo es la misma.

La aplicación de la generalidad a variables funcionales no es de una única manera, aunque, como advierte P.T.

---

[13]En realidad, cuando un concepto cae bajo otro concepto se dice del primero que es un objeto abstracto. Acerca del paso de concepto como tal concepto a concepto como objeto abstracto, volveremos en párrafos posteriores.

Geach[14], la cuantificación funcional en Frege corresponde a la expresión de una función de tercer nivel. En efecto, en *Grundgesetze* la barra de contenido, es decir, el trazo horizontal, pasa a ser considerada con carácter funcional; de ahí que podamos considerar los niveles del modo siguiente: en la generalización de primer orden, estamos ante funciones de segundo nivel; $\overset{\mathfrak{a}}{-\!\smile\!-}f(\mathfrak{a})$ representa la afirmación de "se da $f(\mathfrak{a})$, sea lo que fuere $\mathfrak{a}$", o, lo que es lo mismo, se da este aserto como expresión funcional saturada para el argumento "función f". $\overset{\mathfrak{f}}{-\!\smile\!-}\mathfrak{f}(a)$ es una función de tercer nivel, pues se trata de una expresión funcional cuyo argumento es "todas las funciones que tienen a "a" como argumento". Aun considerando funciones de segundo nivel, con generalización de la función de primer nivel que ocupa la posición de argumento, dado el carácter de la barra, tambien estamos ante funciones de tercer nivel.

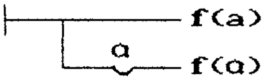
Las maneras de cuantificar variables funcionales aparecen claramente en los respectivos sistemas de cálculo de *Begriffsschrift* y *Grundgesetze*. En el primer sistema Frege estudia las series, presentando en la última parte una teoría general de las series; en ella obtiene diversas formulaciones correspondientes a la aritmética ordinaria, y en la fórmula número 76, necesaria para la investigación de

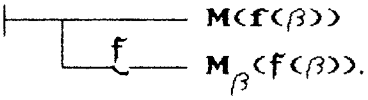
---

[14]En "Cuantificación de segundo orden en Frege". Teorema. Valencia, 1.979.

lo que denomina "propiedades hereditarias", hace uso de la generalización de la variable funcional[15]; es decir, utiliza la cuantificación de segundo orden en el mismo sentido que será usado en el presente trabajo.

Por otra parte, el axioma II de *Grundgesetze* se formula de la siguientes manera:

a) 

b) 

En cierto modo, se está esbozando así el cálculo generalizado de predicados. Este uso de la cuantificación, empero, es consustancial a la noción de generalidad en Frege. En la parte b) del axioma nos hallamos ante una expresión condicional; el antecedente es el aserto "se da $M_\beta(f(\beta))$, sea cual fuere la función f de argumento β"; aquí M_β es un signo funcional de segundo nivel -una "variable" cuyo sentido se considera determinado; es decir, cuyo significado es un concepto dado-, que tiene como argumento una variable, cuyo ámbito es el conjunto de funciones de argumento β. En resumen, una función saturable por objetos individuales es una función de primer nivel; una función que toma como argumentos funciones de primer nivel es una función de segundo nivel, y la aplicación de la generalización a los argumentos

---

[15] *Begriffsschrift* § 27.

de funciones de segundo nivel es lo que hoy llamamos cuantificación de segundo orden.

§ 5 Jerarquía de funciones. La paradoja de Russell.

De acuerdo con los comentarios anteriores, Frege distingue las funciones de segundo nivel, así tambien conceptos de segundo nivel[16] y funciones cuyos argumentos son funciones de segundo grado, alcanzando el tercer nivel. No obstante, propiamente hablando, no hay una jerarquía de funciones. Para Frege es objeto todo lo que no es función, es decir, todo lo que no es un concepto, e insiste, particularmente al estudiar el número[17], en que, dado un objeto y un concepto, el primero cae o no bajo el segundo.

A pesar del carácter funcional del concepto, de su naturaleza predicativa, dado un concepto cualquiera, para cada objeto, vemos si cae o no bajo él. Pero hay conceptos bajo los cuales no caen objetos propiamente dichos sino otros conceptos: son conceptos de segundo nivel[18]. Que poda-

---

[16] "Función y concepto" en *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética y Otros estudios filosóficos*, p. 232.

[17] *Grundlagen*, § 67.

[18] En realidad bajo un concepto de segundo nivel cae un concepto de primer nivel el cual se considera un objeto abstracto. Si F es un concepto de segundo nivel y G es un concepto de primer nivel que cae bajo F, G cae bajo F en tanto que objeto; es decir, en tanto que conjunto de objetos que caen bajo G (Sobre ello volveremos más adelante).

mos seguir ascendiendo no significa que Frege se haya ocupado de establecer una jerarquía funcional; antes bien, era suficiente la anterior distinción: hay conceptos y objetos y en el lenguaje de fórmulas habrá, por tanto, variables de conceptos y variables de objetos. A las variables de ambas categorías se puede aplicar la cuantificación.

Se puede suponer una jerarquía funcional en Frege a partir de ciertos comentarios[19]. Como se ha indicado más arriba, una función se puede saturar mediante objetos individuales, en cuyo caso estamos ante una función de primer nivel. Si una función es saturable mediante una función de primer nivel, es decir, una función cuyos argumentos son funciones de primer nivel, entonces se trata de una función de segundo nivel, y así sucesivamente.

La variable funcional cuantificada puede ocupar el lugar argumental de otra función de segundo nivel; en este caso tendremos una generalización como la presentada en el axioma II.b antes citado, pero dado un signo de función y su argumento, la generalidad se podría aplicar a cualquiera de ellos.

Así pues, nos encontramos con dos niveles lingüísticos, respectivamente, objetual y conceptual. Dentro del segundo, hallamos conceptos bajo los cuales no caen objetos

---

[19]Por ejemplo, en "Función y concepto", *Escritos lógico semánticos*, p. 28 y ss'

individuales, sino objetos abstractos. Lo fundamental es que hay conceptos de conceptos y, en consecuencia, expresiones en las cuales una función tendrá como argumento otra función. A este respecto, como mencionamos más arriba, la barra de contenido "——", tiene carácter funcional[20], de manera que ——X(a) será una función cuyo argumento es X(a).

Recordemos que para Frege una expresión funcional completa, saturada la función para el argumento de que se trate, denota uno de los siguientes objetos abstractos: "lo verdadero", "lo falso", con lo que la proposición también tiene una referencia. De acuerdo con esta concepción, ——Δ es una función de Δ[21] y denota "lo verdadero" si el signo Δ denota "lo verdadero", mientras que refiere "lo falso" en los demás casos.

El punto de vista de Frege acerca del carácter de la barra horizontal no coincide ahora con el de su primera obra. Del estudio de las constantes lógicas de su lenguaje simbólico se desprende que a la derecha de la barra debe aparecer un contenido judicable; la combinación de esta

[20] El carácter funcional de la barra horizontal no aparece en *Begriffsschrift*, sino en posteriores escritos. Se puede consultar "Función y concepto", teniendo en cuenta la noción general de función en "¿Qué es una función?", [ambos en *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética y Otros escritos filosóficos*].

[21] Véase C. Thiel, *Sentido y referencia en la lógica de G. Frege*

barra con el trazo horizontal, "$\vdash$——", constituía el único predicado del lenguaje de fórmulas.

A partir de la doctrina del sentido y la referencia surge una nueva perspectiva. Sea, por ejemplo, la expresión "——2"; ésta denota "lo falso", puesto que "2" no es el objeto "lo verdadero" sino un número. Tambien serán falsas expresiones como, por ejemplo, "el amarillo es mayor que π". En efecto, en términos fregeanos, sea **M** la función diádica que representa "ser mayor que" -se trata de una función saturable mediante dos argumentos-; sea **B** el signo que representa el concepto "amarillo" -éste es una función cuyo valor es siempre un valor de verdad, es decir, uno de los objetos abstractos antes citados, "lo verdadero", "lo falso"; así, si a representa el sol, **B**(a) denota "lo verdadero"-; por último, π representa la proporción entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. La expresión "——**M**(**B**,π)" está por "lo falso" ya que **M**(**B**,π) no representa "lo verdadero".

En este último caso, y de acuerdo con el punto de vista de Frege, antes reseñado, según el cual la forma lógica de una proposición con la cláusula "todos", del tipo "todo hombre es racional" tiene carácter condicional, podemos considerar que se trata, más bien, de la expresión:

—$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$——┬—— **M**($\mathfrak{a}$,$\pi$). Pero para ciertos argumentos "a" (como, por
└—— **B**($\mathfrak{a}$)

ejemplo, el sol), **M**(a,π) es "falso", mientras que **B**(a) es

"verdadero", con lo que ——┬—— M(a,π) es "falso" de
                                     └—— B(a)

acuerdo con la definición de la condicionalidad, que establece que de las cuatro posibilidades de combinación se excluye la que supone la afirmación del antecedente y la negación del consecuente[22]. Naturalmente, también es falsa la generalización sobre "a".

Esta doctrina tiene implícitos ciertos riesgos. Para Frege cada función determina un campo o curso de valores. El curso de valores de una función no es más que la extensión del concepto que la función significa; es decir la extensión de un concepto es el conjunto de los objetos que caen bajo tal concepto, si se trata de un concepto de primer nivel; por esta razón podríamos traducirlo a otros términos fregeanos: la extensión de un concepto es el campo de argumentos para los cuales el valor de la función que significa el concepto es "lo verdadero".

La notación de los cursos de valores es la siguiente: para la función ϕ, $\grave{\alpha}\phi(\alpha)$ designa el curso de valores de la función ϕ. Podemos decir que esta notación viene a

---

[22]Podemos decir que se excluye el caso en que el antecedente denote "lo verdadero" y el consecuente un objeto distinto de "lo verdadero", siendo admisibles las tres combinaciones restantes; el caso excluido denotará "lo falso" y los demás "lo verdadero". La definición de la condicionalidad aparece en *Conceptografía*, p. 17. En *Grundgesetze*, § 12 la definición considera las combinaciones de valores de verdad.

simbolizar expresiones del lenguaje ordinario del tipo "los α tales que son ϕ", o "los α tales que cumplen ϕ", etc. y tiene una gran importancia para el sistema de *Grundgesetze*[23].

Por otra parte, el curso de valor de una función no es la función misma, no posee el carácter de insaturado propio de la función. No es otra función, ya que la extensión de un concepto no es un concepto, sino que se trata de un objeto. Ello permite a Frege poder definir ciertos objetos a partir de conceptos dados; desde un concepto cualquiera podemos definir un objeto: la extensión de este concepto. De esta manera, Frege procederá a definir los números como extensiones de conceptos, y así, ante esta suerte de objetos (abstractos), construirá el cálculo aritmético como un cálculo de objetos.

Podemos decir que en *Grundgesetze* Frege establece una lógica extensional, destacando la denominada *Ley V*[24] que se expresa así: $(\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \varphi(\mathfrak{a}) = \psi(\mathfrak{a})) = (\grave{\alpha}\phi(\alpha) = \grave{\varepsilon}\psi(\varepsilon))$. A partir de esta ley se obtiene la paradoja de Russell. Para Frege, afirmar una función para un argumento equivale a afirmar que tal argumento es un miembro del curso de valores de la

---

[23]*Grundgesetze* Vol. I, p. 14 y ss.. Para un estudio específico sobre cursos de valores, B. V. Birjukov *Two Soviet Studies on Frege* (Publ. por I. Angelelli).

[24]*Grundgesetze*, Vol. I, p. 61.

función. Nos ocuparemos de la función "no ser miembro de si mismo", que podemos simbolizar, para el argumento **a**, como $-\psi(\mathbf{a},\mathbf{a})$, mientras que "ser miembro de", para los argumentos **a**, **b**, se representará $\psi(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Sea $\grave{\varepsilon}{-}\psi(\varepsilon,\varepsilon)$, el curso de valor de $-\psi$; para abreviar, anotamos **z** en lugar de $\grave{\varepsilon}{-}\psi(\varepsilon,\varepsilon)$. Sea $\grave{\alpha}\psi(\alpha,\mathbf{z})$, el curso de valor de la función "ser miembro de **z**"; los dos campos de valores coinciden puesto que "los objetos que no son miembros de si mismos" y "los objetos que son miembros de **z**" provienen del mismo predicado: "no ser miembro de si mismo" o "ser miembro de la totalidad de objetos tales que verifican esta propiedad". Pero si $\mathbf{z} = \grave{\alpha}\psi(\alpha,\mathbf{z})$, según la ley V de *Grundgeseteze* se verifica que $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, -\psi(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) = \psi(\mathfrak{a},\mathbf{z})$; si eliminamos el generalizador y, de acuerdo con la perspectiva de Frege, sustituimos la variable por el nombre del objeto **z**, se obtiene que $-\psi(\mathbf{z},\mathbf{z}) = \psi(\mathbf{z},\mathbf{z})$, lo cual es contradictorio[25].

En 1.902 Russell remite una carta a Frege en la cual le comunica el descubrimiento de la paradoja en el sistema de *Grundgesetze*; en ella señala que, bajo ciertas circunstan-

---

[25]D. A. Gillies, *Frege, Dedekind and Peano on the Foundations of Arithmetic*, p. 91; aquí usa el signo $\in$, así como $\notin$: a partir de la igualdad de los correspondientes cursos de valores se tiene que $x\notin x \leftrightarrow x\in\alpha(\alpha\notin\alpha)$, y de aquí que se tenga que $\alpha(\alpha\notin\alpha)\notin\alpha(\alpha\notin\alpha)\leftrightarrow\alpha(\alpha\notin\alpha)\in\alpha(\alpha\notin\alpha)$.

cias, una colección definible no constituye una totalidad[26]. Que una función determine un curso de valor el cual se pueda tratar como un objeto, es decir, como una totalidad, es algo que puede fallar bajo ciertas circunstancias. Ello no significa tener que abandonar la idea de que el curso de valor de una función sea una extensión de concepto, sino que el paso de la función a su curso de valores puede presentar problemas; es decir, no siempre se admite la validez de la ley V, como el mismo Frege reconoce en su respuesta a Russell[27].

Tomando el curso de valor de una función como objeto abstracto, si con él saturamos una expresión funcional, obtendremos un valor de verdad. Desde el punto de vista de Frege, una función como, por ejemplo, "ser hombre" tiene como curso de valores una clase -para él, un objeto abstracto- que podemos denominar "humanidad". La expresión "Zeus es hombre" denota "lo falso", mientras que "Sócrates es hombre" denota "lo verdadero". Así mismo, "'la humanidad' es hombre" denota "lo falso". Este tipo de oración es plenamente significativa, de la misma manera que lo son las del tipo "π es alegre", aunque en ambos casos tengan "lo falso" como valor de verdad.

---

[26]V. Heijenoort, *From Frege to Gödel*, pp.125-125.

[27]Ibid. pp. 127-128.

Podemos subrayar ahora el carácter contradictorio del paso de una función a su curso de valores considerado como una suma de objetos. Sea φ la función "no ser miembro de si mismo". Sea $\grave{\alpha}\varphi(\alpha)$ la totalidad de objetos que cumplen "no ser miembros de si mismos". Por otra parte, $\varphi(a)$ denota "lo verdadero" si y sólo si a es miembro de $\grave{\alpha}\varphi(a)$. Para el argumento $\grave{\alpha}\varphi(\alpha)$, si $\varphi(\grave{\alpha}\varphi(\alpha))$ denota "lo verdadero", entonces $\grave{\alpha}\varphi(\alpha)$ es miembro de $\grave{\alpha}\varphi(\alpha)$, con lo que $\varphi(\grave{\alpha}\varphi(\alpha))$ denota "lo falso"; si denota "lo falso", entonces $\grave{\alpha}\varphi(\alpha)$ no es miembro de $\grave{\alpha}\varphi(\alpha)$, por lo cual $\varphi(\grave{\alpha}\varphi(\alpha))$ denotará "lo verdadero".

Podemos decir, de acuerdo con los puntos tratados, que los problemas más graves[28] del cálculo de *Grundgesetze* no implican, necesariamente, el abandono de la noción misma de curso de valor; pero establecer un cálculo en el cual los cursos de valores aparecen como objetos (abstractos), determinados por las funciones correspondientes en todas las circunstancias, implica graves riesgos. Serán los sucesores de Frege quienes intenten elaborar un sistema lógico a salvo de estos riesgos.

---

[28]G. Currie en "Continuity and change in Frege's philosophy of mathematics" viene a sostener una opinión que podríamos resumir así: la noción de curso de valor es esencial para probar que a cada concepto corresponde su extensión, su curso de valores; los cursos de valores se introducen vía especificación de sus condiciones de identidad y esta especificación viene a ser la ley V) de donde se deriva la paradoja de Russell. Vid. *Frege Synthetized*, p. 345 y ss.

§ 6 Teoría de los tipos.

Como hemos indicado, Russell descubrió que la paradoja que lleva su nombre se podía derivar en el sistema de Frege; a pesar de ello, buena parte de las ideas de Frege fueron asumidas por Russell. Este, además de remitir una breve carta a Frege señalando cómo obtener la contradicción, añade un apéndice a sus *Principles of Mathematics*[29] para exponer brevemente la lógica fregeana y la teoría de los tipos.

En su obra *Principia Mathematica* lleva a cabo el programa logicista de fundamentación lógica de la matemática. Entre los problemas de los que se ocupa esta obra está el estudio de las paradojas y la investigación de los procedimientos que permitan alcanzar la solución de las mismas. Por otra parte, el ensayo *La lógica matemática y su fundamentación en la teoría de los tipos*[30] es un resumen de sus ideas acerca de la naturaleza de la lógica.

Es preciso advertir un punto de coincidencia esencial entre los planteamientos de Russell (y Whitehead, coautor de *Principia Mathematica*, como es sabido) y los de Frege:

---

[29]Versión española *Los principios de la matemática*, Ed. Espasa-Calpe, apéndices A y B.

[30]Incluido en *Lógica y conocimiento*, p. 75 y ss.

también Russell ha procedido a un análisis del lenguaje ordinario; se puede decir que sus concepciones provienen de tal análisis, en el cual sigue a Frege. La forma lógica de la proposición es única, en cierto modo, subyacente en las expresiones de la lengua natural. La finalidad del análisis (lógico) del lenguaje es descubrir esa forma lógica. Para expresar la forma lógica obtenida, hará uso de lo que podemos llamar un sistema simbólico; este sistema es el elaborado en *Principia Mathematica*[31].

Frege ya había realizado este necesario análisis del lenguaje, pero su estudio no había sido totalmente correcto; de haberlo sido no se habría hallado paradoja alguna. Cómo son las estructuras lógicas que Frege no ha acertado a descubrir, es asunto pendiente; por ello, las nociones fregeanas, para Russell y Whitehead, son susceptibles de revisión.

Las nociones de función y argumento, concepto y objeto, con más o menos matizaciones, son aceptadas por Russell. Una de sus concepciones más importantes es la teoría de los tipos, la cual viene justificada por el hecho de la existencia de paradojas, no sólo en el cálculo fregeano, sino también en el ámbito de la teoría de conjuntos -la

---

[31]S. Haack, *Filosofía de las lógicas*, llama la atención de cómo se puede poner en correlación esta idea de fórma lògica subyacente con las tesis de la gramática generativa; pp.46-47.

paradoja más conocida en matemáticas era la relativa al mayor ordinal, denominada "de Burali-Forti"-.

Para Russell y Whitehead todas las paradojas conocidas son una consecuencia de la violación del llamado principio de círculo vicioso. Según este principio "aquello que abarque la *totalidad* de una colección (o que sea o pueda ser definido en términos de una colección) no debe ser miembro de la colección"[32].

Por otro lado, Russell cuenta con la noción de varias clases de funciones; de ellas, la que ofrece un mayor interés es la de función proposicional. Una función proposicional es aquella expresión de significado ambiguo que, una vez completada mediante un argumento, da lugar a una proposición; es, en el sentido de Frege, la función cuyo valor es siempre un valor de verdad. Considerada en si misma, la expresión de una función, en cuanto a su significado, es ambigua; así, por ejemplo, "...es hombre" sólo posee significado en relación a una determinada colección de individuos; si el espacio punteado es ocupado por un miembro de tal colección, entonces se obtiene una expresión significativa. Podríamos decir que viene a significar lo que se denomina sus valores respecto de una cierta colección (de argumentos),

---

[32]*Principia Mathematica*, II. 1 en versión española, Paraninfo, p. 94.

siendo ésta tal que no puede contener la propia función, de acuerdo con el principio de círculo vicioso.

Las variables se clasifican en dos grupos, de acuerdo con el criterio de considerar su posición en las expresiones en que intervienen. Estos grupos son el de variables reales y el de variables aparentes, o, como diríamos hoy, variables libres y variables ligadas. Pero, de la misma manera que en Frege, las variables serán de objeto y función.

Ante una expresión en la que aparece un signo de función, podemos ver si éste posee significado fijo o no ambiguo o si, por el contrario, carece de él. Cuando una variable que ocupa una posición argumental está cuantificada, como, por ejemplo, en $(x)\varphi x$, contamos con una expresión completada, es decir, con una proposición; en este caso, se trata de la afirmación "todas las proposiciones de la forma φx son verdaderas"[33].

Cada función tiene un campo de significación el cual es el conjunto cuyos miembros son argumentos posibles de la función, por ello "está integrado por todos los argumentos

---

[33]B. Russell, "La lógica matemática y su fundamentación en la teoría de los tipos", en *Lógica y conocimiento*, p. 98. El cuantificador universal se expresa mediante los paréntesis y se considera que la aseveración de la verdad de todos los valores de una función -con tal cuantificador-, es una de las ideas primitivas requeridas por la lógica simbólica. Cfr. en el mismo volumen, p. 115.

para los que sea verdadera la función, junto con todos aquéllos para los que sea falsa"[34]. El campo de significación, pues, no es el curso de valor de la función. Para cada elemento del campo de significación la función tendrá un valor, pero fuera de su campo no hay argumentos para la función de que se trate, ni para el valor verdadero ni para el valor falso; una función proposicional para un argumento excluido de su campo de significación carece de valor, no es significativa. Así, por ejemplo, dada la función "ser capital de España", su campo de significación cuenta entre sus miembros con las ciudades París, Madrid, Barcelona, etc., mientras que no le pertenecerán cosas como "la blancura", "la honestidad", etc..

Un signo de función seguido de un signo de argumento, el cual no sea miembro del campo de significación de tal función, no denota valor de verdad alguno; no se trata en realidad, en un caso así, de una proposición, pues para un argumento de este tipo no hay un valor de la función, siendo absurda la expresión. Tomando el ejemplo anterior, la expresión "'la honestidad' es la capital de España" resulta no significativa, es una pseudo-proposición, puesto que 'la honestidad' no es miembro de la colección para la cual esta

---

[34]Ibid. p. 98

función es significativa; es decir, 'la honestidad' no está en su campo de significación.

Los campos de significación varían claramente de unas funciones a otras. Una misma cláusula de cuantificación se puede referir a distintos ámbitos; por ejemplo, "algunos hombres..." hace alusión a individuos de la especie "hombre", mientras que "algunas sociedades..." se refiere a grupos de los anteriores individuos. Una función como "ser de raza blanca" tendrá al primero como campo de significación; "ser esclavista", en cambio, tiene al segundo como campo de significación, sin importar que un individuo, como "Sócrates", pertenezca al primer campo y, al mismo tiempo, sea miembro de un miembro del segundo.

En el ejemplo anterior tenemos un escalonamiento de los campos de significación, de manera que una parte del campo de la función "ser hombre" es miembro del campo de significación de "ser esclavista". En efecto, consideremos que el campo de significación de la primera función sea el conjunto de todos los animales; un subconjunto de éste, la humanidad, es un miembro del campo de significación de la segunda función, que consta de todos los agrupamientos humanos, entre ellos la propia humanidad. En definitiva, el curso de valores -conjunto de argumentos para los cuales el valor de la función es "lo verdadero"- de la función "ser hombre" pertenece al campo de significación de la función "ser esclavista". No podía ocurrir que el curso de valor de la primera función fuera un miembro de su propio campo de significación; lo mismo puede decirse respecto de la segunda y respecto de cualquier función que consideremos, de acuerdo con el principio de círculo vicioso.

Estas observaciones conducen a la necesidad de establecer una jerarquía funcional. Esquemáticamente, ésta es la idea de Russell. Ya vimos cómo Frege diferenciaba conceptos y funciones de primer nivel de las de segundo y tercero. Una jerarquización tal era admisible para Russell; incluso parece sugerir que la doctrina de los tipos lógicos estaba a la base de la distinción de Frege de funciones de diversos niveles[35]; pero lo importante es destacar que los argumentos de las funciones no tienen por qué constituir una colección totalmente homogénea, pudiendose formar colecciones escalonadamente. De este modo, la función "ser de raza blanca" requiere un tipo de argumentos entre los que no se halla, por ejemplo, "la sociedad medieval".

Para una mejor explicación de la noción de tipo, Russell habla de las funciones predicativas -más tarde se consagrará esta noción en *Principia Mathematica*- como aquéllas de tipo lógico inmediatamente superior al de su

---

[35]Vid. *Principios de la Matemática*, apéndice A.

argumento. El tipo lógico define el campo de significación de una función; así, dada una función proposicional, su campo de significación vendrá dado por el tipo al que la función corresponde. El tipo es el campo de significación de una función proposicional[36] (y se puede obtener a partir de un conjunto dado).

Una expresión que contenga el signo de una función predicativa, y sus argumentos sean variables reales, se denomina matriz. Se pueden presentar matrices de dos o más variables. A partir de aquí podemos indagar cuáles son los tipos: las proposiciones elementales son aquéllas que no contienen variables aparentes y los términos que son argumentos son individuales. Este es, pues, el tipo ínfimo o tipo cero de las proposiciones elementales. Una matriz de primer orden es aquélla cuyos argumentos son variables individuales, como una función predicativa es de primer orden si es una matriz de primer orden con una variable individual, o proviene de una matriz de primer orden por cuantificación de todas sus variables menos una.

Una matriz de primer orden, mediante cuantificación de todas sus variables, da lugar a una proposición de primer orden y constituye el segundo tipo lógico. Vemos cómo el

---

[36]Cfr.*La lógica matemática y su fundamentación en la teoría de los tipos*, en *Lógica y conocimiento*, p. 102.

campo de significación de las funciones de primer orden es un conjunto de individuos. Si consideramos matrices que contienen como variables funciones de primer orden, estamos ante matrices de segundo orden, a partir de las cuales es posible alcanzar funciones y proposiciones de segundo orden, que constituirán el tercer tipo lógico

Las funciones de segundo orden tendrán como argumentos funciones de primer orden. Este proceso se puede generalizar, de manera que a partir de matrices de orden **n** se obtienen funciones, de este orden **n**, cuyos argumentos serán funciones de orden **n-1**, que constituirán el **n+1** tipo lógico. Si el primer tipo era el tipo cero, de las proposiciones elementales, el segundo tipo es el de las proposiciones de primer orden, y así sucesivamente; las proposiciones de orden **n** serán de tipo **n+1**. Esta es, de forma resumida, la teoría de los tipos[37]. Si dentro de cada tipo consideramos la ramificación en una diversidad de órdenes, entramos en la teoría ramificada: Las variables se pueden clasificar en órdenes: 1 para las variables individuales, 2 para los predicados de individuos, 3 para los predicados de predicados (cuyos argumentos pueden ser predicados de individuos, aun-

---

[37]Cfr. *Principia Mathematica*, p 222 y ss.(versión española); así mismo, "La lógica matemática y su fundamentación en la teoría de los tipos", en *Lógica y conocimiento*, p. 102 y ss.

que tambien individuos), y así sucesivamente; dado un tipo cualquiera, podemos considerar dicha clasificación.

§ 7 Cuantificación de variable predicativa.

La lógica de Russell cuenta entre sus objetivos la solución de las paradojas. La mayor o menor fortuna en llevar a buen fin este objetivo está, por así decir, al margen de la teoría de la cuantificación y su aplicación a las variables funcionales o predicativas. La cuantificación sobre variables que sean argumentos de funciones, de tipo inmediatamente superior en términos de Russell, está implícita en la doctrina whitehead-russelliana y viene a ser similar a la generalización establecida en el axioma II.b) de *Grundgesetze*. Pero, igual que en Frege, hallamos en Russell una aplicación de la cuantificación a variables que ocupan el lugar de la función.

La escala de tipos y la existencia de funciones predicativas, nos llevan a considerar que pueden aparecer funciones de una variable **x**, tales que no sean predicativas; para ello basta que, por ejemplo, φ**x** sea una expresión en la cual "φ" y "**x**" sean de tipos no consecutivos, y "**x**" es inferior o "φ" superior. Cuando φ es de tipo inmediatamente superior, Whitehead y Russell anotan φ!**x**, expresando el carácter de función predicativa.

Dados los signos de una función φ y una variable **x** tales que no sean de tipos consecutivos (sucesivamente, de superior a inferior), podemos plantearnos si es posible una reducción de tipo, es decir, si es equivalente a una proposición de la forma "x pertenece a una determinada clase". Admitir esta equivalencia supone admitir la equivalencia de una función proposicional, φx en este caso, con alguna función predicativa, por ejemplo $\psi!x$.

Esta equivalencia es un principio conocido como *axioma de reducibilidad* o *axioma de clases*. Esta denominación se debe a que su aplicación permite una cierta reducción de funciones proposicionales, mientras que al hablar de axioma de clases se alude al sentido antes comentado. En ∗12.1 y ∗12.11 de *Principia Mathematica* aparece formulado de la siguiente manera:

$$\vdash : (\exists f):\phi(x)\equiv_x f!x$$

$$\vdash : (\exists f):\phi(x,z)\equiv_{xz} f!(x,z)$$ [38].

Si tenemos en cuenta la posibilidad de abandonar el axioma de reducibilidad[39], por la posibilidad que hay de pasar de lo que se denomina teoría ramificada a la teoría

[38] Cfr. *Principia Mathematica*, p. 167. (p. 228 edición española).

[39] Advertencia en nota a pie de página, dada en la introducción a la 2a. edición de *Principia Mathematica*, p. xxxix (p. 33 en edición española).

simple de los tipos[40], podemos transformar su formulación en un principio de comprehensión, según el cual una fórmula abierta, con una variable individual libre, equivale a una función predicativa; es decir, una fórmula abierta equivaldría a un predicado monádico.

La necesidad del axioma de reducibilidad se debía, en primera instancia, a la teoría de los tipos, de acuerdo con el planteamiento inicial de *Principia*. Hemos de resaltar que la cuantificación que aparece en el axioma de reducibilidad, relativa a la función f!x (o a la función f!(x,z)), no es sobre la variable que ocupa la posición de argumento, sino sobre f.

En la formulación del citado axioma, pues, aparece la cuantificación de variable funcional, en el mismo sentido en que hoy hablamos de cuantificación de segundo orden. No es éste el único lugar donde aparece tal cuantificación en *Principia Mathematica*. Precisamente, advierten Whitehead y Russell, el axioma de reducibilidad tiene una doble utilidad -ciñéndonos a la primera edición de *Principia*-: ✱12.1 se necesita para la teoría de las clases, pero también para el estudio de la identidad (✱12.11).

---

[40]Esquemáticamente, la teoría simplificada se puede establecer así: $\mathfrak{T}$, el conjunto de los tipos, es el más pequeño conjunto tal que 1) $\tau_0 \in \mathfrak{T}$, 2) Si $\tau_1,...,\tau_n \in \mathfrak{T}$, entonces, $(\tau_1...\tau_n) \in \mathfrak{T}$.

La igualdad de dos términos se puede entender como una idea primitiva. Sin embargo, puesto que dos cosas son iguales cuando todo lo que se afirma de una se afirma también de la otra, la notación con el signo de igualdad, como "x=y" expresa que "x" e "y" son tales que cuanto se predica de una, se puede también predicar de la otra; es decir, que "x" e "y" satisfacen las mismas funciones predicativas. De aquí que se pueda definir simbólicamente.

En la formulación *13.01 de *Principia* se define la igualdad:

$$\mathbf{x=y} .= :(\phi):\phi!\mathbf{x}.\supset.\phi!\mathbf{y} \quad \text{Def.}$$

Nuevamente nos hallamos ante la cuantificación. Se trata de expresar que cuanto se dice de **x** se dice de **y**; en simbología actual:

$$\mathbf{x=y} =_{def} \wedge_{P}(\mathbf{Px \rightarrow Py}),$$

donde la notación "$=_{def}$" implica, como es obvio, que este signo de igualdad tiene un sentido bien distinto del definido en la propia fórmula. La cuantificación de variables predicativas es la continuación natural de la propia teoría de la cuantificación de variables individuales. Russell encuentra que la paradoja, a la que da lugar el sistema de Frege, es una consecuencia de haber tomado como totalidad algo que no constituye realmente una unidad[41]. Pero no se deriva de la noción misma de cuantificación extendida a variables predicativas.

Mediante el principio de círculo vicioso y la teoría de los tipos, Russell ha podido eliminar las molestas paradojas. Pero desde su punto de vista se pueden condenar al sinsentido expresiones que, en primera instancia, poseen un significado admisible para el sentido común. Observemos la expresión "García odia todas sus cualidades"; podemos entender que se trata de la proposición "para toda **f**, si **f** es cualidad de García, entonces García odia **f**", donde, además de la variable predicativa monádica **f**, aparece una función diádica, "odiar", cuyos argumentos son "García" y las funciones "**f**". No cabe sostener, a efectos de simbolización, que las funciones **f**, que teniendo a García como argumento dan lugar al valor "verdadero", sean argumentos de una función de superior rango porque, en todo caso, se puede hacer una reducción. Es decir, si a representa a García, Ω la función "odiar", siguiendo la notación russelliana, la expresión anterior se simbolizaría

---

[41]Cfr. en la carta antes citada. Con anterioridad había tratado este asunto -sin referirse a Frege- por lo que respecta al cálculo de clases y a las funciones proposicionales, en *Principia Mathematica*, p. 44 y ss. y p. 114 y ss. (edición en español, Espasa-Calpe).

como: $(f):(fa \rightarrow \Omega(a,f))$; si "ser cualidad de García" se representa mediante $\varkappa$, se podría anotar $(f):(\varkappa(f) \rightarrow \Omega(a,f))$, pero podemos reducir $\varkappa(f)$ a otra formulación en la cual no aparezca el signo $\varkappa$. En efecto, es preferible la notación que hemos reseñado en primer lugar, la cual equivale a la segunda, puesto que se ve fácilmente que se verificaría que $(f):(\varkappa(f) \leftrightarrow f(a))$.

Etiquetar de sinsentido expresiones como la ejemplificada parece excesivo. En realidad, la teoría de los tipos plantea ciertos problemas, aunque se puede hacer una distinción entre éstos y su formulación matemática, de lo cual ya era consciente Russell[42].

La ley V) de *Grundgesetze*, como hemos visto anteriormente, conduce a la paradoja descubierta por Russell. En este axioma se afirma la equivalencia, para todo argumento, de los valores de dos funciones cuyos cursos de valores coinciden. Pero "todo argumento", siguiendo el sentido que al

---

[42]Vid. "La lógica matemática y su fundamentación en la teoría de los tipos", en *Lógica y conocimiento*, p. 144. La teoría de los tipos fue tempranamente discutida por F. P. Ramsey en *Foundations*. Acerca de la teoría de los tipos y los axiomas de infinitud y reducibilidad se puede iniciar una discusión y estudio que aquí sólo hemos tratado de modo tangencial; el propio Russell aborda algunas cuestiones en *Introducción a la filosofía de la matemática* (Obras completas II, Aguilar). Una exposición sucinta de la lógica russelliana, con valoración crítica de las aspectos más destacados, en K. Gödel, *La lógica matemática de Russell* en *Obras Completas*, p. 297 y ss..

parecer concede Frege a estos términos, lleva a una violación del principio de círculo vicioso. Este vendría a ser, muy resumido, el diagnóstico de Russell. No importa que el principio en cuestión comporte unas restricciones, que pueden conducir a considerar no significativas expresiones de cuya neutralidad nadie duda, por así decir.

Nos podemos plantear lo que llamaríamos el problenma de la cuantificación y preguntarnos ¿Para todo qué?. Frege y Russell no nos ofrecerían la misma respuesta; pero no siendo coincidentes sus respuestas, no afectan esencialmente a los respectivos sistemas de cálculo. Si para Frege se trata de *todos los objetos* o *todas las funciones*, para Russell se trata de *todos los individuos*, *todas las funciones predicativas de un tipo determinado* o de *todas las proposiciones*, tambien de un tipo determinado[43]. De cualquier manera, se puede afirmar que entre los grandes representantes del logicismo -Frege, Whitehead y Russell- no hay una separación de la lógica de primer orden de la de orden superior, sino que se trata de la lógica. sin más calificativos.

---

[43]Vid. Goldfarb, "Logic in the twenties: Nature of the Quantifier", *The Journal of Symbolic Logic*, n. 3, vol. 44, 1.979, p. 351 y ss..

EL LOGICISMO COMO LOGICA DE SEGUNDO ORDEN: COCCHIARELLA.

§ 8 La doctrina logicista y la lógica de predicados de segundo orden.

La filosofía logicista o doctrina logicista de la matemática sostiene que la matemática deriva de la lógica; por ello es posible, según esta concepción, reducir la matemática clásica a lógica, de manera que a) "las nociones matemáticas sean definidas en términos de las nociones lógicas", y b) "los teoremas de la matemática sean demostrados como teoremas de la lógica"[44]. Cabe pensar que el fracaso del programa desarrollado en *Grundgesetze* significa que estas exigencias a) y b) no pueden ser satisfechas por el sistema fregeano, y sólo puede hacerlo un cálculo como el de *Principia Mathematica*. Por su parte, N. B. Cocchiarella[45] viene a señalar que el problema está en ver si el sistema que expresa el logicismo de Frege está condenado irremisiblemente a causa de la paradoja de Russell o si, por el contrario, puede ser reconstruido como un sistema de cálculo consistente, a partir del cual se puedan satisfacer las condiciones a) o b).

---

[44]Cfr. S. Kleene, *Introducción a la metamatemática*, p. 49.

[45]Vid. "Frege, Russell and logicism", en *Frege Synthesized. Essays on the Philosophical and Foundational Work of Gottlob Frege*, pp. 197-251.

En cuanto a Russell, para Cocchiarella[46], cabe hablar de su logicismo como el sistema de *Principia Mathematica*, pero también considera que hay una forma de logicismo en Russell, anterior a esta obra, a la cual denomina "logicismo primitivo" o "primer logicismo", que se corresponde con la época de los *Principle of Mathematics* y de la correspondencia con Frege. Tanto en un caso como en otro, el logicismo se concreta, por así decir, en la realización de un programa teórico que cumpla las mencionadas exigencias. Este programa es de reducción de la matemática a lógica, y, por tanto, de reducción de la matemática a una teoría de la predicación. A este respecto, señala Cocchiarella que el sistema, dentro del cual se represente la matemática, debe consistir al menos en una lógica de predicados de primer orden[47], requisito que cumplen tanto la forma de logicismo de Frege como la de Russell.

La posición de Cocchiarella le lleva a hacer un breve estudio de la teoría de la predicación en Frege y Russell, para establecer sus puntos de coincidencia (o los matices que las diferencien, según proceda). Ambos consideran que un concepto tiene naturaleza funcional. Para Frege, un concepto es de naturaleza insaturada, como corresponde a la función de la cual este concepto es sentido (la función "significa"

---

[46]Op. cit. p. 198.

[47]Ibíd. p. 198

el concepto; es decir, el concepto es "significado" de la función, entendiendo "significado" como *Sinn*). De aquí que en las simbolizaciones las variables de concepto hayan de aparecer perfectamente diferenciadas de las variables de objeto. El significado de una variable de objeto es un nombre, y en las expresiones funcionales del tipo Z(x), x es el nombre del objeto que cumple el predicado Z. Pero la variable predicativa se puede nominalizar, como en el caso de expresiones en las cuales tal variable ocupa posición argumental respecto de otra variable predicativa.

Frege - al igual que Russell, en este punto- no creó un sistema de cálculo formal. O, más exactamente, no expresó el cálculo en un lenguaje formal; las ideografías que aparecen en *Begriffschrift* y *Grundgesetze* no son más que simbolizaciones obtenidas a partir de sus análisis de la lengua natural. Cocchiarella destaca que tanto en Frege como en Russell la distinción entre términos singulares y predicados es fundamental. A este respecto, podemos suponer que el planteamiento de Cocchiarella es que un predicado es una *función proposicional de una variable*[48]. Como el punto de partida fregeano era la lengua natural, Cocchiarella señala que los predicados son bien distintos de los nombres propios, sin que ello

[48]Este es el punto de vista de S. Kleene, op. cit. p. 137. En general, un predicado n-àdico, para n≥1, es una función proposicional de n variables.

signifique que algún predicado, como "humano", no se pueda transformar en un nombre, como "humanidad"; pero entendiendo que una explicación de los predicados nominalizados -el mencionado "humanidad", por ejemplo- como términos singulares abstractos presupone una explicación de su papel como predicados[49]. Esta transformación -indica Cocchiarella- es posible si se apela al "principio contextual de Frege" según el cual dado que sólo en el contexto de una proposición puede ocurrir un predicado (como tal predicado), únicamente desde estas ocurrencias podríamos establecer el sentido que tendría tal predicado al transformarlo en término singular abstracto[50].

En el contexto de una expresión -cuando estamos haciendo uso del lenguaje ordinario- un predicado aparecerá

---

[49]N. B. Cocchiarella, op. cit. p. 199.. En la lengua natural la expresión de un predicado se hace mediante un segmento lingüístico que no es más que un enunciado inconcluso, como, por ejemplo "... es hombre", el cual se completa mediante un determinado sujeto: situando en el espacio punteado el sujeto "Juan" obtenemos el enunciado "Juan es hombre"; como advierte S. Kleene (Op. cit. pp.136-138), "esta situación queda convenientemente descrita utilizando la moderna noción matemática de 'función'". El punto de vista de Cocchiarella, considerando el objetivo perseguido, podría perfectamente ser sustituido por el mencionado de Kleene.

[50]Exactamente, Cocchiarella afirma: "For it [Frege's famous context principle] is only in the context of a sentence that a predicate can occur as a predicate, and it is only throught a correlation with such occurrences that we are to understand the role of a nominalized predicate as an abstract singular term". Ibid. p. 199.

saturado mediante el correspondiente argumento, en cuyo caso nos hallamos ante una proposición que tiene como referencia (*Bedeutung* de Frege) un valor de verdad. En una expresión de curso de valores, o en una expresión en la cual un predicado aparece como argumento (como, por ejemplo, en "el hombre es la especie dominante en la Naturaleza"), el predicado en cuestión aparecerá nominalizado. En este último caso, el predicado se muestra como un nombre, y como tal tendrá una referencia. Si pensamos en el sentido (*Sinn* de Frege), el predicado significa un concepto, es decir, el predicado, ocurriendo como tal, como parte de una proposición, tiene como sentido un concepto.

A partir de un planteamiento como éste, y teniendo en cuenta la doctrina del sentido y la referencia de Frege, Cocchiarella plantea la necesidad de que el predicado nominalizado tenga como referencia un objeto, aunque se trate de un objeto de carácter abstracto. Ahora bien, Cocchiarella piensa que la esencial insaturación de un concepto hace que el concepto como tal no sea referencia de un predicado nominalizado[51]; el concepto no es un objeto. Por su parte, Frege había advertido una dificultad para expresar qué sea un concepto; así, "*el concepto 'caballo'* no es

---

[51]Ibíd. p. 200.

ningún concepto"[52], es decir, la referencia del nombre "*el concepto 'caballo'*" no es un concepto con lo cual se puede pensar que, dado un predicado nominalizado, por ejemplo, "humanidad", la referencia de éste no es el concepto "humano". Teniendo esto en cuenta, Cocchiarella concluye que la referencia de "humanidad" habría de ser algo cuya naturaleza no sea predicativa o insaturada, lo que, de acuerdo con Frege, no es un concepto sino un objeto que representa al concepto y que se puede denominar "concepto-correlato"[53].

Desde el punto de vista de Frege, "predicado" y "función cuyo valor sea siempre un valor de verdad" son sinónimos. En una expresión simbólica, el signo funcional (signo de un predicado), por ejemplo ϕ , como tal función formando parte de una proposición, significa un concepto (éste es el *Sinn* del predicado en cuestión); pero cuando hablamos de "el concepto ϕ", nos hallamos ante un predicado nominalizado, cuya referencia (su *Bedeutung*) no es el concepto mismo sino un objeto , el cual se denomina "concepto correlato" -como se ha visto más arriba-. El concepto-correlato de "el concepto ϕ" viene a ser el conjunto de los argumentos para los cuales ϕ denota "lo verdadero" o, más exactamente, el

---

[52] G. Frege, "Sobre concepto y objeto", en *Escritos lógico semánticos*, p. 63.

[53] N. B. Cochiarella, op. cit. p. 200.

conjunto de los a tales que $\phi(a)$ denota "lo verdadero"; dicho conjunto no es más que el rango de valor de ϕ, que simbólicamente se expresa como $\grave{\varepsilon}\phi(\varepsilon)$. Así pues, $\grave{\varepsilon}\phi(\varepsilon)$, que para Frege es un objeto lógico llamado "concepto-correlato", constituye el *denotatum* del predicado nominalizado "el concepto ϕ".

Por su parte, Russell considera que Frege usa la noción de concepto en el mismo sentido que él usa la de función proposicional, de acuerdo con sus manifestaciones en el período que Cocchiarella ha designado con el nombre de "primer logicismo" de Russell[54]. La naturaleza insaturada de la función proposicional se corresponde con la naturaleza del predicado.

Cocchiarella estudia cómo en Russell es posible el paso de una función proposicional a su nominalización, proceso que se explica de manera semejante a la del principio contextual fregeano. En el contexto de las proposiciones en que interviene una función proposicional, podemos determinar el

---

[54]B. Russell, *Los principios de la matemática*, p. 574. "Primer logicismo" correspondería al período anterior a la primera edición de *Principia mathematica*, mientras que a partir de esta obra estaríamos ante el "segundo logicismo" o simplemente "logicismo". Cocchiarella no establece una línea divisoria clara entre ambos períodos; podemos entender que con "primer logicismo" se refiere a los planteamientos russellianos a los cuales no corresponde un cálculo explícitamente, mientras que el "segundo logicismo" de Russell se expresa en el cálculo de *Principia Mathematica*.

sentido de ésta. Russell afirma que una función proposicional del tipo φx es tal que φ "no es una entidad separada y distinguible: vive en las proposiciones de la forma φx"[55]. Para Russell las variables predicativas (funcionales) pueden ocurrir en las proposiciones de dos modos, como predicados propiamente dichos y como argumentos; cuando una variable predicativa ocupa lugar de argumento estamos ante el predicado nominalizado. La posición de Russell en *Principia Mathematica* es considerar que las funciones proposicionales, cuando ocupan posición de argumento, son como los términos, en cuanto que tienen la característica común de ser ser argumentos. En el "primer logicismo de Russell" las diferencias entre los términos que son conceptos y los que no lo son estriba en el modo en que aparecen en ciertas proposiciones, verdaderas o falsas[56]. Cocchiarella subraya el hecho de que no se de una plena coincidencia, pero señala un punto de vista común a lo que denomina "logicismo de Frege" y el "primer logicismo de Russell": los conceptos tienen una naturaleza predicativa, siendo esta naturaleza la base de las leyes de la lógica[57]. Dado este punto de vista común, Cocchiarella considera que "el primer logicismo de Russell" se ex-

[55]Ibíd., p. 121.

[56]Ibíd., p. 121 y ss. y p. 76 y ss.

[57]N. B. Cocchiarella, op. cit. p. 201.

presaría en un cálculo semejante al de *Grundgesetze*[58].

§ 9 **El sistema de cálculo.**

Cocchiarella hace uso de un simbolismo similar al de Russell y presenta un cálculo de segundo orden del mismo alcance que el de *Grundgesetze*, por lo cual será inconsistente. A partir de este cálculo va introduciendo las modificaciones necesarias para evitar la inconsistencia, hasta lograr un nuevo sistema de cálculo tal que cumpla, en la medida de lo posible, los requisitos del logicismo, al tiempo que pueda ser comparado con el sistema de Frege, como veremos a continuación.

El alfabeto del lenguaje en cuestión consta de signos para variables (y constantes) individuales y predicativas de cualquier aridad, la constante diádica "=" y los signos lógicos[59] "−" (negador), "→" (implicador), "↔" (coimplicador), "∃" (cuantificador existencial), "∀" (cuantificador universal), "λ" (λ-operador) y signos auxiliares (paréntesis, corchetes, etc.). Metalingüísticamente se usan letras griegas para denotar fórmulas, latinas minúsculas para denotar variables (y, en su caso, constantes) individuales y mayúsculas para las predicativas, expresando la aridad median

[58]Ibid. p. 206.

[59]Eventualmente, el "conjuntor" se representa mediante "&"

te un índice superior, si el contexto lo requiere. Cocchiarella no da explícitamente unos criterios para la definición de términos y fórmulas, pero define lo que denomina "las expresiones significativas de tipo n" -designadas por ME_n-, para $n \geq 1$, de la manera siguiente:

Definición 1.

1) Cada variable (o constante) individual está en ME_0; cada variable (o constante) predicativa n-ádica está tanto en ME_0 como en ME_{n+1},

2) Si $a,b \in ME_0$, $(a=b) \in ME_1$,

3) Si $\pi \in ME_{n+1}$, y $a_1,\ldots,a_n \in ME_0$, $\pi(a_1 \ldots a_n) \in ME_1$,

4) Si $\phi \in ME_1$, y $x_1,\ldots,x_n$ son variables individuales distintas entre si, $[\lambda x_1 \ldots x_n \phi] \in ME_{n+1}$,

5) Si $\phi \in ME_1$, $-\phi \in ME_1$,

6) Si $\phi,\psi \in ME_1$, entonces $(\phi \rightarrow \psi) \in ME_1$,

7) Si $\phi \in ME_1$ y α es una variable individual o predicativa, $(\forall\alpha)\phi \in ME_1$,

8) Si $\phi \in ME_1$, $[\lambda\phi] \in ME_0$,

9) Si $n>1$, $ME_n \subseteq ME_0$[60].

El conjunto de las fórmulas está constituido por los miembros de ME_1, mientras que ME_0 es el conjunto de lo que

---

[60] N. B. Cocchiarella, op. cit. p.216.

él denomina "términos singulares"[61]. Término singular, o, simplemente, término, en este sentido se puede definir así:

Definición 2.

Toda variable (o constante) *individual o predicativa es un término*; si ϕ es una *fórmula* y $x_1,...,x_n$ son *variables individuales* distintas entre si, $[\lambda x_1...x_n\phi]$ es un *término* (incluyendo $[\lambda\phi]$ como caso especial para cero variables). Un término de la forma $[\lambda x_1...x_n\phi]$ es llamado "λ-abstracto".

En cuanto a los axiomas y reglas, el cálculo es como sigue:

Definición 3.

Son *axiomas* todas las *fórmulas miembros* de ME_1 que sean *tautologías* o una de las siguientes formas:

1) $(\forall u)[\phi \rightarrow \psi] \rightarrow [(\forall u)\phi \rightarrow (\forall u)\psi]$, donde u es una variable individual o predicativa.

2) $\phi \rightarrow (\forall u)\phi$, donde u es una variable individual o predicativa que no ocurre libre en ϕ.

3) $(\exists x)(a=x)$, donde a es un término singular en el cual x no ocurre libre.

4) $(a=b) \rightarrow (\phi \leftrightarrow \psi)$, donde a, b, son términos singulares y ψ viene de ϕ por reemplazo de una o más ocurrencias

---

[61]Ibíd. pp. 215-216.

libres de b por ocurrencias libres de a.

5) $(\exists F^n)(\forall x_1)...(\forall x_n)[F(x_1...x_n) \leftrightarrow \phi]$, donde F^n no ocurre libre en ϕ y $x_1,...,x_n$ están entre las variables individuales distintas que ocurren libres en ϕ.

Tambien las fórmulas obtenidas a partir de estas mediante las siguientes reglas de inferencia:

R1) Si $\vdash \phi \rightarrow \psi$ y $\vdash \phi$, entonces $\vdash \psi$,

R2) Si $\vdash \phi$ y u es una variable individual o predicativa, entonces $\vdash (\forall u)\phi$[62].

