Universidad de Sevilla
Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

SOLUCIONES DÉBILES Y RENORMALIZADAS DE ALGUNAS EDP NO LINEALES CON ORIGEN EN MECÁNICA DE FLUIDOS

ALGUNOS RESULTADOS DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

Vº.Bº: El DIRECTOR DEL TRABAJO

Fdo. Enrique Fernández Cara.
Catedrático de la Universidad de Sevilla.

Memoria presentada por Blanca Climent Ezquerra, para optar al grado de Doctor en Matemáticas.

Sevilla, Junio 1996.

Fdo. Blanca Climent Ezquerra

Mi agradecimiento

Al Profesor Dr. Enrique Fernández Cara, director de este trabajo, por su valiosa orientación y su apoyo permanente a lo largo de la elaboración de esta memoria.

Al Profesor Dr. Dominique Blanchard por sus expertas opiniones.

A todos los miembros del Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico de la Universidad de Sevilla, entre los que he encontrado un agradable ambiente de trabajo, por su ayuda y colaboración en todo momento y en especial:

A mis compañeros Manuel González Burgos, Francisco Guillén González y Rosario Pérez García, quienes han estado dispuestos a escucharme y a atenderme cuantas veces lo he necesitado.

Sevilla, Junio de 1996.

A Laura y José María,
por el tiempo que no
les he dedicado.

Notación

$u \cdot v$ es el producto escalar Euclídeo de los vectores u y v.

$A : B = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$ para cada $A = \{A_{ij}\}$ y $B = \{B_{ij}\}$.

$|\cdot|$ es la norma Euclídea habitual en $\mathbb{R}^N$.

$\partial\Omega \equiv \Gamma$ es la frontera del abierto Ω.

$\mathbf{n}$ es el vector normal unitario orientado hacia el exterior de Ω.

$\mathbb{1}_A$ denota la función característica del conjunto A.

sop : Soporte de una función

∇ : Operador gradiente.

Δ : Operador Laplaciano.

$\nabla\cdot$: Operador Divergencia.

∂_t es la derivada parcial respecto de t.

z^- denota un número real z' arbitrariamente próximo a z, tal que $z' < z$.

$T_M(s) = s$ si $s \in [-M, M]$; $T_M(s) = M \operatorname{sign} s$ en otro caso.

L_n : función lineal a trozos tal que $L_n(s) = 1$ si $s \in [0, n]$, $L_n(s) = -\frac{s}{n} + 2$ si $s \in [n. 2n]$ y $L_n(s) = 0$ si $s > 2n$.

$\xi_n = T_{2n} - T_n$ para todo $n \geq 1$.

$\zeta_{n,m} = \frac{1}{m}(T_{n+m} - T_n)$ para todo $n, m \geq 1$.

$G_M^{M+K} = T_{M+K} - T_M$ para todo $M, K > 0$; es decir, $G_M^{M+K} = K\zeta_{M,K}$.

$S_\delta(s) = s$ si $s \in [-\delta, \delta]$; $S_\delta(s) = \operatorname{sign} s$ en otro caso.

$h_M(s) = 1$ si $s \in [-M, M]$; $h_M(s) = h(s - (M-1)\operatorname{sign} M)$ en el resto. Aquí, h es una función regular: $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, $h(r) = 1$ para $|r| \leq 1$, $0 \leq h \leq 1$ y $h(r) = 0$ para $|r| \geq 2$. Nótese que $[-(M+1), M+1]$ contiene el soporte de h_M.

$S_M = \tilde{h}_M$ es la primitiva de h_M que se anula en cero.

H_M^δ es una función real de $W^{2,\infty}$ que verifica $H_M^\delta(M+\frac{1}{\delta}) = \left(H_M^\delta\right)'(M+\frac{1}{\delta}) = 0$, cuya segunda derivada es como sigue:

$$\left(H_M^\delta\right)''(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } |r| \leq M\,, \\ -M\delta & \text{si } M \leq |r| \leq M + \frac{1}{\delta}\,, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El intervalo $[-M - \frac{1}{\delta}, M + \frac{1}{\delta}]$ es el soporte de H_M^δ y de $\left(H_M^\delta\right)'$.

Z es una función real en C^∞ con $Z(0) = Z'(0) = 0$, $0 \leq Z \leq 1$ y $Z(r) = 1$ para $|r| \geq K$.

$\mathcal{D}(\Omega)$: El espacio vectorial de las funciones de $C^\infty(\Omega)$ con soporte compacto contenido en Ω.

$\mathcal{D}'(\Omega)$: El espacio de las distribuciones sobre Ω (Dual de $\mathcal{D}(\Omega)$).

p' : Exponente conjugado de p con $1 \leq p \leq +\infty$ y $1/p + 1/p' = 1$, donde para las divisiones por cero e infinito se usa el convenio habitual.

p^* : Exponente asociado a las inyecciones de Sobolev para cada $p \in [1, \infty]$, es decir $p^* = \frac{Np}{N-p}$ si $p < N$; $1 < p^* < +\infty$ arbitrario si $p = N$ y $p^* = +\infty$ en otro caso. En particular, $(N')^* = \frac{N}{N-2}$ si $N \leq 3$.

$L^p \equiv L^p(\Omega)$: El espacio de Banach de las (clases de) funciones de Ω en $\mathbb{R}$ medibles y p-sumables.

$L^\infty \equiv L^\infty(\Omega)$: Espacio de Banach de las (clases de) funciones de Ω en $\mathbb{R}$ esencialmente acotadas.

$W^{m,p} \equiv W^{m,p}(\Omega)$ $(m \in \mathbb{N})$: El espacio de Banach de las (clases de) funciones de $L^p(\Omega)$ cuyas derivadas en el sentido de $\mathcal{D}'(\Omega)$ de orden $\leq m$ son también de $L^p(\Omega)$.

$W_0^{m,p} \equiv W_0^{m,p}(\Omega)$: Cierre de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$.

$W^{-m,p'} \equiv W^{-m,p'}(\Omega)$: Dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$, para $1 \leq p < +\infty$.

$H_0^1 \equiv H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

$|\cdot|$ (resp. $\|\cdot\|$) : La norma usual en L^2 (resp. H_0^1). En otro caso se especifica el espacio.

$V = \{v \in H_0^1(\Omega)^N;\ \nabla \cdot v = 0\}$.

$H = \{v \in L^2(\Omega)^N;\ \nabla \cdot v = 0,\ v \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre $\partial\Omega\}$.

Sea B un espacio de Banach.

$L^p(B) \equiv L^p(0,T;B)$: El espacio de Banach de las (clases de) funciones $f : [0,T] \longmapsto B$ medibles y tales que la función $t \in [0,T] \longmapsto \|f(t)\|_B$ (definida c.p.d.) es p - sumable.

$C^0(0,T;B)$: El espacio vectorial de las funciones $f : [0,T] \longmapsto B$ que son continuas.

$\mathcal{D}(0,T;B)$: El espacio vectorial de las funciones $f : [0,T] \longmapsto B$ de clase C^∞ y de soporte compacto contenido en $(0,T)$.

$\mathcal{D}'(0,T;B) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T);B)$: El espacio de las distribuciones con valores en B.

$\langle\cdot,\cdot\rangle$: Producto de dualidad genérico entre un espacio de Banach y su dual.

Índice

Introducción

Motivación y descripción del problema

El objetivo de esta Memoria es el estudio teórico de ciertos sistemas de ecuaciones en derivadas parciales que surgen en Mecánica de fluidos. Son variantes de las ecuaciones de Navier-Stokes, tanto en el caso estacionario como en el de evolución, que conducen a dificultades "no standard" :

$$\left\{\begin{array}{l} -\nabla\cdot(\nu Du + k\Phi'(Du)) + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f\,, \\ \nabla\cdot u = 0\,, \\ -\nabla\cdot(\mu(k)\nabla k + B(k)) + u\cdot\nabla k = \nu'|Du|^2 + k\Phi'(Du) : Du \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - |k|^{1/2}k\psi^0(Du)\,, \end{array}\right. \tag{0.1}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t u - \nabla\cdot(\nu Du + k\Phi'(Du)) + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f\,, \\ \nabla\cdot u = 0\,, \\ \partial_t k - \nabla\cdot(\mu(k)\nabla k + B(k)) + u\cdot\nabla k = \nu'|Du|^2 + k\Phi'(Du) : Du \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - |k|^{1/2}k\psi^0(Du)\,. \end{array}\right. \tag{0.2}$$

Aquí, $Du = \nabla u + {}^t\nabla u$. Las funciones $D \mapsto \Phi(D)$, $D \mapsto \psi^0(D)$, $k \mapsto \mu(k)$ y $k \mapsto B(k)$ son dadas. Una vez fijados el abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, las constantes $\nu > 0$ y $\nu' \in [0,\nu]$ y la función f, se busca una solución $\{u,p,k\}$ en Ω de (0.1), junto con condiciones de contorno apropiadas. Por otro lado, fijados los datos precedentes y $T > 0$, buscaremos una solución en $\Omega\times(0,T)$ de (0.2), junto con adecuadas condiciones de contorno e iniciales para $t = 0$.

Entre otras cosas, los sistemas como (0.1) y (0.2) están motivados por el modelado de la turbulencia. Para clarificar este hecho, explicaremos a continuación cómo aparecen estas EDP. Sean $U = U(x,t)$ y $P = P(x,t)$ respectivamente el campo de velocidades y la presión de un fluido viscoso incompresible en régimen turbulento. Entonces el par $\{U, P\}$ debe satisfacer las ecuaciones no estacionarias de Navier-Stokes

$$\partial_t U - \nu \Delta U + (U \cdot \nabla) U + \nabla P = F\,, \qquad \nabla \cdot U = 0\,. \tag{0.3}$$

Debido a las grandes fluctuaciones que sufre el campo de velocidades, hay que renunciar a su cálculo directo. Se necesita promediar en algún sentido. Denotaremos u y p las correspondientes variables promediadas y pondremos $u = \overline{U}$, $p = \overline{P}$. Entonces

$$U = u + u', \qquad P = p + p',$$

donde u' y p' son las correspondientes perturbaciones debidas a la turbulencia.

Es usual reemplazar la búsqueda de una solución de (0.3) por la de un sistema que deba ser satisfecho por u y p. Después de algunos cálculos, se llega a que

$$-\nabla \cdot (\nu D u + R) + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f\,, \qquad \nabla \cdot u = 0 \tag{0.4}$$

cuando se promedia en tiempo, y a que

$$\partial_t u - \nabla \cdot (\nu D u + R) + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f\,, \qquad \nabla \cdot u = 0\,, \tag{0.5}$$

cuando se promedia en algún otro sentido. Aquí, f es el promedio de las fuerzas exteriores que actúan sobre las partículas del fluido ($f = \overline{F}$) y R es el llamado *tensor de Reynolds*, que se obtiene a prtir del término no lineal:

$$R = \{R_{ij}\}\,, \quad \text{con } R_{ij} = -\overline{u_i' u_j'}\,.$$

Como en (0.4) y (0.5) aparecen las incógnitas u_i', es necesario hacer hipótesis adicionales que relacionen R con u. En el caso de los modelos con una ecuación, es habitual imponer la siguiente hipótesis de tipo Boussinesq (cf. [14]):

$$R = \nu_T D u\,, \qquad \text{donde } \nu_T = G(k) \qquad \text{(una relación algebraica).} \tag{0.6}$$

Aquí, k es la energía cinética turbulenta:

$$k = \overline{\tfrac{1}{2}|u'|^2}.$$

El problema podrá quedar cerrado considerando (0.4) ó (0.5) junto con (0.6) y una EDP adicional para k. Sin embargo, cuando se intenta deducir una ecuación para k, nuevamente encontramos términos en los que aparecen las perturbaciones turbulentas u_i' (y k_i'). Más precisamente, en el caso estacionario se llega a la EDP

$$-\nabla \cdot \left(\nu \nabla k + (\overline{-(p'+k')u'})\right) + u \cdot \nabla k = R : Du - \overline{\tfrac{\nu}{2}|Du'|^2} \tag{0.7}$$

y, en el caso de evolución, obtenemos

$$\partial_t k - \nabla \cdot \left(\nu \nabla k + (\overline{-(p'+k')u'})\right) + u \cdot \nabla k = R : Du - \overline{\tfrac{\nu}{2}|Du'|^2}\,. \tag{0.8}$$

Por tanto, es necesario aproximar algunos de los términos de (0.7) y de (0.8). Esto se consigue introduciendo nuevas hipótesis:

- Naturalmente, se usa de nuevo (0.6) para aproximar $R : Du$.
- Para el término de disipación $\overline{\frac{\nu}{2}|Du'|^2}$, hoy día se acepta casi siempre la misma aproximación: Una constante por $k^{3/2}$.
- En cambio, la aproximación del término $\overline{-(p'+k')u'}$ ha sido realizada por varios autores de diferentes maneras. En la mayoría de los trabajos, este término es reemplazado por $c\nu_T \nabla k$, donde c es una constante experimental (véase por ejemplo [21], [23] y sus referencias). En otros casos, se aproxima por un vector $B(k)$ (véase [9]).

Así pues, queda claro que sistemas como (0.1) ó (0.2) pueden ser usados para describir el comportamiento de ciertos fluidos turbulentos. Otra motivación para este tipo de problemas puede encontrarse en la Mecánica de fluidos no Newtoniana (cf. por ejemplo [22]). En este caso, el par $\{u, p\}$ proporciona el campo de velocidades y la presión reales del fluido y k es la temperatura. Se está admitiendo que el tensor de esfuerzos tangenciales τ depende de Du y k en la forma siguiente:

$$\tau = \nu Du + k\Phi'(Du)\,.$$

Al objeto de clarificar la naturaleza de los problemas considerados, nos referiremos en lo sucesivo a versiones simplificadas de (0.1) y (0.2):

$$\begin{cases} -\nu\Delta u - \nabla \cdot (k\Phi'(\nabla u)) + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f\,, \\ \nabla \cdot u = 0\,, \\ -\nabla \cdot (\mu(k)\nabla k + B(k)) + u \cdot \nabla k = \nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u\,, \end{cases} \tag{0.9}$$

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu\Delta u - \nabla\cdot(k\Phi'(\nabla u)) + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f\,, \\ \nabla\cdot u = 0\,, \\ \partial_t k - \nabla\cdot(\mu(k)\nabla k + B(k)) + u\cdot\nabla k = \nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u\,. \end{cases} \tag{0.10}$$

Desde el punto de vista matemático, estos problemas presentan tres dificultades fundamentales. En primer lugar, debido a la presencia del término $|Du|^2$, el segundo miembro de la tercera EDP sólo puede estar en general en L^1. Una segunda dificultad atañe al sentido en que debe ser entendida dicha EDP y, en particular, la expresión $\mu(k)\nabla k + B(k)$, de forma que sea posible hablar de su divergencia. Obsérvese que, aun suponiendo que $k \in H_0^1(\Omega)$, no tiene por qué ocurrir que $\mu(k)\nabla k + B(k)$ esté en $L^1_{loc}(\Omega)^N$. El procedimiento habitual para conseguir dar un sentido distribucional a $\mu(k)\nabla k + B(k)$ consiste en imponer condiciones sobre el crecimiento de μ y B, pero precisamente en modelos de turbulencia suele desconocerse la ecuación exacta verificada por k. Así, nos interesan las funciones μ y B más generales posibles. Estas dos dificultades hacen conveniente introducir el concepto de solución renormalizada. En tercer lugar y como dificultad menor, cabe esperar que no sea inmediato el paso al límite en el término $\nabla\cdot(k\Phi'(Du))$ en los problemas aproximados.

Los resultados principales en el caso estacionario

En los Capítulos del 1 a 3 de esta Memoria, se presentan varios resultados de existencia, unicidad y regularidad de solución para el sistema (0.9) completado con condiciones de Dirichlet homogéneas

$$u = 0\,,\quad k = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega\,. \tag{0.11}$$

Las hipótesis de partida son las siguientes:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado, conexo y regular, con $N = 2$ ó 3.
- $\nu > 0$.
- $f \in H^{-1}$ ($f = f(x)$ es el campo medio de fuerzas exteriores que actúa sobre el sistema).

Φ, μ, y B son funciones que aparecen en el proceso de deducción de las EDP que rigen el comportamiento del fluido.

- $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) \mapsto \Phi(D) \in \mathbb{R}^N$ es C^1, $\Phi'(0) = 0$, $|\Phi'(D)| \leq$ Const. y $D \mapsto \Phi'(D) : D$ es convexa.

- $r \in \mathbb{R} \mapsto \mu(r) \in \mathbb{R}$ es C^0 y $\mu(r) \geq \mu_0 > 0$.

- $r \in \mathbb{R} \mapsto B(r) \in \mathbb{R}^N$ es C^0.

El primer resultado habla de la existencia de solución de (0.9):

Teorema 0.1 *Bajo las hipótesis anteriores, existe* $\{u, p, k\}$*, con* $u \in V$*,* $p \in L^2$ *y* $k \in \mathcal{L}$*, tal que:*

1. *El par* $\{u, p\}$ *es solución de la primera ecuación de* (0.9) *en el sentido de las distribuciones (solución débil).*

2. $k \geq 0$ *y es solución de la tercera ecuación de* (0.9) *en el sentido siguiente (solución renormalizada):*

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\beta(k)(\mu(k)\nabla k + B(k))) + \beta'(k)\nabla k \cdot (\mu(k)\nabla k + B(k)) \\ \quad + \beta(k)(u \cdot \nabla k) = \beta(k)\,(\nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u) \end{cases} \tag{0.12}$$

en $\mathcal{D}'(\Omega)$ *para cada* $\beta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ *con soporte compacto.*

Toda terna $\{u, p, k\}$ que verifique las condiciones anteriores será por definición una *solución débil-renormalizada* de (0.9), (0.11).

En la demostración de este resultado, se usa un buen número de argumentos diferentes. En primer lugar, el sistema (0.9) es aproximado mediante truncaturas, de manera que sea posible introducir soluciones aproximadas (cf. el sistema (1.5), en el Capítulo 1). A continuación, se deducen estimaciones "a priori" de las soluciones aproximadas $\{u^\varepsilon, p^\varepsilon, k^\varepsilon\}$ que permiten extraer subsucesiones "débilmente" convergentes (cf. el final de la sección 1.3.2). En tercer lugar, se comprueba que el límite débil u de las u^ε es, junto con alguna p, solución de la primera ecuación de (0.9). Esto se consigue re-escribiendo dicha ecuación como una inecuación variacional equivalente y aplicando un argumento de monotonía adecuado. Después, se prueba que u^ε converge de hecho "fuertemente" hacia u. Finalmente, en una quinta etapa, se demuestra que, para cada $M > 0$, las funciones "truncadas" $T_M(k^\varepsilon)$ también convergen "fuertemente". Aquí, se utiliza un argumento debido a P.L. Lions y F. Murat (cf. [17], [20]). Como consecuencia de esta propiedad de convergencia, el límite k de las funciones k^ε es solución de la tercera ecuación de (0.9) en el sentido antes especificado.

Dada la forma particular del segundo miembro de la ecuación de la energía, en el caso en que $B \equiv 0$, se pueden obtener mejores propiedades de regularidad para la solución. Más precisamente, se tiene el

Teorema 0.2 *Supongamos que, en las condiciones del teorema anterior,* $B \equiv 0$. *Entonces la solución* $\{u, p, k\}$ *que proporciona este resultado también verifica:*

$$\tilde{\mu}(k) \in \bigcap_{q<N'} W_0^{1,q}, \quad \nabla\tilde{\mu}(k) = \mu(k)\nabla k$$

y

$$\begin{cases} \int_\Omega \mu(k)\nabla k \cdot \nabla\phi + \int_\Omega (u \cdot \nabla k)\phi = \int_\Omega \left(\nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u\right)\phi \\ \forall\phi \in \mathcal{D}(\Omega) . \end{cases}$$

Cuando esto ocurre, se dice que $\{u, p, k\}$ es una *solución débil* de (0.9), (0.11). La demostración del teorema 0.2 reposa sobre la convergencia c.p.d. de ∇k^ε hacia ∇k (aquí, las k^ε y k se obtienen repitiendo la demostración del teorema 0.1) y sobre la re-escritura (1.45) del problema de Dirichlet satisfecho por k^ε.

En lo que se refiere a la unicidad de solución, tenemos el

Teorema 0.3 *Supongamos que, en el Teorema 0.2,* $B \equiv 0$ *y* $D \to \Phi'(D) : D$ *es globalmente lipschitziana. Entonces existe* $\nu_0 > 0$ *tal que, cuando* $\nu \geq \nu_0$, *hay a lo más una solución débil* $\{u, p, k\}$ *de* (0.9), (0.11) *con* $k \geq 0$ *(la presión es única salvo una constante aditiva).*

Para la demostración, se usan argumentos análogos a los que prueban la unicidad de solución de las EDP de Navier-Stokes en el caso estacionario y, también, las estimaciones $W^{1,q}$ para las soluciones de la EDP de Poisson (cf. [1]).

En el Capítulo 3, se presentan algunas variantes y generalizaciones de los teoremas 0.1, 0.2 y 0.3. En primer lugar, se considera el sistema

$$\begin{cases} -\nu\Delta u - \nabla \cdot D_2\Psi(k, \nabla u) + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f \,, \\ \nabla \cdot u = 0 \,, \\ -\nabla \cdot (a(x, k, \nabla k) + B(k)) + u \cdot \nabla k = \nu|\nabla u|^2 + D_2\Psi(k, \nabla u) : \nabla u \,. \end{cases} \tag{0.13}$$

Aquí $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ verifica las siguientes hipótesis:

1. a es una función de Carathéodory, i.e.

- $x \mapsto a(x,s,\xi)$ es medible para todo (s,ξ).
- $(s,\xi) \mapsto a(x,s,\xi)$ es continua c.p.d. en $x \in \Omega$.

2. $(a(x,s,\xi) - a(x,s,\xi')) \cdot (\xi - \xi') > 0$ para todo (s,ξ), (s,ξ') con $\xi \neq \xi'$, c.p.d. en $x \in \Omega$.

3. $a(x,s,0) = 0$ c.p.d. en $x \in \Omega$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

4. $|a(x,s,\xi)| \leq C_1|s| + C_2|\xi| + d(x)$ donde C_1, C_2 son constantes positivas y $d \in L^2$, para todo $(s,\xi) \in \mathbb{R}^{N+1}$ y c.p.d. en $x \in \Omega$.

5. $a(x,s,\xi) \cdot \xi \geq \mu_0|\xi|^2$ c.p.d. en Ω y para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$, donde μ_0 es un número real positivo.

Se supone que $\Psi : \mathbb{R} \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) \mapsto \mathbb{R}$ verifica lo siguiente:

1. $(s,D) \mapsto \Psi(s,D)$ es C^2 y $D \mapsto D_2\Psi(s,D) : D$ es convexa para cada $s \in \mathbb{R}$.

2. $|D_1D_2\Psi(s,D)| \leq C_3 + C_4|D|^{r-1}$ para constantes positivas C_3, C_4 y $r < 2$ si $N = 2$, $r < 4/3$ si $N = 3$.

3. $\Psi(s,0) = D_1\Psi(s,0) = D_2\Psi(s,0) = 0$.

El sistema se supone de nuevo completado con las mismas condiciones de contorno (0.11). Tenemos el

Teorema 0.4 *Bajo las hipótesis anteriores para Ψ y a y las mismas hipótesis que en el teorema 0.1 para el resto de los datos, existe una terna $\{u,p,k\}$, con $u \in V$, $p \in L^2$ y $k \in \mathcal{L}$, tal que:*

1. *El par $\{u,p\}$ es solución de la primera ecuación de (0.13) en el sentido de las distribuciones (solución débil).*

2. *$k \geq 0$ y es solución de la tercera ecuación de (0.13) en el sentido siguiente (solución renormalizada):*

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot (\beta(k)(a(k,\nabla k) + B(k))) + \beta'(k)\nabla k \cdot (a(k,\nabla k) + B(k)) \\ \quad + \beta(k)(u \cdot \nabla k) = \beta(k)\left(\nu|\nabla u|^2 + D_2\Psi(k,\nabla u) : \nabla u\right) \end{array} \right. \tag{0.14}$$

en $\mathcal{D}'(\Omega)$ para cada $\beta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ con soporte compacto.

La demostración es análoga a la del teorema 0.1. En segundo lugar, se prueba un resultado de existencia de solución débil (similar al teorema 0.2) que resulta válido cuando $B \not\equiv 0$:

Teorema 0.5 *Supongamos que, en las condiciones del teorema 0.1, $B \in W^{1,\infty}$ y $k\Phi'(\nabla u)$ es sustituido por $D_2\Psi(k, \nabla u)$, donde Ψ está en las condiciones precedentes. Entonces la solución $\{u, p, k\}$ que proporciona este resultado también verifica:*

$$\tilde{\mu}(k) \in \bigcap_{q<N'} W_0^{1,q}, \quad \nabla\tilde{\mu}(k) = \mu(k)\nabla k$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \mu(k)\nabla k \cdot \nabla\phi + \int_\Omega B(k) \cdot \nabla\phi + \int_\Omega (u \cdot \nabla k)\phi \\ \qquad \displaystyle = \int_\Omega \Big(\nu|\nabla u|^2 + D_2\Psi(k, \nabla u) : \nabla u\Big)\,\phi \qquad \forall\phi \in \mathcal{D}(\Omega)\,. \end{array} \right.$$

A continuación, se analiza la situación cuando las condiciones de contorno elegidas para completar (0.9) son constantes no homogéneas:

$$u = u_\Gamma\,, \quad k = k_\Gamma \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega\,, \tag{0.15}$$

Más concretamente, suponemos aquí que $u_\Gamma \in \mathbb{R}^N$, $k_\Gamma \in \mathbb{R}$ y $k_\Gamma \geq 0$. Se tiene el

Teorema 0.6 *Bajo las hipótesis del teorema 0.1, existe $\{u, p, k\}$, con $u - u_\Gamma \in V$, $p \in L^2$ y $k - k_\Gamma \in \mathcal{L}$, tal que:*

1. *El par $\{u, p\}$ es solución de la primera ecuación de (0.9) en el sentido de las distribuciones (solución débil).*
2. *$k \geq k_\Gamma$ y es solución de la tercera ecuación de (0.9) en el sentido siguiente:*

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot (\beta(k - k_\Gamma)(\mu(k)\nabla k + B(k))) + \beta'(k - k_\Gamma)\nabla k \cdot (\mu(k)\nabla k + B(k)) \\ \quad + \beta(k - k_\Gamma)(u \cdot \nabla k) = \beta(k - k_\Gamma)\,(\nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u) \end{array} \right.$$

en $\mathcal{D}'(\Omega)$ para cada $\beta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ con soporte compacto (se dice de nuevo que k es una solución renormalizada).

En cuarto lugar, se prueba un resultado de unicidad de solución en el caso en que B es como en el teorema 0.5 y, al mismo tiempo, $k\Phi'(\nabla u)$ es sustituido por $D_2\Psi(k, \nabla u)$, donde Ψ es como en el teorema 0.4:

Teorema 0.7 *Supongamos que, en las condiciones del teorema 0.5, se tiene además que* $B \in W^{1,\infty}(\mathbb{R};\mathbb{R}^N)$ *y*

$$|D_2\Psi(s,D) : D - D_2\Psi(s,D') : D'| \leq C|k| \cdot |D - D'|^r$$

$$\textit{para } 1 < r < \begin{cases} 2 & \textit{si} \quad N = 2\,, \\ 4/3 & \textit{si} \quad N = 3\,. \end{cases}$$

Entonces existen $\nu_0 > 0$ *y* $\beta_0 > 0$ *tales que, cuando* $\nu \geq \nu_0$ *y* $\|B'\|_{L^\infty} \leq \beta_0$*, existe a lo más una solución débil* $\{u, p, k\}$ *del sistema correspondiente con* $k \geq 0$ *(la presión es única salvo una constante aditiva).*

La demostración es análoga, aunque algo más complicada, a la demostración del Teorema 0.3. Finalmente, presentamos un resultado de unicidad en el que, en vez de imponer al coeficiente de viscosidad ν que sea "suficientemente grande", exigimos que el segundo miembro f posea norma $\|f\|_{H^{-1}}$ "suficientemente pequeña":

Teorema 0.8 *Supongamos que, en el teorema 0.1,* $B \equiv 0$ *y* $D \to \Phi'(D) : D$ *es globalmente lipschitziana. Entonces existe* $f_0 > 0$ *tal que, cuando* $\|f\|_{H^{-1}} \leq f_0$*, hay a lo más una solución débil* $\{u, p, k\}$ *de* (0.9) *con* $k \geq 0$ *(la presión es única salvo una constante aditiva).*

Los resultados principales en el caso de evolución

En los Capítulos 4 a 6 de esta Memoria, se presentan diversos resultados de existencia, unicidad y regularidad de solución para (0.10), completado con las condiciones iniciales

$$u|_{t=0} = u_0\,, \qquad k|_{t=0} = k_0 \quad \text{en} \quad \Omega \tag{0.16}$$

y las condiciones de contorno homogéneas

$$u = 0\,, \qquad k = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (0,T)\,. \tag{0.17}$$

Ahora, las hipótesis son las siguientes:

- Ω es un abierto acotado, conexo y regular de $\mathbb{R}^N$, con $N = 2$ ó $N = 3$. La variable t (el tiempo) varía en $(0,T)$ y $T > 0$.

- $\nu > 0$.

- $f \in L^2(H^{-1})$ ($f = f(x,t)$ se interpreta como el campo de fuerzas exteriores medio que actúa sobre el sistema).
- $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) \mapsto \Phi(D) \in \mathbb{R}^N$ es una función de clase C^1, $\Phi'(0) = 0$, $|\Phi'(D)| \leq$ Const. y $D \mapsto \Phi'(D){:}D$ es convexa.
- $r \in \mathbb{R} \mapsto B(r) \in \mathbb{R}^N$ es una función continua.
- $r \in \mathbb{R} \mapsto \mu(r) \in \mathbb{R}$ es continua y $\mu(r) \geq \mu_0 > 0$ para cada r.

Para el resultado principal de existencia, introducimos

$$\mathcal{L} = \{ \psi \in L^1(Q)\,;\; T_M(\psi) \in L^2(H_0^1) \quad \forall M > 0\,,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \iint_{n\leq|\psi|\leq 2n} |\nabla\psi|^2\,dx\,dt = 0\,\}$$

(cf. la Notación).

Teorema 0.9 *Supongamos que* $N = 2$, $u_0 - u_\Gamma \in H$ *y* $k_0 \in L^1(Q)$, *con* $k_0 \geq 0$. *Entonces existe* $\{u, p, k\}$, *con*

$$u \in L^2(V) \cap C^0(H)\,, \qquad p \in L^2(Q)\,, \qquad k \in \mathcal{L}\,,$$

tal que:

1. *El par* $\{u, p\}$ *es solución de las dos primeras ecuaciones de* (0.10) *junto con la primera de las condiciones iniciales de* (0.16) *en el sentido de las distribuciones (solución débil).*
2. $k \geq 0$ *y es solución de la ecuación de la energía de* (0.10) *y la segunda condición inicial de* (0.16) *en el sentido siguiente (solución renormalizada): Para cada función* $\beta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ *con soporte compacto, se tiene*

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t\widetilde{\beta}(k) - \nabla\cdot(\beta(k)(\mu(k)\nabla k + B(k))) \\ \quad +\beta'(k)\nabla k \cdot (\mu(k)\nabla k + B(k)) + \beta(k)\,(u\cdot\nabla k) \\ \quad = \beta(k)\,(\nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u) \qquad \text{en } \mathcal{D}'(Q)\,. \end{array} \right.$$

En particular, $\partial_t\widetilde{\beta}(k) \in L^1(L^1) + L^2(H^{-1})$ *y, para todo* $q < 2$, *se tiene que* $\widetilde{\beta}(k) \in C^0(W^{-1,q})$. *Además,*

$$\widetilde{\beta}(k)|_{t=0} = \widetilde{\beta}(k_0)\,.$$

Cuando esto ocurre, se dice que $\{u,p,k\}$ es una *solución débil-renormalizada* de (0.10), (0.16), (0.17).

La demostración del Teorema 4.1 necesita de nuevo un gran número de argumentos distintos: El método de compacidad para la existencia de soluciones aproximadas, técnicas "standard" de estimación "a priori" para u^ε, técnicas "no standard" para k^ε, un argumento de monotonía para el paso al límite en la primera EDP,... En particular, para demostrar que el límite k de las k^ε verifica la tercera EDP de (0.10) en el sentido renormalizado, probamos previamente que las "truncadas" $T_M(k^\varepsilon)$ convergen fuertemente en $L^2(H_0^1)$, recurriendo a un argumento que se debe a D. Blanchard y H. Redwane (cf. [5]).

Cuando $B \equiv 0$, es posible mejorar el teorema 0.9:

Teorema 0.10 *Bajo las hipótesis del teorema 0.9, supongamos $B \equiv 0$ y $k_0 \in L^\infty$. Entonces la solución $\{u,p,k\}$ proporcionada por el teorema 0.9 satisface*

$$\widetilde{\mu}(k) \in \bigcap_{q<2} L^q(W_0^{1,q}), \quad \nabla\widetilde{\mu}(k) = \mu(k)\nabla k,$$

$$\partial_t k \in L^1(L^1) + L^q(W^{-1,q}) \quad \textit{para todo} \quad q < 2$$

y

$$\begin{cases} \langle \partial_t k\,, \phi\rangle + \int_\Omega \mu(k)\nabla k\cdot\nabla\phi + \int_\Omega (u\cdot\nabla k)\,\phi \\ \quad = \int_\Omega \Big(\nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u):\nabla u\Big)\,\phi \quad \forall\phi\in\mathcal{D}(\Omega) \quad c.p.d.\ en\ (0,T). \end{cases}$$

En este caso, decimos que $\{u,p,k\}$ es una *solución débil* de (0.10), (0.16), (0.17). En lo que se refiere a la unicidad de solución, tenemos:

Teorema 0.11 *Supongamos que $N=2$ ó $N=3$, se verifica el resto de hipótesis del teorema 4.1, $k\mapsto\mu(k)$ es localmente lipschitziana, $B\equiv 0$ y*

$$D \mapsto \Phi(D) \ \ \textit{es} \ \ C^2, \quad \textit{con} \ \ |\Phi''(D)| \le \textit{Const.}$$

Sean $u_0 \in V$ y $k_0 \in W^{2,\infty}\cap H_0^1$, con $k_0 \ge 0$. Para cada $i=1,2$, sea $\{u_i,p_i,k_i\}$ una solución (débil) de (0.10), (0.16), (0.17), *con $u_i \in L^\infty(W^{1,\infty})$ y supongamos que, por ejemplo, $u_2 \in L^2(W^{2,r})$ donde $r > N$ (basta $r \ge 3$ si $N = 3$). Entonces $\{u_1,\nabla p_1,k_1\}$ y $\{u_2,\nabla p_2,k_2\}$ deben coincidir.*

El Capítulo 6 contiene un buen número de variantes y generalizaciones de los resultados precedentes, cuyas demostraciones son similares (aunque técnicamente más complicadas). Así, se considera en primer lugar el sistema

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u - \nabla \cdot D_2\Psi(k, \nabla u) + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f\,, \\ \nabla \cdot u = 0\,, \\ \partial_t k - \nabla \cdot (a(\nabla k) + B(k)) + u \cdot \nabla k = \nu |\nabla u|^2 + D_2\Psi(k, \nabla u) : \nabla u\,. \end{cases} \tag{0.18}$$

Aquí, $a : \Omega \times (0,T) \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ verifica las siguientes hipótesis:

1. a es una función de Carathéodory, i.e.
   - $x \mapsto a(x,t,\xi)$ es medible para todo (t,ξ).
   - $(t,\xi) \mapsto a(x,t,\xi)$ es continua para x c.p.d.
2. $(a(x,t,\xi) - a(x,t,\xi')) \cdot (\xi - \xi') > 0$ para todo ξ, ξ' con $\xi \neq \xi'$, y c.p.d. en $(x,t) \in Q$.
3. $a(x,t,0) = 0$ c.p.d. en $(x,t) \in Q$.
4. $|(a(x,t,\xi)| \leq C|\xi| + d(x,t)$, c.p.d. en $(x,t) \in Q$ y para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$, donde C es una constante positiva y $d \in L^2(Q)$.
5. $a(x,t,\xi) \cdot \xi \geq \mu_0 |\xi|^2$ c.p.d. en Q y para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$, donde μ_0 es un número real positivo.

Por otra parte, supondremos que $\Psi : \mathbb{R} \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) \mapsto \mathbb{R}$ verifica:

1. $(s,D) \mapsto \Psi(s,D)$ es C^2 y $D \mapsto D_2\Psi(s,D) : D$ es convexa para cada $s \in \mathbb{R}$
2. $|D_1 D_2 \Psi(s,D)| \leq C_3 + C_4 |D|^{r-1}$ para constantes positivas C_3, C_4 y $r < 4/3$.
3. $\Psi(s,0) = D_1\Psi(s,0) = D_2\Psi(s,0) = 0$.

