

R/ 7941

T.S  
84

FORMAS DE EQUILIBRIO Y DIAGRAMAS DE  
BIFURCACIÓN DE PUENTES LÍQUIDOS Y GOTAS  
EN PRESENCIA DE CAMPOS ELÉCTRICOS

Memoria presentada por  
**Antonio Ramos Reyes**  
para optar al grado de  
Doctor en Física

Departamento de Electrónica y Electromagnetismo  
Facultad de Física  
Universidad de Sevilla

Sevilla, Junio de 1993

LBS 408532



UNIVERSIDAD DE SEVILLA

BIBLIOTECA DE LA FACULTAD DE FÍSICA

202

162

Sevilla, 24 JUN 1993

El Jefe del Departamento de Física,

*Alcarralaffille*

Memoria presentada por Antonio Ramos Reyes para optar al grado de Doctor en Física por la Universidad de Sevilla.

Sevilla, Junio de 1993

El Doctorando

*Antonio Ramos*

Antonio Ramos Reyes

El Director de la Tesis

*Antonio Castellanos*

Antonio Castellanos Mata



## Agradecimientos

Ante todo, quiero expresar mi gratitud al Director de esta Tesis, el Profesor Antonio Castellanos Mata, por los consejos, el apoyo constante y la ayuda que me ha brindado en la elaboración de esta Tesis Doctoral.

Agradezco a todos los compañeros del grupo de Electrodinámica, especialmente a Alberto, Paco y Helio, la colaboración que me han prestado a lo largo de todos estos años. Creo que estamos disfrutando de un muy buen ambiente de trabajo. A éste contribuyen notablemente los miembros del grupo de Microondas. A todos ellos, gracias.

Por último, quiero dar las gracias a mi familia por la comprensión y ánimo que me ha ofrecido.



A mis padres

# Índice

<b>Introducción</b>	<b>4</b>
<b>1 Formas líquidas sometidas a campos eléctricos</b>	<b>8</b>
1.1 Planteamiento general . . . . .	8
1.1.1 Modelo del sistema físico . . . . .	8
1.1.2 Ecuaciones dinámicas . . . . .	11
1.1.3 Condiciones para que exista equilibrio mecánico . . . . .	16
1.2 Problema de puentes líquidos . . . . .	21
1.2.1 Formulación del problema . . . . .	21
1.2.2 Comportamiento de las soluciones frente al campo aplicado . . . . .	24
1.3 Problema de gotas . . . . .	25
1.3.1 Formulación del problema . . . . .	25
1.3.2 Comportamiento de las soluciones frente al campo aplicado . . . . .	29
1.4 Estabilidad de las formas de equilibrio . . . . .	30
<b>2 Método numérico</b>	<b>34</b>
2.1 Introducción al Método de Elementos Finitos . . . . .	34
2.1.1 Método de Galerkin . . . . .	34
2.1.2 Método de Galerkin de Elementos Finitos . . . . .	38
2.2 Elementos finitos y funciones base . . . . .	43
2.2.1 Elementos unidimensionales . . . . .	44
2.2.2 Elementos bidimensionales . . . . .	45
2.3 Ecuaciones del MGEF. Puentes líquidos . . . . .	55
2.3.1 Discretización de la ecuación del potencial . . . . .	55
2.3.2 Ecuación de Young-Laplace . . . . .	58

2.3.3	Resolución del sistema total . . . . .	60
2.4	Detalles de la computación . . . . .	64
2.4.1	Obtención de $\Delta\Pi_E$ y $\partial\Delta\Pi_E/\partial f$ . . . . .	64
2.4.2	Formación del sistema total . . . . .	78
2.5	Ecuaciones discretas. Gotas . . . . .	81
2.5.1	Problema eléctrico . . . . .	81
2.5.2	Ecuación de Young-Laplace . . . . .	85
2.5.3	Sistema de ecuaciones y matriz jacobiana . . . . .	86
<b>3</b>	<b>Resultados numéricos</b>	<b>89</b>
3.1	Estimación de errores. Puentes . . . . .	89
3.1.1	Análisis sin campo eléctrico . . . . .	90
3.1.2	Análisis con campo eléctrico . . . . .	94
3.2	Resultados de puentes líquidos . . . . .	103
3.2.1	Ausencia de gravedad . . . . .	104
3.2.2	Efecto de la gravedad . . . . .	113
3.3	Estimación de errores. Gotas . . . . .	122
3.3.1	Análisis sin campo eléctrico . . . . .	122
3.3.2	Análisis con campo eléctrico . . . . .	123
3.4	Resultados de gotas . . . . .	128
3.4.1	Ángulo de contacto fijado . . . . .	128
3.4.2	Línea de contacto fijada . . . . .	141
<b>4</b>	<b>Resultados experimentales</b>	<b>146</b>
4.1	Montaje y método operativo . . . . .	147
4.1.1	Montaje experimental . . . . .	147
4.1.2	Método operativo. Puentes . . . . .	149
4.1.3	Método operativo. Gotas . . . . .	151
4.2	Constantes físicas de los líquidos y relación modelo-experimento . . . . .	151
4.2.1	Medida de constantes físicas . . . . .	151
4.2.2	Relación modelo-experimento . . . . .	155
4.3	Resultados y discusión . . . . .	157
4.3.1	Resultados para puentes líquidos . . . . .	157
4.3.2	Resultados para gotas . . . . .	163
<b>A</b>	<b>Obtención de la ecuación de Young-Laplace</b>	<b>172</b>



<i>ÍNDICE</i>	3
<b>B Singularidad del campo en la línea de contacto</b>	<b>178</b>
<b>C Puntas cónicas</b>	<b>181</b>

# Introducción

El presente trabajo se enmarca dentro de la Electrohidrodinámica, o estudio de fluidos en presencia de campos electrostáticos. Más concretamente, trata sobre el efecto conjunto de fuerzas capilares y dieléctricas.

Los fenómenos capilares forman parte de nuestra experiencia cotidiana, sirvan como ejemplos las múltiples formas que adquiere una gota de agua o la ascensión de líquidos por tubos estrechos. Los intentos de explicación de los fenómenos capilares se remontan al menos hasta Leonardo da Vinci. No fue, sin embargo, hasta el siglo XVIII cuando se descubrió que eran la manifestación de una interacción que aparece cuando dos medios materiales están en contacto sin mezclarse. En 1751, Segner introduce el concepto de tensión superficial, pero no es hasta principios del siglo XIX cuando aparece una teoría consistente capaz de hacer predicciones científicas en los escritos de Young y Laplace. Young en 1805 formuló la teoría matemática de la capilaridad asociando la tensión superficial de la interfase entre dos líquidos al efecto de una membrana elástica. Laplace en 1806 dio una visión más profunda basada en la interacción de las moléculas próximas a la interfase. La teoría fue luego más sólidamente fundamentada por Gauss en 1830 haciendo consideraciones energéticas, asignando una energía potencial a la interfase que es proporcional al área de ésta. La constante de proporcionalidad se conoce como tensión superficial.

A lo largo del siglo pasado, la teoría fue activamente investigada por famosos científicos. Así, el físico belga Plateau realizó los primeros experimentos con meniscos líquidos en ambientes de gravedad reducida gracias a sumergir éstos en un baño de densidad similar [Plateau, 1873]. La técnica conocida como baño de Plateau es ampliamente utilizada hoy en día para simular en tierra ambientes de microgravedad. Bashforth y Adams presentaron uno de los primeros resultados en formas de tablas sobre formas axisi-

métricas [Bashforth, 1883]. El problema de la estabilidad de estas formas de equilibrio fue abordado por primera vez por Duprez de forma experimental [Duprez, 1851, Duprez, 1854]. Estudios teóricos sobre la estabilidad fueron realizados por Rayleigh en el caso de una interfase plana [Rayleigh, 1900], o de la configuración cilíndrica [Rayleigh, 1892].

El problema de alguna forma perdió interés en la primera mitad de este siglo. Sin embargo, el advenimiento del ordenador ampliando las posibilidades de investigación numérica, el desarrollo de las teorías matemáticas de superficies mínimas, la tecnología espacial abriendo la posibilidad de experimentación en ambientes de microgravedad sin el baño exterior, y las aplicaciones técnicas de fenómenos superficiales a la industria, han conducido a una renovada actividad en multitud de frentes. En particular, cabe citar los trabajos de [Taylor, 1950], [Chandrasekhar, 1961], [Pitts, 1973], [Pitts, 1974], [Padday, 1971], [Michael, 1977], [Martínez, 1976] sobre formas de equilibrio y su estabilidad. El estudio de la estabilidad y dinámica de pequeñas oscilaciones de gotas líquidas cautivas sometidas a rotación ha sido abordado en [Brown, 1980] y [Busse, 1984]. En ambientes de gravedad reducida destacan los trabajos sobre dinámica de puentes líquidos y gotas cautivas de [Strani, 1985], [Meseguer, 1985] y [Sanz, 1985]. Más recientemente, en el caso de gravedad arbitraria ha aparecido [Gañán, 1991]. En [Perales, 1990] se incluye una revisión bibliográfica sobre la estática y dinámica de la zona flotante. Una excelente revisión de los fenómenos capilares puede encontrarse en [Myshkis, 1987].

Las interfases sometidas a campos eléctricos han sido también objeto de un intensivo estudio. Franklin y posteriormente Rayleigh estudiaron los efectos de las cargas y los campos eléctricos sobre las gotas [Franklin, 1751], [Rayleigh, 1882]. El análisis teórico de Rayleigh sobre el límite de estabilidad de una gota esférica, conductora, cargada (una aproximación a una gota de lluvia) inauguró una centuria de investigaciones sobre las formas y la estabilidad de gotas cargadas e interfases electrificadas en general y marcó el comienzo de la Electrohidrodinámica [Melcher, 1969]. El interés en los efectos del campo eléctrico sobre las formas líquidas ha seguido creciendo en las últimas décadas debido a que estos efectos son centrales en áreas de la ciencia y tecnología tan diversas como la física nuclear [Bohr, 1939], [Cohen, 1974], [Pelekasis, 1990], la meteorología [Sartor, 1969], [Beard, 1989], la ingeniería química [Chang, 1985], [Basaran, 1989b], y el procesamiento de materiales en gravedad reducida [Carruthers, 1983], [Rhim, 1989]. Así, cabe mencionar los

trabajos de [Nayyar, 1960] sobre la estabilidad de chorros dieléctricos, los de [Rosenkilde, 1969], [Torza, 1971], [Miksis, 1981], [Cheng, 1984], [Basaran, 1989a], [Wohlhuter, 1992] sobre gotas cargadas y dieléctricas, los de [Taylor, 1964b], [Melcher, 1971], [Saville, 1971] sobre chorros electrificados, y la profunda revisión sobre los fenómenos electromecánicos que aparece en [Melcher, 1981].

Atendiendo a estos estudios, se observa que, en general, el efecto de las fuerzas dieléctricas sobre las interfases es tratar de alinear éstas con el campo aplicado. De este modo, campos paralelos a la interfase tienden a estabilizarla mientras que campos perpendiculares tienden a desestabilizarla. Este hecho unido al interés de la configuración de puente líquido motivó que en nuestro grupo de investigación se incluyera un campo eléctrico axial para aumentar la estabilidad de las columnas líquidas. La aplicación del campo eléctrico axial permitió alcanzar esbelteces muy superiores al límite de estabilidad obtenido por Rayleigh para la columna cilíndrica [González, 1989]. El alargamiento de los puentes líquidos es interesante porque amplía las posibilidades de estudio de esta configuración a puentes de gran esbeltez. Esto, por ejemplo, permitiría comparar la dinámica y ruptura de puentes muy esbeltos con las de chorros en experimentos bastante controlados. Desde el punto de vista técnico ofrece la posibilidad de aumentar la velocidad del procesado de materiales en ambientes de microgravedad, siempre que éstos sean aislantes.

El trabajo que aquí se presenta trata sobre las formas de equilibrio y la estabilidad de puentes líquidos y gotas dieléctricas sometidos a un campo eléctrico. Los principales objetivos del trabajo han sido:

- Extender el estudio de las formas de equilibrio y la estabilidad de puentes líquidos sometidos a un campo eléctrico axial a formas de volumen arbitrario (diferentes del volumen cilíndrico) y sometidas a valores finitos del número de Bond. Los estudios hasta ahora realizados eran locales en torno a la forma cilíndrica [González, 1991]. Se explora el espacio de parámetros constituido por la esbeltez, el número de Bond, el número de Bond eléctrico, la razón de permitividades y el volumen.
- Estudiar las formas de equilibrio y la estabilidad de las gotas dieléctricas en presencia de campos eléctricos investigando el conjunto de parámetros formado por la razón de permitividades, el número de Bond

eléctrico y el ángulo de contacto (gotas de apoyo libre) o el radio de contacto (gotas ancladas).

- Elaborar una serie de programas basados en el Método de Elementos Finitos para encontrar las formas de equilibrio de puentes líquidos y gotas ya que, en general, no se pueden tratar analíticamente.
- Realizar una serie de experimentos para comprobar la adecuación de nuestros modelos teóricos. En el caso de puentes, principalmente, encontrar los límites de estabilidad experimentales. En el caso de gotas, encontrar las formas de equilibrio de éstas.
- Determinar la tensión interfacial en condiciones de microgravedad mediante la comparación de las formas de equilibrio numéricas y experimentales del caso de gotas.

El problema de un volumen líquido dieléctrico entre placas planas a diferente potencial se plantea en el primer capítulo de esta Tesis. Se caracteriza el sistema físico y se presenta una serie de condiciones para que existan soluciones de equilibrio.

En el segundo capítulo se describe la aplicación del Método de Elementos Finitos a nuestro problema. Se muestra brevemente en qué consiste el método en general para después centrarlo a nuestro problema. Además, se expone cómo se han trazado los diagramas de bifurcación gracias a una combinación de un método de continuación y la determinación de los puntos de bifurcación o de retorno.

Los resultados numéricos y su discusión se presentan en el tercer capítulo. Primero se hace un estudio de la fiabilidad de las soluciones numéricas y a continuación se presentan los resultados sobre las formas de equilibrio y los diagramas de bifurcación de puentes líquidos y gotas.

En el cuarto capítulo se describe una serie de experimentos llevados a cabo en el laboratorio de Electrohidrodinámica sobre estas configuraciones en condiciones de gravedad reducida. Se discuten los experimentos y se comparan con las predicciones teóricas.

# Capítulo 1

## Formas líquidas sometidas a campos eléctricos

En este capítulo presentamos el problema de las formas líquidas en presencia de campos eléctricos. En primer lugar, se caracteriza el sistema físico, se formula el problema con cierta generalidad y se dan las condiciones para que existan soluciones de equilibrio. A continuación, se presentan los problemas concretos sobre los que trata este trabajo, los puentes líquidos y las gotas, y se indican los parámetros relevantes. Por último, se expone un breve apunte sobre los diagramas de bifurcación que nos van a aparecer y la determinación de la estabilidad de las formas de equilibrio a partir de éstos.

### 1.1 Planteamiento general

#### 1.1.1 Modelo del sistema físico

Consideremos una masa líquida aislante confinada por las fuerzas de tensión superficial que está situada entre dos electrodos sometidos a una diferencia de potencial. Nuestro interés es el estudio de su forma de equilibrio y de su estabilidad. Las configuraciones que pretendemos estudiar se dividen genéricamente en puentes líquidos, cuando la masa fluida conecta los dos electrodos, y gotas apoyadas, cuando descansa sobre uno de ellos (ver figura 1.1).

La forma fluida puede estar rodeada de un líquido exterior que es inmiso-

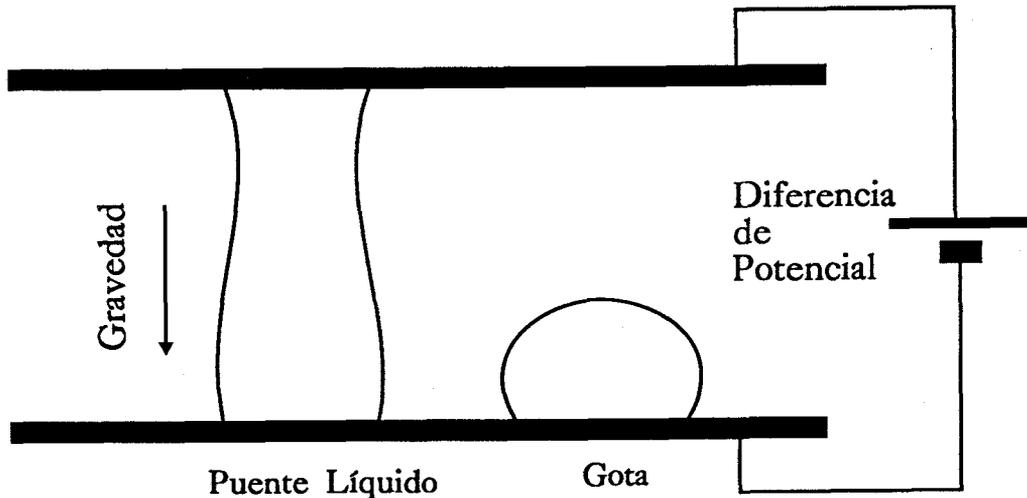


Figura 1.1: Esquema de un puente líquido y de una gota situados entre dos electrodos sometidos a una diferencia de potencial.

cible con ella. Ambos líquidos son incompresibles, con lo que el volumen del puente líquido o de la gota está fijado.

Los líquidos bajo nuestro estudio son homogéneos y al no considerar gradientes de temperatura ni de concentración las propiedades físicas tales como la densidad, la permitividad eléctrica, la conductividad, la viscosidad y la tensión superficial son uniformes. Son líquidos aislantes dieléctricos, esto es, con conductividades muy pequeñas, de modo que las posibles corrientes eléctricas son también muy pequeñas. En consecuencia, los campos magnéticos generados por ellas son despreciables. En estas condiciones si los campos son cuasiestacionarios estamos en el dominio de la Electrohidrodinámica (EHD) [Melcher, 1981].

Las fuerzas a que está sometido el volumen fluido serán de origen capilar y eléctrico, admitiendo además la presencia de una aceleración gravitatoria en la dirección perpendicular a los electrodos.

### Dominio de la EHD

Veamos qué relaciones han de cumplir las magnitudes para que el campo eléctrico sea dominante. Para que estemos en el marco de la EHD la densidad de energía almacenada por el campo eléctrico ha de ser mucho mayor que



la energía almacenada por el campo magnético. Para medios lineales caracterizados por una permitividad eléctrica  $\epsilon$  y una permeabilidad magnética  $\mu$  ha de cumplirse que las densidades de energía satisfagan

$$\epsilon E^2 \gg B^2/\mu, \quad (1.1)$$

donde  $E$  y  $B$  son, respectivamente, las intensidades típicas de los campos eléctrico y magnético en nuestro problema.

Mediante las ecuaciones de Maxwell esta relación puede expresarse de una forma más concreta. Para medios lineales que cumplen la ley de Ohm,

$$\mathbf{j} = \sigma_c \mathbf{E}, \quad (1.2)$$

donde  $\mathbf{j}$  es la densidad de corriente y  $\sigma_c$  la conductividad eléctrica, las ecuaciones de Maxwell se escriben como

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = q, \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) = \sigma_c \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \mathbf{E}), \quad (1.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.6)$$

donde  $q$  es la densidad de carga libre y  $t$  es el tiempo.

La ecuación (1.4) nos proporciona un orden de la magnitud del campo magnético que es  $B \sim \mu \sigma_c l E$ , si sus fuentes vectoriales son las corrientes de carga libre, y  $B \sim l \mu \epsilon E / t_v$ , si éstas son las corrientes de desplazamiento. Aquí  $l$  y  $t_v$  son una longitud y un tiempo típicos de variación de las magnitudes. Por ejemplo,  $l$  puede ser el radio medio de la gota o del puente líquido y  $t_v$  puede ser el tiempo de variación del potencial supuesto que es generado por una fuente alterna.

Teniendo en cuenta la relación (1.1) y el tamaño típico de  $B$  creado por las corrientes libres, se ha de cumplir

$$\frac{\epsilon}{\sigma_c} \gg \mu \sigma_c l^2. \quad (1.7)$$

Esto es, el tiempo de relajación de las cargas  $t_r \equiv \epsilon/\sigma_c$  ha de ser mucho mayor que el tiempo de difusión magnética  $t_d \equiv \mu \sigma_c l^2$ . Puede además comprobarse

que de la desigualdad anterior se tiene

$$\frac{\epsilon}{\sigma_c} \gg l\sqrt{\epsilon\mu} \gg \mu\sigma_c l^2, \quad (1.8)$$

donde aparece el tiempo de transmisión de una perturbación electromagnética,  $t_c \equiv l\sqrt{\epsilon\mu}$ , pues la velocidad de la luz en el medio es  $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ .

Si el campo  $B$  está originado por la corriente de desplazamiento debe ser, de la ecuación (1.4), el tiempo de variación típico mucho menor que el de relajación,  $t_v \ll t_r$ . Utilizando la expresión (1.1) llegamos a que el tiempo de variación ha de ser mayor que el de transmisión de la luz,  $t_v \gg t_c$ , para que estemos en el dominio de la EHD. Así pues, tenemos para este caso,

$$t_r \gg t_v \gg t_c \gg t_d. \quad (1.9)$$

En cualquiera de las dos situaciones anteriores el campo eléctrico es principalmente irrotacional pues el orden de magnitud del rotacional de  $E$  (obtenido a través de la ley de Faraday) dividido por el orden de magnitud de la derivada espacial de  $E$  es ó  $t_c^2/t_r t_v$ , ó  $t_c^2/t_v^2$ , ambos mucho menores que 1,

$$\frac{|\nabla \times E|}{E/l} \sim \frac{Bl}{Et_v} \ll 1. \quad (1.10)$$

En conclusión, un líquido es poco conductor si  $t_r \gg t_d$ . Si además el tiempo de variación de los campos cumple  $t_v \gg t_c$  entonces las ecuaciones que describen los campos son esencialmente las de la Electroestática junto con la conservación de la carga y podemos decir que estamos en el marco de la EHD.

### 1.1.2 Ecuaciones dinámicas

En su forma general el problema quedaría resuelto al obtener la forma de la interfase, los campos eléctricos, los de velocidades y los de presiones como funciones del tiempo. Las ecuaciones se han dividido genéricamente en ecuaciones en el volumen y en la interfase, y, junto con las condiciones de contorno de cada problema particular, nos determinan los campos anteriores.

**Ecuaciones en el volumen**

Por un lado tenemos las ecuaciones que describen los campos eléctricos:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (1.11)$$

que indica que el campo es irrotacional al ser los efectos del campo magnético despreciables,

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = q, \quad (1.12)$$

es la ley de Gauss para las fuentes escalares del campo, y

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (\sigma_c \mathbf{E} + q\mathbf{v}) = 0, \quad (1.13)$$

donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad del fluido, es la ecuación de conservación de la carga. Vemos que en la corriente de carga aparece un término debido a la convección de la carga.

Por otro lado, las ecuaciones que describen los campos de velocidades y de presiones para fluidos newtonianos e incompresibles son:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.14)$$

que es la ecuación de continuidad de las velocidades, y

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot (\mathcal{T}_v + \mathcal{T}_e), \quad (1.15)$$

que es la ecuación de Navier-Stokes, interpretación de la segunda ley de Newton para la partícula fluida. Aquí  $\rho$  es la densidad de masa,  $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$  es la derivada material,  $p$  es la presión,  $\mathbf{g}$  es la gravedad y  $\mathcal{T}_v$ ,  $\mathcal{T}_e$  son, respectivamente, los tensores de esfuerzos viscosos y eléctricos. Las expresiones del tensor de viscosidades y de la fuerza de volumen viscosa son [Batchelor, 1967]

$$\mathcal{T}_v = \eta [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t], \quad (1.16)$$

$$\mathbf{f}_v = \nabla \cdot \mathcal{T}_v = \eta \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (1.17)$$

donde el superíndice  $t$  denota transposición del tensor y  $\eta$  es la viscosidad dinámica. El tensor de tensiones eléctricas y las fuerzas de volumen están

dados por [Panofsky, 1977]

$$\mathcal{T}_e = \epsilon \mathbf{E}\mathbf{E} - \frac{1}{2}\epsilon(1-b)E^2\mathcal{I}, \quad (1.18)$$

$$\mathbf{f}_e = q\mathbf{E} - \frac{1}{2}E^2\nabla\epsilon + \frac{1}{2}\nabla(\epsilon bE^2), \quad (1.19)$$

siendo  $\mathbf{E}\mathbf{E}$  el producto diádico del campo eléctrico por sí mismo,  $\mathcal{I}$  el tensor unidad y  $b \equiv (\epsilon/\rho)(d\epsilon/d\rho)_T$  el parámetro de electrostricción ( $T$ , temperatura). En la expresión de la fuerza de volumen reconocemos los términos de fuerza de Coulomb, de esfuerzos dieléctricos y de electrostricción.

Si ahora definimos una presión efectiva  $\Pi$  que englobe las fuerzas que derivan de un potencial,

$$\Pi = p - \frac{1}{2}bE^2 + \rho gz, \quad (1.20)$$

(hemos elegido la dirección de la gravedad paralela al eje  $z$ ) la ecuación de Navier-Stokes puede escribirse como

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla\Pi + \eta\nabla^2\mathbf{v} + q\mathbf{E} - \frac{1}{2}E^2\nabla\epsilon. \quad (1.21)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (1.12), (1.13), (1.14) y que los medios son homogéneos la ecuación de conservación de la carga toma la forma

$$\frac{Dq}{Dt} + \frac{\sigma_c}{\epsilon}q = 0. \quad (1.22)$$

Cuya integración a lo largo del movimiento de la partícula fluida es  $q = q_0 e^{-t/t_r}$ . Esto es, siguiendo a una partícula fluida en su movimiento veremos que la carga que posee decae exponencialmente con un tiempo típico que es el tiempo de relajación  $t_r = \epsilon/\sigma_c$ . Más aún, un elemento de fluido no soportará ninguna densidad de carga a menos que esté conectado por una trayectoria con una fuente de carga. Si no existen fuentes de carga, ésta no existirá en el volumen. Sólo es posible una acumulación de carga en la interfase, allí donde existe un salto en la conductividad y en la permitividad.

Puesto que hemos considerado medios homogéneos y ausencia de fuentes de carga, tanto los esfuerzos dieléctricos como los Coulombianos son nulos en el volumen (ver ecuación (1.21)), concentrándose éstos en la interfase. El acoplamiento entre el campo eléctrico y el de velocidades se produce en la interfase.

**Ecuaciones en la interfase**

Describimos la interfase por el conjunto de puntos que cumple la ecuación  $F(\mathbf{x}, t) = 0$ . Surge una condición cinemática del hecho de que la interfase está definida siempre por las mismas partículas fluidas y, por tanto, la velocidad en la dirección normal a la interfase de las partículas es la velocidad normal de la interfase [Whitham, 1974]. Esta condición es equivalente a afirmar que

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F = 0, \quad (1.23)$$

Hacemos notar que las magnitudes como  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{E}$  ó  $P$  en esta sección están evaluadas para los puntos de la interfase. De la ecuación anterior se tiene implícitamente que la masa, y para líquidos incompresibles el volumen, a cada lado de la interfase se conserva pues no hay flujo de masa de un sitio al otro.

Definimos  $\Delta X \equiv X_{\text{ex}} - X_{\text{in}}$  como el salto de la magnitud  $X$  a través de la interfase, indicando los subíndices “ex” e “in” medios exterior e interior al volumen líquido respectivamente.

De las ecuaciones eléctricas en volumen (1.11), (1.12) y (1.13) nos aparecen, respectivamente, las siguientes ecuaciones en la interfase

$$\Delta E_t = 0, \quad (1.24)$$

$$\Delta[\epsilon E_n] = q_s, \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial q_s}{\partial t} + \Delta[\sigma_c E_n] + \nabla_s \cdot (q_s \mathbf{v}) = 0, \quad (1.26)$$

donde los subíndices  $t$  y  $n$  indican componente tangencial y normal a la interfase,  $q_s$  es la densidad de carga superficial, y  $\nabla_s$  es el operador nabla actuando en direcciones tangentes a la superficie.

De las ecuaciones mecánicas nos aparecen la continuidad de la velocidad a través de la interfase,

$$\Delta \mathbf{v} = 0, \quad (1.27)$$

y el salto de los esfuerzos en la interfase igualado a los esfuerzos capilares,

$$\mathbf{n} \cdot \Delta[-p\mathcal{I} + \mathcal{T}_v + \mathcal{T}_e] - \sigma(k_1 + k_2)\mathbf{n} = 0. \quad (1.28)$$

Aquí  $\mathbf{n}$  es la normal a la interfase en dirección del medio interior al hacia el exterior,  $\sigma$  es la tensión superficial entre ambos medios y  $k_1 + k_2$  es la suma

de las curvaturas principales de la interfase en cada punto, consideradas positivas si el centro del radio de curvatura pertenece a la región interior. El cálculo de  $\mathbf{n}$  y  $k_1 + k_2$  a partir de  $F(\mathbf{x}, t)$  es [Melcher, 1981]

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}, \quad (1.29)$$

$$k_1 + k_2 = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \right). \quad (1.30)$$

Escribiendo explícitamente los tensores de esfuerzos llegamos a

$$\begin{aligned} & \left( \Delta \Pi - \Delta \rho g z + \frac{1}{2} \Delta [\epsilon E^2] + \sigma(k_1 + k_2) \right) \mathbf{n} \\ & - \mathbf{n} \cdot \Delta [\epsilon \mathbf{E} \mathbf{E} + \eta (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t)] = 0 \end{aligned} \quad (1.31)$$

Notemos que las fuerzas de electrostricción no dan contribución en la interfase. Para medios incompresibles el término de electrostricción puede obviarse desde un principio redefiniendo la presión hidrostática [Melcher, 1969]. Será de importancia sólo en fluidos compresibles donde el cambio de presión hidrostática debido a la electrostricción produce variaciones en la densidad.

Es interesante obtener los esfuerzos que aparecen en (1.31) sobre la dirección normal a la interfase y sobre el plano tangente a la misma. Ello nos proporciona tres ecuaciones independientes, una en la dirección normal y dos en las direcciones tangenciales. Sea  $\mathbf{u}$  un vector arbitrario perteneciente al plano tangente, las proyecciones de los esfuerzos en las direcciones  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{u}$  son, respectivamente,

$$\Delta \Pi - \Delta \rho g z + \frac{1}{2} \Delta [\epsilon (E_t^2 - E_n^2)] + \sigma(k_1 + k_2) - 2 \Delta \left[ \eta \frac{\partial v_n}{\partial n} \right] = 0, \quad (1.32)$$

$$\Delta [\epsilon E_n E_u] + \Delta \left[ \eta \left( \frac{\partial v_u}{\partial n} + \frac{\partial v_n}{\partial u} \right) \right] = 0 \quad (1.33)$$

donde los subíndices  $n$  y  $u$  representan la componente de cualquier vector en esas direcciones y  $\partial/\partial n \equiv \mathbf{n} \cdot \nabla$ ,  $\partial/\partial u \equiv \mathbf{u} \cdot \nabla$ . Notemos la distinción entre  $E_t$  y  $E_u$ , el primero es la proyección de  $\mathbf{E}$  sobre el plano tangente,  $E_t^2 = E^2 - E_n^2$ , mientras que el segundo es la proyección de  $\mathbf{E}$  sobre alguna de las direcciones sobre ese plano,  $E_u = \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}$ .

### 1.1.3 Condiciones para que exista equilibrio mecánico

Una condición necesaria para que no exista movimiento es que las fuerzas de volumen puedan escribirse como el gradiente de un potencial. Si no fuese así un puro gradiente de presiones hidrostáticas no podría compensar las fuerzas y se generaría movimiento. Anteriormente hemos visto que en nuestro caso los esfuerzos en volumen pueden escribirse como un gradiente de potencial, ya que los términos  $q\mathbf{E}$  y  $E^2\nabla\epsilon$  son nulos en el volumen al no existir carga en volumen y al ser los medios homogéneos.

Aunque no exista carga en volumen sí puede existir carga acumulada en la interfase debido a la diferencia entre los tiempos de relajación en uno y otro medio. Esta presencia de cargas origina un esfuerzo tangencial, dado por  $E_n q_s$ , (ecuación (1.33)) que sólo puede compensarse mediante las tensiones viscosas generándose movimiento. Por otra parte, esfuerzos exclusivamente normales a la interfase pueden ser compensados por deformaciones de la interfase sin tener movimiento en volumen, pudiendo existir entonces equilibrio.

Para que no exista esfuerzo tangencial o bien  $E_t = 0$ , la interfase es una equipotencial, o bien  $\Delta[\epsilon E_n] = 0$ , con lo que no hay carga acumulada en la interfase. Para una gota la componente tangencial del campo puede ser cero siempre que el medio exterior tenga una conductividad mucho más pequeña que la gota. Esto es así porque en un tiempo del orden del tiempo de relajación de las cargas se habrán acumulado las cargas suficientes para que la superficie sea una equipotencial. Estaríamos en el estudio del equilibrio de las gotas conductoras en la presencia de un campo. Sin embargo, el campo tangente no puede ser cero en el caso de puentes líquidos, pues éste conecta dos superficies de equipotenciales distintas y necesariamente se tiene  $E_t \neq 0$ . En general, el movimiento del fluido que se genera tiene un efecto desestabilizante para los puentes líquidos [Saville, 1971]. Un esquema de estos esfuerzos tangenciales y de cómo son los flujos que se originan puede verse en la figura 1.2 para una superficie principalmente paralela al campo aplicado.

Para poder tener esfuerzos puramente normales se aplica en la práctica un campo alterno de manera que el tiempo de relajación de las cargas sea mucho mayor que el tiempo de variación del campo aplicado. De este modo, los efectos dieléctricos dominan a los de conducción pues no hay tiempo para que se acumulen cargas en la interfase. Además, el tiempo de variación ha

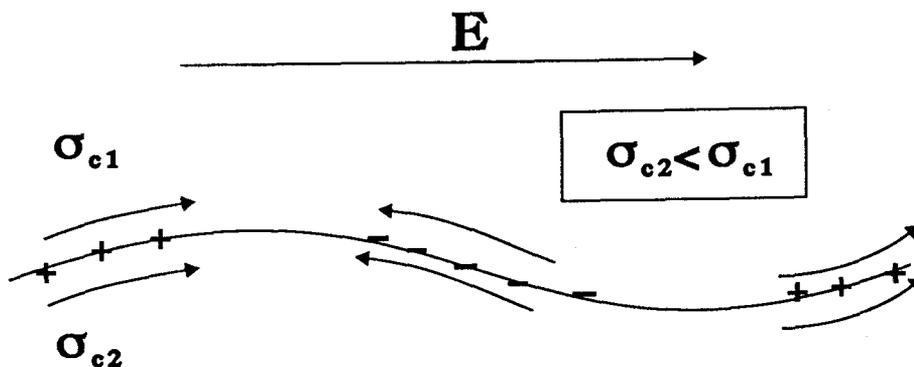


Figura 1.2: Esquema de los esfuerzos eléctricos tangenciales en una superficie paralela al campo.

de ser mucho menor que el tiempo típico de movimiento de la interfase para poder considerarla fija. Utilicemos las ecuaciones para ver el orden de los tiempos y de las fuerzas en juego.

### Campo alterno

Consideremos que hemos aplicado un campo alterno. Admitamos que no existe carga superficial y que la interfase no se mueve apreciablemente en el tiempo de variación del campo (posteriormente analizaremos qué implican estas condiciones). El campo en cualquier punto del sistema oscila con la frecuencia aplicada si no existe acoplamiento con el movimiento del fluido. Sea el campo en un punto de la interfase la parte real de  $\hat{\mathbf{E}}e^{i\omega t}$ , donde  $i$  es la unidad imaginaria y  $\omega$  la frecuencia aplicada. Admitimos que  $\hat{\mathbf{E}}$  es complejo, de modo que puede haber desfase entre sus componentes, describiendo una elipse con el paso del tiempo. Las condiciones de contorno sobre la interfase (1.26) se escriben para el fasor  $\hat{\mathbf{E}}$  como

$$\hat{E}_{1t} = \hat{E}_{2t}, \quad (1.34)$$

$$i\omega (\epsilon_2 \hat{E}_{2n} - \epsilon_1 \hat{E}_{1n}) + \sigma_{c2} \hat{E}_{2n} - \sigma_{c1} \hat{E}_{1n} = 0, \quad (1.35)$$

donde hemos usado los subíndices 1 y 2 para designar los distintos medios pero sin especificar si es el medio interior o exterior.

La densidad de carga acumulada en la interfase en forma fasorial es

$$\hat{q}_s = \epsilon_2 \hat{E}_{2n} - \epsilon_1 \hat{E}_{1n} = \frac{\frac{\sigma_{c1}\epsilon_2}{\omega} - 1}{i\omega \frac{\epsilon_2}{\sigma_{c2}} + 1} \epsilon_1 \hat{E}_{1n}. \quad (1.36)$$

Para que estemos en el caso puramente dieléctrico la densidad de carga libre acumulada  $|\hat{q}_s|$  habrá de ser mucho menor que la normal del vector desplazamiento,  $|\epsilon_1 \hat{E}_{1n}|$  ó  $|\epsilon_2 \hat{E}_{2n}|$ ,

$$\left| \frac{\hat{q}_s}{\epsilon_1 \hat{E}_{1n}} \right| < \frac{1}{\omega} \left| \frac{\sigma_{c1}}{\epsilon_1} - \frac{\sigma_{c2}}{\epsilon_2} \right| \ll 1. \quad (1.37)$$

Entonces, si  $\omega \gg |t_{r1}^{-1} - t_{r2}^{-1}|$ , la diferencia de las inversas de los tiempos de relajación de cada medio, podemos considerar que las componentes normales del vector desplazamiento son continuas a través de la interfase, esto es,  $\Delta[E_n] = 0$ .

El esfuerzo tangencial real medio en un periodo es

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2} \hat{E}_t^* \hat{q}_s\right] &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\hat{E}_{1n} \hat{E}_t^*] \frac{(\sigma_{c1}\epsilon_2 - \sigma_{c2}\epsilon_1)\sigma_{c2}}{(\omega\epsilon_2)^2 + (\sigma_{c2})^2} \\ &+ \frac{1}{2} \operatorname{Im}[\hat{E}_{1n} \hat{E}_t^*] \frac{(\sigma_{c1}\epsilon_2 - \sigma_{c2}\epsilon_1)\omega\epsilon_2}{(\omega\epsilon_2)^2 + (\sigma_{c2})^2}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

donde Re y Im significan *parte real* y *parte imaginaria*, respectivamente. Es de destacar que el esfuerzo medio en un periodo no es cero sino que es proporcional a  $(\omega t_s)^{-2}$  para  $\omega$  tendiendo a infinito, con  $t_s$  el menor de los tiempos de relajación. Notemos que para  $\omega$  tendiendo a infinito el desfase entre las componentes del campo tiende a cero y que  $\operatorname{Im}[E_{1t}^* E_{1n}]$  es proporcional al desfase entre componentes. Aunque el esfuerzo tangencial en un tiempo dado es del orden de  $\omega^{-1}$ , su promedio es proporcional a  $\omega^{-2}$ . Se tiene así que los esfuerzos eléctricos tangenciales medios son  $(\omega t_s)^{-2}$  veces más pequeños que los esfuerzos normales, que en este límite de frecuencia grande tienden a un valor independiente de  $\omega$ .

Hasta aquí no hemos considerado la posibilidad de fuentes de carga que originen que la densidad  $q$  sea distinta de cero en el volumen. Sin embargo, los campos necesarios en el laboratorio para obtener esfuerzos eléctricos comparables a los esfuerzos capilares<sup>1</sup> son del orden de unos cuantos kilovoltios

<sup>1</sup>En efecto, como  $\epsilon E^2 \sim \sigma/l$ , tomando valores típicos en el SI de la tensión superficial  $\sigma \sim 10^{-2}$ , de la distancia  $l \sim 10^{-2}$  y de la permitividad  $\epsilon \sim 10^{-11}$  se obtiene  $E \sim 3 \times 10^{-5}$ .

por centímetro. Para estos campos la inyección de carga desde los electrodos al volumen es posible. Los iones inyectados son transportados por el campo eléctrico con una velocidad relativa a la partícula fluida proporcional al campo aplicado,

$$\mathbf{v} = K\mathbf{E}, \quad (1.39)$$

donde  $K$  es la movilidad iónica. Si la longitud que penetra un ión en el volumen es mucho menor que la distancia típica del problema, entonces se puede considerar que toda la carga inyectada estará situada en una delgada capa cercana a los electrodos sin ningún efecto en el volumen. Dado que la distancia máxima que recorre un ión con un campo alterno es  $\delta = KE/\omega$ , la condición para que la capa sea suficientemente delgada es

$$\frac{\delta}{l} = \frac{KE}{\omega l} \ll 1, \quad (1.40)$$

que en unidades de tiempo se escribe como  $\omega^{-1} \ll t_i$ , con  $t_i \equiv l/KE$ . Aquí  $t_i$  es el tiempo que tarda el ión en recorrer la distancia típica  $l$ .

Para tener condiciones estáticas el tiempo de variación del campo ha de ser mucho más corto que el tiempo típico de movimiento de la interfase, en caso contrario se producirán oscilaciones de ésta. Al considerar una masa fluida en equilibrio con sus fuerzas capilares la presión hidrostática existente será del orden de  $\sigma/l$ . En una perturbación de la interfase del orden de  $l$  aparece un gradiente de presiones  $|\nabla p| \sim \sigma/l^2$ . Para un fluido no viscoso el término inercial de la ecuación de Navier-Stokes  $|\rho \partial \mathbf{v} / \partial t| \sim \rho l / t_m^2$  será del orden del gradiente de presiones. La comparación de estos dos términos nos proporciona un tiempo mecánico típico que es

$$t_m = \sqrt{\frac{\rho l^3}{\sigma}}. \quad (1.41)$$

En un fluido viscoso el término que ha de ser del mismo orden que el gradiente de presiones es  $\eta \nabla^2 \mathbf{v}$ , que conduce a un tiempo mecánico típico

$$t_m = \eta l / \sigma. \quad (1.42)$$

Si  $t_v \equiv \omega^{-1} \ll t_m$  la interfase no puede seguir al campo y, por tanto, los esfuerzos eléctricos sobre ésta se ven promediados en el tiempo.

Podemos ver ahora que la corriente de convección superficial de las cargas es despreciable. Para ello, notemos que

$$\frac{|\nabla_s \cdot (q_s \mathbf{v}_s)|}{|\omega \epsilon_1 E_1|} \sim \left| \frac{q_s v/l}{\epsilon_1 E_1 \omega} \right| \sim \frac{t_s^{-1} v/l}{\omega^2}. \quad (1.43)$$

La velocidad podría ser generada por los esfuerzos tangenciales, con lo cual sería proporcional a  $\omega^{-1}$  y la expresión anterior decrecería como  $\omega^{-3}$ . O podría ser debida a un movimiento de la interfase, en cuyo caso  $v/l = t_m^{-1}$  siendo la expresión mucho menor que 1.

Las condiciones para observar únicamente los efectos dieléctricos en el equilibrio de las formas líquidas se resumen en que el tiempo de variación del campo alterno ha de ser mucho más pequeño que los tiempos mecánicos, de relajación de las cargas y de vuelo de los iones, y mucho más grande que el tiempo de transmisión electromagnética y de difusión magnética,

$$t_d \ll t_c \ll t_v \ll t_m, t_r, t_i. \quad (1.44)$$

### Ecuaciones y energía potencial del equilibrio

Cuando se cumplen las condiciones anteriores y se ha llegado al equilibrio las ecuaciones de volumen se reducen a

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (1.45)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1.46)$$

$$\nabla \Pi = 0, \quad (1.47)$$

y las de la interfase a

$$\Delta E_t = 0, \quad (1.48)$$

$$\Delta[\epsilon E_n] = 0, \quad (1.49)$$

$$\Delta \Pi - \Delta \rho g z + \frac{1}{2} \Delta[\epsilon E_t^2 - \epsilon E_n^2] + \sigma(k_1 + k_2) = 0. \quad (1.50)$$

En esta situación la ecuación de equilibrio de tensiones, ecuación de Young-Laplace, también puede obtenerse por medio de un principio de mínima energía potencial. La expresión de esta energía es

$$\mathcal{U} = \sigma \int dS - \frac{\epsilon_{\text{ex}}}{2} \int_{V_{\text{ex}}} E^2 d\tau - \frac{\epsilon_{\text{in}}}{2} \int_{V_{\text{in}}} E^2 d\tau + \rho_{\text{ex}} g \int_{V_{\text{ex}}} z d\tau + \rho_{\text{in}} g \int_{V_{\text{in}}} z d\tau, \quad (1.51)$$

donde  $V_{\text{ex}}$  y  $V_{\text{in}}$  indican, respectivamente, los volúmenes exterior e interior y  $dS$  y  $d\tau$  son los diferenciales de área y de volumen. Los términos que aparecen son:

- La energía capilar que es proporcional al área de la interfase.
- La energía acumulada en el campo eléctrico cuando se mantiene el potencial constante. Hay que considerar el sistema fuente de potencial más condensador, y es igual y de signo contrario a la energía acumulada sólo por el condensador [Jackson, 1975].
- La energía potencial gravitatoria.

Aquí hemos admitido que las condiciones de contorno son de línea de contacto fijada (tipo Dirichlet) o que sólo existe una interfase; en el caso de ángulo de contacto fijado aparecen los términos de energía capilar asociados a las interfases sólido-líquido. La anulación de la primera variación de  $\mathcal{U}$  con respecto a todas las formas posibles que mantienen el volumen constante y satisfacen las condiciones de Dirichlet proporciona la ecuación de equilibrio (véase Apéndice A).

## 1.2 Problema de puentes líquidos

### 1.2.1 Formulación del problema

Consideremos un puente líquido aislante de volumen  $V$  anclado entre dos discos centrados de radio  $R$  que están situados en dos electrodos plano-paralelos separados una distancia  $L$  (ver figura 1.3). El espesor de estos discos es mucho menor que  $R$  ( $h \ll R$ ) y su única misión es mantener fija la línea de contacto, de modo que sea admisible un amplio rango de ángulos de contacto. Este puente líquido puede estar rodeado por otro fluido aislante e inmiscible con él. Nos preguntamos cuál es la forma que adquiere el puente líquido cuando se aplica una diferencia de potencial  $\Phi_0$  entre los electrodos y existe una aceleración gravitatoria  $g$  en la dirección axial.

Como simplificación estudiamos formas axisimétricas. En este sentido hacemos notar que formas no axisimétricas son de importancia cuando se estudia el efecto de la rotación, en la que aparece el llamado modo C [Brown, 1980]. Para puentes líquidos sin rotación los modos de bifurcación no

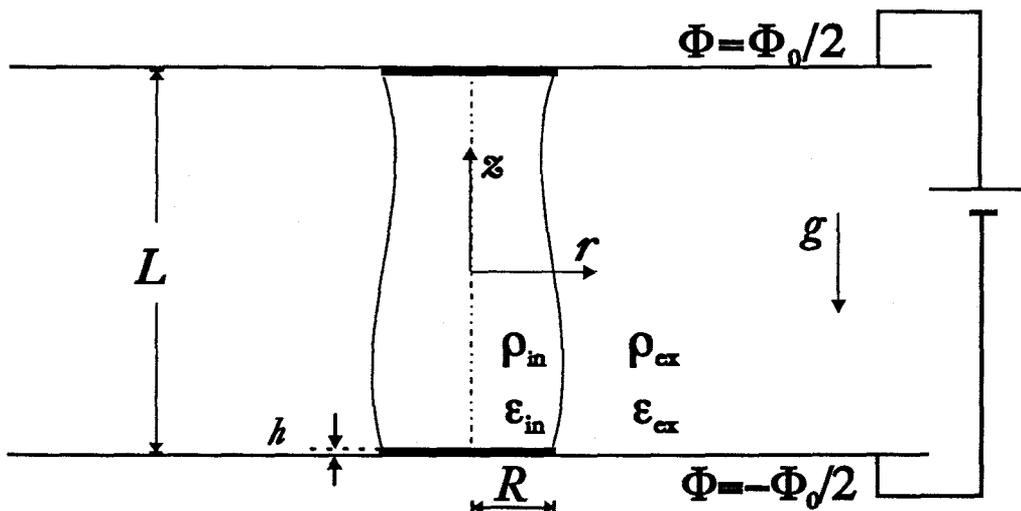


Figura 1.3: Esquema de puente líquido entre placas plano-paralelas sometidas a una diferencia de potencial.

axisimétricos son importantes cuando se estudia el máximo volumen estable para una altura dada [Bezdeneynykh, 1992]. Esta inestabilidad se caracteriza por la aparición de un abultamiento. Para muchos propósitos nuestro estudio es suficiente ya que estamos interesados en incrementar la altura del puente manteniendo el volumen y el número de Bond fijos. Este proceso típicamente nos conduce a la curva de mínimo volumen estable caracterizada por presentar modos inestables axisimétricos (véanse las figuras 4 y 5 en [Bezdeneynykh, 1992]).

Adoptamos coordenadas cilíndricas para describir las magnitudes. Así la forma axisimétrica de la interfase se describe apropiadamente por  $F(r, z) \equiv r - f(z) = 0$ , donde  $r$  es la distancia al eje de simetría y  $z$  la coordenada axial.

En lo que sigue las longitudes estarán escaladas con  $R$ , los campos eléctricos con  $E_\infty = \Phi_0/L$ , las presiones con  $\sigma/R$  y las permitividades con la permitividad del líquido interior  $\epsilon_{in}$ .

Puesto que el campo eléctrico es irrotacional y no existe carga en volumen, el potencial eléctrico del que deriva el campo,  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ , ha de cumplir la ecuación de Laplace en cada medio

$$\nabla^2\Phi = 0. \tag{1.52}$$

Teniendo en cuenta (1.30) la ecuación de Young-Laplace toma la forma

$$\frac{1 + f_z^2 - f f_{zz}}{f(1 + f_z^2)^{3/2}} + \Delta\Pi + \chi\Delta\Pi_E + Bz = 0, \quad (1.53)$$

donde el subíndice  $z$  indica derivada respecto de esta coordenada y  $\Pi_E \equiv \epsilon(E_t^2 - E_n^2)/2$ . Aquí  $\epsilon = 1$  para el interior del puente líquido y  $\epsilon = \beta$  en el exterior.

Las condiciones de contorno que han de cumplir las formas de equilibrio son:

- potencial fijado en los electrodos,

$$\Phi(r, -\Lambda) = -\Lambda, \quad \Phi(r, \Lambda) = \Lambda; \quad (1.54)$$

- línea de contacto fijada en los electrodos,

$$f(-\Lambda) = f(\Lambda) = 1; \quad (1.55)$$

- el potencial tiende al potencial no perturbado lejos del eje,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r, z) = z; \quad (1.56)$$

- regularidad del potencial en el eje de simetría,

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=0} = 0; \quad (1.57)$$

- continuidad del potencial y de las normales del vector desplazamiento en la interfase,

$$\Phi_{\text{in}} = \Phi_{\text{ex}}, \quad (1.58)$$

$$\frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial n} = \beta \frac{\partial \Phi_{\text{ex}}}{\partial n}; \quad (1.59)$$

- condición de volumen fijado,

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} f^2 dz = \frac{V}{\pi R^3} = 2\Lambda\tau. \quad (1.60)$$

En el conjunto de ecuaciones y condiciones de contorno han aparecido cinco parámetros adimensionales independientes:

- Esbeltez,  $\Lambda \equiv L/2R$ , es la razón entre la altura y el diámetro del puente.
- Número de Bond,  $B \equiv (\rho_{\text{in}} - \rho_{\text{ex}})gR^2/\sigma$ , es la razón entre las fuerzas gravitatorias y las fuerzas capilares.
- Número de Bond eléctrico,  $\chi \equiv \epsilon_{\text{in}}E_{\infty}^2R/\sigma$ , es la razón entre los esfuerzos eléctricos y los capilares.
- Permitividad relativa,  $\beta \equiv \epsilon_{\text{ex}}/\epsilon_{\text{in}}$ , es la razón entre permitividades.
- Volumen reducido,  $\tau \equiv V/\pi R^2L$ , es la razón entre el volumen del puente y el volumen del cilindro de iguales altura y anclaje.

El conjunto de incógnitas  $f(z)$ ,  $\Phi(r, z)$ ,  $\Delta\Pi$  es pues función del conjunto de parámetros  $\Lambda$ ,  $B$ ,  $\chi$ ,  $\beta$ ,  $\tau$ . La solución más simple para cualquier valor de  $\chi$ ,  $\beta$ ,  $\Lambda$  fijados  $\tau = 1$  y  $B = 0$  es la de cilindro recto definida por:

$$\begin{aligned} f(z) &= 1, \\ \Phi(r, z) &= z, \\ \Delta\Pi &= -1 - \frac{\beta - 1}{2}\chi. \end{aligned} \tag{1.61}$$

Aun siendo solución sólo es estable para determinado rango de esbelteces. Los puentes con formas y volúmenes distintos del cilindro se describirán comparándolos con la solución cilíndrica.

### 1.2.2 Comportamiento de las soluciones frente al campo aplicado

Tomemos un puente líquido de  $\beta < 1$  en presencia de gravedad y apliquémosle un campo eléctrico. En la figura 1.4 se representan el campo impuesto, las cargas de polarización y los campos que originan estas cargas, que son una perturbación del campo constante. Los esfuerzos dieléctricos se dirigen siempre del medio que tiene más permitividad al que tiene menos [Jackson, 1975].

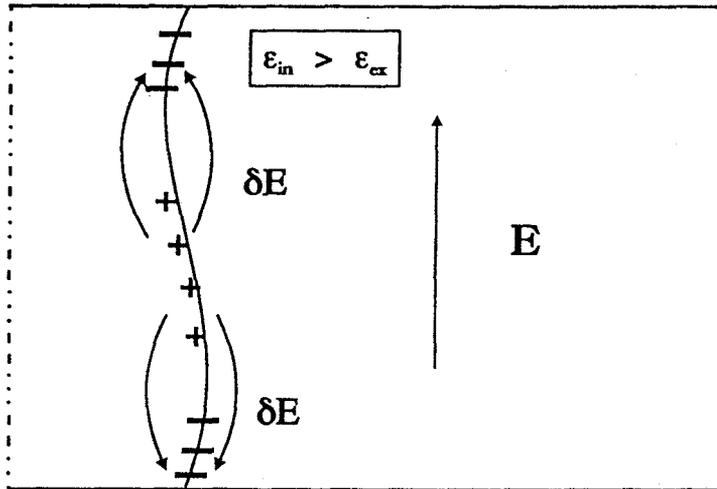


Figura 1.4: Distribuciones de la carga de polarización y del campo eléctrico para un puente líquido sometido a un campo tangente.

Como en la zona curvada superior el campo total es más intenso que en la zona curvada inferior el esfuerzo normal dieléctrico es mayor en la parte superior que en la inferior, ambos en dirección saliente. Por otro lado, la restricción de volumen obliga a la aparición de un salto de presiones hacia el interior que es constante en toda la superficie. Se tiene pues un esfuerzo neto saliente en la zona superior y un esfuerzo neto entrante en la zona inferior que tiende a alinear la interfase con el campo aplicado. Cuando  $\beta$  es mayor que 1 la distribución de cargas de polarización es de signo contrario a la distribución anterior. Pero ahora los esfuerzos dieléctricos se dirigen hacia el interior, el medio de menor permitividad. De este modo, el efecto de alineamiento de la interfase con el campo se mantiene.

## 1.3 Problema de gotas

### 1.3.1 Formulación del problema

Consideremos que la masa líquida dieléctrica de volumen  $V$  situada entre los electrodos plano-paralelos separados una distancia  $L'$  está apoyada sólo en uno de ellos (ver figura 1.5). Nos interesa conocer la forma que adquiere

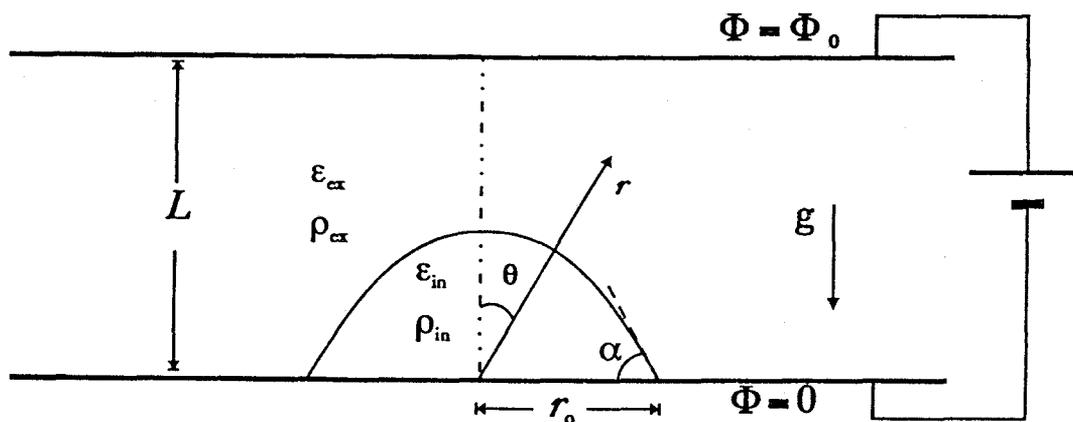


Figura 1.5: Esquema de gota entre placas plano-paralelas sometidas a una diferencia de potencial.

cuando existe una diferencia de potencial  $\Phi_0$  entre las placas. Estudiamos dos tipos de gotas distintas: gotas con el ángulo de contacto fijado, que llamaremos gotas apoyadas, y con la línea de contacto fijada, que llamaremos gotas ancladas.