Con objeto de poder comparar este sistema y el cálculo de *Grundgesetze*, establecemos la noción de "equivalencia entre cálculos":

Definición 4.

Diremos que dos sistemas de cálculo $\mathbb{CL}$ y $\mathbb{CL}'$, con lenguajes $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$, respectivamente, *son equivalentes* sii:

1) $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ tienen las mismas categorías de signos, o se puede establecer una serie de correspondencias entre los signos de $\mathcal{L}$ y los de $\mathcal{L}'$[63]. Estas correspondencias determinan lo que po

---

[62]Ibíd. p. 206.

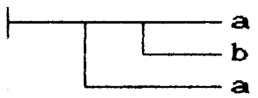
[63]Así, por ejemplo, si α y β son fórmulas de $\mathcal{L}$ en las cuales no ocurre $\vee$, α' y β' son las fórmulas de $\mathcal{L}'$ que corresponden a α y β, respectivamente, y en $\mathcal{L}'$ no existe el signo correspondiente al disyuntor pero $\Rightarrow$ es el implicador de $\mathcal{L}'$ y $-$ es el negador de $\mathcal{L}'$, entonces $-\alpha' \Rightarrow \beta$ sería la fórmula correspondiente a $\alpha \vee \beta$.

demos llamar "una traducción".

2) $\mathbb{CL}_{(P)}$, parte proposicional de $\mathbb{CL}$, es equipotente a $\mathbb{CL}'_{(P)}$, parte proposicional de $\mathbb{CL}'$, teniendo en cuenta que una fórmula cualquiera de un cálculo es de la parte proposicional de éste sii el signo principal de la fórmula no es un cuantificador.

3) Si α es un axioma de $\mathbb{CL}$, $\alpha \notin \mathbb{CL}_{(P)}$ y α' es la traducción de α en $\mathcal{L}'$, entonces $\alpha' \notin \mathbb{CL}'_{(P)}$ y α' es un axioma de $\mathbb{CL}'$ o bien es equivalente a un axioma de $\mathbb{CL}'$[64].

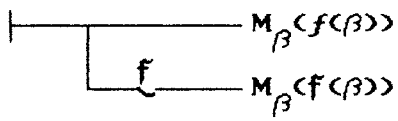
Hemos de comprobar que el cálculo de Cocchiarella equivale al de *Grundgesetze*. Para ello, en primer lugar, traducimos sus leyes básicas, como se expresa en el siguiente cuadro (a la izquierda las anotamos en simbología fregeana):

I) 

$\phi\to(\psi\to\phi)$,

II.a) 

$(\forall u)\phi\to\phi(a/u)$[65]

II.b) 

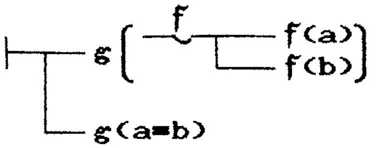
$(\forall F^n)\phi\to\phi(\varphi/F(x_1...x_n))$[66]

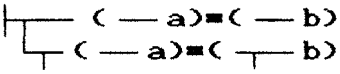
---

[64]Estas condiciones valen en sentido inverso, es decir de $\mathbb{CL}'$ a $\mathbb{CL}$.

[65]$\phi(a/u)$ es la fórmula resultante de sustituir en ϕ cada ocurrencia libre de u por a.

[66]$\phi(\varphi/F(x_1...x_n))$ es la fórmula resultante de sustituir en ϕ cada ocurrencia de $F(x_1...x_n)$ por la fórmula φ, la cual pro

III)  | $(a=b)\to(\phi\to\psi)$[67]

IV)  | $-(\phi\leftrightarrow-\psi)\to(\phi\leftrightarrow\psi)$

V) $\vdash (\grave{\varepsilon} f(\varepsilon)=\grave{\alpha} g(\alpha))=(\overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a})=g(\mathfrak{a}))$ |

$$[\lambda x F(x)]=[\lambda x G(x)]\leftrightarrow(\forall u)(F(u)\leftrightarrow G(u))$$

VI) $\vdash a=\backslash\grave{\varepsilon}(a=\varepsilon)$ | $F^n=[\lambda x_1 \ldots x_n F(x_1 \ldots x_n)]$

La formulación 5) de Cocchiarella no es más que una expresión del principio de comprehensión, a partir del cual trata de explicar la equivalencia del alcance de su sistema con el de Frege. II.a) y II.b) las expresa Frege cuantificando, respecrtivamente, la variable individual y la variable predicativa, que son, en cada caso, el argumento de las funciones dadas; en la simbología de Cocchiarella se podría expresar como $(\forall u)F(u) \to F(a)$ y $(\forall F)\mathfrak{F}(F) \to \mathfrak{F}(Q)$, respectivamente, pero, considerando que una fórmula que contenga una variable libre es una función de dicha variable, la fórmula ϕ del antecedente (en $(\forall u)\phi \to \phi(a/u)$ o bien en

---

cede de otra por sustitución de $x_1,\ldots,x_n$ por las constantes individuales $a_1,\ldots,a_n$, en el sentido de A. Church (corresponde a la noción de sustitución que establecemos más abajo).

[67]Siendo ψ la fórmula obtenida a partir de ϕ al intercambiar alguna ocurrencia libre de a por b.

$(\forall F^n)\phi \rightarrow \phi(\varphi/F(x_1..x_n)$ es una función de "u" o de "F^n"; de ahí la traducción que hemos presentado de II.a) y II.b).

La ley III) es exactamente la formulación 4) de Cocchiarella, tomando la letra funcional usada por Frege, la "g", como una función cualquiera, lo que permite considerarla como una función de verdad y pasar a la expresión $(a=b) \rightarrow (\forall F)[F(a) \leftrightarrow F(b)]$, y de aquí a $(a=b) \rightarrow (\phi \leftrightarrow \psi)$, donde ϕ y ψ verifican las condiciones estipuladas en la expresión de la forma del esquema 4) de Cocchiarella.

Las reglas del cálculo de *Grundgesetze* son las de *modus ponens* y la de *generalización*; es decir, respectivamente, las que en Cocchiarella hemos denomninado R1) y R2).

Para establecer que el alcance de su sistema viene a ser equivalente al del de Frege, Cocchiarella afirma que a partir del principio de comprehensión se puede demostrar la ley II.b) de *Grundgesetze*, y viceversa, apelando a la demostración efectuada por Henkin[68] y, así mismo, se puede demostrar en su sistema la ley II.a), para lo cual éste apela a Kalish y Montague[69]. Las pruebas se pueden establecer de la manera siguiente. En primer lugar probaremos que es demostra

[68] L. Henkin, "Banishing the rule of substitution for functional variables", *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 18, n. 3, 1.953, pp. 201-208.

[69] K. & M. "On Tarski's Formalization of Predicate Logic with Identity" *Arch. für Math. Logik und Grundl.* 7-1.965, pp. 61-79.

ble el esquema -expresado en simbología de Cocchiarella- $(\forall x)\alpha \rightarrow \alpha(a/x)$ como instancia del axioma que Hilbert llama "de Aristóteles", donde x es una variable individual o predicativa y "a" una constante de la misma clase que x. En segundo lugar veremos cómo la instancia -específica del segundo orden- $(\forall P)\alpha \rightarrow \alpha(\beta/Px_1...x_n)$, la ley II.b) de *Grundgesetze*, se obtiene en el sistema de Cocchiarella haciendo uso de la demostración de la instancia anterior[70].

Sea la fórmula $(\forall x)\alpha$, donde x es una variable de cualquier clase (individual, o predicativa de determinada aridad); suponemos $-\alpha(a/x)$, siendo "a" una constante de la misma clase que x; la fórmula $x=a \rightarrow (\alpha \leftrightarrow \alpha(a/x))$ es una instancia del esquema 4) de Cocchiarella, de donde $x=a\rightarrow(\alpha\rightarrow\alpha(a/x))$; de aquí se puede obtener $\alpha \rightarrow (-\alpha(a/x) \rightarrow -(x=a))$ y, por aplicación de R2), $(\forall x)(\alpha \rightarrow (-\alpha(a/x) \rightarrow -(x=a))$, de donde, por esquema 1) y aplicación de R1), $(\forall x)\alpha \rightarrow (\forall x)(-\alpha(a/x) \rightarrow -(x=a))$; aplicando R1) (pues contamos con $(\forall x)\alpha$ como hipótesis inicial) obtenemos $(\forall x)(-\alpha(a/x) \rightarrow -(x=a))$ y de aquí, por esquema 1)y aplicación de R1), $(\forall x)-\alpha(a/x) \rightarrow (\forall x)-(x=a)$; por esquema 2), pues habíamos supuesto $-\alpha(a/x)$, $(\forall x)-\alpha(a/x)$; aplicando nuevamente R1) obtenemos $(\forall x)-(x=a)$ y, dado que el esquema axiomático $(\exists x)(x=a)$ equivale a $-(\forall x)-(x=a)$, alcanza-

[70]Teniendo en cuenta que las reglas son las mismas, por lo que tanto las reglas del cálculo de Cocchiarella como las de Frege se mencionan en las pruebas como R1) y R2).

mos una contradicción, a saber, $(\forall x)-(x=a)$ & $-(\forall x)-(x=a)$, por lo que no es admisible el supuesto tomado a continuación de la hipótesis inicial y, en consecuencia, vale su negación, es decir, la fórmula $\alpha(a/x)$. Por otro lado, a partir de $(\forall x)\alpha \rightarrow \alpha(a/x)$ se obtiene la fórmula correspondiente al esquema 3) de Cocchiarella, pues de lo contrario llegaríamos a contradicción, dado que si se admitiera $-(\exists x)(a=x)$, se estaría admitiendo que $(\forall x)-(x=a)$, y como tendríamos $(\forall x)(-(x=a) \rightarrow -(a=a))$, por R1), tendríamos $-(a=a)$.

Establecido lo anterior, sea la fórmula $(\forall P^n)\alpha$, donde P^n es una variable predicativa de aridad n, para $n \geq 1$; según el esquema 5) de Cocchiarella, $(\exists F^n)(F(x_1..x_n) \leftrightarrow \beta)$; supuesto $(\forall x_1)...(\forall x_n)(R(x_1...x_n) \leftrightarrow \beta)$, como tenemos $\alpha(R/P)$ según el axioma de Aristóteles (probado anteriormente), mediante el correspondiente intercambio, en cada caso, de las ocurrencias de R y sus argumentos se obtiene la fórmula α'; pero α' es precisamente la fórmula $\alpha(\beta/P(x_1...x_n))$. Por otra parte, si partimos de $(\forall P^n)\alpha \rightarrow \alpha(\beta/P(x_1...x_n))$ y suponemos que se da la negación del esquema 5) de Cocchiarella, es decir, si suponemos $(\forall P^n)(\exists x_1)...(\exists x_n)(-P(x_1...x_n) \leftrightarrow \eta)$, desde lo anterior y mediante aplicación de la regla R1), se puede obtener $-\eta \leftrightarrow \eta$, por lo que no podemos considerar el supuesto y, en consecuencia,

$$(\exists P^n)(\forall x_1)...(\forall x_n)(P(x_1...x_n) \leftrightarrow \eta),$$

que es una instancia del citado esquema 5).

Por lo que respecta a la ley III) de *Grundgesetze*, en realidad se trata de la expresión de la forma del esquema 4) de Cocchiarella, mientras que las leyes I) y IV) son tautologías. En cuanto a las leyes V) y VI) requieren otro tratamiento más amplio. Así pues, las leyes de *Grundgesetze* estudiadas hasta ahora se pueden derivar en el sistema de Cocchiarella.

Cocchiarella pretende que su sistema de cálculo, aparte de ser equivalente al de *Grundgesetze* (en el sentido definido anteriormente), sea expresión del "primer logicismo de Russell". A esta forma de logicismo de Russell correspondería un cálculo que habría de guardar bastante semejanza con el de Frege (o con uno equivalente a éste). A este respecto Cocchiarella señala[71] el hecho de que Russell no toma II.a) ni II.b) como leyes básicas, pero toma sus correspondientes formas existenciales: a) $\psi(a/x) \rightarrow (\exists x)\psi$, y b) $\psi[\phi/F(x_1...x_n)] \rightarrow (\exists F^n)\psi$. Por otra parte, la notación "^" de Russell permite obtener predicados complejos[72]; en su lugar, Cocchiarella propone el uso del operador λ, siendo el "principio de λ-conversión" el siguiente:

$[\lambda x_1,...,x_n\phi](a_1...a_n) \leftrightarrow \phi(a_1,...,a_n/x_1,...,x_n)$, donde

---

[71]Op. cit. p. 206.

[72]Vid. *Principia Mathematica*, Secc. C, p. 249 y ss. de la edición española.

$[\lambda x_1,\ldots,x_n\phi]$ representa un predicado n-ádico, para $n \geq 1$, denominado λ-abstracto, definido a partir de la fórmula ϕ. Haciendo uso del λ, la forma existencial b) se expresa: $\psi([\lambda x_1,\ldots,x_n]/F^n) \rightarrow (\exists F^n)\psi$.

Por aplicación de la regla de generalización, R2), al principio de λ-conversión se obtiene la expresión: $(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)([\lambda x_1,\ldots,x_n\phi](x_1\ldots x_n) \leftrightarrow \phi)$, y puesto que

$$\{(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)([\lambda x_1,\ldots,x_n\phi](x_1\ldots x_n) \leftrightarrow \phi\} \rightarrow$$
$$\rightarrow (\exists F^n)\{(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(F(x_1\ldots x_n) \leftrightarrow \phi)\},$$

según la forma existencial b) basta aplicar R1) para obtener la expresión correspondiente a 5). Las expresiones 1) y 2) se obtienen a partir de la ley II) y aplicaciones de las reglas de *modus ponens* y *generalización* -ambas usadas por Frege-. En cuanto a la expresión 3) se puede obtener a partir de la ley II.a)[73]. De cualquier manera, no se puede considerar que esté bien representado el "primer logicismo de Russell" mediante el cálculo de Cocchiarella, equivalente al de Frege, el cual no es consistente. De hecho Russell, al haber descubierto en *Grundgesetze* la paradoja que lleva su nombre, rechazaba el sistema de Frege como realización del programa logicista.

---

[73]Se puede obtener aplicando la forma existencial russelliana antes mencionada, partiendo de (a=a).

§ 10 Paradoja de Russell

Los propósitos de Frege de reducción de la matemática a lógica sólo podían realizarse a partir de una lógica de predicados. Para Cocchiarella esta lógica había de contener un tratamiento de los predicados nominalizados, teniendo en cuenta que por extensión de un concepto Frege no entiende otra cosa que un curso de valores[74]. En la expresión de un curso de valores aparece el signo funcional, no como ocurrencia del correspondiente predicado, sino como su nominalización. En este caso, para entender el papel del nombre de un curso de valor, es decir, el concepto-correlato, Cocchiarella recuerda que sólo en el contexto de una sentencia un predicado puede ocurrir como predicado, lo que supone hacer uso del "principio contextual", al cual nos hemos referido más arriba, para la explicación de los cursos de valores. Antes dijimos que, por ejemplo, $\grave{\varepsilon}\phi(\varepsilon)$ es la referencia de "el concepto ϕ", pero según este criterio de Cocchiarella es también referencia de "La extensión del concepto ϕ"; es decir, "el concepto ϕ" y "la extensión del concepto ϕ" son sinónimos, y el reconocimiento de tal sinonimia es denominada por Cocchiarella "tesis de la doble correlación de Frege"[75]

---

[74]N. B. Cocchiarella, op. cit. p. 208.

[75]Ibid. p. 210.

La ley V de *Grundgesetze* establece que la identidad de dos conceptos-correlato, a saber, los cursos de valores de dos funciones, equivale a la subordinación mutua de los conceptos significados por tales funciones[76]. En ello ve Cocchiarella una aplicación de la tesis de la doble correlación[77],de modo que los objetos lógicos que figuran en la expresión de la ley V, los cursos de valores (en definitiva, los conceptos-correlato) de las predicaciones mutuamente implicadas, se determinan no por los miembros de tales cursos de valores, sino de acuerdo con la tesis de la doble correlación.

En cuanto al uso del operador λ, Cocchiarella define recursivamente un conjunto de expresiones significativas[78], figurando entre éstas $[\lambda x_1,\ldots,x_n\phi]$ así como $[\lambda\phi]$ (éste último es un caso especial para n variables cuando n=0). De esta manera, cada fórmula es un término si está prefijada por el operador λ. Ahora se puede completar la comparación entre el sistema cocchiarelliano y el fregeano, por lo que respecta a la ley V de *Grundgesetze* -más abajo nos ocupamos

[76]Dos conceptos están mutuamente subordinados si para cada objeto se verifica que tal objeto cae bajo el primer concepto si y sólo si cae bajo el segundo.

[77]Ibíd., p. 211. Aquí apela a palabras del propio Frege, citando un texto editado por G. Gabriel y otros: *Philosophical and Mathematical Correspondence*.

[78]Ibíd. p. 216.

de la VI-. Son fórmulas instancias del esquema 3): $(\exists y)(F^n = y)$, así como $(\exists y)([\lambda x_1,\ldots,x_n\phi] = y)$, mientras que $F^n = G^n \rightarrow (\forall y_1)\ldots(\forall y_n)[F(y_1\ldots y_n) \leftrightarrow G(y_1\ldots y_n)]$ así como

$$[\lambda x_1..x_n\phi] = [\lambda x_1..x_n\psi] \rightarrow (\forall y_1)..(\forall y_n)([\lambda x_1..x_n\phi](y_1..y_n) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow [\lambda x_1..x_n\psi](y_1\ldots y_n))$$

son instancias del esquema 4) del sistema de Cocchiarella[79].

Una instancia de 5), si ϕ es $(\exists G)[x = G \ \& \ -G(x)]$ será: $(\exists F)(\forall x)(F(x) \leftrightarrow (\exists G)[x = G \ \& \ -G(x)])$, pero a partir de aquí se llega a la paradoja: supuesto que F es el predicado para el cual se verifica la fórmula, tendremos: $(\forall x)(F(x) \leftrightarrow (\exists G)[x = G \ \& \ -G(x)])$, y, de aquí: $F(F) \leftrightarrow (\exists G)[F = G \ \& \ -G(F)]$, o, como obtiene el propio Cocchiarella -aunque sólo lo indica y aquí anotamos con detalle-: por 4), $F = x \rightarrow [\phi \rightarrow \phi(F/x)]$, y de aquí que por 2) $F=x \rightarrow (\forall x)[\phi \rightarrow \phi(F/x)]$, y, por 1) así como por generalización existencial, $(\exists x)(F = x) \rightarrow [(\forall x)\phi \rightarrow (\forall x)\phi(F/x)]$, pero $(\forall x)\phi(F/x)$ es $\phi(F/x)$, quedando $(\exists x)(F = x) \rightarrow [(\forall x)\phi \rightarrow \phi(F/x)]$, y, por 3) y R1), $(\forall x)\phi \rightarrow \phi(F/x)$. A partir de aquí, tomando la anterior $(\exists F)(\forall x)(F(x) \leftrightarrow (\exists G)[x = G \ \& \ -G(x)])$, y al suponer $(\forall x)(F(x) \leftrightarrow (\exists G)[x = g \ \& \ -G(x)])$ basta aplicar R1), dado que $(\forall x)\phi \rightarrow \phi(F/x)$, siendo $(F(x) \leftrightarrow (\exists G)[x = G \ \& \ -G(x)])$ la fórmula ϕ, para obtener $F(F) \leftrightarrow (\exists G)[F = G \ \& \ -G(F)]$.

---

[79]Ibíd. pp. 217-218.

La anterior instancia del esquema 5), más arriba mencionada como instancia del principio de comprhensión, se puede derivar de otras fórmulas. En efecto, de acuerdo con la generalización aplicada al principio de λ-conversión, se da $(\forall x_1)...(\forall x_n)([\lambda x_1...x_n\phi](x_1...x_n) \leftrightarrow \phi$; según 4) tenemos $[\lambda x_1,...,x_n\phi]=F \rightarrow (\forall x_1)...(\forall x_n)[F(x_1...x_n) \leftrightarrow \phi]$, y por 3) se tiene $(\exists F^n)([\lambda x_1,.,x_n\phi]=F)$ -pues se ha dicho que $[\lambda x_1,.,x_n\phi]$ es un término-; por aplicación de R1), supuesto $[\lambda x_1,...,x_n\phi]=F$, obtenemos $(\forall x_1)...(\forall x_n)[F(x_1...x_n)\leftrightarrow\phi]$[80], y de aquí es derivable una expresión contradictoria, como en el caso anterior.

Podemos destacar, a modo de resumen, algunas circunstancias. Cocchiarella ha ofrecido determinadas modificaciones del sistema inicialmente presentado: acercamiento a lo que el denominó "primer logicismo de Russell" mediante el principio de λ-conversión; consideración de las fórmulas prefijadas con λ como términos singulares, lo que da lugar a otras posibles instancias de los esquemas 1) a 5). De este modo, el sistema de Cocchiarella puede hacerse equivalente al de *Grundgesetze*[81], si se modificara el esquema 4) para dar lugar a una traducción exacta de la ley V) de *Grundgesetze* y siem-

---

[80]N. B. Cocchiarella, op. cit. p. 220.

[81]Uno de los sentidos de la ley V se obtiene a partir de haberse introducido tales modificaciones.

pre que la ley VI) tuviera la expresión correspondiente en el sistema de Cocchiarella, al cual, para mayor comodidad, nos referiremos en lo sucesivo mediante $\mathbb{C}_{(1)}$. Por otra parte. En el párrafo en el cual hemos presentado un cuadro de equivalencias entre las leyes de *Grundgesetze* y expresiones en la simbología usada por Cocchiarella, la ley VI) aparece como la igualdad entre un predicado y un λ-abstracto: $F^n=[\lambda x_1,\ldots,x_n F(x_1\ldots x_n)]$, y esta fórmula no pertenece a $\mathbb{C}_{(1)}$[82], aunque bastaría añadirla.

§ 11 Sistema logicista consistente.

Para Cocchiarella, en Frege se da una cierta estratificación de conceptos: un concepto de segundo nivel puede ser correlacionado con un concepto de primer nivel, y uno de tercer nivel con uno de segundo, por consiguiente, a partir de ambas correlaciones, se puedan poner en correlación conceptos de tercer nivel con conceptos de primer nivel y, de la misma manera, poner gradualmente conceptos de nivel superior al tercero en correlación con los de primer nivel, siendo estos últimos los que denotan conceptos-correlato[83]. Muestra así Cocchiarella que dado un concepto Q de nivel superior que cae bajo otro concepto M, de nivel superior al

[82]En la posterior revisión aparecerá como fórmula básica.

[83]Vid. §-4 y §-6 anteriores.

de Q, haciendo una generalización del principio contextual en su doble sentido, hablaremos del concepto-correlato significado por el concepto de primer nivel correspondiente a Q, cayendo este concepto-correlato bajo el concepto de primer nivel correspondiente a M. Cocchiarella advierte que esta especie de jerarquía de conceptos debe tenerse en cuenta, en una formulación restringida del principio de comprehensión (no tenida en cuenta en las expresiones anteriores), para evitar la paradoja de Russell[84].

A este respecto Cocchiarella establece la noción de "estratificación homogénea" de la manera siguiente:

Definición 1.

Una fórmula o λ-abstracto ϕ -con las modificaciones expresadas- está *estratificada homogéneamente* si y sólo si existe una asignación **t**, del conjunto de términos que ocurren en ϕ (incluyendo ϕ si se trata de un λ-abstracto) a números naturales, de modo que:

1) Para cada término a y **b**, si (a=b) ocurre en ϕ, entonces $t(a) = t(b)$;

2) Para cada $n \geq 1$, todo predicado n-ádico π y todos los términos $a_1,\dots,a_n$, si $\pi(a_1\dots a_n)$ es una fórmula que ocurre en ϕ, entonces (i) $t(a_i)=t(a_k)$, para $1 \leq i,k \leq n$; y (ii) se ve-

---

[84]N. B. Cocchiarella, op. cit. p. 223.

rifica $t(\pi)=t(a_i)+1$;

3) Para toda $m \in \omega$, para toda m-pla de variables individuales $x_1,...,x_m$ y toda fórmula ψ, si $[\lambda x_1,...,x_m\psi]$ ocurre en ϕ, entonces (i) $t(x_l)=t(x_k)$, para $1 \leq l,k \leq m$; y (ii) se verifica que $t([\lambda x_1,...,x_m\psi])=t(x_k)+1$[85].

Para Cocchiarella la correcta expresión de lo que denominó la "tesis de la doble correlación de Frege" requiere la idea de estratificación. La estratificación de λ-abstractos permite la antes mencionada formulación restringida del principio de comprehensión. A este respecto, Cocchiarella entiende que las restricciones deben ser las menos posibles; determinados cambios en las cláusulas 2.(i), 2.(ii), 3.(i) y 3.(ii) de la noción anterior (procediendo eliminar alguna de ellas o a la sustitución por otras cláusulas) dan lugar a otras nociones de estratificación; pero a partir de ciertas instancias del principio de comprehensión que contenga λ-abstractos estratificados en el sentido más débil, se pueden derivar fórmulas contradictorias[86].

---

[85]Ibíd. p. 224.

[86]Ibíd. p. 224 y 225. Las nociones debilitadas son (a) *estratificación heterogénea*, que se obtiene eliminando 2.(i) y 3.(i) y tomando 2.(ii) como $t(\pi)=s+1$, siendo el máximo de los valores $t(a_1),...,t(a_n)$y 3.(ii) como $t([\lambda x_1...x_n\psi]=$ $=\sigma+1$, siendo σ el máximo de los valores $t(x_1),...,t(x_n)$, y **(b)** *estratificación acumulativa*, como consecuencia de abandonar la cláusula 1), 2.(i) y 3.(i) y en lugar de 2.(ii) y 3.(ii) se toma la exigencia más débil de que se verifique: el valor máximo de $t(a_1),...,t(a_n)$ sea menor que $t(\pi)$ y que

A partir de la noción de estratificación homogénea se puede establecer un nuevo sistema de cálculo, lo que hace Cocchiarella exigiendo que los únicos λ-abstractos posibles sean estratificados homogéneamente; es decir, imponiendo la restricción de que si en una fórmula ocurre un λ-abstracto, éste ha de estar homogéneamente estratificado. En particular, el principio de comprehensión será el *principio de comprehensión estratificado homogenéamente*, por cuanto la fórmula ϕ no puede contener λ-abstractos que no sean estratificados homogéneamente[87].

La imposición de la restricción solamente a los λ-abstractos permite, desde este punto de vista, considerar como fórmulas expresiones como F(F), si F es un predicado monádico, y $[\lambda x\phi]([\lambda x\phi])$, y, de la misma manera, -F(F) y $-[\lambda x\phi]([\lambda x\phi])$, siempre que $t([\lambda x\phi])=t(x)+1$, de acuerdo con la restricción impuesta a los λ-abstractos. No se podría, en cambio, considerar un λ-abstracto tal que contuviera

---

el valor máximo de $t(x_1),\ldots,t(x_n)$ sea menor que el valor de $t([\lambda x_1\ldots x_n\psi])$.

[87]Ibid. p. 226. Hay una cierta redundancia en el texto de Cocchiarella en el sentido de que en el punto 10), como introducción al nuevo sistema de cálculo que presenta, indica que sólo se consideran correctos los λ-abstractos que estén homogéneamente estratificados; más tarde, al presentar el esquema del principio de comprehensión (esquema 7), indica que el λ-abstracto correspondiente ha de estar homogéneamente estratificado, observación innecesaria dada la exigencia general.

expresiones como $F(F)$, ya que no estaría estratificado homogeneamente.

Este planteamiento está bastante de acuerdo con la perspectiva fregeana según la cual una función se puede saturar mediante la propia función como argumento[88], dando lugar a proposiciones que denotan un valor de verdad, aún cuando éste sea "lo falso".

El nuevo sistema presentado por Cocchiarella es como el anterior, bien entendido que en las fórmulas pueden ocurrir λ-abstractos, si están estratificados homogenéamente.

Definición 2.

Son *axiomas* todas las *fórmulas bien formadas* que sean *tautologías* o una de las formas siguientes:

1)-4) ya expresadas en el sistema anterior (en § 9);

5) *Principio de λ-conversión*:

$[\lambda x_1,\ldots,x_n\phi](a_1\ldots a_n) \leftrightarrow \phi(a_1\ldots a_n/x_1\ldots x_n)$, donde $a_1,\ldots,a_n$ son términos singulares y cada a_i está libre para x_i en ϕ;

6) $[\lambda x_1,\ldots,x_nP(x_1\ldots x_n)]=P$, donde P es una variable o constante predicativa n-ádica, $n\geq1$;

7) *Principio de comprehensión estratificado homogéneamente*,

---

[88] A este respecto, vid. § 5 del presente trabajo. Así mismo § 6, donde aparece el criterio russelliano de aplicar la teoría de los tipos.

$(\exists F^n)([\lambda x_1,\ldots,x_n\phi]\equiv F^n)$, donde F^n no ocurre libre en ϕ (y $[\lambda x_1,\ldots,x_n\phi]$ está estratificado homogeneamente, de acuerdo con la restricción para λ-abstractos).

Así mismo, las fórmulas que se puedan obtener por aplicación de las reglas, antes mencionadas, R1) y R2) -*modus ponens* y *generalización universal*, respectivamente-[89].

Este nuevo sistema, al que llamaremos $\mathbb{C}_{(2)}$, tiene un alcance similar al del sistema de *Grundgesetze*, en cuanto que los dos cálculos son equivalentes en el sentido establecido anteriormente, con una única limitación: sólo se puede obtener uno de los dos sentidos de la coimplicación de la ley V, es decir sólo se puede obtener V.b)[90], pero no V.a). Al no contener ésta, es decir, al no tener la fórmula $(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(\phi\longleftrightarrow\psi)\rightarrow[\lambda x_1\ldots x_n\phi]=[\lambda x_1\ldots x_n\psi]$ (o alguna equivalente), $\mathbb{C}_{(2)}$ no es equivalente al cálculo de *Grundgesetze*. Por otra parte, en $\mathbb{C}_{(2)}$ es demostrable el principio de comprehensión, es decir, el esquema 5) de $\mathbb{C}_{(1)}$. En efecto, sea $(\exists F^n)([\lambda x_1\ldots x_n\phi]\equiv F^n)$ tal que en ϕ no ocurre ningún predicado nominalizado; por 5) de $\mathbb{C}_{(2)}$ y R2) se obtiene la fórmula $(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)([\lambda x_1\ldots x_n\phi](x_1\ldots x_n)\longleftrightarrow\phi)$ y mediante 4)

---

[89] Ibid. p. 227.

[90] $[\lambda x_1,\ldots,x_n\phi]\equiv[\lambda x_1,\ldots,x_n\psi]\rightarrow(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(\phi\longleftrightarrow\psi)$ (En N. B. Cocchiarella, op. cit. p. 218). Según el cuadro de equivalencias con la simbología usada por Cocchiarella, presentado antes: $[\lambda xF(x)]\equiv[\lambda xG(x)]\rightarrow(\forall x)[F(x)\longleftrightarrow G(x)]$.

de $\mathbb{C}_{(2)}$, R1) y generalización existencial, supuesto que $[\lambda x_1...x_n\phi]=F^n$, se obtiene $(\exists F^n)(\forall x_1)..(\forall x_n)(F(x_1...x_n)\leftrightarrow\phi)$. En consecuencia, cualquier fórmula de $\mathbb{C}_{(1)}$, en cuya demostración no ocurra ninguna fórmula que contenga ocurrencias de predicados nominalizados, es demostrable en $\mathbb{C}_{(2)}$. Para completar la comparación de $\mathbb{C}_{(2)}$ con $\mathbb{C}_{(1)}$, recordemos que los esquemas 1) a 4) son los mismos para ambos; el esquema 5) de $\mathbb{C}_{(2)}$ corresponde al *principio de λ-conversión*, del que Cocchiarella había hecho uso para mostrar que $\mathbb{C}_{(1)}$ (junto con tal principio) también expresaba el "primer logicismo de Russell". En $\mathbb{C}_{(1)}$ no aparecía una fórmula correspondiente a la ley VI) de *Grundgesetze*, siendo ésta una de las razones por las cuales no eran equivalentes ambos sistemas; en $\mathbb{C}_{(2)}$ se encuentra incluida: La ley VI) de *Grundgesetze* no es más que la expresión 6) del nuevo sistema cocchiarelliano.

$\mathbb{C}_{(2)}$ no equivale al sistema de Frege, como se ha dicho, pero con él Cocchiarella consigue un cálculo que posee algunas ventajas sobre el sistema $\mathbb{C}_{(1)}$ inicial. En primer lugar, la falta de equivalencia con el de *Grundgesetze*, en el sentido establecido, se reduce a la ley V.a) de éste. Por otra parte, $\mathbb{C}_{(2)}$ contiene el principio de λ-conversión y es una lógica de predicados nominalizados; la idea de la estratificación homogénea supone, de alguna manera, la incorporación del "principio de círculo vicioso", tratando de evitar las causas de la paradoja; es decir, con la estratificación homogénea, desaparecen en $\mathbb{C}_{(2)}$ las circunstancias por las cuales se podía derivar en $\mathbb{C}_{(1)}$ la paradoja de Russell, ello sin tener que desarrollar la teoría de los tipos. A este respecto, $\mathbb{C}_{(2)}$ es mejor representante del "primer logicismo de Russell" que $\mathbb{C}_{(1)}$.

Cocchiarella se plantea el problema de la consistencia de $\mathbb{C}_{(2)}$ y señala las líneas que permiten establecer la prueba correspondiente. Estas se presentan de la manera siguiente: $\mathbb{C}_{(2)}$-monádicos es como el sistema $\mathbb{C}_{(2)}$, pero los únicos predicados que contiene son monádicos; si $\mathbb{C}_{(2)}$-monádicos es consistente, entonces $\mathbb{C}_{(2)}$ es consistente; entendiendo la predicación monádica como pertenencia[91], $\mathbb{C}_{(2)}$ es consistente en relación al sistema "NFU" de R. Jensen[92], el cual es consistente en relación a la teoría de conjuntos de Zermelo (débil)[93], la cual es una teoría de conjuntos que consta de los axiomas de *extensionalidad*, *conjunto de pares*, *conjunto suma*, *conjunto potencia* y, por último, *separación* (tambien denominado *Aussonderungsaxiom*)[94]. En resumen, esta-

---

[91]"Px" como sinónimo de "$x \in P$".

[92]R. B. Jensen, "On the consistency of a slight modification of Quine's *New Foundations*", en *Words and objections. Essays on the Work of W. V. Quine*, pp. 278-291.

[93]Cfr. N. B. Cocchiarella, op. cit. p. 228 y nota núm. 3 en p. 250.

[94]Las expresiones formales de éstos son, respectivamente, las siguientes (en simbología distinta de la de Cocchiarella):

blece, sin una demostración pormenorizada, el siguiente teorema: *Si la teoría de conjuntos de Zermelo (débil) es consistente, entonces* $\mathbb{C}_{(2)}$ *es consistente*[95].

Para dar aún mayor alcance al cálculo, Cocchiarella propone una nueva ampliación. Para ello añade al sistema $\mathbb{C}_{(2)}$ la siguiente expresión del *principio de extensionalidad* (designaddo por "Ext"):

$(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(\phi\leftrightarrow\psi)\rightarrow[\lambda x_1\ldots x_n\phi]=[\lambda x_1\ldots x_n\psi]$, el cual no es más que la expresión de la ley V.a) de *Grundgesetze*[96].

A partir de aquí, en el mismo sentido que antes, señala la consistencia de $\mathbb{C}_{(2)}$+(Ext) relativa a la teoría de conjuntos de Zermelo (débil). Es decir, establece el siguiente

Teorema.

Si la teoría de conjuntos de Zermelo (débil) es consistente, entonces $\mathbb{C}_{(2)}$+(Ext) *es consistente*[97].

---

1) $\bigwedge z(z\in x \leftrightarrow z\in y) \rightarrow x\cong y$;
2) $\{x,y\}$ ES UN CONJUNTO;
3) $\bigcup x$ ES UN CONJUNTO;
4) $\mathfrak{P}(x)$ ES UN CONJUNTO; y
5) $\bigvee y\bigwedge z(z\in y \leftrightarrow z\in x\wedge\mathfrak{A})$, donde y no está libre en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A}$ es una fórmula LIMITADA. Una fórmula está LIMITADA cuando sus cuantificadores están de la siguiente forma: $\bigwedge x(x\in y \rightarrow \mathfrak{A})$ o bien $\bigvee x(x\in y \wedge \mathfrak{A})$. Cfr. R. B. Jensen, op. cit., p. 282.

[95] N. B. Cocchiarella, op. cit. p. 228.

[96] Ibíd. p. 228.

[97] Ibíd. p. 230.

$\mathbb{C}_{(2)}$+(Ext) tiene las mismas características que $\mathbb{C}_{(2)}$ y, además, contiene la formulación completa de la ley V) de *Grundgesetze*; por ello, $\mathbb{C}_{(2)}$+(Ext) resulta equivalente (en el sentido establecido) al sistema de Frege, apareciendo como una reconstrucción consistente de éste -admitiendo la demostración de consistencia-. En esta reconstrucción, Cocchiarella ha tenido en cuenta ciertos puntos de vista de Russell -anteriores a *Principia Mathematica*-, resultando una lógica de predicados de segundo orden con identidad, la cual viene a ser una representación tanto del "logicismo de Frege" como del "primer logicismo de Russell". Por otra parte, Cocchiarella no estudia otras cuestiones metateóricas, limitándose a hacer algunas consideraciones acerca de posibles sistemas de lógica modal y otras de carácter filosófico[98].

En este contexto se puede plantear si $\mathbb{C}_{(2)}$+(Ext) satisface las exigencias del logicismo que indicamos anteriormente: a) que las nociones matemáticas sean definidas en términos de las nociones lógicas, b) que los teoremas de la matemática sean demostrados como teoremas de la lógica. En

---

[98]Ibíd. p. 234 y ss.. Presenta lo que denomina una "segunda reconstrucción del logicismo fregeano": tras analizar la llamada "tesis de Abelardo" -$(\forall F^n)$-$(\exists x)(F^n \equiv x)$- cambia el esquema 3) por $(\forall x)(\exists y)(x=y)$ y añade $(a=a)$, λ-conversión existencial y principio de comprehensión existencial. A partir del sistema resultante -del que también indica se puede probar una consistencia relativa-, mediante la adecuada introducción de los operadores modales, presenta un cálculo modal como una "forma intensional del logicismo de Frege".

cualquier caso, $\mathbb{C}_{(2)}$+(Ext) estaría sujeto a las limitaciones propias de los sistemas que formalizan la aritmética, como teorema de incompletud de Gödel, generalización de Rosser, etc..

CAPITULO II

NOCIONES GENERALES DE LOGICA DE SEGUNDO ORDEN.

§ 12 Noción de lógica.

Si nos preguntamos por la naturaleza de la lógica, la respuesta puede venir dada desde dos niveles bien diferenciados: el relativo a los lenguajes naturales y el de los lenguajes formales. Si nos referimos a la lógica en relación al lenguaje natural, podemos considerarla la teoría de los términos sincategoremáticos, teniendo en cuenta que éstos son palabras que carecen de un significado propio y se usan para la composición de enunciados[1].

Acerca de la verdad -o falsedad- de un enunciado simple, cabe afirmar que está determinada por los hechos[2], pero el valor de verdad de un enunciado complejo es una función de los valores de verdad -"verdadero", "falso"- de los enunciados simples que lo integran. A partir de esto,

---

[1]Como términos sincategoremáticos lógicos (en español) contamos con "no", "y", "o", "si ..., entonces ...", "existe al menos un", "todos", etc..

[2]Vid. B. Russell, "El atomismo lógico" y "La filosofía del atomismo lógico", en *Lógica y conocimiento*, p. 451 y ss. y p. 245 y ss., respectivamente. Así mismo, L. Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, especialmente prop. 4.023 y ss. y 5. y ss..

y relativamente también a los lenguajes naturales, se puede concebir a la lógica como el conjunto de los enunciados que son verdaderos en virtud de su forma.

Situados en el otro plano, por lo que respecta a los lenguajes formales, la lógica puede ser entendida bien como a) una teoría de las constantes lógicas; o b) el conjunto de las fórmulas que son universalmente válidas.

Establecer la noción de lógica relativamente a los lenguajes formales requiere dos pasos previos: definir el propio lenguaje formal y el correspondiente sistema de cálculo, de un lado, y presentar la semántica de este lenguaje, de otro.

§ 13 Sistema de segundo orden:

Definición 1. Lenguaje formal.

Mediante $\mathcal{L}$ designamos un lenguaje formal, de modo que $\mathcal{L} =_{def} \langle \mathcal{A}, \mathcal{F} \rangle$, donde $\mathcal{A}$ representa el alfabeto de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{F}$ el conjunto de las fórmulas de $\mathcal{L}$. Definimos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{F}$, respectivamente, de la siguiente manera:

$\mathcal{A} = \mathcal{V} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{X}$, siendo $\mathcal{V}$ el conjunto de signos individuales -variables y constantes (o parámetros)-; $\mathcal{C}$ el conjunto $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \bigvee, \bigwedge\}$ de las constantes lógicas (en algunos lenguajes $\mathcal{C}$ sólo consta de $\neg$, $\rightarrow$, $\bigvee$, o bien $\neg$, $\vee$, $\bigvee$) . $\mathcal{P}$, el conjunto de los signos predicativos, integrado por el conjunto de las variables predicativas y el de las constantes predicativas, y, finalmente, $\mathcal{X}$ es el conjunto de los signos auxiliares.

Observaciones.

Hemos de tener en cuenta algunas observaciones. En primer lugar, algunos lenguajes formales de primer orden tienen en su alfabeto signos de función o "functores". Para nuestros propósitos, convengamos en que otro subconjunto de $\mathcal{A}$ es ζ; los miembros de ζ se representan mediante f^n, n=1, 2, ..., con los subíndices necesarios, para diferenciarlos dentro de cada valor de n, denominándose a n "la aridad" del functor correspondiente. En este caso, se define el conjunto $\mathcal{T}$ de los términos de $\mathcal{L}$ de la siguiente manera:

1) Si a es una variable o una constante individual, $a \in \mathcal{T}$, y

2) Si $f^k \in \zeta$, para $k \geq 1$, y a_1, ..., a_k son k ocurrencias de miembros de $\mathcal{T}$ (no necesariamente distintos), entonces se verifica que $f^k(a_1 \ldots a_k) \in \mathcal{T}$.

Por otra parte, el conjunto $\mathcal{P}$ de los signos predicativos consta de variables predicativas "monádicas", "diádicas", etc.. Los miembros de $\mathcal{P}$ se representan mediante P^1, P^2, ..., P^n, expresando el superíndice la aridad y, para cada aridad, se usarán los subíndices necesarios para diferenciar unas variables de otras, dentro de la aridad[3]. La expresión de la aridad se suprimirá cuando el contexto permita su determinación, por lo que escribiremos, por ejemplo, P en lugar de P^k; lo mismo se puede convenir respecto de los functores: $f(a,b)$, siendo términos "a" y "b", se anotará en lugar de $f^2(a,b)$, pues resulta evidente que, en este caso, se trata de un functor diádico.

Si $\mathcal{L}$ es un lenguaje formal de teoría de los tipos, la definición de $\mathcal{A}$ es distinta. En este supuesto hemos de fijar la noción de tipo. T_π es el conjunto de los tipos, caracterizado mediante las cláusulas: 1) $0 \in T_\pi$, 2) si i_1, i_2, ... i_m son miembros de T_π, entonces $(i_1,...,i_m) \in T_\pi$. Para cada tipo se define el conjunto de variables de la siguiente manera: X^0 es variable individual, y si $\alpha \neq 0$, entonces X^α es una variable predicativa de tipo α[4].

---

[3]La aridad es una aplicación de signos predicativos (variables o constantes) a números naturales: $\varphi:\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{N}$, de manera que $\varphi(P^k)=k$, $k\in\mathcal{N}$. Por similitud con los predicados de la lengua ordinaria, la aridad no es más que el número de "huecos" del predicado (del signo miembro de $\mathcal{P}$) que es preciso ocupar para dar lugar a una proposición (una fórmula de $\mathcal{L}$). A lo largo del texto, en relación sólo al segundo orden, cuando aparezca la expresión "variable de cualquier tipo" nos referimos a variables que pueden ser individuales o predicativas de cierta aridad; en este sentido -siempre que estemos en segundo orden- podemos considerar que las variables y constantes individuales son de tipo 0, mientras que las variables y constantes predicativas de aridad n son de tipo n, para cada $n\geq1$.

[4]Vid. A. R. Bernstein, "Non-Standard Analysis" en *Studies in Model Theory*, p. 37. Así mismo, M. Manzano, "Los sistemas generales" en *Estudios de lógica y filosofía de la ciencia*,

Como habíamos dicho, $\mathcal{F}$ es el conjunto de las fórmulas de $\mathcal{L}$, cuya caracterización varía de unos lenguajes a otros. Considerando que $\mathcal{L}$ es un lenguaje formal de segundo orden (no de teoría de los tipos), $\mathcal{F}$ es el más pequeño conjunto que verifica:

1) Si Q es una letra predicativa k-ádica, para $k \geq 1$, y $a_1, \ldots a_k$ son k ocurrencias de términos (no necesariamente distintos), entonces $Qa_1 \ldots a_k \in \mathcal{F}$,

2) i) Si $\alpha \in \mathcal{F}$, entonces $\neg\alpha \in \mathcal{F}$,

ii) Si $\alpha \in \mathcal{F}$ y $\beta \in \mathcal{F}$, entonces: $\alpha \wedge \beta \in \mathcal{F}$; $\alpha \vee \beta \in \mathcal{F}$; $\alpha \rightarrow \beta \in \mathcal{F}$;

iii) Si $\alpha \in \mathcal{F}$ y s es una variable (individual o predicativa de cualquier aridad), entonces $\bigvee s\alpha \in \mathcal{F}$ y $\bigwedge s\alpha \in \mathcal{F}$.

En el supuesto de que se trate de un lenguaje formal de teoría de los tipos, la cláusula 1) sería: Si X^{α} es una variable (o constante, si las hubiera) de tipo α tal que α es $\langle i_1, \ldots, i_m \rangle$ y $B_1, \ldots, B_m$ son variables de tipo $i_1, \ldots, i_m$, respectivamente, entonces $X^{\alpha}(B_1 \ldots B_m) \in \mathcal{F}$. La cláusula 2) se mantiene, bien entendido que en 2.iii) s es una variable de cualquier tipo.

$\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{F}$. $\mathfrak{S}$ es el conjunto de las *sentencias* de $\mathfrak{L}$. Para cada α, $\alpha \in \mathfrak{S}$ sii en α no ocurre ninguna variable libre. Es decir, una fórmula α es una sentencia cuando, y sólo cuando,

---

p. 72..

carece de variables libres.

Definición 2. Sustitución.

a) Sea α una fórmula. Definimos $\alpha(r/s)$ como la *operación de sustitución de variables por variables o constantes*, siendo r del mismo tipo que s, de la siguiente manera:

Si (i) s no ocurre libre en α, o (ii) r no ocurre libre para s en α[5], entonces $\alpha(r/s)$ es α. Si no se verifican (i) ni (ii), $\alpha(r/s)$ es la fórmula que resulta al sustituir simultáneamente en α cada ocurrencia libre de s por r.

b) Sean α y β fórmulas. Definimos $\alpha(\beta/Px_1...x_n)$, para $n\geq1$, como la *operación de sustitución de variables predicativas por fórmulas*, de la siguiente manera:

Si (i) P no ocurre libre en α, (ii) hay al menos una variable libre y que ocurre como argumento de P en α y una de las variables libres x_1, x_2, ..., x_n de β ocurre en esta fórmula bajo el alcance de un cuantificador que tiene a y como sufijo, o (iii) hay en β una variable libre s para la que se verifica que una de las ocurrencias libres de P en α cae bajo el alcance de un cuantificador que tiene a s como

---

[5]Es decir, que ninguna de las ocurrencias libres de s en α cae bajo el alcance de un cuantificador que tenga a r como sufijo.

sufijo; entonces $\alpha(\beta/Px_1...x_n)$ es α.

Si no se verifica ninguna de las condiciones (i), (ii) o (iii) precedentes, $\alpha(\beta/Px_1...x_n)$ es la fórmula que resulta al sustituir simultáneamente en α cada fórmula atómica $Pb_1...b_n$, con P libre, en donde para cada $i\leq n$, b_i es una variable o constante individual, por la fórmula $\beta(b_1...b_n/x_1...x_n)$[6].

A partir de $\mathcal{L}$ se define un sistema de cálculo como un conjunto de instrucciones que permiten pasar de un conjunto de fórmulas a otra fórmula. Estas instrucciones pueden ser axiomas, reglas de deducción o ambas, quedando así establecida una teoría de la demostración en el lenguaje en cuestión. Se trata de definir una operación (que se puede llamar "consecuencia sintáctica", de manera que una fórmula será demostrable si se obtiene mediante tal operación); el sistema de cálculo será entonces un algoritmo que permite determinar si una fórmula está o no en la colección de las fórmulas demostrables.

---

[6] Cfr. E. Díaz, "La lógica de segundo orden: los dos axiomas de Hilbert-Ackermann", ponencia en *Jornadas Andaluzas de Filosofía*, Mijas, Marzo 1.989. En §-10 se ha hecho uso de la notación de sustitución de variables individuales y se advirtió que se corresponde con la noción de A. Church. Así pues, $\beta(b_1...b_n/x_1...x_n)$ (o $\beta(b_i/x_i)$) es lo mismo que $S^{x_1...x_n}_{b_1...b_n}\beta$, mientras que $\alpha(\beta/Px_1...x_n)$ es $\check{S}^{Px_1...x_n}_{\beta}\alpha$.

Vamos a establecer un cálculo deductivo $\mathfrak{C}\mathfrak{D}_{(2)}$ de la manera siguiente:

Definición 3.

Una *deducción de* α *a partir del conjunto* Γ de fórmulas es una secuencia finita de fórmulas γ_1, $\gamma_2, \ldots,$ γ_n, tal que para todo $i \leq n$ $\gamma_i \in \Gamma$ o es *consecuencia inmediata en* $\mathfrak{C}\mathfrak{D}_{(2)}$ de fórmulas precedentes y γ_n es α. Si existe una deducción de una fórmula α a partir de un conjunto Γ de fórmulas, diremos que α *se deduce de* Γ (o que Γ deduce α, o α es deducible de Γ) y lo representamos como $\Gamma \vdash \alpha$. La última fórmula de la deducción, es decir, α, se denomina *conclusión*.

Definición 4.

En los pares ordenados que expresamos a continuación, la fórmula que aparece como segundo miembro es *consecuencia inmediata* de las fórmulas que pertenecen al conjunto que aparece como primer miembro:

$\langle\{\alpha, \beta\}, \alpha\wedge\beta\rangle$,

$\langle\{\alpha\wedge\beta\}, \alpha\rangle$, $\langle\{\alpha\wedge\beta\}, \beta\rangle$,

$\langle\{\alpha\}, \alpha\vee\beta\rangle$, $\langle\{\beta\}, \alpha\vee\beta\rangle$,

$\langle\{\alpha, \alpha\rightarrow\beta\}, \beta\rangle$,

$\langle\{\neg\neg\alpha\}, \alpha\rangle$,

$\langle\{\alpha(r/s)\}, \bigvee s\alpha\rangle$; $\langle\{\alpha(\beta/Px_1 \ldots x_n)\}, \bigvee P\alpha\rangle$,

$\langle\{\alpha\}, \bigwedge s\alpha\rangle$,

$\langle\{\bigwedge s\alpha\}, \alpha(r/s)\rangle$, $\langle\{\bigwedge P\alpha\}, \alpha(\beta/Px_1...x_n)\rangle$.

Las fórmulas que pertenecen al primer miembro del par se denominan *antecedentes*. Dada una fórmula γ que es consecuencia inmediata de determinados antecedentes, la secuencia de fórmulas formada, sucesivamente, por los antecedentes y la fórmula γ, es una deducción. De acuerdo con lo dicho anteriormente, γ es la conclusión.