Teorema 0.12 *Bajo las hipótesis anteriores para Ψ y a y las mismas hipótesis que en el teorema 0.9 para el resto de los datos (recordemos en particular que $N = 2$), existe $\{u,p,k\}$, con*

$$u \in L^2(V) \cap C^0(H)\,, \qquad p \in L^2(Q)\,, \qquad k \in \mathcal{L}\,,$$

tal que:

1. *El par $\{u,p\}$ es solución de las dos primeras ecuaciones de (0.18) junto con la primera de las condiciónes iniciales de (0.16) en el sentido de las distribuciones (solución débil).*

2. $k \geq 0$ *y es solución de la ecuación de la energía de* (0.18) *y la segunda condición inicial de* (0.16) *en el sentido siguiente (solución renormalizada): Para toda* $\beta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ *con soporte compacto, se tiene*

$$\begin{cases} \partial_t\widetilde{\beta}(k) - \nabla \cdot (\beta(k)(a(\nabla k) + B(k))) \\ \quad +\beta'(k)\nabla k \cdot (a(\nabla k) + B(k)) + \beta(k)\,(u \cdot \nabla k) \\ \quad = \beta(k)\,(\nu|\nabla u|^2 + D_2\Psi(k, \nabla u) : \nabla u) \qquad en \;\; \mathcal{D}'(Q)\,. \end{cases}$$

En particular, $\partial_t\widetilde{\beta}(k) \in L^1(L^1) + L^2(H^{-1})$ *y, para todo* $q < 2$*, se tiene* $\widetilde{\beta}(k) \in C^0(W^{-1,q})$*. Además,*

$$\widetilde{\beta}(k)|_{t=0} = \widetilde{\beta}(k_0)\,.$$

Se puede demostrar un resultado análogo al teorema 0.10 cuando $B \not\equiv 0$, a condición de que sea $B \in W^{1,\infty}$ y con $k\Phi'(\nabla u)$ sustituido por $D_2\Psi(k, \nabla u)$, donde Ψ está en las condiciones del teorema anterior:

Teorema 0.13 *Supongamos que, en las condiciones del teorema 0.9, se tiene* $B \in W^{1,\infty}$ *y* $D_2\Psi(k, \nabla u)$ *en lugar de* $k\Phi'(\nabla u)$*, donde* Ψ *cumple las condiciones de la sección precedente. Entonces la solución* $\{u, p, k\}$ *proporcionada por teorema 0.9 satisface*

$$\widetilde{\mu}(k) \in \bigcap_{q<2} L^q(W_0^{1,q})\,, \quad \nabla\widetilde{\mu}(k) = \mu(k)\nabla k\,,$$

$$\partial_t k \in L^1(L^1) + L^q(W^{-1,q}) \quad \forall\, q < 2$$

y

$$\begin{cases} \langle \partial_t k\,, \phi \rangle + \int_\Omega \mu(k)\nabla k \cdot \nabla\phi + \int_\Omega B(k) \cdot \nabla\phi + \int_\Omega (u \cdot \nabla k)\,\phi \\ \quad = \int_\Omega \Big(\nu|\nabla u|^2 + D_2\Psi(k, \nabla u) : \nabla u\Big)\,\phi \quad \forall\phi \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \qquad c.p.d. \;\; en \;\; (0, T)\,. \end{cases}$$

También es posible demostrar la existencia de solución débil-renormalizada cuando (0.10) se completa con las condiciones de contorno constantes no homogéneas

$$u = u_\Gamma\,, \quad k = k_\Gamma \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (0, T)\,. \tag{0.19}$$

Supondremos que u_Γ y k_Γ son constantes y que $k_\Gamma \geq 0$.

Teorema 0.14 *Supongamos que* $N = 2$*,* $u_0 \in V$ *y* $k_0 \in L^1(Q)$*, con* $k_0 \geq k_\Gamma$*. Entonces existe* $\{u, p, k\}$*, con*

$$u - u_\Gamma \in L^2(V) \cap C^0(H)\,, \qquad p \in L^2(Q)\,, \qquad k - k_\Gamma \in \mathcal{L}\,,$$

tal que:

1. *El par* $\{u, p\}$ *es solución de las dos primeras ecuaciones de* (0.10) *junto con la primera de las condiciones iniciales de* (0.16) *en el sentido de las distribuciones (solución débil).*

2. $k \geq k_\Gamma$ *y es solución de la ecuación de la energía de* (0.10) *y la segunda condición inicial de* (0.16) *en el sentido siguiente (solución renormalizada): Para toda* $\beta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ *con soporte compacto, se tiene*

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{\beta}(k - k_\Gamma) - \nabla \cdot (\beta(k - k_\Gamma)(\mu(k)\nabla k + B(k))) \\ \quad +\beta'(k - k_\Gamma)\nabla k \cdot (\mu(k)\nabla k + B(k)) + \beta(k - k_\Gamma)\,(u \cdot \nabla k) \\ \quad = \beta(k - k_\Gamma)\,(\nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u) \qquad en\ \ \mathcal{D}'(Q)\,. \end{cases}$$

En particular, $\partial_t \widetilde{\beta}(k - k_\Gamma) \in L^1(L^1) + L^2(H^{-1})$ *y, para todo* $q < 2$*, se tiene* $\widetilde{\beta}(k - k_\Gamma) \in C^0(W^{-1,q})$*. Además,*

$$\widetilde{\beta}(k - k_\Gamma)|_{t=0} = \widetilde{\beta}(k_0 - k_\Gamma)\,.$$

En la sección 6.3, consideramos el caso particular en que Ω es un dominio cilíndrico de la forma $\omega \times (0, L)$ y la tercera componente u_3 de u es cero. Desde el punto de vista de las aplicaciones, esto corresponde al modelado de un flujo tridimensional en régimen turbulento cuyo campo medio de velocidades es bidimensional. Sean $V(\omega)$ y $H(\omega)$ respectivamente los espacios V y H referidos a ω. Las condiciones en que se intenta resolver (0.10), (0.16), (0.17) son las siguientes:

- El dominio es de la forma $\Omega = \omega \times (0, L)$, donde $\omega \subset \mathbb{R}$ es un abierto acotado, conexo y regular.

- La tercera componente de f es nula, $f_i = f_i(x_1, x_2, t)$ para $i = 1, 2$ y $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\omega))$.

- La tercera componente de u_0 es nula y $u_0 \in H(\omega)$.

- Ahora, Φ está definida en $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$: $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \mapsto \Phi(D) \in \mathbb{R}$.

Se desea encontrar una solución $\{u, p, k\}$ para la cual $u_i = u_i(x_1, x_2, t)$, $u_3 \equiv 0$ y $p = p(x_1, x_2, t)$. Pongamos

$$M_3(k) = \frac{1}{L}\int_0^L k(x_1, x_2, x_3, t)\,dx_3\,, \qquad \nabla' = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})\,.$$

Se trata entonces de resolver

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu\Delta' u - \nabla' \cdot (M_3(k)\Phi'(\nabla u)) + (u\cdot\nabla')u + \nabla' p = f\,, \\ \nabla'\cdot u = 0\,, \\ \partial_t k - \nabla\cdot(\mu(k)\nabla k + B(k)) + u\cdot\nabla' k = \nu|\nabla u|^2 + M_3(k)\Phi'(\nabla u) : \nabla u\,. \end{cases} \tag{0.20}$$

Aquí, $u = \{u_1, u_2\}$. Las condiciones iniciales son

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{en } \omega, \qquad k|_{t=0} = k_0 \quad \text{en } \Omega \tag{0.21}$$

y las condiciones de contorno

$$u = 0 \quad \text{sobre } \partial\omega\times(0,T)\,, \qquad k = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega\times(0,T)\,.$$

Teorema 0.15 *Supongamos* $u_0 \in H(\omega)$ *y* $k_0 \in L^1(\Omega)$, *con* $k_0 \geq 0$. *Entonces existe* $\{u, p, k\}$, *con*

$$u \in L^2(V(\omega)) \cap C^0(H(\omega))\,, \qquad p \in L^2(Q)\,, \qquad k \in \mathcal{L}\,,$$

tal que:

1. *El par* $\{u,p\}$ *es solución de las dos primeras ecuaciones de* (0.20) *junto con la primera de las condiciones iniciales de* (0.21) *en el sentido de las distribuciones (solución débil).*

2. $k \geq 0$ *y es solución de la ecuación de la energía de* (0.20) *y la segunda condición inicial de* (0.21) *en el sentido siguiente (solución renormalizada): Para toda* $\beta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ *con soporte compacto, se tiene*

$$\begin{cases} \partial_t\widetilde{\beta}(k) - \nabla\cdot(\beta(k)(\mu(k)\nabla k + B(k))) \\ \quad +\beta'(k)\nabla k\cdot(\mu(k)\nabla k + B(k)) + \beta(k)\,(u\cdot\nabla' k) \\ \quad = \beta(k)\,(\nu|\nabla u|^2 + M_3(k)\Phi'(\nabla u):\nabla u) \qquad en \ \ \mathcal{D}'(Q)\,. \end{cases}$$

En particular, $\partial_t\widetilde{\beta}(k) \in L^1(L^1) + L^2(H^{-1})$ *y, para todo* $q < 2$, *se tiene* $\widetilde{\beta}(k) \in C^0(W^{-1,q})$. *Además,*

$$\widetilde{\beta}(k)|_{t=0} = \widetilde{\beta}(k_0)\,.$$

Finalmente, en la sección 6.5 se presenta un resultado de unicidad que constituye una generalización del teorema 0.11 al caso en que $B \in W^{2,\infty}$ y $k\Phi'(\nabla u)$ se sustituye por un término $D_2\Psi(k,\nabla u)$ en las mismas condiciones que en el Teorema 0.12:

Teorema 0.16 *Supongamos que, cumpliéndose el resto de condiciones del teorema 0.11, se tiene $B \in W^{2,\infty}$ y $D_2\Psi(k, \nabla u)$, donde Ψ es como en el teorema 0.12. Supongamos además que*

- $D_1 D_2 \Psi \in C^1$ *y sus derivadas primeras están uniformemente acotadas,*
- $D \mapsto D_1 D_2 \Psi(k, D) : D$ *es globalmente lipschitziana.*

Entonces las soluciones $\{u_1, \nabla p_1, k_1\}$ *y* $\{u_2, \nabla p_2, k_2\}$ *deben coincidir.*

Algunos comentarios sobre los resultados obtenidos

En la presente Memoria, se han resuelto ciertos problemas no lineales con origen en Mecánica de fluidos. Para ello, debido a las dificultades encontradas, se ha recurrido en parte al concepto de solución renormalizada. Las soluciones renormalizadas de las EDP fueron introducidas por R. DiPerna y P.L. Lions en [12], en el contexto de la ecuación de Boltzmann. Han sido usadas en relación con algunas EDP elípticas (respectivamente, parabólicas) no lineales por P. Benilan et al. [3], L. Boccardo et al. [8] y P.L. Lions y F. Murat [17], [20] (respectivamente por D. Blanchard y H. Redwane [5]). Resultados de existencia de solución débil-renormalizada para problemas similares a (0.1) y (0.2) han sido obtenidos por R. Lewandowski [15] (veáse también [2]). Todos los resultados enunciados en los dos apartados precedentes son originales. Los más significativos aparecerán en [10] y [11].

De todas las cuestiones que quedan pendientes, probablemente las dos más interesantes son las siguientes:

- Tanto en el caso estacionario como en el de evolución, sería muy deseable averiguar si la unicidad de solución débil-renormalizada es posible. En caso afirmativo, existe una interpretación muy interesante del resultado en términos físicos.

- El problema de evolución (0.10), (0.16), (0.17) sólo puede ser resuelto cuando $N = 2$ (un resultado un poco mejor es el teorema 0.15, donde $N = 3$ pero se impone $u_3 = 0$). Por tanto, la existencia de solución débil-renormalizada para este problema es una cuestión abierta.

Capítulo 1

Resultados de existencia en el caso estacionario

1.1 Planteamiento del problema

A continuación, consideramos el siguiente sistema formado por las N ecuaciones que describen el movimiento del fluido en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, la condición de incompresibilidad y una ecuación escalar relativa a la incógnita k.

$$\begin{cases} -\nu\Delta u - \nabla\cdot(k\Phi'(\nabla u)) + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f\,, \\ \nabla\cdot u = 0\,, \\ -\nabla\cdot(\mu(k)\nabla k + B(k)) + u\cdot\nabla k = \nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u\,. \end{cases} \tag{1.1}$$

Como vemos, se trata de una versión simplificada de (0.1) que tomamos por comodidad en los cálculos, pero en la que se mantienen todas los dificultades del problema inicial. Nótese que $|Du|^2 = 2|\nabla u|^2$, $\Phi'(Du) : Du = \Phi'(Du) : \nabla u$ y el término $|k|^{1/2}k\psi^0(Du)$ con las hipótesis que suelen ser habituales ($D \mapsto \psi^0(D)$ es continua y $0 < \psi_- \leq \psi^0(D) \leq \psi_+$ para constantes ψ_- y ψ_+ dadas) no plantea nuevos problemas.

Para fijar ideas, recurriremos a la terminología usual en turbulencia. Así pues, llamaremos a la primera (resp. tercera) ecuación de (1.1) ecuación de movimiento (resp. de la energía) y a las incógnitas u, p y k campo de velocidades medio, presión media y energía cinética turbulenta, respectivamente (si hubiésemos adoptado la óptica de la Mecánica no Newtoniana, deberíamos hablar de campo de velocidades, presión y temperatura, respectivamente).

Las hipótesis son las siguientes :

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto, acotado, conexo y regular, con $N = 2$ ó 3.
- $\nu > 0$.
- $f \in H^{-1}$ ($f = f(x)$ es el campo medio de fuerzas exteriores que actúa sobre el sistema).

Φ, μ, y B son funciones que aparecen en el proceso de deducción de las EDP que rigen el comportamiento del fluido.

- $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) \mapsto \Phi(D) \in \mathbb{R}^N$ es C^1, $\Phi'(0) = 0$, $|\Phi'(D)| \leq$ Const. y $D \mapsto \Phi'(D) : D$ es convexa.
- $r \in \mathbb{R} \mapsto \mu(r) \in \mathbb{R}$ es C^0 y $\mu(r) \geq \mu_0 > 0$.
- $r \in \mathbb{R} \mapsto B(r) \in \mathbb{R}^N$ es C^0.

Completamos el problema añadiendo a (1.1) condiciones de contorno de tipo Dirichlet:

$$u = 0\,, \quad k = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega\,. \tag{1.2}$$

Nota:

De la hipótesis de convexidad hecha sobre la función $D \mapsto \Phi'(D) : D$, podemos deducir que es una función localmente lipschitziana. También, $D \mapsto \Phi(D)$ es convexa, de donde

$$(\Phi'(D_1) - \Phi'(D_2)) : (D_1 - D_2) \geq 0\,, \quad \forall D_1, D_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$$

y, en particular,

$$\Phi'(D) : D \geq 0\,, \quad \forall D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N). \tag{1.3}$$

1.2 El resultado principal

Definimos

$$\mathcal{L} = \{\, \psi \in L^1\,;\; T_M(\psi) \in H_0^1 \quad \forall M > 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{n \leq |\psi| \leq 2n} |\nabla\psi|^2\, dx = 0 \,\}$$

Teorema 1.1 *Bajo las hipótesis anteriores, existe* $\{u, p, k\}$, *con* $u \in V$, $p \in L^2$ *y* $k \in \mathcal{L}$, *tal que:*

1. *El par* $\{u, p\}$ *es solución de la primera ecuación de* (1.1) *en el sentido de las distribuciones (solución débil).*

2. $k \geq 0$ *y es solución de la tercera ecuación de* (1.1) *en el sentido siguiente (solución renormalizada):*

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\beta(k)(\mu(k)\nabla k + B(k))) + \beta'(k)\nabla k \cdot (\mu(k)\nabla k + B(k)) \\ \quad + \beta(k)(u \cdot \nabla k) = \beta(k)\left(\nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u\right) \end{cases} \tag{1.4}$$

en $\mathcal{D}'(\Omega)$ *para cada* $\beta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ *con soporte compacto.*

Toda terna $\{u, p, k\}$ que verifique las condiciones anteriores será por definición una *solución débil-renormalizada* de (1.1).

Nota:

En las consideraciones que siguen, admitiremos que $\beta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ y $\operatorname{sop}\beta \subset [-M, M]$. Veamos que si $k \in \mathcal{L}$ y β es como antes todos los términos de (1.4) son verdaderamente distribuciones. En efecto, teniendo en cuenta que $\operatorname{sop}\beta \subset [-M, M]$, podemos re-escribir cada sumando del modo siguiente:

(i) $\beta(k)\mu(k)\nabla k = \beta(T_M(k))\mu(T_M(k))\nabla T_M(k) \in L^2(\Omega)^N$ (ya que los primeros factores se encuentran en $L^\infty(\Omega)$). Luego

$$-\nabla \cdot (\beta(k)\mu(k)\nabla k) \in H^{-1}.$$

(ii) $\beta(k)B(k) = \beta(T_M(k))B(T_M(k)) \in L^\infty(\Omega)^N \cap H^1(\Omega)^N$. Por tanto

$$-\nabla \cdot (\beta(k)B(k)) \in L^2.$$

(iii) $\beta'(k)\nabla k \cdot \mu(k)\nabla k = \beta'(T_M(k))\mu(T_M(k))|\nabla(T_M(k))|^2 \in L^1$.

(iv) $\beta'(k)\nabla k \cdot B(k) = \beta'(T_M(k))\nabla(T_M(k)) \cdot B(T_M(k)) \in L^2$.

(v) $\beta(k)(u \cdot \nabla k) = \beta(T_M(k))(u \cdot \nabla T_M(k)) \in L^1$ (al menos; de hecho, u es siempre "mejor" que L^2; cf. más adelante).

(vi) $\nu\beta(k)|\nabla u|^2 = \nu\beta(T_M(k))|\nabla u|^2 \in L^1$.

(vii) $\beta(k)k\Phi'(\nabla u) : \nabla u = \beta(T_M(k))T_M(k)\Phi'(\nabla u) : \nabla u \in L^2$.

Nota:

En principio, (1.4) es una igualdad en $\mathcal{D}'(\Omega)$. No obstante, dado que todos los términos que aparecen (salvo posiblemente el tercero de ellos) son realmente funciones de L^1, deducimos:

- Si k es solución renormalizada en el sentido de (1.4) y β está en las condiciones precedentes, entonces $-\nabla \cdot (\beta(k)\mu(k)\nabla k) \in L^1$.
- En tales condiciones, las igualdades (1.4) han de cumplirse en el sentido de L^1, es decir c.p.d. en Ω.

Nota:

Para obtener la expresión (1.4), lo que se hace es partir de la tercera ecuación de (1.1), multiplicarla por $\beta(k)$ (con β arbitraria pero en las condiciones precedentes) y efectuar cálculos formales.

1.3 Demostración del teorema 1.1

En lo que sigue, C representa una constante que depende de N, Ω y quizás de los demás datos del problema. Cuando queramos insistir en la dependencia de C respecto de Ω (por ejemplo) pondremos $C(\Omega)$. Dividiremos la demostración del teorema en seis etapas.

1.3.1 Primera etapa: Introducción de una familia de aproximaciones

Para cada $\varepsilon > 0$, consideramos la siguiente aproximación de (1.1):

$$\left\{\begin{array}{l} -\nu\Delta u^\varepsilon - \nabla\cdot(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)_+\Phi'(\nabla u^\varepsilon)) + (u^\varepsilon\cdot\nabla)u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = f\,, \\ \nabla\cdot u^\varepsilon = 0\,, \\ -\nabla\cdot(\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon + B_\varepsilon(k^\varepsilon)) + u^\varepsilon\cdot\nabla k^\varepsilon = T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon)\,. \end{array}\right. \tag{1.5}$$

Donde hemos usado la siguiente notación:

$$\tau^\varepsilon = \nu\nabla u^\varepsilon + T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)_+\Phi'(\nabla u^\varepsilon)\,, \quad \mu_\varepsilon = \mu\circ T_{\frac{1}{\varepsilon}}\,, \quad B_\varepsilon = B\circ T_{\frac{1}{\varepsilon}}\,.$$

Estas ecuaciones se han de verificar en Ω, junto con condiciones homogéneas de tipo Dirichlet

$$u^\varepsilon = 0, \quad k^\varepsilon = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega\,. \tag{1.6}$$

La existencia de una terna $\{u^\varepsilon, p^\varepsilon, k^\varepsilon\}$ que satisface (1.5), (1.6) puede establecerse (por ejemplo) usando un método de Galerkin.

Sea $\{w_m\}_{m\geq 1}$ una base de V y sea V^m el espacio generado por $\{w_1, w_2, ...w_m\}$. Sea $\{\varphi_m\}_{m\geq 1}$ una base de $H_0^1(\Omega)$ y W^m el espacio generado por $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_m\}$. Para cada $m \geq 1$ buscaremos un par $\{u^m, k^m\}$ que es solución aproximada de (1.5), (1.6) en en el sentido siguiente:

$$u^m = \sum_{i=1}^m \xi_{i,m} w_i, \quad k^m = \sum_{j=1}^m \zeta_{j,m}\varphi_j, \quad \xi_{i,m},\, \zeta_{j,m} \in \mathbb{R}\,,$$

$$\begin{cases} \nu(\nabla u^m, \nabla v^m) + (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^m)_+\Phi'(\nabla u^m), \nabla v^m) + ((u^m\cdot\nabla)u^m, v^m) = \langle f, v^m\rangle\,, \\ (\mu_\varepsilon(k^m)\nabla k^m, \nabla\psi^m) + (B_\varepsilon(k^m), \nabla\psi^m) + (u^m\cdot\nabla k^m, \psi^m) \\ \qquad = (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^m : \nabla u^m), \psi^m) \\ \forall\, v^m \in V^m\,, \forall\, \psi^m \in W^m \end{cases} \tag{1.7}$$

(como suele ser habitual en el contexto de las EDP de Navier-Stokes y sus variantes, en primera instancia la presión "desaparece" de la formulación del problema).

Existencia de solución de (1.7)

Aplicaremos el siguiente

Lema 1.2 *Sea X un espacio de Hilbert de dimensión finita con producto escalar $[\ldots]$ y norma $[.]$. Sea $P : X \mapsto X$ continua, tal que $[P(\xi), \xi] > 0$ para cada $\xi \in X$ con norma $[\xi] = k > 0$. Entonces existe $\xi \in X$, con $[\xi] \leq k$, tal que $P(\xi) = 0$.*

Este resultado es bien conocido. Se trata de una consecuencia casi inmediata del teorema de Brower (cf. por ejemplo [16]). Consideremos el espacio $X = V^m \times W^m$, cuya dimensión es $2m$, dotado del producto escalar $[.,.]$ definido como sigue

$$[\{u^m, \varphi^m\}, \{v^m, \psi^m\}] = ((u^m, v^m)) + ((\varphi^m, \psi^m))\,.$$

Sea $P = P_m : X \mapsto X$, la aplicación definida por las igualdades

$$\begin{aligned}
&[P_m\{u^m, k^m\}, \{v^m, \psi^m\}] = \nu(\nabla u^m, \nabla v^m) + (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^m)_+ \Phi'(\nabla u^m), \nabla v^m) \\
&\quad +((u^m \cdot \nabla)u^m, v^m) - \langle f, v^m\rangle + (\mu_\varepsilon(k^m)\nabla k^m, \nabla\psi^m) + (B_\varepsilon(k^m), \nabla\psi^m) \\
&\quad +(u^m \cdot \nabla k^m, \psi^m) - (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^m : \nabla u^m), \psi^m) \qquad \forall v^m \in V^m \,, \forall \psi^m \in W^m \,.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

P_m está bien definida y es continua. Además

$$\begin{aligned}
&[P_m\{u^m, k^m\}, \{u^m, k^m\}] = \nu\|u^m\|^2 + (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^m)_+ \Phi'(\nabla u^m), \nabla u^m) - \langle f, u^m\rangle \\
&\quad +(\mu_\varepsilon(k^m)\nabla k^m, \nabla k^m) - (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^m : \nabla u^m), k^m) \\
&\quad \geq \nu\|u^m\|^2 - (C_\nu\|f\|^2_{H^{-1}} + \frac{\nu}{2}\|u^m\|^2) + \frac{\mu_0}{2}\|k^m\|^2 - C(\varepsilon) \\
&\quad = \frac{\nu}{2}\|u^m\|^2 + \frac{\mu_0}{2}\|k^m\|^2 - C(\varepsilon) \,,
\end{aligned} \tag{1.9}$$

que será ≥ 0 si tomamos $\|u^m\|$ y $\|k^m\|$ suficientemente grandes. Aplicando el lema 1.2 deducimos que existe al menos una solución de (1.7). Se observa, además que este argumento proporciona soluciones $\{u^m, k^m\}$ que están acotadas (en $V \times H_0^1$) por una constante que puede depender de ε pero es independiente de m. Esto se va a probar de nuevo en el apartado que sigue.

Estimaciones "a priori"

Vamos a demostrar que

$$\nu \int_\Omega |\nabla u^m|^2 + \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^m)_+ \Phi'(\nabla u^m) : \nabla u^m \leq C \,. \tag{1.10}$$

En particular, tendremos

$$\|u^m\| \leq C \,. \tag{1.11}$$

En efecto, tomando en la primera ecuación de (1.7) $v^m = u^m$ y teniendo en cuenta que $((u^m \cdot \nabla)u^m, u^m) = 0$, se obtiene:

$$\nu(\nabla u^m, \nabla u^m) + (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^m)_+ \Phi'(\nabla u^m), \nabla u^m) = \langle f, u^m\rangle \,,$$

de donde

$$\nu\|u^m\|^2 + \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^m)_+ \Phi'(\nabla u^m) : \nabla u^m \leq \|f\|_{H^{-1}}\|u^m\| \,. \tag{1.12}$$

Teniendo en cuenta que $\Phi'(\nabla u^m):\nabla u^m \geq 0$, resulta que $\nu\|u^m\| \leq \|f\|_{H^{-1}}$, y se deduce (1.10).

En segundo lugar, vamos a probar que

$$\|k^m\| \leq C(\varepsilon) \tag{1.13}$$

Ahora, en la segunda ecuación de (1.7) tomamos $\psi^m = k^m$. Puesto que $(u^m \cdot \nabla k^m, k^m)$ se anula, tenemos:

$$(\mu_\varepsilon(k^m)\nabla k^m, \nabla k^m) + (B_\varepsilon(k^m), \nabla k^m) = (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^m : \nabla u^m), k^m), \tag{1.14}$$

Introduciendo las funciones

$$\tilde{B}_i^\varepsilon(r) = \int_0^r B_i(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(s))\,ds \quad \text{y} \quad \tilde{B}^\varepsilon = (\tilde{B}_1^\varepsilon, \tilde{B}_2^\varepsilon, ..., \tilde{B}_N^\varepsilon),$$

podemos expresar el segundo sumando de (1.14) como sigue:

$$(B_\varepsilon(k^m), \nabla k^m) = \int_\Omega \nabla \cdot \tilde{B}^\varepsilon(k^m) = \int_{\partial\Omega} \tilde{B}^\varepsilon(k^m) \cdot \mathbf{n}\, d\Gamma = 0\,.$$

En consecuencia, puesto que $\mu_\varepsilon(k^m) \geq \mu_0$,

$$\mu_0\|k^m\|^2 \leq \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^m : \nabla u^m)k^m$$

y, aplicando la desigualdad de Young,

$$\mu_0\|k^m\|^2 \leq C|T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^m : \nabla u^m)|^2 + \frac{\mu_0}{2C_0^2}|k^m|^2,$$

donde C_0 es la constante de la desigualdad de Poincaré: $|\varphi| \leq C_0\|\varphi\|\ \forall\varphi \in H_0^1$. Por tanto,

$$\mu_0\|k^m\|^2 \leq C(\varepsilon) + \frac{\mu_0}{2}\|k^m\|^2,$$

con lo que obtenemos (1.13).

Comentarios sobre el paso al límite en (1.7)

Teniendo en cuenta las estimaciones "a priori" y extrayendo subsucesiones si fuera necesario (denotando éstas con el mismo superíndice), para algunas $u^\varepsilon \in V$, $k^\varepsilon \in H_0^1$, ha de tenerse:

$$\begin{array}{ll} u^m \rightarrow u^\varepsilon & \text{en } V\text{-débil}, \\ u^m \rightarrow u^\varepsilon & \text{en } H \text{ y c.p.d.}, \\ k^m \rightarrow k^\varepsilon & \text{en } H_0^1\text{-débil}, \\ k^m \rightarrow k^\varepsilon & \text{en } L^2 \text{ y c.p.d.} \end{array}$$

El paso al límite en la ecuación de la energía de (1.7) no ofrece problemas. En el caso de la ecuación de movimiento, es posible pero no inmediato, ya que en el término $(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^m)_+\Phi'(\nabla u^m), \nabla v)$ desconocemos si la convergencia débil de $\Phi'(\nabla u^m)$ es hacia $\Phi'(\nabla u^\varepsilon)$. El procedimiento a seguir para demostrar que esto es cierto es similar al que el que usaremos más adelante, cuando $\varepsilon \to 0$, en (1.5)–(1.6) (cf. el apartado 1.3.3). Por tanto, omitimos aquí el argumento. Se llega a la conclusión de que, para cada $\varepsilon > 0$, existe un par $\{u^\varepsilon, k^\varepsilon\} \in V \times H_0^1(\Omega)$ tal que:

$$\begin{cases} \nu(\nabla u^\varepsilon, \nabla v) + (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)_+\Phi'(\nabla u^\varepsilon), \nabla v) + ((u^\varepsilon \cdot \nabla)u^\varepsilon, v) = \langle f, v\rangle\,, \\ (\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon, \nabla\psi) + (B_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla\psi) + (u^\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon, \psi) = (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon), \psi) \\ \forall v \in V\,,\ \forall \psi \in H_0^1(\Omega)\,. \end{cases} \tag{1.15}$$

Se tiene que $k^\varepsilon \geq 0$

En efecto, tomando como función "test" $k_-^\varepsilon = \max(-k^\varepsilon, 0)$ en la ecuación de la energía de (1.5), se obtiene:

$$\int_\Omega \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon \cdot \nabla k_-^\varepsilon + \int_\Omega B_\varepsilon(k^\varepsilon)\cdot\nabla k_-^\varepsilon \\ + \int_\Omega (u^\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon)k_-^\varepsilon = \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon)k_-^\varepsilon\,.$$

Veamos el comportamiento de cada término:

$$\int_\Omega \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon \cdot \nabla k_-^\varepsilon = -\int_\Omega \mu_\varepsilon(k_-^\varepsilon)|\nabla k_-^\varepsilon|^2 \leq -\mu_0\int_\Omega |\nabla k_-^\varepsilon|^2 \leq -\mu_0 C_0 |k_-^\varepsilon|^2\,.$$

Procediendo como para obtener (1.13), se llega a que:

$$\int_\Omega B_\varepsilon(k^\varepsilon)\cdot\nabla k_-^\varepsilon = \int_\Omega \nabla\cdot\widetilde{B}^\varepsilon(k_-^\varepsilon) = 0\,.$$

En tercer lugar,

$$\int_\Omega (u^\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon)k_-^\varepsilon = -\int_\Omega (u^\varepsilon \cdot \nabla k_-^\varepsilon)k_-^\varepsilon = 0\,.$$

Puesto que $\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon \geq 0$, tenemos que

$$\int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon)k_-^\varepsilon \geq 0\,.$$

Así pues, $k_-^\varepsilon = 0$ y $k^\varepsilon \geq 0$ c.p.d. en Ω. Desde este momento, podemos escribir que $T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)_+ = T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)$.

1.3.2 Segunda etapa: Estimaciones "a priori" y convergencia débil

u^ε está uniformemente acotada en V

Tomando en la primera ecuación de (1.5) como función "test" $v = u^\varepsilon$, se obtiene:

$$\nu(\nabla u^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon) + (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi'(\nabla u^\varepsilon), \nabla u^\varepsilon) = \langle f, u^\varepsilon \rangle .$$

Es decir,

$$\nu\|\nabla u^\varepsilon\|^2 + \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi'(\nabla u^\varepsilon)\nabla u^\varepsilon \leq \|f\|_{H^{-1}}\|u^\varepsilon\| .$$

Teniendo en cuenta que $\Phi'(\nabla u^\varepsilon) : \nabla u^\varepsilon \geq 0$, se tiene de nuevo que

$$\nu\|u^\varepsilon\| \leq \|f\|_{H^{-1}} .$$

Luego

$$\|u^\varepsilon\| \leq C \tag{1.16}$$

y, como consecuencia de ello, también se obtiene que

$$\int_\Omega \left(\nu|\nabla u^\varepsilon|^2 + T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi'(\nabla u^\varepsilon) : \nabla u^\varepsilon\right) \leq C .$$

Es decir,

$$\int_\Omega \tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon \leq C . \tag{1.17}$$

$T_M(k^\varepsilon)$ está acotada en $H_0^1(\Omega)$

Tomando como función "test" $T_M(k^\varepsilon)$ (nótese que $T_M(k^\varepsilon) \in H_0^1(\Omega)$) en la ecuación de la energía de (1.5), se obtiene:

$$\int_\Omega \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon \cdot \nabla T_M(k^\varepsilon) + \int_\Omega B_\varepsilon(k^\varepsilon) \cdot \nabla T_M(k^\varepsilon) + \int_\Omega (u^\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon) T_M(k^\varepsilon) = \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon) T_M(k^\varepsilon) .$$

Estudiemos el comportamiento de cada término:

$$\int_\Omega \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon \cdot \nabla T_M(k^\varepsilon) = \int_\Omega \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)|\nabla T_M(k^\varepsilon)|^2 \geq \mu_0 \int_\Omega |\nabla T_M(k^\varepsilon)|^2$$

El segundo sumando es

$$\int_\Omega B_\varepsilon(k^\varepsilon) \cdot \nabla T_M(k^\varepsilon) = \int_\Omega \nabla \cdot \widehat{B}_\varepsilon^M(k^\varepsilon) = 0 .$$

Aquí, se ha usado la notación

$$\left(\widehat{B}_\varepsilon^M\right)_i(r) = \int_0^r B_i(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(s))T_M'(s)\,ds \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq N\,,$$

$$\widehat{B}_\varepsilon^M = \left((\widehat{B}_\varepsilon^M)_1, (\widehat{B}_\varepsilon^M)_2, \ldots (\widehat{B}_\varepsilon^M)_N\right)\,.$$

El tercer sumando también es cero, ya que

$$\begin{aligned}\int_\Omega (u^\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon) T_M(k^\varepsilon) &= \int_\Omega u^\varepsilon \cdot \nabla \widetilde{T}_M(k^\varepsilon)\\ &= -\int_\Omega (\nabla \cdot u^\varepsilon)\widetilde{T}_M(k^\varepsilon) + \int_{\partial\Omega} \widetilde{T}_M(k^\varepsilon) u^\varepsilon \cdot \mathbf{n}\, d\Gamma = 0\,.\end{aligned}$$

En cuarto y último lugar, teniendo en cuenta (1.17), se tiene:

$$\int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon) T_M(k^\varepsilon) \leq M \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon) \leq C \cdot M\,.$$

De todo ello, podemos deducir que

$$\int_\Omega \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)|\nabla T_M(k^\varepsilon)|^2 = \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon) T_M(k^\varepsilon) \tag{1.18}$$

y, en particular,

$$\|T_M(k^\varepsilon)\|^2 \leq C \cdot M\,. \tag{1.19}$$

Se verifica:

$$\frac{1}{n}\int_{\{n \leq k^\varepsilon \leq 2n\}} |\nabla k^\varepsilon|^2 \leq C\,. \tag{1.20}$$

Tomemos $\xi_n(k^\varepsilon) = T_{2n}(k^\varepsilon) - T_n(k^\varepsilon)$ como nueva función "test" en la ecuación de la energía de (1.5) (nótese que $\xi_n(k^\varepsilon) \in H_0^1(\Omega)$). Se obtiene:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon \cdot \nabla\xi_n(k^\varepsilon) + \int_\Omega B_\varepsilon(k^\varepsilon)\cdot\nabla\xi_n(k^\varepsilon)\\ &\qquad + \int_\Omega (u^\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon)\xi_n(k^\varepsilon) = \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon)\xi_n(k^\varepsilon)\,.\end{aligned}$$

Veamos, nuevamente, cuál es el comportamiento de cada término. En primer lugar. observamos que

$$\int_\Omega \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon \cdot \nabla\xi_n(k^\varepsilon) = \int_{\{n \leq k^\varepsilon \leq 2n\}} \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)|\nabla k^\varepsilon|^2 \geq \mu_0 \int_{\{n \leq k^\varepsilon \leq 2n\}} |\nabla k^\varepsilon|^2$$

El segundo sumando puede escribirse como

$$\int_\Omega B_\varepsilon(k^\varepsilon)\cdot\nabla\xi_n(k^\varepsilon) = \int_\Omega \nabla \cdot \bar{B}_\varepsilon^M(k^\varepsilon) = 0\,.$$

Aquí, se han usado nuevas funciones auxiliares:

$$\left(\bar{B}_\varepsilon^M\right)_i(r) = \int_0^r B_i(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(s))\xi_n'(s)\,ds \quad \text{para} \quad 1 \le i \le N\,, \quad r \in \mathbb{R}\,,$$
$$\bar{B}_\varepsilon^M = \left((\bar{B}_\varepsilon^M)_1, (\bar{B}_\varepsilon^M)_2, ...(\bar{B}_\varepsilon^M)_N\right)\,.$$

El tercer sumando también se anula, ya que

$$\int_\Omega (u^\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon)\xi_n(k^\varepsilon) = \int_\Omega u^\varepsilon \cdot \nabla\tilde{\xi}(k^\varepsilon)$$
$$= -\int_\Omega (\nabla \cdot u^\varepsilon)\xi_n(k^\varepsilon) + \int_{\partial\Omega} \tilde{\xi}(k^\varepsilon)u^\varepsilon \cdot \mathbf{n}\,d\Gamma = 0\,.$$

Teniendo en cuenta (1.17), se tiene que

$$\int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon)\xi_n(k^\varepsilon) \le n \int_{k^\varepsilon \ge n} T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon)$$

De todo ello podemos deducir, además de (1.20), que

$$\frac{1}{n}\int_{\{n \le k^\varepsilon \le 2n\}} \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)|\nabla k^\varepsilon|^2 \le \int_{\{k^\varepsilon \ge n\}} T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon)\,. \tag{1.21}$$

k^ε está acotada en $W_0^{1,q}$, para todo $q < N'$.

En efecto, de (1.19) y (1.20), teniendo en cuenta un resultado bien conocido que se debe a L. Boccardo y T. Gallouët (cf. [7]; véase también el lema A.1 del Apéndice A), se obtiene:

$$\|k^\varepsilon\|_{W_0^{1,q}} \le C(q), \qquad \forall q < N'. \tag{1.22}$$

Propiedades de convergencia "débil" de u^ε y k^ε

En consecuencia, de (1.16), (1.19), (1.22) y las inyecciones de Sobolev, extrayendo subsucesiones si fuese necesario (en tal caso, superindicándolas de nuevo con ε), podemos afirmar que:

$$\begin{aligned}
&u^\varepsilon \to u \quad \text{en } V\text{-débil}\,,\\
&u^\varepsilon \to u \quad \text{en } L^r \quad \forall r < 2^* = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad N = 2\,,\\ 6 & \text{si} \quad N = 3\,,\end{cases}\\
&u^\varepsilon \to u \quad \text{c.p.d.},\\
&k^\varepsilon \to k \quad \text{en } W_0^{1,q}\text{-débil} \quad \forall q < N' \qquad \left(N' = \tfrac{N}{N-1}\right)\,,\\
&k^\varepsilon \to k \quad \text{en } L^p \quad \forall p < (N')^* = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad N = 2\,,\\ 3 & \text{si} \quad N = 3\,,\end{cases}\\
&k^\varepsilon \to k \quad \text{c.p.d.},\\
&T_M(k^\varepsilon) \to T_M(k) \quad \text{en } H_0^1\text{-débil} \quad \forall M > 0\,.
\end{aligned}$$

Evidentemente, $k \geq 0$.

