JUEGOS CON PAGOS DIFUSOS

Memoria de Tesis Doctoral realizada por:
MOIRA CLEMENTE ALPRESA

bajo la dirección de:
Dr. Francisco Ramón Fernández García
Dr. Justo Puerto Albandoz

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA e INVESTIGACIÓN OPERATIVA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

A mi hijo...
... y a su padre.

Índice general

INTRODUCCIÓN

La Investigación Operativa tiene su razón de ser en la búsqueda de soluciones a problemas reales complejos, a través de equipos interdisciplinarios de científicos que se organizan para tal fin. Nunca se sabe quién puede aportar nuevas vías para la resolución de un problema, lo que es cierto es que un científico aislado no puede, generalmente, abordar el problema en su totalidad.

En el proceso de búsqueda de la solución de un problema, la matemática suele tener un papel importante ya que los científicos buscan la solución por medio de un modelo matemático. Por ello, en estos grupos frecuentemente hay un matemático que debe buscar las soluciones del modelo asociado al problema bajo estudio. Para llevar a cabo este cometido, que constituye una pequeña parcela del proceso general, frecuentemente deben desarrollar nuevos caminos en la matemática. Los investigadores operativos han participado en el desarrollo de estas líneas de trabajo matemático, tanto en nuevas teorías como en nuevas herramientas.

Durante muchos siglos la matemática ha buscado soluciones a modelos de muy diversas tipologías formulados mediante ecuaciones, que determinan relaciones entre elementos conocidos y desconocidos (en los inicios denominados *la cosa*), con objeto de establecer cuales de los elementos desconocidos verificaban dichas ecuaciones, y que usualmente eran únicos. De esta forma pudo ayudar a los científicos a predecir desde trayectorias de balas de cañón hasta órbitas de cometas, e incluso a encontrar nuevos planetas. Sólo en escasas ocasiones se estudiaron ecuaciones con múltiples soluciones, destacando alguna de ellas en base a la optimización de alguna función(objetivo). Así se han buscado áreas de mínimo perímetro, o volúmenes con mínima tensión superficial. Fue Dantzig quien introdujo de un modo general el concepto de función objetivo con la idea de escoger entre soluciones con determinadas propiedades. Este proceso se ha usado con gran profusión en muchas aplicaciones, que van desde los modelos de empaquetado y modelos de redes de distribución hasta modelos de asignación de tripulaciones en líneas aéreas.

Sin embargo, en muchas situaciones reales intervienen diferentes agentes, como en las situaciones sociales y económicas. Cada agente observa la situación de forma diferente, por lo que cada uno posee una distinta función objetivo, y posiblemente en conflicto entre ellas. Por este motivo, los conceptos clásicos de solución existentes no son aplicables a estos problemas. Los modelos matemáticos que estudian estas situaciones fueron introducidos a mediados del siglo XX, con el nombre de Teoría de Juegos, dando lugar a otros conceptos de solución conocidas como soluciones de equilibrio, con gran aplicabilidad en los fenómenos económicos.

En esta línea, se encuentran los estudios matemáticos que venimos desarrollando durante los últimos años los investigadores asociados a la presente memoria. Concretamente los relacionados a la Teoría de Juegos con pagos no necesariamente escalares.

El trabajo que presentamos en esta memoria entronca con los desarrollos matemáticos que se establecieron en varias tesis doctorales, y que han sido publicados en diversas revistas científicas, como puede comprobarse en la bibliografía del texto. Así podemos citar la tesis doctoral de la profesora Luisa Monroy (1996) titulada *Análisis de Juegos Bipersonales con Pagos Vectoriales* [66] relacionada con el capítulo cuatro de la memoria. Y las de la profesora María José Zafra (2000) titulada *Juegos Cooperativos Estocásticos* [102] y el profesor Miguel Angel Hinojosa (2000) titulada *Juegos Cooperativos Vectoriales con información adicional* [54], muy relacionadas con los capítulos dos y tres de la misma.

La investigación que hemos llevado a cabo versa sobre modelos de juegos cuyos pagos son difusos. En el análisis clásico, la teoría de juegos supone que los pagos recibidos por los jugadores y/o por las coaliciones son fijos y conocidos. Sin embargo, al modelar las situaciones reales frecuentemente no podemos hacer tal afirmación, ya que en muchos casos los pagos se establecen de manera imprecisa y aproximada.

En la vida real es muy común que los datos vengan dados de la siguiente forma: *para fabricar un producto P se requieren "unos dos minutos", y su precio en el mercado es "aproximadamente diez euros". Se desea que las ventas sean "sustancialmente mayores que 3.000 euros*". También nos encontramos con conceptos como el de "*mediana edad*" y lo comparamos con los de "*joven*" y "*tercera edad*". Supongamos que hemos llegado a la conclusión de que la mediana edad son los 45 años, sin embargo no podemos descartar a personas de 35 ó 55 años como de edad mediana. Por el contrario, los menores de 30 y los mayores de 60 tampoco se pueden considerar radicalmente como no de mediana edad.

Para estudiar este tipo de situaciones usamos los **números difusos**. El término difuso procede de la palabra inglesa "*fuzz*", que sirve para denominar la pelusa que recubre el cuerpo de los polluelos al poco de salir del huevo. Este término inglés significa "confuso, borroso, indefinido o desenfocado".

Desde que Lofti A. Zadeh creó, en la década de los años sesenta (en su trabajo "Fuzzy Sets"[98]), la Teoría de los Subconjuntos Difusos, esta se ha aplicado a un amplio campo de áreas científicas y tecnológicas. Su primer uso fue industrial, por ejemplo para el control de procesos en fábricas de cemento. Más tarde en 1987, se puso en servicio en Japón el primer metro controlado mediante Lógica Difusa, los controladores basados en esta lógica hicieron mucho más confortables los viajes en metro, gracias a las suaves frenadas y aceleraciones. La Lógica Difusa se incluyó en ascensores para reducir el tiempo de espera. A partir de 1990 se la comienza a implementar en los controles de inyección electrónica de carburante y en los sistemas de control automático de coches, haciendo los controles complejos más eficientes y fáciles de usar. En la NASA se trabaja en la implementación a un control difuso en las condiciones del espacio, una tarea extremadamente difícil para lógicas tradicionales. También existen lavadoras y aparatos de aire acondicionado difusos, los cuales ahorran mucha energía, ya que adaptan su funcionamiento al material, volumen y suciedad de la ropa, o a la presencia o no de personas en la habitación. Hay una interminable lista de aplicaciones de la Lógica Difusa. Nosotros la usaremos en la teoría de juegos.

Zadeh propone una herramienta matemática que permite describir y tratar la vaguedad y ambigüedad que aparecen en los complejos sistemas del mundo real definidos a partir de juicios humanos. La matemática de los subconjuntos difusos intenta mejorar la organización y desarrollo de nuestro pensamiento en situaciones con fronteras no nítidas, bien por tratarse de situaciones en las que juega un papel fundamental la incertidumbre (es posible obtener un beneficio de diez millones de euros), bien porque sean situaciones imprecisas (obtener un beneficio alto), bien por ser situaciones que implican a la vez imprecisión e incertidumbre (es muy posible obtener un beneficio muy alto). La Teoría de Subconjuntos Difusos constituye un intento de formular matemáticamente el mundo de la vaguedad inherente a los procesos mentales humanos, en base al cual se toman decisiones en la vida cotidiana.

En este trabajo vamos a considerar juegos en los que los pagos recibidos por los jugadores y/o por las coaliciones son números difusos. El análisis clásico de este tipo de juegos se puede ver como una particularización de este caso más general. Para poder comparar el valor de los distintos pagos podemos usar equivalencias determinísticas a través de funciones de utilidad, o bien usar "órdenes difusos". En el primer caso lo que se hace es reducir el problema a la comparación de números reales y en el segundo se usan órdenes parciales en el conjunto de los números difusos.

La mayor parte de la literatura escrita sobre el tema se limita al primero de los casos, es decir al uso de funciones de utilidad, con ello se asocia a cada número difuso un único número real, pero este hecho nos hace perder mucha información y además nos puede llevar a extraños casos de indiferencia, ya que podemos encontrar números difusos muy distintos entre si y todos ellos representados por un mismo número real. Sin embargo, aunque esto facilita mucho el trabajo desde el punto de vista matemático, supone una pérdida de información contenida en el número difuso, ya que representamos cada número difuso por un solo número real. Nosotros nos centraremos en el segundo caso, usaremos órdenes en el conjunto de los números difusos para conservar así toda la información posible procedente del juego. Sólo permitiremos que los jugadores decidan, en cada caso, el orden a emplear.

En el primer capítulo de este trabajo expondremos las familias de números difusos más usuales y la forma en la que realizar operaciones con dichos números. Se estudiará cómo comparar y ordenar números difusos. Esta cuestión alcanza una gran relevancia, ya que necesitamos órdenes que conserven la mayor información posible a cerca de los números difusos comparados. Los diversos enfoques con los que se puede plantear el problema han dado lugar a un amplio número de métodos que permiten realizar la mencionada comparación. Hemos seleccionado aquellos que nos parecían más apropiados para nuestro trabajo, debido a que perdían la menor información posible a cerca del número difuso. Primero tratamos algunos órdenes parciales generales, y posteriormente nos centramos en un orden difuso al que llamaremos estándar, usado por González y Vila [47][48]. Este orden difuso nos da una relación de indiferencia más rica, ya que los números considerados indiferentes o iguales según este orden son muy parecidos entre sí, y cuanto mayor sea la similitud entre números difusos indiferentes mejor será dicho orden difuso, debido a que se perderá menos información. Por último estudiaremos algunos órdenes difusos concretos. A diferencia del caso escalar, los órdenes difusos son órdenes parciales, no totales. Este hecho hace más complejo el estudio de los juegos difusos.

En este capítulo también se estudiarán algunos conceptos y propiedades sobre los números difusos que nos serán útiles en capítulos posteriores. Recogeremos en una tabla un resumen con las distintas familias de números difusos y los distintos órdenes que iremos usando a lo largo de esta memoria, incluyendo también la nomenclatura que utilizaremos para denotarlos y la página en la que están definidos.

El segundo capítulo está dedicado a los juegos cooperativos con pagos difusos. El uso órdenes difusos nos lleva a introducir dos diferentes nociones de core (core de preferencia y core de dominancia). Caracterizaremos los dos tipos de core y daremos condiciones que nos aseguren que no son vacíos. Además, se estudiarán las relaciones existentes entre dichos cores y el core de los juegos inducidos a través de funciones de utilidad.

Posteriormente nos centramos en el core definido por una función de orden estándar. Este core se podrá expresar como intersección de varios conjuntos (similares a cores escalares), y esta propiedad nos lleva a conocer bajo que condiciones el core de preferencia es vacío. Calculamos el core para algunas familias de números difusos y para algunos órdenes difusos de los más habituales. Dado de que existe casos en el core de preferencia es vacío y el core de dominancia es demasiado grande, para estudiar estos problemas surge el concepto de ε-core que también será estudiado en este capítulo.

Siguiendo las ideas expuestas por Puerto, Fernández y Hinojosa [78], se generalizará el teorema de Shapley-Bondareva para obtener una condición necesaria y suficiente para que el core del juego difuso sea distinto de vacío.

Los juegos difusos aparecen en la literatura [2][14] enfocados desde otro punto de vista. Estos autores consideran que los pagos del juego no son difusos, sino escalares, y por el contrario considera difusas las coaliciones, es decir, los jugadores tienen la posibilidad de cooperar con una determinada coalición con diferentes niveles de participación, variando desde la no cooperación hasta la cooperación total. La recompensa obtenida dependerá de dichos niveles de cooperación. Veremos como es posible transformar este tipo de juegos con coaliciones difusas y pagos escalares en juegos con pagos difusos y coaliciones usuales y viceversa.

Actualmente, aparecen con mucha recurrencia en la literatura los juegos difusos intervalares, es decir, juegos difusos cuyos pagos vienen dados por una familia de números difusos concreta, los números difusos intervalares. Por ello, finalizaremos cada uno de los capítulos restantes haciendo una mención especial a este tipo de juegos. En este capítulo, estudiaremos el core de los juegos difusos cooperativos intervalares, y la relación existente entre los distintos tipos de cores según el orden difuso que utilicemos.

Es importante encontrar condiciones más sencillas bajo las que el core de un juego cooperativo difuso sea distinto de vacío. En el caso de los juegos escalares imponiendo la convexidad del juego conseguíamos tan deseada propiedad. En el capítulo tres extenderemos esta condición de convexidad a los juegos cooperativos difusos, con el fin de conseguir una condición similar.Para que un juego difuso sea convexo necesitamos que el orden verifique que al sumar y restar un mismo número difuso a otro número difuso, el número difuso obtenido sea equivalente al segundo número. Por ello en este capítulo nos limitaremos a usar un orden difuso estándar central, ya que estos órdenes cumplen la propiedad deseada. Comenzaremos viendo algunas características del core de los juegos difusos con un orden estándar central, a continuación nos centramos en los juegos convexos y en la importante condición que verifican los cores de estos juegos. Posteriormente estudiamos los juegos de bancarrota que son un caso de juegos convexos.

También estudiaremos en este capítulo otro concepto clásico de solución, el Valor de Shapley. Para este tipo de solución de un juego difuso se asocia una única clase de equivalencia de números difusos, es decir, un único número difusos y todos los equivalentes a él según el orden difuso usado. Este tipo de solución se usa alternativamente a las soluciones de tipo conjunto. Para el estudio del Valor de Shapley también impondremos que el orden difuso usado sea central.

Por último, haremos un estudio pormenorizado de los juegos cooperativos intervalares, el core, las condiciones de convexidad del juego y del valor de Shapley.

En el capítulo cuatro pasaremos a estudiar los juegos no cooperativos con pagos difusos.

Daremos varios tipos de solución al problema (equilibrios Pareto, equilibrios débilmente Pareto y equilibrios Pareto a la baja), estudiaremos las relaciones existentes entre ellas y condiciones para que existan dichos equilibrios.

Como caso especial nos centraremos en los juegos difusos finitos en los cuales está asegurada la existencia de equilibrios Pareto óptimos, y en particular estudiaremos los juegos difusos de suma nula. En estos juegos hay dos jugadores y el resultado de la elección de las estrategias para ambos jugadores es valorada por cada uno de forma opuesta al otro. Detallaremos el procedimiento de resolución de este tipo de juegos y comprobaremos que tal y como se hacía en los juegos bipersonales de suma nula escalares, la Programación Lineal Difusa se utiliza para resolver los juegos difusos bipersonales de suma nula, siempre que se considere el concepto de estrategia de seguridad Pareto-óptima como solución de los mismos.

Cuando el orden usado por los dos jugadores para comparar los números difusos sea el mismo, los problemas de programación lineal difusa que han de resolver los dos jugadores para obtener sus estrategias de seguridad Pareto-óptimas serán duales en un sentido difuso, no el sentido convencional, siendo siempre la solución del problema del jugador I menor que solución del problema del jugador II. Finalmente haremos un estudio de los juegos difusos de suma nula intervalares, dando una cota superior y una cota inferior de los pagos asociados a la solución del juego difuso fáciles de calcular.

Capítulo 1

Números y órdenes difusos

1.1. Números difusos y operaciones

Definición 1.1.1 *Dado un conjunto universal, denotado por χ, se define un **subconjunto difuso** $\tilde{A}$ sobre χ a través de la función*

$$\mu_{\tilde{A}} : \chi \to [0,1],$$

la cual asigna a cada elemento $x \in \chi$ un número real $\mu_{\tilde{A}}(x)$ en el intervalo $[0,1]$, donde el valor de $\mu_{\tilde{A}}(x)$ en x representa el grado de pertenencia (o de ser miembro) de x en $\tilde{A}$.

A la función $\mu_{\tilde{A}}$ se le llama **función miembro** de $\tilde{A}$, **función de pertenencia** de $\tilde{A}$ o **función característica** de $\tilde{A}$. Así la cercanía del valor de $\mu_{\tilde{A}}(x)$ a la unidad, indica mayor grado de pertenencia de x a $\tilde{A}$.

Ejemplo 1.1.1 *Sea $\chi = \mathbb{R}$, $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ definidos por las siguientes funciones de pertenencia,* *son dos subconjuntos difusos;*

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0{,}5 \\ \frac{x-0{,}5}{0{,}75} & 0{,}5 \leq x < 1{,}25 \\ 1 & 1{,}25 \leq x \leq 1{,}75 \\ 2{,}75 - x & 1{,}75 < x \leq 2{,}5 \\ x - 2{,}25 & 2{,}5 < x < 3{,}25 \\ 1 & 3{,}25 \leq x \leq 3{,}75 \\ \frac{x-3{,}75}{0{,}75} & 3{,}75 < x \leq 4{,}5 \\ 0 & x > 4{,}5 \end{cases} \qquad \mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 0 & x \notin B \\ 1 & x \in B \end{cases}$$

Siendo $B = \{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 2 \text{ ó } 3 \leq x \leq 4\}$

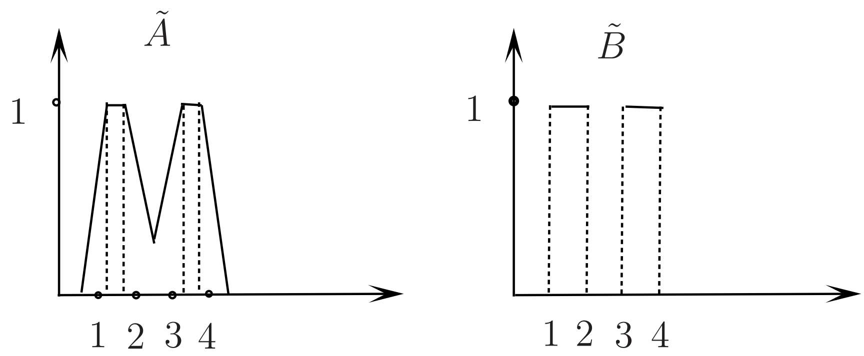

Figura 1.1: Subconjuntos difusos

Se observa que las funciones características de los conjuntos clásicos pueden considerarse casos particulares de esta definición. Ahora bien, la Teoría de Subconjuntos Difusos tiene como objetivo servir de instrumento de modelización en aquellos problemas en los que el marco conjuntista resulta inadecuado.

La función de pertenencia de un subconjunto difuso $\tilde{A}$ tiene un carácter subjetivo si el concepto representado por $\tilde{A}$ es subjetivo y dependiente del contexto y del decisor. Los grados de pertenencia de cada elemento al conjunto reflejan dicho concepto. El carácter subjetivo de la función de pertenencia, y en consecuencia su no unicidad, constituye uno de los mayores retos que tiene planteados la teoría de los subconjuntos difusos y ha dado origen a abundantes estudios. No obstante, aunque la función de pertenencia no es única y depende del contexto de trabajo, hay que tener en cuenta que los problemas que se presentan con este tipo de propiedades vagas son de menor precisión por lo que se tiende a escribirlos de la manera "más lineal"posible. Normalmente una representación del tipo trapezoidal o triangular es suficiente.

Definición 1.1.2 *Un **número difuso** $\tilde{m}$ es un subconjunto difuso sobre la recta real $\chi = \mathbb{R}$, que verifica las siguientes condiciones:*

- ***Continuo.*** *Su función de pertenencia $\mu_{\tilde{m}}$ es continua (excepto quizás para un número finito de puntos).*
- ***Normalizado.***
$$\max_{x\in\mathbb{R}} \mu_{\tilde{m}}(x) = 1$$
- ***Convexo.***
$$\forall x, z \in \mathbb{R},\ \forall y \in [x, z], \qquad \mu_{\tilde{m}}(y) \geq \min\left(\mu_{\tilde{m}}(x), \mu_{\tilde{m}}(z)\right), \quad (\mu_{\tilde{m}} \text{ es cuasicóncava}).$$

En particular, un número difuso $\tilde{m}$ es un **intervalo difuso**, si $\exists a, b \in \mathbb{R}$, tales que, $\forall x \in [a, b],\ \mu_{\tilde{m}}(x) = 1$. Hablaremos de número difuso frente a intervalo difuso cuando $a = b$.

Supondremos a lo largo de la memoria que para cualquier número difuso existen tres intervalos $[n_1, n_2]$, $[n_2, n_3]$ y $[n_3, n_4]$ tales que $\mu_{\tilde{m}}$ es no decreciente en $[n_1, n_2]$, igual a uno en $[n_2, n_3]$, no creciente en $[n_3, n_4]$ e igual a 0 en el resto, es decir:

$$\mu_{\tilde{n}}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in (-\infty, n_1] \\ f(x) & si\ x \in [n_1, n_2] \\ 1 & si\ x \in [n_2, n_3] \\ g(x) & si\ x \in [n_3, n_4] \\ 0 & si\ x \in [n_4, +\infty) \end{cases}$$

donde $f(x)$ es una función creciente y $g(x)$ es una función decreciente.
Cuando $n_1 = n_2 = n_3 = n_4$ se trata de un número real ordinario.

1.1.1. Familias de números difusos

Para facilitar el cálculo explícito de las fórmulas que nos permitan obtener los números difusos que surgen a partir de las operaciones algebraicas, Dubois y Prade [30, 32] definen una representación paramétrica de un número difuso: la representación L-R.

Definición 1.1.3 *Un intervalo difuso $\tilde{n}$ es* ***de tipo L-R*** *si su función de pertenencia tiene la siguiente expresión*

$$\mu_{\tilde{n}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right) & si\ x < a \\ 1 & si\ a \leq x \leq b \\ R\left(\frac{x-b}{\beta}\right) & si\ x > b \end{cases}$$

donde a y b son números tales que $\forall x \in [a, b]$, $\mu_{\tilde{n}}(x) = 1$, α y β son las "amplitudes", y L y R son funciones definidas en el intervalo $[0, \infty)$, no crecientes, que toman valores en $[0, 1]$ y verifican $L(0) = R(0) = 1$.

A un intervalo difuso $\tilde{n}$ de tipo L-R lo representaremos como

$$(\alpha, a, b, \beta)_{LR}$$

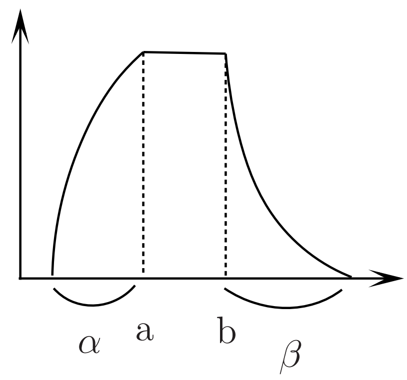

Figura 1.2: Intervalo difuso de tipo L-R

La definición de un número difuso **de tipo L-R**, es análoga a la de intervalo difuso de tipo L-R sin más que tener en cuenta que $a = b$. Lo representaremos como $(\alpha, a, \beta)_{LR}$.

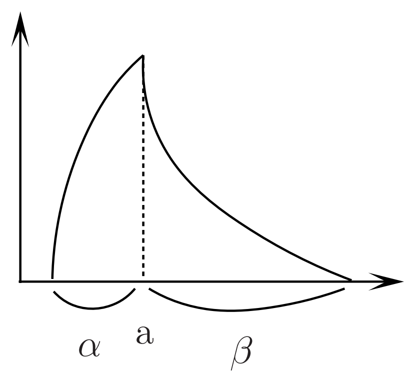

Figura 1.3: Número difuso de tipo L-R

La familia de números e intervalos difusos de tipo L-R, la denotaremos por Ω. Las demás familias de números e intervalos difusos que veremos a continuación, son casos particulares de los números difusos de tipo L-R.

Definición 1.1.4 *Un intervalo difuso $\tilde{m}$ **de tipo trapezoidal**, (α, a, b, β), es un intervalo difuso de tipo L-R con $L(x) = R(x) = \text{máx}\{0, 1 - x\}$.*

Por lo tanto su función de pertenencia es de la forma;

$$\mu_{\tilde{m}}(x) = \begin{cases} máx\{0, \frac{\alpha - a + x}{\alpha}\} & si\ x < a \\ 1 & si\ a \leq x \leq b \\ máx\{0, \frac{\beta - x + b}{\beta}\} & si\ x > b \end{cases}$$

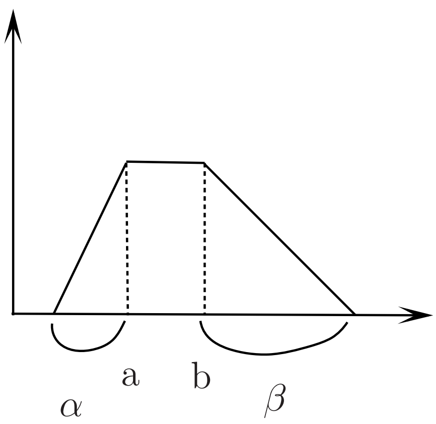

Figura 1.4: Intervalo difuso de tipo trapezoidal

La familia de intervalos difusos de tipo trapezoidal la denotaremos por T.

Definición 1.1.5 *Un número difuso $\tilde{m}$* ***de tipo triangular****, (α, a, β), es un número difuso de tipo L-R con $L(x) = R(x) = \text{máx}\{0, 1 - x\}$.*

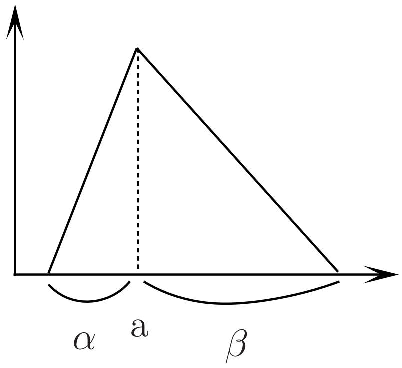

Figura 1.5: Número difuso de tipo triangular

La familia de números difusos de tipo triangular la denotaremos por Δ.

Definición 1.1.6 *Un número difuso* ***de tipo intervalar****, (a, b), es un intervalo difuso con función característica:*

$$\mu_{\tilde{n}}(x) = \begin{cases} 1 & si\ a \leq x \leq b \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

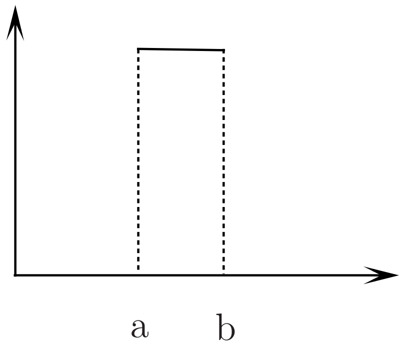

Figura 1.6: Número difuso de tipo intervalar

La familia de números difusos de tipo intervalar la denotaremos por I.

Definición 1.1.7 *Un número difuso* ***de tipo triangular a la derecha****,* $(b, \beta)_D$*, es un intervalo difuso con función característica:*

$$\mu_{\tilde{n}}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < b \\ \frac{b+\beta-x}{\beta} & si\ b \leq x \leq b+\beta \\ 0 & si\ x > b+\beta \end{cases}$$

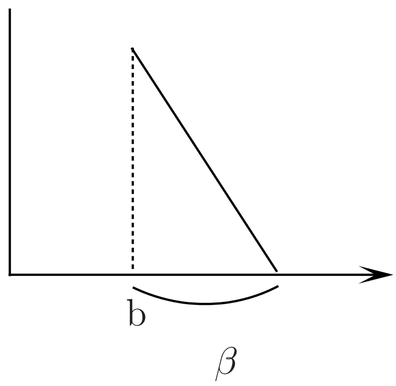

Figura 1.7: Número difuso de tipo triangular a la derecha

La familia de números difusos triangulares a la derecha la denotaremos por Δ_D

Definición 1.1.8 *Un número difuso* ***de tipo triangular a la izquierda****,* $(\alpha, a)_I$*, es un intervalo difuso con función característica:*

$$\mu_{\tilde{n}}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < a-\alpha \\ \frac{x-a+\alpha}{\alpha} & si\ a-\alpha \leq x \leq a \\ 0 & si\ x > a \end{cases}$$

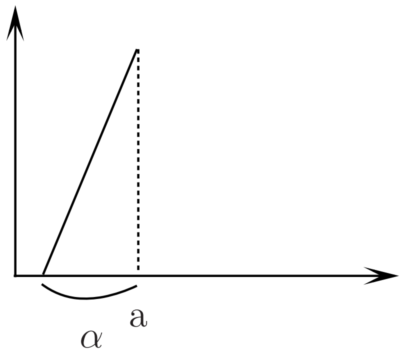

Figura 1.8: Número difuso de tipo triangular a la izquierda

La familia de números difusos triangulares a la izquierda la denotaremos por Δ_I

1.1.2. Operaciones con números difusos

Operaciones con números del mismo tipo

Expondremos los resultados de algunas operaciones aritméticas, que emplearemos en esta memoria, usando el principio de extensión de Zadeh [21].

Suma de números difusos	
Ω	$(\alpha, a, b, \beta)_{LR} + (\gamma, m, n, \delta)_{LR} = (\alpha + \gamma, a + m, b + n, \beta + \delta)_{LR}$
T	$(\alpha, a, b, \beta) + (\gamma, m, n, \delta) = (\alpha + \gamma, a + m, b + n, \beta + \delta)$
Δ	$(\alpha, a, \beta) + (\gamma, m, \delta) = (\alpha + \gamma, a + m, \beta + \delta)$
I	$(a, b) + (m, n) = (a + m, b + n)$
Δ_D	$(a, \alpha)_D + (b, \beta)_D = (a + b, \alpha + \beta)_D$
Δ_I	$(\alpha, a)_I + (\beta, b)_I = (\alpha + \beta, a + b)_I$

Diferencia de números difusos	
Ω	$(\alpha,a,b,\beta)_{LR}-(\gamma,m,n,\delta)_{LR}=(\alpha+\delta,a-n,b-m,\beta+\gamma)_{LR}$
T	$(\alpha,a,b,\beta)-(\gamma,m,n,\delta)=(\alpha+\delta,a-n,b-m,\beta+\gamma)$
Δ	$(\alpha,a,\beta)-(\gamma,m,\delta)=(\alpha+\delta,a-m,\beta+\gamma)$
I	$(a,b)-(m,n)=(a-n,b-m)$
Δ_D	$(a,\alpha)_D-(b,\beta)_D=(\beta,a-b,\alpha)\in T$
Δ_I	$(\alpha,a)_I-(\beta,b)_I=(\alpha,a-b,\beta)\in T$

Producto por un escalar positivo	
Ω	$\lambda\cdot(\alpha,a,b,\beta)_{LR}=(\lambda\cdot\alpha,\lambda\cdot a,\lambda\cdot b,\lambda\cdot\beta)_{LR}$
T	$\lambda\cdot(\alpha,a,b,\beta)=(\lambda\cdot\alpha,\lambda\cdot a,\lambda\cdot b,\lambda\cdot\beta)$
Δ	$\lambda\cdot(\alpha,a,\beta)=(\lambda\cdot\alpha,\lambda\cdot a,\lambda\cdot\beta)$
I	$\lambda\cdot(a,b)=(\lambda\cdot a,\lambda\cdot b)$
Δ_D	$\lambda\cdot(,b,\beta)_D=(\lambda\cdot b,\lambda\cdot\beta)_D$
Δ_I	$\lambda\cdot(\alpha,a)_I=(\lambda\cdot\alpha,\lambda\cdot a)_I$

Producto por un escalar negativo	
Ω	$\lambda\cdot(\alpha,a,b,\beta)_{LR}=(-\lambda\cdot\beta,\lambda\cdot b,\lambda\cdot a,-\lambda\cdot\alpha)_{LR}$
T	$\lambda\cdot(\alpha,a,b,\beta)=(-\lambda\cdot\beta,\lambda\cdot b,\lambda\cdot a,-\lambda\cdot\alpha)$
Δ	$\lambda\cdot(\alpha,a,\beta)=(-\lambda\cdot\beta,\lambda\cdot a,-\lambda\cdot\alpha)$
I	$\lambda\cdot(a,b)=(\lambda\cdot b,\lambda\cdot a)$
Δ_D	$\lambda\cdot(,b,\beta)_D=(-\lambda\cdot\beta,\lambda\cdot b)_I$
Δ_I	$\lambda\cdot(\alpha,a)_I=(\lambda\cdot a,-\lambda\cdot\alpha)_D$

Operaciones con números difusos generales

En el apartado anterior operamos con números del tipo L-R, restringiéndonos al caso en que los dos números que sumábamos o restábamos tenían las mismas funciones L y R. Supongamos que tenemos dos números difusos del tipo L-R;

$$\tilde{n}=(\alpha,a,b,\beta)_{L_n-R_n}\qquad \tilde{m}=(\gamma,c,d,\delta)_{L_m-R_m}$$

Siendo L_n, R_n, L_m y R_m funciones definidas en el intervalo $[0,\infty)$, no crecientes, que toman valores en $[0,1]$ y verifican $L_n(0) = R_n(0) = L_m(0) = R_m(0) = 1$. Y siendo sus funciones de pertenencia;

$$\mu_{\tilde{n}}(x) = \begin{cases} L_n\left(\frac{a-x}{\alpha}\right) & si\ x < a \\ 1 & si\ a \leq x \leq b \\ R_n\left(\frac{x-b}{\beta}\right) & si\ x > b \end{cases} \qquad \mu_{\tilde{m}}(x) = \begin{cases} L_m\left(\frac{c-x}{\gamma}\right) & si\ x < c \\ 1 & si\ c \leq x \leq d \\ R_m\left(\frac{x-d}{\delta}\right) & si\ x > d \end{cases}$$

Definiremos a continuación la suma, resta y producto por un escalar de estos números;

- **Suma** El número difuso $\tilde{n} + \tilde{m}$, es un número difuso del tipo L-R, cuya función de pertenencia viene dada por;

$$\mu_{\tilde{n}+\tilde{m}}(x) = \begin{cases} \sqrt{L_n\left(\frac{a+c-x}{\alpha+\gamma}\right) \cdot L_m\left(\frac{a+c-x}{\alpha+\gamma}\right)} & si\ x < a+c \\ 1 & si\ a+c \leq x \leq b+d \\ \sqrt{R_n\left(\frac{x-b-d}{\beta+\delta}\right) \cdot R_m\left(\frac{x-b-d}{\beta+\delta}\right)} & si\ x > b+d \end{cases}$$

- **Diferencia** El número difuso $\tilde{n} - \tilde{m}$, es un número difuso del tipo L-R, cuya función de pertenencia viene dada por;

$$\mu_{\tilde{n}-\tilde{m}}(x) = \begin{cases} \sqrt{L_n\left(\frac{a-d-x}{\alpha+\delta}\right) \cdot L_m\left(\frac{a-d-x}{\alpha+\delta}\right)} & si\ x < a-d \\ 1 & si\ a-d \leq x \leq b-c \\ \sqrt{R_n\left(\frac{x-b+c}{\beta+\gamma}\right) \cdot R_m\left(\frac{x-b+c}{\beta+\gamma}\right)} & si\ x > b-c \end{cases}$$

- **Producto por un escalar positivo** El número difuso $\lambda \cdot \tilde{n}$, es un número difuso del tipo L-R, cuya función de pertenencia viene dada por;

$$\mu_{\lambda\cdot\tilde{n}}(x) = \begin{cases} L_n\left(\frac{\lambda\cdot a-x}{\lambda\cdot\alpha}\right) & si\ x < \lambda \cdot a \\ 1 & si\ \lambda \cdot a \leq x \leq \lambda \cdot b \\ R_n\left(\frac{x-\lambda\cdot b}{\lambda\cdot\beta}\right) & si\ x > \lambda \cdot b \end{cases}$$

- **Producto por un escalar negativo** El número difuso $\lambda \cdot \tilde{n}$, es un número difuso del tipo L-R, cuya función de pertenencia viene dada por;

$$\mu_{\lambda\cdot\tilde{n}}(x) = \begin{cases} L_n\left(\frac{\lambda\cdot b - x}{-\lambda\cdot\beta}\right) & si\ x < \lambda\cdot b \\ 1 & si\ \lambda\cdot b \leq x \leq \lambda\cdot a \\ R_n\left(\frac{x-\lambda\cdot a}{-\lambda\cdot\alpha}\right) & si\ x > \lambda\cdot a \end{cases}$$

Se puede comprobar que los casos del apartado anterior son particularizaciones de este último.

Teorema 1.1.1 *Dados $A \in \Omega$ y n un número natural, existen n números difusos, $A_1, \ldots, A_n$, tales que $\sum_{i=1}^{n} A_i = A$.*

Demostración 1.1.1 *Probaremos este resultado por inducción.*
Sea $n = 1$, basta tomar $A_1 = A$.
Sea $n = 2$. Supongamos que la función de pertenencia del número difuso A es;

$$\mu(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right) & si\ x < a \\ 1 & si\ a \leq x \leq b \\ R\left(\frac{x-b}{\beta}\right) & si\ x > b \end{cases}$$

tomaremos $A_1 = A_2$, siendo su función de pertenencia;

$$\acute{\mu}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{\frac{a}{2}-x}{\frac{\alpha}{2}}\right) & si\ x < \frac{a}{2} \\ 1 & si\ \frac{a}{2} \leq x \leq \frac{b}{2} \\ R\left(\frac{x-\frac{b}{2}}{\frac{\beta}{2}}\right) & si\ x > \frac{b}{2} \end{cases}$$

De manera que el número difuso $A_1 + A_2$ tiene como función de pertenencia;

$$\mu_{A_1+A_2}(x) = \begin{cases} \sqrt{L\left(\frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-x}{\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}}\right)\cdot L\left(\frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-x}{\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}}\right)} & si\ x < \frac{a}{2}+\frac{a}{2} \\ 1 & si\ \frac{a}{2}+\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{b}{2}+\frac{a}{2} \\ \sqrt{R\left(\frac{x-\frac{b}{2}-\frac{b}{2}}{\frac{\beta}{2}+\frac{\beta}{2}}\right)\cdot R\left(\frac{x-\frac{b}{2}-\frac{b}{2}}{\frac{\beta}{2}+\frac{\beta}{2}}\right)} & si\ x > \frac{b}{2}+\frac{b}{2} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right) & si\ x < a \\ 1 & si\ a \leq x \leq b \\ R\left(\frac{x-b}{\beta}\right) & si\ x > b \end{cases} = \mu(x)$$

Por lo tanto $A_1 + A_2 = A$.

Supongamos cierto el resultado para $n-1$ *y probémoslo para* n.
Hemos demostrado que cualquier número difuso se puede expresar como suma de otros dos, $A = A_1 + A_2$*; por hipótesis de inducción* A_2 *se puede expresar como suma de* $n-1$ *números difusos,* $A_2 = B_1 + \ldots + B_{n-1}$*; por lo tanto* A *se puede expresar como la siguiente suma de* n *números difusos;*

$$A = A_1 + B_1 + \ldots + B_{n-1}$$

Un conjunto de números difusos forma un cono si $\tilde{n}$ y $\tilde{m}$ son dos números difusos de dicho conjunto y λ es un escalar, los números difusos $\tilde{n} + \tilde{m}$ y $\lambda \cdot \tilde{n}$ son también números de dicho conjunto.

Teorema 1.1.2 *El conjunto de los números difusos del tipo L-R junto con las operaciones de la suma y producto por un escalar forman un cono.*

Demostración 1.1.2 *Veamos que* $\tilde{n} + \tilde{m}$ *es un número difuso del tipo L-R*
Las funciones L *y* R *de la función de pertenencia de* $\tilde{n} + \tilde{m}$ *son;*

$$L(x) = \sqrt{L_n(x) \cdot L_m(x)} \qquad R(x) = \sqrt{R_n(x) \cdot R_m(x)}$$

por lo tanto L *y* R *siguen estando definidas en el intervalo* $[0, \infty)$*, son no crecientes ya que* L_n, L_m, R_n *y* R_m *lo son, toman valores en* $[0, 1]$ *y*

$$L(0) = \sqrt{L_n(0) \cdot L_m(0)} = \sqrt{1 \cdot 1} = 1 \qquad R(0) = \sqrt{R_n(0) \cdot R_m(0)} = \sqrt{1 \cdot 1} = 1$$

Además $\mu_{\tilde{n}+\tilde{m}}$ *es una función continua, normalizada y cuasicóncava.*

Veamos que $\lambda \cdot \tilde{n}$ *es un número difuso del tipo L-R*

Las funciones L y R de la función de pertenencia de $\lambda \cdot \tilde{n}$ siguen siendo L_n y R_n, lo que variará en la función de pertenencia serán las amplitudes ($\lambda \cdot \alpha$ y $\lambda \cdot \beta$) y los números para los que se alcanza el valor 1 ($\lambda \cdot a$ y $\lambda \cdot b$). Por lo tanto estas funciones siguen verificando todo lo necesario para seguir siendo un número difuso del tipo L-R.

1.2. Órdenes difusos

La ordenación de cantidades imprecisas, y por tanto, la comparación de números difusos, desempeña un papel importante en la matemática difusa. Los diversos enfoques bajo los que se puede plantear el problema han dado lugar a un amplio número de métodos que permiten realizar la mencionada comparación. Hemos seleccionado aquellos que nos han parecido más apropiados para nuestro trabajo, debido a que perdían la menor información posible dada por el número difuso.
Primeramente consideraremos algunos órdenes generales, y posteriormente particularizaremos a órdenes difusos más concretos para los números difusos que serán usados en esta memoria, [47][48].

1.2.1. Esquema del orden general

Sea T un conjunto cualquiera, y $(\Theta, \leq)$ un conjunto ordenado. Supongamos que tenemos una función

$$f : T \rightarrow \Theta$$

Si consideramos la relación de equivalencia asociada a f,

$$\forall A, B \in T \qquad A R_f B \Leftrightarrow f(A) = f(B)$$

tendremos la siguiente función sobre el conjunto cociente,

$$\tilde{f} : T_f \rightarrow \Theta, \qquad donde\ T_f = T/R_f$$

dada por $\tilde{f}([A]) = f(A)$. Obviamente, $\tilde{f}$ está bien definida y es inyectiva. Además, la función $\tilde{f}$ induce la siguiente relación de orden en el conjunto T_f:

$$\forall [A],[B] \in T_f, \qquad [A] \leq [B] \Leftrightarrow \tilde{f}([A]) \leq \tilde{f}([B]).$$

Claramente, si $(\Theta, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado, entonces $(T_f, \leq)$ también lo será. No se define una relación de orden directamente sobre f. La relación de orden, como hemos visto debe definirse sobre el conjunto cociente T_f, y será válida para ordenar elementos de T cuando los elementos de cada clase de T_f sean muy homogéneos.
Denotaremos por $\simeq_f$ (o por $\simeq$ cuando la función f sea conocida) la relación de indiferencia:

$$A \simeq_f B \Leftrightarrow \ A, B \in [A] \Leftrightarrow \ f(A) = f(B).$$

El problema de la indiferencia es equivalente a la falta de discriminación de un índice, y la clase de equivalencia de la relación R_f contiene a esos elementos entre los que el índice f no puede distinguir.

1.2.2. Orden difuso vectorial

A partir de ahora consideraremos que T es un conjunto de números difusos, y llamaremos a f *función de orden*. Esta función f está definida sobre los números difusos tomando valores en $\mathbb{R}^m$, y en $\mathbb{R}^m$ usaremos el orden Pareto para ordenar los vectores asociados a los números difusos. A este tipo de órdenes difusos los llamaremos órdenes difusos vectoriales y los denotaremos por $\preceq_f$. A veces por simplificar la notación, los llamaremos simplemente $\preceq$.

Lo más usual en la literatura es tomar $m = 1$, en este caso toda la información sobre el número difuso está concentrada en un solo número real, pero este hecho nos puede llevar a extraños casos de indiferencia, ya que al quedar representada cada cantidad difusa por un solo número real nos podemos encontrar muchos números difusos muy distintos entre si, y todos ellos representados por un mismo número real, es decir, la relación de orden generada por la función de orden en el conjunto de los números difusos puede crear clases formadas por números difusos muy diferentes.