Las deducciones correspondientes a estos pares se denominan *deducciones básicas* y se pueden representar, respectivamente, de la manera siguiente:

1) $\alpha, \beta \vdash \alpha\wedge\beta$,

2) $\alpha\wedge\beta \vdash \alpha$; $\alpha\wedge\beta \vdash \beta$,

3) $\alpha \vdash \alpha\vee\beta$, $\beta \vdash \alpha\vee\beta$,

4) $\alpha, \alpha\rightarrow\beta \vdash \beta$,

5) $\neg\neg\alpha \vdash \alpha$,

6.a) $\alpha(r/s) \vdash \bigvee s\alpha$; 6.b) $\alpha(\beta/Px_1...x_n) \vdash \bigvee P\alpha$,

7) $\alpha \vdash \bigwedge s\alpha$,

8.a) $\bigwedge s\alpha \vdash \alpha(r/s)$; 8.b) $\bigwedge P\alpha \vdash \alpha(\beta/Px_1...x_n)$;

Las deducciones básicas se denominan, respectivamente, "reglas" de INTRODUCCION DEL CONJUNTOR O PRODUCTO LOGICO -IC[7]-, ELIMINACION DEL CONJUNTOR -EC-, INTRODUCCION DEL DISYUNTOR -ID-, ELIMINACION DEL IMPLICADOR O MODUS PONENS

---

[7]Expresamos mediante estas iniciales la denominación abreviada de cada regla.

-EI o MP-, ELIMINACION DEL NEGADOR O DOBLE NEGACION -EN-, INTRODUCCION DEL CUANTIFICADOR EXISTENCIAL -IE$_a$ o IE$_b$-, INTRODUCCION DEL CUANTIFICADOR UNIVERSAL -IU-, ELIMINACION DEL CUANFICADOR UNIVERSAL -EU$_a$ o EU$_b$.

Para representar una deducción cualquiera γ_1, γ_2, ..., γ_n de α a partir de Γ se escribirá, consecutivamente, γ_1 en un renglón, γ_2 en el renglón siguiente, y así sucesivamente hasta llegar a γ_n. A las fórmulas de Γ que ocurran en la secuencia, las llamaremos *premisas*. Si para algunos i,j tales que $i \neq j$, $i,j \leq n$, γ_j es consecuencia inmediata de γ_i (o de γ_i y alguna otra fórmula), a la derecha de γ_j se escribe la ini inicial de la regla correspondiente y a la derecha de γ_i (y de otras posibles fórmulas de las que γ_j es consecuencia in- inmediata) se indica que es una premisa, o se anota la regla por la que se ha obtenido. Es decir, se escribe, por ejemplo:

γ_1	Prem.
γ_2	Prem.
.	
.	
γ_k	EC.
.	
.	
γ_n.	MP.

Para mayor facilidad, convenimos que los renglones consecutivos (o "filas") irán numerados y junto a la indicación de la regla se hará constar los números de las lí neas de las premisas que intervienen; asimismo se harán uso de cuantas abreviaturas y aclaraciones fueren necesarias.

Definición 5.

Dada una deducción Δ de α a partir de Γ, decimos que Δ' es una *deducción subsidiaria* de Δ sii es una deducción de una fórmula β a partir de $\Gamma \cup \{\zeta\}$, donde ζ es una *hipótesis subsidiaria*, que permite obtener una conclusión δ que forma parte de Δ[8]. Las fórmulas tomadas como suposiciones en una deducción subsidiaria son (o han de ser) después *descargadas* o *canceladas*. Una deducción subsidiaria se escribirá según el siguiente esquema (considerando que la deducción es γ_1, ..., γ_n y la primera fórmula es la suposición tomada):

1	γ_1	Hi.
	.	
	.	
	.	
n	γ_n	MP i, j.

La suposición tomada se indica mediante abreviatura (Hip. o similar) y la línea que parte de 1 y concluye en n indica la deducción: desde la fórmula supuesta hasta que es cancelada.

[8]Vid. S. Kleene, *Introducción a la metamatemática*, especialmente cap. V, p. 86 y ss.

Definición 6.

Establecemos la noción de *dependencia* en una deducción según las reglas:

1) Para toda fórmula α de la deducción, α depende de α,

2) Si α depende de β y γ es consecuencia inmediata de α, entonces γ depende de β.

Definición 7.

Una variable s de la fórmula α, *permanece constante en el curso de la deducción* Δ sii no existe ningún par de fórmulas β, γ, tales que β dependa de α y γ sea consecuencia inmediata de β por IU respecto de s.

Definición 8.

A continuación definimos nuevas reglas, mediante expresiones condicionales en las que el antecedente representa deducciones subsidiarias. En las deducciones subsidiarias de 9), 10) y 11), las variables libres de las fórmulas anotadas a continuación de Γ han de permanecer constantes en el curso de tales deducciones:

9) Si Γ, $\alpha \vdash \gamma$, y Γ, $\beta \vdash \gamma$, entonces Γ, $\alpha\vee\beta \vdash \gamma$.

10) Si Γ, $\alpha \vdash \beta$, entonces $\Gamma \vdash \alpha\rightarrow\beta$.

11) Si Γ, $\alpha \vdash \beta\wedge\neg\beta$, entonces $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

12) Si Γ, $\alpha \vdash \delta$, entonces Γ, $\forall s\alpha \vdash \delta$, con la siguiente res-

tricción: s no ocurre libre en δ ni en ninguna hipótesis subsidiaria distinta de α de la cual δ dependa. Estas reglas son, respectivamente, LEY DE CASOS O ELIMINACION DEL DISYUNTOR -ED-, INTRODUCCION DEL IMPLICADOR O TEOREMA DE LA DEDUCCION -IE o TD-, INTRODUCCION DEL NEGADOR -IN-, y ELIMINACION DEL CUANTIFICADOR EXISTENCIAL -EE-.

Podemos determinar la *longitud* de una deducción, obtenida por aplicación de alguna de las reglas 1) a 12), manteniendo la representación de las deducciones básicas indicadas más arriba y teniendo en cuenta la representación de deducciones subsidiarias por aplicación de las reglas 9) a 12), según esquematizamos a continuación:

.
.
.
.

fila n, α
.
.
fila n+k γ

fila n+k+1[9] γ (en n+k pueden aparecer, respectivamente, β, $\beta \wedge \neg\beta$, δ, según se trate de las deducciones subsidiarias de las reglas 10), 11) o 12); y en n+k+1, respectivamente, $\alpha \rightarrow \beta$, $\neg\alpha$, δ). Si aparecen, por ejemplo, m-1 filas más, diremos que la longitud total de la

[9] Dado que este ejemplo es relativo a la regla 9), hay otra deducción subsidiaria.

deducción es n+m.

$\mathfrak{CD}_{(2)}$ queda definido de esta forma en el sentido de que mediante las reglas 1)-12) anteriores se obtiene el conjunto de las fórmulas del cálculo; es decir, el conjunto de las fórmulas que son deductibles en el cálculo a partir del conjunto $\emptyset$ de premisas.

§ 14 Semántica estándar de $\mathcal{L}$.

Definición 1. Interpretación.

$\mathfrak{I} =_{def} \langle \mathbf{D}, \mathcal{F} \rangle$, donde **D** representa un dominio diferente de $\emptyset$, denominado "universo del discurso" o "dominio inicial de la interpretación"; $\mathcal{F}$ es un conjunto de aplicaciones $\mathfrak{I}$ de signos de $\mathcal{L}$ a miembros de **D**, y relaciones definidas en **D**, de la siguiente manera:

1) si **a** es un parámetro, es decir, si $\mathbf{a} \in \mathcal{T}$ y es constante, entonces $\mathfrak{I}(\mathbf{a}) \in \mathbf{D}$;

2) si $R^n \in \mathcal{P}$ y R^n es constante, entonces $\mathfrak{I}(R^n) = \mathbb{R}^n$, siendo $\mathbb{R}^n$ una relación n-ádica definida sobre **D**, para $n \geq 1$; es decir, $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbf{D}^n$, o, lo que es lo mismo, $\mathbb{R}^n \in \mathfrak{P}(\mathbf{D}^n)$.

Observaciones.

En el caso de contar con un lenguaje formal de teoría de los tipos, el conjunto de aplicaciones $\mathcal{F}$ sería caracterizado teniendo en cuenta esta circunstancia. En concreto, la cláusula 1) sería relativa a constantes de tipo 0, mientras que respecto de 2) habrá que interpretar las constantes predicativas en el conjunto de las relaciones de cada tipo. Es decir, si R es de tipo $(a_1, \ldots, a_n)$, donde a_i es un signo de tipo para cada $i \leq n$, con $n \geq 1$, entonces, $\mathfrak{I}(R) \in \mathfrak{P}(\mathbf{D}_{a_1} \times \mathbf{D}_{a_2} \times \ldots \times \mathbf{D}_{a_n})$, teniendo en cuenta que si $a_i = 0$, $\mathbf{D}_{a_i} = \mathbf{D}$, y si $a_i = (b_1, \ldots, b_k)$, $\mathbf{D}_{a_i} = \mathfrak{P}(\mathbf{D}_{b_1} \times \mathbf{D}_{b_2} \times \ldots \times \mathbf{D}_{b_k})$.

Dos interpretaciones $\mathfrak{I}$ e $\mathfrak{I}'$ pueden ser idénticas, lo que se representa $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}'$. Si $\mathfrak{I}$ e $\mathfrak{I}'$ son idénticas en todo excepto en el valor asignado a una constante r, se dice que $\mathfrak{I}$ e $\mathfrak{I}'$ *difieren a lo sumo respecto de "r"* y se representa $\mathfrak{I} \underset{r}{=} \mathfrak{I}'$[10]. Si dadas las interpretaciones $\mathfrak{I}$ e $\mathfrak{I}'$, $\mathfrak{I} \underset{r}{=} \mathfrak{I}'$, entonces $\mathfrak{I}$ e $\mathfrak{I}'$ tienen el mismo dominio inicial y, para cada constante c, si $c \neq r$, $\mathfrak{I}(c) = \mathfrak{I}'(c)$.

Otras nociones semánticas son las que presentamos a continuación, teniendo en cuenta que "satisfactibilidad", si no se especifica en qué sentido, se refiere a *satisfactibilidad en sentido estándar*; "validez universal" a *validez universal en sentido estándar*, etc.. Más adelante, al estudiar lo que podemos denominar *semántica no estándar*, nos referiremos a estas nociones en un sentido que se especificará para no con

[10]Notación de H. Hermes, *Enumerability, Decidability, Computability*, p. 157.

fundiarlas con las de la semántica estándar.

Definición 2. Valor de una fórmula.

Definimos el valor de una sentencia, o fórmula que carece de variables libres, como una aplicación del conjunto de las fórmulas en $\{0, 1\}$, de manera que dada una sentencia α, $\alpha_{\mathfrak{I}} \in \{0, 1\}$, de acuerdo con el siguiente procedimiento:

I) Si α es una fórmula de la forma $Pa_1...a_n$, siendo P una constante predicativa n-ádica, $n \geq 1$, $a_1,...,a_n$ constantes individuales, $\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$ sii $\langle \mathfrak{I}(a_1),...,\mathfrak{I}(a_n) \rangle \in \mathfrak{I}(P)$, si $\langle \mathfrak{I}(a_1),...,\mathfrak{I}(a_n) \rangle \notin \mathfrak{I}(P)$, $\alpha_{\mathfrak{I}} = 0$.

II) Si α no es una fórmula atómica y

(i) α es $\neg\beta$, $\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$ sii $\beta_{\mathfrak{I}} = 0$;

(ii) α es $\beta \wedge \gamma$, $\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$ sii $\beta_{\mathfrak{I}} = 1$ y $\gamma_{\mathfrak{I}} = 1$;

(iii) α es $\beta \vee \gamma$, $\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$ sii $\beta_{\mathfrak{I}} = 1$ o $\gamma_{\mathfrak{I}} = 1$;

(iv) α es $\beta \rightarrow \gamma$, $\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$ sii $\beta_{\mathfrak{I}} = 0$ o $\gamma_{\mathfrak{I}} = 1$;

(v) α es $\bigvee s\beta$, $\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$ sii existe al menos una interpretación $\mathfrak{I}'$ tal que $\mathfrak{I}' \underset{\mathbf{r}}{=} \mathfrak{I}$, siendo **r** una constante que no ocurre en β y es del mismo tipo que **s** tal que $\beta(\mathbf{r}/\mathbf{s})_{\mathfrak{I}} = 1$,

(vi) α es $\bigwedge s\beta$, $\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$ sii para toda $\mathfrak{I}' \underset{\mathbf{r}}{=} \mathfrak{I}$, se verifica que $\beta(\mathbf{r}/\mathbf{s})_{\mathfrak{I}} = 1$.

Definición 3.

Sea β una fórmula en la cual no ocurren variables predicativas libres; sea una secuencia de variables individuales x_1, ..., x_n, para $n \geq 1$, distintas entre si; sea $\Im$ una interpretación cualquiera cuyo universo de discurso es **D**. Definimos *interpretación de la fórmula* β *para las variables* x_1, ...,x_n de la siguiente manera:

a) Si a_1, ...a_n son parámetros que no ocurren en β y $\beta(a_1...a_n/x_1,...,x_n)$ es una sentencia, a la que representamos mediante β'; entonces $\Im(\beta(x_1...x_n))$ es el conjunto de todas las n-plas $\langle a_1,...,a_n \rangle$ tales que: $a_1,...,a_n \in$ **D**, existe al menos una $\Im' \underset{a_1,...,a_n}{=} \Im$ y para cada $i \leq n$, $\Im'(a_i) = a_i$ y $\beta'_{\Im'} = 1$.

b) Si $s_1,...,s_m$ son todas las variables distintas entre si y respecto de $x_1,...x_n$, que ocurren libres en β, entonces $\Im(\beta(x_1...x_n))$ es cualquiera de los conjuntos $\Im^*(\beta'(x_1...x_n))$ en donde β' representa $\beta(r_1...r_m/s_1...s_m)$, siendo r_i constante del mismo tipo que s_i, para cada $i \leq m$, en la cual a lo sumo ocurren libres variables de la secuencia $x_1,...x_n$, e $\Im^* \underset{s_1,...,s_m}{=} \Im$.

Definición 4. Satisfactibilidad.

a) Sea una interpretación $\Im$ y una fórmula α; se dice que $\Im$ *Satisface* α (abreviadamente, $\Im$ *Sat* α) sii $\alpha_{\Im} = 1$.

b) Sea una interpretación $\Im$ y un conjunto Γ de fórmulas. $\Im$ *Satisface simultáneamente* Γ (abreviadamente, $\Im$ *Satisface* Γ, o $\Im$ *Sat* Γ) sii para toda fórmula $\alpha \in \Gamma$, $\Im$ *Sat* α.

c) Una fórmula α *es satisfactible* sii existe al menos una interpretación $\mathfrak{I}$ tal que $\mathfrak{I}$ *Sat* α.

Definición 5. Validez.

Una sentencia α es *válida en relación al dominio* **D** (**D**$\neq\emptyset$) sii para toda interpretación $\mathfrak{I}$ cuyo universo de discurso es **D**, $\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$.

Definición 6. Consecuencia lógica.

Dado un conjunto Γ de sentencias, se dice que la fórmula γ es *consecuencia lógica* de Γ sii toda interpretación que satisface Γ, satisface tambien γ.

Definición 7. Validez universal.

Una sentencia α es *universalmente válida* sii para toda interpretación $\mathfrak{I}$, $\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$. Ello equivale a afirmar que es universalmente válida sii es válida en todo dominio no vacío.

Observaciones.

La noción de satisfactibilidad se puede extender a fórmulas con variables individuales libres. A este respecto, sea $\alpha(x_1,\ldots,x_n)$ una fórmula en la cual ocurren libres n va̲riables individuales (las que aparecen entre paréntesis); $\alpha(x_1,\ldots,x_n)$ es satisfactible sii $\wedge x_1\ldots x_n \neg\alpha(x_1,\ldots,x_n)$ no es universalmente válida. Así mismo, se puede extender la noción de validez universal a fórmulas con variables individuales libres: $\alpha(x_1,...,x_n)$ es universalmente válida sii $\wedge x_1...x_n\alpha(x_1,...,x_n)$ es universalmente válida[11].

Cuando una fórmula α es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas Γ, lo representamos mediante $\Gamma \vDash \alpha$; y si α es universalmente válida, como se verifica que $\emptyset \vDash \alpha$, se anotará $\vDash \alpha$.

Fácilmente se comprueba que, siendo fórmulas α, β y γ, si $\{\alpha, \beta\} \vDash \gamma$, entonces $\{\alpha\} \vDash \beta\rightarrow\gamma$. En efecto, por hipótesis, para cada interpretación $\mathfrak{I}$ tal que $\mathfrak{I}$ satisface $\{\alpha, \beta\}$, se verifica que $\mathfrak{I}$ satisface γ; así cualquier $\mathfrak{I}$ que satisface $\{\alpha\}$, si no satisface $\beta\rightarrow\gamma$ se daría que $\beta_{\mathfrak{I}} = 1$ y $\gamma_{\mathfrak{I}} = 0$, lo cual es absurdo, pues es imposible una $\mathfrak{I}$ tal que $\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$, $\beta_{\mathfrak{I}} = 1$ pero que $\gamma_{\mathfrak{I}} = 0$[12].

CALCULO DE SEGUNDO ORDEN EN HILBERT-ACKERMANN.

---

[11]Vid. A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, p. 174.

[12]Otros resultados semánticos se establecen de manera similar, si bien no entramos en su exposición pormenorizada para no alargar innecesariamente este apartado. Sólo si el caso lo requiere procederíamos a su demostración, dando por supuesto los resultados comúnmente aceptados sin que haya lugar a controversia.

§ 15 **Teoría de la cuantificación.**

En la obra *Grundzüge der Theoretischen Logik*[13], Hilbert y Ackermann acometen la tarea de ofrecer una amplia panorámica de la situación de la lógica, dedicando el cuarto y último capítulo de esta obra a lo que denominan "cálculo generalizado de predicados". Este tratamiento, junto con el de Church -que veremos más tarde- y los de Frege y Russell estudiados más arriba, es uno de los clásicos, en lo que a la lógica de orden superior se refiere

Hilbert y Ackermann presentan un cálculo básico y proceden a sucesivas ampliaciones. El cálculo más básico es el cálculo proposicional[14], el cual es equipotente con el cálculo que vendría dado por las reglas 1)-8) establecidas anteriormente. Por ampliación, pasan al cálculo de predicados de primer orden o "cálculo restringido de predicados"[15], con variables cuyo ámbito de variabilidad son objetos, mientras que los signos correspondientes a los predicados se consideran constantes.

El cálculo proposicional es insuficiente en el sentido

---

[13]Versión española de 6ª edición, en Ed. Tecnos, *Elementos de lógica teórica*.

[14]Vid. *Elementos de lógica teórica*, pp. 13-53.

[15]Antes estudian un "cálculo de clases", innecesario a los efectos de sucesivas ampliaciones. Ibid. p. 55 y ss..

de que la atribución de una propiedad a un objeto no puede expresarse en dicho cálculo. Por esta razón, Hilbert y Ackermann afirman que en el cálculo de predicados "discriminaremos en la representación de proposiciones entre los *objetos* (individuos) y las *propiedades* (predicados) que de ellos se enuncian, e indicaremos de un modo explícito tal separación"[16]. Al escribir una fórmula en el lenguaje del cálculo de predicados, el signo de predicado aparecerá siempre seguido de signos de objeto: Si el predicado es monádico, a la derecha irá un signo de objeto; si el predicado es diádico, a la derecha aparecerán dos signos de individuo, y así sucesivamente. Las leyes del cálculo proposicional no cambian porque la proposición se exprese simbólicamente de modo diverso; por ello, además de los signos para predicados y objetos o individuos se mantienen las variables proposicionales[17].

La cuantificación, aplicada a las variables individuales, nos proporciona una manera de representar expresiones formales que serán válidas o no en determinados dominios. Una fórmula del cálculo restringido de predicados, con variables individuales cuantificadas, puede ser universalmen-

---

[16]Ibíd., p. 81.

[17]En $\mathfrak{C}\mathfrak{D}(2)$ no hemos considerado necesario incluir signos proposicionales.

te válida, en cuyo caso diremos que tal fórmula representa una proposición verdadera, cualquiera que sea el valor de sus signos predicativos[18]. De aquí que podamos considerar una fórmula de este tipo equivalente a otra, con los mismos signos, pero en la que los signos de predicado estén sometidos a cuantificación universal. Pero Hilbert y Ackermann consideran que una expresión tal que sea una proposición verdadera sólo para algunos valores de sus signos predicativos, no puede presentarse como una fórmula del cálculo de primer orden[19]. Veamos su planteamiento mediante el siguiente ejemplo. La fórmula VxGx representa una proposición, verdadera o falsa según los valores de "G" para una dada interpretación. No es posible decir cuándo representa una proposición verdadera. En cambio, "Hay algún valor de G tal que VxGx" es una expresión que, formalizada, da lugar a una fórmula universalmente válida. No es difícil, pues, encontrar razones a favor de una ampliación del cálculo de predicados de primer orden.

Por otra parte, la moderna filosofía formalista de la matemática tiene como fundador y máximo representante a Hilbert, quién "para salvar la matemática clásica frente a

---

[18]Ibíd. p. 161.

[19]Ibíd. p. 161.

la crítica intuicionista, propuso un programa que podemos establecer preliminarmente como sigue: la matemática clásica deberá ser formulada como una teoría axiomática formal, y deberá demostrarse que esta teoría es consistente"[20]. El estudio de las teorías matemáticas, una vez formalizadas, en tanto que toma como objeto las propias teorías, ha de ser un estudio metateorético; la disciplina encargada de tal estudio -iniciada asimismo por Hilbert- es la metamatemática[21], la cual es una teoría de la demostración.

Cabría preguntar por la relación entre metamatemática (desarrollada en primer orden) y la lógica de segundo orden. S. Shapiro[22] ofrece una reflexión sobre este punto: En la investigación matemática se puede estar usando un lenguaje de primer orden, aunque se supone el de segundo orden; cualquier teoría matemática se expresa -es, se puede decir- en un lenguaje de primer orden, pero, desde un punto de vista lógico, el correspondiente metalenguaje habría de ser de segundo orden. Esta idea se sitúa frente a la perspectiva según la cual un cálculo de segundo orden queda fuera del

---

[20]S. Kleene, op. cit. p. 58.

[21]S. Kleene, op. cit. p. 62: "...la metamatemática proporciona una teoría matemática rigurosa para la investigación de gran variedad de problemas fundacionales en matemática y en lógica...".

[22]"Second-order languages" en *The Journal of Symbolic Logic*, núm. 50-3-1.985.

ámbito de la lógica (como, por ejemplo, Quine). Si nos ceñimos al punto de vista de Hilbert-Ackermann, basta señalar que el cálculo generalizado de predicados -ampliación de la cuantificación a predicados- es una parte de la lógica.

El proceso de ampliación más sencillo consiste en aplicar los signos $\vee$ y $\wedge$ a variables proposicionales y predicativas, pero para Hilbert y Ackermann "la introducción de variables proposicionales ligadas, aún cuando, naturalmente, es posible, no da lugar a nada especialmente interesante; además puede eludirse la introducción de variables de clase ligadas, puesto que es posible utilizar el cálculo con predicados monádicos en lugar del cálculo de clases"[23]. Sólo resta, pues, generalizar el uso de la cuantificación a las variables de predicado, obteniendose la ampliación en el sentido mencionado.

§ 16 Sistema de cálculo.

El sistema de cálculo de predicados de primer orden, también denominado "sistema de cálculo restringido de predicados", adoptado por Hilbert-Ackermann, es equipotente con el cálculo de deducción natural presentado antes, de manera que las variables y constantes de las reglas 9)-12)

[23] *Elementos de lógica teórica*, p. 161.

sean individuales; es decir, para la versión relativa al primer orden.

A partir de este sistema proceden a la ampliación, por las razones expuestas en el anterior apartado, para llegar al cálculo generalizado de predicados. Las reglas que definen $\mathfrak{SD}_{(2)}$, establecidas más arriba, guardan una relación con el cálculo generalizado de Hilbert-Ackermann, en el sentido de que éstos han procedido a una generalización del uso de de los signos $\vee$ y $\wedge$, que pueden tener como sufijos variables tanto individuales como predicativas.

Por lo que respecta a la regla 8b) de $\mathfrak{SD}_{(2)}$ -EU_b-, en el teorema XIII de su cálculo restringido Hilbert-Ackermann habían establecido que "se obtiene una expresión deductible a partir de otra tambien deductible cuando en ésta se lleva a cabo el *reemplazamiento de una variable predicado*"[24], entendiendo por tal reemplazamiento la regla de sustitucipón de la definición 2-§-13. Como los resultados del cálculo restringido "pueden traducirse analógicamente"[25], cabe afirmar que en el cálculo generalizado hay un teorema correspondiente a la regla EU_b.

Además, el sistema de Hilbert-Ackermann tiene dos esque

---

[24]Ibíd. p. 105.

[25]Ibíd. p. 168.

mas axiomáticos propios:

i) $\bigwedge x_1 \ldots x_n \bigvee y \alpha \rightarrow \bigvee F(\bigwedge x_1 \ldots x_n \bigvee y(Fx_1 \ldots x_n y \wedge \alpha) \wedge$

$\wedge \bigwedge x_1 \ldots x_n yz(Fx_1 \ldots x_n y \wedge Fx_1 \ldots x_n z \rightarrow y = z))$[26].

en donde F es una variable predicativa n+1-ádica, para $n \geq 1$; x_i, y, z, son variables individuales y "y = z" es una abreviatura de la fórmula $\bigwedge P(Py \rightarrow Pz)$: y

ii) $\bigwedge x \bigvee F \alpha \rightarrow \bigvee G \bigwedge x \beta$,

en donde, si F es una variable predicativa de aridad $n \geq 1$, G es una variable predicativa de aridad n+1, y β es la fórmula que resulta de sustituir en α toda fórmula $Fc_1 \ldots c_n$ por $Gxc_1 \ldots c_n$[27].

Hilbert y Ackermann señalan que i) corresponde al axioma de elección de la teoria de conjuntos, y ii) es una aplicación de tal axioma, en el sentido de que "si para todo x existe al menos un predicado n-ádico Φ tal que ocurra α, con x y Φ libres, podemos escoger para cada x uno de estos Φ, que llamaremos Φ^x; si definimos ahora un predicado n+1 -ádico, Ψ, por medio de la fórmula:

$$\bigwedge x, y_1 \ldots y_n (\Psi x y_1 \ldots y_n \leftrightarrow \Phi^x y_1 \ldots y_n)$$

no cabe duda que ocurrirá β"[28].

---

[26]$\bigwedge x_1 \ldots x_n$ es una manera abreviada de escribir $\bigwedge x_1 \bigwedge x_2 \ldots \bigwedge x_n$.

[27]Cfr. Hilbert-Ackermann, op. cit. pp. 165-166.

[28]Ibid. p. 166. En realidad, la notación que usan para expresar una fórmula cualquiera con "x" y "F" libres es $\mathfrak{A}(x,F)$.

§ 17 Independencia de los axiomas de Hilbert-Ackermann.

Estas fórmulas son independientes de $\mathfrak{SD}_{(2)}$. De una parte, han sido añadidas por Hilbert y Ackermann, y no como resultado de ampliar su teoria de la cuantificación, por lo que han sido consideradas independientes por estos autores. Por otro lado, A. Church[29] también las considera independientes, como fórmulas que no se corresponden con axiomas lógicos o, dicho de otro modo, como fórmulas de cuya validez lógica, o validez universal, cabe dudar.

Al margen de cuales hayan sido los criterios de estos autores, es posible establecer la independencia de los anteriores esquemas i) y ii). A continuación mostramos la independencia de i) y, por lo que respecta a la independencia de ii), ésta se obtiene más tarde, tras una ampliación del cálculo deductivo $\mathfrak{SD}_{(2)}$.

Sea γ_{HA} la siguiente instancia del esquema axiomático i) de Hilbert-Ackermann:

$$\bigwedge x \bigvee y Rxy \rightarrow \bigvee \mathrm{F}(\bigwedge x \bigvee y(Rxy \wedge \mathrm{F}xy) \wedge \bigwedge xyz(\mathrm{F}xy \wedge \mathrm{F}xz \rightarrow y=z)),$$

donde "$y = z$" es la forma abreviada de la fórmula de segundo orden "$\bigwedge \mathrm{P}(\mathrm{P}y \rightarrow \mathrm{P}z)$.

[29] Como referimos más abajo.

Teorema.

γ_{HA} *es independiente de* $\mathfrak{CD}_{(2)}$.

Demostración:

Para facilitar el seguimiento de la demostración damos los siguientes pasos:

1º) Definimos simultáneamente una estructura $\mathfrak{E}$ y una asignación ν de las constantes del lenguaje $\mathcal{L}_2$ de $\mathfrak{CD}_{(2)}$ de la siguiente manera:

$\mathfrak{E} = \langle \mathbb{E}, \mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2, \ldots \rangle$, siendo $\mathbb{E}$ el conjunto de los números enteros positivos, y, para todo $i \geq 1$, $\mathbb{E}_i \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{E}^i)$. Además se verifica que:

1) Para todo $n \geq 1$, $\{n\} \in \mathbb{E}_1$;

2) Para toda fórmula β cuyas variables libres son a lo sumo las variables individuales $x_1, \ldots, x_n$, distintas entre si, para todo $n \geq 1$, $\nu(\beta(x_1 \ldots x_n)) \in \mathbb{E}_n$[30];

3) $\mathbb{R} \in \mathbb{E}_2$ y $\overline{\mathbb{R}} \in \mathbb{E}_2$[31], siendo $\mathbb{R}$ una relación diádica que se define de acuerdo con las siguientes estipulaciones: Sean Σ_1, Σ_2, ..., las sucesiones de números obtenidas a partir de las cifras decimales del número π como se describe a continuación. Σ_1 es la sucesión de todas las

---

[30] Estos conjuntos se definen más abajo.

[31] $\overline{\mathbb{R}}$ es el complemento de $\mathbb{R}$, es decir, $\mathbb{E}^2 - \mathbb{R}$.

cifras decimales de π; es decir, Σ_1 es la sucesión 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 4, ... Σ_2 es la sucesión de todos los números de dos cifras que se pueden formar con los decimales de π; es decir, Σ_2 es la sucesión 14, 15, 92, 65, ..., 41, 51, 29, 56, ...11, 45, 19, 25, ... Σ_3 es la sucesión de todos los números de tres cifras que se pueden formar con las cifras decimales de π; es decir, Σ_3 es la sucesión 141, 592, 654, ..., 145, 419, 152, ... Se procede del mismo modo para cada subíndice i (mayor que 3) de Σ_i.

$\mathbb{R}$ es la relación que consta de los pares de números enteros positivos formados de la siguiente manera: A cada número m se hacen corresponder los números n y k tales que n es de la sucesión Σ_p y k de Σ_q, para $p \neq q$, $m \neq n$ y $m \neq k$, y tanto n como k no se han hecho corresponder a ningún número $s<m$.

Clasificamos las constantes de $\mathcal{L}_2$ en los siguientes grupos:

i) a_1, a_2, ... , las constantes individuales o parámetros;

ii) a) P_1, P_2, ... , los relatores monádicos. b) El relator diádico R;

iii) Para todo $n>1$, los relatores n-ádicos Q, distintos de R.

La Asignación ν queda definida según las siguientes cláusulas:

1) Para todo parámetro a_n, para todo $n \geq 1$, $\nu(a_n) = n$;

2) a) Para todo relator monádico P_k, para todo $k \geq 1$, $\nu(P_k) = \{k\}$. b) $\nu(R) = \mathbb{R}$;

3) Para todo relator n-ádico Q, distinto de R, para cada $n > 1$, $\nu(Q) = \emptyset$.

2º) Sea el conjunto $\{\square, \oplus\}$. $\mathscr{F}$ es el conjunto de las fórmulas de $\mathcal{L}_2$. Definimos las asignación $\varkappa$: $\mathscr{F} \longrightarrow \{\square, \oplus\}$, tal que para toda $\alpha \in \mathscr{F}$, $\varkappa(\alpha) \in \{\square, \oplus\}$, de acuerdo con las reglas siguientes:

1) α es atómica. i) α es de la forma $P_i a_k$; $\varkappa(\alpha) = \square$ sii $\nu(a_k) \in \nu(P_i)$-es decir, sii $i = k$-. ii) α es de la forma $Ra_m a_n$; $\varkappa(\alpha) = \square$ sii $\langle \nu(a_m), \nu(a_n) \rangle \in \nu(R)$ -es decir, sii $\langle m,n \rangle \in \mathbb{R}$. En cualquier otro caso, $\varkappa(\alpha) = \oplus$[32];

2) α es $\neg\beta$. $\varkappa(\neg\beta) = \square$ sii $\varkappa(\beta) = \oplus$;

3) α es $\beta \vee \gamma$. $\varkappa(\beta \vee \gamma) = \square$ sii $\varkappa(\beta) = \square$ o $\varkappa(\gamma) = \square$;

4) α es $\beta \wedge \gamma$. $\varkappa(\beta \wedge \gamma) = \square$ sii $\varkappa(\beta) = \square$ y $\varkappa(\gamma) = \square$;

5) α es $\beta \rightarrow \gamma$. $\varkappa(\beta \rightarrow \gamma) = \square$ sii $\varkappa(\beta) = \oplus$ o $\varkappa(\gamma) = \square$;

6) α es de la forma $\forall s \beta$. i) s es una variable individual; $\varkappa(\forall s \beta) = \square$ sii para algún parámetro b que no ocurre en β, $\varkappa(\beta(b/s)) = \square$. ii) s es la variable predi-

---

[32]Si α es $P_i a_k$, con $i \neq k$; si α es $Ra_m a_n$ y $\langle m,n \rangle \notin \mathbb{R}$; y, por último, si α es $Qb_1 \ldots b_n$, donde Q representa un relator n-ádico distinto de R, para cualquier $n > 1$, y $b_1, \ldots, b_n$ son n ocurrencias de parámetros.

cativa n-ádica S, para $n \geq 1$; $\varkappa(\bigvee S\beta) = \square$ sii existe al menos una fórmula δ, cuyas únicas variables libres son a lo sumo las variables individuales $x_1,\ldots,x_n$, tal que $\varkappa(\beta(\delta/Sx_1\ldots x_n)) = \square$;

7) α es de la forma $\bigwedge s\beta$. i) s es una variable individual; $\varkappa(\bigwedge s\beta) = \square$ sii para todo parámetro b, $\varkappa(\beta(b/s)) = \square$. ii) S es la variable predicativa n-ádica S, para $n \geq 1$; $\varkappa(\bigwedge S\beta) = \square$ sii para toda fórmula δ, cuyas únicas variables libres sean a lo sumo las variables individuales $x_1,\ldots,x_n$, $\varkappa(\beta(\delta/Sx_1\ldots x_n)) = \square$.

La valoración en 1) es directa, mientras que en 2)-7) la valoración de α depende de las subfórmulas que la integran. Cuando se establece el valor de α para la aplicación $\varkappa$, es decir, $\varkappa(\alpha)$, en función de valores de subfórmulas de α, se dice que el valor es $\varkappa(\alpha)$ *por evaluación de* los signos lógicos correspondientes. Si α contiene variables libres se valora la clausura universal de α; es decir, si $x_1,\ldots,x_n$, para $n \geq 1$, son las variables que ocurren libres en α, entonces $\varkappa(\alpha) = \varkappa(\bigwedge x_1\ldots x_n\alpha)$.

3º) Para toda fórmula β, toda n-pla de variables individuales $x_1,\ldots,x_n$ distintas entre si, para todo $n \geq 1$, $\nu(\beta(x_1\ldots x_n))$ es el conjunto de las n-plas de números enteros positivos $\langle m_1, m_2, \ldots, m_n\rangle$, tales que para los correspondientes parámetros $b_{m_1}, b_{m_2}, \ldots, b_{m_n}$ se verifica que

$\varkappa(\beta(b_{m_1},b_{m_2},\ldots,b_{m_n}/x_1,\ldots,x_n)) = \square$[33].

4º) Probamos que para toda fórmula α que sea demostrable en el cálculo se verifica que $\varkappa(\alpha) = \square$. Para ello hacemos un recorrido por las reglas que definen $\mathfrak{CD}_{(2)}$ y comprobamos que si $\Gamma \vdash \alpha$ y para toda $\gamma \in \Gamma$ $\varkappa(\gamma) = \square$, entonces $\varkappa(\alpha) = \square$.

R1) Si $\varkappa(\alpha) = \square$ y $\varkappa(\beta) = \square$, entonces, por evaluación de $\wedge$, $\varkappa(\alpha \wedge \beta) = \square$;

R2) Si $\varkappa(\alpha \wedge \beta) = \square$, entonces, por evaluación de $\wedge$, $\varkappa(\alpha) = \square$ y $\varkappa(\beta) = \square$;

R3) Si $\varkappa(\alpha) = \square$ (o $\varkappa(\beta) = \square$), entonces, por evaluación de $\vee$, $\varkappa(\alpha \vee \beta) = \square$;

R4) Si $\varkappa(\alpha) = \square$ y $\varkappa(\alpha \rightarrow \beta) = \square$, entonces, por evaluación de $\rightarrow$, $\varkappa(\beta) = \square$;

R5) Si $\varkappa(\neg\neg\alpha) = \square$, por evaluación de $\neg$, $\varkappa(\neg\alpha) = \oplus$ y, así mismo, por evaluación de $\neg$, $\varkappa(\alpha) = \square$;

R6) a) Si $\varkappa(\alpha(r/s)) = \square$, siendo s una variable individual y r un parámetro que no ocurre en α; por evaluación de $\bigvee$, $\varkappa(\bigvee s\alpha) = \square$. b) Si $\varkappa(\alpha(\beta/Px_1\ldots x_n)) = \square$, para alguna fórmula β, por evaluación de $\bigvee$, $\varkappa(\bigvee P\alpha) = \square$;

R7) Si $\varkappa(\alpha) = \square$ y $s_1\ldots s_n$ son variables libres en α, para $n\geq 1$, $\varkappa(\bigwedge s_1\ldots s_n\alpha) = \varkappa(\alpha)$; en consecuencia, $\varkappa(\bigwedge s_1\ldots s_n\alpha) = \square$;

---

[33]Para el número m_i llamamos *su correspondiente parámetro* al parámetro c tal que $\nu(c) = m_i$.

R8) a) Si $\varkappa(\wedge s\alpha) = \square$ y s es una variable individual, por evaluación de $\wedge$, $\varkappa(\alpha(r/s)) = \square$ para todo parámetro r. b) Si $\varkappa(\wedge P\alpha) = \square$, por evaluación de $\wedge$, para toda fórmula β, $\varkappa(\alpha(\beta/Px_1...x_n)) = \square$;

En cuanto a las reglas 9)-12), convenimos en designar mediante Γ_c la fórmula conjunción de las fórmulas del conjunto Γ de premisas de las deducciones subsidiarias[34].

R9) Si $\varkappa(\Gamma_c) = \square$ y $\varkappa(\alpha) = \square$ entonces $\varkappa(\gamma) = \square$, y si $\varkappa(\Gamma_c) = \square$ y $\varkappa(\beta) = \square$ entonces $\varkappa(\gamma) = \square$; entonces, por evaluación de $\vee$, si $\Gamma_c) = \square$ y $\varkappa(\alpha \vee \beta) = \square$, entonces, $\varkappa(\gamma) = \square$;

R10) Si $\varkappa(\Gamma_c) = \square$ y $\varkappa(\alpha) = \square$, entonces $\varkappa(\beta) = \square$; entonces, por evaluación de $\rightarrow$, si $\varkappa(\Gamma_c) = \square$, entonces, $\varkappa(\alpha \rightarrow \beta) = \square$;

R11) Si $\varkappa(\Gamma_c) = \square$ y $\varkappa(\alpha) = \square$ entonces $\varkappa(\beta \wedge \neg\beta) = \square$; pero, por definición, no puede ser que $\varkappa(\beta \wedge \neg\beta) = \square$, por lo que si $\varkappa(\Gamma_c) = \square$, entonces $\varkappa(\alpha) = \oplus$ y, por evaluación de $\neg$, $\varkappa(\neg\alpha) = \square$;

R12) Si $\varkappa(\Gamma_c) = \square$ y $\varkappa(\alpha) = \square$ entonces $\varkappa(\delta) = \square$; entonces, por evaluación de $\vee$, si $\varkappa(\Gamma_c) = \square$ y $\varkappa(\vee s\alpha) = \square$, entonces, $\varkappa(\delta) = \square$.

[34]En estas reglas hay unas restricciones respecto de las variables de las deducciones subsidiarias (y la específica de R12)), como se explicó en § 13.

5º) Hemos de comprobar que $\varkappa(\gamma_{HA}) = \oplus$. Para mayor facilidad, α_H designa la subfórmula $\Lambda x V y Rxy$, y χ_H designa la subfórmula $(\Lambda x V y(Rxy \wedge Fxy) \wedge \Lambda xyz(Fxy \wedge Fxz \rightarrow y = z)$. Así pues, γ_{HA} es la fórmula $\alpha_H \rightarrow V_F\chi_H$.

Teniendo en cuenta la evaluación de Λ y V, y dado que $\nu(R) = \mathbb{R}$, $\varkappa(\alpha_H) = \square$. Para que $\varkappa(V_F\chi_H) = \square$ habría que hallar un $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{F} \neq \emptyset$, $\mathbb{F} \neq \mathbb{R}$ y para m, n y k enteros positivos, si $\langle m,n\rangle \in \mathbb{F}$ y $\langle m,k\rangle \in \mathbb{F}$, entonces n y k son el mismo.

Para todo $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{A} \in \mathbb{E}_2$, puesto que para todo miembro de $\mathbb{E}_n$, para cada $n \geq 1$, existe una fórmula β tal que dicho miembro es $\nu(\beta(x_1 \ldots x_n))$, se puede demostrar simultáneamente por inducción sobre el grado de β, 1º que i) $\mathbb{A} = \emptyset$, o ii) $\mathbb{A} = \mathbb{R}$, o iii) $\mathbb{A}$ es una función monádica cuyo dominio es un subconjunto finito de $\mathbb{E}$; 2º si $\overline{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{B}$, i) $\overline{\mathbb{B}} = \emptyset$, o ii) $\overline{\mathbb{B}} = \mathbb{R}$, o ii) $\overline{\mathbb{B}}$ es una función monádica cuyo dominio es un subconjunto finito de $\mathbb{E}$[10].

Así pues, no es posible hallar $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{F} \neq \emptyset$, tal que para todo m, n, k, si $\langle m,n\rangle \in \mathbb{F}$ y $\langle m,k\rangle \in \mathbb{F}$, n y k coincidan. En consecuencia, por evaluación de V, $\varkappa(V_F\chi_H) = \oplus$; de

---

[10]No desarrollamos la inducción, demasiado larga y tediosa. Se demuestra para base 0 y 1, puesto que solamente en el caso de las fórmulas de la forma $\beta \wedge \gamma$, en donde tanto β como γ son fórmulas atómicas, obtenemos subconjuntos propios de $\mathbb{R}$, $\nu((\beta \wedge \gamma)(x_1,x_2))$, que ya no son $\emptyset$, sino funciones; aunque sus dominios son unitarios. Mediante $\vee$, o de forma equivalente, se obtienen ampliaciones de dichas funciones, pero sus dominios serán siempre finitos.

aquí, y por evaluación de $\rightarrow$, $\varkappa(\alpha_{\mathbf{H}} \rightarrow \forall F \chi_{\mathbf{H}}) = \oplus$, es decir, $\varkappa(\gamma_{\mathbf{HA}}) = \oplus$.

De acuerdo con los sucesivos apartados precedentes, hemos establecido que para toda fórmula α de $\mathfrak{S}\mathfrak{D}_{\langle 2 \rangle}$, dada la estructura $\mathfrak{S}$ y el conjunto $\{\Box, \oplus\}$ y definidas las asignaciones ν y $\varkappa$, $\varkappa(\alpha) = \Box$. $\gamma_{\mathbf{HA}}$, en cambio, es tal que $\varkappa(\gamma_{\mathbf{HA}}) \neq \Box$, por lo que $\gamma_{\mathbf{HA}}$ no es demostrable en el cálculo, quedando así probado el teorema.

§ 18 Ampliación y aplicaciones del sistema de cálculo.

Tras exponer algunos teoremas semánticos, acerca de fórmulas en forma prenexa, debidos fundamentalmente a A. Zykov[11], Hilbert y Ackermann se ocupan de estudiar los predicados de predicados. En matemáticas se presentan afirmaciones del tipo "tal o cual propiedad no es reflexiva", como por ejemplo, la relación "ser menor que", la cual no es reflexiva. Para hallar el correlato correspondiente en expresiones de un lenguaje formal, serán necesarios unos predicados cuyos lugares vacíos no pueden ocupar signos de objeto. Estos predicados de tipo especial, cuyos argumentos no pueden ser variables o constantes individuales, se conocen

---

[11]Hilbert-Ackermann, op. cit. p. 168 y ss.. Los teoremas de Zykov se encuentran en A. A. Zykov, "The spectrum problem in the extended predicate calculus", en *American Mathematical Translations*, series 2, vol. 3, 1.968 (reimp.), pp. 1-14.

como "predicados de predicados". Ello no representa una novedad, si recordamos que ya en Frege veíamos cómo determinados conceptos eran tales que bajo ellos caían conceptos, en lugar de objetos. Así pues, para Hilbert y Ackermann hay predicados de predicados; y un cálculo que contenga predicados de predicados tiene aplicación si, siguiendo a Frege, el número se somete a un estudio lógico. Ahora bien, el número no es un objeto sino una propiedad y cuando se enuncia, por ejemplo, "el número de F es N", o "N(F)", se está afirmando que "una propiedad del predicado F es convenir a N objetos"; así, como afirman Hilbert y Ackermann, "una propiedad de "ser continente" es convenir exactamente a 5 objetos"[12].

La mayor capacidad de expresión de un lenguaje que permita la cuantificación de predicados es innegable; ésta se ve aumentada, además, con la autorización para formar expresiones conteniendo predicados de predicados. Hilbert y Ackermann hacen algunos comentarios sobre la paradoja de Russell y algunas paradojas semánticas[13]. A efectos de elaboración de un cálculo de contenga predicados de predicados , son las del tipo de la de Russell las que ofrecen interés. Un uso poco cuidadoso de los predicados de predicados conduce a la paradoja de Russell; basta que consi

---

[12]Ibíd. p. 171.

[13]Ibíd. p. 177 y ss..

deremos como fórmula la expresión "$\neg P(P)$", donde P es una letra predicativa. La fórmula $\neg P(P)$ contiene a P libre y puede ser considerada como un predicado definido en el conjunto de los objetos donde P varía[14] -sea Ψ dicho predicado-; así, $\Psi(P)$ equivale a $\neg P(P)$, pero sustituyendo P por Ψ en ambas expresiones, tendríamos que $\Psi(\Psi)$ equivaldría a $\neg\Psi(\Psi)$, lo cual es contradictorio[15].

Para evitar las paradojas, Hilbert y Ackermann piensan que el cálculo con predicados de predicados debe tener en cuenta la teoría de los tipos de Russell. Será suficiente la teoría simple, ya que la teoría ramificada tenía como finalidad atajar las paradojas semánticas, y éstas hallan su solución más fácilmente, mediante la adecuada distinción entre lenguaje y metalenguaje.

El sistema de cálculo correspondiente es denominado

---

[14]En general, en primer orden, se considera que una fórmula con n variables individuales libres es un predicado n-ádico. Si hablamos de predicados cuyos argumentos no tienen por qué ser individuales, tomando esta noción sin limitarnos a variables individuales, diremos que una fórmula con n variables libres es un predicado n-ádico con tales variables como argumentos.

[15]Hilbert y Ackermann hablan del predicado de predicados "no convenirse a si mismo", y si P es tal, se representa mediante $\Psi(P)$; así "para una P cualquiera, $\Psi(P)$ será verdadera siempre y solamente cuando P no se convenga a sí mismo. Entonces, o bien $\Psi(\Psi)$ es verdadera, y en tal caso, por definición de Ψ, Ψ no se conviene a sí mismo (es decir, $\Psi(\Psi)$ es falsa); o bien $\Psi(\Psi)$ es falsa, lo cual quiere decir, por definición de Ψ, que es falso que Ψ no se convenga a sí mismo (o sea, que $\Psi(\Psi)$ es verdadera)", *Elementos de lógica teórica*, p. 178.

"cálculo de niveles", que coincide con lo que hoy llamamos de teoría de los tipos. Este cálculo es obtenido como resultado de una ampliación, aunque no se trata de la simple ampliación en el sentido de añadir algo al cálculo generalizado de predicados. En primer lugar hay que considerar el lenguaje formal de teoría de los tipos, como fue descrito más arriba[16]. La definición de fórmula se modifica adecuadamente, haciéndose uso de "λ", de manera que una expresión de la forma $(\lambda F_1 ... F_n)(\mathfrak{A}(F_1 ... F_n))$, con $n \geq 1$, donde $F_1, ..., F_n$ son predicados de tipo $a_1, ..., a_n$, respectivamente, y $\mathfrak{A}$ una fórmula, representa un predicado cuyo tipo es $(a_1, ..., a_n)$; $((\lambda F_1 ... F_n)(\mathfrak{A}(F_1 ... F_n)))(B_1 ... B_n)$, donde B_i es del mismo tipo que F_i, para todo $i \leq n$, es una fórmula.

En el cálculo de niveles Hilbert-Ackermann toman en consideración las mismas reglas del cálculo restringido de predicados; las reglas se modifican en cuanto al carácter de las variables que intervienen. Tras esta ampliación del cálculo restringido, continúan tomando el esquema especial i) del cálculo generalizado, el cual se cambia para poder incluir fórmulas con variables libres de cualquier tipo[17]. El esquema ii) no se presenta como un esquema especial; ello se debe a que no es independiente del resto en la formulación

---

[16]Vid. anterior § 13, observaciones en el texto y fuentes citadas.

[17]Vid. apéndice.

generalizada del cálculo de niveles[18].

CALCULO DE SEGUNDO ORDEN EN CHURCH

§ 19 Sistema de cálculo.

A. Church presenta un sistema de cálculo de segundo orden, que designa mediante F^2_Z [19]. Como en el caso anterior, Church procede por ampliación desde el cálculo proposicional, llegando a un cálculo de predicados de segundo orden de un alcance igual al del cálculo deductivo aquí presentado, aunque aparecen algunas diferencias[20]. Entre éstas se halla el conjunto de constantes lógicas de su lenguaje; ello, no obstante, no representa problema alguno, pues establece determinadas definiciones para introducir el uso de otras constantes.

En cuanto a las variables, Church utiliza tres clases de variables: individuales, predicativas y proposicionales. De aquí que los axiomas relativos a la eliminación de cuantificador universal, tengan un apartado para los casos en que el sufijo del cuantificador sea una variable proposicio-

---

[18]Hilbert y Ackermann indican que P. Bernays les llamó la atención acerca de su demostración a partir de los demás axiomas, cuando iba a aparecer la segunda edición de esta obra. (*Elementos de lógica teórica*, p. 191).

[19]A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, p. 295.

[20]Para una comparación con más detalle ver apéndice.

nal. La operación de sustitución de variable predicativa por fórmula es exactamente la operación aquí descrita, dado que ésta se ha tomado de Church, teniendo en cuenta la posibilidad de contar con variables proposicionales.

La semántica del cálculo, de manera similar, queda establecida por Church como una ampliación de la del cálculo de predicados de primer orden y no difiere, esencialmente, de la semántica presentada en § 14 anterior[21]. Su noción de validez es que "una fórmula se dice que es *válida* sii es válida en cada dominio no vacío. Una fórmula es *válida en un dominio* si tiene el valor de verdad *V* para todos los valores posibles de sus variables libres".

Gracias a estas matizaciones, Church diferencia entre F_z^2, cálculo de predicados de segundo orden, y F_z^{2p} o "cálculo puro de predicados de segundo orden", el cual coincide con F_z^2, salvo que F_z^{2p} carece de constantes individuales, predicativas o proposicionales y, en consecuencia, todos sus signos individuales, predicativos y proposicionales, son variables.

Church señala que si bien el cálculo de predicados de primer orden se puede ampliar a cálculo de primer orden con igualdad, en segundo orden no es necesaria la adición de la identidad. En efecto, dadas las variables (o constantes) *a* y *b*, la fórmula $\bigwedge p(Pa \rightarrow Pb)$ de F_z^2, bajo una interpretación $\mathfrak{I}$

---

[21]Cfr. op. cit., p. 173 y ss. y p. 297 y ss..

tomará el valor 1 o 0 según $\mathfrak{I}(a)$ e $\mathfrak{I}(b)$ sean idénticos o no, respectivamente[22].