Nos restringimos al estudio de gotas con formas axisimétricas. Formas no axisimétricas pueden ser de importancia para gotas en presencia de gravedad, ya que existen modos inestables no axisimétricos [Michael, 1977, Gañán, 1989]. Estos modos de desestabilización no son muy importantes en condiciones de gravedad pequeña. Nosotros en el estudio teórico no nos hemos marcado una descripción del efecto de la gravedad, ya que es realmente pequeño para números de Bond próximos a cero. Algo totalmente distinto del caso de puentes líquidos donde el efecto de una gravedad residual es muy importante.

Describimos las magnitudes en coordenadas esféricas. Así la interfase de la gota viene dada por  $F(r, \theta) = r - f(\theta)$ , donde  $r$  es la coordenada radial y  $\theta$  el ángulo polar.

Adimensionalizamos las longitudes con el radio de la hemiesfera del mismo volumen que la gota  $R = (3V/2\pi)^{1/3}$ , los campos eléctricos con el campo lejos del eje  $E_\infty = \Phi_0/L'$ , las presiones con  $\sigma/R$  y las permitividades con la del

líquido interior  $\epsilon_{\text{in}}$ .

Las ecuaciones de Laplace para el potencial y de Young-Laplace para el equilibrio de tensiones se escriben como

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad (1.62)$$

$$k_1 + k_2 + \Delta \Pi + \chi \Delta \Pi_E + B f \cos \theta = 0, \quad (1.63)$$

donde la suma de curvaturas viene dada por

$$k_1 + k_2 = \frac{2f^2 + 3f_\theta^2 - \cot \theta (f f_\theta + f_\theta^3 f^{-1}) - f_{\theta\theta} f}{(f^2 + f_\theta^2)^{3/2}}. \quad (1.64)$$

Aquí el subíndice  $\theta$  representa derivada respecto de esa coordenada. Y las condiciones de contorno toman la forma:

- potencial fijado en los electrodos

$$\Phi\left(r = \frac{L}{\cos \theta}, \theta\right) = L, \quad (1.65)$$

$$\Phi\left(r, \theta = \frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad (1.66)$$

- potencial lineal lejos del eje de simetría

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r, \theta) = r \cos \theta; \quad (1.67)$$

- regularidad del potencial en el eje

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = 0; \quad (1.68)$$

- continuidad del potencial y de las normales del vector desplazamiento en la interfase,

$$\Phi_{\text{in}} = \Phi_{\text{ex}}, \quad (1.69)$$

$$\frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial n} = \beta \frac{\partial \Phi_{\text{ex}}}{\partial n}; \quad (1.70)$$

- condición de volumen fijado,

$$\int_0^{\pi/2} f^3 \sin \theta d\theta = \frac{V}{2\pi R^3/3} = 1; \quad (1.71)$$

- ausencia de singularidad en el punto más alto de la gota axisimétrica

$$f_\theta(0) = 0; \quad (1.72)$$

- si la gota tiene la línea de contacto fijada

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = r_0, \quad (1.73)$$

y si tiene el ángulo de contacto fijado

$$\frac{f}{f_\theta} = \tan \alpha. \quad (1.74)$$

Donde nos han aparecido los parámetros adimensionales

- Distancia entre placas,  $L$ , medida en unidades de  $R$ .
- Número de Bond,  $B \equiv (\rho_{\text{in}} - \rho_{\text{ex}})gR^2/\sigma$ .
- Número de Bond eléctrico,  $\chi \equiv \epsilon_{\text{in}}E_\infty^2 R/\sigma$ .
- Permitividad relativa,  $\beta \equiv \epsilon_{\text{ex}}/\epsilon_{\text{in}}$ .
- Ángulo de contacto,  $\alpha$ . Si fijamos este parámetro el radio de la línea de contacto es libre.
- Radio de contacto,  $r_0$ , medido en unidades de  $R$ . Fijado este parámetro el ángulo de contacto ha de ser libre.

En total son cinco los parámetros independientes que determinan  $f$ ,  $\Phi$  y  $\Delta\Pi$ .

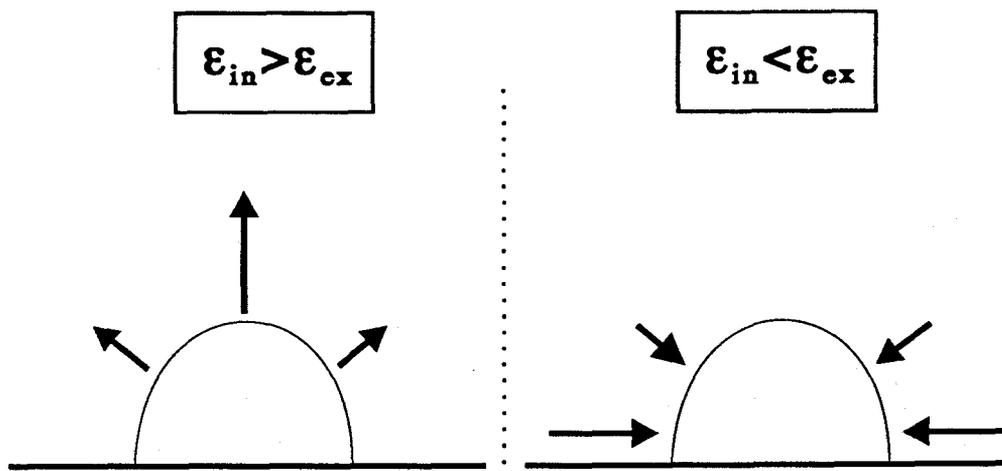


Figura 1.6: Esquema de esfuerzos dieléctricos para una gota hemiesférica.

### 1.3.2 Comportamiento de las soluciones frente al campo aplicado

En ausencia de esfuerzos aplicados eléctricos y gravitatorios la forma de la gota es la de una sección esférica. Si la gota tiene un ángulo de contacto  $\alpha = \pi/2$  o un radio de contacto  $r_0 = 1$ , entonces es una semiesfera. Admitamos que la distancia entre las placas  $L$  es lo suficientemente grande como para considerar que la gota está inmersa en el seno de un campo aplicado en el infinito  $E_\infty$ . La solución del problema de potencial para esta gota esférica es [Jackson, 1975]

$$\Phi_{in} = -E_\infty \frac{3\beta}{1+2\beta} r \cos \theta, \quad (1.75)$$

$$\Phi_{ex} = E_\infty \left[ \left( \frac{1-\beta}{1+2\beta} \right) \frac{1}{r^2} - r \right] \cos \theta. \quad (1.76)$$

Y la presión eléctrica es

$$\Delta \Pi_E = \epsilon_{in} E_\infty^2 \frac{\beta-1}{2\beta} \left( \frac{3\beta}{1+2\beta} \right)^2 (\beta \sin^2 \theta + \cos^2 \theta). \quad (1.77)$$

Podemos ver que  $\Delta \Pi_E / \epsilon_{in} E_\infty^2$  no se mantiene de orden unidad para cualquier valor de  $\beta$ . Esto nos va a llevar en la presentación de los resultados sobre gotas

a tomar como permitividad de referencia la del líquido exterior, redefiniendo el número de Bond eléctrico como  $\hat{\chi} \equiv \epsilon_{\text{ex}} E_{\infty}^2 R / \sigma = \beta \chi$ , la presión eléctrica como  $\Delta \hat{\Pi}_E \equiv \Delta \Pi_E / \beta$  y la razón de permitividades como  $\hat{\beta} = 1/\beta$ . Con esta definición  $\Delta \hat{\Pi}_E$  es de orden unidad para cualquier  $\beta$ .

Veamos el comportamiento de las gotas sujetas a campos eléctricos. El razonamiento efectuado en el caso de puentes líquidos no es aplicable porque el campo no es básicamente tangencial a la interfase. En la figura 1.6 ilustramos las tensiones que se presentan en una gota hemisférica sujeta a un campo eléctrico. Cuando  $\epsilon_{\text{ex}} < \epsilon_{\text{in}}$  ( $\beta < 1$ ) se tiene que  $\Delta \Pi_E < 0$ , esto es, la tensión se aplica de dentro hacia afuera. Este esfuerzo eléctrico en valor absoluto es máximo para  $\theta = 0$  y decrece de forma monótona hasta el valor en  $\theta = \pi/2$ , luego la gota tiende a alargarse hasta que las tensiones se equilibren con los esfuerzos capilares. Cuando  $\epsilon_{\text{ex}} > \epsilon_{\text{in}}$  ( $\beta > 1$ ) los esfuerzos se dirigen hacia el interior siendo ahora mayores para  $\theta = \pi/2$  que para  $\theta = 0$ , de este modo la gota se ve comprimida por la zona ecuatorial y se repite el efecto de alargamiento. En el capítulo de resultados veremos que este comportamiento de alargamiento en la dirección del campo aplicado se mantiene para otras formas de gotas no necesariamente hemisféricas.

## 1.4 Estabilidad de las formas de equilibrio

Hemos visto que la forma de equilibrio es aquella que hace extremal la energía potencial del sistema  $\mathcal{U}$ . En general, la forma de equilibrio de una masa líquida depende de un conjunto de parámetros. Como norma, esta dependencia es continua e incluso analítica. Para pequeñas variaciones de los parámetros existe una sucesión continua de formas de equilibrio, llamada familia de formas, con unas características de estabilidad o inestabilidad que se conservan. Este esquema simple se rompe cuando estamos en la frontera de la estabilidad, allí donde la forma deja de ser un mínimo local de  $\mathcal{U}$ .

Sea  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathbf{x}, \lambda)$ , donde  $\mathbf{x}$  es un vector de  $n$  componentes que representa la forma de la interfase y  $\lambda$  un parámetro del que depende la forma, como puede ser el volumen o la intensidad del campo eléctrico impuesto. El vector  $\mathbf{x}$  puede tener infinitas componentes, por ejemplo, cada una de las componentes de Fourier que dan lugar a la forma de la interfase. La ecuación de equilibrio

viene dada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \lambda) \equiv \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{x}} = 0, \quad (1.78)$$

y de aquí obtenemos la función  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda)$ .

Partamos de una solución de equilibrio estable. En esta situación los autovalores del hessiano de  $\mathcal{U}$ ,  $\partial^2 \mathcal{U} / \partial x_i \partial x_j$ , son todos positivos (en general son reales al ser una matriz real simétrica). Si al ir variando el parámetro  $\lambda$  alguno de los autovalores de la matriz se hace cero estamos en lo que se conoce como punto crítico o de estabilidad marginal. En este punto las condiciones del Teorema de la Función Implícita fallan y podemos esperar que  $\mathbf{x}$  como función de  $\lambda$  sea una función multivaluada. La matriz jacobiana de  $\mathbf{F}$ , esto es, el hessiano de  $\mathcal{U}$ , es de rango  $n - 1$  ya que uno de los autovalores se ha hecho cero. Si el rango de la matriz ampliada  $[\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{x}, \partial \mathbf{F} / \partial \lambda]$  es  $n$  estamos en un punto límite. La función  $\mathbf{x}(\lambda)$  posee una tangente vertical en este punto,  $d\mathbf{x}/d\lambda \rightarrow \infty$ . Si las soluciones  $(\mathbf{x}, \lambda)$  existen para todo  $\lambda$  en un entorno abierto del  $\lambda$  crítico estamos en un punto de inflexión y en caso contrario estamos en un punto de retorno [Abbot, 1978]. En general el punto será de retorno porque un punto de inflexión ha de cumplir una condición más en la derivada segunda. En el plano determinado por el vector tangente en el punto crítico y por la derivada del vector tangente la función puede escribirse localmente como

$$\left. \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varepsilon} \right|_{\lambda} = F(\varepsilon, \lambda) = a\varepsilon^2 + b\lambda = 0, \quad (1.79)$$

donde  $\varepsilon$  indica la proyección sobre el vector tangente. El signo de  $\partial^2 \mathcal{U} / \partial \varepsilon^2$  determina la estabilidad de la forma de equilibrio, esto es, si es mayor que cero es estable y si es menor que cero inestable. El valor de esta segunda derivada es

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varepsilon^2} = 2a\varepsilon. \quad (1.80)$$

Vemos que según sea el signo de  $\varepsilon$  cambia el signo del hessiano y, por tanto, la estabilidad de la rama.

Puede ser que el rango de la matriz ampliada sea también  $n - 1$ , entonces estamos en un punto de bifurcación simple si la matriz jacobiana es regular en un entorno perforado del punto crítico. Se demuestra que con una condición bastante general en la derivada segunda de  $\mathbf{F}$  las soluciones de  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \lambda) = 0$  son dos curvas del espacio  $(\mathbf{x}, \lambda)$  que se intersectan en el punto crítico, llamado punto de bifurcación [Abbot, 1978].

En el caso de un cruce de curvas se produce un intercambio en las características de estabilidad. Supongamos que nos movemos por una rama (la llamamos rama principal) y que al pasar por el punto crítico nos aparece la rama bifurcada. En el plano donde se cruzan las curvas la ecuación de equilibrio puede escribirse localmente como

$$\left. \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varepsilon} \right|_{\lambda} = F(\varepsilon, \lambda) = \varepsilon(a\varepsilon + b\lambda) = 0, \quad (1.81)$$

donde  $\varepsilon = 0$  es la rama principal y  $a\varepsilon + b\lambda = 0$  es la rama bifurcada. Así  $\varepsilon$  es la proyección en la dirección perpendicular a la rama principal. El valor de la segunda derivada es

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial^2 \varepsilon} = 2a\varepsilon + b\lambda. \quad (1.82)$$

Si  $b$  es menor que cero, en la recta  $\varepsilon = 0$  las formas son estables cuando  $\lambda < 0$  e inestables cuando  $\lambda > 0$ . En la recta  $a\varepsilon + b\lambda$  se tiene  $\partial^2 \mathcal{U} / \partial \varepsilon^2 = -b\lambda$ , de modo que si  $\lambda < 0$  es inestable y si  $\lambda > 0$  es estable.

Puede ser que la rama bifurcada no tenga proyección en  $\lambda$  en el primer orden de aproximación, esto es,  $b = 0$ . Es necesario ir al siguiente orden en la aproximación. Tendremos

$$F(\varepsilon, \lambda) = \varepsilon(a\varepsilon^2 + b\lambda), \quad (1.83)$$

y la derivada segunda de  $\mathcal{U}$  será

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial^2 \varepsilon} = 3a\varepsilon^2 + b\lambda. \quad (1.84)$$

Para la recta  $\varepsilon = 0$ , admitiendo  $b < 0$ , la estabilidad sigue siendo del mismo modo. Para la curva definida localmente por  $a\varepsilon^2 + b\lambda$  la estabilidad viene dada por el signo de  $-2b\lambda$ . Depende pues de hacia donde se curva la parábola. Si la parábola existe para  $\lambda > 0$  es estable y si existe para  $\lambda < 0$  es inestable.

Aunque estos argumentos semiintuitivos pueden ser simples están bien fundamentados en [Iooss, 1980]. En la figura 1.7 se representan los casos posibles analizados en esta sección. Téngase en cuenta que los puntos son estables o inestables respecto del autovalor que pasa por cero. Esto quiere decir que en más de una dimensión cualquiera de los diagramas representados pudiera ser completamente inestable respecto de otro autovalor.

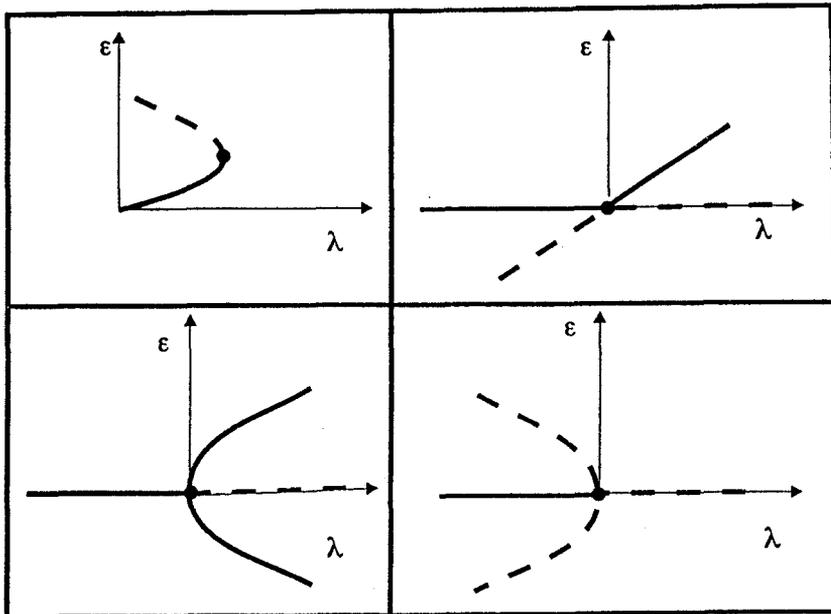


Figura 1.7: Esquema de diagramas de bifurcación. (—) puntos estables, (- - -) puntos inestables.

En las formas líquidas que vamos a estudiar podemos encontrarnos tanto puntos de retorno como de bifurcación. De los múltiples puntos críticos que nos pueden aparecer siguiendo una familia de soluciones nos preocuparemos principalmente de aquellos que dan lugar a la aparición de la inestabilidad. Partiendo de una solución estable reconstruiremos la estabilidad de los diagramas de bifurcación. Son pues los diagramas de bifurcación obtenidos mediante el cálculo sucesivo de las formas de equilibrio los que nos permitirán conocer los límites de estabilidad.

## Capítulo 2

# Método numérico

En este capítulo se describe el método numérico que hemos empleado para obtener las formas de equilibrio y los diagramas de bifurcación. En primer lugar, contamos brevemente en qué consiste el Método de Galerkin con funciones base de Elementos Finitos. En segundo lugar, presentamos algunos de los elementos finitos y funciones base más comunes, en particular aquellos que hemos empleado. En tercer lugar, aplicamos el Método de Galerkin de Elementos Finitos para discretizar las ecuaciones de Laplace para el potencial y de Young-Laplace para la interfase en el problema de puentes líquidos. Obtenemos así un sistema de ecuaciones algebraicas al que aplicamos un método de continuación para trazar las familias de formas de equilibrio. En cuarto lugar, describimos los detalles computacionales que nos permiten obtener el anterior sistema de ecuaciones algebraicas y determinar su solución. Por último, extendemos el método al problema de gotas.

### 2.1 Introducción al Método de Elementos Finitos

#### 2.1.1 Método de Galerkin

El método de elementos finitos inicialmente fue aplicado como un procedimiento *ad hoc* para encontrar la solución a problemas de análisis de estructuras. Pronto se vio que el procedimiento podía tener una interpretación variacional considerando la energía potencial del sistema. Así, primeramente

apareció como derivado de los métodos de minimización de funcionales como el de Rayleigh-Ritz. La conexión estrecha entre el método de Rayleigh-Ritz y el de Galerkin permitió la extensión del método de elementos finitos a problemas donde no es inmediato el uso de un principio variacional. De tal modo, el método de elementos finitos se presenta en general como un método de Galerkin.

A su vez el método de Galerkin se incluye dentro de una amplia familia de técnicas de integración de ecuaciones diferenciales conocida como el método de residuos ponderados. Este puede describirse del siguiente modo. Consideremos las funciones  $u(\mathbf{x})$  tales que  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , y el problema gobernado por la ecuación diferencial

$$\mathcal{L}(u) = 0 \quad (2.1)$$

sobre el dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , con condiciones de contorno

$$\mathcal{S}(u) = 0 \quad (2.2)$$

sobre  $\partial\Omega$ , el contorno de  $\Omega$ . Introducimos una solución aproximada  $u_a$  de modo que

$$\mathcal{L}(u_a) = R, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{S}(u_a) = R_c, \quad (2.4)$$

donde  $R$  y  $R_c$  se conocen como residuos, que aparecen al no ser la solución exacta.

La aproximación  $u_a$  puede construirse de tal modo que:

- La ecuación diferencial se cumpla exactamente,  $R = 0$ . Aparecen así los métodos de contorno.
- Las condiciones de contorno se satisfagan exactamente,  $R_c = 0$ . Son los llamados métodos interiores.
- Ni las condiciones de contorno ni la ecuación se satisfagan exactamente. Se tienen así los métodos mixtos.

En su mayor parte los métodos de elementos finitos son métodos interiores, como es nuestro caso. Por tanto, describiremos la técnica de residuos ponderados para un método interior. Sin embargo, la formulación puede extenderse directamente a los métodos de contorno o mixtos.

En un método interior la solución aproximada se escribe como

$$u_a(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N c_i v_i(\mathbf{x}), \quad (2.5)$$

donde  $v_i$  son funciones dadas llamadas funciones prueba y  $u_0$  es una función que se escoge para que se cumplan las condiciones de contorno, esto es  $R_c = 0$ . El objetivo es encontrar los escalares  $c_i$  que hacen que el residuo  $R$  sea lo más próximo posible a cero. Es conveniente definir el producto escalar de dos funciones  $f$  y  $g$  con dominio  $\Omega$  como

$$(f, g) = \int_{\Omega} fg \, dx. \quad (2.6)$$

Con el fin de obtener las ecuaciones que determinan los escalares  $c_i$  se igualan a cero los productos escalares del residuo por unas funciones conocidas

$$(R, w_k) = 0 \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.7)$$

En el caso particular de una ecuación diferencial lineal las ecuaciones son

$$(\mathcal{L}(u_0), w_k) + \sum_{i=1}^N c_i (\mathcal{L}(v_i), w_k) = 0 \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.8)$$

Las funciones  $w_k$  se llaman funciones peso o test. Es claro que las funciones  $w_k$  han de ser independientes para poder tener  $N$  relaciones independientes. Si las  $w_k$  son un conjunto de funciones completo, entonces cuando  $N \rightarrow \infty$  el residuo es ortogonal a cualquier función de un conjunto completo. Esto implica que el residuo converge a cero *en la media*, esto es,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|R\| \rightarrow 0, \quad (2.9)$$

donde  $\|R\| \equiv \sqrt{(R, R)}$ . Si el residuo converge a cero en la media y si la solución aproximada cumple las condiciones de contorno, entonces es de esperar que la solución aproximada converja a la solución en la media,  $\|u - u_a\| \rightarrow 0$ , que es diferente de la convergencia uniforme definida por la norma infinito  $\|u_a\|_{\infty} \equiv \max |u - u_a|$ . En rigor, la solución no es única sino que podemos

hallar un conjunto de soluciones tal que se diferencien unas de otras en conjuntos de puntos de medida cero. Se suele elegir como representante de la clase de soluciones aquella función que es más regular.

La forma de la ecuación (2.7) cuando  $N \rightarrow \infty$  y el conjunto de las funciones peso es completo es equivalente a la forma débil de la ecuación (2.1)

$$(\mathcal{L}(u), w) = 0 \quad \text{para toda } w. \quad (2.10)$$

Las condiciones de regularidad que se exigen al conjunto de funciones prueba y al conjunto de funciones peso dependen de la expresión (2.7). Es usual utilizar el teorema de Green para reducir el orden de derivación de la ecuación diferencial original y así poder usar conjuntos de funciones con menos regularidad de lo que exigiría la ecuación clásica.

Diferentes métodos surgen dependiendo de la elección de las funciones peso, tales como el método de colocación, el de momentos, el de subdominios, el de mínimos cuadrados y el de Galerkin. Como ejemplo, el método de colocación utiliza como funciones peso deltas de Dirac,  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$ , centradas en determinados puntos  $\mathbf{x}_k$  del dominio. Así las ecuaciones (2.7) se reducen a establecer  $R(\mathbf{x}_k) = 0$  en determinados puntos del dominio. Cuando el número de puntos aumenta se exige en más y más nodos que el residuo sea igual a cero.

El método de Galerkin se caracteriza porque las funciones peso y las funciones prueba son idénticas,  $v_k(\mathbf{x}) = w_k(\mathbf{x})$ . Entre sus ventajas frente a los otros métodos de residuos estarían la precisión, la posibilidad de adaptarse a casi cualquier problema, y a que en problemas que admiten una formulación variacional produce ecuaciones que son idénticas a las que resultan del método de Rayleigh-Ritz [Fletcher, 1984]. Esto último implica que las propiedades de convergencia asociadas con el método de Rayleigh-Ritz se extienden al método de Galerkin en estos casos.

### Conexión con el método de Ritz

La solución a la ecuación diferencial

$$\mathcal{A}(u) = f, \quad (2.11)$$

donde  $\mathcal{A}$  es un operador diferencial lineal definido positivo, es equivalente a encontrar el mínimo de la funcional

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2} (\mathcal{A}(u), u) - (f, u) \quad (2.12)$$

En el método de Rayleigh-Ritz se lige una solución aproximada de la forma

$$u_a(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N a_i v_i(\mathbf{x}). \quad (2.13)$$

Al introducir  $u_a$  en la funcional y exigir la condición de extremo,  $\partial\mathcal{F}/\partial a_k = 0$ , se tiene

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial a_k} = \sum_{i=1}^N a_i (\mathcal{A}(v_i), v_k) - (f, v_k) = 0. \quad (2.14)$$

Y esto es lo mismo que se obtiene por aplicación directa del método de Galerkin.

### 2.1.2 Método de Galerkin de Elementos Finitos

Con una elección arbitraria del conjunto de funciones prueba se presentan en la práctica una serie de dificultades. Describamos estos problemas y qué soluciones ofrece el Método de Galerkin con funciones base de Elementos Finitos (MGEF).

En primer lugar, las ecuaciones tienden a hacerse más y más linealmente dependientes al crecer el número de funciones prueba. Esto provoca que la matriz del sistema a resolver esté mal condicionada, de modo que los errores numéricos se amplifican y los resultados se falsean. Este comportamiento se debe a que cuando crece el número de funciones prueba, y no se pone cuidado al construirlas, las nuevas funciones prueba son más y más parecidas a las anteriores. Este es el caso, por ejemplo, de la elección como funciones prueba de los monomios  $x^k$  en un problema unidimensional. Aunque las funciones  $x^k$  son linealmente independientes existe poca diferencia entre  $x^k$  y  $x^{k+1}$  cuando  $k$  es grande. Tomemos como dominio el intervalo  $(0, 1)$  y calculemos el producto  $(w_k, w_{k+1})$ , donde  $w_k = x^k \sqrt{2k+1}$  está normalizada a la unidad. Observamos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 x^k x^{k+1} \sqrt{2k+1} \sqrt{2k+3} dx = 1. \quad (2.15)$$

En segundo lugar, las matrices de los sistemas a resolver que aparecen son, en general, matrices llenas, o sea, todos los elementos son distintos de cero. Esto aumenta mucho el coste de computación de la factorización de las

matrices al crecer el número de funciones  $N$ . Cálculos del orden  $N^3$  serán necesarios. Este problema se agrava aún más cuando las ecuaciones son no lineales. En éstas cada elemento de la matriz depende de la solución de la iteración anterior. Por ejemplo, en la ecuación de Burgers el término  $vdv/dx$  contribuye al elemento  $a_{ij}$ , después de aplicado el método de Galerkin, con un sumando del tipo

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^N c_k \left( w_k \frac{dw_i}{dx}, w_j \right). \quad (2.16)$$

Esto supone un cálculo de orden  $N$  para obtener cada elemento y de orden  $N^3$  para toda la matriz, el mismo gasto que para factorizarla.

En tercer lugar, se plantea la dificultad de abordar problemas con contornos que no coincidan con las líneas coordenadas. La dificultad está en encontrar funciones que siendo una base completa satisfagan las condiciones de contorno exactamente. Para una geometría sencilla puede evitarse esta dificultad mediante una aplicación a un dominio regular. Sin embargo, las ecuaciones se complican y no se sabe muy bien cómo afecta a la degradación de la solución aquellas partes del dominio más afectadas por la transformación.

Una solución a estos problemas se tiene con el Método de Galerkin con funciones base de Elementos Finitos. En el MGEF se divide el dominio en pequeñas regiones denominadas elementos, para lo cual se construye una red o malla. Se define el conjunto de funciones prueba como el de las funciones que toman la forma de un polinomio de grado  $p$  en cada elemento. Generalmente, este conjunto es un espacio de funciones continuas polinómicas a trozos. Las funciones que se toman como base de este espacio son sólo distintas de cero en una pequeña región del dominio, entorno a un nodo de la red, de modo que cada función base está asociada a ese nodo. En este sentido, es un método local, esto es, las funciones base se extienden en una región pequeña del dominio. En contraposición están los métodos globales, en los que las funciones base se extienden por todo el dominio. Las funciones base de elementos finitos toman valor uno para el nodo al que están asociadas y cero para los demás. Existe pues una correspondencia biunívoca entre los nodos de la red y las funciones base. La representación de una función en

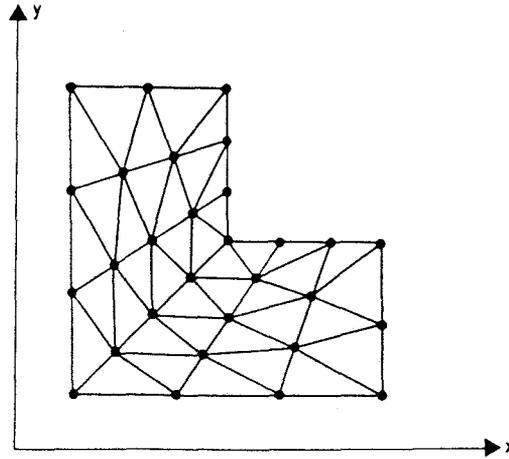


Figura 2.1: Malla típica.

este espacio de, digamos,  $N$  dimensiones será de la forma

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N u(\mathbf{x}_i)w_i(\mathbf{x}), \quad (2.17)$$

donde  $u_i$  es el valor de la función en el nodo  $\mathbf{x}_i$  de la red. Notemos que la expresión (2.17) es una interpolación donde dados los puntos  $(\mathbf{x}_i, u_i)$  construimos la función  $u(\mathbf{x})$  que pasa por todos ellos. El carácter interpolante de los elementos finitos es la base para muchos criterios de convergencia. Por otro lado, el que la función prueba se defina únicamente en una región pequeña hace que la correspondiente ecuación esté asociada a una región limitada del dominio. Lo que permite refinar una región donde la función solución cambie bruscamente sin tener que cambiar las ecuaciones que no están asociadas a la región que se refina.

Como cada función de la base está asignada a un único nodo es claro que son linealmente independientes y que al crecer  $N$ , al refinar la red, esta independencia no se ve afectada. El producto escalar de dos de ellas sólo es distinto de cero si tienen algún elemento en común. Consecuentemente, los problemas de mal condicionamiento de la matriz se reducen considerablemente comparados con aquellos que surgen con una elección arbitraria de las funciones base. Otra forma de evitar este problema es utilizar funciones ortogonales, que es el sistema empleado en los métodos espectrales de Galerkin.

Al ser distintos de cero sólo los productos que contienen funciones que tienen elementos comunes, las matrices de los sistemas serán *sparse*, es decir, con muchos ceros. Esto es así incluso en el caso de ecuaciones no lineales, donde además la formación de cada elemento de la matriz no crece con  $N$  como sucede en un método global. El hecho de que las matrices sean *sparse* ofrece la ventaja de que una numeración conveniente de los nodos de la red hace que las matrices sean bandeadas, y ésto pueda explotarse en disminuir el coste de computación.

Por último, al dividir el dominio en subdominios pueden abordarse problemas con geometrías muy diversas sin mucha dificultad, lo que se convierte en una de las características más notables del MGEF. En este sentido la transformación isoparamétrica, como veremos, es muy adecuada para ajustar contornos curvados.

### Convergencia

Nos preguntamos si la diferencia entre la solución aproximada y la exacta disminuye y cuánto a medida que aumentamos el número de elementos y, por tanto, a medida que el tamaño típico de éstos,  $h$ , tiende a cero.

En el MGEF el orden de las derivadas más altas de la función incógnita de la ecuación diferencial se reduce por aplicación del teorema de Green en la forma débil de la ecuación,

$$(\mathcal{L}(u), w_k) = 0, \quad (2.18)$$

pasando algunas derivadas de la función incógnita a la función peso. Así, si la ecuación diferencial es de orden  $2m$ , por aplicación del teorema de Green  $m$  veces se consigue que la derivada más alta que aparece en la forma débil sea  $m$ . Por ejemplo, en el caso de la ecuación de Laplace

$$(\nabla^2 u, w_k) \equiv \int_{\Omega} w_k \nabla^2 u \, dx = 0 \quad (2.19)$$

la aplicación del teorema de Green conduce a

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w_k \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} w_k \, dS = 0, \quad (2.20)$$

donde  $dS$  es el diferencial del contorno, y  $\partial u/\partial n$  la derivada en la dirección normal al contorno. Vemos que las derivadas de segundo orden se reducen a derivadas de primer orden.

Al hacer tender el tamaño del elemento a cero el integrando que aparece en la forma débil tiende a un valor constante sobre cada elemento. Por tanto, para que exista convergencia la función prueba ha de ser capaz de reproducir exactamente un valor constante de las derivadas más altas. Esto requiere que los polinomios usados sean completos hasta un orden  $m$ . Existe además el requerimiento de que los elementos sean conformes, esto es, que las funciones prueba sean continuas ella y sus derivadas hasta un orden  $m - 1$ . De este modo las integrales toman un valor finito. Se dice que las funciones prueba pertenecen al espacio de funciones  $H^m(\Omega)$ , esto es, el espacio de funciones de cuadrado integrable hasta la derivada  $m$ -ésima en  $\Omega$ . Se conoce como espacio de Sobolev [Axelsson, 1984], siendo el producto escalar de este espacio

$$(u, v)_m = \sum_{0 \leq \alpha \leq m} \int_{\Omega} \frac{\partial^{\alpha} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n} \frac{\partial^{\alpha} v}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n} d^n \mathbf{x}, \quad (2.21)$$

donde  $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ , y la norma correspondiente

$$\|u\|_m^2 = (u, u)_m. \quad (2.22)$$

En nuestro caso como veremos las derivadas más altas que aparecen en la forma débil de las ecuaciones son de orden uno, con lo que como mínimo los polinomios habrán de ser de grado uno. Además la condición de que los elementos sean conformes implica que debemos tomar funciones continuas, con lo que nuestra base pertenece a  $H^1$ .

La velocidad de convergencia se suele escribir en términos de potencias de  $h$ , en la forma  $\|u - u_a\|_s \leq Ch^q$ , donde  $C$  es una constante independiente de  $h$ . Para el problema de potencial existen cotas del error bien estudiadas, ya que es un problema lineal que admite una formulación variacional. El error en el método de elementos finitos para un problema de potencial cumple [Strang, 1973],

$$\|u - u_a\|_s \leq Ch^{k+1-s} \|u\|_{k+1} \quad \text{si } k + 1 - 2m \geq s, \quad (2.23)$$

donde  $k$  es el orden del polinomio de interpolación,  $s$  indica la derivada más alta en la norma y  $m$  el orden de la derivada más alta en la forma débil. Vemos que para que la cota sea válida la solución  $u$  ha de ser lo suficientemente suave, o sea, que pertenezca a  $H^{k+1}$ . En el problema completo, ecuación de Young-Laplace aumentada por el término eléctrico, no tenemos una cota teórica del error.

En el caso que analizaremos, los polinomios que hemos usado son de grado 2 y, por tanto, el error en la determinación del potencial debe ser del orden de  $h^3$  para una solución suficientemente regular e interfase fija. Este error se llama error de la aproximación y está asociado a las funciones que se utilizan y a la ecuación que se trata de resolver.

La mayor contribución al error vendrá dada por el debido a la interpolación, aunque otras fuentes de error son la integración numérica y el error de redondeo. El error de interpolación (distinto al de aproximación) es la diferencia entre una función y su interpolada. El error de redondeo se reduce mucho con el empleo de doble precisión. Por otra parte, según [Fletcher, 1984], el esquema de cuadratura es óptimo si es del mismo orden o más alto que el error de aproximación. Ya que el error de la aproximación puede ser desconocido a priori, es siempre conveniente que el orden del error del esquema de cuadratura sea mayor o igual que el asociado a la interpolación.

La convergencia del error de aproximación puede determinarse mediante experimentos numéricos. Se resuelve el problema discreto para distintas mallas de elementos con tamaños típicos  $h$  cada vez menores y se supone que el error es proporcional a  $h^q$ . Analizando la sucesión de soluciones numéricas se obtiene la función a la que se tiende y el orden de la convergencia. En el capítulo tercero veremos algunos experimentos para determinar el exponente de convergencia.

## 2.2 Elementos finitos y funciones base

Como una de las claves del MGEF es su carácter interpolante, vamos ahora a describir algunos espacios de funciones en los que podemos buscar la solución aproximada de nuestro problema y, en concreto, las funciones base utilizadas por nosotros. Los diferentes elementos y funciones base determinan el espacio finito de funciones al que pertenece la función aproximada. Describiremos elementos en una y dos dimensiones que son, respectivamente, los necesarios para representar la forma de la interfase y el potencial.

Las funciones base serán continuas y con derivada de cuadrado integrable en el dominio, lo que es necesario en nuestro problema. Así, pertenecen a  $H^1(\Omega)$ . Los elementos que veremos están basados en la interpolación de Lagrange y se llaman por ello elementos finitos de Lagrange. En ellos la función dentro de un elemento está unívocamente definida por el valor de

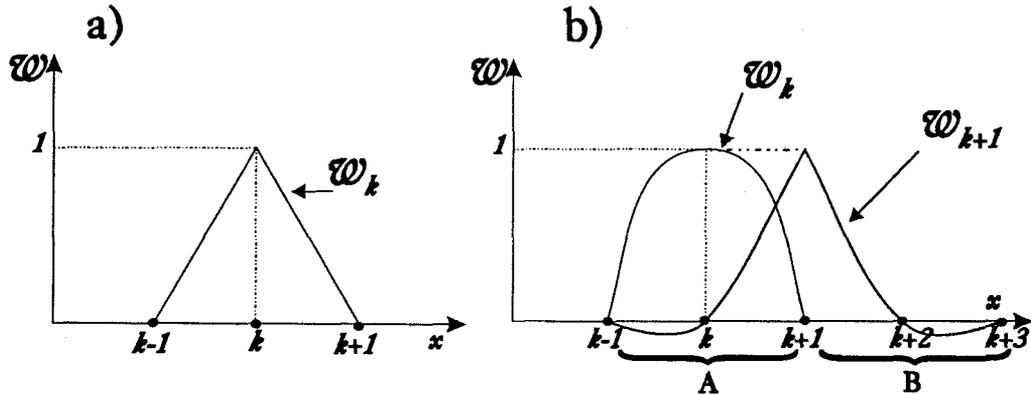


Figura 2.2: Funciones base de elementos unidimensionales: (a) lineal y (b) cuadráticas.

ésta en los nodos.

### 2.2.1 Elementos unidimensionales

Comencemos por los elementos más sencillos, los lineales. Sea el dominio  $\Omega$  el intervalo  $(a, b)$ . Dividimos el dominio en  $M - 1$  segmentos, tendremos pues  $M$  nodos  $x_1 < x_2 < \dots < x_M$ , de ellos  $x_1 = a$  y  $x_M = b$ . El espacio de las funciones prueba es el de las funciones continuas definidas como lineales en cada segmento. Construimos la función base  $w_k(x)$  como (ver figura 2.2)

$$\begin{aligned}
 w_k(x) &= \frac{x_{k-1} - x}{x_{k-1} - x_k} && \text{si } x \in (x_{k-1}, x_k), \\
 w_k(x) &= \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} && \text{si } x \in (x_k, x_{k+1}), \\
 w_k(x) &= 0 && \text{otro caso.}
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Una función  $u(x)$  de éste espacio viene determinada por el valor que toma en cada nodo, esto es,

$$u(x) = \sum_{i=1}^N u(x_i) w_i(x), \tag{2.25}$$

y así en cada elemento la función  $u$  es de la forma  $u(x) = a + bx$ .

Consideremos ahora el caso en que las funciones base son polinomios cuadráticos en cada elemento. En cada elemento tenemos ahora tres nodos,

dos en los extremos del elemento y otro en el interior. Las funciones de la base se construyen mediante funciones de interpolación de Lagrange. Son de dos tipos: aquellas asociadas al nodo interior de un elemento y las asociadas al nodo de un extremo. Por ejemplo, las funciones asociadas a los nodos  $x_k$ , interior al elemento  $A$ , y  $x_{k+1}$ , perteneciente conjuntamente a los elementos  $A$  y  $B$  son respectivamente (ver figura 2.2).

$$w_k(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})}{(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})} & \text{si } x \in (x_{k-1}, x_{k+1}), \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (2.26)$$

$$w_{k+1}(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{k-1})(x - x_k)}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)} & \text{si } x \in (x_{k-1}, x_{k+1}), \\ \frac{(x - x_{k+2})(x - x_{k+3})}{(x_{k+1} - x_{k+2})(x_{k+1} - x_{k+3})} & \text{si } x \in (x_{k+1}, x_{k+3}), \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (2.27)$$

En cada elemento, una función  $u(x)$  del espacio formado por estas funciones base toma la forma  $u(x) = a + bx + cx^2$ . Los tres coeficientes están unívocamente determinados por el valor de  $u$  en los tres nodos del elemento.

Podríamos seguir elevando el grado del polinomio que describe la función local lo que conduciría a tener más nodos acoplados. Esto suele ser menos económico en computación pero la solución es más precisa.

## 2.2.2 Elementos bidimensionales

### Red de elementos

En más de una dimensión se plantea el problema de crear la red de nodos que definen los elementos en que se subdivide el dominio.

Sea el dominio  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  simplemente conexo. Dividimos  $\Omega$  en un conjunto de subregiones de intersección nula, llamadas elementos. La unión de todos los elementos es, pues,  $\Omega$ . Por ahora consideremos que los elementos son poligonales, lo que implica que  $\Omega$  es poligonal. Un ejemplo aparece en la figura 2.1. En  $\Omega$  seleccionamos una serie de nodos y los numeramos  $\{\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)\}_{i=1}^M$ . Estos nodos pueden estar en las esquinas, en los lados, o en el interior de los elementos. Es esta elección de elementos y nodos la que define el mallado de elementos finitos. Cuando se realiza un mallado de

un dominio es necesario numerar los nodos y los elementos. Existe una numeración global de los nodos,  $i = 1, \dots, M$ , que los definen dentro del mallado y una numeración local, que los definen dentro de un elemento,  $r = 1, \dots, T$ , donde  $T$  es el número de nodos por elemento.

Una vez realizado el mallado es necesario almacenar la siguiente información: la numeración global de los nodos que pertenecen a cada elemento, las coordenadas de cada nodo, los nodos que tienen condiciones de contorno de Neumann y aquellos que tienen condiciones de Dirichlet. En mallas que se deforman, como es nuestro caso, es necesario además indicar cómo se mueve cada nodo en la red dependiendo del movimiento de los nodos de la interfase.

### Funciones base

Las propiedades que exigiremos a una función base  $w_i(\mathbf{x})$ , asociada al nodo  $\mathbf{x}_i$ , son:

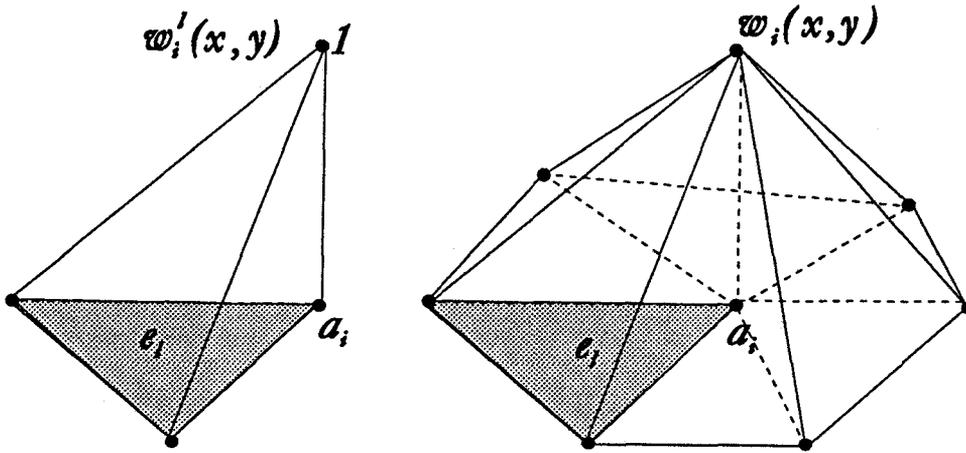
1. La restricción de la función a un elemento es un polinomio. Los coeficientes de éste están únicamente determinados por los valores de la función en los nodos del elemento.
2. La función cumple:

$$w_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, M, \quad (2.28)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker.

3. En cada lado del elemento la función está únicamente determinada por los valores de ésta en los nodos de ese lado.
4. La función toma sólo valores distintos de cero en los elementos que contienen al nodo que la define. La unión de estos elementos se llama soporte de  $w_i$ . La representación geométrica de una función  $w_i$  es la de una tienda centrada en el nodo  $\mathbf{x}_i$ . El suelo de la tienda constituye el soporte de la función.

Buscaremos la solución de nuestro problema en el espacio de funciones  $V_M$  generado por  $\{w_1, \dots, w_M\}$ . La representación geométrica de una función de  $V_M$  es la de una superficie hecha de *retazos*, o sea, una superficie formada por trozos suaves pegados.

Figura 2.3: Funciones  $w_i^l$  y  $w_i$ .

Las funciones base tienen un carácter global, pues están referidas a un nodo del dominio. En contraposición a las funciones base globales introducimos las funciones base locales, que son la restricción de una función global en un elemento. Crucial para la descripción de estas funciones es tomar un elemento de referencia estándar, con coordenadas locales  $(\xi, \eta)$ ,

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) = f_{11}\xi + f_{12}\eta + b_1, \\ y &= y(\xi, \eta) = f_{21}\xi + f_{22}\eta + b_2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Con la transformación todas las funciones base locales pueden reducirse a unas únicas funciones en un elemento estándar. Esto significa que todas las operaciones pueden realizarse en este elemento. Así, la función base global  $w_i$  restringida al elemento  $e_i$  será igual a alguna de las funciones base locales  $h_i$  del elemento estándar:

$$w_i^l(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = h_i(\xi, \eta). \quad (2.30)$$

### Funciones base lineales sobre elementos triangulares

Sea un elemento triangular con nodos en los vértices, los tres coeficientes de la función  $w_i$  restringida al elemento de su soporte  $e_i$

$$w_i^l(x, y) = a + bx + cy, \quad (2.31)$$

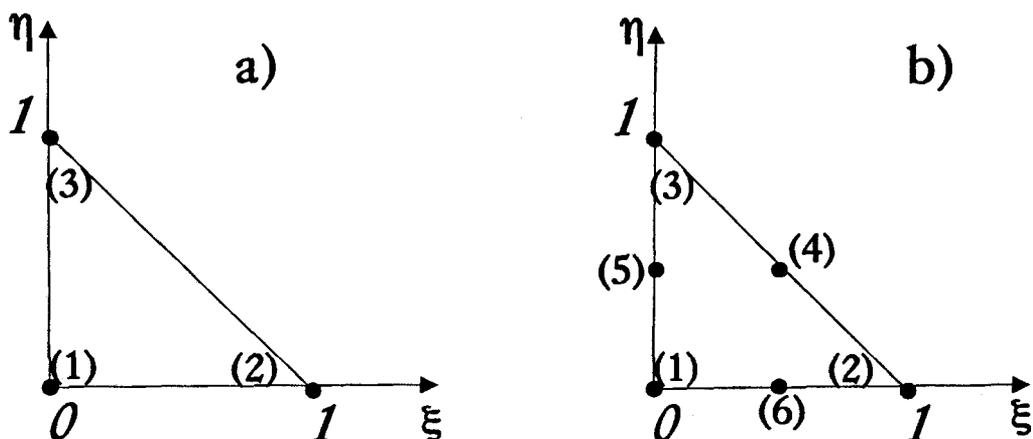


Figura 2.4: Elementos estándar para triángulos: (a) lineal y (b) cuadrático.

pueden determinarse unívocamente por el valor de la función en los tres nodos. Además la función en cada lado está determinada por el valor de ésta en los dos nodos del lado. En la figura 2.3 se muestran  $w_i^l$  y  $w_i$ . En el elemento estándar que hemos tomado (ver figura 2.4) las funciones base locales toman la forma

$$\begin{aligned} h_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta, \\ h_2(\xi, \eta) &= \xi, \\ h_3(\xi, \eta) &= \eta. \end{aligned} \tag{2.32}$$

La transformación afín

$$\begin{aligned} x &= (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta + x_1, \\ y &= (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta + y_1, \end{aligned} \tag{2.33}$$

es tal que transforma el triángulo estándar en cualquier triángulo de lados rectos del plano.

Una función del espacio  $V_M$ , formado por las funciones base  $w_i$ , es geoméricamente una superficie hecha de trozos triangulares planos.

### Funciones base cuadráticas sobre elementos triangulares

En este caso, los elementos tienen nodos en los vértices y en la mitad de cada lado. Las funciones base en cada elemento son de la forma:

$$w_i^l(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2. \quad (2.34)$$

Los seis coeficientes quedan determinados por los valores de la función en los seis nodos. Además puede notarse que la función restringida a un lado del triángulo es una función cuadrática que se determina por el valor de ésta en los tres nodos. El elemento estándar está representado en la figura 2.4. Las correspondientes funciones base locales son:

$$\begin{aligned} h_1 &= \lambda_1(2\lambda_1 - 1), \\ h_2 &= \lambda_2(2\lambda_2 - 1), \\ h_3 &= \lambda_3(2\lambda_3 - 1), \\ h_4 &= 4\lambda_2\lambda_3, \\ h_5 &= 4\lambda_1\lambda_3, \\ h_6 &= 4\lambda_1\lambda_2, \end{aligned} \quad (2.35)$$

donde las funciones  $\lambda_i$  son las funciones locales del elemento lineal,  $\lambda_1 = 1 - \xi - \eta$ ,  $\lambda_2 = \xi$ ,  $\lambda_3 = \eta$ . La transformación de variables (2.33) aplica el elemento estándar en cualquier elemento, conservando la orientación relativa de vértices y puntos medios.

### Funciones base bilineales sobre elementos rectangulares

Sea un elemento rectangular con nodos en los vértices y de lados paralelos a los ejes coordenados, las funciones base bilineales restringidas al elemento  $e_i$  toman la forma:

$$w_i^l = a + bx + cy + dxy. \quad (2.36)$$

Como vemos hace falta dar cuatro valores de la función para determinarla, tantos como nodos. Además, en cada lado es una función lineal que viene únicamente determinada por los dos nodos del lado. Esto es así porque se toman los lados paralelos a los ejes coordenados. En la figura 2.5 tenemos el elemento estándar que hemos tomado. La forma de las funciones base locales



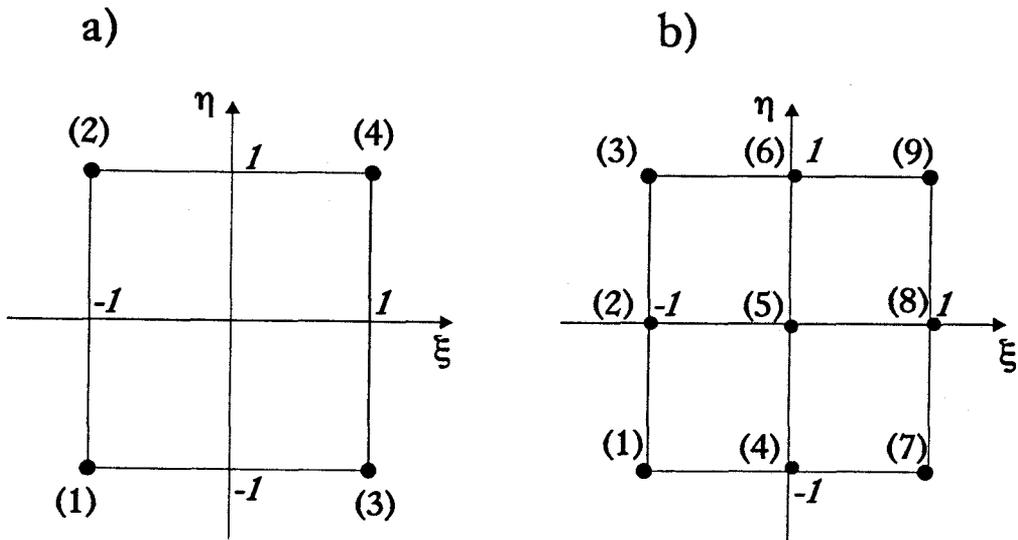


Figura 2.5: Elementos estándar para cuadrángulos: a) lineal y b) cuadrático.

es:

$$\begin{aligned}
 h_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \\
 h_2 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta), \\
 h_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \\
 h_4 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta).
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Como vemos son el producto de las funciones lineales en dirección  $\xi$  por las funciones en dirección  $\eta$ . La transformación que nos da cualquier rectángulo de lados paralelos a los ejes es:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{2}(x_3 - x_1)\xi + (x_3 + x_1), \\
 y &= \frac{1}{2}(y_2 - y_1)\eta + (y_2 + y_1).
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

### Funciones base bicuadráticas sobre elementos rectangulares

Sea un elemento rectangular de lados paralelos a los ejes con nodos en los vértices, en la mitad de cada lado, más uno en la intersección de las diagonales, las funciones base bicuadráticas restringidas al elemento toman la forma:

$$w_i^l = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + gx^2y + hxy^2 + ix^2y^2 \quad (2.39)$$

Tenemos nueve coeficientes determinados por los valores en los nueve nodos. Además en cada lado se tiene una función cuadrática únicamente determinada por los valores en los nodos del lado. El elemento estándar se presenta en la figura 2.5. Las funciones base locales se obtienen como el producto de las funciones cuadráticas unidimensionales,

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{4}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta), \\ h_2 &= \frac{1}{2}\xi(1-\xi)(1+\eta)(1-\eta), \\ h_3 &= \frac{1}{4}\xi(1-\xi)\eta(1+\eta), \\ h_4 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\xi)\eta(1-\eta), \\ h_5 &= (1+\xi)(1-\xi)(1+\eta)(1-\eta), \\ h_6 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\xi)\eta(1+\eta), \\ h_7 &= \frac{1}{4}\xi(1+\xi)\eta(1-\eta), \\ h_8 &= \frac{1}{2}\xi(1+\xi)(1+\eta)(1-\eta), \\ h_9 &= \frac{1}{4}\xi(1+\xi)\eta(1+\eta). \end{aligned} \quad (2.40)$$

La transformación de variables (2.38), sustituyendo los nodos 1, 2, 3, 4 por 1, 3, 7, 9 respectivamente, aplica el elemento estándar en cualquier elemento de lados paralelos a los ejes, conservando la orientación relativa de vértices y puntos medios.

La restricción a rectángulos con lados paralelos a los ejes limita el uso de los elementos rectangulares. Sin embargo, el empleo de la transforma-

ción isoparamétrica permite la extensión de los elementos de lados rectos a elementos de lados curvos.

En la figura 2.6 se representan las funciones base típicas de dos dimensiones que han sido descritas.

### Transformación isoparamétrica

Hasta ahora las transformaciones de coordenadas entre el elemento local y global que hemos considerado han sido lineales. La transformación isoparamétrica se define como [Zienkiewicz, 1977]:

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^T x_r h_r(\xi, \eta), \\ y &= y(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^T y_r h_r(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (2.41)$$

donde  $(x_r, y_r)$  son las coordenadas de los nodos en el espacio real,  $(\xi, \eta)$  las coordenadas en el elemento estándar y  $T$  el número de nodos del elemento. Es decir, la transformación toma las funciones base locales para describir cada una de las coordenadas. El elemento global  $e_l$  se define empleando la transformación sobre el elemento estándar. Puesto que  $h_l$  vale uno para el nodo  $l$  y cero para los demás, es claro que la transformación es tal que los nodos del elemento estándar se transforman en los nodos del elemento global. Además, cada lado del elemento estándar se aplica en un lado del elemento global, que en general es una curva.