Por ello el orden que vamos a estudiar a continuación nos proporciona una relación de indiferencia más rica, y aunque nosotros nos vamos a centrar en el orden Pareto entre los elementos de $\mathbb{R}^m$, nos permite también definir diferentes relaciones de dominancia entre el conjunto de números difusos sin más que seleccionar distintas relaciones de orden en $\mathbb{R}^m$.
La indiferencia se puede utilizar para ver la bondad de cada método de ordenación, es decir, cuanta mayor sea la similitud entre los números difusos equivalentes según la relación de indiferencia, mejor será la función de orden. Por lo tanto si elegimos $\mathbb{R}$ como conjunto ordenado cada número difuso quedará representado por un único parámetro de posición, por lo tanto toda la información de esta cantidad difusa se verá reducida a un único número real, lo que como dijimos antes nos puede llevar a extraños casos de indiferencia [13]. Nosotros elegiremos por tanto funciones de orden en $\mathbb{R}^m$, con $m \in \mathbb{N}$. Y lo interpretaremos como la selección de m parámetros de posición en el número difuso. En este caso, la igualdad de la función de orden implica la igualdad entre m parámetros de posición, lo cual mejora la relación de indiferencia.
Si consideramos el caso particular

$$f : A \subseteq \Omega \to \mathbb{R}^m,$$

$$A \mapsto (f_1(A), \ldots, f_m(A)),$$

donde Ω es el conjunto de números e intervalos difusos de tipo L-R; la relación de indiferencia será

$$A \simeq B \Leftrightarrow f(A) = f(B) \Leftrightarrow f_i(A) = f_i(B), \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Usando una relación de orden en $\mathbb{R}^m$, utilizaremos la función f para definir una relación de orden en $D_f = D/\simeq$. Obviamente, si la relación $\simeq$ tiene una indiferencia admisible para el decisor, entonces esta relación de orden en D_f será válida como orden en D.
En $\mathbb{R}^m$ nos vamos a centrar en el orden Pareto, aunque el procedimiento sería análogo si usásemos cualquier otra relación de orden.

Definición 1.2.1 *Sean $x, y \in \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, diremos que x es* *menor según el orden Pareto que y* ($x \leq y$) *si es menor o igual componente a componente*

$$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i \qquad \forall i = 1, \ldots, m$$

1.2.3. Orden estándar

El orden difuso que usaremos en este trabajo será un tipo de orden difuso vectorial al que llamaremos orden estándar. Este orden se podrá particularizar obteniéndose distintos órdenes difusos que se pueden adaptar a las necesidades del decisor.

Definición 1.2.2 *Sea* $A \in \Omega$ *un número difuso con función de pertenencia* $\mu_A(\cdot)$. *Llamamos* A_α, *(*α*-corte de* A*), al conjunto convexo,*

$$A_\alpha = \{x \in \mathbb{R}/\mu_A(x) \geq \alpha\} \qquad \forall \alpha \in (0, 1]$$

Si $\alpha = 0$ *sea* $sup(A) = \{x \in \mathbb{R}/\mu_A(x) > 0\}$, *que es siempre un conjunto acotado de* $\mathbb{R}$, *y entonces* A_0 *es la clausura de* $sup(A)$,

$$A_0 = \overline{sup(A)}.$$

En los números difusos los α-cortes son siempre intervalos cerrados y acotados,

$$A_\alpha = [a_\alpha, b_\alpha] \qquad con\ \alpha \in [0, 1]$$

Desde un punto de vista analítico, el problema de ordenar números difusos está en la evaluación de conjuntos compactos asociados a sus funciones de pertenencia. Para facilitar la solución, consideraremos un número difuso A como el conjunto $\{A_\alpha; \alpha \in [0, 1]\}$ de sus α-cortes, y en vez de considerar todos los α-cortes , tomaremos sólo un conjunto finito $Y \subset [0, 1]$, entonces $\{A_\alpha; \alpha \in Y\}$ puede considerarse como una versión discreta de la cantidad difusa. Utilizaremos este método discreto para desarrollar una comparación entre números difusos. Obviamente esta aproximación discreta dependerá del conjunto $Y \subset [0, 1]$ que consideremos. De hecho si sólo consideramos algunos α-cortes , el orden quedará condicionado por el conjunto Y, el cual llamaremos *sistema de ordenación o sistema de orden.* Nosotros sólo usaremos sistemas de ordenación finitos.

Para definir una función de orden estándar, asumiremos que tenemos un sistema de ordenación $Y = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$, $\alpha_i \in [0,1]$, y definiremos k parámetros de posición representativos en $\mathbb{R}$ (generalmente $k = 1$, 2 ó 3), para cada α_i-corte del número difuso A,

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, p\}, \qquad p(A_{\alpha_i}) = (\lambda_1 a_{\alpha_i} + (1-\lambda_1) b_{\alpha_i}, \ldots, \lambda_k a_{\alpha_i} + (1-\lambda_k) b_{\alpha_i}) \in \mathbb{R}^k,$$

donde $A_{\alpha_i} = [a_{\alpha_i}, b_{\alpha_i}] \subset \mathbb{R}$, es decir, $p(A_{\alpha_i})$ serán k parámetros reales que tendrán que ser definidos en cada α_i-corte de A, que representarán la posición del conjunto de números reales A_{α_i} en $\mathbb{R}$.

Definiremos la función de orden estándar como:

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

$$f(A) = (p(A_{\alpha_1}), p(A_{\alpha_2}), \ldots, p(A_{\alpha_p})) \in \mathbb{R}^m, \qquad m = pk, \qquad A \in \Omega.$$

Ahora bastará usar una relación de orden en $\mathbb{R}^m$ para comparar los números difusos. Si usamos el orden Pareto como dijimos anteriormente, tendremos que

$$A \preceq B \Leftrightarrow f(A) \leq f(B) \qquad \textit{con } A, B \in \Omega.$$

Cuando los pk parámetros coinciden, tendremos que esos dos números difuso son indiferentes. Eligiendo unos parámetros de posición adecuados siempre se podrá adaptar la relación R_f a una indiferencia admisible por el decisor. Una vez elegido el orden difuso estándar que se va a usar, cada número difuso pasa a ser una clase de equivalencia, formada por todos los números difusos indiferentes o equivalentes a él según este orden difuso.

Denotamos a los órdenes difusos estándar por $\preceq_e$. Este orden siempre irá acompañado del sistema de orden $Y = \{\alpha_1 \ldots, \alpha_p\}$, y de la función p definida por $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, que nos da los parámetros de posición en cada α-corte. Por lo tanto los órdenes difusos estándar los denotaremos por $(\preceq_e, Y, p)$, o bien por $(\preceq_e, \{\alpha_1 \ldots, \alpha_p\}, \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\})$.

Si tomamos un número difuso de tipo general, $A = (\gamma, a, b, \delta)_{LR} \in \Omega$, un α-corte de este número viene dado por $A_\alpha = [a - \gamma \cdot L^{-1}(\alpha), b + \delta \cdot R^{-1}(\alpha)]$.

Ejemplo 1.2.1 *En el caso de los números difusos intervalares, I, todos los α-cortes coinciden;*

$$A_0 = [a, b], \ldots, A_n = [a, b] \quad \textit{siendo } A = (a, b)$$

Luego basta con que el sistema de orden tenga un único elemento $Y = \{\alpha\}$.
Sean los números difusos intervalares $M = (4, 6)$ *y* $N = (3, 7)$.

Tomamos un único parámetro de posición λ*, de manera que* $p(A_\alpha) = \lambda a + (1-\lambda)b$*, siendo* $A = (a, b)$ *el números difuso. Tenemos que:*

- *Si* $\lambda = 1$, $M \geq N$.
- *si* $\lambda = 0$, $N \geq M$.
- *si* $\lambda = 1/2$, $M = N$

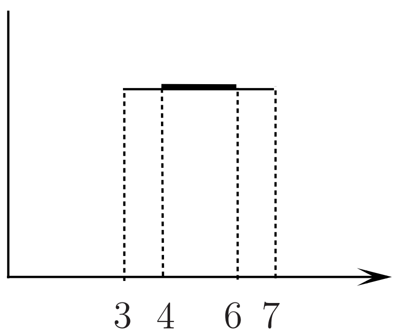

Figura 1.9: Números difusos intervalares M=(4,6) y N=(3,7)

Sean los números difusos intervalares $M = (4, 6)$ *y* $N = (2, 5)$. *Tomemos un único parámetro de posición* $\lambda \in [0, 1]$,

$$M \geq N \Leftrightarrow \lambda \cdot 4 + (1 - \lambda) \cdot 6 \geq \lambda \cdot 2 + (1 - \lambda) \cdot 5 \Leftrightarrow \lambda \geq -1$$

Luego para todo $\lambda \in [0, 1]$ *se verifica que* $M \geq N$

Teorema 1.2.1 *Sea* $(\preceq_e, \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\})$ *un orden difuso estándar. Sean* $A = (\delta_1, a_1, b_1, \gamma_1)_{LR}$*,* $B = (\delta_2, a_2, b_2, \gamma_2)_{LR}$ *y* $C = (\delta, a, b, \gamma)_{LR}$ *tres números difusos y* $\sigma \in \mathbb{R}^+$ *un escalar positivo. Se verifica que;*

$$i) \quad A \preceq B \Leftrightarrow A + C \preceq B + C$$

$$ii) \qquad A \preceq B \ \Leftrightarrow \ \sigma \cdot A \preceq \sigma \cdot B$$

Demostración 1.2.1 ▪

$$\textbf{\textit{i)}} \qquad A \preceq B \ \Leftrightarrow \ (\delta_1, a_1, b_1, \gamma_1)_{LR} \preceq (\delta_1, a_1, b_1, \gamma_1)_{LR} \ \Leftrightarrow$$

$$\lambda_j(a_1 - \delta_1 L^{-1}(\alpha_i)) + (1 - \lambda_j)(b_1 + \gamma_1 R^{-1}(\alpha_i)) \leq \lambda_j(a_2 - \delta_2 L^{-1}(\alpha_i)) + (1 - \lambda_j)(b_2 + \gamma_2 R^{-1}(\alpha_i))$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\} \ \forall j \in \{1, \ldots, k\} \ \Leftrightarrow$$

$$\lambda_j a_1 - \lambda_j \delta_1 L^{-1}(\alpha_i) + (1 - \lambda_j) b_1 + (1 - \lambda_j)\gamma_1 R^{-1}(\alpha_i) \leq$$

$$\leq \lambda_j a_2 - \lambda_j \delta_2 L^{-1}(\alpha_i) + (1 - \lambda_j) b_2 + (1 - \lambda_j)\gamma_2 R^{-1}(\alpha_i)$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\} \ \forall j \in \{1, \ldots, k\} \ \Leftrightarrow$$

$$\lambda_j a_1 + \lambda_j a - \lambda_j \delta_1 L^{-1}(\alpha_i) - \lambda_j \delta L^{-1}(\alpha_i) + (1 - \lambda_j) b_1 + (1 - \lambda_j) b + (1 - \lambda_j)\gamma_1 R^{-1}(\alpha_i) +$$

$$+ (1 - \lambda_j)\gamma R^{-1}(\alpha_i) \leq \lambda_j a_2 + \lambda_j a - \lambda_j \delta_2 L^{-1}(\alpha_i) - \lambda_j \delta L^{-1}(\alpha_i) + (1 - \lambda_j) b_2 + (1 - \lambda_j) b +$$

$$+ (1 - \lambda_j)\gamma_2 R^{-1}(\alpha_i) + (1 - \lambda_j)\gamma R^{-1}(\alpha_i) \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \ \forall j \in \{1, \ldots, k\} \ \Leftrightarrow$$

$$\lambda_j(a_1 + a - (\delta_1 + \delta) L^{-1}(\alpha_i)) + (1 - \lambda_j)(b_1 + b + (\gamma_1 + \gamma) R^{-1}(\alpha_i)) \leq$$

$$\leq \lambda_j(a_2 + a - (\delta_2 + \delta) L^{-1}(\alpha_i)) + (1 - \lambda_j)(b_2 + b + (\gamma_2 + \gamma) R^{-1}(\alpha_i))$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\} \ \forall j \in \{1, \ldots, k\} \ \Leftrightarrow$$

$$(\delta_1 + \delta, a_1 + a, b_1 + b, \gamma_1 + \gamma)_{LR} \preceq (\delta_1 + \delta, a_1 + a, b_1 + b, \gamma_1 + \gamma)_{LR} \ \Leftrightarrow A + C \preceq B + C$$

▪

$$\textbf{\textit{ii)}} \qquad \sigma A \preceq \sigma B \Leftrightarrow (\sigma\delta_1, \sigma a_1, \sigma b_1, \sigma\gamma_1)_{LR} \preceq (\sigma\delta_2, \sigma a_2, \sigma b_2, \sigma\gamma_2)_{LR} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_j(\sigma a_1 - \sigma\delta_1 L^{-1}(\alpha_i)) + (1-\lambda_j)(\sigma b_1 + \sigma\gamma_1 R^{-1}(\alpha_i)) \leq$$

$$\leq \lambda_j(\sigma a_2 - \sigma\delta_2 L^{-1}(\alpha_i)) + (1-\lambda_j)(\sigma b_2 + \sigma\gamma_2 R^{-1}(\alpha_i))$$

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}\ \forall j \in \{1,\ldots,k\} \ \Leftrightarrow$$

$$\sigma(\lambda_j(a_1-\delta_1 L^{-1}(\alpha_i))+(1-\lambda_j)(b_1+\gamma_1 R^{-1}(\alpha_i))) \leq \sigma(\lambda_j(a_2-\delta_2 L^{-1}(\alpha_i))+(1-\lambda_j)(b_2+\gamma_2 R^{-1}(\alpha_i)))$$

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}\ \forall j \in \{1,\ldots,k\} \ \Leftrightarrow$$

$$\lambda_j(a_1-\delta_1 L^{-1}(\alpha_i))+(1-\lambda_j)(b_1+\gamma_1 R^{-1}(\alpha_i)) \leq \lambda_j(a_2-\delta_2 L^{-1}(\alpha_i))+(1-\lambda_j)(b_2+\gamma_2 R^{-1}(\alpha_i))$$

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}\ \forall j \in \{1,\ldots,k\} \ \Leftrightarrow$$

$$A \preceq B$$

El cono formado por los números difusos de tipo L-R junto con las operaciones de la suma y producto por un escalar, es parcialmente ordenado frente a un orden difuso estándar dado, ya que por el teorema 1.2.1 este orden difuso parcial es compatible con las operaciones que definen el cono.
En este cono, la diferencia entre números difusos no es cerrada, e incluso $A - B + B \neq A$, por lo que hay que imponer condiciones a los números y a los órdenes difusos para que esto ocurra (ver teorema 1.2.2).

Un caso particular de orden difuso estándar que nos será de gran utilidad, es el orden difuso estándar central;

Definición 1.2.3 *Un orden difuso estándar central es un orden difuso estándar que tiene cualquier sistema de orden $Y = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$, pero un único parámetro de posición $\lambda = 1/2$.*

A este tipo de orden difuso los denotamos por $(\preceq_c, Y)$, o bien $(\preceq_c, \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\})$.

1.2.4. Casos particulares de órdenes difusos

Definiremos en esta sección algunos órdenes difuso más concretos que consideraremos a lo largo de la memoria.

Definición 1.2.4 *Decimos que un orden difuso $\preceq_U$, está definido por una familia U de funciones $u : \Omega \to \mathbb{R}$, si dados dos números difusos $X, Y \in \Omega$, $X \preceq_U Y$ si y sólo si $u(X) \leq u(Y)$, $\forall u \in U$.*

Definición 1.2.5 *Sean $X = (\alpha, a, b, \beta)_{LR}$ e $Y = (\gamma, m, n, \delta)_{LR}$ dos números difusos. Se define el orden difuso 1, y se denota por $\preceq_1$ a:*

$$X \succeq_1 Y \Leftrightarrow \quad X^L(\omega) \geq Y^L(\omega), \quad X^R(\omega) \geq Y^R(\omega) \quad \forall \omega \in [0,1]$$

siendo $X^L(\omega) = mín\{x/\mu_X(x) \geq \omega\}$ y $X^R(\omega) = máx\{x/\mu_X(x) \geq \omega\}$ si $\omega \neq 0$, $X^L(0) = ínf\{x/\mu_X(x) > 0\}$, $X^R(0) = sup\{x/\mu_X(x) > 0\}$, donde μ_X la función de pertenencia de X.

Definición 1.2.6 *Sean $X = (\alpha, a, b, \beta)_{LR}$ e $Y = (\gamma, m, n, \delta)_{LR}$ dos números difusos. Se define el orden difuso 2, y se denota por $\preceq_2$ a:*

$$X \succeq_2 Y \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \frac{m+n}{2}, \quad \alpha + \beta \leq \gamma + \delta$$

Definición 1.2.7 *Sean $X = (\alpha, a, b, \beta)_{LR}$ e $Y = (\gamma, m, n, \delta)_{LR}$ dos números difusos. Se define el orden difuso 3, y se denota por $\preceq_3$ a:*

$$X \succeq_3 Y \Leftrightarrow a \geq m, \quad b \geq n, \quad \alpha \leq \gamma, \quad \beta \geq \delta$$

Ejemplo 1.2.2 *Si el orden $\preceq_1$ se aplica a números difusos de tipo trapezoidal, la definición del orden sería:*

$$X \succeq_1 Y \Leftrightarrow \quad a \geq m, \quad b \geq n, \quad a - \alpha \geq m - \gamma, \quad b + \beta \geq n + \delta$$

En este caso este orden coincidiría con el orden estándar $(\preceq_e, \{0,1\}, \{0,1\})$.

Ejemplo 1.2.3 *Si el orden $\preceq_3$ se aplica a números difusos de tipo triangular a la derecha, la definición del orden sería:*

$$X \succeq_3 Y \Leftrightarrow \quad a \geq b, \quad \alpha \geq \beta$$

siendo $X = (a, \alpha)_D$ *e* $Y = (b, \beta)_D$

1.2.5. Orden e indiferencia en el conjunto de los números difusos

Sea $A \in \Omega$, y sea $Y = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\}$ un sistema de ordenación con $\alpha_i \in [0,1]$, tal que $A_{\alpha_i} \neq \emptyset$, $\forall i \in I = \{1, 2, \ldots, p\}$. Cada α_i-corte vendrá determinado por el intervalo cerrado

$$A_{\alpha_i} = [a_i, b_i], \qquad \forall i \in I.$$

Para definir una función de orden particular, vamos a seleccionar dos parámetros de posición ($k = 2$) que representen a dos puntos en cada α-corte. Son elegidos a través de dos parámetros λ y μ del intervalo unidad. Definiremos la función de orden como:

$$f_T : \Omega \times [0,1]^2 \to \mathbb{R}^{2p}$$

para todo $A \in \Omega, \lambda, \mu \in [0,1]$,

$$f_T(A, \lambda, \mu) = (\lambda b_1 + (1-\lambda)a_1, \mu b_1 + (1-\mu)a_1, \ldots, \lambda b_p + (1-\lambda)a_p, \mu b_p + (1-\mu)a_p).$$

Basándonos en los parámetros λ y μ, y por medio de una relación de orden en $\mathbb{R}^{2n}$, la función f_T nos proporciona una comparación entre elementos de el conjunto cociente Ω_{f_T}.
La indiferencia se da cuando

$$\forall A, B \in \Omega, \qquad A_{\alpha_i} = [a_i, b_i], \qquad B_{\alpha_i} = [c_i, d_i]$$

$$A \simeq B \Leftrightarrow f_T(A, \lambda, \mu) = f_T(B, \lambda, \mu)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda b_i + (1-\lambda)a_i = \lambda d_i + (1-\lambda)c_i \\ \mu b_i + (1-\mu)a_i = \mu d_i + (1-\mu)c_i \end{cases} \qquad \forall i \in I$$

Es decir, la indiferencia entre dos elementos de Ω es equivalente a la igualdad de dos puntos de cada α-corte (con α perteneciendo al sistema de orden). Cuando los parámetros λ y μ son diferentes, la relación de indiferencia equivale a que coincidan los respectivos α-cortes del sistema de orden en cada número difuso, como muestra el siguiente resultado:

Proposición 1.2.1 *Sean* $A, B \in \Omega$, $\lambda, \mu \in [0,1]$ *tales que* $\lambda \neq \mu$, $A_\alpha = [a_\alpha, b_\alpha]$, $B_\alpha = [c_\alpha, d_\alpha]$. *Entonces*

$$\left.\begin{array}{l} \lambda b_\alpha + (1-\lambda)a_\alpha = \lambda d_\alpha + (1-\lambda)c_\alpha \\ \mu b_\alpha + (1-\mu)a_\alpha = \mu d_\alpha + (1-\mu)c_\alpha \end{array}\right\} \Leftrightarrow A_\alpha = B_\alpha$$

Demostración 1.2.2 *Ver [47].*

La igualdad entre números difusos definida por Zadeh ($\mu_A = \mu_B$) es equivalente a la igualdad entre todos sus respectivos α-cortes. Sin embargo, la indiferencia generada por la función f_T (con $\lambda \neq \mu$) es un discretización de la igualdad anterior:

$$A = B \Leftrightarrow A_\alpha = B_\alpha \quad \forall \alpha \in (0,1]$$

$$\lambda \neq \mu, \quad A \simeq B \Leftrightarrow A_{\alpha_i} = B_{\alpha_i} \quad \forall i \in I$$

Obviamente, la relación de indiferencia es más precisa cuantos más elementos consideremos en el sistema de orden.

En un número difuso triangular y en uno trapezoidal, son suficientes dos elementos en el sistema de orden para que la relación $\simeq$ (con $\lambda \neq \mu$) coincida con la igualdad definida por Zadeh.

Ejemplo 1.2.4 *En la figura (a) podemos observar dos números difusos triangulares que son indiferentes tomando un único parámetro de posición* $\lambda = \mu = 1/2$ *y cualquier sistema de orden, es decir, cualquier* α*-corte.*

En la figura (b) tenemos dos números difusos que tomando dos parámetros de posición distintos cualesquiera $\lambda \neq \mu$ *y* $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ *como sistema de orden son indiferentes.*

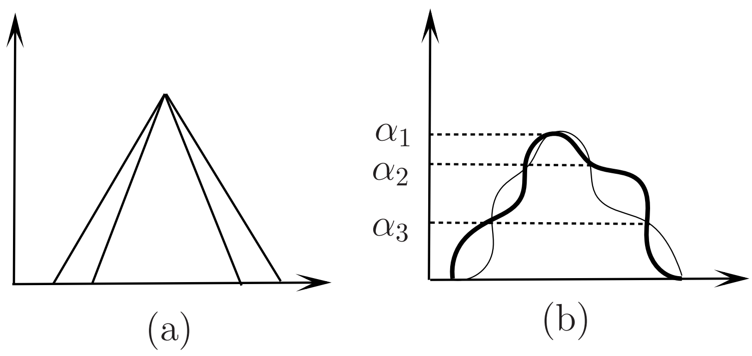

Figura 1.10: Números difusos indiferentes.

La relación de orden generada por f_T en Ω, restringida al conjunto de los números reales, coincide con la relación usual de orden, ya que

$$A \in \mathbb{R} \subset \Omega \Rightarrow A_\alpha = A \qquad \forall \alpha \in (0,1]$$

por lo tanto

$$f_t(A, \lambda, \mu) = (A, A, \ldots, A) \in \mathbb{R}^{2n}$$

y toda relación de orden considerada en $\mathbb{R}^{2n}$ mantiene el orden usual.

Ejemplo 1.2.5 *En el caso a, tomamos los parámetros* $\lambda = 1/2$ *y* $\mu = 1$*; y vemos que B domina a A. En el caso b tomamos como parámetros* $\lambda = \mu = 1/2$*; y observamos que en este caso ni* C *domina a* D*, ni* D *domina a* C*.*

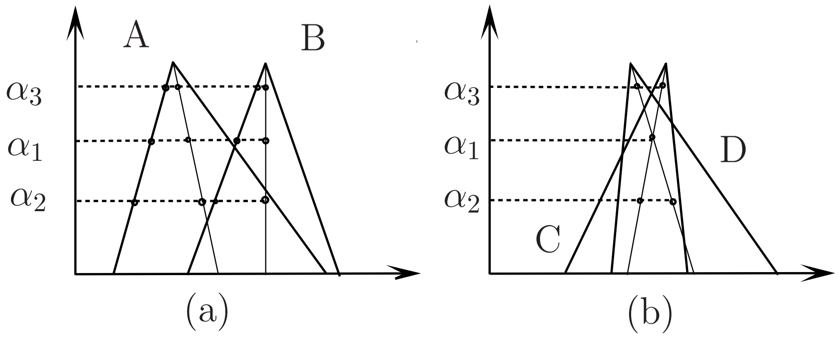

Figura 1.11: Comparaciones de órdenes difusos.

Definición 1.2.8 *Sea* $(\preceq_e, \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \{\lambda_1, \ldots \lambda_k\})$ *un orden estándar. Llamamos* p_{ij}*,* $i \in \{1, \ldots, p\}$*,* $j \in \{1, \ldots, k\}$*, a las funciones que asocian a cada número difuso con la posición dada por el parámetro j-ésimo* (λ_j)*, en el* α*-corte i-ésimo* (α_i*-corte);*

$$p_{ij} : \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$A = (\alpha, a, b, \beta)_{LR} \mapsto p_{ij}(A) = \lambda_j(a - \alpha L^{-1}(\alpha_i)) + (1 - \lambda_j) \cdot (b + \beta R^{-1}(\alpha_i))$$

Dos números difusos $A, B \in \Omega$ son equivalentes para un orden estándar $(\preceq_e, \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\},$ $\{\lambda_1, \ldots \lambda_k\})$ si

$$p_{ij}(A) = p_{ij}(B) \quad \forall i \in \{1, \ldots, p\} \; \forall j \in \{1, \ldots, k\}$$

y lo denotamos por

$$A \simeq B$$

Llamábamos orden difuso estándar central, a un orden difuso estándar que tenga cualquier sistema de orden $Y = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$, pero un único parámetro de posición $\lambda = 1/2$.

Teorema 1.2.2 *Sean* $A, B \in \Omega$ *dos números difusos de tipo* $L - R$ *verificando que* $L \equiv R$*. Se tiene que usando cualquier orden difuso estándar central* $(\preceq_c, \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\})$*;*

$$A - B + B \simeq A$$

Demostración 1.2.3 *Sean* $A = (\alpha, a, b, \beta)_{LR}$ *y* $B = (\gamma, c, d, \delta)_{LR}$*, hay que demostrar que* $p_{ij}(A) = p_{ij}(A - B + B)$ *para todo* $i \in \{1, \ldots, p\}$ *y* $j = 1$*, ya que los órdenes difusos centrales tienen un único parámetro de posición. Llamaremos* λ *a este único parámetro de posición. Sabemos que*

$$A - B + B = (\alpha, a, b, \beta)_{LR} - (\gamma, c, d, \delta)_{LR} + (\gamma, c, d, \delta)_{LR} =$$

$$= (\alpha + \delta, a - d, b - c, \beta + \gamma)_{LR} + (\gamma, c, d, \delta)_{LR} = (\alpha + \delta + \gamma, a - d + c, b - c + d, \beta + \gamma + \delta)_{LR}$$

Por lo tanto

$$p_{ij}(A - B + B) = \lambda(a - d + c - (\alpha + \delta + \gamma)L^{-1}(\alpha_i)) + (1 - \lambda)(b - c + d + (\beta + \gamma + \delta)R^{-1}(\alpha_i)) =$$

$$= \lambda(a - \alpha L^{-1}(\alpha_i)) + (1 - \lambda)(b + \beta R^{-1}(\alpha_i)) -$$

$$-\lambda d + \lambda c - \lambda\delta L^{-1}(\alpha_i) - \lambda\gamma L^{-1}(\alpha_i) - (1 - \lambda)c + (1 - \lambda)d + (1 - \lambda)\gamma R^{-1}(\alpha_i) + (1 - \lambda)\delta R^{-1}(\alpha_i) =$$

$$= p_{ij}(A) - \lambda d + \lambda c - \lambda\delta L^{-1}(\alpha_i) - \lambda\gamma L^{-1}(\alpha_i) - (1 - \lambda)c + (1 - \lambda)d + (1 - \lambda)\gamma R^{-1}(\alpha_i) + (1 - \lambda)\delta R^{-1}(\alpha_i) =$$

$$p_{ij}(A) - 1/2d + 1/2c - 1/2\delta L^{-1}(\alpha_i) - 1/2\gamma L^{-1}(\alpha_i) - 1/2c + 1/2d + 1/2\gamma L^{-1}(\alpha_i) + 1/2\delta L^{-1}(\alpha_i) =$$

$$= p_{ij}(A)$$

Hay que notar que muchas familias de números difusos verifican que $L \equiv R$, como por ejemplo, los números difusos de tipo trapezoidal, los triangulares, los intervalares, los triangulares a la derecha y los triangulares a la izquierda.

1.2.6. Regiones de dominancia en números difusos

Cuando los parámetros λ y μ de la función de orden son iguales, a la función $f_T(\cdot, \lambda, \lambda)$ se le llama función de orden media, y la notaremos como

$$\forall A \in \Omega \quad f_T(A, \lambda, \lambda) = f_\lambda(A)$$

Esta función de orden selecciona un único punto medio para representar la posición de cada α-corte $A_\alpha = [a_\alpha, b_\alpha]$. El parámetro λ puede interpretarse como un grado de optimismo-pesimismo que deberá elegir el decisor. Cuanto más optimista sea el decisor, más próximo a 0 deberá elegir el parámetro λ, y cuanto más pesimista más próximo a 1.

Ejemplo 1.2.6 *Sea $Y = \{0, 1/2, 1\}$ el sistema de orden, y el número difuso representado en la figura 1.12.*
Si se toma como único parámetro de posición $\lambda = 1$, los puntos a comparar serían los tres marcados en la figura 1.12, y serían los peores que el decisor podría elegir para la comparación, ya que serían los menores valores que obtendría con este sistema de orden:

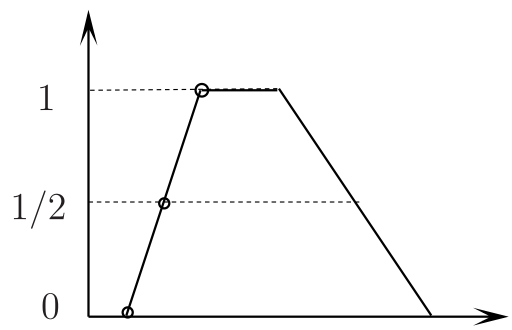

Figura 1.12: Elección de λ pesimista.

Si se toma como único parámetro de posición $\lambda = 1/2$, los puntos elegidos por el decisor para la comparación serían los marcados en la figura 1.13, que toman valores intermedios:

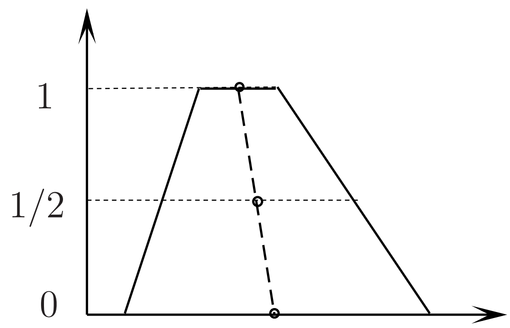

Figura 1.13: Elección de λ intermedia.

Y si se toma como único parámetro de posición $\lambda = 0$*, los puntos a comparar serían los tres marcados en la figura 1.14, y serían los mejores que el decisor podría elegir para la comparación, ya que serían los mayores valores que obtendría con este sistema de orden:*

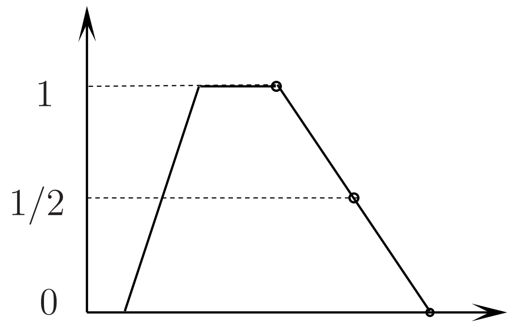

Figura 1.14: elección de λ optimista.

Si el parámetro λ no es conocido a priori, siempre es posible calcular la región de dominancia

$$R(A,B) = \{\lambda \in [0,1] / f_\lambda(A) \leq f_\lambda(B)\}$$

El estudio de esta región se puede usar como orientación para ordenar los números difusos A y B. Esto nos dará una visión general del problema de la elección del parámetro λ, y nos facilitará el tomar una postura optimista o pesimista. Además el estudio de la región de dominancia permitirá al decisor conocer la sensibilidad del parámetro λ, es decir, podremos saber si un pequeño cambio del parámetro modifica la decisión final.

Teorema 1.2.3 *Sean $A, B \in \Omega$ dos números difusos. Se tiene que $R(A, B)$ es $\emptyset$ o bien un intervalo contenido en* $[0, 1]$.

Demostración 1.2.4 *Ver [48].*

El conjunto $I(A, B) = R(A, B) \cap R(B, A)$, nos dará por tanto el intervalo en el cual los números difusos A y B son indiferentes.

Ejemplo 1.2.7 *Consideremos los siguientes números difusos trapezoidales*

$$A = (1, 2, 4, 1), \quad B = (3, 4, 4, 1), \quad C = (1, 4, 4, 1)$$

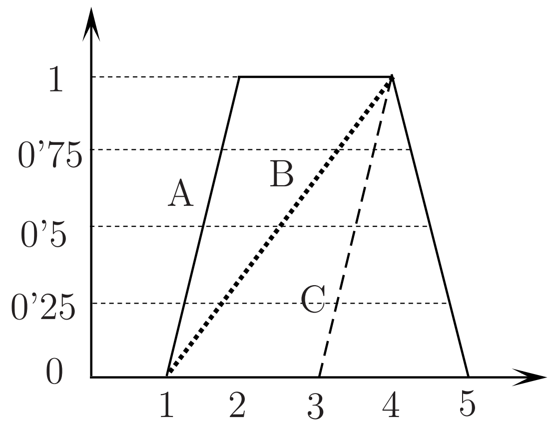

Figura 1.15: Números difusos A, B y C.

Tomando el siguiente sistema de orden

$$Y = \{0, 0'25, 0'5, 0'75, 1\}$$

concluimos que:

- *C domina a B,* $\forall\lambda \in [0,1]$.
- *B domina a A,* $\forall\lambda \in [0,1]$.
- *A y B son indiferentes para* $\lambda = 0$.
- *B y C son indiferentes para* $\lambda = 0$.

Es decir

$$R(A,B) = [0,1] \qquad R(B,C) = [0,1] \qquad I(A,B) = \{0\} \qquad I(B,C) = \{0\}$$

Si tomamos el mismo sistema de orden que en el caso anterior, y consideramos los números difusos triangulares

$$D = (2,3,1) \quad E = (4,4,1)$$

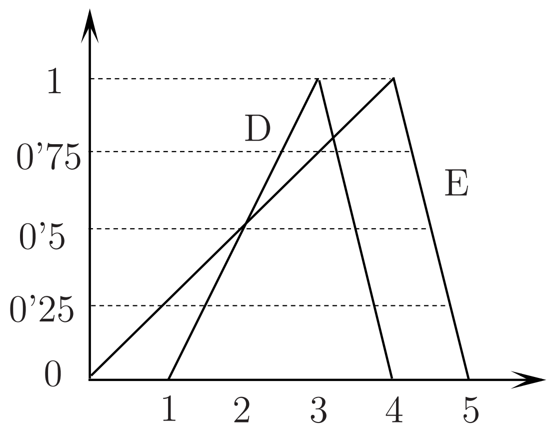

Figura 1.16: Números difusos D y E.

En este caso se tiene que:

- *E domina a D,* $\forall\lambda \in [0, 0'5]$ *(elecciones optimistas).*

Es decir

$$R(D,E) = [0, 0'5] \qquad R(E,D) = I(D,E) = \emptyset$$

Por último volveremos a tomar el mismo sistema de orden y los números triangulares:

$$F = (1, 4, 1) \qquad G = (2, 4, 2)$$

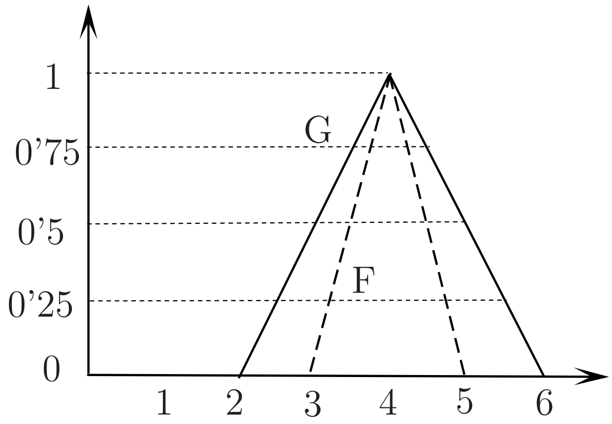

Figura 1.17: Números difusos F y G.

La clasificación sería:

- *G domina a F,* $\forall\lambda \in [0, 0'5]$ *(elecciones optimistas).*
- *F domina a G,* $\forall\lambda \in [0'5, 1]$ *(elecciones pesimistas).*
- *F y G son indiferentes para* $\lambda = 0, 5$.

Es decir

$$R(F,G) = [0, 0'5] \qquad R(G,F) = [0'5, 1] \qquad I(F,G) = \{0'5\}$$

1.3. Máximo y mínimo de números difusos

Los órdenes estándar que usamos para ordenar los números difusos son parciales. Por ello, si tenemos un conjunto de números difusos, y queremos estudiar la idea del mínimo (o máximo) de dichos números difusos, debemos tener en cuenta que habrá muchos números difusos que sean más pequeños (o mayores) que los dados según el orden estándar elegido, pero habrá muchos otros que no sean comparables con estos números difusos, y por lo tanto ni mayores ni menores. Por ello el mínimo (o máximo) de varios números difusos está formado por un conjunto de números difusos que no son comparables entre si. Para una mayor operatividad, hemos elegido un número difuso que es menor (o mayor) que todos los números difusos de este conjunto, y lo hemos definido como el mínimo (o máximo) de varios números difusos.

Definición 1.3.1 *Sean $D_1, \ldots, D_l$ números difusos. Sea $\preceq$ un orden estándar con función de orden estándar:*

$$f(\cdot) = (p_{11}(\cdot), \ldots, p_{1k}(\cdot), \ldots, p_{p1}(\cdot), \ldots, p_{pk}(\cdot))$$

siendo p el número de α-cortes y k el número de parámetros de posición en cada α-corte. Un mínimo de los números difusos $D_1, \ldots, D_l$ según el orden estándar $\preceq$, es un número difuso M que verifique,

$$p_{ij}(M) = \min_{1 \leq s \leq l} p_{ij}(D_s) \quad \forall i = 1, \ldots, p \quad \forall j = 1, \ldots, k$$

Definición 1.3.2 *Sean $D_1, \ldots, D_l$ números difusos. Sea $\preceq$ un orden estándar con función de orden estándar:*

$$f(\cdot) = (p_{11}(\cdot), \ldots, p_{1k}(\cdot), \ldots, p_{p1}(\cdot), \ldots, p_{pk}(\cdot))$$

siendo p el número de α-cortes y k el número de parámetros de posición en cada α-corte. Un máximo de los números difusos $D_1, \ldots, D_l$ según el orden estándar $\preceq$, es un número difuso N que verifique,

$$p_{ij}(M) = \max_{1 \leq s \leq l} p_{ij}(D_s) \quad \forall i = 1, \ldots, p \quad \forall j = 1, \ldots, k$$

Hay que notar que el máximo y el mínimo de varios números difusos son clases de equivalencia, es decir, están formadas por números difusos equivalentes entre si. De cada clase elegiremos un representante cualquiera como máximo o mínimo.

Ejemplo 1.3.1 *Sean los números difusos trapezoidales* $A = (2, 3, 4, 5)$ *y* $B = (1, 6, 7, 8)$*. Sea el orden difuso* $(\preceq_e, \{0, 1\}, \{1\})$*.*

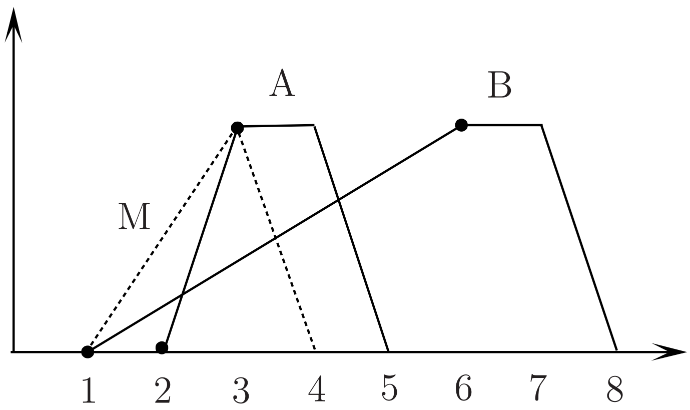

Figura 1.18: Mínimo de A y B.

Se tiene que

$$p_{11}(A) = 2 \quad p_{11}(B) = 1 \quad p_{12}(A) = 3 \quad p_{12}(B) = 6$$

$$\min\{p_{11}(A), p_{11}(B)\} = 1 \qquad \min\{p_{12}(A), p_{12}(B)\} = 3$$

El número triangular $M = (1, 3, 4)$ *es un mínimo de* A *y* B*, ya que* $p_{11}(M) = 1$ *y* $p_{12}(M) = 3$*, pero el número difuso trapezoidal* $(1, 3, 4, 5)$ *también verifica las propiedades necesarias para ser mínimo de los números difusos* A *y* B*, ya que son números equivalentes para este orden difuso, por lo que cualquiera de los dos podría elegirse como representante de la clase de equivalencia que determina el mínimo de los números difusos* A *y* B*.*

Observamos que el mínimo para cada p_{ij} se puede conseguir con un número difuso A_s distinto, de entre los que deseamos minimizar. Análogamente ocurre para el máximo.

Proposición 1.3.1 *Sean $A, B \in \Omega$ dos números difusos del mismo tipo, es decir, con las mismas funciones L y R. Se verifica que:*

$$máx\{\tilde{0}, A\} + máx\{\tilde{0}, B\} = máx\{\tilde{0}, A, B, A + B\}$$

siendo $\tilde{0}$ el número difuso $(0, 0, 0, 0)_{L-R}$.

Demostración 1.3.1 *La igualdad que vamos a probar lo que nos indica es que estos dos números difusos son indiferentes para un determinado orden estándar. Sabemos que un orden estándar queda determinado por $p \cdot k$ funciones p_{ij} que van de los números difusos en $\mathbb{R}$. Por lo tanto basta probar que:*

$$p_{ij}(máx\{\tilde{0}, A, B, A + B\}) = p_{ij}(máx\{\tilde{0}, A\} + máx\{\tilde{0}, B\}) \qquad \forall i = 1, \ldots, p \quad \forall j = 1, \ldots k$$

Todas las igualdades que desarrollamos a continuación son ciertas gracias a que los números difusos A y B son del mismo tipo.

$$p_{ij}(máx\{\tilde{0}, A\} + máx\{\tilde{0}, B\}) = p_{ij}(máx\{\tilde{0}, A\}) + p_{ij}(máx\{\tilde{0}, B\}) =$$

$$= máx\{0, p_{ij}(A)\} + máx\{0, p_{ij}(B)\} = máx\{0, p_{ij}(A), p_{ij}(B), p_{ij}(A) + p_{ij}(B)\} =$$

$$= máx\{0, p_{ij}(A), p_{ij}(B), p_{ij}(A + B)\} = p_{ij}(máx\{\tilde{0}, A, B, A + B\})$$

1.4. Cuadro-resumen de familias de números y órdenes difusos

Familias de números difusos		
Tipo	**Nomenclatura**	**Página**
De tipo L-R	Ω	Página 18
Trapezoidal	T	Página 19
Triangular	Δ	Página 20
Intervalar	I	Página 21
Triangular a la derecha	Δ_D	Página 22
Triangular a la izquierda	Δ_I	Página 22

Órdenes difusos		
Tipo	**Nomenclatura**	**Página**
Vectorial	$\preceq_f$ ó $\preceq$	Página 29
Estándar	$(\preceq_e, \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\})$	Página 31
Central	$(\preceq_c, \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\})$	Página 35
Familia de funciones U	$\preceq_U$	Página 36
Orden 1	$\preceq_1$	Página 36
Orden 2	$\preceq_2$	Página 36
Orden 3	$\preceq_3$	Página 36

Capítulo 2

Juegos cooperativos con pagos difusos

2.1. Teoría general

Sea Ω el conjunto de los números e intervalos difusos de tipo L-R[1]. Un juego cooperativo difuso (N, v) está definido por un conjunto $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, a cuyos elementos llamamos jugadores y una función $v : 2^N \cup \emptyset \to \Omega$, tal que $v(\emptyset) = 0$, llamada función característica. Dicha función da un número difuso a cada coalición, el cual representa el valor de la coalición S en el juego. Denotaremos por FG^n a la familia de todos los juegos cooperativos difusos. Destaquemos que los juegos cooperativos escalares se pueden considerar casos particulares sin más que considerar números difusos con "amplitud" nula.