LA DEMARCACION DE LA LOGICA DE SEGUNDO ORDEN Y LA ARITMETIC

§ 20 Los cálculos de lógica de segundo orden.

En la anterior exposición de los sistemas de cálculo de Hilbert-Ackermann y Church hemos visto cómo difieren entre sí. El cálculo de Church es equipotente con $\mathfrak{C}\mathfrak{D}\langle 2\rangle$, mientras que el cálculo de Hilbert-Ackermann contiene $\mathfrak{C}\mathfrak{D}\langle 2\rangle$ y dos esquemas axiomáticos propios; las fórmulas instancias de estos esquemas son consideradas universalmente válidas por Hilbert y Ackermann, pero Church no estima que hayan de estar incluidos como axiomas en el cálculo, a pesar de que no considera que se sigan de los restantes axiomas.

El esquema axiomático i) de Hilbert-Ackermann corresponde al principio siguiente: Sea $\mathbb{R}$ una relación n+1-ádica, para $n\geq 1$, definida en un dominio $\mathbf{D} \neq \emptyset$, en la que se verifica que para cada n-pla $x_1,\ldots,x_n$, $x_i \in \mathbf{D}$, para todo $i\leq n$, existe algún $y \in \mathbf{D}$ tal que $\langle x_1,\ldots,x_n,y\rangle \in \mathbb{R}$; entonces podemos hallar una relación n-ádica $\mathbb{F}$ tal que para cada $x_1,\ldots,x_n$, $x_i \in \mathbf{D}$, para todo $i\leq n$, existe un único $z \in \mathbf{D}$ tal que $\langle x_1,\ldots,x_n,z\rangle \in \mathbb{F}$. Según Hilbert-Ackermann, se trata de

[22] Como en Hilbert-Ackermann; op. cit. p. 163.

una expresión del axioma de elección de la teoría de conjuntos. De acuerdo con el axioma de elección, para cada conjunto $\mathbb{A} = \{\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \ldots\}$ tal que $\mathbb{B}_i \neq \emptyset$, para todo $i \geq 1$, y, para todo $i,k \geq 1$, $\mathbb{B}_i \cap \mathbb{B}_k = \emptyset$, existe al menos un conjunto $\mathbb{C} = \{c_1, c_2, \ldots\}$ tal que $c_1 \in \mathbb{B}_1$, $c_2 \in \mathbb{B}_2$, y así sucesivamente[23].

En cuanto al esquema ii), como ya se ha dicho, también se trata de una aplicación del axioma de elección.

Para Church F_2^2 -o F_2^{2p}, si se habla de su "cálculo puro" en lugar de su "calculo de segundo orden", aunque aquí sería más exacto referirnos a éste- no contiene los esquemas axiomáticos de Hilbert-Ackermann.

Church estudia el denominado "axioma de buena ordenación de individuos", el cual se puede añadir al sistema de cálculo dando lugar a uno nuevo, que en su *Introduction to Mathematical Logic* § 56 se designa mediante $F_2^{2(\omega)}$ - o $F_2^{2p(\omega)}$-[24]. En este punto de su exposición advierte que "los axiomas de elección" serán comentados en conexión con el cálculo de orden superior, aunque "ciertos casos especiales de un axioma de elección se pueden establecer en la notación del cálculo de segundo orden"[25], siendo uno de estos casos el

---

[23]Vid. J. Mosterín, *Teoría axiomática de conjuntos*, comentarios en p. 217 y formulación nº 16.1, p. 218.

[24]A. Church, op. cit. p. 343.

[25]Ibíd. p. 341 (la traducción es mía).

esquema ii) del sistema de cálculo de Hilbert-Ackermann. Pero ello no significa que el axioma de buena ordenación, expresado formalmente, sea un caso especial de axioma de elección.

Con el mismo *status* que el axioma de buen orden, Church considera los "axiomas de infinitud". Al sistema de cálculo de segundo orden podemos añadir la expresión formal de un axioma de infinitud -expresión formal prototípica de un lenguaje de segundo orden, o de orden superior-, lo que da lugar a un nuevo cálculo, cuya interpretación se restringe a universos del discurso de cardinal no finito[26].

Si los esquemas axiomáticos i) y ii) de Hilbert-Ackermann y el axioma de buena ordenación tuvieran el mismo *status* que el axioma de infinitud, habría acertado plenamente Church en considerar que no son verdades lógicas; es decir, que las fórmulas correspondientes no son universalmente válidas. En cada caso, al introducir uno de estos axiomas como fórmulas del cálculo, se produciría una restricción de los dominios que interpretan el cálculo. Así, $\mathfrak{C}\mathfrak{D}(2)$ junto con los esquemas i) y ii) de Hilbert-Ackermann, darían lugar a un nuevo cálculo cuyas interpretaciones se restringirían a determinados dominios. Así mismo, para Church, el axioma de buena ordenación viene a restringir la interpreta-

[26]Ibíd. p. 343.

ción del cálculo a los dominios cuyos miembros pueden ser ordenados[27]. Sin embargo, como más arriba hemos indicado, el esquema i) es universalmente válido.

En cuanto al esquema ii):

"Sea, por hipótesis, $\wedge x \vee P \alpha$ válida bajo $\mathfrak{I}$. Entonces, para cada elemento a_i del dominio **D** de $\mathfrak{I}$, hay al menos un subconjunto de $\mathbf{D}^m$ -llamémosle el conjunto $\mathbb{R}_i$ *coordinado* a a_i- tal que si R_1, R_2, ... es una secuencia de la misma cardinalidad que **D** de relatores -o constantes predicativas- m-ádicos que no ocurren en α, a_1, a_2, ... es una secuencia, también de la misma cardinalidad que **D**, de parámetros o constantes individuales que no ocurren en α, e $\mathfrak{I}^*$ es la interpretación que difiere de $\mathfrak{I}$ a lo sumo respecto de la secuencia de relatores R_1, R_2, ... y de la secuencia de parámetros a_1, a_2, ..., y tal que para cada parámetro a_n, $\mathfrak{I}^*(a_n) = a_n$, siendo $\{\mathfrak{I}^*(a_1), \mathfrak{I}^*(a_2), \ldots\} = \mathbf{D}$, y para cada relator R_n, $\mathfrak{I}^*(R_n)$ es el conjunto $\mathbb{R}_n$ *coordinado* a a_n; entonces, para cada entero positivo k, la sentencia $\alpha(a_k, R_k/x, P)$ es válida bajo la interpretación $\mathfrak{I}^*$.

Sea entonces $\mathbb{T}$ el subconjunto de $\mathbf{D}^{m+1}$ tal que para cada m+1-pla ordenada de elementos de **D**, $\langle c_1, c_2, \ldots, c_{m+1}\rangle$, y cada entero positivo i, $\langle c_1, c_2, \ldots, c_{m+1}\rangle$ pertenece a $\mathbb{T}$ si

---

[27]Ibíd. p. 341. De este modo, $F_z^{2p(\omega)}$ "será aceptado" unánimemente, aún cuando se discutan "los axiomas de elección".

y sólo si c_1 es a_i y la m-pla ordenada $\langle c_2, c_3, \ldots, c_{m+1}\rangle$ de elementos de **D** pertenece a $\mathbb{R}_i$.

Entonces, si T es un relator m+1-ádico que no ocurre en α, e $\mathfrak{I}*$ es una interpretación que difiere de $\mathfrak{I}$ a lo sumo respecto de T y de los parámetros de la misma secuencia a_1, a_2, ..., y tal que $\mathfrak{I}*(T) = \mathbb{T}$ y, para cada entero positivo n, $\mathfrak{I}*(a_n) = \mathfrak{I}^*(a_n) = a_n$, obviamente se habrá de tener que $\alpha(Ta_i x_1 x_2 \ldots x_m / Px_1 x_2 \ldots x_m)_{\mathfrak{I}*} = 1$, y, dado que $\{\mathfrak{I}^*(a_1), \mathfrak{I}^*(a_2), \ldots\} = \mathbf{D}$, también se ha de tener que $\wedge x\{\alpha(Txx_1 x_2 \ldots x_m / Px_1 x_2 \ldots x_m)\}_{\mathfrak{I}}* = 1$, y, en consecuencia, que $\vee Q \wedge x\{\alpha(Qxx_1 x_2 \ldots x_m / Px_1 x_2 \ldots x_m)\}_{\mathfrak{I}} = 1$".[28]

El axioma de buena ordenación se puede expresar:

$$\wedge F\{\wedge x \neg Fxx \wedge \wedge xy[Fxy \rightarrow \wedge z(Fyz \rightarrow Fxz)] \wedge$$
$$\wedge\ \wedge G \wedge x[Gx \rightarrow \vee y(Gy \wedge \wedge z(Gz \rightarrow (Fyz \vee y = z)))]\}.$$[29]

Esta fórmula es válida en cada dominio $\mathbf{D} \neq \emptyset$ y, en consecuencia, se trata de una fórmula universalmente válida. Por ello, adjuntar esta fórmula a $\mathfrak{CD}_{(2)}$ no impone restricción respecto de los dominios de las interpretaciones estándar.

Mientras que el axioma de infinitud restringe claramente las interpretaciones del cálculo a ámbitos de determinadas características, no es así en el caso del axioma de bue-

---

[28] E. Díaz, "Lógica de segundo orden: Los dos axiomas de Hilbert-Ackermann", p. 6. (Desarrolla el comentario de Hilbert-Ackermann al respecto).

[29] E. Díaz, Ibíd. p. 6.

na ordenación ni los esquemas i) y ii) de Hilbert-Ackermann.

Para la expresión del axioma de infinitud, Church señala varias alternatuvas, destacando entre ellas:

$$(\infty_3)\ \bigvee F[\bigwedge x \bigvee y Fxy \wedge \bigwedge xy(Fxy \rightarrow \bigwedge z(Fxz \rightarrow y = z)) \wedge$$
$$\wedge \bigwedge xy(Fyx \rightarrow \bigwedge z(Fzx \rightarrow y = z)) \wedge \bigvee x \bigwedge y \neg Fyx],$$

$$(\infty_4)\ \bigvee F[\bigwedge x \bigvee y Fxy \wedge \bigwedge xy(Fyx \rightarrow \bigwedge z(Fzx \rightarrow y = z)) \wedge \bigvee x \bigwedge y \neg Fyx],$$

que vienen a expresar, respectivamente, a) la existencia de una correspondencia uno-a-uno entre los individuos de una clase y una subclase propia, y b) la existencia de una correspondencia muchos-a-uno de los individuos de una clase a una subclase propia, representando así una forma modificada de la definición de clase infinita de Peirce-Dedekind y guardando una relación con los postulados de Peano[30].

El axioma de infinitud, expresado formalmente, no es una fórmula universalmente válida, aunque se trate de una fórmula válida en el dominio $\mathcal{N}$ de los números naturales.

El hecho de que Church considere que los esquemas i) y ii) de Hilbert-Ackermann y el axioma de buena ordenación tienen el mismo *status* que el axioma de infinitud, indica que él parece entender que el ámbito de la lógica no rebasa los límites de F^2_2, en consecuencia de $\mathfrak{CD}_{(2)}$, y que dichos axiomas corresponden a la aritmética. A este respecto, el criterio de demarcación entre lógica y aritmética vendría da

---

[30] Ibid. pp. 343-344. Se trata, respectivamente, de correspondencia "biunívoca" y "sobreyectiva".

do por una teoría de las constantes lógicas, elaborada desde la ampliación de $\mathfrak{CD}_{(1)}$, en el sentido de no considerar "verdades lógicas" las fórmulas que, siendo "verdades aritméticas", no formen parte del conjunto de fórmulas que se pueden obtener del sistema ampliado, en este caso $\mathfrak{CD}_{(2)}$.

En Hilbert-Ackermann el planteamiento es distinto, puesto que los esquemas i) y ii) están incorporados al sistema de cálculo. Desde este punto de vista, el ámbito de la lógica está constituido por el conjunto de fórmulas universalmente válidas (en sentido estándar); dado que las instancias de i) y ii) son fórmulas universalmente válidas, han de considerarse "verdades lógicas", al margen de su pertenencia o no al conjunto de fórmulas que se pueden obtener en el cálculo ampliado en el sentido de $\mathfrak{CD}_{(2)}$.

Estas perspectivas contrapuestas, inspiradas en los puntos de vista de Church y de Hilbert-Ackermann, se presentan a partir del segundo orden, pero carecen de correlato en primer orden. En efecto, si hemos de entender como "lógica de primer orden" el conjunto de las fórmulas demostrables en un sistema de primer orden -conjunto de fórmulas $\mathfrak{CD}_{(1)}$, o cálculo de primer orden-, éste coincide con el conjunto de las fórmulas del lenguaje de primer orden que son universalmente válidas.

Para la lógica de segundo orden se nos han presentado, pues, varias posibilidades que resumimos a continuación:

1) Cálculo $\mathfrak{CD}_{(2)}$, ampliación del cálculo $\mathfrak{CD}_{(1)}$, en el sentido de definir las constantes lógicas sin restricción de cuantificación a variables de individuo, y añadiendo unas reglas específicas;

2) $\mathfrak{CD}_{(2)}$ es la máxima ampliación de $\mathfrak{CD}_{(1)}$, dando lugar a un cálculo como el de Church. Algunas fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}_2$ -lenguaje formal del cálculo de segundo orden-, acerca de cuya validez universal no cabría dudar, no estarían en $\mathfrak{CD}_{(2)}$; tal es el caso de los esquemas i) y ii) de Hilbert-Ackermann y el axioma de buen orden;

3) $\mathfrak{CD}_{(2)} \cup \{$i), ii)$\}$, o cálculo de Hilbert-Ackermann. Es el mismo sistema de cálculo que el anterior, si añadimos los esquemas axiomáticos de Hilbert-Ackermann.

Como se ha sugerido, si por lógica (de segundo orden) entendemos el conjunto de fórmulas (de segundo orden) universalmente válidas, que debería coincidir con el conjunto de fórmulas demostrables en el cálculo (de segundo orden) de que se trate, el cálculo de 3) sería preferible. Por consiguiente, la teoría de las constantes lógicas dada en $\mathfrak{CD}_{(2)}$ resulta claramente insuficiente, si alguna fórmula es independiente; por ello cabe esperar la posibilidad de una teoría de la cuantificación aplicada a variables predicativas, cuyo resultado sea un sistema del mismo alcance que el de 3).

El intento de hacer coincidir el conjunto de las fórmulas demostrables con el conjunto de las fórmulas universalmente válidas, en segundo orden, está condenado al fracaso. A este respecto es necesario investigar acerca del axioma de buena ordenación, cuya situación es semejante a la de los esquemas mencionados; pero la elaboración de un cálculo incluyendo los esquemas de Hilbert-Ackermann y el axioma de buena ordenación, sería solo una solución relativa, debido al resultado obtenido por K. Gödel[31], de manera que la coincidencia entre el conjunto de fórmulas demostrables y el conjunto de fórmulas universalmente válidas, no se da cuando nos hallamos ante cálculos de segundo orden.

§ 21 El cálculo $\mathfrak{SD}(3)$.

El cálculo $\mathfrak{SD}(3)$ viene definido por las mismas reglas que $\mathfrak{SD}(2)$[32] y, además, las reglas siguientes:

Regla I[33].

Si $\Gamma,\ \bigwedge x\alpha(Qz_1...z_i x z_{i+1}...z_n/Pz_1...z_n) \vdash \delta$, entonces

$$\Gamma,\ \bigwedge x \bigvee P\alpha \vdash \delta,$$

donde $\alpha(Qz_1...z_i x z_{i+1}...z_n/Pz_1...z_n)$ representa la fórmula

---

[31] Cfr. "Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines", en *Obras completas*, pp. 55-89.

[32] Definiciones establecidas en § 13.

[33] Se etrata de la regla número 13, continuando la numeración de las reglas de $\mathfrak{SD}(2)$.

resultante de sustituir en α cada ocurrencia de $Pz_1...z_n$ por $Qz_1...z_i xz_{i+1}...z_n$, en el sentido de la definición de sustitución de § 13; x y z_k, para todo $k\leq n$, son variables individuales y, además, teniendo en cuenta que:

1) Q es una variable o constante predicativa n+1-ádica si P es n-ádica, para $n\geq 1$, siendo $i\leq n$;

2) Q no ocurre en α ni en ningún supuesto (salvo la hipótesis de la regla) del que δ dependa; y

3) Q no ocurre libre en δ.

Se trata de una regla que podemos denominas ELIMINACION DE SEGUNDO ORDEN DEL CUANTIFICADOR EXISTENCIAL. De manera abreviada anotaremos EE_2.

Regla II.

$$\forall x(\alpha(Qz_1...z_i xz_{i+1}...z_n/Pz_1...z_n)) \vdash \forall x \wedge P\alpha,$$

donde x y z_k, para todo $k\leq n$, son variables individuales, P es una variable predicativa n-ádica, con $n\geq 1$, Q es una variable o constante predicativa de aridad n+1 y la fórmula $\alpha(Qz_1...z_i xz_{i+1}...z_n/Pz_1...z_n)$ es la resultante de sustituir en α cada ocurrencia de $Pz_1...z_n$ por $Q(z_1...z_i xz_{i+1}...z_n)$ en el sentido de la definición de sustitución dada en § 13.

Esta regla puede denominarse INTRODUCCION DE SEGUNDO ORDEN DEL CUANTIFICADOR UNIVERSAL. De manera abreviada se indica IU_2.

A partir de estas reglas procedemos a deducir el esquema axiomático ii) de Hilbert-Ackermann, como esquema de $\mathfrak{CD}_{(3)}$. Además, el esquema i) es deducible en el cálculo extendido con es estas reglas. También, inversamente, desde $\mathfrak{CD}_{(2)} \cup \{i), ii)\}$ se obtienen estas reglas como derivadas. En la primera deducción -del esquema ii)- escribiremos β en lugar de $\alpha(x_1 \ldots x_i x x_{i+1} \ldots x_n / Px_1 \ldots x_n)$:

Deducción esquema ii):

1	$\bigwedge x \bigvee P \alpha$	Hipótesis,
2	$\bigwedge x \beta$	Hip. auxiliar,
3	$\bigvee Q \bigwedge x \beta$	IE-2,
4	$\bigvee Q \bigwedge x \beta$	EE_2 1, 2-3,
5	$\bigwedge x \bigvee P \alpha \rightarrow \bigvee Q \bigwedge x \beta$	TD, 1-4.

Deducción esquema i):

Para ésta hacemos algunas estipulaciones. La deducción se hace del esquema i) de Hilbert-Ackermann, pero teniendo en cuenta que en lugar de tomar como antecedente una fórmula con varios cuantificadores universales, la consideramos con un único cuantificador universal, seguido de un cuantificador existencial; es decir, hacemos la deducción de:

$\bigwedge x \bigvee y \alpha \rightarrow \bigvee F(\bigwedge x \bigvee y(\alpha \wedge Fxy) \wedge \bigwedge xyz(Fxy \wedge Fxz \rightarrow y = z))$.

Por otra parte, empleamos una serie de derivaciones, equivalencias y abreviaturas, de acuerdo con el siguiente re sumen:

a) $\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ equivale a $\alpha \rightarrow \beta$; $\neg(\alpha \wedge \beta)$ equivale a $\neg\alpha \vee \neg\beta$;

b) $\neg\bigvee s\alpha$ equivale a $\bigwedge s\neg\alpha$; $\neg\bigwedge s\alpha$ equivale a $\bigvee s\neg\alpha$; $\bigwedge xy\alpha$ equivale a $\bigwedge yx\alpha$.

c) $x = y$ es una abreviatura de la fórmula $\bigwedge P(Px \rightarrow Py)$; $x \neq y$ representa $\neg(x = y)$;

d) $\bigvee F(\bigwedge x\bigvee y(\alpha \wedge Fxy) \wedge \bigwedge xyz(Fxy \wedge Fxz \rightarrow y = z))$ equivale a $\bigvee F\bigwedge x\bigvee y(\alpha \wedge (Fxy \wedge \bigwedge z(Fxz \rightarrow y = z)))$;

e) $\alpha \vee \beta, \neg\alpha \vdash \beta$ (Regla denominada SD);

f) $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$ (Regla denominada INN);

g) De una contradicción cualquiera se infiere ε, la cual es una fórmula de la forma $\gamma \wedge \neg\gamma$, tal que en γ no hay ninguna variable libre.

1	$\bigwedge x\bigvee y\alpha$	Hip.
2	$\neg\bigvee F\bigwedge x\bigvee y(\alpha \wedge (Fxy \wedge \bigwedge z(Fxz \rightarrow y = z)))$	Hip.Aux.
3	$\bigwedge x\bigvee P\bigvee y(\alpha \wedge (Py \wedge \bigwedge z(Pz \rightarrow y = z))) \rightarrow$ $\rightarrow \bigvee F\bigwedge x\bigvee y(\alpha \wedge (Fxy \wedge \bigwedge z(Fxz \rightarrow y = z)))$	esq.i)
4	$\neg\bigvee F\bigwedge x\bigvee y(\alpha \wedge (Fxy \wedge \bigwedge z(Fxz \rightarrow y = z))) \rightarrow$ $\rightarrow \neg\bigwedge x\bigvee P\bigvee y(\alpha \wedge (Py \wedge \bigwedge z(Pz \rightarrow y = z)))$	por a)
5	$\neg\bigwedge x\bigvee P\bigvee y(\alpha \wedge (Py \wedge \bigwedge z(Pz \rightarrow y = z)))$	MP, 2-4
6	$\bigvee x\bigwedge y\bigwedge P(\neg\alpha \vee (\neg Py \vee \bigvee z(Pz \wedge y \neq z)))$	por **b)**
7	$\bigwedge y\bigwedge P(\neg\alpha \vee (\neg Py \vee \bigvee z(Pz \wedge y \neq z)))$	Hip.aux.
8	$\bigvee y\alpha$	EU 1
9	α	Hip.Aux.

10	$\neg\neg\alpha$	INN 9
11	$\bigwedge_P(\neg\alpha \vee (\neg Py \vee \bigvee z(Pz \wedge y \neq z)))$	EU 7
12	$\neg\alpha \vee (y \neq y \vee \bigvee z((y = z) \wedge y = z))$	EU_z (*)
13	$y \neq y \vee \bigvee z(y = z \wedge y \neq z)$	SD 10-11
14	ε	por g)
15	ε	EE 7 9-14
16	ε	EE 6 7-15
17	$\neg\neg\bigvee_F\bigwedge x\bigvee y(\alpha \wedge (Fxy \wedge \bigwedge z(Fxz \rightarrow y = z)))$	IN 2
18	$\bigvee_F\bigwedge x\bigvee y(\alpha \wedge (Fxy \wedge \bigwedge z(Fxz \rightarrow y = z)))$	EN 17
19	$\bigwedge x\bigvee y\alpha \rightarrow \bigvee_F\bigwedge x\bigvee y(\alpha \wedge (Fxy \wedge \bigwedge z(Fxz \rightarrow y=z)))$	

TD, 1-18.

(*) Sustituyendo Py por $y = y$.

Observaciones.

Es evidente que si η_1 y η_2 son instancias de los esquemas i) y ii) de Hilbert-Ackermann, respectivamente, entonces $\eta_1 \in \mathfrak{CD}_{(3)}$ y $\eta_2 \in \mathfrak{CD}_{(3)}$, de acuerdo con las deducciones anteriores.

Respecto de $\mathfrak{CD}_{(2)}$, los esquemas axiomáticos i) y ii) son sintácticamente independientes. En efecto, por el teorema establecido en § 17, i) es independiente de $\mathfrak{CD}_{(2)}$; este esquema se deduce del esquema ii), como se ha visto más arriba, por lo que ii) también es independiente.

C A P I T U L O III

LOGICA Y FORMALIZACION DE LA ARITMETICA.

§ 22 Sistemas aritméticos.

La presentación de un cálculo formal para la aritmética habrá de constar de un sistema de cálculo lógico, haciendo uso del correspondiente lenguaje formal, añadiendose a éste los postulados aritméticos[1]. Es decir, constará de un lenguaje formal, un conjunto de axiomas (algunos específicamente aritméticos, por ello denominados *postulados*) que definen determinado conjunto de fórmulas o *teoremas*.

El sistema de postulados más usual para la presentación de la aritmética ordinaria es el constituido por los axiomas de Peano. Estos axiomas son los siguientes, considerando que $\mathcal{N}$ representa el conjunto de los "números naturales" y para cada número a, a' representa "el sucesor de a":

1) $0 \in \mathcal{N}$,

2) si $a \in \mathcal{N}$, $a' \in \mathcal{N}$,

3) principio de inducción (si S es un conjunto, $0 \in S$ y si para todo $a \in S$, $a' \in S$; entonces, todo número per

---

[1]Vid. A. Church, op. cit. p. 317 y ss., como se indicó antes.

tenece a S),

4) si $a, b \in \mathscr{N}$ y $a' = b'$, entonces $a = b$, y

5) si $a \in \mathscr{N}$, $a' \neq 0$[2].

En realidad, Peano presenta seis proposiciones (*propositio primitivo*) numeradas de 0 a 5, con diferente notación[3], que establecen, respectivamente, lo siguiente (las proposiciones 1)-5) son los axiomas propiamente dichos):

0) "$\mathscr{N}$ es una clase, o 'número' es un nombre común";

1) "Cero es un número";

2) "Si a es un número, entonces su sucesor es un número";

3) "Principio de inducción";

4) "Dos números que tienen el mismo sucesor son iguales entre si"; y

5) "Cero no es sucesor de ningún número"[4].

Partiendo de un sistema de cálculo lógico, se añadirían estos postulados, expresados en el lenguaje formal del cálculo. Tomando un cálculo de segundo orden -un lenguaje de

---

[2]G. Peano, *Formulario Mathematico, II Arithmetica*, pp.27-28.

[3]Estas, expresadas en la propia simbología de Peano, son las siguientes: 0) $N_0 \varepsilon$ Cls; 1) $0 \varepsilon N_0$; 2) $a \varepsilon N_0 .\supset. a+ \varepsilon N_0$; 3) $s \varepsilon \mathrm{Cls} . 0 \varepsilon s : a \varepsilon s .\supset_a. a+ \varepsilon s :\supset. N_0 \supset s$; 4) $a, b \varepsilon N_0 . a+ = b+ .\supset. a = b$; 5) $a \varepsilon N_0 .\supset. a+ -= 0$. (Ibíd. p. 27).

[4]Ibíd. pp. 27-28. Las expresiones entrecomilladas son textuales (la traducción es mía).

segundo orden, por tanto-, y siguiendo a Church[5], el sistema de postulados que representa los axiomas de Peano, al que llamamos $\mathfrak{CA}(2)$, es el siguiente:

1) $\vee y Sxy$;

2) $Sxy \rightarrow (Sxz \rightarrow y = z)$;

3) $Syx \rightarrow (Szx \rightarrow y = z)$;

4) $\vee x Zx$;

5) $\wedge P(Zx \wedge Px \wedge \wedge y(Py \rightarrow \wedge z(Syz \rightarrow Pz))) \rightarrow \wedge y Py)$;

en donde S es un relator diádico, x, y, z, son variables individuales, P es una variable predicativa, $y = z$ es una abreviatura de $\wedge P(Py \rightarrow Pz)$, y Zx es una abreviatura de $\wedge y \neg Syx$. Estos postulados corresponden, respectivamente, a las nociones:

1) TODO NUMERO TIENE UN SUCESOR;

2) SI LOS SUCESORES DE DOS NUMEROS SON IDENTICOS, ENTONCES LOS DOS NUMEROS SON IDENTICOS;

3) SI DOS NUMEROS TIENEN EL MISMO SUCESOR, ENTONCES LOS NUMEROS COINCIDEN;

4) EXISTE UN NUMERO QUE NO ES SUCESOR DE OTRO; Y

5) PRINCIPIO DE INDUCCION.

Dado que el principio de inducción sólo puede expresarse en toda su generalidad en segundo orden, será ésta la mejor manera de presentar un cálculo aritmético. Se puede

[5] Op. cit. p. 321.

establecer un cálculo aritmético, con un número finito de axiomas, con un sistema de primer orden como lógica subyacente, si ésta está dotada de una regla de sustitución. Así, Church ofrece un sistema de postulados que consta de trece axiomas aritméticos, siendo el 13º) una formulación del principio de inducción[6]. Sin embargo, el uso de la regla de sustitución hace que la lógica empleada pueda no ser considerada como un genuino cálculo de primer orden. Por ejemplo, el toerema de la deducción no vale para dicha lógica.

También se puede formalizar la aritmética con una lógica de primer orden sin sustitución -aunque obviamente de una ma nera incompleta- con un número infinito de axiomas. Este el caso del sistema presentado por Kleene en su *Introduccion a la metamatemática*[7], al cual llamaremos $\mathfrak{EA}(1)$.

El lenguaje consta solamente de un conjunto de variables individuales, una constante individual 0, tres símbolos de función: ' (sucesor), + (suma), . (producto), una constate de predicados = (identidad) y los signos lógicos habituales, además de los paréntesis. La expresión formal de un número *n* en el lenguaje de $\mathfrak{EA}(1)$ lo denominamos la *cifra de*

---

[6]Ibíd. p. 318.

[7]S. Kleene, *Introducción a la metamatemática*, p. 81 y ss. y p. 170 y ss..

n. La cifra de n -para $n \geq 0$- se escribe 0 seguido de n '; es decir, $0'''\cdots$, que podemos abreviar como $0^{(n)}$ [8]. El sistema consta, además de los axiomas y reglas lógicos, entre las que no aparece la de sustitución, de ocho axiomas aritméticos; a saber:

1) $a' = b' \rightarrow a = b$;

2) $\neg(a' = 0)$;

3) $a = b \rightarrow (a = c \rightarrow b = c)$;

4) $a = b \rightarrow a' = b'$;

5) $a + 0 = a$;

6) $a + b' = (a + b)'$;

7) $a \,.\, 0 = 0$;

8) $a \,.\, b' = a \,.\, b + a$;

en donde a, b y c son variables individuales; y un conjunto infinito de axiomas expresados mediante el siguiente esquema (postulado de inducción):

$(\alpha(0) \wedge \bigwedge x(\alpha(x) \rightarrow \alpha(x'))) \rightarrow \alpha(x)$;

en donde $\alpha(0)$ representa la fórmula resultante de sustituir en α las ocurrencias libres de la variable x por la constante 0.

§ 23 El problema de la categoricidad.

La cuestión de la categoricidad, en general, se puede

---

[8]Cfr. A. G. Hamilton, op. cit. p. 142.

tratar cuando se estudia el problema de la completud. Aquí, no obstante, la abordamos en cuanto a su planteamiento respecto de sistemas aritméticos, sin entrar en otros ámbitos ni en la extrapolación de resultados. Para ello necesitamos algunas nociones previas.

Definición 1.

$\langle \mathbf{A}, \{\mathbb{R}^n_m / n,m\geq 1\}\rangle$, donde $\mathbf{A} \neq \emptyset$ y $\{\mathbb{R}^n_m / n,m\geq 1\}$ es un conjunto de relaciones definidas sobre **A**, es una *estructura*. **A** es el *universo* o *dominio inicial de la esrtructura*.

Definición 2.

Dado un lenguaje formal $\mathcal{L}$, $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{S}, f\rangle$ *es un modelo de* $\mathcal{L}$ sii $\mathfrak{S}$ es una estructura y f es un conjunto de asignaciones de las constantes de $\mathcal{L}$ en $\mathfrak{S}$, tal que a las constantes (individuales) de $\mathcal{L}$ asigna miembros del universo de la estructura y a cada predicado n-ádico de $\mathcal{L}$, una relación n-ádica de la estructura[9].

Observaciones:

---

[9]La definición 1 y, en parte, la 2, se hallan en A. R. Berstein "Non-standard analysis" en *Studies in model theory* vol. 8, p. 38. El cálculo no tiene por qué ser un cálculo formal de los referidos más arriba; el sistema de postulados expresados informalmente es uno de los posibles cálculos, siempre que se tome una lógica subyacente.

Para mayor facilidad, hablaremos de "cardinal de un modelo", "elemento de un modelo", "relación de un modelo" refiriéndonos, respectivamente, al cardinal del universo de la estructura correspondiente, a cualquier miembro del universo de la estructura y a alguna relación definida en el universo (o relación integrante de la estructura del modelo); así, si $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{S}, f \rangle$, siendo $\mathfrak{S} = \langle \mathbf{A}, \{\mathbb{R}^n_m / \ n,m \geq 1\} \rangle$, el "cardinal de $\mathfrak{M}$" es $|\mathbf{A}|$, "$a \in \mathfrak{M}$" representa $a \in \mathbf{A}$, "$\mathbb{R}$ es una relación (de una cierta aridad) de $\mathfrak{M}$" representa que $\mathbb{R}$ es una relación, definida en $\mathbf{A}$, tal que $\mathbb{R} \in \{\mathbb{R}^n_m\}$. Si $\mathfrak{M}$ es un modelo tal que el universo de su estructura es N -conjunto de los números, naturales o enteros-, diremos que $\mathfrak{M}$ es un modelo numérico

Se puede definir el "valor" de una fórmula en un modelo, o indicar que una fórmula "vale" en un modelo. Dado el modelo $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{S}, f \rangle$ y una fórmula α, se definen las condiciones en que α vale en $\mathfrak{M}$ tomando como base fórmulas atómicas: Si α es de la forma $Ra_1...a_n$; α vale en $\mathfrak{M}$ sii

$$\langle f(a_1),...,f(a_n) \rangle \in f(R).$$

Definición 3.

Dos modelos $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ son *isomorfos* sii existe una aplicación *uno a uno* g: $\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}'$, donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}'$ son los universos de $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$, respectivamente, tal que 1) para cada $x \in \mathbf{A}$ existe un $x' \in \mathbf{A}'$ tal que $g(x) = x'$, 2) para cada rela ción $\mathbb{R}$, n-ádica de $\mathfrak{M}$, hay una relación $\mathbb{R}'$ de $\mathfrak{M}'$, así mismo n-ádica, tales que $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \in \mathbb{R}$ sii

$$\langle g(x_1),\ldots,g(x_n)\rangle \in \mathbb{R}'$$[10].

Definición 4.

Un sistema de cálculo es *categórico* sii para cada dos modelos suyos, éstos son isomorfos.

Para establecer la categoricidad de los axiomas de Peano consideremos dos modelos $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ del sistema $\mathfrak{C}\mathfrak{A}_{(2)}$[11]. Sea $0 \in \mathfrak{M}$ y $0' \in \mathfrak{M}'$; hemos de probar, en primer lugar, que en cada modelo hay un único "cero". Para cualquiera de los dos modelos supoongamos que hay dos "ceros"; sean a y b las variables que designan a los respectivos "ceros". Por hipótesis, b es un "cero" y $a \neq b$. También vale en el modelo la fórmula $\wedge x(a \neq x \rightarrow a \neq x')$, puesto que, por ser a un "cero", $\wedge x(a \neq x')$. Sea $\wedge P\vartheta$ el axioma de inducción de $\mathfrak{C}\mathfrak{A}_{(2)}$. Por eliminación de $\wedge$, tendremos que la fórmula

$$\vartheta(Zx \wedge Za \wedge x \neq a/Px)$$

es decir,

$(Zb \wedge Za \wedge a \neq b \wedge \wedge x(Za \wedge a \neq x \wedge \wedge z(Sxz \rightarrow (Za \wedge a \neq z))))\rightarrow$

[10] C. C. Chang, H. J. Keisler, *Model theory*, p. 21; en esta obra aparece una tercera condición relativa a "funciones".

[11] Como es obvio, los cálculos aritméticos de primer orden no son categóricos.

$\rightarrow \bigwedge x(Za \wedge a \neq x)$

vale en el modelo. Pero entonces vale también en el modelo $\bigwedge x(Za \wedge a \neq x)$, lo cual es imposible.

De manera similar, haciendo uso del principio de inducción y teniendo en cuenta el axioma 2), se prueba la unicidad de la serie de elementos del modelo.

Se define $g : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}'$ de manera que $g(0) = 0'$; así mismo, si Snm vale en el modelo $\mathfrak{M}$ y $g(n) = n'$ y $g(m) = m'$, entonces $Sn'm'$ vale en el modelo $\mathfrak{M}'$.

A partir de aquí se procede por inducción sobre el grado lógico de las fórmulas[12] del lenguaje de $\mathfrak{CA}_{(2)}$ para probar que asumen el mismo valor para $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$, quedando así establecida la isomorfía de los modelos $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ y, por lo tanto, la categoricidad.

§ 24 Teoría de la recursividad y métodos de Gödel.

El resultado de Gödel, según el cual los sistemas de cálculo que contienen una formalización de la artimética son incompletos, es relativo a cálculos de cualquier orden. El procedimiento habitual para mostrarlo toma como punto de partida sistemas del tipo de $\mathfrak{CA}_{(1)}$, pudiendose extender a

[12]En la base nos encontramos sólo con fórmulas de la forma Sab, donde a y b son variables individuales. De las consideraciones anteriores se sigue que las fórmulas de esta forma tienen todas el mismo valor para cada uno de los modelos.

sistemas del tipo $\mathfrak{C}\mathfrak{A}_{(2)}$ -y, en general, a los de orden ω o de teoría de los tipos-. Así fue realizado por el propio Gödel[13], estableciendo, previamente, una teoría de la recursividad, necesaria para obtener un determinado *lema de recursividad*, un resumen esquematizado de la cual exponemos a continuación.

Establecemos la siguiente notación convencional, para expresiones numéricas no formales. $\mathcal{N}$ es el conjunto de los números naturales; x representa una variable numérica. Un predicado numérico será una expresión numérica con una variable (numérica) libre: $\mathbb{P}(x)$ representa un predicado numérico. Dado un predicado numérico n-ádico $\mathbb{P}(x_1,\dots,x_n)$, $n\geq 1$, $\mathbb{P}(m_1,\dots,m_n)$ es la expresión del resultado de sustituir en $\mathbb{P}(x_1,\dots,x_n)$ x_1 por m_1, x_2 por m_2 y así sucesivamente; en este caso, $\mathbb{P}(m_1,\dots,m_n)$ es un enunciado numérico.

Las funciones numéricas se definen con dominio en $\mathcal{N}^n$ y rango en $\mathcal{N}$, para $n\geq 1$; así si $f\colon \mathcal{N}^k \longrightarrow \mathcal{N}$, para un $k\geq 1$, $f(m_1,\dots,m_k)\in\mathcal{N}$.

Definición 1.

Dado un predicado numérico $\mathbb{W}$ se define su *función característica* $\varkappa$ de la siguiente manera: Para toda $m_1,\dots,m_n$, $n\geq 1$

[13]Tomando el sistema constituido, esencialmente, por los axiomas de Peano y la lógica de *Principia Mathematica*. Vid. *Obras completas*, pp. 59-62 y 64-65.

Si $\mathbb{W}(m_1,\ldots,m_n)$ entonces $\varkappa(m_1,\ldots,m_n) = 0$; y

si $\overline{\mathbb{W}(m_1,\ldots,m_n)}$ entonces $\varkappa(m_1,\ldots,m_n) = 1$

Fijamos nuestra atención en ciertas funciones numéricas fácilmente definibles:

Definición 2.

Sean las siguientes funciones numéricas:

I) $\varphi(x) = 0$, para todo $x \in N$,

II) $\varphi(x) = x + 1$, para cada $x \in N$,

III) $\varphi(x_1,\ldots,x_n) = x_i$, para $i \leq n$,

Estas funciones se conocen, respectivamente, con las denominaciones de *función cero*, *función sucesor*, y *función identidad o selección*.

IV) $\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \psi(\chi_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\chi_m(x_1,\ldots,x_n))$,

V) $\varphi(0,x_2,\ldots,x_n) = \psi(x_2,\ldots,x_n)$,

$\varphi(m+1,x_2,\ldots,x_n) = \chi(m,\varphi(m,x_2,\ldots,x_n),x_2,\ldots,x_n)$,

Los esquemas IV) y V) se denominan, respectivamente, de *sustitución y recursión*[14].

---

[14]Vid. A. G. Hamilton, op. cit. p. 148 y ss.. Así mismo, L. M. Laita, *Memoria Teoría de la computabilidad*, (Ed.Facultad de Matemáticas Univ. de Sevilla), p. 83 y ss.. S. Kleene en "General Recursive Functions of Natural Numbers" (Cfr. M. Davis *(Ed.)*, *The Undecidable)*, p. 237 y ss., aunque las funciones I) y II) las representa mediante "S" y "C". S. Kleene, *Introducción a la metamatemática*, p. 203 y ss., donde desglosa el esquema de recursión: Va) $\varphi(0) = q$, $\varphi(y') = \chi(y,\varphi(y))$, y Vb) como aparece en nuestro texto.

Definición 3.

Una función es *recursiva primitiva* sii se define a partir de las funciones I), II), III), por aplicación sucesiva de los esquemas IV), V).

Las funciones I), II) y III), se conocen también con la denominación de *funciones iniciales*. La función obtenida mediante la aplicación del esquema IV) se denomina *dependiente inmediata*. Una serie de funciones numéricas conocidas son recursivas primitivas, como las funciones SUMA, PRODUCTO, EXPONENTE, FACTORIAL, etc.[15].

Definición 4.

Un predicado numérico $\mathbb{W}(x_1,...,x_n)$ es *recursivo primitivo* sii su función característica es recursiva primitiva.

Acerca de los predicados recursivos hemos de tener en cuenta el siguiente resultado: Si, para n≥1, $\mathbb{P}(x_1,...,x_n)$ y $\mathbb{Q}(x_1,...,x_n)$ son predicados recursivos, entonces los siguientes son tambien recursivos:

$\overline{\mathbb{P}(x_1,...,x_n)}$, $\overline{\mathbb{Q}(x_1,...,x_n)}$;

[15]Vid. S. Kleene, *Introducción a la metamatemática*, p. 206 y ss.; el estudio de la función β en p. 221 y ss.

$\mathbb{P}(x_1,\dots,x_n) \wedge \mathbb{Q}(x_1,\dots,x_n)$;

$\mathbb{P}(x_1,\dots,x_n) \vee \mathbb{Q}(x_1,\dots,x_n)$; y

$\mathbb{P}(x_1,\dots,x_n) \rightarrow \mathbb{Q}(x_1,\dots,x_n)$.

Gödel demostró lo que podemos denominar el lema de recursividad que puede enunciarse de la siguiente manera: Para todo predicado recursivo n-ádico $\mathbb{P}(x_1 \dots x_n)$, si $\mathbb{P}(m_1,\dots,m_n)$ entonces existe una fórmula γ con $x_1,\dots,x_n$ libres tal que si $\mathbf{m}_1$, ..., $\mathbf{m}_n$ son, respectivamente, las cifras de los números m_1, ..., m_n, entonces $\vdash \gamma(\mathbf{m}_1,\dots,\mathbf{m}_n/x_1,\dots,x_n)$, y si $\overline{\mathbb{P}(m_1,\dots,m_n)}$ entonces $\vdash \neg\gamma(\mathbf{m}_1,\dots,\mathbf{m}_n/x_1,\dots,x_n)$[16]. Mediante el estudio de la "función β" Gödel demostró que todo predicado recursivo es aritmético. Un predicado aritmético, a partir de Gödel, es todo aquél que puede expresarse en el lenguaje ordinario, usando solamente palabras para el *cero*, *sucesor*, *suma*, *producto*, *identidad*, los juntores y cuantificadores y para variables de números naturales.

El método de Gödel, una vez establecida la teoría de la recursividad, continúa mediante lo que se denomina la "aritmetización" de $\mathfrak{SU}(1)$. Se trata de hacer corresponder

---

[16]También conocido como "teorema de recursividad". Además de las fuentes citadas, S. Kleene en "recursive Predicates and Quantifiers" (*Transactions A. M. S.*, vol. 53, nº 1, p. 41 y ss.) procede a un estudio general, teniendo en cuenta los métodos de "aritmetización gödeliana" que esbozamos más abajo.

biunívocamente un número a cada entidad del lenguaje formal de $\mathfrak{CA}(1)$: a cada signo corresponde biunívocamente un número, y lo mismo se hace con sucesiones de signos, ya sean términos, fórmulas o secuencias de éstas. Se obtiene así un conjunto de números en correspondencia biunívoca con los signos, términos, fórmulas y secuencias de fórmulas del lenguaje; a este número se le llama "número Gödel" o "gödeliano" de la entidad de que se trate[17].

Para establecer los números Gödel, sea la secuencia de los trece primeros números impares; sea la siguiente correspondencia:

$$0 \longrightarrow 1,$$

$$' \longrightarrow 3,$$

$$+ \longrightarrow 5,$$

$$\cdot \longrightarrow 7,$$

$$= \longrightarrow 9,$$

$$\neg \longrightarrow 11,$$

$$\vee \longrightarrow 13,$$

$$\wedge \longrightarrow 15,$$

$$\rightarrow \longrightarrow 17,$$

$$\bigvee \longrightarrow 19,$$

$$\bigwedge \longrightarrow 21,$$

[17]K. Gödel, op. cit. p. 63.. Una sencilla explicación del procedimiento se halla en E. Nagel y J. R. Newman, *El teorema de Gödel*, p.88 y ss..

$(\longrightarrow 23,$

$) \longrightarrow 25,$

A las variables se hacen corresponder números naturales de la siguiente manera: para todo n≥1, a la n-ésima variable se hace corresponder el n-ésimo número primo mayor que 25, con lo que la tabla continuaría:

$x_1 \longrightarrow 29,$

$x_2 \longrightarrow 31, \ldots$

y así sucesivamente. Tras la enumeración de las variables contamos con una enumeración completa del alfabeto.

Se procede después a numerar las fórmulas (o secuencias de signos, para incluir en el procedimiento los términos) del siguiente modo: Si Σ es una secuencia de k ocurrencias de signos del alfabeto, cualquiera que sea k≥1, se asigna a Σ el número $(pr_1^{s_1}).(pr_2^{s_2}). \ldots .(pr_k^{s_k})$, donde, para cada i≤k, pr_i es el i-ésimo número primo, mientras que s_i es el gödeliano del signo que aparece en el lugar i-ésimo en Σ. De este modo, por ejemplo, a la fórmula $x_1 + x_2 = x_3$, corresponde el número $2^{29}\times 3^5\times 5^{31}\times 7^9\times 11^{37}$.

Sólo resta obtener los números gödelianos de las secuencias de fórmulas. Sea Δ una secuencia de t ocurrencias de fórmulas de $\mathfrak{CU}_{(1)}$, para cualquier t≥1; asignamos a Δ el número $(pr_1^{f_1}).(pr_2^{f_2}). \ldots .(pr_t^{f_t})$, donde, para cada i≤t, pr_i es el i-ésimo número primo, mientras que f_i es el gödeliano de la fórmula que ocurre en el i-ésimo lugar en Δ. Así, por ejemplo, dada la secuencia que consta de las fórmulas $0 + x_1 = x_1$ y $x_1 + x_2 = x_3$, el gödeliano que le corresponde es:

$$2^{(2^3 \times 3^5 \times 5^{29} \times 7^9 \times 11^{29})} \times 3^{(2^{29} \times 3^5 \times 5^{31} \times 7^9 \times 11^{37})}.$$

Mediante este procedimiento y teniendo en cuenta el teorema de Gauss[18], se consigue establecer una correspondencia biunívoca entre las entidades de $\mathfrak{CA}_{(1)}$ y un conjunto de números naturales; tales entidades, como hemos visto, son los "signos", "fórmulas" (y, en su caso, términos) y "secuencias de fórmulas". Si tenemos presente que una demostración en $\mathfrak{CA}_{(1)}$ no es más que una secuencia de fórmulas del cálculo, que cumplen determinadas condiciones, mediante la gödelización hemos hecho corresponder ciertos números a las demostraciones de $\mathfrak{CA}_{(1)}$. En general, si Σ es una entidad de $\mathfrak{CA}_{(1)}$, mediante $G(\Sigma)$ representamos el número Gödel de Σ.

A partir de aquí, podemos también obtener una correspondencia entre ciertas propiedades metateoréticas de $\mathfrak{CA}_{(1)}$ y predicados de números naturales. En particular, a los predicados metateoréticos "α es una fórmula", "α es un axioma", "α es consecuencia inmediata de β", "Δ es una demostración" y "Δ es una demostración de α", corresponden, siguien-

[18]El denominado *teorema fundamental de la aritmética*, según el cual "todo número entero positivo mayor que 1 se puede expresar de una y sólo una manera (excepto por el orden de los factores) como un producto de números primos". Cfr. C. B. Boyer, *Historia de la matemática*, p. 634..

do a Gödel, predicados aritméticos que por eso mismo son nombrados en la forma x es una FORMULA, x es un AXIOMA, x es CONSECUENCIA INMEDIATA DE y, x es una DEMOSTRACION, x es una DEMOSTRACION DE y, los cuales se representan, para mayor facilidad, de la siguiente manera: $\mathbb{FORM}(x)$, $\mathbb{CI}(x,y)$, $\mathbb{M}(x)$, $\mathbb{D}(x,y)$, donde x e y son variables de números. Gödel[19] demostró que estos predicados son recursivos primitivos.

Al predicado metateorético "α es demostrable", donde α es una fórmula de $\mathfrak{CA}(1)$, se puede hacer corresponder el predicado numérico x es DEMOSTRABLE -$\mathbb{DEM}(x)$-, donde x es una variable numérica, el cual se puede definir como "existe un y tal que y es una DEMOSTRACION DE x", donde x e y son variables de números. De este predicado no consta que sea recursivo, dado que si bien $\mathbb{D}(y,x)$ es recursivo, en el definido interviene la cuantificación; podemos representarlo como $(\exists y)\mathbb{D}(y,x)$. $\mathbb{D}(y,x)$ es un predicado diádico recursivo y, si $n \in N$, $\mathbb{D}(n,x)$ es un predicado monádico recursivo; de aquí que también sean recursivos los siguientes monádicos: $(\exists y)_{y<n}\mathbb{D}(y,x)$ y $(\forall y)_{y<n}\mathbb{D}(y,x)$, dado que éstos son lo mismo que, respectivamente, $\mathbb{D}(1,x) \vee \ldots \vee \mathbb{D}(n-1,x)$, y $\mathbb{D}(1,x) \wedge \ldots \wedge \mathbb{D}(n-1,x)$, los cuales son recursivos por iteración del resultado, mencionado más arriba, para predicados recursivos. Sin embargo, $(\exists y)\mathbb{D}(y,x)$ y $(\forall y)\mathbb{D}(y,x)$ no son una

---

[19] K. Gödel, op. cit., pp. 69-73.

disyunción ni una conjunción finita[20].

Definición 5.

Función Z para $y \in N$, $Z(y)$ es el "Número Gödel correspondiente a la expresión formal de y en el lenguaje de $\mathfrak{CA}_{(1)}$".

Definición 6.

Sea α una fórmula del lenguaje de $\mathfrak{CA}_{(1)}$ y m su número gödeliano; se define la función *Neg*:

Neg(m) es el "Número gödeliano de $\neg\alpha$".

Definición 7.

Si x el número gödeliano de una fórmula α en la cual ocurre libre una variable **y** cuyo número gödeliano es y; entonces, siendo **z** la cifra del número z -**z** tendrá la forma $0' \cdots '$-

$$Sb(x,\ y,\ z) = G(\alpha(\mathbf{z}/\mathbf{y}));$$

es decir, $Sb(x,\ y,\ z)$ es el número gödeliano de la fórmula resultante de sustituir en α la variable libre de gödeliano y por la cifra del número z[21]. Si no se verifican las condi-

---

[20]Vid. S. Kleene, proposición p. 211 en op. cit..

[21]K. Gödel, op. cit., p.71. La notación de Gödel es $Sb(x\,{}^{z}_{y})$. Esta es la función número 30 de las 46 definidas, las cuales son recursivas primitivas, excepto la función correspondien-

ciones mencionadas, entonces $Sb(x, y, z) = x$.

A partir de esta noción y de la establecida en la definición 5, podemos obtener una función monádica: $Sb(x, u, Z(x))$, donde u representa un determinado número primo mayor que 25; ello es necesario para conseguir una fórmula autorreferente (cuando se interprete), lo cual constituye un importante objetivo del procedimiento que hemos denominado "gödelización".