1.3.3 Tercera Etapa: u es, junto con alguna p, solución de la ecuación de movimiento.

Hemos de pasar al límite en la ecuación de movimiento de (1.5). El tercer sumando plantea una dificultad: Aunque sabemos que (al menos para una nueva subsucesión) $\Phi'(\nabla u^\varepsilon)$ converge débilmente, no podemos afirmar que su límite sea $\Phi'(\nabla u)$. Afortunadamente, podremos superar esta dificultad recurriendo a un argumento de monotonía. Comenzaremos por re-escribir las dos primeras igualdades de (1.5) como una inecuación variacional. Para ello, observamos que

$$\begin{cases} \nu(\nabla u^\varepsilon, \nabla v - \nabla u^\varepsilon) + ((u^\varepsilon \cdot \nabla)u^\varepsilon, v - u^\varepsilon) + (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi'(\nabla u^\varepsilon), \nabla v - \nabla u^\varepsilon) \\ \quad = \langle f, v - u^\varepsilon\rangle \qquad \forall v \in V\,, \quad u^\varepsilon \in V\,. \end{cases} \tag{1.23}$$

Para cada $k \in L^2$, pongamos

$$J_k(v) = \int_\Omega k\Phi(\nabla v) \quad \forall v \in V\,.$$

La función $J_k : V \mapsto \mathbb{R}$ es convexa y C^1, gracias a las hipótesis hechas sobre Φ. Como

$$\langle J_k'(v), w\rangle = \int_\Omega k\Phi'(\nabla v) : \nabla w\,,$$

podemos escribir el tercer sumando de (1.23) en la forma:

$$
\begin{aligned}
&(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi'(\nabla u^\varepsilon), \nabla v - \nabla u^\varepsilon) = \langle J'_{T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)}(u^\varepsilon), v - u^\varepsilon\rangle \\
&\leq J_{T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)}(v) - J_{T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)}(u^\varepsilon) = \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi(\nabla v) - \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi(\nabla u^\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Por tanto, para cada $\varepsilon > 0$, u^ε es una solución de la siguiente inecuación variacional:

$$
\begin{cases}
\nu \displaystyle\int_\Omega \nabla u^\varepsilon : (\nabla v - \nabla u^\varepsilon) + \int_\Omega (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon \cdot (v - u^\varepsilon) + \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi(\nabla v) \\
-\displaystyle\int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi(\nabla u^\varepsilon) \geq \langle f, v - u^\varepsilon\rangle \qquad \forall v \in V, \quad u^\varepsilon \in V.
\end{cases}
$$

O bien:

$$
\begin{cases}
\nu \displaystyle\int_\Omega \nabla u^\varepsilon : \nabla v + \int_\Omega (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon \cdot v + \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi(\nabla v) \\
\geq \nu \displaystyle\int_\Omega |\nabla u^\varepsilon|^2 + \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi(\nabla u^\varepsilon) + \langle f, v - u^\varepsilon\rangle \qquad \forall v \in V, \quad u^\varepsilon \in V.
\end{cases}
\tag{1.24}
$$

Tomando límites cuando $\varepsilon \to 0$, se obtiene que para cada $v \in V$,

$$
\begin{aligned}
&\nu \int_\Omega \nabla u : \nabla v + \int_\Omega (u \cdot \nabla) u \cdot v + \int_\Omega k\Phi(\nabla v) \\
&\geq \nu \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |\nabla u^\varepsilon|^2 + \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi(\nabla u^\varepsilon) + \langle f, v - u\rangle
\end{aligned}
\tag{1.25}
$$

En efecto, la integral del primer término de (1.24) converge hacia $\int_\Omega \nabla u : \nabla v$, puesto que ∇u^ε converge débilmente a ∇u en L^2. Por otro lado, para cada i, j

$$
\int_\Omega u_i^\varepsilon \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} v_j = -\int_\Omega u_i^\varepsilon u_j^\varepsilon \frac{\partial v_j^\varepsilon}{\partial x_i}
$$

y el producto $u_i^\varepsilon u_j^\varepsilon$ converge fuertemente, por ejemplo en L^2, de modo que el segundo sumando de (1.24) tiende a

$$
\int_\Omega (u \cdot \nabla) u \cdot v.
$$

El tercero converge a

$$
\int_\Omega k\Phi(\nabla v),
$$

puesto que $\Phi(\nabla v)$ está en L^2 y se tiene que, por ejemplo, $T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon) \to k$ en L^2.

De la semicontinuidad inferior y la convexidad de la norma, se tiene que

$$
\liminf_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega |\nabla u^\varepsilon|^2 \geq \int_\Omega |\nabla u|^2.
$$

Por lo que respecta al segundo sumando de la derecha en (1.25), podemos escribir:

$$\int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi(\nabla u^\varepsilon) = \int_\Omega (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon) - k)\Phi(\nabla u^\varepsilon) + \int_\Omega k\Phi(\nabla u^\varepsilon). \tag{1.26}$$

En (1.26), la primera integral de la derecha tiende a cero, puesto que $(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon) - k) \to 0$ en L^2 y $\Phi(\nabla u^\varepsilon)$ está acotada en L^2. Por otro lado, la función

$$v \mapsto \int_\Omega k\Phi(\nabla v) \tag{1.27}$$

es convexa (por serlo Φ) y continua. En efecto, si $v^\varepsilon \to v$ en V, como existen constantes C_1 y C_2 tales que $|k\Phi(\nabla v^\varepsilon)| \leq |k|(C_1 + C_2|\nabla v^\varepsilon|)$ y $k\Phi(\nabla v^\varepsilon)$ converge c.p.d. a $k\Phi(\nabla v)$, aplicando el teorema de Lebesgue, resulta que

$$\int_\Omega k\Phi(\nabla v^\varepsilon) \to \int_\Omega k\Phi(\nabla v).$$

Al ser convexa y continua, la función que aparece en (1.27) es débilmente semicontinua inferiomente (s.c.i.), es decir:

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega k\Phi(\nabla u^\varepsilon) \geq \int_\Omega k\Phi(\nabla u).$$

Una consecuencia de (1.26) y de esta desigualdad es que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi(\nabla u^\varepsilon) \geq \int_\Omega k\Phi(\nabla u).$$

Consecuentemente, u es solución de la inecuación variacional

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu \int_\Omega \nabla u : (\nabla v - \nabla u) + \int_\Omega (u\cdot\nabla)u\cdot(v-u) + \int_\Omega k\Phi(\nabla v) \\ - \int_\Omega k\Phi(\nabla u) \geq \langle f, v-u\rangle \qquad \forall v \in V, \quad u \in V. \end{array} \right. \tag{1.28}$$

Veamos que esto es ya suficiente para poder afirmar que u es, junto con alguna p, solución de la ecuación de movimiento de (1.1). Tomando en (1.28) funciones v de la forma $u + tw$, donde $w \in V$, $t \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, se obtiene fácilmente que

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu \int_\Omega \nabla u : \nabla w + \int_\Omega (u\cdot\nabla)u\cdot w + \int_\Omega k\frac{1}{t}\left(\Phi(\nabla u + t\nabla w) - \Phi(\nabla u)\right) \\ \geq \langle f, w\rangle \qquad \forall w \in V. \end{array} \right.$$

Recordando que $\Phi \in C^1$ y tomando límite cuando $t \to 0^+$, llegamos a que:

$$\nu \int_\Omega \nabla u : \nabla w + \int_\Omega (u\cdot\nabla)u\cdot w + \int_\Omega k\Phi'(\nabla u) : \nabla w \geq \langle f, w\rangle \qquad \forall w \in V.$$

Repitiendo el proceso para $t < 0$, se obtiene la desigualdad contraria, así que:

$$\nu \int_\Omega \nabla u : \nabla w + \int_\Omega (u\cdot\nabla)u\cdot w + \int_\Omega k\Phi'(\nabla u) : \nabla w = \langle f, w\rangle \qquad \forall w \in V. \tag{1.29}$$

1.3.4 Cuarta Etapa: u^ε converge en V.

Si, en (1.29), tomamos $w = u$, se tiene

$$\int_\Omega \Big(\nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u\Big) = \langle f, u\rangle .$$

Por otro lado, si en (1.15) tomamos $v = u^\varepsilon$, se tiene:

$$\int_\Omega \Big(\nu|\nabla u^\varepsilon|^2 + T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi'(\nabla u^\varepsilon) : \nabla u^\varepsilon\Big) = \langle f, u^\varepsilon\rangle .$$

Por tanto,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \Big(\nu|\nabla u^\varepsilon|^2 + T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi'(\nabla u^\varepsilon) : \nabla u^\varepsilon\Big) = \int_\Omega \Big(\nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u\Big),$$

y, puesto que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon) - k)\Phi'(\nabla u^\varepsilon) : \nabla u^\varepsilon = 0$$

(por estar Φ' uniformemente acotada), también es cierto que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \Big(\nu|\nabla u^\varepsilon|^2 + k\Phi'(\nabla u^\varepsilon) : \nabla u^\varepsilon\Big) = \int_\Omega \Big(\nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u\Big)$$

Veamos que esto conduce a la convergencia fuerte de u^ε en V. En efecto, escribiendo que $u^\varepsilon = u + (u^\varepsilon - u)$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Big(\nu|\nabla u^\varepsilon|^2 + k\Phi'(\nabla u^\varepsilon) : \nabla u^\varepsilon\Big) - \int_\Omega \Big(\nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u\Big)\\
&= 2\nu\int_\Omega \nabla(u^\varepsilon - u) : \nabla u + \nu\int_\Omega |\nabla(u^\varepsilon - u)|^2\\
&+ \int_\Omega k\Phi'(\nabla u^\varepsilon) : \nabla u^\varepsilon - \int_\Omega k\Phi'(\nabla u) : \nabla u .
\end{aligned}\tag{1.30}$$

Pero

$$\lim_{\varepsilon\to 0} 2\nu\int_\Omega \nabla(u^\varepsilon - u) : \nabla u = 0,$$

porque ∇u^ε converge débilmente en L^2. Luego

$$\begin{aligned}
0 \geq &\limsup_{\varepsilon\to 0}\Big(\nu\int_\Omega |\nabla(u^\varepsilon - u)|^2\Big)\\
&+ \liminf_{\varepsilon\to 0}\Big(\int_\Omega k\Phi'(\nabla u^\varepsilon) : \nabla u^\varepsilon - \int_\Omega k\Phi'(\nabla u) : \nabla u\Big).
\end{aligned}\tag{1.31}$$

Aquí, el último término es ≥ 0, ya que

$$v \mapsto \int_\Omega k\Phi'(\nabla v) : \nabla v$$

es una función débilmente s.c.i. En efecto, es convexa por serlo $D \to \Phi'(D) : D$ y también es continua, gracias al teorema de Lebesgue. La conclusión es pues que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega |\nabla(u^\varepsilon - u)|^2 = 0,$$

i.e. u^ε converge fuertemente en V.

1.3.5 Quinta Etapa: Para cada $M > 0$, $T_M(k^\varepsilon)$ converge fuertemente en H_0^1

Usaremos un argumento debido a P.L. Lions y F. Murat (ver [17], [20]). Vamos a ver que

$$\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\nabla T_M(k^\varepsilon) \to \mu(k)^{\frac{1}{2}}\nabla T_M(k) \quad \text{en } L^2 \qquad \forall M > 0 \tag{1.32}$$

(nótese que $\mu(k)^{\frac{1}{2}}\nabla T_M(k)$ tiene perfecto sentido, puesto que puede escribirse en la forma $\mu(T_M(k))^{\frac{1}{2}}\nabla T_M(k)$ y $T_M(k) \in H_0^1$). Claramente, (1.32) equivale a la convergencia fuerte de $T_M(k)$ en H_0^1 para cada $M > 0$. Veremos que esto es ya suficiente para pasar al límite en la ecuación de la energía.

Una consecuencia de la convergencia fuerte de ∇u^ε en L^2 vista en la etapa anterior, es que

$$T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon) \to \tau : \nabla u \quad \text{en } L^1 \text{ y c.p.d.} \tag{1.33}$$

Aquí, hemos introducido la Notación $\tau = \nu\nabla u + k\Phi'(\nabla u)$. Si elegimos $T_M(k^\varepsilon)$ como función "test" en la ecuación de la energía de (1.5), se obtiene (1.18) según vimos. Tomando límites cuando $\varepsilon \to 0$ y teniendo en cuenta (1.33) y la convergencia débil-$*$ de $T_M(k^\varepsilon)$ a $T_M(k)$ en L^∞, se obtiene

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)|\nabla T_M(k^\varepsilon)|^2 = \int_\Omega(\tau : \nabla u)T_M(k). \tag{1.34}$$

Nuestra intención ahora es comprobar que

$$\int_\Omega(\tau : \nabla u)T_M(k) = \int_\Omega \mu(k)|\nabla T_M(k)|^2.$$

Para ello, vamos a tomar $w_n^\varepsilon = T_M(k)L_n(k^\varepsilon)$ como función "test" en la ecuación de la energía de (1.5) (véase el significado de L_n en la Notación). Obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon \cdot \nabla T_M(k)\right) L_n(k^\varepsilon) \\
&+ \int_\Omega \left(\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon \cdot \nabla L_n(k^\varepsilon)\right) T_M(k) \\
&+ \int_\Omega \left(B_\varepsilon(k^\varepsilon) \cdot \nabla T_M(k)\right) L_n(k^\varepsilon) \\
&+ \int_\Omega \left(B_\varepsilon(k^\varepsilon) \cdot \nabla L_n(k^\varepsilon)\right) T_M(k) \\
&+ \int_\Omega (u^\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon)\, T_M(k)L_n(k^\varepsilon) = \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon)\, T_M(k)L_n(k^\varepsilon).
\end{aligned} \tag{1.35}$$

A continuación analizaremos el comportamiento de cada término de (1.35) cuando, en primer lugar se hace tender ε a cero con n fijo y, después, se hace tender n hacia ∞. El primer término puede escribirse como sigue:

$$\int_\Omega (\mu_\varepsilon(T_{2n}(k^\varepsilon))\nabla T_M(T_{2n}(k^\varepsilon)) \cdot \nabla T_M(k))\, L_n(k^\varepsilon)\,.$$

Ahora bien, por el teorema de Lebesgue,

$$\mu_\varepsilon(T_{2n}(k^\varepsilon))\nabla T_M(k) L_n(k^\varepsilon) \to \mu(T_{2n}(k))\nabla T_M(k) L_n(k) \quad \text{en } L^2(\Omega)^N\,,$$

mientras que

$$\nabla T_{2n}(k^\varepsilon) \rightharpoonup \nabla T_{2n}(k) \text{ en } L^2(\Omega)^N\text{-débil}\,;$$

luego el primer sumando de (1.35) converge a

$$\int_\Omega (\mu(T_{2n}(k))\nabla T_M(k) \cdot \nabla T_M(k))\, L_n(k)$$

cuando $\varepsilon \to 0$; pero, para n suficientemente grande, esto coincide con

$$\int_\Omega \mu(k)|\nabla T_M(k)|^2\,.$$

El segundo término satisface:

$$\begin{aligned}\limsup_{\varepsilon\to 0}&\left|\int_\Omega (\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon \cdot \nabla L_n(k^\varepsilon))\, T_M(k)\right| \\ &\le \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{M}{n}\int_{\{n\le k^\varepsilon\le 2n\}} \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\,|\nabla k^\varepsilon|^2\,.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (1.21), vemos que este límite superior puede ser mayorado por

$$M\cdot\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_{\{k^\varepsilon\ge n\}} T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon)\,.$$

Gracias al lema de Fatou,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} M\int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon)\mathbb{1}_{\{k^\varepsilon\ge n\}} \le M\int_\Omega \limsup_{\varepsilon\to 0} T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon)\mathbb{1}_{\{k^\varepsilon\ge n\}}\,. \tag{1.36}$$

Puesto que $T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon) \to \tau : \nabla u$ y $\limsup_{\varepsilon\to 0}\mathbb{1}_{\{k^\varepsilon\ge n\}} = \mathbb{1}_{\{k\ge n\}}$ c.p.d. en Ω, el segundo miembro de (1.36) es inferor o igual a $M\int_{k\ge n}\tau : \nabla u$, que converge a 0 cuando $n\to\infty$. El tercer término de (1.35) se puede escribir como

$$\int_\Omega (B_\varepsilon(T_{2n}(k^\varepsilon)) \cdot \nabla T_M(k))\, L_n(k^\varepsilon)\,. \tag{1.37}$$

Por el teorema de Lebesgue, $B_\varepsilon(T_{2n}(k^\varepsilon))L_n(k^\varepsilon) \to B(T_{2n}(k))L_n(k)$ en $L^2(\Omega)^N$. Así que (1.37) tiende a

$$\int_\Omega (B(T_{2n}(k)) \cdot \nabla T_M(k))\, L_n(k)$$

cuando $\varepsilon \to 0$. Ahora bien, si n es suficientemente grande, la integral precedente es igual a

$$\int_\Omega B(T_M(k)) \cdot \nabla T_M(k) \,,$$

que es cero. El cuarto término de (1.35) se puede expresar como

$$\int_\Omega (B_\varepsilon(T_{2n}(k^\varepsilon)) \cdot \nabla L_n(k^\varepsilon))\, T_M(k) \,. \tag{1.38}$$

Sabemos que $T_M(k)B_\varepsilon(T_{2n}(k^\varepsilon)) \to T_M(k)B(T_{2n}(k))$ en $L^2(\Omega)^N$ y que $\nabla L_n(k^\varepsilon) \to \nabla L_n(k)$ en $L^2(\Omega)^N$-débil cuando $\varepsilon \to 0$. Así pues, la integral de (1.38) converge a

$$\int_\Omega (B(T_{2n}(k)) \cdot \nabla L_n(k))\, T_M(k) \,. \tag{1.39}$$

Aquí el integrando puede escribirse en le forma

$$(B(T_{2n}(k)) \cdot \nabla L_n(T_{2n}(k)))\, T_M(T_{2n}(k)) = \nabla \cdot \widehat{\Psi}_{n,M}(T_{2n}(k)) \,,$$

donde

$$\left(\widehat{\Psi}_{n,M}(r)\right)_i = \int_0^r B(s)L_n'(s)T_M(s)\, ds \,, \quad \forall r \in \mathbb{R} \,.$$

Luego la integral que aparece en (1.39) es también cero. El quinto término de (1.35) es igual a

$$\int_\Omega (u^\varepsilon \cdot \nabla T_{2n}(k^\varepsilon))\, T_M(k)L_n(k^\varepsilon) \,. \tag{1.40}$$

Puesto que $u^\varepsilon \to u$ fuertemente en L^r $\forall r < 2^*$ y $L_n(k^\varepsilon) \to L_n(k)$ fuertemente en $L^p(\Omega)$ $\forall p < \infty$ cuando $\varepsilon \to 0$, eligiendo r tal que $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{2}$ deducimos que el producto $L_n(k^\varepsilon)u^\varepsilon$ converge fuertemente en $L^2(\Omega)^N$; como, por otro lado, $\nabla T_{2n}(k^\varepsilon)$ converge débilmente a $\nabla T_{2n}(k)$ en $L^2(\Omega)^N$, se tiene que la integral de (1.40) converge a

$$\int_\Omega (u \cdot \nabla T_{2n}(k))\, T_M(k)L_n(k) \,. \tag{1.41}$$

Si tomamos

$$\widetilde{\Psi}_{n,M}(r) = \int_0^r L_n(s)T_M(s)\, ds \quad \forall r \in \mathbb{R} \,,$$

podemos escribir esta integral como sigue:

$$\int_\Omega (u \cdot \nabla T_{2n}(k))\, T_M(T_{2n}(k))L_n(T_{2n}(k)) = \int_\Omega u \cdot \nabla \widetilde{\Psi}_{n,M}(T_{2n}(k)) =$$
$$- \int_\Omega \widetilde{\Psi}_{n,M}(T_{2n}(k))(\nabla \cdot u) + \int_{\partial\Omega} \widetilde{\Psi}_{n,M}(T_{2n}(k))u \cdot \mathbf{n}\, d\Gamma = 0 \,.$$

Por lo que respecta al término de la derecha, $T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon)$ converge en L^1 a la función $\tau : \nabla u$ y $T_M(k)L_n(k^\varepsilon)$ converge débilmente-$*$ en L^∞ a $T_M(k)L_n(k)$. Así que, cuando $\varepsilon \to 0$, el segundo miembro de (1.35) converge a

$$\int_\Omega (\tau : \nabla u) T_M(k) L_n(k) .$$

Cuando n es suficientemente grande, esta integral es

$$\int_\Omega (\tau : \nabla u)\, T_M(k) .$$

Teniendo en cuenta el comportamiento de cada término de (1.35), concluimos que

$$\int_\Omega \mu(k)|\nabla T_M(k)|^2 = \int_\Omega (\tau : \nabla u)\, T_M(k)$$

y, en vista de (1.34), resulta:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)|\nabla T_M(k^\varepsilon)|^2 = \int_\Omega \mu(k)|\nabla T_M(k)|^2 .$$

Evidentemente, esta igualdad, junto con la convergencia débil de $\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \nabla T_M(k^\varepsilon)$, conduce a (1.32).

1.3.6 Sexta Etapa: k es una solución (en el sentido renormalizado) de la ecuación de la energía

Sea $\beta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, con soporte en $[-M, M]$. Veamos que se da la igualdad (1.4) en $\mathcal{D}'(\Omega)$. Elegimos pues $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y usamos $\beta(k^\varepsilon)\varphi$ como función "test" en la ecuación de la energía de (1.5). Teniendo en cuenta que

$$\nabla(\beta(k^\varepsilon)\varphi) = \beta(k^\varepsilon)\nabla\varphi + \varphi\nabla\beta(k^\varepsilon) ,$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)(\nabla k^\varepsilon \cdot \nabla\varphi)\beta(k^\varepsilon) + \int_\Omega \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)(\nabla k^\varepsilon \cdot \nabla\beta(k^\varepsilon))\varphi \\ &\quad + \int_\Omega (B_\varepsilon(k^\varepsilon) \cdot \nabla\varphi)\beta(k^\varepsilon) + \int_\Omega (B_\varepsilon(k^\varepsilon) \cdot \nabla\beta(k^\varepsilon))\varphi \\ &\quad + \int_\Omega (u^\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon)\, \beta(k^\varepsilon)\varphi = \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon)\, \beta(k^\varepsilon)\varphi . \end{aligned} \tag{1.42}$$

Veamos cuál es el comportamiento de cada sumando de (1.42) cuando $\varepsilon \to 0$. El primero de ellos puede escribirse como

$$\int_\Omega \mu_\varepsilon(T_M(k^\varepsilon))(\nabla T_M(k^\varepsilon) \cdot \nabla\varphi)\beta(k^\varepsilon) .$$

Aplicando el teorema de Lebesgue, se comprueba fácilmente que

$$\mu_\varepsilon(T_M(k^\varepsilon))\beta(k^\varepsilon)\nabla\varphi \to \mu(T_M(k))\beta(k)\nabla\varphi \text{ en } L^2(\Omega)^N$$

y, como $\nabla T_M(k^\varepsilon) \to \nabla T_M(k)$ en L^2, el primer sumando converge a

$$\int_\Omega \mu(T_M(k))(\nabla T_M(k)\cdot\nabla\varphi)\beta(k).$$

El segundo término de (1.42) coincide con

$$\int_\Omega \mu_\varepsilon(T_M(k^\varepsilon))\beta'(k^\varepsilon)|\nabla T_M(k^\varepsilon)|^2\varphi \tag{1.43}$$

En la quinta etapa de la demostración hemos visto que $\mu_\varepsilon(T_M(k^\varepsilon))|\nabla T_M(k^\varepsilon)|^2$ converge fuertemente a $\mu(T_M(k))|\nabla T_M(k)|^2$ en L^1. También sabemos que $\beta'(k^\varepsilon)$ converge débilmente-$*$ en L^∞ a $\beta'(k)$. Por tanto, la integral de (1.43) converge a:

$$\int_\Omega \mu(T_M(k))(\nabla\beta(k)\nabla T_M(k))\varphi.$$

El tercer sumando de (1.42) tiene un integrando que puede ser escrito en la forma $B_\varepsilon(T_M(k^\varepsilon))\cdot\nabla\varphi)\beta(k^\varepsilon)$. Por tanto, converge hacia

$$\int_\Omega (B(T_M(k))\cdot\nabla\varphi)\beta(k).$$

El cuarto término puede expresarse como:

$$\int_\Omega (B_\varepsilon(T_M(k^\varepsilon))\cdot\nabla\beta(k^\varepsilon))\varphi. \tag{1.44}$$

Por un lado, $\nabla\beta(k^\varepsilon) \to \nabla\beta(k)$ débilmente en L^2 y, por otro, $B_\varepsilon(T_M(k^\varepsilon))\varphi$ converge fuertemente a $B(T_M(k))\varphi$ en L^2 gracias al teorema de Lebesgue. Luego la integral que aparece en (1.44) converge a

$$\int_\Omega (B(T_M(k))\cdot\nabla\beta(k))\varphi.$$

El quinto término es igual a

$$\int_\Omega (u^\varepsilon\cdot\nabla T_M(k^\varepsilon))\,\beta(k^\varepsilon)\varphi.$$

De la convergencia de $\nabla T_M(k^\varepsilon)$ en L^2 y de la convergencia de $\beta(k^\varepsilon)\varphi u^\varepsilon$ en $L^p(\Omega)^N$, $\forall p < 2^*$, se obtiene:

$$\int_\Omega (u\cdot\nabla T_M(k))\,\beta(k)\varphi.$$

En cuanto al segundo miembro, basta recordar que

$$\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon \to \tau : \nabla u \qquad \text{en } L^1$$

y que

$$\beta(k^\varepsilon)\varphi \to \beta(k)\varphi \qquad \text{en } L^\infty(\Omega)\text{-débil}*.$$

Así, el último término converge hacia

$$\int_\Omega (\tau : \nabla u)\beta(k)\varphi .$$

Como consecuencia de lo que precede, se ha probado que

$$\int_\Omega \mu(k)\nabla k \cdot \nabla(\beta(k)\varphi) + \int_\Omega B(k)\cdot\nabla(\beta(k)\varphi) \\ + \int_\Omega (u\cdot\nabla k)\,\beta(k)\varphi = \int_\Omega (\tau : \nabla u)\,\beta(k)\varphi .$$

Dado que $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ es arbitraria, la igualdad (1.4) ha de cumplirse en el sentido de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

1.4 Solución débil

Dada la forma particular del segundo miembro de la ecuación de la energía, en el caso en que $B \equiv 0$, se pueden obtener mejores propiedades de regularidad para la solución.

Teorema 1.3 *Supongamos que, en las condiciones del teorema 1.1, se tiene* $B \equiv 0$. *Entonces la solución* $\{u, p, k\}$ *que proporciona este resultado también verifica:*

$$\tilde{\mu}(k) \in \bigcap_{q<N'} W_0^{1,q}, \qquad \nabla\tilde{\mu}(k) = \mu(k)\nabla k$$

y

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \mu(k)\nabla k\cdot\nabla\phi + \int_\Omega (u\cdot\nabla k)\phi = \int_\Omega \Big(\nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u\Big)\,\phi \\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{cases}$$

Cuando esto ocurra, diremos que $\{u, p, k\}$ es una *solución débil* de (1.1), (1.2).

Demostración

Suponiendo $B \equiv 0$, repetimos la demostración del teorema 1.1. Obtenemos como antes que

$$\nabla T_M(k^\varepsilon) \to \nabla T_M(k) \quad \text{en } L^2 \quad \forall M > 0\,,$$

Extrayendo una subsucesión si fuese necesario, podemos suponer que $\nabla T_M(k^\varepsilon)$ converge a $\nabla T_M(k)$ c.p.d. $\forall M > 0$. Dado que también se tiene que $k^\varepsilon \to k$ c.p.d., deducimos que

$$\nabla k^\varepsilon \to \nabla k \quad \text{c.p.d.}$$

y, por tanto,

$$\nabla k^\varepsilon \to \nabla k \quad \text{fuertemente en } L^q \quad \forall q < N'$$

Sea

$$\widetilde{\mu}_\varepsilon(s) = \int_0^s \mu(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\sigma))\,d\sigma \qquad \forall s \in \mathbb{R}\,.$$

Introducimos acontinuación las siguientes funciones:

$$v^\varepsilon = \widetilde{\mu}(k^\varepsilon)\,, \quad F^\varepsilon = T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon) - u^\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon\,, \quad F = \tau : \nabla u - u \cdot \nabla k\,.$$

Con esta notación, sabemos que, para cada $\varepsilon > 0$,

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta v^\varepsilon & = & F^\varepsilon & \text{en } \Omega \\ v^\varepsilon & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{1.45}$$

y que $F^\varepsilon \to F$ en L^1. Consecuentemente, gracias a los resultados de [7],

$$v^\varepsilon \to v \text{ fuertemente en } W_0^{1,q}(\Omega) \quad \forall q < N'\,. \tag{1.46}$$

Por otro lado, está claro que $\widetilde{\mu}_\varepsilon(s) \to \widetilde{\mu}(s)$ y, como $k^\varepsilon \to k$ c.p.d., podemos afirmar que

$$v^\varepsilon = \widetilde{\mu}_\varepsilon(k^\varepsilon) \to \widetilde{\mu}(k) \text{ c.p.d.} \tag{1.47}$$

De (1.46) y de (1.47), deducimos que $v = \widetilde{\mu}(k)$ y que podemos suponer que

$$\nabla v^\varepsilon = \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon \to \mu(k)\nabla k \quad \text{c.p.d.} \tag{1.48}$$

Usando (1.46) y (1.48), resulta

$$\widetilde{\mu}(k) \in W_0^{1,q} \quad \forall q < N' \quad \text{y} \quad \nabla\widetilde{\mu}(k) = \mu(k)\nabla k\,.$$

Por otro lado, podemos escribir (1.45) como

$$-\nabla \cdot (\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon) = F^\varepsilon \text{ en } W_0^{-1,q}(\Omega) \quad \forall q < N',$$

o bien

$$\langle \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon, \nabla\varphi\rangle = \langle F^\varepsilon, \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \bigcup_{q'>N} W_0^{1,q'}(\Omega), \quad \forall q < N'.$$

Pasando al límite, deducimos que la ecuación de la energía de (1.1) se verifica en el sentido siguiente:

$$\int_\Omega \mu(k)\nabla k \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega (u \cdot \nabla k)\,\varphi = \int_\Omega (\tau : \nabla u)\,\varphi$$

para toda $\varphi \in \bigcup_{q'>N} W_0^{1,q'}(\Omega)$. Con esto, el teorema queda probado.

Nota:

De hecho, k es solución en el siguiente sentido "fuerte":

$$\Delta\widetilde{\mu}(k) \in L^1 \text{ y } -\Delta\widetilde{\mu}(k) = F \text{ c.p.d. en } \Omega.$$

Capítulo 2

Unicidad de solución débil

Vamos a presentar a continuación un resultado de unicidad del problema (1.1) cuando $B \equiv 0$ para valores de ν suficientemente grandes. Para la demostración, usaremos argumentos análogos a los que prueban unicidad de solución de las ecuaciones de Navier-Stokes en el caso estacionario y, también, las estimaciones $W^{1,q}$ para las soluciones de la ecuación de Poisson (véase [1]).

Teorema 2.1 *Supongamos que, en el teorema 1.3, $B \equiv 0$ y $D \to \Phi'(D) : D$ es globalmente lipschitziana. Entonces existe $\nu_0 > 0$ tal que, cuando $\nu \geq \nu_0$, hay a lo más una solución débil $\{u, p, k\}$ de (1.1) con $k \geq 0$ (la presión es única salvo una constante aditiva).*

Demostración del teorema 2.1

Sea $\{u_i, k_i, p_i\}$ para cada $i = 1, 2$, una solución (1.1) con $k_i \geq 0$. Tomamos $u = u_1 - u_2$, $k = k_1 - k_2$ y $p = p_1 - p_2$. Vamos a encontrar una constante positiva ν_0 tal que, cuando $\nu \geq \nu_0$, se tenga necesariamente $\{u_1, k_1\} = \{u_2, k_2\}$ Esto probará el teorema.

En lo sucesivo, C es una constante que puede depender de N, Ω, f, Φ y μ_0, pero no de ν. En primer lugar, veamos que

$$\|u_i\| \leq \frac{C}{\nu} \quad \text{para} \quad i = 1, 2. \tag{2.1}$$

En efecto, usando u_i como función "test" en la ecuación de movimiento de la cual es solución, obtenemos que

$$\nu \int_\Omega |\nabla u_i|^2 + \int_\Omega k_i \Phi'(\nabla u_i) : \nabla u_i = \langle f, u_i \rangle ; \tag{2.2}$$

usando una vez más que $k_i\Phi'(\nabla u_i) : \nabla u_i \geq 0$, resulta:

$$\nu \|u_i\|^2 \leq \|f\|_{H^{-1}} \|u_i\| .$$

De aquí, se tiene (2.1).

En segundo lugar, restando las ecuaciones verificadas por u_1 y u_2 y sumando y restando los términos $(u_2 \cdot \nabla)u_1$, $\nabla \cdot (k_2\Phi'(\nabla u_1))$, se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu\Delta u + (u \cdot \nabla)u_1 + (u_2 \cdot \nabla)u + \nabla p \\ \quad = \nabla \cdot (k\Phi'(\nabla u_1)) + \nabla \cdot (k_2(\Phi'(\nabla u_1) - \Phi'(\nabla u_2)) \ , \\ \nabla \cdot u = 0 \, . \end{array} \right. \tag{2.3}$$

Introduciendo u como función "test" en (2.3), tenemos que

$$\begin{array}{c} \nu \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega (u\nabla \cdot)u_1 \cdot u + \int_\Omega (u_2 \cdot \nabla)u \cdot u \\ = - \displaystyle\int_\Omega k\Phi'(\nabla u_1) : \nabla u - \int_\Omega (\Phi'(\nabla u_1) - \Phi'(\nabla u_2)) : \nabla u \, . \end{array} \tag{2.4}$$

El tercer sumando de (2.4) es nulo y el último es positivo, por ser $D \mapsto \Phi'(D)$ un operador monótono, así que

$$\nu \|u\|^2 \leq - \int_\Omega k\Phi'(\nabla u_1) : \nabla u - \int_\Omega (u \cdot \nabla)u_1 \cdot u \, . \tag{2.5}$$

Recordando que Φ' está uniformemente acotada y usando la desigualdad de Hölder, podemos acotar los términos del segundo miembro de (2.5) del modo siguiente:

$$\left| - \int_\Omega k\Phi'(\nabla u_1) : \nabla u \right| \leq C \int_\Omega |k\nabla u| \leq C|k| \cdot \|u\| \, ,$$

$$\left| - \int_\Omega (u \cdot \nabla)u_1 \cdot u \right| \leq C\|u\|_{L^4}^2 \|u_1\| \, . \tag{2.6}$$

Si $N = 2$, el segundo miembro de (2.6) se puede mayorar por $C\|u\| \cdot |u| \cdot \|u_1\|$ y, si $N = 3$, por $C\|u\|^{3/2} \cdot |u|^{1/2} \cdot \|u_1\|$. En cualquier caso, es menor ó igual que $C\|u\|^2 \cdot \|u_1\|$; teniendo en cuenta (2.1), obtenemos:

$$\nu \|u\|^2 \leq C|k|\|u\| + \frac{C}{\nu}\|u\|^2 \, .$$

El teorema 2.1 quedará probado si vemos que, para ν suficientemente grande, se tiene

$$|k| \leq C\|u\| \, . \tag{2.7}$$

En efecto, en tal caso llegaríamos a la desigualdad

$$\nu\|u\|^2 \leq \left(C + \frac{C}{\nu}\right)\|u\|^2,$$

lo cual implica que $u = 0$ (y también que $k = 0$) si ν es grande.

Para probar (2.7), definimos la función $b = (\widetilde{\mu})^{-1}$, (recuérdese que $\widetilde{\mu}(s) = \int_0^s \mu(\sigma)\,d\sigma$). La función b está bien definida, es de clase C^1 y estrictamente creciente. Además, $0 < b' \leq \dfrac{1}{\mu_0}$. Como $k_i = b(v_i)$, tenemos:

$$|k| = |k_1 - k_2| = |b(v_1) - b(v_2)| \leq \frac{1}{\mu_0}|v_1 - v_2| = C|v|.$$

A continuación, vamos a buscar una cota $|v|$ en términos de $\|u\|$. Sabemos que para $1 \leq p < N$, $W^{1,p} \hookrightarrow L^{p^*}$, donde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$. Cuando $N = 3$, $p^* = 2$ si y sólo si $p = 6/5$; por otra parte cuando $N = 2$, $p^* \geq 2$ si y sólo si $p \geq 1$. Por tanto, en ambos casos, podemos escribir que $|v| \leq C\|\nabla v\|_{L^{6/5}}$. Tenemos en consecuencia que

$$|k| \leq C\,\|\nabla v\|_{L^{6/5}}. \tag{2.8}$$

Nuestro objetivo a continuación es acotar $\|\nabla v\|_{L^{6/5}}$. De hecho, tenemos un resultado mejor:

Lema 2.2 *Bajo las hipótesis del teorema 2.1, para cada $q < N'$, existe $C(q) > 0$ tal que:*

$$\|\nabla v\|_{L^q} \leq C(q)\left((1 + \frac{1}{\nu^{1/2}})\|u\| + \frac{1}{\nu}\,|k|\right). \tag{2.9}$$

Usando (2.8) y (2.9) para $q = 6/5$, resulta:

$$\left(1 - \frac{C}{\nu}\right)|k| \leq \left(C + \frac{C}{\nu^{1/2}}\right)\|u\|$$

y, finalmente, obtenemos (2.7) para ν sufucientemente grande.

—Demostración del lema 2.2—

Veamos en primer lugar que, para cada $q < N'$, existe una constante $C(q)$ tal que

$$\|k_i\|_{W_0^{1,q}} \leq \frac{C(q)}{\nu^{1/2}}. \tag{2.10}$$

En efecto, tomando como función "test" $T_M(k_i)$ en la ecuación de la energía satisfecha por k_i, se obtiene:

$$\int_\Omega \mu(k_i)\nabla k_i \cdot \nabla T_M(k_i) + \int_\Omega (u_i \cdot \nabla k_i) T_M(k_i)$$
$$= \int_\Omega (\nu |\nabla u_i|^2 + k_i \Phi'(\nabla u_i) : \nabla u_i) T_M(k_i) .$$

Procediendo como en la obtención de (1.19), puede verse que la segunda integral es cero. Además, de (2.1) y de (2.2), deducimos que

$$\mu_0 \int_\Omega |\nabla T_M(k_i)|^2 \leq M \|f\|_{H^{-1}} \|u_i\| \leq \frac{C \cdot M}{\nu} .$$

Así, obtenemos que

$$\int_\Omega |\nabla T_M(k_i)|^2 \leq \frac{C \cdot M}{\nu} \quad \forall M > 0 . \tag{2.11}$$

Por otro lado, tomando como función "test" en la ecuación de la energía $\xi_n(k_i)$, se obtiene:

$$\int_\Omega \mu(k_i)\nabla k_i \cdot \nabla \xi_n(k_i) + \int_\Omega (u_i \cdot \nabla k_i) \xi_n(k_i)$$
$$= \int_\Omega (\nu |\nabla u_i|^2 + k_i \Phi'(\nabla u_i) : \nabla u_i) \xi_n(k_i) .$$

De modo análogo a como se obtuvo (1.20), recordando que $|\xi_n| \leq 1$, se deduce que:

$$\frac{1}{n} \int_{n \leq k_i \leq 2n} |\nabla k_i|^2 \leq \frac{C}{\nu} \qquad \forall n \geq 1 . \tag{2.12}$$

Usando (2.11), (2.12), y el lema A.1 del Apéndice A, se obtiene (2.10).