Ejemplo 2.1.1 *Para elaborar un determinado producto hacen falta dos tipos de máquinas distintas. El precio del producto ya terminado en el mercado puede oscilar dependiendo de la oferta y la demanda, además la maquinaria es manejada por operarios los cuales no son todos igualmente eficientes, por lo tanto la producción puede variar en un cierto grado.*
Las empresas A,B y C poseen máquinas para elaborar el producto en cuestión. La empresa A sólo posee maquinaria de uno de los dos tipos, luego por si sola las ganancias que obtendría por la venta del producto serían nulas. Las empresas B y C sí disponen de los dos tipos de máquinas necesarias para la producción. La empresa B, debido a la cantidad de máquinas que posee, a la eficiencia de sus empleados y a la oscilación de los precios, se estima que

[1] Usualmente hablaremos de números difusos pero nos referiremos tanto a números como a intervalos, a no ser que especifiquemos lo contrario

ganará aproximadamente de 2 a 4 millones de euros con la venta del producto, y la empresa C aproximadamente de 3 a 5 millones de euros, pero esta segunda empresa, debido a que tiene bastantes compradores estables suele tener ganancias más próximas a 5 millones de euros que a 3 millones.
Si las empresas A y B decidiesen unirse, ganarían en torno a 3 millones de euros, pero hay algo más de probabilidad de que la ganancia sea superior. Si las que se unen son las empresas A y C, ganarían aproximadamente de 5 a 7 millones de euros. Sin embargo si las empresas fusionadas fuesen la B y la C, las ganancias ascenderían a alrededor de 6 a 10 millones de euros, con algo más de tendencia a los valores próximos a los 10 millones. Por último si las tres empresas decidiesen trabajar juntas, ganarían en torno a unos 14 ó 16 millones de euros.
Esta situación se podría traducir, siendo 1 la empresa A, 2 la empresa B y 3 la empresa C, en el siguiente juego difuso;

$v(1)$	$v(2)$	$v(3)$	$v(1,2)$	$v(1,3)$	$v(2,3)$	$v(N)$
$(0,0,0,0)$	$(1,2,4,1)$	$(1,3,5,2)$	$(1,3,3,2)$	$(1,5,7,1)$	$(1,6,10,2)$	$(2,14,16,2)$

Lo usual es que las tres empresas decidan cooperar y que se repartan el dinero conseguido entre ellas, en base a lo que puedan conseguir por agrupaciones parciales.

Para indicar qué familia de números difusos representa los pagos de un juego difuso, y qué orden difuso se usará para comparar los pagos de dicho juego, denotaremos los juegos difusos por $FG^n(Tipo\ de\ números\ difusos/orden\ difuso)$. Por ejemplo a la familia de juegos difusos con pagos dados por números triangulares y orden difusos estándar con sistema de orden $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\}$ y parámetros de posición $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_k\}$, la denotamos por $FG^n(\Delta/(\preceq_e, \{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\},\{\lambda_1,\ldots,\lambda_k\}))$, y si no fuese necesario especificar el sistema de orden y los parámetros de posición, simplemente lo denotaremos por $FG^n(\Delta/\preceq_e)$. Cuando sólo se indica $(N,v)\in FG^n$ nos referimos a $(N,v)\in FG^n(\Omega,\preceq)$.

Dado un juego difuso $(N,v)\in FG^n$, este debería verificar determinadas propiedades que induzcan a los jugadores a que se produzca la cooperación. Algunas de las más intuitivas son:

- **Monotonía**: Un juego $(N, v) \in FG^n$ es monótono, si dadas dos coaliciones $S, T \subset N$ con $S \subset T$;

$$v(S) \preceq v(T)$$

  Esta propiedad nos dice que cuanto mayor sea la coalición formada mayor será el pago de esta, este hecho lleva a los jugadores a querer cooperar para formar una coalición lo mayor posible.

- **Superaditividad**: Un juego $(N, v) \in FG^n$ es superaditivo, si dadas dos coaliciones $S, T \subset N$ con $S \cap T = \emptyset$;

$$v(S) + v(T) \preceq v(S \cup T)$$

  Si sumamos las ganancias que obtendrían las dos coaliciones por separado, el resultado será menor o igual que el pago recibido por la unión de las dos coaliciones. Este hecho incita a los jugadores a formar la gran coalición, N.

2.1.1. Repartos en cooperación

Una cuestión importante que surge en este tipo de juegos, es cómo repartir el número difuso $v(N)$ entre los distintos jugadores.
La extensión natural de la idea de asignación (o preimputación) usada en los juegos escalares a los juegos cooperativos difusos, consiste en usar una asignación difusa

$$X = (X_1, \ldots, X_n)$$

donde X_i denota un número difuso que será el pago recibido por el i-ésimo jugador. Asumiremos que todo el valor de $v(N)$ debe repartirse entre los jugadores de N. Este es el conocido principio de eficiencia. Por lo tanto, de aquí en adelante consideraremos sólo asignaciones que satisfagan;

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = v(N).$$

Ejemplo 2.1.2 *(Continuación 2.1.1) La asignación difusa igualitaria :*

$$X_1 = X_2 = X_3 = (\frac{2}{3}, \frac{14}{3}, \frac{16}{3}, \frac{2}{3})$$

verificaría la condición anterior,para el juego cooperativo de las tres empresas.

Teorema 2.1.1 *Dado un juego difuso (N, v), siempre existe una asignación $X = (X_1, \ldots, X_n)$ con $X_i \in \Omega$, tal que, $\sum_{i=1}^{n} X_i = v(N)$.*

Demostración 2.1.1 *Basándonos en el teorema 1.1.1, dados $A \in \Omega$ y n un número natural, existen n números difusos, $A_1, \ldots, A_n$, tales que $\sum_{i=1}^{n} A_i = A$.*

El conjunto de asignaciones de un juego difuso (N, v) se denota por $I^*(N, v)$. Formalmente

$$I^*(N, v) = \left\{(X_1, \ldots, X_n) \in \Omega^n / \sum_{i=1}^{n} X_i = v(N)\right\}$$

De entre todas las asignaciones del juego $(N, v) \in FG^n$ estaremos interesados en aquellas que no están dominadas por el valor dado a la coalición. Por lo tanto, necesitaremos algún orden para realizar estas comparaciones.
Supongamos que existe un orden cuasi-parcial $\succeq$ (reflexivo y transitivo) definido en el conjunto Ω. Representaremos por $\succ$ al correspondiente orden cuasi-parcial estricto. Asociada con $\succeq$ hay otra relación binaria $\succsim$ definida por

$$X \succsim Y \quad \Leftrightarrow Y \not\succeq X.$$

Impondremos además la siguiente condición

$$\forall X, Y \in \Omega, \quad X \succsim Y \Rightarrow \exists Z \in \Omega, \quad X \succsim Z \succ Y.$$

Es decir, el orden debe ser denso. Notar que esta condición implica la densidad de nuestro conjunto de números difusos con respecto al orden inducido. Esta condición no es artificial, ya que muchos órdenes difusos la cumplen, como por ejemplo $\preceq_1$, $\preceq_2$ y $\preceq_3$ vistos en el capítulo anterior y todos los órdenes difusos estándar.

Ejemplo 2.1.3 *Un orden importante a considerar en Ω es el inducido por un conjunto finito de funciones de utilidad, el cual es una particularización del orden definido por una familia de funciones U (Ver sección 1.4).Es frecuente que las utilidades sean las valoraciones individuales de los jugadores. Asumamos que cada jugador j tiene su propia utilidad $u_j : \Omega \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$. Por lo tanto cada agente j comparará dos números difusos de la siguiente forma: X es al menos tan preferido como Y si y sólo si $u_j(X) \geq u_j(Y)$. Obviamente, lo usual es que no todas las funciones de utilidad induzcan el mismo orden en Ω, por lo cual no habrá un acuerdo sobre que orden difuso usar, aunque estos ordenes inducidos por cada función de utilidad en Ω son órdenes totales. El orden inducido por estas funciones de utilidad puede ser representado por el siguiente orden parcial en Ω:*
Sea $u_j : \Omega \to \mathbb{R}$ una función de utilidad del jugador j-ésimo. Sea $u = (u_1, \ldots, u_n)$ la siguiente función:

$$u : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

$$X \mapsto (u_1(X), \ldots, u_n(X)).$$

Definimos el orden parcial $\succeq_u$ como

$$X \succeq_u Y \Leftrightarrow u(X) \geq u(Y),$$

donde $\geq$ significa mayor o igual componente a componente en $\mathbb{R}^n$.

En los juegos escalares, dominar una asignación con respecto a una coalición significa encontrar otra asignación que dé más valor a los miembros de esa coalición (o equivalentemente, que no dé menor valor). Sin embargo, en los juegos difusos las relaciones usuales entre números difusos son órdenes parciales. Por lo tanto obtener mayor valor no es equivalente a no obtener menor valor.
Estas dos formas de analizar la situación nos llevan a dos conceptos distintos de solución para estos juegos. En el primero, no admitiremos un pago menor al que podemos garantizarnos nosotros mismos. Esto nos llevará a conseguir más. En el segundo, aceptaremos pagos que no sean mejores pero al menos que tampoco sean peores.

Extendamos a los juegos difusos la dominancia a través de coaliciones existente en los juegos escalares, dependiendo del orden $\Re \in \{\succeq, \succsim\}$ usado.

Definición 2.1.1 *Sean $X, Y \in I^*(N, v)$ y $S \subseteq N$ una coalición. Y domina a X a través de S según el orden $\Re$ y lo denotaremos por $Y\ dom_{\Re}^S\ X$ si $Y_S \succ X_S$ y $v(S)\Re Y_S$, donde $X_S = \sum_{i \in S} X_i$.*

Ejemplo 2.1.4 *(Continuación 2.1.1) Consideremos la coalición $S = \{2, 3\}$ del juego difuso $(N, v) \in FG^3(T/\preceq_1)$, definido en el ejemplo anterior, y la asignaciones;*

$$X = (X_1, X_2, X_3) \qquad Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$$

$$X_1 = (\frac{2}{3}, 9, 10, \frac{2}{3}) \qquad Y_1 = (\frac{2}{3}, 8, 9, \frac{2}{3})$$
$$X_2 = (\frac{2}{3}, 2, 3, \frac{2}{3}) \qquad Y_2 = (\frac{2}{3}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{2}{3})$$
$$X_3 = (\frac{2}{3}, 3, 3, \frac{2}{3}) \qquad Y_3 = (\frac{2}{3}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{2}{3})$$

Se tiene que $Y\ dom_{\preceq_1}^S\ X$, ya que $X_S \prec_1 Y_S$:

$$X_S = (\frac{4}{3}, 5, 6, \frac{4}{3}) \qquad Y_S = (\frac{4}{3}, 6, 7, \frac{4}{3})$$

$$5 - \frac{4}{3} < 6 - \frac{4}{3} \qquad 5 < 6 \qquad 6 < 7 \qquad 6 + \frac{4}{3} < 7 + \frac{4}{3}$$

y además $Y_S \preceq_1 v(S)$:

$$Y_S = (\frac{4}{3}, 6, 7, \frac{4}{3}) \qquad v(S) = (1, 6, 10, 2)$$

$$6 - 1 \geq 6 - \frac{4}{3} \qquad 6 \geq 6 \qquad 10 \geq 7 \qquad 10 + 2 \geq 7 + \frac{4}{3}$$

Por lo tanto podemos concluir que a las empresas B y C se pueden negar a aceptar la asignación X, ya que existen otras asignaciones, por ejemplo Y, que aún siendo peores que lo que obtendrían las dos empresas uniéndose, $v(S)$, son mejores sus asignaciones conjuntas en Y que en X.

Definiremos ahora el concepto de imputaciones no dominadas por asignaciones, pues deseamos escoger asignaciones que no estén dominadas.

Definición 2.1.2 *Una imputación $X \in I(N,v)$ del juego difuso $(N,v) \in FG^n$ no está dominada por asignaciones, si para cada coalición $S \subseteq N$ no existe ninguna asignación $Y \in I^*(N,v)$ tal que $Y\ dom_{\Re}^S\ X$ con $\Re \in \{\preceq, \precsim\}$. Este conjunto, según el orden que usemos, viene dado por:*

$$NDIA(N,v) = \{X \in I(N,v) / \nexists S \subseteq N, Y \in I^*(N,v), Y \neq X : Y\ dom_{\preceq}^S\ X\}$$

$$NDIA^D(N,v) = \{X \in I(N,v) / \nexists S \subseteq N, Y \in I^*(N,v), Y \neq X : Y\ dom_{\precsim}^S\ X\}$$

Se tiene que, cuanto más fuerte sea la relación de orden usada más grande será el correspondiente conjunto $NDIA$, es decir

$$NDIA^D(N,v) \subseteq NDIA(N,v).$$

2.1.2. Core de un juego difuso

Este tipo de repartos no dominados son interesantes ya que no tienen repartos alternativos "mejores". No obstante vamos a ver que estos conjuntos tienen una expresión más fácil de interpretar.

Lo mínimo que debemos imponer a las asignaciones para que los jugadores no las rechacen, es que cada agente i obtenga un pago X_i que no sea peor que el valor $v(i)$ dado por la función característica del juego.

El conjunto de asignaciones que cumplen esta propiedad se denominan imputaciones del juego.

$$I(N,v) = \{X \in I^*(N,v) : X_i \succsim v(i),\ \forall i\}.$$

Entre todas estas imputaciones que verifican el principio de racionalidad individual, nos interesarán sólo aquellas que no estén dominadas con respecto a ningún jugador. Así, ningún jugador tendrá ningún incentivo para quejarse por su asignación. Por la tanto tendremos un conjunto estable en ese sentido.

El siguiente paso será imponer la racionalidad colectiva a las asignaciones que nos interesarán para nuestro concepto de solución.

Definición 2.1.3 *El core del juego difuso* $(N;v) \in FG^n(\Omega/\preceq)$ *se define como el conjunto de asignaciones tales que* X_S *no está dominada por* $v(S)$*, para toda coalición* S*, y se denota, según el orden usado, por:*

$$core(N,v) = \{X \in I^*(N,v)/X_S \succeq v(S)\ \forall S \subset N\}.$$

$$core^D(N,v) = \{X \in I^*(N,v)/X_S \succsim v(S)\ \forall S \subset N\}.$$

Al core que surge de usar el orden $\preceq$, $core(N,v)$, lo llamaremos core de preferencia. Si usamos el orden $\precsim$ obtendremos $core^D(N,v)$, llamado core de no dominancia. Dichos conjuntos verifican la siguiente relación:

$$core(N,v) \subseteq core^D(N,v).$$

En el caso que sea necesario, por ejemplo cuando un mismo juego difuso (N,v) vaya a ser valorado por dos órdenes difusos distintos, al core de preferencia y al core de no dominancia, los denotaremos por $core(N,v,\preceq)$ y $core^D(N,v,\preceq)$, para dejar patente el orden difuso que estamos usando.

Los cores anteriormente definidos, se pueden caracterizar alternativamente usando el concepto de dominancia.

Teorema 2.1.2 *Se verifica la siguiente relación:*

$$1.\ NDIA^D(N,v) = core(N,v)$$

$$2.\ NDIA(N,v) = core^D(N,v)$$

Demostración 2.1.2 *1. Asumamos que* $X \notin NDIA^D(N,v)$*, entonces debe existir una* *coalición* $S \subset N$ *e* $Y \in I^*(N,v)$ *tales que:*

$$v(S) \succsim Y_S \succ X_S$$

Esto implica que no se puede dar que $X_S \succeq v(S)$*, y por lo tanto* $X \notin core(N,v)$*.*
Por el contrario, supongamos ahora que $X \notin core(N,v)$*. En dicho caso debe existir alguna coalición* $S \subseteq N$ *tal que no se dé* $X_S \succeq v(S)$*, y por lo tanto podemos afirmar que* $v(S) \succsim X_S$*. Aplicando la propiedad de densidad que hemos exigido a nuestros órdenes, debe existir* $Y \in \Omega$ *satisfaciendo:*

$$v(S) \succsim Y \succ X_S,$$

y por lo tanto $X \notin NDIA^D(N,v)$*.*
2. Asumamos que $X \notin NDIA(N,v)$*, por lo tanto existe una coalición* $S \subseteq N$ *y una imputación* $Y \in I^*(N,v)$*,* $Y \neq X$*, tal que* $Y dom^S_{\succsim} X$*, o lo que es lo mismo,* $Y_S \succ X_S$ *y* $v(S) \succeq Y_S$*, lo cual está en contradicción con que* $X_S \succsim v(S)$*, y por lo tanto* $X \notin core^D(N,v)$*.*
Por el contrario, supongamos ahora que $X \notin core^D(N,v)$*, esto implica que existe una coalición* $S \subseteq N$ *tal que no se tiene que* $X_S \succsim v(S)$*, por lo tanto* $v(S) \succeq X_S$ *y* $X_S \neq v(S)$*. Construimos una asignación* Y *del modo siguiente:*

$$Y_i = \begin{cases} \frac{v(S)}{|S|} & \forall i \in S \\ 0 & \forall i \notin S \end{cases}$$

Esta asignación domina a X *según la coalición* S *y* $\succeq$*, dado que* $Y_S = v(S) \succeq X_S$*,* $Y_S \neq X_S$*, e* $v(S) \succeq Y_S$*, contradiciendo que* $X \in NDIA(N,v)$*.*

Definición 2.1.4 *Sea* $\preceq^1$ *y* $\preceq^2$ *dos órdenes parciales difusos. Decimos que* $\preceq^2$ *es más débil que* $\preceq^1$ *si* $\forall X, Y \in \Omega$ *tal que* $X \preceq^1 Y$ *implica que* $X \preceq^2 Y$*.*

Teorema 2.1.3 *Sean* $\preceq^1$ *y* $\preceq^2$ *dos órdenes difusos con* $\preceq^2$ *más débil que* $\preceq^1$*. Sea* (N,v) *un juego difuso, se tiene que:*

$$core(N,v,\preceq^1) \subseteq core(N,v,\preceq^2)$$

Demostración 2.1.3 *Sea* $X \in core(N,v,\preceq^1)$ *esto implica que* $X \in I^*(N,v)$ *y* $v(S) \preceq^1 X_S$

$\forall S \subset N$. Como por hipótesis $\preceq^2$ es más débil que $\preceq^1$, tenemos que $v(S) \preceq^2 X_S$ $\forall S \subset N$, y por lo tanto $X \in core(N, v, \preceq^2)$.

Ejemplo 2.1.5 *(Continuación 2.1.1) Sea el juego difuso anteriormente definido*

$v(1)$	$v(2)$	$v(3)$	$v(1,2)$	$v(1,3)$	$v(2,3)$	$v(N)$
$(0,0,0,0)$	$(1,2,4,1)$	$(1,3,5,2)$	$(1,3,3,2)$	$(1,5,7,1)$	$(1,6,10,2)$	$(2,14,16,2)$

Consideremos dos órdenes estándar $(\preceq^1, \{0,1\}, \{1/2\})$ y $(\preceq^2, \{1\}, \{1/2\})$.
Consideremos la asignación $X = (X_1, X_2, X_3)$ siendo,

$$X_1 = (0, \frac{14}{3}, \frac{16}{3}, 0) \qquad X_2 = (0, \frac{14}{3}, \frac{16}{3}, 2) \qquad X_3 = (2, \frac{14}{3}, \frac{16}{3}, 0)$$

Esta asignación pertenece al $core(N, v, \preceq^2)$, ya que

$$5 = \frac{\frac{14}{3} + \frac{16}{3}}{2} \geq \frac{0+0}{2} = 0; \quad 5 = \frac{\frac{14}{3} + \frac{16}{3}}{2} \geq \frac{2+4}{2} = 3; \quad 5 = \frac{\frac{14}{3} + \frac{16}{3}}{2} \geq \frac{3+5}{2} = 4$$

$$10 = \frac{\frac{28}{3} + \frac{32}{3}}{2} \geq \frac{3+3}{2} = 3; \quad 10 = \frac{\frac{28}{3} + \frac{32}{3}}{2} \geq \frac{5+7}{2} = 6; \quad 10 = \frac{\frac{28}{3} + \frac{32}{3}}{2} \geq \frac{6+10}{2} = 8$$

Sin embargo $X \notin core(N, v, \preceq^1)$, ya que $v(3) \npreceq^1 X_3$

$$5 = \frac{\frac{14}{3} + \frac{16}{3}}{2} \geq \frac{3+5}{2} = 4; \qquad 4 = \frac{\frac{14}{3} - 2 + \frac{16}{3} + 0}{2} \ngeq \frac{3 - 1 + 5 + 2}{2} = 4,5.$$

El próximo resultado es un lema usado para dar una condición suficiente para que el core de no dominancia sea no vacío.

Definición 2.1.5 *Decimos que u es compatible con el orden parcial $\succeq$, si u es una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ verificando que para todo $X_1, X_2 \in \Omega$, $X_1 \succeq X_2 \Rightarrow u(X_1) \geq u(X_2)$.*

Ejemplo 2.1.6 *La función*

$$u : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$X = (\alpha, a, b, \beta)_{LR} \mapsto \frac{a+b}{2}$$

es compatible con el orden parcial $\succeq_1$. *Ya que si* $X \succeq_1 Y$, *siendo* $X = (\alpha, a, b, \beta)_{LR}$ *y* $Y = (\gamma, m, n, \delta)_{LR}$, *tenemos que* $X^L(\omega) \geq Y^L(\omega)$ *y* $X^R(\omega) \geq Y^R(\omega)$, $\forall \omega \in [0,1]$, *por lo tanto* $X^L(1) = a \geq Y^L(1) = m$ *y* $X^R(1) = b \geq Y^R(1) = n$ *concluyendo así que* $\frac{a+b}{2} \geq \frac{m+n}{2}$.

Definimos el conjunto $C(N, v_u) = \{X \in I^*(N, v) : u(v(S)) \leq u(X_S), \forall S \subseteq N\}$, siendo u una función compatible con el orden $\succeq$. Si todos los jugadores están de acuerdo en aceptar la función de utilidad u, el conjunto anteriormente definido podría considerarse una solución tipo core del juego. Nótese que tenemos un orden total, pero las asignaciones son vectores de números difusos.

Lema 2.1.1 *Para toda* u *que sea compatible con el orden parcial, se tiene que*

$$core(N, v) \subseteq C(N, v_u) \subseteq core^D(N, v)$$

Demostración 2.1.4 *Supongamos que* $X \in core(N, v)$, *pero* $X \notin C(N, v_u)$. *Entonces debe existir una coalición* S *tal que* $u(X_S) < u(v(S))$. *Sin embargo esto es imposible debido a que la función* u *es compatible con el orden parcial* $\succeq$.
Para probar la segunda inclusión, supongamos que $X \in C(N, v_u)$ *pero* $X \notin core^D(N, v)$. *Como* X *es una asignación, debe existir al menos una coalición* S *tal que* $v(S) \succeq X_S$. *Por lo tanto,* $u(v(S)) \geq u(X_S)$ *pero esto contradice que* $X \in C(N, v_u)$.

Este resultado nos asegura que para que el core de no dominancia sea no vacío, es suficiente probar que $C(N, v_u)$ es no vacío para alguna función u. Definamos el juego cooperativo escalar (N, v_u), donde la función característica viene dada por $v_u(S) = u(v(S))$ para toda $S \subseteq N$. Decimos que una función u es homogénea si $u(kX) = ku(X)$ para todo $X \in \Omega$ y $k \in \mathbb{R}$. Recordemos que en los juegos cooperativos escalares el core es no vacío si y sólo si el juego es balanceado [75].

Teorema 2.1.4 *Para toda función* u *homogénea y compatible con el orden parcial* $\succeq$ *se tiene que* $C(N, v_u)$ *no es vacío si y sólo si el juego* $(N; v_u)$ *es balanceado.*

Demostración 2.1.5 *Probaremos que si* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in core(N, v_u)$ *entonces la asignación difusa* $X = (X_1, \ldots, X_n)$ *definida por* $X_i = \frac{x_i}{u(v(N))} v(N)$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$ *está en*

$C(N, v_u)$.

Hay que probar que $\sum_{i=1}^n X_i = v(N)$ y que $u(v(S)) \leq u(X_S), \forall S \subseteq N$.

Como $x \in core(N, v_u)$ se tiene que $\sum_{i=1}^n x_i = v_u(N) = u(v(N))$ por lo tanto $\sum_{i=1}^n X_i = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{u(v(N))} v(N) = \frac{u(v(N))}{u(v(N))} v(N) = v(N)$ como queríamos probar.

Sea $S \subseteq N$, $u(X_S) = u\Big(\sum_{i \in S} X_i\Big) = u\Big(\frac{v(N)}{u(v(N))} \sum_{i \in S} x_i\Big)$, como u es homogénea tenemos que $u(X_S) = \frac{\sum_{i \in S} x_i}{u(v(N))} u(v(N)) = \sum_{i \in S} x_i = x_S$, por hipótesis $x \in core(N, v_u)$, por lo tanto

$$u(X_S) = x_S \geq v_u(S) = u(v(S)).$$

Por lo tanto $X \in C(N, v_u)$.

Ejemplo 2.1.7 *(Continuación 2.1.1)Sea el juego difuso $(N, v) \in FG^3(T/\preceq_1)$ definido anteriormente,*

$v(1)$	$v(2)$	$v(3)$	$v(1,2)$	$v(1,3)$	$v(2,3)$	$v(N)$
$(0,0,0,0)$	$(1,2,4,1)$	$(1,3,5,2)$	$(1,3,3,2)$	$(1,5,7,1)$	$(1,6,10,2)$	$(2,14,16,2)$

Sea la función u compatible con el orden parcial $\preceq_1$ definida como

$$u : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$X = (\alpha, a, b, \beta) \mapsto \frac{a+b}{2}$$

además tenemos que

$$core(N, v_u) = \{x = (x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 15,\ 0 \leq x_1,\ 3 \leq x_2,\ 4 \leq x_3,$$

$$3 \leq x_1 + x_2,\ 6 \leq x_1 + x_3,\ 8 \leq x_2 + x_3\}.$$

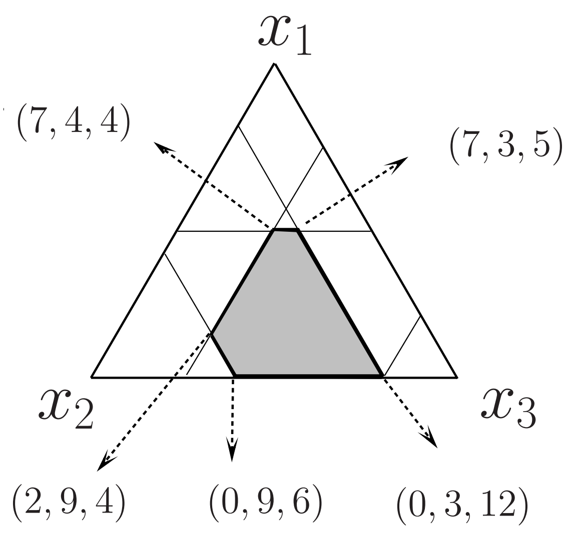

Figura 2.1: $core(N, v_u)$.

La zona sombreada representa el $core(N, v_u)$*, por lo tanto debido al teorema anterior se tiene que*

$$core(N, v_u) \neq \emptyset \Leftrightarrow (N, v_u) \text{ es balanceado} \Leftrightarrow C(N; v_u) \neq \emptyset \Rightarrow core^D(N, v) \neq \emptyset$$

Además basándonos en la demostración del teorema podemos encontrar un elemento de $C(N, v_u)$ *y por lo tanto de* $core^D(N, v)$*,*

$$X_1 = \frac{3}{15} \cdot (2, 14, 16, 2) = (\frac{2}{5}, \frac{14}{5}, \frac{16}{5}, \frac{2}{5})$$

$$X_2 = \frac{7}{15} \cdot (2, 14, 16, 2) = (\frac{14}{15}, \frac{98}{15}, \frac{112}{15}, \frac{14}{15})$$

$$X_3 = \frac{5}{15} \cdot (2, 14, 16, 2) = (\frac{2}{3}, \frac{14}{3}, \frac{16}{3}, \frac{2}{3})$$

También se pueden dar condiciones para que el core de preferencia sea no vacío. Supongamos que el orden parcial $\preceq_U$ está definido por una familia de funciones U. Es decir, $Y \preceq_U X \Leftrightarrow u(Y) \leq u(X) \forall u \in U$. Entonces se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.1.5 *Si* $(N, v) \in FG^n(\Omega/ \preceq_U)$*, se tiene que :*

$$core(N, v) = \bigcap_{u \in U} C(N, v_u).$$

Demostración 2.1.6 *La inclusión* $core(N, v) \subseteq \bigcap_{u \in U} C(N, v_u)$ *se debe a la definición de* $C(N, v_u)$*.*
Asumamos que $X \in \bigcap_{u \in U} C(N, v_u)$ *y* $X \notin core(N, v)$*. Por lo tanto deberá existir una coalición* $S \subseteq N$ *tal que* $X_S \not\succeq v(S)$*. Esto es equivalente a que exista una función* $\bar{u} \in U$ *tal que* $\bar{u}(v(S)) > \bar{u}(X_S)$*. Sin embargo esto significaría que* $X \notin \bigcap_{u \in U} C(N, v_u)$*.*

Este teorema es particularmente importante cuando el cono que caracteriza el orden parcial $\succeq$ está finitamente generado. Es decir, $X \succeq Y \Leftrightarrow u_j(X) \geq u_j(Y)\ j = 1, \ldots, k$; esta propiedad la verifican todos lo órdenes difusos vectoriales, en concreto los órdenes difusos estándar y los órdenes difusos definidos por utilidades individuales de cada uno de los agentes. Con este tipo de órdenes finitamente generados se verifica el siguiente lema.

Lema 2.1.2 $core(N, v) = \emptyset$ *si el juego escalar* (N, v_{u_j}) *no es balanceado para algún* $j = 1, \ldots, k$*.*

Corolario 1 *Sea un juego difuso* $(N, v) \in FG^n(T/ \preceq_1)$*, y consideramos las funciones:*

$$\begin{array}{cc} u_1 : \Omega \to \mathbb{R} & u_2 : \Omega \to \mathbb{R} \\ \\ X \mapsto u_1(X) = a & X \mapsto u_2(X) = b \\ u_3 : \Omega \to \mathbb{R} & u_4 : \Omega \to \mathbb{R} \\ X \mapsto u_3(X) = a - \alpha & X \mapsto u_4(X) = b + \beta \end{array}$$

Se tiene que:

$$core(N, v; \succeq_1) = \bigcap_{i=1}^{4} C(N, v_{u_i}).$$

Demostración 2.1.7 *El orden parcial $\preceq_1$ está finitamente generado por las cuatro funciones anteriores, ya que:*

$$X \succeq Y \Leftrightarrow X^L(0) \geq Y^L(0),\ X^R(0) \geq Y^R(0),\ X^L(1) \geq Y^L(1),\ X^R(1) \geq Y^R(1)$$

es decir, si $X = (\alpha, a, b, \beta)$ y $Y = (\gamma, m, n, \delta)$

$$X \succeq Y \Leftrightarrow a \geq m,\ b \geq n,\ a - \alpha \geq m - \gamma,\ b + \beta \geq n + \delta.$$

Por lo tanto basta tomar $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ y aplicar el teorema anterior.

También es posible reducir los elementos del core de preferencia y los del core de dominancia, imponiendo condiciones a la forma que deben tener los números difusos que son admitidos como pagos. Un caso particular, es por ejemplo, cuando nos restringimos a números difusos X_i, que sean proporciones del valor $v(N)$ dado a la gran coalición N, es decir, el agente i sólo aceptará pagos de la forma $r_i v(N)$ donde $r_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^n r_i = 1$. Por lo tanto obtendremos un core restringido de la forma

$$core_r(N, v) = \left\{X \in I^*(N, v) : X_i = r_i v(N), r_i \geq 0, \sum_{i=1}^n r_i = 1, (\sum_{i \in S} r_i) v(N) \succeq v(S)\ \forall S \subset N\right\}$$

$$core_r^D(N, v) = \left\{X \in I^*(N, v) : X_i = r_i v(N), r_i \geq 0, \sum_{i=1}^n r_i = 1, (\sum_{i \in S} r_i) v(N) \succsim v(S)\ \forall S \subset N\right\}$$

Obviamente, este conjunto está incluido en el correspondiente $core(N, v)$ o $core^D(N, v)$, y puede ser vacío mientras que el original no.

Supongamos que el orden parcial $\preceq_u$ está finitamente generado por las funciones $u = (u_1, \ldots, u_k)$, las cuales son homogéneas y $u_j(v(N)) \neq 0$ para todo $j = 1, \ldots, k$. Podemos caracterizar el core de este juego en términos de el juego escalar (N, v_M), donde la función característica viene dada por:

$$v_M(S) = \max_{j=1,\ldots,k} \frac{u_j(v(S))}{u_j(v(N))}, \quad S \neq \emptyset, \quad y \quad v_M(\emptyset) = 0.$$

Teorema 2.1.6 *Sea* $(N, v) \in FG^n(\Omega, \preceq_u)$, $core_r(N, v) \neq \emptyset$ *si y sólo si el juego* (N, v_M) *es balanceado.*

Demostración 2.1.8 *Bajo la suposición de homogeneidad de las funciones* u_i, *una asignación de la forma* $(r_1 v(N), \ldots, r_n v(N))$ *pertenece a el* $core_r(N, v)$ *si y sólo si para todo* $j = 1, \ldots, k$ *y para cada* $S \subseteq N$

$$\Big(\sum_{i \in S} r_i\Big) u_j(v(N)) \geq u_j(v(S))$$

Esto es equivalente a que $\sum_{i \in S} r_i \geq u_j(v(S))/u_j(v(N))$ *para todo* $j \in S$ *y para toda* $S \subseteq N$. *Por lo tanto* $(r_1, \ldots, r_n)$ *pertenece al core de* (N, v_M).

Ejemplo 2.1.8 *(Continuación 2.1.1) Sea* $(N, v) \in FG^n(T/ \preceq_1)$ *el juego del ejemplo 2.1.1, aplicando la definición de la función característica* v_M, *el juego* (N, v_M) *sería el siguiente:*

$v_M(1)$	$v_M(2)$	$v_M(3)$	$v_M(1,2)$	$v_M(1,3)$	$v_M(2,3)$	$v_M(N)$
0	$\frac{5}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{8}{18}$	$\frac{12}{18}$	1

$$core(N, v_M) = \{x = (x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq \frac{5}{18},\ x_3 \geq \frac{7}{18},$$

$$x_1 + x_2 \geq \frac{5}{18},\ x_1 + x_3 \geq \frac{8}{18},\ x_2 + x_3 \geq \frac{12}{18}\}.$$

Es fácil ver que este core es no vacío, por ejemplo $x = (\frac{2}{18}, \frac{7}{18}, \frac{9}{18}) \in core(N, v_M)$, *por lo tanto*

$$X_1 = x_1 \cdot v(N) = (\frac{4}{18}, \frac{28}{18}, \frac{32}{18}, \frac{4}{18}), \quad X_2 = x_2 \cdot v(N) = (\frac{14}{18}, \frac{98}{18}, \frac{112}{18}, \frac{14}{18}),$$

$$X_3 = x_3 \cdot v(N) = (1, \frac{126}{18}, \frac{144}{18}, 1)$$

$$X = (X_1, X_2, X_3) \in core_r(N, v, \succeq_1)$$

2.2. Core definido por una función de orden estándar

En este apartado vamos a estudiar el core para casos especiales de órdenes difusos. Nos centraremos en los órdenes difusos vectoriales que están definidos mediante una función de orden estándar, a los que llamábamos órdenes difusos estándar. Estos órdenes quedaban definidos por unos α-cortes y por unos parámetros de posición en cada α-corte, con ellos se obtenían valores que formaban un vector perteneciente a $\mathbb{R}^m$, los cuales comparábamos usando el orden Pareto.

Recordemos (ver definición 1.2.8), que dado un orden difuso estándar, las funciones p_{ij} : $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ son las que asocian a cada número difuso la posición dada por el parámetro j-ésimo, λ_j, en el α-corte i-ésimo. En el siguiente teorema usaremos los conjuntos $C(N, v_u)$, ya definidos en el lema 2.1.1, siendo $u = p_{ij}$, es decir a cada coalición $S \subseteq N$ le asociamos el valor $v_{p_{ij}}(S) = p_j(v(S)_{\alpha_i})$,

$$C(N, v_{p_{ij}}) = \{X \in I^*(N, v)/p_{ij}(v(S)) \leq p_{ij}(X_S)\ \forall S \subseteq N\} =$$

$$= \{X \in I^*(N, v)/p_j(v(S)_{\alpha_i}) \leq p_j(X_{S_{\alpha_i}})\ \forall S \subseteq N\}$$

Este conjunto se puede considerar una solución tipo core del juego $(N, v_{p_{ij}})$.

Teorema 2.2.1 *Sea $(N, v) \in FG^n(\Omega/(\preceq_e, \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}))$, el core de preferencia de este juego difuso viene dado por;*

$$core(N, v) = \bigcap_{i=1}^{p} \bigcap_{j=1}^{k} C(N, v_{p_{ij}})$$

Demostración 2.2.1 *Sean A y B dos números difusos, tenemos que*

$$A \preceq B \Leftrightarrow p(A_{\alpha_i}) \leq p(B_{\alpha_i}) \quad \forall i = 1, \ldots, p \Leftrightarrow p_j(A_{\alpha_i}) \leq p_j(B_{\alpha_i})$$

$$\forall i = 1, \ldots, p \quad \forall j = 1, \ldots, k \Leftrightarrow p_{ij}(A) \leq p_{ij}(B) \quad \forall i = 1, \ldots, p \quad \forall j = 1, \ldots, k$$

Por el teorema 2.1.5 obtenemos el resultado deseado.

Hay que notar que para pertenecer al $core(N, v)$, además de pertenecer a cada conjunto $C(N, v_{p_{ij}})$, la imputación X tiene que estar formada por n números difusos, es decir, cada $X_i = (\alpha_i, a_i, b_i, \beta_i)$ perteneciente a la imputación X, ha de verificar que $a_i \leq b_i$, $\alpha_i \geq 0$ y que $\beta_i \geq 0$, ya que en caso contrario no sería un número difuso.

Corolario 2 *Sea* $(N,v) \in FG^n(\Omega/(\preceq_e, \{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\}, \{\lambda_1,\ldots,\lambda_k\}))$. $core(N,v,\succeq) = \emptyset$ *si* $\exists i \in \{1,\ldots,p\}$ *y* $j \in \{1,\ldots,k\}$ *tal que el juego escalar* $(N, v_{p_{ij}})$ *no es balanceado.*

Demostración 2.2.2 *Este resultado se alcanza particularizando el teorema de Shapley-Bondareva escalar, como se hizo en el lema 2.1.2 visto anteriormente.*

Hay que notar que los conjuntos $C(N, v_{p_{ij}})$, no son exactamente cores de juegos escalares, ya que las imputaciones que los forman no están en $\mathbb{R}^n$ sino en Ω^n.
Para el corolario que veremos a continuación, en determinado momento, en lugar de denotar los números difusos trapezoidales por (α, a, b, β) como hacíamos habitualmente, los denotaremos por
$(A^L(0), A^L(1), A^R(1), A^R(0))$, siendo $A^L(1) = a$, $A^R(1) = b$, $A^L(0) = a - \alpha$ y $A^R(0) = b + \beta$.

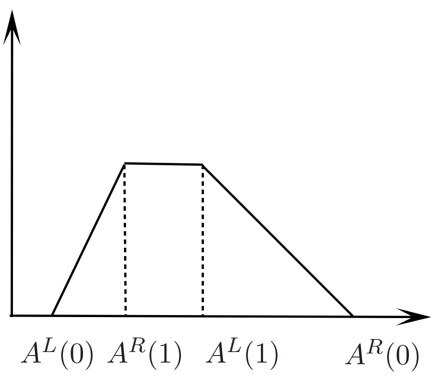

Figura 2.2: Número difuso trapezoidal.

A continuación estudiaremos casos concretos en los que elegiremos un tipo de números difusos y un orden estándar determinado, y aplicando el teorema 2.2.1 obtendremos el core de preferencia correspondiente.

Corolario 3 *Sea* $(N,v) \in FG^n(T/\preceq_1)$. *Se tiene que:*

$$core(N,v) = \bigcap_{i=1}^{2} \bigcap_{j=1}^{2} C(N, v_{p_{ij}})$$

$$siendo\ p_{11}((\alpha,a,b,\beta)) = a-\alpha \quad p_{12}((\alpha,a,b,\beta)) = b+\beta$$

$$p_{21}((\alpha,a,b,\beta)) = a \quad p_{22}((\alpha,a,b,\beta)) = b$$

Demostración 2.2.3 *Sea cada asignación X_i, el número difuso trapezoidal de la forma $X_i = (X_i^L(0), X_i^L(1), X_i^R(1), X_i^R(0))$. El core de este juego difuso particular será de la forma;*

$$core(N,v) = \{(X_1,\dots,X_n)/\sum_{i=1}^{n} X_i = v(N); v(S) \preceq_1 X_S\ \forall S \subset N\} =$$

$$= \{(X_1,\dots,X_n)/\sum_{i=1}^{n} X_i^L(0) = v(N)^L(0);\ \sum_{i=1}^{n} X_i^R(0) = v(N)^R(0);$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^L(1) = v(N)^L(1);\ \sum_{i=1}^{n} X_i^R(1) = v(N)^R(1);\ \sum_{i\in S} X_i^L(0) \geq v(S)^L(0);$$

$$\sum_{i\in S} X_i^R(0) \geq v(S)^R(0);\ \sum_{i\in S} X_i^L(1) \geq v(S)^L(1);\ \sum_{i\in S} X_i^R(1) \geq v(S)^R(1) \quad \forall S \subset N\} =$$

$$= \{X/\sum_{i=1}^{n} X_i^L(0) = v(N)^L(0); \sum_{i\in S} X_i^L(0) \geq v(S)^L(0) \quad \forall S \subset N\} \cap$$

$$\{X/\sum_{i=1}^{n} X_i^R(0) = v(N)^R(0); \sum_{i\in S} X_i^R(0) \geq v(S)^R(0) \quad \forall S \subset N\} \cap$$

$$\{X/\sum_{i=1}^{n} X_i^L(1) = v(N)^L(1); \sum_{i\in S} X_i^L(1) \geq v(S)^L(1) \quad \forall S \subset N\} \cap$$

$$\{X/\sum_{i=1}^{n} X_i^R(1) = v(N)^R(1); \sum_{i\in S} X_i^R(1) \geq v(S)^R(1) \quad \forall S \subset N\}$$

Hay que notar que al ser este un caso concreto en el que el orden elegido para comparar dos números difusos, lo que hace es comparar los cuatro valores $A^L(0)$, $A^R(0)$, $A^L(1)$, $A^R(1)$, se tiene que

$$X_S^L(0) = \sum_{i\in S} X_i^L(0) \quad X_S^R(0) = \sum_{i\in S} X_i^R(0) \quad X_S^L(1) = \sum_{i\in S} X_i^L(1) \quad X_S^R(1) = \sum_{i\in S} X_i^R(1).$$

Es decir, los extremos de los α-cortes, en este caso 1-cortes y 0-cortes, del número difuso X_S, coinciden con la suma de los extremos de los α-cortes de los números difusos X_i tales que

$i \in S$.

Esto no ocurre en general con otros α-cortes que no sean el 1-corte y el 0-corte, (sólo si exigimos que los números difusos X_i tengan en la función de pertenencia las mismas L y R).