§ 25 Teorema de Gödel.

Definición 1.

Un sistema de cálculo aritmético, cuyo lenguaje es el mismo que el de $\mathfrak{CA}(1)$, es *ω-consistente* sii para toda fórmula con la variable x libre, si para todo número natural $\vdash \alpha(0^{(n)}/x)$, entonces no se verifica que $\vdash \neg\Lambda x\alpha$[22].

Dado que un sistema se dice consistente sii existe al

---

te al predicado antes mencionado que "es la única de las nociones 1-46 de la que no podemos afirmar que sea recursiva primitiva" (Ibíd. p. 72).

[22]Cfr. E. Díaz, op. cit., p. 54, donde presenta un párrafo traducido de A. Tarski. La noción tarskiana, como él mismo indica -y E. Díaz señala-, difiere de la de K. Gödel en la presentación. Vid. A. Tarski, "Some observations on the concept of ω-consistency and ω-completeness", en *Logic, Semantics, Metamathematics*, p. 279 y ss., la noción corresponde a la definición 12, explicada en p. 288.

menos una fórmula de su lenguaje que no es demostrable, los sistemas ω-consistentes son *a fortiori* consistentes[23].

Teorema.

Si $\mathfrak{CA}_{(1)}$ *es* ω*-consistente, entonces* $\mathfrak{CA}_{(1)}$ *no es completo.* Es decir, *si* $\mathfrak{CA}_{(1)}$ *es* ω*-consistente, entonces existe una fórmula sin variables libres del lenguaje de* $\mathfrak{CA}_{(1)}$*, aritméticamente válida, tal que ni ella ni su negación son demostrables*[24].

Demostración:

La prueba del teorema se realiza[25], esquemáticamente, de la siguiente manera: En primer lugar, se trata de construir una fórmula cerrada, del lenguaje de $\mathfrak{CA}_{(1)}$, tal que ni ella ni su negación son demostrables en $\mathfrak{CA}_{(1)}$. Esta fórmula formaliza un enunciado aritmético que, en virtud de la aritmetización, es el correspondiente al enunciado metateor

---

[23]Vid. K. Gödel, op. cit., *Introducción de J. Mosterín*, p. 51. Así mismo, J. Ladrière, op. cit. p. 68; para el estudio de la generalización de Rosser, presentación de Kleene, etc., ibíd. p. 375 y ss..

[24]Vid. E. Díaz, op. cit., p. 186. En K. Gödel, *Obras completas*, p. 74. "Aritméticamente válida" es sinónimo de "válida para una interpretación aritmética" o "válida para una interpretación en sentido aritmético".

[25]La demostración de incompletud se puede realizar para sistemas consistentes, sin necesidad de exigir ω-consistencia (generalización de Rosser).

tico que dice que la fórmula en cuestión no es demostrable en $\mathfrak{CA}_{(1)}$.

Hay que advertir que "en el proceso de construcción y de demostración de la indecidibilidad de su fórmula, Gödel no recurre para nada, al menos explícitamente, ni al carácter circular de dicha fórmula ni a la exhibición de su verdad"[26]; sin embargo -sea γ la fórmula en cuestión- puesto que γ, cuando es interpretada y teniendo en cuenta la aritmetización, afirma que "γ no es demostrable"; si se prueba que efectivamente no lo es, entonces resulta ser aritméticamente verdadera. A continuación exponemos brevemente una demostración.

Sea $\mathbb{Q}(x,y)$ el predicado aritmético

$$\overline{\mathbb{D}(x,\ Sb(y,\ 31,\ z(y))}),$$

que afirma que "x no es una DEMOSTRACION DE $Sb(y,\ 31,\ Z(y))$", donde x e y son variables numéricas, Sb es la función gödeliana "sustitución" dada en la definición 7-§-24, 31 es el número gödeliano de la segunda variable del lenguaje de $\mathfrak{CA}_{(1)}$ y $Z(y)$ expresa el número gödeliano correspondiente a la cifra y. De acuerdo con el teorema de la recursividad, teniendo en cuenta que $\mathbb{Q}(x,y)$ es un predi-predicado recursivo, podemos encontrar una fórmula γ con dos variables libres x e y, respectivamente, la primera y la se-

[26]E. Díaz. op. cit. p. 187.

gunda variable del alfabeto, que formaliza tal predicado. Sea q el número gödeliano de γ; haciendo uso de la función Sb e intercambiando los enunciados metateoréticos por los correspondientes enunciados aritméticos, para cualesquiera n, $m \in N$:

a) $\overline{\mathbb{Q}(n,m)} \Rightarrow \mathbb{DEM}(Sb(Sb(q,\ 29,\ Z(n)),\ 31,\ Z(m)))$

b) $\mathbb{Q}(n,m) \Rightarrow \mathbb{DEM}(Neg(Sb(Sb(q,\ 29,\ Z(n)),\ 31,\ Z(m))))$.

Sea la fórmula $\Lambda x\gamma$ y $G(\Lambda x\gamma) = p$. Sustituyendo en a) y b) las expresiones de $\overline{\mathbb{Q}(n,m)}$ y $\mathbb{Q}(n,m)$ por sus signifcados respectivos y m por p, tenemos, para todo $n \in N$,

a') $\overline{\mathbb{D}(n,\ Sb(p,\ 31,\ Z(p)))} \Rightarrow \mathbb{DEM}(Sb(Sb(q,29,Z(n)),31,Z(p)))$,

b') $\mathbb{D}(n,Sb(p,31,Z(p))) \Rightarrow \mathbb{DEM}(Neg(Sb(Sb(q,29,Z(n)),31,Z(p))))$

La fórmula $\Lambda x\gamma(0^{(p)}/y)$[27] tiene como número gödeliano $Sb(p,\ 31,\ Z(p))$. Esta fórmula, que ya no contiene variables libres y se denomina *fórmula Gödel*, formaliza en el lenguaje de $\mathfrak{SA}_{(1)}$ la siguiente expresión aritmética: PARA TODO x, x NO ES DEMOSTRACION DE $Sb(p,\ 31,\ Z(p))$. Es decir, de esta forma se ha conseguido una fórmula que, interpretada aritméticamente, es autorreferente; puesto que dice que no existe ninguna demostración de la fórmula cuyo gödeliano es $Sb(p,\ 31,\ Z(p))$. Por consiguiente, la fórmula $\Lambda x\gamma(0^{(p)}/y)$ se puede interpretar como que afirma su propia indemostrabili-

[27]Fórmula resultante de sustituir en $\Lambda x\gamma$ las ocurrencias libres de y por la cifra de p.

dad.

Para culminar la demostración, procedemos de la siguiente manera:

Supongamos, en primer lugar, que $\vdash \wedge x\gamma(0^{(p)}/y)$. Entonces, por eliminación de $\wedge$, para cada $n \in \mathcal{N}$, se ha de verificar que $\vdash \gamma(0^{(n)},0^{(p)}/x,y)$[28]. Pero, por otra parte, existirá un número n tal que $\mathbb{D}(n,\ Sb(p,\ 31,\ Z(p))$ y, de acuerdo con

b'), $\mathbb{DEM}(Neg(Sb(Sb(q,\ 29,\ Z(n)),\ 31,\ Z(p))))$; que

corresponde al predicado metateorético "es demostrable la negación de la fórmula $\gamma(0^{(n)},0^{(p)}/x,y)$", es decir, $\vdash \neg\gamma(0^{(n)},0^{(p)}/x,y)$; y, en consecuencia, $\mathfrak{CA}_{(1)}$ no sería consistente.

Así pues, si $\vdash \wedge x\gamma(0^{(p)}/y)$, entonces $\mathfrak{CA}_{(1)}$ no es consistente y, por contraposición, si $\mathfrak{CA}_{(1)}$ es consistente, $\wedge x\gamma(0^{(p)}/y)$ no está en $\mathfrak{CA}_{(1)}$; es decir, no $\vdash \wedge x\gamma(0^{(p)}/y)$.

Supongamos, en segundo lugar, que $\vdash \neg\wedge x\gamma(0^{(p)}/y)$. Dado lo anteriormente demostrado, es decir, la indemostrabilidad de la fórmula de Gödel, para cada $n \in \mathcal{N}$, $\overline{\mathbb{D}(n,\ Sb(p,31,Z(p))}$ y, por consiguiente, según se establece en el anterior a'),

$$\mathbb{DEM}(Sb(Sb(q,\ 29,\ Z(n)),\ 31,\ Z(p))),$$

que corresponde al enunciado metateorético "la fórmula $\gamma(0^{(n)},0^{(p)}/x,y)$ es demostrable", es decir,

[28]Esta fórmula contiene las cifras de n y p en lugar de las variables x e y, respectivamente, obtenida por eliminación del cuantificador en la fórmula anterior.

$$\vdash \gamma(0^{(n)},0^{(p)}/x,y).$$

Pero entonces, puesto que, para cada *n*, $\vdash \gamma(0^{(n)},0^{(p)}/x,y)$, la hipótesis de que $\vdash \neg\wedge x\gamma(0^{(p)}/y)$, supondría la no ω-consistencia de $\mathfrak{CU}_{(1)}$.

Así pues, si $\vdash \neg\wedge x\gamma(0^{(p)}/y)$, entonces $\mathfrak{CU}_{(1)}$ no es ω-consistente. En consecuencia, por contraposición, si $\mathfrak{CU}_{(1)}$ es ω-consistente, entonces, no $\vdash \neg\wedge x\gamma(0^{(p)}/y)$.

Se demuestra entonces que si $\mathfrak{CU}_{(1)}$ es ω-consistente, entonces no son demostrables ni $\wedge x\gamma(0^{(p)}/y)$ ni $\neg\wedge x\gamma(0^{(p)}/y)$. Es decir, si $\mathfrak{CU}_{(1)}$ *es* ω*-consistente, hay una fórmula del lenguaje de* $\mathfrak{CU}_{(1)}$ *que no es demostrable, ni refutable. Esta fórmula -la fórmula de Gödel-, puesto que afirma la propia indemostrabilidad es, además, aritméticamente verdadera*[29].

§ 26 Consecuencias del teorema de Gödel.

Más que de consecuencias del teorema antes estudiado cabe hablar de las consecuencias del trabajo de Gödel: El teorema de incompletud no es más que el teorema VI; son importantes, además, los principios de teoría de la recursividad, así como el teorema XI, según el cual la consistencia de $\mathfrak{CU}_{(1)}$ no es demostrable en el propio $\mathfrak{CU}_{(1)}$[30] -es decir, no

[29] La exposición de S. Kleene está precedida de un comentario ilustrativo del significado de la fórmula de Gödel, en op. cit. p. 190 y ss.

[30] K. Gödel, op. cit. p. 87.

se puede expresar "$\mathfrak{SA}_{(1)}$ es consistente" mediante una fórmula del lenguaje de $\mathfrak{SA}_{(1)}$ que sea miembro de $\mathfrak{SA}_{(1)}$-.

Consideremos que K es el conjunto de los axiomas aritméticos de $\mathfrak{SA}_{(1)}$. Decir que la fórmula de Gödel -llamémosla η- es aritméticamente verdadera equivale a decir que $K \vDash \eta$. Es decir, toda interpretación que satisface K también satisface η. La indemostrabilidad de η en $\mathfrak{SA}_{(1)}$ supone que no se verifica que $K \vdash \eta$. Si K fuera -lo que no es el caso- un conjunto finito de fórmulas, entonces, si ζ es la conjunción de todas las fórmulas de K, de $K \vDash \eta$ se seguiría que $\vDash \zeta \rightarrow \eta$. En consecuencia, dada la completud de la lógica de primer orden[31], se tendría que $\vdash \zeta \rightarrow \eta$ y, por consiguiente, que $\zeta \vdash \eta$, contra la demostración de incompletud. Pero K no es un conjunto finito, con lo que la demostración de la incompletud de la aritmética no plantea problemas, por lo que se refiere a la completud de la lógica de primer orden. No sucede lo mismo con respecto a la lógica de segundo orden.

Proposición.

$\mathfrak{SA}_{(2)}$ *es incompleta*; es decir, *existe una fórmula* η_2

---

[31]Demostrada por el propio Gödel. Vid. "La suficiencia de los axiomas del cálculo lógico de primer orden", en *Obras completas*, p. 15 y ss. Este artículo apareció en la revista *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol nº 37 (Introducción de J. Mosterín en *Obras completas*, p. 18)

tal que ni $\vdash \eta_2$, *ni* $\vdash \neg\eta_2$. *Además* η_2 *es aritméticamente válida.*

Demostración:

Sea $\mathfrak{CA}^*_{(1)}$ un cálculo aritmético de primer orden con un lenguaje en el que hay, además del predicado diádico "=", un predicado diádico S (Sab se interpretará en el sentido de "b sucesor de a"), y dos predicados triádicos Σ (Σabc se interpretará como "c es la suma de a y b") y Π (Πabc se interpretará como "c es el producto de a por b"). El axioma 2) de $\mathfrak{CA}_{(1)}$ tendrá en $\mathfrak{CA}^*_{(1)}$ la forma $\vee x \wedge y \neg Syx$, o, usando el predicado monádico Zx, introducido por definición $-Zx =_{def} \wedge y \neg Syx-$, $\vee x Zx$; usando también el predicado monádico Ux, introducido por definición $-Ux =_{def} \vee y(Zy \wedge Syx)-$, transcribimos los axiomas 5)-8) y también los axiomas de inducción. Por todo ello, $\mathfrak{CA}^*_{(1)}$ es equipotente con $\mathfrak{CA}_{(1)}$.

Dada la incompletud de $\mathfrak{CA}_{(1)}$, $\mathfrak{CA}^*_{(1)}$ es también incompleto; es decir, existe una fórmula η' tal que no es demostrable ni refutable y es aritméticamente verdadera.

Sea ahora $\mathfrak{CA}^*_{(2)}$ una extensión de $\mathfrak{CA}_{(2)}$ -en realidad, una pseudo extensión, como se ve a continuación- que consiste en añadir al lenguaje de $\mathfrak{CA}_{(2)}$ las constantes Σ y Π, y los axiomas de $\mathfrak{CA}^*_{(1)}$ correspondientes a los axiomas 5)-8) de $\mathfrak{CA}_{(1)}$. Estos cuatro axiomas son, en realidad, demostrables a partir de los restantes axiomas de $\mathfrak{CA}^*_{(2)}$ y, por consiguiente, $\mathfrak{CA}^*_{(2)}$ es equipotente con $\mathfrak{CA}_{(2)}$[32].

Sea η la fórmula de Gödel en $\mathfrak{CA}_{(1)}$ y η' la correspondiente fórmula de $\mathfrak{CA}^*_{(1)}$. Dada la equipotencia de $\mathfrak{CA}_{(1)}$ y $\mathfrak{CA}^*_{(1)}$, se verifica que η' no es demostrable ni refutable en $\mathfrak{CA}^*_{(1)}$ y, además, es aritméticamente válida. Pero η' es una fórmula de $\mathfrak{CA}^*_{(2)}$ y, por tanto, aritméticamente verdadera e igualmente ni demostrable ni refutable en $\mathfrak{CA}^*_{(2)}$. En efecto, supongamos que η' sea demostrable en $\mathfrak{CA}^*_{(2)}$. Sea Δ la demostración de η'; entonces, eliminando en Δ las ocurrencias del axioma de inducción de $\mathfrak{CA}^*_{(2)}$ (es decir, del axioma 5)), y dejando sus instancias obtenidas por eliminación de $\wedge$, obtendríamos una demostración en $\mathfrak{CA}^*_{(1)}$. Dado que $\mathfrak{CA}^*_{(2)}$ es equipotente con $\mathfrak{CA}_{(2)}$ (y sus lenguajes son transcribibles), hallaremos en $\mathfrak{CA}_{(2)}$ una fórmula η_2 que, como η y η', es aritméticamente válida y no es ni demostrable ni refutable.

La aritmética de segundo orden, pues, es incompleta. Sea $\{\mathfrak{P}\}$ el conjunto de los axiomas de Peano. y sea η la fórmula de Gödel. $\{\mathfrak{P}\} \vDash \eta$, y, si ζ representa la conjunción de los axiomas de $\{\mathfrak{P}\}$, $\vDash \zeta \rightarrow \eta$, pero no se da $\vdash \zeta \rightarrow \eta$ y, por tanto, no se da $\zeta \vdash \eta$, de acuerdo con el teorema de incompletud de Gödel; en consecuencia no podemos hallar una deducción de η a partir $\{\mathfrak{P}\}$, aunque la conjunción de las fórmulas

---

[32]Vid. anterior § 22. En A. Church, op. cit. pp. 321-322, aparece la manera de definir la suma y el producto.

de $\{\mathfrak{P}\}$ es una fórmula. De este último hecho, aisladamente considerado, cabría esperar ,que haya modelos de carácter aritmético que satisfagan simultáneamente $\{\{\mathfrak{P}\}, \{\eta\}\}$ mientras que otros satisfacen $\{\{\mathfrak{P}\}, \{\eta\}\}$. Pero, como se ha visto más arriba[33], los cálculos aritméticos son categóricos respecto de los modelos estándar, por lo que es la lógica subyacente misma la que es incompleta. El problema se ha desplazado, pues, como dice Kleene, "la incompletud, que apareció en el sistema axiomático en el caso de los axiomas elementales, es transferida al aparato deductivo, si se intenta evitarla usando axiomas no elementales"[34]. Por lo tanto, la lógica de segundo orden es incompleta. Lo mismo cabe afirmar respecto de sistemas de orden superior al segundo.

La consecuencia más importante del teorema de Gödel estriba en que es la propia lógica (con cierta capacidad expresiva, como la de segundo orden y superior) la que resulta ser incompleta. En efecto, como hemos visto en el resumen de la prueba del parágrafo anterior, la fórmula de Gödel se define en términos muy generales; es decir, a partir de

---

[33]Vid. § 23.

[34]S. Kleene, *Introducción a la metamatemática*, p. 388. En este apartado presenta algunos comentarios como conclusiones de §-75 acerca de la paradoja de Skolem. Por "axiomas elementales" hay que entender que están expresados en primer orden; "aparato deductivo" alude a "lógica de segundo orden" en la que ya los axiomas "no son elementales".

un sistema ampliado, como $\mathfrak{C}\mathfrak{A}_{(1)} \cup \{\wedge x\gamma(0^{(p)}/y)\}$, es posible definir otra fórmula que reune los mismos requisitos que la fórmula de Gödel y, por ello, podemos afirmar que $\mathfrak{C}\mathfrak{A}_{(1)}$ es incompletable, supuesta la consistencia, lo que tambien sucede con $\mathfrak{C}\mathfrak{A}_{(2)}$ y, en consecuencia, con los sistemas del tipo $\mathfrak{C}\mathfrak{D}_{(2)}$ -lógica subyacente, de segundo orden-, lo que significa que su incompletud es esencial. Así pues, la lógica de segundo orden es incompletable.

Hemos de señalar, por último, que se derivan consecuencias filosóficas de los trabajos de Gödel, en el ámbito de la filosofía de la lógica y de la matemática. Estas atañen sobre todo a los seguidores de Hilbert, "pues es indiscutible que los resultados de Gödel han marcado un fracaso relativo de la tentativa hilbertiana"[35].

[35] Cfr. J. Ladrière, op. cit., p. 335.

C A P I T U L O IV

SOBRE LA COMPLETUD RESTRINGIDA.

§ 27 La corrección de $\mathfrak{SD}\langle 2\rangle$.

De acuerdo con las definiciones de §-14, para una fórmula α y una interpretación $\mathfrak{I}$, si $\mathfrak{I}$ *sat* α, entonces $\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$. Pero el valor de una fórmula bajo una dada interpretación está definida sólo cuando la fórmula en cuestión es una sentencia, aunque, como hemos advertido, la noción de satisfacción se puede extender a fórmulas con ocurrencias de variables libres. En general, si α es una fórmula con alguna ocurrencia de variable libre, dada la interpretación $\mathfrak{I}$, por "$\mathfrak{I}$ *sat* α" entenderemos "$\mathfrak{I}$ satisface la clausura universal de α". Es decir, si en α ocurren libres las variables (de cualquier tipo) $x_1,\dots,x_n$, "$\mathfrak{I}$ *sat* α" representa lo mismo que "$\mathfrak{I}$ *sat* $\Lambda x_1\dots x_n\alpha$"; $\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$ significa que $(\Lambda x_1\dots x_n\alpha)_{\mathfrak{I}} = 1$.

A continuación enunciamos, y proseguimos con su demostración, el teorema de la corrección, tras probar un lema necesario para ello.

Lema.

Para toda interpretación $\mathfrak{I}$, toda n-pla de variables individuales x_1, ..., x_n, toda n-pla de parámetros a_1, ...,

a_n, $n \geq 1$, todo par de fórmulas α y β, todo relator n-ádico R que no ocurre en α y toda interpretación $\Im' \underset{R}{=} \Im$, *si* $\Im(\beta(x_1, \ldots, x_n)) = \Im'(R)$, *entonces*, $\alpha(\beta/Px_1,..,x_n)_{\Im} = \alpha(R/P)_{\Im'}$.

Demostración:

Hacemos la prueba por inducción sobre la longitud de α, suponiendo, en primer lugar, que $\beta(a_1,...,a_n/x_1,...,x_n)$ es una sentencia.

1º) α es atómica. $\alpha(\beta/Px_1,...,x_n)$ es $\beta(a_1,...,a_n/x_1,...,x_n)$ y $\alpha(R/P)$ es $Ra_1,...,a_n$. Si $\beta(a_1,...,a_n/x_1,...,x_n)_{\Im'} = 1$, como por definición, $\langle\Im'(a_1),...,\Im'(a_n)\rangle \in \Im(\beta(x_1, \ldots, x_n))$; y por hipótesis $\Im(\beta(x_1, \ldots, x_n)) = \Im'(R)$, tendremos que $\langle\Im'(a_1),...,\Im'(a_n)\rangle \in \Im'(R)$; de donde $\alpha(R/P)_{\Im'} = 1$.

Por otra parte, en caso de que

$$\beta(a_1,...,a_n/x_1,...,x_n)_{\Im'} = 0,$$

$\langle\Im'(a_1),...,\Im'(a_n)\rangle \notin \Im(\beta(x_1, \ldots, x_n))$ y, de acuerdo con la hipótesis, $\langle\Im'(a_1),...,\Im'(a_n)\rangle \notin \Im'(R)$; así pues, por definición, $Ra_1,...,a_{n\,\Im'} = 0$.

Si $\beta(a_1,...,a_n/x_1,...,x_n)$ no es una sentencia, por definición, $\Im(\beta(x_1, \ldots, x_n)) = \Im^*(\beta'(x_1, \ldots, x_n))$, donde β' representa la fórmula resultante de sustituir en β cada variable individual libre distinta de $x_1,...,x_n$ por parámetros b_1, b_2, ..., b_i, para $i \geq 1$, distintos de $a_1,...,a_n$, e

$$\mathfrak{I}^{*}_{b_1,\ldots,b_i} = \mathfrak{I}.$$

Considerando que $\beta'(a_1,\ldots,a_n/x_1,\ldots,x_n)_{\mathfrak{I}^*} = t$ (para $t = 0$ o $t = 1$), se procede como en el caso anterior.

2º) α es $\neg\gamma$. Supuesto $\gamma(\beta/Px_1,\ldots,x_n)_{\mathfrak{I}'} = \gamma(R/P)_{\mathfrak{I}'}$. entonces, por evaluación de $\neg$, $\neg\gamma(\beta/Px_1,\ldots,x_n)_{\mathfrak{I}'} = \neg\gamma(R/P)_{\mathfrak{I}'}$.

3º) α es $\gamma \vee \delta$. Supuesto: $\gamma(\beta/Px_1,\ldots,x_n)_{\mathfrak{I}'} = \gamma(R/P)_{\mathfrak{I}'}$ y $\delta(\beta/Px_1,\ldots,x_n)_{\mathfrak{I}'} = \delta(R/P)_{\mathfrak{I}'}$. Por evaluación de $\vee$ se da que $(\gamma(\beta/Px_1,\ldots,x_n) \vee \delta(\beta/Px_1,\ldots,x_n))_{\mathfrak{I}'} = (\gamma(R/P) \vee \delta(R/P))_{\mathfrak{I}'}$; ahora bien, $\gamma(\beta/Px_1,\ldots,x_n) \vee \delta(\beta/Px_1,\ldots,x_n)$ coincide con $(\gamma \vee \delta)(\beta/Px_1,\ldots,x_n)$ y $\gamma(R/P) \vee \delta(R/P)$ con $(\gamma \vee \delta)(R/P)$, luego $((\gamma \vee \delta)(\beta/Px_1,\ldots,x_n))_{\mathfrak{I}'} = ((\gamma \vee \delta)(R/P))_{\mathfrak{I}'}$.

4º) α es $\bigvee s\gamma$. Supuesto:
$(\gamma(r/s)(\beta/Px_1,\ldots,x_n))_{\mathfrak{I}^*} = (\gamma(r/s)(R/P))_{\mathfrak{I}^*}$; siendo r una constante del mismo tipo que s e $\mathfrak{I}^* \underset{r}{=} \mathfrak{I}'$. (i) P no es s: $\gamma(r/s)(\beta/Px_1,\ldots,x_n)$ es $(\gamma(\beta/Px_1,\ldots,x_n))(r/s)$, del mismo modo que $\gamma(r/s)(R/P)$ es $(\gamma(R/P))(r/s)$; por evaluación de $\bigvee$ y la hipótesis, $(\bigvee s(\gamma(\beta/Px_1,\ldots,x_n)))_{\mathfrak{I}'} = (\bigvee s(\gamma(R/P)))_{\mathfrak{I}'}$, pero $\bigvee s(\gamma(\beta/Px_1,\ldots,x_n))$ es lo mismo que $\bigvee s\gamma(\beta/Px_1,\ldots,x_n)$, y $\bigvee s(\gamma(R/P))$ es lo mismo que $\bigvee s\gamma(R/P)$, por lo tanto se verifica que $(\bigvee s\gamma(\beta/Px_1,\ldots,x_n))_{\mathfrak{I}'} = (\bigvee s\gamma(R/P))_{\mathfrak{I}'}$. (ii) P es s: tanto $(\gamma(r/s))(\beta/Px_1,\ldots,x_n)$ como $(\gamma(r/s))(R/P)$ son $\gamma(r/s)$,

por lo que $V s\gamma(\beta/Px_1,...,x_n)$ y $V s\gamma(R/P)$ son $V s\gamma$, siendo trivial el resultado.

Teorema 1.

$\mathfrak{CD}_{(2)}$ es correcto. Es decir, para cada conjunto Δ de fórmulas de $\mathcal{L}$ y cada fórmula α de $\mathcal{L}$, si $\Delta \vdash \alpha$ entonces $\Delta \models \alpha$[1].

Demostración:

La demostración sigue cada una de las cláusulas que definían "$\vdash$" de § 13 -en concreto, definiciones 4 y 8 § 13-; es decir, probando que cada consecuencia inmediata de un conjunto de fórmulas es consecuencia lógica del mismo[2]. En cada uno de los apartados 1)-8) escribimos las premisas correspondientes a las reglas de $\mathfrak{CD}_{(2)}$ seguidas del signo $\models$, y, a la derecha de éste, la conclusión; posteriormente, en los apartados 9)-12) establecemos que si se verifican determinadas consecuencias lógicas -de conclusiones de deducciones subsidiarias-; entonces la conclusión obtenida por estas

---

[1] L. Henkin, "Completeness in the theory of types" en *The Philosophy of Mathematics*, p. 59, establece un "teorema 2" uno de cuyos sentidos es la corrección.

[2] A modo de resumen cabría partir de la corrección de $\mathfrak{CD}_{(1)}$ y probar solamente los casos específicos de $\mathfrak{CD}_{(2)}$ Sin embargo, dado que no está establecida previamente la corrección de $\mathfrak{CD}_{(1)}$, es preferible realizar este recorrido pormenorizado.

reglas tambien es consecuencia lógica de las hipótesis que figuran en la expresión de las mismas (además de los números anotamos las iniciales que identifican las reglas del cálculo). Dada una interpretación cualquiera que satisfaga a las premisas, de acuerdo con la noción misma de consecuencia lógica, tambien ha de satisfacer a la conclusión; por ello partimos de una interpretación $\mathfrak{I}$ que satisface a las fórmulas premisas:

1), IC: $\alpha, \beta \models \alpha \wedge \beta$[3].

Si $\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$ y $\beta_{\mathfrak{I}} = 1$, por evaluación de $\wedge$, $(\alpha \wedge \beta)_{\mathfrak{I}} = 1$.

2), EC: $\alpha \wedge \beta \models \alpha$; $\alpha \wedge \beta \models \beta$.

Si $(\alpha \wedge \beta)_{\mathfrak{I}} = 1$, por evaluación de $\wedge$, $\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$ y $\beta_{\mathfrak{I}} = 1$.

3), ID: $\alpha \models \alpha \vee \beta$.

Si $\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$, por evaluación de $\vee$, $(\alpha \vee \beta)_{\mathfrak{I}} = 1$.

4), MP: $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \models \beta$.

Si $\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$ y $(\alpha \rightarrow \beta)_{\mathfrak{I}} = 1$, por evaluación de $\rightarrow$, $\beta_{\mathfrak{I}} = 1$.

---

[3]Al aparecer más de una fórmula como premisa se puede anotar $\{\alpha, \beta\} \models \alpha \wedge \beta$ y cuando sólo haya una premisa se tratará de un conjunto de una sóla fórmula; la interpretación $\mathfrak{I}$ satisface simultáneamente el conjunto de las premisas. Puesto que el resultado es el mismo que si decimos que $\mathfrak{I}$ satisface cada una de las fórmulas del conjunto de las premisas, prescindimos de las llaves para abreviar.

5), EN: $\neg\neg\alpha \models \alpha$.

Si $\neg\neg\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$, por evaluación de $\neg$, $\neg\alpha_{\mathfrak{I}} = 0$, por evaluación de $\neg$, $\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$.

6), IE: *a)* $\alpha(r/s) \models \bigvee s\alpha$; *b)* $\alpha(\beta/Px_1,...,x_n) \models \bigvee_P\alpha$.

a) Si $\alpha(r/s)_{\mathfrak{I}} = 1$, entonces, por evaluación de $\bigvee$, $\bigvee s\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$.

b) $\alpha(\beta/Px_1,...,x_n)_{\mathfrak{I}} = 1$. Sea R un relator, del mismo tipo que P, que no ocurra en α; sea $\mathfrak{I}$ tal que $\mathfrak{I}' \underset{R}{=} \mathfrak{I}$, e $\mathfrak{I}'(R) = \mathfrak{I}(\beta/Px_1,...,x_n)$. De acuerdo con el lema precedente, $\alpha(R/P)_{\mathfrak{I}'} = 1$ y, por evaluación de $\bigvee$, $\bigvee_P\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$.

7), IG: $\alpha \models \bigwedge s\alpha$.

Si $\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$, y en α ocurre s libre, entonces por definición de satisfacción para fórmulas con variables libres, $\bigwedge s\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$.

8), EU: *a)* $\bigwedge s\alpha \models \alpha(r/s)$; *b)* $\bigwedge_P\alpha \models \alpha(\beta/Px_1,...,x_n)$.

a) Si $\bigwedge s\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$, por evaluación de $\bigwedge$, siendo r una cons tante del mismo tipo que s, $\alpha(r/s)_{\mathfrak{I}} = 1$.

b) Si $\bigwedge_P\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$, por evaluación de $\bigwedge$, para toda $\mathfrak{I}' \underset{R}{=} \mathfrak{I}$, siendo R un relator, del mismo tipo que P, que no ocurre en α, $\alpha(R/P)_{\mathfrak{I}'} = 1$. Entonces, para cada fórmula β tal que $\mathfrak{I}(\beta(x_1,...,x_n)) = \mathfrak{I}'(R)$, de acuerdo con el lema precedente,

$\alpha(\beta/Px_1,\ldots,x_n)_{\mathfrak{I}} = 1$.

9) ED: Si $\Gamma,\ \alpha \vdash \gamma$ y $\Gamma,\ \beta \vdash \gamma$, en ambos casos con las restricciones, respectivamente para α y β, exigidas para la aplicación de la regla, entonces $\Gamma,\ \alpha \vee \beta \vDash \gamma$.

Si $\Gamma,\ \alpha \vdash \gamma$ y $\Gamma,\ \beta \vdash \gamma$ entonces, por hipótesis de la inducción, $\Gamma,\ \alpha \vDash \gamma$ y $\Gamma,\ \beta \vDash \gamma$. Entonces, si cuando $\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$ e $\mathfrak{I}$ *sat* Γ, se tiene que $\gamma_{\mathfrak{I}} = 1$, y cuando $\beta_{\mathfrak{I}} = 1$ e $\mathfrak{I}$ *sat* Γ, se tiene que $\gamma_{\mathfrak{I}} = 1$; entonces, por evaluación de $\vee$, cuando $(\alpha \vee \beta)_{\mathfrak{I}} = 1$ e $\mathfrak{I}$ *sat* Γ, se ha de tener que $\gamma_{\mathfrak{I}} = 1$.

10), TD: Si $\Gamma,\ \alpha \vdash \beta$, con las restricciones exigidas para la aplicación de las regla, entonces $\Gamma \vDash \alpha \rightarrow \beta$.

Si $\Gamma,\ \alpha \vdash \beta$, entonces, por hipótesis de la inducción $\Gamma,\ \alpha \vDash \beta$. Si cuando $\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$ e $\mathfrak{I}$ *sat* Γ, se tiene que $\beta_{\mathfrak{I}} = 1$; entonces, por evaluación de $\rightarrow$, si $\mathfrak{I}$ *sat* Γ, se ha de tener que $(\alpha \rightarrow \beta)_{\mathfrak{I}} = 1$.

11), IN: Si $\Gamma,\ \alpha \vdash \beta \wedge \neg\beta$, con las restricciones exigidas para la aplicación de la regla, entonces $\Gamma \vDash \neg\alpha$.

Si $\Gamma,\ \alpha \vdash \beta \wedge \neg\beta$, entonces, por hipótesis de la inducción, $\Gamma,\ \alpha \vDash \beta \wedge \neg\beta$. Si cuando $\mathfrak{I}$ *sat* $\Gamma \cup \{\alpha\}$, se tiene que $(\beta \wedge \neg\beta)_{\mathfrak{I}} = 1$, como $(\beta \wedge \neg\beta)_{\mathfrak{I}} = 0$, cualquiera que sea $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}$ $\overline{sat}$ $\Gamma \cup \{\alpha\}$; en consecuencia, si $\mathfrak{I}$ *sat* Γ, entonces $\alpha_{\mathfrak{I}} = 0$ y, por evaluación de $\neg$, $\neg\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$.

12), EE: Si Γ, $\alpha \vdash \delta$, con las restricciones exigidas para la aplicación de la regla, entonces Γ, $\bigvee s\alpha \vDash \delta$.

Si Γ, $\alpha \vdash \delta$, como la restricción propia de esta regla incluye la restricción propia de la regla 10), por la anterior demostración de 10), $\Gamma \vDash \alpha \rightarrow \delta$; como en $\alpha \rightarrow \delta$ está libre s, $\Gamma \vDash \bigwedge s(\alpha \rightarrow \delta)$. Pero como s no ocurre libre en δ -como exige la restricción de la regla-, dada la equivalencia semántica de $\bigwedge s(\alpha \rightarrow \delta)$ y $\bigvee s\alpha \rightarrow \delta$, entonces $\Gamma \vDash \bigvee s\alpha \rightarrow \delta$ y de aquí Γ, $\bigvee s\alpha \vDash \delta$.

Corolario.

$\mathfrak{CD}_{(3)}$ *es correcto.*

Efectivamente, la corrección de $\mathfrak{CD}_{(3)}$ se deduce de la corrección de $\mathfrak{CD}_{(2)}$ y de la validez universal del esquema axiomático ii) de Hilbert-Ackermann, como se mostró en § 20.

§ 28 Métodos de Henkin.

En 1.949 L. Henkin publicó un artículo sobre la completud del cálculo de predicados de primer orden[4]; en

---

[4]L. Henkin, "The completeness of de first-order functional calculus", *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 14, reproducido en *The Philosophy of Mathematics*, ed. J. Hintikka, pp. 42-50 (las referencias aluden a esta reproducción, salvo que

este trabajo, mediante un nuevo enfoque, prueba el conocido como "primer toerema de Gödel" según el cual los cálculos de predicados de primer orden son completos[5]. El método de Henkin ofrece ciertas ventajas frente a la exposición de Gödel y la de Hilbert y Bernays, siendo la más importante que "la prueba sugiere una nueva aproximación al problema de la completud para el cálculo de predicados de orden superior"[6], de lo cual se ocuparía en posteriores trabajos.

Poco tiempo después, en 1.950, apareció en la misma revista la anunciada contribución de Henkin al estudio del problema de la completud para el orden superior, en concreto sobre la teoría de los tipos[7]. El método seguido es una adaptación del que adoptó en el primer trabajo para probar la completud de los cálculos de primer orden[8].

---

se indique lo contrario).

[5]L. Henkin. op. cit. p. 42. El mencionado "primer teorema de Gödel" es el "Teorema I" del trabajo de Gödel denominado "La suficiencia de los axiomas del cálculo lógico de primer orden" (*Obras completas*, p. 20 y ss.-el teorema I se formula en p. 21-).

[6]L. Henkin, op. cit. p. 42 (la traducción es mía).

[7]L. Henkin, "The completeness in the theory of types", *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 15, 1.950, reproducido en *The Philosophy of Mathematics*, pp. 51-63.

[8]En A. Church, op. cit. p. 207 y ss., hay una aplicación de la prueba de Henkin, específica para el segundo orden. La prueba de Church contiene una modificación, no esencial, sobre la prueba contenida en la tesis doctoral de Henkin. Church indica que esta modificación le fue sugerida por el

Tras el asentamiento de lo que se puede llamar la "semántica científica", tomando a Tarski como punto de partida[9], Henkin basa la semántica en el estudio de las estructuras que puedan interpretar los lenguajes formales. Para el orden superior Henkin usa un lenguaje con teoría de los tipos, de manera semejante a Hilbert y Ackermann. Un lenguaje de esta clase puede ser interpretado según la semántica establecida en § 14, donde se indican las características de las estructuras que intervienen en la interpretación.

Las estructuras se pueden presentar en dos grupos bien diferenciados: Las mencionadas en § 14, que podemos denominar "estructuras estándar"[10], las cuales, para la interpretación de un sistema de cálculo de segundo orden, constan de un dominio $\mathbf{D} \neq \emptyset$ y los conjuntos $\mathfrak{P}(\mathbf{D})$, $\mathfrak{P}(\mathbf{D}^2),\dots,$ $\mathfrak{P}(\mathbf{D}^n)\dots$; y otras que, con un dominio $\mathbf{D} \neq \emptyset$, no constan de la familia de dominios $\mathfrak{P}(\mathbf{D})$, $\mathfrak{P}(\mathbf{D}^2)$, ... De acuerdo con la noción de validez establecida, y según el teorema de Gödel, se puede

---

propio Henkin en 1.950 y simplifica notablemente la demostración.

[9]En "The concept of truth in formalized languages", 1.931, en *Logic, semantics, metamathematics*.

[10]En realidad las llamamos así para mantener una analogía con las estructuras de las interpretaciones meramente normales, dado que de hecho en $\mathfrak{P}(\mathbf{D}^n)$ se encuentran todas las relaciones n-ádicas de elementos de **D**.

hallar una fórmula válida, respecto de cualquier estructura estándar, que no es demostrable en $\mathfrak{S}\mathfrak{D}_{(2)}$; es decir, $\mathfrak{S}\mathfrak{D}_{(2)}$ es incompleto. Reconociendo este hecho, lo que ocurre no obstante -observa Henkin- es que "hay una clase más amplia de modelos que proporcionan una interpretación para el simbolismo"[11].

En las estructuras estándar, como es evidente, si $\mathbf{D}$ es un dominio de cardinalidad infinita, $\mathfrak{P}(\mathbf{D})$, $\mathfrak{P}(\mathbf{D}^2)$, etc., son de cardinalidad no numerable. Henkin llama la atención sobre la posibilidad de una estructura -continuando en segundo orden- que constara de un dominio $\mathbf{D} \neq \emptyset$ y la familia de dominios $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$, ..., de manera que, para cada $k \geq 1$, $\mathbf{D}_k \subseteq \mathfrak{P}(\mathbf{D}^k)$ y que todos los $\mathbf{D}_k$ tengan ciertas condiciones de clausura: que si $S \in \mathbf{D}_k$, su complementario $\overline{S} = \mathbf{D}^k - S$ tambien sea miembro de $\mathbf{D}_k$; que si $S \in \mathbf{D}_1$ y $T \in \mathbf{D}_m$, $S \times T \in \mathbf{D}_{m+1}$, etc.[12]. Así mismo, estos $\mathbf{D}_k$ tendrían cardinalidad numerable,

---

[11]Cfr. "Completness in the theory of types", p. 51 (la traducción es mía). En este contexto "modelo" es sinónimo de "estructura".

[12]Ibíd. p. 52. Henkin especifica que si $F(x)$ se interpreta significando que x está en la clase F, $-F(x)$ significaría que x está en el complemento de F, de modo que el rango para interpretar variables predicativas como F ha de estar cerrado para la complementación; si G se refiere a un conjunto de pares ordenados, entonces el conjunto de las x que satisfacen $\vee yGxy$ es una "proyección" del conjunto referido por G. Este es el sentido de la nota 5 de Henkin -aquí resumido, con traducción propia-.

con lo cual no serían estructuras estándar. Este tipo de estructuras se denominan "estructuras generales".

La distinción entre estructuras estándar y generales permite a Henkin hablar de dos clases de interpretaciones de los lenguajes formales: Las interpretaciones en sentido estándar, que constan de una estructura estándar, y las interpretaciones en sentido general cuyas estructuras son generales. Aunque se dudase de la existencia efectiva de modelos en sentido general, es decir, de interpretaciones en sentido general, que satisfagan todas las fórmulas del cálculo, Henkin prueba en su trabajo que existen modelos, y modelos enumerables, en sentido general que satisfacen las fórmulas del cálculo de teoría de los tipos[13].

Las distintas nociones semánticas conocidas son relativas a estructuras estándar; desde la distinción de Henkin es posible definir tales nociones relativas a estructuras generales. Si en § 14 quedó establecida lo que se puede denominar "semántica estándar", las nociones de "satisfac-

---

[13]La estructura antes referida proporcionaría una interpretación en sentido general del cálculo de segundo orden; una estructura para la interpretación del cálculo de orden superior se puede obtener de la siguiente manera: A partir de los $\mathbf{D}_k$, considerar agrupaciones de sus miembros, formando, por ejemplo, pares del tipo $\langle \mathbf{A}, \mathbf{a} \rangle$ tal que $\mathbf{A} \in \mathbf{D}_1$, $\mathbf{a} \in \mathbf{D}$, y tomar estas parejas como colección, siempre numerable, para nuevas agrupaciones y, en última instancia, cualesquiera agrupaciones cuyo número de elementos no exceda del cardinal del conjunto $\mathcal{N}$ de números naturales.

ción en sentido general", "validez universal en sentido general", etc., constituyen lo que podemos llamar "semántica no estándar", "semántica general" o "semántica de Henkin", a partir de la cual se desarrolla el método de Henkin para el estudio de la completud.

Una vez definida las nociones semánticas en sentido general, Henkin prueba el "teorema de satisfacción", tambien conocido como "teorema de Henkin", según el cual *todo conjunto* Δ *de fórmulas cerradas que sea consistente es satisfactible en sentido general*[14], para llegar al teorema de completud (en sentido general) propiamente dicho, el cual afirma que *si una fórmula* α *es universalmente válida en sentido general, entonces es demostrable* (en el cálculo de que se trate)[15].

La aplicación de los métodos de Henkin requiere, previamente, una serie de definiciones, como se ha explicado antes. Por esta razón, a continuación se expone la semántica no estándar para cálculos de segundo orden para, más tarde, pasar al estudio del problema de la completud[16].

---

[14]L. Henkin, op. cit., p. 56 (teorema 1).

[15]Ibíd. p. 59. Se trata del teorema 2, que comprende corrección y completud: "Para cualquier fórmula α, se verifica $\vdash \alpha$ si y sólo si α es universalmente válida en sentido general" (la traducción es mía).

[16]A partir de aquí seguimos sólo parcialmente los procedimientos de Henkin.

§ 29 Semántica no estándar.

Definición 1.

Dado un dominio $\mathbf{D} \neq \emptyset$, llamamos *estructura general a* $\langle \mathbf{D}, \{\mathbf{D}_i\}_{i>0} \rangle$, donde $\mathbf{D}$ es el *dominio inicial, universo del discurso* o *dominio de la interpretación,* y $\{\mathbf{D}_i\}_{i>0}$ es la *famimilia de dominios relacionales* $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \ldots, \mathbf{D}_m, \ldots$ tal que para todo $n \geq 1$, el *dominio relacional n-ádico* $\mathbf{D}_n \subseteq \mathfrak{P}(\mathbf{D}^n)$[17].

Definición 2.

Sea una estructura general $\langle \mathbf{D}, \{\mathbf{D}_i\}_{i>0} \rangle$. Una interpretación $\mathfrak{I}$ (definida sobre dicha estructura) *es una interpretación en sentido normal* sii *para toda fórmula* β *y toda n-pla de variables individuales* $x_1, \ldots, x_n$, *distintas entre*

---

[17]No se impone condición alguna a los respectivos dominios. A partir de estructuras generales se pueden definir interpretaciones de carácter muy general: $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \{\mathbf{D}_i\}_{i>0}, S \rangle$ donde S es el conjunto de asignaciones de signos del lenguaje $\mathcal{L}_2$ en $\mathbf{D}$ y en $\{\mathbf{D}_i\}_{i>0}$, de modo que si a es una constante individual de $\mathcal{L}_2$, $\mathfrak{I}(a) \in \mathbf{D}$ y si $\mathbf{Q}$ es una constante predicativa n-ádica, para $n \geq 1$, $\mathfrak{I}(\mathbf{Q}) \in \mathbf{D}_n$. Dada la amplitud de esta clase de interpretaciones, resultan poco interesantes:

Para fórmulas insatisfactibles (en sentido estándar) podemos encontrar una interpretación, en este sentido generalísimo que comentamos, tal que las satisfaga; un ejemplo sencillo es el siguiente: Sea $\bigwedge P Pa$, donde P es una variable predicativa monádica y a un parámetro, la cual es cláramente insatisfactible; sin embargo la interpretación cuyo dominio inicial es $\{1\}$ y $\mathbf{D}_1 = \{\{1\}\}$ la satisface.

si, para todo $n\geq 1$, *se verifica que* $\mathfrak{I}(\beta(x_1 \ldots x_n)) \in \mathbf{D}_n$[18].

Dada una estructura estándar, fácilmente se comprueba que cualquier interpretación $\mathfrak{I}$ que se defina sobre ella es una interpretación en sentido normal. En este caso, sea $\mathbf{D} \neq \emptyset$ y, para cada $i\geq 1$, $\mathbf{D}_i = \mathfrak{P}(\mathbf{D}^i)$; obviamente, cualesquiera que sean β, $x_1,\ldots,x_n$ y n, $\mathfrak{I}(\beta(x_1 \ldots x_n)) \in \mathfrak{P}(\mathbf{D}^n)$. Pero no toda interpretación en sentido normal es una interpretación en sentido estándar. Esta circusntancia es del mayor interés, dado que una expresión del tipo $\Lambda P\alpha$, cuyo sentido podemos enunciar diciendo que "se verifica α, cualquiera que sea la relación P", tendrá un determinado valor bajo una dada interpretación, y la determinación de este valor se hará en función de las relaciones -de la aridad de P-, definidas en el universo del discurso, que hayan de ser consideradas; es decir, dada una interpretación $\mathfrak{I}$, $\Lambda P\alpha_{\mathfrak{I}}$ viene determinado por

---

[18]Vid. definición 7 § 14 del presente trabajo.

M. Manzano ha estudiado las estructuras generales algebraicamente. Tales estructuras no son tan amplias como las que aquí hemos mencionado con este nombre. Por otra parte, las "estructuras generales de M. Manzano" han de contener lo que denomina "la relación prototípica de identidad" y una segunda cláusula, que "se puede enunciar diciendo que todas las relaciones paramétricamente definibles han de estar en la jerarquía de tipos de todo sistema general", tratándose de estructuras con jerarquía de tipos, de manera similar a las de Henkin comentadas antes (Vid. "Los sistemas generales" en *Estudios de Lógica y Filosofía de la ciencia*, p. 79 -la frase entrecomillada es textual).

"los valores posibles de una constante R -del mismo tipo que P-" y el número total de estos valores posibles no es el mismo en las estructuras estándar que en las generales. Si para cada dominio relacional consideramos que el rango de los cuantificadores, en la interpretación de que se trate, es el número de miembros del dominio, el rango de estructuras generales puede ser menor que el de estructuras estándar para los mismos universos del discurso. Por ello, es necesario distinguir las interpretaciones.

Definición 3.

Una interpretación en sentido normal $\mathfrak{I}$, definida sobre una estructura general $\langle \mathbf{D}, \{\mathbf{D}_i\}_{i>0} \rangle$, es una *interpretación en sentido estándar* sii para cada $i \geq 1$, se verifica que $\mathbf{D}_i = \mathfrak{P}(\mathbf{D}^i)$[19].

Definición 4.

Una fórmula α es *satisfactible en sentido normal* sii

---

[19]La noción de valor de una fórmula para interpretaciones en sentido normal es, *mutatis mutandi*, la misma que para interpretaciones en sentido estándar; sólo cambia el ámbito de variabilidad de $\mathfrak{I}(r)$ cuando r es un relator, para el valor de las fórmulas de la forma $\Lambda P\alpha$ o $\vee P\alpha$.

Para mayor facilidad, podemos hablar de "interpretaciones estándar" e "interpretaciones normales", en lugar de "interpretaciones en sentido estándar" e "interpretaciones en sentido normal", respectivamente.

existe una interpretación normal $\mathfrak{I}$ tal que $\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$. Un conjunto Γ de fórmulas es *simultaneamente satisfactible en sentido normal* sii existe una interpretación normal $\mathfrak{I}$ tal que para toda fórmula γ tal que $\gamma \in \Gamma$, $\gamma_{\mathfrak{I}} = 1$.

Definición 5.

Una fórmula α es *consecuencia lógica en sentido normal* de un conjunto de fórmulas Γ sii toda interpretación normal que satisface simultaneamente Γ, también satisface α.

Definición 6.

Una fórmula α es *universalmente válida en sentido normal* sii para toda interpretación normal $\mathfrak{I}$, se verifica que $\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$.

Por analogía con el uso del signo metalingüístico $\vDash$, para referirnos al sentido "normal", usaremos "$\vDash_n$" (aunque basta usar el mismo signo y señalar el sentido correspondiente). Fácilmente se comprueba que se verifica lo siguiente:

a) Para cada fórmula α, si $\vDash_n \alpha$ entonces $\vDash \alpha$, pues si toda interpretación normal satisface α, como todas las estándar son normales, tambien satisfacen α.

b) Para cada fórmula α, si α es satisfactible en sentido estándar, entonces α es satisfactible en sentido normal. Así mismo, si α es insatisfactible en sentido normal, también es insatisfactible en sentido estándar.

c) Para cada conjunto Γ de fórmulas y cada fórmula α, si se da $\Gamma \models_n \alpha$, entonces $\Gamma \models \alpha$[20].

Teorema 1.