La función base global sobre el elemento  $e_l$  se define como:

$$w_r^l(x, y) = h_r(\xi(x, y), \eta(x, y)), \quad (x, y) \in e_l \quad (2.42)$$

donde  $r = 1, \dots, T$ . Claramente las funciones globales cumplen para todo el dominio las condiciones

$$w_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, M. \quad (2.43)$$

Hacemos notar los siguientes puntos:

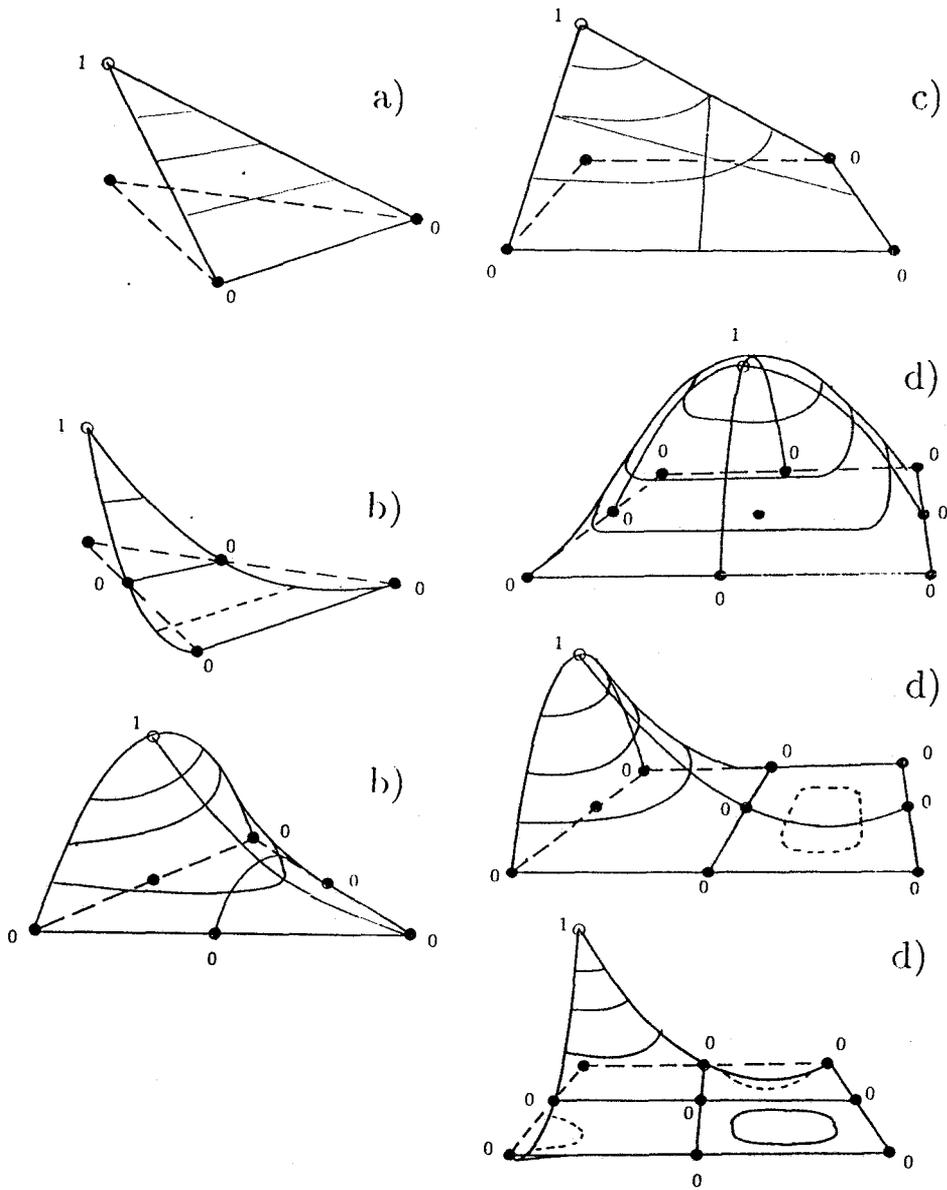


Figura 2.6: Funciones de interpolación típicas: (a) triángulos lineales y (b) cuadráticos; (c) cuadrángulos bilineales y (d) bicuadráticos.

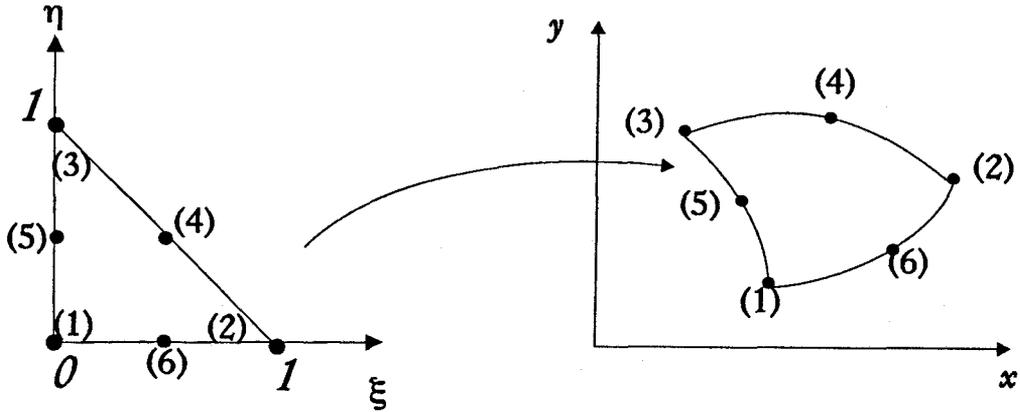


Figura 2.7: Aplicación del elemento triangular cuadrático estándar a través de la transformación isoparamétrica.

- Las diferencias entre los elementos y funciones base isoparamétricos y los elementos anteriores surgen todas de la sustitución de la transformación afín por la transformación isoparamétrica.
- Para que la transformación isoparamétrica sea invertible es necesario que los elementos no estén muy distorsionados respecto del correspondiente elemento no isoparamétrico.
- La gran libertad de la transformación permite adaptar los elementos a dominios con contornos curvos, reduciendo el error de discretización respecto al caso de elementos con lados rectos.
- Las funciones globales son a menudo complicadas funciones no lineales de  $x$  e  $y$ . Sin embargo, no es necesario obtenerlas porque las operaciones se realizan con las funciones base locales del elemento estándar. Por otro lado, el cálculo de las integrales que aparecen del método de Galerkin (en general ahora son integrales de funciones racionales) no ofrecen mayores problemas al realizarse numéricamente.

Como ejemplo, mediante el empleo de la transformación (2.41) con las funciones base locales (2.35), el triángulo del elemento cuadrático se transforma en un triángulo de lados parabólicos (ver figura 2.7).

## 2.3 Ecuaciones del MGEF. Puentes líquidos

Apliquemos ahora las ideas del método de Galerkin con funciones base de elementos finitos a nuestro problema. Los elementos empleados por nosotros han sido elementos cuadráticos unidimensionales para describir la interfase y elementos cuadrangulares bicuadráticos más triangulares cuadráticos para describir el potencial. Todos estos elementos son isoparamétricos.

### 2.3.1 Discretización de la ecuación del potencial

#### Forma débil

Como se vio en el capítulo anterior la ecuación que rige el potencial eléctrico es

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{en } \Omega_{\text{in}} \text{ y } \Omega_{\text{ex}}, \quad (2.44)$$

con condiciones de contorno:

$$\Phi(r, \Lambda) = \Lambda, \quad (2.45)$$

$$\Phi(r, -\Lambda) = -\Lambda, \quad (2.46)$$

$$\Phi_{\text{in}} = \Phi_{\text{ex}} \quad \text{en } r = f(z), \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial n} = \beta \frac{\partial \Phi_{\text{ex}}}{\partial n} \quad \text{en } r = f(z), \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad \text{en } r = 0, \quad (2.49)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0. \quad (2.50)$$

Como para aplicar el método de elementos finitos necesitamos un dominio finito, la condición (2.50), que se tiene para  $r \rightarrow \infty$ , se coloca a una cierta distancia grande,  $R_\infty$ . En el siguiente capítulo veremos cómo afecta  $R_\infty$  a la solución.

Para obtener la forma débil de la ecuación del potencial multiplicamos por una función arbitraria  $\Psi$  definida en todo  $\Omega$  la ecuación de Laplace en cada dominio e integramos en volumen. La función  $\Psi$  es tal que vale cero allí donde está fijado el potencial, en  $z = \pm\Lambda$ , y es continua a través de la interfase. Tenemos así para cada subdominio  $\Omega_i$

$$\int_{\Omega_i} \Psi \nabla^2 \Phi \, d\tau = 0. \quad (2.51)$$

Por aplicación del teorema de Green llegamos a

$$\int_{\Omega_i} \nabla \Psi \cdot \nabla \Phi \, d\tau = \int_{\partial\Omega_i} \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, dS, \quad (2.52)$$

donde la integral sobre la superficie sólo es distinta de cero en la interfase. Una característica del método es que las condiciones de contorno del tipo  $\partial\Phi/\partial n = 0$  no implican ningún término de superficie en la ecuación. Se llaman condiciones de contorno naturales y están implícitamente impuestas en la forma débil de la ecuación cuando no aparece el término de superficie. Si multiplicamos las ecuaciones (2.52) de cada medio por su permitividad correspondiente y sumamos llegamos a la forma débil de la ecuación del potencial

$$\int_{\Omega_{in}} \nabla \Psi \cdot \nabla \Phi \, d\tau + \beta \int_{\Omega_{ex}} \nabla \Psi \cdot \nabla \Phi \, d\tau = 0, \quad (2.53)$$

donde las integrales de superficie se cancelan al cumplirse la condición de contorno de igualdad de la normal del vector desplazamiento a través de la interfase (ecuación (2.48)). En el caso de un problema axisimétrico donde usamos coordenadas cilíndricas  $(r, z)$  la ecuación toma la forma

$$\int_{\Omega_{in}} r \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \, dr dz + \beta \int_{\Omega_{ex}} r \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \, dr dz = 0. \quad (2.54)$$

Para que las expresiones anteriores tengan sentido exigiremos que el espacio de funciones al que pertenecen  $\Psi$  y  $\Phi$  sea el de las funciones de cuadrado integrable hasta la primera derivada en el dominio  $\Omega = \Omega_{in} \cup \Omega_{ex}$ , esto es, que pertenezcan a  $H^1(\Omega)$ . La solución será una función de la forma  $\Phi \in \Phi_0 + H_0^1(\Omega)$  que cumpla (2.53) para toda  $\Psi \in H_0^1(\Omega)$  donde

$$H_0^1(\Omega) = \{ \Psi \in H^1(\Omega) / \Psi = 0 \text{ en } z = \pm \Lambda \}, \quad (2.55)$$

y  $\Phi_0$  es una función que pertenece a  $H^1(\Omega)$  que cumple las condiciones de Dirichlet.

### Discretización

Primeramente dividimos el dominio en elementos y numeramos los nodos desde 1 hasta  $M$ ,  $\{a_i\}_{i=1}^M$ . Hemos tomado elementos cuadrangulares bicuadráticos y triangulares cuadráticos, ambos isoparamétricos. De este modo,

el espacio discreto que elegimos está incluido en  $H^1(\Omega)$ . Sea este espacio  $W_h$  y sea  $V_h$  el subespacio de  $W_h$  tal que sus funciones cumplen  $\Psi(a_i) = 0$  para todo  $a_i$  sobre un contorno con una condición de Dirichlet. El subíndice  $h$  hace referencia al tamaño típico de los elementos. La dimensión de  $W_h$  es  $M$ , número de nodos, y la dimensión de  $V_h$  es  $M_0 \leq M$ , número total menos el de los nodos sobre  $z = \pm\Lambda$  (los que soportan una condición de Dirichlet).

La solución aproximada  $\Phi_h$  expresada en la base del MGEF será de la forma

$$\Phi = \sum_{i=1}^{M_0} \Phi_i w_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=M_0+1}^M \Phi_0(a_i) w_i(\mathbf{x}), \quad (2.56)$$

donde los valores  $\Phi_0(a_i)$  corresponden al valor del potencial en  $z = \pm\Lambda$ .

Sea  $L(u, v)$  el operador bilineal

$$L(u, v) = \int_{\Omega_{\text{in}}} \nabla u \cdot \nabla v \, d\tau + \beta \int_{\Omega_{\text{ex}}} \nabla u \cdot \nabla v \, d\tau, \quad (2.57)$$

entonces las ecuaciones que determinan las incógnitas  $\Phi_i$  se escriben como

$$\sum_{i=1}^{M_0} \Phi_i L(w_i, w_j) = - \sum_{i=M_0+1}^M \Phi_0(a_i) L(w_i, w_j), \quad j = 1, \dots, M_0. \quad (2.58)$$

La matriz  $l_{ij} = L(w_i, w_j)$  con  $i, j = 1, \dots, M_0$  se conoce como matriz de rigidez. La matriz sin imponer las condiciones de potencial fijo, esto es,  $l_{ij}$  con  $i, j = 1, \dots, M$  se conoce como matriz global de rigidez. Aunque cambiemos las condiciones en la frontera del dominio  $\Omega$  la matriz global de rigidez no cambia.

### Algunas propiedades

Si analizamos la matriz  $l_{ij}$  con  $i, j = 1, \dots, M_0$  vemos que es simétrica y que si  $\beta > 0$  es definida positiva. En efecto, sea  $v = \sum_{i=1}^{M_0} \alpha_i w_i$ , o sea,  $v \in V_h$  entonces

$$L(v, v) = \int_{\Omega_{\text{in}}} |\nabla v|^2 \, d\tau + \beta \int_{\Omega_{\text{ex}}} |\nabla v|^2 \, d\tau \geq 0. \quad (2.59)$$

Además, sólo se da la igualdad si  $v = 0$ , ya que si  $L(v, v) = 0$  implica que  $\nabla v = 0$ . Ha de ser entonces  $v = \text{Cte}$  y, dado que  $v = 0$  en  $z = \pm\Lambda$ , la

constante es cero. Así  $\sum_{i,j=1}^{M_0} \alpha_i \alpha_j L(w_i, w_j) \geq 0$  y sólo se da la igualdad cuando  $\alpha_i = 0$  con  $i = 1, \dots, M_0$ . Sabemos entonces que la matriz  $l_{ij}$  al ser definida positiva es invertible. Ello permite además usar métodos de cálculo especiales para la resolución del sistema lineal, como el de factorización de Cholesky. La matriz global de rigidez es semidefinida positiva y no invertible y corresponde al caso en que sólo hay condiciones de Neumann [Axelsson, 1984].

Teniendo en cuenta que las propiedades de la matriz  $l_{ij}$  provienen de las propiedades del operador bilineal  $L(u, v)$  podemos retomar el problema continuo y expresar el problema como el del cálculo de la función  $\Phi \in \Phi_0 + H_0^1(\Omega)$  que hace mínima la funcional

$$I(\Phi) = L(\Phi, \Phi). \quad (2.60)$$

Aparece así en el problema de potencial la conexión del método de Galerkin con el de Rayleigh-Ritz para problemas de minimización de funcionales.

### 2.3.2 Ecuación de Young-Laplace

#### Forma débil

La ecuación de equilibrio de fuerzas en la interfase en el caso de puentes líquidos axisimétricos es

$$\Delta \Pi + \chi \Delta \Pi_E + Bz + \frac{1 + f_z^2 - f f_{zz}}{f(1 + f_z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0, \quad (2.61)$$

con las condiciones de contorno:

$$f(\pm \Lambda) = 1, \quad (2.62)$$

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} f^2(z) dz = 2\Lambda\tau. \quad (2.63)$$

Buscamos ahora la forma débil de la ecuación. Sea  $g(z)$  una función tal que es cero para  $z = \pm \Lambda$ . Multipliquemos la ecuación (2.61) por  $g(z)f(z)$  e integremos en  $z$ . No existe una razón fundamental para multiplicar también por  $f$ , sin embargo, con esta elección los términos que van a aparecer en la ecuación pueden derivarse directamente minimizando la energía del sistema

[Brown, 1980]. Así, por ejemplo, el término asociado a la curvatura de la interfase surge de aplicar el cálculo de variaciones a  $\int f(1 + f_z^2)^{1/2} dz$ .

Empleando la siguiente identidad y una integración por partes

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{ff_z}{(1 + f_z^2)^{\frac{1}{2}}} \right) = (1 + f_z^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{ff_{zz} - 1 - f_z^2}{(1 + f_z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.64)$$

llegamos a

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \left\{ [\Delta\Pi + \chi\Delta\Pi_E + Bz]fg + (1 + f_z^2)^{\frac{1}{2}}g + \frac{ff_zg_z}{(1 + f_z^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} dz = 0, \quad (2.65)$$

donde los términos que se han ido al contorno son cero por ser  $g = 0$  en ellos. Vemos que la regularidad exigible a  $g$  y  $f$  es que pertenezcan al espacio de funciones  $H^1$  en el intervalo  $(-\Lambda, \Lambda)$ . La solución será la suma de una de las funciones  $g$  más una función de  $H^1$  que cumpla las condiciones de contorno de Dirichlet (2.62).

### Discretización

Para encontrar el subespacio de dimensión finita donde tendremos la solución aproximada dividimos el intervalo en elementos. Hemos tomado elementos cuadráticos porque son los lados de los elementos bidimensionales que previamente habíamos elegido. De modo que el espacio discreto es tal que sus funciones son continuas definidas por un polinomio de segundo grado en cada elemento.

La solución aproximada  $f(z)$  que nos da el método toma la forma

$$f(z) = \sum_{i=1}^N f_i v_i(z(\eta)), \quad (2.66)$$

donde  $v_i$  representa las funciones base unidimensionales. Notemos que los valores de los extremos  $f_1, f_N$  están fijados. Y el sistema de ecuaciones discreto queda

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \left\{ [\Delta\Pi + \chi\Delta\Pi_E + Bz]f v_i + (1 + f_z^2)^{\frac{1}{2}} v_i + \frac{ff_z v_{i,z}}{(1 + f_z^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} dz = 0, \quad i = 2, \dots, N - 1. \quad (2.67)$$

Puesto que la función  $\Delta\Pi_E$  es un conjunto de sumas del campo eléctrico al cuadrado, es una función discontinua a través de los elementos. Recordemos que la aproximación al potencial es continua y la del campo es discontinuo. Vemos que la aproximación de  $\Delta\Pi_E$  cumple la regularidad exigible para que la expresión sea integrable, pues es una función continua a trozos.

El sistema de ecuaciones anterior junto con la ecuación de restricción de volumen (2.63) para  $f(z)$  dada por (2.66) forman el sistema de ecuaciones algebraicas que provienen del equilibrio de tensiones en la interfase.

### 2.3.3 Resolución del sistema total

Consideremos las condiciones de contorno de potencial o interfase fijados como ecuaciones del tipo  $x_i - X_i = 0$ , donde  $x_i$  es la incógnita y  $X_i$  el valor que debe tomar. De este modo el conjunto de  $M + N + 1$  ecuaciones que tenemos que resolver puede escribirse como:

$$\sum_{i=1}^M l_{ij} \Phi_i = c_j, \quad j = 1, \dots, M, \quad (2.68)$$

$$F_k(f_1, \dots, f_N, f_{N+1}, \Delta\Pi_E) = 0, \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.69)$$

$$F_{N+1}(f_1, \dots, f_N) = 0. \quad (2.70)$$

Hacemos notar que  $c_j$  aparece en (2.68) a través de las ecuaciones  $x_i = X_i$  para los nodos con condición de Dirichlet, esto es,  $j > M_0$ . La ecuación  $k = N + 1$  es la correspondiente a la restricción de volumen y la incógnita  $f_{N+1}$  es  $\Delta\Pi$ . El conjunto de las incógnitas es  $(\Phi_1, \dots, \Phi_M, f_1, \dots, f_{N+1})$ .

Para la obtención de las soluciones hemos creído oportuno considerar la presión eléctrica como una función dada de la forma de la interfase,  $\Delta\Pi_E = \Delta\Pi_E(f_1, \dots, f_N)$ . Es una función única de la interfase a través del sistema lineal que da lugar al potencial. De esta manera manejamos un sistema de  $N + 1$  incógnitas aunque en rigor se resuelvan  $M + N + 1$ .

Cuando vamos variando uno de los parámetros que definen el sistema ( $\tau$ ,  $B$  ó  $\chi$ ) obtenemos una sucesión de soluciones que forman una curva en el espacio de  $\mathbf{x} = (f_1, \dots, f_{N+1}, \lambda)$ , donde  $\lambda$  es el parámetro que está variando. En previsión de los posibles puntos de retorno que podamos encontrarnos ampliamos en uno el número de incógnitas con el parámetro  $\lambda$ . La ecuación que se introduce para cerrar el sistema está basada en la longitud de arco de

la curva anterior [Keller, 1983]

$$F_{N+2} = \sum_{i=1}^{N+2} (x_i - x_i^*) \frac{dx_i^*}{ds} - \Delta s = 0. \quad (2.71)$$

En (2.71),  $s$  es el parámetro longitud del arco, los incrementos se toman con respecto a una solución previa  $\mathbf{x}^*$  y el vector  $d\mathbf{x}^*/ds$  es el unitario tangente a la curva en el punto solución anterior. Es pues un método de continuación.

Para la obtención de la solución aplicamos el método iterativo de Newton-Raphson al sistema de  $N + 2$  incógnitas. Como se sabe en este método se parte de una solución aproximada y las siguientes iteraciones se obtienen resolviendo

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}^k) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}^k), \quad (2.72)$$

donde  $J_{ij} \equiv \partial F_i / \partial x_j$  es la matriz jacobiana. En la última iteración se calcula el vector unitario tangente necesario para obtener la ecuación (2.71) del siguiente punto solución. Para ello se resuelve el sistema

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.73)$$

y se hace  $d\mathbf{x}/ds = \mathbf{y}/|\mathbf{y}|$ . Hacemos notar que  $\mathbf{y}$  sería un vector unitario si la diferencia entre  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}^*$  fuera infinitesimal.

Las derivadas respecto de  $f_j$  implican conocer las derivadas de la presión eléctrica, o sea,  $\partial \Delta \Pi_E / \partial f_j$ . Es, pues, necesario conocer cómo cambia el gradiente del potencial cuando se mueve un punto de la interfase,

$$\frac{\partial}{\partial f_j} \left( \sum_{i=1}^M \Phi_i \nabla w_i \right) = \sum_{i=1}^M \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial f_j} \nabla w_i + \Phi_i \frac{\partial}{\partial f_j} (\nabla w_i) \right). \quad (2.74)$$

El cálculo de la derivadas del potencial se obtiene mediante derivación del sistema lineal (2.68),

$$\mathbf{L} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial f_j} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial f_j} - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial f_j} \cdot \Phi. \quad (2.75)$$

Por todo lo cual se hace necesario construir una red que se deforme de manera continua cuando cambie la forma de la interfase. Los detalles se describirán en una sección posterior.

Puesto que el método de Newton necesita un primer ensayo,  $\mathbf{x}^0$ , que sea suficientemente próximo a la solución, se realiza un método de continuación de primer orden. Para poner en marcha el programa damos una solución conocida, por ejemplo la cilíndrica, y con la ecuación  $N + 2$  en la forma,

$$F_{N+2} = (x_{N+2} - x_{N+2}^*) - \Delta s = 0. \quad (2.76)$$

Los nuevos ensayos se obtienen por continuación en  $s$ ,

$$\mathbf{x}^0(s + \Delta s) = \mathbf{x}(s) + \Delta s \frac{d\mathbf{x}}{ds}. \quad (2.77)$$

Los incrementos de arco pueden ser elegidos automáticamente de manera que se adapten a las variaciones de  $\mathbf{x}(s)$ . Para ello empleamos la diferencia entre el ensayo y la solución, como en los esquemas predictor-corrector [Press, 1989]. Se basa en que la razón de estas diferencias entre pasos consecutivos es

$$\frac{|\mathbf{x}_{i+1}^0 - \mathbf{x}_{i+1}|}{|\mathbf{x}_i^0 - \mathbf{x}_i|} \simeq \frac{(\Delta s_{i+1})^2 |\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}|}{(\Delta s_i)^2 |\ddot{\mathbf{x}}_i|} \simeq \left( \frac{\Delta s_{i+1}}{\Delta s_i} \right)^2, \quad (2.78)$$

donde  $\ddot{\mathbf{x}}$  indica  $d^2\mathbf{x}/ds^2$ . Eligiendo que la diferencia sea una dada, digamos  $\epsilon$ , se tiene

$$(\Delta s_{i+1})^2 = \frac{\epsilon}{|\mathbf{x}_i^0 - \mathbf{x}_i|} (\Delta s_i)^2. \quad (2.79)$$

### Descripción de los diagramas de bifurcación

Los cambios en la estabilidad de las soluciones se detectan cuando aparece o un punto de retorno o un punto de bifurcación [Iooss, 1980]. Ambos son puntos de estabilidad marginal. En ellos el jacobiano del sistema, considerando  $\lambda$  como un parámetro fijado, es cero. O sea, la matriz

$$\hat{\mathbf{J}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{f}} \quad (2.80)$$

es singular. El jacobiano de  $\mathbf{J}$ , que incluye la ecuación  $F_{N+2}$ , no es nulo en el punto de retorno, sólo en el de bifurcación. Así, mientras  $\hat{\mathbf{J}}$  es singular

en ambos casos,  $\mathbf{J}$  sólo lo es en los puntos de bifurcación. Los puntos de retorno se detectan por la aparición de una tangente vertical  $\partial f_i / \partial \lambda$ . Los puntos de bifurcación se detectan por la anulación del jacobiano de  $\mathbf{J}$ . Si el punto de bifurcación es simple, esto es, uno en que sólo un autovalor es cero, entonces el jacobiano pasa por cero cambiando de signo, marcando la localización del punto de bifurcación. Así, para cada punto de la rama de soluciones se evalúa el determinante del sistema en la última iteración del método de Newton. El cambio de signo en el determinante nos indica un intervalo donde está el punto de bifurcación. Para trazar la nueva familia que aparece, la rama que se bifurca, calculamos el autovector crítico de  $\mathbf{J}$  y tomamos el ensayo para la nueva rama [Basaran, 1989a] en la forma

$$\mathbf{x}^0(s^* + \Delta s) = \mathbf{x}(s^*) + \mathbf{u}\Delta s, \quad (2.81)$$

donde  $\mathbf{x}(s^*)$  es la solución en el punto de bifurcación y  $\mathbf{u}$  es el autovector crítico. En la práctica tenemos una aproximación de  $\mathbf{x}(s^*)$ . Además, la ecuación  $F_{N+2}$  ha de escribirse como

$$F_{N+2} = \sum_{i=1}^{N+2} (x_i - x_i^*)u_i - \Delta s. \quad (2.82)$$

Este autovector, asociado al autovalor cero, se obtiene mediante un paso de iteración inversa [Press, 1989] resolviendo el sistema

$$\mathbf{J}(s^*) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad (2.83)$$

donde  $\mathbf{b}$  es un vector suficientemente arbitrario. Si escribimos los vectores  $\mathbf{y}$  y  $\mathbf{b}$  en función de los autovectores de  $\mathbf{J}$  entonces la solución de (2.83) toma la forma

$$\mathbf{y} = \sum_i \frac{b_i}{\lambda_i} \mathbf{u}_i, \quad (2.84)$$

donde  $\lambda_i$  y  $\mathbf{u}_i$  son, respectivamente, los autovalores y autovectores de  $\mathbf{J}$  y donde  $b_i$  son la componentes de  $\mathbf{b}$  en la base de autovectores. Sea  $\lambda_1$  la aproximación numérica al autovalor cero, vemos entonces que, salvo que  $b_1$  sea cero, el vector  $\mathbf{y}$  tendrá una proyección muy grande en la dirección del autovector crítico  $\mathbf{u}$ . Sucesivas iteraciones con  $\mathbf{b} = \mathbf{y}/|\mathbf{y}|$  convergen a  $\mathbf{u}$ . En nuestro caso una iteración se ha mostrado suficiente para tener la dirección en la que buscamos la solución de la nueva rama.

Notemos que al cumplirse  $\mathbf{J}(s^*) \cdot \mathbf{u} = 0$  se está imponiendo, por la fila de la matriz  $\partial F_{N+2}/\partial x_i$ , que  $d\mathbf{x}/ds \cdot \mathbf{u} = 0$ . Esto es, el autovector crítico es perpendicular al vector tangente de la rama principal. En el punto de bifurcación simple se cruzan dos ramas determinándose un plano con sus vectores tangentes en dicho punto. Conocemos el vector tangente de la rama principal y mediante el método de iteración inversa obtenemos el vector unitario perpendicular a éste en ese plano. Haciendo  $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^* + \Delta s \mathbf{u}$  estamos buscando soluciones que tengan alguna proyección perpendicular a la dirección de la familia principal. Esto no quiere decir, por otra parte, que las dos ramas se corten perpendicularmente.

## 2.4 Detalles de la computación

### 2.4.1 Obtención de $\Delta \Pi_E$ y $\partial \Delta \Pi_E / \partial f$

#### Mallado

El dominio  $\Omega$  está dividido en dos regiones por la interfase. Es la forma de la interfase la que nos va a determinar la malla de elementos de una forma unívoca.

El dominio  $\Omega$  es  $(-\Lambda \leq z \leq \Lambda) \times (0 \leq r \leq R_\infty)$ .  $\Omega$  se divide en un conjunto de  $N_r \times N_z$  elementos cuadrangulares de nueve nodos, donde  $N_r$  y  $N_z$  son el número de elementos en las direcciones  $r$  y  $z$ , respectivamente. Del total de elementos,  $N_{ri} \times N_z$  forman el subdominio interior y  $N_{re} \times N_z$  forman el subdominio exterior. Se tiene, pues,  $N_r = N_{ri} + N_{re}$ . Los bordes de los elementos los constituyen una serie de líneas rectas fijas, llamadas líneas espinales (*spines*) [Saito, 1981], y una serie de líneas curvas.

Las líneas espinales son rectas fijas donde los nodos pueden moverse para así adaptar la forma del mallado a la interfase. Los nodos sobre una línea espinal vienen determinados por la posición de un nodo fijo, por la del nodo de la interfase correspondiente y por un número  $t$  fijado entre 0 y 1, en la forma,

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_a + t_k(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a). \quad (2.85)$$

Aquí  $\mathbf{x}_a$  representa las coordenadas del nodo que no se mueve en la espinal y  $\mathbf{x}_b$  las coordenadas del punto de la interfase que pertenece a la línea espinal. Así, para  $t = 0$  estamos sobre el nodo fijo y para  $t = 1$  sobre el nodo de la

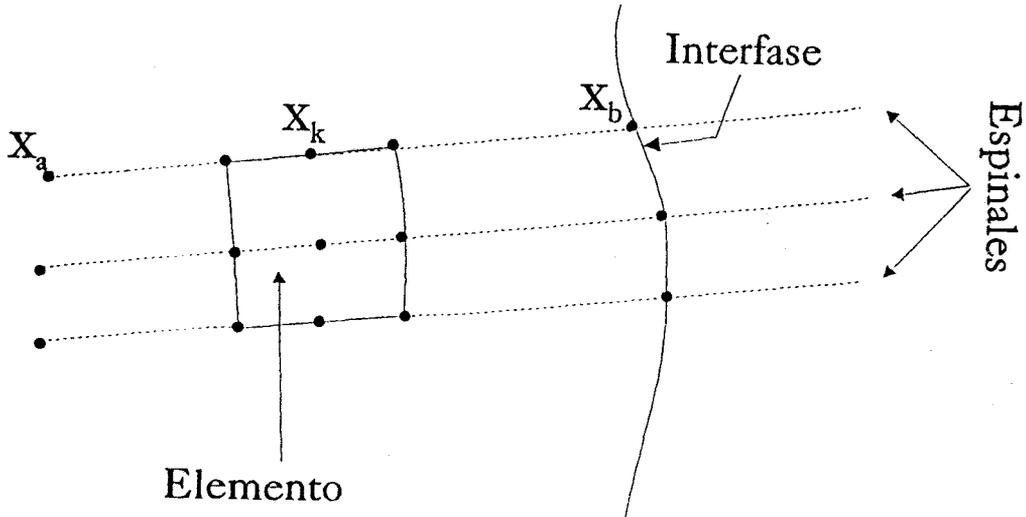


Figura 2.8: Nodos en una línea espinal.

interfase. Notemos que la posición relativa entre nodos dentro de una misma espinal se conserva.

En nuestro caso, las líneas espinales están colocadas en  $z = \text{Cte}$  y vienen definidas en ambos subdominios por

$$z_{2i-1} = s_{2i-1}2\Lambda - \Lambda, \quad i = 1, \dots, N_z + 1, \quad (2.86)$$

donde  $s_{2i-1}$  son pesos comprendidos entre  $(0,1)$ . Las líneas curvas en el dominio interior vienen dadas por

$$r_{2j-1}(z) = t_{2j-1}f(z), \quad j = 1, \dots, N_{ri} + 1, \quad (2.87)$$

donde  $f(z)$  es la función que describe la interfase. Vemos que si  $t = 0$  la línea está sobre el eje y si  $t = 1$  está sobre la interfase. Las líneas curvas en el dominio exterior son

$$r_{2j-1}(z) = R_\infty - t_{2j-1}(R_\infty - f(z)), \quad j = 1, \dots, N_{re} + 1, \quad (2.88)$$

donde ahora si  $t = 0$  la línea es el lado  $r = R_\infty$  y si  $t = 1$  es la interfase. La intersección de las líneas curvas y espinales hasta ahora descritas define sólo la posición de los nodos vértices de los elementos. Para determinar la posición

de los nodos en la mitad de cada lado y en el interior de cada elemento requerimos que las líneas espinales y las curvas que los definen satisfagan

$$\begin{aligned} z_{2i} &= \frac{s_{2i-1} + s_{2i+1}}{2}, & i &= 1, \dots, N_z, \\ r_{2j} &= \frac{r_{2j-1} + r_{2j+1}}{2}, & j &= 1, \dots, N_{ri} \text{ ó } j = 1, \dots, N_{re}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

La última ecuación es equivalente a decir que  $t_{2j} = (t_{2j+1} + t_{2j-1})/2$ .

La distancia entre nodos vértices sigue una progresión geométrica de acercamiento a la interfase y a los electrodos. De esta manera tenemos en cuenta que las variaciones del potencial son más significativas cerca de la interfase y de las líneas de contacto. Además, hemos dividido cada elemento cuadrangular que tiene por vértice alguna de las líneas de contacto en dos triángulos de modo que ningún elemento tiene por lados un segmento de la interfase y un segmento de electrodo a la vez. Esto es, ningún elemento soporta dos condiciones de contorno y evitamos así ciertas oscilaciones que aparezcan en la obtención de la presión eléctrica con elementos puramente cuadrangulares. Aunque se describirá en el siguiente capítulo, podemos tener una primera explicación basada en que estos elementos cuadrangulares que contienen a la línea de contacto presuponen una variación suave entre el potencial en la interfase y en los electrodos. Sin embargo, esto no es así en general al estar sometidos a diferentes condiciones de contorno en cada lado. La división en triángulos permite que cada elemento soporte una condición de contorno distinta.

La forma de la red para una interfase típica se presenta en la figura 2.9, donde también representamos las condiciones de contorno. El número total de nodos es  $M = (2N_r + 1)(2N_z + 1)$ . La numeración de éstos comienza en la esquina inferior izquierda y crece de abajo a arriba y de izquierda a derecha. La elección del número de elementos, de la razón de la progresión geométrica y del valor de  $R_\infty$  se dará en el próximo capítulo.

### Formación de la matriz de rigidez

El procedimiento computacional se describe más fácilmente en términos de matrices de orden  $M \times M$ , aunque en la práctica no se almacenan los datos en estas matrices pues tienen muchos ceros. Hemos tomado  $M$  (número total de nodos) como dimensión de las matrices en vez de  $M_0$  (número de

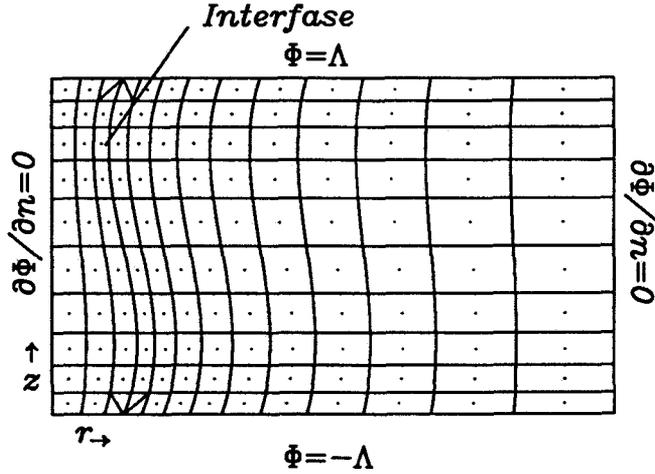


Figura 2.9: Malla de elementos finitos para el puente líquido.

incógnitas del potencial) con la idea de hacer la computación independiente de las condiciones de contorno tanto como sea posible.

Para evaluar la matriz de rigidez tenemos que calcular en todo  $\Omega$  (ecuación (2.54))

$$l_{ij} = \int r \epsilon \left( \frac{\partial w_i}{\partial r} \frac{\partial w_j}{\partial r} + \frac{\partial w_i}{\partial z} \frac{\partial w_j}{\partial z} \right) dr dz, \quad (2.90)$$

donde  $\epsilon$  toma el valor 1 para el subdominio interior y  $\beta$  para el exterior. Para lo cual se va elemento a elemento computando las contribuciones no nulas a la matriz. Se tienen pues

$$l_{ij} = \sum_{l=1}^{N_e} l_{ij}^l, \quad (2.91)$$

donde  $l = 1, \dots, N_e$  son cada uno de los elementos. Notemos que cada elemento contribuye a la matriz en  $T \times T$  coeficientes, siendo  $T$  el número de nodos del elemento.

Las integraciones se realizan en el elemento estándar de la transformación isoparamétrica empleando las funciones base locales. Sean  $r_\xi, r_\eta, z_\xi, z_\eta$  las derivadas parciales de  $r, z$  respecto de las coordenadas locales  $\xi, \eta$ . Denotemos por  $h_{i,\xi}$  la derivada parcial de la función base local  $i$  respecto de la coordenada  $\xi$ . Entonces, la contribución del elemento global  $e_l$  a (2.90)

cuando se expresa en las coordenadas locales del elemento estándar  $\hat{e}$  es

$$l_{ij}^e = \int_{\hat{e}} r \epsilon D^{-1} [E_1 h_{i,\xi} h_{j,\xi} - E_2 (h_{i,\xi} h_{j,\eta} + h_{i,\eta} h_{j,\xi}) + E_3 h_{i,\eta} h_{j,\eta}] d\xi d\eta, \quad (2.92)$$

donde

$$\begin{aligned} D &= r_\xi z_\eta - r_\eta z_\xi, & E_1 &= r_\eta^2 + z_\eta^2, \\ E_2 &= r_\xi r_\eta + z_\eta z_\xi, & E_3 &= r_\xi^2 + z_\xi^2. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Hacemos notar que la expresión del jacobiano de la transformación de coordenadas,  $D$ , puede elegirse de forma que sea positivo. Vemos que el conocimiento de las funciones locales y de la transformación (2.41) hace que el integrando sea una función conocida de  $\xi$ ,  $\eta$ . La dependencia de (2.92) con  $e_l$  tiene lugar sólo a través de la transformación isoparamétrica ya que las funciones locales son independientes.

El integrando de (2.92) es una función racional complicada cuya integración ha de realizarse numéricamente en general. La integración numérica de

$$I = \int_e g(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.94)$$

típicamente tiene la forma

$$I_A = \sum_{m=1}^Q p_m g(\xi_m, \eta_m), \quad (2.95)$$

donde  $(x_m, y_m)$  son los puntos de integración,  $p_m$  los correspondientes pesos y  $Q$  es el número de puntos de integración. Tanto los pesos como los puntos de integración son independientes de la función  $g(\xi, \eta)$ . Existen muchas fórmulas de este tipo para un dominio dado  $e$ . Las fórmulas que se suelen usar en elementos finitos son de tipo interpolante. En ellas se sustituye el integrando por una interpolación de éste y se integra. Entonces los pesos  $p_m$  son la integración de los polinomios que se usan en la interpolación y los puntos de integración son el soporte de la interpolación. Se dice que una fórmula es exacta hasta orden  $n$  si integra exactamente cualquier polinomio de grado menor o igual que  $n$ .

Por un lado nos gustaría tener una fórmula que tomara pocos puntos para ahorrar cálculos, por otro lado, existe un requerimiento de  $Q$  grande para tener suficiente precisión. Ésta ha de ser tal que no disminuya el orden de convergencia asociado con las funciones base. Se pueden ver distintas fórmulas de integración y la convergencia asociada a ellas en [Zienkiewicz, 1977].

Nosotros hemos elegido las fórmulas de integración gaussiana de 9 puntos para los cuadriláteros (exacta hasta orden 5 en cada dirección) y de 7 puntos para los triángulos (exacta en un polinomio bidimensional hasta orden 5) [Strang, 1973]. Para las integrales en una dimensión hemos usado las fórmulas de 3 puntos (exacta hasta orden 5). En las tablas 2.1, 2.2, 2.3 se muestran los pesos y los puntos de integración que en una y dos dimensiones hemos usado.

La aplicación de una fórmula de integración es fácil de introducir en términos de las matrices  $P$ ,  $H$ ,  $H_X$  y  $H_Y$  con los siguientes contenidos:

$$\begin{aligned} P(m) &= p_m, \\ H(r, m) &= h_r(\xi_m, \eta_m), \\ H_X(r, m) &= h_{r,\xi}(\xi_m, \eta_m), \\ H_Y(r, m) &= h_{r,\eta}(\xi_m, \eta_m), \end{aligned} \tag{2.96}$$

para  $r = 1, \dots, T$  y  $m = 1, \dots, m$ . Estas matrices se cargan al principio de las computaciones ya que no dependen para nada del elemento  $e_l$ .

### Almacenamiento de la matriz

El almacenamiento de la matriz de rigidez depende del método que se use para resolver el sistema lineal. Nosotros hemos tomado un método directo de resolución (frente a uno iterativo) como es el método de Cholesky. Por esto, los valores de la matriz de rigidez se guardan mediante el almacenamiento de banda variable, también llamado orden perfil. El aspecto de una matriz de rigidez simétrica típica se muestra en la figura 2.10. Como la matriz es simétrica sólo guardamos los elementos  $l_{ij}$  con  $i \geq j$ . Para cada fila almacenamos los elementos a partir del primero no nulo hasta la diagonal. Se hacen necesarias dos matrices unidimensionales,  $S$  para almacenar los valores de la matriz de rigidez y MDIAG para señalar dónde están los elementos de la diagonal en la matriz  $S$ . De este modo el elemento  $l_{ij}$  se almacena en la

Punto	1	2	3
$\xi$	$-(3/5)^{1/2}$	0	$(3/5)^{1/2}$
Pesos	5/9	8/9	5/9

Tabla 2.1: Puntos de integración en el elemento cuadrático unidimensional.

Punto	1	2	3	4	5	6	7
$\xi$	1/3	$a_1$	$b_1$	$a_1$	$a_2$	$b_2$	$a_2$
$\eta$	1/3	$a_1$	$a_1$	$b_1$	$a_2$	$a_2$	$b_2$
Pesos	$c_1$	$c_2$	$c_2$	$c_2$	$c_3$	$c_3$	$c_3$

Tabla 2.2: Puntos de integración en el elemento triangular cuadrático.  $a_1 = 0.4701420641$ ,  $a_2 = 0.1012865073$ ,  $b_1 = 0.0597158717$ ,  $b_2 = 0.7974269853$ ,  $c_1 = 0.2250000000$ ,  $c_2 = 0.1323941527$ ,  $c_3 = 0.1259391805$ 

Punto	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\xi$	$-a$	$-a$	$-a$	0	0	0	$a$	$a$	$a$
$\eta$	$-a$	0	$a$	$-a$	0	$a$	$-a$	0	$a$
Pesos	$c_3$	$c_2$	$c_3$	$c_2$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_2$	$c_3$

Tabla 2.3: Puntos de integración en el elemento cuadrangular bicuadrático.  $a = (3/5)^{1/2}$ ,  $c_1 = 64/81$ ,  $c_2 = 40/81$ ,  $c_3 = 25/81$ .

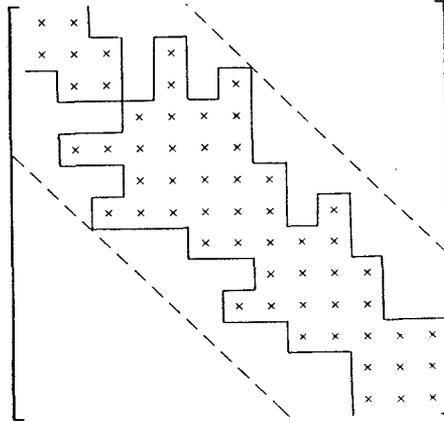


Figura 2.10: Estructura de banda variable de la matriz de rigidez.

posición

$$S(\text{MDIAG}(i) - (i - j)) = l_{ij}, \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, i. \quad (2.97)$$

Para calcular MDIAG hemos hecho uso de una matriz intermedia LONG que nos mide para cada fila  $i$  cuánto vale la diferencia  $i - j$  siendo  $j$  el primer elemento no nulo de la fila. De este modo,  $\text{LONG}(i)$  nos describe la anchura de banda de cada fila  $i$ . En el contexto de elementos finitos la anchura de banda de la fila  $i$  indica la máxima diferencia en numeración entre nodos que están conectados (que pertenecen a un mismo elemento) con  $j < i$ . Para calcular LONG vamos elemento a elemento y para cada nodo  $i$  obtenemos cuál es el nodo  $j$  que tiene menor numeración. El algoritmo es

para  $k = 1, \dots, T$  hacer  
 si  $\text{LONG}(I(k))$  es menor que  $I(k) - I_{\min}$  entonces  
 $\text{LONG}(i) = I(k) - I_{\min}$   
 fin,

donde  $I(k)$  contiene la numeración global de los nodos y donde  $I_{\min}$  es el número global más bajo de los nodos del elemento. Una vez que tenemos LONG la determinación de MDIAG se tiene por

$$\begin{aligned} \text{MDIAG}(1) &= 1, \\ \text{MDIAG}(i) &= \text{LONG}(i) + \text{MDIAG}(i - 1) + 1, \quad i = 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (2.98)$$

### Condiciones de potencial dado

Una vez que hemos asignado valores a la matriz global de rigidez tenemos que imponer las condiciones de potenciales fijos. Queremos resolver el problema lineal

$$\sum_{i=1}^M \Phi_i L(w_i, w_j) = 0 \quad j = 1, \dots, M_0, \quad (2.99)$$

donde las incógnitas van desde  $i = 1$  hasta  $M_0$ . Lo que hacemos es extender el sistema hasta  $j = M$  con ecuaciones del tipo  $\Phi_i = \Phi(a_i)$  para los nodos de potencial dado.

Para programar el sistema anterior partiendo de la matriz de rigidez global,  $l_{ij}$ , con  $i, j = 1, \dots, M$ , hacemos para cada punto  $i$  con potencial dado  $\Phi(a_i)$ :

$$\begin{aligned} l_{i,i} &= Q, \\ c_i &= \Phi(a_i)Q, \end{aligned} \quad (2.100)$$

donde  $Q$  es un número muy grande de modo que la ecuación  $i$  tiene una solución  $\Phi_i = \Phi(a_i) + O(Q^{-1})$ . El sistema tiene pues la forma  $\mathbf{L} \cdot \Phi = \mathbf{C}$ . En la práctica, un valor de  $Q = 10^{20}$  produce resultados idénticos a los que se obtienen por cualquier otro método, con la ventaja de ser éste bastante rápido.

### Resolución del sistema de ecuaciones

La solución del sistema de ecuaciones discretas para el potencial se realiza mediante el método de factorización de Cholesky.

Si tenemos un sistema lineal  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{C}$ , donde  $\mathbf{L}$  es una matriz  $M \times M$  y  $\mathbf{x}, \mathbf{C}$  son vectores de dimensión  $M$ , el método de Cholesky resuelve este sistema encontrando una matriz  $\mathbf{R}$  que es triangular inferior, esto es que  $r_{ij} = 0$  si  $i < j$ , y que el producto de ésta por su traspuesta da la matriz  $\mathbf{L}$ , esto es,  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^t = \mathbf{L}$ . Una vez que tenemos la matriz  $\mathbf{R}$  el sistema se soluciona en dos pasos, primero se soluciona  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{C}$  y seguidamente se resuelve  $\mathbf{R}^t \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$ . La condición necesaria y suficiente para que la matriz  $\mathbf{L}$  pueda factorizarse en la forma  $\mathbf{L} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^t$  es que la matriz sea definida positiva [Axelsson, 1984].

En el caso de que la matriz  $\mathbf{L}$  sea una matriz en banda variable, la matriz  $\mathbf{R}$  es una matriz triangular inferior con la misma banda variable que  $\mathbf{L}$ .

Las expresiones para calcular  $\mathbf{R}$  son las siguientes:

$$\begin{aligned} r_{11} &= \sqrt{l_{11}}, \\ r_{ij} &= \frac{l_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} r_{ik}r_{jk}}{r_{jj}}, \quad j < i, \\ r_{ii} &= \sqrt{l_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ik}^2}. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Las expresiones para calcular  $y_i$  y después  $x_i$  son:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{b_1}{r_{11}}, \\ y_i &= \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ik}y_k}{r_{ii}}, \\ x_n &= \frac{y_M}{r_{MM}}, \\ x_i &= \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^M r_{ki}y_k}{r_{ii}}. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Para tener en cuenta la estructura de banda variable el algoritmo para la obtención de  $\mathbf{R}$  es

```

r11 = l11
para i = 2 hasta M hacer
  para j = i - LONG(i) hasta i - 1 hacer
    rij = lij,
    q = max(i - LONG(i), j - LONG(j)),
    para k = q hasta j - 1 hacer
      rij = rij - rikrjk,
    fin,
    rij = rij/rjj,
  fin,
  rii = lii,
  para k = i - LONG(i) hasta i - 1 hacer
    rii = rii - rik2,
  fin,

```

$l_{ii} = \sqrt{l_{ii}},$   
fin,

El algoritmo para obtener  $y$  es

$y_1 = c_1/r_{11},$   
para  $i = 2$  hasta  $M$  hacer  
     $y_i = c_i,$   
    para  $j = i - \text{LONG}(i)$  hasta  $i - 1$  hacer  
         $y_i = y_i - r_{ij}y_j,$   
    fin,  
     $y_i = y_i/r_{ii},$   
fin.

Y el algoritmo para obtener  $x$  es

para  $i = 1$  hasta  $M$  hacer  
     $x_i = y_i/r_{ii},$   
fin,  
para  $i = M$  hasta 2, con paso  $-1$ , hacer  
    para  $j = i - \text{LONG}(i)$  hasta  $i - 1$  hacer  
         $x_i = x_i - r_{ij}y_j/r_{jj},$   
    fin,  
fin.

### Cálculo de los campos

Una vez que tenemos el potencial nuestro objetivo es encontrar los campos  $E_t^2$  y  $E_n^2$  en la interfase para así calcular la presión eléctrica  $\Delta\Pi_E$ . Los valores de los campos sólo los necesitamos en los puntos de las fórmula de integración. Así la presión eléctrica aparece en la ecuación (2.67) en la forma

$$\int v_i(z)f(z)\Delta\Pi_E(z) dz,$$

y mediante la transformación isoparamétrica sobre cada elemento toma la forma

$$\int v_i(\eta)f(\eta)\Delta\Pi_E(\eta)z_\eta d\eta.$$

Calcularemos, pues,  $\{\Delta\Pi_E(\eta_m)\}_{m=1}^Q$  en cada elemento que describe la interfase, donde  $Q$  es el número de puntos de integración.

$E_t$  puede calcularse con los valores del potencial a lo largo de la interfase. La expresión de  $E_t = \partial\Phi/\partial t$  en función de las coordenadas locales de una dimensión es

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \left(\frac{dt}{d\eta}\right)^{-1} = (z_\eta^2 + r_\eta^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^3 \Phi_i h_{i,\eta}, \quad (2.103)$$

con  $z(\eta)$  y  $r(\eta)$  las coordenadas de la interfase y donde  $h_i$  son funciones cuadráticas unidimensionales.

Para obtener  $E_n^2$  calculamos  $E^2$  y tenemos en cuenta que  $E_n^2 = E^2 - E_t^2$ . Para calcular  $E^2$  son necesarios los valores del potencial en los nodos del elemento bidimensional adyacente a la interfase. Además, debido a la diferencia de permitividades,  $E^2$  toma valores distintos sobre la interfase dependiendo si estamos a un lado o al otro de la interfase.

Tomamos el elemento estándar y ahí definimos qué lado se transforma en el segmento de la interfase y en qué sentido se recorre. Sea éste el lado con  $\xi = 1$  para el elemento cuadrangular y con  $\xi = 0$  para el triangular (ver figura 2.11). Debemos pues computar para  $\xi = \text{Cte}$ ,

$$E^2 = \sum_{i,j=1}^T D^{-2} [E_1 h_{i,\xi} h_{j,\xi} - E_2 (h_{i,\xi} h_{j,\eta} + h_{i,\eta} h_{j,\xi}) + E_3 h_{i,\eta} h_{j,\eta}] \Phi_i \Phi_j, \quad (2.104)$$

donde  $D$ ,  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  están definidos en (2.93) y  $h_i$  son las funciones de forma bidimensionales. Una vez que tenemos  $E_t^2$ ,  $E_{\text{in}}^2$  y  $E_{\text{ex}}^2$  obtenemos  $\Delta\Pi_E$  por

$$\Delta\Pi_E = (\beta - 1)E_t^2 - \frac{1}{2}(\beta E_{\text{ex}}^2 - E_{\text{in}}^2). \quad (2.105)$$

#### Cálculo de $\partial\mathbf{L}/\partial f_k \cdot \Phi$ y $\partial\Phi/\partial f_k$

Puesto que todas las operaciones se realizan en el elemento estándar, el cual no cambia de forma, vemos que todas las derivadas respecto de  $f_k$ , coordenadas radiales de la interfase, se pueden realizar de una manera sistemática empleando la transformación isoparamétrica. Los coeficientes de  $\partial\mathbf{L}/\partial f_k \cdot \Phi$

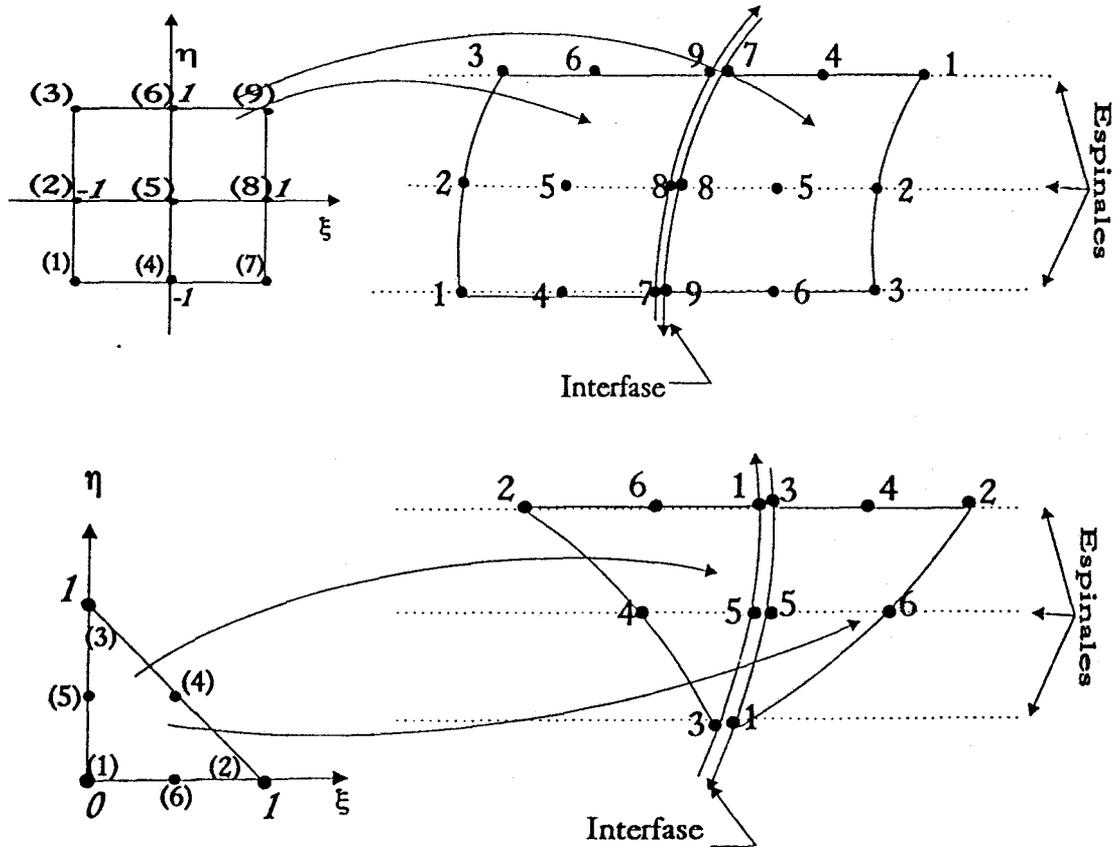


Figura 2.11: Transformaciones de los elementos estándar triangular y cuadrangular en elementos que tienen un lado perteneciente a la interfase

los almacenamos en la matriz  $\mathbf{G}$ , definida como  $M \times N$ . Así la contribución del elemento  $l$  a la derivada de  $\sum_j l_{ij}\Phi_j$  respecto de  $f_k$  es

$$g_{ik}^l = \sum_{j=1}^T \Phi_j \int_{\hat{e}} \epsilon \left( \frac{\partial r}{\partial f_k} D^{-1} A_{ij} - r D^{-2} \frac{\partial D}{\partial f_k} A_{ij} + r D^{-1} \frac{\partial A_{ij}}{\partial f_k} \right) d\xi d\eta, \quad (2.106)$$

donde

$$A_{ij} = E_1 h_{i,\xi} h_{j,\xi} - E_2 (h_{i,\xi} h_{j,\eta} + h_{i,\eta} h_{j,\xi}) + E_3 h_{i,\eta} h_{j,\eta},$$

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial f_k} = \frac{\partial E_1}{\partial f_k} h_{i,\xi} h_{j,\xi} - \frac{\partial E_2}{\partial f_k} (h_{i,\xi} h_{j,\eta} + h_{i,\eta} h_{j,\xi}) + \frac{\partial E_3}{\partial f_k} h_{i,\eta} h_{j,\eta}, \quad (2.107)$$

$$\frac{\partial D}{\partial f_k} = \frac{\partial r_\xi}{\partial f_k} z_\eta - \frac{\partial r_\eta}{\partial f_k} z_\xi, \quad \frac{\partial E_1}{\partial f_k} = 2r_\eta \frac{\partial r_\eta}{\partial f_k},$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial f_k} = \frac{\partial r_\xi}{\partial f_k} r_\eta + r_\xi \frac{\partial r_\eta}{\partial f_k}, \quad \frac{\partial E_3}{\partial f_k} = 2r_\xi \frac{\partial r_\xi}{\partial f_k}. \quad (2.108)$$

Y hemos tenido en cuenta que las líneas espinales están tomadas para  $z$  constante, con lo que las derivadas de las funciones  $z$ ,  $z_\xi$  y  $z_\eta$  son nulas. La derivada de  $r$  es

$$\frac{\partial r}{\partial f_k} = \sum_{i=1}^T \frac{\partial r_i}{\partial f_k} h_i(\xi, \eta). \quad (2.109)$$

Y del mismo modo se obtienen  $\partial r_\xi / \partial f_k$ ,  $\partial r_\eta / \partial f_k$ . Hacemos notar que en cada elemento sólo se deriva respecto de tres valores de la interfase y, además, que cada nodo sólo tiene derivada distinta de cero respecto del valor  $f_k$  de la interfase que pertenece al mismo espinal.