Ejemplo 2.2.1 *(Continuación 2.1.1) El juego difuso anteriormente definido, se reescribiría con la nueva notación de la siguiente manera:*

$v(1)$	$v(2)$	$v(3)$	$v(1,2)$	$v(1,3)$	$v(2,3)$	$v(N)$
$(0,0,0,0)$	$(1,2,4,5)$	$(2,3,5,7)$	$(2,3,3,5)$	$(4,5,7,8)$	$(5,6,10,12)$	$(12,14,16,18)$

Hallemos el core de este juego difuso de números trapezoidales con el orden difuso $\preceq_1$.
Tendremos que calcular cuatro conjuntos;
***Primer conjunto**: Formado por las asignaciones $X_1 = (l_1, a_1, b_1, r_1)$, $X_2 = (l_2, a_2, b_2, r_2)$ y $X_3 = (l_3, a_3, b_3, r_3)$ que verifiquen:*

$$l_1 + l_2 + l_3 = 12 \quad l_1 \geq 0 \quad l_2 \geq 1 \quad l_3 \geq 2 \quad l_1 + l_2 \geq 2 \quad l_1 + l_3 \geq 4 \quad l_2 + l_3 \geq 5$$

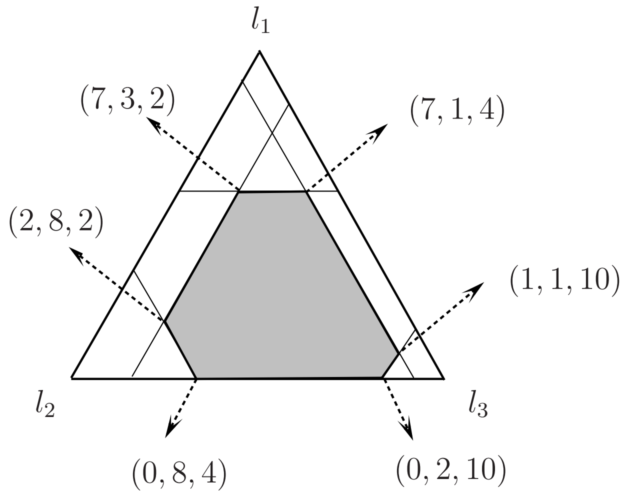

Figura 2.3: Primer conjunto.

***Segundo conjunto**: Formado por las asignaciones $X_1 = (l_1, a_1, b_1, r_1)$, $X_2 = (l_2, a_2, b_2, r_2)$*

y $X_3 = (l_3, a_3, b_3, r_3)$ *que verifiquen:*

$$r_1 + r_2 + r_3 = 18 \quad r_1 \geq 0 \quad r_2 \geq 5 \quad r_3 \geq 7 \quad r_1 + r_2 \geq 5 \quad r_1 + r_3 \geq 8 \quad r_2 + r_3 \geq 12$$

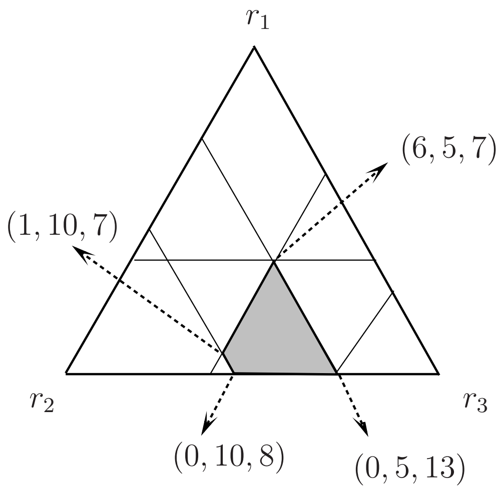

Figura 2.4: Segundo conjunto.

Tercer conjunto: *Formado por las asignaciones* $X_1 = (l_1, a_1, b_1, r_1)$, $X_2 = (l_2, a_2, b_2, r_2)$ *y* $X_3 = (l_3, a_3, b_3, r_3)$ *que verifiquen:*

$$a_1 + a_2 + a_3 = 14 \quad a_1 \geq 0 \quad a_2 \geq 2 \quad a_3 \geq 3 \quad a_1 + a_2 \geq 3 \quad a_1 + a_3 \geq 5 \quad a_2 + a_3 \geq 6$$

Cuarto conjunto: *Formado por las asignaciones* $X_1 = (l_1, a_1, b_1, r_1)$, $X_2 = (l_2, a_2, b_2, r_2)$ *y* $X_3 = (l_3, a_3, b_3, r_3)$ *que verifiquen:*

$$b_1 + b_2 + b_3 = 16 \quad b_1 \geq 0 \quad b_2 \geq 4 \quad b_3 \geq 5 \quad b_1 + b_2 \geq 3 \quad b_1 + b_3 \geq 7 \quad b_2 + b_3 \geq 10$$

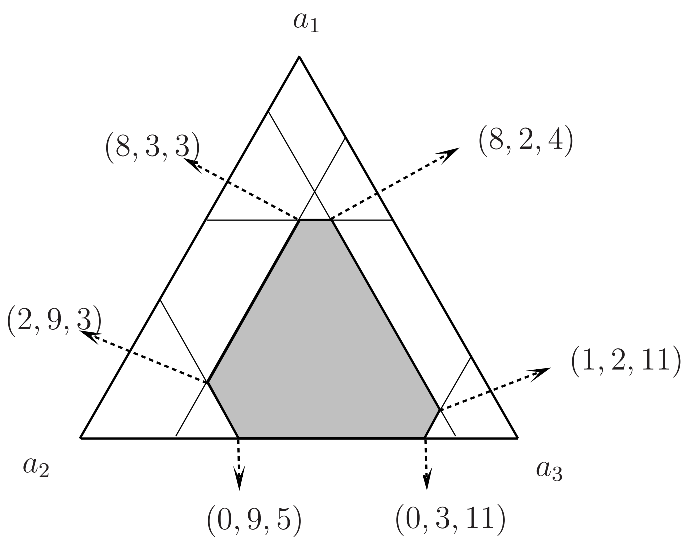

Figura 2.5: Tercer conjunto.

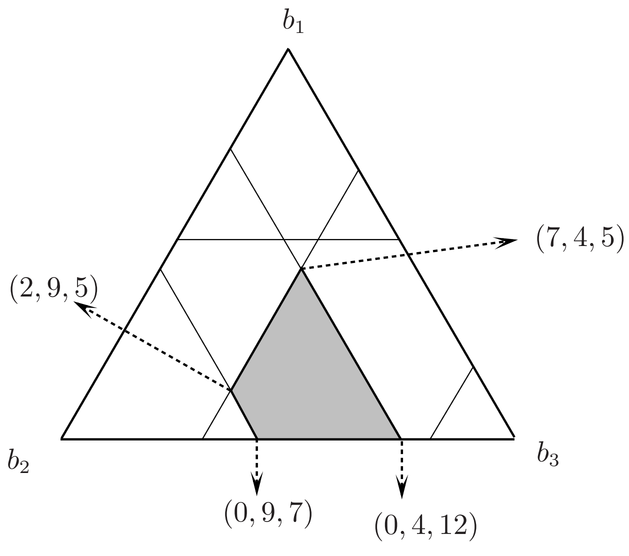

Figura 2.6: Cuarto conjunto.

Todas las imputaciones que pertenezcan a estos cuatro conjuntos y que además estén *formadas por números difusos, es decir, $a_i \leq b_i$, $l_i \leq a_i$ y $b_i \leq r_i$, formarán parte del core de preferencia del juego difuso. Por ejemplo eligiendo los siguientes valores de l_i, r_i, a_i y b_i:*

$$(l_1, l_2, l_3) = (2'5, 4, 5'5) \qquad (r_1, r_2, r_3) = (5, 5'5, 7'5)$$

$$(a_1, a_2, a_3) = (3, 5, 6) \qquad (b_1, b_2, b_3) = (4, 5, 7)$$

obtenemos la imputación $X = (X_1, X_2, X_3)$ perteneciente al core de preferencia, siendo:

$$X_1 = (2'5, 3, 4, 5) \qquad X_2 = (4, 5, 5, 5'5) \qquad X_3 = (5'5, 6, 7, 7'5)$$

Cuando los números difusos usados son intervalares, los α-cortes coinciden para todo $\alpha \in [0, 1]$, por lo que es indiferente el sistema de orden que elijamos. Así cuando indicamos el orden difuso estándar $\preceq_e$, este sólo tiene que ir acompañado de los parámetros de posición, en este caso $\{0, 1\}$.

Corolario 4 *Sea el juego difuso $(N, v) \in FG^n(I/(\preceq_e, \{0, 1\}))$. El core de preferencia es;*

$$core(N, v) = \bigcap_{j=1}^{2} C(N, v_{p_{1j}})$$

$$siendo \quad p_{11}((a, b)) = a \quad p_{12}((a, b)) = b$$

Demostración 2.2.4 *Sean $X_i = (a_i, b_i)$ y $v(S) = (a_S, b_S)$ para toda coalición $S \subset N$;*

$$core(N, v) = \{(X_1, \ldots, X_n)/ \sum_{i=1}^{n} a_i = a_N; \sum_{i=1}^{n} b_i = b_N; \sum_{i \in S} a_i \geq a_S; \sum_{i \in S} b_i \geq b_S\} =$$

$$\{(X_1, \ldots, X_n)/ \sum_{i=1}^{n} a_i = a_N; \sum_{i \in S} a_i \geq a_S\} \bigcap \{(X_1, \ldots, X_n)/ \sum_{i=1}^{n} b_i = b_N; \sum_{i \in S} b_i \geq b_S\}$$

Ejemplo 2.2.2 *Consideremos el juego difuso $(N, v) \in FG^3(I/(\preceq_e, \{0, 1\}))$;*

$v(1)$	$v(2)$	$v(3)$	$v(1,2)$	$v(1,3)$	$v(2,3)$	$v(N)$
$(0,2)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(0,3)$	$(1,5)$	$(1,5)$	$(2,6)$

El core está formado por la intersección de dos conjuntos; al primero de ellos pertenecen todos los números difusos intervalares X_1, X_2 *y* X_3 *que verifiquen que:*

$$a_1 + a_2 + a_3 = 2$$

$$a_1 \geq 0 \qquad a_2 \geq 0 \qquad a_3 \geq 1$$

$$a_1 + a_2 \geq 0 \qquad a_1 + a_3 \geq 1 \qquad a_2 + a_3 \geq 1$$

Este conjunto se puede probar que es distinto de vacío, ya que por ejemplo $a_1 = 0,5$ $a_2 = 0,5$ *y* $a_3 = 1$ *está en él.*
Al segundo conjunto pertenecen los números difusos que verifiquen:

$$b_1 + b_2 + b_3 = 6$$

$$b_1 \geq 2 \qquad b_2 \geq 1 \qquad b_3 \geq 2$$

$$b_1 + b_2 \geq 3 \qquad b_1 + b_3 \geq 5 \qquad b_2 + b_3 \geq 5$$

Uniendo las siguientes desigualdades;

$$b_1 \geq 2 \qquad b_2 + b_3 \geq 5 \qquad b_1 + b_2 + b_3 = 6$$

llegamos a una contradicción. Luego el segundo conjunto es vacío, por lo tanto concluimos que

$$core(N, v) = \emptyset$$

Corolario 5 *Sea* $(N, v) \in FG^n(\Delta_D/(\preceq_e, \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}))$. *El core de preferencia es:*

$$core(N, v) = \bigcap_{i=1}^{p} \bigcap_{j=1}^{k} C(N, v_{p_{ij}}) \quad siendo \quad p_{ij}(b, \beta) = b + (1 - \lambda_j)(1 - \alpha_i)\beta$$

Demostración 2.2.5 *Los* α*-cortes de los números difusos triangulares a la derecha tienen siempre la forma*

$$B_\alpha = [b, b + (1 - \alpha)\beta] \quad con\ \alpha \in [0, 1]$$

$$p_{ij}(B) = \lambda_j b + (1-\lambda_j)(b+(1-\alpha_i)\beta) = \lambda_j b + b - b\lambda_j + \beta - \lambda_j\beta - \alpha_i\beta + \alpha_i\beta\lambda_j =$$

$$= b + (1-\lambda_j)\beta - (1-\lambda_j)\alpha_i\beta = b + (1-\lambda_j)(1-\alpha_i)\beta$$

Aplicando el teorema 2.2.1, obtenemos el resultado deseado.

Ejemplo 2.2.3 *Dado el juego difuso* $(N, v) \in FG^n(\Delta_D/(\preceq_c, \{0, 1/2, 1\})$*, el core viene dado por la siguiente intersección de conjuntos;*

$$core(N, v) =$$

$$\{(X_1, \ldots, X_n)/b_N + 1/2 \cdot \beta_N = \sum_{l=1}^{n} b_l + 1/2 \cdot \sum_{l=1}^{n} \beta_l;\ b_S + 1/2 \cdot \beta_S \leq \sum_{l=1}^{n} b_S + 1/2 \cdot \sum_{l=1}^{n} \beta_l\} \bigcap$$

$$\{(X_1, \ldots, X_n)/b_N + 1/4 \cdot \beta_N = \sum_{l=1}^{n} b_l + 1/4 \cdot \sum_{l=1}^{n} \beta_l;\ b_S + 1/4 \cdot \beta_S \leq \sum_{l=1}^{n} b_S + 1/4 \cdot \sum_{l=1}^{n} \beta_l\} \bigcap$$

$$\{(X_1, \ldots, X_n)/b_N = \sum_{l=1}^{n} b_l;\ b_S \leq \sum_{l=1}^{n} b_S\}$$

Corolario 6 *Sea* $(N, v) \in FG^n(\Delta_I/(\preceq_e, \{\gamma_1, \ldots, \gamma_p\}, \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}))$*. El core de preferencia es:*

$$core(N, v) = \bigcap_{i=1}^{p}\bigcap_{j=1}^{k} C(N, v_{p_{ij}}) \quad siendo \quad p_{ij}(\alpha, a) = a - \lambda_j(1-\gamma_i)\alpha$$

Demostración 2.2.6 *Los* α*-cortes de los números difusos triangulares a la izquierda tienen siempre la forma*

$$A_\gamma = [a - (1-\gamma)\alpha, a] \quad con\ \gamma \in [0, 1]$$

$$p_{ij}(A) = \lambda_j(a - (1-\gamma_i)\alpha) + (1-\lambda_j)a = a - \lambda_j(1-\gamma_i)\alpha$$

Aplicando el teorema 2.2.1, obtenemos el resultado deseado.

Corolario 7 *Sea* $(N, v) \in FG^n(\Delta/(\preceq_c, \{0, 1\}))$*. El core de preferencia es;*

$$core(N, v) = \bigcap_{i=1}^{2} C(N, v_{p_{i1}}) \quad siendo \quad p_{11} = a \quad p_{21} = 2a - \alpha + \beta$$

Demostración 2.2.7

$$core(N, v) =$$

$$= \{(X_1, \ldots, X_n) / \sum_{i=1}^{n} X_i(1) = v(N)(1); \ \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^L(0) + X_i^R(0)}{2} = \frac{v(N)^L(0) + v(N)^R(0)}{2};$$

$$X_S(1) \geq v(S)(1); \ \frac{X_S^L(0) + X_S^R(0)}{2} \geq \frac{v(S)^L(0) + v(S)^R(0)}{2} \quad \forall S \subset N\} =$$

$$= \{(X_1, \ldots, X_n) / \sum_{i=1}^{n} X_i(1) = v(N)(1); \ \sum_{i=1}^{n} X_i^L(0) + X_i^R(0) = v(N)^L(0) + v(N)^R(0);$$

$$X_S(1) \geq v(S)(1); \ X_S^L(0) + X_S^R(0) \geq v(S)^L(0) + v(S)^R(0) \quad \forall S \subset N\} =$$

$$\{(X_1, \ldots, X_n) / \sum_{i=1}^{n} X_i(1) = v(N)(1); \ \sum_{i \in S} X_i(1) \geq v(S)(1) \quad \forall S \subset N\} \bigcap$$

$$\{(X_1, \ldots, X_n) / \sum_{i=1}^{n} X_i^L(0) + X_i^R(0) = v(N)^L(0) + v(N)^R(0);$$

$$\sum_{i \in S} X_i^L(0) + X_i^R(0) \geq v(S)^L(0) + v(S)^R(0) \quad \forall S \subset N\}$$

Ejemplo 2.2.4 *Sea $(N, v) \in FG^3(\Delta/(\preceq_c, \{0, 1\}))$, busquemos el core de preferencia;*

$v(1)$	$v(2)$	$v(3)$	$v(1,2)$	$v(1,3)$	$v(2,3)$	$v(N)$
$(1,3,1)$	$(1,2,2)$	$(2,2,1)$	$(2,5,2)$	$(2,6,2)$	$(3,8,1)$	$(3,10,3)$

Los elementos que pertenezcan al core han de verificar, entre otras, las siguientes condiciones;

$$X_1(1) + X_2(1) + X_3(1) = 10 \quad X_1(1) \geq 3 \quad X_2(1) + X_3(1) \geq 8$$

Combinando la primera y la última de estas condiciones llegamos a que;

$$10 - X_1(1) \geq 8 \Rightarrow X_1(1) \leq 2$$

Y combinando este último resultado con la segunda condición llegamos a una contradicción;

$$X_1(1) \leq 2 \quad y \quad X_1(1) \geq 3$$

Por lo que concluimos que el core de preferencia de este juego difuso es vacío.

Cuando el core de preferencia de un juego es vacío, podemos considerar el core de dominancia. Estudiemos condiciones de existencia de dicho core.

Teorema 2.2.2 *Sea* $(N, v) \in FG^n(\Omega/(\preceq_e, \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}))$. *El core de dominancia es:*

$$core^D(N, v) = \{(X_1, \ldots, X_n)/ \sum_{l=1}^{n} X_l = v(N);\ \forall S \subset N$$

$$\exists i \in \{1, \ldots, p\}, \exists j \in \{1, \ldots, k\}\ tal\ que\ p_{ij}(X_S) > p_{ij}(v(S))\}$$

Demostración 2.2.8

$$core^D(N, v) = \{(X_1, \ldots, X_n)/ \sum_{i=1}^{n} X_i = v(N);\ X_S \gtrsim v(S) \quad \forall S \subset N\} =$$

$$= \{(X_1, \ldots, X_n)/ \sum_{l=1}^{n} X_l = v(N);\ \forall S \subset N \exists i \in \{1, \ldots, p\}\ tal\ que\ p(X_{S_{\alpha_i}}) \nleq p(v(S)_{\alpha_i})\} =$$

$$\{(X_1, \ldots, X_n)/ \sum_{l=1}^{n} X_l = v(N);\ \forall S \subset N \exists i \in \{1, \ldots, p\}, \exists j \in \{1, \ldots, k\}\ tal\ que$$

$$p_{ij}(X_S) > p_{ij}(v(S))\}$$

Ejemplo 2.2.5 *(Continuación 2.2.4) Sabemos que el core de preferencia de este juego es vacío; veamos ahora si el core de no dominancia también lo es.Para facilitar la notación llamaremos* $X_i(0)$ *a* $(X_i^L(0) + X_i^R(0))/2$.

Todo elemento del core de no dominancia ha de verificar las siguientes condiciones;

$$X_1(1) + X_2(1) + X_3(1) = 10 \quad X_1(0) + X_2(0) + X_3(0) = 10$$

$$X_1(1) > 3\ ó\ X_1(0) > 3 \qquad X_2(1) > 2\ ó\ X_2(0) > 2,5 \qquad X_3(1) > 2\ ó\ X_3(0) > 1,5$$

$$X_1(1) + X_2(1) > 5\ ó\ X_1(0) + X_2(0) > 5 \quad X_1(1) + X_3(1) > 6\ ó\ X_1(0) + X_3(0) > 6$$

$$X_2(1) + X_3(1) > 8\ ó\ X_2(0) + X_3(0) > 7$$

Se puede comprobar fácilmente que la siguiente asignación verifica todas las condiciones anteriores;

$$X_1 = (4, 4, 1) \quad X_2 = (1, 3, 3) \quad X_3 = (1, 3, 2)$$

por lo tanto pertenece al core de no dominancia y así concluimos que este core es distinto de *vacío.*

2.3. ε-core

Como hemos podido comprobar, hay veces que el core de preferencia es vacío, y el core de dominancia puede que sea demasiado grande. Para abordar estos problemas surge el concepto de ε-core. Es un core paramétrico, que dependerá del parámetro $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Lo que haremos es dilatar el core, restando para ello un número difuso $\tilde{\varepsilon}$, que depende de un parámetro $\varepsilon \in \mathbb{R}$, a cada $v(S)$.

Definición 2.3.1 *Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$, el ε-core de preferencia y el ε-core de dominancia de un juego difuso, son los conjuntos:*

$$\varepsilon - core(N, v) = \{X \in I^*(N, v)/X_S \succeq v(S) - \widetilde{\varepsilon}\, \forall S \subset N\}$$

$$\varepsilon - core^D(N, v) = \{X \in I^*(N, v)/X_S \succsim v(S) - \widetilde{\varepsilon}\, \forall S \subset N\}$$

siendo $\widetilde{\varepsilon}$ el número difuso triangular $\widetilde{\varepsilon} = (0, \varepsilon, 0)$.

Nuestro propósito es sustituir el core cuando sea vacío por otro conjunto. Pero intentaremos que este conjunto que lo sustituye sea lo más pequeño posible, es decir, nos quedaremos con el ε-core más pequeño.

Definición 2.3.2 *El ε-core mínimo es el ε-core resultante de elegir el mínimo $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \geq 0$ tal que el ε-core correspondiente sea distinto de vacío.*

Ejemplo 2.3.1 *(Continuación 2.2.4) Hemos visto que el core de preferencia era vacío y el de dominancia no. De hecho el core de dominancia suele ser muy grande. Para evitar este problema hallaremos el mínimo ε-core del juego difuso;*

$v(1)$	$v(2)$	$v(3)$	$v(1,2)$	$v(1,3)$	$v(2,3)$	$v(N)$
$(1,3,1)$	$(1,2,2)$	$(2,2,1)$	$(2,5,2)$	$(2,6,2)$	$(3,8,1)$	$(3,10,3)$

Los elementos del ε-core han de verificar las siguientes desigualdades:

$$(1)\begin{cases} X_1(1)+X_2(1)+X_3(1)=10 & & \\ X_1(1)\geq 3-\varepsilon & X_2(1)\geq 2-\varepsilon & X_3(1)\geq 2-\varepsilon \\ X_1(1)+X_2(1)\geq 5-\varepsilon & X_1(1)+X_3(1)\geq 6-\varepsilon & X_2(1)+X_3(1)\geq 8-\varepsilon \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} X_1(0)+X_2(0)+X_3(0)=10 & & \\ X_1(0)\geq 3-\varepsilon & X_2(0)\geq 2,5-\varepsilon & X_3(0)\geq 1,5-\varepsilon \\ X_1(0)+X_2(0)\geq 5-\varepsilon & X_1(0)+X_3(0)\geq 6-\varepsilon & X_2(0)+X_3(0)\geq 7-\varepsilon \end{cases}$$

Los elementos del ε-core, serán la intersección de los números difusos que verifiquen las inecuaciones de (1) con los números difusos que verifiquen las inecuaciones de (2).
Veamos primero qué números difusos verifican las inecuaciones de (1).
Combinando las tres inecuaciones:

$$X_1(1)+X_2(1)+X_3(1)=10 \quad X_1(1)\geq 3-\varepsilon \quad X_2(1)+X_3(1)\geq 8-\varepsilon$$

llegamos a que:

$$3-\varepsilon \leq X_1(1) \leq 2+\varepsilon$$

Y análogamente tenemos que:

$$2-\varepsilon \leq X_2(1) \leq 4+\varepsilon$$

$$2-\varepsilon \leq X_3(1) \leq 5+\varepsilon$$

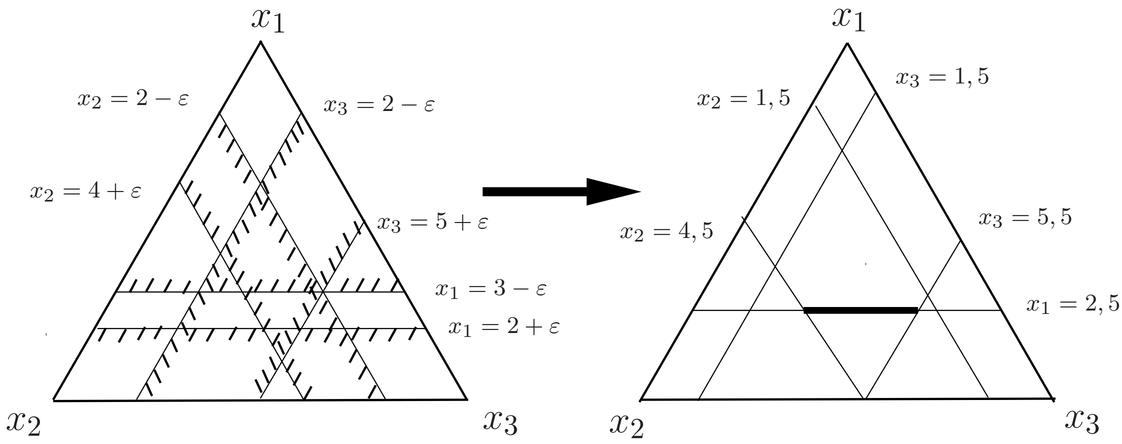

Figura 2.7: ε_1-core.

El valor de ε más pequeño que hace posible que se verifiquen las anteriores desigualdades es:

$$3 - \varepsilon = 2 + \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 0,5$$

Por lo tanto los números difusos triangulares que verifican las desigualdades de (1) son:

$$X_1,\ X_2 \ y\ X_3 \ tales\ que\ X_1(1) = 2,5 \quad X_2(1) = 2 + \alpha \quad X_3(1) = 5,5 - \alpha \quad con \quad \alpha \in (0, 2'5)$$

Denotaremos a este conjunto de puntos ε_1-core, siendo $\varepsilon_1 = 0,5$.
El conjunto de puntos que verifican las desigualdades de (2) se puede ver que es distinto de vacío incluso para $\varepsilon = 0$, por lo tanto el $\varepsilon_2 = 0$

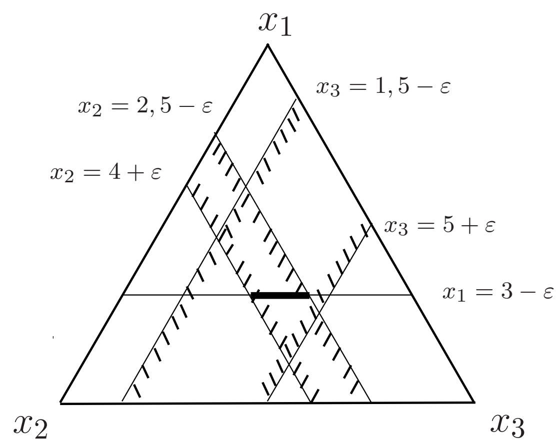

Figura 2.8: ε_2-core.

Para construir el ε-core definitivo tomamos $\varepsilon = máx\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} = 0,5$.

Parece poco razonable que siendo el conjunto de números difusos que verifican las desigualdades de (2) distinto de vacío para $\varepsilon = 0$, tengamos que hacerlo más grande restándole $\varepsilon = 0,5$ a cada desigualdad. Lo lógico será que restemos el ε sólo cuando sea necesario. Por ello surge un nuevo concepto de core paramétrico, que llamaremos ε^*-core.

Definición 2.3.3 *El ε^*-core de un juego difuso es;*

$$\varepsilon^* - core(N, v) = \bigcap_{i=1}^{p} \bigcap_{j=1}^{k} \varepsilon_{ij} - C(N, v_{p_{ij}})$$

siendo $\varepsilon_{ij} - C(N, v_{p_{ij}}) = \{X \in I^*(N, v) / p_{ij}(v(S)) \leq p_{ij}(X_S) - \varepsilon_{ij} \ \forall S \subset N\}$ y ε_{ij} el mínimo $\varepsilon \in \mathbb{R}$ con $\varepsilon \geq 0$ tal que $\varepsilon_{ij} - C(N, p_{ij}) \neq \emptyset$.

Ejemplo 2.3.2 *(Continuación 2.2.4) Si definimos las funciones;*

$$v_1 : \Omega \to \mathbb{R} \qquad\qquad v_2 : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$A = (\alpha, a, \beta) \mapsto a \quad A = (\alpha, a, \beta) \mapsto \frac{(a + \beta) + (a - \alpha)}{2}$$

el ε-core mínimo será

$$\varepsilon - core(N,v) = 0,5 - C(N,v_1) \cap 0,5 - C(N,v_2)$$

sin embargo el ε^*-core sería;

$$\varepsilon^* - core(N,v) = 0,5 - C(N,v_1) \cap 0 - C(N,v_2)$$

Es claro que siempre se tiene que $\varepsilon^* - core(N,v) \subseteq \varepsilon - core(N,v)$.

2.4. Teorema de Shapley-Bondareva para juegos difusos

Generalizaremos el teorema de Shapley-Bondareva para obtener una condición necesaria y suficiente para que el core de los juegos con pagos difusos sea distinto de vacío.
Daremos primero la idea general sobre este teorema. Partiendo de un problema primal de maximización cuya región factible define las imputaciones del core, y cuya función objetivo es el valor obtenido por la gran coalición para una imputación dada, asociamos un problema dual de minimización. La región factible de este problema se toma como definición de conjunto balanceado. Probando la dualidad entre estos dos problemas, podremos dar la condición para que el core sea no vacío sin más que exigir que el problema dual esté acotado inferiormente. Este análisis de la idea del teorema de Shapley-Bondareva no se limita tan sólo al caso de la recta real, en general, lo podemos aplicar siempre que el core de un juego se pueda definir como el conjunto factible de un problema de maximización primal y se pueda probar la dualidad con respecto al problema de minimización dual. Esta idea está desarrollada en el artículo de Puerto, Fernández e Hinojosa [78].

Definición 2.4.1 *Un juego difuso $(N,v) \in FG^n(\Omega/\preceq)$ es balanceado si existe una colección de coeficientes $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2^n-2}$ (cada coeficiente $\gamma_j \in \mathbb{R}$ está asociado a una coalición S de N), tal que;*

- $\sum_{S/i\in S} \gamma_S \leq 1 \quad \forall i = 1, \ldots, n$
- $\gamma_S \geq 0 \quad \forall S \subseteq N$
- $\sum_{S\subseteq N} \gamma_S \cdot v(S) \preceq v(N)$
- $\nexists$ *otra colección* $\gamma'_1, \ldots, \gamma'_{2^n-2}$ *tal que* $\sum_{S\subseteq N} \gamma'_S \cdot v(S) \succeq \sum_{S\subseteq N} \gamma_S \cdot v(S)$

Teorema 2.4.1 *Sea el juego difuso* $(N, v) \in FG^n(\Omega/(\preceq_e, \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}))$*, se tiene que:*

$$core(N, v) \neq \emptyset \quad \text{si y sólo si es balanceado.}$$

Demostración 2.4.1 *Sea* $\aleph$ *un espacio lineal sobre el conjunto de los números reales. Sea* (N, v) *un juego cooperativo y parcialmente ordenado sobre dicho espacio lineal. Supongamos que el orden utilizado viene inducido por un cono convexo* $D_\aleph$*. También consideraremos el espacio* Z *dado por el producto cartesiano de* $2^n - 2$ *veces el espacio lineal* $\aleph$*, i.e.* $Z = \aleph^{2^n-2}$*. El espacio* Z *está parcialmente ordenado por el cono* $D_Z = (D_\aleph)^{2^n-2}$*.*
Denotaremos por $\aleph^*$ *y* Z^* *a los duales de los espacios* $\aleph$ *y* Z*. Y denotaremos por* $\langle \widehat{Y}, Y \rangle$ *la acción entre los elementos del espacio primal y dual. El cono que induce el orden en el espacio dual* $\aleph^*$ *viene dado por;*

$$D_{\aleph^*} := \{\widehat{Y} \in \aleph^* / \langle \widehat{Y}, Y \rangle \geq 0, \ \forall Y \in D_\aleph\}$$

Denotaremos el cuasi-interior de este cono como;

$$D^{\#}_{\aleph^*} := \{\widehat{Y} \in \aleph^* / \langle \widehat{Y}, Y \rangle > 0, \ \forall Y \in D_\aleph \setminus \{\Theta_\aleph\}\}$$

Donde $\Theta_\aleph$ *denota el cero del espacio* $\aleph$*.*
Definamos las dos funciones lineales de $\aleph^n$ *en* $\aleph$ *y* Z *respectivamente, como sigue*

$$\begin{array}{cccc} C: & \aleph^n & \to & \aleph \\ & X = (X_1, \ldots, X_n) & \mapsto & C(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} A: & \aleph^n & \rightarrow & Z \\ & X=(X_1,\dots,X_n) & \mapsto & A(X)=\left(\sum_{i\in S} X_i\right)_{S\subset N}. \end{array}$$

Denotaremos por * *aplicado a un operador a su adjunto, es decir,* C^**,* A^* *y* T^* *denotan los adjuntos de las funciones* C*,* A *y* T *respectivamente. Finalmente, sea* $L(Z;\aleph)$ *el espacio lineal sobre los números reales de las funciones lineales de* Z *en* $\aleph$*.*
El juego cooperativo parcialmente ordenado (N,v) *es balanceado si para toda* $\widehat{Y}\in D^{\#}_{\aleph^*}$ *existe una función* $T\in L(Z,\aleph)$ *tal que:*

1. $(C-TA)^*(\widehat{Y})\in (D_{\aleph^*})^n$,

2. $T^*(\widehat{Y})\in D_{Z^*}$,

3. $v(N)\succeq T((v(S))_{S\subset N})$ *y no existe* T' *tal que* $T'((v(S))_{S\subset N})\succeq T((v(S))_{S\subset N})$.

En el artículo [78], se demuestra el siguiente resultado:

El juego (N,v) *es balanceado si y sólo si core*$(N,v)\neq\emptyset$*.*

A continuación aplicaremos este resultado general al caso de los números difusos. Para ello bastará demostrar que la definición de juego balanceado difuso es la particularización de la definición de juego cooperativo parcialmente ordenado balanceado.
Para poder afirmar que $A\preceq B$ *siendo* $A,B\in\Omega$ *se tiene que verificar que* $p_{ij}(A)\leq p_{ij}(B)\ \forall\ i=1,\dots,p\ \forall\ j=1,\dots,k$*, o lo que es lo mismo, que* $A^*\leq B^*$ *siendo* $A^*=(p_{11}(A),\dots,p_{pk}(A))\in\mathbb{R}^{pk}$ *y* $B^*=(p_{11}(B),\dots,p_{pk}(B)))\in\mathbb{R}^{pk}$ *y* $\leq$ *el orden Pareto usual.*
Por lo tanto podemos afirmar que

$$A\preceq B\Leftrightarrow A^*\leq B^*$$

El cono D_Ω *que induce el orden estándar* $\preceq$ *en los números difusos es;*

$$D_\Omega=\{X=(x_1,\dots,x_{pk})'\in\mathbb{R}^{pk}/x_i\geq 0\ \forall i\in\{1,\dots,pk\}\}$$

A partir de ahora consideraremos $\mathbb{R}^{pk} = M_{pk\times 1}$*, es decir como las matrices de pk filas y una columna.*

El conjunto Z será Ω^{2^n-2}*, que en nuestro caso particular también lo podemos identificar con* $M_{pk\times(2^n-2)}$*, es decir,*

$$Z = \Omega^{2^n-2} \equiv M_{pk\times(2^n-2)}$$

El espacio Z está parcialmente ordenado por el cono;

$$D_Z = \{X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,2^n-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{pk,1} & \dots & x_{pk,2^n-2} \end{pmatrix} \in M_{pk\times(2^n-2)}/x_{ij} \geq 0 \ \forall i = 1,\dots,pk \ \forall j = 1,\dots,2^n-2\}$$

Con respecto a los espacios duales tenemos que $\Omega^* \equiv \mathbb{R}^{pk*} = \mathbb{R}^{pk}$*, y por lo tanto*

$$D^{\#}_{\Omega^*} \equiv D^{\#}_{\mathbb{R}^{pk*}} \equiv D^{\#}_{\mathbb{R}^{pk}} = \{X = (x_1,\dots,x_{pk})' \in \mathbb{R}^{pk}/x_i > 0 \ \forall i = 1,\dots,pk.\}$$

La función C que va de Ω^n *en* Ω*, queda definida como sigue;*

$$C: \ \Omega^n \equiv M_{pk\times n} \longrightarrow \ \Omega \equiv \mathbb{R}^{pk}$$

$$X = (X_1,\dots,X_n) = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{pk,1} & \dots & x_{pk,n} \end{pmatrix} \mapsto C(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{1i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_{pki} \end{pmatrix}$$

A esta función le podemos asociar una matriz a la que denotaremos también C;

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{n\times 1} \equiv \mathbb{R}^n \quad \textit{tal que} \quad C(X) = X\cdot C$$

Por lo tanto el operador adjunto C^* *es la función;*

$$C^*: \ \Omega \equiv \mathbb{R}^{pk} \longrightarrow \ \Omega^n \equiv M_{pk\times n}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{pk} \end{pmatrix} \mapsto C^*(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{pk} \end{pmatrix} \cdot C' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{pk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

La función A que va de Ω^n en $Z = \Omega^{2^n-2}$ queda definida como sigue;

$$A: \ M_{pk\times n} \longrightarrow \ M_{pk\times(2^n-2)}$$

$$X = (X_1, \ldots, X_n) \ \mapsto A(X) = \Big(\sum_{i\in S} X_i\Big)_{S\subset N}$$

A esta función le podemos asociar una matriz a la que denotaremos también $A \in M_{n\times(2^n-2)}$;

$$A =$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccc}
\{1\} & \{2\} & & \{n\} & \{1,2\} & \{1,3\} & & & \{n-1,n\} & \{1,2,3\} & & & & \{2,3,\ldots,n\}
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 1 & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\
0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\
0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & 1 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\
0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & 1 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Esta función lo que hace es asociar a cada asignación $X \in M_{pk\times n}$ una matriz $X \cdot A \in M_{pk\times(2^n-2)}$, que en cada columna S, tiene la suma de todos los X_i tales que $i \in S$.
Una aplicación $T \in L(M_{pk\times(2^n-2)}, \mathbb{R}^{pk})$ lineal y continua, queda definida por una matriz de la forma;

$$T = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{2^n-2} \end{pmatrix} \in M_{(2^n-2)\times 1}$$

Cada coeficiente γ_S está asociado a una coalición $S \subset N$.
La aplicación $C - TA$ viene dada por;

$$C - TA: \ M_{pk\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{pk}$$

$$X \mapsto X \cdot (C - TA)$$

Por lo tanto su operador adjunto vendrá dado por

$$(C - TA)^* : \ \mathbb{R}^{pk} \longrightarrow M_{pk \times n}$$

$$Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{pk} \end{pmatrix} \mapsto Y \cdot (C' - T' \cdot A')$$

Por otra parte $\widehat{Y} \in D^{\#}_{\mathbb{R}^{pk*}}$ *significa que* $\widehat{Y} = (\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_{pk})'$ *tiene* $\hat{y}_i > 0\ \forall i = 1, \ldots, pk.$

La primera condición para que un juego sea balanceado según la definición de juego cooperativo parcialmente ordenado balanceado es que $(C - TA)^*(\widehat{Y}) \in (D_{\aleph^*})^n$, *como tenemos que:*

- $(C - TA)^*(\widehat{Y}) = \widehat{Y} \cdot (C' - T'A') = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_{pk} \end{pmatrix} \cdot \Big((1, 1, \ldots, 1) - (\sum\limits_{S/1 \in S} \gamma_S, \ldots, \sum\limits_{S/n \in S} \gamma_S)\Big) =$

$$= \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \cdot (1 - \sum\limits_{S/1 \in S} \gamma_S) & \cdots & \hat{y}_1 \cdot (1 - \sum\limits_{S/n \in S} \gamma_S) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{y}_{pk} \cdot (1 - \sum\limits_{S/1 \in S} \gamma_S) & \cdots & \hat{y}_{pk} \cdot (1 - \sum\limits_{S/n \in S} \gamma_S) \end{pmatrix}$$

- $\Big(D_{\mathbb{R}^{pk*}}\Big)^n = \{X = \begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{pk\,1} & \ldots & x_{pk\,n} \end{pmatrix} / x_{ij} \geq 0\}$

se tiene que cumplir que

$$\hat{y}_i \cdot (1 - \sum_{S/j \in S} \gamma_S) \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, pk\}\ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$$

Pero como sabemos que $\hat{y}_i > 0\ \forall i \in \{1, \ldots, pk\}$, *lo que deberá verificarse es que*

$$\sum_{S/j \in S} \gamma_S \leq 1\ \forall j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2.1}$$

La segunda condición para que el juego sea balanceado, según la definición de juego coopera-

tivo parcialmente ordenado balanceado, es $T^*(\widehat{Y}) \in D_{Z^*}$*. La función* T^* *es como sigue;*

$$T^* : \mathbb{R}^{pk} \longrightarrow M_{pk\times(2^n-2)}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{pk} \end{pmatrix} \mapsto Y \cdot (\,\gamma_1 \quad \cdots \quad \gamma_{2^n-2}\,) = \begin{pmatrix} y_1 \cdot \gamma_1 & \cdots & y_1 \cdot \gamma_{2^n-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{pk} \cdot \gamma_1 & \cdots & y_{pk} \cdot \gamma_{2^n-2} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto se tiene que verificar que

$$\hat{y}_i \cdot \gamma_S \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, pk \quad \forall S \subset N$$

Como siempre se tiene que $\hat{y}_i > 0\ \forall i = 1, \ldots, pk$*, lo que implica esta segunda condición es que*

$$\gamma_S \geq 0 \quad \forall S \subset N. \tag{2.2}$$

La última condición para que el juego sea balanceado es que $v(N) \succeq T((v(S))_{S\subset N})$ *y no exista otra función* T' *tal que* $T'((v(S))_{S\subset N}) \succeq T((v(S))_{S\subset N})$*. Particularizando a los números difusos y a un orden estándar quiere decir que;*

$$v(N) \geq \sum_{S\subset N} \gamma_S \cdot v(S) \quad y \quad \nexists\, \gamma'1, \ldots, \gamma'_{2^n-2} \text{ tales que } \sum_{S\subset N} \gamma'_S \cdot v(S) \geq \sum_{S\subset N} \gamma_S \cdot v(S). \tag{2.3}$$

Uniendo las condiciones 2.1, 2.2 y 2.3 queda demostrado el teorema.

2.5. Juegos cooperativos con coaliciones difusas

Los juegos difusos aparecen en la literatura [2][14] enfocados desde otro punto de vista. Estos autores consideran que los pagos del juego no son difusos, sino escalares, y por el contrario consideran difusas las coaliciones, es decir, los jugadores tienen la posibilidad de cooperar con una determinada coalición con diferentes niveles de participación, variando desde la no cooperación hasta la cooperación total. La recompensa obtenida dependerá de dichos niveles de participación.

2.5.1. Paso de un juego con coaliciones difusas y pagos escalares a un juego con coaliciones usuales y pagos difusos.

En este apartado definiremos este tipo de juegos con coaliciones difusas, y posteriormente veremos como es posible convertirlos en juegos con pagos difusos y coaliciones usuales.
En esta sección denotaremos los números difusos $(\alpha, a, b, \beta)_{LR}$ por $(A^L(0), A^L(1), A^R(1), A^R(0))_{LR}$, siendo $A^L(1) = a,\ A^R(1) = b,\ A^L(0) = a - \alpha$ y $A^R(0) = b + \beta$.

Definición 2.5.1 *Una coalición difusa es un vector* $\tilde{s} \in [0, 1]^n$.

Denotaremos por $\tilde{s}$ a las coaliciones difusas y por S a las coaliciones usuales, es decir, las no difusas. La i-ésima coordenada s_i de $\tilde{s}$ es el nivel de participación del jugador i en la coalición difusa $\tilde{s}$. Representaremos $[0, 1]^n$ por $\mathcal{F}^n$ para denotar al conjunto de las coaliciones difusas sobre el conjunto de jugadores N.
Una coalición no difusa $S \in 2^N$ se corresponde con la coalición difusa e^S, donde $e^S \in \mathcal{F}^N$ es el vector con $(e^S)_i = 1$ si $i \in S$, y $(e^S)_i = 0$ si $i \in N \setminus S$. La coalición difusa e^S corresponde a la situación en la cual los jugadores de S cooperan totalmente, es decir, con nivel de participación 1, y los demás jugadores no participan en ella, es decir, con nivel de participación 0. Denotaremos por e^i a la coalición difusa correspondiente a la coalición no difusa $S = \{i\}$. La coalición $e^n = (1, \dots, 1)$ se llamará la gran coalición, y la coalición $e^{\emptyset} = (0, \dots, 0)$ corresponde a la coalición vacía.

Definición 2.5.2 *Un juego cooperativo con coaliciones difusas con un conjunto de jugadores N es aquel (N, v) cuya función característica es una función $v : \mathcal{F}^n \to \mathbb{R}$ verificando que $v(e^{\emptyset}) = 0$.*

La función v asigna a cada coalición difusa un número real, que es el valor que dicha coalición puede alcanzar con dichos niveles de cooperación.
Al conjunto de juegos con coaliciones difusas lo denotaremos por FCG^n.