En segundo lugar, introduciremos las funciones

$$\widehat{H} = -u \cdot \nabla k_1 + \nu \nabla u : (\nabla u_1 + \nabla u_2) + k \Phi'(\nabla u_1) : \nabla u_1$$
$$+ k_2 (\Phi'(\nabla u_1) : \nabla u_1 - \Phi'(\nabla u_2) : \nabla u_2)$$

y

$$H = \widehat{H} - u_2 \cdot \nabla k .$$

Obsérvese que $\widehat{H} \in L^1 \subset W^{-1,q}$ para todo $q < N'$ y que $u_2 \cdot \nabla k = \nabla \cdot (k u_2) \in W^{-1,b}$ para todo $b < 2$ si N=3 y para todo $b < \infty$ si $N = 2$. De acuerdo con (2.10) y las hipótesis impuestas en el teorema 2.1, vamos a ser capaces de conseguir las desigualdades

$$\|H\|_{W^{-1,q}} \leq C_q \left((1 + \frac{1}{\nu^{1/2}}) \|u\| + \frac{1}{\nu} |k| \right) \quad \forall q < N' . \tag{2.13}$$

En efecto, es claro que $\|H\|_{W^{-1,q}} \leq C_q\|\widehat{H}\|_{L^1} + \|u_2 \cdot \nabla k\|_{W^{-1,q}}$. Por una parte,

$$\| - u_2 \cdot \nabla k\|_{W^{-1,q}} = \|ku_2\|_{L^q} \leq C|k|\|u_2\|_{L^6} \leq \frac{C}{\nu}|k|\,, \tag{2.14}$$

gracias a la desigualdad de Hölder. Por otra,

$$\begin{aligned} \|\widehat{H}\|_{L^1} &\leq \|u \cdot \nabla k_1\|_{L^1} + \nu\|\nabla u : (\nabla u_1 + \nabla u_2)\|_{L^1} \\ &+ \|k\Phi'(\nabla u_1) : \nabla u_1\|_{L^1} + \|k_2\left(\Phi'(\nabla u_1) : \nabla u_1 - \Phi'(\nabla u_2) : \nabla u_2\right)\|_{L^1}\,. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Estudiaremos la acotación de cada término de (2.15). El primero de ellos cumple

$$\|u \cdot \nabla k_1\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^r}\|\nabla k_1\|_{L^{r'}}\,,$$

donde podemos tomar, por ejemplo, $r = 6$. Resulta entonces que

$$\|u \cdot \nabla k_1\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^6}\|\nabla k_1\|_{L^{6/5}} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}}\|u\| \tag{2.16}$$

(aquí hemos usado (2.10) con $q = 6/5$). El segundo término verifica:

$$\nu\|\nabla u : (\nabla u_1 + \nabla u_2)\|_{L^1} \leq \nu\|u\|(\|u_1\| + \|u_2\|) \leq C\|u\|\,. \tag{2.17}$$

El tercer término verifica:

$$\|k\Phi'(\nabla u_1) : \nabla u_1\|_{L^1} \leq C|k| \cdot \|u_1\| \leq \frac{C}{\nu}|k|\,, \tag{2.18}$$

puesto que Φ' está uniformemente acotada. Por lo que respecta al cuarto, tenemos que

$$\|k_2\left(\Phi'(\nabla u_1) : \nabla u_1 - \Phi'(\nabla u_2) : \nabla u_2\right)\|_{L^1} \leq |k_2| \cdot |\Phi'(\nabla u_1) : \nabla u_1 - \Phi'(\nabla u_2) : \nabla u_2|$$

y, puesto que $D \mapsto \Phi'(D) : D$ es globalmente lipschitziana, queda

$$\|k_2\left(\Phi'(\nabla u_1) : \nabla u_1 - \Phi'(\nabla u_2) : \nabla u_2\right)\|_{L^1} \leq C|k_2| \cdot \|u\| \leq \frac{C}{\nu^{1/2}}\|u\|\,. \tag{2.19}$$

Usando (2.14) y (2.16)–(2.19), obtenemos (2.13), como deseábamos.

Finalmente, demostraremos (2.9). Observemos que, al restar las ecuaciones de la energía satisfechas por k_1 y k_2, sumando y restando los términos $u_2 \cdot \nabla k_1$, $\nabla u_2 : \nabla u_1$ y $k_2\Phi'(\nabla u_1) : \nabla u_1$, resulta:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta v &=& H & \text{en } \Omega\,, \\ v &=& 0 & \text{sobre } \partial\Omega\,. \end{array} \right. \tag{2.20}$$

Por el teorema 1.3, sabemos que $v \in \bigcap_{q<N} W_0^{1,q}$. Teniendo en cuenta que $H \in W^{-1,q}$ y que $\partial\Omega$ es regular, podemos afirmar que

$$\|\nabla v\|_{L^q} \leq C_q\|H\|_{W^{-1,q}} \quad \forall q < N'$$

(cf. [1]). Esto, junto con (2.13), prueba el lema.

Capítulo 3

Algunas generalizaciones en el caso estacionario

3.1 Una generalización del teorema 1.1 (existencia de solución débil-renormalizada)

En esta sección, vamos a considerar un sistema más general que (1.1). En lugar del término $k\Phi'(\nabla u)$, aparecerá la derivada respecto de la segunda variable de una función Ψ que depende de k y ∇u. Además, en la ecuación de la energía, $\mu(k)\nabla k$ será sustituido por un operador de tipo Leray-Lions. Concretamente, el sistema con el que vamos a trabajar es el que sigue:

$$\begin{cases} -\nu\Delta u - \nabla\cdot D_2\Psi(k,\nabla u) + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f\,, \\ \nabla\cdot u = 0\,, \\ -\nabla\cdot(a(x,k,\nabla k) + B(k)) + u\cdot\nabla k = \nu|\nabla u|^2 + D_2\Psi(k,\nabla u) : \nabla u\,. \end{cases} \tag{3.1}$$

Aquí $a : \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ verifica las siguientes hipótesis:

1. a es una función de Carathéodory, i.e.
   - $x \mapsto a(x,s,\xi)$ es medible para todo (s,ξ).
   - $(s,\xi) \mapsto a(x,s,\xi)$ es continua c.p.d. en $x\in\Omega$.
2. $(a(x,s,\xi) - a(x,s,\xi'))\cdot(\xi-\xi') > 0$ para todo (s,ξ), (s,ξ') con $\xi\neq\xi'$, c.p.d. en $x\in\Omega$.

3. $a(x,s,0) = 0$ c.p.d. en $x \in \Omega$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

4. $|a(x,s,\xi)| \leq C_1|s| + C_2|\xi| + d(x)$ donde C_1, C_2 son constantes positivas y $d \in L^2$, para todo $(s,\xi) \in \mathbb{R}^{N+1}$ y c.p.d. en $x \in \Omega$.

5. $a(x,s,\xi) \cdot \xi \geq \mu_0|\xi|^2$ c.p.d. en Ω y para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$, donde μ_0 es un número real positivo.

En lo que sigue, usaremos la notación $a(k,\nabla k)$, $a(k,\nabla v)$, etc. para designar las funciones $x \mapsto a(x,k(x),\nabla k(x))$, $x \mapsto a(x,k(x),\nabla v(x))$, etc. respectivamente. Por otra parte, supondremos que $\Psi : \mathbb{R} \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) \mapsto \mathbb{R}$ verifica:

1. $(s,D) \mapsto \Psi(s,D)$ es C^2 y $D \mapsto D_2\Psi(s,D) : D$ es convexa para cada $s \in \mathbb{R}$.

2. $|D_1D_2\Psi(s,D)| \leq C_3 + C_4|D|^{r-1}$ para constantes positivas C_3, C_4 y $r < 2$ si $N = 2$, $r < 4/3$ si $N = 3$.

3. $\Psi(s,0) = D_1\Psi(s,0) = D_2\Psi(s,0) = 0$.

El sistema (3.1) será completado con las mismas condiciones de contorno consideradas en los Capítulos 1 y 2 (cf. (1.6)).

Nota:
De las hipótesis hechas sobre Ψ, podemos deducir lo siguiente:

- Ψ es una función convexa respecto de la segunda variable y

$$\Psi(s,D) = \int_0^1 D_2\Psi(s,tD) : D\, dt\,.$$

En consecuencia,

$$(D_2\Psi(s,D_1) - D_2\Psi(s,D_2)) : (D_1 - D_2) \geq 0 \qquad \forall D_1, D_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$$

y, en particular,

$$D_2\Psi(s,D) : D \geq 0 \qquad \forall D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N). \tag{3.2}$$

- Se tiene que

$$|D_1\Psi(s,D)| \leq C_3|D| + C_5|D|^r \tag{3.3}$$

para constantes positivas C_3, C_5 y $r < 2$ si $N = 2$, $r < 4/3$ si $N = 3$. En efecto, podemos escribir que

$$D_1\Psi(s,D) = \int_0^1 D_1D_2\Psi(s,tD) : D\,dt\,,$$

de donde

$$\begin{aligned}|D_1\Psi(s,D)| &\leq \int_0^1 |D_1D_2\Psi(s,tD)|\cdot|D|\,dt\\ &\leq \int_0^1 (C_3 + C_4|tD|^{r-1})|D|\,dt \leq C_3|D| + C_5|D|^r\end{aligned}$$

- De forma análoga, se obtiene que

$$|D_2\Psi(s,D)| \leq (C_3 + C_4|D|^{r-1})|s|\,, \tag{3.4}$$

para los mismos valores de r. En efecto, basta escribir que

$$\Psi(s,D) = \int_0^1 D_1\Psi(ts,D)s\,dt$$

y tener en cuenta que

$$\begin{aligned}|D_2\Psi(s,D)| &\leq \int_0^1 |D_2D_1\Psi(ts,D)||s|\,dt\\ &\leq \int_0^1 (C_3 + C_4|D|^{r-1})|s|\,dt = (C_3 + C_5|D|^{r-1})|s|\,.\end{aligned}$$

- Se cumple que

$$|\Psi(s,D)| \leq (C_3|D| + C_5|D|^r)|s| \tag{3.5}$$

para las mismas constantes positivas C_3, C_5 y los mismos valores de r ya que, por ejemplo,

$$|\Psi(s,D)| \leq \int_0^1 |D_1\Psi(ts,D)|\cdot|s|\,dt \leq (C_3|D| + C_5|D|^r)|s|\,.$$

En estas condiciones, se puede demostrar un resultado de existencia análogo al teorema 1.1, con las oportunas modificaciones en (1.4). Más concretamente, tenemos el

Teorema 3.1 *Bajo las hipótesis anteriores para Ψ y $a = a(x,s,\xi)$ y las mismas hipótesis que en el teorema 1.1 para el resto de los datos, existe una terna $\{u,p,k\}$, con $u \in V$, $p \in L^2$ y $k \in \mathcal{L}$, tal que:*

1. *El par* $\{u, p\}$ *es solución de la primera ecuación de* (3.1) *en el sentido de las distribuciones (solución débil).*

2. $k \geq 0$ *y es solución de la tercera ecuación de* (3.1) *en el sentido siguiente (solución renormalizada):*

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot (\beta(k)(a(k, \nabla k) + B(k))) + \beta'(k) \nabla k \cdot (a(k, \nabla k) + B(k)) \\ \quad + \beta(k)(u \cdot \nabla k) = \beta(k) (\nu |\nabla u|^2 + D_2 \Psi(k, \nabla u) : \nabla u) \end{array} \right. \tag{3.6}$$

en $\mathcal{D}'(\Omega)$ *para cada* $\beta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ *con soporte compacto.*

En (3.6), los nuevos términos tienen perfecto sentido, ya que podemos escribir

$$|a(k, \nabla k)| = |a(T_M(k), \nabla T_M(k))| \leq C_1 |T_M(k)| + C_2 |\nabla T_M(k)| + d$$

y esto último está en L^2, de donde $\nabla \cdot (\beta(k)(a(k, \nabla k))) \in H^{-1}$. Por otra parte, $D_2 \Psi(k, \nabla u) : \nabla u \in L^1$. En efecto, gracias a (3.4),

$$|D_2 \Psi(k, \nabla u) : \nabla u| \leq (C_3 + C_4 |\nabla u|^{r-1}) |k| \cdot |\nabla u|$$

y, como veremos más adelante, $k \in L^p$ para cualquier $p < \infty$ si $N = 2$ y para cualquier $p < 3$ si $N = 3$. Así que $|k| \cdot |\nabla u|^r \in L^1$.

Demostración del teorema 3.1

Para demostrar el teorema 3.1, vamos a seguir los pasos del teorema 1.1, viendo únicamente qué novedades aporta la presencia de los términos nuevos.

Introducción de una familia de aproximaciones

Para cada $\varepsilon > 0$ consideramos el correspondiente problema aproximado de (3.1). Las EDP son

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu \Delta u^\varepsilon - \nabla \cdot (D_2 \Psi(k^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon)) + (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = f \,, \\ \nabla \cdot u^\varepsilon = 0 \,, \\ -\nabla \cdot (a(k^\varepsilon, \nabla k^\varepsilon) + B_\varepsilon(k^\varepsilon)) + u^\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon = T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon) \,, \end{array} \right. \tag{3.7}$$

donde ahora τ^ε es:

$$\tau^\varepsilon = \nu \nabla u^\varepsilon + D_2 \Psi(k^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon) \,.$$

Estas ecuaciones se han de verificar en Ω, junto con las condiciones de contorno (1.6).

Para obtener una solución de (3.7), (1.6) podemos aplicar el método de Galerkin del mismo modo que se hizo en la demostración del teorema 1.1. Con la notación del Capítulo 1, para cada $m \geq 1$, ha de resolverse el problema diferencial ordinario

$$\begin{cases} \nu(\nabla u^m, \nabla v) + (D_2\Psi(k^m, \nabla u^m), \nabla v) + ((u^m \cdot \nabla)u^m, v) = \langle f, v\rangle\,, \\ (a(k^m, \nabla k^m), \nabla\psi) + (B_\varepsilon(k^m), \nabla\psi) + (u^m \cdot \nabla k^m, \psi) \\ \qquad = (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^m : \nabla u^m), \psi) \\ \forall v \in V^m\,,\ \forall \psi \in W^m\,. \end{cases} \tag{3.8}$$

Por un lado, debido a (3.2), se tiene que

$$D_2\Psi(k^m, \nabla u^m) : \nabla u^m \geq 0$$

y, como consecuencia de ello,

$$\nu \int_\Omega |\nabla u^m|^2 + \int_\Omega D_2\Psi(k^m, \nabla u^m) : \nabla u^m \leq C\,, \qquad \|u^m\| \leq C\,.$$

Por otro lado, a causa de la quinta hipótesis sobre $a = a(x, s, \xi)$, sabemos que:

$$(a(k^m, \nabla k^m), \nabla k^m) \geq \mu_0 |\nabla k^m|^2$$

y, por tanto,

$$\|k^m\|^2 \leq C(\varepsilon)\,.$$

Esto basta para poder aplicar el lema 1.2 y obtener estimaciones "a priori" adecuadas. Extrayendo subsucesiones si fuera necesario, se llega a que:

$$\begin{aligned} u^m &\to u^\varepsilon && \text{en } V\text{-débil}, \\ u^m &\to u^\varepsilon && \text{en } H \text{ y c.p.d.}, \\ k^m &\to k^\varepsilon && \text{en } H_0^1\text{-débil}, \\ k^m &\to k^\varepsilon && \text{en } L^2 \text{ y c.p.d.} \end{aligned}$$

El paso al límite en la ecuación de movimiento es análogo al que se lleva a cabo en la demostración del teorema 1.1. En el caso de la ecuación de la energía, la situación es diferente debido a la presencia del término $a(k^m, \nabla k^m)$. Es necesario ver que

$$(a(k^m, \nabla k^m), \nabla\psi) \to (a(k^\varepsilon, \nabla k^\varepsilon), \nabla\psi) \quad \forall\psi \in H_0^1\,.$$

Sabemos que $|a(k^m, \nabla k^m)| \leq C_1|k^m| + C_2|\nabla k^m| + d$ está acotado en L^2. Por tanto, $a(k^m, \nabla k^m)$ converge débilmente en L^2 a una función, que llamaremos χ. Falta ver que $\chi = a(k^\varepsilon, \nabla k^\varepsilon)$. Para ello, usaremos el conocido "argumento de Minty"(Minty's trick, cf. [19]; véase también [16]). La convergencia c.p.d. de ∇u^m a ∇u se obtiene del mismo modo en que se prueba que ∇u^ε converge c.p.d. a ∇u, así que omitimos ese paso. Tomamos límites cuando $m \to \infty$ en la ecuación de la energía de (3.8), obteniéndose que:

$$(\chi, \nabla\psi) + (B_\varepsilon(k^\varepsilon), \nabla\psi) + (u^\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon, \psi) = (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon), \psi)\,.$$

Luego

$$-\nabla \cdot \chi = \nabla \cdot B_\varepsilon(k^\varepsilon) - u^\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon + T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon)\,.$$

Eligiendo $\psi^m = k^m$ como función "test" en en la ecuación de la energía de (3.8), se obtiene que:

$$(a(k^m, \nabla k^m), \nabla k^m) = -(B_\varepsilon(k^m), \nabla k^m) - (u^m \cdot \nabla k^m, k^m) + (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^m : \nabla u^m), k^m)\,.$$

Aquí, el segundo miembro converge a $-(B_\varepsilon(k^\varepsilon), \nabla k^\varepsilon) + (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon), k^\varepsilon)$. En consecuencia,

$$(a(k^m, \nabla k^m), \nabla k^m) \to (\chi, \nabla k^\varepsilon)\,.$$

Por otro lado, sea $v \in H_0^1$. Podemos escribir

$$\begin{aligned}
&(a(k^m, \nabla k^m) - a(k^\varepsilon, \nabla v), \nabla(k^m - v)) \\
&= (a(k^m, \nabla k^m) - a(k^m, \nabla v), \nabla(k^m - v)) \\
&+(a(k^m, \nabla v) - a(k^\varepsilon, \nabla v), \nabla(k^m - v))\,.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

De los dos sumandos del segundo miembro de (3.9), el primero es ≥ 0 debido a la segunda hipótesis hecha sobre $a(x, s, \xi)$ y el segundo tiende a cero cuando m tiende a ∞ (recuérdese que $k^m \to k^\varepsilon$ c.p.d.). Así pues, tomando límites en (3.9), se obtienen las desigualdades

$$(\chi - a(k^\varepsilon, \nabla v), \nabla k^\varepsilon - \nabla v) \geq 0 \quad \forall v \in H_0^1\,.$$

Sea $v = k^\varepsilon - \lambda w$ con $\lambda > 0$ y $w \in H_0^1$ dadas. Entonces

$$(\chi - a(k^\varepsilon, \nabla(k^\varepsilon - \lambda w)), \nabla w) \geq 0\,.$$

Tomando límite en este producto escalar cuando $\lambda \to 0$, se tiene que

$$(\chi - a(k^\varepsilon, \nabla k^\varepsilon), \nabla w) \geq 0$$

y esto ha de ser cierto $\forall w \in H_0^1$. Razonanado de modo análogo para $\lambda < 0$, se llega a que

$$(\chi - a(k^\varepsilon, \nabla k^\varepsilon), \nabla w) \leq 0 \quad \forall w \in H_0^1 .$$

En consecuencia, $a(k^\varepsilon, \nabla k^\varepsilon) = \chi$ c.p.d. Después de pasar al límite en (3.8), llegamos a la conclusión de que para cada ε existe un par $\{u^\varepsilon, k^\varepsilon\} \in V \times H_0^1(\Omega)$ tal que:

$$\begin{cases} \nu(\nabla u^\varepsilon, \nabla v) + (D_2\Psi(k^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon), \nabla v) + ((u^\varepsilon \cdot \nabla)u^\varepsilon, v) = \langle f, v\rangle , \\ (a(k^\varepsilon, \nabla k^\varepsilon), \nabla \psi) + (B_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla\psi) + (u^\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon, \psi) = (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon), \psi) , \\ \forall v \in V , \forall \psi \in H_0^1(\Omega) . \end{cases} \tag{3.10}$$

No es difícil probar que, además, $k^\varepsilon \geq 0$.

Estimaciones "a priori" y convergencia débil

Teniendo en cuenta (3.2) y la quinta hipótesis sobre $a(x, s, \xi)$, sin más que repetir el argumento del apartado 1.3.2, se obtienen (1.16), (1.19), (1.20), (1.22),

$$\int_\Omega \left(\nu|\nabla u^\varepsilon|^2 + D_2\Psi(k^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon) : \nabla u^\varepsilon\right) \leq C , \tag{3.11}$$

$$\int_\Omega a(k^\varepsilon, \nabla k^\varepsilon) \cdot \nabla T_M(k^\varepsilon) = \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon) T_M(k^\varepsilon) , \tag{3.12}$$

y

$$\frac{1}{n} \int_{\{n \leq k^\varepsilon \leq 2n\}} a(k^\varepsilon, \nabla k^\varepsilon) \cdot \nabla k^\varepsilon \leq \int_{\{k^\varepsilon \geq n\}} T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon) , \tag{3.13}$$

así como las mismas propiedades de convergencia "débil" para u^ε y para k^ε. También se deduce que $k \geq 0$.

u es, junto con alguna p, solución de la ecuación de movimiento

La ecuación variacional en este caso es:

$$\begin{cases} \nu(\nabla u^\varepsilon, \nabla v - \nabla u^\varepsilon) + ((u^\varepsilon \cdot \nabla)u^\varepsilon, v - u^\varepsilon) + (D_2\Psi(k^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon), \nabla v - \nabla u^\varepsilon) = \langle f, v - u^\varepsilon\rangle \\ \forall v \in V , \quad u^\varepsilon \in V . \end{cases}$$

Para cada $k \in L^2$, definimos

$$J_k(v) = \int_\Omega \Psi(k, \nabla v) \quad \forall v \in V .$$

La función $J_k : V \mapsto \mathbb{R}$ es convexa y C^1, gracias a las hipótesis hechas sobre Ψ. Entonces

$$\langle J_k'(v), w\rangle = \int_\Omega D_2\Psi(k, \nabla v) : \nabla w \qquad \forall v, w \in V$$

y

$$(D_2\Psi(k^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon), \nabla v - \nabla u^\varepsilon) = \langle J'_{k^\varepsilon}(u^\varepsilon), v - u^\varepsilon\rangle$$
$$\leq J_{T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)}(v) - J_{T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)}(u^\varepsilon) = \int_\Omega \Psi(k^\varepsilon, \nabla v) - \int_\Omega \Psi(k^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon).$$

Por tanto, para cada $\varepsilon > 0$, u es solución de la siguiente inecuación variacional:

$$\left\{\begin{array}{l} \nu \int_\Omega \nabla u^\varepsilon : \nabla v + \int_\Omega (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon \cdot v + \int_\Omega \Psi(k^\varepsilon, \nabla v) \\ \geq \nu \int_\Omega |\nabla u^\varepsilon|^2 + \int_\Omega \Psi(k^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon) + \langle f, v - u^\varepsilon\rangle \qquad \forall v \in V\,, \quad u^\varepsilon \in V\,. \end{array}\right. \tag{3.14}$$

Tomando límites en (3.14) cuando $\varepsilon \to 0$, vemos que el tercer término verifica:

$$\int_\Omega \Psi(k^\varepsilon, \nabla v) \to \int_\Omega \Psi(k, \nabla v).$$

En efecto, podemos aplicar el teorema de Lebesgue puesto que, de acuerdo con (3.5),

$$|\Psi(k^\varepsilon, \nabla v)| \leq (C_3|\nabla v| + C_5|\nabla v|^r)|k^\varepsilon|$$

y $\Psi(k^\varepsilon, \nabla v)$ converge c.p.d. Por otra parte, el quinto término de (3.14) puede ser escrito en la forma

$$\int_\Omega \Psi(k^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon) = \int_\Omega (\Psi(k^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon) - \Psi(k, \nabla u^\varepsilon)) + \int_\Omega \Psi(k, \nabla u^\varepsilon).$$

En esta igualdad, la primera integral del segundo miembro tiende a cero, puesto que el integrando converge a 0 c.p.d. y está acotado por una función de L^1. Más precisamente,

$$|\Psi(k^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon) - \Psi(k, \nabla u^\varepsilon)| \leq (C_3|\nabla u^\varepsilon| + C_5|\nabla u^\varepsilon|^r)|k^\varepsilon - k|.$$

Para la segunda integral, se tiene que

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \Psi(k, \nabla u^\varepsilon) \geq \int_\Omega \Psi(k, \nabla u),$$

debido a que

$$v \mapsto \int_\Omega \Psi(k, \nabla v)$$

es convexa (por serlo Ψ) y continua.

Procediendo con los demás términos de (3.14) como en la demostración del teorema 1.1, llegamos a que

$$\left\{\begin{array}{l} \nu \int_\Omega \nabla u : (\nabla v - \nabla u) + \int_\Omega (u \cdot \nabla) u \cdot (v - u) + \int_\Omega \Psi(k, \nabla v) \\ - \int_\Omega \Psi(k, \nabla u) \geq \langle f, v - u\rangle \qquad \forall v \in V\,, \quad u \in V \end{array}\right.$$

y

$$\nu \int_\Omega \nabla u : \nabla w + \int_\Omega (u \cdot \nabla) u \cdot w + \int_\Omega D_2\Psi(k, \nabla u) : \nabla w = \langle f, w\rangle \qquad \forall w \in V\,. \tag{3.15}$$

u^ε converge fuertemente en V

De modo análogo a como hicimos en el apartado 1.3.4., obtenemos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \Big(\nu|\nabla u^\varepsilon|^2 + D_2\Psi(k^\varepsilon,\nabla u^\varepsilon):\nabla u^\varepsilon\Big) = \int_\Omega \Big(\nu|\nabla u|^2 + D_2\Psi(k,\nabla u):\nabla u\Big)\,. \qquad (3.16)$$

Dado que

$$|(D_2\Psi(k^\varepsilon,\nabla u^\varepsilon) - D_2\Psi(k,\nabla u^\varepsilon)):\nabla u^\varepsilon| \le (C_3|\nabla u^\varepsilon| + C_4|\nabla u^\varepsilon|^{r-1})|\nabla u^\varepsilon|\cdot|k^\varepsilon - k|\,,$$

y, además $(D_2\Psi(k^\varepsilon,\nabla u^\varepsilon)-D_2\Psi(k,\nabla u^\varepsilon)):\nabla u^\varepsilon$ converge c.p.d. a cero, también es cierto que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega (D_2\Psi(k^\varepsilon,\nabla u^\varepsilon) - D_2\Psi(k,\nabla u^\varepsilon)):\nabla u^\varepsilon = 0\,. \qquad (3.17)$$

De (3.16) y (3.17), se tiene que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \Big(\nu|\nabla u^\varepsilon|^2 + D_2\Psi(k,\nabla u^\varepsilon):\nabla u^\varepsilon\Big) = \int_\Omega \Big(\nu|\nabla u|^2 + D_2\Psi(k,\nabla u):\nabla u\Big)\,.$$

Escribiendo aquí $u^\varepsilon = u + (u^\varepsilon - u)$ y tomando límites cuando $\varepsilon \to 0$, se obtiene

$$\begin{aligned}0 \ge &\limsup_{\varepsilon\to 0}\Big(\nu\int_\Omega |\nabla(u^\varepsilon - u)|^2\Big)\\ &+\liminf_{\varepsilon\to 0}\Big(\int_\Omega D_2\Psi(k,\nabla u^\varepsilon):\nabla u^\varepsilon - \int_\Omega D_2\Psi(k,\nabla u):\nabla u\Big).\end{aligned} \qquad (3.18)$$

Pero

$$v \mapsto \int_\Omega D_2\Psi(k,\nabla v):\nabla v$$

es una función débilmente s.c.i (es convexa por serlo $D \to D_2\Psi(k,D):D$ y también es continua). Por tanto, el último sumando de (3.18) es no negativo y

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega |\nabla(u^\varepsilon - u)|^2 = 0\,,$$

i.e. u^ε converge fuertemente en V.

Para cada $M > 0$, $a(k^\varepsilon,\nabla T_M(k^\varepsilon))\cdot\nabla T_M(k^\varepsilon)$ converge fuertemente en L^1

Adaptaremos un argumento que aparece en [8]. Admitamos por el momento que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega [a(k^\varepsilon,\nabla T_M(k^\varepsilon)) - a(k^\varepsilon,\nabla T_M(k))]\cdot\nabla(T_M(k^\varepsilon) - T_M(k)) = 0\,. \qquad (3.19)$$

Dado que el integrando precedente es no negativo, se tendrá que

$$[a(k^\varepsilon,\nabla T_M(k^\varepsilon)) - a(k^\varepsilon,\nabla T_M(k))]\cdot\nabla(T_M(k^\varepsilon) - T_M(k)) \to 0 \quad \text{en} \quad L^1.$$

Si llamamos χ al límite débil de $a(k^\varepsilon, \nabla T_M(k^\varepsilon))$ en L^2, haciendo tender ε a 0 en (3.19), se deduce que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega a(k^\varepsilon, \nabla T_M(k^\varepsilon))\cdot\nabla T_M(k^\varepsilon) = \int_\Omega \chi\cdot\nabla T_M(k)\,.$$

Aplicando de nuevo el "argumento de Minty", como hicimos para las aproximaciones de Galerkin, se puede probar que $\chi = a(\nabla k, \nabla T_M(k))$. Tenemos pues que

$$\begin{aligned} a(k^\varepsilon, \nabla T_M(k^\varepsilon))\cdot\nabla T_M(k^\varepsilon) &= [a(k^\varepsilon, \nabla T_M(k^\varepsilon)) - a(k^\varepsilon, \nabla T_M(k))]\cdot\nabla(T_M(k^\varepsilon) - T_M(k)) \\ &+ a(k^\varepsilon, \nabla T_M(k))\cdot\nabla(T_M(k^\varepsilon) - T_M(k)) + a(k^\varepsilon, \nabla T_M(k^\varepsilon))\cdot\nabla T_M(k) \end{aligned}$$

converge débilmente en L^1 hacia $a(k, \nabla T_M(k))\cdot\nabla T_M(k)$, lo cual será suficiente para nuestros propósitos. Para probar (3.19), descomponemos la integral como sigue

$$\begin{aligned} &\int_\Omega [a(k^\varepsilon, \nabla T_M(k^\varepsilon)) - a(k^\varepsilon, \nabla T_M(k))]\cdot\nabla(T_M(k^\varepsilon) - T_M(k)) \\ &= \int_{\{k^\varepsilon\le M,\, k\le M\}} [a(k^\varepsilon, \nabla T_M(k^\varepsilon)) - a(k^\varepsilon, \nabla T_M(k))]\cdot\nabla(T_M(k^\varepsilon) - T_M(k)) \\ &+ \int_{\Omega\setminus\{k^\varepsilon\le M,\, k\le M\}} [a(k^\varepsilon, \nabla T_M(k^\varepsilon)) - a(k^\varepsilon, \nabla T_M(k))]\cdot\nabla(T_M(k^\varepsilon) - T_M(k)) \end{aligned}$$

La última integral puede a su vez escribirse como suma de dos:

$$\int_{\{k^\varepsilon > M\}} a(k^\varepsilon, \nabla T_M(k))\cdot\nabla T_M(k) + \int_{\{k^\varepsilon\le M\,, k>M\}} a(k^\varepsilon, \nabla k^\varepsilon)\cdot\nabla k^\varepsilon\,,$$

Aplicando el lema de Fatou, deducimos que ambas tienden a cero. Por ejemplo, en el caso de la primera de ellas, se tiene:

$$\begin{aligned} &\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_{\{k^\varepsilon > M\}} |a(k^\varepsilon, \nabla T_M(k))\cdot\nabla T_M(k)| \\ &= \limsup_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega |a(k^\varepsilon, \nabla T_M(k))\cdot\nabla T_M(k)|\mathbb{1}_{\{k^\varepsilon > M\}} \\ &\le \int_\Omega \limsup_{\varepsilon\to 0} |a(k^\varepsilon, \nabla T_M(k))\cdot\nabla T_M(k)|\mathbb{1}_{\{k^\varepsilon > M\}} \\ &\le \int_{\{k\ge M\}} a(k, \nabla T_M(k))\cdot\nabla T_M(k) = 0\,. \end{aligned}$$

Tan sólo hace falta probar, por tanto, que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\{k^\varepsilon\le M\,, k\le M\}} [a(k^\varepsilon, \nabla T_M(k^\varepsilon)) - a(k^\varepsilon, \nabla T_M(k))]\cdot\nabla(T_M(k^\varepsilon) - T_M(k)) = 0\,.$$

Para ello, elegiremos dos enteros $i, j \ge 1$ y tendremos en cuenta que

$$0 \le \int_{\{k^\varepsilon\le M\,, k\le M\}} [a(k^\varepsilon, \nabla T_M(k^\varepsilon)) - a(k^\varepsilon, \nabla T_M(k))]\cdot\nabla(T_M(k^\varepsilon) - T_M(k)) \le I_{ij} + I\!I_i\,,$$

donde

$$I_{ij} = \int_{\{k^\varepsilon \leq M,\, k \leq M\,, |k^\varepsilon - k| \leq i\}} [a(k^\varepsilon, \nabla k^\varepsilon) - a(k^\varepsilon, \nabla k)] \nabla(k^\varepsilon - k)\,,$$

$$\mathit{II}_i = \int_{\{k^\varepsilon \leq M,\, k \leq M\,, |k^\varepsilon - k| > i\}} [a(k^\varepsilon, \nabla k^\varepsilon) - a(k^\varepsilon, \nabla k)] \cdot \nabla(k^\varepsilon - k)\,.$$

Veremos sucesivamente que, para cada i,

$$\lim_{j \to \infty} \limsup_{\varepsilon \to 0} I_{ij} = 0 \tag{3.20}$$

y que, cuando $i \geq 2M$,

$$\mathit{II}_i = 0\,. \tag{3.21}$$

Para ello, tomamos en primer lugar $T_i(k^\varepsilon - T_j(k))$ como función "test" en la ecuación de la energía. Se obtiene:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega a(k^\varepsilon, \nabla k^\varepsilon) \cdot \nabla T_i(k^\varepsilon - T_j(k)) + \int_\Omega B_\varepsilon(k^\varepsilon) \cdot \nabla T_i(k^\varepsilon - T_j(k)) \\ &+ \int_\Omega (u^\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon) T_i(k^\varepsilon - T_j(k)) = \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon) T_i(k^\varepsilon - T_j(k))\,. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Estudiamos a continuación el comportamiento de cada término de (3.22) cuando $\varepsilon \to 0$. El segundo de ellos puede ser escrito como:

$$\int_\Omega B_\varepsilon(T_{i+j}(k^\varepsilon)) \cdot \nabla T_i(k^\varepsilon - T_j(k))\,.$$

Aquí, $\nabla T_i(k^\varepsilon - T_j(k))$ converge a $\nabla T_i(k - T_j(k))$ débilmente en L^2 y $B_\varepsilon(T_{i+j}(k^\varepsilon))$ converge fuertemente a $B_\varepsilon(T_{i+j}(k))$ en L^p para cualquier p finito. Por tanto, el segundo término de (3.22) converge a

$$\int_\Omega B(T_{i+j}(k)) \cdot \nabla T_i(k - T_j(k))$$

que se anula gracias a la fórmula de Gauss. El tercer sumando de (3.22) puede descomponerse como sigue:

$$\int_\Omega u^\varepsilon \cdot (\nabla k^\varepsilon - \nabla T_j(k))\, T_i(k^\varepsilon - T_j(k)) + \int_\Omega (u^\varepsilon \cdot \nabla T_j(k))\, T_i(k^\varepsilon - T_j(k))\,. \tag{3.23}$$

La primera integral de (3.23) es igual a

$$\begin{gathered} \int_\Omega u^\varepsilon \cdot \nabla \widetilde{T}_i(k^\varepsilon - T_j(k)) = \\ - \int_\Omega (\nabla \cdot u^\varepsilon) \widetilde{T}_i(k^\varepsilon - T_j(k)) + \int_{\partial\Omega} \widetilde{T}_i(k^\varepsilon - T_j(k))(u^\varepsilon \cdot \mathrm{n})\, d\Gamma = 0\,. \end{gathered}$$

La segunda converge a

$$\int_\Omega (u \cdot \nabla T_j(k))\, T_i(k - T_j(k))\,.$$

Pero esta última integral es cero, puesto que $\nabla T_j(k)$ se anula donde no lo hace el factor $T_i(k^\varepsilon - T_j(k))$. Por la etapa anterior, sabemos que

$$T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon) \to \tau : \nabla u \quad \text{en } L^1 \text{ y c.p.d.,} \tag{3.24}$$

donde $\tau = \nu \nabla u + D_2\Psi(k, \nabla u)$. En consecuencia, el segundo miembro de (3.22) tiende a

$$\int_\Omega (\tau : \nabla u)\, T_i(k - T_j(k))\,.$$

Deducimos pues que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega a(k^\varepsilon, \nabla k^\varepsilon) \cdot \nabla T_i(k^\varepsilon - T_j(k)) = \int_\Omega (\tau : \nabla u) T_i(k - T_j(k))\,.$$

Obsérvese que

$$0 \le I_{ij} \le \int_{\{k^\varepsilon \le M\,, |k^\varepsilon - T_j(k)| \le i\}} (a(k^\varepsilon, \nabla k^\varepsilon) - a(k^\varepsilon, \nabla k)) \cdot \nabla T_i(k^\varepsilon - T_j(k))\,.$$

Por tanto,

$$0 \le \limsup_{\varepsilon \to 0} I_{ij} \le \int_\Omega (\tau : \nabla u) T_i(k - T_j(k)) - \int_\Omega a(k, \nabla k) \nabla T_i(k - T_j(k))\,.$$

Ahora tomamos límites, cuando $j \to \infty$. En tal caso, $T_i(k - T_j(k))$ converge a cero tanto en L^∞-débil$*$ como c.p.d. y en H_0^1-débil. Luego la igualdad (3.20) es cierta. Finalmente, observamos que

$$\{k^\varepsilon \le M\,, k \le M\} \subset \{|k^\varepsilon - k| \le M\}\,.$$

Por tanto, para $i \ge 2M$, se tiene efectivamente que $\mathbb{I}_i = 0$.

k es solución renormalizada

Sea $\beta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ con soporte en $[-M, M]$ y sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Usando $\beta(k^\varepsilon)\varphi$ como función "test" en la ecuación de la energía de (3.7), obtenemos una expresión análoga a (1.42) salvo en el segundo y tercer sumando, que ahora quedan así:

$$\int_\Omega (a(k^\varepsilon, \nabla k^\varepsilon) \cdot \nabla \varphi) \beta(k^\varepsilon)\,, \qquad \int_\Omega (a(k^\varepsilon, \nabla k^\varepsilon) \cdot \nabla \beta(k^\varepsilon)) \varphi\,. \tag{3.25}$$

Gracias a la etapa anterior, sabemos que

$$a(k^\varepsilon, \nabla T_M(k^\varepsilon)) \cdot \nabla T_M(k^\varepsilon) \to a(k, \nabla T_M(k)) \cdot \nabla T_M(k) \quad \text{en } L^1\,.$$

Esto es suficiente para pasar al límite en (3.25).