Una interpretación $\mathfrak{I}$, definida sobre una estructura $\langle \mathbf{D}, \{\mathbf{D}_i\}_{i>0} \rangle$ *es una interpretación normal* sii:

1º) $\mathbf{D} \in \mathbf{D}_1$;

2º) Para cada $n \geq 1$, para cada n-pla de variables individuales -distintas entre si- $x_1,\ldots,x_n$,

i) si $\mathbb{S} \in \mathbf{D}_n$ y existe una fórmula β tal que $\mathfrak{I}(\beta(x_1\ldots x_n)) = \mathbb{S}$, entonces $\overline{\mathbb{S}} \in \mathbf{D}_n$;

ii) Si $\mathbb{S}$ y $\mathbb{S}'$ pertenecen a $\mathbf{D}_n$ y existen fórmulas β y β' tales que $\mathfrak{I}(\beta(x_1\ldots x_n)) = \mathbb{S}$ e $\mathfrak{I}(\beta'(x_1\ldots x_n)) = \mathbb{S}'$, entonces $\mathbb{S} \cup \mathbb{S}' \in \mathbf{D}_n$;

iii) si $\mathbb{S}_1 \in \mathbf{D}_1$, $\mathbb{S}_n \in \mathbf{D}_n$, y existen fórmulas β y β'

---

[20] J. Mosterín en su *Un cálculo deductivo para la lógica de segundo orden* hace alusión a estos resultados, aunque con respecto a lo que él denomina "interpretaciones generales", definidas como aquellas en las que "todas las relaciones definibles son permisibles", frente a las que denomina "interpretaciones standard" que se caracterizan como "aquellas en que todas las relaciones posibles son permisibles". Vid. op. cit. pp. 19-20 (los entrecomillados corresponden a expresiones textuales).

tales que $\Im(\beta(x)) = \$_1$, donde x es una variable individual distinta de $x_1,\dots,x_n$, e $\Im(\beta'(x_1 \dots x_n)) = \$_n$, entonces, y sólo entonces, $\$_1 \times \$_n \in \mathbf{D}_{n+1}$;

iv) si $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{D}_n$ y para $\mathbf{A}$ existe una fórmula γ con la variable individual x libre que verifica que $\$ \in \mathbf{A}$ sii hay al menos una $\Im' \underset{a}{=} \Im$, donde a es un parámetro que no ocurre en γ, tal que $\Im'(\gamma(a/x)(x_1 \dots x_n)) = \$$, entonces $\bigcup \mathbf{A} \in \mathbf{D}_n$;

v) si $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{D}_n$ y para $\mathbf{A}$ existe una fórmula γ con la variable predicativa m-ádica P libre, para m≥1, que verifica que $\$ \in \mathbf{A}$ sii hay al menos una $\Im' \underset{R}{=} \Im$, donde R es un relator m-ádico que no ocurre en γ, tal que $\Im'(\gamma(R/P)(x_1 \dots x_n)) = \$$, entonces $\bigcup \mathbf{A} \in \mathbf{D}_n$;

Demostración:

Probaremos en primer lugar que si $\Im$ es una interpretación normal, verificando, por tanto, lo establecido en la definición 2 precedente, entonces se da 1º) y 2º).

Sea $\Im$ una interpretación normal, cuyo universo del discurso es **D**. Entonces:

1º) Como $\Im$ es normal, $\Im((\forall_P Px)(x)) \in \mathbf{D}_1$. Pero

$$\Im((\forall_P Px)(x)) = \mathbf{D}.$$

2º) i) Sea $\$ = \Im(\beta(x_1 \dots x_n))$ y $\$ \in \mathbf{D}_n$. Como $\Im$ es normal, $\Im(\neg\beta(x_1 \dots x_n)) \in \mathbf{D}_n$. Pero $\Im(\neg\beta(x_1 \dots x_n)) = \overline{\$}$.

ii) Sean $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}' \in \mathbf{D}_n$; y β y β' tales que $\mathfrak{I}(\beta(x_1 \ldots x_n)) = \mathfrak{S}$ e $\mathfrak{I}(\beta'(x_1 \ldots x_n)) = \mathfrak{S}'$. Como $\mathfrak{I}$ es normal, $\mathfrak{I}((\beta \vee \beta')(x_1 \ldots x_n)) \in \mathbf{D}_n$. Pero

$$\mathfrak{I}((\beta \vee \beta')(x_1 \ldots x_n)) = \mathfrak{S} \cup \mathfrak{S}'.$$

iii) Sean $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ tales que $\mathfrak{S} \in \mathbf{D}_1$ y $\mathfrak{S}' \in \mathbf{D}_n$; y β y β' tales que $\mathfrak{I}(\beta(x)) = \mathfrak{S}$ e $\mathfrak{I}(\beta'(x_1 \ldots x_n)) = \mathfrak{S}'$. Como $\mathfrak{I}$ es normal, $\mathfrak{I}((\beta \wedge \beta')(x, x_1, \ldots, x_n)) \in \mathbf{D}_{n+1}$. Pero

$$\mathfrak{I}((\beta \wedge \beta')(x, x_1, \ldots, x_n)) = \mathfrak{S} \times \mathfrak{S}'.$$

Por otra parte, para cada fórmula β y cada n+1 variables individuales $x, x_1, \ldots, x_n$, distintas entre si, como $\mathfrak{I}$ es normal $\mathfrak{I}(\beta(x))$, $\mathfrak{I}(\beta(x_1 \ldots x_n))$ e $\mathfrak{I}(\beta(x, x_1, \ldots, x_n))$, pertenecen respectivamente a $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_n$ y $\mathbf{D}_{n+1}$. Pero

$$\mathfrak{I}(\beta(x, x_1, \ldots, x_n)) = \mathfrak{I}(\beta(x)) \times \mathfrak{I}(\beta(x_1 \ldots x_n)).$$

iv) Sea γ la fórmula tal que $\mathfrak{S} \in \mathbf{A}$ sii hay una $\mathfrak{I}' \underset{a}{=} \mathfrak{I}$ tal que $\mathfrak{I}'(\gamma(a/x)(x_1 \ldots x_n)) = \mathfrak{S}$. Como $\mathfrak{I}$ es normal, $\mathfrak{I}((\bigvee x \gamma)(x_1 \ldots x_n)) \in \mathbf{D}_n$. Pero $\mathfrak{I}((\bigvee x \gamma)(x_1 \ldots x_n)) = \bigcup \mathbf{A}$.

v) Sea γ la fórmula tal que $\mathfrak{S} \in \mathbf{A}$ sii hay una $\mathfrak{I}' \underset{\mathbf{R}}{=} \mathfrak{I}$ tal que $\mathfrak{I}'(\gamma(\mathrm{R}/\mathrm{P})(x_1 \ldots x_n)) = \mathfrak{S}$. Como $\mathfrak{I}$ es normal, $\mathfrak{I}((\bigvee \mathbf{P} \gamma)(x_1 \ldots x_n)) \in \mathbf{D}_n$. Pero $\mathfrak{I}((\bigvee \mathbf{P} \gamma)(x_1 \ldots x_n)) = \bigcup \mathbf{A}$.

Probaremos ahora que si se verifica 1º) y 2º), entonces $\mathfrak{I}$ es normal.

Como $\mathfrak{I}$ es normal sii para cada $n \geq 1$, cada secuencia $x_1, \ldots, x_n$ de variables individuales distintas entre si y cada fórmula β, $\mathfrak{I}(\beta(x_1 \ldots x_n)) \in \mathbf{D}_n$, bastará probarlo por inducción sobre el grado lógico de β[21].

1) Sea β atómica. Consideremos entonces los cuatro casos posibles:

i) en β no hay ninguna variable individual libre;

ii) en β están libres las distintas variables individuales $y_1,\dots,y_i$, donde $i<n$ y cada y_r, $r\leq i$, es un x_k, para $k\leq n$;

iii) en β están libres todas y sólo las variables individuales $x_1,\dots,x_n$;

iv) en β están libres las distintas variables individuales $y_1,\dots,y_m$, para $m>n$ y cada x_i, para $i\leq n$, es una y_k, para $k\leq m$.

En el caso i) $\mathfrak{I}(\beta(x_1 \dots x_n))$es $\emptyset$ o $\mathbf{D}^n$. Por la primera condición y sucesivas aplicaciones de 2º) **iii**), $\mathbf{D}^n \in \mathbf{D}_n$; por otra parte, por aplicación de 2º) **iii**), además de lo dicho, $\emptyset \in \mathbf{D}_n$.

En el caso ii), para simplificar, pongamos que $y_1,\dots,y_i$ sean, respectivamente,$x_1,\dots,x_i$. Entonces $\mathfrak{I}(\beta(x_1 \dots x_n)) = \mathfrak{I}(\beta(x_1 \dots x_i)) \times \mathbf{D}^{n-i}$. Como $\mathbf{D}^{n-i} \in \mathbf{D}_{n-i}$, me-

[21]En el paso de la inducción nos referiremos sólo a los casos correspondientes a $\neg$, $\vee$, y $\bigvee$ (con dos subcasos para $\bigvee$) para simplificar la demostración, y dado que para los restantes casos la demostración se puede obtener a partir de los casos dados y las definiciones de los signos correspondientes.

diante i aplicaciones de 2º) iii) $\Im(\beta(x_1 \ldots x_i)) \times \mathbf{D}^{n-i} \in \mathbf{D}_n$.

En el caso iii), pongamos por abreviar que β es de la forma $Ra_1,\ldots a_m,x_1,\ldots,x_n$. Por definición de interpretación $\Im(R) \in \mathbf{D}_{m+n}$, y por sucesivas aplicaciones de 2º) iii), (en sentido inverso) $\Im(Ra_1,\ldots,a_m,x_1,\ldots,x_n(x_1 \ldots x_n)) \in \mathbf{D}_n$.

En el caso iv) pongamos por abreviar que β ses de la forma $Rx_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_r$. Por definición de interpretación $\Im(R) \in \mathbf{D}_{n+r}$ y por aplicación de 2º) iii) (en sentido inverso), $\Im(Rx_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_r(x_1 \ldots x_n)) \in \mathbf{D}_n$.

2) β es de la forma $\neg\alpha$. Supongamos que $\Im(\alpha(x_1 \ldots x_n)) \in \mathbf{D}_n$. Por 2º) i) $\overline{\Im(\alpha(x_1 \ldots x_n))} \in \mathbf{D}_n$. Pero

$$\overline{\Im(\alpha(x_1 \ldots x_n))} = \Im(\neg\alpha(x_1 \ldots x_n)).$$

3) β es de la forma $\alpha \vee \gamma$. Supongamos primero que $\Im(\alpha(x_1 \ldots x_n)) \in \mathbf{D}_n$ e $\Im(\gamma(x_1 \ldots x_n)) \in \mathbf{D}_n$. Por 2º) ii) $\Im(\alpha(x_1 \ldots x_n)) \cup \Im(\gamma(x_1 \ldots x_n)) \in \mathbf{D}_n$. Pero $\Im(\alpha(x_1 \ldots x_n)) \cup \Im(\gamma(x_1 \ldots x_n)) = \Im((\alpha \vee \gamma)(x_1 \ldots x_n))$.

Supongamos que la hipótesis de inducción se da para k, m, tales que $k \neq n$ y $m \neq n$. Pongamos por abreviar que $k = i$ y $m = n-i$; es decir, que se verifica que $\Im(\alpha(x_1 \ldots x_i)) \in \mathbf{D}_i$ e $\Im(\gamma(x_{i+1},\ldots,x_n)) \in \mathbf{D}_{n-i}$. Por aplicación de 2º) iii), tanto $\Im(\alpha(x_1,\ldots,x_i,x_{i+1},\ldots x_n)) \in \mathbf{D}_n$ como

$$\Im(\gamma(x_1,\ldots,x_{i+1},\ldots,x_n)) \in \mathbf{D}_n.$$

Por 2º) ii),

$\mathfrak{I}(\alpha(x_1,\ldots,x_i,x_{i+1},\ldots x_n)) \cup \mathfrak{I}(\gamma(x_1,\ldots,x_{i+1},\ldots,x_n)) \in \mathbf{D}_n$.

Pero $\mathfrak{I}(\alpha(x_1,\ldots,x_i,x_{i+1},\ldots x_n)) \cup \mathfrak{I}(\gamma(x_1,\ldots,x_{i+1},\ldots,x_n)) =$ $= \mathfrak{I}((\alpha \vee \gamma)(x_1\ldots x_n))$.

4) **i)** β es de la forma $\bigvee x\alpha$, donde x es una variable individual. Sea a un parámetro que no ocurre en α y supongamos que para un determinado número -no necesariamente finito- de interpretaciones $\mathfrak{I}'$ tales que $\mathfrak{I}' \underset{a}{=} \mathfrak{I}$ se verifica que $\mathfrak{I}'(\alpha(a/x)(x_1\ldots x_n)) \in \mathbf{D}_n$. De acuerdo con la condición 2º) iv), si **A** es el conjunto cuyos miembros son

$$\mathfrak{I}'(\alpha(a/x)(x_1\ldots x_n)),$$

$\bigcup \mathbf{A} \in \mathbf{D}_n$. Pero $\bigcup \mathbf{A} = \mathfrak{I}(\bigvee x\alpha(x_1\ldots x_n))$.

ii) β es de la forma $\bigvee P\alpha$, donde P es una variable predicativa m-ádica, para m≥1. Sea R un relator m-ádico que no ocurre en α y supongamos que para un determinado número -no necesariamente finito- de interpretaciones $\mathfrak{I}'$ tales que $\mathfrak{I}' \underset{R}{=} \mathfrak{I}$ se verifica que $\mathfrak{I}'(\alpha(R/P)(x_1\ldots x_n)) \in \mathbf{D}_n$. De acuerdo con la condición 2º) **v)**, si **A** es el conjunto cuyos miembros son $\mathfrak{I}'(\alpha(R/P)(x_1\ldots x_n))$, $\bigcup \mathbf{A} \in \mathbf{D}_n$. Pero

$\bigcup \mathbf{A} = \mathfrak{I}(\bigvee P\alpha(x_1\ldots x_n))$[22].

---

[22]Vid. M. Manzano, *Sistemas intermedios*, p. 14 y ss.. Teniendo en cuenta su definición de "sistema intermedio" y teorema 8.2 -que caracteriza cada $\mathbf{D}_n$, con las operaciones de $\cup,\cap$ y $-$ (complemento), como álgebra de Boole-, la estructura de las interpretaciones normales es similar a los sistemas intermedios, si bien en éstos, cada $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{D}_n$, para todo n≥1,

§ 30 Completud relativa de la lógica de segundo orden.

Respecto de las interpretaciones en sentido normal, el cálculo $\mathfrak{CD}_{(2)}$ es correcto. La prueba de corrección que efectuamos en § 27 respecto de las interpretaciones estándar es aplicable a las interpretaciones en sentido normal. La condición de las interpretaciones normales de que para cada $n \geq 1$, cada fórmula β, y cada n-pla de variables individuales distintas $x_1,\ldots,x_n$, $\mathfrak{I}(\beta(x_1 \ldots x_n))$ pertenezca a $\mathbf{D}_n$, es necesaria y suficiente para asegurar la corrección del cálculo respecto de tales interpretaciones. En efecto, si una interpretación, en el sentido muy general referido más arriba, fuera tal que $\mathfrak{I}(\beta(x_1 \ldots x_n)) \notin \mathbf{D}_n$, -es decir, que $\mathfrak{I}$ no fuese normal- entonces alguna instancia del teorema $\wedge P\alpha \rightarrow \alpha(\beta/Px_1 \ldots x_n)$ no sería válido para dicha interpretación; ya que $\wedge P\alpha$ podrá ser válido en $\mathfrak{I}$ y $\alpha(\beta/Px_1 \ldots x_n)$ puede ser no válido. Sin embargo, para el conjunto de las interpretaciones no normales que al menos cumplan la condición de que para cada n, $\mathbf{D}_n$ no es $\emptyset$, el cálculo de segundo orden $\mathfrak{CD}^*_{(1)}$, obtenido de $\mathfrak{CD}_{(1)}$ eliminando las restricciones a variables individuales de las reglas de los cuantificadores, o de $\mathfrak{CD}_{(2)}$ eliminando las reglas EU_b e IE_b, es correcto.

---

es tal que $\bigcup \mathbf{A} \in \mathbf{D}_n$, lo que no queda establecido -para todos y cada uno de los casos posibles- por nuestro teorema.

Por consiguiente, si $\vdash \alpha$, entonces $\models_n \alpha$.

De la misma manera que podemos hablar de corrección del cálculo $\mathfrak{CD}\langle 2\rangle$ en sentido normal, o respecto de las interpretaciones normales, también podemos establecer la noción de completud en sentido normal, o respecto de las interpretaciones normales. Así, diremos que $\mathfrak{CD}\langle 2\rangle$ es completo en sentido normal, o respecto de las interpretaciones normales, sii si $\models_n \alpha$, entonces $\vdash \alpha$.

Teorema 1.

Si una fórmula cerrada η *de* $\mathcal{L}_2$ *no es demostrable en* $\mathfrak{CD}\langle 2\rangle$, *entonces existe una interpretación normal que satisface* $\neg\eta$[23].

Demostración:

Para su demostración, tomamos una sentencia η tal que no es demostrable en $\mathfrak{CD}\langle 2\rangle$. Consideramos que las siguientes enumeraciones de las constantes de cada tipo de $\mathcal{L}_2$:

---

[23] Conocido como *teorema de satisfacción de Henkin*. Vid. A. Church, op. cit. p.314. El teorema se establece para sentencias, de ahí que la hipótesis se refiera a fórmulas cerradas y corresponde al número **545 de A. Church, cuyo enunciado es: "Si una fórmula bien formada cerrada η no es un teorema (del cálculo), existe un sistema normal de dominios, finito, o infinito numerable, con respecto al cual $\neg\eta$ es válida". La terminología difiere de la de Henkin; precisamente hemos tomado el adjetivo "normal" teniendo en cuenta el uso de "normal system" en Church.

a_1, a_2, ..., es la enumeración de los parámetros;

P_1^1, P_2^1, ..., es la enumeración de los relatores monádicos;

P_1^2, P_2^2, ..., es la enumeración de los relatores diádicos;

P_1^3, P_2^3, ..., es la enumeración de los relatores triádicos; y así sucesivamente para cada aridad o tipo[24].

Dado que el conjunto de las fórmulas de $\mathcal{L}_2$ es enumerable, sea α_1, α_2, ... , una enumeración de las sentencias de $\mathcal{L}_2$. Sea $\Gamma_0 = \{\neg\eta\}$; este es un conjunto consistente de fórmulas cerradas -pues η es una sentencia por hipótesis-.

A partir de Γ_0, para cada $n\geq 1$, definimos Γ_n de la siguiente manera:

1) Si la n+1-ésima sentencia de $\mathcal{L}_2$ es de la forma $\forall s\beta$, entonces se toma la primera constante, del mismo tipo que s, que no ocurre en ninguna fórmula de Γ_n ni en β; sea dicha constante r_m; entonces $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\forall s\beta \rightarrow \beta(r_m/s)\}$;

2) Si la n+1-ésima sentencia de $\mathcal{L}_2$ no es $\forall s\beta$, entonces Γ_{n+1} es Γ_n.

---

[24]Para mayor comodidad, representamos los relatores (y, en su caso, las variables predicativas) mediante mayúscula latina sin índice superior; la aridad se conoce por el número de argumentos o por indicación expresa. Así, en *Rab*, R es un signo predicativo diádico; en "sea Q un relator triádico tal que ..." la aridad queda explícita.

Estos conjuntos de fórmulas son consistentes: Γ_0 lo es por definición; y, si Γ_n es consistente, ha de serlo Γ_{n+1}. En efecto, si Γ_n es consistente y Γ_{n+1} no lo fuera, entonces se verificaría que $\Gamma_{n+1} \vdash \gamma \wedge \neg\gamma$ y, dado que

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\varphi\},$$

se verifica que $\Gamma_n \vdash \neg\varphi$[25], siendo φ la t-ésima sentencia, para $t \geq 1$, de $\mathcal{L}_2$ cuya forma es $\bigvee s\beta \rightarrow \beta(r_m/s)$, en donde r_m represeenta la primera constante -del mismo tipo que s- que no ocurre en ninguna fórmula de Γ_n ni en β; así pues, $\Gamma_n \vdash \bigvee s\beta \wedge \neg\beta(r_m/s)$, de donde $\Gamma_n \vdash \bigvee s\beta$ y $\Gamma_n \vdash \neg\beta(r_m/s)$. Dado que r_m no ocurre en las fórmulas de Γ_n, por la regla de IG, se tiene que $\Gamma_n \vdash \bigwedge s\neg\beta$, siendo s una variable del mismo tipo que r_m. De aquí que, dada la equivalencia de $\neg\bigvee s\beta$ y $\bigwedge s\neg\beta$, $\Gamma_n \vdash \neg\bigvee s\beta$; pero, entonces, $\Gamma_n \vdash \bigvee s\beta \wedge \neg\bigvee s\beta$, lo cual contradice la hipótesis de que Γ_n es consistente y, en consecuencia, Γ_{n+1} es consistente.

Sea $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \ldots$; y sea $\Gamma^0 = \Gamma$. A partir de Γ^0, para cada $n \geq 1$, definimos Γ^{n+1} de la siguiente manera:

1) Si la n+1-ésima sentencia de $\mathcal{L}_2$ -sea ésta α- no está en Γ^n; entonces si: **i)** no se verifica que $\Gamma^n \vdash \neg\alpha$, entonces, $\Gamma^{n+1} = \Gamma^n \cup \{\alpha\}$; **ii)** $\Gamma_n \vdash \neg\alpha$, entonces,

---

[25]Pues $\Gamma_n, \varphi \vdash \gamma \wedge \neg\gamma$ y, por tanto, $\Gamma_n \vdash \varphi \rightarrow \gamma \wedge \neg\gamma$; de aquí que, dada la equivalencia de $\varphi \rightarrow \gamma \wedge \neg\gamma$ y $\neg\varphi \vee (\gamma \wedge \neg\gamma)$, $\Gamma_n \vdash \neg\varphi \vee (\gamma \wedge \neg\gamma)$, por lo que $\Gamma_n \vdash \neg\varphi$ o $\Gamma_n \vdash \gamma \wedge \neg\gamma$; pero es imposible que $\Gamma_n \vdash \gamma \wedge \neg\gamma$, por ser Γ_n consistente.

$$\Gamma^{n+1} = \Gamma^{n} \cup \{\neg\alpha\};$$

2) Si la n+1-ésima sentencia de $\mathcal{L}_2$ está en Γ^n, entonces Γ^{n+1} es Γ^n.

Estos conjuntos son consistentes. Γ^0 es consistente por definición. Si Γ^n es consistente y Γ^{n+1} no fuera consistente, entonces se verificaría que $\Gamma^{n+1} \vdash \gamma \wedge \neg\gamma$. Sea α la primera sentencia que no ocurre en Γ^n y que permite definir Γ^{n+1}; puede suceder que:

i) No se verifica que $\Gamma^n \vdash \neg\alpha$; entonces $\Gamma^{n+1} = \Gamma^n \cup \{\alpha\}$. Como $\Gamma^n, \alpha \vdash \gamma \wedge \neg\gamma$, se tiene que $\Gamma^n \vdash \neg\alpha$ o $\Gamma^n \vdash \gamma \wedge \neg\gamma$[26]; pero como no $\Gamma^n \vdash \neg\alpha$, se habría de dar que $\Gamma^n \vdash \gamma \wedge \neg\gamma$. O bien

ii) $\Gamma^n \vdash \neg\alpha$; entonces $\Gamma^{n+1} = \Gamma^n \cup \{\neg\alpha\}$. Como $\Gamma^n, \neg\alpha \vdash \gamma \wedge \neg\gamma$, se tiene que $\Gamma^n \vdash \neg\neg\alpha$ o $\Gamma^n \vdash \gamma \wedge \neg\gamma$; pero si $\Gamma^n \vdash \neg\neg\alpha$ entonces $\Gamma^n \vdash \alpha$, lo cual es imposible; por ello se habría de dar que $\Gamma^n \vdash \gamma \wedge \neg\gamma$.

En cualquier caso, pues, $\Gamma^n \vdash \gamma \wedge \neg\gamma$, lo cual es contradictorio con la hipótesis de que Γ^n es consistente y, en consecuencia, Γ^{n+1} es consistente.

Sea $\Gamma^* = \Gamma^0 \cup \Gamma^1 \cup \ldots$. Se verifica que:

1) $\neg\eta \in \Gamma^*$. Por construcción de Γ^*, $\Gamma_0 \subset \Gamma^*$ y $\neg\eta \in \Gamma_0$;

2) Para cada sentencia α, $\alpha \in \Gamma^*$ o $\neg\alpha \in \Gamma^*$. En efecto, la construcción de Γ^* se ha realizado a partir de la enumera-

---

[26] Véase nota anterior.

ción de las sentencias de $\mathcal{L}_2$. Si $\alpha \notin \Gamma^*$, entonces $\alpha \notin \Gamma^n$, para n≥1; si no $\Gamma^n \vdash \neg\alpha$, entonces $\alpha \in \Gamma^{n+1}$, lo cual es imposible y, en consecuencia, $\Gamma^n \vdash \neg\alpha$; de aquí que $\neg\alpha \in \Gamma^{n+1}$ y, en consecuencia, $\neg\alpha \in \Gamma^*$;

3) Γ^* es consistente, puesto que todos sus subconjuntos son consistentes (como se ha visto más arriba);

4) Para toda sentencia α, $\alpha \in \Gamma^*$ sii $\Gamma^* \vdash \alpha$. En efecto, si $\alpha \in \Gamma^*$, por definición de deducción, $\Gamma^* \vdash \alpha$; si $\Gamma^* \vdash \alpha$, entonces, $\alpha \in \Gamma^*$, pues de lo contrario $\neg\alpha \in \Gamma^*$ y por lo anterior $\Gamma^* \vdash \neg\alpha$, con lo que Γ^* sería no consistente;

5) Para cada sentencia de la forma $\bigvee s\beta$, si $\bigvee s\beta \in \Gamma^*$, entonces $\beta(t/s) \in \Gamma^*$, siendo t una constante del mismo tipo que s que no ocurre en β. En efecto, si $\beta(t/s) \notin \Gamma^*$ para cada constante t del mismo tipo que s, entonces, $\neg\beta(t/s) \in \Gamma^*$, por 2); así mismo se tendría que $\bigwedge s\neg\beta \in \Gamma^*$ y de aquí que $\neg\bigvee s\beta \in \Gamma^*$, lo cual es imposible.

Definimos una interpretación $\mathfrak{I}$ de la siguiente manera:

1) Sea el universo de discurso el conjunto de los parámetros de $\mathcal{L}_2$. Es decir, $\mathbf{D} = \{a_1, a_2, \ldots\}$.

2) a) Para todo parámetro $b \in \mathbf{D}$, $\mathfrak{I}(b) = b$.

b) Para cada relator n-ádico R, para todo n≥1, para cada n-pla de ocurrencias de parámetros $\langle b_1, \ldots, b_n\rangle$, $\langle b_1, \ldots, b_n\rangle \in \mathfrak{I}(R)$ sii $Rb_1 \ldots b_n \in \Gamma^*$.

A continuación probamos que $\mathfrak{I}$ satisface todas las fórmulas de Γ^*. Sea $\alpha \in \Gamma^*$; procedemos por inducción sobre el grado de α.

1) α es atómica.

α es, pues, de la forma $Rb_1...b_n$, para $n \geq 1$. Si $\alpha \in \Gamma^*$. Entonces, por definición de $\mathfrak{I}$, $\langle b_1, ..., b_n \rangle \in \mathfrak{I}(R)$ y, en consecuencia, $\mathfrak{I}$ *Sat* $Rb_1...b_n$.

Si $\alpha \notin \Gamma^*$, por definición, $\langle b_1, ..., b_n \rangle \notin \mathfrak{I}(R)$ y, en consecuencia, $\mathfrak{I}$ $\overline{Sat}$ $Rb_1...b_n$.

2) α es $\neg\gamma$.

Si $\neg\gamma \in \Gamma^*$, entonces $\gamma \notin \Gamma^*$ y, por hipótesis de inducción, $\mathfrak{I}$ $\overline{Sat}$ γ, por lo que $\mathfrak{I}$ *Sat* $\neg\gamma$.

Si $\neg\gamma \notin \Gamma^*$, entonces $\gamma \in \Gamma^*$; por hipótesis de inducción, $\mathfrak{I}$ *Sat* γ y, de aquí, $\mathfrak{I}$ $\overline{Sat}$ $\neg\gamma$.

3) α es $\beta \vee \gamma$.

Si $\mathfrak{I}$ *Sat* α, se tiene que $\mathfrak{I}$ *Sat* β o $\mathfrak{I}$ *Sat* γ y, por hipótesis de inducción, $\beta \in \Gamma^*$ o $\gamma \in \Gamma^*$; entonces $\Gamma^* \vdash \beta$ o $\Gamma^* \vdash \gamma$ y de aquí que $\Gamma^* \vdash \alpha$, por lo que $\alpha \in \Gamma^*$.

Si $\mathfrak{I}$ $\overline{Sat}$ α, entonces $\mathfrak{I}$ $\overline{Sat}$ β e $\mathfrak{I}$ $\overline{Sat}$ γ. Por hipótesis de inducción, $\neg\beta \in \Gamma^*$ y $\neg\gamma \in \Gamma^*$; por lo tanto, $\Gamma^* \vdash \neg\beta$ y $\Gamma^* \vdash \neg\gamma$, de donde $\Gamma^* \vdash \neg\alpha$, y, en consecuencia, $\neg\alpha \in \Gamma^*$; por consiguiente, $\alpha \notin \Gamma^*$.

4) α es $\bigvee x\beta$, siendo x una variable individual.

Si $\alpha \in \Gamma^*$, entonces $\beta(a/x) \in \Gamma^*$ para algún parámetro a que no ocurre en β; por hipótesis de inducción, $\mathfrak{I}$ *Sat* $\beta(a/x)$, en consecuencia, por evaluación de $\bigvee$, $\mathfrak{I}$ *Sat* $\bigvee x\beta$.

Si $\mathfrak{I}$ *Sat* $\bigvee x\beta$, entonces $\mathfrak{I}$ *Sat* $\beta(a/x)$, para algún parámetro a que no ocurre en β; entonces, por hipótesis de inducción, $\beta(a/x) \in \Gamma^*$, por lo que $\Gamma^* \vdash \forall x\beta$; en consecuencia, $\alpha \in \Gamma^*$.

5) α es $\forall P\beta$, donde P es una variable predicativa m-ádica, para $m \geq 1$.

Si $\alpha \in \Gamma^*$, entonces $\beta(R/P) \in \Gamma^*$, para algún relator R de la misma aridad que P que no ocurre en β; por hipótesis de inducción, $\mathfrak{I}$ *Sat* $\beta(R/P)$; en consecuencia, por evaluación de $\forall$, $\mathfrak{I}$ *Sat* $\forall P\beta$.

Si $\alpha \notin \Gamma^*$, entonces, para cada fórmula δ, $\beta(\delta/Px_1...x_n) \notin \Gamma^*$, puesto que si $\beta(\delta/Px_1...x_n) \in \Gamma^*$ para alguna fórmula δ, entonces $\Gamma^* \vdash \forall P\beta$ y $\forall P\beta \in \Gamma^*$ contra la hipótesis; entonces, para toda δ, $\mathfrak{I}$ $\overline{Sat}$ $\beta(\delta/Px_1...x_n)$. Por consiguiente, $\mathfrak{I}$ $\overline{Sat}$ $\forall P\beta$ *en sentido normal*.

Como habíamos visto, la fórmula de la que partimos para la construcción de Γ^* $-\neg\eta-$ era un miembro de Γ^*. De acuerdo con lo establecido, $\mathfrak{I}$ *Sat* $\neg\eta$ e $\mathfrak{I}$ es una interpretación normal, quedando así probado el teorema.

Teorema 2.

Para toda fórmula α *de* $\mathcal{L}_2$, *si* $\vDash_n \alpha$, *entonces* $\vdash \alpha$[27].

---

[27]Se trata del *teorema de completud* propiamente dicho. Henkin presenta en su "teorema 2" la corrección y la completud -Para cualquier fórmula α, $\vdash \alpha$ sii α es válida en sentido general-. Vid. L. Henkin, "Completeness in the theory of

Demostración:

Dado que el teorema 1) se ha probado en relación a fórmulas cerradas hemos de tener en cuenta, de acuerdo con la extensión que se puede hacer de algunas nociones para fórmulas con variables libres, que cuando una fórmula es satisfecha por una interpretación, también lo es su clausura universal. De aquí que si α contiene variables libres -por ejemplo, s_1, $...s_k$-, $\models_n \alpha$ es sinónimo de $\models_n \bigwedge s_1...s_k\alpha$ y si, a partir de aquí, se alcanza que $\vdash \bigwedge s_1...s_k\alpha$, como se tiene que $\vdash \bigwedge s_1...s_k\alpha \rightarrow \alpha$, entonces $\vdash \alpha$.

Sea α una fórmula de $\mathcal{L}_2$ tal que $\models_n \alpha$. Por el teorema 1) si no $\vdash \alpha$, entonces $\neg\alpha$ es satisfactible; de donde, por contraposición, si $\neg\alpha$ es no satisfactible, entonces $\vdash \alpha$. Pero, por definición de validez universal, $\models_n \alpha$ sii no es satisfactible $\neg\alpha$. Por consiguiente $\vdash \alpha$.

§ 31 Categoricidad y modelos no estándar.

Como hemos visto antes, $\mathfrak{SA}_{(2)}$ es categórico respecto de los modelos estándar[28]. La prueba de categoricidad para modelos estándar no es aplicable en el mismo sentido respecto de

---

types", *Journal of Symbolic Logic*, vol. 15, p. 88 (la traducción del enunciado entre guiones es mía).

[28]Vid. § 23.

los modelos no estándar.

La noción misma de modelo es fundamental para estudiar este planteamiento. Si tomamos la noción de "estructura general"[29] -o *modelo general*, en términos de Henkin- la prueba de categoricidad, como afirma Ladrière, solo demuestra "que si este sistema tiene un modelo general y si, al mismo tiempo, este modelo posee un dominio de individuos $\mathcal{N}'$ que no es isomorfo con $\mathcal{N}$, no puede contener el conjunto de individuos que contiene únicamente los individuos de $\mathcal{N}'$ que corresponden a $\mathcal{N}$ "[30].

La prueba de categoricidad -en relación con las estructuras no estándar- lo que establecería es lo siguiente: dados $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$, con universos N y N', tales que $|N|$ es mayor que $|N'|$, y $g\colon N \longrightarrow N'$ tal que es uno a uno y a cada $n \in N$ corresponda un único $n' \in N'$ tal que $g(n) = n'$; si ambos son modelos de $\mathfrak{C}\mathfrak{A}_{(2)}$, entonces no toda relación $\mathbb{R}'$ de elementos de $\mathcal{N}'$ está en la estructura de $\mathfrak{M}'$.

Con objeto de reseñar una observación sobre este asunto definimos las funciones α_V: Dado el conjunto de variables de

---

[29] Vid. § 29.

[30] J. Ladrière, op. cit. p. 313. En el texto aparece la expresión "... si este sistema es *realizable* en un modelo general...", sinónima -y por ello la hemos cambiado- de "... si este sistema *tiene* un modelo general...". Hemos escrito $\mathcal{N}$ y $\mathcal{N}'$ para mantener la notación.

un lenguaje formal, fijamos como dominio[31] de α_V el conjunto de las aridades de estas variables, considerando que las variables individuales son de aridad 0. Hemos de tener en cuenta que si **x** es una variable individual, $ar(x) = 0$, mientras que si **x** es una variable predicativa n-ádica, para cada $n \geq 1$, $ar(x) = n$; de aquí que el conjunto de aridades de variables para lenguajes segundo orden sea $\{0, 1, 2, \ldots\}$. A partir de cualquier estructura, el rango de α_V se obtiene de la siguiente manera: Si **D** es el universo de la estructura, $\alpha_V(0) = \mathbf{D}$; además, para toda aridad $\mathbf{n} \geq 1$, $\alpha_V(\mathbf{n}) = \mathfrak{P}(\mathbf{D}^n)$.

Dados dos modelos de $\mathfrak{CA}(2)$, $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$, con universos $\mathcal{N}$ y $\mathcal{N}'$, respectivamente, tales que $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}'$[32], hallamos los valores de α_V. Para aridad 1, en cuanto al modelo $\mathfrak{M}$, $\alpha_V(1) = \mathfrak{P}(\mathcal{N})$; en cuanto a $\mathfrak{M}'$, $\alpha_V(1) = \mathfrak{P}(\mathcal{N}')$. Supongamos que $\mathcal{N}' = \mathcal{N} \cup \{\omega\}$, tal que, para todo $\mathbf{n} \in \mathcal{N}$, $\omega \neq \mathbf{n}$. En relación con $\mathfrak{M}'$, si $\mathcal{N}$ está en esta estructura, puesto que contiene al "cero" y, para cada $\mathbf{n} \in \mathcal{N}$, "el sucesor de **n**" también es miembro de $\mathcal{N}$, todos los miembros del universo habrían de ser miembros de

[31]El *dominio* de una función está constituido por el conjunto de argumentos de la función (elementos a los cuales se aplica la función). El *rango* es el conjunto de los valores de la función. Dados, en general, los conjuntos **A** y **B** y la función $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, **A** es el dominio de f y un subconjunto de **B** su rango.

[32]Ello no es imprescindible; basta que sean de diferente cardinalidad; entonces, si $|\mathcal{N}'| \geq |\mathcal{N}|$, definiríamos una función $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}'$ y argumentaríamos con respecto a $f(N) \subset \mathcal{N}'$.

$\mathcal{N}$; pero $\omega \notin \mathcal{N}$, contra lo que establece el axioma 5) y, dado que $\mathfrak{M}'$ satisface dicho axioma, no podemos considerar $\mathcal{N}$ como miembro de la estructura.

El planteamiento que se puede hacer a partir de los estudios de Henkin consiste en establecer como rango de α_v el conjunto de los universos relacionales, de los modelos de que se trate. Así, $\alpha_v(\mathbf{n}) = \mathbf{D}_n$ y, si se trata de una estructura no estándar, entonces $\mathbf{D}_n \neq \mathfrak{P}(\mathbf{D})$ y, en consecuencia, $\alpha_v(\mathbf{n}) \neq \mathfrak{P}(\mathbf{D})$.

En relación con diferentes modelos que no sean estándar, no cabe plantearse si son isomorfos o no, entendiendo la isomorfía entre modelos como fue definida más arriba[33].

§ 32 Alcance del método de Henkin.

El hecho de que se obtuviera una prueba de completud en un sentido diferente al que esta noción tiene en el trabajo de Gödel, "condujo a la aparición de una nueva división, *lógica débil* y *lógica fuerte*, dentro del concepto de lógica de segundo orden...Por *lógica débil* de segundo orden se entenderá el conjunto de las fórmulas de $\mathcal{L}_2$ universalmente válidas en relación a interpretaciones normales; por *lógica fuerte*, el conjunto de las fórmulas del mismo lenguaje uni-

---

[33]Vid. definición 3, § 23.

versalmente válidas en sentido estándar"[34].

El teorema de completud de Henkin afirma que la llamada lógica débil de segundo orden es completa; pero dado el resultado de Gödel y la categoricidad de los axiomas de Peano, la lógica fuerte no es completa. Cabe, pues, pensar que hay un conjunto de fórmulas que podemos considerar universalmente válidas en sentido estándar, las cuales, sin embargo, no lo son en sentido normal. Una de estas fórmulas será la fórmula de Gödel, o su transcripción en términos del lenguaje $\mathcal{L}_2$, construida para la demostración del teorema de incompletud (en sentido estándar).

Más arriba hemos visto que los esquemas axiomáticos i) y ii) de Hilbert-Ackermann son independientes de $\mathfrak{C}\mathfrak{D}\langle 2\rangle$. También puede demostrarse, por un procedimiento semejante al de la independencia del esquema i), la independencia del axioma de buena ordenación de individuos[35]. De acuerdo con la completud relativa, debería ser posible hallar alguna interpretación normal tal que satisfaciera las fórmulas que expresan las negaciones de los mismos. Estas fórmulas, pues, se incluirían en la clase de las fórmulas válidas en sen-

---

[34]Cfr. E. Díaz, "Lógica de segundo orden: Los dos axiomas de Hilbert-Ackermann" (hemos sustituido *standard* por el neologismo *estándar*).

[35]Vid. § 17.

tido estándar que no serían válidas en sentido normal.

El método de Henkin prueba, esencialmente, como se ha dicho, que los cálculos de segundo orden son completos respecto de la clase de interpretaciones que ellos mismos determinan. Una ampliación del cálculo -incluyendo estas fórmulas- permitiría obtener, por el mismo procedimiento, una clase de interpretaciones más restringida que la de las méramente normales, también más cercana a la clase de las interpretaciones estándar (sin llegar a ser estándar, dado el resultado de Gödel). El estudio de nuevas interpretaciones no estándar -en su caso, "interpretaciones normales" que verifican además alguna nueva condición[36]- se puede realizar también siguiendométodos similares al de Henkin. Por todo ello, y en conexión con las perspectivas estudiadas, acerca de fijar una teoría de la cuantificación lo más exacta posible para el segundo orden, es conveniente estudiar algunas clases de interpretaciones no estándar, lo que acometemos en el apartado siguiente.

---

[36] E. Díaz, en el artículo citado, habla de "interpretaciones supernormales" como aquellas interpretaciones normales que satisfacen los esquemas axiomáticos de Hilbert-Ackermann.

RELACIONES ENTRE INTERPRETACIONES NORMALES.

§ 33 Homomorfía entre interpretaciones.

La noción de homomorfía entre conjuntos es conocida y de utilidad en el ámbito de la teoría de modelos. A partir de esta noción vamos a estudiar cómo pueden relacionarse interpretaciones, tanto por lo que respecta a los universos de discurso de las mismas, como a las asignaciones de elementos del lenguaje formal a la estructura correspondiente. En segundo orden puede ser relevante la relación entre universos de discurso, pero han de tenerse muy en cuenta, además, los universos relacionales, razón por la cual no procede una mera aplicación de las nociones de teoría de modelos de primer orden[37].

Definición 1.

Dados dos estructuras $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{D}, \{\mathbf{D}_i\}_{i>0} \rangle$ y $\mathfrak{A}' = \langle \mathbf{D}', \{\mathbf{D}'_i\}_{i>0} \rangle$, se dice que $\mathfrak{A}$ *es homomorfa a* $\mathfrak{A}'$ sii:

1) Existe una aplicación $f\colon \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D}'$, tal que para todo $c \in \mathbf{D}$, $f(c) \in \mathbf{D}'$; y

---

[37]En sentido estricto, no se trata de desarrollar una teoría de modelos de segundo orden, campo que no está trabajado en la misma medida que otros de similar rango. A este respecto, C. C. Chang y H. J. Keisler, *Model Theory*, p. 514, señalan como uno de los "problemas abiertos" desarrollar la teoría de modelos de lógica de segundo orden y superior.

2) Para toda relación $\mathbb{R}$ n-ádica de $\{\mathbf{D}_i\}_{i>0}$, para cada $n\geq 1$, existe una relación n-ádica $\mathbb{R}'$ de $\{\mathbf{D}'_i\}_{i>0}$, tal que si $\mathbb{R}c_1,...,c_n$, entonces $\mathbb{R}'f(c_1),...,f(c_n)$ $-c_i \in \mathbf{D}$, para cada $i\leq n$-[38].

Definición 2.

Dadas dos interpretaciones normales $\mathfrak{I}$ e $\mathfrak{I}'$, definidas, respectivamente, sobre las estructuras $\langle \mathbf{D}, \{\mathbf{D}_i\}_{i>0}\rangle$ y $\langle \mathbf{D}', \{\mathbf{D}'_i\}_{i>0}\rangle$, decimos que $\mathfrak{I}$ *es homomorfa a* $\mathfrak{I}'$ sii:

1) $\mathbf{D}$ es homomorfo a $\mathbf{D}'$; y

2) Para todo $n\geq 1$, toda n-pla de parámetros $a_1,...a_n$, todo relator R cuya aridad sea n, $\langle \mathfrak{I}(a_1)...\mathfrak{I}(a_n)\rangle \in \mathfrak{I}(R)$ sii $\langle \mathfrak{I}'(a_1)...\mathfrak{I}'(a_n)\rangle \in \mathfrak{I}'(R)$.

Definición 3.

Para cada interpretación en sentido normal $\mathfrak{I}$, para todo par de parámetros a_i, a_k, $i,k\geq 1$, a_i *es equivalente a* a_k *respecto de* $\mathfrak{I}$, en símbolos $\mathfrak{I}(a_i) \simeq \mathfrak{I}(a_k)$ sii

$$(\wedge P(Pa_i \rightarrow Pa_k))_{\mathfrak{I}} = 1$$

---

[38] O, lo que es lo mismo, "...tal que si $\langle c_1,...,c_n\rangle \in \mathbb{R}$, entonces $\langle f(c_1),...,f(c_n)\rangle \in \mathbb{R}'$...". Vid. C. C. Chang y H. J. Keisler, op. cit. p. 70 (omitimos la cláusula relativa a functores, innecesaria para nuestros propósitos). Por comodidad, se puede hablar de "homomorfía entre dominios", entendiendo que "$\mathbf{D}$ es homomorfo a $\mathbf{D}'$" es sinónimo de "$\mathfrak{S}$ es homomorfa a $\mathfrak{S}'$", donde $\mathfrak{S}$ y $\mathfrak{S}'$ representan sendas estructuras con los dominios $\mathbf{D}$ y $\mathbf{D}'$.

La relación de equivalencia entre parámetros, que podemos denominar "identidad en sentido normal", puede no coincidir con la "identidad en sentido estándar"[39]; a este respecto, basta considerar una interpretación normal $\mathfrak{I}$ tal que en $\mathbf{D}_1$ haya un átomo bimembre[40]: $\{\mathbf{c},\mathbf{d}\}$, siendo los parámetros a_i, a_k tales que $\mathfrak{I}(a_i) = \mathbf{c}$ y $\mathfrak{I}(a_k) = \mathbf{d}$; en este caso, puesto que $(\wedge P(Pa_i \rightarrow Pa_k))_{\mathfrak{I}} = 1$, se verifica que $\mathfrak{I}(a_i) \simeq \mathfrak{I}(a_k)$. (En realidad, se trata de sujetos indiscernibles).

Teorema 1.

Si $\mathfrak{I}$ *es una interpretación normal que verifica la identidad en sentido estándar* -es decir, para cada par de parámetros **a** y **b** si $\mathfrak{I}(\mathbf{a}) \simeq \mathfrak{I}(\mathbf{b})$ entonces $\mathfrak{I}(\mathbf{a}) = \mathfrak{I}(\mathbf{b})$-; *entonces, para cada n-pla de parámetros* $a_1,\ldots,a_n$ *tales que* $\mathfrak{I}(a_i) \in \mathbf{D}$, $i \leq n$, *para cada* $n \geq 1$, $\{\langle\mathfrak{I}(a_1),\ldots,\mathfrak{I}(a_n)\rangle\} \in \mathbf{D}_n$.

Demostración:

Sea $\mathfrak{I}$ una interpretación normal cuya familia de dominios es $\langle\mathbf{D}, \{\mathbf{D}\}_{i>0}\rangle$. Por definición, para cada $n \geq 1$, se tiene

---

[39]O, abreviadamente, "identidad estándar".

[40]Dado un dominio relacional, cuyos miembros sean conjuntos, un átomo es un elemento del dominio que está contenido en todos los elementos del dominio que no sean disjuntos con él. Es decir, si $\mathbb{S} \in \mathbf{D}_1$ es un átomo, entonces para cada $\mathbb{S}_i \in \mathbf{D}_1$, $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{S}_i$ o bien $\mathbb{S} \cap \mathbb{S}_i = \emptyset$ (Vid. M. Manzano, *Sistemas intermedios*, p. 25).

que $\Im((\wedge P(Px_1 \to Pa_1) \wedge \ldots \wedge\wedge P(Px_n \to Pa_n))(x_1 \ldots x_n)) \in \mathbf{D}_n$.

Pero, dado que verifica la identidad estándar, $\Im((\wedge P(Px_1 \to Pa_1) \wedge \ldots \wedge \wedge P(Px_n \to Pa_n))(x_1 \ldots x_n))$ es el conjunto $\{\langle\Im(a_1), \ldots, \Im(a_n)\rangle\}$.

Teorema 2.

Para cada interpretación normal $\Im$ *existe una interpretación normal* $\Im'$ *tal que:* $\Im$ *es homomorfa a* $\Im'$ *y, para cada par de parámetros* a_i, a_k, *si* $\Im(a_i) \simeq \Im(a_k)$, *entonces* $\Im'(a_i) = \Im'(a_k)$.

Demostracion:

Consideremos cualquier interpretación en sentido normal $\Im$ cuya familia de dominios sea $\langle\mathbf{D}, \{\mathbf{D}_i\}_{i>0}\rangle$. A partir de $\mathbf{D}$ vamos a definir $\mathbf{D}'$ como un subconjunto de $\mathbf{D}$ (no necesariamente propio):

$\mathbf{D}'$ es el más pequeño conjunto que verifica lo siguiente: para todo $\mathbb{S} \in \mathbf{D}_1$, tal que para cada $\mathbb{T} \in \mathbf{D}_1$, $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$ o $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \emptyset$, hay un elemento de $\mathbb{S}$, y sólo uno, en $\mathbf{D}'$. A este elemento de $\mathbb{S}$ lo denominamos *representante de* $\mathbb{S}$[41].

Definimos $f : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D}'$ de acuerdo con la regla siguiente:

---

[41]Es decir, para cada átomo de $\mathbf{D}_1$, se toma un único elemento del átomo como miembro de $\mathbf{D}'$.

1) Para todo $c \in \mathbf{D}$, para el $\mathbb{S} \in \mathbf{D_1}$ tal que $c \in \mathbb{S}$ y para cada $\mathbb{T} \in \mathbf{D_1}$, $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$ o $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \emptyset$, $f(c)$ es el representante de $\mathbb{S}$;

2) Para toda relación n-ádica $\mathbb{R}$, para cada $n \geq 1$, establecemos $\mathbb{R}'$ definida en $\mathbf{D}$, tal que para toda n-pla $c_1,\ldots,c_n$ de miembros de $\mathbf{D}$, $\langle c_1, \ldots, c_n \rangle \in \mathbb{R}$ sii $\langle f(c_1), \ldots f(c_n) \rangle \in \mathbb{R}'$.

Para todo $n \geq 1$, a cada $\mathbb{R}$ de $\mathbf{D_n}$ hacemos corresponder $\mathbb{R}'$ tal que se verifique 2). $\mathbf{D}'_n$ es el conjunto formado por estas $\mathbb{R}'$.

De acuerdo con la definición 1), $\langle \mathbf{D}, \{\mathbf{D}_i\}_{i>o} \rangle$ es homomorfa a $\langle \mathbf{D}', \{\mathbf{D}'_i\}_{i>o} \rangle$.

A partir de $\mathfrak{I}$ establecemos la interpretación $\mathfrak{I}'$ sobre la estructura $\langle \mathbf{D}' \{\mathbf{D}'_k\}_{k>o} \rangle$:

Para cada parámetro a_i, para $i \geq 1$, para el $\mathbb{S} \in \mathbf{D_1}$ tal que $\mathfrak{I}(a_1) \in \mathbb{S}$ y para todo $\mathbb{T} \in \mathbf{D_1}$, $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$ o $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \emptyset$, $\mathfrak{I}'(a_i)$ es el representante de $\mathbb{S}$. Para cada relator m-ádico R, para todo $m \geq 1$, si $\mathfrak{I}(R)$ es $\mathbb{R}$ y a $\mathbb{R}$ corresponde $\mathbb{R}'$, $\mathfrak{I}'(R) = \mathbb{R}'$.

$\mathfrak{I}'$ verifica la identidad estándar. En efecto, dados los parámetros a y b tales que $\mathfrak{I}(a) \simeq \mathfrak{I}(b)$ pero $\mathfrak{I}(a) \neq \mathfrak{I}(b)$, hay un $\mathbb{S} \in \mathbf{D_1}$ tal que $\mathfrak{I}(a) \in \mathbb{S}$ e $\mathfrak{I}(b) \in \mathbb{S}$. $\mathfrak{I}'(a)$ es el representante de $\mathbb{S}$; pero $\mathfrak{I}'(b)$ es también el representante de $\mathbb{S}$, por lo que $\mathfrak{I}'(a) = \mathfrak{I}'(b)$.

§ 34 Interpretaciones normales que verifican determinadas

condiciones.

En este apartado nos ocupamos de las interpretaciones normales, fijando nuestra atención en aquéllas que cumplen determinados requisitos. Para ello precisamos de nuevas definiciones.

Definición 1.