Ejemplo 2.5.1 *Sea $v \in FCG^3$ con*

$$v(s_1, s_2, s_3) = \text{mín}\{s_1 + s_2, s_3\}$$

para cada $\tilde{s} = (s_1, s_2, s_3) \in F^3$. *Este juego se corresponde con la situación en la que dos jugadores 1 y 2, poseen una unidad cada uno de un determinado producto A infinitamente divisible, y otro jugador 3 posee una unidad de otro producto B también infinitamente divisible, donde A y B son productos complementarios, es decir, la combinación de una fracción* α *de una unidad de A y de B nos lleva a una ganancia* α.

Ejemplo 2.5.2 *Sea* $v \in FCG^2$ *el juego definido por;*

$$v(s_1, s_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } s_1 \geq \frac{1}{2}, s_2 \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

para cada $(s_1, s_2) \in F^2$. *Este juego corresponde a la situación en que sólo las coaliciones con niveles de participación de al menos* $\frac{1}{2}$ *son ganadoras, y todas las demás son perdedoras.*

A continuación vamos a construir un juego con pagos difusos y coaliciones usuales asociado a un juego con coaliciones difusas.
Sea $(N, v) \in FCG^n$ un juego con coaliciones difusas, construiremos un juego difuso $(N, \tilde{v}) \in FG^n$ asociado al anterior.
A cada coalición usual $S = (i_1, \ldots, i_k) \subseteq N$, le asociamos un pago difuso $\tilde{v}(S)$ que viene determinado de la siguiente manera:

1. Consideramos todas las coaliciones difusas $\tilde{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ tales que $s_i = 0$ si $i \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$ y $s_i \neq 0$ si $i \in \{i_1, \ldots, i_k\}$, es decir, las coaliciones difusas en las que sólo los jugadores de la coalición usual S, tienen un nivel de participación no nulo, y por lo tanto en mayor o menor grado participan en la coalición.

2. Construiremos una función ρ cuyo dominio será $(0, 1)$. Cada $x \in (0, 1)$ corresponderá al producto de todos los niveles de participación distintos de cero de una coalición difusa, es decir,

$$x = s_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_k}$$

   El valor de x pertenece al intervalo $(0, 1)$, ya que los niveles de participación no pueden ser mayores que 1, y por lo tanto su producto tampoco.

3. Posteriormente calcularemos el promedio de los valores escalares que el juego con coaliciones difusas da a las coaliciones difusas que verifican que $s_i \neq 0$ si $s_i \in \{s_{i_1}, \ldots, s_{i_k}\}$ y $s_i = 0$ en caso contrario y que $x = s_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_k}$.

   a) Para calcular este promedio, tendremos en cuenta que cada s_i puede variar de forma continua entre 0 y 1, por lo tanto lo que haremos es integrar entre estos valores cada componente s_i con $i \in \{i_1, \ldots, i_k\}$:

   $$\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 v(0, \ldots, s_{i_1}, \ldots, s_{i_k}, \ldots, 0) ds_{i_k} \ldots ds_{i_1}$$

   Además sabemos que $x = s_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_k}$ por lo tanto

   $$\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 v(0, \ldots, s_{i_1}, \ldots, s_{i_{k-1}}, \frac{x}{s_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_{k-1}}}, \ldots, 0) ds_{i_{k-1}} \ldots ds_{i_1}$$

   Para evitar que algún s_i tenga que ser mayor que 1, hemos de modificar los límites de integración

   $$\int_x^1 \int_{\frac{x}{s_{i_1}}}^1 \int_{\frac{x}{s_{i_1} \cdot s_{i_2}}}^1 \cdots \int_{\frac{x}{s_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_{k-2}}}}^1 v(0, \ldots, s_{i_1}, \ldots, s_{i_{k-1}}, \frac{x}{s_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_{k-1}}}, \ldots, 0) ds_{i_{k-1}} \ldots ds_{i_1}$$

   ya que suponiendo por ejemplo que la coalición usual está formada por dos jugadores $S = (i_1, i_2)$, e integrásemos cada una de las variables enter 0 y 1, cuando s_{i_1} tome valores más pequeños que x, $s_{i_2} = \frac{x}{s_{i_1}}$ será mayor que 1, lo cual no tiene sentido.

   b) Hasta ahora lo que hemos hecho es "sumar" todos los valores escalares que el juego con coaliciones difusas da a estas coaliciones, para terminar de hacer el promedio nos falta dividir por el "número de coaliciones difusas con las características deseadas", es decir, dividiremos por el área de la figura que recorren las variables sobre las que se integra. Por lo tanto habremos construido una función de la forma:

$$\rho(x) = \frac{\int_x^1 \int_{\frac{x}{s_{i_1}}}^1 \int_{\frac{x}{s_{i_1} \cdot s_{i_2}}}^1 \cdots \int_{\frac{x}{s_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_{k-2}}}}^1 v(0, \ldots, s_{i_1}, \ldots, s_{i_{k-1}}, \frac{x}{s_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_{k-1}}}, \ldots, 0) ds_{i_{k-1}} \cdots ds_{i_1}}{\acute{A}rea\ de\ la\ figura\ que\ recorren\ las\ variables\ sobre\ las\ que\ se\ integra}$$

4. Una vez construida dicha función y dada una coalición normal $S = (i_1, \ldots, i_k)$ el pago difuso de dicha coalición será el número difuso

$$\tilde{v}(S) = (0, v(e^S), v(e^S))_{LR}$$

siendo $e^S = (0, \ldots, 1, \ldots, 1, \ldots, 0)$ la coalición difusa en la que los niveles de participación de los jugadores pertenecientes a S son 1 y 0 el resto. R es la función nula y L es una aplicación que a cada $x \in (0, v(e^S))$ le asigna los valores $y \in (0, 1)$ tales que $\rho(y) = x$. Es decir, L es una especie de "inversa"de ρ, que siempre existirá, ya que si el juego es razonable, cuanto mayores sean los niveles de participación de los jugadores, mayor será la recompensa. Lo peor que podría ocurrir es que aumentasen los niveles de participación y la recompensa siguiese siendo la misma, en cuyo caso un trozo de la función ρ sería constante, y no tendría inversa, pero sí que nos valdría para construir un número difuso;

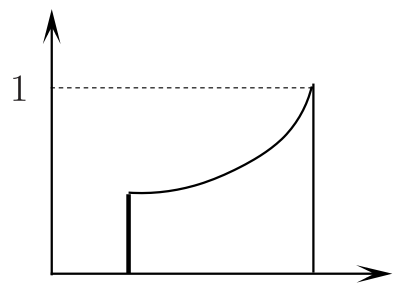

Figura 2.9: Forma que tendría el número difuso $\tilde{v}(S)$, si en un determinado momento aumentando los niveles de participación de los jugadores y el valor de v siguiese igual.

Por lo tanto diremos que L es una especie de "inversa"de ρ, y lo denotaremos por

$$L(x) = \rho^{(-1)}(x)$$

Concluimos con la siguiente definición:

Definición 2.5.3 *Dado un juego con coaliciones difusas $(N, v) \in FCG^n$, denotamos por $(N, \tilde{v}) \in FG^n$ al juego difuso asociado, cuya función de pagos $\tilde{v} : 2^N \longrightarrow \Omega$ viene dada por;*

$$\tilde{v}(S) = (0, v(e^S), v(e^S))_{LR}$$

Siendo $R \equiv 0$, y L la inversa de la función que a cada valor $x \in (0, 1)$ asocia el promedio de los valores escalares que v asigna a cada coalición difusa en la que sean distintos de cero sólo los niveles de participación de los individuos de la coalición $S = \{s_{i_1}, \ldots, s_{i_k}\}$, y $s_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_k} = x$. Es decir;

$$L(x) = \left(\frac{\int_x^1 \int_{\frac{x}{s_{i_1}}}^1 \int_{\frac{x}{s_{i_1} \cdot s_{i_2}}}^1 \cdots \int_{\frac{x}{s_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_{k-2}}}}^1 v(0, \ldots, s_{i_1}, \ldots, s_{i_{k-1}}, \frac{x}{s_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_{k-1}}}, \ldots, 0) ds_{i_{k-1}} \cdots ds_{i_1}}{\acute{A}rea\ de\ la\ figura\ que\ recorren\ las\ variables\ sobre\ las\ que\ se\ integra} \right)^{(-1)}$$

Salvo en el caso en que $k = 1$ (coalición unipersonal), en cuyo caso $\tilde{v}(\{j\}) = (0, v(e^j), v(e^j))_{LR}$ siendo $R \equiv 0$ y $L(x) = (v(0, \ldots, 0, x, 0, \ldots, 0))^{-1}$, siendo x el nivel de participación del j-ésimo jugador, y siendo todos los demás niveles de participación nulos.

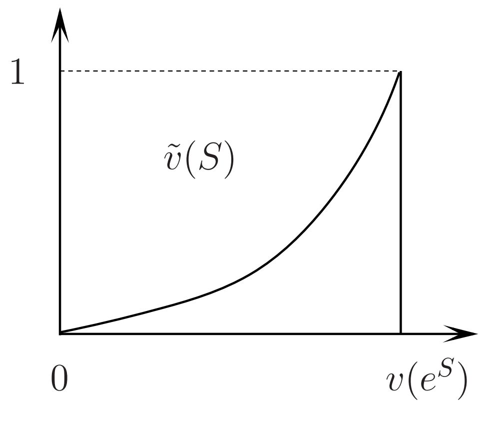

Figura 2.10: Número difuso $\tilde{v}(S)$.

Ejemplo 2.5.3 *Sean dos empresas que elaboran un producto infinitamente divisible, de manera que si ambas empresas cooperan la ganancia será el máximo del producto elaborado por* *una de las dos empresas. Es decir, el juego con coaliciones difusas* (N, v) *quedaría definido por* $N = \{1, 2\}$ *y*

$$v(s_1, s_2) = máx\{s_1, s_2\}$$

El juegos difuso con coaliciones normales asociado $(N, \tilde{v})$ *vendrá definido por*

- $\tilde{v}(\emptyset) = (0, 0, 0)_{LR}$

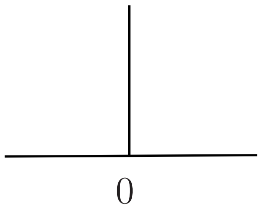

Figura 2.11: Número difuso $\tilde{v}(\emptyset)$.

- $\tilde{v}(1) = (0, v(e^1), v(e^1))_{LR} = (0, 1, 1)_{LR}$ *siendo* $R \equiv 0$ *y* $L(x) = (v(x, 0))^{-1} = x$.

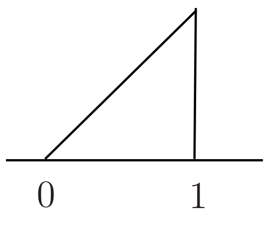

Figura 2.12: Número difuso $\tilde{v}(1)$.

- $\tilde{v}(2) = (0, v(e^2), v(e^2))_{LR} = (0, 1, 1)_{LR}$ *siendo* $R \equiv 0$ *y* $L(x) = (v(0, x))^{-1} = x$.

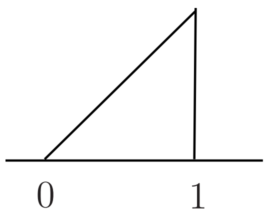

Figura 2.13: Número difuso $\tilde{v}(2)$.

- $\tilde{v}(N) = (0, v(e^{\{1,2\}}), v(e^{\{1,2\}}))_{LR} = (0,1,1)_{LR}$ *siendo* $R \equiv 0$ *y* L*:*

$$L(x) = \left(\frac{\int_x^1 v(s_1, \frac{x}{s_1}) ds_1}{1-x} \right)^{(-1)} = \left(\frac{\int_x^1 máx(s_1, \frac{x}{s_1}) ds_1}{1-x} \right)^{(-1)} =$$

Veamos cuando s_1 *es mayor que* x/s_1*,*

$$s_1 \geq \frac{x}{s_1} \leftrightarrow s_1^2 \geq x \leftrightarrow s_1 \geq +\sqrt{x} \quad \textit{ya que } s_1 \textit{ es siempre positiva}$$

Por lo tanto;

$$L(x) = \left(\frac{\int_{\sqrt{x}}^1 s_1 ds_1 + \int_x^{\sqrt{x}} \frac{x}{s_1} ds_1}{1-x} \right)^{(-1)} = \left(\frac{1 - x - xlnx}{2(1-x)} \right)^{(-1)}$$

Calculemos algunos valores:

$$L(0,50) = 0,001 \qquad L(0,52) = 0,01 \qquad L(0,62) = 0,1 \qquad L(0,70) = 0,2$$

$$L(0,75) = 0,3 \qquad L(0,80) = 0,4 \qquad L(0,84) = 0,5 \qquad L(0,88) = 0,6$$

$$L(0,91) = 0,7 \qquad L(0,94) = 0,8 \qquad L(0,97) = 0,9$$

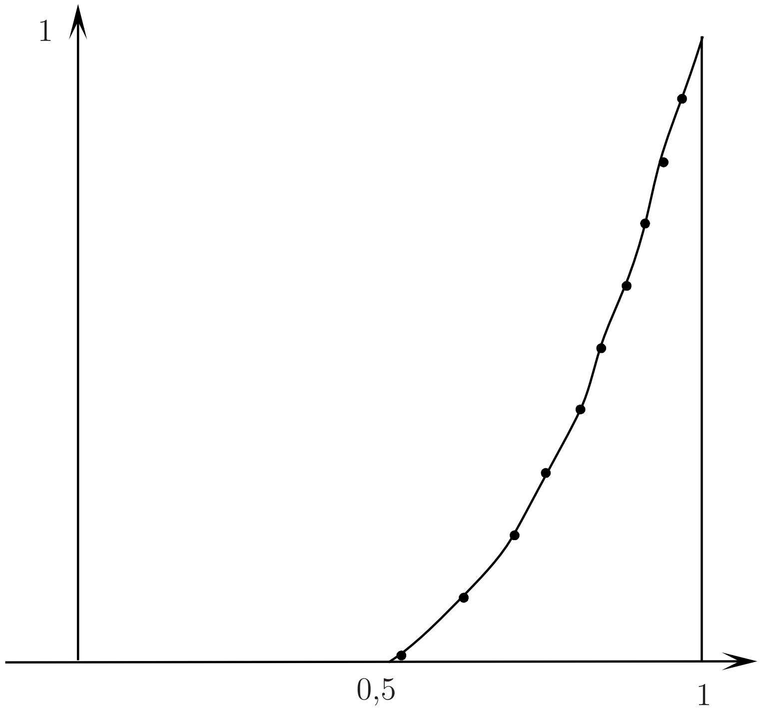

Figura 2.14: Número difuso $\tilde{v}(N)$.

Estudiemos el core de este juego difuso, usando el orden difuso estándar $(\preceq_e, \{0, 0'3\}, \{1\})$.

$$core(N, v) = \{X = (X_1, X_2)/L_1^{-1}(0'3) + L_2^{-1}(0'3) = 0'75;\ m_1 + m_2 = 0'5;$$

$$L_1^{-1}(0'3) \geq 0'3;\ L_2^{-1}(0'3) \geq 0'3;\ m_1 \geq 0;\ m_2 \geq 0\}$$

siendo $X_i = (m_i, a_i, b_i, n_i)_{L_iR_i}$.

Por ejemplo el reparto,

$$X_1 = X_2 = (0'25, 0'66666..., 1, 1)_{LR}$$

$$siendo\ R \equiv 0 \quad y \quad L \equiv 2'4x - 0'6$$

pertenece al core del juego difuso, ya que $L_1^{-1}(0'3) + L_2^{-1}(0'3) = 0'375 + 0'375 = 0'75$, $m_1 + m_2 = 0'25 + 0'25 = 0'5$, $L_1^{-1}(0'3) = 0'375 \geq 0'3$, $L_2^{-1}(0'3) = 0'375 \geq 0'3$, $m_1 = 0'25 \geq 0$ *y* $m_2 \geq 0$.

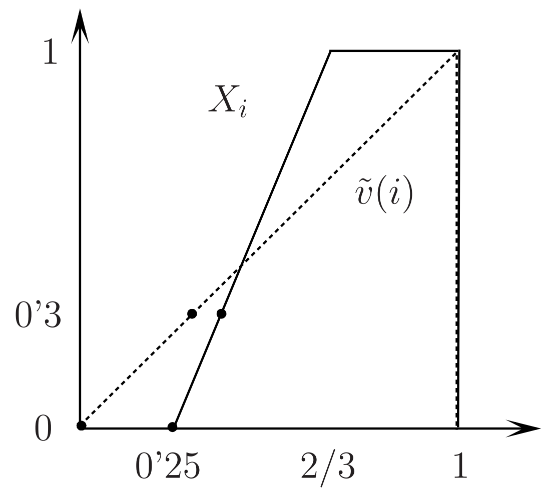

Figura 2.15: Comparación entre los números difusos $\tilde{v}(i)$ y X_i.

Ejemplo 2.5.4 *(Continuación 2.5.1) Transformaremos el juego con coaliciones difusas* $(\{1,2,3\}, v) \in FCG^3$ *dado por;*

$$v(s_1, s_2, s_3) = \min\{s_1 + s_2, s_3\}$$

en un juego difuso con coaliciones no difusas $(\{1,2,3\}, \tilde{v}) \in FG^3$.

- $\tilde{v}(1) = (0,0,0)_{LR}$ *ya que* $v(x,0,0) = 0\ \forall x \in [0,1]$

- $\tilde{v}(2) = (0,0,0)_{LR}$ *ya que* $v(0,x,0) = 0\ \forall x \in [0,1]$

- $\tilde{v}(3) = (0,0,0)_{LR}$ *ya que* $v(0,0,x) = 0\ \forall x \in [0,1]$
  Da igual la forma que tengan las funciones L y R debido a la forma de los números difusos $\tilde{v}(1)$, $\tilde{v}(2)$ *y* $\tilde{v}(3)$.

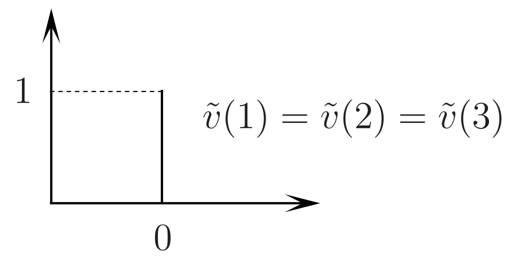

Figura 2.16: Número difuso $\tilde{v}(1) = \tilde{v}(2) = \tilde{v}(3) = (0,0,0)_{LR}$.

- $\tilde{v}(1,2) = (0,0,0)_{LR}$ *ya que* $v(s_1, s_2, 0) = 0 \ \forall (s_1, s_2) \in [0,1]^2$

- $\tilde{v}(1,3) = (0, v(1,0,1), v(1,0,1))_{LR} = (0,1,1)_{LR}$ *siendo* $R \equiv 0$ *y* L *la función:*

$$L(x) = \left(\frac{\int_x^1 v(s_1, 0, \frac{x}{s_1}) ds_1}{1-x} \right)^{-1}$$

Se integra de x *a 1 en vez de de 0 a 1 porque se necesita que* $s_1 \cdot s_3 = x$ *y si* s_1 *es menor que* x*,* s_3 *tendría que ser mayor estricto que 1, cosa que es imposible.*

Calculemos la integral; para ello hay que tener en cuenta que

$$s_1 + s_2 < s_3 \longleftrightarrow s_1 + 0 < \frac{x}{s_1} \longleftrightarrow s_1^2 < x \longleftrightarrow s_1 < \sqrt{x}$$

Por lo tanto la integral quedará de la siguiente forma;

$$\int_x^1 v(s_1, 0, \frac{x}{s_1}) ds_1 = \int_x^{\sqrt{x}} s_1 ds_1 + \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{x}{s_1} ds_1 =$$

$$\left(\frac{s_1^2}{2} \right)_x^{\sqrt{x}} + \Big(x \ln s_1 \Big)_{\sqrt{x}}^1 = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + 0 - x \ln \sqrt{x} = \frac{x - x^2 - 2x \ln \sqrt{x}}{2}$$

Por lo que L *será la inversa de la función;*

$$\frac{\int_x^1 v(s_1, 0, \frac{x}{s_1}) ds_1}{1-x} = \frac{x - x^2 - 2x \ln \sqrt{x}}{2 \cdot (1-x)} = \frac{x - x^2 - x \ln x}{2 \cdot (1-x)}$$

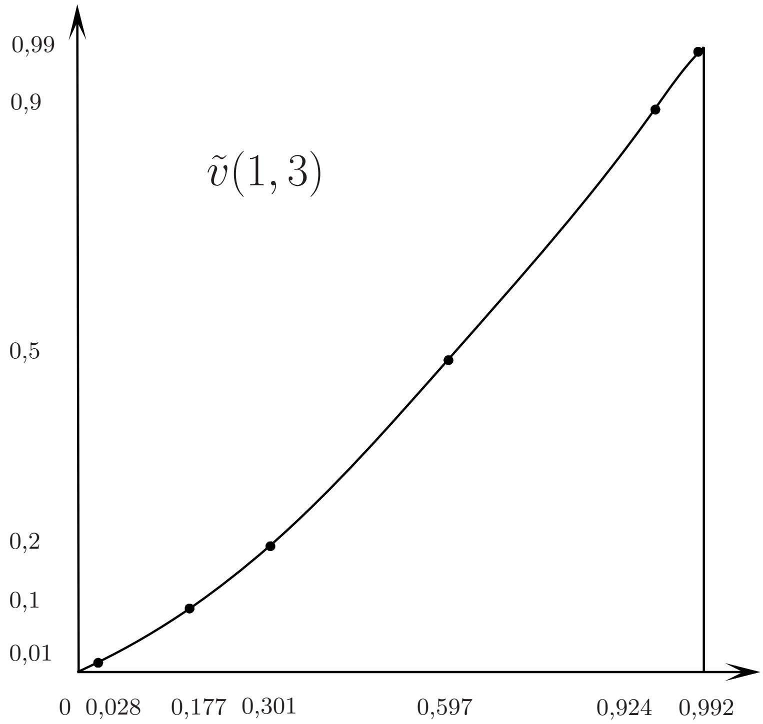

Figura 2.17: Número difuso $\tilde{v}(1,3) = (0,1,1)_{LR}$.

Calculemos algunos valores:

$$L(0,028) = 0,01 \qquad L(0,178) = 0,1 \qquad L(0,301) = 0,2$$

$$L(0,597) = 0,5 \qquad L(0,924) = 0,9 \qquad L(0,992) = 0,99$$

- $\tilde{v}(2,3) = \tilde{v}(1,3)$ *Debido a las características de* v
- $\tilde{v}(N) = (0, v(1,1,1), v(1,1,1))_{LR} = (0,1,1)_{LR}$ *siendo* $R \equiv 0$ *y* L *la función:*

$$L(x) = \left(\frac{\int_x^1 (\int_{\frac{x}{s_1}}^1 v(s_1, s_2, \frac{x}{s_1 s_2}) ds_2) ds_1}{1 - x + x \ln x} \right)^{-1}$$

El denominador resulta de calcular el área del recinto en el que se integran las variables.

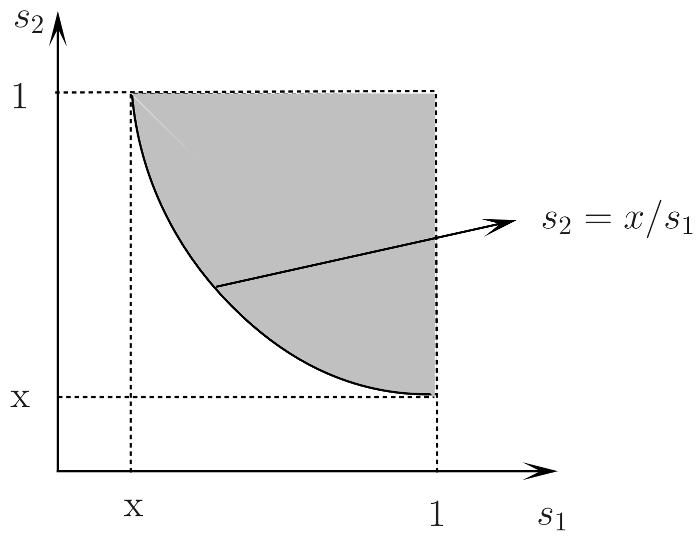

Figura 2.18: Área de la figura que recorren las variables sobre las que se integra.

$$\acute{A}rea\ sombreada = (1-x) - \int_x^1 \frac{x}{s_1} ds_1 = 1 - x - \Big(x \ln s_1\Big)_x^1 = 1 - x + x \ln x$$

Veamos cuando $s_1 + s_2 \geq s_3$, ya que dependiendo de ello la función v tendrá una forma u otra.

$$s_1 + s_2 \geq s_3 \longleftrightarrow s_1 + s_2 \geq \frac{x}{s_1 s_2} \longleftrightarrow s_1^2 s_2 + s_1 s_2^2 \geq x \longleftrightarrow s_1 s_2^2 + s_1^2 s_2 - x \geq 0 \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow s_2 \notin \left(\frac{-s_1^2 - \sqrt{s_1^4 + 4s_1 x}}{2s_1}, \frac{-s_1^2 + \sqrt{s_1^4 + 4s_1 x}}{2s_1} \right)$$

Se tiene que $\frac{-s_1^2 - \sqrt{s_1^4 + 4s_1 x}}{2s_1} \leq 0$ y sabemos que s_2 es siempre mayor o igual que 0, por lo tanto:

$$s_1 + s_2 \geq s_3 \longleftrightarrow s_2 \geq \frac{-s_1^2 + \sqrt{s_1^4 + 4s_1 x}}{2s_1}$$

Por lo tanto;

$$Si \quad s_2 \geq \frac{-s_1^2+\sqrt{s_1^4+4s_1x}}{2s_1} \longrightarrow v(s_1,s_2,\frac{x}{s_1s_2}) = \frac{x}{s_1s_2}$$

$$Si \quad s_2 < \frac{-s_1^2+\sqrt{s_1^4+4s_1x}}{2s_1} \longrightarrow v(s_1,s_2,\frac{x}{s_1s_2}) = s_1+s_2$$

Además hay que tener en cuenta que la variable s_2 se integra de x/s_1 a 1, por lo tanto debemos estudiar cuando se da que

$$\frac{-s_1^2+\sqrt{s_1^4+4s_1x}}{2s_1} > \frac{x}{s_1}$$

Esto ocurre sólo cuando:

$$\sqrt{s_1^4+4s_1x} > 2x+s_1^2 \longleftrightarrow s_1^4+4s_1x > 4x^2+s_1^4+4xs_1^2 \longleftrightarrow s_1^2-s_1+x<0$$

lo cual sucede sólo si;

$$s_1 \in \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}\right)$$

Si $1-4x<0$, es decir, si $x>1/4$, aparece una raíz negativa, luego $s_1^2-s_1+x$ no se anularía nunca, de hecho sería siempre positivo, por lo tanto:

$$Si\ x > \frac{1}{4} \Longrightarrow \frac{-s_1^2+\sqrt{s_1^4+4s_1x}}{2s_1} < \frac{x}{s_1} \quad \forall s_1$$

$$Si\ 0 \leq x \leq 1/4 \Longrightarrow \begin{cases} \frac{-s_1^2+\sqrt{s_1^4+4s_1x}}{2s_1} > \frac{x}{s_1} & si\ s_1 \in \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}\right) \\ \frac{-s_1^2+\sqrt{s_1^4+4s_1x}}{2s_1} < \frac{x}{s_1} & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

Además siempre se da que

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} > x \quad y \quad \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2} < 1$$

Con todo ello concluimos que L es la inversa de la función

- $\frac{\int_x^{\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}}(\int_{\frac{x}{s_1}}^1 \frac{x}{s_1 s_2}ds_2)ds_1+\int_{\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}}(\int_{\frac{x}{s_1}}^{\frac{-s_1^2+\sqrt{s_1^4+4s_1x}}{2s_1}} s_1+s_2ds_2+\int_{\frac{-s_1^2+\sqrt{s_1^4+4s_1x}}{2s_1}}^1 \frac{x}{s_1 s_2}ds_2)ds_1}{1-x+x\ln x}+$
  $+\frac{\int_{\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}}^1(\int_{\frac{x}{s_1}}^1 \frac{x}{s_1 s_2}ds_2)ds_1}{1-x+x\ln x} \qquad si\ x \leq \frac{1}{4}$
- $\frac{\int_x^1(\int_{\frac{x}{s_1}}^1 \frac{x}{s_1 s_2}ds_2)ds_1}{1-x+x\ln x} \qquad si\ x > \frac{1}{4}$

2.5.2. Paso de juego con coaliciones usuales y pagos difusos a un juego con coaliciones difusas y pagos escalares.

Planteemos ahora el problema inverso, es decir, supongamos que partimos de un juego difuso usual $(N,\tilde{v}) \in FG^n$, y deseamos transformarlo en un juego con coaliciones difusas y pagos escalares $(N,v) \in FCG^n$.

A cada coalición difusa $\tilde{s} = (0,\ldots,s_{i_1},\ldots,s_{i_k},\ldots,0) \in \digamma^n$, que tiene k elementos distintos de cero, es decir, $0 < s_{i_j} \leq 1 \quad \forall j = 1,\ldots,k$, y los demás elementos valen cero, le asociamos un pago escalar $v(\tilde{s})$, que viene determinado de la siguiente manera:

1. Consideremos la coalición usual $S = \{i_1,\ldots,i_k\}$, a la que pertenecen tan sólo los jugadores que en la coalición difusas $\tilde{s}$ tienen asignado un valor distinto de cero.

2. Sea $\tilde{v}(S) = (m_S, a_S, b_S, n_S)_{L_S R_S}$ el pago difuso que el juego $(N,\tilde{v}) \in FG^n$ asigna a la coalición S.

3. A la coalición difusa $\tilde{s}$ le asignaremos el valor:

$$v(\tilde{s}) = L_S^{-1}(s_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_k})$$

Ejemplo 2.5.5 *Sea* $(\{1,2\},\tilde{v}) \in FG^2(T/\preceq)$ *el juego con pagos difusos;*

$\tilde{v}(1)$	$\tilde{v}(2)$	$\tilde{v}(N)$
(0,1,1,3)	*(1,2,3,4)*	*(2,3,4,6)*

siendo los pagos de este juego números difusos trapezoidales.

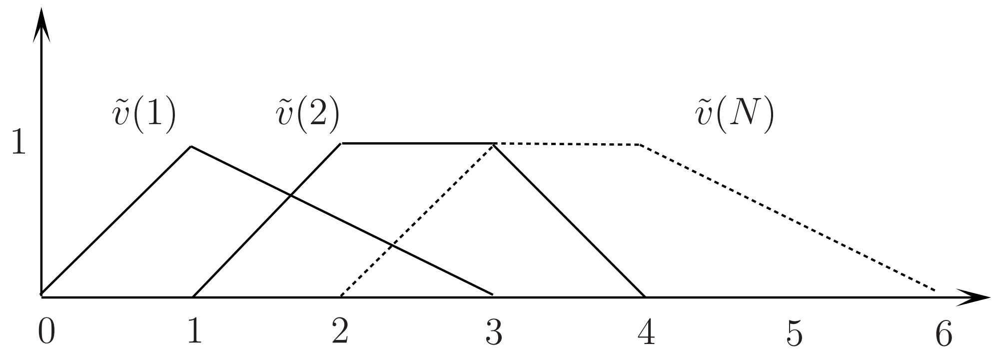

Figura 2.19: Pagos del juego difuso.

Calculemos los pagos escalares que recibirán algunas coaliciones difusas teniendo en cuenta que $L_1(x) = x$, $L_2(x) = x - 1$ y $L_N(x) = x - 2$, ya que los pagos son números difusos trapezoidales;

$$v(0'75, 0) = 0'75 \qquad v(1, 0) = 1 \qquad v(0, 0'75) = 0'75 + 1 = 1'75 \qquad v(0, 1) = 1 + 1 = 2$$

$$v(0'5, 0'5) = 0'5 \cdot 0'5 + 2 = 2'25 \qquad v(0'3, 0'7) = 0'7 \cdot 0'3 + 2 = 2'21$$

$$v(0'8, 0'9) = 0'8 \cdot 0'9 + 2 = 2'72 \qquad v(1, 1) = 1 \cdot 1 + 2 = 3$$

2.6. Aplicación: Juegos cooperativos intervalares I

Llamamos juegos cooperativos intervalares, a los juegos cooperativos difusos en los que los pagos son números difusos intervalares, es decir, $(N, v) \in FG^n(I/\preceq)$.
Comenzaremos estudiando el core con una función de orden estándar para este tipo de juegos. Los números difusos intervalares poseen la característica de que los α-cortes coinciden para

todo $\alpha \in [0,1]$, por lo tanto no hace falta especificar el sistema de orden, es decir, nos bastará con especificar $(N,v) \in FG^n(I/(\preceq_e, \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}))$.

Definición 2.6.1 *Dado un juego cooperativo $(N,v) \in FG^n(I/\preceq)$, se define el core paramétrico $core(N,v,\delta)$ como el conjunto;*

$$core(N,v,\delta) = \{(X_1, \ldots, X_n)/ \sum_{i=1}^{n} a_i = a_N; \ \sum_{i=1}^{n} b_i = b_N$$

$$\delta \sum_{i\in S} a_i + (1-\delta) \sum_{i \in S} b_i \geq \delta a_S + (1-\delta) b_S, \ \forall S \subseteq N\}$$

siendo $X_i = (a_i, b_i)$ la ganancia del i-ésimo jugador, y $v(S) = (a_S, b_S)$.

Estudiaremos el core de los juegos intervalares para una función de orden estándar con dos parámetros de posición y con un único parámetro de posición. En el caso de que los parámetros de posición sean más de dos, el resultado es análogo al caso de dos parámetros de posición.

Teorema 2.6.1 *Sea $(N,v) \in FG^n(I/(\preceq_e, \{\lambda, \mu\}))$. El core de preferencia queda definido por la intersección de los dos cores paramétricos $core(N,v,\lambda)$ y $core(N,v,\mu)$, es decir:*

$$core(N,v,\preceq_e,\{\lambda,\mu\})) = core(N,v,\lambda) \bigcap core(N,v,\mu)$$

Demostración 2.6.1 *Según el teorema 2.2.1, el core definido por una función de orden estándar de un juego cooperativo intervalar con dos parámetros sería:*

$$core(N,v) = \{X \in I^*(N,v)/\lambda \sum_{i\in S} a_i + (1-\lambda) \sum_{i\in S} b_i \geq \lambda a_S + (1-\lambda) b_S \forall S \subseteq N\} \bigcap$$

$$\bigcap \{X \in I^*(N,v)/\mu \sum_{i\in S} a_i + (1-\mu) \sum_{i\in S} b_i \geq \mu a_S + (1-\mu) b_S \forall S \subseteq N\}$$

La condición $X \in I^*(N,v)$ lo que implica es que $\lambda \sum_{i=1}^n a_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^n b_i = \lambda a_N + (1-\lambda) b_N$ y que $\mu \sum_{i=1}^n a_i + (1-\mu) \sum_{i=1}^n b_i = \mu a_N + (1-\mu) b_N$, gracias a la proposición 1.2.1 esto es equivalente a que;

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_N \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i = b_N$$

por lo tanto concluimos que

$$core(N,v) = \{(X_1,\ldots,X_n)/\sum_{i=1}^{n} a_i = a_N;\ \sum_{i=1}^{n} b_i = b_N$$

$$\lambda\sum_{i\in S} a_i + (1-\lambda)\sum_{i\in S} b_i \geq \lambda a_S + (1-\lambda)b_S;\ \mu\sum_{i\in S} a_i + (1-\mu)\sum_{i\in S} b_i \geq \mu a_S + (1-\mu)b_S \forall S\subseteq N\}$$

Ejemplo 2.6.1 *Sea el juego difuso intervalar* $(N,v)\in FG^3(I/(\preceq_e,\{0,1/2\}))$*;*

$v(1)$	$v(2)$	$v(3)$	$v(1,2)$	$v(1,3)$	$v(2,3)$	$v(N)$
$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,2)$	$(0,3)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(3,5)$

El core estará formado por las imputaciones $X = (X_1, X_2, X_3)$ *que verifiquen el siguiente sistema de inecuaciones;*

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3 \quad b_1 + b_2 + b_3 = 5$$

$$b_1 \geq 1 \quad b_2 \geq 2 \quad b_3 \geq 2 \quad b_1 + b_2 \geq 3 \quad b_1 + b_3 \geq 3 \quad b_2 + b_3 \geq 4$$

$$a_1 + b_1 \geq 1 \qquad a_2 + b_2 \geq 2 \qquad a_3 + b_3 \geq 3$$

$$a_1 + a_2 + b_1 + b_2 \geq 3 \qquad a_1 + a_3 + b_1 + b_3 \geq 5 \qquad a_2 + a_3 + b_2 + b_3 \geq 6$$

$$b_1 \geq a_1 \quad b_2 \geq a_2 \quad b_3 \geq a_3$$

Las tres últimas inecuaciones se imponen para que X_1*,* X_2 *y* X_3 *sean números difusos. Una solución a este sistema es por ejemplo*

$$X_1 = (1,1) \quad X_2 = (1,2) \quad X_3 = (1,2)$$

Sea $(N,v)\in FG^n(I/(\preceq_e,\{\lambda\}))$. El core de preferencia queda definido según el teorema 2.2.1 por:

$$core(N,v) = \{(X_1,\ldots,X_n)/\lambda\sum_{i=1}^{n} a_i + (1-\lambda)\sum_{i=1}^{n} b_i = \lambda a_N + (1-\lambda)b_N;$$

$$\lambda\sum_{i\in S} a_i + (1-\lambda)\sum_{i\in S} b_i \geq \lambda a_S + (1-\lambda)b_S \forall S\subseteq N\}$$

siendo $X_i = (a_i, b_i)$ la ganancia del i-ésimo jugador, y $v(S) = (a_S, b_S)$.

Ejemplo 2.6.2 *(Continuación 2.6.1) Consideraremos el mismo juego del ejemplo anterior, pero con otro orden difuso, $(N, v) \in FG^3(I/(\preceq_e, \{2/3\}))$.*
El core estará formado por las imputaciones $X = (X_1, X_2, X_3)$ que verifiquen el siguiente sistema de inecuaciones;

$$2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + b_1 + b_2 + b_3 = 11$$

$$2a_1 + b_1 \geq 1 \quad 2a_2 + b_2 \geq 2 \quad 2a_3 + b_3 \geq 4$$

$$2a_1 + 2a_2 + b_1 + b_2 \geq 3 \quad 2a_1 + 2a_3 + b_1 + b_3 \geq 7 \quad 2a_2 + 2a_3 + b_2 + b_3 \geq 8$$

$$b_1 \geq a_1 \quad b_2 \geq a_2 \quad b_3 \geq a_3$$

Este sistema tiene varias soluciones :

$$X_1 = (1, 1) \quad X_2 = (4/3, 4/3) \quad X_3 = (4/3, 4/3)$$

$$X_1 = (1, 1) \quad X_2 = (2/3, 2/3) \quad X_3 = (2, 2)$$

$$X_1 = (0, 1) \quad X_2 = (0, 2) \quad X_3 = (0, 8)$$

$$X_1 = (1/3, 1/3) \quad X_2 = (4/3, 4/3) \quad X_3 = (2, 2)$$

$$X_1 = (1/2, 1) \quad X_2 = (3/4, 2) \quad X_3 = (27/4, 2)$$

$$\vdots$$

Teorema 2.6.2 *Consideremos (N, v) un juego difuso intervalar. Sea $\preceq_e$ un orden difuso estándar arbitrario y sea $\preceq^* = (\preceq_e, \{0, 1\})$ el orden difuso estándar con dos parámetros de posición. Se tiene que:*

$$core(N, v, \preceq^*) \subseteq core(N, v, \preceq_e)$$

Demostración 2.6.2 *Sea $X = (X_1, \ldots, X_n) \in core(N, v, \preceq^*)$ con $X_i = (a_i, b_i)$, se tiene* *que* $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_N$ *y* $\sum_{i=1}^{n} b_i = b_N$ *siendo* $v(N) = (a_N, b_N)$, *además:*

$$\sum_{i \in S} a_i \geq a_S \qquad \sum_{i \in S} b_i \geq b_S \qquad \forall S \subset N \quad \textit{siendo } v(S) = (a_S, b_S)$$

Sea $\lambda \in [0,1]$ *cualquier parámetro, usando estas dos últimas desigualdades, llegamos a :*

$$\lambda \sum_{i \in S} a_i + (1-\lambda) \sum_{i \in S} b_i \geq \lambda a_S + (1-\lambda) b_S$$

lo cual implica que $X \in core(N, v, \lambda)$ *para todo* $\lambda \in [0,1]$. *Uniendo este hecho a que*

$$core(N, v, (\preceq_e, \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\})) = \bigcap_{i=1}^{k} core(N, v, \lambda_i)$$

obtenemos que $X \in core(N, v, \preceq_e)$, *siendo* $\preceq_e$ *un orden estándar cualquiera.*

Ejemplo 2.6.3 *(Continuación 2.6.1) Consideremos el juego difuso* $(N, v) \in FG^3(I/(\preceq_e, \{0,1\}))$. *El core estará formado por las imputaciones* $X = (X_1, X_2, X_3)$ *que verifiquen el siguiente sistema de ecuaciones;*

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3 \qquad b_1 + b_2 + b_3 = 5$$

$$a_1 \geq 0 \qquad a_2 \geq 0 \qquad a_3 \geq 1$$

$$b_1 \geq 1 \qquad b_2 \geq 2 \qquad b_3 \geq 2$$

$$a_1 + a_2 \geq 0 \qquad a_1 + a_3 \geq 2 \qquad a_2 + a_3 \geq 2$$

$$b_1 + b_2 \geq 3 \qquad b_1 + b_3 \geq 3 \qquad b_2 + b_3 \geq 4$$

$$b_1 \geq a_1 \qquad b_2 \geq a_2 \qquad b_3 \geq a_3$$

Las soluciones a este sistema de inecuaciones son;

$$X^1 \rightarrow \qquad X_1 = (1,1) \qquad X_2 = (1,2) \qquad X_3 = (1,2)$$

$$X^2 \rightarrow \qquad X_1 = (0,1) \qquad X_2 = (1,2) \qquad X_3 = (2,2)$$

$$X^3 \rightarrow \qquad X_1 = (1,1) \qquad X_2 = (0,2) \qquad X_3 = (2,2)$$

y todas las combinaciones lineales de estas tres soluciones.

Como se puede comprobar la solución dada en el ejemplo 2.6.1 también pertenece al core del juego $(N, v, (\preceq_e, \{0,1\}))$*, sin embargo de todas las soluciones dadas en el ejemplo 2.6.2, sólo la última pertenece a* $core(N, v, (\preceq_e, \{0,1\}))$*, ya que es la única que es combinación lineal de las tres soluciones dadas anteriormente,* $1/4 \cdot X^1 + 1/4 \cdot X^2 + 1/2 \cdot X^3$.

Capítulo 3

Juegos difusos cooperativos con un orden central.

En este capítulo utilizaremos órdenes difusos centrales, que eran aquellos que tenían un único parámetro de posición $\lambda = 1/2$ en cada α-corte (ver sección 1.4).
Comenzaremos estudiando algunas características del core de los juegos difusos con un orden estándar central, a continuación nos centramos en los juegos difusos convexos y en la importante condición que verifican los cores de estos juegos de ser su core no vacío. Posteriormente consideramos los juegos de bancarrota como son una clase de juegos convexos.

También estudiaremos en este capítulo otro concepto de solución, el Valor de Shapley. Este tipo de solución para un juego difuso es una clase de equivalencia de números difusos, es decir, un número difuso y todos los equivalentes a él según el orden difusos usado. Este tipo de solución se usa alternativamente a las soluciones de tipo conjunto, aunque no es posible definirlo siempre para cualquier orden, como ocurría con el core.

Por último, haremos un estudio pormenorizado de los juegos cooperativos intervalares con este orden, determinando el core y el valor de Shapley.