3.2 Existencia de solución débil cuando $B \in W^{1,\infty}$.

Se puede probar un resultado análogo al teorema 1.3 cuando $B \not\equiv 0$, a condición de ser $B \in W^{1,\infty}$. Más precisamente, tenemos:

Teorema 3.2 *Supongamos que, en las condiciones del teorema 1.1, $B \in W^{1,\infty}$ y $k\Phi'(\nabla u)$ es sustituido por $D_2\Psi(k,\nabla u)$, donde Ψ está en las condiciones de la sección precedente. Entonces la solución $\{u,p,k\}$ que proporciona este resultado también verifica:*

$$\tilde{\mu}(k) \in \bigcap_{q<N'} W_0^{1,q}, \quad \nabla\tilde{\mu}(k) = \mu(k)\nabla k \tag{3.26}$$

y

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_\Omega \mu(k)\nabla k \cdot \nabla\phi + \int_\Omega B(k)\cdot\nabla\phi \\ & \qquad + \int_\Omega (u\cdot\nabla k)\phi = \int_\Omega \left(\nu|\nabla u|^2 + D_2\Psi(k,\nabla u) : \nabla u\right)\phi \qquad \forall\phi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{aligned} \right. \tag{3.27}$$

Demostración

Es análoga a la del teorema 1.3, con

$$F^\varepsilon = T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\nu\nabla u^\varepsilon + D_2\Psi(k^\varepsilon,\nabla u^\varepsilon) : \nabla u^\varepsilon) - u^\varepsilon\cdot\nabla k^\varepsilon + \nabla\cdot B_\varepsilon(k^\varepsilon),$$

$$F = \nu\nabla u + D_2\Psi(k,\nabla u) : \nabla u - u\cdot\nabla k + \nabla\cdot B(k).$$

Como $\nabla\cdot B_\varepsilon(k^\varepsilon) = B'(k^\varepsilon)\cdot\nabla k^\varepsilon$, donde $B'(k^\varepsilon)$ converge fuertemente a $B'(k)$ en L^r para cada r finito y ∇k^ε converge fuertemente a ∇k en L^q para cada $q < N'$, también en este caso $F^\varepsilon \to F$ en L^1.

3.3 Condiciones de contorno no homogéneas

A continuación, consideraremos el problema (1.1) con las condiciones de contorno no homogéneas

$$u = u_\Gamma, \quad k = k_\Gamma \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \tag{3.28}$$

donde u_Γ y k_Γ son constantes y $k_\Gamma > 0$. Podemos enunciar el siguiente

Teorema 3.3 *Bajo las hipótesis del teorema 1.1, existe $\{u,p,k\}$, con $u - u_\Gamma \in V$, $p \in L^2$, $k - k_\Gamma \in \mathcal{L}$, tal que:*

1. *El par $\{u,p\}$ es solución de la primera ecuación de (1.1) en el sentido de las distribuciones (solución débil).*

2. *$k \geq k_\Gamma$ y es solución de la tercera ecuación de (1.1) en el sentido siguiente:*

$$\left\{\begin{aligned} & -\nabla\cdot(\beta(k-k_\Gamma)(\mu(k)\nabla k + B(k))) + \beta'(k-k_\Gamma)\nabla k\cdot(\mu(k)\nabla k + B(k)) \\ & \quad + \beta(k-k_\Gamma)(u\cdot\nabla k) = \beta(k-k_\Gamma)\,(\nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u) \end{aligned}\right. \tag{3.29}$$

en $\mathcal{D}'(\Omega)$ para cada $\beta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ con soporte compacto (se dice de nuevo que k es una solución renormalizada).

Demostración

Si efectuamos el cambio de variables $w = u - u_\Gamma$ y $h = k - k_\Gamma$, el sistema (1.1) se transforma en el siguiente:

$$\left\{\begin{aligned} & -\nu\Delta w - \nabla\cdot((h+k_\Gamma)\Phi'(\nabla w)) + ((w+u_\Gamma)\cdot\nabla)w + \nabla p = f\,, \\ & \nabla\cdot w = 0\,, \\ & -\nabla\cdot\Big(\mu^\Gamma(h)\nabla h + B^\Gamma(h)\Big) + (w+u_\Gamma)\cdot\nabla h \\ & = \nu|\nabla w|^2 + (h+k_\Gamma)\Phi'(\nabla w) : \nabla w\,. \end{aligned}\right. \tag{3.30}$$

Aquí, hemos introducido la notacion $\mu^\Gamma(r) \equiv \mu(r+k_\Gamma)$, $B^\Gamma(r) \equiv B(r+k_\Gamma)$. Las propiedades de estas funciones son las mismas que las de μ y B, respectivamente. Los problemas aproximados son:

$$\left\{\begin{aligned} & -\nu\Delta w^\varepsilon - \nabla\cdot\Big(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon+k_\Gamma)_+\Phi'(\nabla w^\varepsilon)\Big) + ((w^\varepsilon+u_\Gamma)\cdot\nabla)w^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = f\,, \\ & \nabla\cdot w^\varepsilon = 0\,, \\ & -\nabla\cdot\Big(\mu^\Gamma_\varepsilon(h^\varepsilon)\nabla h^\varepsilon + B^\Gamma_\varepsilon(h^\varepsilon)\Big) + (w^\varepsilon+u_\Gamma)\cdot\nabla h^\varepsilon \\ & = T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\nu|\nabla w^\varepsilon|^2 + T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon+k_\Gamma)_+\Phi'(\nabla w^\varepsilon) : \nabla w^\varepsilon)\,, \end{aligned}\right. \tag{3.31}$$

junto con las condiciones de contorno homogéneas

$$w^\varepsilon = 0, \quad h^\varepsilon = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega\,. \tag{3.32}$$

Para cada $\varepsilon > 0$, se obtiene una solución $\{w^\varepsilon, h^\varepsilon\} \in V \times H^1_0(\Omega)$, del mismo modo que en la demostración del teorema 1.1. También, $h^\varepsilon \geq 0$ puesto que

$$T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon+k_\Gamma)_+\Phi'(\nabla w^\varepsilon) : \nabla w^\varepsilon \geq 0\,.$$

Por la misma razón, se tiene que

$$\|w^\varepsilon\| \leq C\,.$$

y

$$\int_\Omega \left(\nu|\nabla w^\varepsilon|^2 + T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon + k_\Gamma)\Phi'(\nabla w^\varepsilon) : \nabla w^\varepsilon\right) \leq C\,.$$

Igualmente, se obtiene:

$$\int_\Omega \mu_\varepsilon^\Gamma(h^\varepsilon)|\nabla T_M(h^\varepsilon)|^2 = \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}} \left(\nu|\nabla w^\varepsilon|^2 + T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon + k_\Gamma)\Phi'(\nabla w^\varepsilon) : \nabla w^\varepsilon\right) T_M(h^\varepsilon)\,,$$

$$\|T_M(h^\varepsilon)\|^2 \leq C \cdot M\,,$$

$$\frac{1}{n}\int_{n\leq h^\varepsilon \leq 2n} \mu_\varepsilon^\Gamma(h^\varepsilon)|\nabla h^\varepsilon|^2 \leq \int_{h^\varepsilon \geq n} T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla w^\varepsilon)\,,$$

donde $\tau^\varepsilon = \nu\nabla w^\varepsilon + T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon + k_\Gamma)\Phi'(\nabla w^\varepsilon)$,

$$\frac{1}{n}\int_{\{n\leq h^\varepsilon \leq 2n\}} |\nabla h^\varepsilon|^2 \leq C$$

y

$$\|h^\varepsilon\|_{W_0^{1,q}} \leq C_q\,, \qquad \forall q < N'\,.$$

En consecuencia, se obtienen las mismas propiedades de convergencia "débil" para w^ε y h^ε que para u^ε y k^ε. En particular, h^ε converge hacia una función no negativa.

Para pasar al límite en la ecuación de movimiento, escribimos que

$$\begin{aligned}(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon + k_\Gamma)\Phi'(\nabla w^\varepsilon), \nabla v - \nabla w^\varepsilon) &= \langle J'_{T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon + k_\Gamma)}(w^\varepsilon), v - w^\varepsilon\rangle \\ &\leq \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon + k_\Gamma)\Phi(\nabla v) - \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon + k_\Gamma)\Phi(\nabla w^\varepsilon)\,.\end{aligned}$$

y trabajamos, para cada $\varepsilon > 0$, con la siguiente inecuación variacional:

$$\begin{cases} \nu\displaystyle\int_\Omega \nabla w^\varepsilon : (\nabla v - \nabla w^\varepsilon) + \int_\Omega ((w^\varepsilon + u_\Gamma)\cdot\nabla)w^\varepsilon \cdot (v - w^\varepsilon) + \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon + k_\Gamma)\Phi(\nabla v) \\ -\displaystyle\int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon + k_\Gamma)\Phi(\nabla w^\varepsilon) \geq \langle f, v - w^\varepsilon\rangle \qquad \forall v \in V\,, \quad w^\varepsilon \in V\,. \end{cases}$$

El paso al límite puede hacerse del mismo modo que en el apartado 1.3.3 si escribimos lo correspondiente a (1.26) como sigue

$$\int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon + k_\Gamma)\Phi(\nabla w^\varepsilon) = \int_\Omega (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon + k_\Gamma) - (h + k_\Gamma))\Phi(\nabla w^\varepsilon) + \int_\Omega (h + k_\Gamma)\Phi(\nabla w^\varepsilon)\,.$$

Se llega entonces a las igualdades

$$\nu\int_\Omega \nabla w : \nabla v + \int_\Omega ((w+u_\Gamma)\cdot\nabla)w\cdot v + \int_\Omega (h+k_\Gamma)\Phi'(\nabla w):\nabla v = \langle f, v\rangle \qquad \forall v\in V\,.$$

Para la convergencia fuerte de w^ε en V, se procede como en la cuarta etapa de la demostración del teorema 1.1. Partiendo de la igualdad

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \left(\nu|\nabla w^\varepsilon|^2 + T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon+k_\Gamma)\Phi'(\nabla w^\varepsilon):\nabla w^\varepsilon\right) = \int_\Omega\left(\nu|\nabla w|^2 + (h+k_\Gamma)\Phi'(\nabla w):\nabla w\right),$$

puesto que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon+k_\Gamma)-(h+k_\Gamma))\Phi'(\nabla w^\varepsilon):\nabla w^\varepsilon = 0\,,$$

se tiene:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \left(\nu|\nabla w^\varepsilon|^2 + (h+k_\Gamma)\Phi'(\nabla w^\varepsilon):\nabla w^\varepsilon\right) = \int_\Omega\left(\nu|\nabla w|^2 + (h+k_\Gamma)\Phi'(\nabla w):\nabla w\right).$$

De aquí, se deduce que

$$\begin{aligned}0 \geq \limsup_{\varepsilon\to 0}&\left(\nu\int_\Omega |\nabla(w^\varepsilon - w)|^2\right)\\ &+\liminf_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\Omega (h+k_\Gamma)\Phi'(\nabla w^\varepsilon):\nabla w^\varepsilon - \int_\Omega (h+k_\Gamma)\Phi'(\nabla w):\nabla w\right)\end{aligned}$$

y, debido a que la función

$$v\mapsto \int_\Omega (h+k_\Gamma)\Phi'(\nabla v):\nabla v$$

es débilmente s.c.i., se llega a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega |\nabla(w^\varepsilon - w)|^2 = 0\,.$$

Por último, veamos que también hay convergencia fuerte de $T_M(h^\varepsilon)$ en H_0^1 para cada $M>0$. Queremos probar, al igual que en el apartado 1.3.5, que

$$\int_\Omega (\tau:\nabla w)T_M(h) = \int_\Omega \mu^\Gamma(h)|\nabla T_M(h)|^2\,,$$

donde $\tau = \nu\nabla w + (h+k_\Gamma)\Phi'(\nabla w)$. Tomando $w_n^\varepsilon = T_M(h)L_n(h^\varepsilon)$ como función "test" en la ecuación de la energía de (3.31), obtenemos:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left(\mu_\varepsilon^\Gamma(h^\varepsilon)\nabla h^\varepsilon\cdot\nabla T_M(h)\right)L_n(h^\varepsilon)\\ &\quad+\int_\Omega\left(\mu_\varepsilon^\Gamma(h^\varepsilon)\nabla h^\varepsilon\cdot\nabla L_n(h^\varepsilon)\right)T_M(h)\\ &\quad+\int_\Omega\left(B_\varepsilon^\Gamma(h^\varepsilon)\cdot\nabla T_M(h)\right)L_n(h^\varepsilon)\\ &\quad+\int_\Omega\left(B_\varepsilon^\Gamma(h^\varepsilon)\cdot\nabla L_n(h^\varepsilon)\right)T_M(h)\\ &\quad+\int_\Omega ((w^\varepsilon+u_\Gamma)\cdot\nabla h^\varepsilon)T_M(h)L_n(h^\varepsilon) = \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon:\nabla w^\varepsilon)T_M(h)L_n(h^\varepsilon)\,.\end{aligned}\tag{3.33}$$

El quinto término de (3.33) converge a

$$\int_\Omega ((w+u_\Gamma)\cdot\nabla T_{2n}(h))\,T_M(h)L_n(h)\,,$$

ya que $w^\varepsilon + u_\Gamma \to w + u_\Gamma$ fuertemente en L^r para todo $r < 2^*$, y esta última integral puede escribirse como sigue:

$$\int_\Omega ((w+u_\Gamma)\cdot\nabla T_{2n}(h))\,T_M(T_{2n}(h))L_n(T_{2n}(h)) = \int_\Omega (w+u_\Gamma)\cdot\nabla\widetilde{\Psi}_{n,M}(T_{2n}(h)) =$$
$$-\int_\Omega \widetilde{\Psi}_{n,M}(T_{2n}(h))(\nabla\cdot(w+u_\Gamma)) + \int_{\partial\Omega}\widetilde{\Psi}_{n,M}(T_{2n}(h))(w+u_\Gamma)\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma = 0\,.$$

El comportamiento del resto de los términos de (3.33) es análogo al de los que aparecen en (1.35). Así pues,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \mu_\varepsilon^\Gamma(h^\varepsilon)|\nabla T_M(h^\varepsilon)|^2 = \int_\Omega \mu^\Gamma(h)|\nabla T_M(h)|^2\,.$$

Sea $\beta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, con soporte en $[-M,M]$. Veamos que se da la igualdad (3.29) en $\mathcal{D}'(\Omega)$. Elegimos pues $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ y usamos $\beta(h^\varepsilon)\varphi$ como función "test" en la ecuación de la energía de (3.31). Teniendo en cuenta que

$$\nabla(\beta(h^\varepsilon)\varphi) = \beta(h^\varepsilon)\nabla\varphi + \varphi\nabla\beta(h^\varepsilon)\,,$$

resulta:

$$\int_\Omega \mu_\varepsilon^\Gamma(h^\varepsilon)(\nabla h^\varepsilon\cdot\nabla\varphi)\beta(h^\varepsilon) + \int_\Omega \mu_\varepsilon^\Gamma(h^\varepsilon)(\nabla h^\varepsilon\cdot\nabla\beta(h^\varepsilon))\varphi$$
$$+\int_\Omega (B_\varepsilon^\Gamma(h^\varepsilon)\cdot\nabla\varphi)\beta(h^\varepsilon) + \int_\Omega (B_\varepsilon^\Gamma(h^\varepsilon)\cdot\nabla\beta(h^\varepsilon))\varphi$$
$$+\int_\Omega ((w^\varepsilon+u_\Gamma)\cdot\nabla h^\varepsilon)\,\beta(h^\varepsilon)\varphi = \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon:\nabla w^\varepsilon)\,\beta(h^\varepsilon)\varphi\,.$$

Del mismo modo a como se hace en la sexta etapa de la demostración del teorema 1.1, podemos pasar al límite en la expresión anterior, llegándose a que

$$\int_\Omega \mu^\Gamma(h)(\nabla h\cdot\nabla\varphi)\beta(h) + \int_\Omega \mu^\Gamma(h)(\nabla h\cdot\nabla\beta(h))\varphi$$
$$+\int_\Omega (B^\Gamma(h)\cdot\nabla\varphi)\beta(h) + \int_\Omega (B^\Gamma(h)\cdot\nabla\beta(h))\varphi$$
$$+\int_\Omega ((w+u_\Gamma)\cdot\nabla h)\,\beta(h)\varphi = \int_\Omega (\tau:\nabla w)\,\beta(h)\varphi\,,$$

lo cual prueba el teorema.

3.4 Una generalización del teorema 2.1 (unicidad para grandes valores de ν)

En esta sección, vamos a dar un resultado de unicidad de solución en el caso en que B no se anula pero es globalmente lipschitziana y, al mismo tiempo, el término $k\Phi'(\nabla u)$ es sustituido por $D_2\Psi(k,\nabla u)$, con Ψ en las mismas condiciones de la sección 3.1.

Teorema 3.4 *Supongamos que, en las condiciones del teorema 3.2, se tiene además que $B \in W^{1,\infty}(\mathbb{R};\mathbb{R}^N)$ y*

$$|D_2\Psi(s,D):D - D_2\Psi(s,D'):D'| \le C|k|\cdot|D-D'|^r$$
$$\text{para } 1 < r < \begin{cases} 2 & si \quad N=2, \\ 4/3 & si \quad N=3. \end{cases} \tag{3.34}$$

Entonces existen $\nu_0 > 0$ y $\beta_0 > 0$ tales que, cuando $\nu \ge \nu_0$ y $\|B'\|_{L^\infty} \le \beta_0$, existe a lo más una solución débil $\{u,p,k\}$ del sistema correspondiente con $k \ge 0$ (la presión es única salvo una constante aditiva).

Demostración

Sea $\{u_i,k_i,p_i\}$ para cada $i = 1,2$, una solución con $k_i \ge 0$. Tomamos $u = u_1 - u_2$, $k = k_1 - k_2$ y $p = p_1 - p_2$. Procediendo como en el teorema 2.1, se tiene que

$$\|u_i\| \le \frac{C}{\nu} \quad \text{para} \quad i = 1,2, \tag{3.35}$$

puesto que $D_2\Psi(k_i,\nabla u_i):\nabla u_i \ge 0$.

Restando las ecuaciones verificadas por u_1 y u_2, se obtiene fácilmente que

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u_1 + (u_2\cdot\nabla)u + \nabla p \\ \qquad = \nabla\cdot(D_2\Psi(k_1,\nabla u_1) - D_2\Psi(k_2,\nabla u_1)) \\ \qquad +\nabla\cdot(k_2(D_2\Psi(k_2,\nabla u_1) - D_2\Psi(k_2,\nabla u_2)) \,, \\ \nabla\cdot u = 0\,. \end{cases} \tag{3.36}$$

Usando u como función “test” en (3.36), llegamos a la igualdad

$$\begin{aligned} \nu\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega (u\nabla\cdot)u_1\cdot u + \int_\Omega (u_2\cdot\nabla)u\cdot u \\ = -\int_\Omega (D_2\Psi(k_1,\nabla u_1) - D_2\Psi(k_2,\nabla u_1)) : \nabla u \\ -\int_\Omega (k_2(D_2\Psi(k_2,\nabla u_1) - D_2\Psi(k_2,\nabla u_2)) : \nabla u\,. \end{aligned} \tag{3.37}$$

El tercer sumando de (3.37) es nulo y el último es positivo, debido a la convexidad de Ψ respecto de su segunda variable, así que

$$\nu\|u\|^2 \leq -\int_\Omega (D_2\Psi(k_1,\nabla u_1) - D_2\Psi(k_2,\nabla u_1)) : \nabla u - \int_\Omega (u\cdot\nabla)u_1\cdot u\,. \tag{3.38}$$

La última integral de (3.38) se puede acotar del mismo modo que en el teorema 2.1. es decir

$$\left| -\int_\Omega (u\cdot\nabla)u_1\cdot u\right| \leq C\|u\|^2_{L^4}\|u_1\| \leq C\|u\|^2\cdot\|u_1\|\,. \tag{3.39}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la segunda hipótesis hecha sobre Ψ, se tiene que

$$\int_\Omega |D_2\Psi(k_1,\nabla u_1) - D_2\Psi(k_2,\nabla u_1)|\cdot|\nabla u| \leq \int_\Omega (C_3 + C_4|\nabla u_1|^{r-1})|k|\cdot|\nabla u|$$
$$\leq C|k|\cdot\|u\| + C\int_\Omega |k|\cdot|\nabla u_1|^{r-1}\cdot|\nabla u| \leq C|k|\cdot\|u\| + C\|k\|_{L^p}\cdot\|u_1\|\cdot\|u\|\,,$$

para $p = \dfrac{2}{2-r}$. Recordando los valores dados para r, debe ser $2 \leq p < \infty$ si $N = 2$ y $2 \leq p < 3$ si $N = 3$. Teniendo en cuenta (3.35), de (3.38) se deduce que

$$\nu\|u\|^2 \leq C|k|\cdot\|u\| + \frac{C}{\nu}\|k\|_{L^p}\|u\| + \frac{C}{\nu}\|u\|^2\,,$$

y, por ser $p > 2$,

$$\nu\|u\|^2 \leq (C + \frac{C}{\nu})\|k\|_{L^p}\|u\| + \frac{C}{\nu}\|u\|^2\,.$$

Si demostramos algo "similar" a la estimación $\|k\|_{L^p} \leq C\|u\|$, quedará probado el teorema.

Del mismo modo que en el teorema 2.1, se tiene que $|k| \leq C|v|$. Por tanto,

$$\|k\|_{L^p} \leq C\|v\|_{L^p} \leq C\|\nabla v\|_{L^\alpha}\,, \tag{3.40}$$

donde los valores de α deben ser como sigue, teniendo en cuenta los valores de p: deben ser como sigue: Cuando $N = 3$, $\alpha \geq \dfrac{3p}{3+p}$, y $\dfrac{3p}{3+p} \in [6/5, 3/2)$. Por otra parte cuando $N = 2$, $\alpha \geq \dfrac{2p}{2+p}$, y $\dfrac{2p}{2+p} \in [1,2)$.

Lema 3.5 *Bajo las hipótesis del teorema 3.4, para cada α en las condiciones precedentes existe $C(\alpha) > 0$ tal que:*

$$\|\nabla v\|_{L^\alpha} \leq C(\alpha)\left(\frac{1}{\nu^{1/2}}\|u\| + (1 + \frac{1}{\nu} + \|B'\|_{L^\infty})\|k\|_{L^p}\right)\,. \tag{3.41}$$

De (3.40) y (3.41), se deduce que

$$\left(1-\frac{C}{\nu}-C\|B'\|_{L^\infty}\right)\|k\|_{L^p}\leq\left(C+\frac{C}{\nu^{1/2}}\right)\|u\|$$

y, finalmente, obtenemos

$$\|k\|_{L^p}\leq C\|u\|$$

para ν suficientemente grande y $\|B'\|_{L^\infty}$ suficientemente pequeño.

— Demostración del lema 3.5 —

Vamos a seguir los pasos de la demostración del lema 2.2. Así, en primer lugar buscaremos una acotación de $\|k_i\|_{W_0^{1,q}}$ para $q<N'$. Tomando como función "test" $T_M(k_i)$ en la ecuación de la energía satisfecha por k_i, puesto que

$$\int_\Omega B(k_i)\nabla T_M(k_i)=\int_\Omega B(T_M(k_i))\nabla T_M(k_i)=0\,,$$

se llega a la estimación

$$\int_\Omega|\nabla T_M(k_i)|^2\leq\frac{C\cdot M}{\nu}\qquad\forall M>0\,. \tag{3.42}$$

Por otro lado, tomando como función "test" $\xi_n(k_i)$ en la misma ecuación de la energía, puesto que

$$\int_\Omega B(k_i)\nabla\xi_n(k_i)=\int_\Omega B(T_{2n}(k_i))\nabla\xi_n(k_i)=0\,,$$

se obtiene que

$$\frac{1}{n}\int_{n\leq k_i\leq 2n}|\nabla k_i|^2\leq\frac{C}{\nu}\qquad\forall n\geq 1\,. \tag{3.43}$$

De (3.42) y (3.43), se deduce que

$$\|k_i\|_{W_0^{1,q}}\leq\frac{C_q}{\nu^{1/2}}\qquad\forall q<N'\,. \tag{3.44}$$

En segundo lugar, introducimos las funciones

$$\begin{aligned}\widehat{H}=&-u\cdot\nabla k_1+\nu\nabla u:(\nabla u_1+\nabla u_2)+(D_2\Psi(k_1,\nabla u_1)-D_2\Psi(k_2,\nabla u_1)):\nabla u_1\\&+(D_2\Psi(k_2,\nabla u_2):\nabla u_2-D_2\Psi(k_2,\nabla u_1):\nabla u_1)\,,\end{aligned} \tag{3.45}$$

y

$$H=\widehat{H}-u_2\cdot\nabla k+\nabla\cdot(B(k_1)-B(k_2))\,.$$

Obsérvese que $\widehat{H}\in L^1\subset W^{-1,\alpha}$ para todo $\alpha<3/2$ si N=3 y para todo $\alpha<3$ si $N=2$. Esto no impone nuevas restricciones sobre α. Por otra parte, $u_2\cdot\nabla k=\nabla\cdot(ku_2)\in W^{-1,b}$

para todo $b < 2$ si N=3 y para todo $b < \infty$ si $N = 2$, lo cual tampoco impone nuevas restricciones.

Tenemos que

$$\|H\|_{W^{-1,q}} \leq C_q \|\widehat{H}\|_{L^1} + \|u_2 \cdot \nabla k\|_{W^{-1,\alpha}} + \|\nabla \cdot (B(k_1) - B(k_2))\|_{W^{-1,\alpha}}.$$

Veamos el modo de acotar cada sumando de esta expresión. Por una parte,

$$\| - u_2 \cdot \nabla k\|_{W^{-1,\alpha}} = \|ku_2\|_{L^\alpha}.$$

Si $N = 2$,

$$\|ku_2\|_{L^\alpha} \leq C|k| \cdot \|u_2\|_{L^s} \leq C|k| \cdot \|u_2\| \leq \frac{C}{\nu}|k|,$$

con tal que $\frac{1}{2} + \frac{1}{s} = \frac{1}{\alpha}$. Como $\alpha < 2$, aquí s puede ser cualquiera. Si $N = 3$,

$$\|ku_2\|_{L^\alpha} \leq C\|k\|_{L^p}\|u_2\|_{L^s} \leq C\|k\|_{L^p}\|u_2\| \leq \frac{C}{\nu}\|k\|_{L^p}, \tag{3.46}$$

con tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{s} = \frac{1}{\alpha}$ y $s \leq 6$. Para $N = 3$, sabemos que $\alpha \geq 6/5$ y $2 \geq p < 3$; por tanto, $s \geq 3$. Para $N = 2$, sabemos que $\alpha \geq 1$ y $2 \geq p < \infty$; por tanto, $s \geq 2$. En cualquier caso, siempre podemos encontrar un $s \in [3, 6]$ que cumpla (3.46). Por otra parte,

$$\|\nabla \cdot (B(k_1) - B(k_2))\|_{W^{-1,\alpha}}^\alpha = \|B(k_1) - B(k_2)\|_{L^\alpha}^\alpha = \int_\Omega |B(k_1) - B(k_2)|^\alpha$$
$$\leq \|B'\|_{L^\infty}^\alpha \int_\Omega |k|^\alpha \leq \|B'\|_{L^\infty}^\alpha \left(\int_\Omega |k|^p\right)^{\alpha/p} |\Omega|^{1-\alpha/p} \leq C\|B'\|_{L^\infty}^\alpha \|k\|_{L^p}^\alpha,$$

luego

$$\|\nabla \cdot (B(k_1) - B(k_2))\|_{W^{-1,\alpha}} \leq C\|B'\|_{L^\infty}\|k\|_{L^p}. \tag{3.47}$$

Veamos ahora cómo puede ser acotado en L^1 cada término de (3.45). El primero de ellos verifica

$$\|u \cdot \nabla k_1\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^r}\|\nabla k_1\|_{L^{r'}} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}}\|u\|_{L^r} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}}\|u\| \tag{3.48}$$

donde, si $N = 3$, se tiene $r' < 3/2$ y, si $N = 2$, entonces $r' < 2$. El segundo término puede acotarse igual que en (2.17), es decir

$$\nu\|\nabla u : (\nabla u_1 + \nabla u_2)\|_{L^1} \leq \nu\|u\|(\|u_1\| + \|u_2\|) \leq C\|u\|. \tag{3.49}$$

Para el tercero, utilizamos (3.4), Entonces

$$\|(D_2\Psi(k_1,\nabla u_1)-D_2\Psi(k_2,\nabla u_1)):\nabla u_1\|_{L^1}\leq\int_\Omega(C_3+C_4|\nabla u_1|^{r-1})|k|\cdot|\nabla u_1|$$
$$\leq C\int_\Omega|k|\cdot|\nabla u_1|+C\int_\Omega|k|\cdot|\nabla u_1|^r\leq C|k|\cdot\|u_1\|+C\|k\|_{L^p}\|u_1\|,$$

con $p=\dfrac{2}{2-r}$, puesto que $|\nabla u_1|^r\in L^{2/r}$. Usando (3.35), se llega a que

$$\|(D_2\Psi(k_1,\nabla u_1)-D_2\Psi(k_2,\nabla u_1)):\nabla u_1\|_{L^1}\leq\frac{C}{\nu}|k|+\frac{C}{\nu}\|k\|_{L^p}\,. \tag{3.50}$$

En lo que respecta al cuarto término de (3.45), teniendo en cuenta (3.34), se tiene

$$\begin{aligned}\|D_2\Psi(k_2,\nabla u_2):\nabla u_2-D_2\Psi(k_2,\nabla u_1):\nabla u_1\|&\leq\int_\Omega|k_2||\nabla u|^r\\ \leq C\|k_2\|_{L^{(2/r)'}}\cdot\|u\|_{L^{(2/r)}}\leq C\|k_2\|_{L^p}\cdot\|u\|&\leq\frac{C}{\nu^{1/2}}\|u\|,\end{aligned}\tag{3.51}$$

donde $\left(\frac{2}{r}\right)'$ resulta ser p. En la última desigualdad hemos usado (3.44).

Usando (3.46)–(3.51), obtenemos

$$\|H\|_{W^{-1,\alpha}}\leq C(q)\left((1+\frac{1}{\nu^{1/2}})\|u\|+(\frac{1}{\nu}+\|B'\|_{L^\infty})\|k\|_{L^p}\right)\quad\forall q<N'\,. \tag{3.52}$$

Finalmente, demostremos (3.41). Observemos que, al restar las ecuaciones de la energía satisfechas por k_1 y k_2, resulta:

$$\begin{cases}-\Delta v&=&H&\text{en }\Omega\,,\\ v&=&0&\text{sobre }\partial\Omega\,.\end{cases}$$

Por el teorema 3.2, sabemos que $v\in\bigcap_{q<N}W_0^{1,q}$. Teniendo en cuenta que $H\in W^{-1,q}$ y que $\partial\Omega$ es regular, podemos afirmar entonces que

$$\|\nabla v\|_{L^\alpha}\leq C(q)\|H\|_{W^{-1,q}}\quad\forall q<N'$$

(cf. [1]). Esto, junto con (3.52), prueba el lema.

3.5 Una variante del teorema 2.1 (unicidad para segundo miembro "pequeño")

Al igual que ocurre en las ecuaciones de Navier-Stokes, podemos dar un resultado de unicidad sustituyendo la condición "ν es suficientemente grande" por "$\|f\|_{H^{-1}}$ es suficientemente pequeña".

Teorema 3.6 *Supongamos que, en el teorema 1.3, $B \equiv 0$ y $D \to \Phi'(D) : D$ es globalmente lipschitziana. Entonces existe $f_0 > 0$ tal que, cuando $\|f\|_{H^{-1}} \leq f_0$, hay a lo más una solución débil $\{u, p, k\}$ de (1.1) con $k \geq 0$ (la presión es única salvo una constante aditiva).*

Demostración

Vamos a razonar como en la demostración del teorema 2.1. Podemos especificar la constante que aparece en (2.1):

$$\|u_i\| \leq \frac{\|f\|_{H^{-1}}}{\nu} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \tag{3.53}$$

Después de restar las ecuaciones verificadas por u_1 y u_2, la acotación (2.6) puede escribirse como

$$\left| - \int_\Omega (u \cdot \nabla) u_1 \cdot u \right| \leq C\|u\|^2 \cdot \|u_1\| \leq \frac{1}{\nu} \|f\|_{H^{-1}} \|u\|^2 .$$

Por tanto,

$$\nu \|u\|^2 \leq C|k| \|u\| + \frac{1}{\nu} \|f\|_{H^{-1}} \|u\|^2 \tag{3.54}$$

El lema (2.2) puede enunciarse en los siguientes términos:

Lema 3.7 *Bajo las hipótesis del teorema 3.6, para cada $q < N'$, existe $C(q) > 0$ tal que:*

$$\|\nabla v\|_{L^q} \leq C(q) (\|u\| + |k|) \|f\|_{H^{-1}} . \tag{3.55}$$

De (2.8) y (3.55) para $q = 6/5$, resulta:

$$(1 - C\|f\|_{H^{-1}}) |k| \leq C\|f\|_{H^{-1}} \|u\|$$

Para $\|f\|_{H^{-1}}$ suficientemente pequeña, se obtiene $|k| \leq C\|f\|_{H^{-1}} \|u\|$. A la vista de (3.54), esto es suficiente para nuestros propósitos.

— Demostración del lema 3.7 —

Podemos escribir (2.10) como sigue

$$\|k_i\|_{W_0^{1,q}} \leq \frac{C_q}{\nu^{1/2}} \|f\|_{H^{-1}} \qquad \forall q < N' . \tag{3.56}$$

En efecto, tomando como función "test" $T_M(k_i)$ en la ecuación de la energía satisfecha por k_i, se obtiene:

$$\int_\Omega |\nabla T_M(k_i)|^2 \leq \frac{C \cdot M}{\nu} \|f\|^2_{H^{-1}} \qquad \forall M > 0 . \tag{3.57}$$

Tomando como función "test" $\xi_n(k_i)$, se obtiene:

$$\frac{1}{n}\int_{n\leq k_i\leq 2n}|\nabla k_i|^2 \leq \frac{C}{\nu}\|f\|_{H^{-1}}^2 \qquad \forall n\geq 1\,. \tag{3.58}$$

De (3.57), (3.58), usando el lema A.1 del Apéndice A, se obtiene (3.56).

Veamos ahora cómo se puede acotar H. Por una parte,

$$\|-u_2\cdot\nabla k\|_{W^{-1,q}} = \|ku_2\|_{L^q} \leq C|k|\|u_2\|_{L^6} \leq C|k|\|u_2\| \leq \frac{\|f\|_{H^{-1}}}{\nu}|k|\,. \tag{3.59}$$

Por otra,

$$\|u\cdot\nabla k_1\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^6}\|\nabla k_1\|_{L^{6/5}} \leq \frac{C}{\nu^{1/2}}\|f\|_{H^{-1}}\|u\|\,. \tag{3.60}$$

En tercer y cuarto lugar,

$$\nu\|\nabla u:(\nabla u_1+\nabla u_2)\|_{L^1} \leq \nu\|u\|(\|u_1\|+\|u_2\|) \leq C\|f\|_{H^{-1}}\|u\| \tag{3.61}$$

y

$$\|k\Phi'(\nabla u_1):\nabla u_1\|_{L^1} \leq C|k|\|u_1\| \leq \frac{C}{\nu}\|f\|_{H^{-1}}|k|\,. \tag{3.62}$$

Finalmente,

$$\|k_2\left(\Phi'(\nabla u_1):\nabla u_1-\Phi'(\nabla u_2):\nabla u_2\right)\|_{L^1} \leq C|k_2|\|u\| \leq \frac{C}{\nu^{1/2}}\|f\|_{H^{-1}}\|u\|\,. \tag{3.63}$$

Luego, teniendo en cuenta la definición de H, resulta que

$$\|H\|_{W^{-1,q}} \leq C(q)\left(\|u\|+|k|\right)\|f\|_{H^{-1}} \quad \forall q<N'\,. \tag{3.64}$$

Razonando como en el teorema 2.1 llegamos a que

$$\|\nabla v\|_{L^q} \leq C(q)\|H\|_{W^{-1,q}} \qquad \forall q<N'$$

y, como consecuencia de ello, queda probado el lema.

Capítulo 4

Resultados de existencia en el caso de evolución

4.1 Planteamiento del problema

Al igual que en el caso estacionario, vamos a trabajar con una versión simplificada del problema (0.2). Consideraremos un sistema de $N+2$ ecuaciones, de las cuales las N primeras describen el movimiento del fluido en el dominio $\Omega \times (0,T) \subset \mathbb{R}^{N+1}$, la segunda es la condición de incompresibilidad y la tercera es la ecuación de la energía:

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u - \nabla \cdot (k\Phi'(\nabla u)) + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f\,, \\ \nabla \cdot u = 0\,, \\ \partial_t k - \nabla \cdot (\mu(k)\nabla k + B(k)) + u \cdot \nabla k = \nu |\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u\,. \end{cases} \tag{4.1}$$

Las incógnitas son u, k y p, que representan desde el punto de vista del modelado la turbulencia el campo de velocidades medio, la energía cinética turbulenta y la presión media del fluido, respectivamente. Los datos cumplen las siguientes hipótesis:

- Ω es un abierto acotado, conexo, y regular de $\mathbb{R}^N$, con $N = 2$ ó $N = 3$. La variable t (el tiempo) varía en $(0,T)$ y $T > 0$.