Dada una interpretación en sentido normal $\mathfrak{I}$, que verifica la identidad estándar, decimos que $\mathfrak{I}_\Sigma$ *es la extensión estándar de* $\mathfrak{I}$, sii $\mathfrak{I}_\Sigma$ es la interpretación normal que verifica lo siguiente:

1) Si $\langle \mathbf{D}, \{\mathbf{D}_i\}_{i>0}\rangle$ es la estructura de $\mathfrak{I}$, entonces $\langle \mathbf{D}, \{\mathfrak{P}(\mathbf{D}^k)/\ k\geq 1\}\rangle$ es la estructura de $\mathfrak{I}_\Sigma$; y

2) a) Para cada parámetro a, $\mathfrak{I}(a) = \mathfrak{I}_\Sigma(a)$;

b) Para cada relator R m-ádico, para todo m≥1, $\mathfrak{I}(R) = \mathfrak{I}_\Sigma(R)$.

Definición 2.

Dado un dominio $\mathbf{D} \neq \emptyset$, decimos que un conjunto $\mathbf{B}$ de n-plas de elementos de $\mathbf{D}$, para n>0, es *de definición positiva* sii

1) a) $\mathbf{B} = \emptyset$; b) $\mathbf{B}$ es un conjunto unitario;

2) $\mathbf{B} = \bigcup \mathbf{A}$; donde $\mathbf{A} = \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots\}$ -finito o infinito-, y para cada $\mathbf{B}_i \in \mathbf{A}$, para todo i≥1, $\mathbf{B}_i$ es de

definición positiva.

Si **B** es un conjunto de definición su positiva, decimos que su complemento $\bar{\mathbf{B}}$ es *de definición negativa.*

Para representar un conjunto de definición positiva, al que llamaremos simplemente "positivo", usaremos el signo + como índice, y para representar un conjunto de definición negativa, al que llamaremos simplemente "negativo", usaremos el signo - como índice; de este modo, $\mathbf{B}^{+}$ representa un conjunto positivo, mientras que $\mathbf{B}^{-}$ representa uno negativo.

Como hasta ahora y para abreviar, en las siguientes demostraciones por inducción sobre el grado lógico de las fórmulas de $\mathcal{L}_2$ nos referiremos solamente a los casos $\neg$, $\vee$ y $\forall$. Dado que los restantes signos lógicos pueden ser definidos en términos de los anteriores, las demostraciones serán válidas para todas las fórmulas. Sin embargo, es obvio que con solamente estos signos no pueden ser construidas fórmulas que sean prenexas en sentido estricto. A este efecto estipulamos que una fórmula con sólo $\neg$, $\vee$ y $\forall$ es *prenexa* sii ningún $\forall$ cae bajo el alcance de algún $\vee$, y para todo $\neg$, bajo cuyo alcance caiga algún $\forall$, el signo inmediatamente a su derecha no puede ser $\neg$.

Definición 3.

Una relación diádica $\mathbb{R}$ definida en un dominio **D** no vacío *es una relación de orden* sii $\mathbb{R}$ *es irreflexiva, transi-*

tiva y tal que para cada $\mathbf{A} \subset \mathbf{D}$, $\mathbf{A} \neq \emptyset$, *existe un* **a** *elemento de* **A** *tal que para cada elemento* **b** *también de* **A**, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ *o* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{R}$[42].

Definición 4.

Si $\Im$ es una interpretación normal tal que verifica la identidad estándar y en $\mathbf{D}_2$ existe una relación de orden $\mathbb{R}$, hay en $\mathcal{L}_2$ un relator diádico A tal que $\Im(A) = \mathbb{R}$ -abreviadamente, si $\Im$ es una interpretación normal ordenada-, α es una fórmula prenexa cerrada y a es un término[43] de α, decimos que ζ *es la situación de orden para* a *en* α sii, si $\mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_k$, para $k \geq 1$, son todos los términos de α distintos de a,

1º) Si en α no ocurren cuantificadores, ζ es la fórmula $\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \ldots \wedge \gamma_k$, en donde para cada $i \leq k$, γ_i es $Aa\mathrm{b}_i$, o $A\mathrm{b}_i a$ o $a = \mathrm{b}_i$ y $\gamma_{i_{\Im}} = 1$.

2º) Si α es $\forall s \beta$, t no ocurre en β y es del mismo tipo que s, $\forall s \beta_{\Im} = \beta(t/s)_{\Im'}$, donde $\Im' \underset{t}{=} \Im$, $\varphi(t/s)$ es la *situación de orden para* a *y* $\beta(t/s)$ y ζ es φ.

---

[42] Una relación $\mathbb{R}$ es irreflexiva sii para todo a $\langle \mathrm{a}, \mathrm{a} \rangle \notin \mathbb{R}$. Es transitiva sii para cada terna **a**, **b**, **c** de elementos del dominio, si $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{R}$ y $\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \in \mathbb{R}$, entonces $\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \in \mathbb{R}$.

[43] Es decir, un parámetro o una variable individual.

Definición 5.

Sea α una fórmula prenexa cerrada de $\mathcal{L}_2$, R un relator n-ádico cualquiera, para $n\geq1$, e $\mathfrak{I}$ es una interpretación normal ordenada definida en $\langle \mathbf{D}, \{\mathbf{D}_i\}_{i>0}\rangle$, definimos el conjunto $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I})$, al que llamamos *conjunto adecuado* para α, R e $\mathfrak{I}$, y simultáneamente la *condición de* $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I})$ de la siguiente manera:

1º) Si α es atómica, entonces:

a) si α es $Qa_1a_2...a_n$ y Q no es R, $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I})$ es cualquiera de los dos conjuntos $\emptyset$ o $\mathbf{D}^n$;

b) si α es $Ra_1...a_n$, entonces,

i) si $\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$, $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I}) = \{\langle\mathfrak{I}(a_1),...,\mathfrak{I}(a_n)\rangle\} = \mathbf{A}^+$;

ii) si $\alpha_{\mathfrak{I}} = 0$, $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I}) = \overline{\{\langle\mathfrak{I}(a_1),...,\mathfrak{I}(a_n)\rangle\}} = \mathbf{B}^-$;

y en ambos casos decimos que la condición de α es nula;

2º) Si α es $\neg\beta$, entonces $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I}) = \Delta(\beta,R,\mathfrak{I})$; si $\Delta(\beta,R,\mathfrak{I})$ es de *definición positiva*, $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I})$ es de *definición positiva*; si $\Delta(\beta,R,\mathfrak{I})$ es de *definición negativa*, entonces $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I})$ es de *definición negativa* y la condición de $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I})$ es la misma que la de $\Delta(\beta,R,\mathfrak{I})$;

3º) Si α es $\beta \vee \gamma$, entonces,

1) si ni en β ni en γ ocurre R, entonces $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I})$ es cualquiera de los dos conjuntos $\emptyset$ o $\mathbf{D}^n$;

2) si en β o en γ, pero sólo en una de ellas -sea γ-, no ocurre R, entonces:

a) si $\Delta(\beta,R,\mathfrak{I}) = \mathbf{A}^{+}$ y η es la *condición* de $\mathbf{A}^{+}$, entonces,

i) si $\neg\gamma_{\mathfrak{I}} = 1$, $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I}) = \Delta(\beta,R,\mathfrak{I}) = \mathbf{A}^{+}$ y la condición de $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I})$ es $\neg\gamma \wedge \eta$;

ii) si $\neg\gamma_{\mathfrak{I}} = 0$, $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I}) = \emptyset = \mathbf{B}^{+}$, y la condición de $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I})$ es, como en el caso anterior, $\neg\gamma \wedge \eta$;

b) si $\Delta(\beta,R,\mathfrak{I}) = \mathbf{A}^{-}$ y η es la condición de $\Delta(\beta,R,\mathfrak{I})$, entonces,

i) si $\neg\gamma_{\mathfrak{I}} = 1$, $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I}) = \Delta(\beta,R,\mathfrak{I}) = \mathbf{A}^{-}$ y la condición de $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I})$ es $\neg\gamma \wedge \eta$;

ii) si $\neg\gamma_{\mathfrak{I}} = 0$, $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I}) = \mathbf{D}^{n} = \mathbf{B}^{-}$, y la condición de $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I})$ es, como en el caso anterior, $\neg\gamma \wedge \eta$;

3) si tanto en β como en γ ocurre R, entonces,

a) Si $\Delta(\beta,R,\mathfrak{I}) = \mathbf{A}^{+}$ y $\Delta(\gamma,R,\mathfrak{I}) = \mathbf{B}^{+}$, entonces, si la condición de $\Delta(\beta,R,\mathfrak{I})$ es η y la condición de $\Delta(\gamma,R,\mathfrak{I})$ es ζ, $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I}) = \mathbf{A}^{+} \cup \mathbf{B}^{+} = \mathbf{C}^{+}$ y la condición de $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I})$ es $\eta \vee \zeta$;

b) Si $\Delta(\beta,R,\mathfrak{I}) = \mathbf{A}^{-}$ y $\Delta(\gamma,R,\mathfrak{I}) = \mathbf{B}^{-}$, entonces, si la condición de $\Delta(\beta,R,\mathfrak{I})$ es η y la condición de $\Delta(\gamma,R,\mathfrak{I})$ es ζ, $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I}) = \mathbf{A}^{-} \cap \mathbf{B}^{-} = \mathbf{C}^{-}$ y la condición de $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I})$ es $\eta \wedge \zeta$;

c) si $\Delta(\beta,R,\mathfrak{I}) = \mathbf{A}^{+}$ y $\Delta(\gamma,R,\mathfrak{I}) = \mathbf{B}^{-}$, o inversamente; entonces, si la condición de $\Delta(\beta,R,\mathfrak{I})$ es η y la condición de $\Delta(\gamma,R,\Im)$ es ζ, y φ es la conjunción de las situaciones de orden de todos los parámetros de α, que ocurren simultáneamente en una parte de definición positiva de $\mathbf{A}^+$ y en otra parte de definición negativa de $\mathbf{B}^-$, $\Delta(\alpha,R,\Im)$ es cualquiera de los dos conjuntos $\mathbf{A}^+ \cup \mathbf{B}^- = \mathbf{C}^-$ o $\mathbf{A}^+ \cap \mathbf{B}^- = \mathbf{D}^+$, y la condición, tanto de $\mathbf{C}^-$ como de $\mathbf{D}^+$, es $\eta \wedge \zeta \wedge \varphi$.

4º) Si α es de la forma $\vee s\beta$, entonces:

a) Supongamos que "s" no es argumento de ninguna ocurrencia de R; entonces,

si r una constante del mismo tipo que s que no ocurre en β, $\Im'$ es una interpretación tal que $\Im' \underset{r}{=} \Im$ y $\vee s\beta_{\Im} = \beta(r/s)_{\Im'}$, entonces $\Delta(\alpha,R,\Im) = \Delta(\beta(r/s),R,\Im')$ y $\wedge s\eta$ como condición.

b) s es argumento de alguna ocurrencia de R en α;

Sea entonces b un parámetro que no ocurre en β e $\Im'$ una interpretación tal que $\Im' \underset{b}{=} \Im$ para la que se verifica que $\vee s\beta_{\Im} = \beta(b/s)_{\Im'}$; entonces,

1) si para toda $\Im'' \underset{b}{=} \Im$, $\vee s\beta_{\Im} = \beta(b/s)_{\Im''}$;

i) Si $\Delta(\beta(b/s),R,\Im') = \mathbf{A}^+$ y su condición es $\gamma(b/s)$, $\Delta(\alpha,R,\Im)$ es el conjunto unión de todos los conjuntos $\Delta(\beta(b/s),R,\Im_i)$ tales que $\Im_i(b) \in \Im(((\vee s\beta)_{(s)}))$, para cada $\Im_i \underset{b}{=} \Im$ y la condición será $\vee s\gamma$;

ii) Si $\Delta(\beta(b/s),R,\Im') = \mathbf{B}^-$ y su condición es $\gamma(b/s)$

$\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I})$ es el conjunto intersección de todos los conjuntos $\Delta(\beta(b/s),R,\mathfrak{I}_i)$ tales que $\mathfrak{I}_i(b) \in \mathfrak{I}((\vee s\beta)_{(s)})$, para cada $\mathfrak{I}_i \underset{b}{\equiv} \mathfrak{I}$, y la condición será $\vee s\gamma$;

2) Si existe una $\mathfrak{I}'' \underset{b}{\equiv} \mathfrak{I}$ y $\vee s\beta_{\mathfrak{I}} \neq \beta(b/s)_{\mathfrak{I}''}$; entonces si $\mathbf{Q}\eta(b/s)$, en donde $\mathbf{Q}$ es una secuencia de signos $\neg$ y $\vee$ tal que no hay dos $\neg$ consecutivos, y $\eta(b/s)$, que carece de cuantificadores, es la condición de $\Delta(\beta(b/s),R,\mathfrak{I}')$ y $\zeta(b/s)$ es la situación de orden de b en $\beta(b/s)$, entonces,

i) si $\Delta(\beta(b/s),R,\mathfrak{I}')$ es positivo, $\Delta(\vee s\beta,R,\mathfrak{I})$ es el conjunto $\Delta(\beta(b/s),R,\mathfrak{I}^*)$, también positivo, donde $\mathfrak{I}^* \underset{b}{\equiv} \mathfrak{I}$ e $\mathfrak{I}^*(b)$ es el elemento de $\mathfrak{I}(\mathbf{Q}(\eta \wedge \zeta)_{(s)})$ tal que para cualquier elemento $\mathbf{c} \in \mathfrak{I}(\mathbf{Q}(\eta \wedge \zeta)_{(s)})$,

$$\mathfrak{I}^*(b) = \mathbf{c} \text{ o } \langle\mathfrak{I}^*(b),\mathbf{c}\rangle \in \mathbb{R}.$$

La condición de $\Delta(\vee s\beta,R,\mathfrak{I})$ será

$\vee s\wedge z\mathbf{Q}(\eta \wedge \zeta \wedge (\eta(z/s) \wedge \zeta(z/s) \rightarrow z = s \vee Asz))$.

ii) si $\Delta(\beta(b/s),R,\mathfrak{I}')$ es negativo, $\Delta(\vee s\beta,R,\mathfrak{I})$ es el conjunto $\Delta(\beta(b/s),R,\mathfrak{I}^*)$, también negativo, donde $\mathfrak{I}^* \underset{b}{\equiv} \mathfrak{I}$ e $\mathfrak{I}^*(b)$ es el elemento de $\mathfrak{I}(\mathbf{Q}(\eta \wedge \zeta)_{(s)})$ tal que para cualquier elemento $\mathbf{c} \in \mathfrak{I}(\mathbf{Q}(\eta \wedge \zeta)_{(s)})$,

$$\mathfrak{I}^*(b) = \mathbf{c} \text{ o } \langle\mathfrak{I}^*(b),\mathbf{c}\rangle \in \mathbb{R}.$$

La condición de $\Delta(\vee s\beta,R,\mathfrak{I})$ será

$\wedge s\vee z\mathbf{Q}((\eta \wedge \zeta) \vee (\eta(z/s) \wedge \zeta(z/s) \wedge (z \neq s \wedge \neg Asz))$.

Lema 1.

Para todo $n \geq 1$, para todo $\mathscr{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n\}$, en donde, para cada $i \leq n$, α_i es una sentencia sin cuantificadores, toda interpretación normal ordenada $\mathfrak{I}$; si

$$\mathscr{D} = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_n\},$$

en donde, para cada $i \leq n$, Δ_i es $\Delta(\alpha_i, R, \mathfrak{I})$, $\mathfrak{I}_i \underset{R}{=} \mathfrak{I}$, e $\mathfrak{I}_i(R) = \Delta_i$; si $\mathfrak{I}^* \underset{R}{=} \mathfrak{I}$, $\alpha_{i_{\mathfrak{I}}} = \alpha_{i_{\mathfrak{I}_i}}$, **B** es la unión de todos los elementos positivos de $\mathscr{D}$, **C** es la intersección de todos los elementos negativos de $\mathscr{D}$, e $\mathfrak{I}^*(R) = \mathbf{D}$ si $\mathbf{C} = \emptyset$, $\mathfrak{I}^*(R) = \mathbf{C}$ si $\mathbf{D} = \emptyset$, o $\mathfrak{I}^*(R) = \mathbf{D} \cup \mathbf{C} = \mathbf{C}$ o $\mathfrak{I}^*(R) = \mathbf{D} \cap \mathbf{C} = \mathbf{D}$, en caso contrario, entonces, $\alpha_{i_{\mathfrak{I}^*}} = \alpha_{i_{\mathfrak{I}}}$.

Demostración:

Por inducción sobre el grado lógico de la sentencia de $\mathscr{A}$ de mayor grado lógico. Para la base, tanto que cuando **C** y **D** no son vacíos, $\mathbf{D} \cup \mathbf{C} = \mathbf{C}$ y $\mathbf{D} \cap \mathbf{C} = \mathbf{D}$, como que, en cualquier caso, $\alpha_{i_{\mathfrak{I}^*}} = \alpha_{i_{\mathfrak{I}}}$ y, por consiguiente, $\alpha_{i_{\mathfrak{I}^*}} = \alpha_{i_{\mathfrak{I}_i}}$, resulta obvio. En el paso de la inducción, a partir de $\mathscr{A}$ obtenemos $\mathscr{A}'$, de cardinalidad $k \geq n$, tal que la fórmula de mayor grado lógico de $\mathscr{A}'$ es de grado lógico menor al menos en una unidad que la correspondiente de $\mathscr{A}$, mediante sustitución de cada α_i de la forma $\neg\beta$ por β y cada α_r de la forma $\beta \vee \gamma$ por las dos fórmulas β y γ. Por hipótesis de la inducción valdrá el enunciado del lema para $\mathscr{A}'$ y, por la definición de conjunto adecuado y construcción de $\mathscr{A}'$, valdrá también para $\mathscr{A}$.

Teorema 1 (Parte primera).

Para toda sentencia α *sin cuantificadores, toda interpretación* $\mathfrak{I}$ *normal ordenada, todo relator* m-*ádico* R, *para cada* m≥1; *si* $\mathfrak{I}^{*} \underset{R}{=} \mathfrak{I}$ y $\mathfrak{I}^{*}(R) = \Delta(\alpha,R,\mathfrak{I})$, *entonces* $\alpha_{\mathfrak{I}^{*}} = \alpha_{\mathfrak{I}}$.

Demostración:

Por inducción sobre el grado lógico de α.

1) α es $Ra_1a_2...a_m$[44]. Sea $\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$; entonces, por definición, $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I}) = \{\langle\mathfrak{I}(a_1), ..., \mathfrak{I}(a_m)\rangle\}$, de donde $\alpha_{\mathfrak{I}^{*}} = 1$. Sea $\alpha_{\mathfrak{I}} = 0$; entonces, por definición,

$$\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I}) = \overline{\{\langle\mathfrak{I}(a_1), \ldots, \mathfrak{I}(a_m)\rangle\}},$$

de donde $\alpha_{\mathfrak{I}^{*}} = 0$.

2) α es $\neg\beta$. Por hipótesis de la inducción $\beta_{\mathfrak{I}} = \beta_{\mathfrak{I}'}$, donde $\mathfrak{I}' \underset{R}{=} \mathfrak{I}$ e $\mathfrak{I}'(R)$ es $\Delta(\beta,R,\mathfrak{I})$; en consecuencia, $\alpha_{\mathfrak{I}} = \alpha_{\mathfrak{I}'}$, y puesto que $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I}) = \Delta(\beta,R,\mathfrak{I})$, $\alpha_{\mathfrak{I}} = \alpha_{\mathfrak{I}^{*}}$.

3) α es $\beta \vee \gamma$. Por hipótesis de la inducción $\beta_{\mathfrak{I}} = \beta_{\mathfrak{I}'}$ y $\gamma_{\mathfrak{I}} = \gamma_{\mathfrak{I}''}$, donde $\mathfrak{I} \underset{R}{=} \mathfrak{I}'$, $\mathfrak{I} \underset{R}{=} \mathfrak{I}''$, $\mathfrak{I}'(R)$ es el conjunto adecuado de β, R e $\mathfrak{I}$, e $\mathfrak{I}''(R)$ es el conjunto adecuado de γ, R e $\mathfrak{I}$. Entonces, por definición $\mathfrak{I}^{*}(R)$ es $\mathfrak{I}'(R) \cup \mathfrak{I}''(R)$, si ambos son positivos, o $\mathfrak{I}'(R) \cap \mathfrak{I}''(R)$, si ambos son negati-

[44]Omitimos la demostración, por otra parte obvia, para el caso en que α es $Qb_1...b_n$ y Q no es R.

vos, o cualquiera de los dos en otro caso. Por el lema 1) con $\mathscr{A} = \{\beta, \gamma\}$, $\beta_{\mathfrak{I}} = \beta_{\mathfrak{I}}*$ y $\gamma_{\mathfrak{I}} = \gamma_{\mathfrak{I}}*$; en consecuencia, por evaluación de $\vee$, $\alpha_{\mathfrak{I}} = \alpha_{\mathfrak{I}}*$.

Teorema 2 (Parte primera).

Para toda sentencia α *sin cuantificadores, toda interpretación* $\mathfrak{I}$ *normal ordenada y todo relator* R *n-ádico, para cada* $n \geq 1$, *existe una fórmula* δ *de* $\mathcal{L}_2$ *tal que* $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}(\delta(x_1 \ldots x_n))$.

Demostración:

Por inducción sobre el grado lógico de α.

1º) α es atómica.

a) Si α es $Qa_1 \ldots a_n$ y Q no es R, entonces para cualquier fórmula δ, $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I})$ es $\mathfrak{I}((\delta \wedge \neg\delta)(x_1 \ldots x_n))$ o $\mathfrak{I}((\delta \vee \neg\delta)(x_1 \ldots x_n))$;

b) Si α es $Ra_1 \ldots a_n$, entonces, $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I})$ es $\mathbf{A}^+$ o $\mathbf{A}^-$. Sea δ la fórmula $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle = \langle a_1,\ldots,a_n\rangle$, en donde $x_1,\ldots x_n$ son variables individuales distintas entre si; se tiene que $\mathbf{A}^+ = \mathfrak{I}(\delta(x_1 \ldots x_n))$, o $\mathbf{A}^- = \mathfrak{I}(\neg\delta(x_1 \ldots x_n))$.

2º) α es $\neg\beta$. Por hipótesis de la inducción,

$$\Delta(\beta,R,\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}(\delta(x_1 \ldots x_n)),$$

para alguna fórmula δ. Pero $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I})$ es $\Delta(\beta,R,\mathfrak{I})$.

3º) α es $\beta \vee \gamma$.

Hacemos un recorrido por el punto 3 de definición 5).

1) En este caso $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}(\delta(x_1 \ldots x_n))$, en donde δ es cualquier fórmula sin variables libres.

2) a)[45] Por hipótesis de la inducción, existe una fórmula δ tal que $\Delta(\beta,R,\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}(\delta(x_1 \ldots x_n))$.

$$\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}((\neg\gamma \wedge \delta)(x_1 \ldots x_n))^{46}.$$

b) Por hipótesis de la inducción, existe una fórmula δ tal que $\Delta(\beta,R,\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}(\delta(x_1 \ldots x_n))$; en este caso, $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}((\neg\gamma \rightarrow \delta)(x_1 \ldots x_n))$[47].

---

[45] i) y ii) corresponden a distintos valores y, por tanto, a distintas interpretaciones; por consiguiente, para una dada $\mathfrak{I}$, la fórmula δ tal que $\mathfrak{I}(\delta(x_1 \ldots x_n)) = \Delta(\alpha,R,\mathfrak{I})$ es la misma cualquiera que sea el valor de $\alpha_{\mathfrak{I}}$.

[46] δ es una fórmula de la forma $\eta \wedge \vartheta$, donde η es la condición de $\Delta(\beta,R,\mathfrak{I})$ o solamente ϑ, si todas las subfórmulas atómicas de β tienen R como relator, y ϑ es una conjunción de m fórmulas, donde m es el número de ocurrencias de R en β, todas ellas de la forma $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle = \langle a_1,\ldots,a_n\rangle$. Por consiguiente, la fórmula ξ tal que $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}(\xi(x_1 \ldots x_n))$ es $\neg\gamma \wedge \eta \wedge \vartheta$, o sea $\neg\gamma \wedge \delta$.

[47] δ es una fórmula de la forma $\eta \rightarrow \vartheta$, donde η es la condición de $\Delta(\beta,R,\mathfrak{I})$ o solamente ϑ, si todas las subfórmulas atómicas de β tienen R como relator, y ϑ es una disyunción de m fórmulas, donde m es el número de ocurrencias de R en β, todas ellas de la forma $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \neq \langle a_1,\ldots,a_n\rangle$. Por consiguiente, la fórmula ξ tal que $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}(\xi(x_1 \ldots x_n))$ es $(\neg\gamma \wedge \eta) \rightarrow \vartheta$, que es lo mismo que $\neg\gamma \rightarrow (\eta \rightarrow \delta)$, o sea $\neg\gamma \rightarrow \delta$.

3) *a*) Por hipótesis de la inducción, existen δ_1 y δ_2 tales que $\Delta(\beta,R,\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}(\delta_1(x_1 \ldots x_n))$ y $\Delta(\gamma,R,\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}(\delta_2(x_1 \ldots x_n))$ (y ambos son positivos); entonces,

$$\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}((\delta_1 \vee \delta_2)(x_1 \ldots x_n)).$$

b) Por hipótesis de la inducción, existen δ_1 y δ_2 tales que $\Delta(\beta,R,\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}(\delta_1(x_1 \ldots x_n))$ y $\Delta(\gamma,R,\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}(\delta_2(x_1 \ldots x_n))$ (y ambos son negativos); entonces,

$$\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}((\delta_1 \wedge \delta_2)(x_1 \ldots x_n)).$$

c) Por hipótesis de la inducción, existen δ_1 y δ_2 tales que $\Delta(\beta,R,\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}(\delta_1(x_1 \ldots x_n))$ y $\Delta(\gamma,R,\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}(\delta_2(x_1 \ldots x_n))$ (y uno de ellos -sea el correspondiente a β- es positivo y el otro negativo); $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}(\varphi \wedge (\delta_1 \vee \delta_2)(x_1 \ldots x_n))$ o $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}(\varphi \wedge (\delta_1 \wedge \delta_2)(x_1 \ldots x_n))$[48].

---

[48]La primera fórmula ξ_1 tal que $\mathfrak{I}(\xi_1(x_1 \ldots x_n)) = \Delta(\alpha,R,\mathfrak{I})$ será $\varphi \wedge ((\eta \wedge \vartheta) \vee (\zeta \rightarrow \vartheta'))$, donde φ es la conjunción de todas las situaciones de orden de los parámetros que ocurran simultáneamente en ϑ y en ϑ', η es la condición de $\Delta(\beta,R,\mathfrak{I})$, ζ es la condición de $\Delta(\gamma,R,\mathfrak{I})$ y ϑ y ϑ' son conjunciones o disyunciones de fórmulas de identidad, como se ha explicado en notas precedentes. Pero $\mathfrak{I}(\xi_1(x_1 \ldots x_n))$ es el mismo conjunto que $\mathfrak{I}((\varphi \wedge \eta \wedge \zeta \rightarrow (\vartheta \vee \vartheta'))(x_1 \ldots x_n))$, siendo $\varphi \wedge \eta \wedge \zeta$ la condición de $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I})$. La segunda fórmula ξ_2 tal que $\mathfrak{I}(\xi_2(x_1 \ldots x_n)) = \Delta(\alpha,R,\mathfrak{I})$ será

$$\varphi \wedge ((\eta \wedge \vartheta) \wedge (\zeta \rightarrow \vartheta')),$$

donde, como antes, φ es la conjunción de todas las situaciones de orden de los parámetros que ocurran simultáneamente en ϑ y en ϑ', η es la condición de $\Delta(\beta,R,\mathfrak{I})$, ζ es la condición de $\Delta(\gamma,R,\mathfrak{I})$ y ϑ y ϑ' son conjunciones o disyunciones de fórmulas de identidad, como se ha dicho. Pero $\mathfrak{I}(\xi_2(x_1 \ldots x_n))$ es el mismo conjunto que

$$\mathfrak{I}((\varphi \wedge \eta \wedge \zeta \wedge (\vartheta \wedge \vartheta'))(x_1 \ldots x_n)),$$

donde $\varphi \wedge \eta \wedge \zeta$ es la condición de $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I})$.

Teorema 3 (Parte primera).

Para toda fórmula α *sin cuantificadores en la que a lo sumo está libre la variable* P *predicativa n-ádica, para* $n \geq 1$, *y toda interpretación* $\mathfrak{I}$ *normal ordenada; si* $\mathfrak{I}_\Sigma$ *es la extensión estándar de* $\mathfrak{I}$*; entonces, para cada* $\mathfrak{I}^*$ *tal que* $\mathfrak{I}^* \underset{R}{=} \mathfrak{I}_\Sigma$, *donde* R *es un relator de la misma aridad que* P, *existe una interpretación* $\mathfrak{I}'$ *que verifica que* $\mathfrak{I}' \underset{R}{=} \mathfrak{I}$ *y* $\alpha(R/P)_{\mathfrak{I}^*} = \alpha(R/P)_{\mathfrak{I}'}$.

Demostración:

Dada su construcción, $\mathfrak{I}^*$, que es estándar, es normal ordenada. Por el teorema 1) (parte primera), si el conjunto $\Delta(\alpha(R/P),R,\mathfrak{I}^*)$ es el conjunto adecuado para $\alpha(R/P)$, R e $\mathfrak{I}^*$, entonces para toda $\mathfrak{I}''$ tal que $\mathfrak{I}'' \underset{R}{=} \mathfrak{I}^*$ e

$$\mathfrak{I}''(R) = \Delta(\alpha(R/P),R,\mathfrak{I}^*), \quad \alpha(R/P)_{\mathfrak{I}''} = \alpha(R/P)_{\mathfrak{I}^*}.$$

Por otra parte, por el teorema 2) (parte primera) y la definición de interpretación normal, para cada interpretación normal ordenada $\mathfrak{I}^o$, cuya estructura es $\langle \mathbf{D}, \{\mathbf{D}_i\}_{i>o}\rangle$ $\mathfrak{I}^o(R) \in \mathbf{D}_n$. En consecuencia, $\mathfrak{I}''(R)$ es un miembro del dominio relacional n-ádico de la estructura de $\mathfrak{I}$. Sea $\mathfrak{I}' \underset{R}{=} \mathfrak{I}$ tal que $\mathfrak{I}'(R) = \mathfrak{I}''(R)$. Por consiguiente,

$$\alpha(R/P)_{\mathfrak{I}^*} = \alpha(R/P)_{\mathfrak{I}'}.$$

§ 35 Consideraciones finales sobre ampliación de resultados a determinadas clases de fórmulas.

El teorema 3) (parte primera) no es más que un corolario de los teoremas 1) (parte primera) y 2) (parte primera), y afirma en definitiva que, si añadimos al cálculo $\mathfrak{CD}_{(2)}$ el axioma de buen orden, obtendríamos un nuevo cálculo, al que podemos llamar $\mathfrak{CD}_{(4)}$, tal que para fórmulas de la forma $\bigwedge_P\alpha$, o $\bigvee_P\alpha$, en donde α carece de cuantificadores, si es universalmente válida en sentido estándar, entonces es demostrable.

Consideremos una fórmula de la forma $\bigvee_P\alpha$ tal que en α no ocurren cuantificadores y sólo P ocurre libre, siendo P una variable predicativa n-ádica, para $n\geq1$. Si $\bigvee_P\alpha$ es universalmente válida en sentido estándar, entonces es demostrable en el cálculo deductivo $\mathfrak{CD}_{(4)}$. En efecto, si se supone que $\bigvee_P\alpha$ no es demostrable, aplicando el teorema de satisfacción de Henkin[49], $\neg\bigvee_P\alpha$ es satisfactible por alguna interpretación normal ordenada. Dado que $\neg\bigvee_P\alpha$ equivale a $\bigwedge_P\neg\alpha$, existe una interpretación normal ordenada $\mathfrak{I}$ que satisface $\bigwedge_P\neg\alpha$; pero, entonces, existe una interpretación estándar $\mathfrak{I}^*$ que satisface $\bigwedge_P\neg\alpha$, porque, en caso contrario, hallaríamos que

$$\neg\alpha(R/P)_{\mathfrak{I}^o} = 0,$$

-en donde R es un relator de la misma aridad que P que no ocurre en α- para alguna $\mathfrak{I}^o$ tal que $\mathfrak{I}^o \underset{R}{=} \mathfrak{I}^*$, y, en tal caso,

---

[49]Teorema 1, § 30.

podríamos obtener una $\mathfrak{I}'$ tal que $\mathfrak{I}' \underset{R}{=} \mathfrak{I}$ para la que se verificaría que $\neg\alpha(R/P)_{\mathfrak{I}'} = 0$, lo cual es imposible. En consecuencia, $\wedge P \neg\alpha$ es satisfactible en sentido estándar. Puesto que $\vee P\alpha$ es universalmente válida en sentido estándar, si no es demostrable, hallamos que $\wedge P \neg\alpha$ es satisfactible en sentido estándar; es decir, $\neg\vee P\alpha$ es satisfactible en sentido estándar, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $\vee P\alpha$ ha de ser demostrable.

Si pensamos en interpretaciones normales que no verificaran la identidad, bastaría aplicar el teorema 2) de § 33 y el resultado sería el mismo.

Para probar los tres teoremas no hemos necesitado hacer uso de las definiciones en toda su extensión. Que estas definiciones resulten prolijas para el uso que se ha hecho de ellas, tiene una explicación. Las definiciones 4) y 5), en particular los puntos 3º y 4º de ésta última, nos permitirían establecer los tres teoremas completos, no respecto de *todas las fórmulas*, pero si respecto de una cierta clase de ellas. Hemos de tener en cuenta, no obstante, que habrá de surgir algún problema, como más abajo comentamos.

Los resultados que hemos efectivamente establecido, podrían parecer sorprendentes si, por una parte, se piensa que dado un dominio $\mathbf{D}$ de cardinalidad ρ, entonces para todo $n \geq 1$, la cardinalidad de $\mathfrak{P}(\mathbf{D}^n)$ es $2^{(\rho^n)}$, con lo que si $\mathbf{D}$ es enumerable, $\mathfrak{P}(\mathbf{D}^n)$ es no enumerable; y, por otro, que el número de conjuntos adecuados distintos que es necesario investigar para ver si $\wedge_P\alpha$, o $\vee_P\alpha$, es satisfactible es finito. Pero en realidad, aún cuando **D** sea enumerable, si en α no ocurren más que r parámetros, la validez universal de α depende de la validez en un dominio donde a lo sumo hay r elementos; y, por consiguiente, solamente será necesario considerar y verificar el valor de α para los $2^{(r^n)}$ distintos valores de la variable P. Sin embargo, el número de conjuntos adecuados distintos no depende del número de parámetros de α, sino del número de ocurrencias de P. Para verificar si $\wedge_P\alpha_{\mathfrak{I}} = 1$ habrá que verificar el valor que tenga $\alpha(R/P)$ para 2^k distintos conjuntos adecuados, en donde k, que obviamente puede ser menor que r^n, es el número de ocurrencias de P en α.

Esto hace ver que nuestros teoremas (partes primeras) remiten más bien a otro resultado conocido. En efecto, si en α no hay cuantificadores, α puede ser considerada -o es- una fórmula del cálculo proposicional. Entonces, para toda $\mathfrak{I}$ estándar, manteniendo fijo el valor de cada una de las fórmulas atómicas con letras predicativas distintas de R, $\wedge_P\alpha$ es válida bajo $\mathfrak{I}$ sii $\alpha(R/P)$ vale 1 para todas las 2^k posibles distribuciones de valores 1 y 0 para los distintas fórmulas atómicas con R, que serán consideradas como letras proposicionales distintas.

Teniendo esto en cuenta, nuestro resultado no se puede considerar sorprendente. Ya Hilbert-Ackermann aluden a estos puntos al hablar del problema de la eliminación de cuantificadores. El problema -irresoluble- al que Hilbert-Ackermann se refieren difiere del nuestro en lo siguiente. Lo que pretendía la solución del problema era eliminar todas las variables predicativas (por tanto, los relatores), y transformar toda fórmula de $\mathcal{L}_2$ en fórmulas de primer orden cuyas subfórmulas atómicas serían de la forma $a = b$, donde a y b son términos.

La solución del problema de la eliminación llevaría aparejada la del problema de la decisión, razón por la que, independientemente de los reultados obtenidos por W. Ackermann, a los que los autores se refieren[50], se sabe que no existe tal resultado. Pero entre nuestros resultados y el que trataría de encontrar la solución al problema de la eliminación no hay coincidencia.

Podemos ampliar las primeras partes de los teoremas 1), 2) y 3), refiriéndolos a fórmulas prenexas de la forma **Q**β(**R/P**), en donde **Q** es un prefijo cuantificacional cuyos sufijos son todos predicativos y en β no ocurren cuantificadores. El problema relativo a esta clase de fórmulas se reduci

[50]Op. cit. p. 164.

ría al de la validez de un conjunto de fórmulas sin cuantificadores, en las cuales ocurrirían, además de la identidad, sólo el relator diádico A, siendo $\mathfrak{I}(A)$ la relación de orden.

En efecto, sea, por ejemplo, $\alpha(R/P)$ la fórmula $\bigvee s(\gamma \vee Ra_1...a_n)$, donde s es una variable predicativa y en γ no hay ninguna ocurrencia de R. Si η es $(\gamma \vee Ra_1...a_n)$, para determinar el conjunto adecuado y la fórmula δ tal que $\mathfrak{I}(\delta\langle x_1...x_n\rangle)$ es dicho conjunto, hemos de partir de la fórmula $\eta(r,R/s,P)$, donde r es del tipo de s y no ocurre como argumento de R. Esta fórmula es $\gamma(r/s) \vee Ra_1...a_n$. Las fórmulas correspondientes a los dos posibles conjuntos adecuados de $\eta(r,R/s,P)$, serán $\neg\gamma(r/s) \wedge \langle x_1...x_n\rangle = \langle a_1...a_n\rangle$, en caso de que $Ra_1...a_{n_{\mathfrak{I}}} = 1$, y $\neg\gamma(r/s) \rightarrow \langle x_1...x_n\rangle \neq \langle a_1...a_n\rangle$, en caso de que $Ra_1...a_{n_{\mathfrak{I}}} = 0$; aquí $\neg\gamma(r/s)$ es lo que hemos llamado la condición. Entonces las fórmulas para los conjuntos adecuados de $\bigvee s(\gamma \vee Ra_1...a_n)$ serán

$$\bigwedge s\neg\gamma \wedge \langle x_1...x_n\rangle = \langle a_1...a_n\rangle \text{ y}$$

$$\bigwedge s\neg\gamma \rightarrow \langle x_1...x_n\rangle \neq \langle a_1...a_n\rangle,$$

que son justamente una negación de la otra, puesto que $\bigvee s(\gamma \vee Ra_1...a_n)$ equivale a $\bigvee s\gamma \vee Ra_1...a_n$. Para el valor 1 de $\alpha(R/P)$, si $\bigvee s\gamma_{\mathfrak{I}} = 1$, se tiene que

$$\mathfrak{I}((\bigwedge s\neg\gamma \wedge \langle x_1...x_n\rangle = \langle a_1...a_n\rangle)\langle x_1...x_n\rangle) = \emptyset,$$

que será el conjunto adecuado correspondiente. Y si $\bigvee s\gamma_{\mathfrak{I}} = 0$ entonces

$$\mathfrak{I}((\bigwedge s\neg\gamma \wedge \langle x_1...x_n\rangle = \langle a_1...a_n\rangle)\langle x_1...x_n\rangle)$$

es el conjunto $\{\langle\mathfrak{I}(a_1), \mathfrak{I}(a_2), \ldots \mathfrak{I}(a_n)\rangle\}$. De la misma manera, para $\alpha(R/P)_{\mathfrak{I}} = 0$, la fórmula correspondiente al conjunto adecuado será $\bigwedge s \neg\gamma \rightarrow \langle x_1 \ldots x_n\rangle \neq \langle a_1 \ldots a_n\rangle$. Este resultado lo podemos generalizar a las fórmulas de la forma $\mathbf{Q}\alpha(R/P)$, donde **Q** es un prefijo cuantificacional cuyos sufijos son todos predicativos.

No se puede dejar de reconocer, sin embargo, que para tan corto viaje -el que representa la escasez de los resultados expresados en los teoremas (partes primeras)- no habrían hecho falta tamañas alforjas. Si nos hubiéramos querido limitar exclusivamente a las fórmulas sin cuantificadores, como literalmente indican sus enunciados, no tendríamos que haber aludido ni a lo que hemos llamado condición, ni a lo que hemos llamado situación de orden en las definiciones 4) y 5).

Las condiciones han sido introducidas en la definición 5) al objeto de poder ampliar las partes primeras de los teoremas en el sentido ya referido. De esta manera, si llamamos $\mathfrak{CD}_{(4)}$ a la extensión de $\mathfrak{CD}_{(2)}$, obtenida al añadir a éste el axioma de buen orden, podemos decir que $\mathfrak{CD}_{(4)}$ es completo en sentido estándar respecto de cierto conjunto de fórmulas, a saber, aquéllas cuyas prenexas tienen variables predicativas como sufijos de sus cuantificadores. Es decir, podemos afirmar que para toda fórmula α perteneciente a este conjunto, si α es universalmente válida en sentido estándar, entonces es demostrable en el cálculo.

Sin embargo, el mismo resultado puede referirse a $\mathfrak{CD}_{(2)}$. En realidad, aún no hemos hecho referencia a la necesidad de la situación de orden, cuya razón de ser estriba, como veremos más adelante, en la cuantificación de variables que aparezcan como argumentos de dos ocurrencias distintas de R, ocurrencias cuyos argumentos no sean coincidentes, al menos en el mismo orden, y para la cuantificación en los casos en que las dos fórmulas $\forall x\alpha$ y $\forall x\neg\alpha$ son válidas para una dada interpretación.

El hecho de que pensemos que podemos extender la parte primera de estos teoremas, no supone la pretensión de que dicha extensión pueda llegar a ser total.

El resultado de Gödel de 1.931, junto con la categoricidad de los axiomas de Peano, conducen, como hemos visto, al establecimiento de la incompletud esencial de la lógica de segundo orden[51]. Es decir, han conducido a establecer, no ya la incompletud de $\mathfrak{CD}_{(2)}$ -obvia más allá de los resultados de Gödel, dada la indemostrabilidad de fórmulas cerradas universalmente válidas en sentido estándar, como los axiomas i) y ii) de Hilbert-Ackerman y el de buena ordenación- sino la

[51]Vid. Capítulo III, especialmente § 26.

incompletud de toda extensión correcta de $\mathfrak{CD}_{(2)}$. Por consiguiente, aun cuando intentemos ir poco a poco extendiendo los resultados obtenidos -cuyos primeros pasos están dados en las partes primeras de los teoremas 1), 2) y 3)- necesasariamente habremos de llegar a un punto en el que tropecemos con dificultades, no sólo práctica, sino teóricamente insalvables. Pero no consideramos que ello sea obstáculo, ni para justificar el inicio de un proceso de demostraciones parciales de completud, ni para continuar exactamente hasta el punto límite. Antes al contrario, consideramos que avanzar en este sentido nos permitirá conocer con mayor claridad las verdaderas razones de la incompletud de la lógica de segundo orden, al margen de los resultados de Gödel y de la categoricidad de la aritmética.

El resultado de Henkin respecto de completud en sentido normal, permite pensar que la razón de la incompletud reside en la no enumerabilidad de los conjuntos $\mathfrak{P}(\mathbf{D}^n)$, cuando $\mathbf{D}$ es un conjunto infinito enumerable; pero existen indicios, y algo de ello hemos apuntado ya, de que esto no es suficiente. Si, cuando en $\alpha(R/P)$ no hay cuantificadores con sufijo individual, sea cual sea la cardianalidad de $\mathbf{D}$, no hay que recurrir ni a dicha cardinalidad, ni siquiera a la del dominio finito representativo (la dada por el número de parámetros distintos), sino al número de las ocurrencias de R en $\alpha(R/P)$, ¿No puede suceder algo semejante cuando nos referimos a fórmulas $\alpha(R/P)$ cerradas cualesquiera?

Naturalmente, jamás podremos demostrar los teoremas 1), 2) y 3), obtenidos a partir de sus partes primeras, eliminando méramente la restricción a fórmulas sin cuantificadores; ello supondría la existencia de un conjunto de fórmulas -el correspondiente al conjunto de todos los conjuntos adecuados- y, por tanto, la transformación de la prueba de Henkin en una prueba de conmpletud de $\mathfrak{C}\mathfrak{T}\mathfrak{D}(4)$, cuando el axioma de buen orden pertenece al conjunto Γ^* (obtenido para probar el teorema de satisfacción), lo que es imposible.

Sin embargo, si la ampliación que hemos sugerido a fórmulas de la forma $\mathbf{Q}\alpha(R/P)$, donde $\mathbf{Q}$ es un prefijo cuantificacional con sólo sufijos predicativos, es correcta, también parece que se verifica del mismo modo en los siguientes casos que exponemos, -sin pretender una generalización absoluta-. De esta manera se justifica la necesidad de añadir las condiciones en la definición 5), así como de lo que llamamos situación de orden en la misma definición y, por consiguiente, del axioma de buen orden.

Sea $\alpha(R/P)$ la fórmula $\mathbf{Q}\beta$, donde $\mathbf{Q}$ es un prefijo cuantificacional cualquiera y en β no hay cuantificadores. Puesto que consideramos un lenguaje simplificado con los signos $\neg$, $\vee$ y $\bigvee$, y dado que si $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I})$ es el adecuado para $\alpha(R/P)$, $\Delta(\alpha,R,\mathfrak{I})$ es también el adecuado para $\neg\alpha(R/P)$, basta considerar la matriz β como una fórmula de la forma $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \ldots \vee \gamma_n$, en donde γ_1 es una fórmula -cualquiera que sea su grado lógico- sin R, y $\gamma_2 \vee \ldots \vee \gamma_n$ son todas fórmulas atómicas con R.

Consideremos en primer lugar que n = 2 y sea Q, para simplificar, un cuantificador $\vee$ con sufijo individual x que ocurre en γ_2 y, por tanto, como argumento de R en $\alpha(R/P)$. Sea $\alpha(R/P)$ la fórmula $\vee x(\gamma_1 \vee Rxb_2 \ldots b_n)$; supongamos que en γ_1 no ocurre x; entonces esta fórmula es equivalente a $\gamma_1 \vee \vee xRxb_2 \ldots b_n$.

Supongamos que $\alpha(R/P)_{\mathfrak{I}} = 1$ y $\gamma_{1\mathfrak{I}} = 0$ -es decir el valor 1 de $\alpha(R/P)$ depende de $\mathfrak{I}(R)$-; entonces, la fórmula correspondiente al conjunto adecuado será

$$\vee y(\neg\gamma_1 \wedge \langle x_1,\ldots,x_n\rangle = \langle y,b_2,\ldots,b_n\rangle)$$

puesto que $\mathfrak{I}(\vee y(\neg\gamma_1 \wedge \langle x_1,\ldots,x_n\rangle = \langle y,b_2,\ldots,b_n\rangle)(x_1 \ldots x_n))$ es $\mathfrak{I}(\vee y(\langle x_1,\ldots,x_n\rangle = \langle y,b_2,\ldots,b_n\rangle)(x_1 \ldots x_n))$; es decir, la unión de todos los conjuntos

$$\{\langle \mathfrak{I}_i(a),\mathfrak{I}(b_2),\ldots,\mathfrak{I}(b_n)\rangle\},$$

donde $\mathfrak{I}_i \underset{a}{=} \mathfrak{I}$, e $\mathfrak{I}_1(a)$, $\mathfrak{I}_2(a)$, ... son todos los elementos del dominio de la interpretación.

Si, por el contrario, $\alpha(R/P)_{\mathfrak{I}} = 0$, entonces la fórmula correspondiente al conjunto adecuado será $\wedge y(\neg\gamma_1 \rightarrow \langle x_1,\ldots,x_n\rangle \neq \langle y,b_2,\ldots,b_n\rangle)$, que es exactamente la negación de la anterior, por lo que se verifica que $\mathfrak{I}((\wedge y(\neg\gamma_1 \rightarrow \langle x_1,\ldots,x_n\rangle \neq \langle y,b_2,\ldots,b_n\rangle)(x_1 \ldots x_n))$ es el conjunto $\mathfrak{I}((\wedge y(\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \neq \langle y,b_2,\ldots,b_n\rangle))(x_1...x_n))$.

En caso de que la x de $\alpha(R/P)$ ocurra también en γ_1; entonces, si, como antes, para cada $\mathfrak{I}'$ tal que $\mathfrak{I}' \underset{a}{=} \mathfrak{I}$, $\gamma_1(a/x) \vee Ra,b_2,\ldots,b_n$ es válida bajo $\mathfrak{I}'$, la fórmula correspondiente al conjunto adecuado será

$$\vee y(\neg\gamma_1(y/x) \wedge \langle x_1,\ldots,x_n\rangle = \langle y,b_2,\ldots,b_n\rangle),$$

por lo que ya no se verifica que

$$\mathfrak{I}((\vee y(\neg\gamma_1(y/x) \wedge \langle x_1,\ldots,x_n\rangle = \langle y,b_2,\ldots,b_n\rangle)(x_1...x_n))$$

sea el mismo conjunto que

$$\mathfrak{I}(\vee y(\langle x_1,\ldots,x_n\rangle = \langle y,b_2,\ldots,b_n\rangle)(x_1...x_n));$$

sino que se trata de la unión de todos los conjuntos

$$\mathfrak{I}'(\langle x_1,\ldots,x_n\rangle = \langle a,b_2,\ldots,b_n\rangle)(x_1...x_n))$$

tales que $\neg\gamma_1(a/x)_{\mathfrak{I}} = 1$. De la misma manera, si $\alpha(R/P)$, con x en γ_1, vale 0, la fórmula correspondiente al conjunto adecuado es $\wedge y(\neg\gamma_1(y/x) \rightarrow \langle x_1,\ldots,x_n\rangle \neq \langle y,b_2,\ldots,b_n\rangle)$, que es la negación de la precedente.

Antes de terminar refiriéndonos al conjunto adecuado pa rala fórmula $\vee x(\gamma_1 \vee Rx,b_2,\ldots,b_n)$ cuando vale 1 bajo $\mathfrak{I}$, pero para alguna $\mathfrak{I}'$ tal que $\mathfrak{I}' \underset{a}{=} \mathfrak{I}$,

$$(\gamma_1(a/x) \vee Ra,b_2,\ldots,b_n))_{\mathfrak{I}'} = 0,$$

consideremos los casos siguientes:

Sea $\alpha(R/P)$ como anteriormente, pero n = 3. Sea $\alpha(R/P)$, en concreto, la fórmula $\vee x(\gamma_1 \vee Rxb_2...b_n \vee Rc_1...c_{n-1}x)$. Supongamos que $\alpha(R/P)_{\mathfrak{I}} = 0$, o

$$\wedge x(\gamma_1 \vee Rxb_2...b_n \vee Rc_1...c_{n-1}x)_{\mathfrak{I}} = 1,$$

y que en el segundo caso, para cada $\mathfrak{I}'$ tal que $\mathfrak{I}' \underset{a}{=} \mathfrak{I}$ y $\gamma_1(a/x)_{\mathfrak{I}'} = 0$, entonces $Rab_2...b_{n\mathfrak{I}'} = 1$ y $Rc_1...c_{n-1}a_{\mathfrak{I}'} = 1$.

En el segundo de los casos, la fórmula correspondiente al conjunto adecuado será

$$\vee y(\gamma_1(y/x) \wedge (\langle x_1,...,x_n\rangle = \langle y,b_2,...,b_n\rangle \vee$$
$$\vee \langle x_1,...,x_n\rangle = \langle c_1,...,c_{n-1},y\rangle)),$$

y en el primer caso, justamente su negación. Es decir, en el segundo caso, el conjunto adecuado será la unión de los conjuntos adecuados

$$\Delta(Rab_2,...b_n,\ R,\ \mathfrak{I}') \text{ y } \Delta(Rc_1...c_{n-1}a,\ R,\ \mathfrak{I}'),$$

siempre que haya alguna $\mathfrak{I}'$ tal que $\mathfrak{I}' \underset{a}{=} \mathfrak{I}$ y $\gamma_1(a/x)_{\mathfrak{I}'} = 0$, y en el primero será la intersección de los complementos de los mismos conjuntos.