3.1. Juegos cooperativos con un orden estándar central.

Debido a las características de los órdenes difusos centrales, el core de preferencia de los juegos difusos que utilizan este tipo de orden, están caracterizados por el siguiente teorema;

Teorema 3.1.1 *Sea* $(N, v) \in FG^n(\Omega/(\preceq_c, \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}))$*, el core de preferencia es:*

$$core(N, v) = \bigcap_{i=1}^{p} C(N, v_{p_i})$$

siendo $p_i((\alpha, a, b, \beta)) = a + b - \alpha L^{-1}(\alpha_i) + \beta R^{-1}(\alpha_i)$.

Demostración 3.1.1 *El teorema 2.2.1 nos asegura que*

$$core(N, v) = \bigcap_{i=1}^{p} \bigcap_{j=1}^{k} \{X \in I^*(N, v)/p_{ij}(v(S)) \leq p_{ij}(X_S),\ \forall S \subseteq N\}$$

Sean $v(S) = (\alpha_{v(S)}, a_{v(S)}, b_{v(S)}, \beta_{v(S)})_{L-R}$ *y* $X_S = (\alpha_{X_S}, a_{X_S}, b_{X_S}, \beta_{X_S})_{L-R}$*. En el caso de los órdenes difusos centrales* $k = 1$*, ya que hay un único parámetro de posición* $\lambda = 1/2$*, por lo tanto:*

$$core(N, v) = \bigcap_{i=1}^{p} \{X \in I^*(N, v)/p_i(v(S)) \leq p_i(X_S),\ \forall S \subseteq N\} =$$

$$= \bigcap_{i=1}^{p} \{X \in I^*(N, v)/\frac{1}{2}(a_{v(S)} - \alpha_{v(S)} L^{-1}(\alpha_i)) + (1 - \frac{1}{2})(b_{v(S)} + \beta_{v(S)} R^{-1}(\alpha_i)) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}(a_{X_S} - \alpha_{X_S} L^{-1}(\alpha_i)) + (1 - \frac{1}{2})(b_{X_S} + \beta_{X_S} R^{-1}(\alpha_i)),\ \forall S \subseteq N\} =$$

$$= \bigcap_{i=1}^{p} \{X \in I^*(N, v)/(a_{v(S)} - \alpha_{v(S)} L^{-1}(\alpha_i)) + (b_{v(S)} + \beta_{v(S)} R^{-1}(\alpha_i)) \leq$$

$$\leq (a_{X_S} - \alpha_{X_S} L^{-1}(\alpha_i)) + (b_{X_S} + \beta_{X_S} R^{-1}(\alpha_i)),\ \forall S \subseteq N\}$$

3.2. Juegos difusos convexos.

Es importante encontrar una condición que haga que el core de un juego cooperativo difuso sea distinto de vacío. En el caso de los juegos escalares imponiendo la convexidad del juego conseguíamos tan deseada propiedad.
En esta sección extenderemos esta condición de convexidad a los juegos cooperativos difusos, con el fin de conseguir una condición similar.

Definición 3.2.1 *Un juego difuso $(N, v) \in FCG^n(\Omega/(\preceq_c, \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}))$ es convexo, si dadas dos coaliciones cualesquiera que verifiquen que $S \subset T$, para todo $i \in N$ se tiene que:*

$$d_i(S) \preceq d_i(T)$$

siendo $d_i(S)$ la contribución marginal de i en S;

$$d_i(S) = \begin{cases} v(S \cup \{i\}) - v(S) & i \notin S \\ v(S) - v(S - \{i\}) & i \in S \end{cases}$$

Esta propiedad indica que si un jugador no pertenece a ninguna coalición, su unión a ella aporta más cuanto mayor sea la coalición, luego esto le incita a unirse a la coalición mayor posible. Por ello la gran coalición, N, es muy atractiva en los juegos convexos pues será la que dé más para compartir.

El core de los juegos cooperativos escalares convexos es siempre no vacío. Al extender el concepto de convexidad a los juegos cooperativos difusos obtenemos un resultado análogo. Consideraremos que el orden $\preceq$, es un orden difuso estándar central.

Ejemplo 3.2.1 *Sea el juego difuso $(N, v) \in FG^3(T/(\preceq_c, \{0, 1\}))$ definido por,*

$v(1)$	$v(2)$	$v(3)$	$v(1,2)$	$v(1,3)$	$v(2,3)$	$v(N)$
$(0,0,0,0)$	$(1,3,4,1)$	$(1,3,5,2)$	$(1,3,5,2)$	$(1,5,7,2)$	$(1,6,8,2)$	$(2,14,16,2)$

Este juego no es convexo, ya que dadas las coaliciones $\{2\} \subset \{2, 3\}$;

$$d_2(\{2\}) = (1,3,4,1) - (0,0,0,0) = (1,3,4,1) \npreceq d_2(\{2,3\}) = (1,6,8,2) - (1,3,5,2) = (3,1,5,3)$$

ya que $\frac{3+4}{2} = 3,5 \npreceq \frac{1+5}{2} = 3$.

Ejemplo 3.2.2 *(Continuación 2.1.1) El juego difuso del ejemplo 2.1.1. es convexo con cualquier orden estándar central.*

Al igual que en el caso escalar, la convexidad nos va a proporcionar una condición suficiente para la existencia de puntos en el core de preferencia de los juegos con pagos difusos.

Teorema 3.2.1 *Si un juego cooperativo difuso* $(N, v) \in FCG^n(\Omega/(\preceq_c, \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}))$ *es convexo entonces* $core(N, v) \neq \emptyset$.

Demostración 3.2.1 *Consideremos los siguientes conjuntos:*

$$B_i = \{1, \ldots, i\},\ \forall i \in N \quad B_0 = \emptyset.$$

Consideremos también el siguiente reparto:

$$d = (d^1, \ldots, d^n)$$

$$d^i = v(B_i) - v(B_{i-1}), \quad \forall i \in N - \{1\} \quad d^1 = v(B_1)$$

Veamos que el reparto $(d^1, \ldots, d^k) \in core(B_k, v)$ *para cualquier* $k = 1, \ldots, n$, *por inducción en* k.

- $k = 1$

  Es trivial que $d^1 = v(\{1\}) \in core(\{1\}, v)$.

- $k \to k + 1$

  Suponemos que $(d^1, \ldots, d^k) \in core(B_k, v)$.

  Veamos que $(d^1, \ldots, d^{k+1}) \in core(B_{k+1}, v)$.

  - $$\sum_{i=1}^{k+1} d^i = \sum_{i=1}^{k} d^i + d^{k+1} = v(B_k) + d^{k+1} = v(B_k) + v(B_{k+1}) - v(B_k)$$

    Por el teorema 1.2.2, debido a que el orden difuso usado es central sabemos que,

    $$v(B_k) + v(B_{k+1}) - v(B_k) = v(B_{k+1})$$

- *Veamos ahora que* $\forall\ S \subset B_{k+1}$, $\sum_{i\in S} d^i \succeq v(S)$.

  Consideremos primero una coalición $S \subset B_k$. *Por hipótesis de inducción se tiene que* $v(S) \preceq \sum_{i\in S} d^i$.

  consideremos ahora $S \cup \{k+1\}$,

$$\sum_{i\in S\cup\{k+1\}} d^i = \sum_{i\in S} d^i + d^{k+1} \succeq$$

  por hipótesis de inducción

$$\succeq v(S) + d^{k+1} = v(S) + v(B_{k+1}) - v(B_k) \succeq$$

  como $S \cup \{k+1\} \subset B_{k+1}$ *y el juego es convexo, se tiene que* $d_{k+1}(S) \preceq d^{k+1}$, *luego*

$$\succeq v(S) + d_{k+1}(S) = v(S) + v(S \cup \{k+1\}) - v(S) =$$

  Debido al teorema 1.2.2

$$= v(S \cup \{k+1\}).$$

  Por lo tanto se tiene que $v(S) \preceq \sum_{i\in S} d^i\ \forall S \subset B_{k+1}$, *lo que finaliza la inducción.*

Así pues $(d^1, \ldots, d^{k+1}) \in core(B_{k+1}, v)$.

tomando $k = n$ *tenemos que* $d \in core(N, v)$, *lo cual concluye la prueba.*

Si consideramos π una permutación cualquiera de N, el vector de contribuciones marginales d^π definido por

$$d_i^\pi = v(P_i^\pi \cup \{i\}) - v(P_i^\pi) \qquad \forall i \in N$$

donde $P_i^\pi = \{j \in N / \pi(j) < \pi(i)\}$, pertenece al core. Además estos son lo extremos del core, es decir, generan cualquier otro elemento de core, como ocurría en el caso escalar.

3.2.1. Juegos difusos de bancarrota

Una situación de bancarrota surge cuando el dinero que posee una determinada empresa es insuficiente para pagar el capital demandado por sus acreedores. El principal problema

de una situación de bancarrota es como debe dividirse el valor neto de la empresa entre sus acreedores.
Consideraremos situaciones donde una propiedad o estado $E \in \Omega$ va a ser dividido entre n demandantes o acreedores. El conjunto de demandantes se denotará como $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. El acreedor i demanda una cantidad difusa d_i de la propiedad E, de manera que $\sum_{i=1}^{n} d_i \succeq E \succeq \tilde{0}$. El problema que se plantea es como dividir la propiedad E de la empresa que ha quebrado entre todos los acreedores. Buscaremos una regla de reparto que aplique algún criterio de asignación que siga un razonamiento ético y operacional.

Definición 3.2.2 *Un problema de bancarrota difuso es un par $(E, d) \in \Omega \times \Omega^n$, donde E es un número difuso que indica la propiedad a repartir, y d es un vector formado por n números difusos que indica las demandas de los acreedores, $d = (d_1, \ldots, d_n)$, donde se verifica que $\sum_{i=1}^{n} d_i \succeq E \succeq \tilde{0}$, siendo $\tilde{0} = (0, 0, 0, 0)_{LR}$ un número difuso.*

Una regla de división o reparto asociada a cada problema de bancarrota difuso (E, d), es un vector formado por números difusos $X = (X_1, \ldots, X_n)$, tal que se cumple:

- Racionalidad individual: $X_i \succeq \tilde{0}$, $\forall\, i \in N$
- Eficiencia: $\sum_{i \in N} X_i = E$

Para cada problema de bancarrota difuso (E, d) se puede definir un juego difuso cooperativo (N, v). El conjunto de jugadores en el juego de bancarrota será el mismo que el conjunto de demandantes del problema de bancarrota. El valor de la coalición S en el juego se define como la propiedad que se reparte, que no es reclamada por los demandantes que no pertenecen a la coalición S. Denotaremos por $d(S)$ a la suma de las demandas de todos los acreedores que forman parte de la coalición S, y por $d(N \setminus S)$ a la suma de las demandas de todos los agentes que no forman parte de la coalición S.

Definición 3.2.3 *Un juego cooperativo difuso (N, v) es un juego difuso de bancarrota si existe un problema de bancarrota (E, d) tal que:*

$$v(S) = máx\{\tilde{0}; E - d(N \setminus S)\} \quad \forall S \subset N$$

El valor de cada coalición $v(S)$ es una valoración pesimista de lo que ésta puede lograr, primero reparte a los demandantes que no están en la coalición y sobre el resto la coalición S obtiene su posible pago.

Teorema 3.2.2 *Los juegos difusos de bancarrota son juegos convexos.*

Demostración 3.2.2 *Sea (N, v) un juego difuso de bancarrota asociado al problema difuso de bancarrota (E, d). Sean S y T dos coaliciones difusas que verifican que $S \subset T$, y sea $i \in N$ tal que $S \subset T \subset N - \{i\}$. Para probar que el juego difuso de bancarrota es convexo debemos probar que $d_i(S) \preceq_c d_i(T)$, es decir:*

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \preceq_c v(T \cup \{i\}) - v(T)$$

Como el orden difuso usado es central y basándonos en el teorema 1.2.2, esta condición es equivalente a probar que:

$$v(S \cup \{i\}) + v(T) \preceq_c v(T \cup \{i\}) + v(S)$$

$$v(S \cup \{i\}) + v(T) = máx\{\tilde{0}, E - d(N - S) + d_i\} + máx\{\tilde{0}, E - d(N - T)\} =$$

por la proposición 1.3.1 tenemos la siguiente igualdad:

$$= máx\{\tilde{0}, E - d(N - S) + d_i, E - d(N - T), 2E - d(N - S) - d(N - T) + d_i\}$$

Siguiendo un procedimiento análogo llegamos a que:

$$v(T \cup \{i\}) + v(S) = máx\{\tilde{0}, E - d(N - T) + d_i\} + máx\{\tilde{0}, E - d(N - S)\} =$$

$$= máx\{\tilde{0}, E - d(N - T) + d_i, E - d(N - S), 2E - d(N - T) - d(N - S) + d_i\}$$

Además tenemos que $\tilde{0} \preceq_c d_i$ y que $d(N - T) \preceq_c d(N - S)$ ya que $\tilde{0} \preceq_c d_j$ para todo $j \in N$ y $N - T \subset N - S$, por lo tanto:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \preceq_c v(T \cup \{i\}) - v(T)$$

concluyendo así que el juego difuso de bancarrota (N, v) es convexo.

Al ser los juegos difusos de bancarrota convexos, el core de este tipo de juegos es siempre distinto de vacío.

Ejemplo 3.2.3 *Sea el problema de bancarrota (E, d), en el que el capital que la empresa posee viene dado por el número difuso triangular,*

$$E = (1, 7, 2)$$

y el capital demandado por los acreedores viene dado por el vector $d = (d_1, d_2, d_3)$ siendo

$$d_1 = (1, 3, 1) \quad d_2 = (0, 3, 2) \quad d_3 = (2, 4, 1)$$

Se puede comprobar que,

$$d_1 + d_2 + d_3 = (3, 10, 4) \succeq E = (1, 7, 2) \quad para\ todo\ orden\ difuso\ central$$

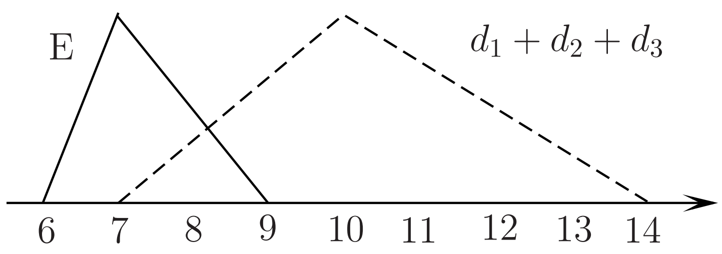

Figura 3.1: Números difusos E y $d_1 + d_2 + d_3$.

Calculemos la función característica del juego difuso asociado a este problema de bancarrota. Para ello usaremos el orden difuso central con sistema de orden $Y = \{0, 1\}$. Tendremos en cuenta que dos números difusos $A, B \in T$ son equivalentes, $A \simeq B$, si $A \succeq B$ y $B \succeq A$, o lo que es lo mismo si $A - B \simeq \tilde{0}$. Con el orden difuso central elegido para este ejemplo, la *equivalencia entre dos números difusos triangulares se da cuando:*

$$A = (\alpha, a, \beta) \simeq B = (\gamma, b, \delta) \Leftrightarrow A - B = (\alpha + \delta, a - b, \beta + \gamma) \simeq (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = b \qquad \alpha - \beta = \gamma - \delta$$

$$v(1) = m\acute{a}x\{\tilde{0}, (1,7,2) - [(0,3,2) + (2,4,1)]\} = m\acute{a}x\{(0,0,0), (4,0,4)\} = (4,0,4) \simeq (0,0,0)$$

$$v(2) = m\acute{a}x\{\tilde{0}, (1,7,2) - [(1,3,1) + (2,4,1)]\} = m\acute{a}x\{(0,0,0), (3,0,5)\} = (3,0,5) \simeq (0,0,2)$$

$$v(3) = m\acute{a}x\{\tilde{0}, (1,7,2) - [(1,3,1) + (0,3,2)]\} = m\acute{a}x\{(0,0,0), (4,1,3)\} = (4,1,3) \simeq (1,1,0)$$

$$v(1,2) = m\acute{a}x\{\tilde{0}, (1,7,2) - (2,4,1)\} = m\acute{a}x\{(0,0,0), (2,3,4)\} = (2,3,4)$$

$$v(1,3) = m\acute{a}x\{\tilde{0}, (1,7,2) - (0,3,2)\} = m\acute{a}x\{(0,0,0), (3,4,2)\} = (3,4,2)$$

$$v(2,3) = m\acute{a}x\{\tilde{0}, (1,7,2) - (1,3,1)\} = m\acute{a}x\{(0,0,0), (2,4,3)\} = (2,4,3)$$

$$v(N) = (1,7,2)$$

Calcularemos las contribuciones marginales d^{π}, todas las cuales pertenecen al core, y además generan todos los elementos del core.

$$\pi^{I} = \{1,2,3\} \longrightarrow d_1^{I} = v(1) - v(\emptyset) = (0,0,0)$$

$$d_2^{I} = v(2,1) - v(1) = (2,3,4) \simeq (0,3,2) \quad d_3^{I} = v(N) - v(1,2) = (5,4,4) \simeq (1,4,0)$$

$$\pi^{II} = \{1,3,2\} \longrightarrow d_1^{II} = v(1) - v(\emptyset) = (0,0,0)$$

$$d_2^{II} = v(N) - v(1,3) = (3,3,5) \simeq (0,3,2) \quad d_3^{II} = v(1,3) - v(1) = (3,4,2) \simeq (1,4,0)$$

$$\pi^{III} = \{2,1,3\} \longrightarrow d_1^{III} = v(1,2) - v(2) = (4,3,4) \simeq (0,3,0)$$

$$d_2^{III} = v(2) - v(\emptyset) = (0,0,2) \quad d_3^{III} = v(N) - v(2,1) = (5,4,4) \simeq (1,4,0)$$

$$\pi^{IV} = \{2,3,1\} \longrightarrow d_1^{IV} = v(N) - v(2,3) = (4,3,4) \simeq (0,3,0)$$

$$d_2^{IV} = v(2) - v(\emptyset) = (0,0,2) \quad d_3^{IV} = v(2,3) - v(2) = (4,4,3) \simeq (1,4,0)$$

$$\pi^V = \{3,1,2\} \longrightarrow d_1^V = v(3,1) - v(3) = (3,3,3) \simeq (0,3,0)$$

$$d_2^V = v(N) - v(3,1) = (3,3,5) \simeq (0,3,2) \quad d_3^V = v(3) - v(\emptyset) = (1,1,0)$$

$$\pi^{VI} = \{3,2,1\} \longrightarrow d_1^{VI} = v(N) - v(3,2) = (4,3,4) \simeq (0,3,0)$$

$$d_2^{VI} = v(3,2) - v(3) = (2,3,4) \simeq (0,3,2) \quad d_3^{VI} = v(3) - v(\emptyset) = (1,1,0)$$

Las asignaciones $X = d^I = d^{II} = \{(0,0,0);(0,3,2);(1,4,0)\}$, $Y = d^{III} = d^{IV} =$ $= \{(0,3,0);(0,0,2);(1,4,0)\}$ *y* $Z = d^V = d^{VI} = \{(0,3,0);(0,3,2);(1,1,0)\}$ *generan todos los elementos del core. Por ejemplo la asignación* $1/2{\cdot}X{+}1/2{\cdot}Y = \{(0,3/2,0);(0,3/2,2);(1,4,2)\}$ *pertenece al core.*

3.3. Base de los juegos difusos

En esta sección construiremos una base de los juegos difusos, que utilizaremos a continuación.

Definición 3.3.1 *Sea* $(N,v) \in FG^n(\Omega/\preceq)$*, se define el juego de unanimidad difuso* $\Gamma_S^i = (N,\omega_S^i) \in FG^n(\Omega/\preceq)$ *de* (N,v)*, como:*

$$\omega_S^1(T) = \begin{cases} (0,0,0,0)_{LR} & si\ S \not\subseteq T \\ (1,0,0,0)_{LR} & si\ S \subseteq T \end{cases} \quad \omega_S^2(T) = \begin{cases} (0,0,0,0)_{LR} & si\ S \not\subseteq T \\ (0,1,1,0)_{LR} & si\ S \subseteq T \end{cases}$$

$$\omega_S^3(T) = \begin{cases} (0,0,0,0)_{LR} & si\ S \not\subseteq T \\ (0,0,1,0)_{LR} & si\ S \subseteq T \end{cases} \quad \omega_S^4(T) = \begin{cases} (0,0,0,0)_{LR} & si\ S \not\subseteq T \\ (0,0,0,1)_{LR} & si\ S \subseteq T \end{cases}$$

Lema 3.3.1 *Sea* $(N,v) \in FG^n(\Omega/\preceq)$ *un juego difuso cualquiera, existen* $(2^n-1)\cdot 4$ *números reales* γ_S^i*, tales que;*

$$v = \sum_{i=1}^{4} \sum_{S \subset N} \gamma_S^i \omega_S^i$$

donde ω_S^i *es la función característica del juego de unanimidad difuso* Γ_S^i*.*

Demostración 3.3.1 *Sea $t = |T|$ y $s = |S|$. Sean*

$$\gamma_S^1 = \sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} \cdot \alpha_T \quad \gamma_S^2 = \sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} \cdot a_T \quad \gamma_S^3 = \sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} \cdot (b_T - a_T) \quad \gamma_S^1 = \sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} \cdot \beta_T$$

con $v(T) = (\alpha_T, a_T, b_T, \beta_T)_{LR}$. Si R es una coalición cualquiera, entonces

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{S \subset N} \gamma_S^i \omega_S^i(R) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{S \subset R} \gamma_S^i \omega_S^i(R) =$$

$$= \sum_{S \subset R} \left(\sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} \alpha_T \right) \cdot (1,0,0,0)_{L-R} + \sum_{S \subset R} \left(\sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} a_T \right) \cdot (0,1,1,0)_{LR} +$$

$$+ \sum_{S \subset R} \left(\sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} (b_T - a_T) \right) \cdot (0,0,1,0)_{LR} + \sum_{S \subset R} \left(\sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} \beta_T \right) \cdot (0,0,0,1)_{LR} =$$

$$= \sum_{T \subset R} \left(\sum_{T \subset S \subset R} (-1)^{s-t} \right) \alpha_T \cdot (1,0,0,0)_{LR} + \sum_{T \subset R} \left(\sum_{T \subset S \subset R} (-1)^{s-t} \right) a_T \cdot (0,1,1,0)_{LR} +$$

$$+ \sum_{T \subset R} \left(\sum_{T \subset S \subset R} (-1)^{s-t} \right) (b_T - a_T) \cdot (0,0,1,0)_{LR} + \sum_{T \subset R} \left(\sum_{T \subset S \subset R} (-1)^{s-t} \right) \beta_T \cdot (0,0,0,1)_{LR}$$

Para cada valor de s entre t y $r = |R|$, habrá $\binom{r-t}{r-s}$ conjuntos S con s elementos tal que $T \subset S \subset R$. Por lo tanto cada paréntesis de la última de las fórmulas se puede reemplazar por

$$\sum_{s=t}^{r} \binom{r-t}{r-s} (-1)^{s-t}$$

Pero esto coincide con la forma expandida del binomio $(1-1)^{r-s}$, el cual es 0 para todo $t < r$ y 1 para $t = r$. Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subset N} \gamma_S^i \omega_S^i(R) = \alpha_R \cdot (1,0,0,0)_{LR} + a_R \cdot (0,1,1,0)_{LR} + (b_R - a_R) \cdot (0,0,1,0)_{LR} + \beta_R \cdot (0,0,0,1)_{LR} =$$

$$= (\alpha_R, a_R, b_R, \beta_R)_{LR} = v(R) \qquad \forall R \subset N.$$

3.4. El valor de Shapley

Los conjuntos de reparto obtenidos mediante la verificación de principios de racionalidad, permiten conocer las condiciones que deben de cumplir las asignaciones del reparto del valor de la gran coalición. En ocasiones estos conjuntos pueden ser muy grandes, o incluso vacíos, por lo que deberemos o emplear criterios adicionales, o relajar las condiciones que se han impuesto.

Un concepto de solución, alternativo a las soluciones tipo conjunto, para esta clase de juegos es el de valor. De entre este tipo de soluciones de tipo valor, una de las más famosas es el valor de Shapley. Éste está basado en un concepto particular de "justicia" a la hora de repartir la ganancia de la gran coalición. Se trata de evaluar a los jugadores por su influencia en el valor de las coaliciones al unirse a ellas o al abandonarlas.

Debido a que los órdenes usados con los números difusos son órdenes parciales, el estudio de las soluciones de tipo valor es distinto del usual. Dado un orden difuso $\preceq$, hay dos relaciones diferentes entre números difusos que adquieren en este punto gran relevancia. Por un lado está la relación de igualdad $(=)$ entre los elementos de Ω, y por otro está la relación de indiferencia $(\simeq)$ entre elementos de Ω. Recordemos que $A \simeq B$ si y sólo si $A \succeq B$ y $B \succeq A$. En el caso escalar las relaciones de igualdad y de indiferencia son equivalentes.
El hecho de que no haya ninguna razón para preferir A sobre B o viceversa, hace que modifiquemos la percepción del espacio identificando estos puntos como equivalentes.
El operador binario $\simeq$ induce una relación de equivalencia en Ω. Consideremos el conjunto $[\simeq] = \{X \in \Omega / X \simeq 0\}$, siendo $0 = (0, 0, 0, 0)_{LR}$ el elemento nulo de los números difusos. Este conjunto genera el espacio cociente $\Omega_{/[\simeq]}$ en el cual sí son equivalente las relaciones $=$ y $\simeq$. Por lo tanto debemos tener en cuenta que cuando digamos que un número difuso $X \in \Omega$ es el valor de Shapley, nos estamos refiriendo a la clase de equivalencia de la cual este número es representante.
Asumamos ahora que los jugadores forman la gran coalición entrando en ella uno a uno con un determinado orden, y que todos los $n!$ posibles órdenes de los N jugadores, tienen la

misma posibilidad de ocurrir. Entonces;

$$\phi_i = \sum_{S \subset N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\, d_i(S) \tag{3.1}$$

$$\textit{siendo} \quad d_i(S) \quad \textit{la contribución marginal de } i \textit{ en } S$$

es la contribución marginal esperada hecha por el jugador i al entrar ($n = |N|$, $s = |S|$). Notemos que si escogemos cualquier coalición S que contenga a i, la probabilidad de que i entre a formar parte de la gran coalición uniéndose exactamente a $S \setminus \{i\}$ es $(s-1)!(n-s)!/n!$.
La solución $\phi : FG^n \to \Omega^n$ de componentes $\phi_i, \ldots, \phi_n$ dada en 3.1 es conocida por el **valor de Shapley** de un juego cooperativo difuso. Si tenemos un determinado juego difuso (N, v) al valor de Shapley correspondiente lo denotaremos por $\phi(v)$.
En esta definición consideraremos siempre que los órdenes difusos usados son centrales. Dado un orden difuso central $(\preceq, \ \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\})$, el conjunto $[\simeq]$, de todos los números difusos equivalentes al 0, viene dado por

$$[\simeq] = \{X = (\alpha, a, b, \beta)_{LR} \in \Omega / a + b = 0, \ \alpha = \beta, \ L^{-1}(\alpha_i) = R^{-1}(\alpha_i) \quad \forall \alpha_i \in Y\}$$

El valor de Shapley tiene varias propiedades deseables, cada una de las cuales refleja una característica esencial de lo que intuitivamente podríamos considerar un atributo importante de la justicia y/o la racionalidad.

Definición 3.4.1 *Un soporte de un juego difuso* (N, v)*, es una coalición* T *tal que, para toda coalición* $S \subseteq N$*,* $v(S) = v(S \cap T)$*.*

Todo conjunto que contenga a un soporte de un juego, es a su vez un soporte de dicho juego. Un jugador que no forma parte de al menos un soporte, no tiene influencia directa sobre el juego, ya que no contribuye nada a ninguna coalición. A dichos jugadores se les llama *títere*.
A continuación examinaremos tres propiedades importantes de el valor de Shapley.

Propiedad 1 Si S es un soporte de v, entonces:

$$\sum_{i \in S} \phi_i(v) = v(S),$$

o alternativamente,

$$\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$$

y $\phi_i(v) = (0, 0, 0, 0)_{LR}$ si i es un jugador títere.

Demostración 3.4.1 *En cada uno de los determinados órdenes en los que los jugadores pueden entrar a formar parte de la gran coalición, si sumamos las contribuciones marginales de cada jugador el resultado es $v(N)$. Por lo tanto su media también suma $v(N)$, y esto implica la eficiencia de $\phi(v)$,*

$$\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$$

La contribución marginal de los jugadores títere es nula, ya que no aportan nada a ninguna coalición.

Propiedad 2 El valor de Shapley es anónimo, es decir, para cualquier permutación σ de los jugadores y cualquier jugador i

$$\phi_{\sigma(i)}(\sigma(v)) = \phi_i(v)$$

para todo juego cooperativo difuso (N, v).

Demostración 3.4.2 *Esto es debido a que $(s-1)!(n-s)!/n!$ depende de el número de jugadores que formen la coalición S, no de quiénes sean.*

Propiedad 3 El valor de Shapley es aditivo, es decir, para dos juegos difusos cualesquiera (N, v) y (N, w), definidos sobre el mismo conjunto de jugadores,

$$\phi(v + w) = \phi(v) + \phi(w)$$

siendo $v + w$ el juego definido como $(v + w)(S) = v(S) + w(S)$, $S \subset N$.

Demostración 3.4.3 *Sea $S \subset N$ una coalición cualquiera.*

$$\phi_i(v)+\phi_i(w) = \sum_{S\subset N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} v(S)-v(S-\{i\})+\sum_{S\subset N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} w(S)-w(S-\{i\}) =$$

$$= \sum_{S\subset N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} v(S) - v(S-\{i\}) + w(S) - w(S-\{i\}) =$$

$$= \sum_{S\subset N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} v(S) + w(S) - (v(S-\{i\}) + w(S-\{i\})) =$$

$$= \phi(v+w).$$

La importancia del valor de Shapley no es que verifique estas propiedades, sino que es el único que las cumple.

Teorema 3.4.1 *El valor de Shapley $\phi : FG^n(\Omega/\preceq_c) \rightarrow \Omega^n$ es el único valor definido en el espacio de los juegos difusos de n personas que verifica las propiedades 1, 2 y 3.*

Demostración 3.4.4 *Ya hemos probado que el valor de Shapley verifica las propiedades 1, 2 y 3, por lo que sólo falta probar la unicidad de dicho valor. Supongamos que $\psi : FG^n(\Omega/\preceq_c) \rightarrow \Omega^n$ es un valor con las propiedades 1, 2 y 3. Para cada $S \subset N$, $S \neq \emptyset$, consideremos el juego de unanimidad definido en el apartado anterior $\Gamma^l_S = (N; \omega^l_S)$ con $l = 1, 2, 3, 4$. Sea una constante $c \in \mathbb{R}$. $(N, c\omega^l_S)$ es también un juego e $i \in N \setminus S$ es un jugador títere tanto para (N, ω^l_s) como para $(N, c\omega^l_s)$. Gracias a la propiedad 1 tenemos que;*

$$\psi_i(c\omega^l_S) = (0,0,0,0)_{LR} \qquad si \quad i \in N \setminus S.$$

Tomemos dos jugadores distintos, j y k, de la coalición S. Existe una permutación σ que lleva a j en k y deja a los demás jugadores de la coalición dentro de S. Debido a la definición que tienen los juegos de unanimidad tenemos que $\Gamma^l_S = \Gamma^l_{\sigma(S)}$ esto unido a la propiedad 2 nos lleva a que

$$\psi_k(c\omega^l_S) = \psi_{\sigma(k)}(\sigma(c\omega^l_S)) = \psi_j(c\omega^l_S) \qquad para\ todo \quad j,k \in S \tag{3.2}$$

Debido a la propiedad 1, ψ es eficiente, por lo que

$$\sum_{r\in N}\psi_r(c\omega_S^l) = c\omega_S^l(N) \tag{3.3}$$

siendo $\omega_S^1(N) = (1,0,0,0)_{LR}$, $\omega_S^2(N) = (0,1,1,0)_{LR}$, $\omega_S^3(N) = (0,0,1,0)_{LR}$ *y* $\omega_S^4(N) = (0,0,0,1)_{LR}$.

Combinando 3.2 y 3.3, tenemos que

$$\psi_i(c\omega_S^l) = \begin{cases} (0,0,0,0)_{LR} & si\ i \in N\setminus S \\ \frac{c\omega_S^l(N)}{|S|} & si\ i \in S \end{cases}$$

lo que significa que $\psi(c\omega_S^l)$ es único para toda coalición $S \subset N$ para todo $l = 1,2,3,4$ y para para todo $c \in \mathbb{R}$. Debido a que los juegos de unanimidad forman una base de los juegos difusos y gracias a la aditividad de la propiedad 3, $\psi(v)$ es único para cada juego difuso $(N,v) \in FG^n$.

Como en los juegos escalares, podemos demostrar que el valor de Shapley pertenece al core de un juego difuso convexo.

Teorema 3.4.2 *Si un juego difuso es convexo, el valor de Shapley pertenece al core del juego.*

Demostración 3.4.5 *El teorema 3.2.1 afirma que $core(N,v) \neq \emptyset$. En la demostración de dicho teorema veíamos que el reparto $d = (d^1,\ldots,d^n)$ estaba en el core, siendo $d^i = v(B_i) - v(B_{i-1})$ con $B_i = \{1,\ldots,i\}$.*

Es obvio que la definición de valor de Shapley 3.1 es equivalente a :

$$\phi_i = \sum_{S\subset N\setminus\{i\}} \frac{(s)!(n-s-1)!}{n!}\left(v(S\cup\{i\}) - v(S)\right)$$

Denotemos por Π^n al conjunto de todas las permutaciones de los jugadores del conjunto N. Probaremos que

$$\phi = \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi^n} d^\pi$$

siendo $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ *el valor de Shapley y* $d^\pi = (d^{\pi(1)}, \ldots, d^{\pi(n)})$ *el reparto definido en la demostración del teorema 3.2.1.*
Sabemos que el número difuso $d^{\pi(i)} = v(B_{\pi(i-1)} \cup \{i\}) - v(B_{\pi(i-1)})$ *es de la forma* $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ *siendo* $S \subset N \setminus \{i\}$. *Para toda coalición* $S \subset N \setminus \{i\}$, *el número de permutaciones de* Π^n *para las cuales* $B_{\pi(i-1)} = S$ *es* $s! \cdot (n-s-1)!$. *Por lo tanto*

$$\phi = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi^n} d^\pi$$

Como el core es un poliedro convexo, y ϕ *es una combinación convexa de puntos del core, pues el valor de Shapley también pertenece al core.*

Ejemplo 3.4.1 *(Continuación 3.2.3) En este caso el sistema de orden es* $Y = \{0, 1\}$, *luego* $[\simeq] = \{X = (\alpha, a, \beta)/a = 0,\ \alpha = \beta\}$ *Sabemos que* $A = (\alpha, a, \beta) \simeq B = (\gamma, b, \delta)$ *si y sólo si* $A - B = (\alpha + \delta, a - b, \beta + \gamma) \in [\simeq]$ *y* $B - A = (\beta + \gamma, b - a, \alpha + \delta) \in [\simeq]$, *por lo tanto* $A \simeq B$ *si y sólo si* $a - b = 0$ *y* $\alpha + \delta = \beta + \gamma$, *o equivalentemente:*

$$A \simeq B \quad sii \quad a = b \quad \alpha - \beta = \gamma - \delta$$

Calcularemos el valor de Shapley para este juego difuso de bancarrota:

$v(1)$	$v(2)$	$v(3)$	$v(1,2)$	$v(1,3)$	$v(2,3)$	$v(N)$
$(0,0,0)$	$(0,0,2)$	$(1,1,0)$	$(2,3,4)$	$(3,4,2)$	$(2,4,3)$	$(1,7,2)$

La primera componente del valor de Shapley será:

$$\phi_1 = \frac{0!2!}{3!}(0,0,0) - (0,0,0) + \frac{1!1!}{3!}(2,3,4) - (0,0,2) +$$

$$+ \frac{1!1!}{3!}(3,4,2) - (1,1,0) + \frac{2!0!}{3!}(1,7,2) - (2,4,3) =$$

$$= \frac{2}{6}(0,0,0) + \frac{1}{6}(0,3,0)) + \frac{1}{6}(0,3,0) + \frac{2}{6}(0,3,0) =$$

$$= (0,2,0)$$

La segunda componente del valor de Shapley será:

$$\phi_2 = \frac{0!2!}{3!}(0,0,2) - (0,0,0) + \frac{1!1!}{3!}(2,3,4) - (0,0,0) +$$

$$+\frac{1!1!}{3!}(2,4,3) - (1,1,0) + \frac{2!0!}{3!}(1,7,2) - (3,4,2) =$$
$$= \frac{2}{6}(0,0,2) + \frac{1}{6}(2,3,4) + \frac{1}{6}(2,3,4) + \frac{2}{6}(3,3,5) =$$
$$= (\frac{10}{6}, 2, \frac{22}{6}) \simeq (0,2,2)$$

La tercera componente del valor de Shapley será:

$$\phi_3 = \frac{0!2!}{3!}(1,1,0) - (0,0,0) + \frac{1!1!}{3!}(3,4,2) - (0,0,0) +$$

$$+\frac{1!1!}{3!}(2,4,3) - (0,0,2) + \frac{2!0!}{3!}(1,7,2) - (2,3,4) =$$
$$= \frac{2}{6}(1,1,0) + \frac{1}{6}(3,4,2) + \frac{1}{6}(4,4,3) + \frac{2}{6}(5,4,4) =$$
$$= (\frac{19}{6}, 3, \frac{13}{6}) \simeq (1,3,0)$$

El valor de Shapley pertenece al core ya que es combinación convexa de las contribuciones marginales de un juego convexo como lo es el de bancarrota. Así;

$$\phi = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\} = \{(0,2,0); (0,2,2); (1,3,0)\} = 1/6d^I + 1/6d^{II} + 1/6d^{III} + 1/6d^{IV} + 1/6d^V + 1/6d^{VI} =$$

$$= 2/6X + 2/6Y + 2/6Z$$

3.5. Aplicación: Juegos cooperativos intervalares II

Veremos los resultados de esta sección sobre una clase especialmente interesante de números difusos, los números difusos intervalares, $(N, v) \in FG^n(I/\preceq_c)$.
Hay que tener en cuenta que en los números intervalares todos los α-cortes son iguales, y debido a que el orden difusos usado es central, utilizaremos un único parámetro de posición $\lambda = 1/2$ en dicho α-corte.

Core de un juego cooperativo intervalar.

Basándonos en los resultados sobre el core se tiene el siguiente teorema:

Teorema 3.5.1 *Sea el juego intervalar $(N, v) \in FG^n(I/\preceq_c)$, su core viene dado por:*

$$core(N,v) = \{(X_1,\ldots,X_n)/\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = a_N + b_N; \sum_{i\in S} a_i + \sum_{i\in S} b_i \geq a_S + b_S \quad \forall S \subset N\}$$

siendo $X_i = (a_i, b_i)$ y $v(S) = (a_S, b_S)$.

Demostración 3.5.1 *Por la definición de core de preferencia tenemos que*

$$core(N,v) = \{(X_1,\ldots,X_n)/1/2\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i + 1/2\cdot\sum_{i=1}^{n} b_i = 1/2\cdot a_N + 1/2\cdot b_N;$$

$$1/2\cdot\sum_{i\in S} a_i + 1/2\cdot\sum i\in Sb_i \geq 1/2\cdot a_S + 1/2\cdot b_S \quad \forall S\subset N\}$$

y este conjunto es el mismo que el dado en el teorema.

En estos juegos para comparar números difusos estamos comparando un único números real, por lo tanto este orden difuso deja de ser parcial y pasa a ser total, por lo tanto el core de preferencia y el core de dominancia coinciden.

Ejemplo 3.5.1 *(Continuación 2.6.1) Consideramos el mismo juego del ejemplo 2.6.1, pero con un orden difuso central, $(N, v) \in (I/\preceq_c)$. El core estará formado por las imputaciones que verifiquen es siguiente sistema de inecuaciones:*

$$a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 = 8$$

$$a_1 + b_1 \geq 1 \qquad a_2 + b_2 \geq 2 \qquad a_3 + b_3 \geq 3$$

$$a_1 + a_2 + b_1 + b_2 \geq 3 \qquad a_1 + a_3 + b_1 + b_3 \geq 5 \qquad a_2 + a_3 + b_2 + b_3 \geq 6$$

$$b_1 \geq a_1 \qquad b_2 \geq a_2 \qquad b_3 \geq a_3$$

Una imputación perteneciente al core es;

$$X_1 = (0, 1) \qquad X_2 = (0, 2) \qquad X_3 = (2, 3)$$

Juegos convexos intervalares.

Consideremos el juego $(N, v) \in FG^n(I/ \preceq_c)$. Sea $v(S) = (a_S, b_S)$ el pago difuso que recibe la coalición $S \subset N$. Sean (N, v_a) y (N, v_b) dos juegos escalares en los cuales el conjunto de jugadores es el mismo que en el juego difuso (N, v), y el pago de una coalición $S \subset N$ viene dado por $v_a(S) = a_S$ y $v_b(S) = b_S$ respectivamente. Se tiene el siguiente teorema;

Teorema 3.5.2 *Sea $(N, v) \in FG^n(I/ \preceq_c)$ y sean (N, v_a) y (N, v_b) los correspondientes juegos escalares asociados. Se tiene que si (N, v_a) y (N, v_b) son convexos entonces (N, v) es convexo.*

Demostración 3.5.2 *Para que el juego (N, v) sea convexo, se tiene que verificar que dadas dos coaliciones cualesquiera $S \subset T$, $d_i(S) \preceq_c d_i(T)$ para todo $i \in N$. Debido a que (N, v_a) y (N, v_b) son convexos se verifica que*

$$v_a(S) - v_a(S - \{i\}) \leq v_a(T) - v_a(T - \{i\})$$

$$v_b(S) - v_b(S - \{i\}) \leq v_b(T) - v_b(T - \{i\})$$

o equivalentemente

$$a_S - a_{S-\{i\}} \leq a_T - a_{T-\{i\}}$$

$$b_S - b_{S-\{i\}} \leq b_T - b_{T-\{i\}}$$

Si sumamos los dos miembros de estas inecuaciones obtenemos que

$$a_S - b_{S-\{i\}} + b_S - a_{S-\{i\}} \leq a_T - b_{T-\{i\}} + b_T - a_{T-\{i\}}$$

Lo cual es equivalente a que

$$(a_S - b_{S-\{i\}}, b_S - a_{S-\{i\}}) \preceq_c (a_T - b_{T-\{i\}}, b_T - a_{T-\{i\}})$$

es decir

$$v(S) - v(S - \{i\}) \preceq_c v(T) - v(T - \{i\})$$

Por lo tanto queda probado que $d_i(S) \preceq_c d_i(T)$.

El recíproco de este teorema no es cierto. Para comprobarlo veremos un contraejemplo.

Ejemplo 3.5.2 *Sea* $(N, v) \in FG^n(I/\preceq_c)$*, el siguiente juego difuso intervalar:*

$v(1)$	$v(2)$	$v(1,2)$
$(3,4)$	$(3,5)$	$(5,10)$

Este juego difuso es convexo, ya que:

$$v(\{1\}) - v(\emptyset) = (3,4) - (0,0) = (3,4) \preceq_c v(\{1,2\}) - v(\{2\}) = (5,10) - (3,5) = (0,7)$$

$$v(\{2\}) - v(\emptyset) = (3,5) - (0,0) = (3,5) \preceq_c v(\{1,2\}) - v(\{1\}) = (5,10) - (3,4) = (1,7)$$

Sin embargo el juego escalar (N, v_a) *no es convexo ya que:*

$$v_a(\{1\}) - v_a(\emptyset) = 3 - 0 = 3 \nleq v_a(\{1,2\}) - v_a(\{2\}) = 5 - 3 = 2$$

Algunos autores tratan los juegos intervalares de forma distinta a como lo hacemos en nuestra memoria. La principal diferencia reside en que al calcular la diferencia entre dos números difusos, estos autores restan componente a componente, es decir, si $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$, entonces $A - B = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$. Para que esta diferencia tenga sentido, imponen que la amplitud de A sea mayor que la de B, es decir, $a_2 - a_1 \geq b_2 - b_1$. Por el contrario en este trabajo la diferencia entre dos números intervalares viene dada por $A - B = (a_1 - b_2, a_2 - b_1)$. Para realizar esta diferencia no hace falta imponer ningún tipo de condición.