- $\nu > 0$.

- $f \in L^2(H^{-1})$ ($f = f(x,t)$ se interpreta como el campo de fuerzas exteriores medio que actúa sobre el sistema).

- $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) \mapsto \Phi(D) \in \mathbb{R}^N$ es una función de clase C^1, $\Phi'(0) = 0$, $|\Phi'(D)| \le$ Const. y $D \mapsto \Phi'(D) : D$ es convexa.

- $r \in \mathbb{R} \mapsto B(r) \in \mathbb{R}^N$ es continua.

- $r \in \mathbb{R} \mapsto \mu(r) \in \mathbb{R}$ es continua y $\mu(r) \geq \mu_0 > 0$ para cada r.

Queremos resolver (4.1) en $Q = \Omega \times (0,T)$, junto con las condiciones iniciales

$$u|_{t=0} = u_0\,, \qquad k|_{t=0} = k_0 \quad \text{en} \quad \Omega \tag{4.2}$$

y las condiciones de contorno de tipo Dirichlet

$$u = 0\,, \qquad k = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (0,T)\,. \tag{4.3}$$

Nota:

De las hipótesis hechas sobre Φ, podemos deducir que es convexa. En particular, $(\Phi'(D_1) - \Phi'(D_2)) : (D_1 - D_2) \geq 0$ para todo D_1, $D_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ y $\Phi'(D) : D \geq 0$ para todo $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$.

4.2 El resultado principal

Introducimos el espacio

$$\mathcal{L} = \{\, \psi \in L^1(Q)\,;\; T_M(\psi) \in L^2(H_0^1) \quad \forall M > 0\,,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \iint_{n\leq|\psi|\leq 2n} |\nabla\psi|^2 \, dx\, dt = 0 \,\}$$

(cf. la Notación).

Teorema 4.1 *Supongamos que $N = 2$, $u_0 \in H$ y $k_0 \in L^1(Q)$, con $k_0 \geq 0$. Entonces existe $\{u, p, k\}$, con*

$$u \in L^2(V) \cap C^0(H)\,, \qquad p \in L^2(Q)\,, \qquad k \in \mathcal{L}\,,$$

tal que:

1. *El par $\{u,p\}$ es solución de las dos primeras ecuaciones de (4.1) junto con la primera de las condiciones iniciales de (4.2) en el sentido de las distribuciones (solución débil).*

2. $k \geq 0$ *y es solución de la ecuación de la energía de* (4.1) *y la segunda condición inicial de* (4.2) *en el sentido siguiente (solución renormalizada): Para cada función* $\beta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ *con soporte compacto, se tiene*

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t\widetilde{\beta}(k) - \nabla\cdot(\beta(k)(\mu(k)\nabla k + B(k))) \\ \quad +\beta'(k)\nabla k\cdot(\mu(k)\nabla k + B(k)) + \beta(k)\,(u\cdot\nabla k) \\ \quad = \beta(k)\,(\nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u):\nabla u) \qquad en \ \ \mathcal{D}'(Q)\,. \end{array}\right. \tag{4.4}$$

En particular, $\partial_t\widetilde{\beta}(k) \in L^1(L^1) + L^2(H^{-1})$ *y, para todo* $q < 2$, *se tiene que* $\widetilde{\beta}(k) \in C^0(W^{-1,q})$. *Además,*

$$\widetilde{\beta}(k)|_{t=0} = \widetilde{\beta}(k_0)\,. \tag{4.5}$$

A toda terna $\{u, p, k\}$ que verifique las condiciones anteriores la llamaremos *solución débil- renormalizada* de (4.1)–(4.3).

Procediendo de modo análogo a como se hizo en el caso estacionario, podemos ver que cada sumando de (4.4) es una verdadera distribución y que, con la única posible excepción del primero, pertenece a $L^2(H^{-1})$ ó $L^1(Q)$. Como consecuencia de ello, $\partial_t\widetilde{\beta}(k) \in L^1(L^1) + L^2(H^{-1})$ como se afirma en el teorema.

4.3 Demostración del teorema 4.1

En lo que sigue, C denota una constante que puede depender de Ω y quizás de los demás datos del problema (4.1). Dividiremos la demostración en seis etapas:

4.3.1 Primera etapa: Introducción de una familia de aproximaciones

Para cada $\varepsilon > 0$, consideramos el siguiente problema aproximado de (4.1):

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t u^\varepsilon - \nabla\cdot\tau^\varepsilon + (u^\varepsilon\cdot\nabla)u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = f\,, \\ \nabla\cdot u^\varepsilon = 0\,, \\ \partial_t k^\varepsilon - \nabla\cdot(\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon + B_\varepsilon(k^\varepsilon)) + u^\varepsilon\cdot\nabla k^\varepsilon = T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon:\nabla u^\varepsilon)\,. \end{array}\right. \tag{4.6}$$

Aquí, hemos usado la siguiente notación:

$$\mu_\varepsilon = \mu\circ T_{\frac{1}{\varepsilon}}\,,\quad B_\varepsilon = B\circ T_{\frac{1}{\varepsilon}}\,,\quad \tau^\varepsilon = \nu\nabla u^\varepsilon + T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)_+\Phi'(\nabla u^\varepsilon)\,.$$

Estas ecuaciones se han de verificar en $Q = \Omega \times (0,T)$ junto con las condiciones iniciales

$$u^\varepsilon|_{t=0} = u_0\,, \qquad k^\varepsilon|_{t=0} = T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k_0) \quad \text{en} \quad \Omega \tag{4.7}$$

y las condiciones de contorno

$$u^\varepsilon = 0\,, \qquad k^\varepsilon = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (0,T)\,. \tag{4.8}$$

La existencia de una terna $\{u^\varepsilon, p^\varepsilon, k^\varepsilon\}$ que satisfaga (4.6)–(4.8) puede establecerse (por ejemplo) usando un método de Galerkin.

Sean $\{w_n\}_{n\geq 1}$ y $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ bases "especiales" de V y $H_0^1(\Omega)$, respectivamente. Esto quiere decir que se trata de las auto-funciones asociadas al problema de Dirichlet para el sistema de Stokes

$$(\nabla w_j, \nabla v) = \lambda_j^s(w_j, v) \qquad \forall v \in V,\ w_j \in V\,,$$
$$|w_j| = 1\,, \qquad \lambda_j^s \nearrow +\infty$$

y al problema de Dirichlet para la EDP de Poisson

$$(\nabla \varphi_j, \nabla \psi) = \lambda_j^p(\varphi_j, \psi) \qquad \forall \psi \in H_0^1,\ \varphi_j \in H_0^1\,,$$
$$|\varphi_j| = 1\,, \qquad \lambda_j^p \nearrow +\infty$$

Sean V^m y W^m los espacios generados por $\{w_1, w_2, \dots w_m\}$ y $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_m\}$, respectivamente. Para cada $m \geq 1$, buscamos una solución aproximada $\{u^m, k^m\}$ de (4.6)–(4.8) en el sentido siguiente:

$$u^m : [0,T] \mapsto V^m\,, \quad u^m(t) = \sum_{i=1}^m \zeta_{i,m}(t) w_i,$$
$$k^m : [0,T] \mapsto W^m\,, \quad k^m(t) = \textstyle\sum_{j=1}^m \zeta_{j,m}(t)\varphi_j\,,$$

verificando el siguiente sistema c.p.d. en t:

$$\begin{cases} (\partial_t u^m(t), v^m) + \nu(\nabla u^m(t), \nabla v^m) + (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^m(t))_+ \Phi'(\nabla u^m(t)), \nabla v^m) \\ +((u^m(t)\cdot\nabla)u^m(t), v^m) = \langle f(t), v^m\rangle\,, \\ u^m(0) = u_{0m} = P_m(u_0) \\ (\partial_t k^m(t), \psi^m) + (\mu_\varepsilon(k^m(t))\nabla k^m(t), \nabla\psi^m) + (B_\varepsilon(k^m(t)), \nabla\psi^m) \\ +(u^m(t)\cdot\nabla k^m(t), \psi^m) = (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^m(t) : \nabla u^m(t)), \psi^m)\,, \\ k^m(0) = k_{0m} = P_m(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k_0)) \\ \forall\, v^m \in V^m\,, \forall\, \psi \in W^m\,. \end{cases} \tag{4.9}$$

Aquí, P_m designa indistamente los operadores de proyección ortogonales asociados:

$$P_m : V \mapsto V^m$$

en las primeras igualdades y

$$P_m : H_0^1 \mapsto W^m$$

en las restantes (obsérvese que $u_{0m} \to u_0$ en V y $k_{0m} \to T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k_0)$ en H_0^1). Existe una única solución maximal del problema de Cauchy anterior, definida (al menos) en un intervalo $[0, \tau_m) \subset [0, T]$.

Estimaciones "a priori"

En primer lugar, vamos a deducir cotas uniformes para u^m en espacios adecuados. Tomando en la primera ecuación de (4.9) como función "test" $v^m = u^m(t)$ y teniendo en cuenta que $((u^m \cdot \nabla)u^m, u^m) = 0$, se obtiene:

$$\langle \partial_t u^m(t), u^m(t)\rangle + \nu(\nabla u^m(t), \nabla u^m(t)) + (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^m(t))_+ \Phi'(\nabla u^m(t)) : \nabla u^m(t))$$
$$= \langle f(t), u^m(t)\rangle\,.$$

Es decir,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u^m(t)|^2 + \nu\|u^m(t)\|^2 + \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^m(t))_+ \Phi'(\nabla u^m(t)), \nabla u^m(t)$$
$$\leq C_\nu \|f(t)\|_{H^{-1}}^2 + \frac{\nu}{2}\|u^m(t)\|^2\,.$$

Integrando en $(0, t)$, resulta

$$\frac{1}{2}|u^m(t)|^2 + \frac{\nu}{2}\int_0^t \|u^m(s)\|^2 + \int_0^t \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^m(s))_+ \Phi'(\nabla u^m)(s) : \nabla u^m(t)$$
$$\leq C_\nu \int_0^t \|f(s)\|_{H^{-1}}^2 + \frac{1}{2}|u_{0m}|^2\,,$$

de donde

$$|u^m(t)|^2 + \nu\int_0^t \|u^m(s)\|^2 + 2\int_0^t \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^m(s))_+ \Phi'(\nabla u^m)(s) : \nabla u^m(s)$$
$$\leq C_\nu \int_0^t \|f(t)\|_{H^{-1}}^2 + |u_0|^2\,.$$

En particular, obtenemos una cota uniforme de $|u^m(t)|^2$ que es independiente de t. De aquí, podemos obtener dos conclusiones, teniendo en cuenta que $\Phi'(\nabla u^m) : \nabla u^m \geq 0$:

$$|u^m(t)|^2 + \nu\int_0^t \|u^m(s)\|^2 \leq C\,, \tag{4.10}$$

es decir,

$$u^m \text{ está acotada en } L^\infty(H)\bigcap L^2(V)$$

y, además,

$$\int_0^t \int_\Omega T_{\frac{1}{\epsilon}}(k^m(s))_+ \Phi'(\nabla u^m)(s) : \nabla u^m(s) \leq C\,. \tag{4.11}$$

En segundo lugar, vamos a deducir que $\partial_t u^m$ también está uniformemente acotada en un espacio apropiado. Para ello, introducimos las siguientes aplicaciones:

$$\bar{B} : V \times V \mapsto V', \text{ con } \langle \bar{B}(u,v), w\rangle = \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i \, dx \quad \forall w \in V\,.$$

$\bar{B}$ es una aplicación bilineal continua y, si $u \in V$, entonces $\|\bar{B}(u,u)\|_{V'} \leq C|u| \cdot \|u\|$ (recuérdese que $N = 2$).

$$A : V \mapsto V', \text{ con } \langle Au, v\rangle = \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx \quad \forall v \in V\,.$$

A es lineal y continuo.

$$DIV : (L^2(\Omega))^{N^2} \mapsto V', \text{ con } DIV\varphi = \nabla \cdot \varphi\,.$$

Más precisamente, $DIV\varphi$ es la forma lineal continua sobre V definida por las igualdades

$$\langle DIV\varphi, v\rangle = -\int_\Omega \varphi : \nabla v \quad \forall v \in V\,.$$

$\widetilde{P}_m : V' \mapsto V^m$ es el operador de proyección habitual:

$$\widetilde{P}_m(g) = \sum_{i=1}^m \langle g, w_i\rangle w_i \quad \forall g \in V'\,.$$

Gracias a la elección de la base "especial" $\{w_i\}_{i=1}^m$ se tiene que $\|\widetilde{P}_m\|_{\mathcal{L}(V';V')} \leq 1$. Podemos escribir:

$$\partial_t u^m(t) = \widetilde{P}_m \left[f(t) - \nu A u^m(t) - \bar{B}(u^m(t), u^m(t)) + DIV(T_{\frac{1}{\epsilon}}(k^m(t))_+ \Phi'(\nabla u^m)(t)) \right]$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|\partial_t u^m(t)\|_{V'} &\leq \|f(t)\|_{H^{-1}} + \nu \|u^m(t)\| + C|u^m(t)| \cdot \|u^m(t)\| \\ &+ \|DIV(T_{\frac{1}{\epsilon}}(k^m(t))_+ \Phi'(\nabla u^m)(t))\|_{V'}\,. \end{aligned}$$

Los tres primeros sumandos están acotados en $L^2(0,T)$ y el último, teniendo en cuenta que Φ' está uniformemente acotada, puede ser acotado por una constante que sólo depende de ε. En consecuencia, podemos afirmar que

$$\int_0^t \|\partial_t u^m(s)\|_{V'}^2\, ds \leq C(\varepsilon)\,. \tag{4.12}$$

En tercer lugar, vamos a obtener una acotación para k^m. Para ello, tomamos como función "test" $\psi = k^m(t)$ en la ecuación de la energía de (4.9), resultando

$$\begin{aligned}\langle \partial_t k^m(t), k^m(t)\rangle + (\mu_\varepsilon(k^m(t))\nabla k^m(t), \nabla k^m(t)) + (B_\varepsilon(k^m(t)), \nabla k^m(t))\\ = (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^m(t) : \nabla u^m(t)), k^m(t))\,.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Si escribimos

$$\tilde{B}_i^\varepsilon(r) = \int_0^r B_i(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(s))\, ds\,, \qquad \tilde{B}^\varepsilon = (\tilde{B}_1^\varepsilon, \tilde{B}_2^\varepsilon, ..., \tilde{B}_N^\varepsilon)\,,$$

entonces podemos expresar el tercer sumando de (4.13) como sigue:

$$(B_\varepsilon(k^m(t)), \nabla k^m(t)) = \int_\Omega \nabla\cdot \tilde{B}^\varepsilon(k^m(t)) = \int_{\partial\Omega} \tilde{B}^\varepsilon(k^m(t))\cdot \mathbf{n}\, d\Gamma = 0\,.$$

En consecuencia,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|k^m(t)|^2 + \mu_0\|k^m(t)\|^2 \leq \int T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^m(t) : \nabla u^m(t))k^m(t)$$

y, aplicando la desigualdad de Young,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|k^m(t)|^2 + \mu_0\|k^m(t)^2\|^2 \leq C|T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^m(t) : \nabla u^m(t))|^2 + \frac{\mu_0}{2C_0^2}|k^m|^2\,,$$

donde C_0 es la constante de la desigualdad de Poincaré. Por tanto,

$$\frac{d}{dt}|k^m(t)|^2 + \mu_0\|k^m(t)\|^2 \leq C_{\mu_0}\int_\Omega |T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^m(t) : \nabla u^m(t))|^2\,.$$

Integrando en $(0,t)$, resulta que

$$|k^m(t)|^2 + \mu_0\int_0^t \|k^m(s)\|^2 \leq C_{\mu_0}\int_0^t\int_\Omega |T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^m(s) : \nabla u^m(s))|^2 + |k^m(0)|^2$$

y, como $|k^m(0)|^2 \leq |T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k_0)|^2$, se tiene:

$$|k^m(t)|^2 + \mu_0\int_0^t \|k^m(s)\|^2 \leq C(\varepsilon)\,. \tag{4.14}$$

Es decir,

$$k^m \text{ está acotada en } L^2(H_0^1)\bigcap L^\infty(L^2). \tag{4.15}$$

En particular, también en este caso obtenemos una cota de $|k^m(0)|^2$ que es independiente de t. En consecuencia, podemos suponer (y eso haremos en lo que sigue) que $\tau^m = T$.

En cuarto y último lugar, acotaremos $\partial_t k^m$. Para ello, consideramos el operador de proyección habitual de H^{-1} en W^m (de nuevo denotado $\widetilde{P}_m$):

$$\widetilde{P}_m(g) = \sum_{i=1}^{m} \langle g, \varphi_i\rangle \varphi_i\,, \quad \forall g \in H^{-1}(\Omega)\,.$$

Gracias a la elección de la base "especial" $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$, también se tiene $\|\widetilde{P}_m\|_{\mathcal{L}(H_0^1;H^{-1})} \leq 1$. Así, podemos escribir:

$$\begin{aligned}\partial_t k^m(t) = \widetilde{P}_m[&\nabla\cdot(\mu_\varepsilon(k^m(t))\nabla k^m(t)) + \nabla\cdot B_\varepsilon(k^m(t)) - u^m(t)\nabla k^m(t)\\ &- T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^m(t):\nabla u^m(t))]\,.\end{aligned}$$

En esta igualdad, el segundo miembro está uniformemente acotado en $L^2(H^{-1})$. En efecto, $\mu_\varepsilon(k^m)$ está acotada en $L^\infty(L^\infty)$ y ∇k^m en $L^2(L^2)$, luego el primer sumando está acotado en $L^2(H^{-1})$. El segundo sumando también, ya que $B_\varepsilon(k^m)$ está uniformemente acotada en $L^\infty(L^\infty)$. En cuanto al tercero, observemos que u^m y k^m están acotadas en $L^2(H_0^1)\bigcap L^\infty(L^2)$, que se inyecta de forma continua en $L^4(L^4)$ (porque $N = 2$). Escribiendo que $u^m\cdot\nabla k^m = \nabla\cdot(u^m k^m)$, resulta claro que $u^m\cdot\nabla k^m$ está acotada en $L^2(H^{-1})$. El último sumando se puede acotar en $L^\infty(L^\infty)$ por una constante que puede depender de ε. De (4.10), (4.12), (4.14) y las consideraciones precentes, obtenemos:

$$u^m \text{ está acotada en } L^2(V)\bigcap C^0(H)\,, \tag{4.16}$$

$$\partial_t u^m \text{ está acotada en } L^2(V')\,, \tag{4.17}$$

$$k^m \text{ está acotada en } L^2(H_0^1)\bigcap C^0(L^2)\,, \tag{4.18}$$

$$\partial_t k^m \text{ está acotada en } L^2(H^{-1}) \tag{4.19}$$

(en (4.17) – (4.19), las cotas pueden depender de ε, pero no en (4.16)).

Extracción de subsucesiones convergentes

Tomando subsucesiones si fuese necesario y denotándolas con el mismo superíndice, podemos afirmar que:

$$\begin{aligned}
&u^m \rightarrow u^\varepsilon \quad \text{en } L^2(V)\text{-débil y en } L^\infty(H)\text{-débil}*\,,\\
&u^m \rightarrow u^\varepsilon \quad \text{en } L^2(H) \text{ y c.p.d. en } Q\,,\\
&\partial_t u^m \rightarrow \partial_t u^\varepsilon \quad \text{en } L^2(V')\text{-débil}\,,\\
&k^m \rightarrow k^\varepsilon \quad \text{en } L^2(H_0^1)\text{-débil y en } L^\infty(L^2)\text{-débil}*\,,\\
&k^m \rightarrow k^\varepsilon \quad \text{en } L^2(L^2) \text{ y c.p.d. en } Q\,,\\
&\partial_t k^m \rightarrow \partial_t k^\varepsilon \quad \text{en } L^2(H^{-1})\text{-débil}.
\end{aligned}$$

En particular, la convergencia fuerte de u^m y de k^m es consecuencia del siguiente resultado, que se debe esencialmente a J.L. Lions y Peetre [18] (véase también [16],[24],[25]):

Lema 4.2 *Supongamos dados tres espacios de Banach, B_0, B, B_1, tales que*

$$B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$$

con inyecciones continuas, siendo además la inyección $B_0 \hookrightarrow B$ compacta. Sea

$$W = \{v \in L^{p_0}(B_0)\,;\, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^{p_1}(B_1)\}\,,$$

donde $1 \leq p_0\,, p_1 \leq +\infty$ y pongamos $\|v\|_W = \|v\|_{L^{p_0}(B_0)} + \|\partial_t v\|_{L^{p_1}(B_1)}$. Entonces W, dotado de la norma $\|\cdot\|_W$, posee estructura de espacio de Banach reflexivo y, además, la inyección $W \hookrightarrow L^{p_0}(B)$ es compacta.

Tomando $B_0 = V$, $B = H$, $B_1 = V'$ y $p_0 = p_1 = 2$, deducimos que u^m está en un compacto de $L^2(H)$. Tomando una subsucesión (si hiciera falta) se obtiene la convergencia fuerte de u^m. Para k^m se procede de modo análogo, con $B_0 = H_0^1(\Omega)$, $B = L^2(\Omega)$, $B_1 = H^{-1}(\Omega)$ y $p_0 = p_1 = 2$.

Comentarios sobre el paso al límite en (3.12)

Veamos qué ocurre con las condiciones iniciales. Puesto que u^m está acotada en $C^0(H)$, podemos suponer que $u^m(0) \rightarrow u^\varepsilon(0)$ débilmente en H. Por otro lado,

$$u^m(0) = u_{0m} = P_m(u_0) \rightarrow u_0 \text{ en } H\,.$$

Luego $u_0^\varepsilon = u(0)$. Análogamente, de la acotación de k^m en $C^0(L^2)$, podemos deducir que $k^m(0) \to k^\varepsilon(0)$ débilmente en L^2. Además,

$$k^m(0) = u_{0m} = P_m(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k_0)) \to T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k_0) \text{ en } L^2 .$$

Por tanto $k^\varepsilon(0) = T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k_0)$.

Al igual que en el caso estacionario, omitiremos aquí los detalles correspondientes al paso al límite en (4.9), por ser éstos análogos a los que veremos para el problema aproximado en ε, (4.6)–(4.8) (cf. la sección 3.3; más adelante comprobaremos que juega un papel esencial la hipótesis $N = 2$). Se llega a la conclusión de que, para cada $\varepsilon > 0$, existen $u^\varepsilon \in L^2(V) \bigcap C^0(H)$ y $k^\varepsilon \in L^2(H_0^1) \bigcap C^0(L^2)$ tales que:

$$\begin{cases} \langle \partial_t u^\varepsilon(t), v\rangle + \nu(\nabla u^\varepsilon(t), \nabla v) + (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon(t))_+ \Phi'(\nabla u^\varepsilon(t)), \nabla v) \\ \qquad +((u^\varepsilon(t)\cdot\nabla)u^\varepsilon(t), v) = \langle f(t), v\rangle \quad \forall v \in V, \quad \text{c.p.d. en } (0,T), \\ u^\varepsilon(0) = u_0 , \\ \langle \partial_t k^\varepsilon(t), \psi\rangle + (\mu_\varepsilon(k^\varepsilon(t))\nabla k^\varepsilon(t), \nabla\psi) + (B_\varepsilon(k^\varepsilon(t)), \nabla\psi) + (u^\varepsilon(t)\cdot\nabla k^\varepsilon(t), \psi) \\ \qquad = (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon(t) : \nabla u^\varepsilon(t)), \psi), \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega), \quad \text{c.p.d. en } (0,T), \\ k^\varepsilon(0) = T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k_0) . \end{cases} \tag{4.20}$$

En otras palabras, hemos resuelto el problema (4.6)–(4.8) en el sentido débil habitual.

Se tiene que $k^\varepsilon \geq 0$

En efecto, tomando $\psi = k_-^\varepsilon = \max(-k^\varepsilon, 0)$ en la ecuación de la energía de (4.20), se obtiene (escribimos k^ε en vez de $k^\varepsilon(t)$ y u^ε en vez de $u^\varepsilon(t)$):

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \partial_t k^\varepsilon \cdot k_-^\varepsilon + \int_\Omega \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon \cdot \nabla k_-^\varepsilon + \int_\Omega B_\varepsilon(k^\varepsilon)\cdot\nabla k_-^\varepsilon \\ &+ \int_\Omega (u^\varepsilon\cdot\nabla k^\varepsilon)k_-^\varepsilon = \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon)k_-^\varepsilon . \end{aligned}$$

Veamos cuál es el comportamiento de cada término en esta igualdad. Por una parte,

$$\int_\Omega \partial_t k^\varepsilon \cdot k_-^\varepsilon = \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t |k_-^\varepsilon|^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|k_-^\varepsilon|^2 .$$

El segundo sumando verifica lo siguiente:

$$\int_\Omega \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon\cdot\nabla k_-^\varepsilon = -\int_\Omega \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)|\nabla k_-^\varepsilon|^2 \leq -\mu_0\int_\Omega |\nabla k_-^\varepsilon|^2 \leq -\mu_0 C_0|k_-^\varepsilon|^2$$

Procediendo como para obtener (1.20), se llega a que

$$\int_\Omega B_\varepsilon(k^\varepsilon)\cdot\nabla k^\varepsilon_- = \int_\Omega \nabla\cdot\widetilde{B}^\varepsilon(k^\varepsilon_-) = 0\,.$$

En tercer lugar,

$$\int_\Omega (u^\varepsilon\cdot\nabla k^\varepsilon)k^\varepsilon_- = \int_\Omega u^\varepsilon\cdot\nabla k^\varepsilon_- k^\varepsilon_- = 0\,.$$

Puesto que $\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon \geq 0$, será

$$\int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon)k^\varepsilon_- \geq 0\,.$$

Así pues, $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|k^\varepsilon_-|^2 + C|k^\varepsilon_-|^2 \leq 0$. Denotando $\varphi(t) = |k^\varepsilon_-|^2$, tenemos que:

$$\begin{cases} \varphi'(t) + C\varphi(t) \leq 0\,, \\ \varphi(0) = 0\,, \end{cases}$$

de donde necesariamente $\varphi \equiv 0$, i.e. $k^\varepsilon_- = 0$ c.p.d. en Q. Desde este momento, podemos pues escribir $T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)$ en vez de $T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)_+$.

4.3.2 Segunda etapa: Estimaciones "a priori" y convergencia débil

u^ε está acotada en $L^\infty(H)\bigcap L^2(V)$

Usamos como función "test" $u^\varepsilon(t)$ (pondremos simplemente u^ε) en (4.20). Entonces

$$\langle\partial_t u^\varepsilon, u^\varepsilon\rangle + \nu(\nabla u^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon) + (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi'(\nabla u^\varepsilon), \nabla u^\varepsilon) = \langle f, u^\varepsilon\rangle$$

c.p.d. en t. Es decir,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u^\varepsilon|^2 + \nu\|u^\varepsilon\|^2 + \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi'(\nabla u^\varepsilon) : \nabla u^\varepsilon \leq C_\nu\|f\|^2_{H^{-1}} + \frac{\nu}{2}\|u^\varepsilon\|^2\,.$$

Integrando en $(0,t)$, resulta que

$$\frac{1}{2}|u^\varepsilon(t)|^2 + \frac{\nu}{2}\int_0^t\|u^\varepsilon\|^2 + \int_0^t\int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi'(\nabla u^\varepsilon) : \nabla u^\varepsilon \leq C_\nu\int_0^t\|f\|^2_{H^{-1}} + \frac{1}{2}|u^\varepsilon(0)|^2\,,$$

ó bien

$$|u^\varepsilon(t)|^2 + \nu\int_0^t\|u^\varepsilon\|^2 + 2\int_0^t\int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi'(\nabla u^\varepsilon) : \nabla u^\varepsilon \leq C_\nu\int_0^t\|f\|^2_{H^{-1}} + |u_0|^2\,.$$

De ello deducimos que

$$|u^\varepsilon(t)|^2 + \int_0^t\int_\Omega \tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon \leq C \quad \text{en} \quad (0,T)\,. \tag{4.21}$$

En particular,

$$\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(H)} \leq C\,, \qquad \|u^\varepsilon\|_{L^2(V)} \leq C\,. \tag{4.22}$$

u^ε **está acotada en** $L^{\left(\frac{2a}{a-2}\right)^-}(L^a)$, **para todo** $a \in (2, +\infty)$

Usaremos el siguiente

Lema 4.3 *Si* $N = 2$, $L^2(H_0^1) \bigcap L^\infty(L^2)$ *se inyecta en* $L^{\left(\frac{2a}{a-2}\right)^-}(L^a)$ *para cada* $a \in (2, \infty)$, *con inyección continua.*

—Demostración—

Para cada p tal que $2 < a < p < +\infty$, vamos a tomar

$$r = \frac{p-2}{a-2} \quad \text{(por tanto, } r > 1\text{)} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{2a}{a-2} \cdot \frac{p-2}{p}.$$

Entonces

$$\int_0^T \left(\int_\Omega |u|^a dx \right)^{\beta/a} dt \le \int_0^T \left[\left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_\Omega |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{r'}} \right]^{\beta/a} dt$$
$$\le \|u\|^2_{L^2(L^p)} \|u\|^{\beta-2}_{L^\infty(L^2)} \le C \|u\|^2_{L^2(H_0^1)} \|u\|^{\beta-2}_{L^\infty(L^2)}$$
$$\forall u \in L^\infty(L^2) \bigcap L^2(H_0^1).$$

Como p es arbitrario en $(a, +\infty)$, β es arbitrariamente próximo a $\dfrac{2a}{a-2}$ por la izquierda. Así obtenemos la inyección deseada.

De (4.22) y este lema, se obtiene que

$$u^\varepsilon \text{ está acotada en } L^{\left(\frac{2a}{a-2}\right)^-}(L^a), \text{ para cada } a \in (2, +\infty). \tag{4.23}$$

k^ε **está acotada en** $L^\infty(L^1)$

Usaremos $\psi = S_\delta(k^\varepsilon)$ como función "test" en la ecuación de la energía de (4.20) (obsérvese que $S_\delta(k^\varepsilon(t)) \in H_0^1$ para cada t). Integrando en el intervalo $(0, t)$, obtenemos:

$$\int_0^t \langle \partial_t k^\varepsilon, S_\delta(k^\varepsilon) \rangle + \int_0^t \int_\Omega \mu_\varepsilon(k^\varepsilon) \nabla k^\varepsilon \cdot \nabla S_\delta(k^\varepsilon) + \int_0^t \int_\Omega B_\varepsilon(k^\varepsilon) \cdot \nabla S_\delta(k^\varepsilon)$$
$$+ \int_0^t \int_\Omega (u^\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon) S_\delta(k^\varepsilon) = \int_0^t \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon) S_\delta(k^\varepsilon).$$

Veamos cómo se comporta cada término de esta igualdad. En primer lugar,

$$\int_0^t \langle \partial_t k^\varepsilon, S_\delta(k^\varepsilon) \rangle = \int_0^t \int_\Omega \partial_t \tilde{S}_\delta(k^\varepsilon) = \int_\Omega \tilde{S}_\delta(k^\varepsilon(t)) - \int_\Omega \tilde{S}_\delta(k^\varepsilon(0))$$

(por supuesto, $\widetilde{S}_\delta$ es la primitiva de S_δ que se anule en 0). El segundo sumando verifica lo siguiente:

$$\int_0^t \int_\Omega \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon \cdot \nabla S_\delta(k^\varepsilon) \geq \mu_0 \int_0^t \int_\Omega |\nabla k^\varepsilon|^2 S_\delta'(k^\varepsilon) \geq 0\,.$$

Por otra parte, introduciendo

$$\left(\widehat{B}^\delta_\varepsilon\right)_i(r) = \int_0^r B_i(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(s))S_\delta'(s)\,ds \quad 1 \leq i \leq N\,,$$

$$\widehat{B}^\delta_\varepsilon = \left((\widehat{B}^\delta_\varepsilon)_1, ...(\widehat{B}^\delta_\varepsilon)_N\right)\,,$$

se tiene que

$$\int_0^t \int_\Omega B_\varepsilon(k^\varepsilon) \cdot \nabla S_\delta(k^\varepsilon) = \int_0^t \int_\Omega \nabla \cdot \widehat{B}^\delta_\varepsilon(k^\varepsilon) = 0\,.$$

En cuarto lugar,

$$\int_0^t \int_\Omega (u^\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon)S_\delta(k^\varepsilon) = \int_0^t \int_\Omega u^\varepsilon \cdot \nabla \widetilde{S}_\delta(k^\varepsilon)$$

$$= -\int_0^t \int_\Omega (\nabla \cdot u^\varepsilon)\widetilde{S}_\delta(k^\varepsilon) + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \widetilde{S}_\delta(k^\varepsilon)u^\varepsilon \cdot \mathbf{n}\, d\Gamma = 0\,.$$

Por último,

$$\int_0^t \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon)S_\delta(k^\varepsilon) \leq \int_0^t \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon) \leq C\,,$$

debido a (4.21). En consecuencia, podemos escribir que

$$\int_\Omega \widetilde{S}_\delta(k^\varepsilon(t)) \leq C + \int_\Omega \widetilde{S}_\delta(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k_0))\,. \tag{4.24}$$

Lema 4.4 *Si* $w \in L^1(\Omega)$, *entonces* $\int_\Omega \widetilde{S}_\delta(w) \to \int_\Omega |w|$ *cuando* $\delta \to 0$

—Demostración—

Por definición,

$$\widetilde{S}_\delta(r) = \begin{cases} r + \delta & si \quad r < \delta\,, \\ \dfrac{1}{2\delta}r^2 & si \quad -\delta < r < \delta\,, \\ -r + \delta & si \quad r < -\delta\,. \end{cases}$$

Cuando $\delta \to 0$, $\widetilde{S}_\delta(r)$ tiende a $|r|$; además, por ejemplo $\widetilde{S}_\delta(r) \leq |r| + 1$ para δ suficientemente pequeño. Por el teorema de Lebesgue, se llega a la conclusión anunciada.