Aunque  $\mathbf{G}$  es una matriz con muchos ceros (la ecuación  $i$  a lo sumo depende de 5 puntos de la interfase) cuando se resuelve el sistema (2.75) almacenamos en  $\mathbf{G}$  los coeficientes  $\partial\Phi/\partial f_k$  que sí la llenan completamente. Al observar la ecuación (2.75) vemos que deberíamos obtener  $\partial c_i / \partial f_k$ . Sin embargo, puesto que hemos elegido la técnica de penalizar las ecuaciones relacionadas con los nodos de potencial dado (ver (2.100)) el vector  $\mathbf{C}$  no depende de  $f_k$  y por ello los sistemas que se resuelven son

$$\sum_{j=1}^M l_{ij} \frac{\partial \Phi_j}{\partial f_k} = -g_{ik} \quad i = 1, \dots, M, \quad (2.110)$$

para  $k = 1, \dots, N$ . Puesto que la matriz  $\mathbf{L}$  ha sido previamente factorizada, hay que resolver un sistema triangular inferior y otro superior para  $N$  vectores independientes.

### Derivadas de los campos

Las derivadas de  $E_t^2$  y  $E^2$  vienen dadas por las siguientes expresiones calculadas para cada elemento adyacente a la interfase

$$\frac{\partial E_t^2}{\partial f_i} = \sum_{k,l=1}^3 \Phi_l h_{k,\eta} h_{l,\eta} \left\{ \frac{\partial \Phi_k}{\partial f_i} \frac{2}{r_\eta^2 + z_\eta^2} - \frac{\Phi_k}{(r_\eta^2 + z_\eta^2)^2} \left( 2r_\eta \frac{\partial r_\eta}{\partial f_i} \right) \right\}, \quad (2.111)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E^2}{\partial f_i} = \sum_{k,l=1}^T \Phi_l \left\{ 2 \frac{\partial \Phi_k}{\partial f_i} D^{-2} A_{kl} - 2 \Phi_k D^{-3} \frac{\partial D}{\partial f_i} A_{kl} \right. \\ \left. + \Phi_k D^{-2} \frac{\partial A_{kl}}{\partial f_i} \right\}, \end{aligned} \quad (2.112)$$

donde usamos las relaciones (2.107,2.108). Hacemos notar que mientras las derivadas de las funciones base sólo son distintas de cero para los nodos de las correspondientes espinales las derivadas del potencial respecto de  $f_i$  son en general distintas de cero.

### 2.4.2 Formación del sistema total

Una vez que del problema eléctrico hemos obtenido  $\Delta \Pi_E$  y  $\partial \Delta \Pi_E / \partial f_k$  es entonces cuando podemos formar las ecuaciones  $\mathbf{F}$  y la matriz jacobiana  $\mathbf{J}$ .

La numeración de los nodos y de los elementos unidimensionales que definen la interfase se da de manera creciente de un extremo al otro del puente. Así al elemento  $e_l$  pertenecen los nodos  $2l - 1$ ,  $2l$  y  $2l + 1$ . Cada elemento contribuye a tres ecuaciones, correspondientes a sus tres nodos. La suma elemento a elemento va completando cada una de las ecuaciones. La contribución del elemento unidimensional  $e_l$  a la ecuación  $F_{2l+i-2}$  del sistema (2.67), que describe la ecuación de Young-Laplace, es

$$F_{2l+i-2}^l = \int_{e_l} \left\{ [\Delta \Pi + \chi \Delta \Pi_E + Bz] f h_i + (1 + f_z^2)^{\frac{1}{2}} h_i \right.$$

$$\left. + \frac{f f_z h_{i,z}}{(1 + f_z^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} dz = 0, \quad i = 1, \dots, 3. \quad (2.113)$$

Aquí las funciones restringidas a un elemento toman la forma

$$\begin{aligned} f(\eta) &= \sum_{i=1}^3 f_i h_i(\eta), \\ z(\eta) &= \sum_{i=1}^3 z_i h_i(\eta), \end{aligned} \quad (2.114)$$

y las derivadas respecto de  $z$

$$\frac{dh_i}{dz} = \left( \frac{dz}{d\eta} \right)^{-1} \frac{dh_i}{d\eta}. \quad (2.115)$$

Las integrales se realizan mediante la fórmula de cuadratura de Gauss de tres puntos (ver tabla 2.1). Como se vio en el caso bidimensional en la programación se emplean unas matrices que contienen los valores de  $h_i$  y  $h_{i,\eta}$  en los puntos de integración y un vector que contiene los pesos de cada punto. Como se realizan las operaciones en el elemento estándar unidimensional las matrices anteriores se establecen al principio de la computación.

A la ecuación de volumen fijo contribuyen todos los elementos en la forma

$$F_{N+1} = \sum_l \int_{e_l} f^2 dz, \quad (2.116)$$

y la suma en  $l$  se iguala a  $2\Lambda\tau$ , el valor del volumen. Recordamos la ecuación  $N + 2$  correspondiente a la continuación mediante la longitud de arco

$$F_{N+2} = \sum_{i=1}^{N+2} \frac{dx_i^*}{ds} (x_i - x_i^*) - \Delta s = 0, \quad (2.117)$$

con  $\mathbf{x} = (f_1, \dots, f_N, \Delta\Pi, \lambda)$ .

Las ecuaciones  $F_1$  y  $F_N$  son sustituidas por

$$f_1 = 1, \quad f_N = 1, \quad (2.118)$$

para tener en cuenta las condiciones de Dirichlet.

Los coeficientes de la matriz jacobiana, escribiendo sólo aquellos distintos de cero y sin tener en cuenta las condiciones de Dirichlet, son ( $i, j$  variando desde 1 hasta  $N$ ):

$$J_{ij} = \int \left\{ [\Delta\Pi + \chi\Delta\Pi_E + Bz] v_i v_j + f_z (1 + f_z^2)^{-\frac{1}{2}} [v_i v_{j,z} + v_j v_{i,z} + v_{i,z} v_{j,z}] - (1 + f_z^2)^{-\frac{3}{2}} f_z v_{i,z} v_{j,z} + f v_i \chi \frac{\partial \Delta\Pi_E}{\partial f_j} \right\} dz, \quad (2.119)$$

$$J_{i,N+1} = \int f v_i dz, \quad (2.120)$$

$$J_{N+1,j} = 2 \int f v_j dz, \quad (2.121)$$

$$J_{N+2,j} = \frac{dx_j^*}{ds}, \quad j = 1, \dots, N + 2. \quad (2.122)$$

Los coeficientes debidos a las derivadas respecto del parámetro  $\lambda$  son:

- si  $\lambda = B$ ,

$$J_{i,N+2} = \int z f v_i dz; \quad (2.123)$$

- si  $\lambda = \tau$ ,

$$J_{N+1,N+2} = -2\Lambda; \quad (2.124)$$

- si  $\lambda = \chi$ ,

$$J_{i,N+2} = \int f v_i \Delta\Pi_E dz. \quad (2.125)$$

Y, finalmente, para tener en cuenta las condiciones de contorno de Dirichlet sobre la matriz anterior debemos obligar a que las derivadas respecto de  $f_1$  y  $f_N$  sean

$$J_{i,1} = \delta_{i,1}, \quad J_{i,N} = \delta_{i,N}, \quad i = 1, \dots, N + 2, \quad (2.126)$$

donde  $\delta$  es la delta de Kronecker.

Por último, la resolución del sistema  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{F}$  de las iteraciones del método de Newton-Raphson se realiza mediante el método típico de factorización  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$  [Press, 1989] para matrices llenas como es  $\mathbf{J}$ .

## 2.5 Ecuaciones discretas. Gotas

El método de solución desarrollado para el caso de puentes líquidos se aplica al problema de gotas con ligeros cambios. Señalaremos pues estas diferencias. Comenzaremos por la descripción del problema eléctrico para a continuación formar las ecuaciones del equilibrio.

### 2.5.1 Problema eléctrico

La aplicación del método de elementos finitos sobre la ecuación (2.53) en coordenadas esféricas conduce al sistema

$$\sum_{i=1}^M \Phi_i \left( \int_{\Omega_{in}} r^2 \sin \theta \left( \frac{\partial w_i}{\partial r} \frac{\partial w_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w_i}{\partial z} \frac{\partial w_j}{\partial z} \right) dr d\theta + \beta \int_{\Omega_{ex}} r^2 \sin \theta \left( \frac{\partial w_i}{\partial r} \frac{\partial w_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w_i}{\partial z} \frac{\partial w_j}{\partial z} \right) dr d\theta \right) = 0, \quad j = 1, \dots, M. \quad (2.127)$$

Hemos tomado coordenadas esféricas con el objeto de colocar las líneas espinales sobre  $\theta = \text{Cte}$ . Así la coordenada  $\theta$  es análoga a la coordenada  $z$  del problema de puentes líquidos.

#### Mallado

Distinguiamos primeramente dos zonas, una lejana a la gota con  $(r, \theta)$  tales que  $r \sin \theta > L$ , y una zona cercana con  $(r, \theta)$  tales que  $r \sin \theta < L$ .  $L$  es la distancia entre electrodos. La zona lejana se extiende hasta la curva  $r \sin \theta = R_\infty$  y no se verá afectada por movimientos de los nodos de la interfase.

El dominio cercano se divide en un conjunto de  $N_r \times N_\theta$  elementos cuadrangulares de nueve nodos, donde  $N_r$  y  $N_\theta$  son el número de elementos en las direcciones  $r$  y  $\theta$ , respectivamente. De ellos  $N_{ri} \times N_\theta$  forman el subdominio interior a la gota y  $N_{re} \times N_\theta$  forman el subdominio exterior. Los bordes de los elementos los constituyen la serie de líneas espinales y de líneas curvas.

En este dominio cercano se definen las líneas espinales

$$\theta_i = s_{2i-1} \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, \dots, N_\theta + 1, \quad (2.128)$$

donde  $s_{2i-1}$  son pesos comprendidos entre  $(0,1)$  y se eligen de modo que exista una mayor discretización de la punta de la gota, en torno a  $\theta = 0$ . Exigimos además que la recta  $\theta = \pi/4$  no pertenezca al interior de ningún elemento.

Las líneas curvas en el subdominio interior a la gota toman la forma

$$r_{2j-1}(\theta) = t_{2j-1}f(\theta), \quad j = 1, \dots, N_{ri} + 1, \quad (2.129)$$

donde  $f(\theta)$  es la función que describe la interfase. Mientras que las líneas curvas en el subdominio exterior se definen como

$$r_{2j-1}(\theta) = g(\theta) - t_{2j-1}(g(\theta) - f(\theta)), \quad j = 1, \dots, N_{re} + 1, \quad (2.130)$$

donde  $g(\theta)$  describe la siguiente parte del contorno,

$$g(\theta) = \begin{cases} \frac{L}{\cos \theta}, & \theta \in (0, \frac{\pi}{4}), \\ \frac{L}{\sin \theta}, & \theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}). \end{cases} \quad (2.131)$$

En las expresiones anteriores  $t_i$  son pesos comprendidos entre  $(0,1)$ . Las líneas espinales y las líneas curvas interiores a los elementos se definen por

$$\begin{aligned} r_{2j} &= \frac{r_{2j-1} + r_{2j+1}}{2}, & j = 1, \dots, N_{ri} \text{ ó } j = 1, \dots, N_{re}. \\ \theta_{2j} &= \frac{\theta_{2j-1} + \theta_{2j+1}}{2}, & j = 1, \dots, N_{\theta}. \end{aligned} \quad (2.132)$$

La distancia entre nodos consecutivos dentro de un mismo espinal sigue una progresión aritmética con paso creciente a partir de la interfase. De este modo discretizamos con más elementos cerca de la gota donde las variaciones del potencial son más significativas. La progresión aritmética se elige además de manera que la primera banda de elementos a partir de la interfase tenga un incremento de  $r$  dado.

En la parte lejana los nodos de los elementos se colocan de modo que al transformarlos al espacio de coordenadas cilíndricas  $(\rho, z)$  formen una red cuadrangular, esto es, definida por líneas

$$z = r \cos \theta = a_m \quad m = 1, \dots, 2N_z + 1, \quad (2.133)$$

$$\rho = r \sin \theta = b_n \quad n = 1, \dots, 2N_{\rho} + 1. \quad (2.134)$$

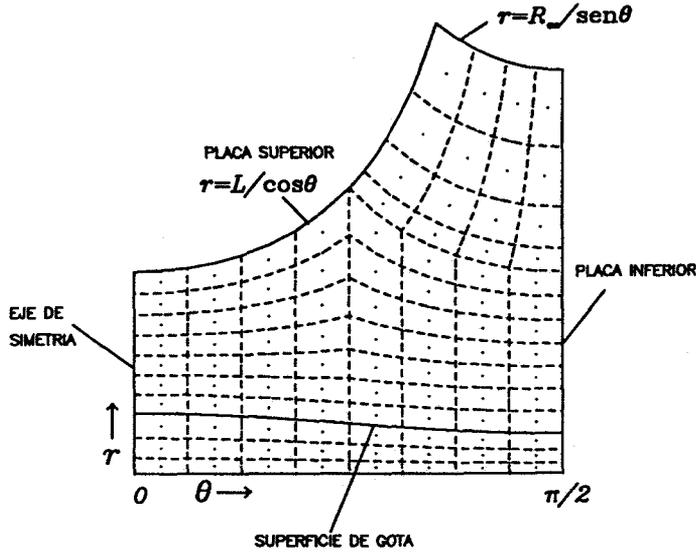


Figura 2.12: Malla de elementos finitos para la gota.

Aquí  $N_z$  y  $N_\rho$  son el número de elementos en direcciones  $z$  y  $\rho$  respectivamente en la parte lejana.  $N_z$  es igual al número de elementos en dirección  $\theta$  para  $\theta > \pi/4$ .  $N_\rho$  se elige para mantener la forma de la discretización desde  $\rho = L$  hasta  $\rho = R_\infty$ .

El aspecto de una malla típica se presenta en la figura 2.12. La numeración de los nodos se realiza desde el punto ( $r = 0, \theta = 0$ ) incrementando primero  $\theta$  y después  $r$ . Hemos dividido los elementos conectados al anclaje en elementos triangulares del mismo modo que hicimos en el problema previo de puentes.

### Matriz de rigidez y su derivada

La contribución del elemento global  $e_l$  a la matriz de rigidez toma ahora la forma

$$l_{ij}^l = \epsilon \int_{\hat{e}} r^2 \text{sen } \theta D^{-1} A_{ij} d\xi d\eta, \quad (2.135)$$

donde

$$A_{ij} = E_1 h_{i,\xi} h_{j,\xi} - E_2 (h_{i,\xi} h_{j,\eta} + h_{i,\eta} h_{j,\xi}) + E_3 h_{i,\eta} h_{j,\eta}, \quad (2.136)$$

$$D = r_\eta \theta_\xi - r_\xi \theta_\eta, \quad E_1 = \frac{r_\eta^2}{r^2} + \theta_\eta^2,$$

$$E_2 = \frac{r_\xi r_\eta}{r^2} + \theta_\xi \theta_\eta, \quad E_3 = \frac{r_\xi^2}{r^2} + \theta_\xi^2. \quad (2.137)$$

con  $\epsilon = 1$  si es un elemento interior a la gota o  $\epsilon = \beta$  si es exterior.

A la derivada de la matriz de rigidez sólo contribuirá la parte del dominio cercana a la gota, esto es, donde se han definido las espinales. El hecho de que las espinales estén colocadas para  $\theta$  constante implica que los puntos de un elemento sólo cambian su coordenada radial cuando hay desplazamientos de los nodos de la interfase. La contribución del elemento  $e_i$  a  $g_{ik} = \sum_j \partial l_{ij} / \partial f_k \Phi_j$  es

$$g_{ik}^l = \sum_{j=1}^T \Phi_j \int_{\epsilon} \epsilon \operatorname{sen} \theta \left\{ 2r \frac{\partial r}{\partial f_k} D^{-1} A_{ij} - r^2 D^{-2} \frac{\partial D}{\partial f_k} A_{ij} + r^2 D^{-1} \frac{\partial A_{ij}}{\partial f_k} \right\} d\xi d\eta, \quad (2.138)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{ij}}{\partial f_k} &= \frac{\partial E_1}{\partial f_k} h_{i,\xi} h_{j,\xi} - \frac{\partial E_2}{\partial f_k} (h_{i,\xi} h_{j,\eta} + h_{i,\eta} h_{j,\xi}) + \frac{\partial E_3}{\partial f_k} h_{i,\eta} h_{j,\eta}, \\ \frac{\partial D}{\partial f_k} &= \frac{\partial r_\eta}{\partial f_k} \theta_\xi - \frac{\partial r_\xi}{\partial f_k} \theta_\eta, \\ \frac{\partial E_1}{\partial f_k} &= -\frac{2}{r^3} r_\eta^2 \frac{\partial r}{\partial f_k} + \frac{2r_\eta}{r^2} \frac{\partial r_\eta}{\partial f_k}, \\ \frac{\partial E_2}{\partial f_k} &= -\frac{2}{r^3} r_\xi r_\eta \frac{\partial r}{\partial f_k} + \frac{r_\xi}{r^2} \frac{\partial r_\eta}{\partial f_k} + \frac{r_\eta}{r^2} \frac{\partial r_\xi}{\partial f_k}, \\ \frac{\partial E_3}{\partial f_k} &= -\frac{2}{r^3} r_\xi^2 \frac{\partial r}{\partial f_k} + \frac{2r_\xi}{r^2} \frac{\partial r_\xi}{\partial f_k}. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Los coeficientes de  $\partial L / \partial f_k \cdot \Phi$  son almacenados en  $\mathbf{G}$ , matriz  $M \times N$ . Notemos que aunque las contribuciones a  $G$  de la parte lejana son nulas, cuando se resuelve el sistema (2.75) y almacenamos en  $\mathbf{G}$  los coeficientes  $\partial \Phi / \partial f_k$  es entonces una matriz llena pues la parte lejana contribuye al ser los  $\partial \Phi_i / \partial f_k$  distintos de cero.

### Campos y sus derivadas

Las expresiones de los campos en el problema de gotas presentan ligeras diferencias respecto al problema anterior.

La componente tangencial del campo se calcula por derivación del potencial a lo largo de la interfase. La expresión del campo en coordenadas locales es

$$E_t = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \left( \frac{dt}{d\eta} \right)^{-1} = (r^2 \theta_\eta^2 + r_\eta^2)^{1/2} \sum_{i=1}^3 \Phi_i h_{i,\eta}, \quad (2.140)$$

El campo total al cuadrado hay que computarlo a ambos lados de la interfase.

$$E^2 = \sum_{i,j=1}^T D^{-2} A_{ij} \Phi_i \Phi_j, \quad (2.141)$$

donde  $A_{ij}$ ,  $D$ ,  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  están definidos en (2.136, 2.137). Las derivadas de los campos se obtienen por medio de

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_t^2}{\partial f_k} &= \sum_{i,j=1}^3 2 \frac{\partial \Phi_i}{\partial f_k} \Phi_j h_{i,\eta} h_{j,\eta} \frac{1}{r_\eta^2 + r^2 \theta_\eta^2} \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^3 \Phi_i \Phi_j h_{i,\eta} h_{j,\eta} \frac{1}{(r_\eta^2 + r^2 \theta_\eta^2)^2} \left( 2r_\eta \frac{\partial r_\eta}{\partial f_k} + 2r \frac{\partial r}{\partial f_k} \theta_\eta^2 \right), \end{aligned} \quad (2.142)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E^2}{\partial f_k} &= \sum_{i,j=1}^T \left\{ 2 \frac{\partial \Phi_i}{\partial f_k} \Phi_j D^{-2} A_{ij} - 2 \Phi_i \Phi_j D^{-3} \frac{\partial D}{\partial f_k} A_{ij} \right. \\ &\quad \left. + \Phi_i \Phi_j D^{-2} \frac{\partial A_{ij}}{\partial f_k} \right\}, \end{aligned} \quad (2.143)$$

donde tenemos en cuenta las relaciones (2.139). Notemos que la derivada del potencial respecto de  $f_k$  es distinta de cero en general con lo que también lo es la derivada de la presión eléctrica.

### 2.5.2 Ecuación de Young-Laplace

La ecuación de Young-Laplace para la interfase de una gota descrita por  $r = f(\theta)$  es

$$\frac{2f^2 + 3f_\theta^2 - \cot \theta (ff_\theta + f_\theta^3/f) - f_{\theta\theta}f}{(f^2 + f_\theta^2)^{3/2}} + \Delta \Pi + \chi \Delta \Pi_E + Bf \cos \theta = 0. \quad (2.144)$$

La forma débil de la ecuación de Young-Laplace la obtenemos al multiplicar por  $gf^2 \sin \theta$  la ecuación anterior y eliminar las derivadas segundas mediante una integración por partes. Para ello se tiene en cuenta que el término de curvatura puede escribirse en la forma [Adornato, 1983]

$$2\mathcal{H} = \frac{1}{f^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\sin \theta (2f^2 + f_\theta^2)}{(f^2 + f_\theta^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{ff_\theta \sin \theta}{(f^2 + f_\theta^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \right\}, \quad (2.145)$$

donde  $\mathcal{H} \equiv (k_1 + k_2)/2$ , es la curvatura media local. En la integración por partes de la presión capilar aparece

$$-gf_\theta f (f^2 + f_\theta^2)^{-\frac{1}{2}} \sin \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}, \quad (2.146)$$

que para  $\theta = 0$  se anula y no impondría nada. Sin embargo, la ecuación de Young-Laplace implícitamente obliga a que  $f_\theta(0) = 0$  cuando no existen singularidades. En  $\theta = \pi/2$ , se anula si se tiene una condición de Dirichlet (línea de contacto fijada) pues entonces  $g = 0$ . Si se tiene el ángulo de contacto  $\alpha$  fijado la expresión anterior entra en la ecuación débil como un sumando de la forma

$$-gf_\theta f (f^2 + f_\theta^2)^{-\frac{1}{2}} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -gf \cos \alpha \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}, \quad (2.147)$$

Si este ángulo es  $\alpha = 90^\circ$  entonces también se anula. La ecuación que resulta es

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ [\Delta\Pi + \chi\Delta\Pi_E + Bf \cos \theta] f^2 g + (f^2 + f_\theta^2)^{\frac{1}{2}} g + (f^2 g + ff_\theta g_\theta) (f^2 + f_\theta^2)^{-\frac{1}{2}} \right\} \sin \theta d\theta - gf \cos \alpha \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad (2.148)$$

Los términos de (2.148) pueden obtenerse a partir del cálculo de variaciones sobre la energía almacenada. Así los términos debidos a la curvatura se obtienen variando la expresión de la superficie descrita por  $r = f(\theta)$ , o sea,  $\delta S = \delta \int f \sin \theta (f^2 + f_\theta^2)^{1/2} d\theta$ .

### 2.5.3 Sistema de ecuaciones y matriz jacobiana

El sistema de ecuaciones discreto que aparece de (2.148) por aplicación del MGEF es

$$F_i = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ [\Delta\Pi + \chi\Delta\Pi_E + Bf \cos \theta] f^2 v_i + (f^2 + f_\theta^2)^{\frac{1}{2}} v_i \right.$$

$$+ f(f^2 + f_\theta^2)^{-\frac{1}{2}}(fv_i + f_\theta v_{i,\theta}) \} \text{sen } \theta d\theta = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.149)$$

donde  $f$  se aproxima por  $f = \sum_{i=1}^N f_i v_i$ . La numeración de los nodos de la interfase es creciente correspondiendo  $f_1$  a  $\theta = 0$  y  $f_N$  a  $\theta = \pi/2$ . Si tenemos una condición de ángulo de contacto fijado, se añade a la ecuación  $F_N$  el término  $-f_N \cos \alpha$ .

La ecuación de volumen fijado se obtiene por sustitución de la aproximación de  $f$  en

$$F_{N+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^3 \text{sen } \theta d\theta - 1 = 0. \quad (2.150)$$

Y la ecuación  $F_{N+2}$  es la de continuación en el parámetro arco (2.71).

Los coeficientes de la matriz jacobiana, escribiendo sólo aquellos distintos de cero y sin tener en cuenta las condiciones de Dirichlet, son ( $i, j$  variando desde 1 hasta  $N$ ):

$$J_{ij} = \int \left\{ [2\Delta\Pi + 2\chi\Delta\Pi_E + 3Bf \cos \theta] f v_i v_j + \chi \frac{\partial \Delta\Pi_E}{\partial f_j} f^2 v_i + (f^2 + f_\theta^2)^{-\frac{1}{2}} [3f v_i v_j + f_\theta (v_i v_{j,\theta} + v_j v_{i,\theta}) + f v_{i,\theta} v_{j,\theta}] - f (f^2 + f_\theta^2)^{-\frac{3}{2}} (f v_i + f_\theta v_{i,\theta})(f v_j + f_\theta v_{j,\theta}) \right\} \text{sen } \theta d\theta, \quad (2.151)$$

$$J_{i,N+1} = \int f^2 v_i \text{sen } \theta d\theta, \quad (2.152)$$

$$J_{N+1,j} = 3 \int f^2 v_j \text{sen } \theta d\theta, \quad (2.153)$$

$$J_{N+2,j} = \frac{dx_j^*}{ds}, \quad j = 1, \dots, N+2. \quad (2.154)$$

Los coeficientes debidos a las derivadas respecto del parámetro  $\lambda$  son:

- si  $\lambda = B$ ,

$$J_{i,N+2} = \int f^2 v_i \cos \theta \text{sen } \theta d\theta, \quad (2.155)$$

- si  $\lambda = \chi$ ,

$$J_{i,N+2} = \int f^2 v_i \Delta\Pi_E \text{sen } \theta d\theta. \quad (2.156)$$

Para tener en cuenta condiciones de contorno de Dirichlet (caso de gota anclada) sobre la matriz anterior debemos obligar a que las derivadas respecto de  $f_N$  sean

$$J_{i,1} = \delta_{i,N}, \quad i = 1, \dots, N + 2, \quad (2.157)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la función delta de Kronecker. Si las condiciones son de ángulo de contacto fijado al elemento de  $J_{NN}$  se le añade el término  $-\cos \alpha$ . Esto completa la formulación para el caso de gotas.

# Capítulo 3

## Resultados numéricos

En este capítulo presentamos los resultados obtenidos para los puentes líquidos y las gotas en presencia de campos eléctricos. Para cada uno de los problemas se analiza primero la fiabilidad de las soluciones numéricas y a continuación se presentan los resultados sobre las formas de equilibrio y los diagramas de bifurcación. En el caso de los puentes líquidos, hacemos un estudio en las proximidades de la configuración cilíndrica con y sin gravedad, y extendemos este estudio a formas de volumen arbitrario. En el caso de gotas, analizamos primeramente las gotas libres para después hacer un estudio del efecto del ángulo de contacto (gotas apoyadas) y del radio de contacto (gotas ancladas).

### 3.1 Estimación de errores. Puentes

En esta sección estudiaremos la fiabilidad de nuestras soluciones numéricas y fijaremos los parámetros que determinan la malla de elementos, como son el número de elementos en cada subdominio o la longitud  $R_\infty$ . Analizamos primero el caso sin campo eléctrico para después abordar el problema completo. Nuestro objetivo es tener una idea de la magnitud de los errores esperables con la discretización que hemos elegido.

Previamente al análisis de errores de la discretización hemos de tener en cuenta que existe un error adicional debido a que las ecuaciones son no lineales y hemos empleado un método de iteración para obtener la solución. La solución numérica que se da es sólo una aproximación de la solución del

sistema discreto, que es a su vez una aproximación de la solución del problema continuo. Como se vio en el capítulo precedente el método de iteración usado es el método de Newton-Raphson. La teoría de análisis numérico nos dice que la convergencia del método de Newton-Raphson es cuadrática [Press, 1989]. Esto es, el error en la iteración  $n + 1$  está relacionado con el error en la iteración  $n$ , para  $n$  grande, por

$$\varepsilon_{n+1} = C\varepsilon_n^2, \quad (3.1)$$

donde  $\varepsilon$  es una medida de la distancia a la solución del sistema de ecuaciones no lineales. Este resultado es de utilidad para comprobar que la matriz jacobiana del sistema ha sido calculada correctamente. Los experimentos numéricos realizados pasaron este primer test al comprobar que el exponente de convergencia del método iterativo era próximo a 2.

Las iteraciones finalizan cuando la diferencia entre la solución de la iteración  $n + 1$  y la de  $n$  es menor que una determinada cota. En nuestro caso hemos tomado

$$|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n| < 10^{-6}. \quad (3.2)$$

### 3.1.1 Análisis sin campo eléctrico

Las formas de equilibrio axisimétricas y su estabilidad han sido ampliamente estudiadas en la literatura. De entre estos resultados vamos a comparar nuestras soluciones numéricas con las formas de equilibrio catenoides analíticas y con los resultados para los puntos críticos sin gravedad dados en [Martínez, 1986] y con gravedad dados en [Coriel, 1977].

#### Formas catenoides

Al imponer que el salto de presiones entre los medios interior y exterior sea igual a cero,  $\Delta\Pi = 0$ , aparece como solución de equilibrio una catenoide. La forma catenoide es la superficie de revolución de área mínima que se apoya entre dos aros separados una distancia dada cuando no existe restricción en el volumen de la forma de equilibrio. Cuando el radio de estos aros es el mismo, la solución  $f(z)$  es de la forma

$$f(z) = C \operatorname{ch} \frac{z}{C}. \quad (3.3)$$

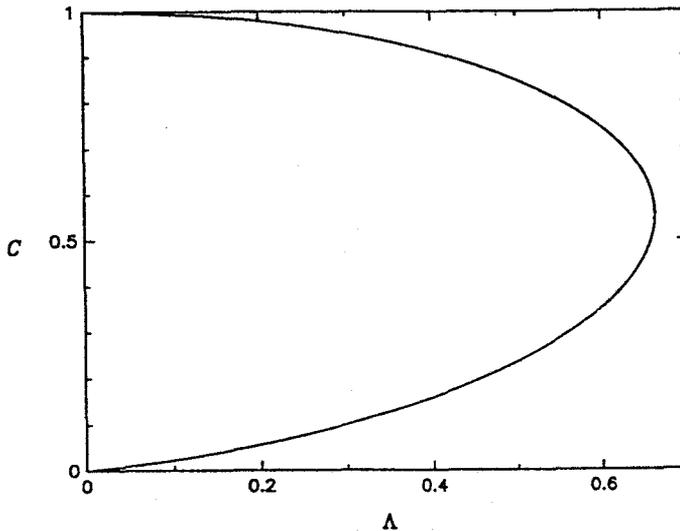


Figura 3.1: Valores de  $C_{\text{num}} = f(0)$  para formas catenoides.

La condición de anclaje determina la constante  $C$  mediante

$$f(-\Lambda) = f(\Lambda) = C \operatorname{ch} \frac{\Lambda}{C} = 1. \quad (3.4)$$

En la figura 3.1 se muestra el valor de  $C$  como función de  $\Lambda$ . Vemos que existe un valor máximo de  $\Lambda$  a partir del cual no hay solución catenoide. Este valor es  $\Lambda = 0.6627434$  con  $C = 0.5524341$ . En nuestro programa dados  $\Lambda$  y  $\tau$  hallamos numéricamente  $\Delta\Pi$ , que ha de ser cero, y  $f(0)$ , que ha de valer  $C$ . El valor del parámetro  $\tau$  de una forma catenoide en función de  $C$  y  $\Lambda$  es

$$\tau = \frac{1}{2\Lambda} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} [f(z)]^2 dz = \frac{C^3}{4\Lambda} \left[ \operatorname{sh} \frac{2\Lambda}{C} + \frac{2\Lambda}{C} \right]. \quad (3.5)$$

En la tabla 3.1 tenemos la comparación entre los resultados exactos y numéricos. El número de elementos usados es  $N$ . Vemos que los errores para  $N = 5$  son menores de  $1.6 \times 10^{-4}$ . Como era de esperar al aumentar la deformación, esto es  $C$ , aumenta el error. También analizamos cómo disminuye el error en un punto dado al aumentar  $N$ . En concreto se ha elegido el punto de  $\Lambda$  máxima para que exista forma catenoide. Con una ley para los errores del tipo  $\varepsilon = Kh^p$ , siendo  $K$  una constante que no depende de  $N$ ,  $h$  la anchura del segmento y  $\varepsilon$  el error, el exponente que hemos obtenido

$N$	$\Lambda$	$C$	$ C - C_{\text{num}} $	$\Delta\Pi$
5	0.10000000	0.9949705	$0.8 \times 10^{-6}$	$1.6 \times 10^{-4}$
5	0.20000000	0.9795106	$0.4 \times 10^{-6}$	$-1.9 \times 10^{-5}$
5	0.30000000	0.9523568	$1.4 \times 10^{-6}$	$2.5 \times 10^{-5}$
5	0.40000000	0.9107380	$1.1 \times 10^{-6}$	$7.9 \times 10^{-6}$
5	0.50000000	0.8483379	$5.7 \times 10^{-6}$	$2.8 \times 10^{-5}$
5	0.60000000	0.7450711	$2.2 \times 10^{-5}$	$6.2 \times 10^{-5}$
5	0.66274342	0.5524341	$1.6 \times 10^{-4}$	$1.0 \times 10^{-4}$
10	0.66274342	0.5524341	$6.6 \times 10^{-6}$	$6.2 \times 10^{-6}$
15	0.66274342	0.5524341	$2.1 \times 10^{-6}$	$1.4 \times 10^{-5}$

Tabla 3.1: Resultados numéricos para formas catenoides.

para  $\Delta\Pi$  ó  $C$  es  $p \simeq 4$ . Vemos pues que sin campo aplicado la convergencia del valor de  $f$  en los nodos es de orden cuarto.

### Puntos críticos

En la tabla 3.2 comparamos nuestros resultados de mínimo volumen estable sin gravedad y discos iguales con los dados en [Martínez, 1986] para distintos valores de  $\Lambda$ . El número de elementos empleados es  $N = 10$ . Estos puntos han sido calculados partiendo de una solución estable conocida fijado  $\Lambda$  y disminuyendo  $\tau$  hasta encontrar un punto crítico. Vemos que el error relativo es siempre menor que  $2.2 \times 10^{-3}$ . También es de hacer notar que el punto de  $\Lambda = 2.0$  es un punto límite mientras que los restantes puntos críticos presentados son puntos de bifurcación. Esto está totalmente de acuerdo con los resultados presentados en [Martínez, 1983] donde se muestra que para valores de  $\Lambda$  mayores de  $\Lambda = 2.128$  el criterio de estabilidad viene marcado por un punto de bifurcación y para valores menores el criterio viene marcado por un punto límite.

En la tabla 3.3 tenemos la comparación de nuestros resultados de  $B$  máximo con los dados en [Coriel, 1977] para distintos valores de  $\Lambda$  con puentes líquidos de volumen cilíndrico y discos iguales. El número de segmentos

$\Lambda$	$\tau$	$ \tau - \tau_{\text{num}} /\tau$
4.0	1.747	$7.1 \times 10^{-4}$
3.6	1.346	$9.3 \times 10^{-4}$
3.2	1.037	$9.0 \times 10^{-4}$
2.8	0.8102	$7.0 \times 10^{-4}$
2.4	0.6568	$9.5 \times 10^{-4}$
2.0	0.5650	$2.2 \times 10^{-3}$

Tabla 3.2: Resultados numéricos para el volumen mínimo estable.

$\Lambda$	$B$	$ B - B_{\text{num}} /B$
3.12	$2.58 \times 10^{-4}$	$2.3 \times 10^{-2}$
3.10	$7.02 \times 10^{-4}$	$1.1 \times 10^{-2}$
3.05	$2.39 \times 10^{-3}$	$5.8 \times 10^{-3}$
2.96	$7.22 \times 10^{-3}$	$3.2 \times 10^{-3}$
2.85	$1.62 \times 10^{-2}$	—
2.60	$5.18 \times 10^{-2}$	—

Tabla 3.3: Resultados numéricos para el número de Bond máximo.

empleados es  $N = 10$ . Estos puntos se han calculado partiendo de una forma estable conocida fijado  $\Lambda$  y aumentando  $B$  hasta encontrar un punto crítico. En este caso siempre hemos encontrado un punto límite. Vemos que la diferencia relativa entre nuestros resultados y los presentados en [Coriel, 1977] decrece al disminuir  $\Lambda$ , esto es, al aumentar el número de Bond crítico. De hecho, a partir de  $\Lambda = 2.85$  no encontramos diferencia. Como es de prever en un método numérico el error relativo en la determinación del  $B$  crítico aumenta al tender éste a cero y ser del mismo orden que los errores propios de la discretización. Con este número de segmentos el error en la determinación de  $B$  crítico es de un uno por ciento o menor a partir de  $B = 7 \times 10^{-4}$ .

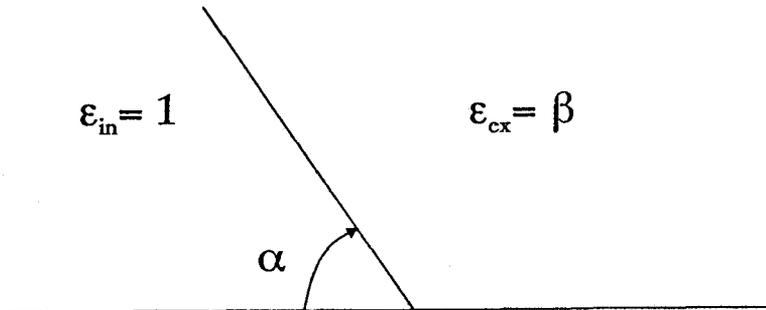


Figura 3.2: Punto de anclaje.

### 3.1.2 Análisis con campo eléctrico

En esta sección analizaremos el efecto del anclaje sobre la solución del potencial, el efecto de  $R_\infty$  sobre la presión eléctrica y como punto final trataremos de ver el error esperable. Para elegir una malla particular analizaremos cómo es la presión eléctrica para distintos valores de los parámetros de la red fijada una interfase.

La única solución analítica conocida al problema completo con campo eléctrico es la solución cilíndrica. Sin embargo, como medida del error esperable con la discretización no es útil ya que la solución cilíndrica está incluida entre las funciones del espacio del método de elementos finitos. En efecto, la interfase está descrita por una constante y el potencial es lineal, luego los elementos cuadráticos pueden describir exactamente esta solución. Nos puede servir como un primer test ya que la solución que obtenemos ha de ser exacta.

Como resultados exactos para comparar contamos con la solución del problema de potencial perturbado de primer orden para una pequeña deformación respecto de la interfase cilíndrica, y los puntos críticos de la solución cilíndrica variando el campo dados en [González, 1989].

#### Línea de contacto

La línea de contacto, la intersección entre los electrodos y la interfase, constituye un contorno no suave en la frontera entre dieléctricos. Estos contornos no suaves los llamamos puntos de esquina. En general, cerca de este punto el potencial no puede ser una función suave, pudiendo aparecer singularidades

en alguna de las derivadas [Strang, 1973]. Como explicación observemos que en los puntos de esquina se tienen condiciones de contorno que cambian bruscamente a cada lado y justo en el punto de esquina entran en conflicto. Así, en el punto de anclaje se tienen una condición de Dirichlet en el electrodo y otra de Neumann en la interfase y sólo en muy determinados casos pueden cumplirse a la vez con valores no nulos y finitos de los campos. En el apéndice B se analiza cómo es la singularidad en función del ángulo con que arranca la interfase y de la razón de permitividades. Como conclusión general se tiene que para  $\beta > 1$  el campo puede tender a infinito si  $\alpha \in (0, \pi/2)$  ó a cero si  $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ , (ver figura 3.2). Si  $\beta < 1$  la situación es la contraria, que corresponde a un simple intercambio en las permitividades.

Esta pérdida de regularidad de la solución se nos puso claramente de manifiesto al observar la presión eléctrica con un mallado formado únicamente por elementos cuadrangulares (sea ésta la malla  $Q$ ). Para algunas interfaces la presión eléctrica presentaba un salto en el elemento que contiene al punto de esquina. Hemos considerado que una forma de mejorar el resultado numérico era dividir cada elemento cuadrangular conteniendo la línea de contacto en dos elementos triangulares (ver figura 2.9 del capítulo anterior). Sea esta la malla  $T$ . Esto permite que el potencial varíe de forma brusca desde los electrodos, donde tenemos la condición de potencial fijado, hasta la interfase, donde se tiene una condición de contorno natural, como es la continuidad de la componente normal del vector desplazamiento (implícitamente impuesta en la formulación del MGEF). Además, para aumentar la precisión el tamaño de los elementos es más pequeño cerca del anclaje.

En la figura 3.3 presentamos la presión eléctrica obtenida para una interfase con forma  $f(z) = 1 + 0.3 \sin(\pi(z + \Lambda)/\Lambda)$  mediante los dos tipos de malla. Los resultados corresponden a un problema con  $\Lambda = 3$ ,  $\beta = 0.55$  y  $R_\infty = 2$ . En éstos, el número de elementos es  $N_z = 10$  en dirección axial y es  $N_{ri} = 3$ ,  $N_{re} = 3$  en dirección radial en el interior y exterior del puente respectivamente. La forma sinusoidal presenta los dos tipos de ángulo con que puede arrancar la interfase de los electrodos. Como podemos observar la presión eléctrica obtenida por la malla  $Q$  presenta una oscilación en el lado de  $z = -3$ ; mientras en  $z = 3$  esta oscilación no se observa. Esto confirma numéricamente el hecho de que a un lado el campo es menos regular que al otro. Para  $z = -3$  estamos en el caso de  $\alpha \in (\pi/2, \pi)$  con lo que el campo ha de tender a infinito al ser  $\beta < 1$ . Para  $z = 3$  se tiene  $\alpha \in (0, \pi/2)$  y el campo ha de tender a cero. Vemos que la malla  $T$  no presenta ese salto y es

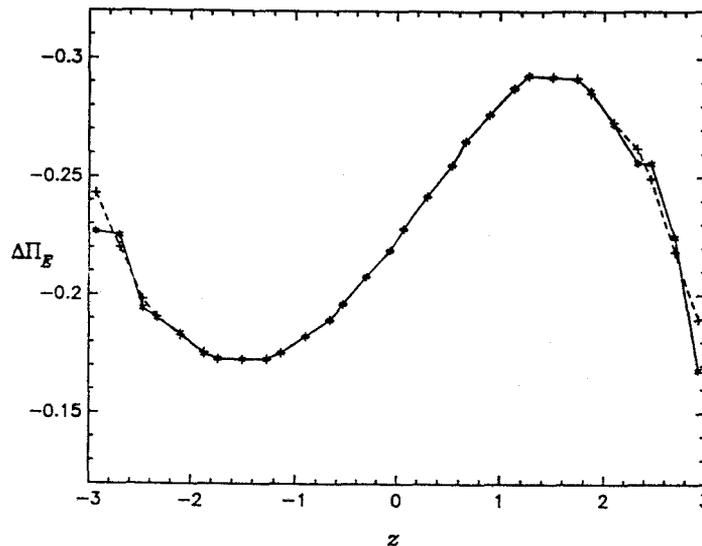


Figura 3.3: Presión eléctrica obtenida por la malla  $Q$  (línea continua) y por la malla  $T$  (línea a trozos).

por tanto más apropiada para describir el potencial.

Como resultado de estos experimentos numéricos hemos observado que si el ángulo de contacto difiere poco de  $\pi/2$  o la razón de permitividades se aproxima a 1 los problemas se atenúan. También si aumentamos el refinamiento en la zona del anclaje. En cualquier caso los resultados con la malla conteniendo triángulos cerca del anclaje eran mejores. Esto nos hace elegir un mallado como el presentado en el capítulo anterior con más detalle cerca de los puntos de anclaje.

### Efecto de $R_\infty$

Hemos realizado distintas pruebas para conocer el efecto de  $R_\infty$  en la presión eléctrica. Sabemos que la contribución al potencial de un objeto entre placas plano-paralelas ha de decaer básicamente de una forma exponencial con la distancia al eje (ver, por ejemplo, [Jackson, 1975]). Lógicamente la influencia de  $R_\infty$  sobre el potencial cerca del eje ha de ser cada vez menor al aumentar  $R_\infty$ .

Hemos realizado una serie de pruebas numéricas tomando una interfase fija y aumentando la distancia  $R_\infty$ , pero incrementando el número de elementos en dirección radial para mantener constante el tamaño de los elementos.

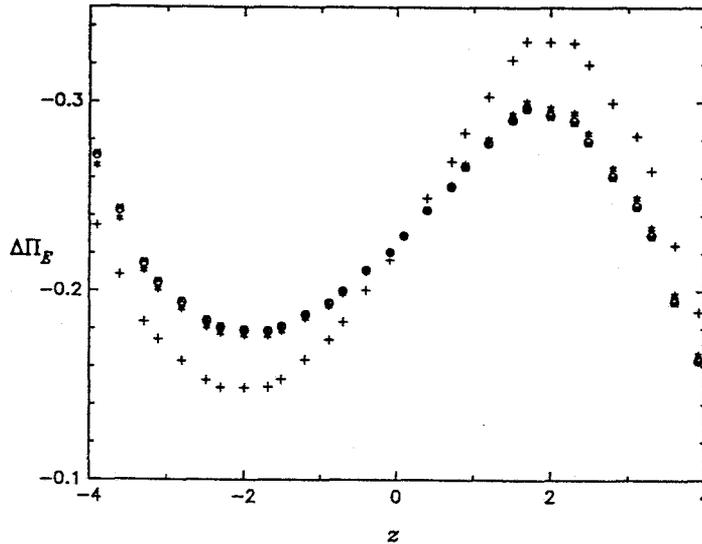


Figura 3.4: Valores de la presión eléctrica para: (+)  $R_\infty = 2$ , (\*)  $R_\infty = 4$ , (o)  $R_\infty = 6$  y (x)  $R_\infty = 8$ .

En la figura 3.4 presentamos un ejemplo para el caso  $\Lambda = 4$ ,  $\beta = 0.55$  y la interfase dada por  $f(z) = 1 + 0.5 \sin(\pi(z + \Lambda)/\Lambda)$ . Vemos que la presión eléctrica para cada  $z$  tiende a un valor a medida que crece  $R_\infty$ . Como resultado de distintos experimentos numéricos hemos observado que al crecer  $\Lambda$  ha de crecer  $R_\infty$ , pero cuanto mayor es la deformación de la interfase menor es la influencia de  $R_\infty$  en  $\Delta\Pi_E$ .

Cuando las deformaciones son pequeñas respecto de la forma cilíndrica podemos comparar la presión eléctrica numérica con los resultados analíticos del problema de potencial perturbado. Sea una interfase  $f(z) = 1 + \varepsilon g(z)$  con  $\varepsilon \ll 1$ , entonces el potencial toma la forma  $\Phi = z + \varepsilon\Psi$ . La ecuación para  $\Psi$  es la de Laplace en cada medio,

$$\nabla^2\Psi = 0, \quad (3.6)$$

con las condiciones de contorno

$$\Psi(r, \pm\Lambda) = 0, \quad (3.7)$$

$$\Delta[\Psi]_{r=1} = 0, \quad (3.8)$$

$$\Delta \left[ \varepsilon \frac{\partial\Psi}{\partial r} \right]_{r=1} = (\beta - 1) \frac{dg}{dz}, \quad (3.9)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi = 0, \quad (3.10)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \quad (3.11)$$

La solución expresada en un desarrollo en funciones de variables separadas es

$$\Psi_{\text{in}} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{I_0(x_n r)}{I_0(x_n)} \text{sen}(x_n(z + \Lambda)), \quad (3.12)$$

$$\Psi_{\text{ex}} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{K_0(x_n r)}{K_0(x_n)} \text{sen}(x_n(z + \Lambda)), \quad (3.13)$$

donde  $n$  es un número entero,  $I_0$  y  $K_0$  son las funciones modificadas de Bessel,  $x_n = n\pi/2\Lambda$  y donde  $A_n$  es

$$A_n = 2 \frac{\beta - 1}{n\pi} \frac{\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{dg}{dz} \text{sen}(x_n(z + \Lambda)) dz}{\beta \frac{K_0'(x_n)}{K_0(x_n)} - \frac{I_0'(x_n)}{I_0(x_n)}}. \quad (3.14)$$

La presión eléctrica toma entonces la forma

$$\Delta \Pi_E = \frac{\beta - 1}{2} + \varepsilon(\beta - 1) \left. \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|_{r=1}. \quad (3.15)$$

Podemos entonces encontrar  $\partial \Psi / \partial z$  en  $r = 1$  analíticamente y numéricamente y compararlos. La expresión del desarrollo en serie de  $\partial \Psi / \partial z$  es

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|_{r=1} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x_n \cos(x_n(z + \Lambda)). \quad (3.16)$$

Hemos elegido dos tipos de funciones para  $g$ , una simétrica

$$g_1(z) = 2 \text{sen}\left(\frac{\pi}{2\Lambda}(z + \Lambda)\right), \quad (3.17)$$

y otra antisimétrica

$$g_2(z) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{\Lambda}(z + \Lambda)\right). \quad (3.18)$$

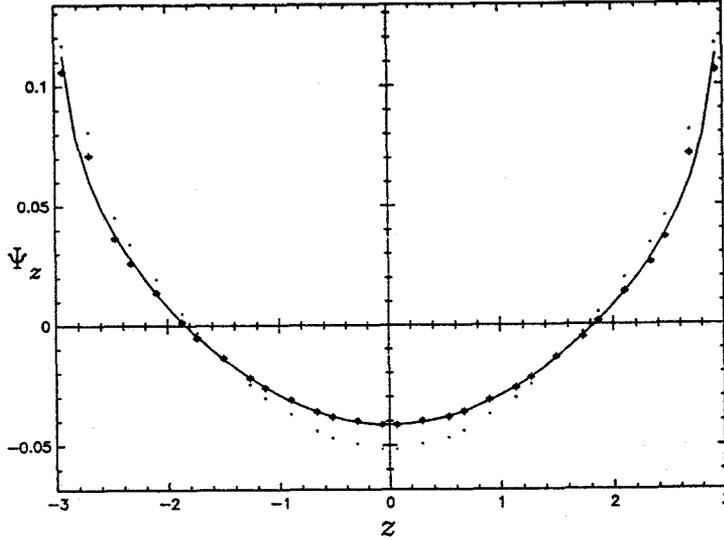


Figura 3.5: Presión eléctrica para  $g_1$  con  $\Lambda = 3$ . En trazo continuo el resultado analítico. Resultados numéricos: (·)  $R_\infty = 2$ , (+)  $R_\infty = 4$ , (\*)  $R_\infty = 6$ .

En las figuras 3.5, 3.6, 3.7 presentamos la comparación del resultado analítico y numérico, donde  $\partial\Psi/\partial z$  en  $r = 1$  aparece como  $\Psi_z$ . La permitividad es  $\beta = 0.55$ . Los resultados numéricos se presentan para distintos valores de  $R_\infty$ . Las figuras 3.5 y 3.6 tienen la misma esbeltez  $\Lambda = 3$  pero una corresponde a  $g_1$  y otra a  $g_2$ . La figura 3.7 es para un puente de esbeltez  $\Lambda = 6$  con un perfil dado por  $g_2$ . En todos los casos el parámetro pequeño vale  $\varepsilon = 0.01$ . Los resultados numéricos al crecer  $R_\infty$  tienden a un valor ligeramente distinto del resultado analítico. Sin embargo, tengamos en cuenta que la convergencia se tendría para un tamaño típico de elemento tendiendo a cero. En estos resultados  $N_z = 10$ ,  $N_{ri} = 3$  y  $N_{re} \simeq 3(R_\infty - 1)$ .

Como conclusiones de este estudio observamos que  $R_\infty$  ha de ser más grande para formas antisimétricas que para formas simétricas y que crece con  $\Lambda$ , siendo  $R_\infty = 2\Lambda$  un valor aceptable.

### Pruebas de convergencia

Para el problema completo de encontrar la interfase de equilibrio con campo hemos realizado una serie de experimentos de convergencia para los valores de la interfase y para los del punto crítico.

En la tabla 3.4 se presentan resultados para el valor de la interfase en

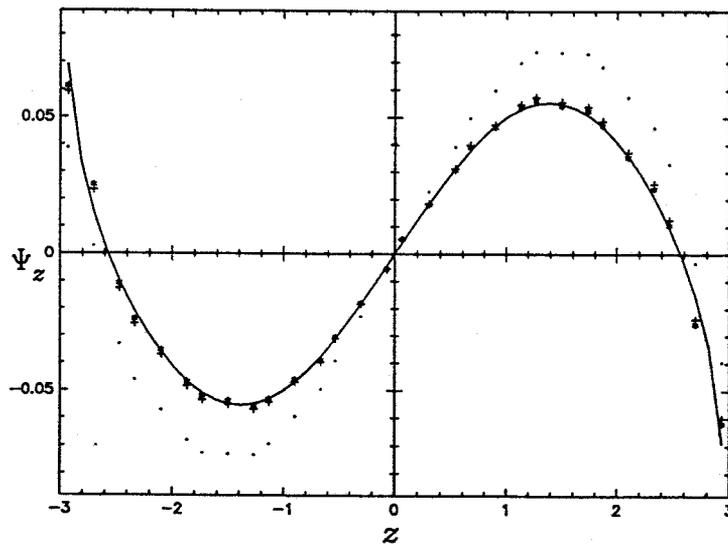


Figura 3.6: Presión eléctrica para  $g_2$  con  $\Lambda = 3$ . En trazo continuo el resultado analítico. Resultados numéricos: (·)  $R_\infty = 2$ , (+)  $R_\infty = 4$ , (\*)  $R_\infty = 6$ .

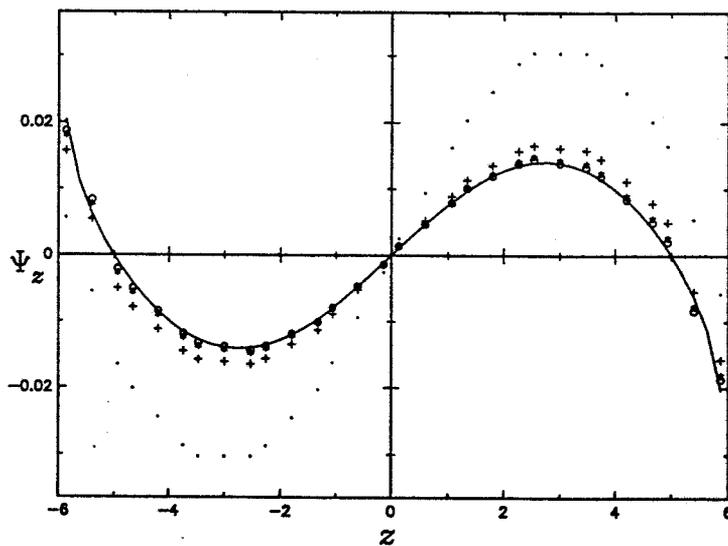


Figura 3.7: Presión eléctrica para  $g_2$  con  $\Lambda = 6$ . En trazo continuo el resultado analítico. Resultados numéricos: (·)  $R_\infty = 2$ , (+)  $R_\infty = 4$ , (\*)  $R_\infty = 6$ , (o)  $R_\infty = 8$ .