Debido a ello, estos autores obtienen algunos resultados distintos a los nuestros y que a veces resultan más sencillos, ya que en muchos casos pueden reducir el estudio del juego difuso intervalar al de dos juegos escalares, cuyos pagos son los valores superior e inferior de los pagos del juego difuso. Por ejemplo al calcular el valor de Shapley del juego difuso, ϕ, basta para ellos calcular el valor de Shapley de estos dos juegos escalares, $\underline{\phi}$ y $\bar{\phi}$, y con ellos formar

el valor de Shapley del juego intervalar $\phi = (\underline{\phi}, \bar{\phi})$.
Aún obteniéndose resultados más sencillos consideramos que la condición impuesta para poder realizar la diferencia de dos números intervalares es demasiado restrictiva, ya que por ejemplo impide restar números difusos intervalares como $A = (8, 10)$ y $B = (4, 7)$, y diferencias de números como estos ocurren frecuentemente en situaciones reales. Además debemos recordar que en ambiente de incertidumbre, la suma y diferencia aumentan la incertidumbre y nunca la disminuyen, esta es la causa de la definición de diferencia escogida para esta memoria.

El valor de Shapley en juegos intervalares.

Estudiaremos a continuación el valor de Shapley en los juegos cooperativos intervalares .

Teorema 3.5.3 *Sea $(N, v) \in FG^n(I/\preceq_c)$.El valor de Shapley del juego viene dado por:*

$$\phi_i = \left(\sum_{S \subset N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \, (a_S - b_{S-\{i\}}), \sum_{S \subset N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \, (b_S - a_{S-\{i\}}) \right)$$

Demostración 3.5.3 *El valor de Shapley por definición es;*

$$\phi_i = \sum_{S \subset N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \, d_i(S)$$

$$\textit{siendo} \quad d_i(S) = v(S) - v(S - \{i\}) \quad \textit{y} \quad \textit{con} \quad v(S) = (a_S, b_S),$$

Al ser números intervalares tenemos que:

$$d_i(S) = (a_S, b_S) - (a_{S-\{i\}}, b_{S-\{i\}}) = (a_S - b_{S-\{i\}}, b_S - a_{S-\{i\}})$$

por lo tanto:

$$\phi_i = \sum_{S \subset N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \, (a_S - b_{S-\{i\}}, b_S - a_{S-\{i\}})$$

, o equivalentemente;

$$\phi_i = \left(\sum_{S \subset N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \, (a_S - b_{S-\{i\}}), \sum_{S \subset N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \, (b_S - a_{S-\{i\}}) \right)$$

Ejemplo 3.5.3 *(Continuación 2.6.1) Calculemos el valor de Shapley asociado;*

$$\phi_1 = \frac{0!2!}{3!}(0,1) - (0,0) + \frac{1!1!}{3!}(0,3) - (0,2) + \frac{1!1!}{3!}(2,3) - (1,2) + \frac{2!0!}{3!}(3,5) - (2,4) =$$

$$= \frac{2}{6}(0,1) + \frac{1}{6}(-2,3) + \frac{1}{6}(0,2) + \frac{2}{6}(-1,3) =$$

$$= (-\frac{2}{3}, \frac{13}{6})$$

$$\phi_2 = \frac{0!2!}{3!}(0,2) - (0,0) + \frac{1!1!}{3!}(0,3) - (0,1) + \frac{1!1!}{3!}(2,4) - (1,2) + \frac{2!0!}{3!}(3,5) - (2,3) =$$

$$= \frac{2}{6}(0,2) + \frac{1}{6}(-1,3) + \frac{1}{6}(0,3) + \frac{2}{6}(0,3) =$$

$$= (-\frac{1}{6}, \frac{8}{3})$$

$$\phi_3 = \frac{0!2!}{3!}(1,2) - (0,0) + \frac{1!1!}{3!}(2,3) - (0,1) + \frac{1!1!}{3!}(2,4) - (0,2) + \frac{2!0!}{3!}(3,5) - (0,3) =$$

$$= \frac{2}{6}(1,2) + \frac{1}{6}(1,3) + \frac{1}{6}(0,4) + \frac{2}{6}(0,5) =$$

$$= (\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$$

Capítulo 4

Juegos no cooperativos con pagos difusos

4.1. Equilibrios en juegos no cooperativos difusos

Representaremos los juegos difusos no cooperativos, $F\Gamma^n$, por su forma estratégica;

$$\Gamma(S,K) = [S_1,\ldots,S_n,K_1(S),\ldots,K_n(S)]$$

siendo n el número de jugadores, S_i el conjunto de estrategias del jugador i, $S = S_1 \times \ldots \times S_n$ el conjunto de perfiles de estrategias o estrategias conjuntas, y $K_i(s_1,\ldots,s_n) \in \Omega$ es el pago difuso de dicho jugador, es decir lo que recibiría el jugador i si todos los jugadores escogiesen el perfil de estrategias $(s_1,\ldots,s_n) \in S$.

Análogamente al caso de los juegos cooperativos, para indicar a qué tipo de número difuso pertenecen los pagos de los jugadores y qué orden difuso usaremos para compararlos, utilizamos la notación:

$$F\Gamma^n(tipo\ de\ número\ difuso/orden\ difuso)$$

Ejemplo 4.1.1 *Supongamos que en un cierto territorio coexisten dos empresas que se disputan las ventas de un determinado producto. Para mejorar dichas ventas pueden anunciarse* *en la televisión o en la prensa local.*

Así pues tenemos que $S_1 = S_2 = \{T, P\}$. *Si ambas empresas deciden anunciarse en la televisión local, las ventas de la empresa A estarán en torno a 5 millones de euros, y quedarán representadas por el número difuso triangular* $K_1(T,T) = (4,5,6)$. *Las ventas de la empresa B no serán menores de 4 millones de euros, y las representaremos con el número difuso* $K_2(T,T) = (4,4,7)$. *Si las dos empresas deciden hacer publicidad en la prensa local, las ganancias de la empresa A estarán en torno a los 4 millones de euros,* $K_1(P,P) = (3,4,5)$, *y las de la empresa B no serán inferiores a 3 millones de euros,* $K_2(P,P) = (3,3,6)$. *Si por el contrario la empresa A se anuncia en la televisión local y la B en la prensa, los beneficios de A estarán en torno a 7 millones de euros,* $K_1(T,P) = (6,7,8)$, *y los de B alrededor de los 3 millones de euros,* $K_2(T,P) = (2,3,4)$. *Pero si la que se anuncia en prensa es la empresa A y en televisión la B, los beneficios de A no serán menos de 3 millones de euros,* $K_1(P,T) = (3,3,5)$, *y los de B estarán en torno a los 7 millones de euros pero posiblemente superiores,* $K_2(P,T) = (4,5,7)$.

En forma matricial el juego, $\Gamma(S,K) \in F\Gamma^2(\Delta/\preceq)$, *se podría describir según la tabla adjunta:*

Estrategias	*T*	*P*
T	*(4,5,6),(4,4,7)*	*(6,7,8),(2,3,4)*
P	*(3,3,5),(4,5,7)*	*(3,4,5),(3,3,6)*

Definición 4.1.1 *Dado un orden difuso, según una función de orden estándar,* $\succeq$, *y dos perfiles de estrategias* S^1 *y* S^2 *en* S, *el jugador* i *prefiere el perfil de estrategias* S^1 *al perfil de estrategias* S^2, *y lo denotamos por* $S^1 \succeq S^2$, *si* $K_i(S^1) \succeq K_i(S^2)$.

En general no existe un perfil de estrategias $\bar{S} \in S$ que maximice todas las K_i para cada jugador. Si existiera dicho perfil de estrategias sería lo análogo a lo que se llama solución dominante o ideal en los juegos escalares. Al no existir en general dicha solución debido a los intereses contrapuestos de los jugadores, tenemos que definir otros tipos de conceptos de solución para los juegos difusos.

Sea $\bar{S} = (\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n) \in S$. Denotamos por $(\bar{s}_{-i}, s_i)$, aquel perfil de estrategias que resulta al reemplazar la estrategia $\bar{s}_i$ del jugador i en $\bar{S}$ por otra estrategia $s_i \in S_i$, es decir:

$$(\bar{s}_{-i}, s_i) = (\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_{i-1}, s_i, \bar{s}_{i+1}, \ldots \bar{s}_n)$$

Definición 4.1.2 *Una estrategia $\bar{s}_i \in S_i$ del jugador i es Pareto eficiente contra el perfil de estrategias $\bar{S}$, si no existe ninguna otra estrategia $s_i \in S_i$ tal que*

$$K_i(\bar{s}_{-i}, s_i) \succeq K_i(\bar{s}) \quad y \quad K_i(\bar{s}_{-i}, s_i) \neq K_i(\bar{S})$$

Análogamente se puede definir le eficiencia Pareto débil.

Definición 4.1.3 *Una estrategia $\bar{s}_i \in S_i$ del jugador i es débilmente Pareto eficiente contra el perfil de estrategias $\bar{S}$, si no existe ninguna otra estrategia $s_i \in S_i$ tal que*

$$K_i(\bar{s}_{-i}, s_i) \succ K_i(\bar{S})$$

Siendo $\succ$ la relación de orden estricto asociada al orden difuso $\succeq$, es decir, si el orden difusos usado es estándar y si $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ con $m = p \cdot k$ y con $f(\cdot) = (p_{11}(\cdot), \ldots, p_{pk}(\cdot))$ es la función de orden estándar asociada al orden difuso $\succeq$, se tiene que si A y B son dos números difusos

$$A \succ B \Leftrightarrow f(A) > f(B)$$

O equivalentemente si

$$p_{ij}(A) > p_{ij}(B) \quad \forall i \in \{1, \ldots, p\} \, \forall j \in \{1, \ldots, k\}$$

Representaremos por $P_{\bar{S}}(S_i, K_i)$ y $WP_{\bar{S}}(S_i, K_i)$ a los conjuntos de de todas las estrategias Pareto eficientes y débilmente Pareto eficientes del jugador i contra el perfil de estrategias $\bar{S}$, respectivamente.

Es fácil comprobar que si una estrategia $\bar{s}_i \in S_i$ es Pareto eficiente contra un perfil de estrategias $\bar{S} \in S$, entonces también es débilmente Pareto eficiente.

Definición 4.1.4 *Una estrategia conjunta $\bar{S}$ es un equilibrio Pareto (respectivamente, un* *equilibrio débilmente Pareto) de un juego* $\Gamma(S,K)$*, si para cada jugador* i*,* $\bar{s}_i \in S_i$ *es una estrategia Pareto eficiente contra* $\bar{S}$ *(respectivamente, es una estrategia débilmente Pareto eficiente contra* $\bar{S}$*).*

El conjunto de todos los equilibrios Pareto del juego $\Gamma(S,K)$ será denotado por $EP(\Gamma(S,K))$ (respectivamente, $WP(\Gamma(S,K))$).
A partir de las definiciones anteriores podemos deducir que todo equilibrio Pareto de un juego difuso $\Gamma(S,K) = \{S_1,\ldots,S_n; K_1,\ldots,K_n\}$ es también un equilibrio débilmente Pareto.
Si tenemos una estrategia conjunta que sea un equilibrio Pareto en un juego difuso, nos indica que cada jugador i no puede, de forma independiente de los demás jugadores, cambiar su estrategia individual mejorando así estrictamente su pago difuso.

Ejemplo 4.1.2 *Consideremos un juego de tres personas en el que cada jugador tiene dos estrategias posibles, es decir,* $S_1 = S_2 = S_3 = \{A,B\}$*. Los pagos están dados por números difusos triangulares, desarrollados en la siguiente tabla:*

	IIIA			*IIIB*	
	IIA	*IIB*		*IIA*	*IIB*
IA	*(9,10,11)* *(15,20,20)* *(3,10,20)*	*(10,22,24)* *(17,19,22)* *(10,12,15)*	*IA*	*(8,15,17)* *(15,20,21)* *(5,12,13)*	*(20,22,22)* *(15,20,22)* *(10,15,15)*
IB	*(10,23,24)* *(17,19,22)* *(10,14,15)*	*(15,20,25)* *(18,19,25)* *(5,15,20)*	*IB*	*(12,18,20)* *(14,15,16)* *(3,10,20)*	*(20,21,22)* *(15,17,22)* *(12,13,15)*

Para ordenar los números difusos, usaremos un orden estándar que tiene como sistema de orden $Y = \{0,1\}$ *y un único parámetro de posición dado por* $\lambda = 1/2$*, es decir,* $\Gamma(S,K) \in F\Gamma^3(\Delta/(\preceq_c,\{0,1\}))$*. Con este orden difuso,* $(a_1,b_1,c_1) \preceq (a_2,b_2,c_2)$ *si se verifica que* $b_1 \leq b_2$ *y* $\frac{a_1+c_1}{2} \leq \frac{a_2+c_2}{2}$.

De todas las estrategias conjuntas las únicas que son equilibrios Pareto del juego son:

$$S^1 = (IB, IIB, IIIA) \qquad y \qquad S^2 = (IA, IIB, IIIB)$$

Ya que en el perfil de estrategias S^1*, el jugador I obtiene* $(15, 20, 25)$*, y si cambia su estrategia estando fijadas las filas de II y III, obtendrá un pago de* $(10, 22, 24)$*, que no es mejor que el anterior, ya que* $22 \geq 20$*, pero* $\frac{24+10}{2} = 17 \not\geq \frac{15+25}{2} = 20$*.*
Por su parte el jugador II obtiene un pago de $(18, 19, 25)$ *, de manera que si fijamos las estrategias de I y III y variamos la del jugador II su pago pasaría a ser de* $(17, 19, 22)$*, que no es mejor que el anterior.*
Por último, III obtiene $(5, 15, 20)$*. Si cambia unilateralmente de estrategia obtiene* $(12, 13, 15)$*, y no es mejor que el pago anterior.*
El conjunto de estrategias conjuntas débilmente eficientes es mayor. Además de las dos anteriores también incluye a las estrategias;

$$S^3 = (IA, IIB, IIIA) \qquad S^4 = (IB, IIA, IIIA) \qquad y \qquad S^5 = (IB, IIB, IIIB)$$

Analizando el estrategias S^4*, observamos que el jugador I recibe* $(10, 23, 24)$*, y si cambiase unilateralmente su estrategia obtendría* $(9, 10, 11)$*, que no mejora estrictamente al pago que ya tenía, ya que ni* $23 \not< 10$ *ni* $\frac{10+24}{2} = 17 \not< \frac{9+11}{2} = 10$*.*
Por su parte el jugador II obtiene un pago de $(17, 19, 22)$*, y si variase su estrategia obtendría* $(18, 19, 25)$*, que tampoco mejora estrictamente el pago que ya tenía, ya que* $19 \not< 19$*.*
Y por último el jugador III tampoco mejoraría si cambiase, ya que pasaría de ganar $(10, 14, 15)$ *a* $(3, 10, 20)$*, y ni* $14 \not< 10$ *ni* $\frac{10+15}{2} = 12,5 \not< \frac{3+20}{2} = 11,5$*.*
Un estudio similar se puede hacer con S^4 *y* S^5 *para comprobar que son estrategias conjuntas débilmente Pareto eficientes.*
Por el contrario, se puede comprobar que el perfil de estrategias $(IA, IIA, IIIA)$ *no es un equilibrio Pareto ni débilmente Pareto, ya que el jugador I si cambia su estrategia pasaría de ganar* $(9, 10, 11)$ *a ganar* $(10, 23, 24)$*, que es mejor estrictamente que el primer pago.*

Hay veces que para evitar el trabajar con números difusos, se lleva a cabo la escalarización o "desdifusificación" de dichos números, es decir, reducir cada número difuso a un único número real. Esto nos puede ser útil, pero hay que entender que al realizar dicho proceso se pierde mucha información dada por el número difuso, y si buscamos equilibrios Pareto usando este procedimiento sólo encontraremos, como veremos a continuación, algunos equilibrios.

Consideremos un orden difuso estándar con sistema de orden $Y = \{\alpha_1 \ldots, \alpha_p\}$ y k parámetros de posición $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ en $\mathbb{R}$. Para comparar dos números difuso con este orden nos fijamos en los $p \cdot k$ valores que resultan de los k parámetros de posición tomados en cada uno de los p α-cortes, a los cuales denotábamos por $p_{ij}(A)$ siendo A un número difuso (ver la definición 1.2.8).

Definimos el juego escalar:

$$\{S_1, \ldots, S_n; p_{i_1 j_1}(K_1(\cdot)), \ldots, p_{i_n j_n}(K_n(\cdot))\}$$

En el cual las estrategias de los jugadores son las mismas que en el juego difuso y los pagos son **uno** de los $p \cdot k$ parámetros anteriormente mencionados asociados al número difuso que se obtendría en el juego difuso, no teniendo que ser el mismo parámetro para todos los jugadores.

Teorema 4.1.1 *Dado un juego difuso* $\Gamma(S, K) = \{S_1, \ldots, S_n; K_1, \ldots, K_n\} \in F\Gamma^n(\Omega/(\preceq_e, \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}))$*, si existe una estrategia conjunta que sea equilibrio Nash para algún juego escalar*

$$\{S_1, \ldots, S_n; p_{i_1 j_1}(K_1(\cdot)), \ldots, p_{i_n j_n}(K_n(\cdot))\}$$

entonces dicha estrategia conjunta es un equilibrio Pareto débilmente eficiente de $\Gamma(S, K)$*.*

Demostración 4.1.1 *Sea* $\bar{S} = (\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n) \in S$ *una estrategia conjunta equilibrio Nash para el juego escalar:*

$$\{S_1, \ldots, S_n; p_{i_1 j_1}(K_1(\cdot)), \ldots, p_{i_n j_n}(K_n(\cdot))\}$$

Supongamos que no es un equilibrio Pareto débilmente eficiente para el juego difuso $\Gamma(S, K)$*. Esto implicaría que existe un jugador* l *tal que* $\bar{s}_l$ *no es una estrategia Pareto débilmente eficiente contra* $\bar{S}$*, es decir,*

$$\exists s_l \in S_l / \ K_l(\bar{s}_{-l}, s_l) \succ K_l(\bar{S})$$

por lo tanto

$$p_{ij}(K_l(\bar{s}_{-l}, s_l)) > p_{ij}(K_l(\bar{S})) \qquad \forall i \in \{1, \ldots, p\} \quad \forall j \in \{1, \ldots, k\}$$

En particular

$$p_{i_l j_l}(K_l(\bar{s}_{-l}, s_l)) > p_{i_l j_l}(K_l(\bar{s}))$$

lo cual contradice que $\bar{S}$ sea un equilibrio Nash del juego escalar g.

Ejemplo 4.1.3 *(Continuación 4.1.2) Supongamos que todos los jugadores deciden elegir $\alpha_2 = 1$ y el parámetro $\lambda = 1/2$.*

Entonces el juego escalarizado $\{S_1, S_2, S_3; p_{21}(F_1(\cdot)), p_{21}(F_2(\cdot)), p_{21}(F_3(\cdot))\}$ sería:

	IIIA			*IIIB*	
	IIA	*IIB*		*IIA*	*IIB*
	10	*22*		*15*	*22*
IA	*20*	*19*	*IA*	*20*	*20*
	10	*12*		*12*	*15*
	23	*20*		*18*	*21*
IB	*19*	*19*	*IB*	*15*	*17*
	14	*15*		*10*	*13*

Los dos únicos perfiles de estrategias que son Nash para este juego escalar son;

$$S^2 = (IA, IIB, IIIB) \qquad y \qquad S^4 = (IB, IIA, IIIA)$$

Debido al teorema anterior podemos afirmar que estos dos perfiles de estrategias son equilibrios débilmente Pareto eficientes, lo cual ya habíamos visto anteriormente.
Sin embargo S^1 y S^3 no son estrategias conjuntas Nash para este juego escalar, ya que por ejemplo en el perfil de estrategias $S^1 = (IB, IIB, IIIA)$, si el jugador I cambiase unilateralmente su estrategia ganaría más ya que pasaría de 20 a 22, por lo tanto no es una estrategia conjunta Nash (pero sí débilmente eficiente en el juego difuso).

Si el orden difuso estándar usado tiene un único α-corte y un único parámetro de posición, este teorema que acabamos de ver se convierte en una condición necesaria y suficiente:

Teorema 4.1.2 *Sea un juego difuso* $\Gamma(S,K) = \{S_1,\ldots,S_n;K_1,\ldots,K_n\} \in F\Gamma^n(\Omega/(\preceq_e, \{\alpha\},\{\lambda\}))$. $\bar{S}$ *es un equilibrio Pareto débilmente eficiente si y sólo si* $\bar{S}$ *es un equilibrio Nash del juego escalar* $\{S_1,\ldots,S_3;p(K_1(\cdot)),\ldots,p(K_n(\cdot))\}$ *siendo* $p:\Omega\rightarrow\mathbb{R}$ *la función que nos da el valor que el único parámetro* λ *sitúa en el* α*-corte del orden difuso.*

Demostración 4.1.2 *Basta probar que si* $\bar{S}$ *es un equilibrio Pareto débilmente eficiente del juego* $\Gamma(S,K)$*, entonces* $\bar{S}$ *es un equilibrio Nash del juego escalar.*
Supongamos que $\bar{S}$ *no es un equilibrio Nash del juego escalar, entonces existe* $t \in N$ *y existe* $s_t \in S_t$ *tal que*

$$p(K_t(\bar{s}_{-t},s_t)) > p(K_t(\bar{s}))$$

Esto implica que $K_t(\bar{s}_{-t},s_t) \succ K_t(\bar{s})$*. Lo cual es una contradicción con el hecho de que* $\bar{S}$ *sea un equilibrio Pareto débilmente eficiente.*

Hay veces que el conjunto de equilibrios Pareto eficientes es demasiado grande. Para evitar este problema se puede hacer un refinamiento de dichas equilibrios surgiendo así la siguiente definición;

Definición 4.1.5 *Una estrategia conjunta* $\bar{S}$ *es un equilibrio Pareto a la baja del juego no cooperativo difuso* $\Gamma(S,K) = \{S_1,\ldots,S_n;K_1,\ldots,K_n\}$*, si para cada* $i \in N$ *el cambiar unilateralmente de estrategia supone una pérdida en sus beneficios, es decir, si para toda estrategia de dicho jugador* $s_i \in S_i$*,*

$$K_i(\bar{s}_{-i},s_i) \preceq K_i(\bar{S}) \qquad K_i(\bar{s}_{-i},s_i) \neq K_i(\bar{S})$$

Ejemplo 4.1.4 *(Continuación 4.1.2) La única estrategia conjunta Pareto a la baja existente en este ejemplo es* $S^2 = (IA, IIB, IIIB)$*, ya que si el jugador I cambia unilateralmente de estrategia, su pago pasaría de* $(20,22,22)$ *a* $(20,21,22)$*, y* $(20,21,22) \leq (20,22,22)$*. A su vez si el que cambia de estrategia fuese el jugador II sus beneficios pasarían de* $(15,20,22)$ *a* $(15,20,21)$ *que es peor que lo que obtenía con la estrategia inicial. Por último el jugador III*

también empeoraría sus ganancias, ya que pasaría de $(10, 15, 15)$ *a* $(10, 12, 15)$.
El perfil de estrategias $S^1 = (IB, IIB, IIIA)$, *que anteriormente vimos que era una estrategia conjunta Pareto, no es un equilibrio Pareto a la baja, ya que por ejemplo el jugador I si cambia de estrategia pasa de ganar* $(15, 20, 25)$ *a* $(10, 22, 24)$ *y* $(10, 22, 24) \npreceq (15, 20, 25)$, *sino que no son comparables.*

Teorema 4.1.3 *Toda estrategia* $\bar{S} \in S$ *que sea un equilibrio Pareto a la baja de un juego difuso es también un equilibrio Pareto.*

Demostración 4.1.3 *Sea* $\bar{S} \in S$ *un equilibrio Pareto a la baja. Esto implica que*

$$K_i(\bar{s}_{-i}, s_i) \preceq K_i(\bar{S}) \quad y \quad K_i(\bar{s}_{-i}, s_i) \neq K_i(\bar{S}) \quad \forall i \in N \quad \forall s_i \in S_i$$

$$\Rightarrow \forall i \in N \quad \nexists s_i \in S_i / K_i(\bar{s}_{-i}, s_i) \succeq K_i(\bar{S}) \quad y \quad K_i(\bar{s}_{-i}, s_i) \neq K_i(\bar{S})$$

$$\Rightarrow \bar{S} \in S \text{ es un equilibrio Pareto.}$$

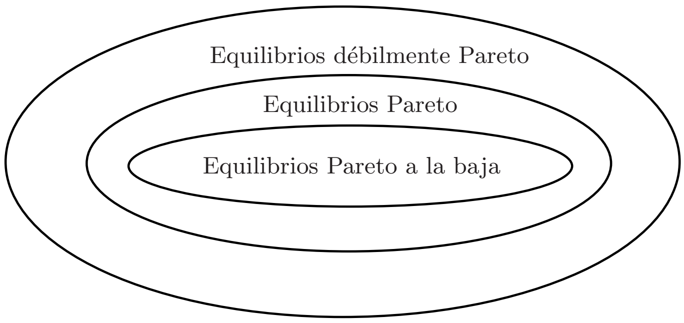

Figura 4.1: Relación entre los tres tipos de equilibrios Pareto.

En el siguiente teorema una función vectorial será continua y cuasicóncava si y sólo si lo son cada una de sus componentes.

Teorema 4.1.4 ***(Existencia)*** *Sea* $[S_1, \ldots, S_n; K_1(s), \ldots, K_n(s)] \in F\Gamma^n(\Omega/(\preceq_e, \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}))$. *Sea* $f : \Omega \to \mathbb{R}^{p \cdot k}$ *tal que* $f(A) = (p_{ij}(A))_{i=1,\ldots,p;\, j=1,\ldots,k}$, *la función de orden* *estándar que nos da las posiciones que elegimos en cada α-corte. El conjunto de equilibrios Pareto es no vacío si el juego difuso verifica que:*

- *Para cada jugador i, el conjunto de sus estrategias S_i es cerrado, acotado y convexo.*
- *Para cada jugador i, la función $f(K_i(s))$ es continua en (s_{-i}, s_i) y cuasicóncava en s_i, es decir, cuasicóncava en su propia estrategia y continua en todas las estrategias.*

Demostración 4.1.4 *Zhao [104] demuestra este resultado para juegos vectoriales. Basta aplicar este resultado tomando coaliciones individuales, es decir, formadas por un único jugador, y teniendo en cuenta que $f(K_i(s))$ es una función vectorial.*

4.2. Juegos difusos finitos

Consideraremos juegos difusos no cooperativos en los que cada jugador tiene sólo un número finito de estrategias, y los extenderemos mediante la aleatorización de los conjuntos de estrategias. En esta nueva clase de juegos está asegurada la existencia de equilibrios Pareto-óptimos.

Definición 4.2.1 *Sea el juego difuso $\Gamma(S, K) = \{S_1, \ldots, S_n; K_1, \ldots, K_n\}$. Una estrategia aleatorizada para el jugador i es un vector x_i tal que:*

$$x_i = (x_i^1, \ldots, x_i^{k_i}),\ k_i = |S_i|,\ x_i^j \geq 0\ \forall j = 1, \ldots, k_i,\ \sum_{j=1}^{k_i} x_i^j = 1,\ \forall i \in N.$$

Por lo tanto los conjuntos de estrategias S_i se transforman en los nuevos $\widehat{S}_i$ que son de la forma:

$$\widehat{S}_i = \{(x_i^1, \ldots, x_i^{k_i}) / \sum_{j=1}^{k_i} x_i^j = 1,\ x_i^j \geq 0\ \forall j = 1, \ldots, k_i\}.$$

Cada x_i^j representa el peso que asigna el jugador i a su estrategia j-ésima si juega la estrategia mixta x_i.

La nueva forma de definir las funciones de pago de un juego aleatorizado será la siguiente:

$$\widehat{K}_i(X) = \sum_{j_n=1}^{k_n} \ldots \sum_{j_1=1}^{k_1} K_i(s_1^{j_1}, \ldots, s_n^{j_n}) \cdot x_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{j_n} \quad \forall i \in N$$

donde $X = (x_1, \ldots, x_n)$ y x_i es una estrategia aleatorizada para el jugador i.
Al juego $\Gamma(\widehat{S}, \widehat{K}) = \{\widehat{S}_1, \ldots, \widehat{S}_n; \widehat{K}_1, \ldots, \widehat{K}_n\}$ le llamamos extensión aleatorizada del juego finito no cooperativo difuso $\Gamma(S, K) = \{S_1, \ldots, S_n; K_1, \ldots, K_n\}$.
Los conjuntos de estrategias aleatorizadas $\widehat{S}_i$ verifican las hipótesis del teorema 4.1.4, por lo tanto podemos asegurar la existencia de equilibrios Pareto en los juegos difusos aleatorizados.

Teorema 4.2.1 *Sea* $\Gamma(\widehat{S}, \widehat{K}) \in F\Gamma^n(\Omega/(\preceq_e, \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\},$ $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}))$ *la extensión aleatorizada del juego finito no cooperativo difuso. Sea* $f : \Omega \to \mathbb{R}^{p \cdot k}$ *tal que* $f(A) = (p_{ij}(A))_{i=1,\ldots,p;\ j=1,\ldots,k}$*, la función asociada a orden estándar. El conjunto de equilibrios Pareto es no vacío, si el juego difuso aleatorizado verifica que para cada jugador i, la función* $f(\widehat{K}_i(x))$ *es continua en* (x_{-i}, x_i) *y cuasicóncava en* x_i*.*

Las condiciones del teorema se verifican cuando el pago del juego difuso viene dado por una matriz difusa, como en el ejemplo 4.1.2. Aunque exista un equilibrio en estrategias mixtas, no necesariamente tiene que existir en estrategias puras (Ver el ejemplo 4.3.3 de la siguiente sección).

4.3. Juegos difusos matriciales de suma nula

Consideremos juegos con tan sólo dos jugadores, en los que el resultado de la elección de las estrategias por ambos jugadores es valorado por cada uno de forma opuesta al otro. Así pues, los pagos que asocian ambos jugadores a un resultado tienen suma nula, y como en este caso vienen representados por números difusos en lugar de por un escalar, se les denomina juegos difusos de suma nula.
En el estudio de estos juegos se añade la dificultad de la no existencia de un orden total entre los elementos que definen la matriz de pago, por lo que la valoración de las estrategias y la comparación entre las mismas es un problema adicional para encontrar la solución del juego. Por ello, se requiere el desarrollo de nuevos conceptos de solución.

Definición 4.3.1 *Un juego difuso matricial de suma nula es un juego difuso que tienen tan sólo dos jugadores, con conjuntos de estrategias* S_1 *y* S_2*, en los que el resultado de la elección de las estrategias por ambos jugadores es valorado por cada uno de forma opuesta al otro. Los denotaremos por* $\Gamma(S, A) = (S_1, S_2; A)$

Para más comodidad en la notación, también llamaremos a los juegos difusos matriciales simplemente por $\Gamma(A)$.

Denotaremos por $\Gamma(\hat{S}, A) = (\hat{S}_1, \hat{S}_2; A)$ a la extensión aleatorizada del juego difuso de suma nula $\Gamma(S, A)$.

Al conjunto de todos los juegos difusos matriciales de suma nula los denotamos por:

$$FM\Gamma(tipo\ de\ n\acute{u}mero\ difuso/orden\ difuso)$$

Ejemplo 4.3.1 *En un juego difuso,* $\Gamma(A) \in FM\Gamma(T/(\preceq_e, \{0,1\}, \{0,1\}))$*, cada estrategia pura tiene asociado un conjunto de números difusos y entre ellos no tiene por qué existir uno más desfavorable.*

$$A = \begin{pmatrix} (2,2,3,4) & (0,1,4,4) \\ (0,1,3,3) & (0,1,2,4) \end{pmatrix}$$

La primera estrategia del jugador I tiene asociados los números difusos trapezoidales $(2,2,3,4)$ *y* $(0,1,4,4)$*. Con este orden difuso no podríamos destacar ninguno de los pagos anteriores como valoración pesimista de dicha estrategia. Ya que,*

$$p_{11}((2,2,3,4)) = 2 > 0 = p_{11}((0,1,4,4)) \quad p_{12}(((2,2,3,4)) = 4 = p_{12}((0,1,4,4))$$

$$p_{21}((2,2,3,4)) = 2 > 1 = p_{21}((0,1,4,4)) \quad p_{22}((2,2,3,4)) = 3 < 4 = p_{22}((0,1,4,4))$$

Consideramos un juego finito bipersonal, de suma nula en forma normal. Sea $A = (A_{ij}),\ 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq m$, la matriz de pago del juego, siendo r el número de estrategias puras del jugador I, y m el número de estrategias puras del jugador II. Cada elemento A_{ij} de la matriz es un número difuso

$$A_{ij} = (\tilde{a}_{ij}, a_{ij}, b_{ij}, \tilde{b}_{ij})_{LR} \in \Omega$$

el cual nos da tanto la información que el jugador I tiene sobre sus pagos, como la información de las pérdidas del jugador II asociadas a la elección de la i-ésima y j-ésima estrategia de ambos jugadores respectivamente.

Las estrategias mixtas del jugador I y del jugador II las denotamos respectivamente por;

$$X = \{x \in \mathbb{R}^r;\ \sum_{i=1}^{r} x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, r\}$$

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^m;\ \sum_{j=1}^{m} y_j = 1,\ y_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, m\}$$

Definición 4.3.2 *El pago esperado cuando los jugadores escogen estrategias mixtas $x \in X$ e $y \in Y$, respectivamente, viene dado por:*

$$v(x, y) = x^t A y$$

Consideraremos a continuación que el oponente en el juego puede actuar en cada uno de los puntos dados por la función estándar del orden difuso de forma independiente, y daremos una única valoración de la estrategia del jugador I, que será el número difuso que este puede asegurar como ganancia.

Definición 4.3.3 *Para cada estrategia $x \in X$ del jugador I, el número difuso de nivel de seguridad para dicho jugador según el orden difuso $\preceq$ es el pago que puede garantizarse con esta estrategia independientemente del otro jugador.*
Análogamente para el jugador II. Es decir, los números difuso de niveles de seguridad de los jugadores I y II son respectivamente:

$$\underline{v}(x) = \min_{y \in Y} v(x, y) \qquad \bar{v}(y) = \max_{x \in X} v(x, y)$$

Recordemos que para calcular el mínimo (o máximo) de un número difuso, tenemos que ver qué orden difuso estándar estamos usando y la función de orden estándar correspondiente, es decir, la función que nos da todas las posiciones elegidas en cada uno de los α-cortes. Posteriormente hallaremos el mínimo (o máximo) en cada una de estas posiciones, y por último el mínimo (o máximo) será un número difuso que verifique que al realizarle los α-cortes y elegir todas las posiciones en dichos α-cortes indicadas por la función de orden estándar, estos puntos coincidan con los mínimos (o máximos) hallados anteriormente (ver la definición 1.3.1).

Definición 4.3.4 *Dada una estrategia mixta $x \in X$, definimos el nivel de seguridad ij del jugador I como:*

$$\underline{v}_{ij}(x) = \min_{y \in Y} p_{ij}(v(x,y)) = \min_{y \in Y} p_{ij}(x^t A y)$$

Análogamente se define el nivel de seguridad ij del jugador II.

También podemos expresar en nivel de seguridad ij de la estrategia $x \in X$ como:

$$\underline{v}_{ij}(x) = \min_{y \in Y} p_{ij}(\sum_{tl} x_t y_l A_{tl}) = \min_{y \in Y} p_{ij}((\sum_{tl} x_t y_l \tilde{a}_{tl}, \sum_{tl} x_t y_l a_{tl}, \sum_{tl} x_t y_l b_{tl}, \sum_{tl} x_t y_l \tilde{b}_{tl})_{LR})$$

Definición 4.3.5 *Una estrategia $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad Pareto-óptima según el orden difuso $\preceq$ para el jugador I, si:*

$$\nexists x \in X \text{ tal que } \quad \underline{v}(x^*) \preceq \underline{v}(x) \quad \text{con } \underline{v}(x^*) \neq \underline{v}(x)$$

siendo el orden difuso $\preceq$ el mismo que el usado para la determinación de $\underline{v}(x)$.

Análogamente, una estrategia $y^* \in Y$ es una estrategia de seguridad Pareto-óptima según el orden difuso $\preceq$ para el jugador II, si:

$$\nexists y \in Y \text{ tal que } \quad \bar{v}(y^*) \succeq \bar{v}(y) \quad \text{con } \bar{v}(x^*) \neq \bar{v}(x)$$

siendo el orden difuso $\preceq$ el mismo que el usado para la determinación de $\bar{v}(y)$.

Aunque haya varios números difusos mínimos que nos den $\underline{v}$ o $\bar{v}$, no importa el que usemos, ya que para comparar $\underline{v}(x^*)$ y $\underline{v}(x)$, sólo consideraremos los puntos dados por los valores p_{ij}, que son iguales para todos los mínimos.

4.3.1. Procedimiento de resolución

Como es conocido, una estrategia x^* de un juego clásico de suma nula, asociado a la matriz A, será óptima, si es solución del siguiente problema de programación lineal [74]

$$\max v$$

$$s.a. \quad \sum_{i=1}^{r} a_{ij}x_i \geq v \qquad \forall j$$

$$\sum_{i=1}^{r} x_i = 1, \quad x_i \geq 0 \quad \forall i$$

Vamos a probar que para hallar las soluciones de un juego matricial difuso de suma nula, podemos seguir un camino similar al dado en el modelo clásico al proponer para ello un problema de programación lineal difuso $(PLJD)_{\preceq}$. Con ello nuestro método de resolución se puede considerar una generalización del método convencional para un juego clásico.

Teorema 4.3.1 *El conjunto de estrategias de seguridad Pareto-óptimas de un juego difuso de suma nula de matriz $A = (A_{ij})$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq m$; con un orden difuso $\succeq$, es equivalente al conjunto de soluciones del problema de programación lineal difusa $(PLJD)_{\preceq}$:*

$$\text{máx } \tilde{v}$$

$$s.a. \quad \sum_{t=1}^{r} x_t A_{tl} \succeq \tilde{v}$$

$$l \in \{1, \ldots, m\}$$

$$\sum_{t=1}^{r} x_t = 1$$

$$x \geq 0.$$

Demostración 4.3.1 *Sea $x^* \in X$ una estrategia de seguridad Pareto-óptima según el orden difuso $\preceq$ para el jugador I.*
El α-corte de un número difuso $L - R$ es de la forma;

$$[a - \gamma \cdot L^{-1}(\alpha), b + \beta \cdot R^{-1}(\alpha)]$$

L^{-1} y R^{-1} se pueden calcular ya que R y L son estrictamente decrecientes.
Esto unido a las propiedades que nos aseguran que es lo mismo multiplicar por un escalar positivo un número difuso y luego calcularle un α-corte, que calcular el α-corte y después multiplicar los extremos del intervalo por el escalar positivo; y que es lo mismo sumar dos

números difusos con igual función $L - R$ y después calcular el α-corte, que calcular los α-cortes del los dos números difusos y después sumar los extremos de los intervalos, concluimos que:

$$\underline{v}_{ij}(x) = \min_{y\in Y} \lambda_j \cdot \Big(\sum_{tl} x_t y_l a_{tl} - (\sum_{tl} x_t y_l (a_{tl} - \tilde{a}_{tl})) \cdot L^{-1}(\alpha_i) \Big) +$$

$$+ (1-\lambda_j) \cdot \Big(\sum_{tl} x_t y_l b_{tl} + (\sum_{tl} x_t y_l (b_{tl} - \tilde{b}_{tl})) \cdot R^{-1}(\alpha_i) \Big)$$

El problema a resolver, es un problema lineal escalar, por tanto tiene una solución óptima entre los puntos extremos del poliedro Y. Por ello, podemos expresar

$$\underline{v}_{ij}(x) = \min_{1\le l\le m} p_{ij}(\sum_{t=1}^{r} x_t A_{tl})$$

Como $x^* \in X$ es una estrategia de seguridad Pareto-Óptima, sabemos que no existe otra estrategia $x \in X$ tal que $\underline{v}(x^*) \preceq \underline{v}(x)$ y $\underline{v}(x^*) \neq \underline{v}(x)$, o equivalentemente $\nexists x \in X$ tal que

$$\min_{y\in Y} v(x^*, y) \preceq \min_{y\in Y} v(x, y) \qquad y \qquad \min_{y\in Y} v(x^*, y) \neq \min_{y\in Y} v(x, y)$$

Basándonos en la definición de mínimo de un número difuso, tenemos que $\nexists x \in X$ tal que:

$$\Big(\min_{y\in Y} p_{11}(x^t Ay), \ldots, \min_{y\in Y} p_{nk}(x^t Ay) \Big) \geq$$

$$\geq \Big(\min_{y\in Y} p_{11}(x^{*t} Ay), \ldots, \min_{y\in Y} p_{nk}(x^{*t} Ay) \Big)$$

$$y$$

$$\Big(\min_{y\in Y} p_{11}(x^{*t} Ay), \ldots, \min_{y\in Y} p_{nk}(x^{*t} Ay) \Big) \neq$$

$$\neq \Big(\min_{y\in Y} p_{11}(x^t Ay), \ldots, \min_{y\in Y} p_{nk}(x^t Ay) \Big)$$

Hemos probado que $\underline{v}_{ij}(x) = \min_{1\le l\le m} p_{ij}(\sum_{t=1}^{r} x_t A_{tl})$. Luego esta desigualdad la podemos reescribir como:

$$\Big(\min_{1\le l\le m} p_{11}(\sum_{t=1}^{r} x_t A_{tl}), \ldots, \min_{1\le l\le m} p_{nk}(\sum_{t=1}^{r} x_t A_{tl}) \Big) \geq$$

$$\geq \Big(\min_{1\leq l\leq m} p_{11}(\sum_{t=1}^{r} x_t^* A_{tl}), \ldots, \min_{1\leq l\leq m} p_{nk}(\sum_{t=1}^{r} x_t^* A_{tl})\Big)$$

$$y$$

$$\Big(\min_{1\leq l\leq m} p_{11}(\sum_{t=1}^{r} x_t A_{tl}), \ldots, \min_{1\leq l\leq m} p_{nk}(\sum_{t=1}^{r} x_l A_{tl})\Big) \neq$$

$$\neq \Big(\min_{1\leq l\leq m} p_{11}(\sum_{t=1}^{r} x_t^* A_{tl}), \ldots, \min_{1\leq l\leq m} p_{nk}(\sum_{t=1}^{r} x_t^* A_{tl})\Big)$$

De aquí, $x^* \in X$ es una solución eficiente del problema

$$\max_{x\in X} \Big(\min_{1\leq l\leq m} p_{11}(\sum_{t=1}^{r} x_t A_{tl}), \ldots, \min_{1\leq l\leq m} p_{nk}(\sum_{t=1}^{r} x_t A_{tl})\Big)$$

y este problema equivale al problema de programación lineal multiobjetivo

$$\begin{aligned} &\max\ v_{11}, \ldots, v_{1k}, \ldots, v_{n1}, \ldots, v_{nk} \\ &s.a. \quad p_{ij}(\sum_{t=1}^{r} x_t A_{t1}) \geq v_{ij} \\ &\qquad\vdots \\ &\qquad p_{ij}(\sum_{t=1}^{r} x_t A_{tm}) \geq v_{ij} \\ &\qquad \sum_{t=1}^{r} x_t = 1 \\ &\qquad x \geq 0 \\ &\forall\, 1 \leq i \leq n \qquad \forall\, 1 \leq j \leq k \end{aligned}$$

el cual es equivalente al problema de programación lineal difusa $(PLJD)_{\preceq}$

Recíprocamente, supongamos que una solución eficiente (v^*, x^*) del problema $(PLJD)_{\preceq}$ no es una estrategia de seguridad Pareto-óptima según el orden difuso $\preceq$, entonces existe $\bar{x} \in X$ tal que

$$\Big(\min_{1\leq l\leq m} p_{11}(\sum_{t=1}^{r} \bar{x}_t A_{tl}), \ldots, \min_{1\leq l\leq m} p_{nk}(\sum_{t=1}^{r} \bar{x}_t A_{tl})\Big) \succeq$$

$$\succeq \Big(\min_{1\leq l\leq m} p_{11}(\sum_{t=1}^{r} x_t^* A_{tl}), \ldots, \min_{1\leq l\leq m} p_{nk}(\sum_{t=1}^{r} x_t^* A_{tl})\Big)$$

$$y$$

$$\Big(\min_{1\leq l\leq m} p_{11}(\sum_{t=1}^{r} \bar{x}_t A_{tl}), \ldots, \min_{1\leq l\leq m} p_{nk}(\sum_{t=1}^{r} \bar{x}_t A_{tl})\Big) \neq$$

$$\neq \Big(\min_{1\leq l\leq m} p_{11}(\sum_{t=1}^{r} x_t^* A_{tl}), \ldots, \min_{1\leq l\leq m} p_{nk}(\sum_{t=1}^{r} x_t^* A_{tl})\Big)$$

Sea $\bar{v} = (\bar{v}_{11}, \ldots, \bar{v}_{nk})$, donde $\bar{v}_{ij} = \min_{1\leq l\leq m} p_{ij}(\sum_{t=1}^{r} \bar{x}_t A_{tl})$, $1 \leq i \leq n$ $1 \leq j \leq k$, el vector $(\bar{v}, \bar{x})$ es una solución del problema $(PLJD)_{\preceq}$ que domina a (v^*, x^*), en contra de ser una solución eficiente de dicho problema.