Haciendo tender δ a cero y aplicando el lema 4.4 a $k^\varepsilon(t)$, se obtiene que:

$$\int_\Omega |k^\varepsilon(t)| \leq C + \int |T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k_0)| \leq C + \int_\Omega |k_0|\,,$$

luego,

$$\|k^\varepsilon\|_{L^\infty(L^1)} \leq C\,. \tag{4.25}$$

$T_M(k^\varepsilon)$ está acotada en $L^2(H_0^1)$ para cada $M>0$

Usando $\psi = T_M(k^\varepsilon)$ como función "test" en la ecuación de la energía de (4.20) e integrando en $(0,t)$, resulta:

$$\int_0^t \langle \partial_t k^\varepsilon, T_M(k^\varepsilon)\rangle + \int_0^t\int_\Omega \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon\cdot\nabla T_M(k^\varepsilon) + \int_0^t\int_\Omega B_\varepsilon(k^\varepsilon)\cdot\nabla T_M(k^\varepsilon)$$
$$+\int_0^t\int_\Omega u^\varepsilon\cdot\nabla k^\varepsilon T_M(k^\varepsilon) = \int_0^t\int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon:\nabla u^\varepsilon)T_M(k^\varepsilon).$$

Veamos cuál es el comportamiento de cada término en esta igualdad. En primer lugar,

$$\int_0^t \langle \partial_t k^\varepsilon, T_M(k^\varepsilon)\rangle = \int_0^t\int_\Omega \partial_t\widetilde{T}_M(k^\varepsilon) = \int_\Omega \widetilde{T}_M(k^\varepsilon(t)) - \int_\Omega \widetilde{T}_M(k^\varepsilon(0)),$$

El segundo sumando verifica lo siguiente

$$\int_0^t\int_\Omega \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon\cdot\nabla T_M(k^\varepsilon) = \int_0^t\int_\Omega \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)|\nabla T_M(k^\varepsilon)|^2 \ge \mu_0\int_0^t\int_\Omega |\nabla k^\varepsilon|^2 S_\delta'(k^\varepsilon)\ge 0.$$

Por otra parte, si

$$\left(\widehat{B}_\varepsilon^M\right)_i(r) = \int_0^r B_i(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(s))T_M'(s)\,ds \quad 1\le i\le N,$$
$$\widehat{B}_\varepsilon^M = \left((\widehat{B}_\varepsilon^M)_1,\ldots(\widehat{B}_\varepsilon^M)_N\right),$$

se tiene que

$$\int_0^t\int_\Omega B_\varepsilon(k^\varepsilon)\cdot\nabla T_M(k^\varepsilon) = \int_0^t\int_\Omega \nabla\cdot\widehat{B}_\varepsilon^M(k^\varepsilon) = 0.$$

En cuarto lugar,

$$\int_0^t\int_\Omega (u^\varepsilon\cdot\nabla k^\varepsilon)T_M(k^\varepsilon) = \int_0^t\int_\Omega u^\varepsilon\cdot\nabla\widetilde{T}_M(k^\varepsilon)$$
$$= -\int_0^t\int_\Omega(\nabla\cdot u^\varepsilon)\widetilde{T}_M(k^\varepsilon) + \int_0^t\int_{\partial\Omega}\widetilde{T}_M(k^\varepsilon)u^\varepsilon\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma = 0.$$

Por último,

$$\int_0^t\int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon:\nabla u^\varepsilon)T_M(k^\varepsilon)\le M\int_0^t\int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon:\nabla u^\varepsilon)\le C\cdot M.$$

Así pues,

$$\int_0^t\int_\Omega \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)|\nabla T_M(k^\varepsilon)|^2 \le \int_0^t\int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon:\nabla u^\varepsilon)T_M(k^\varepsilon) + \int_\Omega \widetilde{T}_M(k_0), \tag{4.26}$$

ya que $T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k_0)\le k_0$ y $\widetilde{T}_M$ es creciente para valores positivos de su argumento. En particular,

$$\|T_M(k^\varepsilon)\|_{L^2(H_0^1)}\le C\cdot M. \tag{4.27}$$

Se tiene que $\frac{1}{m}\iint_{n\le k^\varepsilon\le n+m} |\nabla k^\varepsilon|^2 \le C(n,m)$

Tomamos como función "test" $\zeta_{n,m}(k^\varepsilon)$ (cf. la Notación) en la ecuación de la energía de (4.20) e integramos en $(0,t)$. Obtenemos la igualdad

$$\int_0^t \langle \partial_t k^\varepsilon, \zeta_{n,m}(k^\varepsilon)\rangle + \int_0^t\int_\Omega \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon\cdot\nabla\zeta_{n,m}(k^\varepsilon) + \int_0^t\int_\Omega B_\varepsilon(k^\varepsilon)\cdot\nabla\zeta_{n,m}(k^\varepsilon)$$
$$+\int_0^t\int_\Omega u^\varepsilon\cdot\nabla k^\varepsilon\zeta_{n,m}(k^\varepsilon) = \int_0^t\int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon:\nabla u^\varepsilon)\zeta_{n,m}(k^\varepsilon)\,.$$

Una vez más, veamos el comportamiento de cada uno de estos términos. En primer lugar,

$$\int_0^t \langle \partial_t k^\varepsilon, \zeta_{n,m}(k^\varepsilon)\rangle = \int_0^t\int_\Omega \partial_t\tilde{\zeta}_{n,m}(k^\varepsilon) = \int_\Omega \tilde{\zeta}_{n,m}(k^\varepsilon(t)) - \int_\Omega \tilde{\zeta}_{n,m}(k^\varepsilon(0))\,.$$

En segundo lugar, resulta que

$$\int_0^t\int_\Omega \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon\cdot\nabla\zeta_{n,m}(k^\varepsilon) = \frac{1}{m}\int_0^t\int_{n\le k^\varepsilon\le n+m}\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)|\nabla k^\varepsilon|^2\,.$$

Usando la fórmula de Gauss en el tercer término con

$$\left(\bar{B}^{n,m}_\varepsilon\right)_i(r) = \int_0^r B_i(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(s))\zeta'_{n,m}(s)\,ds \quad 1\le i\le N\,,$$
$$\bar{B}^{n,m}_\varepsilon = \left((\bar{B}^{n,m}_\varepsilon)_1,\ldots(\bar{B}^{n,m}_\varepsilon)_N\right)\,,$$

se tiene:

$$\int_0^t\int_\Omega B_\varepsilon(k^\varepsilon)\cdot\nabla\zeta_{n,m}(k^\varepsilon) = \int_0^t\int_\Omega \nabla\cdot\bar{B}^M_\varepsilon(k^\varepsilon) = 0\,.$$

En cuarto lugar,

$$\int_0^t\int_\Omega (u^\varepsilon\cdot\nabla k^\varepsilon)\zeta_{n,m}(k^\varepsilon) = \int_0^t\int_\Omega u^\varepsilon\cdot\nabla\tilde{\zeta}_{n,m}(k^\varepsilon)$$
$$= -\int_0^t\int_\Omega(\nabla\cdot u^\varepsilon)\tilde{\zeta}_{n,m}(k^\varepsilon) + \int_0^t\int_{\partial\Omega}\tilde{\zeta}_{n,m}(k^\varepsilon)u^\varepsilon\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma = 0\,.$$

Por último,

$$\int_0^t\int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon:\nabla u^\varepsilon)\zeta_{n,m}(k^\varepsilon) \le \int_0^t\int_{k^\varepsilon\ge n} T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon:\nabla u^\varepsilon)\le C\,,$$

gracias a (4.21). Luego

$$\frac{1}{m}\int_0^t\int_{n\le k^\varepsilon\le n+m}\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)|\nabla k^\varepsilon|^2 \le \int_0^t\int_{k^\varepsilon\ge n} T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon:\nabla u^\varepsilon) + \int_\Omega\tilde{\zeta}_{n,m}(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k_0)) \tag{4.28}$$

y, también,

$$\frac{1}{m}\iint_{n\le k^\varepsilon\le n+m}|\nabla k^\varepsilon|^2 \le C(n,m)\,. \tag{4.29}$$

De (4.27) y (4.29), teniendo en cuenta los resultados de [7] (cf. el lema A.2 del Apéndice A), se deduce que

$$\|k^\varepsilon\|_{L^q(W^{1,q}_0)} \le C_q \quad \text{para todo } q<2\,. \tag{4.30}$$

k^ε **está acotada en** $L^{\left(\frac{2b}{b-1}\right)^-}\left(L^b\right)$, **para todo** $b \in (1, +\infty)$

Usaremos el siguiente

Lema 4.5 *Si* $N = 2$ *y* $1 < q < 2$, $L^\infty(L^1) \bigcap L^q(W_0^{1,q})$ *se inyecta en* $L^{\frac{3q-2}{2}\frac{b}{b-1}}(L^b)$ *para cada* $b > 1$, *con inyección continua.*

—Demostración—

Para $1 < b < +\infty$ y $\beta = \dfrac{3q-2}{2}\dfrac{b}{b-1}$, se tiene

$$\int_0^T \left(\int_\Omega |k|^b dx\right)^{\beta/b} dt \leq \int_0^T \left[\left(\int_\Omega |k|^{\frac{2q}{2-q}} dx\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_\Omega |k| dx\right)^{\frac{1}{r'}}\right]^{\beta/b} dt$$

$$\leq \|k\|^q_{L^q(L^{\frac{2q}{2-q}})} \|k\|^{\beta-q}_{L^\infty(L^1)} \leq C \|k\|^q_{L^q(W^{1,q})} \|k\|^{\beta-q}_{L^\infty(L^1)}$$

$$\forall k \in L^\infty(L^1) \bigcap L^q(W_0^{1,q}),$$

con $r = \dfrac{3q-2}{(2-q)(b-1)}$.

De acuerdo con este resultado y con las estimaciones (4.30), es claro que

$$k^\varepsilon \text{ está acotada en } L^{\left(\frac{2b}{b-1}\right)^-}(L^b) \text{ para cada } b \in (1, +\infty). \tag{4.31}$$

$\partial_t u^\varepsilon$ **está acotada en** $L^2(V')$

Procederemos de modo análogo a como se hizo para obtener (4.12). En efecto,

$$\partial_t u^\varepsilon(t) = f(t) - \nu A u^\varepsilon(t) - \bar{B}(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + DIV(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon(t))\Phi'(\nabla u^\varepsilon)(t)),$$

de donde

$$\|\partial_t u^\varepsilon(t)\|_{V'} \leq \|f(t)\|_{H^{-1}} + \nu \|u^\varepsilon(t)\|$$
$$+ C|u^\varepsilon(t)| \cdot \|u^\varepsilon(t)\| + \|DIV(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon(t))_+ \Phi'(\nabla u^\varepsilon)(t))\|_{V'}.$$

Los tres primeros sumandos están acotados en $L^2(0,T)$. Teniendo en cuenta que Φ' está uniformemente acotada y que k^ε está acotada (por ejemplo) en $L^2(Q)$, resulta que el último sumando está también acotado en $L^2(0,T)$. Por tanto,

$$\|\partial_t u^\varepsilon\|_{L^2(V')} \leq C. \tag{4.32}$$

(si $N = 3$ sólo podemos afirmar que $\partial_t u^\varepsilon$ está acotada en $L^{4/3}(V')$). De (4.22) y (4.32), deducimos también que

$$u^\varepsilon \text{ está acotada en } C^0(H). \tag{4.33}$$

$\partial_t\widetilde{\beta}(k^\varepsilon)$ está acotada en $L^1(L^1)+L^2(H^{-1})$ para cada $\beta\in W^{1,\infty}$ con soporte compacto.

Multiplicando la ecuación de la energía de (4.6) por $\beta(k^\varepsilon)$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\partial_t\widetilde{\beta}(k^\varepsilon) &= \beta(k^\varepsilon)\left[T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon:\nabla u^\varepsilon)+\nabla\cdot(\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon)\right.\\ &\quad \left.+\nabla\cdot B_\varepsilon(k^\varepsilon)-u^\varepsilon\cdot\nabla k^\varepsilon\right] = \beta(k^\varepsilon)T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon:\nabla u^\varepsilon)+\nabla\cdot(\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla\widetilde{\beta}(k^\varepsilon))\\ &\quad +\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla\beta(k^\varepsilon)\cdot\nabla k^\varepsilon+\nabla\cdot(B_\varepsilon(k^\varepsilon)\beta(k^\varepsilon))-B_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla\beta(k^\varepsilon)\\ &\quad -u^\varepsilon\cdot\nabla\widetilde{\beta}(k^\varepsilon).\end{aligned}\tag{4.34}$$

Teniendo en cuenta que $\beta(k^\varepsilon)=\beta(T_M(k^\varepsilon))$ y que $\widetilde{\beta}(k^\varepsilon)=\widetilde{\beta}(T_M(k^\varepsilon))$ para $M>0$ suficientemente grande, vamos a ver dónde se encuentra acotado cada sumando de (4.34).

$$\beta(k^\varepsilon)T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon:\nabla u^\varepsilon) \text{ está acotado en } L^1(Q),$$

ya que $\beta(k^\varepsilon)$ está acotado en $L^\infty(Q)$ y $T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon:\nabla u^\varepsilon)$ lo está en $L^1(Q)$, gracias a (4.21).

$$\nabla\cdot(\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla\widetilde{\beta}(k^\varepsilon)) \text{ está acotado en } L^2(H^{-1}),$$

puesto que $\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)$ lo está en $L^\infty(Q)$ y $\nabla\widetilde{\beta}(T_M(k^\varepsilon))$ en $L^2(Q)$.

$$\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla\beta(k^\varepsilon)\cdot\nabla k^\varepsilon \text{ está acotado en } L^1(Q),$$

ya que $\nabla\beta(k^\varepsilon)$ y $\nabla T_M(k^\varepsilon)$ lo están en $L^2(Q)$ (nótese que es válido sustituir ∇k^ε por $\nabla T_M(k^\varepsilon)$).

$$\nabla\cdot(B_\varepsilon(k^\varepsilon)\beta(k^\varepsilon)) \text{ está acotado en } L^2(H^{-1}),$$

debido a que $B_\varepsilon(k^\varepsilon)$ lo está en $L^2(Q)$. Además,

$$B_\varepsilon(k^\varepsilon)\cdot\nabla\beta(k^\varepsilon) \text{ está acotado en } L^2(Q),$$

$$u^\varepsilon\cdot\nabla\widetilde{\beta}(k^\varepsilon) \text{ está acotado en } L^1(Q) \quad \text{(por ejemplo).}$$

En conclusión,

$$\partial_t\widetilde{\beta}(k^\varepsilon) \text{ está acotada en } L^1(L^1)+L^2(H^{-1}).\tag{4.35}$$

En particular, dado que $N=2$, las inyecciones de Sobolev habituales nos dicen que

$$\partial_t\widetilde{\beta}(k^\varepsilon) \text{ está acotada en } L^1(W^{-1,q}) \text{ para cada } q\in(1,2).\tag{4.36}$$

Estas estimaciones para u^ε y k^ε permiten deducir la existencia de subsucesiones que convergen débilmente. En efecto, al menos para una subsucesión, tenemos:

$$\begin{array}{ll}
u^\varepsilon \to u & \text{en } L^2(V)\text{-débil}\,, \\
u^\varepsilon \to u & \text{en } L^{\left(\frac{2a}{a-2}\right)^-}(L^a) \quad \forall a > 2 \text{ y c.p.d.}, \\
\partial_t u^\varepsilon \to \partial_t u & \text{en } L^2(V')\text{-débil}\,, \\
k^\varepsilon \to k & \text{en } L^q(W_0^{1,q})\text{-débil} \quad \forall q < 2\,, \\
k^\varepsilon \to k & \text{en } L^{\left(\frac{2b}{b-1}\right)^-}(L^{b^-}) \quad \forall b > 1 \text{ y c.p.d.}, \\
T_M(k^\varepsilon) \to T_M(k) & \text{en } L^2(H_0^1)\text{-débil} \quad \forall M > 0\,.
\end{array}$$

La convergencia fuerte y c.p.d. de u^ε se obtiene como consecuencia de (4.22), (4.23) y (4.32). Para obtener la convergencia fuerte y c.p.d. de k^ε, razonamos como sigue. Para cada $M > 0$, sea $\widetilde{\beta}_M$ una función regular tal que

$$\widetilde{\beta}_M(r) = \begin{cases} -M & si \quad r < -M\,, \\ r & si \quad |r| \le \dfrac{M}{2}\,, \\ M & si \quad r > M\,. \end{cases}$$

Por el procedimiento habitual de diagonalización, es posible hallar una subsucesión que verifica

$$\widetilde{\beta}_M(k^\varepsilon) \to \widetilde{\beta}_M(k) \quad \text{c.p.d. } \forall M > 0\,.$$

De acuerdo con el resultado que sigue, necesariamente $k^\varepsilon \to k$ c.p.d. Debido a (4.31), es claro que, al menos una subsucesión converge fuertemente en $L^{\left(\frac{2b}{b-1}\right)^-}(L^{b^-}) \quad \forall b > 1$.

Lema 4.6 *Si $\widetilde{\beta}_M(k^\varepsilon) \to \widetilde{\beta}_M(k)$ c.p.d. para cada $M > 0$, entonces $k^\varepsilon \to k$ c.p.d.*

—Demostración—

Supongamos que k^ε no converge a k c.p.d. Entonces existe un conjunto $A \subset \Omega\times(0,T)$ de medida no nula tal que

$$k^\varepsilon(x,t) \not\to k(x,t) \quad \forall (x,t) \in A\,.$$

Existirá una constante $M_0 > 0$ tal que el conjunto $A_0 = A \bigcap \{k \le M_0\}$ es de medida positiva. Sea $M = 4M_0$. Entonces $\widetilde{\beta}_M(k^\varepsilon) \not\to \widetilde{\beta}_M(k)$ en A_0, dado que, en este conjunto, $\widetilde{\beta}_M(k) = k$ y, al mismo tiempo, $\widetilde{\beta}_M(k^\varepsilon) = k^\varepsilon$ ó $\widetilde{\beta}_M(k^\varepsilon) \ge 2M_0$.

Para terminar esta etapa, hagamos notar que $k \ge 0$.

4.3.3 Tercera etapa: u es, junto con alguna p, solución de la ecuación de movimiento.

Vamos a ver en primer lugar que u verifica la condición inicial. Puesto que u^ε está acotada en $C^0(H)$, podemos suponer que $u^\varepsilon(0) \to u(0)$ en H-débil. Pero $u^\varepsilon(0) = u_0$ en Ω; luego $u(0) = u_0$.

Para pasar al límite en las dos primeras ecuaciones de (4.6), es conveniente introducir una inecuación variacional de evolución equivalente. La razón es la dificultad ya planteada en el caso estacionario. Sabemos que, al menos para una subsucesión, $\Phi'(\nabla u^\varepsilon)$ converge débilmente pero no podemos afirmar que su límite sea $\Phi'(\nabla u)$. Usando $v - u^\varepsilon(t)$ como función "test" e integrando en el intervalo $(0, T)$, se obtiene:

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^T \langle \partial_t u^\varepsilon, v - u^\varepsilon\rangle + \nu \iint_Q \nabla u^\varepsilon(\nabla v - \nabla u^\varepsilon) \\ &\quad + \iint_Q (u^\varepsilon\cdot\nabla)u^\varepsilon\cdot(v - u^\varepsilon) + \iint_Q T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi'(\nabla u^\varepsilon) : (\nabla v - \nabla u^\varepsilon) \\ &\quad = \int_0^T \langle f, v - u^\varepsilon\rangle \qquad \forall v \in V\,, \quad u^\varepsilon \in V\,. \end{aligned}\right. \tag{4.37}$$

Introduzcamos, al igual que en el caso estacionario, la función $J_k : V \mapsto \mathbb{R}$, dada como sigue:

$$J_k(v) = \int_\Omega k\Phi(\nabla v) \qquad \forall v \in V\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} &\iint_Q T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi'(\nabla u^\varepsilon) : (\nabla v - \nabla u^\varepsilon) = \int_0^T \langle J'_{T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)}(u^\varepsilon), v - u^\varepsilon\rangle \\ &\leq \int_0^T (J_{T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)}(v) - J_{T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)}(u^\varepsilon)) = \iint_Q T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi(\nabla v) - \iint_Q T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi(\nabla u^\varepsilon) \end{aligned}$$

Por tanto, para cada $\varepsilon > 0$, u^ε es solución de la siguiente inecuación variacional:

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^T \langle \partial_t u^\varepsilon, v - u^\varepsilon\rangle + \nu \iint_Q \nabla u^\varepsilon : (\nabla v - \nabla u^\varepsilon) \\ &\quad + \iint_Q (u^\varepsilon\cdot\nabla)u^\varepsilon\cdot(v - u^\varepsilon) + \iint_Q T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi(\nabla v) - \iint_Q T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi(\nabla u^\varepsilon) \\ &\quad \geq \int_0^T \langle f, v - u^\varepsilon\rangle \qquad \forall v \in V\,, \quad u^\varepsilon \in V\,. \end{aligned}\right.$$

O bien:

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^T \langle \partial_t u^\varepsilon, v\rangle + \nu \iint_Q \nabla u^\varepsilon : \nabla v + \iint_Q (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon \cdot v + \iint_Q T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi(\nabla v) \\ \quad + \frac{1}{2}|u_0|^2 \geq \nu \displaystyle\iint_Q |\nabla u^\varepsilon|^2 + \iint_Q T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi(\nabla u^\varepsilon) \\ \quad + \displaystyle\int_0^T \langle f, v - u^\varepsilon\rangle + \frac{1}{2}|u^\varepsilon(T)|^2 \qquad \forall v \in V, \quad u^\varepsilon \in V. \end{array} \right. \tag{4.38}$$

Tomando límites cuando $\varepsilon \to 0$, se obtiene:

$$\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^T \langle \partial_t u, v\rangle + \nu \iint_Q \nabla u : \nabla v + \iint_Q (u \cdot \nabla) u \cdot v + \iint_Q k\Phi(\nabla v) \\ \quad + \frac{1}{2}|u_0|^2 \geq \nu \displaystyle\iint_Q |\nabla u|^2 + \iint_Q k\Phi(\nabla u) + \langle f, v - u\rangle + \frac{1}{2}|u(T)|^2 . \end{array} \tag{4.39}$$

En efecto, veamos cuál es el comportamiento de cada sumando de (4.38) cuando $\varepsilon \to 0$. Debido a la convergencia débil de $\partial_t u^\varepsilon$ a $\partial_t u$ en $L^2(V')$, el primero converge a $\int_0^T \langle \partial_t u, v\rangle$. El segundo converge a $\nu \iint_Q \nabla u : \nabla v$, puesto que ∇u^ε converge débilmente a ∇u en $L^2(Q)$. Por otro lado, para cada i, j

$$\iint_Q u_i^\varepsilon \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} v_j = - \iint_Q u_i^\varepsilon u_j^\varepsilon \frac{\partial v_j^\varepsilon}{\partial x_i}$$

y el producto $u_i^\varepsilon u_j^\varepsilon$ converge fuertemente (por ejemplo) en $L^2(Q)$, de modo que el tercer sumando de (4.38) tiende a

$$\iint_Q (u \cdot \nabla) u \cdot v.$$

El cuarto converge a

$$\iint_Q k\Phi(\nabla v),$$

puesto que $\Phi(\nabla v)$ está en $L^2(Q)$ y tenemos que (por ejemplo), $T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon) \to k$ en $L^2(Q)$. De la semicontinuidad inferior y la convexidad de la norma, se tiene:

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \iint_Q |\nabla u^\varepsilon|^2 \geq \iint_Q |\nabla u|^2 .$$

Por lo que respecta al segundo sumando del miembro de la derecha de (4.38), podemos escribir:

$$\iint_Q T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi(\nabla u^\varepsilon) = \iint_Q (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon) - k)\Phi(\nabla u^\varepsilon) + \iint_Q k\Phi(\nabla u^\varepsilon). \tag{4.40}$$

La primera integral del miembro de la derecha de (4.40) tiende a cero. Por otro lado, la función

$$v \mapsto \iint_Q k\Phi(\nabla v) \tag{4.41}$$

es convexa (por serlo Φ) y continua, de donde también podemos asegurar que es débilmente s.c.i., es decir:

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \iint_Q k\Phi(\nabla u^\varepsilon) \geq \iint_Q k\Phi(\nabla u).$$

En consecuencia,

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \iint_Q T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi(\nabla u^\varepsilon) \geq \iint_Q k\Phi(\nabla u).$$

También, debido a la convergencia débil de u^ε a u en $L^2(V)$, se tiene

$$\int_0^T \langle f, v - u^\varepsilon\rangle \to \int_0^T \langle f, v - u\rangle .$$

Por último, sabemos que $u^\varepsilon(T) \to u(T)$ en H-débil (nótese que $N = 2$). De la continuidad y convexidad de la norma, tenemos que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} |u^\varepsilon(T)|^2 \geq |u(T)|^2 .$$

Esto prueba (4.39). A continuación vamos a re-escribir (4.39) como una ecuación. Para ello, tomamos en (4.39) funciones v de la forma $u + \lambda w$, donde $w \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\lambda > 0$. Se obtiene que

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \langle \partial_t u, u\rangle + \nu \iint_Q \nabla u : \nabla w + \iint_Q (u\cdot\nabla)u\cdot w + \iint_Q k\frac{1}{\lambda}\left(\Phi(\nabla u + \lambda\nabla w) - \Phi(\nabla u)\right) \\ \displaystyle\geq \int_0^T \langle f, \lambda w\rangle \qquad \forall w \in V, \quad u \in V. \end{cases}$$

Recordando que $\Phi \in C^1$ y tomando límites cuando $\lambda \to 0^+$, se tiene:

$$\int_0^T \langle \partial_t u, w\rangle + \nu \iint_Q \nabla u : \nabla w + \iint_Q (u\cdot\nabla)u\cdot w + \iint_Q k\Phi'(\nabla u) : \nabla w \geq \int_0^T \langle f, w\rangle \qquad \forall w \in V .$$

Repitiendo el proceso para $\lambda < 0$, se obtiene la desigualdad contraria, así que

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \langle \partial_t u, w\rangle + \nu \iint_Q \nabla u : \nabla w + \iint_Q (u\cdot\nabla)u\cdot w + \iint_Q k\Phi'(\nabla u) : \nabla w \\ \displaystyle= \int_0^T \langle f, w\rangle \qquad \forall w \in V . \end{cases} \tag{4.42}$$

Es decir, u es solución, junto con una función $p \in L^2(Q)$ de las dos primeras ecuaciones de (4.1) en el sentido débil habitual.

4.3.4 Cuarta etapa: Convergencia fuerte de ∇u^ε

Para cada t, tomamos $w = u(t)$ en (4.42) y obtenemos:

$$\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}|u|^2 + \nu \iint_Q |\nabla u|^2 + \iint_Q k\Phi'(\nabla u) : \nabla u = \int_0^T \langle f, u\rangle . \tag{4.43}$$

Integrando nuevamente en $(0,T)$ resulta:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^T |u|^2 + \iint_Q (T-t)(\nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u)\\ &\qquad = \int_0^T (T-t)\langle f, w\rangle + \frac{T}{2}|u_0|^2 \qquad \forall u \in V .\end{aligned} \tag{4.44}$$

Aquí, hemos usado que $\partial_t u \in L^2(V')$, lo cual es cierto por ser $N = 2$. Por otro lado, si tomamos u^ε como función "test" en la primera ecuación de (4.6), obtenemos:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}|u^\varepsilon|^2 + \nu \iint_Q |\nabla u^\varepsilon|^2 + \iint_Q T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi'(\nabla u^\varepsilon) : \nabla u^\varepsilon\\ &\qquad = \int_0^T \langle f, u^\varepsilon\rangle .\end{aligned}$$

Integrando nuevamente en $(0,T)$ resulta:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^T |u^\varepsilon(t)|^2 + \iint_Q (T-t)\left(\nu|\nabla u^\varepsilon|^2 + T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi'(\nabla u^\varepsilon) : \nabla u^\varepsilon\right)\\ &\qquad = \int_0^T (T-t)\langle f, u^\varepsilon\rangle + \frac{T}{2}|u_0^\varepsilon|^2 .\end{aligned}$$

Si tomamos límites cuando $\varepsilon \to 0$, como $u^\varepsilon \to u$ en $L^2(H)$ y

$$\int_0^T (T-t)\langle f, u^\varepsilon\rangle \to \int_0^T (T-t)\langle f, u\rangle ,$$

llegamos a la igualdad

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^T |u|^2 + \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_Q (T-t)\left(\nu|\nabla u^\varepsilon|^2 + T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi'(\nabla u^\varepsilon) : \nabla u^\varepsilon\right)\\ &\qquad = \int_0^T (T-t)\langle f, u\rangle + \frac{T}{2}|u_0|^2 .\end{aligned} \tag{4.45}$$

Comparando (4.44) con (4.45), obtenemos que

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_Q (T-t)\left(\nu|\nabla u^\varepsilon|^2 + T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)\Phi'(\nabla u^\varepsilon) : \nabla u^\varepsilon\right)\\ &\qquad = \iint_Q (T-t)\left(\nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u\right) .\end{aligned} \tag{4.46}$$

Veamos que (4.46) implica la convergencia fuerte de ∇u^ε. En efecto, como Φ' está uniformemente acotada,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_Q (T-t)(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon)-k)\Phi'(\nabla u^\varepsilon):\nabla u^\varepsilon = 0\,,$$

lo cual, junto con (4.46), permite escribir que

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}&\iint_Q (T-t)\left(\nu|\nabla u^\varepsilon|^2 + k\Phi'(\nabla u^\varepsilon):\nabla u^\varepsilon\right)\\ &= \iint_Q (T-t)\left(\nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u):\nabla u\right).\end{aligned}$$

Escribiendo que $u^\varepsilon = u + (u^\varepsilon - u)$, se obtiene

$$\begin{aligned}&\iint_Q (T-t)(\nu|\nabla u^\varepsilon|^2 + k\Phi'(\nabla u^\varepsilon):\nabla u^\varepsilon)\\ &\qquad - \iint_Q (T-t)(\nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u):\nabla u)\\ &= 2\nu\iint_Q (T-t)\nabla(u^\varepsilon - u):\nabla u + \nu\iint_Q (T-t)|\nabla(u^\varepsilon-u)|^2\\ &\quad + \iint_Q (T-t)k\Phi'(\nabla u^\varepsilon):\nabla u^\varepsilon - \iint_Q (T-t)k\Phi'(\nabla u):\nabla u\,.\end{aligned} \tag{4.47}$$

Pero

$$\lim_{\varepsilon\to 0} 2\nu\iint_Q (T-t)\nabla(u^\varepsilon - u):\nabla u = 0\,.$$

Luego

$$\begin{aligned}0 \geq &\limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\nu\iint_Q (T-t)|\nabla(u^\varepsilon-u)|^2\right)\\ &+\liminf_{\varepsilon\to 0}\left(\iint_Q (T-t)k\Phi'(\nabla u^\varepsilon):\nabla u^\varepsilon - \iint_Q (T-t)k\Phi'(\nabla u):\nabla u\right).\end{aligned}$$

La función

$$v\mapsto \iint_Q k\Phi'(\nabla v):\nabla v$$

es débilmente s.c.i. Por tanto,

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\left(\iint_Q (T-t)k\Phi'(\nabla u^\varepsilon):\nabla u^\varepsilon - \iint_Q (T-t)k\Phi'(\nabla u):\nabla u\right) \geq 0\,.$$

Así que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_Q (T-t)|\nabla(u^\varepsilon-u)|^2 = 0\,.$$

Es decir,

$$\nabla u^\varepsilon \to \nabla u \text{ en } L^2(\Omega\times(0,T^-))$$

Obsérvese que (al menos para una subsucesión), ha de tenerse que ∇u^ε también converge c.p.d. en Q.

4.3.5 Quinta etapa: Convergencia fuerte de $T_M(k^\varepsilon)$ en $L^2(H_0^1)$ para todo $M > 0$

Vamos a escribir la ecuación de la energía de (4.6) en la forma siguiente:

$$\partial_t k^\varepsilon - \nabla \cdot (\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon + B_\varepsilon(k^\varepsilon)) = F_1^\varepsilon + F_2^\varepsilon\,, \tag{4.48}$$

con

$$F_1^\varepsilon = T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon), \quad F_2^\varepsilon = -u^\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon\,. \tag{4.49}$$

Hemos demostrado que

$$F_1^\varepsilon \to \nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u \;\text{ en }\; L^1(\Omega \times (0,T^-))\,.$$

Por otro lado, F_2^ε converge débilmente en $L^c(Q)$ para algún $c > 1$. Esta última afirmación puede obtenerse de las propiedades de convergencia deducidas en la segunda etapa de la demostración como sigue. Sabemos que

$$\nabla k^\varepsilon \to \nabla k \;\text{ en }\; L^q(Q)\text{-débil para todo } q < 2\,. \tag{4.50}$$

Por otro lado, recordemos que

$$u^\varepsilon \to u \;\text{ en }\; L^{\left(\frac{2a}{a-2}\right)^-}(L^a) \;\text{ para cada } a \in (2, +\infty)\,.$$

En particular, si elegimos $q < 2$ y $a > q'$ próximo a q', se tiene $\frac{2a}{a-2} > q'$ y, en consecuencia, que $u^\varepsilon \to u$ fuertemente en $L^p(L^p)$ para algún $p > q'$. Esto, junto con (4.50), proporciona la convergencia débil de F_2^ε.

En lo que queda de esta etapa, demostraremos que

$$\lim_{\eta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_Q (T-t)\left|\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\nabla T_M(k^\varepsilon) - \mu_\eta(k^\eta)^{\frac{1}{2}}\nabla T_M(k^\eta)\right|^2 = 0 \tag{4.51}$$

para cada $M > 0$. El argumento que usaremos se debe a D. Blanchard y H. Redwane (ver [5]) pero, para mayor claridad, será presentado íntegramente. La igualdad (4.51) es suficiente para terminar la demostración del teorema. No obstante, es fácil deducir también que

$$\nabla T_M(k^\varepsilon) \to \nabla T_M(k) \;\text{ en }\; L^2(\Omega \times (0,T^-))\,. \tag{4.52}$$

En lo sucesivo, LIM $F_{\varepsilon,\eta} = L$ significa que, cuando ε y η convergen sucesivamente a cero, se tiene:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\eta\to 0} F_{\varepsilon,\eta} = \lim_{\eta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} F_{\varepsilon,\eta} = L\,.$$

La definicion de T_M permite la siguiente descomposición:

$$\iint_Q (T-t)|\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\nabla T_M(k^\varepsilon) - \mu_\eta(k^\eta)^{\frac{1}{2}}\nabla T_M(k^\eta)|^2 = A_M^{\varepsilon,\eta} + B_M^{\varepsilon,\eta} + B_M^{\eta,\varepsilon},$$

donde

$$A_M^{\varepsilon,\eta} = \iint_{\{k^\varepsilon<M,\, k^\eta<M\}} (T-t)\,|\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\nabla k^\varepsilon - \mu_\eta(k^\eta)^{\frac{1}{2}}\nabla k^\eta|^2,$$

$$B_M^{\varepsilon,\eta} = \iint_{\{k^\varepsilon<M,\, k^\eta\geq M\}} (T-t)\,|\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\nabla k^\varepsilon|^2.$$

Dividiremos la demostración de (4.51) en dos partes:

Primera Parte: $\mathrm{LIM}\, A_M^{\varepsilon,\eta} = 0 \quad \forall M > 0$.

Por simplicidad, escribiremos μ_ε, μ_η, B_ε y B_η en lugar de $\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)$, $\mu_\eta(k^\eta)$, $B_\varepsilon(k^\varepsilon)$ y $B_\eta(k^\eta)$, respectivamente. Vamos a fijar una constante $M > 0$ y un entero $n \geq M$. Usaremos la funciones h_n, S_n and S_{2M} (vease la Notación). Nótese que

$$0 \leq A_M^{\varepsilon,\eta} \leq P^{\varepsilon,\eta,n},$$

donde

$$P^{\varepsilon,\eta,n} = \iint_Q (T-t) S'_{2M}(S_n(k^\varepsilon) - S_n(k^\eta))|\mu_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\nabla S_n(k^\varepsilon) - \mu_\eta^{\frac{1}{2}}\nabla S_n(k^\eta)|^2. \tag{4.53}$$

En efecto, en $A_M^{\varepsilon,\eta}$ se integra en un conjunto más pequeño que en $P^{\varepsilon,\eta,n}$; además, se cumple que

$$\{k^\varepsilon < M\,, k^\eta < M\} \subset \{k^\varepsilon < n\,, k^\eta < n\},$$

y, en este último conjunto, $S'_n = h_n = 1$. Análogamente , como

$$\{k^\varepsilon < M\,, k^\eta < M\} \subset \{|k^\varepsilon - k^\eta| < 2M\},$$

tenemos $S'_{2M} = 1$. Por tanto, bastará demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{\varepsilon,\eta\to 0} P^{\varepsilon,\eta,n} = 0.$$

Consideramos como funciones "test" $h_n(k^\varepsilon)S_{2M}(S_n(k^\varepsilon) - S_n(k^\eta))$ en la ecuación de la energía (4.48) para k^ε y $h_n(k^\eta)S_{2M}(S_n(k^\varepsilon) - S_n(k^\eta))$ en la misma ecuación para k^η.

Entonces, restando e integrando en Ω, $(0,t)$ y $(0,T)$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_0^t\int_\Omega \partial_t(S_n(k^\varepsilon)-S_n(k^\eta))S_{2M}(S_n(k^\varepsilon)-S_n(k^\eta))\\
&+\int_0^T\int_0^t\int_\Omega (\mu_\varepsilon\nabla S_n(k^\varepsilon)-\mu_\eta\nabla S_n(k^\eta))\cdot\nabla S_{2M}(S_n(k^\varepsilon)-S_n(k^\eta))\\
&+\int_0^T\int_0^t\int_\Omega \mu_\varepsilon h_n'(k^\varepsilon)S_{2M}(S_n(k^\varepsilon)-S_n(k^\eta))|\nabla k^\varepsilon|^2\\
&-\int_0^T\int_0^t\int_\Omega \mu_\eta h_n'(k^\eta)S_{2M}(S_n(k^\varepsilon)-S_n(k^\eta))|\nabla k^\eta|^2\\
&+\int_0^T\int_0^t\int_\Omega (h_n(k^\varepsilon)B_\varepsilon-h_n(k^\eta)B_\eta)\cdot\nabla S_{2M}(S_n(k^\varepsilon)-S_n(k^\eta))\\
&+\int_0^T\int_0^t\int_\Omega B_\varepsilon\cdot\nabla h_n(k^\varepsilon)\,S_{2M}(S_n(k^\varepsilon)-S_n(k^\eta))\\
&-\int_0^T\int_0^t\int_\Omega B_\eta\cdot\nabla h_n(k^\eta)\,S_{2M}(S_n(k^\varepsilon)-S_n(k^\eta))\\
&=\int_0^T\int_0^t\int_\Omega (F^\varepsilon h_n(k^\varepsilon)-F^\eta h_n(k^\eta))\,S_{2M}(S_n(k^\varepsilon)-S_n(k^\eta)).
\end{aligned}$$

Aquí, $F^\varepsilon = F_1^\varepsilon + F_2^\varepsilon$ (cf. (4.49)). Re-escribiremos la igualdad anterior como sigue:

$$A_1^{\varepsilon,\eta,n}+A_2^{\varepsilon,\eta,n}+A_3^{\varepsilon,\eta,n}+A_4^{\varepsilon,\eta,n}+A_5^{\varepsilon,\eta,n}+A_6^{\varepsilon,\eta,n}+A_7^{\varepsilon,\eta,n}=A_8^{\varepsilon,\eta,n}. \tag{4.54}$$

A continuación, analizaremos el comportamiento de cada término de (4.54). Vemos que

$$A_1^{\varepsilon,\eta,n}=\iint_Q \widetilde{S}_{2M}(S_n(k^\varepsilon)-S_n(k^\eta))-T\int_\Omega \widetilde{S}_{2M}(S_n(k_0^\varepsilon)-S_n(k_0^\eta)). \tag{4.55}$$

En (4.55), la primera integral es positiva y la segunda, gracias al teorema de Lebesgue, tiende a cero cuando $\varepsilon,\eta\to 0$. En efecto, $S_n(k_0^\varepsilon)$ converge c.p.d. a $S_n(k_0)$ cuando $\varepsilon\to 0$ y $\widetilde{S}_{2M}$ está acotada; análogamente ocurre cuando $\eta\to 0$ y, además, $\widetilde{S}_{2M}(0)=0$. Por tanto, $\mathrm{LIM}\, A_1^{\varepsilon,\eta,n}\geq 0$ para cada n. El tercer sumando verifica:

$$\limsup_{\varepsilon,\eta\to 0} A_3^{\varepsilon,\eta,n}\leq T\,\|h_n'\|_{L^\infty}\|S_{2M}\|_{L^\infty}\limsup_{\varepsilon,\eta\to 0}\iint_{\{n\leq k^\varepsilon\leq n+1\}}\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)|\nabla k^\varepsilon|^2\ ;$$

recordando (4.28), deducimos que este límite superior está acotado por

$$\limsup_{\varepsilon,\eta\to 0}\iint_{\{k^\varepsilon\geq n\}} T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon:\nabla u^\varepsilon)+\limsup_{\varepsilon,\eta\to 0}\int_\Omega \widetilde{\zeta}_n(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k_0)). \tag{4.56}$$

Gracias al lema de Fatou,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\iint_Q T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon:\nabla u^\varepsilon)\mathbb{1}_{\{k^\varepsilon\geq n\}}\leq\iint_Q \limsup_{\varepsilon\to 0} T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon:\nabla u^\varepsilon)\mathbb{1}_{\{k^\varepsilon\geq n\}},$$

puesto que $T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon:\nabla u^\varepsilon)$ converge a $\tau:\nabla u$ c.p.d. y $\limsup_{\varepsilon\to 0}\mathbb{1}_{\{k^\varepsilon\geq n\}}=\mathbb{1}_{\{k\geq n\}}$. La última integral es menor ó igual que $\iint_{\{k\geq n\}}\tau:\nabla u$. Por otro lado, cuando $\varepsilon\to 0$, $\widetilde{\zeta}_n(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k_0))$

converge c.p.d. a $\tilde{\zeta}_n(k_0)$ y está acotada por k_0. En consecuencia, la suma de (4.56) puede ser mayorada por

$$\iint_{\{k\geq n\}} \tau : \nabla u + \int_\Omega \tilde{\zeta}_n(k_0)\,.$$

Pero estas dos integrales convergen a 0 cuando $n \to +\infty$. Así que

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{\varepsilon,\eta\to 0} A_3^{\varepsilon,\eta,n} = 0\,.$$

Análogamente,

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{\varepsilon,\eta\to 0} A_4^{\varepsilon,\eta,n} = 0\,.$$

Podemos reemplazar B_ε por $B(T_{n+1}(k^\varepsilon))$ y B_η por $B(T_{n+1}(k^\eta))$ en los tres siguientes términos. Entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A_5^{\varepsilon,\eta,n} = \int_0^T\!\!\int_0^t\!\!\int_\Omega (B(k)h_n(k) - B_\eta\, h_n(k^\eta)) \cdot \nabla S_{2M}(S_n(k) - S_n(k^\eta))\,. \tag{4.57}$$