Existe todavía, siempre en el supuesto de que $\alpha(R/P)$ es $\vee x(\gamma_1 \vee Rxb_2...b_n \vee Rc_1...c_{n-1}x)$ y que su valor bajo $\mathfrak{I}$ sea el mismo que el valor de la fórmula

$$\wedge x(\gamma_1 \vee Rxb_2...b_n \vee Rc_1...c_{n-1}x),$$

un tercer caso. Consideremos que hay al menos una $\mathfrak{I}'$ tal que $\mathfrak{I}' \underset{a}{=} \mathfrak{I}$ y $\gamma_1(a/x)_{\mathfrak{I}'} = 0$, $Rab_2...b_{n\mathfrak{I}'} = 1$ y $Rc_1...c_{n-1}a_{\mathfrak{I}'} = 0$, o, manteniendo el valor de $\gamma_1(a/x)$, cambiando los valores de la primera y de la segunda de las fórmulas con R, entonces, la fórmula correspondiente al conjunto adecuado será

$$\vee y(\zeta(y/x) \wedge (\neg\gamma_1(y/x) \wedge \langle x_1,...,x_n\rangle = \langle y,b_2,...,b_n\rangle) \wedge$$
$$\wedge (\neg\gamma_1(y/x) \rightarrow \langle x_1,...,x_n\rangle \neq \langle c_1,...,c_{n-1},y\rangle)),$$

que determina en $\mathbf{D}_n$ el mismo conjunto que

$$\bigvee y(\zeta(y/x) \wedge (\neg\gamma_1(y/x) \wedge \langle x_1,\dots,x_n\rangle = \langle y,b_2,\dots,b_n\rangle)),$$

en donde $\zeta(a/x)$ es la situación de orden para la fórmula

$$(\gamma_1(a/x) \vee Ra,b_2,\dots,b_n \vee Rc_1,\dots,c_{n-1},a)$$

y la interpretación $\mathfrak{I}'$ tal que $\mathfrak{I}' \underset{a}{=} \mathfrak{I}$ y $\gamma_1(a/x)_{\mathfrak{I}'} = 0$, y

$$Rab_2\dots b_{n\,\mathfrak{I}'} = 1 \text{ y } Rc_1\dots c_{n-1}a_{\mathfrak{I}'} = 0,$$

o inversamente; o la fórmula

$$\bigwedge y(\zeta(y/x) \wedge ((\neg\gamma_1(y/x) \wedge \langle x_1,\dots,x_n\rangle = \langle y,b_2,\dots,b_n\rangle) \vee$$
$$\vee (\neg\gamma_1(y/x) \to \langle x_1,\dots,x_n\rangle \neq \langle c_1,\dots,c_{n-1},y\rangle))),$$

que determina el mismo conjunto que

$$\bigwedge y(\zeta(y/x) \wedge \neg\gamma_1(y/x) \to \langle x_1,\dots,x_n\rangle = \langle y,b_2,\dots,b_n\rangle),$$

y además,

$$\mathfrak{I}(\bigvee y(\zeta(y/x) \wedge (\neg\gamma_1(y/x) \wedge \langle x_1,\dots,x_n\rangle = \langle y,b_2,\dots,b_n\rangle) \wedge$$
$$\wedge (\neg\gamma_1(y/x) \to \langle x_1,\dots,x_n\rangle \neq \langle c_1,\dots,c_{n-1},y\rangle))(x_1 \dots x_n)) =$$
$$= \mathfrak{I}(\bigvee y(\zeta(y/x) \wedge (\neg\gamma_1(y/x) \wedge \langle x_1,\dots,x_n\rangle = \langle y,b_2,\dots,b_n\rangle) \wedge$$
$$\wedge \langle x_1,\dots,x_n\rangle \neq \langle c_1,\dots,c_{n-1},y\rangle)), \text{ e}$$

$$\mathfrak{I}(\bigwedge y(\zeta(y/x) \wedge ((\neg\gamma_1(y/x) \wedge \langle x_1,\dots,x_n\rangle = \langle y,b_2,\dots,b_n\rangle) \vee$$
$$\vee (\neg\gamma_1(y/x) \to \langle x_1,\dots,x_n\rangle \neq \langle c_1,\dots,c_{n-1},y\rangle)))(x_1 \dots x_n)) =$$
$$= \mathfrak{I}(\bigwedge y(\zeta(y/x) \wedge \neg\gamma_1(y/x) \to ((\langle x_1,\dots,x_n\rangle = \langle y,b_2,\dots,b_n\rangle) \vee$$
$$\vee \langle x_1,\dots,x_n\rangle \neq \langle c_1,\dots,c_{n-1},y\rangle))).$$

La situación de orden ζ se hace aquí imprescindible, pues determina aún más las condiciones de generalización de a en $Rab_1\dots b_n$ o en $Rc_1\dots c_{n-1}a$, de modo que no exige bajo la condición $\neg\gamma_1(a/x)$ que sea siempre

$$Rab_1\dots b_{n\,\mathfrak{I}'} = 1 \text{ o } Rc_1\dots c_{n-1}a_{\mathfrak{I}'} = 1,$$

sino uno u otro según sea $\zeta(a/x)_{\mathfrak{I}'} = 1$ o $\zeta(a/x)_{\mathfrak{I}'} = 0$.

Por último la situación de orden es necesaria en el siguiente caso, que para simplificar será otra vez el de la fórmula $\alpha(R/P)$ de la forma $\bigvee x(\gamma_1 \vee Rxb_2...b_n)$ cuando exista al menos una $\mathfrak{I}'$ tal que $\mathfrak{I}' \underset{a}{=} \mathfrak{I}$ y

$$(\gamma_1(a/x) \vee Rab_2...b_n)_{\mathfrak{I}'} = 1,$$

y una $\mathfrak{I}''$ tal que $\mathfrak{I}'' \underset{a}{=} \mathfrak{I}$ y $(\gamma_1(a/x) \vee Rab_2...b_n)_{\mathfrak{I}'} = 0.$

En este caso la fórmula correspondiente al conjunto adecuado será

$$\bigvee y(\zeta(y/x) \wedge \neg\gamma_1(y/x) \wedge \langle x_1,...,x_n\rangle = \langle y,b_2,...,b_n\rangle \wedge$$
$$\wedge \bigwedge z(\zeta(z/x) \wedge \gamma_1(z/x) \rightarrow (z = y \vee \mathcal{A}yz))),$$

en donde ζ es la situación de orden, como antes, y $\mathcal{A}$ es un relator tal que $\mathfrak{I}(\mathcal{A})$ es la relación de orden de $\mathfrak{I}$.

Y en el caso de la fórmula, $\bigvee x(\gamma_1 \vee \neg Rxb_2...b_n)$, en donde también existe $\mathfrak{I}'$ tal que $\mathfrak{I}' \underset{a}{=} \mathfrak{I}$ y

$$(\gamma_1(a/x) \vee \neg Rab_2...b_n))_{\mathfrak{I}'} = 1,$$

pero esto no se verifica para toda $\mathfrak{I}'$, la fórmula correspondiente al conjunto adecuado será

$$\bigwedge y(\zeta(y/x) \wedge \neg\gamma_1(y/x) \wedge \langle x_1,...,x_n\rangle \neq \langle y,b_2,...,b_n\rangle \rightarrow$$
$$\rightarrow \bigvee z(\zeta(z/x) \wedge \gamma_1(z/x) \wedge (z \neq y \wedge \neg\mathcal{A}yz))),$$

que es justamente equivalente a la negación de la anterior.

A P E N D I C E

1.-SISTEMA DE HILBERT-ACKERMANN.

Calculo restringido de predicados.

Definen el conjunto de las fórmulas mediante las siguientes reglas de formación:

1.-Las variables proposicionales son fórmulas.

2.-Las variables de predicado n-ádicas, tras las que se encuentran n variables individuales, son fórmulas.

Las fórmulas formadas según estas dos reglas reciben el nombre de *fórmulas primarias*: las variables individuales que aparecen en ellas están libres.

3.-Si α es una fórmula, tambien $\neg\alpha$ es una fórmula. Las variables individuales que aparecen en $\neg\alpha$ están libres o ligadas, según aparezcan en α.

4.-Si α y β son fórmulas de tal tipo que la misma variable individual no aparezca en una forma libre y en la otra forma ligada, también son fórmulas: $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ y $\alpha \leftrightarrow \beta$. Cada variable aparece en estas expresiones en forma libre o ligada, según ocurra en las fórmulas α y β.

5.-Si α es una fórmula en la que aparezca libre la variable individual "x", $\wedge x\alpha$ y $\vee x\alpha$ tambien son fórmulas.

El sistema de cálculo consta de las siguientes *fórmulas elementales*: Todas las fórmulas de la forma $\alpha_1 \vee ... \vee \alpha_n$ en la cual se cumpla lo siguiente,

i) toda α_i será una fórmula primaria, o una fórmula primaria negada, o tendrá la forma $\vee x\beta$;

ii) existen $i,k \leq n$, tales que α_i sea una fórmula primaria y α_k sea $\neg\alpha_i$. Además, se tienen las siguientes *reglas de deducción*[1]:

(a) $$\frac{\alpha \vee \beta \vee \gamma}{\alpha \vee \neg\neg\beta \vee \gamma}$$

En esta regla pueden faltar α o γ o ambas. En caso de que aparezca γ no ha de contener ninguna subfórmula de la forma $\neg\neg\eta$, $\neg(\eta \vee \varphi)$ o $\neg\vee x\eta$.

(b) $$\frac{\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma \qquad \alpha \vee \neg\eta \vee \gamma}{\alpha \vee \neg(\beta \vee \eta) \vee \gamma}$$

[1]La barra horizontal separa las premisas de la conclusión. Cuando hay más de una premisa, éstas aparecen sobre dicha línea separadas.

Se han de cumplir las mismas condiciones que en (a) en cuanto a α y γ; además η no ha de ser una disyunción.

(c) $$\frac{\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma}{\alpha \vee \neg\bigvee x\beta \vee \gamma}$$

β es una fórmula con x libre; α y γ (que pueden no aparecer) no contienen x libre, estando sometidas a las mismas condiciones que en (a).

(d) $$\frac{\alpha \vee \bigvee x\beta \vee \beta(y/x) \vee \gamma}{\alpha \vee \bigvee x\beta \vee \gamma}$$

β es cualquier fórmula en la cual x ocurre libre; α y γ se someten a las mismas condiciones que en (a), teniendo además la misma configuración; en la conclusión no debe ocurrir variable libre alguna.

Calculo generalizado de predicados.

La ampliación al "cálculo generalizado de predicados", esquemáticamente, consiste en aplicar los signos $\bigvee$ y $\bigwedge$ a variables predicativas y modificar adecuadamente las reglas de definición de fórmulas y las reglas del cálculo restringido. En cuanto a las fórmulas, valen las cláusulas que las definen, teniendo en cuenta que en 3), 4) y 5) no se hacen las estipulaciones respecto de "variables individuales", sino de variables individuales o predicativas.

Se consideran ahora fórmulas elementales las mismas reseñadas para el cálculo restringido, añadiendo las de la forma $\bigvee F\alpha$, donde F representa una variable predicativa de cualquier aridad. Las reglas de deducción (a) y (b) permanecen invariables; (c) es la misma, aunque las variables pueden ser tambien predicativas; (d), además de la forma anterior, presenta la siguiente generalización cuando se trate con variables de predicado:

$$\frac{\alpha \vee \bigvee F\beta \vee \beta(\eta/Fx_1...x_n) \vee \gamma}{\alpha \vee \bigvee F\beta \vee \gamma}$$

teniendo en cuenta que en β la variable predicativa n-ádica F, siendo $n \geq 1$, ocurre libre; en cuanto a α y γ han de cumplir las mismas condiciones que las expresadas anteriormente.

Por otra parte, tambien consideran fórmulas elementales las correspondientes a los esquemas i) y ii) expresadas en la exposición de § 16:

i) $\bigwedge x_1...x_n \bigvee y\alpha \rightarrow \bigvee F[\bigwedge x_1...x_n \bigvee y(Fx_1...x_n y \wedge \alpha) \wedge$

$\wedge \bigwedge c_1...x_n yz(Fx_1...x_n y \rightarrow Fx_1...x_n z \rightarrow y = z)]$,

ii) $\bigwedge x \bigvee F\alpha \rightarrow \bigvee G \bigwedge x\beta$,

teniendo en cuenta en cada caso las estipulaciones dadas en dicho parágrafo.

A partir de esta generalización, Hilbert y Ackermann proceden a la ampliación a un cálculo de niveles. A este respecto, la definición de fórmula se establece de manera similar al cálculo generalizado, siendo específica del de niveles la cláusula siguiente: Una variable predicativa de tipo $(a_1, \ldots, a_n)$ seguida de variables de tipos $a_1, \ldots a_n$, es una fórmula. Las restantes cláusulas se mantienen y siempre que se hable de variables, se trata de variables de cualquier tipo. En el cálculo de niveles no hay constantes.

El conjunto de las fórmulas elementales se amplía para dar cabida a fórmulas de configuración igual a las establecidas en el cálculo generalizado, con idependencia de que las variables sean de cualquier tipo. No se incluyen las correspondientes a los esquemas i) y ii), pero se considera elemental una fórmula instancia del siguiente esquema:

$\bigwedge A \bigvee B \alpha \rightarrow \bigvee F[\bigwedge A \bigvee B(F(A,B) \wedge \alpha) \wedge \bigwedge ABC(F(A,B) \wedge F(A,C) \rightarrow B = C)]$,

teniendo en cuenta que A y B son variables de tipo a y b, respectivamente, que ocurren libres en α; F es una variable de tipo (a, b); la notación "$B = C$" es una abreviatura de la fórmula $\bigwedge G(G(B) \rightarrow G(C))$, siendo G una variable de tipo (b) si B y C son de tipo b.

Así mismo, son fórmulas elementales las de la forma:

$$\bigwedge A_1 \ldots A_n[F(A_1 \ldots A_n) \leftrightarrow G(A_1 \ldots A_n)] \rightarrow [\Omega(F) \rightarrow \Omega(G)],$$

teniendo en cuenta que $A_1, \ldots, A_n$ son variables de tipo $a_1, \ldots, a_n$, respectivamente; F y G son variables de tipo $(a_1, \ldots, a_n)$ y Ω es una variable de tipo $((a_1, \ldots, a_n))$. Hilbert y Ackermann advierten que éstas son las fórmulas elementales de la extensionalidad.

En cuanto a las reglas de deducción, éstas se adaptan para poder ser aplicadas a las fórmulas de nuevas características. Se añade una nueva regla, cuya configuración es como la de la tradicional de *modus ponens*:

(e) $$\frac{\alpha, \quad \neg\alpha \vee \beta}{\beta}$$

Aparece el uso de λ-*operador*, teniendo en cuenta que si $\mathfrak{A}(A_1,\ldots,A_n)$, para $n \geq 1$, es una fórmula en la cual ocurren libres las variables A_1, ..., A_n, cuyos tipos son, respectivamente, a_1, ..., a_n, $\lambda A_1 \ldots A_n(\mathfrak{A}(A_1,\ldots,A_n))$ es un signo predicativo de tipo $(a_1,\ldots,a_n)$.

2.-SISTEMA DE CHURCH.

El sistema de cálculo de segundo orden de Church es una ampliación del cálculo de primer orden, aplicando la cuantificación a variables predicativas. Por otra parte, en el lenguaje cuenta con variables proposicionales, las cuales también pueden aparecer como sufijos de los cuantificadores.

El conjunto de las fórmulas se define mediante las siguientes reglas:

i) Una variable proposicional es una fórmula.

ii) Si P es una variable o constante predicativa n-ádica, para $n \geq 1$, y $x_1, \ldots, x_n$ son variables o constantes individuales -no necesariamente distintas-, entonces $Px_1 \ldots x_n$ es una fórmula.

iii) Si α es una fórmula, $\neg\alpha$ es una fórmula.

iv) Si α y β son fórmulas, $\alpha \rightarrow \beta$ es una fórmula.

v) Si α es una fórmula y *s* es una variable -individual, predicativa, o proposicional-, $\wedge s\alpha$ es una fórmula.

Por otra parte, una fórmula que contenga n variables libres se denomina *forma n-aria*, para todo $n \geq 1$, mientras que si una fórmula carece de variables libres se dirá que está *cerrada*. Todas las fórmulas son *formas proposicionales* y todas las fórmulas cerradas, *sentencias*.

Las operaciones de sustitución usadas por Church son varias: de variable individual por término, de variable predicativa por signo predicativo, de variable predicativa por fórmula, etc., y en cada caso utiliza una notación diferente; ello no es necesario en el presente resumen, bastando con los signos usados en nuestro § 13.

El cálculo consta de una serie de axiomas (esquemas) y reglas de inferencia, además de algunas definiciones, según la siguiente relación:

Axiomas:

1º) $\mathbf{p} \to (\mathbf{q} \to \mathbf{p})$,

2º) $(\mathbf{s} \to (\mathbf{p} \to \mathbf{q})) \to ((\mathbf{s} \to \mathbf{p}) \to (\mathbf{s} \to \mathbf{q}))$,

3º) $(\neg\mathbf{p} \to \neg\mathbf{q}) \to (\mathbf{q} \to \mathbf{p})$,

4º) (a) $\wedge x(\mathbf{p} \to Fx) \to (\mathbf{p} \to \wedge x Fx)$,

(b) $\wedge \mathbf{p}(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \wedge \mathbf{p}\beta)$, -**p** no ocurre libre en α-,

(c) $\wedge \textsc{p}(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \wedge \textsc{p}\beta)$, -$\textsc{p}$ no ocurre libre en α-,

5º) (a) $\wedge x Fx \to Fy$,

(b) $\wedge \mathbf{p}\alpha \to \alpha(\beta/\mathbf{p})$,

(c) $\wedge \textsc{p}\alpha \to \alpha(\beta/Px_1,\ldots,x_n)$.

En estas expresiones, **s**, **p** y **q** son signos proposicionales, $\textsc{p}$ -o P-, y F son signos predicativos, de aridad $n \geq 1$ y 1, respectivamente, y α y β son fórmulas cualesquiera.

Reglas:

R.1) *Modus ponens*,

R.2) *Generalización*. De α, si s es una variable de cualquier tipo, se infiere $\wedge s\alpha$, R.3) *Cambio de variable individual ligada*. De α, si x es una variable individual que no ocurre libre en η y z es una variable individual que no ocurre en η, si β resulta de α al sustituir una ocurrencia particular de η en α por $\eta(z\overset{*}{/}x)$, se infiere β[2].

R.4) *Regla de sustitución para variables individuales*. De α, si x es una variable individual, si y es un término y x está libre para y en α, se infiere $\alpha(y/x)$.

Aparecen una serie definiciones para establecer el uso de determinados signos que no aparecen en las expresiones reseñadas, como, por ejemplo, la definición D.14) $\vee s\alpha \rightarrow \neg\wedge s\neg\alpha$, o D.15) $[\alpha \rightarrow_{x_1,x_2 \ldots x_n} \beta] \rightarrow \wedge x_1x_2...x_n(\alpha \rightarrow \beta)$, donde aparece una sucesión de variables como subíndices de un implicador, que habiendo sido usadas por Church en la exposición de la semántica, tienen este sentido en el cálculo[3].

Son específicas del cálculo de segundo orden las dos definiciones siguientes:

1ª) $\mathbf{f} \rightarrow \wedge p(p)$,

---

[2]En este caso, $\eta(z\overset{*}{/}x)$ denota la fórmula resultante de sustituir en η la ocurrencia ligada de x por z.

[3]A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, p. 44 y ss. y p. 171 y ss.

2ª) $\mathbf{t} \rightarrow \bigvee \mathbf{p}(\mathbf{p})$,

donde **f** y **t** son constantes proposicionales y **p** es una variable proposicional.

Para el sistema de cálculo con identidad, añade las definiciones siguientes:

a) $\mathbf{a} = \mathbf{b} \rightarrow F\mathbf{a} \rightarrow_{F} F\mathbf{b}$; es decir, $\mathbf{a} = \mathbf{b} \rightarrow \bigwedge_{F}(F\mathbf{a} \rightarrow F\mathbf{b})$;

b) $\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \rightarrow \bigvee_{F}(F\mathbf{a} \wedge \neg F\mathbf{b})$;

donde **a** y **b** son variables (o constantes) individuales.

B I B L I O G R A F I A

NOTA.

Acerca de la siguiente bibliografía hemos de advertir que se presenta ordenada alfabéticamente por autores, recurriendo así al procedimiento más sencillo para la posterior consulta. En cuanto a observaciones generales sobre el contenido, basta recordar algunas de las hechas en la introducción.

En relación con aspectos formales, hemos de decir que cada reseña comienza con el apellido del autor, cuyos caracteres aparecen en letra mayúscula, seguido de las iniciales del nombre. Distinguimos dos tipos de títulos, según se trate de libros o de artículos (los cuales formarán parte de un libro o de una revista). En los del primer grupo los títulos aparecen en cursiva; sigue, si procede, la indicación del traductor, editorial y año de edición. En los artículos, en cambio, el título estará entrecomillado; a continuación se expresa el título de la revista o el libro (en en que está incluido el artículo), seguido de los datos de identificación de la publicación; en cualquier caso queda omitida la cláusula "en", pues se sobreentiende y siempre se señalan las páginas, salvo error. En definitiva se ha recurrido a uno de los diversos procedimientos convencionales.

ANDERSON, J.M.
Natural Deduction. The Logical Basis of Axiom Systems. Wadworth, Belmont, 1.962

BALDWIN, J. T., SHELAH, S.
"Second-order quantifiers and the complexity of theories". *Notre Dame Journal of Formal Logic.* Vol. 26, núm. 3 (1.985) p. 229 y ss.

BALLARD, D.
"Independence in higher-order subclassical logic". *Notre Dame Journal of Formal Logic.* Vol. 26, núm. 4 (1.985), pp. 444-454.

BARENDREGT, H.
"Lambda Calculus and its models". *Logic Colloquium'82.* Amsterdam, North-Holland, 1.983, pp. 209-240.

BAR HILLEL, Y.(Ed.).
Mathematical Logic and the Foundations of Set Theory. Amsterdam, North-Holland, 1.977.

BARNES, D. W., MACK, J. M.
Una Introducción Algebraica a la Lógica Matemática. Trad. S. Xambó Descamps. Barcelona, EUNIBAR, 1.978.

BARON, M.E.
The Origins of the Infinitesimal Calculus Oxford, Pergamon, 1.969.

BARWISE, K. J.
"The Hanf number of second-order logic".*The Journal of Symbolic Logic.* Vol. 37, núm. 3 (1.972), pp. 588-594.

BELL, E. T.
The Development of Mathematics. New York, McGraw-Hill, 1.945

BELL, J. L., SLOMSON, A. B.
Models and Ultraproducts: An Introduction. Amsterdam, North-Holland, 1.969.

BENACERRAF, P. PUTNAM, H.
Philosophy of Mathematics. Oxford, Basil Blackwell, 1.964.

BERNAYS, P., FRAENKEL, A. A.
Axiomatic Set Theory. Amsterdam, North-Holland, 1.959.

BERNSTEIN, A. R.
"Non-Standard analysis". *Studies in Model Theory.*
Mathematical Association of America. Vol. 8 (1.973).

BETH, E. W.
The Foundations of Mathematics. A Study in the Philosophy of Science.
Amsterdam, North-Holland, 1.965 (2a. Ed.).

BETH, E. W.
Las Paradojas de la Lógica
Trad. Juan M. Morente. Valencia, Cuadernos Teorema, 1.978.

BETH, E. W.
Mathematical Thought.
Dordrecht, Reidel Publ. Co., 1.966.

BIRJUKOV, B. V.
Two Soviet Studies on Frege (Ed. I. Angelelli).
Dordrecht, Reidel, 1.964.

BOOLE, G.
An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities.
La Salle (Ill.), The Open Court Publ. C., 1.952.

BOOLOS, G.
"On second-order logic". *Journal of Philosophy.* Vol 72 (1.975), pp. 509-527.

BOOLOS, G. JEFFREY, R.
Computability and Logic.
Cambridge (Mass.), Cambridge University Press, 1.980.

BOURBAKI, N.
Elementos de Historia de las Matemáticas.
Versión española de Jesús Hernández. Madrid, Alianza Editorial, 1.976 (2a. Ed.).

BOYER, C. B.
Historia de la matemática.
Trad. M. Martínez Pérez. Madrid, Alianza Universidad Textos, 1.987 (2ª Edición).

BRILLOUIN, L.
Science and Information Theory.
New York, Academic Press, 1.962 (2a. Ed.).

BÜCHI, R., LANDWEBER, L. H.
"Definability in the monadic second-order theory of succesor". *The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 34 (1.969), pp.166-170.

BYERLY, R.
"Recursion theory and the lambda-calculus". *The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 47, núm. 1 (1.982), pp. 67-83.

CANTINI, A.
"On the relation betwen choice and comprehension principles in second order arithmetic".*The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 51, núm. 2 (1.986), pp. 360-373.

CARNAP, R.
Introduction to Symbolic Logic and its Applications.
Trans. W. H. Mayer and J. Wilkinson. New York, Dover Publ. Inc., 1.958.

CARRUCCIO, E.
Apppunti di Storia delle Matematiche, della Logica, della Metamatematica.
Bologna, Pitagora Ed., 1.977.

CAVAILLÉS, J.
Philosophie Mathématique.
París, E. Harmann, 1.962.

CAVAILLÉS, J.
Méthode Axiomatique et Formalisme.
Paris, E. Harmann, 1.981.

CELLUCI, C.
La Filosofia della Matematica.
Bari, Editore Laterza, 1.967.

CHANG, C. L., LEE, C. T.
Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving.
New York, Academic Press, 1.973.

CHANG, C L., KEISLER, H. J.
Model Theory.
Amsterdam, North-Holland, 1.973.

CHURCH, A.
Introduction to Mathematical Logic.
Princeton, Princeton University Press, 1.970 (6a. Reimp.).

COCHIARELLA, N. B.
"A second order logic of existence". *The Journal of Symbolic*

Logic. Vol. 34 (1.969), pp. 57-69.

COCHIARELLA, N. B.
"Two λ-extensions of the theory of homogeneous simple types as a second order logic". *Notre Dame Journal of Formal Logic*. Vol. 26, núm. 4 (1.985), pp. 307-407.

COCCHIARELLA, N. B.
"Frege, Russell and logicism". *Frege Synthesized. Essays on the Philosophical and Foundational Work of Gottlob Frege* (Ed. L. Haaparanta, J. Hintikka).
Dordrecht, Reidel Publ., 1.986, pp. 197-251.

COHEN, O. J.
Set Theory and the Continuum Hypothesis.
New York, Benjamin, 1.966.

CORCORAN, J.
"A semantic definition of definition".*The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 36 (1.971) pp. 366-367 (Abstracts).

CRAIG, W.
Logic in Algebraic Form.
Amsterdam, North-Holland, 1.974.

CURRIE, G.
"Continuity and change in Frege's philosophy of mathematics" *Frege Synthesized. Essays on the Philosophical and Foundational Work of Gottlob Frege* (Ed. L. Haaparanta, J. Hintikka).
Dordrecht, Reidel Publ., 1.986, pp. 345-373.

CURRY, H. B.
Foundations of Mathematical Logic.
New York, Dover, 1.977 (1a. Reimp.).

CURRY, H. B., FEYS, R.
Lógica Combinatoria.
Trad. Manuel Sacristán, Madrid, Ed. Tecnos, 1.967.

CUENA, J.
Lógica Informática.
Madrid, Alianza Editorial, 1.985.

CUENA, J. (y otros)
Inteligencia Artificial: Sistemas Expertos.
Madrid, Alianza Editorial, 1.985.

DAUBEN, J. W.
Gerog Cantor, his Mathematics and Philosophy of the

Infinite.
Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1.979.

DAVIDSON, D. HARMAN, G. (Ed.).
Semantics of Natural Language.
Dordrecht, Reidel, 1.972.

DAVIS, M.
Computability and Unsolvability.
New York, McGraw-Hill, 1.958.

DAVIS, M.
The Undecidable. Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions.
Hawlett (N. Y.), Raven Press, 1.965.

DEAÑO, A.
Las Concepciones de la Lógica.
Edición al cuidado de Javier Muguerza y Carlos Solís.
Madrid, Taurus, 1.980.

DIAZ ESTEVEZ, E.
El Teorema de Gödel.
Pamplona, E. U. N. S. A., 1.975.

DIAZ ESTEVEZ, E.
"Sobre la forma normal de la deducción". *Actas I Simposio Hispano-Mexicano de Filosofía.* Salamanca, Ediciones de la Universidad de Salamanca, 1.984.

DIAZ ESTEVEZ, E.
"El teorema de sustitución" *Themata.* Núm. 3 (1.986), pp. 19-32.

DIAZ ESTEVEZ. E.
"Conjuntos enumerables representativos de conjuntos no enumerables". *Colloquium 1.985-1.986.* Vol. 15 (1.987), pp. 51-66.

DIAZ ESTEVEZ, E.
"Lógica de segundo orden: El problema de la completud restringida". *Themata* (en prensa).

DIAZ ESTEVEZ, E.
"La lógica de segundo orden: los dos axiomas de Hilbert-Ackermann". *Ponencia Jornadas S. A. F.*, 1.989 (en prensa).

DOPPS, J.
Logiques Construites par une Méthode de *Déduction Naturelle.*
Lovain, E. Nanwelaerts, 1.962.

DOU, A.
Fundamentos de la Matemática.
Barcelona, Ed. Labor, 1.970.

DUMITRU. A.
History of Logic
Tumbridge Wells: Abacus, 1.977 (4 vols.)

ENDERTON, H. B.
A Mathematical Introduction to Logic.
New York, Academic Press, 1.972.

ENGELER, E.
"Combinatorial theorems for the construction of models". *The Theory of Models. Proceeding of the 1.963 International Symposium at Berkeley.*
Amsterdam, North-Holland, 1.978 (4a. Reimp.), pp. 77-88.

FERRATER MORA, J., LEBLANC, H.
Lógica Matemática.
México, Fondo de Cultura Económica, 1.973 (5a. Reimp.).

FEYS, R., FITCH, F. B.
Dictionary of Symbols of Mathematical Logic.
Amsterdam, North-Holland, 1.969.

FIELD, H.
Science without Numbers.
Princeton (N. J.), Princeton University Press, 1.980.

FITTIN, M. C.
Fundamentals of Generalized Recursion Theory.
Amsterdam, North-Holland, 1.981.

FLUM, J.
"Análisis no Standard". *Coloquio sobre lógica simbólica.*
Ed. Centro de Cálculo de la Universidad Complutense de Madrid (1.976), pp. 67-79.

FRAENKEL, A. A., BAR-HILLEL, Y.
Foundations of Set Theory.
Amsterdam, North-Holland, 1.973 (2a. Ed.).

FREGE, G.
Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.
Hildesheim, G. Olms, 1.964.

FREGE, G.

Die Grundlagen der Arithemetik.
Hildesheim, G. Olms, 1.962.

FREGE, G.
Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet.
Hildesheim, G. Olms, 1.962.(Versión en inglés M. Furth, University of California Press, 1.964).

FREGE, G.
Conceptografía. Los Fundamentos de la Aritmética. Otros Estudios Filosoóficos.
Versión de Hugo Padilla. México, U. N. A. M., 1.972.

FREGE, G.
Escritos lógico-semánticos.
Trad. Carlos L. Luis y Carlos Pereda. Madrid, Ed. Tecnos, 1.974.

FREGE, G.
Estudios sobre semántica.
Trad. Ulises Moulines. Barcelona, Ariel, 1.984.

GALVAN, S.
Teoria Formale dei Numeri Naturali.
Milano, Ed. Franco Angeli, 1.983.

GAUTHIER, Y.
Fondaments des Mathématiques: Introduction à une Philosophie Constructiviste.
Montréal, Université de Montréal.

GEACH, P.
"Cuantificación de segundo orden en Frege". *Teorema.* Valencia, 1.979.

GENTZEN, G.
The Collected Papers of Gerhard Gentzen
Ed. M. E. Szabo. Amsterdam, North-Holland, 1.969.

GENTZEN, G.
Recherches sur la deduction logique.
Trad. R. Feys et J. Ladriere, Paris, P. U. F., 1.955.

GILMORE, P. C.
"Natural deduction based set theories: A new resolution of the old paradoxes". *The Journal of Symbolic Logic.* Vol. 51, núm. 2 (1.986), pp. 393-411.

GÖDEL, K.
Obras Completas.

Trad. de Jesús Mosterín. Madrid, Alianza Universidad, 1.981.

GOLDFARB, A.
"Logic in the twenties: Nature of the Quantifier". *The Journal of Syimbolic Logic*, nº 3, vol. 44, 1.979. pp. 351-366.

GONZALEZ CARLOMAN, A.
Lenguaje Matemático. Algebra I.
Oviedo, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Oviedo, 1.976.

GRÄTZER, G.
Universal Algebra.
New York, Van Nostrand, 1.968.

GUILLIES, D. A.
Frege, Dedekind and Peano on the Foundations of Arithmetic.
Asserm, Gorcum, 1.982.

HAACK, S.
Filosofía de las Lógicas.
Trad. Amador Antón. Madrid, Ediciones Cátedra, S. A., 1.982.

HAMILTON, A. G.
Lógica para Matemáticos.
Trad. M. Rodríguez Artalejo, Madrid, Ed. Paraninfo, 1.981.

HASENJÄGER, G.
Conceptos y Problemas de la Lógica Moderna.
Trad. Manuel Sacristán, Barcelona, Ed. Labor, 1.968.

HATCHER, W. S.
Foundations of Mathematics.
Philadelphia, W. B. Saunders, 1.968.

HEIJENOORT, J. VAN (Ed.)
From Frege to Gödel.
Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1.967.

HENKIN, L.
"The Completeness of the First-Order Functional Calculus", y "Completeness in the Theory of Types". *The Philosophy of Mathematics* (Ed. by J. Hintikka), pp. 42-63.

HENKIN, L.
"Banishing the rule of substitution for functional variables". *The Journal of Symbolic Logic.* Vol. 18, nº 3, (1.953), pp.201-208.

HENKIN, L.
"Some notes on Nominalism". *The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 18 (1.953), pp. 19-29.

HENKIN, L.
"A generalization of the concept of ω-consistency". *The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 19, núm. 3 (1.954), pp. 183-196.

HENKIN, L.
"A generalization of the concept of ω-completeness". *The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 22, núm. 1 (1.957), pp. 1-14.

HERBRAND, J.
Ecrits Logiques.
Paris, P. U. F., 1.968.

HERMES, H.
Enumerability. Decidability. Computability.
Trans. G. T. Herman and O. Plassman. New York, Springer - Verlag, 1.969 (2a. Ed.).

HEYTING, A.
Intuicionism. An Introduction.
Amsterdam, North-Holland, 1.971.

HILBERT, D.
Grundlagen der Geometrie.
Stuttgart, Teubner, 1.962.

HILBERT, D., ACKERMAN, W.
Elementos de Lógica Teórica.
Trad. Vìctor Sánchez de Zabala, Madrid, Ed. Tecnos, 1.975.

HINTIKKA, J. (Ed.)
The Philosophy of Mathematics.
London, Oxford University Press, 1.969.

HORT, C., HORST, O.
"On nonstandard models in higher order logic". *The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 49, núm. 1 91.984), PP. 2o4-219.

HUGHES, G. E., LONDEY, D. G.
The Elements of Formal Logic.
London, Billing and Sons, 1.965.

HUNTER, G.
Metalógica. Introducción a la Metateoría de la Lógica Clásica de Primer Orden.

Trad. Rodolfo Fernández González. <madrid, Ed. Paraninfo, 1.981.

JECH, T.
Lectures in Set Theory.
Berlín, Springer-Verlag, 1.971.

JEFFREY, R. C.
Lógica Formal. Su alcance y sus límites.
Trad. Angel D'Ors. Pamplona, E. U. N. S. A., 1.986.

JENSEN, R. B.
"On the consistency of a slight modification of Quine's New Foundations". *Words and objections. Essays on the Work of W. V. Quine* (Ed. D. Davidson, J. Hintikka). Dordrecht, Reidel Publ., 1.975 (1ª edición revisada), pp. 278-291.

JEROSLAW, R. G.
"Redundancies in the Hilbert-Bernays Derivability Conditions for Gödel's Second Incompleteness Theorem". *The Journal of Symbolic Logic.* Vol. 48 (1.973), pp. 359-367.

JOHNSON, P. E.
A History of Set Theory.
Boston, Prindle, Weber and Schmidt, 1.972.

KALISH, D., MONTAGUE, R.
"On Tarski's Formalization of Predicate Logic with Identity". *Arch. für Math. Logik und Grundl,* nº 7, 1.965, pp. 61-79.

KARP, C. R.
"Finite-quantifier equivalence". *The Theory of Models. Proceedings of the 1.963 International Symposium at Berkeley.*
Amsterdam, North-Holland, 1.978 (4a. Reimp.), pp. 407-412.

KEISLER, H. J.
"Models with Tree Structures". *Proceedings of the Tarski Symposium.* American Mathematical Society, 1.974, pp. 331-348.

KEISLER, H. J.
Model Theory for Infinitary Logic.
Amsterdam, North-Hollanda, 1.971.

KEMENY, J. G.
"Models of logical systems". *The Journal of Symbolic Logic.* Vol. 13 (1.948), pp. 16-30

KENG, H. L.
Introduction to Number Theory.
Trans. Peter Shin. New York, Springer-Verlag, 1.982.

KITCHER, P.
The Nature of Mathematical Knowledge.
New York, Oxford University Press, 1.984.

KLEENE, S. C.
"On notation for ordinal numbers". *The Journal of Symbolic Logic.* Vol. 3, núm. 4 (1.938), pp. 150-155.

KLEENE, S. C.
Mathematical Logic.
New York, John Wiley, 1.967.

KLEENE, S. C.
Introducción a la Metamatemática.
Trad. Manuel Garrido. Madrid, Ed. Tecnos, 1.974.

KLEENE, S. C.
"Recursive Predicates and Quantifiers". *Transactions American Mathematical Society,* vol 53, nº 1, pp. 41-51.

KNEALE, W. Y M.
El Desarrollo de la Lógica.
Trad. Javier Muguerza. Madrid, Ed. Tecnos, 1.972.

KOLMOGOROV, A. N., ALEKSANDROV, A. D., LAURENTIEVE, M. A.
La Matemàtica: Su contenido, método y significado (3 vols.).
Trad. M. López Rodríguez. Madrid, Alianza Ed., 1.973.

KORFAGHE, R. S.
Lógica y Algoritmos. Con aplicaciones a las Ciencias de la Computación e Información.
Trad. Federico Velasco. México, Limusa-Wiley, 1.970.

KÖRNER, S.
Introducción a la Filosofía Matemática.
Trad. Carlos Gerhard. México, Siglo Ceintiuno Editores, S. A., 1.974 (4a. Ed.).

KREISEL, G., KRIVINE, J. L.
Elements of Mathematical Logic: Model Theory.
Amsterdam, North-Hollanda, 1.967.

KRYNICKI, M., LACHLAN, A. H.
"On the semantics of the Henkin quantifier". *The Journal of Symbolic Logic.* Vol 44, núm.2 (1.979), pp. 185-199.

KURATOWSKI, K.
Introducción a la teoría de conjuntos y a la topología.
Trad. R. Rodríguez Vidal. Barcelona, Ed. Vicens Vives, 1.966.

LADRIERE, J.
Limitaciones internas de los formalismos.
Trad. José Blasco. Madrid, Editorial Tecnos, 1.969.

LAITA, L. M.
Teoría de la computabilidad.
Sevilla, Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla, 1.985.

LAKATOS, I.
Matemáticas, Ciencia, Epistemología.
Trad. Diego Ribes. Madrid, Alianza Editorial, 1.981.

LAKATOS, I. (Ed.)
Problems in the Philosophy of Mathematics. Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science, London 1.965.
Amsterdam, North-Holland, 1.972.

LEHMAN, S.
"An interpretation of 'finite' modal first-order languages in classical second-order languages". *The Journal of Symbolic Logic.* Vol. 41, núm. 1 (1.976), pp. 337-340.

LORENTE, J. M.
Prueba automática de teorías.
Valencia, NAU Llibres, 1.982.

LORENZEN, P.
Lógica Formal.
Trad. Juan Ochoa. Madrid, Ed. Selecciones Científicas, 1.970.

LORENZEN, P.
Metamatemática.
Trad. Jacobo Muñoz. Madrid, Editorial Tecnos, 1.971.

LORIA, G.
Storia delle Matematiche.
Milano, Ulrico Hoepli, 1.982 (2a. Ed.)

LOVELAN, D. W.
Automated Theorem Proving: A logical basis.
Amsterdam, North-Holland, 1.978.

MAAS, W.
"Recursively enumerable generic sets". *The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 47, núm. 4 (1.982), pp. 809-823.

MACHOVER, M., HIRSCHFELD, J.
Lectures on Non-Standard Analysis. Lectures Notes in Mathematics.
New York, Springer, 1.969.

MANZANO, M.
Sistemas intermedios.
Madrid, Fundación Juan March (Serie Universitaria), 1.978.

MANZANO, M.
"Los sistemas generales". *Estudios de Lógica y Filosofía de la Ciencia*. Compilación Miguel A. Quintanilla. Salamanca, Ediciones de la Universidad de Salamanca, 1.982.

MANZANO, M.
"El nuevo traje del emperador: de cómo la sofisticada lógica modal no lucía más que modelos clásicos de primer orden". *Actas de I Simposio Hispano-Mexicano de Filosofía*. Salamanca, Ediciones de la Universidad de Salamanca, 1.984.

MANZANO, M.
Teoría de modelos.
Madrid, Alianza Universidad Textos, 1.989.

MARTIN, R. M.
Verdad y denotación.
Trad. Víctor Sánchez. Madrid, Ed. Tecnos, 1.971 (1a. Reimp.).

MARTIN, R. M.
Intention and Decision.
Englewood Cliffs (N. J.), Prentice Hall, 1.963.

MARTINEZ-FREIRE, P.
Introducción a la lógica formal.
Málaga, Agora, 1.985.

MASCAREÑO, J. (Ed.)
Fundamentos de Lógica y Matemática.
Madrid, Taller de Ediciones, 1.975.

MATES, B.
Lógica matemática elemental.
Trad. Carmen García Trevijano. Madrid, Ed. Tecnos, 1.971.

MINSKY, M. (Ed.)

Semantic Information Processing.
Cambridge (Mass.), The MIT Press, 1.983 (3a. Reimp.).

MONTAGUE, R.
"Reductions of higher-order logic". *The Theory of Models. Proceeding of the 1.963 International Symposium at Berkeley.*
Amsterdam, North-Holland, 1.978 (4a. Reimp.), pp. 251-264.

MOSTERIN, J.
Lógica de Primer Orden.
Barcelona, Ed. Ariel, 1.970.

MOSTERIN, J.
Teoría Axiomática de Conjuntos.
Barcelona, Ed. Ariel, 1.971.

MOSTERIN, J.
Un cálculo deductivo para la lógica de Segundo Orden.
Valencia, Cuadernos Teorema, 1.979.

MOSTOWSKI, A.
Sentences Undecidable in Formalized Arithmetic. An Exposition of the Theory of K. Gödel.
Amsterdam, North-Holland, 1.964.

MOSTOWSKI, A.
Thirty Years of Foundational Studies.
New York, Barnes-Noble, 1.966.

MOSTOWSKI, A (Ed. by K. Kuratowski),
Foundational Studies. Selected Works (2 vols.)
Amsterdam, North-Holland, 1.979.

NAGEL, E., NEWMAN, J. R.
El teorema de Gödel.
Trad. Adolfo Martín. Madrid, Ed. Tecnos, 1.979, reimpresión 1ª edición.

NILSSON, N. J.
Problem-Solving Methods in Artificial Intelligence.
New York, McGraw-Hill, 1.971.

PEANO, G.
Formulario Mathematico.
Roma, Ed. Cremonese, 1.960.

PEANO, G.
Los principios de la aritmética.
Trad. J. Velarde Lombraña. Oviedo, Pentalfa Ediciones, 1.979.

PEIRCE, C. S. (Ed. C. Harshorne, P. Weiss),
Collected Papers, vol. II, Elements of Logic.
Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1.960.

PIAGET, J. y otros.
Tratado de Lógica y Conocimiento Científico. Lógica.
Trad. Hugo Acevedo. Buenos Aires, Ed. Paidós, 1.979.

PLOTKIN, G. D.
"The λ-Calculus is ω-incomplete". *The Journal of Symbolic Logic.* Vol. 39, núm. 2 (1.974), pp. 313-317.

POINCARE, H.
Mathematics and Science. Last Essays.
Trans. J. Belduc. New York, Dover, 1.963.

POLYA, G.
La Découverte des Mathématiques.
Trad. M. Didier. Paris, Dunod, 1.967.

PRAWITZ, D.
"Hauptsatz for higher order logic". *The Journal of Symbolic Logic.* Vol. 33 (1.968), pp. 452-457.

PRAWITZ, D.
"Completeness and Haupsatz for second order logic". *Theoria.* Vol. 33 (1.967), pp. 246-258.

PUTNAM, H.
Mathematics, Matter and Method.
New York, Cambridge University Press, 1.980 (2a. Ed.).

PUTNAM, H.
"Models and reality". *The Journal of Symbolic Logic.* Vol. 45, núm. 3 (1.980), pp. 464-482.

QUINE, W. O.
Set Theory and its Logic.
Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1.969 (2a. Ed.).

QUINE, W. O.
Desde un puesto de vista lógico.
Tras. Manuel Sacristán. Barcelona, Ed. Ariel, 1.962.

QUINE, W. O.
Los métodos de la lógica.
Trad. Manuel Sacristán. Barcelona, Ed. Ariel, 1.962.

QUINE, W. O.
Lógica Matemática.
Trad. José Hierro. Madrid, Ed. Revista de Occidente, 1.972.

QUINE, W. O.
Filosofía de la lógica.
Trad. Manuel Sacristán. Madrid, Alianza Ed., 1.977 (2a. Ed.).

QUINTANILLA, M. A. (Compilador)
Estudios de lógica y filosofía de la ciencia.
Salamanca, Ediciones de la Universidad de Salamanca, 1.982.

RABIN, M. O.
"On recursively enumerable and arithmetic models of set theory". *The Journal of Symbolic Logic.* Vol. 23 (1.958), pp. 408-416.

RAMSEY, F. P.
Foundations.
(Ed. by D. H. Mellor), London, Kegan Paul, 1.978.

REICHENBACH, H.
Elements of Symbolic Logic.
New York, Free Press, 1.966.

ROBINSON, A.
Introduction to Model Theory and Metamathematics of Algebra.
Amsterdam, North-Holland, 1.974.

ROBINSON, A.
Non-Standard Analysis.
Amsterdam, North-Holland, 1.980 (Reimp.).

ROSSER, J. B.
"Extensions of some theorems of Gödel and Church". *The Journal of Symbolic Logic.* Vol. 1 (1.936), pp.87-91.

ROSSER, J. B, WANG, H.
"Non-standard models for formal logic". *The Journal of Symbolic Logic.* Vol. 15 (1.950), pp. 113-129.

RUSSELL, B.
Lógica y Conocimiento.
Compilación de R. Ch. Marsh. Versión española de Javier Muguerza. Madrid, Ed. Taurus, S. A., 1.966.

RUSSELL, B.
Introducción a la Filosofía de la Matemática (Obras completas vol. II).

Trad. José Barrio y otros. Madrid, Ad. Aguilar , 1.973.

RUSSELL, B.
Los Principios de la Matemática.
Trad. Juan C. Grimberg. Madrid, Espasa Calpe, 1.977.

SANMARTIN, J.
Una introducción constructiva a la teoría de modelos.
Madrid, Ed. Tecnos, 1.977.

SCOTT, J. F.
A History of Mathematics.
London, Taylor and Francis, 1.960.

SHAPIRO, S.
"Second-order Languages and mathematical practice". *The Journal of Symbolic Logic.* Vol. 50, núm.3 (1.985), pp. 714-742.

SHELAH, S.
"There are just four possible second order quantifier'. *Israel Journal of Mathematics.* Vol 43 (1.982), pp. 324-356.

SHOENFIEL, J. R.
Mathematical Logic.
Reading, Addison-Wesley, 1.967.

SMULLYAN, R. M.
"An unifying principle in quantification theory". *The Theory of Models. Proceeding of the 1.963 International Symposium at Berkeley.* Amsterdam, North-Holland, 1.978 (4a. Reimp.), pp. 433-434.

SMULLYAN, R. M.
"Languages in which self reference is possible". *The Journal of Symbolic Logic.* Vol. 22, núm. 1 (1.957), pp. 55-67.

SOLOVAY, R.
"Explicit Henkin sentences". *The Journal of Symbolic Logic.* Vol. 50, núm. 1 (1.985), pp. 91-93.

STAGLE, J. R.
Artificial Intelligence: The Heuristic Programming Approach.
New York, McGraw-Hill, 1.971.

STATMAN, R.
"Completeness, invariance and λ-definability". *The Journal of Symbolic Logic.* Vol. 47, núm. 1 (1.982), pp. 17-26.

STATMAN, R.

"Solving functional equations at higher types: some examples and some theorems". *Notre Dame Journal of Formal Logic*. Vol. 27, núm. 1 (1.986), pp. 66-75.

STOLL, R. R.
Set Theory and Logic.
London, Freeman, 1.963.

SUPPES, P.
Teoría Axiomática de Conjuntos.
Trad. Hernando Alfonso Castillo. Cali,Ed. Norma, 1.968.

TAIT, W.
"A nonconstructive proof of Gentzen's Hauptsatz for second order predicate logic". *Bulletin of the American Mathematical Society*. Vol. 72 (1.966), pp. 980-983.

TARSKI, A.
Logic, Semantics, Metamathematics.
Trans. J. H. Woodger, Oxford, Clarendon Press, 1.956.

TARSKI, A.
Introducción a la Lógica y a la Metodología de las Ciencias Deductivas.
Trad. T. R. Bachiller y J. R. Fuentes. Madrid, Espasa-Calpe, 1.968.

TARSKI, A.
Undecidable Theories.
Amsterdam, North-Holland, 1.971.

TURING, A. M., PUTNAM, H., DAVIDSON, D.
Mentes y máquinas.
Tras. M. Garrido, A. Antón y P. Navarro. Madrid, Ed. Tecnos, 1.985.

TURING, A. M.
¿Puede pensar una máquina?,
Trad. M. Garrido y A. Antón. Valencia, Cuadernos Teorema, 1.974.

VAN HEIJENOORT, J. (Ed.)
From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic.
Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1.967.

VEGA, L.
"La historia de la lógica como una historia por hacer". *Theoria 2a. época*. Vol. 3 (1.986), pp. 719-748.

VON NEUMAN, J.

"Teoría general y lógica de los dispositivos automáticos". *Sigma. El mundo de las Matemáticas*. Vol. 6. Trad. Miguel Muntaner, Barcelona, Ed. Grijalbo, 1.980 (8a. Ed.), pp. 8-35.

WAERDEN, B. L. Van Der,
A History of Algebra.
Berlin, Springer-Verlag, 1.980.

WANG, H.
From Mathematics to Philosophy.
London, Routledge an Kegan Paul, 1.974.

WANG, H.
A survey of Mathematical Logic.
New York, North-Holland, 1.964.

WEBB, J.
Mechanisme, Mentalism and Metamathematics.
Dordrecht, Reidel Publ. Co., 1.980.

WEIL, A.
Number Theory (An approach through history: From Hammurabi to Legendre).
Boston, Birkhäuser, 1.983.

WEIL, H.
Filosofía de las Matemáticas y de la Ciencia Natural.
Trad. Carlos Imaz. México. Centro de Estudios Filosóficos de la U. N. A. M., 1.965.

WHITEHEAD, A. D., RUSSELL, B
Rincipia Mathematica (3 vols.)
London, Cambridge University Press, 1.978 (3a. Ed.). (Versión española hasta *56, trad. J. M. Domínguez Rodríguez, Madrid, Ed. Paraninfo, 1.981).

WILDER, R.
Introduction to the Foundations of Mathematics.
New York, Wiley, 1.965.

WILDER, R.
"El método axiomático". *Sigma. El mundo de las Matemáticas*. Vol. 5. Trad. Manuel Sacristán, Barcelona, Ed. Grijalbo, 1.980 (8a. Ed.), pp. 35-56.

ZYCOV, A. A.
"The Spectrum problem in the extended predicate calculus". *American Mathematical Society Translations*. Vol. 3 (1.968), pp. 1-14.