Con este resultado se demuestra que tal y como se hacía en los juegos escalares bipersonales de suma nula, la Programación Lineal Difusa se utiliza para resolver los juegos difusos bipersonales de suma nula, siempre que se considere el concepto de estrategia de seguridad Pareto-óptima como solución de los mismos.
El jugador II puede realizar el mismo proceso para calcular sus estrategias de seguridad Pareto-Optimas.
Además hay que destacar que, como es usual en los problemas lineales multiobjetivos, a partir de las soluciones eficientes extremas, se obtienen todas las estrategias de seguridad Pareto-óptimas.

4.3.2. Dualidad difusa

Si el orden usado por los dos jugadores para valorar los números difusos fuese el mismo, podemos definir un problema dual al anterior para encontrar las estrategias de seguridad Pareto-Óptimas del jugador II, y relacionar estas estrategias con las obtenidas por el jugador I.
Con un procedimiento análogo al anterior llegamos a que y^* es una estrategia de seguridad Pareto óptima según el orden difuso $\preceq$ para el jugador II y $w^* = (w_{11}^*, \ldots, w_{nk}^*)$ los puntos de cada α-corte que han de coincidir con los del número difuso de nivel de seguridad asociado

si y sólo si (w^*, y^*) es una solución eficiente del problema de programación lineal difusa

$$\begin{aligned}
(PLJD)'_{\preceq} \quad & \text{mín}\, \tilde{w} \\
s.a. \quad & \sum_{l=1}^{m} A_{tl} y_l \preceq \tilde{w} \\
& t \in \{1, \ldots, r\} \\
& \sum_{l=1}^{m} y_l = 1 \\
& y \geq 0.
\end{aligned}$$

Este problema es equivalente al problema de programación lineal multiobjetivo

$$\begin{aligned}
(PLJD)'_{\preceq} \quad & \text{mín} \;\; w_{11}, \ldots, w_{1k}, \ldots, w_{n1}, \ldots, w_{nk} \\
s.a. \quad & p_{ij}(\sum_{l=1}^{m} A_{1l} y_l) \leq w_{ij} \\
& \vdots \\
& p_{ij}(\sum_{l=1}^{m} A_{rl} y_l) \leq w_{ij} \\
& \sum_{l=1}^{m} y_l = 1 \\
& y \geq 0 \\
& \forall\, 1 \leq i \leq n \qquad \forall\, 1 \leq j \leq k
\end{aligned}$$

Teorema 4.3.2 *Sea $(x^*, \tilde{v}^*)$ una solución del problema primal $(PLJD)_{\preceq}$ y sea $(y^*, \tilde{w}^*)$ una solución del problema dual $(PLJD)'_{\preceq}$, se verifica que;*

$$\tilde{v}^* \preceq \tilde{w}^*$$

Demostración 4.3.2 *Supongamos que el orden difuso usado para la resolución de los problemas, tiene el sistema de orden $Y = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ y k parámetros de posición, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$,* *en cada α- corte.*

Resolver el problema de programación lineal difusa $(PLJD)_{\preceq}$ es equivalente a resolver el siguiente problema de programación lineal multiobjetivo

$$(P)\ \text{máx}\ v_{11},\ldots,v_{1k},\ldots,v_{n1},\ldots,v_{nk}$$

$$s.a.\quad p_{ij}(\sum_{t=1}^{r} x_t A_{tl}) \geq v_{ij}$$

$$\sum_{t=1}^{r} x_t = 1$$

$$x \geq 0$$

$$\forall\, 1 \leq i \leq n \qquad \forall\, 1 \leq j \leq k \qquad \forall\, 1 \leq l \leq m$$

Supongamos que (x^*, V^*) es solución del problema de programación lineal multiobjetivo, por lo tanto $V^* = (V_{11}^*, \ldots, V_{1k}, \ldots, V_{n1}^*, \ldots, V_{nk}^*)$ nos da las posiciones en los α-cortes de la solución $\tilde{v^*}$ del $(PLJD)_{\preceq}$, es decir $p_{ij}(\tilde{v^*}) = V_{ij}^*$.

Consideremos los problemas de programación lineal escalares

$$(P_{ij})\ \text{máx}\ v_{ij}$$

$$s.a.\quad p_{ij}(\sum_{t=1}^{r} x_t A_{tl}) \geq v_{ij}$$

$$\sum_{t=1}^{r} x_t = 1$$

$$x \geq 0$$

$$\forall\, 1 \leq l \leq m$$

y sea (x^{ij*}, v_{ij}^*) la solución de este problema. La relación existente entre los problemas (P) y (P_{ij}) nos asegura que

$$V_{ij}^* \leq v_{ij}^* \qquad \forall i, j \tag{4.1}$$

Resolver el problema de programación lineal difusa dual $(PLJD)'_{\preceq}$ es equivalente a resolver *el siguiente problema de programación lineal multiobjetivo*

$$(D)\ \text{mín}\ w_{11},\ldots,w_{1k},\ldots,w_{n1},\ldots,w_{nk}$$

$$s.a.\quad p_{ij}(\sum_{l=1}^{m} A_{tl}y_l) \leq w_{ij}$$

$$\sum_{l=1}^{m} y_l = 1$$

$$y \geq 0$$

$$\forall\, 1 \leq i \leq n \qquad \forall\, 1 \leq j \leq k \qquad \forall\, 1 \leq t \leq r$$

Supongamos que (y^*, W^*) *es solución del problema de programación lineal multiobjetivo, por lo tanto* $W^* = (W^*_{11},\ldots,W^*_{1k},\ldots,W^*_{n1},\ldots,W^*_{nk})$ *nos da las posiciones en los* α*-cortes de la solución* $\tilde{w^*}$ *del* $(PLJD)'_{\preceq}$*, es decir* $p_{ij}(\tilde{w^*}) = W^*_{ij}$.
Consideremos los problemas de programación lineal escalares

$$(D_{ij})\ \text{mín}\ w_{ij}$$

$$s.a.\quad p_{ij}(\sum_{l=1}^{m} A_{tl}y_l) \leq w_{ij}$$

$$\sum_{l=1}^{m} y_l = 1$$

$$y \geq 0$$

$$\forall\, 1 \leq t \leq r$$

y sea (y^{ij*}, w^*_{ij}) *la solución de este problema. La relación existente entre los problemas* (D) *y* (D_{ij}) *nos asegura que*

$$W^*_{ij} \geq w^*_{ij} \qquad \forall i, j \tag{4.2}$$

A su vez lo problemas (P_{ij}) *y* (D_{ij}) *son problemas escalares duales, y debido a las propiedades* *que nos asegura la dualidad escalar sabemos que*

$$v_{ij}^* \leq w_{ij}^* \tag{4.3}$$

Uniendo las desigualdades 4.1, 4.2 y 4.3, llegamos a que

$$p_{ij}(\tilde{v^*}) = V_{ij}^* \leq v_{ij}^* \leq w_{ij}^* \leq W_{ij}^* = p_{ij}(\tilde{w^*}) \qquad \forall i, j$$

Por lo que concluimos que

$$\tilde{v^*} \preceq \tilde{w^*}$$

Los problemas de programación lineal difusa $(PLJD)_{\preceq}$ y $(PLJD)'_{\preceq}$ los consideraremos un par de problemas primal-dual difusos.

Es importante tener en cuenta que los problemas $(PLJD)_{\preceq}$ y $(PLJD)'_{\preceq}$, no son duales en el sentido convencional, sino en el sentido difuso explicado anteriormente. De hecho, si $(x^*, \tilde{v}^*)$ es una solución óptima del problema primal $(PLJD)_{\preceq}$, y $(y^*, \tilde{w}^*)$ es una solución óptima del problema dual $(PLJD)'_{\preceq}$, no cabe esperar que $\tilde{v}^* \simeq \tilde{w}^*$, es decir, que $p_{ij}(\tilde{v}^*) = p_{ij}(\tilde{w^*})$ $\forall i; \forall j$.

Si todos los números difusos del problema fuesen de la forma $(a, a, a, a)_{LR}$, los dos problemas de programación lineal difusa quedarían reducidos a dos problemas escalares duales y el teorema 4.3.2 sería una generalización del teorema existente en el caso escalar.

Ejemplo 4.3.2 *(Continuación 4.3.1) Sea* $\Gamma(A) \in FM\Gamma(T/(\preceq_e, \{0,1\}, \{0,1\}))$. *El problema primal* $(PLJD)_{\preceq}$ *asociado sería:*

$$\begin{aligned}
&\max v_{11},\ v_{12},\ v_{21},\ v_{22} \\
&s.a. \quad 2x_1 + 0x_2 \geq v_{11} \\
&\qquad\quad 0x_1 + 0x_2 \geq v_{11} \\
&\qquad\quad 4x_1 + 3x_2 \geq v_{12} \\
&\qquad\quad 4x_1 + 4x_2 \geq v_{12}
\end{aligned}$$

$$2x_1 + x_2 \geq v_{21}$$

$$x_1 + x_2 \geq v_{21}$$

$$3x_1 + 3x_2 \geq v_{22}$$

$$4x_1 + 2x_2 \geq v_{22}$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La solución de este problema es $x^* = (1, 0)$ *y* $\tilde{v}^* = (0, 1, 3, 4)$

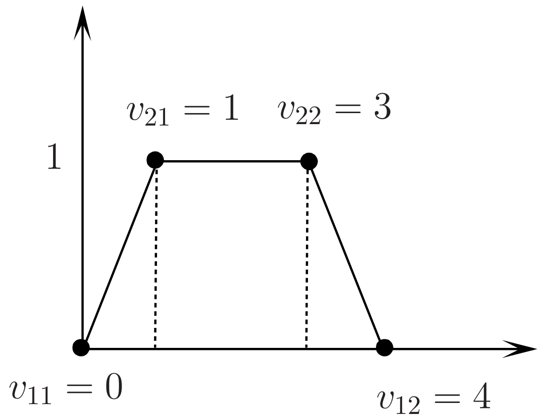

Figura 4.2: Número difuso $\tilde{v}^*$.

El problema dual $(PLJD)'_{\preceq}$ *asociado sería:*

$$\min w_{11},\ w_{12},\ w_{21},\ w_{22}$$

$$s.a. \quad 2y_1 + 0y_2 \leq w_{11}$$

$$0y_1 + 0y_2 \leq w_{11}$$

$$4y_1 + 4y_2 \leq w_{12}$$

$$3y_1 + 4y_2 \leq w_{12}$$

$$2y_1 + y_2 \leq w_{21}$$

$$y_1 + y_2 \leq w_{21}$$

$$3y_1 + 4y_2 \leq w_{22}$$

$$3y_1 + 2y_2 \leq w_{22}$$

$$y_1 + y_2 = 1$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

La solución de este problema es $y^* = (0,1)$ *y* $\tilde{w}^* = (0,1,4,4)$

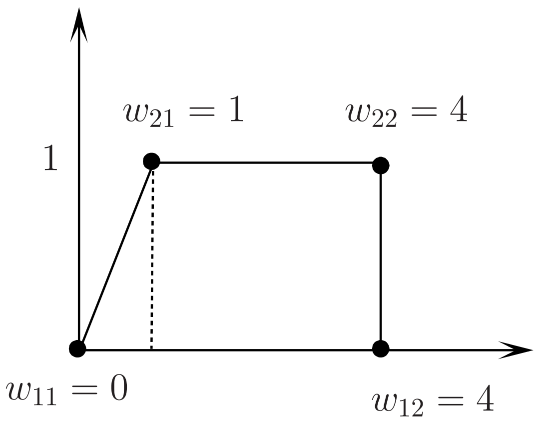

Figura 4.3: Número difuso $\tilde{w}^*$.

Como se puede comprobar se verifica el teorema 4.3.2, ya que $\tilde{v}^* \preceq \tilde{w}^*$.

Ejemplo 4.3.3 *Consideremos el juego difuso bipersonal de suma nula* $\Gamma(A) \in FM\Gamma(T/(\preceq_e, \{0,1\}, \{0,1\}))$*:*

$$A = \begin{pmatrix} (2,3,3,5) & (2,2,4,5) & (1,2,3,6) \\ (1,4,5,5) & (3,4,4,5) & (3,3,4,4) \end{pmatrix}$$

El problema de programación lineal multiobjetivo asociado será

$$\text{máx}\, v_{11},\ v_{12},\ v_{21},\ v_{22}$$

$$\begin{array}{lll}
s.a. & 2x_1 + 1x_2 \geq v_{11} & 2x_1 + 4x_2 \geq v_{21} \\
 & 2x_1 + 3x_2 \geq v_{11} & 2x_1 + 3x_2 \geq v_{21} \\
 & x_1 + 3x_2 \geq v_{11} & 3x_1 + 5x_2 \geq v_{22} \\
 & 5x_1 + 5x_2 \geq v_{12} & 4x_1 + 4x_2 \geq v_{22} \\
 & 5x_1 + 5x_2 \geq v_{12} & 3x_1 + 4x_2 \geq v_{22} \\
 & 6x_1 + 4x_2 \geq v_{12} & x_1 + x_2 = 1 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \geq v_{21} & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}$$

La solución de este problema es $x^* = (1/2, 1/2)$ *y* $\tilde{v}^* = (1'5, 2'5, 3'5, 5)$.
El problema dual asociado tiene por solución $y^* = (2/3, 0, 1/3)$ *y* $\tilde{w}^* = (1'66, 3'66, 4'66, 5'33)$.

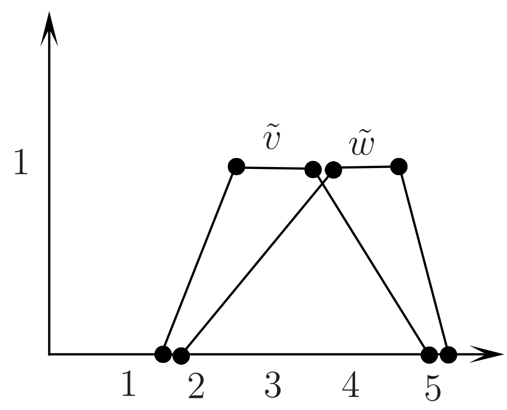

Figura 4.4: Solución del problema primal y el problema dual.

Definición 4.3.6 *Un par de estrategias* $x \in X$, $y \in Y$, *forman un punto de silla de Pareto para el juego vectorial si* $\underline{v}(x) = \bar{v}(y)$.

Este concepto puede equipararse con el concepto de solución ideal en Programación Multiobjetivo, que es aquella solución factible que maximiza todos los objetivos simultáneamente.

Así, tenemos la siguiente definición:

Definición 4.3.7 *$x^* \in X$ es una estrategia ideal para el jugador I si x^* maximiza $\underline{v}_{ij}(x)$, $\forall i = 1, \ldots, n$ y $\forall j = 1, \ldots, k$. Análogamente, $y^* \in Y$ es una estrategia ideal para el jugador II si y^* minimiza $\bar{v}_{ij}(y)$, $\forall i = 1, \ldots, 4$ y $\forall j = 1, \ldots, k$.*

Sin embargo, la existencia de estrategia ideal para un jugador no implica la existencia de punto de silla de Pareto para el juego difuso, puesto que los niveles de seguridad, se pueden obtener con estrategias diferentes del otro jugador.

Teorema 4.3.3 *Un par de estrategias $x^* \in X$, $y^* \in Y$, forman un punto de silla Pareto para los jugadores I y II si y sólo si x^* e y^* son estrategias ideales para los jugadores I y II respectivamente.*

Ejemplo 4.3.4 *Consideremos el siguiente juego matricial difuso*

$$\begin{pmatrix} (2,2,2,4) & (3,4,4,5) \\ (4,6,6,6) & (2,2,2,4) \end{pmatrix}$$

La estrategia $x^* = (2/3, 1/3)$ del jugador I, y la estrategia $y^* = (1/3, 2/3)$ del jugador II, forman un punto de silla Pareto de este juego, ya que $\underline{v}(x^*) = (8/3, 10/3, 10/3, 14/3) = \bar{v}(y^*)$. Además ambas estrategias son estrategias ideales para el jugador I y el jugador II respectivamente.

4.4. Aplicación: Juegos matriciales de suma nula intervalares III

Un juego difuso matricial de suma nula $FM\Gamma(I/(\preceq_e, \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}))$ es un juego difuso matricial en el que los pagos de la matriz del juego vienen dados por números difusos intervalares, ya que en los números difusos intervalares todos los α-cortes son iguales, luego no hace falta especificar el sistema de orden elegido.

El teorema 4.3.1 afirma que hallar las estrategias óptimas de un juego difuso de suma nula es equivalente a resolver un problema de programación lineal difusa. En el caso de valores intervalares, este problema es el siguiente

$$
\begin{aligned}
& \text{máx } \tilde{v} \\
s.a. \quad & \sum_{t=1}^{r} x_t(a_{tl}, b_{tl}) \succeq \tilde{v} \\
& l \in \{1, \ldots, m\} \\
& \sum_{t=1}^{r} x_t = 1 \\
& x \geq 0.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Siendo (a_{tl}, b_{tl}) los números difusos intervalares que forman la matriz del juego bipersonal de suma nula, y $\tilde{v} = (v_1, v_2)$ un número difuso intervalar.
Sea $\preceq$ el orden difuso con parámetros de posición $\lambda_1, \ldots, \lambda_2$. El problema difuso de suma nula intervalar es equivalente a:

$$
\begin{aligned}
& \text{máx } \lambda_1 v_1 + (1-\lambda_1) v_2, \ldots, \lambda_k v_1 + (1-\lambda_k) v_2 \\
s.a. \quad & \lambda_1 \sum_{t=1}^{r} x_t a_{tl} + (1-\lambda_1) \sum_{t=1}^{r} x_t b_{tl} \geq \lambda_1 v_1 + (1-\lambda_1) v_2 \\
& \vdots \\
& \lambda_k \sum_{t=1}^{r} x_t a_{tl} + (1-\lambda_k) \sum_{t=1}^{r} x_t b_{tl} \geq \lambda_k v_1 + (1-\lambda_k) v_2 \\
& l \in \{1, \ldots, m\} \\
& \sum_{t=1}^{r} x_t = 1 \\
& x \geq 0.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.4.1 *Sea $\Gamma(A) \in FM\Gamma(I/(\preceq_e, \{0, 1/2\}))$, el juego difuso intervalar de suma nula con la siguiente matriz de pagos asociada:*

$$
A = \begin{pmatrix} (2,3) & (1,4) \\ (0,4) & (1,4) \end{pmatrix}
$$

El problema de programación difusa asociado a este juego es:

$$\text{máx}\, \frac{v_1+v_2}{2}; v_2$$

$$\begin{aligned} s.a. \quad 2,5x_1+2x_2 &\geq \frac{v_1+v_2}{2} \\ 2,5x_1+2,5x_2 &\geq \frac{v_1+v_2}{2} \\ 3x_1+4x_2 &\geq v_2 \\ 4x_1+4x_2 &\geq v_2 \\ x_1+x_2 &= 1 \end{aligned}$$

La solución a este problema de programación lineal difusa es $\tilde{v}^* = (2,3)$ *y* $x^* = (1,0)$.
Si añadimos un parámetro de posición más al orden difuso estándar, y consideramos el juego difuso como $\Gamma(A) \in FM\Gamma(I/(\preceq_e, \{0,1/2,1\}))$, *el problema de programación lineal difusa asociado es:*

$$\text{máx}\, \frac{v_1+v_2}{2}; v_2; v_1$$

$$\begin{aligned} s.a. \quad 2,5x_1+2x_2 &\geq \frac{v_1+v_2}{2} \\ 2,5x_1+2,5x_2 &\geq \frac{v_1+v_2}{2} \\ 3x_1+4x_2 &\geq v_2 \\ 4x_1+4x_2 &\geq v_2 \\ 2x_1 &\geq v_1 \\ x_1+x_2 &> v_1 \\ x_1+x_2 &= 1 \end{aligned}$$

La solución a este problema es, $\tilde{v}^* = (1, 3'5)$ *y* $x^* = (0'5, 0'5)$.

Dado que existen varias soluciones al problema, según el orden difuso que usemos, en estos casos podemos buscar una cota superior e inferior del valor asociado a la solución de este juego, de manera que para hallar dichas cotas tan sólo tendremos que resolver dos problemas de programación lineal escalares que corresponderán a los niveles inferior y superior de los números intervalares.

Consideremos los siguientes problemas de programación lineales escalares asociados al problema de programación lineal difusa intervalar;

$$\begin{aligned} (\textbf{pesimista}) \quad & \text{máx } v_1 \\ s.a. \quad & \sum_{t=1}^{r} x_t a_{tl} \geq v_1 \\ & l \in \{1, \ldots, m\} \\ & \sum_{t=1}^{r} x_t = 1 \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} (\textbf{optimista}) \quad & \text{máx } v_2 \\ s.a. \quad & \sum_{t=1}^{r} x_t b_{tl} \geq v_2 \\ & l \in \{1, \ldots, m\} \\ & \sum_{t=1}^{r} x_t = 1 \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Teorema 4.4.1 *Sea $V^* = (V_1^*, V_2^*)$ la solución del problema difuso de suma nula intervalar 4.4. Sean v_1^* y v_2^* las soluciones de los problemas de suma nula escalares* ***pesimista*** *y* ***optimista*** *respectivamente. Se verifica que:*

$$(v_1^*, v_1^*) \preceq (V_1^*, V_2^*) \preceq (v_2^*, v_2^*)$$

Demostración 4.4.1 *Debido a que los parámetros de posición verifican que $0 \leq \lambda_j \leq 1$*

para todo j y a que $a_{tl} \leq b_{tl}$ para todo t y l, se verifica que

$$\sum_{t=1}^{r} x_t a_{tl} \leq \lambda_j \sum_{t=1}^{r} x_t a_{tl} + (1-\lambda_j) \sum_{t=1}^{r} x_t b_{tl} \qquad \forall j \quad \forall l$$

Esta relación entre las restricciones de los problemas 4.4 y 4.5 demuestra que

$$v_1^* \leq \lambda_j V_1^* + (1-\lambda_j) V_2^* \qquad \forall j$$

lo cual implica la relación:

$$(v_1^*, v_1^*) \preceq (V_1^*, V_2^*)$$

Por la misma razón tenemos que:

$$\sum_{t=1}^{r} x_t b_{tl} \geq \lambda_j \sum_{t=1}^{r} x_t a_{tl} + (1-\lambda_j) \sum_{t=1}^{r} x_t b_{tl} \qquad \forall j \quad \forall l$$

Esta relación entre las restricciones de los problemas 4.4 y 4.6 demuestra que

$$v_2^* \geq \lambda_j V_1^* + (1-\lambda_j) V_2^* \qquad \forall j$$

lo cual implica la relación:

$$(v_2^*, v_2^*) \succeq (V_1^*, V_2^*)$$

Ejemplo 4.4.2 *Sea $\Gamma(A) \in FM\Gamma(I/(\preceq_e, \{1/2, 1/3\}))$ un juego bipersonal de suma nula intervalar, y sea A la matriz del juego;*

$$A = \begin{pmatrix} (1,3) & (2,3) & (0,4) \\ (0,3) & (2,4) & (1,4) \end{pmatrix}$$

La solución del problema de programación lineal difusa asociado al problema difuso de suma nula intervalar, es $V^* = (1,3)$. Las soluciones de los problemas escalares asociados son $v_1^* = 1/2$ y $v_2^* = 3$. Se verifica la relación $(v_1^*, v_1^*) \preceq (V_1^*, V_2^*) \preceq (v_2^*, v_2^*)$, ya que $(1/2, 1/2) \preceq (1,3) \preceq (3,3)$.

Capítulo 5

Conclusiones

En esta memoria hemos hecho un primer estudio de los juegos con pagos difusos tanto cooperativos como no cooperativos.

En el capítulo segundo hemos estudiado los juegos cooperativos difusos, definiendo el core de estos juegos, tanto el core de preferencia como el core de dominancia, haciendo hincapié en las diferencias entre estos dos cores, dado que los órdenes usados para comparar números difusos son ordenes parciales. Especialmente hemos considerado un tipo de orden difuso, el orden difuso estándar, que nos ha permitido estudiar el core de este tipo de juegos, probando que se puede expresar como intersección de conjuntos que se pueden interpretar como cores de juegos. Además probamos una generalización del teorema de Shapley-Bondareva, demostrando que un juego difuso cooperativo tiene core distinto de vacío si y sólo si es balanceado en sentido difuso.

En el tercer capítulo de esta memoria tratamos la convexidad para los juegos difusos cooperativos así como el valor de Shapley. No siempre se puede trabajar con estos conceptos en los juegos difusos con ordenes generales, ya que necesitamos que se verifique que si a un número difuso se le suma y resta un mismo número difuso, el número resultante sea equivalente al número escogido. Para conseguir esta propiedad, en este capítulo nos restringiremos al uso de órdenes difusos centrales. En esta sección se demuestra, para este tipo de orden, que si un juego cooperativo difuso es convexo entonces su core es distinto de vacío. A continuación hemos analizado los juegos difusos de bancarrota que son un caso concreto de juegos convexos. Además, siguiendo con la imposición de que el orden difuso sea central, hemos generalizado el valor de Shapley para los juegos difusos, dejando claro que este valor no es un único número difuso, sino una clase de equivalencia, así que como valor de Shapley elegiremos cualquier representante de entre todos los números equivalentes. Al igual que en los juegos escalares, se prueba que si un juego difuso es convexo, el valor de Shapley pertenece al core.

En el último capítulo nos hemos dedicado a los juegos no cooperativos con pagos difusos. Hemos definido los distintos tipos de solución para estos juegos, equilibrios Pareto, equilibrios débilmente Pareto y equilibrios Pareto a la baja, y hemos dado la relación existente entre estos tres conjuntos de soluciones. También damos un teorema de existencia, en el cual, basándonos en el trabajo de Zhao [104], se demuestra que si los conjuntos de estrategias de cada jugador verifican condiciones de convexidad, acotación y son cerrados, y las funciones de pago cumplen condiciones de continuidad y concavidad entonces podemos asegurar la existencia de equilibrios Pareto.

A continuación nos hemos centrado en los juegos matriciales de suma nula, dando un procedimiento de resolución de estos juegos basado en resolver un problema de programación lineal difusa, de forma análoga al caso escalar. Si el orden usado por los dos jugadores para comparar los números difusos coincide, el problema de programación lineal difusa que resuelve el jugador I y el problema que resuelve el jugador II, para hallar sus correspondientes soluciones del juego, son problemas duales en el sentido difuso, acotándose los respectivos valores difusos del juego, como en el caso clásico, aunque la acotación no es mediante igualdad.

Un tipo de juegos que se puede estudiar tratándolo como juegos difusos son los juegos intervalares. En estos juegos el pago recibido por los jugadores y las coaliciones está bajo cierta incertidumbre, ya que conocemos entre qué dos valores puede oscilar, es decir, conocemos un intervalo de incertidumbre acotado en el que se valoran los parámetros del juego. En cada capítulo de esta memoria hemos hecho un tratamiento especial a este tipo de juegos debido a la gran relevancia de estos, obteniendo algunos resultados novedosos al tratarlos como juegos difusos.

Bibliografía

[1] Anand L., Shashishekhar N., Ghose D., Prasad U.R. (1995) *A Survey of Solution Concepts in Multicriteria Games.* Journal of the Indian Institute of Science, 75, 141-174.

[2] Aubin J.P. (1981) *Cooperative fuzzy games.* Mathematics of Operation Research, 6, 1-13.

[3] Aubin J.P. (1987) *Optima and equilibria: An introduction to Nonlinear Analysis.* Springer Verlag, Heidelberg.

[4] Balbas A., Jiménez P., Heras A. (1999) *Duality theory and slackness conditions in multiobjective linear programming.* Computer and Mathematics with Applications, 37, 101-109.

[5] Bector C.R., Chandra S., Vidyottama Vijay (2004) *Duality in linear programming with fuzzy parameters and matrix games with fuzzy pay-offs.* Fuzzy Sets and Systems, 146, 253-269.

[6] Bilbao J.M., Fernández F.R. (1999) *Avances en Teoría de Juegos con Aplicaciones Económicas y Sociales.* Secretariado de publicaciones. Universidad de Sevilla.

[7] Billera L.J. (1970) *Some theorems on the core of an n-person game without side payment.* SIAM Journal of Applied Mathematics, 18, 567-579.

[8] Blackwell O. (1956) *An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoff.* Pacific Journal of Mathematics, 6, 1, 1-8.

[9] Borm P., van Megen F., Tijs S.H. (1999) *A perfectness concept for multicriteria games.* Mathematical Methods of Operations Research, 49, 3, 401-412.

[10] Borm P., Hamers H., Hendrickx R. (2001) *Operations Research Games: A survey.* TOP, 9, 139-216.

[11] Borm P., Tijs S.H., Aarssen van den J.C.M. (1988) *Pareto Equilibria in Multiobjective Games.* En B. Fuchssteiner, T. Lengauer, H.J. Skaka (eds.) Methods of Operations Research (60), 313-323.

[12] Borm P., Garcia-Jurado I., Potters J., Tijs S.H. (1996) *An Amalgation of Games.* European Journal of Operations Research, 89, 570-580.

[13] Bortolan G., Degani P. (1985) *A Review of Some Methods for Ranking Fuzzy Subsets.* Fuzzy Sets and Systems, 15, 1-19.

[14] Branzei R., Dimitrov D., Tijs S. (2005) *Models in Cooperative Game Theory.* Springer-Verlag, Berlin Heideberg.

[15] Campos L.(1989) *Fuzzy linear programming models to solve fuzzy matrix games.* Fuzzy Sets and Systems, 32, 275-289.

[16] Campos L., González A. (1991) *Fuzzy Matrix Games Considering the Criteria of the Players.* Kybernetes, Vol 20, No 1, 17-28.

[17] Carpente L., Casas-Méndez B., García-Jurado I., Van den Novweland A. (2005) *Interval Values for Strategic Games in Which Players Cooperate.* Workshop on new models in cooperative games theory, January 2006, Seville.

[18] Chandra S., Prasad M.V.D. (1992) *Constrained Vector Valued Games and Multiobjective Programming.* Opsearch, 29, 1, 1-10.

[19] Charnes A., Cooper W.W., Huang Z.M., Wei Q.T. (1987) *Multiple-payoff constrained n-person Games over Cones.* Reseach Report 583, Center for Cybernetic Studies, University of Texas at Austin.

[20] Charnes A., Huang Z.M., Rousseau J.J., Wei Q.L. (1990) *Cone Extremal Solutions of Multi-payoff games with Cross-constrained Strategy Set.* Optimization, 21, 1, 51-69.

[21] Chen S.J., Hwang Ch.L.(1992) *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making.* Springer-Verlag, Berlin Heideberg.

[22] Chen Y-W., Larbani M. (2006) *Two-person zero-sum game approach for fuzzy multiple attribute decision making problems.* Fuzzy Sets and Systems, 157, 34-51.

[23] Cook W.D. (1976) *Zero-Sum Games with Multiple Goals.* Naval Research Logistics Quarterly, 23, 615-621.

[24] Corley H.W. (1984) *Duality theory for the matrix linear programming problem.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 104, 47-52 .

[25] Corley H.W.(1985) *Games with Vector Payoffs.* Journal of Optimization Theory and Applications, 47, 491-498.

[26] Delgado M., Verdegay J.L., Vila M.A. (1993) *Breve Historia de la Lógica Fuzzy.* Arbor CXLVI 573-574, 19-34.

[27] Delgado M., Verdegay J.L., Vila M.A. (1993) *Decisión en Ambiente Fuzzy.* Arbor CXLVI 573-574, 109-126.

[28] Driessen T.S.H. (1988) *Cooperative Games, Solutions and Applications.* Kluwer Academic Publishers, London.

[29] Dubey P. (1975) *On the Uniqueness of the Shapley Value.* International Journal of Game Theory, 4,3, 131-139.

[30] Dubois D., Prade H. (1978) *Operations on Fuzzy Numbers.* International Journal of Systems Science, 9, 613-626.

[31] Dubois D., Prade H. (1980) *Fuzzy Sets and Systems. Theory and Applications.* Vol. 144, Mathematics in Sciences and Engineering Series, Academic Press, New York.

[32] DUBOIS D., PRADE H. (2000) *Fundamentals of Fuzzy Sets.* The Hand Books of Fuzzy Sets Series. Kluwer Academic Publishers, Boston.

[33] EHRGOTT M. (2000) *Multicriteria Optimization.* Lectures Notes in Economic and Mathematical Systems 491. Springer.

[34] FERNÁNDEZ F.R., PUERTO J. (1996) *Vector Linear Programming in Zero-Sum Multicriteria Matrix Games.* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 89, 115-127.

[35] FERNÁNDEZ F.R., MÁRMOL A.M., MONROY L., PUERTO J. (2000) *Utopian Efficient Strategies in Multicriteria Matrix Games.* Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 455, 245-254. Springer Verlag.

[36] FERNÁNDEZ F.R., MONROY L., PUERTO J. (1998) *Multicriteria Goal Games.* Journal of Optimization Theory and Applications, 99, 2, 403-421.

[37] FERNÁNDEZ F.R., PUERTO J., MONROY L. (1998) *Two-person Non-zero Sum Games as Multicriteria Goal Games.* Annals of Operations Research, 84, 195-208.

[38] FERNÁNDEZ F.R., HINOJOSA M.A., MÁRMOL A.M., PUERTO J., (2000) *Solution Concepts in Multiple Criteria Linear Production Games.* Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer Verlag.

[39] FERNÁNDEZ F.R., PUERTO J. (2006) *Teoría de Juegos Multiobjetivo.* Universidad de Sevilla.

[40] FERNÁNDEZ F.R., HINOJOSA M.A., PUERTO J. (2002) *Core Concepts in Vector Valued Games.* Journal of Optimization Theory and Applications, 112, 331-360.

[41] FERNÁNDEZ F.R.,HINOJOSA M.A., PUERTO J. (2004)*Set-valuad TU-games.* European Journal of Operations Research, 159, 2,181-195.

[42] FERNÁNDEZ F.R., PUERTO J., ZAFRA M.J. (2002) *Cores of Stochastic cooperative games.* International Game Theory Review, 4, 3, 265-280.

[43] Forgó F., Szép J., Szidarovski S. (1999) *Introduction to the Theory of Games.* Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.

[44] Geoffrion, A.M. (1968) *Proper Efficiency and the Theory of Vector Maximization.* Journal of Mathematical Analysis and Applicattions, 22, 618–630.

[45] Ghose D., Prasad U.R. (1989) *Solution Concepts in Two-person Multicriteria Games.* Journal of Optimization Theory and Applications, 63, 2, 167-189.

[46] Ghose D. (1991) *A Necessary and Sufficient Condition for Pareto-optimal Security Strategies in Multicriteria Matrix Games.* Journal of Optimization Theory and Applications, 68, 463-480.

[47] González A., Vila M.A. (1991) *A Discrete Method for Studying Indifference and Order Relations Between Fuzzy Numbers.* Information Sciences, 56, 245-258.

[48] González A., Vila M.A. (1992) *Dominance Relation on Fuzzy Numbers.* Information Sciences, 64, 1-16.

[49] Hannan E.L. (1982) *On Games with Multiple Payoff.* International Journal of Game Theory, 11, 1, 13-15.

[50] Hannan,E.L. (1982) *Reformulating Zero-Sum Games with Multiple Goals.* Naval Research Logistics Quarterly, 29, 113-118.

[51] Hart S., Mas-Colell A. (1989) *Potential, value and consistency.* Econometrica, 57, 589-614.

[52] Herrera F., Verdegay J.L. (1995) *Three Models of Fuzzy Integer Linear Programming.* European Journal of Operational Research, 83, 581-593.

[53] Herrería R. (2001) *Programación, selección y control de proyectos en ambiente de incertidumbre.* Universidad de Granada.

[54] Hinojosa M.A. (2000) *Juegos Cooperativos Vectoriales con Información Adicional.* Tesis Doctoral. Edición Digital @ Tres, S.L.L..

[55] Inuiguchi M., Ramik J., Tanino T., Vlach M. (2003) *Satisficing solutions and duality in interval and fuzzy linear programming.* Fuzzy Sets and Systems, 135, 151-177.

[56] Jahn J. (1983) *Duality in vector optimization.* Mathematical Programming, 25, 343-355.

[57] Jahn J. (1984) *Scalarization in vector optimization.* Mathematical Programming, 29, 203-218.

[58] Jain, S., Bathia D. (1986) *Generalized Saddle Points in Multiobjective Bilinear Programming.* Opsearch, 23, 3, 142-150.

[59] Kacher F., Larbani M. (2006) *On a Multiobjective Non Cooperative Game with Fuzzy goals an Fuzzy Parameters.*

[60] Kakutani S. (1941) *A Generalization of Brouwer's Fixed Point.* Duke Mathematical Journal, 8, 457-459.

[61] Kannai Y. (1992) *The core and balancedness.* En R.J. Aumann and S. Hart (eds.) Handbook of Game Theory with Economic Applications, 355-395, North-Holland, Amsterdam.

[62] Kosko B. (2000) *El Futuro Borroso o el Cielo en un Chip.* Drakontos, Crítica, Barcelona.

[63] Lai Y.J., Hwang Ch.L.(1992) *Fuzzy Mathematical Programing.* Springer-Verlag, Berlin Heideberg.

[64] Maeda T. (2003) *On characterization of equilibrium strategy of two-person zero-sum games with fuzzy payoffs.* Fuzzy Sets and Systems, 139, 283-296.

[65] Monderer D., Shapley L.S. (1996) *Potential games.* Games and Economics Behavior, 14, 124-143.

[66] Monroy L. (1996) *Análisis de Juegos Bipersonales con Pagos Vectoriales* Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.

[67] Nash J.F. (1950) *Equilibrium Points of n-person Games.* Proccedings of the National Academy of Sciences, 36, 48-49.

[68] Nash J.F. (1951) *Non-cooperative Games.* Annals of Mathematics, 54, 286-295.

[69] Neumann von J., Morgenstern O. (1944) *Theory of Games and Economics Behaviour.* University Press, Princeton, New Jersey.

[70] Nieuwenhuis J.W. (1983) *Some Minimax Theorems in Vector-valued Functions.* Journal of Optimization Theory and Applications, 40, 3, 463-475.

[71] Nishizaki I., Sakawa M. (2001) *On Computational Methods for Solutions of Multiobjective Linear Production Programming Games.* European Journal of Operation Research, 129, 386-413.

[72] Nishizaki I., Sakawa M. (2001) *Fuzzy and Multiobjective Games for Conflict Resolution.* Physica-Verlag, Heidelberg.

[73] Owen G. (1975) *The Core of Linear production Games.* Mathematical Programming, 9,358-370.

[74] Owen, G.(1982) *Game Theory*, 2nd Edition, Academic Press, New York, New York.

[75] Owen G. (1995) *Game Theory.* Academic Press. San Diego, California.

[76] Puerto J., Infante R., Fernández F.R. (1999) *Refinements of the Concept of Equilibrium in Multiple Objective Continous Games.* Revista Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 93, 4, 457-362.

[77] Puerto J., Fernández F.R. (1999) *Refinements of the Concept of Equilibrium in Multiple Objective Games.* Proceeding of the International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis. W. Takahashi, T. Tanaka (eds.) Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 313-320. World Scientific Publishers.

[78] Puerto J., Fernández F.R., Hinojosa Y. (2008) *Partially Ordered Cooperative Games: Extended Core and Shapley Value.* Annals of Operation Research, 158,143-159.

[79] Puerto J., Fernández F.R. (1995) *Solution Concepts Based on Security Levels in Constrained Multicriteria Concave-convex Games.* Opsearch, 32, 16-30.

[80] Puerto J., Hinojosa M.A., Mármol A.M., Monroy L., Fernández F.R. (1999) *Solution Concepts for Multiple Objective n-person Games.* Investigaçao Operacional, 19, 193-209.

[81] Sawaragi, Y., Nakayama H., Tanino T. (1985) *Theory of Multiobjective Optimization.* Academic Press, Orlando, Florida.

[82] Shapley L.S. (1953) *A Value for n-Person Games-* En H.W. Kuhn, A. W. Tucker (eds.) Contributions to the Theory of Games II. Annals of Mathematics Studies 28, 307-317. Princeton University Press, Princenton, New Jersey.

[83] Shapley L.S. (1959) *Equilibrium Points in Games with Vector Payoff.* Naval Research Logistics Quarterly, 6, 1, 57-61.

[84] Shubik M. (1955) *The Uses of Game Theory in Mangement Science.* Management Science, 2,40-54.

[85] Singh C., Rueda N.(1994) *Constrained Vector Valued Games and Multiobjective Minmax Programming.* Opsearch, 31, 2, 144-154.

[86] Steuer R.E.(1986) *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application.* Willey, New York.

[87] Steuer R.E. (1995) *Manual for the ADBASE. Multiple Objective Linear Programming Package.* University of Georgia, Athens, Georgia.

[88] Tanaka T. (1991) *Two Types of Minimax Theorems for Vector-valued Functions.* Journal Optimization Theory and Applications, 68, 321-334.

[89] Tanaka T. (1992) *Minimax Theorems in Vector Optimization.* Tesis doctoral, Niigata University, Niigata.

[90] Tanaka T. (1994) *Generalized Quasiconvexities, Cone Saddle Points, and Minimax Theorem for Vector-valued Functions.* Journal Optimization Theory and Applications, 81, 355-377.

[91] Terano T., Asai K., Sugeno M. (1992) *Fuzzy Systems Theory and its Applications* Academic Press, Inc. London.

[92] Voorneveld M.(1999) *Pareto-optimal security strategies as minimax strategies of a standard matrix game.* Journal of Optimization Theory and Applications, 102, 203-210.

[93] Voorneveld M.(1999) *Potencial Games and Interactive Decisions with Multiple Criteria.* Tesis doctoral. CentER. Dissertation Series. Tilburg University.

[94] Voorneveld M., Vermeulen D., Borm P. (1999) *Axiomatizations of Pareto equilibria in multicriteria games.* Games and Economic Behavior, 28, 146-154.

[95] Wang S.Y. (1993) *Existence of a Pareto Equilibrium.* Journal of Optimization Theory and Applications, 79, 373-384.

[96] Yano H., Sakawa M. (1989) *A unified approach for characterizing Pareto optimal solutions of multiobjective optimization problems: The hyperplane method.* European Journal of Operations Research, 39 , 61-70.

[97] Zadeh L.A. (1962) *From Circuit Theory to System Theory.* Proceedings of Institute of Radio Engeneering, 50, 856-865.

[98] Zadeh L.A. (1965) *Fuzzy Sets.* Information and Control, 8, 338-353.

[99] Zadeh L.A. (1975) *The Concept of a Linguistic Variable and its Aplications to Aproximate Reasoning.* Part 1: Information Sciencies, 8, 199-249 Part 2; Information Sciencies, 8, 301-357 Part 3: Information Sciencies, 9, 43-80.

[100] Zadeh L.A. (1978) *Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility.* Fuzzy Sets and Systems, 1, 3-28.

[101] ZADEH L.A. (1992) *Representación del Conocimiento en Lógica Borrosa.* Aplicaciones de la Lógica Borrosa. Trillas E., Gutiérrez Rios J. (Eds.) Consejo superior de Investigaciones Científicas. Madrid.

[102] ZAFRA M.J. (2000) *Juegos cooperativos estocásticos.* Tesis doctoral. Universidad de Sevilla.

[103] ZELENY M. (1975) *Games with Multiple Payoff.* International Journal of Game Theory, 4, 4, 179-191.

[104] ZHAO J. (1991) *The Equilibria of a Multiple Objective Game.* International Journal of Game Theory, 20, 171-182.