$1/h$	8	10	12	14	16
$f(z = 0)$	0.79826	0.79800	0.79785	0.79776	0.79769
$\Delta\Pi$	-2.26858	-2.26809	-2.26779	-2.26760	-2.26747

Tabla 3.4: Convergencia para  $f(0)$  y  $\Delta\Pi$ .

$1/h$	8	10	12	14	16
$f(z = 0)$	1.157841	1.158188	1.158380	1.158498	1.158575
$\Delta\Pi$	-2.93269	-2.93237	-2.93287	-2.93298	-2.93306

Tabla 3.5: Convergencia para  $f(0)$  y  $\Delta\Pi$ .

$z = 0$  y para  $\Delta\Pi$ . Han sido obtenidos para un puente líquido con  $\beta = 5.0$ ,  $\tau = 0.75$ ,  $\chi = 0.625$ ,  $R_\infty = 2$  en ausencia de gravedad. El tamaño de los elementos dentro de una malla es aproximadamente el mismo, esto es, sin refinamiento de la red (lo llamaremos mallado regular). Sea  $h$  una medida típica del tamaño de los elementos, en concreto en la tabla es el inverso del número de elementos en dirección  $z$ . Los datos se adaptan a un exponente de convergencia en torno a  $p = 1.7$ . La diferencia relativa entre el valor de  $f(0)$  para  $1/h = 10$  y el valor al que parece tender,  $f(0) = 0.797409$ , está alrededor de  $7 \times 10^{-4}$ .

Sin embargo, para los valores de la tabla 3.5 el exponente parece ser  $p = 1.9$ . Los resultados corresponden a un puente de  $\beta = 2$ ,  $\Lambda = 4$ ,  $\tau = 1.25$ ,  $\chi = 4$ ,  $R_\infty = 2$  y sin gravedad. Para  $1/h = 12$  la diferencia relativa de  $f(0)$  con el valor al que tiende,  $f(0) = 1.1588$ , es de  $4 \times 10^{-4}$ .

Las conclusiones de estos y otros experimentos es que el exponente de convergencia es como máximo  $p = 2$  cuando hay campo aplicado. Este exponente depende del problema considerado, sobre todo del ángulo de arranque de la interfase y de  $\beta$ . Por otro lado, en ambos casos hemos comprobado que el empleo de un mallado no regular más fino cerca de la interfase y de los electrodos permite disminuir el error respecto del valor al que converge.

A las mismas conclusiones llegamos al analizar los resultados de la tabla

$N_z$	8	10	12	14	16
$\chi$ crítico	3.56896	3.56147	3.55746	3.55503	3.55344

Tabla 3.6: Convergencia para punto crítico.

3.6. En ésta presentamos el valor del campo eléctrico crítico para el caso de un puente que no es estable sin campo, realizado para un mallado regular. El campo crítico corresponde a un punto límite. Estos puntos se han calculado partiendo de una interfase y disminuyendo  $\chi$  desde un valor grande. Los datos del problema son  $\beta = 0.55$ ,  $\Lambda = 4$ ,  $\tau = 1$ ,  $B = 0.015$  y  $R_\infty = 2$ . El exponente de convergencia al que se adaptan los resultados numéricos es  $p = 2$ . Resultados obtenidos con un mallado con elementos más pequeños en torno al punto de anclaje disminuyen el error respecto del valor de  $\chi$  crítico al que parece tender,  $\chi_c = 3.54827$ .

### Puntos críticos para la familia cilíndrica

En los resultados que presentaremos en las próximas secciones hemos elegido  $R_\infty = 8$  para  $\Lambda < 4$  y  $R_\infty = 2\Lambda$  para  $\Lambda > 4$ . El número de elementos elegidos en cada dirección ha sido  $N_z = 10$ ,  $N_{r_i} = 3$  y  $N_{r_e} = 11$ , con una razón entre las longitudes de los lados de elementos consecutivos de 1.21 tanto en dirección radial como axial de forma que el tamaño de la red es más fina en las cercanías del anclaje.

En la tabla 3.7 comparamos los valores críticos  $\chi_c$  obtenidos numéricamente con los resultados analíticos dados en [González, 1989] para la primera bifurcación de la familia cilíndrica en el caso  $\beta = 0.55$ . La precisión de los resultados nos indican que el problema eléctrico gobierna los errores pues con campo aplicado éstos son mayores. Además vemos que la precisión de la presente aproximación con elementos finitos decrece al aumentar la esbeltez  $\Lambda$ . Como explicación observemos las formas de las autofunciones críticas que se obtienen en los puntos de bifurcación (figura 3.8). Vemos que éstas presentan un corrimiento del máximo hacia los extremos del puente a medida que  $\Lambda$  crece. En realidad, la verdadera distancia del máximo a los extremos se mantiene más o menos constante al crecer  $\Lambda$ , siendo la distancia medida en unidades de  $\Lambda$  la que disminuye. Esto indica que se hace necesario un

$\Lambda$	$\chi_a$ (analítico)	$\chi_{EF}$ (elementos finitos)	$100 (\chi_a - \chi_{EF})/\chi_a $
3.50	1.6970	1.6936	0.20
4.00	3.8683	3.8698	0.04
4.50	5.9175	5.9292	0.20
5.00	7.9167	7.9462	0.37
6.00	11.924	12.020	0.80
7.00	16.078	16.292	1.33
8.00	20.454	20.868	2.02

Tabla 3.7: Precisión de la presente discretización de los puntos de bifurcación de la familia cilíndrica.

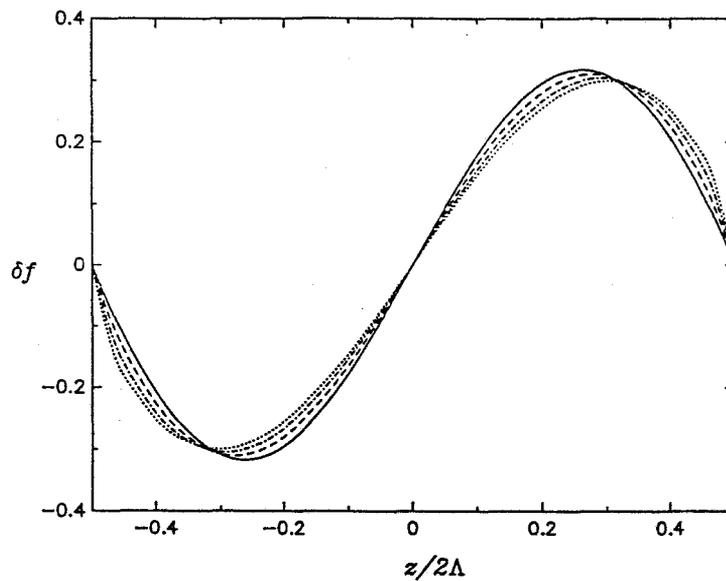


Figura 3.8: Formas de las autofunciones en los puntos de bifurcación: (—)  $\Lambda = 4$ , (- -)  $\Lambda = 5$ , (- · -)  $\Lambda = 6$ , y (· · ·)  $\Lambda = 7$ .

mallado más fino cerca de los extremos para mantener el mismo orden de los errores al crecer  $\Lambda$ . Esto se ha verificado en el caso de  $\Lambda = 8$ , en el que con un número de elementos mayor,  $N_z = 12$ , y razón entre lados de elementos igual a 1.32, el error se reduce desde el valor de la tabla 2.02% hasta 0.5%. Para hacer un estudio con  $\Lambda$  muy grande se hace necesario cambiar el esquema del mallado, tratando de aprovechar las simplificaciones que una longitud axial grande introduce y distribuir los elementos allí donde más se necesiten.

## 3.2 Resultados de puentes líquidos

Ahora presentamos el estudio de puentes líquidos sometidos a campos eléctricos que hemos realizado con la discretización elegida dada en la sección anterior. Veremos primero el caso de puentes líquidos en ausencia de gravedad y después el efecto de una gravedad residual sobre las formas de éstos y su estabilidad. Aunque el método es aplicable a valores arbitrarios del número de Bond, nos hemos restringido a valores pequeños de la gravedad,  $B < 0.1$ , porque estamos interesados básicamente en puentes líquidos esbeltos. La mayoría de los resultados se presentan para una razón de permitividades de  $\beta = 0.55$  que es el valor experimental que aparece en [González, 1989].

### 3.2.1 Ausencia de gravedad

#### Formas de equilibrio

Aquí presentamos la evolución cuasiestática de formas de equilibrio estables cuando aumenta el campo aplicado. Partimos de un puente que en ausencia de campo se sabe que es estable y analizamos su forma al aumentar  $\chi$ .

En la figura 3.9 se muestra la evolución de un puente líquido con  $\tau = 2$ ,  $\Lambda = 3$ , y  $\beta = 0.5$ . A medida que aumenta el campo (a medida que aumenta  $\chi$ ) la forma de equilibrio se va alineando con la dirección del campo exceptuando una zona cercana a los electrodos donde se cumple la condición de radio de anclaje fijo. Este alineamiento de la interfase se observa para cualesquiera valores de  $\tau$  y de  $\beta \neq 1$ . Como vemos las formas de equilibrio son simétricas respecto del plano medio.

La representación del potencial perturbado  $\Psi$  definido como

$$\Psi = \Phi - z, \quad (3.19)$$

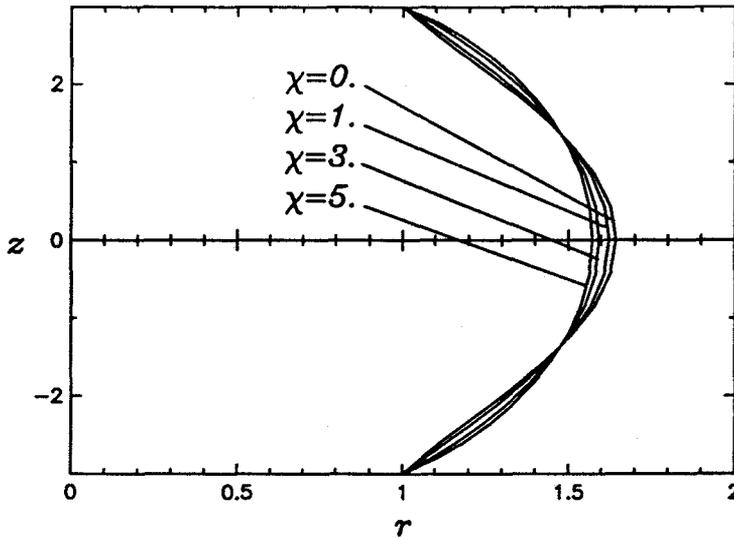


Figura 3.9: Evolución cuasiestática de un puente líquido a medida que aumenta  $\chi$ . ( $B = 0$ )

el potencial total menos el potencial lineal, nos sirve para entender el mecanismo de evolución de la interfase (ver figura 3.10). Este potencial  $\Psi$  es el creado por las cargas de polarización. Las líneas de nivel nos sirven para determinar la situación de las cargas de polarización en la interfase, pues las líneas se concentran en torno a las cargas. La suma del campo que crean las cargas de polarización y el campo constante aplicado es el campo total. El potencial es antisimétrico respecto del plano medio dando lugar a una presión eléctrica simétrica. El campo perturbado es tal que hace disminuir el campo total en la zona central del puente y lo hace aumentar en la zona cercana a los anclajes. Recordemos la figura 3.5, en ella se representa  $\Psi_z$  en la interfase para  $\beta = 0.55$ . En ésta,  $\Psi$  está escalado con  $\varepsilon$ , la desviación respecto del cilindro. La presión eléctrica tiene, en general, la misma forma que la que se obtiene del análisis de perturbación. La presión eléctrica perturbada es un término constante más otro de la forma  $\varepsilon(\beta - 1)\Psi_z$ . El término constante sólo hace cambiar el valor de  $\Delta\Pi$ . Puesto que una presión  $\Delta\Pi_E > 0$  indica un esfuerzo hacia el interior y al ser en este caso  $\beta - 1 < 0$ , las tensiones son positivas en el centro y negativas en los extremos tratando de alinear la interfase. Si  $\beta - 1 > 0$  las cargas de polarización cambian de signo y, por tanto,  $\Psi_z$  cambia de signo también. Se tiene de nuevo que las tensiones son

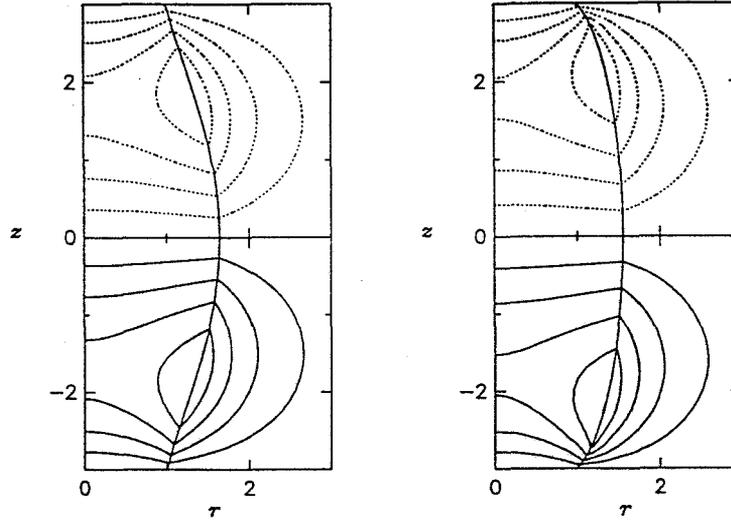


Figura 3.10: Equipotenciales de  $\Psi = \Phi - z$  para un puente líquido con  $\tau = 2$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\Lambda = 3$ . (a)  $\chi = 0.01$  y (b)  $\chi = 5$ . El valor de las equipotenciales crece desde las líneas de puntos a las líneas continuas.

positivas en el centro y negativas en los extremos. Por otro lado, para  $\varepsilon < 0$ , un puente con menos volumen que el cilíndrico, se obtiene el cambio de signo necesario en  $\varepsilon(\beta - 1)\Psi_z$  para que las tensiones traten de alinear la interfase.

### Bifurcación de la solución cilíndrica

La solución cilíndrica existe para cualquier valor de  $\beta$ ,  $\chi$ ,  $\Lambda$  fijados  $\tau = 1$  y  $B = 0$  y viene dada por

$$f(z) = 1, \quad \Delta\Pi = -1 - \frac{\beta - 1}{2}\chi, \quad \Phi(r, z) = z. \quad (3.20)$$

Es bien conocido desde los trabajos de Plateau y Rayleigh que en ausencia de campo eléctrico el cilindro es estable para valores de  $\Lambda$  menores que  $\pi$ . Este límite de estabilidad corresponde a una bifurcación subcrítica con el autovector de bifurcación mostrando una forma antisimétrica en torno al plano medio  $z = 0$  [Martínez, 1983, Vega, 1983]. Para valores mayores de  $\Lambda$  aparecen nuevas bifurcaciones, mostrando alternativamente autofunciones simétricas y antisimétricas con un número de ondulaciones creciente con  $\Lambda$ . Sin embargo, no tienen influencia en la estabilidad de las formas de equilibrio.

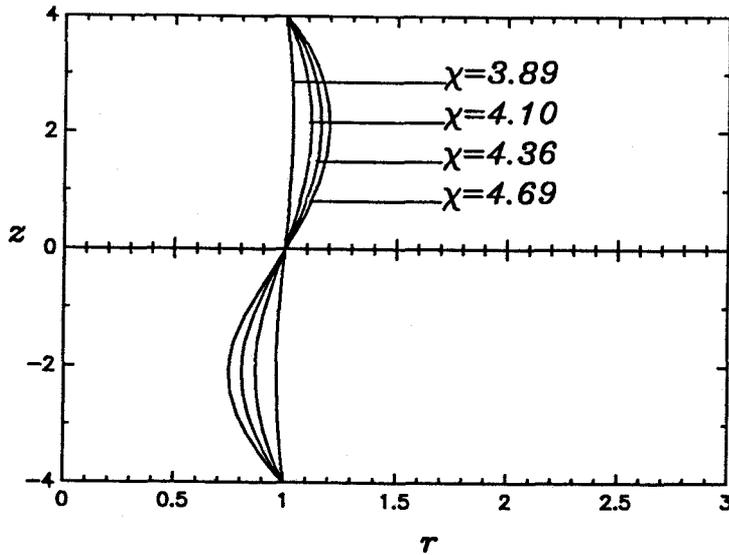


Figura 3.11: Formas de la familia bifurcada.

Nosotros nos hemos restringido a las bifurcaciones que cambian la estabilidad de las formas líquidas. Cuando se aplica un campo eléctrico en dirección axial el criterio de bifurcación es tal que el valor crítico de  $\Lambda$  crece con  $\chi$  y el autovector de la primera bifurcación (la que provoca la inestabilidad) presenta una forma antisimétrica [González, 1989] como el caso sin campo.

Aquí extendemos el estudio a la familia que se bifurca para un valor arbitrario de  $\chi$ . En la figura 3.11 presentamos algunas formas de equilibrio de esta familia a medida que  $\chi$  crece en el caso de  $\beta = 0.55$  y  $\Lambda = 4$ . Como vemos la deformación aumenta para  $\chi$  creciente. Las interfases tienen forma de ánfora y pueden tener el cuello del ánfora tanto por encima como por debajo del plano  $z = 0$ .

En la figura 3.12 representamos la amplitud de la deformación de la familia bifurcada como función de  $\chi$  para  $\beta = 0.55$  y diferentes valores de  $\Lambda$ . La amplitud de la deformación está representada por

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{2\Lambda} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} (f(z) - 1)^2 dz}, \quad (3.21)$$

que es la distancia en la norma  $L_2$  de la forma de equilibrio a la forma cilíndrica. De la figura es evidente que la bifurcación permanece subcrítica, los cilindros estables son aquellos que tienen valores de  $\chi$  mayores que el

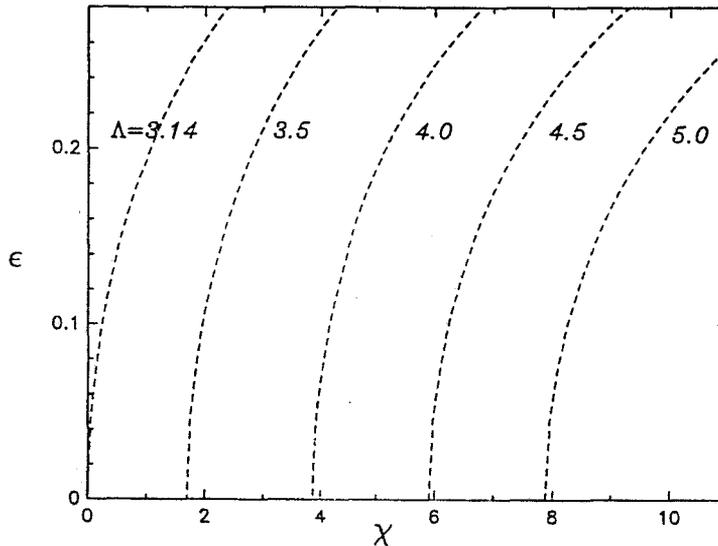


Figura 3.12: Amplitud de la familia bifurcada para diferentes valores de  $\Lambda$ .

de bifurcación. Cada punto de la gráfica representa dos posibles formas de equilibrio con el cuello de ánfora encima o debajo del plano medio  $z = 0$ . En un desarrollo local cerca del punto crítico las ramas de bifurcación son de la forma

$$\chi = \chi_c + \frac{1}{2} \kappa \varepsilon^2, \quad (3.22)$$

siendo  $\kappa$  la curvatura y  $\chi_c$  el valor del parámetro en la bifurcación. Los valores numéricos obtenidos para la curvatura a partir de los resultados anteriores indican un crecimiento de la curvatura con  $\Lambda$ . Así por ejemplo,  $\kappa = 46.8$  para  $\Lambda = 3.142$  y  $\kappa = 73.6$  para  $\Lambda = 5$ . Por tanto, el puente líquido se hace más sensible ante pequeñas deformaciones a medida que  $\Lambda$  aumenta, pues son necesarias deformaciones menores para llevarlo a la forma inestable. Sin embargo, para ser rigurosos ha de tenerse en cuenta que imponer una determinada deformación a la interfase podría exigir más energía en presencia de campo eléctrico.

### Bifurcación para formas de volumen arbitrario

En ausencia de gravedad, consideraciones estáticas muestran que cuando el límite de estabilidad de mínimo volumen se alcanza, la forma de desestabilización depende de la esbeltez [Meseguer, 1983, Sanz, 1983]. Para valores

de  $\Lambda < 2.128$  el criterio de estabilidad está marcado por un punto límite y consecuentemente la perturbación crítica porta toda la simetría del estado de equilibrio. De este modo, el proceso de ruptura del puente líquido ha de ser simétrico, pues esa es la simetría del estado de equilibrio, y ha de conducir a un estado final de dos gotas de igual volumen. Por el contrario, para  $\Lambda > 2.128$  el criterio de estabilidad está marcado por un punto de bifurcación con una familia que se bifurca que es no simétrica. Puesto que la perturbación crítica (la autofunción de la bifurcación) es antisimétrica, es de esperar que la ruptura sea no simétrica conduciendo a dos gotas de volúmenes desiguales. Los experimentos muestran una ruptura simétrica para  $\Lambda < 2.128$  y no simétrica para  $\Lambda > 2.128$  [Sanz, 1983], de acuerdo con las predicciones teóricas.

En la figura 3.13 se muestra el diagrama de bifurcación computado por nuestro método para un puente líquido de  $\Lambda = 2.6$  en ausencia de campo eléctrico. El parámetro que hemos elegido para representar la forma de equilibrio es  $\varepsilon^2$ , la distancia al cuadrado a la forma cilíndrica. Con trazo continuo se representan la parte del diagrama que corresponde a formas estables. Sólo aquellos puentes con un volumen mayor que  $\tau_c = 0.725$ , el volumen de bifurcación, son estables. Por ejemplo, podemos formar un puente cilíndrico y extrayendo volumen de una forma cuasiestática vamos recorriendo la curva hacia la izquierda hasta que alcanzamos el punto  $P$ , el punto de bifurcación, donde una familia no simétrica existe. Este proceso conduce a una ruptura no simétrica del puente líquido.

Diagramas de bifurcación similares se obtienen para valores de  $\Lambda$  crecientes, siendo el efecto más importante un desplazamiento hacia la derecha del punto  $P$  sobre la curva correspondiente, así para  $\Lambda = \pi$  este punto está colocado en  $\tau = 1$ . Para valores decrecientes de  $\Lambda$  la rama de bifurcación se mueve hacia la izquierda sobre la correspondiente curva. Para  $\Lambda = 2.128$  el punto de bifurcación alcanza al punto de retorno. Si seguimos decreciendo el valor de  $\Lambda$  el punto  $P$  se mueve sobre la rama superior. Así para  $\Lambda < 2.128$  la rama que se bifurca no define más el criterio de estabilidad. Mientras tanto, el punto de retorno se mueve hacia la derecha (o hacia la izquierda) cuando aumentamos (o disminuimos)  $\Lambda$ , pero su movimiento es menor comparado con el del punto  $P$ .

El papel del parámetro  $\Lambda$  sobre la estabilidad del puente líquido ha sido considerado un poco en detalle porque la influencia del campo eléctrico sobre la estabilidad es en muchas formas parecida a la influencia de  $\Lambda^{-1}$ . Esto se

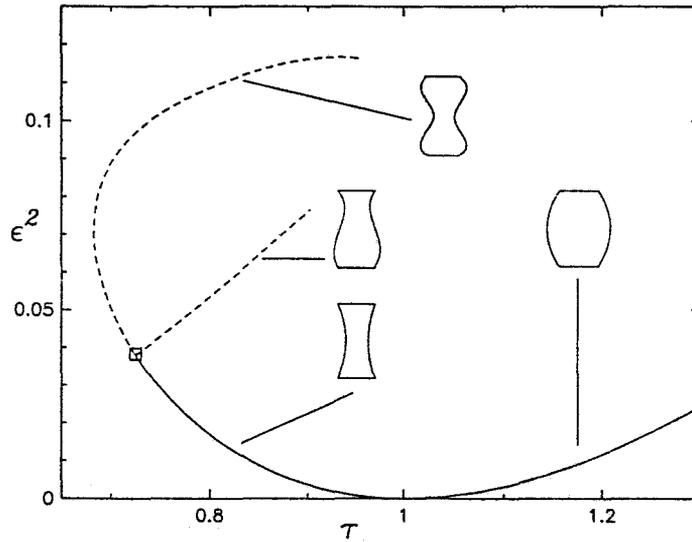


Figura 3.13:  $\epsilon^2$  como función de  $\tau$  para un puente líquido con  $\Lambda = 2.6$  y  $\chi = 0$ .

ilustrará en las figuras 3.14 y 3.15. En la figura 3.14 se muestra la influencia del campo eléctrico sobre el diagrama de bifurcación del puente líquido de  $\Lambda = 2.6$  con una razón de permitividades  $\beta = 0.55$ . Podemos ver que el campo eléctrico modifica el diagrama de bifurcación de dos formas. Primero, la posición de los puntos de bifurcación y de retorno se mueven hacia valores de  $\tau$  más pequeños (efecto de estabilización del campo eléctrico). Segundo, la posición relativa entre los dos puntos críticos va cambiando y ocasionalmente el punto de bifurcación alcanza al punto de retorno de manera similar a cuando  $\Lambda$  decrece. Así para un puente líquido cilíndrico sometido a un campo eléctrico correspondiente a  $\chi = 7$  si vamos extrayendo líquido podemos tener un volumen mínimo estable de  $\tau_c = 0.518$  que se romperá en dos gotas de igual volumen.

En la figura 3.15 se ilustra el efecto estabilizante del campo eléctrico para un puente líquido de  $\Lambda = 3.5$  y  $\beta = 0.55$ . El incremento del campo eléctrico desplaza la rama de bifurcación hacia la izquierda decreciendo el mínimo volumen estable. Podríamos seguir aumentando el valor de  $\chi$  y de nuevo obtendríamos un intercambio en las posiciones de los puntos de bifurcación y de retorno. Ya que en este caso  $\Lambda > \pi$  el puente cilíndrico es inestable en ausencia de campo eléctrico y la bifurcación sucede para  $\tau > 1$ . El efecto del incremento de la esbeltez ha sido trasladar los puntos críticos hacia valores

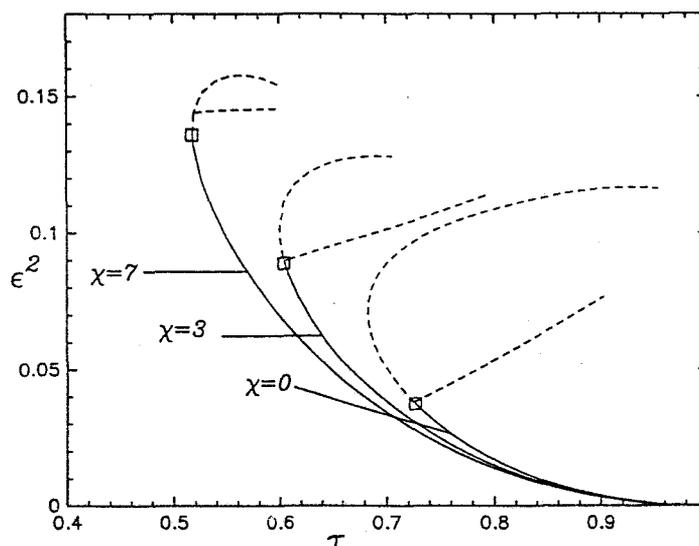


Figura 3.14: Efecto de  $\chi$  sobre la estabilidad:  $\varepsilon^2$  como función de  $\tau$  para un puente líquido con  $\Lambda = 2.6$  y  $\beta = 0.55$ .

mayores de  $\tau$ .

La figura 3.16 muestra los puntos singulares, de estabilidad marginal, en el plano  $\Lambda$ - $\chi$  para un conjunto de valores diferentes de  $\tau$  y fijado  $\beta = 0.55$ . Estas curvas delimitan la región de estabilidad para puentes líquidos de un volumen  $\tau$  dado. La región estable está sobre cada curva. Esto es, un puente líquido de  $\tau$  dado puede mantenerse estable sólo si el par de valores  $(\Lambda, \chi)$  pertenece a la región superior delimitada por la curva correspondiente. Para  $\chi = 0$  se reobtienen los resultados de mínimo volumen sin campo aplicado. La curva para  $\tau = 1$  corresponde a la curva de bifurcación de la familia cilíndrica. Podemos ver que el incremento del campo aplicado permite alargar las columnas líquidas de un  $\tau$  dado. Vemos también que podemos reducir el volumen de un puente líquido manteniéndolo estable incrementando el campo eléctrico.

Finalmente examinemos el papel del parámetro  $\beta$ . Debido a que la estática del puente líquido está dominada por la fuerza dieléctrica, y esta fuerza es cero para  $\beta = 1$  (permitividades de los líquidos iguales) es claro que  $\beta$  ha de ser diferente de 1. Se ha demostrado [González, 1989] que  $\beta$  y  $\beta^{-1}$  juegan un papel similar, siendo de poca relevancia cuál de los dos líquidos forma el puente líquido. De hecho la diferencia de comportamiento entre  $\beta$  y  $\beta^{-1}$

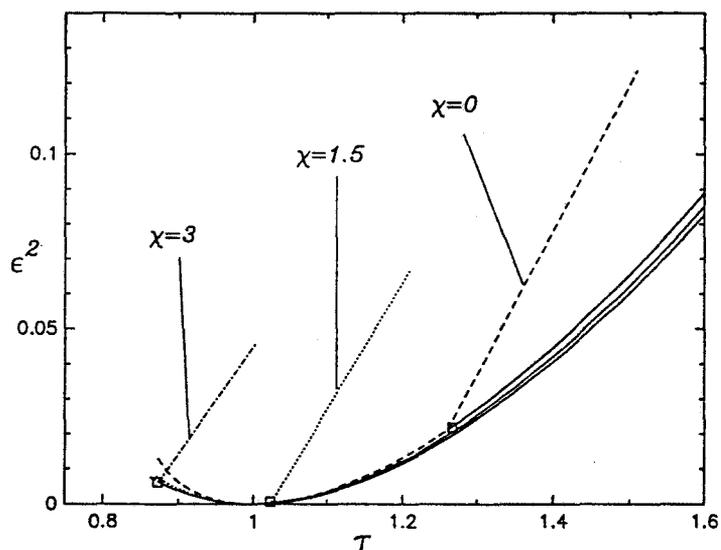


Figura 3.15: Efecto de  $\chi$  sobre la estabilidad:  $\varepsilon^2$  como función de  $\tau$  para un puente líquido con  $\Lambda = 3.5$  y  $\beta = 0.55$ .

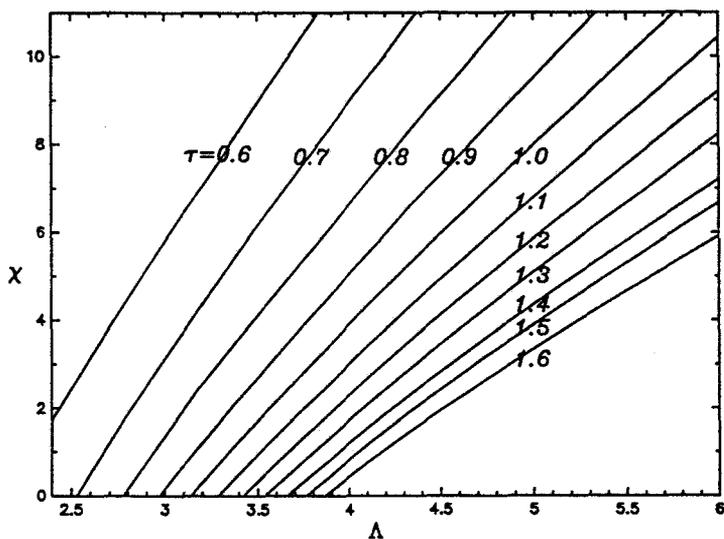


Figura 3.16: Curvas de estabilidad marginal en el plano  $\Lambda$ - $\chi$  para distintos valores de  $\tau$ . La razón de permitividades es  $\beta = 0.55$ .

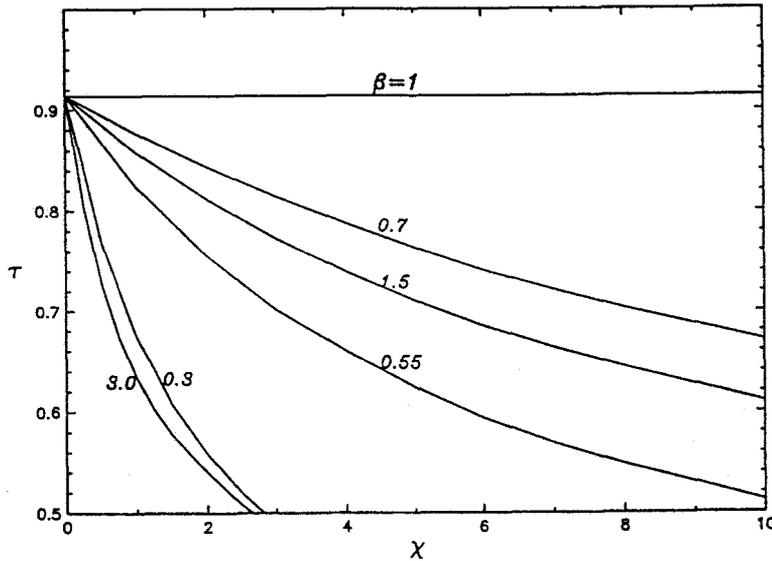


Figura 3.17: Curvas de estabilidad marginal en el plano  $\chi$ - $\tau$  para distintos valores de  $\beta$ . La razón de esbeltez está fijada a  $\Lambda = 3$ .

puede asignarse al hecho de la geometría cilíndrica y esta diferencia ha de ser cero para una interfase plana. En la figura 3.17 presentamos el mínimo volumen estable para un puente líquido con una esbeltez de  $\Lambda = 3$  como función de  $\chi$ . Para  $\beta = 1$  el volumen crítico es independiente del campo eléctrico,  $\tau_c = 0.914$ , mientras que para valores de  $\beta$  diferentes de la unidad el volumen crítico disminuye. Para un valor dado de  $\chi$  el volumen crítico  $\tau_c$  disminuye a medida que la diferencia entre las permitividades del medio exterior e interior aumenta. Notemos que para  $\beta = 3$  y  $\beta = 0.3 \simeq 1/3$  las dos curvas están próximas, de acuerdo con la simetría cualitativa del sistema al intercambiar los dos líquidos.

### 3.2.2 Efecto de la gravedad

La influencia de una fuerza de gravedad axial sobre la estabilidad de los puentes líquidos es bien conocida [Vega, 1983, Meseguer, 1990]. Las fuerzas de gravedad axiales distinguen entre una forma no axisimétrica y su reflejada respecto del plano medio  $z = 0$ . Esta ruptura de simetría excluye al cilindro como una posible solución para el caso  $\tau = 1$ . En su lugar las formas de

equilibrio serán anfóricas, con el cuello del ánfora por encima (o por debajo) del plano  $z = 0$  para valores positivos o negativos del número de Bond. También, la gravedad axial hace que el puente líquido sea menos estable para una esbeltez dada o, en otras palabras, que la esbeltez máxima estable decrezca cuando  $B$  crece para un valor dado de  $\tau$ .

Nuestro objetivo es extender los resultados previos para determinar el efecto de los campos eléctricos sobre las formas de equilibrio y la estabilidad.

### Formas de equilibrio

Como en el caso de ausencia de gravedad presentamos la evolución cuasi-estática de formas de equilibrio estables cuando aumenta el campo aplicado sometidas a un campo gravitatorio axial dado.

En la figura 3.18 se muestra la evolución de un puente líquido para el caso de  $\tau = 1$ ,  $\Lambda = 2.5$ ,  $\beta = 0.5$  con un número de Bond de  $B = 0.01$ . Como podemos ver las formas de equilibrio presentan aspecto de ánfora y a medida que aumentamos el valor del campo aplicado tienden a la forma cilíndrica. En el límite de  $\chi \rightarrow \infty$  la interfase es cilíndrica. Es importante notar que la forma de la interfase con  $B \neq 0$  se asemeja a las de la familia bifurcada del caso  $B = 0$ . Esta será la razón de la ruptura de la bifurcación.

En la figura 3.19 representamos las líneas equipotenciales de  $\Psi = \Phi - z$  para dos valores diferentes de  $\chi$  con el mismo puente líquido de la figura anterior. El potencial ya no es antisimétrico respecto del plano medio; el potencial perturbado,  $\Psi$ , es próximo a ser simétrico lo que conduce a una perturbación de la presión eléctrica antisimétrica (ver figura 3.6). En este sentido la presión eléctrica perturbada sigue la simetría de las formas de equilibrio (véanse las ecuaciones (3.14,3.16)). De modo que en la zona de más radio el término  $\varepsilon(\beta - 1)\Psi_z$  será positivo lo que implica un esfuerzo hacia el interior, mientras que en la zona de menor radio será negativo y aparece un esfuerzo en dirección saliente, y el ya conocido efecto de alineamiento se consigue.

### Diagramas de bifurcación de formas cuasicilíndricas ( $\tau = 1$ )

La influencia de una fuerza de gravedad axial residual sobre la estabilidad de puentes líquidos cilíndricos ha sido analizada en detalle en [Vega, 1983]. Se ha mostrado que el efecto de la gravedad es cambiar la naturaleza de

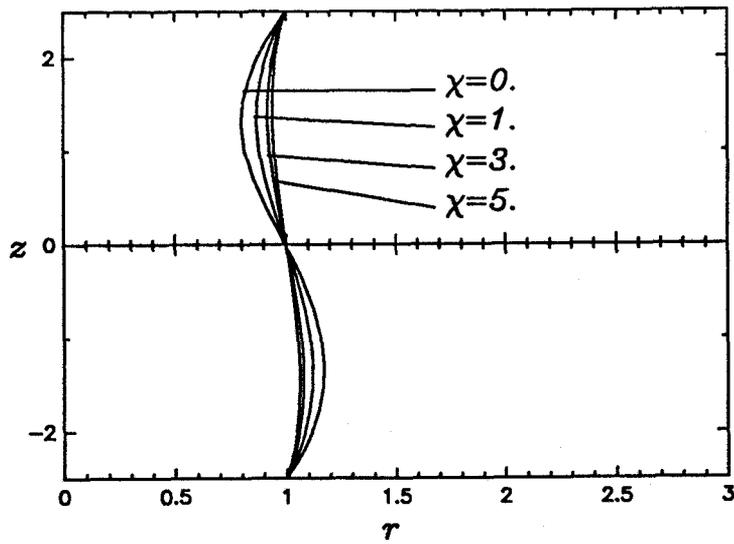


Figura 3.18: Evolución cuasiestática de un puente líquido a medida que aumenta  $\chi$ . ( $B \neq 0$ )

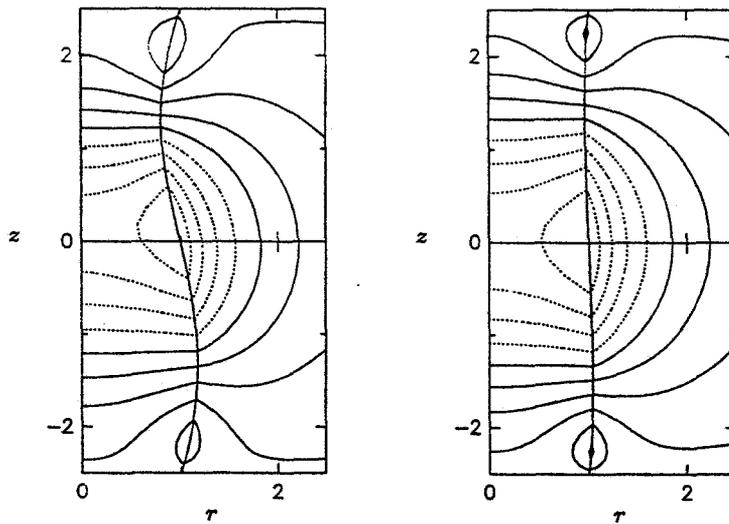


Figura 3.19: Equipotenciales de  $\Psi = \Phi - z$  para un puente líquido con  $\tau = 1$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\Lambda = 2.5$  y  $B = 0.01$ . (a)  $\chi = 0.01$  y (b)  $\chi = 5$ . El valor de las equipotenciales crece desde las líneas de puntos a las líneas continuas.

la bifurcación desde una bifurcación tipo tridente a dos ramas de solución desconectadas y con la rama estable perdiendo su estabilidad a través de un punto límite. Un estudio semianalítico basado en el método de Lyapunov-Schmidt ha incluido también el efecto del campo eléctrico [González, 1993]. De este último estudio podemos ver que la gravedad siempre rompe la bifurcación subcrítica tipo tridente en dos ramas desconectadas. En el presente trabajo extendemos el análisis local de [González, 1993] a perturbaciones de amplitud finita de la forma de equilibrio.

En la figura 3.20 se muestra la deformación  $\varepsilon$  como función de  $\chi$  para un puente de  $\tau = 1$ ,  $\Lambda = 4$  y  $\beta = 0.55$  en dos casos: sin gravedad,  $B = 0$ , y con una pequeña gravedad residual,  $B = 0.01$ . Como comparación se presenta el diagrama local (curva de puntos) obtenido por el método de Lyapunov-Schmidt [González, 1993]. Con trazo continuo se representan las partes estables del diagrama. Valores negativos de  $\varepsilon$  corresponden a formas que tienen el cuello de ánfora bajo el plano  $z = 0$ . Puesto que la gravedad ha roto la simetría original respecto del plano medio, la bifurcación subcrítica desaparece dando lugar a dos familias de formas de equilibrio separadas. La rama estable se determina porque está conectada a los cilindros estables para  $\chi \rightarrow \infty$  y  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Como se ve de la figura el nuevo campo eléctrico crítico se determina por la localización de un punto límite y es un campo más grande que el campo de bifurcación del caso  $B = 0$ . Es de notar el rápido aumento de la deformación al acercarnos al punto crítico. De la comparación con el método local vemos que existe muy buen acuerdo para  $|\varepsilon| < 0.2$ . Este resultado puede usarse como regla para estimar el rango de validez de los resultados locales. Para este número de Bond,  $B = 0.01$ , el valor crítico del campo computado por el método de elementos finitos fue  $\chi_c = 5.856$  y por el método perturbativo  $\chi_c = 0.5814$ , siendo la diferencia relativa de 0.7%.

La figura 3.21 presenta la deformación  $\varepsilon$  como función de  $B$  para tres valores de  $\chi$  en el caso  $\tau = 1$ ,  $\Lambda = 4$ ,  $\beta = 0.55$ . Valores de  $\varepsilon$  negativos corresponden a formas de ánforas invertidas. De la figura es evidente la completa simetría entre los casos  $B < 0$  y  $B > 0$ . El número de soluciones pasa de una a tres debido al campo eléctrico. Para  $\chi = 0$  las formas de equilibrio no son estables (notemos que  $\Lambda = 4 > \pi$ ), la razón de la aparición de una zona estable, que se da entre los dos puntos límites, es el efecto estabilizante del campo eléctrico. Esta región aumenta claramente al aumentar el campo eléctrico.

El cambio en el valor crítico del parámetro eléctrico como función de

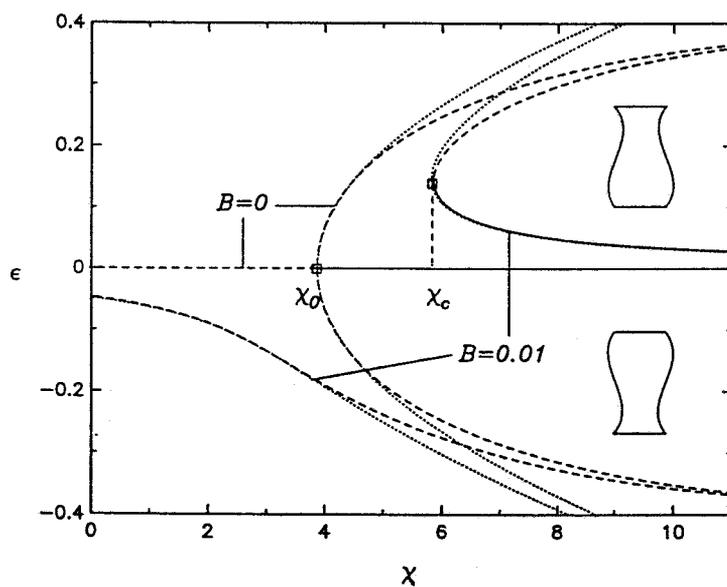


Figura 3.20:  $\epsilon$  como función de  $\chi$ . Las curvas obtenidas por el método de Lyapunov-Schmidt se presentan con línea de puntos.

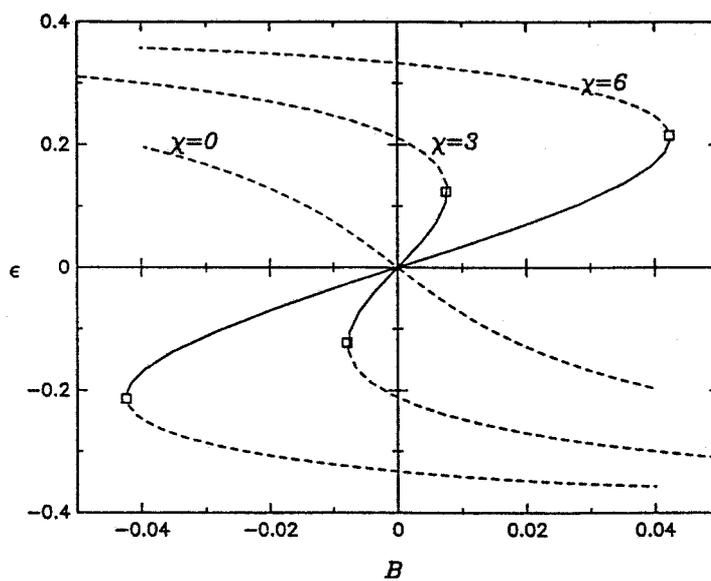


Figura 3.21:  $\epsilon$  como función de  $B$  para distintos valores de  $\chi$ .

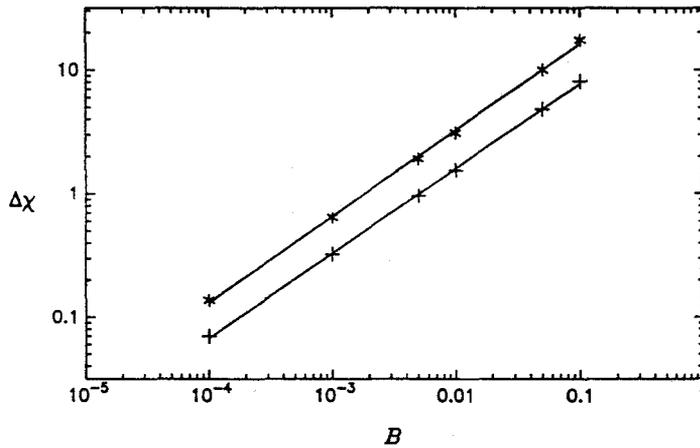


Figura 3.22: Corrimiento del campo eléctrico crítico  $|\chi_c - \chi_0|$  como función de  $B$  en puentes líquidos de  $\tau = 1$ ,  $\beta = 0.55$  para dos valores distintos de  $\Lambda$ : +,  $\Lambda = 3.5$ ; \*,  $\Lambda = 5$ .

$B$  se representa en la figura 3.22 en una escala logarítmica. La teoría de bifurcaciones, basándose sólo en argumentos de simetría [González, 1993], predice un cambio del valor crítico de  $\chi_c$  con respecto al valor de bifurcación,  $\chi_b$ , del caso  $B = 0$  que es proporcional a  $B^{2/3}$ , esto es  $|\chi_c - \chi_b| = cB^{2/3}$ , para  $B$  pequeño. Dos casos con  $\Lambda$  diferentes se presentan en la figura. La tangente de estas curvas obtenidas numéricamente se aproxima al valor  $0.66 \simeq 2/3$ . También podemos observar que la constante de proporcionalidad  $c$  crece al aumentar  $\Lambda$ , lo que indica un crecimiento de la sensibilidad del puente líquido con  $B$  cuando la esbeltez crece.

En la figura 3.23 se muestran las curvas de estabilidad marginal en el plano  $\Lambda$ - $\chi$  para puentes con volumen cilíndrico,  $\beta = 0.55$ , y diferentes valores de  $B$ . Como comparación se representan las curvas obtenidas por el método de Lyapunov-Schmidt (curvas de puntos para  $B = 0, 0.001, 0.01, 0.1$ ). Se muestran también los resultados experimentales dados en [González, 1989]. Como en la figura 3.16 la región estable está por encima de la curva correspondiente. Así un puente sometido a un cierto  $B$  es estable si el par de valores  $(\chi, \Lambda)$  está sobre la curva de ese número de Bond. Podemos ver que la curva correspondiente a  $B = 0$  es el máximo límite de estabilidad, siendo el efecto de la gravedad incrementar el campo necesario para mantener un puente estable de  $\Lambda$  dado. Las curvas de estabilidad marginal divergen a

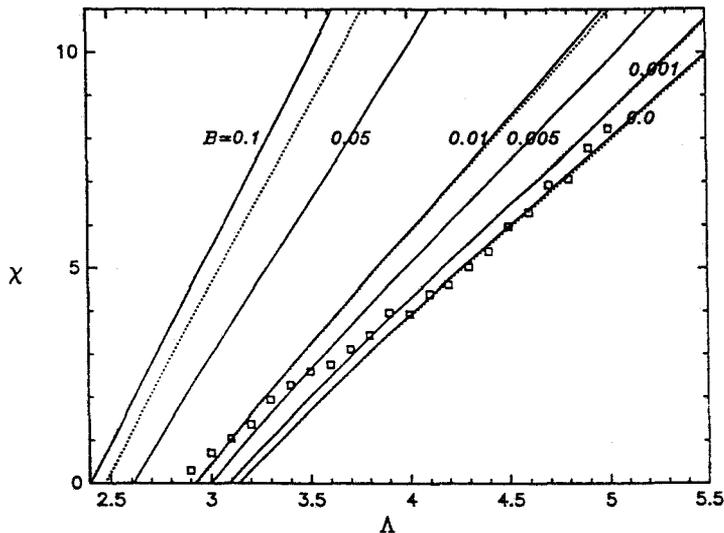


Figura 3.23: Curvas de estabilidad marginal en el plano  $\Lambda$ - $\chi$  para un conjunto de valores de  $B$ .  $\cdots$ , resultados del método de Lyapunov-Schmidt.  $\square$ , resultados experimentales.

medida que  $\Lambda$  crece mostrándonos que la influencia de la gravedad se hace más importante para esbelteces grandes. Esa divergencia es un claro indicio de la mayor sensibilidad a la gravedad del puente líquido a medida que  $\Lambda$  crece. De la comparación con los resultados del método local vemos un buen acuerdo para valores de  $B \leq 0.01$ , así la transición de  $B = 0.01$  hasta  $B = 0.1$  marca un límite de validez de los resultados locales en el rango elegido de  $\Lambda$ . La comparación con los datos experimentales nos dice que para valores pequeños del campo eléctrico los puntos experimentales caen sobre la curva de  $B = 0.01$  y que se aproximan a la de  $B = 0$  para valores grandes del campo. Dado que la temperatura no fue controlada con cuidado en esos experimentos, los puntos pueden corresponder a distintos números de Bond, al ser la diferencia de densidades una función de la temperatura. Sin embargo, esta discrepancia puede ser debida a la naturaleza del anclaje (un incremento del campo local próximo a los anillos de anclaje) y, en cualquier caso, parece necesario una determinación más cuidadosa de los parámetros físicos del experimento para tener un mejor acuerdo. Dicho estudio se presentará en el próximo capítulo.

### Diagramas de bifurcación de formas arbitrarias

Consideremos ahora el caso de  $\tau \neq 1$ . Para estos puentes líquidos la influencia de  $B$  sobre la forma de equilibrio así como la determinación del volumen mínimo estable han sido obtenidos numéricamente en investigaciones precedentes [Meseguer, 1985, Meseguer, 1990]. Los resultados muestran una mayor sensibilidad de la columna líquida con  $B$  para valores crecientes de  $\Lambda$ .

En la figura 3.24 presentamos el diagrama de bifurcación computado por nosotros para el caso de  $\Lambda = 2.6$  con  $B = 0$  y  $B = 0.01$ , en ausencia de campo eléctrico. Se representa  $\varepsilon$  frente a  $\tau$ . Es evidente de la figura que el punto de bifurcación desaparece y que las familias simétricas y no simétricas han dado lugar a dos ramas de solución separadas. La rama estable pierde ahora su estabilidad a través de un punto límite. El nuevo valor del volumen crítico es más grande mostrando la naturaleza desestabilizadora de las fuerzas gravitatorias. En este punto límite la forma de equilibrio es asimétrica y consecuentemente la perturbación crítica porta esa simetría siendo la ruptura no simétrica. Sin embargo, a medida que  $\Lambda$  decrece el efecto de  $B$  sobre la forma de equilibrio y sobre el valor del volumen crítico disminuye. Así para valores de  $\Lambda$  pequeños, allí donde el volumen crítico en ausencia de gravedad está marcado por un punto límite, la gravedad rompe poco la simetría de la forma de equilibrio y la ruptura da lugar a dos gotas de volúmenes casi iguales. Esto puede interpretarse por el cambio en la naturaleza del punto crítico en el caso de  $B = 0$ . Así el efecto de  $B$  sobre el punto de bifurcación es más importante que sobre el punto límite puesto que la deformación que introduce  $B$  va en la dirección de la perturbación crítica en un caso y no en el otro.

En la figura 3.25 observamos cómo el diagrama anterior se modifica por la presencia del campo eléctrico. Hemos representado con líneas de puntos los diagramas correspondientes para los mismos valores de  $\chi$  pero  $B = 0$  y de los diagramas de  $B = 0.01$  sólo presentamos aquella parte en que están las formas de equilibrio estables. El valor de  $\beta$  está fijado a 0.55. Observamos que para un valor dado del número de Bond y fijado  $\tau$ , el campo eléctrico disminuye el valor de  $\varepsilon$ . Esto significa que la forma de equilibrio llega a hacerse más cilíndrica, como era de esperar. La rama estable aumenta en longitud con el campo eléctrico indicando la estabilización de la columna para valores más pequeños del volumen. Como resultado de la comparación con los diagramas de  $B = 0$ , notamos que el cambio relativo del  $\tau$  crítico

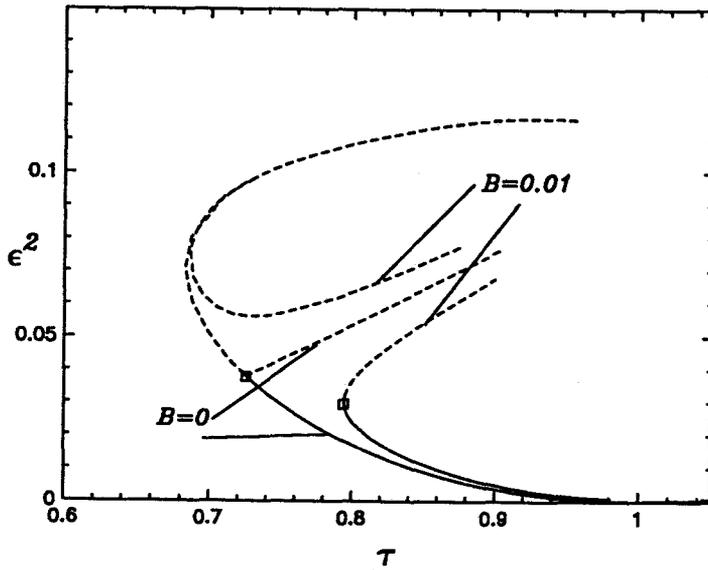


Figura 3.24:  $\varepsilon^2$  como función de  $\tau$  para un puente líquido con  $\Lambda = 2.6$  y  $\chi = 0$ .

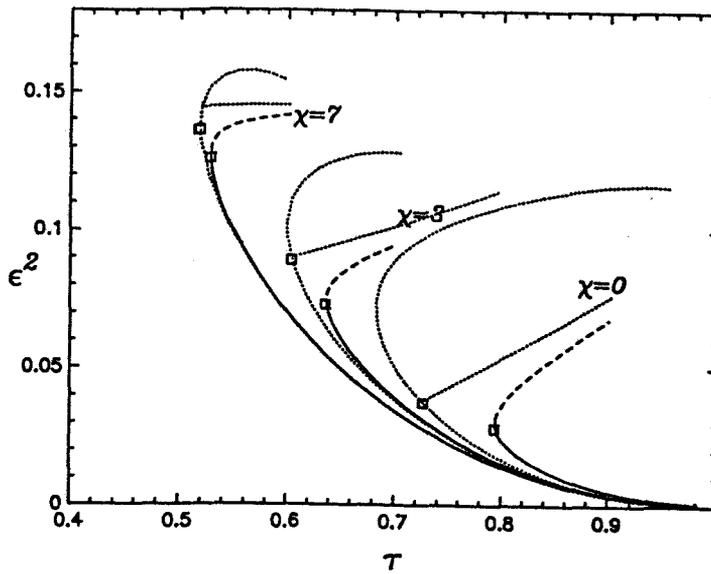


Figura 3.25:  $\varepsilon^2$  como función de  $\tau$  para un puente líquido con  $\Lambda = 2.6$ . Con líneas de puntos se representan los diagramas del caso con  $B = 0$ .

del caso  $B \neq 0$ ,  $\tau_c$ , respecto del  $\tau$  crítico del caso  $B = 0$ ,  $\tau_0$ , disminuye al aumentar  $\chi$ . En el caso presente,  $\Delta\tau = |\tau_c - \tau_0|$  disminuye desde  $\Delta\tau = 0.07$  para  $\chi = 0$  hasta  $\Delta\tau = 0.01$  para  $\chi = 7$ . Este mismo fenómeno se da para valores decrecientes de  $\Lambda$ . Así, como resultado general, se puede afirmar que los puentes líquidos son menos sensibles a una gravedad residual cuando  $\chi$  aumenta o  $\Lambda$  decrece.

### 3.3 Estimación de errores. Gotas

En lo referente a la presentación de resultados sobre gotas sometidas a campos eléctricos hemos introducido los parámetros  $\hat{\chi}$  y  $\hat{\beta}$ , análogos a  $\chi$  y  $\beta$ , respectivamente, que están definidos eligiendo como constante dieléctrica de referencia la del medio exterior. De este modo tenemos  $\hat{\chi} \equiv \epsilon_{\text{ex}} E_{\infty}^2 R / \sigma$  y  $\hat{\beta} \equiv \epsilon_{\text{in}} / \epsilon_{\text{ex}}$ . Como se vio en el capítulo primero, la presión eléctrica de una gota esférica dieléctrica en el seno de un campo manteniendo la adimensionalización del problema de puentes líquidos tiende a cero cuando  $\epsilon_{\text{in}} \gg \epsilon_{\text{ex}}$  y tiende a infinito cuando  $\epsilon_{\text{in}} \ll \epsilon_{\text{ex}}$ . Esto conlleva evidentemente problemas numéricos. Con la nueva definición de los parámetros la presión eléctrica se mantiene finita para cualquier valor de la razón de permitividades. La nueva definición de presión eléctrica  $\Delta \hat{\Pi}_E$  está relacionada con la de puentes líquidos por  $\Delta \hat{\Pi}_E = \Delta \Pi_E / \beta$ . Recordamos que para adimensionalizar las distancias hemos tomado el radio que tendría la gota si fuera hemisférica, esto es,  $R = (3V/2\pi)^{1/3}$ , con  $V$  el volumen.

Como en el problema de puentes líquidos, el objetivo de esta sección es testear las soluciones que encontremos y tratar de determinar el rango de validez de éstas dada la discretización elegida. Además, veremos el orden de convergencia del esquema discreto mediante experimentos numéricos con y sin campo eléctrico.

#### 3.3.1 Análisis sin campo eléctrico

Una gota apoyada en una superficie plana y sometida únicamente a las fuerzas de tensión superficial toma la forma de una sección esférica. Este resultado exacto nos sirve para comparar nuestras formas de equilibrio numéricas.

Sea una gota esférica anclada que tenga radio de anclaje igual a la unidad (para este cálculo particular las distancias están adimensionalizadas con el radio del anclaje). Una gota que tenga como radio de curvatura  $r = \sqrt{2}$  presenta una altura máxima  $a = 1 + \sqrt{2}$  y un salto de presiones  $-2\sigma/r$  que en forma adimensional vale  $\Delta \Pi = -\sqrt{2}$ . Dando como dato de entrada el volumen que tiene esta sección esférica, este es  $V = 11.1598316$ , hemos de obtener numéricamente los valores de  $a$  y  $\Delta \Pi$ . Los errores en la determinación de  $a$  ( $\epsilon_a$ ) y de  $\Pi$  ( $\epsilon_{\Pi}$ ) se presentan en la tabla 3.8 para valores crecientes del número de elementos. Hemos empleado elementos uniformes, o sea, de igual tamaño angular. De estos resultados deducimos que la convergencia para el

$N$	4	6	8	10	12	16
$\varepsilon_a$	$6.1 \times 10^{-4}$	$1.4 \times 10^{-4}$	$4.7 \times 10^{-5}$	$2.0 \times 10^{-5}$	$1.0 \times 10^{-5}$	$3.4 \times 10^{-6}$
$\varepsilon_{II}$	$2.9 \times 10^{-5}$	$5.8 \times 10^{-6}$	$1.9 \times 10^{-6}$	$7.8 \times 10^{-7}$	$3.8 \times 10^{-7}$	$1.2 \times 10^{-7}$

Tabla 3.8: Convergencia para los resultados numéricos de gotas sin campo.

valor de la función  $f(\theta)$  en los nodos y la presión es de orden cuarto. El mismo resultado que habíamos obtenido en el caso de puentes líquidos. De los valores numéricos vemos que ya para cuatro elementos el error relativo es menor que  $7 \times 10^{-4}$ .

### 3.3.2 Análisis con campo eléctrico

#### Estudio de la presión eléctrica

Hemos de fijar la distancia máxima a la que se extienden los electrodos respecto del eje, la denotaremos por  $R_\infty$ . Basándonos en el valor de  $R_\infty$  del problema de puentes líquidos hemos tomado  $R_\infty = 8$ .

Podemos estudiar los errores esperables analizando los que nos aparecen en la obtención de la presión eléctrica del problema de una esfera en el seno de un campo. Sea una esfera de constante dieléctrica relativa a la del medio exterior  $\hat{\beta}$  y de radio unidad en el seno de un campo eléctrico de intensidad igual a uno. El potencial en todos los puntos del espacio viene dado por (ver capítulo 1)

$$\Phi_{\text{in}} = -\frac{3}{\hat{\beta} + 2} r \cos \theta, \quad (3.23)$$

$$\Phi_{\text{ex}} = \left( \frac{\hat{\beta} - 1}{\hat{\beta} + 2} \right) \frac{\cos \theta}{r^2} - r \cos \theta. \quad (3.24)$$

La presión eléctrica adimensional de esta gota es

$$\Delta \hat{\Pi}_E = \frac{1 - \hat{\beta}}{2} \left( \frac{3}{\hat{\beta} + 2} \right)^2 \left( \sin^2 \theta + \hat{\beta} \cos^2 \theta \right). \quad (3.25)$$

Si en nuestro sistema colocamos una gota hemiesférica sobre el plano inferior a potencial cero y fijamos el potencial del plano superior (situado a una

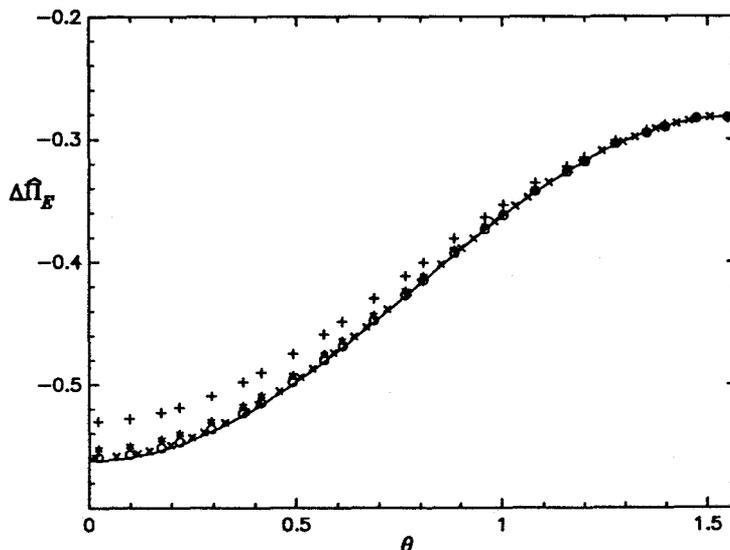


Figura 3.26:  $\Delta\hat{\Pi}_E$  para esfera dieléctrica en presencia de una campo. En trazo continuo el resultado analítico. Resultados numéricos: +,  $\Delta r = 0.25$ ; \*,  $\Delta r = 0.125$ ; o,  $\Delta r = 0.0625$ ; ×,  $\Delta r = 0.0625$ .

distancia  $L$  del plano inferior) a la función que se tiene de sustituir  $r$  por  $L/\cos\theta$  en (3.24), tenemos las condiciones de contorno necesarias para que la solución del potencial sea la dada previamente. Tenemos así una solución analítica con la que poder comparar nuestras soluciones numéricas para la presión eléctrica.

En la figura 3.26 presentamos el valor de la presión eléctrica para una gota con permitividad  $\hat{\beta} = 2$ . La distancia entre planos se ha colocado en  $L = 3$ . Recordamos que el tamaño de los elementos en dirección radial sigue una progresión aritmética de modo que sea más fina la discretización cerca de la interfase. La primera capa de elementos adyacentes a la interfase tiene una anchura radial fijada, a la que llamamos  $\Delta r$ . Los resultados que se presentan en esta figura corresponden a diferentes valores de esta distancia  $\Delta r$ . Aquellos representados por los símbolos +, \*, o tienen un número de elementos uniformes en dirección angular  $N_\theta = 8$ , un número  $N_{ri} = 4$  en dirección radial en el interior de la gota y  $N_{re} = 8$  en el exterior. Para el representado por el símbolo × se tiene  $N_\theta = 12$ ,  $N_{ri} = 6$  y  $N_{re} = 12$ . Vemos que el máximo error de  $\Delta\hat{\Pi}_E$  se da para  $\theta = 0$ . Al reducir  $\Delta r$  la precisión aumenta considerablemente. Observamos además que el efecto de aumentar

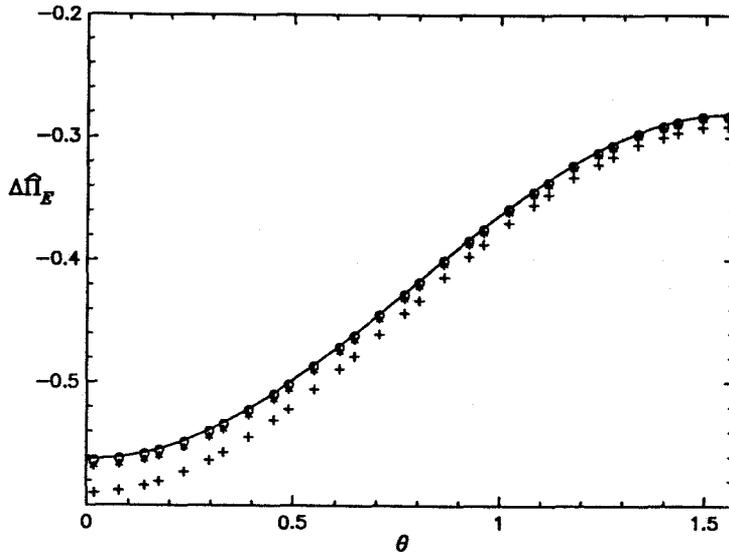


Figura 3.27:  $\Delta \hat{\Pi}_E$  sobre una esfera dieléctrica con  $\hat{\beta} = 2$  para distintos valores de  $L$ : +,  $L = 2$ ; \*,  $L = 3$ ; o,  $L = 4$ . En trazo continuo el resultado analítico para  $L = \infty$ .

el número de elementos no es tan importante como el refinamiento en dirección radial cerca de la interfase, esto es, disminución de  $\Delta r$ . Al analizar la expresión analítica del potencial vemos que las variaciones en dirección radial del potencial exterior son más significativas cerca de la interfase, de ahí proviene en gran parte el comportamiento de los errores.

Analizando los valores numéricos en función de la anchura radial  $\Delta r$  llegamos a la conclusión de que la convergencia de la presión eléctrica es de orden dos. Lo que es razonable pues para un problema regular la convergencia del campo para elementos cuadráticos es de orden dos, siendo la del potencial de orden tres [Strang, 1973]. Con  $\Delta r = 0.0625$  observamos un error máximo relativo de 0.005, para el caso  $N_\theta = 8$ ,  $N_{ri} = 4$  y  $N_{re} = 8$ . Comparando estos errores con aquellos sin campo eléctrico, concluimos que los errores debidos a la discretización del campo son los que gobiernan los resultados numéricos.

En un problema real los electrodos son equipotenciales y sólo en el límite en que la distancia entre placas  $L$  es infinita se obtiene la expresión (3.25) para gotas semiesféricas. A continuación analizamos el efecto que tiene un  $L$  finito sobre la presión eléctrica cuando se mantiene el mismo campo, esto es, cuando la diferencia de potencial se mantiene proporcional a  $L$ . En la figura 3.27 representamos la presión eléctrica sobre una gota hemiesférica con

$N$	$d$	$f(0)$	$f(\pi/2)$	$\Delta\Pi$
4	0.5000	1.14790	0.933317	-2.691272
8	0.2500	1.14486	0.942065	-2.695067
16	0.1250	1.14411	0.934447	-2.696035
32	0.0625	1.14392	0.934516	-2.696290

Tabla 3.9: Convergencia de las formas de equilibrio.

$\hat{\beta} = 2$  colocada entre placas plano-paralelas a medida que cambia  $L$  y fijado  $E_\infty = 1$ . La distancia  $\Delta r$  vale 0.05. El número de elementos es  $N_\theta = 10$ ,  $N_{r_i} = 4$  y  $N_{r_e}$  va cambiando con  $L$  de modo tal que se mantenga la progresión de las distancias radiales de los elementos. Para  $L = 4$  la diferencia con el valor exacto es muy pequeña, se tiene un error relativo máximo de 0.008. Es también interesante notar que la cercanía del electrodo superior hace aumentar la diferencia entre la presión máxima y mínima, lo que implica que la gota debe tender a deformarse tanto más cuanto más cerca está del electrodo superior, resultado que aparece en [Basaran, 1990].

### Convergencia de las formas de equilibrio

Hemos realizado algunos experimentos de convergencia para formas de equilibrio con ángulos de contacto  $\alpha = \pi/2$ . Esta configuración es equivalente a aquella de una gota colocada en el plano medio entre electrodos. En este caso no existe ningún problema de singularidad de los campos en la línea de contacto. Estamos, pues, en un problema regular, que en principio ha de darnos el orden de convergencia más alto del esquema numérico. En la tabla 3.9 presentamos la altura máxima,  $f(0)$ , el radio de la base de la gota,  $f(\pi/2)$ , y el salto en la presión total,  $\Delta\Pi$ , en el caso  $\hat{\chi} = 1.25$ ,  $\hat{\beta} = 0.1$  y  $L = 2$  como funciones del inverso del tamaño de los elementos, definido como el número de elementos en dirección angular  $1/h = N_\theta$ . Estos experimentos numéricos se han realizado con mallados definidos por  $N_\theta = 8, 16$  y  $32$  elementos uniformes en dirección  $\theta$  y  $N_{r_i} = N_{r_e} = 4, 8$  y  $16$  elementos uniformes en dirección  $r$ . Los resultados se adaptan a una convergencia de orden 2. Vemos que el orden de convergencia es el orden del error en la discretización

de las derivadas. Para  $N = 8$  tenemos un error en la determinación de  $f(0)$  menor de  $10^{-3}$ .

Puesto que las gotas tienden a alargarse con el campo eléctrico la forma de mallar presenta desventajas al crecer el campo. Para formas muy elongadas la descripción de la punta de la gota es pobre ya que se produce una variación grande de la forma de la interfase en torno a  $\theta = 0$ . Una forma de mejorar el mallado es emplear una combinación de líneas espinales de  $\theta = \text{Cte}$  para la parte superior de la gota y de espinales de  $z = \text{Cte}$  para la parte inferior, tal y como se ha realizado recientemente en [Wohlhuter, 1992]. Por otro lado, cualquier esquema discreto presentará dificultades cuando se trate describir las formas de gotas con una curvatura muy grande en la punta que se observan en la experiencia. Con el objeto de reducir el problema en nuestro mallado hemos discretizado más finamente las proximidades de  $\theta = 0$ . Este refinamiento nos ha mostrado resultados aceptables tanto para la forma de la interfase como de la presión eléctrica. Tres mallas diferentes se usaron para mostrar la sensibilidad al refinamiento de la variación de la elongación con el campo eléctrico. Los mallados estaban compuestos, respectivamente, por  $N_\theta = 10, 15, 20$  elementos no uniformes en dirección  $\theta$ ,  $N_{r_i} = 5, 6, 7$  elementos no uniformes en el interior de la gota y  $N_{r_e} = 12, 16, 20$  elementos no uniformes en el exterior de la gota. Para  $\theta < \pi/4$  las longitudes de los elementos en dirección  $\theta$  siguen una progresión geométrica de razón 1.5. En dirección radial las longitudes de los elementos siguen una progresión aritmética definida por la longitud de los elementos adyacentes a la interfase, fijada a  $\Delta r = 0.04, 0.02, 0.01$  para los tres mallados, respectivamente. En la figura 3.28 representamos la altura máxima  $a$  frente al número eléctrico para estos tres mallados en el caso de una gota con ángulo de contacto fijado  $\alpha = \pi/2$ ,  $\hat{\beta} = 25$  y  $L = 8$ . La diferencia entre los mallados más finos no se observa en la figura. Podemos ver que para valores moderados de la elongación no hay diferencia entre las curvas obtenidas con el primer y los otros dos mallados. Sólo cuando la elongación es grande, y la curvatura en la punta es grande, la diferencia entre el primer mallado y los otros dos es notable. Existe pues un límite en los resultados a presentar. Un indicativo de la validez de los resultados se tiene observando la presión eléctrica en la que aparecen oscilaciones numéricas en la punta cuando la discretización es pobre. Así, como control de los resultados que a continuación mostraremos hemos empleado la forma de la presión eléctrica y la sensibilidad de los resultados a la variación del tamaño de los elementos.

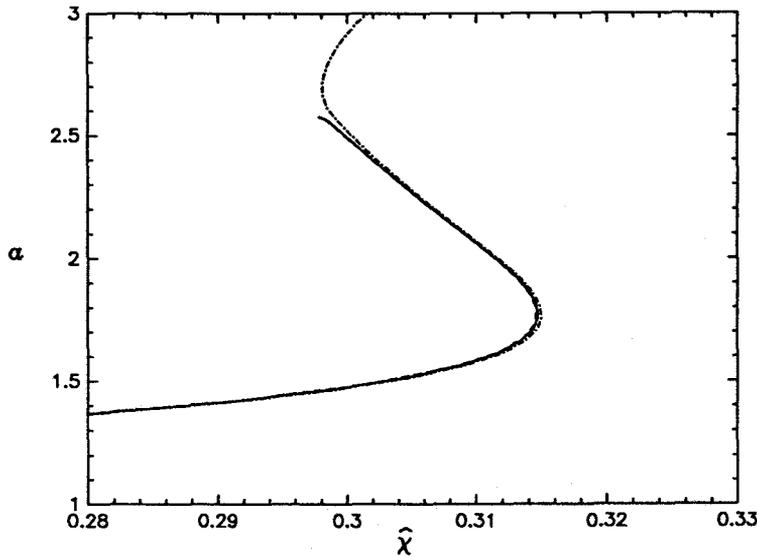


Figura 3.28: Comparación de los resultados de la altura máxima  $a$  como función de  $\hat{\chi}$  para distintas discretizaciones: (- · -)  $N_\theta = 10, N_{ri} = 5, N_{re} = 12$ ; (—)  $N_\theta = 15, N_{ri} = 6, N_{re} = 16$  y  $N_\theta = 20, N_{ri} = 7, N_{re} = 20$ .

### 3.4 Resultados de gotas

Los siguientes resultados numéricos tratan sobre gotas axisimétricas dieléctricas ancladas o apoyadas cuando existe un campo eléctrico en el infinito y el número de Bond es despreciablemente pequeño. Para simular el campo en el infinito hemos colocado el electrodo superior a una altura grande,  $L = 8$ . La discretización tomada viene definida por  $N_\theta = 15, N_{ri} = 6, N_{re} = 16$ . Además,  $N_\theta = N_{\theta_1} + N_{\theta_2}$  con  $N_{\theta_1} = 10$  elementos no uniformes para  $0 \leq \theta \leq \pi/4$  y  $N_{\theta_2} = 5$  elementos uniformes para  $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$ . Los  $N_{\theta_2}$  elementos no uniformes se acumulan en torno a  $\theta = 0$  de modo que sus tamaños cumplen  $\Delta\theta_{i+1}/\Delta\theta_i = 1.5$ . En dirección radial los elementos siguen una progresión aritmética definida por  $\Delta r = 0.02$ .

#### 3.4.1 Ángulo de contacto fijado

Cuando no hay campo aplicado, gotas de  $\alpha = 90^\circ$  son hemiesferas, gotas de  $\alpha < 90^\circ$  son secciones esféricas con el centro debajo del plano de apoyo y gotas de  $\alpha > 90^\circ$  son secciones esféricas con el centro por encima del plano.

**Gotas libres ( $\alpha = \pi/2$ )**

Como se ha mencionado una gota de ángulo de contacto  $\alpha = 90^\circ$  para separación entre electrodos grande es totalmente análoga a una gota libre en el seno de un campo. En la figura 3.29 presentamos las líneas equipotenciales que hemos obtenido para una gota con  $\hat{\beta} = 4$  y  $\hat{\chi} = 2.926$ . Como vemos el campo en el interior de la gota es básicamente constante y la forma que adopta cuando se deforma es muy aproximadamente la de un elipsoide. El alargamiento de la gota puede entenderse mediante un razonamiento basado en que el campo en el interior es constante. La expresión de la presión eléctrica en función del campo eléctrico constante interior es

$$\Delta\hat{\Pi}_E = \frac{1 - \hat{\beta}}{2} (E_t^2 + \hat{\beta}E_n^2) = \frac{1 - \hat{\beta}}{2} (1 + (\hat{\beta} - 1) \cos^2 \phi) E^2, \quad (3.26)$$

donde  $\phi$  es el ángulo que forma el campo interior respecto de la normal a la superficie. Observamos que en la expresión aparece un término constante y otro que depende del ángulo. El término constante obliga a que aparezca un salto de presiones determinado para mantener el volumen. El término dependiente del ángulo tiene siempre un valor negativo independiente de  $\hat{\beta}$ , lo que quiere decir que estos esfuerzos están dirigidos hacia el exterior de la gota. Además alcanzan su máximo valor para  $\phi$  igual a cero, esto es, el polo del elipsoide, y su valor mínimo para  $\phi = \pi/2$ , el ecuador, lo que obliga a la gota a alargarse ya sea  $\hat{\beta}$  mayor o menor que uno.

Como hemos visto en la figura 3.29, la forma que adquiere una gota cuando se le aplica un campo eléctrico es muy aproximadamente elipsoidal. Por otro lado, la solución del problema de potencial de un elipsoide dieléctrico en el seno de un campo admite una solución cerrada [Landau, 1960]. Basándose en estas ideas Taylor [Taylor, 1964a] hizo cumplir la ecuación de esfuerzos sobre la interfase del elipsoide en dos puntos de éste, en el polo ( $\theta = 0$ ) y en el ecuador ( $\theta = \pi/2$ ), consiguiendo así una ecuación para la elongación de la gota en función del campo aplicado. En su trabajo Taylor consideró una gota conductora, nosotros aquí extendemos su idea al caso de gotas dieléctricas siguiendo a Miksis [Miksis, 1981].

Teniendo en cuenta que el campo solución en el interior del elipsoide es constante, la ecuación en  $\theta = 0$  es

$$2\sigma ab^{-2} + \Delta\Pi - \frac{\epsilon_{\text{ex}} E_{\text{in}}^2}{2} (\hat{\beta}^2 - \hat{\beta}) = 0, \quad (3.27)$$

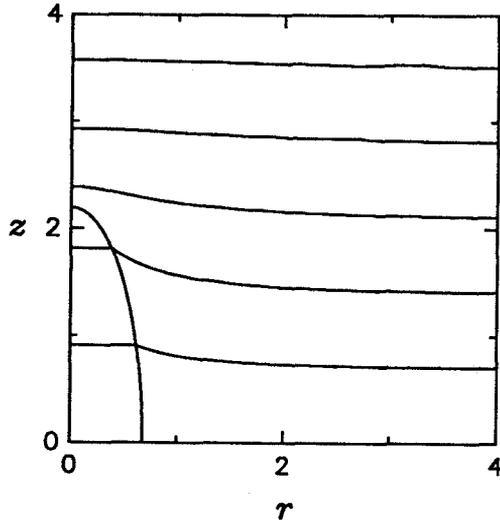


Figura 3.29: Equipotenciales para una gota de  $\hat{\beta} = 4$  con  $\hat{\chi} = 2.926$ .

y en  $\theta = \pi/2$

$$\sigma(a^{-2}b + b^{-1}) + \Delta\Pi - \frac{\epsilon_{\text{ex}} E_{\text{in}}^2}{2}(\hat{\beta} - 1) = 0, \quad (3.28)$$

donde  $a$  y  $b$  son los semiejes del elipsoide, mayor y menor, respectivamente, y  $E_{\text{in}}$  es el campo en el interior. Restando las dos ecuaciones llegamos a

$$\sigma(2ab^{-2} - a^{-2}b - b^{-1}) - \frac{\epsilon_{\text{ex}} E_{\text{in}}^2}{2}(\hat{\beta} - 1)^2 = 0. \quad (3.29)$$

El campo  $E_{\infty}$  está relacionado con el campo en el interior por [Landau, 1960]

$$E_{\text{in}} = \frac{E_{\infty}}{1 + n(\hat{\beta} - 1)}, \quad (3.30)$$

donde

$$n = \frac{1 - e^2}{e^3} \left( \log \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} - e \right), \quad (3.31)$$

con  $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ . Si inicialmente la gota es esférica con radio  $R$ , adimensionalizando las distancias con esta longitud la condición de volumen

constante es  $ab^2 = 1$ . Y la forma final de la ecuación que liga el campo aplicado con la elongación es

$$\hat{\chi} \equiv \frac{\epsilon_{\text{ex}} E_{\infty}^2 R}{\sigma} = \frac{4a^2 - 2a^{-\frac{5}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}}}{(\hat{\beta} - 1)^2} \left[ 1 + n(\hat{\beta} - 1) \right]^2. \quad (3.32)$$

Otra forma de aplicar la aproximación elipsoidal se basa en construir la energía libre del sistema. Siguiendo los pasos de Cheng y Chaddock [Cheng, 1984] escribimos la energía libre de un dieléctrico en el seno de un campo eléctrico como

$$\mathcal{U} = \sigma S - \frac{1}{2} \epsilon_{\text{ex}} \int \mathbf{E}_{\infty} \cdot (\hat{\beta} \mathbf{E}_{\text{in}} - \mathbf{E}_{\text{in}}) d\tau, \quad (3.33)$$

donde  $\mathcal{U}$  es la energía libre,  $S$  es el área de la superficie del elipsoide y la integral se extiende al volumen ocupado por el dieléctrico. En el caso de un elipsoide el campo es constante en el interior y la energía libre queda

$$\mathcal{U} = \sigma S - \frac{1}{2} \epsilon_{\text{ex}} \mathbf{E}_{\infty} \cdot \mathbf{E}_{\text{in}} (\hat{\beta} - 1) V, \quad (3.34)$$

donde  $V$  es el volumen. Utilizando las relaciones anteriormente mencionadas entre el campo aplicado y el campo interior la forma adimensional de la energía libre es

$$\mathcal{U}^* \equiv \frac{\mathcal{U}}{4\pi\sigma R^2} = b^2 + abe^{-1} \text{sen}^{-1} e - \frac{\epsilon_{\text{ex}} E_{\infty}^2 R}{6\sigma} \frac{\hat{\beta} - 1}{1 + n(\hat{\beta} - 1)}. \quad (3.35)$$

La condición de equilibrio se tiene haciendo  $\partial\mathcal{U}^*/\partial a = 0$  teniendo en cuenta que  $n$ ,  $b$ ,  $e$  son funciones de  $a$ . Obtenemos así una ecuación que liga  $\hat{\chi}$  con el semieje mayor  $a$ :

$$\hat{\chi} = \frac{2a^2 e - a^{\frac{7}{2}} \text{sen}^{-1} e + 3a^{\frac{1}{2}} e^{-2} \text{sen}^{-1} e - 3a^2 e^{-1}}{\left( \frac{\hat{\beta} - 1}{1 + n(\hat{\beta} - 1)} \right)^2 \left( \frac{-2ne}{1 - e^2} - 3ne^{-1} + e^{-1} \right)}. \quad (3.36)$$

En la figura 3.30 presentamos los resultados de  $a$  como función de  $\hat{\chi}$  para distintos valores de  $\hat{\beta}$  obtenidos por el método de ajuste de dos puntos de

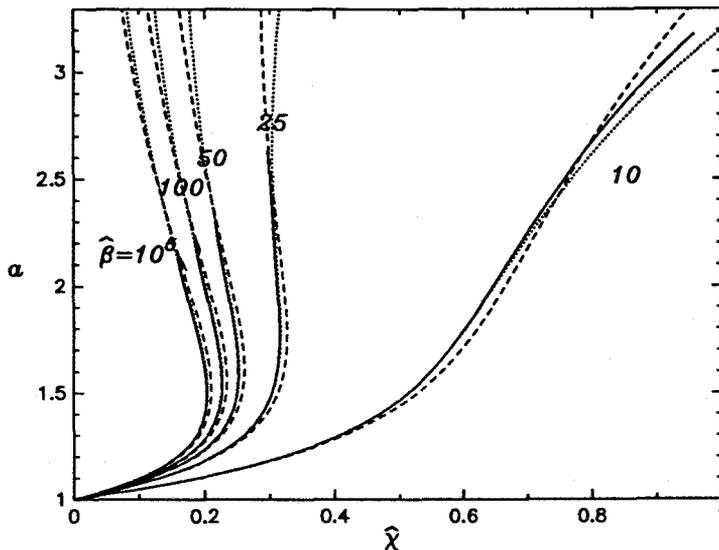


Figura 3.30: Resultados de  $a$  como función de  $\hat{\chi}$  para diferentes valores de  $\hat{\beta}$  obtenidos por la presente discretización (—), por el método energético ( $\cdots$ ), y por el método de dos puntos (—).

Taylor, por el método energético de Cheng-Chaddock y por la presente discretización de elementos finitos. Los resultados muestran un buen acuerdo para valores moderados de la elongación, siendo el acuerdo mejor entre el método energético y el numérico. Observamos que a medida que  $\hat{\beta}$  se aproxima a 1 se hace más grande el campo necesario para producir una deformación dada. Los resultados muestran que dependiendo de  $\hat{\beta}$  existe o no un punto crítico correspondiente a un punto de retorno. Gotas con  $\hat{\beta}$  grande se alargan alcanzando un máximo, donde pierden su estabilidad. Gotas con  $\hat{\beta}$  pequeño, incluyendo como veremos posteriormente aquellas que están rodeadas por un medio de más permitividad  $\hat{\beta} < 1$ , tienden a alargarse indefinidamente, al menos, en el rango de elongaciones estudiado.

Para el caso de  $\hat{\beta} = \infty$  (gotas conductoras) tenemos un valor para el parámetro eléctrico crítico de 0.210 obtenido por el método de dos puntos y un valor de 0.204 obtenido por los métodos numérico y energético. Valor que compara bastante bien con los datos en [Miksis, 1981, Basaran, 1990, Wohlhuter, 1992]. Este límite de estabilidad ha sido verificado experimentalmente en [Wilson, 1925, Basaran, 1990]. Una vez superado el límite de estabilidad las gotas evolucionan rápidamente formándose puntas cónicas de

las que emergen finos chorros o pequeñas gotitas. El valor crítico  $\hat{\beta}_c$  que distingue entre un comportamiento con punto de retorno y no es  $\hat{\beta} = 20.8$  para el método energético,  $\hat{\beta} = 18.1$  para el método de dos puntos, y está entre  $\hat{\beta} = 20$  y  $\hat{\beta} = 21$  para nuestro esquema numérico. El valor dado en [Wohlhuter, 1992] está entre 20 y 20.5.

Los resultados de las aproximaciones elipsoidales predicen histéresis para valores de  $\hat{\beta}$  mayores que  $\hat{\beta}_c$ . De acuerdo con éstas, existe otro punto de retorno donde la estabilidad se vuelve a obtener y la elongación vuelve a crecer con el campo aplicado. Al llegar aquí existen diferencias cualitativas entre los resultados numéricos y los de las aproximaciones elipsoidales. Este detalle es estudiado por Wohlhuter y Basaran [Wohlhuter, 1992] llegando a la conclusión de que existen tres comportamientos diferentes: familias de gotas con  $\hat{\beta} < 20.25 \pm 0.25$  presentan una elongación monótonamente creciente con el campo; familias de gotas con  $20.25 \pm 0.25 < \hat{\beta} < 20.75 \pm 0.25$  presentan histéresis; y si  $\hat{\beta} > 21.75 \pm 0.25$  las familias se acaban para un determinado valor de la elongación pasado el punto de retorno.

El comportamiento observado para  $\hat{\beta} > 21.75 \pm 0.25$  es totalmente diferente de lo que se predice por las aproximaciones elipsoidales. Se observa numéricamente que la curvatura de la punta de la gota crece rápidamente para un valor dado de la elongación pasado el punto de retorno. Lo que se interpreta como que la curvatura crece hasta infinito en las proximidades de este punto y que la familia de formas se acaba en [Wohlhuter, 1992]. Este resultado parece estar de acuerdo con los resultados numéricos de Miksis [Miksis, 1981]. Miksis hace además una extrapolación de los valores de la elongación en este punto basado en su figura 4, pero esta extrapolación no es evidente de la figura debido a la adimensionalización que toma.

Vamos a examinar la curvatura en la punta de la gota. El cálculo de la curvatura local envuelve derivadas segundas de  $f$  y no sería correcto calcularla con funciones de clase  $C^0$  como las que hemos empleado. Podemos calcular, sin embargo, el valor medio de la curvatura en el primer elemento, en el intervalo  $(0, \theta_1)$ , que habrá de coincidir con la curvatura en la punta para  $\theta_1 \ll 1$ . Para ello, haciendo uso de la ecuación (2.145) con  $g(\theta) = 1$ , la curvatura media  $\mathcal{H}$  en la punta toma la siguiente expresión libre de derivadas

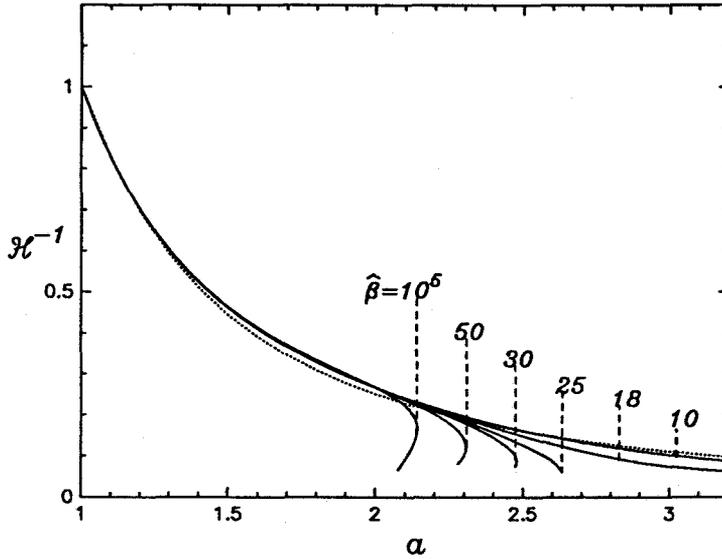


Figura 3.31: Inverso de la curvatura local  $\mathcal{H}^{-1}$  en la punta de la gota como función de la elongación  $a$  para diferentes valores de  $\hat{\beta}$ .

segundas

$$\langle 2\mathcal{H} \rangle = \frac{\int_0^{\theta_1} \left[ (2f^2 + f_\theta^2)(f^2 + f_\theta^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \text{sen } \theta \, d\theta - f_\theta f (f^2 + f_\theta^2)^{-\frac{1}{2}} \text{sen } \theta \Big|_{\theta_1}}{\int_0^{\theta_1} f^2 \text{sen } \theta \, d\theta} \quad (3.37)$$

En la figura 3.31 representamos el inverso de la curvatura local en la punta obtenida en este trabajo como función de la elongación para diferentes valores de  $\hat{\beta}$ . Las aproximaciones elipsoidales dan para estos valores una única curva  $\mathcal{H}^{-1} = a^{-2}$ , ya que la curvatura en el polo del elipsoide es  $ab^{-2}$  y la constricción de volumen es  $ab^2 = 1$ . Nuestros cálculos indican que para valores pequeños de  $\hat{\beta}$  la curvatura de la punta crece *regularmente* a infinito con la elongación. Por el contrario, para valores grandes de  $\hat{\beta}$  hay un súbito crecimiento de la curvatura de la punta, que está de acuerdo con los resultados presentados en [Wohlhuter, 1992]. Hemos encontrado además que las familias no terminan aquí sino que presentan un nuevo punto de retorno, de modo que aparece una nueva región estable.

Detengámonos en el caso de gotas conductoras ( $\hat{\beta} \gg 1$ ) y representemos  $a$  frente a  $\hat{\chi}$  ampliando la zona final (figura 3.32). Vemos que después del segundo punto de retorno la elongación alcanza un máximo y después dis-

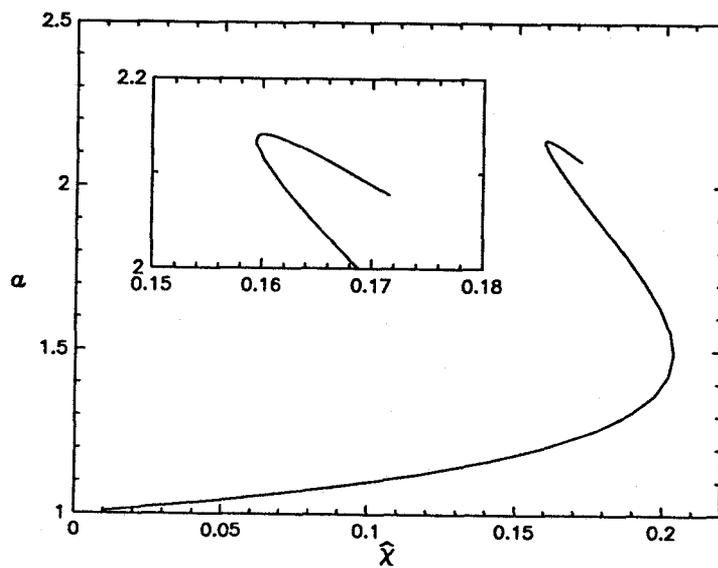


Figura 3.32: Elongación  $a$  frente a  $\hat{\chi}$  para gota con  $\hat{\beta} = 10^5$ .

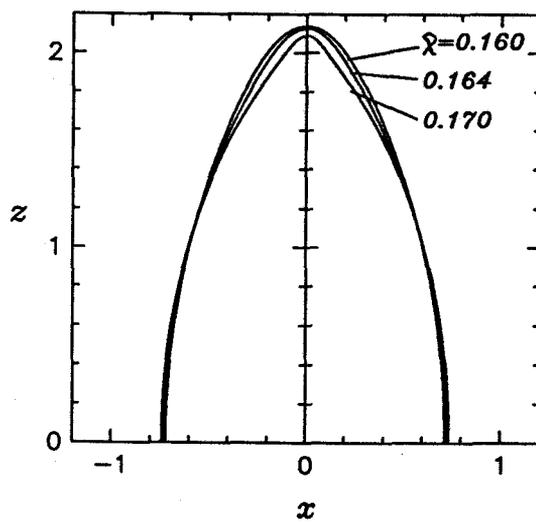


Figura 3.33: Formas de equilibrio después del segundo punto de retorno ( $\hat{\beta} = 10^5$ ).

minuye al crecer  $\hat{\chi}$ . Este nuevo punto de retorno aparece para  $\hat{\chi} = 0.160$ . Tres formas de equilibrio de esta parte de la rama se representan en la figura 3.33. En ella vemos que la curvatura de la punta crece y que la parte superior de la gota va adquiriendo una forma cónica. El incremento del número de elementos en  $\theta$  y en  $r$  cerca de la punta parece confirmar la veracidad de estas soluciones. La precisión de la discretización no nos permitió seguir más por la rama pues llega un momento en el que la discretización no puede resolver una curvatura tan grande y tanto las formas de la interfase como de la presión eléctrica presentaban oscilaciones numéricas.

El comportamiento expuesto para  $\hat{\beta} \gg 1$  parece ser el caso para las familias de formas con  $\hat{\beta}$  mayor que un valor de transición  $\hat{\beta}_t$  donde primeramente aparece un rápido incremento de la curvatura. En nuestros cálculos este valor es  $21 < \hat{\beta}_t < 22.5$ . Nuestro esquema numérico tiene la desventaja de que la determinación de  $\hat{\beta}_t$  es difícil porque la transición tiene lugar para valores grandes de la elongación y entonces la descripción de la punta de la gota es pobre. Pensamos que para  $\hat{\beta} > \hat{\beta}_t$  las formas están conectadas a una forma con una punta cónica (pues hay un súbito incremento de la curvatura) pero a través de una curva más compleja que la dada en [Wohlhuter, 1992], esto es, teniendo en cuenta el nuevo punto de retorno. En el apéndice C demostramos mediante un estudio analítico que existe un valor  $\hat{\beta}_m = 17.5986$  por debajo del cual es imposible que exista una solución local cónica. Los valores de  $\hat{\beta}_t$  dependen de las condiciones de contorno particulares y del tamaño del sistema, sin embargo, debemos esperar tener  $\hat{\beta}_t > 17.5986$ . Los resultados numéricos de [Wohlhuter, 1992, Miksis, 1981, Sherwood, 1988] así como los nuestros confirman este hecho.

Como punto final de esta sección de gotas libres prestemos atención a las gotas con  $\hat{\beta} < 1$ . Experimentalmente un caso interesante es el de las burbujas en el interior de líquidos. En la figura 3.34 se representa la elongación frente al parámetro eléctrico para dos casos  $\hat{\beta} = 0.1$  y  $\hat{\beta} = 10^{-5}$ . Vemos que tienden a crecer con el campo sin desestabilizarse (no observamos punto de retorno). El campo adimensional es bastante más grande que en los casos anteriores y por ello las hemos representado en una gráfica diferente. Las curvas de  $a$  como función de  $\hat{\chi}$  presentan una forma distinta de las gotas con  $\hat{\beta} > 1$  pues no presentan puntos de inflexión.

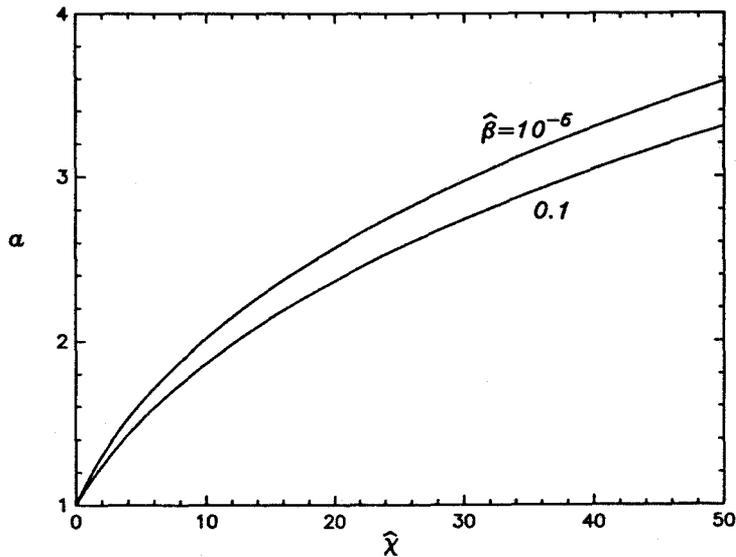


Figura 3.34: Elongación  $a$  como función de  $\hat{\chi}$  para gotas con  $\hat{\beta} < 1$ .

### Gotas de ángulo de contacto arbitrario

La equivalencia con las gotas libres deja de ser válida dando lugar a distintos comportamientos dependiendo de si el ángulo de contacto es mayor o menor que  $90^\circ$ . La aplicación de las aproximaciones elipsoidales no está justificada en estos casos y se hace necesario acudir al método numérico.

En la figura 3.35 representamos la elongación  $a$  como función de  $\hat{\chi}$  para gotas con  $\alpha = 60^\circ$  y diferentes valores de  $\hat{\beta}$ . El efecto de decrecer el ángulo de  $90^\circ$  a  $60^\circ$  ha sido disminuir el valor crítico  $\hat{\beta}_c$  para el que hay una transición a un crecimiento monótono de la elongación con el campo. Este valor es  $11 < \hat{\beta}_c < 12$  para  $\alpha = 60^\circ$ . Por el contrario, no observamos ningún cambio en  $\hat{\beta}_t$ . En la figura 3.36 mostramos algunas formas de equilibrio de una gota con  $\hat{\beta} = 15$  y  $\alpha = 60^\circ$ . Esta gota tiene una razón de permitividades entre  $\hat{\beta}_c$  y  $\hat{\beta}_t$ . Para esta gota, si incrementamos el campo de forma cuasiestacionaria, hasta el valor de  $\hat{\chi} = 0.597$  (el valor del número de Bond eléctrico en el punto de retorno) aparece un salto en la elongación. La figura 3.36 muestra una secuencia de formas de equilibrio que veríamos en este experimento.

La figura 3.37 presenta  $a$  frente a  $\hat{\chi}$  para distintos valores de  $\hat{\beta}$  en una gota con ángulo de contacto  $\alpha = 120^\circ$ . Ahora los campos necesarios para deformar la interfase son más pequeños que en el caso de  $\alpha = 90^\circ$  y, por tanto,

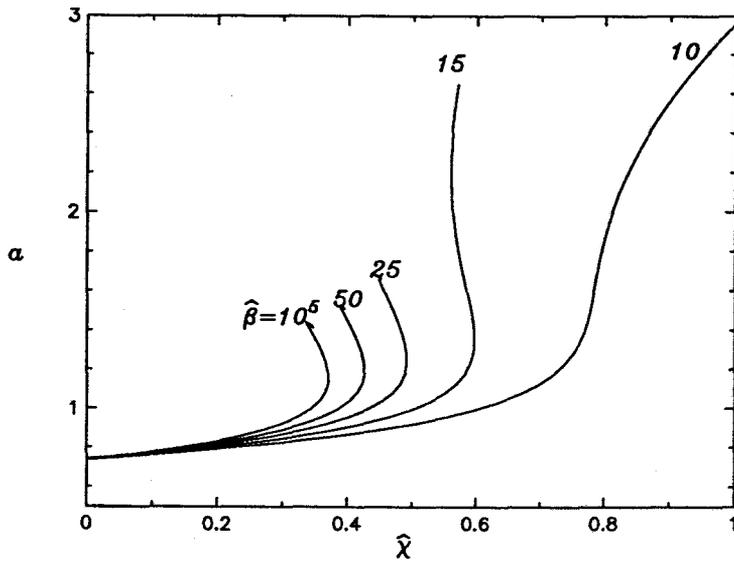


Figura 3.35: Elongación  $a$  frente a  $\hat{\chi}$  para diferentes valores de  $\hat{\beta}$  para  $\alpha = 60^\circ$ .

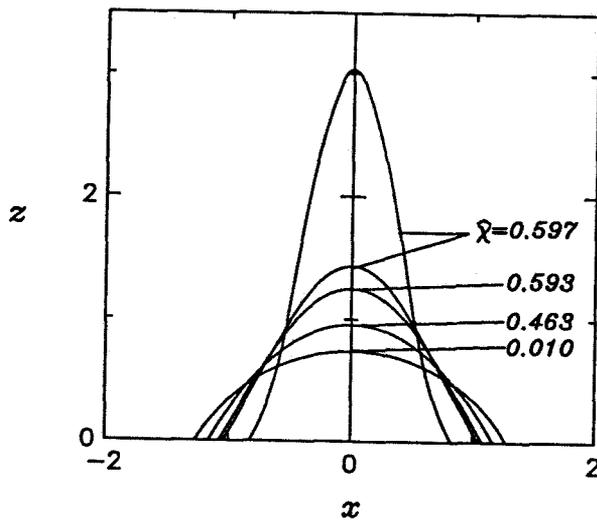


Figura 3.36: Formas de equilibrio para una gota de  $\alpha = 60^\circ$  y  $\hat{\beta} = 15$ .

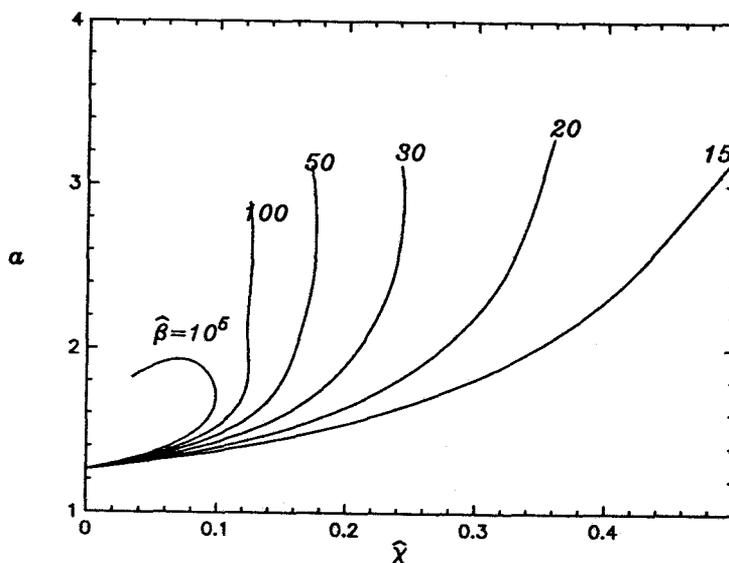


Figura 3.37: Elongación  $a$  frente a  $\hat{\chi}$  para diferentes valores de  $\hat{\beta}$  para  $\alpha = 120^\circ$ .

los campos críticos son también más pequeños. El valor crítico  $\hat{\beta}_c$  aparece entre 19 y 20. Para  $\hat{\beta} = 100$  observamos puntos de retorno adicionales. Para la familia conductora el incremento súbito de la curvatura en la punta de la gota no aparece pasado el punto de retorno. En esta región se observa que la elongación alcanza un máximo y decrece para valores decrecientes del campo mientras la curvatura no se incrementa. También se observa que el radio del círculo de contacto disminuye. Para valores menores de la razón de permitividades sí se observó un rápido incremento de la curvatura. Una secuencia de formas de equilibrio se muestran en la figura 3.38 para el caso  $\hat{\beta} = 15$  y  $\alpha = 120^\circ$ .

El efecto de decrecer el ángulo  $\alpha$  sobre las formas de equilibrio se muestra en la figura 3.39. En ésta representamos  $a$  frente a  $\hat{\chi}$  para gotas de  $\hat{\beta} = 10$  con diferentes ángulos de contacto. Puede verse que la disminución del ángulo va generando un punto de retorno dando lugar a un fenómeno de histéresis como el representado en la figura 3.36. Por otro lado, la diferencia relativa entre elongaciones disminuye al aumentar el campo, indicando que el efecto del ángulo sería menor.

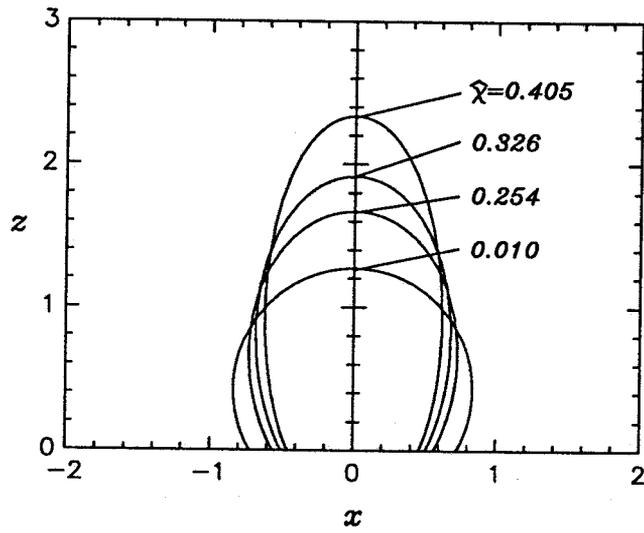


Figura 3.38: Formas de equilibrio para una gota de  $\alpha = 120^\circ$  y  $\hat{\beta} = 15$ .

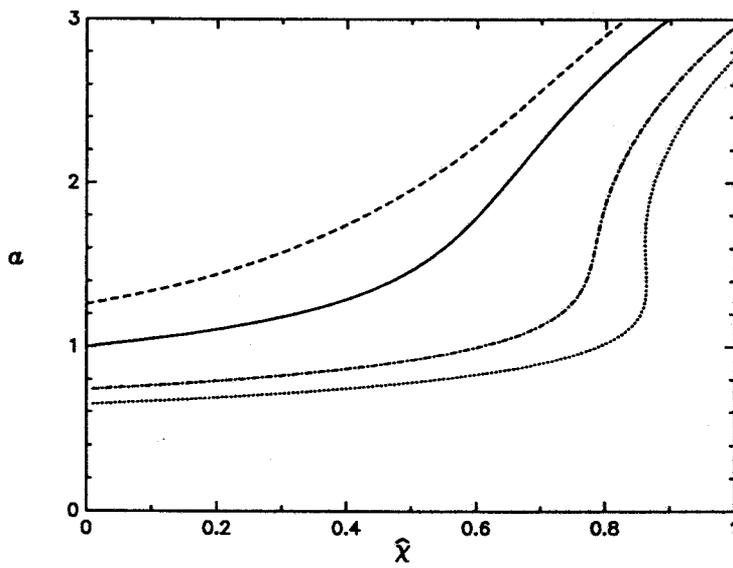


Figura 3.39: Elongación  $a$  frente a  $\hat{\chi}$  para diferentes valores de  $\alpha$ : (---)  $\alpha = 120^\circ$ , (—)  $\alpha = 90^\circ$ , (-·-)  $\alpha = 60^\circ$ , (···)  $\alpha = 50^\circ$ .

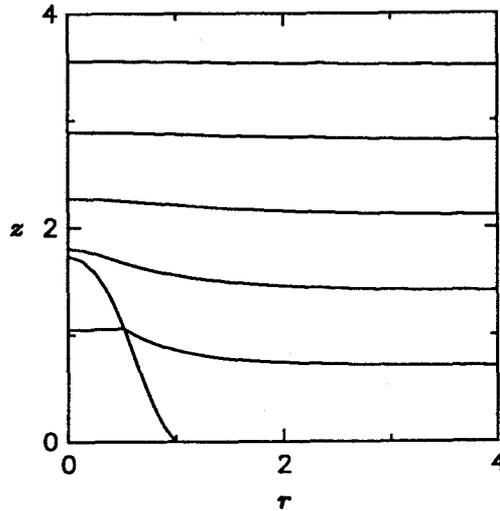


Figura 3.40: Equipotenciales para una gota de  $\hat{\beta} = 4$  con un campo  $\hat{\chi} = 2.926$ . Gota anclada.

### 3.4.2 Línea de contacto fijada

Las variaciones en el radio de la línea de contacto  $r_0$ , manteniendo fijado el volumen, conducen a distintas familias de formas de equilibrio. Al haber adimensionalizado con  $R = (3V/2\pi)^{1/3}$ , en ausencia de campo aplicado gotas con  $r_0 = 1$  son hemiesferas, gotas con  $r_0 > 1$  son secciones esféricas con su centro debajo del plano de apoyo, y gotas con  $r_0 < 1$  tienen el centro de la esfera encima de este plano.

#### Caso $r_0 = 1$

Estas gotas corresponden a tener inicialmente un ángulo  $\alpha = 90^\circ$ . En la figura 3.40 representamos las equipotenciales para una gota anclada de  $\hat{\beta} = 4$  con un campo aplicado  $\hat{\chi} = 2.926$ , esto es, la misma gota de la figura 3.29. La gota, inicialmente hemiesférica, se deforma manteniendo el anclaje y obligándola éste a adquirir una altura menor de la que se tiene en el caso de gota libre.

La figura 3.41 presenta  $a \equiv f(0)$  como función de  $\hat{\chi}$  para distintos valores de  $\hat{\beta}$ . Gotas conductoras ancladas han sido estudiadas en [Basaran, 1990], obteniendo un campo crítico  $\hat{\chi} = 0.309$ . Nuestro resultado para el campo crítico es  $\hat{\chi} = 0.304$ , obtenido para  $\hat{\beta} = 10^5$ . Hay sólo una diferencia de

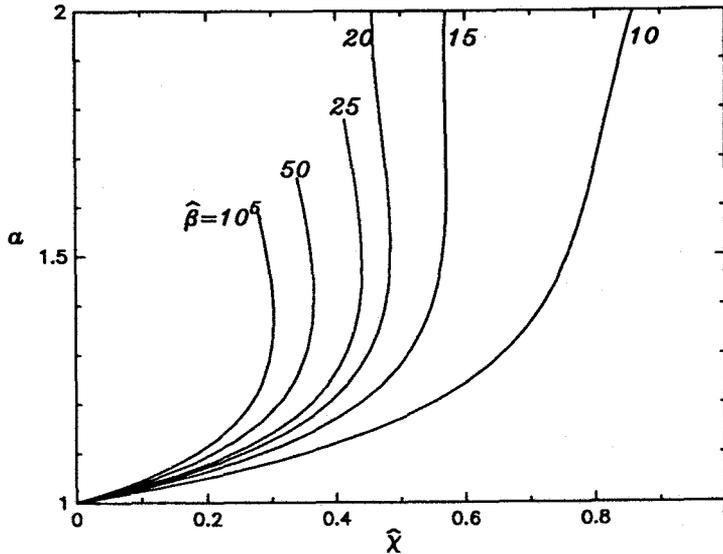


Figura 3.41: Altura máxima  $\alpha$  frente a  $\hat{\chi}$  para diferentes valores de  $\hat{\beta}$ .

1.6%. Observamos que independientemente de  $\hat{\beta}$  los campos críticos son más intensos en este caso que en el caso de gotas libres. Así pues, las gotas ancladas son más estables. Por otro lado, notamos que el valor crítico  $\hat{\beta}_c$  entre un comportamiento con o sin punto de retorno se da para  $\hat{\beta}_c$  entre 14 y 15 un valor menor que en el caso de gotas libres donde estaba entre 20 y 21. Esto es indicativo de un aumento en la ventana de permitividades en las que se produce histéresis normal. En la figura 3.42 representamos el inverso de la curvatura media en la punta para diferentes valores de  $\hat{\beta}$ . Observamos nuevamente el fenómeno de un súbito crecimiento de la curvatura para valores de  $\hat{\beta}$  grandes. La curvatura crece aquí más rápidamente que en el caso de gotas libres.

#### Gotas con $r_0$ arbitrario

En las figuras 3.43a y 3.43b presentamos algunas formas de equilibrio en función de  $\hat{\chi}$  para gotas de  $\hat{\beta} = 15$  con radios de anclaje de  $r_0 = 1.2761859$  y  $r_0 = 0.72741576$ . Cuando el campo aplicado es cero, corresponden, respectivamente, a gotas con un ángulo de contacto  $\alpha = 60^\circ$  y  $\alpha = 120^\circ$ . Las figuras 3.44a y 3.44b muestran  $\alpha$  frente a  $\hat{\chi}$  para distintos valores de  $\hat{\beta}$  en los casos  $r_0 = 1.276$  y  $r_0 = 0.7274$ , respectivamente. De estas figuras deducimos que

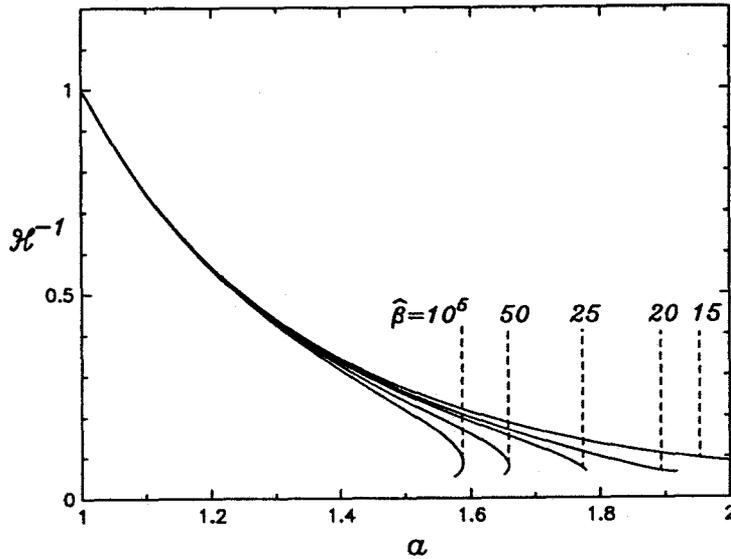


Figura 3.42: Inverso de la curvatura local  $\mathcal{H}^{-1}$  en la punta de la gota como función de la elongación  $a$  para diferentes valores de  $\hat{\beta}$ .

para  $r_0 > 1$ , cuando inicialmente la gota es más plana, se necesitan campos más intensos para deformarla. Lo contrario sucede para  $r_0 < 1$ . Así las gotas más planas son más estables que las gotas más hinchadas. Respecto a  $\hat{\beta}_c$ , se observa que decrece a medida que aumenta el valor de  $r_0$ . Para  $r_0 = 1.276$  la transición se produce en  $9 < \hat{\beta}_c < 10$ , mientras que para  $r_0 = 0.7274$  la misma transición se da en  $19 < \hat{\beta}_c < 20$ .

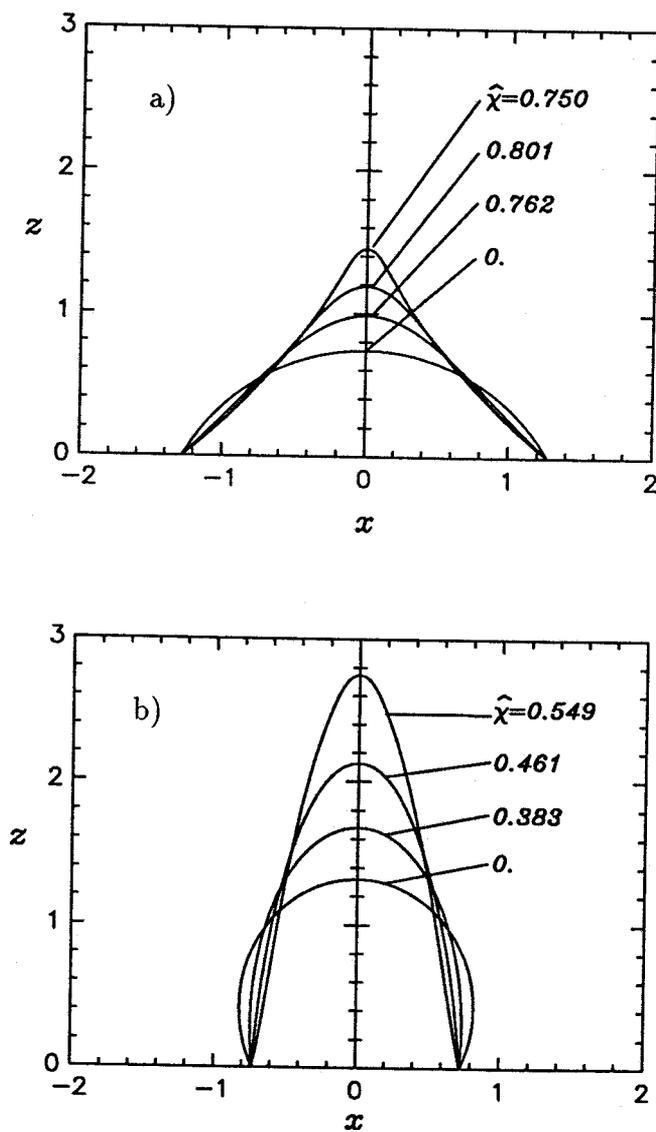


Figura 3.43: Formas de gotas para diferentes valores de  $\hat{\chi}$  cuando  $\hat{\beta} = 15$ : a)  $r_0 = 1.276$ ; b)  $r_0 = 0.7274$ .

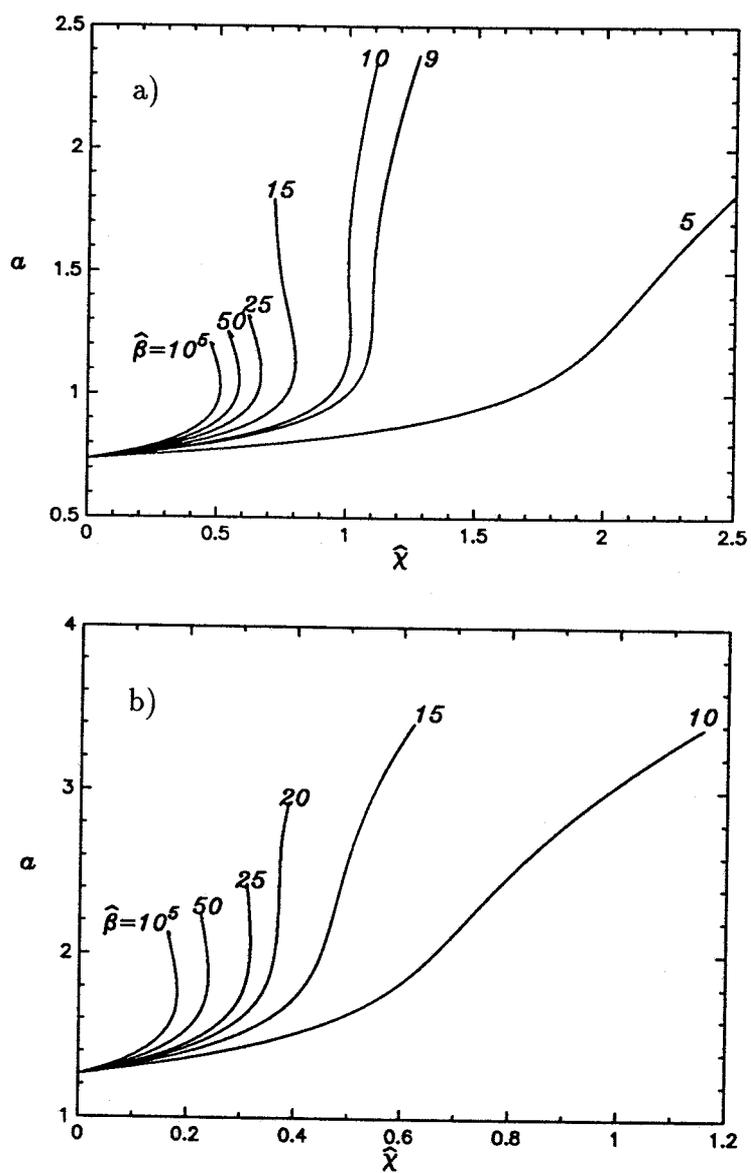


Figura 3.44: Altura máxima  $a$  frente a  $\hat{\chi}$  para diferentes valores de  $\hat{\beta}$  cuando: a)  $r_0 = 1.276$ ; b)  $r_0 = 0.7274$ .

## Capítulo 4

# Resultados experimentales

Con la intención de estudiar el efecto del campo eléctrico sobre las formas líquidas dieléctricas hemos realizado una serie de experimentos en el laboratorio de Electrohidrodinámica del Departamento de Electrónica y Electromagnetismo. Tratamos de resolver algunas discrepancias de los experimentos previos sobre puentes líquidos de volumen cilíndrico [González, 1989] y extender el estudio experimental a puentes líquidos de volumen no cilíndrico así como a las gotas dieléctricas.

En el caso de los puentes líquidos el objetivo marcado fue analizar el efecto del campo eléctrico axial sobre la estabilidad. En el caso de gotas, dado que los líquidos del experimento presentan una razón de permitividades pequeña<sup>1</sup> para observar inestabilidades o formación de puntas cónicas, nos marcamos como objetivos la descripción de las formas de equilibrio y la posible utilización del número de Bond eléctrico como medida de la tensión superficial. Esto es de gran interés en microgravedad porque muchos de los métodos de medida de tensión superficial empleados están basados en un valor apreciable de la gravedad por lo que presentan problemas o no son aplicables.

En este capítulo se describen el montaje experimental y el método operativo, se discute la relación entre el modelo teórico y el experimento y, por último, se presentan los resultados experimentales obtenidos y se comparan con los resultados numéricos.

---

<sup>1</sup>Es de tener en cuenta que líquidos con constante dieléctricas grandes disocian impurezas fácilmente llegando a tener conductividades demasiado altas para que se puedan ver los efectos puramente dieléctricos.

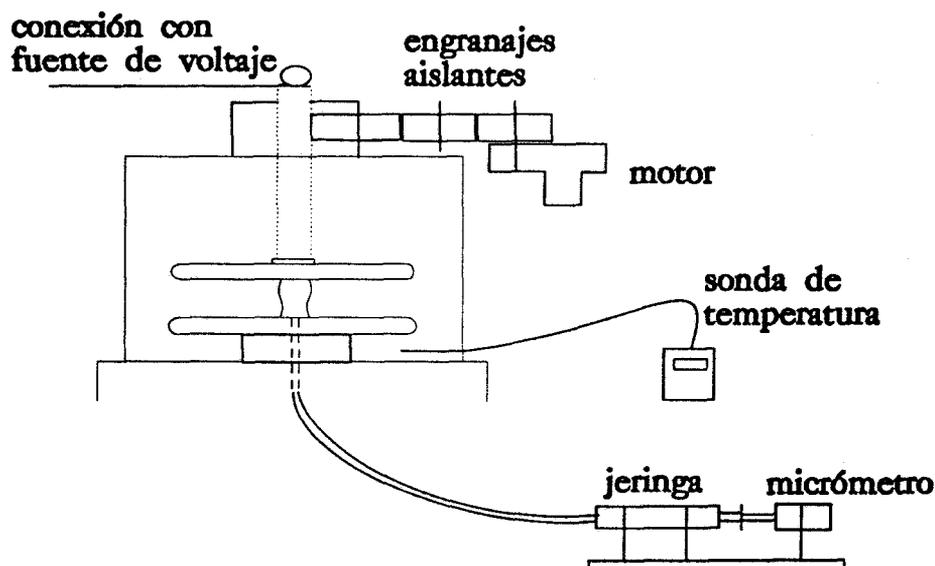


Figura 4.1: Esquema del montaje experimental.

## 4.1 Montaje y método operativo

### 4.1.1 Montaje experimental

Con el fin de estudiar interfases en condiciones de microgravedad hemos empleado la técnica de flotabilidad neutra o tanque de Plateau. En ésta se consigue una gravedad efectiva pequeña utilizando un baño inmiscible y de densidad muy parecida al puente líquido o gota objeto del estudio.

Los líquidos con los que se realizaron los experimentos fueron aceite de ricino para formar el puente líquido o gota y aceite de silicona para el baño. Se eligieron porque tienen densidades muy parecidas a temperatura ambiente (diferencias en la tercera cifra significativa) y su conductividad eléctrica es muy pequeña.

Un esquema del montaje experimental que hemos empleado se representa en la figura 4.1. Consta de un tanque de plexiglás ( $10 \times 10 \times 10 \text{ cm}^3$ ) en el que están situados dos electrodos de cobre en forma de disco (de 8 cm de diámetro) enfrentados una distancia variable. Entre ellos va situado el puente líquido. Es básicamente el mismo montaje de [González, 1989] con algunas mejoras.

El electrodo superior se mueve verticalmente mediante un pequeño motor lineal cuyo movimiento se transmite a un tornillo-soporte a través de un juego de engranajes de material aislante. La máxima velocidad de desplazamiento del electrodo es de 2 mm por minuto, siendo el desplazamiento de 2.0 mm por vuelta del tornillo-soporte. La máxima distancia entre electrodos que se consigue es de 5 cm. El electrodo superior está en contacto eléctrico con el tornillo-soporte que a su vez está conectado a una fuente de corriente alterna a través de un grueso cable coaxial. La fuente alterna proporciona una diferencia de potencial entre 0 y 20 kV.

El electrodo inferior es fijo y está conectado a tierra. Posee un orificio en el centro para permitir la inyección de aceite de ricino entre los dos electrodos. Este orificio está conectado por un tubo de nylon a una jeringa de precisión cuyo émbolo está en contacto con un tornillo micrométrico. El conjunto jeringa más micrómetro está fijado a un soporte y se calibra para conocer cuánto volumen se desplaza por división del micrómetro. En nuestro experimento se desplazan  $0.4153 \text{ mm}^3$  por división (de 0.01 mm), siendo  $1000 \text{ mm}^3$  el volumen máximo que puede desplazarse.

Con el objeto de anclar puentes líquidos sobresale en cada electrodo una pequeña base en forma de cono truncado invertido de 4.79 mm de diámetro y 0.5 mm de altura. El anclaje se consigue gracias a que el aceite de ricino tiene más apetencia por el metal que el aceite de silicona quedándose *adherido* a las bases y anclándose en el borde afilado de éstas. En el caso de gotas de apoyo libre los electrodos se sustituyen por otros completamente planos.

Un esquema del montaje eléctrico se representa en la figura 4.2. Consta de un autotransformador conectado a la red (salida: 0-245 V, 160 VA) que alimenta a un transformador (220-20000 V) cuyos bornes de salida están conectados uno a tierra y otro al cable coaxial que va hacia el electrodo superior. Con este montaje se consigue un voltaje máximo entorno a 20000 V siendo la frecuencia de trabajo del circuito la industrial (50 Hz). El tanque de Plateau está aislado mediante una jaula de Faraday consistente en una caja de madera forrada con material conductor y con ventanas para la observación del puente o gota. El conductor exterior del cable coaxial está conectado a tierra con el fin de aislar eléctricamente el sistema. Como medidas de seguridad se han redondeado las aristas de las conexiones a alto voltaje y se ha utilizado un interruptor doble con salto automático en caso de cortocircuito. Para controlar el potencial aplicado al electrodo superior hay colocada una sonda de alta tensión en el borne a alto voltaje del transformador. La sonda da

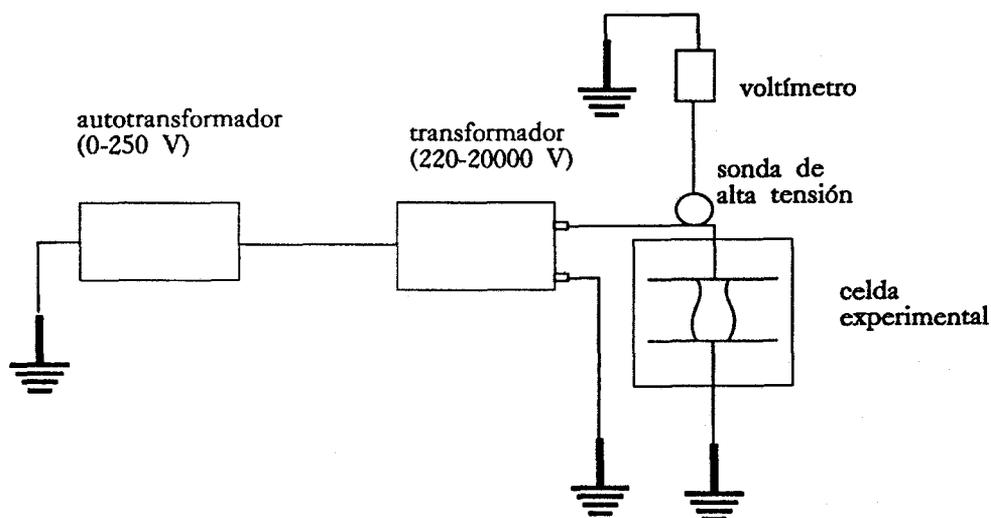


Figura 4.2: Esquema del montaje eléctrico.

como salida un potencial mil veces menor que el de entrada y la lectura de este potencial se realiza en un voltímetro.

#### 4.1.2 Método operativo. Puentes

##### Formación del puente

Se inyecta una pequeña gota de aceite de ricino en el electrodo inferior y a continuación se llena el tanque de aceite de silicona. Se baja el electrodo superior y se inyecta aceite de ricino en la gota hasta que hace contacto con la base de anclaje del electrodo superior. Se espera un tiempo suficiente hasta que la gota moja totalmente la base superior y se forma un puente de pequeña altura. En todo momento es necesario evitar la formación de gotitas de aceite de silicona dentro del puente para lo cual el contacto ha de realizarse suavemente. Para controlar el volumen hacemos que el puente de baja altura sea lo más cilíndrico posible. Si la altura es pequeña el error que puede cometerse en el cálculo del volumen de esta columna cilíndrica, conocida la altura con total precisión, es del orden del volumen desplazado por una división del micrómetro, esto es,  $0.4 \text{ mm}^3$ . Una vez aquí se toma esta altura como referencia y se empieza a inyectar líquido a medida que se

eleva el electrodo superior. La altura se controla porque el desplazamiento vertical del electrodo es de 2.0 mm por rosca del tornillo-soporte.

### Medidas de estabilidad

El método más cómodo que hemos encontrado es aplicar un voltaje lo suficientemente intenso para que una columna de esbeltez y volumen dados sea estable y a continuación mediante un método de bisección ir reduciendo el intervalo entre un voltaje estable y otro inestable. Se trató siempre que la diferencia relativa entre estos voltajes fuera menor de 1%. Experimentalmente se observa que el tiempo que tarda una columna en romperse, con parámetros próximos al punto crítico, es de unos cuantos minutos. Hemos considerado que un puente es estable si sobrepasa 15 minutos sin romperse y no se aprecia movimiento de la interfase.

En el caso de puentes de volumen cilíndrico, éstos dejan de ser estables para esbelteces cercanas a  $\Lambda = 2.8$ . Se forma un puente de altura ligeramente superior aplicándole un campo que lo estabilice y se realiza el método de bisección para el voltaje; seguidamente, se incrementa el volumen, la esbeltez y el campo aplicado y se repite el proceso. En el caso de formas no cilíndricas se elige una esbeltez dada, se parte de un volumen pequeño pero estable con el campo aplicado y se encuentra el voltaje crítico; a continuación, se aumenta el volumen y se reduce el potencial aplicado, encontrándose de nuevo el potencial crítico.

Para controlar los números de Bond esperables en las sesiones de experimentos se toman fotos de interfases estables y sin campo al iniciar y acabar las sesiones, procurando que las interfases tengan una deformación, debida a la gravedad, claramente apreciable. Además, se realizan fotos de cada puente líquido con el objeto de testear el control del volumen. Posteriormente, se amplian estas fotos-diapositivas proyectándolas sobre un papel y se digitalizan por medio de una targeta digitalizadora. La comparación de los perfiles experimentales con los numéricos nos permite obtener el número de Bond correspondiente a la sesión de experimentos. Como calibración de las medidas en las fotos hemos usado el radio de la base de anclaje y la distancia entre electrodos.

### 4.1.3 Método operativo. Gotas

En estos experimentos el electrodo superior es un electrodo plano (sin base de anclaje). Realizamos series distintas con gotas ancladas y con gotas de apoyo libre. Para las gotas ancladas se inyecta un determinado volumen por el orificio del electrodo inferior y la gota queda fijada a la base de anclaje. Para las gotas de apoyo libre se inyecta el aceite de ricino por el orificio y se forma un puente anclado en la base inferior pero de apoyo libre en la base superior. A continuación, se rompe el puente al separar los electrodos y se retira el volumen de la parte inferior gracias a la jeringa quedando una única gota en el electrodo superior.

Se toman fotos de interfases estáticas por cada valor de la diferencia de potencial aplicado. Tanto la forma como el volumen de las gotas se obtienen a partir de las fotos. Es de tener en cuenta que con campo aplicado nulo las gotas son secciones esféricas (el efecto de la gravedad residual es despreciable), y la determinación del volumen para estas gotas es más fácil.

La comparación de las curvas teóricas y experimentales de la elongación  $a$  frente al número eléctrico  $\hat{\chi}$  para diferentes valores de  $r_0$  (caso de gotas ancladas) o de  $\alpha$  (caso de gotas de apoyo libre) ha de permitirnos hallar la tensión superficial. Experimentalmente se determina la altura de la gota como función de  $E_\infty^2$  para un valor dado del volumen. Para cada elongación se calcula el valor teórico de  $\hat{\chi}$  que da esa elongación y comparando con el valor experimental de  $E_\infty^2$  se obtiene la tensión superficial  $\sigma$ . Por último, se realiza una comparación de las formas de equilibrio numéricas y experimentales para verificar que el resultado es satisfactorio.

## 4.2 Constantes físicas de los líquidos y relación modelo-experimento

### 4.2.1 Medida de constantes físicas

#### Medida de la tensión superficial

Se toman una serie de fotos de interfases estables sin campo aplicado y con una deformación visible debida al número de Bond. En todo momento se mide la temperatura del baño mediante una sonda, pues la diferencia de

densidades es una función bastante sensible de la temperatura. Las interfaces experimentales son axisimétricas con muy buena aproximación, de modo que podemos compararlas con los resultados numéricos. Para ello, fijados los valores  $\Lambda$ ,  $\tau$  correspondientes a los experimentos, se calculan distintas interfases variando el número de Bond y buscamos aquél que minimiza la distancia de una forma experimental a una teórica. Esta distancia se define como

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (f_i - f(z))^2}{N}}, \quad (4.1)$$

donde  $f_i$  son los valores discretos experimentales,  $N$  el número total de éstos y  $f(z)$  las funciones del método de elementos finitos. Hemos tomado para el control del número de Bond formas de equilibrio sin campo aplicado porque son mucho más fáciles de obtener numéricamente.

Una vez que tenemos el número de Bond y la temperatura correspondientes a cada foto podemos obtener la tensión superficial a partir de  $\sigma = \Delta\rho g R^2 / B$  conocida la diferencia de densidades. Para medir  $\Delta\rho$  como función de la temperatura  $T$  hemos hecho uso del densímetro de alta precisión AP PAAR DMA58. Para el rango de temperaturas de 18°C hasta 30°C la diferencia de densidades es muy aproximadamente lineal con la temperatura. Las rectas obtenidas para las funciones de  $\rho$  (en g/cm<sup>3</sup>) frente a  $T$  (en °C) son

$$\rho_{\text{in}} = 0.97512 - 6.824 \times 10^{-4} T \pm 3 \times 10^{-5} \pm 10^{-6} T, \quad (4.2)$$

$$\rho_{\text{ex}} = 0.98244 - 9.056 \times 10^{-4} T \pm 4 \times 10^{-5} \pm 2 \times 10^{-6} T, \quad (4.3)$$

$$\rho_{\text{in}} - \rho_{\text{ex}} = -7.27 \times 10^{-3} + 2.23 \times 10^{-4} T \pm 3 \times 10^{-5} \pm 10^{-6} T. \quad (4.4)$$

Este método tiene el problema de ser muy sensible a errores en  $\Delta\rho$ . De hecho hemos comprobado que existen variaciones en la diferencia de densidades según el tiempo que lleven en contacto los dos líquidos. Las variaciones en  $\Delta\rho$  pueden ser de hasta un 20% al cabo de varios días en contacto. Son debidas, principalmente, a pequeños cambios en la densidad del ricino pues la densidad de la silicona del baño permanece prácticamente inalterada. Lo que observamos es una reducción de la diferencia de densidades, probablemente debida a cierta difusión de un líquido en otro al ponerlos en contacto. Así, se presenta la dificultad de conocer la diferencia de densidades para un experimento concreto. El resultado que obtuvimos para la tensión superficial

por este método fue de  $\sigma = (4.0 \pm 0.4) \times 10^{-3}$  N/m. El error presentado es debido a la dispersión en los valores del número de Bond obtenidos de las fotos. Sin embargo, teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, la tensión superficial podría ser algo menor si  $\Delta\rho$  fuera menor.

**Características del densímetro.** El densímetro DMA58 determina la densidad al medir el período de oscilación de un tubo en U cuya frecuencia natural se ve modificada por la masa de la muestra. El tubo se excita por medios electrónicos en dirección perpendicular al plano del tubo. Suponiendo que la temperatura es constante la densidad puede calcularse a través del período de oscilación de un cuerpo hueco con una masa  $M$  suspendido por un muelle de constante  $C$  al que se le añade una masa  $\rho V$ . Donde  $V$  es el volumen que ocupa la muestra y  $\rho$  su densidad. Así el período es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M + \rho V}{C}}. \quad (4.5)$$

Determinadas las constantes  $C/V$  y  $M/V$  del aparato mediante la medición del período de dos muestras de densidades conocidas (hemos usado agua destilada y aire a presión atmosférica) se puede determinar la densidad de la muestra problema a través de su período. Cuando se usan agua y aire como fluidos calibradores la precisión es de  $10^{-5}$  g/cm<sup>3</sup> dentro de un rango de densidades de 0.5 a 1.5 g/cm<sup>3</sup>. Para que la muestra alcance la temperatura deseada se utiliza un termostato de efecto Peltier. El control de temperatura del sistema tiene un error máximo de  $\pm 0.005^\circ\text{C}$ .

### Medida de las permitividades

Las permitividades dieléctricas de los líquidos se obtienen como la razón entre la capacidad de una celda especial llena con el líquido,  $C_\epsilon$ , y la capacidad de la celda cuando está vacía y seca,  $C_0$ . Así, la relación entre las permitividades cumple

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{C_\epsilon}{C_0}. \quad (4.6)$$

Las capacidades se midieron con el medidor LCR AG-4311B, que está diseñado para obtener las impedancias complejas de las partes ordinarias de un circuito LCR. Cubre un rango de frecuencias entre 100 Hz y 100 kHz y un nivel de señal entre 1 mV y 5 V.

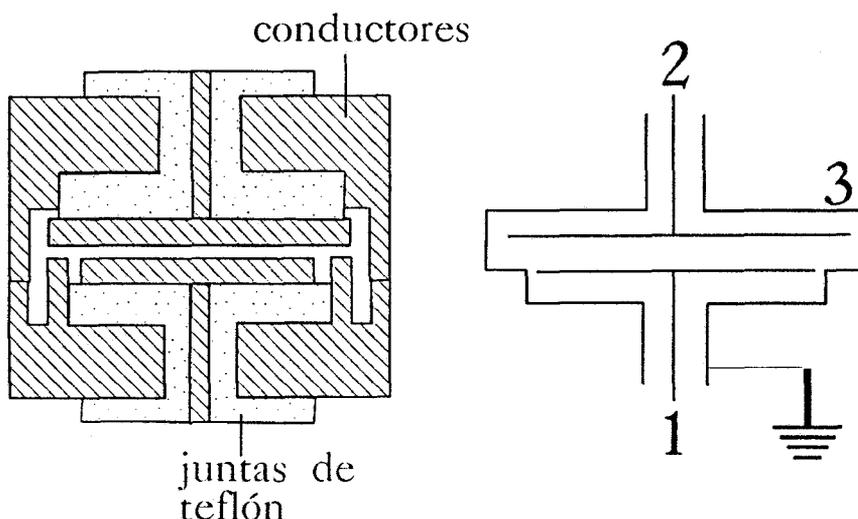


Figura 4.3: Esquema de la celda de medida de permitividades.

La celda consta de dos electrodos circulares de radios ligeramente diferentes enfrentados en el interior de un cilindro hueco de metal con el que no tienen contacto eléctrico porque las juntas son de material aislante (ver figura 4.3). Entre los dos electrodos se establece una diferencia de potencial y el cilindro exterior se mantiene conectado a tierra.

El método de la medida es como sigue. El medidor LCR consigue que el conductor 1 (ver esquema en figura 4.3) tenga un potencial lo más próximo posible a cero mientras mide el voltaje en 2 y la intensidad que fluye en el conductor 1. Puesto que 1 y 3 tienen prácticamente el mismo potencial las líneas de campo que salen del conductor 1 hacia el 2 son casi rectas gracias al efecto de anillo de guarda del conductor 3. De este modo la intensidad medida en 1 está relacionada con el voltaje en 2 por una capacidad,  $C_{12}$ , que cumple aproximadamente la idealización de un condensador plano  $C_{12} = \epsilon S/d$ . Aquí  $S$  y  $d$  son, respectivamente, el área enfrentada de los electrodos y la distancia entre ellos. Lo realmente importante de la configuración es que la distorsión del campo debido a las juntas aislantes tiene un efecto despreciable sobre la capacidad que se mide, asegurándose que  $C_{12}$  es proporcional a la constante dieléctrica de la muestra.

Las medidas han de realizarse a temperatura constante pues hemos observado que la capacidad de la celda era distinta a diferentes temperaturas.

Esta diferencia no es achacable a la variación de  $\epsilon$  con  $T$ , que está en torno a 1% en diez grados. Probablemente, el cambio sea debido a la dilatación de las juntas de teflón con lo que cambia la geometría de la celda. La capacidad de la celda sin muestra fue de  $12.29 \pm 0.02$  pF a  $T = 25^\circ\text{C}$ . La celda se testeó con ciclohexano muy puro, de permitividad relativa  $\epsilon = 2.015$  a  $T = 25^\circ\text{C}$ , y la medida se obtuvo con un error menor de 0.5%. Los valores medidos para las permitividades relativas del aceite de ricino y de silicona fueron, respectivamente, 4.685 y 2.734 con un error relativo menor de 1% para todo el rango de temperaturas del experimento.

### 4.2.2 Relación modelo-experimento

En el capítulo primero dábamos una serie de relaciones entre tiempos característicos que deberían cumplirse para que un problema dado estuviera dentro del campo de la estática de formas líquidas dieléctricas sujetas a campos eléctricos. Estas relaciones eran

$$t_d \ll t_c \ll t_v \ll t_m, t_r, t_i. \quad (4.7)$$

Con los valores de las magnitudes físicas de nuestro experimento que aparecen en la tabla 4.1 hemos obtenido los tiempos típicos que se presentan en la tabla 4.2. Las conductividades, las viscosidades dinámicas y las movilidades iónicas no fueron medidos puesto que sólo necesitábamos los órdenes de magnitud de estas cantidades para asegurar en qué límite estábamos. Así, fueron obtenidos de la literatura sobre el tema. La permeabilidad magnética se supone la del vacío  $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$  en el SI. La distancia típica que se ha tomado ha sido el diámetro de las bases de anclaje  $l = 5$  mm.

Las condiciones para considerar el problema dentro de la EHD ( $t_d \ll t_c \ll t_v$ ) se cumplen por muchos órdenes de magnitud. De los tiempos de relajación de las cargas el más importante es el del aceite de ricino ya que al ser el menor proporciona el tiempo típico de formación de cargas en la interfase. Vemos que es dos órdenes mayor que el tiempo de variación del campo por lo que dominan los efectos dieléctricos. El tiempo típico de movimiento de la interfase es gobernado por el mayor de los tiempos mecánicos que es el tiempo viscoso del ricino. Así, la condición de interfase fija (que no sigue las oscilaciones del campo) se cumple por casi tres órdenes de magnitud. El tiempo de vuelo de los iones es principalmente el de la

Líquido	Silicona	Ricino
Permitividad relativa $\epsilon$	2.73	4.69
Densidad $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> ) $T = 25^\circ\text{C}$	960	958
Conductividad eléctrica $\sigma_e$ (S/m)	$10^{-13}$	$2 \times 10^{-10}$
Viscosidad dinámica $\eta$ (kg/ms)	0.05	0.6
Movilidad iónica $K$ (m <sup>2</sup> /sV)	$2 \times 10^{-10}$	$2 \times 10^{-11}$
Tensión superficial $\sigma$ (kg/s <sup>2</sup> )	$4 \times 10^{-3}$	

Tabla 4.1: Constantes físicas de los líquidos usados.

Tiempo característico	Definición	Valor experimental
Difusión magnética	$t_d \equiv \mu\sigma_e l^2$	Ricino: $6 \times 10^{-21}$ Silicona: $3 \times 10^{-24}$
Transmisión de la luz	$t_c \equiv l\sqrt{\epsilon\sigma_e}$	$10^{-11}$
Movimiento del líquido: • caso viscoso • caso no viscoso	$t_m \equiv \eta l / \sigma$ $t_m \equiv (\rho l^3 / \sigma)^{1/2}$	Ricino: 0.7 Silicona: 0.05 0.1
Tránsito de iones	$t_i \equiv l / KE$	Ricino: 300 Silicona: 50
Relajación de las cargas	$t_r \equiv \epsilon / \sigma_e$	Ricino: 0.2 Silicona: 100
Variación del campo	$t_v \equiv \omega^{-1}$	$3 \times 10^{-3}$

Tabla 4.2: Valores experimentales de los tiempos característicos.

silicona y cumple la condición ( $t_v \ll t_i$ ) en cinco órdenes de magnitud. Luego los iones prácticamente no penetran en el volumen.

Una idealización hecha en el modelo ha sido considerar los electrodos como dos placas perfectamente planas e infinitas. La finitud de los electrodos y la presencia de las bases de anclaje originan ciertas perturbaciones al campo supuesto por el modelo. Sobre el efecto de la finitud de los electrodos hemos de tener en cuenta que el diámetro de éstos es 16 veces el diámetro de los anclajes. Si acudimos a los experimentos numéricos del capítulo anterior, vemos que el efecto de colocar la condición de contorno en  $R_\infty = 8$  era suficiente para que las diferencias del campo en el puente fueran menores de 1%. Aunque la condición de contorno experimental no es la misma podemos suponer que los efectos no serán mayores de 1% en nuestro experimento en que  $R_\infty = 16$ . En cuanto a la influencia de los anclajes, es de suponer que distorsionen el campo en distancias del orden de la altura de éstos (0.5 mm) que es mucho menor que la distancia típica entre electrodos. Sin embargo, hemos comprobado que tienen cierto efecto en las formas de equilibrio tanto de puentes líquidos como de gotas ancladas, siendo más importante para las gotas pues la altura del anclaje no es ya tan pequeña frente a la altura de la gota (alrededor de cinco veces menor). En el problema de puentes líquidos, existe otra particularidad sobre los anclajes y es que los hemos supuesto de igual diámetro. En el experimento existe, sin embargo, una ligera diferencia relativa de 0.4%. Esta diferencia es asimilable en cierto sentido a un número de Bond efectivo que hay que sumar al número de Bond [Meseguer, 1990]. Su contribución sería menor que  $10^{-3}$ , que es pequeña comparada con el número de Bond esperado en el experimento.

## 4.3 Resultados y discusión

### 4.3.1 Resultados para puentes líquidos

Hemos realizado una serie de experimentos con la intención de determinar el valor del campo crítico de ruptura de columnas líquidas de volumen y esbeltez dados. El rango de esbelteces estudiado viene marcado por la estabilidad marginal de las columnas de volumen cilíndrico; va desde  $\Lambda \simeq 2.9$  (primera esbeltez inestable sin campo) hasta  $\Lambda \simeq 5$  (esbeltez máxima estable con el voltaje máximo del experimento: 20 kV). El valor de la tensión superficial

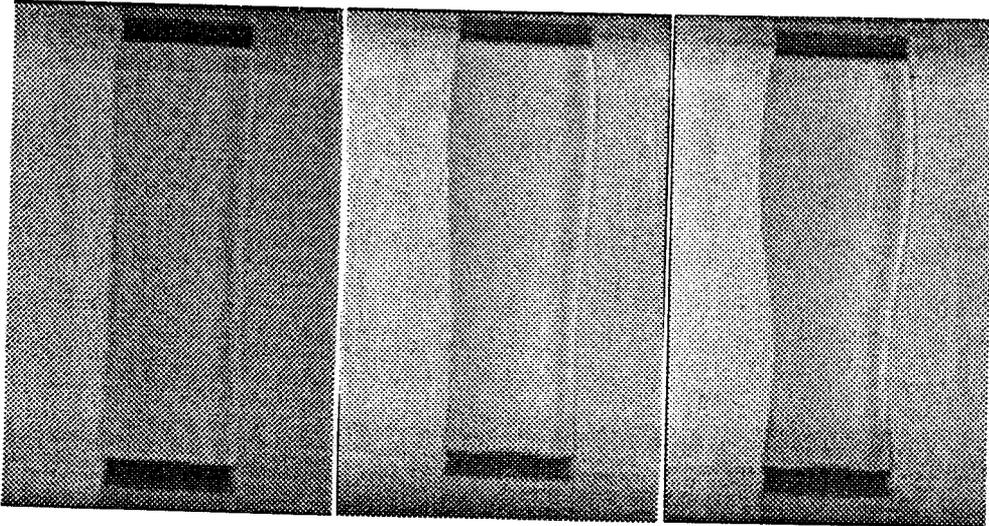


Figura 4.4: Evolución cuasiestática de un puente líquido. Potenciales aplicados: (de izquierda a derecha) 3.5, 2.9 y 2.7 kV.

que usaremos para comparar las curvas teóricas con las experimentales nos viene dado por el obtenido por los experimentos de gotas,  $\sigma = 3.6$ , que consideramos más fiable que el dado por el método de hallar  $\sigma$  a través de  $B$  y  $\Delta\rho$ . El valor experimental de la razón de permitividades es  $\beta = 0.583$ .

El valor de  $B$  estimado de las fotos de puentes sin campo es  $0.020 \pm 0.001$  para  $T = 24^\circ\text{C}$  y  $0.013 \pm 0.001$  para  $T = 26^\circ\text{C}$ , donde el error está obtenido de la dispersión de los valores. Estos resultados indicarían que  $B \simeq 5 \times 10^{-3}$  para  $T = 28^\circ\text{C}$  y que en torno a  $T = 29^\circ\text{C}$  se hace cero el número de Bond.

Presentamos primeramente la evolución cuasiestática de un puente de volumen cilíndrico y esbeltez  $\Lambda = 3.11$  a medida que reducimos la diferencia de potencial (ver figura 4.4). Las fotos corresponden a diferencias de potencial de 3.5, 2.9 y 2.7 kV, siendo la temperatura de esta secuencia de  $T = 28.4^\circ\text{C}$ . Observamos que por efecto de la gravedad residual a medida que reducimos la diferencia de potencial la deformación antisimétrica crece. El puente correspondiente a un voltaje de 2.7 kV está próximo al punto de estabilidad marginal pues para un voltaje de 2.6 kV el puente líquido se rompió. En la figura 4.5 representamos la deformación  $\epsilon$  (distancia a la forma cilíndrica) como función de  $\chi$  en este experimento. La deformación crece a medida que nos acercamos al punto de ruptura. Vemos que para campos muy grandes la

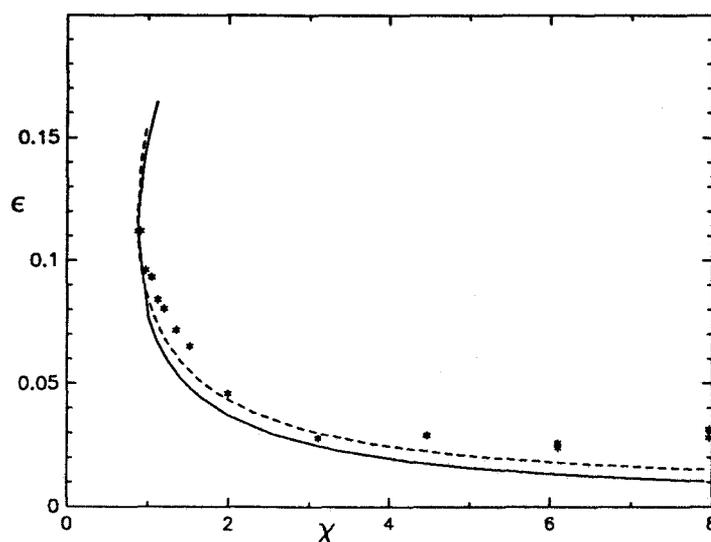


Figura 4.5: Deformación  $\epsilon$  como función de  $\chi$  para  $\Lambda = 3.11$ . \*, valores experimentales; (—) curva numérica de  $B = 5.5 \times 10^{-3}$  y  $\tau = 1.00$ ; (- - -) ídem de  $B = 7.3 \times 10^{-3}$  y  $\tau = 1.02$ .

deformación no tiende a cero. Está relacionado con el hecho de que existen deformaciones en la interfase debidas al campo local creado por los anclajes. Así, en el puente de 3.5 kV de la figura 4.4 puede observarse cierta curvatura en la superficie próxima a los anclajes y una reducción de la sección del puente en la zona central para mantener el volumen. Este aumento de la curvatura se explica porque el ricino al ser el medio de más permitividad tiende a dirigirse a la zona de campo más intenso. La comparación con la teoría de los resultados sobre la deformación no es sencilla pues pequeños errores en la esbeltez o el volumen producen curvas distintas. Como muestra se han representado los resultados numéricos correspondientes a  $\tau = 1.00$  y  $\tau = 1.02$  elegidos para que tuvieran el valor del campo crítico experimental. Proporcionan estimaciones del número de Bond distintas: la curva de  $\tau = 1.00$  es para  $B = 5.5 \times 10^{-3}$ , mientras que la de  $\tau = 1.02$  es para  $B = 7.3 \times 10^{-3}$ .

En la siguiente figura (fig. 4.6) se muestran dos puentes estables de volumen cilíndrico con esbelteces superiores a  $\Lambda = \pi$ . Corresponden a  $\Lambda = 3.9$  para un voltaje de 10 kV y  $\Lambda = 5.0$  para un voltaje de 16 kV. Están sometidos a diferencias de potencial un poco más elevadas que las críticas. Los resultados sobre el campo crítico frente a la esbeltez para puentes de  $\tau = 1.0$  y  $\beta = 0.583$  se presentan en la figura 4.7. Vemos que los valores experimen-

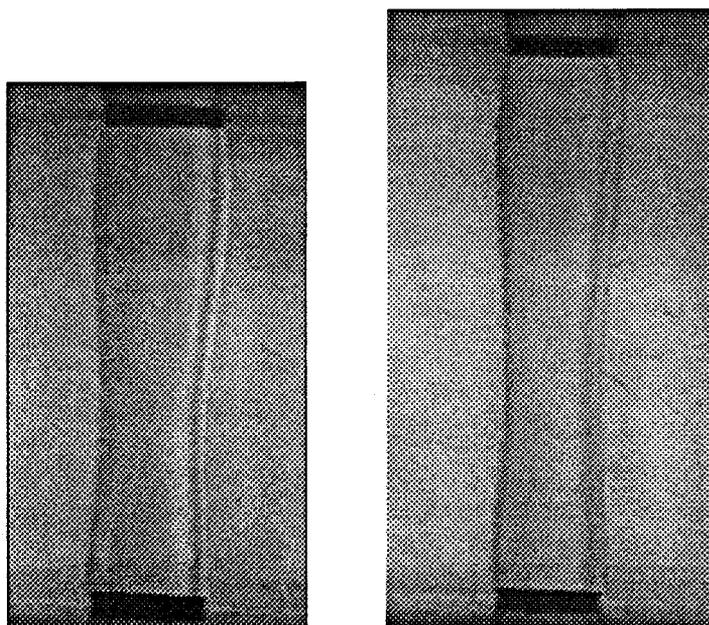


Figura 4.6: Puentes de volumen cilíndrico de esbelteces  $\Lambda = 3.9$  y  $5.0$  sometidos a  $10$  kV y  $16$  kV, respectivamente.

tales están unas veces por encima y otras por debajo de la curva de  $B = 0.01$ . Esto se debe a las variaciones de la densidad con la temperatura a lo largo de la sesión experimental. Los resultados se representan agrupándolo en tres rangos de temperatura: \*, entre  $24.15$ - $24.6^\circ\text{C}$ ;  $\square$ , entre  $26.4$ - $27.5^\circ\text{C}$ ; o, entre  $28.5$ - $28.8^\circ\text{C}$ . Según las estimaciones de  $B$  obtenidas de las fotos sin campo, corresponderían a valores del número de Bond: \*, próximos a  $B = 0.02$ ;  $\square$ , próximos a  $B = 0.01$ ; o próximos a  $3 \times 10^{-3}$ . Los puntos marcados con \* están entre las curvas de  $B = 0.01$  y  $0.02$ , los marcados con o están entre  $B = 0.$  y  $0.01$  y los marcados con  $\square$  están cerca de la curva de  $B = 0.01$ . Los resultados experimentales cumplen con cierta precisión las predicciones numéricas. Los puntos marcados con \* deberían estar más cerca de la curva correspondiente a  $B = 0.02$ . Para precisar más los resultados sería necesario mantener constante la temperatura de la celda para aislar el efecto de la temperatura y controlar la tensión superficial de la sesión experimental midiéndola al empezar y acabar las experiencias. Se sabe que la tensión superficial es bastante sensible a las condiciones dadas de un experimento y puede variar de una sesión a otra. Con todo, los resultados son bastante sa-

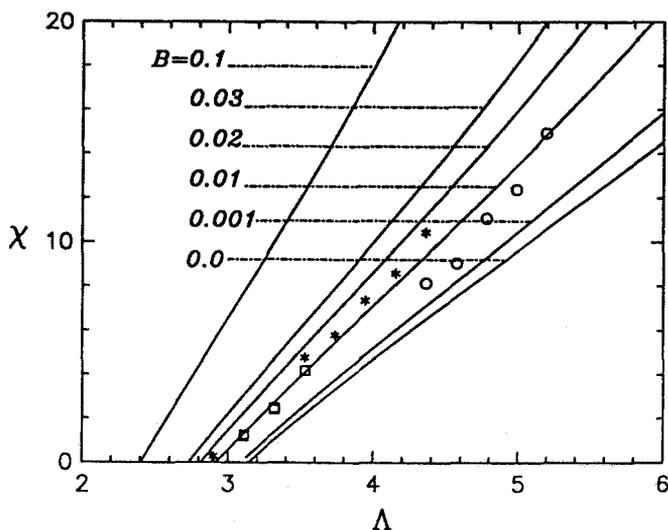


Figura 4.7: Comparación entre los resultados experimentales y teóricos para las curvas de estabilidad marginal para puentes de volumen cilíndrico en el plano  $\Lambda$ - $\chi$ . \*,  $T = 24.15-24.6^\circ\text{C}$ ;  $\square$ ,  $T = 26.4-27.5^\circ\text{C}$ ;  $\circ$ ,  $T = 28.5-28.8^\circ\text{C}$

tisfactorios ya que los efectos del número de Bond predichos por la teoría son apreciables en la figura. Esto supone una sensible mejora de los resultados experimentales previos [González, 1989], donde estos efectos no estaban presentes. Por otra parte, los actuales experimentos son más fiables porque se han medido todas las constantes físicas relevantes, se ha mejorado el control del volumen y de la diferencia de potencial aplicada y se ha relacionado la temperatura con el número de Bond.

Aumentando el campo aplicado podemos reducir el volumen necesario para que una columna de esbeltez dada sea estable. Un resultado interesante de la teoría es que para puentes de esbeltez fija el aumento del campo aplicado permite cambiar la simetría del proceso de ruptura de una asimétrica (dando dos gotas de volúmenes distintos) a una simétrica (dando dos gotas de volúmenes iguales). En la figura 4.8 presentamos cuatro puentes estables de esbeltez  $\Lambda = 3.53$  con volúmenes decrecientes a medida que aumenta el campo. El voltaje aplicado es muy próximo al crítico de ruptura correspondiente a cada puente líquido. Estos son:  $\Phi_0 = 2.55$  kV para  $\tau = 1.44$ ,  $\Phi_0 = 5.40$  kV para  $\tau = 1.05$ ,  $\Phi_0 = 7.9$  kV para  $\tau = 0.820$  y  $\Phi_0 = 14.6$  kV para  $\tau = 0.575$ . Podemos observar un desplazamiento del cuello de la columna líquida hacia

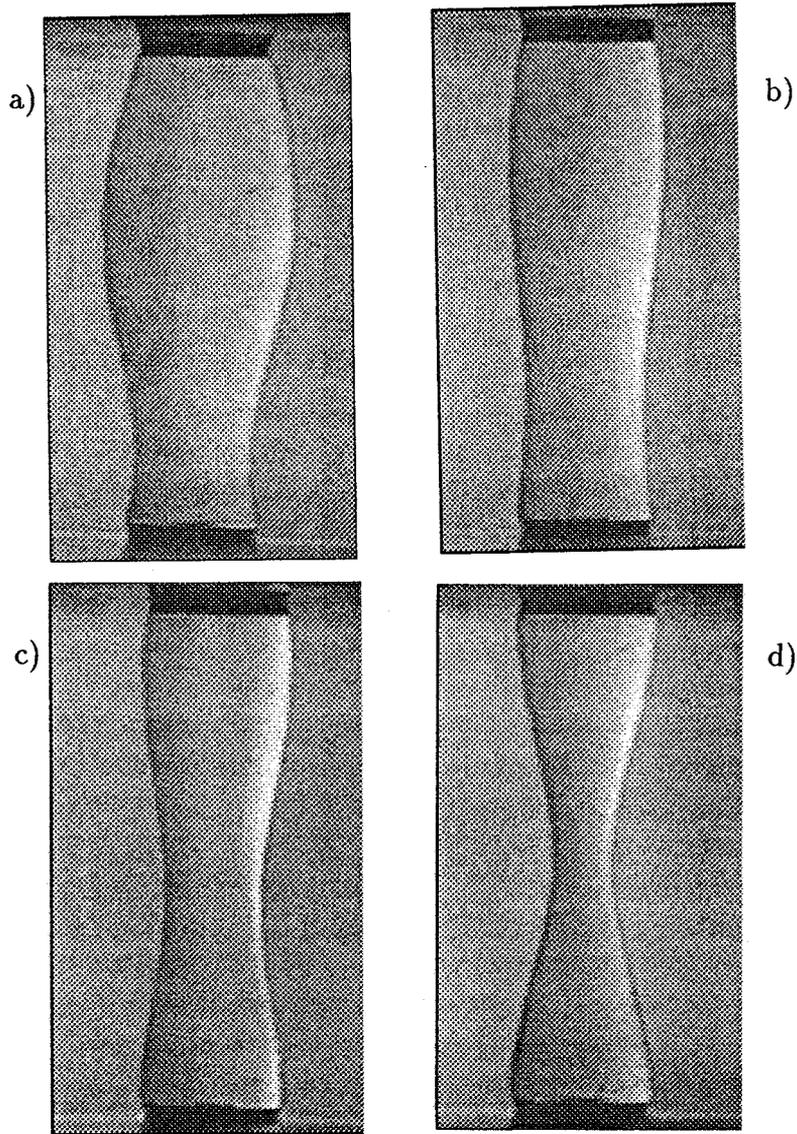


Figura 4.8: Puentes de  $\Lambda = 3.53$  cerca del punto crítico para distintos valores del volumen. a)  $\tau = 1.44$  y  $\Phi_0 = 2.55$  kV; b)  $\tau = 1.05$  y  $\Phi_0 = 5.4$  kV; c)  $\tau = 0.820$  y  $\Phi_0 = 7.9$  kV; d)  $\tau = 0.575$  y  $\Phi_0 = 14.6$  kV.

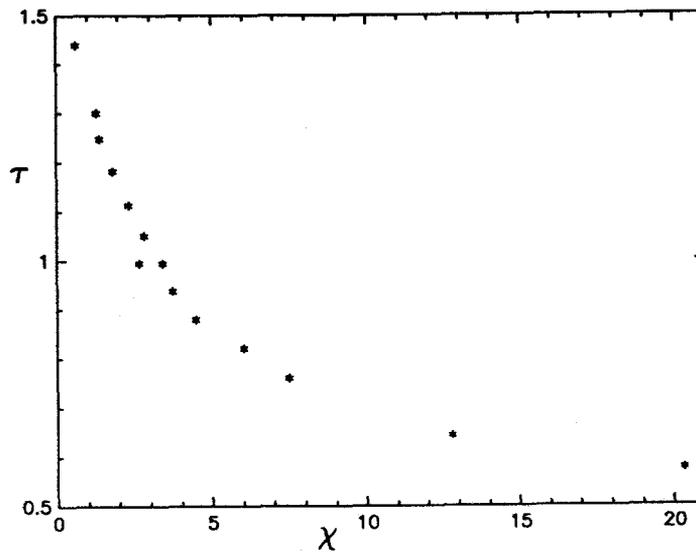


Figura 4.9: Resultados experimentales para los puntos críticos en el plano  $\chi$ - $\tau$ . Puentes de  $\Lambda = 3.53$ .

el centro, claro indicio de un cambio hacia una ruptura simétrica. La figura 4.9 muestra los puntos de estabilidad marginal en el plano  $\tau$ - $\chi$  para esta serie experimental de  $\Lambda = 3.53$ . Se observan algunas oscilaciones en los puntos debidos a cambios en la temperatura. Esta serie experimental presenta para el puente de  $\tau = 1.0$  un valor del campo crítico casi un 20% menor que el de la figura 4.11. Podría deberse a que los líquidos llevaban bastante tiempo en contacto y la tensión superficial podría ser menor. Si es así los valores experimentales de  $\chi$  representados serían un 20% mayores.

### 4.3.2 Resultados para gotas

Hemos realizado una serie de experimentos con gotas ancladas para obtener la elongación en función del campo aplicado y mediante la comparación con la curva teórica obtener el valor de la tensión superficial. Sin embargo, nos hemos encontrado con que el efecto del campo local debido al anclaje provoca un aumento de la curvatura sobre la forma de equilibrio en las proximidades del anclaje. Este hecho no permite a ésta alcanzar la elongación que tendría en ausencia del campo local. Los intentos de obtener la tensión superficial con estas gotas nos condujeron a tensiones superficiales cada vez menores a medida que aumentábamos el volumen de la gota:  $\sigma = 7.9, 6.7$  y  $5.7$  mN/m

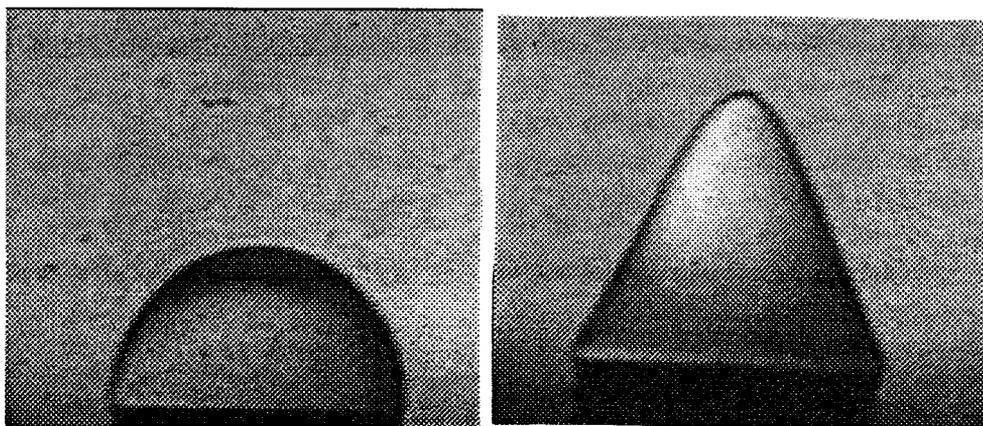


Figura 4.10: Gota anclada sin campo y con un campo aplicado de 18.1 kV/cm.

para  $V = 32.5$ , 51.6 y 76.3 mm<sup>3</sup>, respectivamente. Lo que indica que a más volumen menos efecto del campo local pues la gota es cada vez mayor. Por ello sólo mostraremos una de las formas que hemos obtenido. En la figura 4.10 presentamos una gota anclada de volumen 32.5 mm<sup>3</sup> sometida a una diferencia de potencial de 20 kV con una separación entre placas de 11 mm. En ausencia de campo aplicado la gota tiene una forma próxima a una semiesfera. Podemos ver el aumento de la curvatura en las proximidades del anclaje.

Con gotas de apoyo libre hemos podido tener un buen acuerdo con los estudios numéricos. Realizamos experimentos con dos gotas de radios efectivos  $R = 3.64 \pm 0.03$  mm y  $R = 2.88 \pm 0.03$  mm ( $R \equiv (3V/2\pi)^{1/3}$ ) con separaciones entre electrodos, respectivamente, de  $l = 14.15 \pm 0.05$  mm y  $l = 12.15 \pm 0.05$  mm. Estas distancias corresponden a una separación adimensional  $L \simeq 4$ , que fue la que se usó para la comparación con los resultados numéricos ya que la sensibilidad de la presión eléctrica con  $L$  es bastante pequeña para el mismo valor de  $E_\infty$  (ver figura 3.27).

Experimentalmente se observa que a medida que aumenta el campo la altura de la gota crece mientras que el radio de contacto disminuye. Como el aceite de ricino moja bastante más el electrodo de cobre que el aceite de silicona el ángulo de contacto  $\alpha$  es pequeño. En el proceso de incremento del campo aplicado, el ángulo de contacto también decrece inicialmente pero rápidamente se alcanza un valor constante. Este último valor corresponde al caso del soporte ya mojado por el ricino de la gota (ángulo de contacto de retroceso [Miller, 1985]). Cuando bajamos gradualmente el campo aplicado

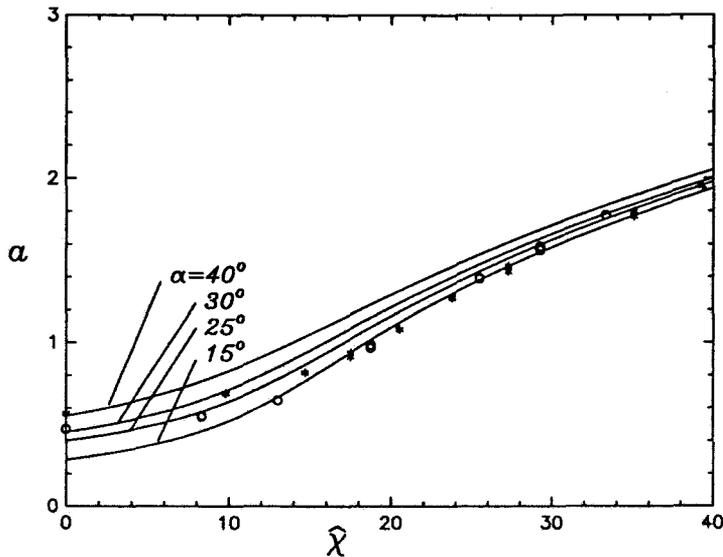


Figura 4.11: Comparación de los valores experimentales con los teóricos para la elongación  $a$  como función del número de Bond eléctrico  $\hat{\chi}$  en gotas de apoyo libre.  $\circ$ , gota con  $R = 2.88$  mm;  $*$ , gota con  $R = 3.64$  mm.

se obtienen básicamente las mismas formas de equilibrio, debido a que ya el soporte está mojado con el aceite de ricino. Así, la diferencia fundamental es que para campo aplicado nulo la línea de contacto es una frontera entre soporte mojado por silicona y por ricino y cuando el campo está aplicado la línea de contacto está entre dos zonas mojadas de ricino.

Como se indicó en la descripción del método operativo, la comparación de la curva de la elongación  $a$  frente  $E_\infty^2$  experimental con la teórica de  $a$  frente a  $\hat{\chi}$  para  $\beta = 0.583$  nos proporciona el valor de la tensión superficial. Puesto que a cada valor experimental de  $a$  le corresponde un valor teórico  $\hat{\chi}$  podemos obtener un valor de la tensión superficial de  $\sigma = \epsilon_{ex} E_\infty^2 R / \hat{\chi}$ , conocido el valor experimental de  $E_\infty$ . El ángulo de contacto se estimó que era menor de  $30^\circ$  a partir de los perfiles de las gotas. Calculando las curvas de  $a$  frente a  $\hat{\chi}$  para valores diferentes de  $\alpha$  (decreciendo  $\alpha$  de cinco en cinco grados) obtuvimos que el ángulo  $\alpha = 15^\circ$  proporcionaba la mínima dispersión para  $\sigma$ . La tensión superficial obtenida por este método es  $\sigma = 3.63 \times 10^{-3}$  N/m con una dispersión  $\Delta\sigma = 0.12$ . En la figura 4.11 se representa la elongación  $a$  como función del número de Bond eléctrico  $\hat{\chi}$  para diferentes valores de  $\alpha$  en el caso  $\beta = 0.583$ ,  $B = 0$  y  $L = 4$ . Vemos que para  $\hat{\chi} > 10$  el ángulo de

contacto es ya de  $15^\circ$ . La figura 4.12 muestra tres formas de equilibrio y una comparación de los perfiles numéricos (líneas continuas) con estos perfiles experimentales (puntos). Las formas numéricas se calcularon con  $\alpha = 15^\circ$  y con las mismas alturas  $a$  de las formas experimentales. Corresponden a intensidades de campo aplicado de 9.9, 11.5 y 13.2 kV/cm para la gota de  $R = 2.88$  mm.

Desviaciones del valor deducido para la tensión superficial pueden suceder debido a errores en la medida de la razón de permitividades (error relativo estimado en 1%), en el ángulo de contacto elegido (error absoluto de  $5^\circ$ ) y en un número de Bond diferente de cero (estimado en  $B \sim 0.05$  para estos valores de  $R$ ). Calculando numéricamente las curvas de  $a$  frente a  $\hat{\chi}$  para la máxima desviación de  $\beta$ , de  $\alpha$  y de  $B$  podemos estimar el error cometido en  $\sigma$ . El resultado final es  $\sigma = 3.63 \pm 0.15$  mN/m, valor que está dentro del error obtenido mediante el método de medida de  $B$  y la diferencia de densidades, pero que tiene un error estimado sensiblemente menor. Por otro lado, no presenta las dificultades del otro método relativas a la variación de la diferencia de densidades con el tiempo de contacto de los dos líquidos.

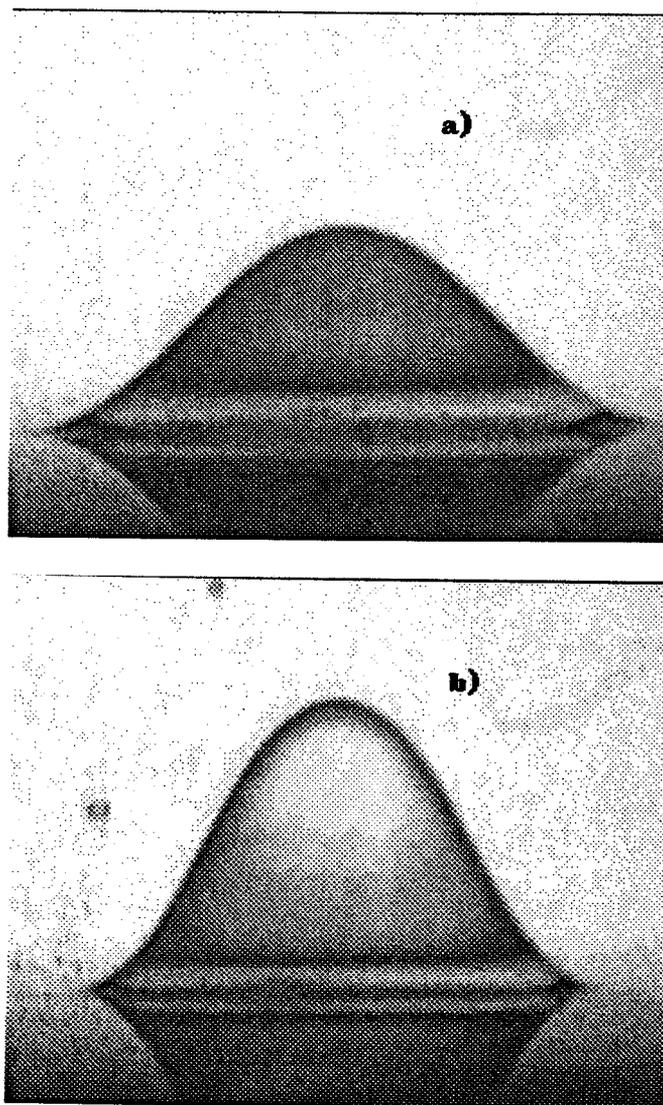


Figura 4.12: Para pie de figura ver página siguiente.

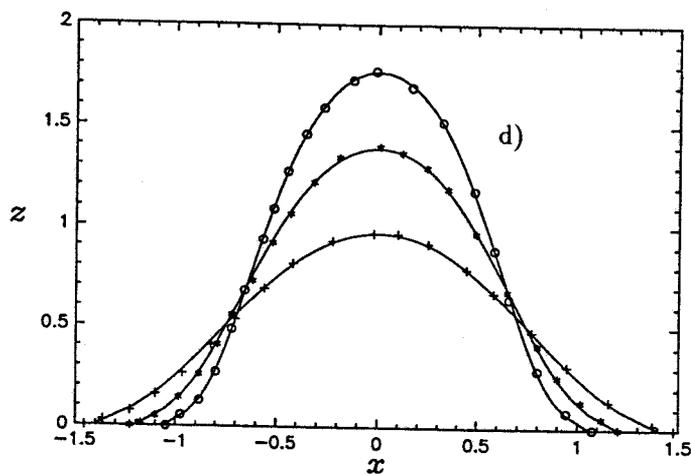
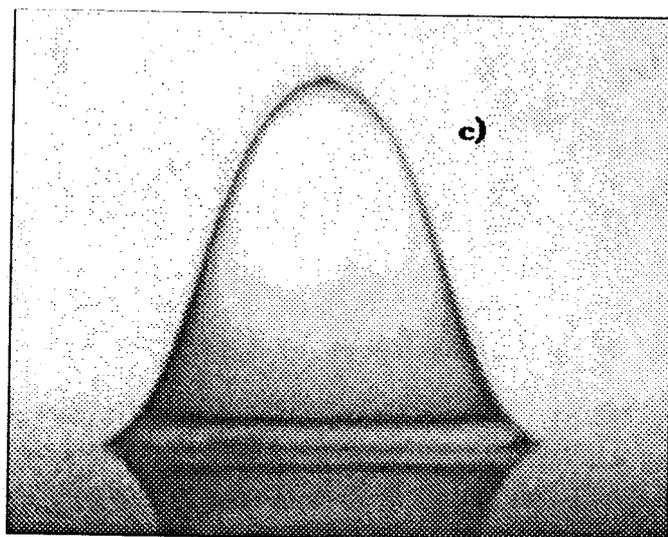


Figura 4.12: Evolución cuasiestática de una gota de apoyo libre a medida que aumenta el campo eléctrico aplicado (a,b,c) y comparación con los perfiles numéricos (d). (a)  $E_{\infty} = 9,8$  kv/cm,  $a = 0.963$ , (b)  $E_{\infty} = 11.5$  kv/cm,  $a = 1.38$ , (c)  $E_{\infty} = 13.2$  kv/cm,  $a = 1.76$ .

# Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos estudiado la estática de las formas líquidas cautivas entre placas plano-paralelas sometidas a una diferencia de potencial. A modo de resumen, extraemos los siguientes aspectos y conclusiones más relevantes del trabajo:

1. Se han elaborado una serie de programas basados en el Método de Elementos Finitos con el fin de obtener las formas de equilibrio axisimétricas de puentes líquidos y gotas para distintos valores del volumen, la separación entre placas, la razón de permitividades, la diferencia de potencial aplicada y la aceleración gravitatoria.
2. La obtención sucesiva de formas de equilibrio mediante un método de continuación en el parámetro arco junto con la determinación de los puntos críticos ha permitido la descripción de los diagramas de bifurcación. A partir de éstos se ha deducido la estabilidad de las formas líquidas ante perturbaciones axisimétricas.
3. Se ha comprobado que el efecto del campo eléctrico axial sobre los puentes líquidos es hacerlos *más cilíndricos*, esto es, alinear la interfase con el eje de simetría. Este comportamiento cualitativo es independiente de qué líquido forma el puente, de su volumen y de la gravedad residual. Esta es la razón última del incremento de la estabilidad con el campo aplicado.
4. Se ha demostrado que los puentes líquidos axisimétricos pueden perder su estabilidad a través de puntos de retorno o de bifurcación en el caso  $B = 0$ , y a través de puntos de retorno en el caso  $B \neq 0$ . La bifurcación que da lugar a la inestabilidad es siempre subcrítica de tipo tridente. Para el caso  $B = 0$ , los puntos de retorno aparecen

cuando el volumen es pequeño comparado con el volumen cilíndrico. Como el campo eléctrico permite reducir el volumen de una columna líquida manteniéndola estable, puede conseguirse cambiar la forma del proceso de ruptura hacia una simétrica, ya que los puntos de retorno y de bifurcación se aproximan uno al otro para valores pequeños del volumen. La gravedad rompe la simetría respecto del plano medio consiguiendo desconectar las ramas del diagrama de bifurcación tipo tridente. Se ha comprobado que los puentes líquidos son más sensibles a la gravedad residual cuanto más esbeltos. Para una esbeltez dada, la sensibilidad del punto de mínimo volumen estable con el número de Bond decrece para campo creciente.

5. Las formas de equilibrio de las gotas aislantes se alargan en la dirección del campo aplicado. Se ha demostrado que una razón de permitividades alta, un ángulo de contacto pequeño ó un radio de contacto grande favorecen la aparición de inestabilidades en las gotas. Las inestabilidades se dividirían en aquellas que conducen a una punta cónica y aquellas que sólo aumentan la elongación de la gota. Para permitividades dieléctricas altas las gotas pueden desarrollar puntas cónicas. Se ha determinado analíticamente que soluciones locales de puntas cónicas sólo son posibles si la permitividad de la gota relativa al medio circundante supera el valor 17.6. Numéricamente se han observado crecimientos bruscos de la curvatura en el polo de la gota para valores de la permitividad superiores o en torno a 21 y, por tanto, siempre por encima del límite analítico.
6. Se han efectuado experimentos en condiciones de microgravedad tanto de puentes líquidos como de gotas. La comparación de los resultados experimentales con los teóricos sobre los límites de estabilidad de puentes de volumen cilíndrico en presencia de gravedad residual es bastante satisfactoria. Han quedado de manifiesto los efectos gravitatorios sobre la curva de estabilidad marginal, algo que no había sido descrito en los experimentos previos. Por otro lado, se ha comprobado experimentalmente el cambio de simetría predicho por la teoría en la curva de mínimo volumen estable cuando se aumenta el campo aplicado a esbeltez fija. Se ha observado que el cuello de la forma de equilibrio crítica se desplaza hacia el centro a medida que aumenta el campo, claro indicio

de un cambio de una ruptura asimétrica hacia una simétrica.

7. Se ha logrado determinar la tensión interfacial entre el aceite de ricino y de silicona existente en el experimento mediante la comparación entre las formas de equilibrio teóricas y experimentales. Esto es de gran interés en microgravedad donde muchos de los métodos de medida de tensión superficial presentan problemas o no son aplicables pues presuponen la existencia de la gravedad.

# Apéndice A

## Obtención de la ecuación de Young-Laplace

Partimos de la funcional

$$\mathcal{U} = \sigma \int_S dS - \frac{\epsilon_{\text{ex}}}{2} \int_{V_{\text{ex}}} E^2 d\tau - \frac{\epsilon_{\text{in}}}{2} \int_{V_{\text{in}}} E^2 d\tau + \rho_{\text{ex}} g \int_{V_{\text{ex}}} z d\tau + \rho_{\text{in}} g \int_{V_{\text{in}}} z d\tau, \quad (\text{A.1})$$

donde  $S$  hace referencia a la interfase. Hay que tener en cuenta que en las variaciones el campo es la solución para cada forma admisible de la interfase.

Como las variaciones admisibles son aquellas que mantienen el volumen fijo definimos la funcional

$$\mathcal{U}^* = \mathcal{U} - \lambda_{\text{ex}} \int_{V_{\text{ex}}} d\tau - \lambda_{\text{in}} \int_{V_{\text{in}}} d\tau, \quad (\text{A.2})$$

donde los nuevos términos son las condiciones de volumen con sus correspondientes multiplicadores de Lagrange. La anulación de la primera variación de  $\mathcal{U}^*$  con respecto a todas las formas posibles que cumplan las condiciones de anclaje conduce a la ecuación de equilibrio.

Sea  $\delta l$  un desplazamiento infinitesimal de cada punto de la interfase. La condición de anclaje dado impone que  $\delta l = 0$  en los anclajes. Para relacionar el cambio de área  $\delta(\int dS)$ , con  $\delta l$  consideremos la superficie elemental de la

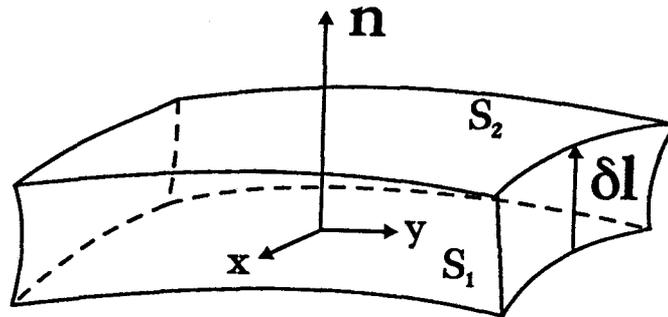


Figura A.1: Variación de una superficie elemental.

figura A.1. El cambio de área vendrá dado por

$$\delta A = \int_{S_2} dS - \int_{S_1} dS = \int_{S_2} \mathbf{n} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_1} \mathbf{n} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{n} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{A.3})$$

donde  $A$  es el área,  $\mathbf{n}$  es el vector normal a la superficie  $S_1$  en dirección a  $S_2$  y  $d\mathbf{S}$  es el diferencial de área orientada. El vector normal a la superficie  $S_2$  será, en general, distinto de  $\mathbf{n}$  pero su variación es del orden de  $\delta l$  y en dirección tangencial a la interfase (por ser la variación de un vector de módulo constante). Resulta así que en primer orden  $\int_{S_2} dS = \int_{S_2} \mathbf{n} \cdot d\mathbf{S}$ . Haciendo uso del teorema de Gauss tenemos

$$\oint \mathbf{n} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{n} \, d\tau,$$

donde  $v$  es el volumen elemental encerrado y  $\mathbf{n}$  extiende su definición a un vector con dominio en el espacio siguiendo la generalización  $\mathbf{n}(x, y, z) = \mathbf{n}(x, y)$  con  $x, y$  direcciones tangenciales y con  $z$  dirección perpendicular a la interfase en cada punto. Teniendo en cuenta que  $v = \delta l \cdot dS$  y que en sí misma la superficie considerada,  $S_1$ , es elemental la variación del área total será

$$\delta \left( \int dS \right) = \int_S \nabla \cdot \mathbf{n} \, \delta l \cdot dS. \quad (\text{A.4})$$

Notemos que la variación de la integral de volumen de una magnitud  $f(\mathbf{x})$  debida a un cambio de la interfase es en general, resultado de un cambio tanto del integrando como del volumen de integración,

$$\delta \left( \int f(\mathbf{x}) \, d\tau \right) = \int_v \delta f(\mathbf{x}) \, d\tau + \int_S f(\mathbf{x}) \, \delta l \cdot dS, \quad (\text{A.5})$$

donde  $\delta f$  indica la variación de la magnitud  $f$  en un punto fijo  $\mathbf{x}$ . Aquí hemos tenido en cuenta que cuando un elemento de área se desplaza barre un volumen que es  $v = d\mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{l}$ . Cuando se perturba la interfase existen puntos cercanos a ésta que no pertenecen a la intersección del volumen original y el final. Para estos puntos, la diferencia  $\delta f$  se obtiene definiendo la magnitud  $f$  por continuación analítica desde los puntos en los que  $f$  sí está definida.

De acuerdo con (A.5) la variación de la energía gravitatoria es

$$\delta \left( \rho_{\text{in}} g \int_{V_{\text{in}}} z d\tau + \rho_{\text{ex}} g \int_{V_{\text{ex}}} z d\tau \right) = (\rho_{\text{in}} - \rho_{\text{ex}}) g \int_S z \delta\mathbf{l} \cdot d\mathbf{S}, \quad (\text{A.6})$$

donde se ha tenido en cuenta que la variación del volumen exterior es igual y de signo contrario a la del volumen interior.

La variación del término debido al volumen fijo es

$$\delta (\lambda_{\text{in}} V_{\text{in}} + \lambda_{\text{ex}} V_{\text{ex}}) = (\lambda_{\text{in}} - \lambda_{\text{ex}}) \int_S \delta\mathbf{l} \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{A.7})$$

La variación del término de energía eléctrica se realiza teniendo en cuenta que el potencial del que deriva el campo  $\mathbf{E}$  es solución de la ecuación de Laplace para cada interfase admisible. De este modo tenemos para el volumen interior

$$\delta \left( \frac{1}{2} \int_{V_{\text{in}}} |\nabla\Phi|^2 d\tau \right) = \int_{V_{\text{in}}} \nabla\Phi \cdot \nabla(\delta\Phi) d\tau + \frac{1}{2} \int_S |\nabla\Phi|^2 \delta\mathbf{l} \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{A.8})$$

La variación del primer sumando del segundo término cumple

$$\int_{V_{\text{in}}} \nabla\Phi \cdot \nabla(\delta\Phi) d\tau = \int_{V_{\text{in}}} [\nabla \cdot (\delta\Phi \nabla\Phi) - \delta\Phi \nabla^2\Phi] d\tau. \quad (\text{A.9})$$

Y dado que  $\Phi$  es solución de la ecuación de Laplace y que el potencial está fijado en los electrodos, la aplicación del teorema de Gauss nos lleva a

$$\oint \delta\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n} dS = \int_S \delta\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n} dS. \quad (\text{A.10})$$

Para relacionar  $\delta\Phi$  con  $\delta\mathbf{l}$  consideramos que los puntos del dominio sufren un desplazamiento  $\delta\mathbf{x}$  tal que es  $\delta\mathbf{x} = 0$  en los electrodos y  $\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{l}$  en

la interfase. La diferencia entre el potencial en un punto desplazado y el potencial en el punto original cumple en primer orden

$$\hat{\Phi}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{x}) = \delta\Phi(\mathbf{x}) + \delta\mathbf{x} \cdot \nabla\Phi, \quad (\text{A.11})$$

donde  $\hat{\Phi}$  es el potencial en la nueva configuración. Entonces la variación del término eléctrico en el volumen interior es

$$\delta \left( -\frac{\epsilon_{\text{in}}}{2} \int_{V_{\text{in}}} |\nabla\Phi|^2 \right) d\tau = -\epsilon_{\text{in}} \int_S \left[ \frac{\partial\Phi}{\partial n} (\Psi - \Phi - \nabla\Phi \cdot \delta\mathbf{l}) + \frac{1}{2} |\nabla\Phi|^2 \delta\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} \right]_{\text{in}} dS, \quad (\text{A.12})$$

donde  $\Psi = \hat{\Phi}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{l})$ . La variación para el volumen exterior es, análogamente,

$$\delta \left( -\frac{\epsilon_{\text{ex}}}{2} \int_{V_{\text{ex}}} |\nabla\Phi|^2 \right) d\tau = -\epsilon_{\text{ex}} \int_S \left[ \frac{\partial\Phi}{\partial n} (\Psi - \Phi - \nabla\Phi \cdot \delta\mathbf{l}) + \frac{1}{2} |\nabla\Phi|^2 \delta\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} \right]_{\text{ex}} dS, \quad (\text{A.13})$$

Sumando las contribuciones del medio interior y exterior la variación de la parte eléctrica,  $\delta\mathcal{U}_E$ , toma la forma

$$\delta\mathcal{U}_E = \int_S \Delta \left[ -\epsilon \frac{\partial\Phi}{\partial n} \nabla\Phi \cdot \delta\mathbf{l} + \frac{\epsilon}{2} |\nabla\Phi|^2 \delta\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} \right] dS \quad (\text{A.14})$$

donde se ha tenido en cuenta que  $\Delta\Phi$ ,  $\Delta\Psi$  y  $\Delta[\epsilon\partial\Phi/\partial n]$  son nulos en la interfase ya que el potencial y la normal del vector desplazamiento son continuos.

Finalmente, la anulación de la primera variación del potencial efectivo en su proyección sobre la normal de la superficie conduce a la ecuación de Young-Laplace aumentada por el término eléctrico

$$\sigma \nabla \cdot \mathbf{n} + \Delta\lambda - gz\Delta\rho + \Delta \left[ -\epsilon \left( \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right)^2 + \frac{\epsilon}{2} |\nabla\Phi|^2 \right] = 0; \quad (\text{A.15})$$

mientras que la proyección en la dirección tangente

$$\Delta \left[ \epsilon \frac{\partial\Phi}{\partial n} \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right] = 0 \quad (\text{A.16})$$

no conduce a nada nuevo al ser continuos el campo tangente y la normal del vector desplazamiento.

En la ecuación (A.15) identificamos el multiplicador de Lagrange  $\lambda$  con la presión de referencia de cada medio,  $\Pi$ , de modo que  $\Delta\lambda$  es el salto de presiones de referencia entre el medio exterior e interior. Este salto de presiones es el necesario para que el volumen permanezca inalterado.

## Apéndice B

### Singularidad del campo en la línea de contacto

Cuando tenemos contornos no suaves en las fronteras entre dieléctricos pueden aparecer singularidades en los campos. En general, en estos puntos alguna de las derivadas del potencial de orden igual o mayor a uno se hace infinita [Strang, 1973].

En las cercanías del punto de contacto podemos hacer un análisis del comportamiento del potencial mediante un desarrollo en funciones de variables separadas. Localmente el problema de potencial cerca de la línea de contacto aparece como un problema plano (véase figura 3.2). En coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  la forma general del potencial que cumple la condición de Dirichlet homogénea en el electrodo toma la forma

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{in}} &= \sum_{\nu} A_{\nu} \rho^{\nu} \sin \nu \theta, \\ \Phi_{\text{ex}} &= \sum_{\nu} B_{\nu} \rho^{\nu} \sin \nu(\pi - \theta).\end{aligned}\tag{B.1}$$

Los valores de  $\nu$  han de ser positivos para que el potencial sea finito en el origen.

Las condiciones de contorno en la interfase, esto es  $\theta = \alpha$ ,

$$\Phi_{\text{in}} = \Phi_{\text{ex}},\tag{B.2}$$

$$\frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial \theta} = \beta \frac{\partial \Phi_{\text{ex}}}{\partial \theta},\tag{B.3}$$

conducen a las siguientes relaciones entre los coeficientes  $A_\nu$  y  $B_\nu$

$$\begin{aligned} A_\nu \operatorname{sen} \nu\alpha &= B_\nu \operatorname{sen} \nu(\pi - \alpha), \\ A_\nu \cos \nu\alpha &= -\beta B_\nu \cos \nu(\pi - \alpha). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Estas relaciones constituyen una ecuación de valores propios para  $\nu$  ya que para que exista solución distinta de la trivial el determinante del sistema ha de ser igual a cero,

$$\beta \tan \nu\alpha + \tan \nu(\pi - \alpha) = 0. \quad (\text{B.5})$$

Estamos interesados en el valor de  $\nu$  más pequeño porque determina el término dominante en el desarrollo para  $\rho \rightarrow 0$ , el punto de contacto. En este límite el campo es proporcional a  $\rho^{\nu-1}$  y la presión eléctrica a  $\rho^{2(\nu-1)}$ . En general, tendremos un campo y una presión eléctrica infinitos en el punto de contacto cuando  $\nu$  sea menor que 1. Así, la regularidad del potencial está determinada por el valor de  $\nu$ . En particular, si  $0 < \nu < 1$  el potencial es de cuadrado integrable en el volumen sólo hasta la primera derivada. Véase que la integral en el volumen del cuadrado de las derivadas  $m$ -ésimas del potencial es finita sólo si  $2(\nu - m) + 2 > 0$  ya que hay que integrar un término de la forma  $\rho^{2(\nu-m)} \rho d\rho$ .

Despejando  $\beta$  de la ecuación (B.5) hemos obtenido la figura B.1. En ella se representan las curvas de  $\nu = \text{Cte}$  en el plano  $\alpha$ - $\beta$ . Hemos representado para  $\beta$  sólo el intervalo (0,1) ya que la ecuación (B.5) es invariante al cambiar simultáneamente  $\beta$  por  $1/\beta$  y  $\alpha$  por  $\pi - \alpha$  (simple intercambio de permitividades más un cambio de  $\alpha$  a  $\pi - \alpha$ ).

Del comportamiento de  $\nu$  como función del ángulo y de la razón de permitividades destacamos:

- Si  $\alpha \rightarrow \pi/2$  entonces  $\nu \rightarrow 1$ .
- Si  $\beta \rightarrow 1$  entonces  $\nu \rightarrow 1$ .
- El mínimo valor de  $\nu$  es  $1/2$  que sólo se alcanza para  $\alpha = \pi$  y  $\beta = 0$  o teniendo en cuenta la simetría antes mencionada  $\alpha = 0$  y  $\beta \rightarrow \infty$ .
- Si  $\beta > 1$  ( $\beta < 1$ ) entonces  $\nu < 1$  ( $\nu > 1$ ) para  $\alpha$  entre 0 y  $\pi/2$ .
- Si  $\beta > 1$  ( $\beta < 1$ ) entonces  $\nu > 1$  ( $\nu < 1$ ) para  $\alpha$  entre  $\pi/2$  y  $\pi$ .

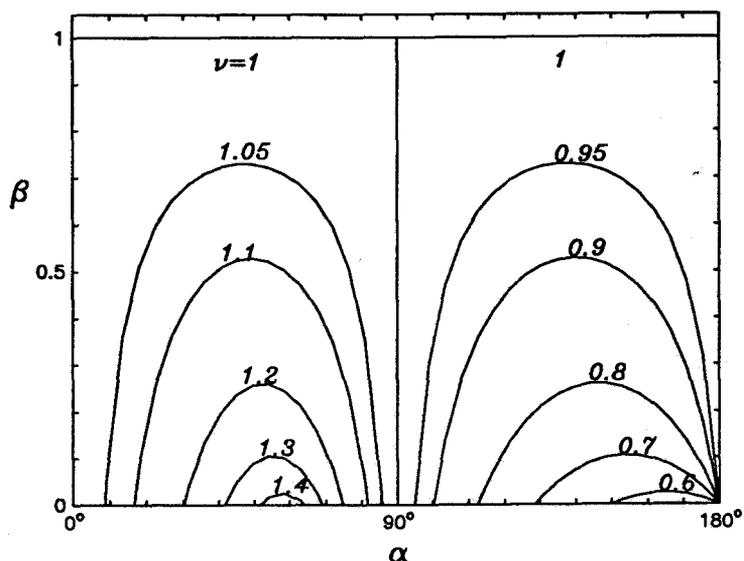


Figura B.1: Curvas de  $\nu = \text{Cte}$  en el plano  $\alpha$ - $\beta$ .

Podemos ver que las oscilaciones en la presión eléctrica que aparecían en el estudio del capítulo 3 sobre la línea de contacto están relacionadas con la singularidad de ésta. Las oscilaciones aparecían en el elemento cuadrangular adyacente a la interfase y al electrodo pues el elemento presupone una variación regular desde la interfase al electrodo. Las oscilaciones se suavizan al dividir dicho elemento en dos triángulos de modo que se admite una variación no regular.

Nos preguntamos si un valor del campo infinito puede acumular una tensión finita en la línea de contacto y, por tanto, tener influencia en el ángulo de contacto. Para ello, sería necesario que la presión eléctrica integrada en una fracción infinitesimal de la interfase adyacente a la línea de contacto tuviera un valor finito. Esto es, el término  $\rho \Delta \Pi_E$  debería ser finito para  $\rho \simeq 0$ . Esto no ocurre porque  $\rho \Delta \Pi_e \sim \rho^{2\nu-1}$  y el valor de  $\nu = 1/2$  nunca se alcanza. Luego, en principio, no podemos esperar que el campo local pueda cambiar el ángulo de contacto para la geometría especificada por la figura 3.2. Algo distinto ocurriría si la interfase partiese de una esquina conductora, pues ahí sí es posible que  $\nu$  sea menor que  $1/2$ .

# Apéndice C

## Puntas cónicas

Puntas cónicas de gotas se observan en experimentos pasado el criterio de estabilidad, donde también se observan finos chorros emergiendo de las puntas [Wilson, 1925, Taylor, 1964a]. Numéricamente aparecen súbitos crecimientos de la curvatura de la punta de la gota que indicarían que una punta cónica está desarrollándose [Sherwood, 1988, Wohlhuter, 1992]. Taylor [Taylor, 1964a] analizó las condiciones bajo las cuales podría existir en equilibrio una punta cónica en una gota perfectamente conductora. Si una punta cónica existe en equilibrio la presión eléctrica ha de ser inversamente proporcional a  $r$ , distancia desde el vértice del cono, ya que la curvatura de una superficie cónica es inversamente proporcional a  $r$ . Nos preguntamos qué constantes dieléctricas pueden desarrollar una punta cónica con un campo eléctrico finito aplicado. Extendiendo la idea de Taylor al caso dieléctrico, el potencial eléctrico que satisface la ecuación de Laplace y la condición de esfuerzos en la interfase es

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{in}} &= Ar^{\frac{1}{2}}P_{\frac{1}{2}}(\cos\theta), \\ \Phi_{\text{ex}} &= Br^{\frac{1}{2}}P_{\frac{1}{2}}(\cos(\pi - \theta)) = Br^{\frac{1}{2}}P_{\frac{1}{2}}(-\cos\theta),\end{aligned}\quad (\text{C.1})$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes, la línea  $\theta = 0$  ó  $\theta = \pi$  es el eje de simetría (véase la figura C.1) y  $P_{1/2}$  es la función de Legendre de orden  $1/2$ . Si el ángulo  $\theta = \theta_0$  define la posición de la interfase, las condiciones de contorno de continuidad del potencial y de la normal del vector desplazamiento conducen a

$$AP_{\frac{1}{2}}(\cos\theta_0) - BP_{\frac{1}{2}}(-\cos(\theta_0)) = 0,$$

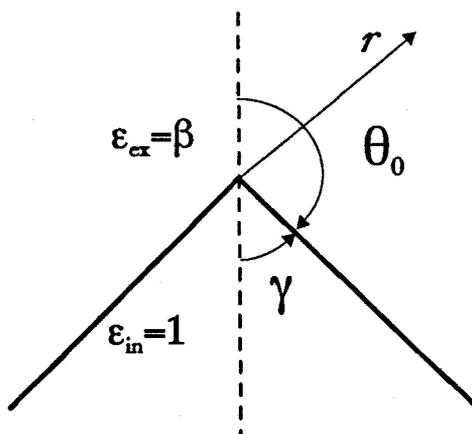


Figura C.1: Punta cónica dieléctrica.

$$AP'_{\frac{1}{2}}(\cos \theta_0) + \beta BP'_{\frac{1}{2}}(-\cos(\theta_0)) = 0, \quad (\text{C.2})$$

donde los acentos indican derivadas respecto del argumento. Este sistema de ecuaciones tiene solución distinta de la trivial si

$$\beta = -\frac{P_{\frac{1}{2}}(-\cos \theta_0)P'_{\frac{1}{2}}(\cos \theta_0)}{P_{\frac{1}{2}}(\cos \theta_0)P'_{\frac{1}{2}}(-\cos \theta_0)}. \quad (\text{C.3})$$

Análogamente, el valor de  $\beta$  que para un ángulo dado  $\theta_0$  da lugar a un potencial proporcional a  $r^\nu P_\nu(\cos \theta)$  es

$$\beta = -\frac{P'_\nu(-\cos \theta_0)P_\nu(\cos \theta_0)}{P'_\nu(\cos \theta_0)P_\nu(-\cos \theta_0)}, \quad (\text{C.4})$$

donde  $P_\nu$  es la función de Legendre de orden  $\nu$ . La figura C.2 muestra  $\beta$  como función de  $\gamma = \pi - \theta_0$ , el semiángulo del cono, para tres valores distintos del exponente  $\nu$ :  $\nu = 2/5$  (línea a trozos),  $\nu = 1/2$  (línea continua) y  $\nu = 3/5$  (línea de puntos). Estos resultados han sido obtenidos empleando el paquete de software Mathematica. Como puede verse de las curvas para distintos valores de  $\nu$ , cuanto más singular es el potencial (menor  $\nu$ ) más pequeño es el rango de permitividades capaces de dar lugar a ese potencial. También

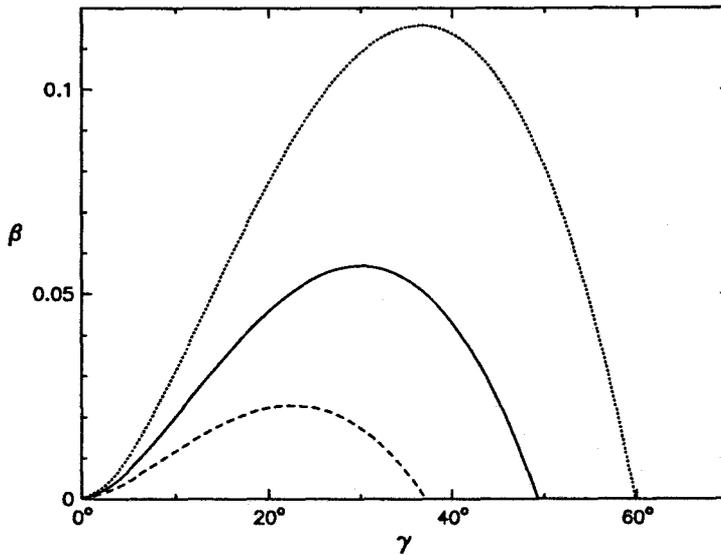


Figura C.2: Curvas de  $\nu = \text{Cte}$  en el plano  $\gamma - \beta$ : (- -)  $\nu = 2/5$ ; (—)  $\nu = 1/2$ ; (···)  $\nu = 3/5$ .

podemos ver que para cada valor de  $\beta$  existe un valor mínimo de  $\nu$  que define la singularidad más alta que puede desarrollarse variando el ángulo. La curva de  $\nu = 1/2$  nos da los valores de  $\beta$  para los que pueden existir soluciones cónicas locales de equilibrio. Sólomente valores positivos de  $\beta$  tienen un significado físico. Podemos ver que existe un valor máximo de  $\beta$  (mínimo  $\hat{\beta} \equiv \beta^{-1}$ ) que viene dado por  $\beta_{\max} = 1/17.5986$  que corresponde a un ángulo de  $\gamma = 30^\circ$ . Gotas con un valor de  $\beta > \beta_{\max}$  no pueden desarrollar puntas cónicas para un valor finito del campo eléctrico aplicado. Para  $\beta < \beta_{\max}$  son posibles dos soluciones cónicas, aunque en el punto de retorno esperaríamos un cambio de estabilidad. En particular, para  $\beta = 0$  (límite conductor) una de las soluciones es el resultado clásico de Taylor:  $\gamma = 49.3^\circ$  es el semiángulo del cono para una gota conductora. Si el incremento súbito de curvatura en la punta de la gota que aparece en los resultados numéricos sobre gotas del capítulo 3 conduce a una punta cónica debe suceder para valores de  $\hat{\beta}$  mayores de  $\hat{\beta} = 17.5986$ . Este parece ser el caso, pues tanto los resultados dados en [Miksis, 1981, Sherwood, 1988, Wohlhuter, 1992] como los presentados por nosotros no contradicen esta conclusión analítica. En todos ellos el aumento brusco de la curvatura ha aparecido para  $\hat{\beta} \gtrsim 20$ .

### Observación experimental

Es interesante comentar la posible observación experimental de este resultado analítico.

Obtener experimentalmente estas puntas dieléctricas no es una tarea fácil. Necesitamos líquidos con una permitividad relativa al vacío más grande que 17.6. Pero, típicamente los líquidos con alta constante dieléctrica disocian impurezas muy fácilmente, de modo que sus conductividades están en el rango de 1 a  $10^{-5}$  S/m. Así, los correspondientes tiempos de relajación  $\epsilon/\sigma_c$  están en el rango de  $10^{-10}$  a  $10^{-5}$  segundos. Para que estos líquidos se comporten como aislantes perfectos se necesitaría aplicar un campo eléctrico alterno con un período mucho más corto que el tiempo de relajación, lo que implicaría unas dificultades técnicas enormes. No es fácil tener potenciales del orden de los kilovoltios a frecuencias del orden de  $10^5$  Hz o mayores. De modo que necesitamos purificar y des-ionizar estos líquidos con el fin de conseguir conductividades del orden de  $10^{-9}$  S/m o menores. Es posible mantener este nivel de conductividad, al menos durante bastantes segundos, para la mayoría de los líquidos usando electrodiálisis. Una fuente de alto voltaje con una frecuencia de 1 kHz, o incluso menor, debe ser suficiente para realizar el experimento. Posibles candidatos para puntas cónicas en la interfase líquido-aire podrían ser, entre otros, etanol ( $\epsilon_r = 24$ ), nitrobenzono ( $\epsilon_r = 35$ ), metanol ( $\epsilon_r = 33$ ), agua desionizada ( $\epsilon_r = 78$ ). Experimentos equivalentes usando el campo magnético pueden realizarse en ferrofluidos para ver estas puntas cónicas siempre que la permeabilidad magnética pueda suponerse como independiente del campo magnético. En este caso las permeabilidades juegan un papel enteramente análogo al de las permitividades eléctricas. Experimentos con líquidos conductores también podrían realizarse. Para dos líquidos de conductividades  $\sigma_{\text{cex}}$  y  $\sigma_{\text{cin}}$  sometidos a una diferencia de potencial constante en el tiempo, la razón de conductividades es el parámetro que determina los campos. En condiciones estacionarias y suponiendo que la convección de carga es despreciable frente a la corriente de conducción, las ecuaciones que describen los campos son idénticas al caso dieléctrico. Definiendo ahora  $\beta = \sigma_{\text{cex}}/\sigma_{\text{cin}}$  los resultados del caso dieléctrico se pueden extender al caso conductor.



# Bibliografía

- [Abbot, 1978] J. P. Abbott. An efficient algorithm for the determination of certain bifurcation points. *J. Comput. appl. Math.*, 4:19–26, 1978.
- [Adornato, 1983] P. M. Adornato y R. A. Brown. Shape and stability of electrostatically levitated drops. *Proc. R. Soc. Lond.*, A 389:101–117, 1983.
- [Axelsson, 1984] O. Axelsson y V. A. Barker. *Finite element solution of boundary value problems*. Academic Press, Orlando, Florida, 1984.
- [Basaran, 1989a] O. A. Basaran y L. E. Scriven. Axisymmetric shapes and stability of charged drops in an external electric field. *Phys. Fluids*, A 1:799–809, 1989.
- [Basaran, 1989b] O. A. Basaran, T. C. Scott, y C. H. Byers. Drop oscillations in liquid-liquid systems. *AIChE J.*, 35:1263, 1989.
- [Basaran, 1990] O. A. Basaran y L. E. Scriven. Shapes and stability of pendant and sessile drops in an electric field. *J. Colloid Interface Sci.*, 140:10–30, 1990.
- [Bashforth, 1883] A. Bashforth y J. C. Adams. *An atemp to test theories of capillary action*. Cambridge University Press, 1883.
- [Batchelor, 1967] G. K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1967.
- [Beard, 1989] K. V. Beard, H. T. Ochs, y R. J. Kubesh. Natural oscillations of small rain drops. *Nature*, 342:408, 1989.

- [Bezdeneynykh, 1992] N. A. Bezdeneynykh, J. Meseguer, y J. M. Perales. Experimental analysis of stability limits of capillary liquid bridges. *Phy. Fluids*, A 4:677–680, 1992.
- [Bohr, 1939] N. Bohr y J. A. Wheeler. The mechanism of fission. *Phys. Rev.*, 56:426, 1939.
- [Brown, 1980] R. A. Brown y L. E. Scriven. The shapes and stability of captive rotating drops. *Proc. R. Soc. Lond.*, A 297:51–79, 1980.
- [Busse, 1984] F. H. Busse. Oscillations of a rotating liquid drop. *J. Fluid Mech.*, 142:1–8, 1984.
- [Carruthers, 1983] J. R. Carruthers y L. R. Testardi. Materials processing in the reduced-gravity of space. *Ann. Rev. Mater. Sci.*, 13:247, 1983.
- [Chang, 1985] L. S. Chang y J. C. Berg. The effect of interfacial tension gradients on the flow of single drops or bubbles translating in an electric field. *AIChE J.*, 31:551, 1985.
- [Cheng, 1984] K. J. Cheng y J. B. Chaddock. Deformation and stability of drops and bubbles in an electric field. *Phys. Letters*, A 106:51–53, 1984.
- [Chandrasekhar, 1961] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Clarendon, Oxford, 1961.
- [Cohen, 1974] S. Cohen, R. Plasil, y W. J. Swiatecki. Equilibrium configurations of gravitating liquid masses with surface tension. *Anns. Phys.*, 82:557, 1974.
- [Coriel, 1977] S. R. Coriel, S. C. Hardy, y M. R. Cordes. Stability of liquid zones. *J. Colloid Interface Sci.*, 60:126–136, 1977.
- [Duprez, 1851] F. Duprez. Memoire sur un case particulier de l'équilibre des liquides. i. *Mem. Acad. R. Sci. Lett. Beaux-Arts*, Belgique 26:42, 1851.

- [Duprez, 1854] F. Duprez. Memoire sur un case particulier de l'équilibre des liquides. ii. *Mem. Acad. R. Sci. Lett. Beaux-Arts*, Belgique 28:34, 1854.
- [Fletcher, 1984] C. A. J. Fletcher. *Computational Galerkin methods*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [Franklin, 1751] B. Franklin. *New experiments and observations on electricity made at Philadelphia in America*. E. Cave, St. John's Gate, 1751.
- [Gañán, 1989] A. Gañán. *Análisis modal de zonas líquidas axilsimétricas confinadas por tensión superficial*. Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, Abril 1989.
- [Gañán, 1991] A. Gañán. Oscillations of liquid captive rotating drops. *J. Fluid Mech.*, 226:63–89, 1991.
- [González, 1989] H. González, F. M. J. McCluskey, A. Castellanos, y A. Barrero. Stabilization of dielectric liquid bridges by electric fields in the absence of gravity. *J. Fluid Mech.*, 206:545–561, 1989.
- [González, 1991] H. González. *Estabilidad de puentes líquidos cilíndricos sometidos a campos eléctricos e isorrotacionales en ambientes de microgravedad*. Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, Septiembre 1991.
- [González, 1993] H. González y A. Castellanos. The effect of residual gravity on the stability of liquid columns subjected to electric fields. *J. Fluid Mech.*, 249:185–206, 1993.
- [Iooss, 1980] G. Iooss y D. D. Joseph. *Elementary stability and bifurcation theory*. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [Jackson, 1975] J. D. Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, New York, 1975.
- [Keller, 1983] H. B. Keller. Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems. En *Applications of bifurcation theory*. Academic Press, New York, 1983.

- [Landau, 1960] L. D. Landau y E. M. Lifshitz. *Electrodynamics of continuous media*. Pergamon, London, 1960.
- [Martínez, 1978] I. Martínez. *Hidrostatica de la zona flotante*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, 1978.
- [Martínez, 1983] I. Martínez. Stability of axisymmetric liquid bridges. En *Materials Sciences under Microgravity*, volumen SP-191, pp. 267–273. ESA, 1983.
- [Martínez, 1986] I. Martínez. Liquid bridge stability data. *J. Crystal Growth*, 78:369–378, 1986.
- [Melcher, 1969] J. R. Melcher y G.I. Taylor. Electrohydrodynamics: a review of the role of interfacial shear stresses. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1:111–146, 1969.
- [Melcher, 1971] J. R. Melcher y E. P. Warren. Electrohydrodynamics of a current-carrying semi-insulating jet. *J. Fluid Mech.*, 47:127–143, 1971.
- [Melcher, 1981] J. R. Melcher. *Continuum electromechanics*. The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1981.
- [Meseguer, 1983] J. Meseguer, A. Sanz, y D. Rivas. The breaking of axisymmetric noncylindrical liquid bridges. En *Materials Sciences under Microgravity*, volumen SP-191, pp. 261–265. ESA, 1983.
- [Meseguer, 1985] J. Meseguer y A. Sanz. Numerical and experimental study of the dynamics of axisymmetric slender liquid bridges. *J. Fluid Mech.*, 153:83–101, 1985.
- [Meseguer, 1990] J. Meseguer, A. Sanz, y J. M. Perales. Axisymmetric long liquid bridges stability and resonances. *Appl. Microgravity Tech.*, 4:186–192, 1990.
- [Michael, 1977] D. H. Michael y R. G. Williams. The equilibrium and stability of sessile drops. *Proc. R. Soc. Lond.*, A 354:127–136, 1977.
- [Miller, 1985] C. A. Miller y P. Neogi. *Interfacial Phenomena: Equilibrium and dynamic effects*. Marcel Dekker, INC., New York, 1985.

- [Miksis, 1981] M. J. Miksis. Shape of a drop in an electric field. *Phys. Fluids*, 24:1967–1972, 1981.
- [Myshkis, 1987] A. D. Myshkis, V. G. Babskii, N. D. Kopachevskii, L. A. Solobozhanin, and Tyupsov A. D. *Low-gravity fluid mechanics*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [Nayyar, 1960] N. K. Nayyar y G. S. Murty. The stability of a dielectric liquid jet in the presence of a longitudinal electric field. *Proc. R. Soc. Lond.*, 75:369–373, 1960.
- [Padday, 1971] J. F. Padday. The profiles of axially symmetric menisci. *Phil. Trans. R. Soc.*, A 269:265, 1971.
- [Panofsky, 1977] W. K. H. Panofsky y M. Phillips. *Classical electricity and magnetism*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1977.
- [Perales, 1990] J. M. Perales. *Dinámica de columnas líquidas*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, Mayo 1990.
- [Press, 1989] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, y W. T. Vetterling. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [Pitts, 1973] E. Pitts. The stability of pendant liquid drops. part 1. two dimensional drops. *J. Fluid Mech.*, 59:753–767, 1973.
- [Pitts, 1974] E. Pitts. The stability of pendant liquid drops. part 1. axial symmetry. *J. Fluid Mech.*, 63:487–508, 1974.
- [Plateau, 1873] J. Plateau. *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*. Gauthier, Paris, 1873.
- [Pelekasis, 1990] N. A. Pelekasis, J. A. Tsamopoulos, y G. D. Manolis. Equilibrium shapes and stability of charged and conducting drops. *Phys. Fluids*, A 2:1328–1340, 1990.
- [Rayleigh, 1882] Lord Rayleigh. On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity. *Phil. Mag.*, 14:184, 1882.

- [Rayleigh, 1892] Lord Rayleigh. On the stability of cylindrical fluid surfaces. *Philos. Mag.*, 34:177-180, 1892.
- [Rayleigh, 1900] Lord Rayleigh. Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density. *Sci. Pap.*, II:200, 1900.
- [Rhim, 1989] W. K. Rhim, S. K. Chung, y D. D. Elleman. Experiments on rotating charged liquid drops. En *Proc. Third. International Colloquium on Drops and Bubbles*. American Institute of Physics, 1989.
- [Rosenkilde, 1969] C. E. Rosenkilde. A dielectric fluid drop in an electric field. *Proc. R. Soc. Lond.*, A 312:473, 1969.
- [Saito, 1981] H. Saito y L. E. Scriven. Study of coating flow by the finite element method. *J. Comp. Phys.*, 42:53, 1981.
- [Sanz, 1983] A. Sanz y I. Martínez. Minimum volume for a liquid bridge between equal disks. *J. Colloid Interface Sci.*, 93:235-240, 1983.
- [Sanz, 1985] A. Sanz. The influence of the outer bath in the dynamics of axisymmetric liquid bridges. *J. Fluid Mech.*, 156:101-140, 1985.
- [Sartor, 1969] J. D. Sartor. Electricity and rain. *Phys. Today*, 22:45, 1969.
- [Saville, 1971] D. J. Saville. Electrohydrodynamic stability: effects of charge relaxation at the interface of a liquid jet. *J. Fluid Mech.*, 48:515-827, 1971.
- [Sherwood, 1988] J. D. Sherwood. Breakup of fluid droplets in electric and magnetic fields. *J. Fluid Mech.*, 188:133, 1988.
- [Strang, 1973] G. Strang y G. J. Fix. *An analysis of the finite element method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1973.
- [Strani, 1985] M. Strani y F. Sabetta. Viscous oscillations of supported drop in an immiscible fluid. *J. Fluid Mech.*, 189:397-421, 1985.

- [Taylor, 1950] G. I. Taylor. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. *Proc. R. Soc. Lond.*, A 201:192, 1950.
- [Taylor, 1964a] G. I. Taylor. Disintegration of water drops in an electric field. *Proc. R. Soc. Lond.*, A 280:383-397, 1964.
- [Taylor, 1964b] G. I. Taylor. Electrically driven jets. *Proc. R. Soc. Lond.*, A 313:453-475, 1964.
- [Torza, 1971] S. Torza, R. G. Cox, y S. G. Mason. Electrohydrodynamics deformation and burst of liquid drops. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 269:295-319, 1971.
- [Vega, 1983] J. M. Vega y J. M. Perales. Almost cylindrical isorotating liquid bridges for small bond numbers. En *Materials Sciences under Microgravity*, volumen SP-191, pp. 247-252. ESA, 1983.
- [Whitham, 1974] G. B. Whitham. *Linear and nonlinear waves*. John Wiley & sons, New York, 1974.
- [Wilson, 1925] C. T. R. Wilson y G. I. Taylor. The bursting of soap bubbles in a uniform electric field. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 22:728, 1925.
- [Wohlhuter, 1992] F. K. Wohlhuter y O. A. Basaran. Shapes and stability of pendant and sessile dielectric drops in an electric field. *J. Fluid Mech.*, 235:481-510, 1992.
- [Zienkiewicz, 1977] O. C. Zienkiewicz. *The finite element method*. MacGraw-Hill, Orlando, Florida, 1977.

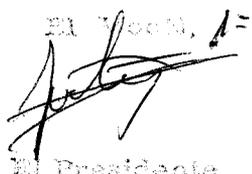
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

El Consejo de Estudios de esta Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, en su sesión de 14 de mayo de 1973, acordó otorgar el Premio de Investigación Científica de esta Facultad de

ANTONIO RAYOS REYES  
por su trabajo "FORMAS DE EQUILIBRIO Y DIAGRAMAS DE BIFURCACION DE PUNTES LIQUIDOS Y GOTAS EN PRESENCIA DE CAMPOS ELECTRICOS"

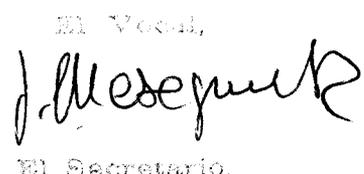
acordó otorgarle la calificación de APTO - CUM LAUDE

Sevilla, 05 de JULIO 1973

El Vocal, 1.  


El Presidente



El Vocal,  


El Secretario,



El Vocal,  


El Electorado,