En efecto, $B(T_{n+1}(k^\varepsilon))h_n(k^\varepsilon)$ está acotada en $L^\infty(Q)^N$ y converge c.p.d. a $B(k)h_n(k)$; así pues, $B(T_{n+1}(k^\varepsilon))h_n(k^\varepsilon)$ converge en $L^p(Q)^N$, para todo p finito. Por otro lado,

$$\nabla S_{2M}(S_n(k^\varepsilon) - S_n(k^\eta)) = S'_{2M}(S_n(k^\varepsilon) - S_n(k^\eta))\nabla(S_n(k^\varepsilon) - S_n(k^\eta))\,,$$

donde $S'_{2M}(S_n(k^\varepsilon) - S_n(k^\eta))$ converge a $S'_{2M}(S_n(k) - S_n(k^\eta))$ en $L^q(Q)$, para cada q finito y $\nabla S_{2M}(S_n(k^\varepsilon) - S_n(k^\eta))$ converge débilmente a $\nabla S_{2M}(S_n(k) - S_n(k^\eta))$ en $L^2(Q)^N$. Se obtiene (4.57) sin más que elegir p y q tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$. Razonando del mismo modo para $\eta \to 0$ y teniendo en cuenta que $S'_{2M}(0) = 0$, se obtiene

$$\mathrm{LIM}\, A_5^{\varepsilon,\eta,n} = 0\,.$$

También, para $A_6^{\varepsilon,\eta,n}$ se tiene que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A_6^{\varepsilon,\eta,n} = \int_0^T\!\!\int_0^t\!\!\int_\Omega B(k)\nabla h_n(k) S_{2M}(S_n(k) - S_n(k^\eta))\,, \tag{4.58}$$

puesto que $B_\varepsilon \cdot h'_n(k^\varepsilon) S_{2M}(S_n(k^\varepsilon) - S_n(k^\eta))$ converge c.p.d. y está uniformemente acotada en $L^\infty(Q)$. Esto, junto con la convergencia débil de $\nabla T_{n+1}(k^\varepsilon)$ a $\nabla T_n(k)$ en $L^2(Q)^N$ conduce a (4.58). Cuando $\eta \to 0$, $S_{2M}(S_n(k) - S_n(k^\eta)) \to 0$ en $L^2(Q)$, nuevamente debido a que $S_{2M}(0) = 0$. Por tanto,

$$\mathrm{LIM}\, A_6^{\varepsilon,\eta,n} = 0 \text{ para todo } n\,.$$

Análogamente,

$$\mathrm{LIM}\, A_7^{\varepsilon,\eta,n} = 0 \text{ para todo } n\,.$$

Por lo que respecta al término de la derecha de (4.54), podemos escribir que

$$F^\varepsilon h_n(k^\varepsilon)S_{2M}(S_n(k^\varepsilon)-S_n(k^\eta))$$
$$=F_1^\varepsilon h_n(k^\varepsilon)S_{2M}(S_n(k^\varepsilon)-S_n(k^\eta))+F_2^\varepsilon h_n(k^\varepsilon)S_{2M}(S_n(k^\varepsilon)-S_n(k^\eta))\,.$$

Aquí,

$$h_n(k^\varepsilon)S_{2M}(S_n(k^\varepsilon)-S_n(k^\eta)) \tag{4.59}$$

está uniformemente acotada y converge c.p.d. a $h_n(k)S_{2M}(S_n(k)-S_n(k^\eta))$ cuando $\varepsilon\to 0$. Dado que F_1^ε converge débilmente en $L^c(Q)$ para algún $c>1$ y F_2^ε converge en $L^1(\Omega\times(0,T^-))$, obtenemos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A_8^{\varepsilon,\eta,n}=\int_0^T\int_0^t\int_\Omega (Fh_n(k)-F^\eta h_n(k^\eta))\,S_{2M}(S_n(k)-S_n(k^\eta))\,,$$

donde $F=\tau:\nabla u-u\cdot\nabla k$. Siguiendo los mismos pasos para $\eta\to 0$, llegamos a que

$$\mathrm{LIM}\,A_8^{\varepsilon,\eta,n}=0\,.$$

En resumen, hemos visto que todas las integrales $A_i^{\varepsilon,\eta,n}$ excepto $A_1^{\varepsilon,\eta,n}$ y, posiblemente $A_2^{\varepsilon,\eta,n}$, convergen a cero. Como $\mathrm{LIM}\,A_1^{\varepsilon,\eta,n}\geq 0$, deducimos de (4.54) que

$$\mathrm{LIM}\,A_2^{\varepsilon,\eta,n}\leq 0\,.$$

Ahora vamos a expresar el integrando de $A_2^{\varepsilon,\eta,n}$ del modo siguiente:

$$(\mu_\varepsilon h_n(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon-\mu_\eta h_n(k^\eta)\nabla k^\eta)S'_{2M}(S_n(k^\varepsilon)-S_n(k^\eta))\cdot(h_n(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon-h_n(k^\eta)\nabla k^\eta)$$
$$=S'_{2M}(S_n(k^\varepsilon)-S_n(k^\eta))|\mu_\varepsilon^{1/2}h_n(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon-\mu_\eta^{1/2}h_n(k^\eta)\nabla k^\eta|^2$$
$$-S'_{2M}(S_n(k^\varepsilon)-S_n(k^\eta))h_n(k^\varepsilon)h_n(k^\eta)\nabla k^\varepsilon\cdot\nabla k^\eta(\mu_\varepsilon-\mu_\eta)^2\,.$$

Así $A_2^{\varepsilon,\eta,n}=P^{\varepsilon,\eta,n}+N^{\varepsilon,\eta,n}$, donde $P^{\varepsilon,\eta,n}$ viene dado por (4.53) y

$$N^{\varepsilon,\eta,n}=\iint_Q(T-t)S'_{2M}(S_n(k^\varepsilon)-S_n(k^\eta))\nabla S_n(k^\varepsilon)\cdot\nabla S_n(k^\eta)(\mu_\varepsilon^{\frac12}-\mu_\eta^{\frac12})^2\,.$$

Veamos que $\mathrm{LIM}\,N^{\varepsilon,\eta,n}=0$. Para ello, escribimos el integrando precedente en la forma

$$(T-t)S'_{2M}(S_n(k^\varepsilon)-S_n(k^\eta))h_n(k^\varepsilon)h_n(k^\eta)$$
$$(\mu(T_{n+1}(k^\varepsilon))^{\frac12}-\mu(T_{n+1}(k^\eta))^{\frac12})^2\nabla T_{n+1}(k^\varepsilon)\cdot\nabla T_{n+1}(k^\eta)\,.$$

Cuando $\varepsilon\to 0$, $\nabla T_{n+1}(k^\varepsilon)$ converge débilmente a $\nabla T_{n+1}(k)$ en $L^2(Q)$ y el resto del integrando converge c.p.d. y está acotado por una constante. Por tanto,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}N^{\varepsilon,\eta,n}=\iint_Q(T-t)S'_{2M}(S_n(k)-S_n(k^\eta))h_n(k)h_n(k^\eta)$$
$$(\mu(T_{n+1}(k))^{\frac12}-\mu(T_{n+1}(k^\eta))^{\frac12})^2\nabla T_{n+1}(k)\cdot\nabla T_{n+1}(k^\eta)\,.$$

Razonando de forma análoga, es posible tomar límites cuando $\eta \to 0$, obteniéndose que

$$\mathrm{LIM}\ N^{\varepsilon,\eta,n} = 0\,.$$

Con ello, llegamos a que $\limsup\limits_{\varepsilon,\eta\to 0} P^{\varepsilon,\eta,n} \leq 0$. Pero $P^{\varepsilon,\eta,n} \geq 0$; luego

$$\limsup_{\varepsilon,\eta\to 0} P^{\varepsilon,\eta,n} = 0$$

y, según hemos visto, esto implica $\mathrm{LIM}\, A_M^{\varepsilon,\eta,n} = 0$.

Segunda Parte: $\mathrm{LIM}\, B_M^{\varepsilon,\eta} = 0 \quad \forall M > 0$

Sea $K > 0$ dado. Descomponemos $B_M^{\varepsilon,\eta}$ en la forma

$$B_M^{\varepsilon,\eta} = B_1^{\varepsilon,\eta} + B_2^{\varepsilon,\eta}\,,$$

donde

$$B_1^{\varepsilon,\eta} = \iint_{\{k^\varepsilon<M,\ k^\eta\geq M,\ |k^\varepsilon-k^\eta|<K\}} (T-t)\,\mu_\varepsilon |\nabla k^\varepsilon|^2\,,$$

$$B_2^{\varepsilon,\eta} = \iint_{\{k^\varepsilon<M,\ k^\eta\geq M,\ |k^\varepsilon-k^\eta|\geq K\}} (T-t)\,\mu_\varepsilon |\nabla k^\varepsilon|^2\,.$$

A) Veamos que $\mathrm{LIM}\ B_1^{\varepsilon,\eta} = 0$**.** En efecto, podemos escribir $0 \leq B_1^{\varepsilon,\eta} \leq B_{11}^{\varepsilon,\eta} + 2B_{12}^{\varepsilon,\eta}$, donde

$$B_{11}^{\varepsilon,\eta} = \iint_{\{k^\varepsilon<M,\ k^\eta\leq M+K\}} (T-t)\,|\mu_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\nabla k^\varepsilon - \mu_\eta^{\frac{1}{2}}\nabla k^\eta|^2\,,$$

$$B_{12}^{\varepsilon,\eta} = \iint_{\{k^\varepsilon<M,\ M\leq k^\eta\leq M+K\}} (T-t)\,\mu_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\mu_\eta^{\frac{1}{2}}\nabla k^\varepsilon\cdot\nabla k^\eta\,.$$

Por una parte,

$$B_{11}^{\varepsilon,\eta} = \iint_{\{k^\varepsilon<M+K,\ k^\eta\leq M+K\}} (T-t)\,|\mu_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\nabla T_{M+K}(\nabla k^\varepsilon) - \mu_\eta^{\frac{1}{2}}\nabla T_{M+K}(\nabla k^\varepsilon)|^2\,.$$

Usando que $\mathrm{LIM}\, A_M^{\varepsilon,\eta} = 0$, lo cual ha sido probado en la etapa anterior para cualquier M, se obtiene que

$$\mathrm{LIM}\, B_{11}^{\varepsilon,\eta} = 0\,.$$

Por otro lado (véase la Notación),

$$B_{12}^{\varepsilon,\eta} = \iint_{\{k^\varepsilon<M,\ M\leq k^\eta\leq M+K\}} (T-t)\,\mu_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\mu_\eta^{\frac{1}{2}}\nabla T_M(k^\varepsilon)\cdot\nabla G_M^{M+K}(k^\eta)\,.$$

Si, en el integrando precedente, escribimos $\mu_\varepsilon = \mu(T_{M+K}(k^\varepsilon))$ y $\mu_\eta = \mu(T_M(k^\eta))$, teniendo en cuenta que, cuando $\varepsilon \to 0$, $\nabla T_M(k^\varepsilon)$ converge débilmente en $L^2(Q)^N$ y el resto del integrando está acotado en $L^2(Q)$ y converge c.p.d. a $(T-t)\,\mu(k)^{\frac{1}{2}}\mu_\eta^{\frac{1}{2}}\nabla T_M(k^\varepsilon)\cdot\nabla G_M^{M+K}(k^\eta)$, podemos afirmar que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} B_{12}^{\varepsilon,\eta} = \iint_\Omega (T-t)\,\mu(k)^{\frac{1}{2}}\mu_\eta^{\frac{1}{2}}\nabla T_M(k)\cdot\nabla G_M^{M+K}(k^\eta)\,.$$

Cuando $\eta\to 0$, razonando de modo análogo, llegamos a que

$$\mathrm{LIM}\, B_{12}^{\varepsilon,\eta} = \iint_Q (T-t)\,\mu(T_M(k))\nabla T_M(k)\cdot\nabla G_M^{M+K}(k) = 0\,.$$

Pero $\nabla T_M(k)$ se anula en donde no lo hace $\nabla G_M^{M+K}(k)$; por tanto,

$$\mathrm{LIM}\ B_{12}^{\varepsilon,\eta} = 0$$

y

$$\mathrm{LIM}\ B_{1}^{\varepsilon,\eta} = 0\,.$$

B) Veamos que LIM $B_2^{\varepsilon,\eta}=0$. Para ello, elegimos $\delta>0$ y $M>0$ y recurrimos a la función H_M^δ (véase la Notación) que, por simplicidad, denotaremos H. Lo primero que probaremos es que

$$\mathrm{LIM}\, M_2^{\varepsilon,\eta} = \mathrm{LIM}\iint_Q (T-t)H''(k^\varepsilon)Z(k^\varepsilon-k^\eta)\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)|\nabla k^\varepsilon|^2 = 0\,. \tag{4.60}$$

Después, como consecuencia de ello, veremos que LIM $B_2^{\varepsilon,\eta}=0$. Para probar (4.60), usaremos en primer lugar $H'(k^\varepsilon)Z(k^\varepsilon-k^\eta)$ como función "test" en la ecuación de la energía de (4.48) para k^ε. Integrando en Ω, $(0,t)$ y $(0,T)$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
&\iint_Q (T-t)\partial_t H(k^\varepsilon)Z(k^\varepsilon-k^\eta) + \iint_Q (T-t)H''(k^\varepsilon)Z(k^\varepsilon-k^\eta)\mu_\varepsilon|\nabla k^\varepsilon|^2\\
&+\iint_Q (T-t)\mu_\varepsilon H'(k^\varepsilon)\nabla Z(k^\varepsilon-k^\eta)\cdot\nabla k^\varepsilon + + \iint_Q (T-t)H''(k^\varepsilon)Z(k^\varepsilon-k^\eta)B_\varepsilon\cdot\nabla k^\varepsilon\\
&\iint_Q (T-t)H'(k^\varepsilon)\nabla Z(k^\varepsilon-k^\eta)\cdot B_\varepsilon = \iint_Q (T-t)H'(k^\varepsilon)Z(k^\varepsilon-k^\eta)F^\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Esta igualdad será abreviada como sigue:

$$M_1^{\varepsilon,\eta}+M_2^{\varepsilon,\eta}+M_3^{\varepsilon,\eta}+M_4^{\varepsilon,\eta}+M_5^{\varepsilon,\eta} = M_6^{\varepsilon,\eta}\,. \tag{4.61}$$

Integrando por partes, podemos re-escribir la primer integral como sigue:

$$\begin{aligned}
M_1^{\varepsilon,\eta} &= -\int_0^T\int_0^t\int_\Omega H(k^\varepsilon)\partial_t Z(k^\varepsilon-k^\eta) + \int_0^T\int_0^t\int_\Omega \partial_t\left(H(k^\varepsilon)Z(k^\varepsilon-k^\eta)\right)\\
&= -\int_0^T\int_0^t\int_\Omega (T-t)H(k^\varepsilon)\partial_t Z(k^\varepsilon-k^\eta) + \iint_\Omega H(k^\varepsilon)Z(k^\varepsilon-k^\eta)\\
&\quad - T\int_\Omega H(k_0^\varepsilon)Z(k_0^\varepsilon-k_0^\eta)\,.
\end{aligned}$$

Gracias al teorema de Lebesgue, es fácil compobar que, cuando $\varepsilon, \eta \to 0$, las dos últimas integrales convergen a cero (ya que $Z(0) = 0$). Así,

$$\mathrm{LIM}\, M_1^{\varepsilon,\eta} = -\mathrm{LIM} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega H(k^\varepsilon)\partial_t Z(k^\varepsilon - k^\eta)\,.$$

El cuarto sumando de (4.61) tiene por límite cero. En efecto, debido a la presencia del factor $H''(k^\varepsilon)$, podemos sustituir en el integrando B_ε por $B(T_{M+1/\delta}(k^\varepsilon))$ y ∇k^ε por $\nabla T_{M+1/\delta}(k^\varepsilon)$. Esto último converge débilmente a $\nabla T_{M+1/\delta}(k)$ en $L^2(Q)$ cuando $\varepsilon \to 0$ y el resto del integrando está acotado por una constante y converge c.p.d., así que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M_4^{\varepsilon,\eta} = \iint_\Omega (T-t)H''(k)B(k)\cdot\nabla k Z(k-k^\eta)\,.$$

Cuando $\eta \to 0$, $Z(k-k^\eta)$ converge fuertemente a 0 en cada $L^p(Q)$ y el resto del integrando está en $L^2(Q)$. Luego

$$\mathrm{LIM}\, M_4^{\varepsilon,\eta} = 0\,.$$

De modo análogo, se prueba que

$$\mathrm{LIM}\, M_5^{\varepsilon,\eta} = 0\,.$$

También,

$$\mathrm{LIM}\, M_6^{\varepsilon,\eta} = 0\,. \tag{4.62}$$

En efecto, $H'(k^\varepsilon)Z(k^\varepsilon - k^\eta)$ converge c.p.d. a $H'(k)Z(k-k^\eta)$ cuando $\varepsilon \to 0$ y está acotada por una constante. Recordando que $F^\varepsilon = F_1^\varepsilon + F_2^\varepsilon$, donde F_1^ε converge en $L^c(Q)$-débil para algún $c > 1$ y F_2^ε en $L^1(\Omega \times (0, T^-))$, llegamos a las igualdades

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint_Q (T-t)H'(k^\varepsilon)Z(k^\varepsilon - k^\eta)F_1^\varepsilon = \iint_Q (T-t)H'(k)Z(k-k^\eta)F_1$$

y

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint_Q (T-t)H'(k^\varepsilon)Z(k^\varepsilon - k^\eta)F_2^\varepsilon = \iint_Q (T-t)H'(k)Z(k-k^\eta)F_2\,.$$

Tomando ahora límites cuando $\eta \to 0$ y teniendo en cuenta que $Z(0) = 0$, se obtiene (4.62). En consecuencia,

$$-\mathrm{LIM}\, M_1^{\varepsilon,\eta} = \mathrm{LIM} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega H(k^\varepsilon)\partial_t Z(k^\varepsilon - k^\eta) = LIM\,(M_2^{\varepsilon,\eta} + M_3^{\varepsilon,\eta})\,. \tag{4.63}$$

Ahora tomamos $H(k^\varepsilon)Z'(k^\varepsilon - k^\eta)$ como función "test" en la igualdad obtenida restando las ecuaciones de la energía para k^ε y k^η. Integrando de nuevo en Ω, $(0,t)$ y $(0,T)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\iint_Q (T-t)H(k^\varepsilon)\partial_t Z(k^\varepsilon - k^\eta) + \iint_Q (T-t)H'(k^\varepsilon)Z'(k^\varepsilon - k^\eta)(\mu_\varepsilon \nabla k^\varepsilon - \mu_\eta \nabla k^\eta)\cdot \nabla k^\varepsilon \\
&+ \iint_Q (T-t)H(k^\varepsilon)Z''(k^\varepsilon - k^\eta)(\mu_\varepsilon \nabla k^\varepsilon - \mu_\eta \nabla k^\eta)\cdot \nabla(k^\varepsilon - k^\eta) \\
&+ \iint_Q (T-t)H'(k^\varepsilon)Z'(k^\varepsilon - k^\eta)(B_\varepsilon - B_\eta)\cdot \nabla k^\varepsilon \\
&+ \iint_Q (T-t)H(k^\varepsilon)Z''(k^\varepsilon - k^\eta)(B_\varepsilon - B_\eta)\cdot \nabla(k^\varepsilon - k^\eta) \\
&= \iint_Q (T-t)H(k^\varepsilon)Z'(k^\varepsilon - k^\eta)(F^\varepsilon - F^\eta).
\end{aligned}$$

Re-escribiremos esta igualdad en la forma:

$$R_1^{\varepsilon,\eta} + R_2^{\varepsilon,\eta} + R_3^{\varepsilon,\eta} + R_4^{\varepsilon,\eta} + R_5^{\varepsilon,\eta} = R_6^{\varepsilon,\eta}. \tag{4.64}$$

En $R_4^{\varepsilon,\eta}$ y en $R_5^{\varepsilon,\eta}$, debido a la presencia de los factores H' y Z' ó de los factores H y Z'', se pueden sustituir B_ε por $B(T_{M+1/\delta}(k^\varepsilon))$, B_η por $B(T_{M+K+1/\delta}(k^\eta))$, ∇k^ε por $\nabla T_{M+1/\delta}(k^\varepsilon)$ y ∇k^η por $\nabla T_{M+K+1/\delta}(k^\eta)$. Así, en $R_5^{\varepsilon,\eta}$ el integrando es un producto de

$$\nabla(T_{M+1/\delta}(k^\varepsilon) - T_{M+K+1/\delta}(k^\eta))$$

(que converge débilmente en $L^2(Q)^N$ cuando $\varepsilon \to 0$) por una función que, por el teorema de Lebesgue, converge en $L^p(Q)^N$ para todo p finito. Por tanto,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} R_5^{\varepsilon,\eta} = \iint_Q (T-t)H(k)Z''(k-k^\eta)(B(T_{M+1/\delta}(k)) - B_\eta)\cdot\nabla(T_{M+1/\delta}(k) - T_{M+K+1/\delta}(k^\eta)).$$

Tomando ahora límite cuando $\eta \to 0$, resulta

$$\mathrm{LIM}\, R_5^{\varepsilon,\eta} = 0.$$

De forma parecida, se llega a que

$$\mathrm{LIM}\, R_4^{\varepsilon,\eta} = 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{LIM}\, R_6^{\varepsilon,\eta} = 0.$$

De momento, tenemos que

$$\mathrm{LIM}\, R_1^{\varepsilon,\eta} = \mathrm{LIM}\,(R_2^{\varepsilon,\eta} + R_3^{\varepsilon,\eta}). \tag{4.65}$$

De (4.63) y (4.65) y puesto que

$$\mathrm{LIM}\, M_1^{\varepsilon,\eta} = -\mathrm{LIM}\, R_1^{\varepsilon,\eta},$$

se llega pues a que

$$\mathrm{LIM}\, M_2^{\varepsilon,\eta} = \mathrm{LIM}\,(R_2^{\varepsilon,\eta} + R_3^{\varepsilon,\eta} - M_3^{\varepsilon,\eta})\,.$$

A continuación, veamos que $\mathrm{LIM}\, R_2^{\varepsilon,\eta} = 0$. Podemos escribir

$$R_2^{\varepsilon,\eta} = R_{21}^{\varepsilon,\eta} - R_{22}^{\varepsilon,\eta} = \iint_Q (T-t)H'(k^\varepsilon)Z'(k^\varepsilon - k^\eta)\mu_\varepsilon|\nabla k^\varepsilon|^2$$
$$- \iint_Q (T-t)H'(k^\varepsilon)Z'(k^\varepsilon - k^\eta)\mu_\eta \nabla k^\varepsilon \cdot \nabla k^\eta\,.$$

Observando que

$$\mu_\varepsilon|\nabla k^\varepsilon|^2 \leq |\mu_\varepsilon^{1/2}\nabla k^\varepsilon - \mu_\eta^{1/2}\nabla k^\eta|^2 + 2\mu_\varepsilon^{1/2}\mu_\eta^{1/2}\nabla k^\varepsilon \nabla k^\eta\,,$$

deducimos que

$$\begin{aligned} |R_{21}^{\varepsilon,\eta}| &\leq T\|H'\|_{L^\infty}\|Z'\|_{L^\infty} \iint_{\{k^\varepsilon < M+K+1/\delta, k^\eta < M+K+1/\delta\}} |\mu_\varepsilon^{1/2}\nabla k^\varepsilon - \mu_\eta^{1/2}\nabla k^\eta|^2 \\ &+ 2\|H'\|_{L^\infty} \iint_{\{k^\varepsilon \leq M+\frac{1}{\delta}\}} (T-t)|Z'(k^\varepsilon - k^\eta)|\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\mu_\eta(k^\eta)^{\frac{1}{2}}\nabla k^\varepsilon \cdot \nabla k^\eta\,. \end{aligned} \tag{4.66}$$

El primer sumando del segundo miembro de (4.66) tiende a cero (basta recordar que $\mathrm{LIM}\, A_M^{\varepsilon,\eta} = 0 \quad \forall M > 0$). En cuanto al segundo, sustituyendo ∇k^ε por $\nabla T_{M+1/\delta}(k^\varepsilon)$, μ_ε por $\mu(T_{M+1/\delta}(k^\varepsilon))$, ∇k^η por $\nabla T_{M+k+1/\delta}(k^\eta)$ y μ_η por $\mu(T_{M+K+1/\delta}(k^\eta))$ y teniendo en cuenta que $Z'(0) = 0$, vemos fácilmente que se anula al tomar sucesivamente límites cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$ y cuando $\eta \longrightarrow 0$. Por tanto,

$$\mathrm{LIM}\, R_{21}^{\varepsilon,\eta} = 0\,.$$

En $R_{22}^{\varepsilon,\eta}$, se puede sustituir ∇k^ε por $\nabla T_{M+1/\delta}(k^\varepsilon)$, ∇k^η por $\nabla T_{M+k+1/\delta}(k^\eta)$ y μ_η por $\mu(T_{M+K+1/\delta}(k^\eta))$. Tanto cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$ como cuando $\eta \longrightarrow 0$ tenemos un producto de dos factores de los cuales uno converge fuertemente en $L^2(Q)$ y el otro converge débilmente en $L^2(Q)$. Luego

$$\mathrm{LIM}\, R_{22}^{\varepsilon,\eta} = 0.$$

Ahora vamos ver que $\mathrm{LIM}\, R_3^{\varepsilon,\eta} = 0$. Para ello, hacemos la siguiente descomposición

$$\begin{aligned} R_3^{\varepsilon,\eta} &= R_{31}^{\varepsilon,\eta} - R_{32}^{\varepsilon,\eta} \\ &= \iint_Q (T-t)H(k^\varepsilon)Z''(k^\varepsilon - k^\eta)|\mu_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\nabla k^\varepsilon - \mu_\eta^{\frac{1}{2}}\nabla k^\eta)|^2\,, \\ &- \iint_Q (T-t)H(k^\varepsilon)Z''(k^\varepsilon - k^\eta)(\mu_\varepsilon^{\frac{1}{2}} - \mu_\eta^{\frac{1}{2}})^2\nabla k^\varepsilon \cdot \nabla k^\eta\,. \end{aligned}$$

Observemos que

$$|R_{31}^{\varepsilon,\eta}| \leq T\,\|H\|_{L^\infty}\|Z''\|_{L^\infty}A^{\varepsilon,\eta}_{M+K+\frac{1}{\delta}}\,.$$

Recordando nuevamente que $\mathrm{LIM}\,A_M^{\varepsilon,\eta} = 0 \quad \forall M > 0$, se obtiene que

$$\mathrm{LIM}\,R_{31}^{\varepsilon,\eta} = 0\,.$$

Por otro lado,

$$R_{32}^{\varepsilon,\eta} = \iint_Q (T-t)H(k^\varepsilon)Z''(k^\varepsilon - k^\eta)(\mu(T_{M+1/\delta}(k^\varepsilon))^{\frac{1}{2}} - \mu(T_{M+K+1/\delta}(k^\eta))^{\frac{1}{2}})^2$$
$$\nabla T_{M+1/\delta}(k^\varepsilon)\cdot\nabla T_{M+K+1/\delta}(k^\eta)\,.$$

También en este caso, encontramos productos de factores que convergen débilmente por otros que convergen fuertemente en $L^2(Q)$. En consecuencia,

$$\mathrm{LIM}\,R_{32}^{\varepsilon,\eta} = 0\,.$$

Para $R_3^{\varepsilon,\eta}$, se procede igual que para $R_2^{\varepsilon,\eta}$. Luego efectivamente

$$\mathrm{LIM}\,M_2^{\varepsilon,\eta} = 0\,. \tag{4.67}$$

Finalmente, probaremos que $\mathrm{LIM}\,B_2^{\varepsilon,\eta} = 0$ a partir de (4.67). Recordando la definición de la función $H = H_M^\delta$, obtenemos:

$$\begin{aligned} M_2^{\varepsilon,\eta} &= \iint_{\{k^\varepsilon \leq M\}} (T-t)Z(k^\varepsilon - k^\eta)\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)|\nabla k^\varepsilon|^2 \\ &\quad - M\delta \iint_{\{M \leq k^\varepsilon < M+\frac{1}{\delta}\}} (T-t)Z(k^\varepsilon - k^\eta)\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)|\nabla k^\varepsilon|^2 \\ &= I^{\varepsilon,\eta} - J_\delta^{\varepsilon,\eta}\,. \end{aligned}$$

Para ver que $\lim_{\delta\to 0} J_\delta^{\varepsilon,\eta} = 0$, usaremos la función $G_M^{M+1/\delta}$, denotada simplemente G. Tomamos $G(k^\varepsilon)$ como funcion "test" en la tercera ecuación de (4.48) e integramos en Q, resultando:

$$\begin{aligned} &\iint_Q \partial_t\tilde{G}(k^\varepsilon) + \iint_Q \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)G'(k^\varepsilon)|\nabla k^\varepsilon|^2 \\ &+ \iint_Q B_\varepsilon\cdot\nabla G(k^\varepsilon) \quad \leq \iint_Q G(k^\varepsilon)F^\varepsilon\,. \end{aligned} \tag{4.68}$$

El tercer sumando de (4.68) es cero. El primer sumando puede escribirse en la forma

$$\int_\Omega \tilde{G}(k^\varepsilon) - \int_\Omega \tilde{G}(k_0^\varepsilon)\,,$$

donde la primera integral es positiva. Por tanto,

$$\iint_{\{M\leq k^\varepsilon\leq M+\frac{1}{\delta}\}} \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)|\nabla k^\varepsilon|^2 \leq \iint_Q G(k^\varepsilon)F^\varepsilon + \int_\Omega \widetilde{G}(k_0^\varepsilon)\,. \tag{4.69}$$

Pero $G(k^\varepsilon)$ converge c.p.d. a $G(k)$ y está acotada por $1/\delta$, así que la primera integral de la derecha en (4.69) converge. También, la segunda integral converge, ya que $\widetilde{G}(k_0^\varepsilon)$ converge c.p.d. a $\widetilde{G}(k_0)$ y está acotada por k_0. Luego:

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \iint_{\{M\leq k^\varepsilon\leq M+\frac{1}{\delta}\}} \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)|\nabla k^\varepsilon|^2 \leq \iint_Q G(k)\,F + \int_\Omega \widetilde{G}(k_0)\,.$$

Esto implica

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\delta \limsup_{\varepsilon\to 0} \iint_{\{M\leq |k^\varepsilon|\leq M+\frac{1}{\delta}\}} \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)|\nabla k^\varepsilon|^2\right) \leq \left(\iint_Q \delta G(k)F + \int_\Omega \delta\widetilde{G}(k_0)\right)$$

y este límite es cero, puesto que tanto $\delta G(k)$ como $\delta\tilde{G}(k_0)$ convergen a 0 c.p.d.,

$$|\delta G(k)| \leq 1 \quad \text{y} \quad |\delta\tilde{G}(k_0)| \leq |k_0|\,.$$

De la expresión de $J_\delta^{\varepsilon,\eta}$ y las desigualdades $0 \leq Z \leq 1$, se deduce que

$$0 \leq \lim_{\delta\to 0}\left(\limsup_{\varepsilon\to 0} J_\delta^{\varepsilon,\eta}\right) \leq \lim_{\delta\to 0}\left(M\delta \limsup_{\varepsilon\to 0} \iint_{\{M\leq k^\varepsilon\leq M+\frac{1}{\delta}\}} \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)|\nabla k^\varepsilon|^2\right) = 0\,.$$

Dado que

$$0 \leq B_2^{\varepsilon,\eta} \leq \iint_{\{k^\varepsilon\leq M,\ |k^\varepsilon-k^\eta|\geq K\}} (T-t)\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)|\nabla k^\varepsilon|^2 \leq I^{\varepsilon,\eta} = R^{\varepsilon,\eta} + J_\delta^{\varepsilon,\eta}\,,$$

resulta finalmente que $\mathrm{LIM}\, B_2^{\varepsilon,\eta} = 0$.

4.3.6 Sexta Etapa: k es solución de la ecuación de la energía en el sentido renormalizado.

Sea $\beta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, con soporte en $[-M, M]$. Veamos que se da la igualdad (1.4) en $\mathcal{D}'(\Omega)$. Elegimos pues $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y usamos $\beta(k^\varepsilon)\varphi$ como función "test" en la ecuación de la energía de (4.48). Teniendo en cuenta que

$$\nabla(\beta(k^\varepsilon)\varphi) = \beta(k^\varepsilon)\nabla\varphi + \varphi\nabla\beta(k^\varepsilon)\,,$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle\partial_t\widetilde{\beta}(k^\varepsilon),\varphi\rangle + \iint_Q \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)(\nabla k^\varepsilon\cdot\nabla\varphi)\beta(k^\varepsilon)\\
&+ \iint_Q \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)(\nabla k^\varepsilon\cdot\nabla\beta(k^\varepsilon))\varphi + \iint_Q (B_\varepsilon(k^\varepsilon)\cdot\beta(k^\varepsilon))\nabla\varphi\\
&+ \iint_Q (B_\varepsilon(k^\varepsilon)\cdot\nabla\beta(k^\varepsilon))\varphi = \iint_Q (F_1^\varepsilon + F_2^\varepsilon)\,\beta(k^\varepsilon)\varphi\,.
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Veamos cuál es el comportamiento de cada sumando de (4.70) cuando $\varepsilon \to 0$. El primero de ellos converge a

$$\int_0^T \langle \partial_t \widetilde{\beta}(k), \varphi \rangle ,$$

ya que $\partial_t \widetilde{\beta}(k^\varepsilon)$ converge a $\partial_t \widetilde{\beta}(k)$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$. El segundo puede escribirse como

$$\iint_Q \mu_\varepsilon(T_M(k^\varepsilon))(\nabla T_M(k^\varepsilon) \cdot \nabla \varphi)\beta(k^\varepsilon) .$$

Aplicando el teorema de Lebesgue, se comprueba fácilmente que

$$\mu_\varepsilon(T_M(k^\varepsilon))\beta(k^\varepsilon)\nabla\varphi \to \mu(T_M(k))\beta(k)\nabla\varphi \quad \text{ en } L^2(Q)^N ,$$

y, como $\nabla T_M(k^\varepsilon) \to \nabla T_M(k)$ en $L^2(Q)^N$-débil, el segundo sumando converge a

$$\iint_Q \mu_\varepsilon(T_M(k))(\nabla T_M(k) \cdot \nabla \varphi)\beta(k) .$$

El tercer término de (4.70) coincide con

$$\iint_Q \mu_\varepsilon(T_M(k^\varepsilon))\beta'(k^\varepsilon)|\nabla T_M(k^\varepsilon)|^2 \varphi \tag{4.71}$$

En la quinta etapa de la demostración, hemos visto que $\mu_\varepsilon(T_M(k^\varepsilon))|\nabla T_M(k^\varepsilon)|^2$ converge fuertemente a $\mu(T_M(k))|\nabla T_M(k)|^2$ en $L^1(\Omega \times (0, T^-))$. También sabemos que $\beta'(k^\varepsilon)$ converge en $L^\infty(Q)$-débil$*$ a $\beta'(k)$. Puesto que se está integrando en un soporte compacto contenido en Q, es claro que la integral (4.71) converge a:

$$\iint_Q \mu(T_M(k))(\nabla\beta(k) \cdot \nabla T_M(k))\varphi .$$

El cuarto sumando de (4.70) tiene un integrando que puede ser escrito en la forma $(B_\varepsilon(T_M(k^\varepsilon)) \cdot \nabla\varphi)\beta(k^\varepsilon)$. Por tanto, converge hacia

$$\iint_Q (B(T_M(k)) \cdot \nabla\beta(k^\varepsilon))\varphi .$$

El quinto término puede expresarse en la forma:

$$\iint_Q (B_\varepsilon(T_M(k^\varepsilon)) \cdot \nabla\beta(k^\varepsilon))\varphi \tag{4.72}$$

Por un lado, $\nabla\beta(k^\varepsilon) \to \nabla\beta(k)$ débilmente en $L^2(Q)^N$ y, por otro, $B_\varepsilon(T_M(k^\varepsilon))\varphi$ converge fuertemente a $B(T_M(k))\varphi$ en $L^2(\Omega)^N$ gracias al teorema de Lebesgue. Luego la integral que aparece en (4.72) converge a

$$\iint_Q (B(T_M(k)) \cdot \nabla\beta(k))\varphi .$$

En cuanto al segundo miembro, es cla ro que converge a

$$\iint_Q (\nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u - u \cdot \nabla k)\beta(k)\varphi\,.$$

Como consecuencia de todo lo que precede, se ha probado que

$$\int_0^T \langle \partial_t \widetilde{\beta}(k), \varphi\rangle + \iint_Q (\mu(k)\nabla k + B(k)) \cdot \nabla(\beta(k)\varphi)$$
$$= \iint_Q (\nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u - u \cdot \nabla k)\,\beta(k)\varphi\,.$$

Como φ y β son arbitrarias, esto muestra que se verifica (4.4).

Para probar que k satisface la segunda condición inicial de (4.2) en el sentido (4.5) $(\forall\widetilde{\beta})$, usaremos el siguiente resultado, cuya demostración puede encontrarse en [25]:

Lema 4.7 *Sean X, B y Y tres espacios de Banach con $X \subset B \subset Y$, donde la primera inyección es compacta y la segunda continua. Sea $\mathcal{F}$ una familia contenida en $L^\infty(X)$ que satisface las dos siguientes propiedades:*

1. *$\mathcal{F}$ está acotada en $L^\infty(X)$.*
2. *$\partial_t v \in L^1(Y)$ para cada $v \in \mathcal{F}$ y existe $\psi \in L^1(0,T)$, $r > 1$ y un conjunto acotado $\mathcal{B}$ en $L^r(0,T)$ tal que*

$$\|\partial_t v\|_Y \in \psi + \mathcal{B} \qquad \forall v \in \mathcal{F}. \tag{4.73}$$

Entonces $\mathcal{F}$ es precompacta en $C^0(B)$.

Elegimos β como antes. Sean $X = L^\infty$, $B = Y = W^{-1,q}$, con $q < 2$. Aplicaremos el lema anterior a la sucesión $\widetilde{\beta}(k^\varepsilon)$ con esos espacios X, B y Y. Obviamente, $\widetilde{\beta}(k^\varepsilon)$ está uniformemente acotada en $L^\infty(X)$. Por otro lado, se tiene:

$$\begin{aligned}\partial_t\widetilde{\beta}(k^\varepsilon) &= -\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\beta'(k^\varepsilon)|\nabla T_M(k^\varepsilon)|^2 + \beta(k^\varepsilon)T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon)\\ &\quad + \nabla\cdot\Big(\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\beta(k^\varepsilon)\nabla T_M(k^\varepsilon) + \beta(k^\varepsilon)B_\varepsilon(k^\varepsilon) - \widetilde{\beta}(k^\varepsilon)u^\varepsilon\Big)\\ &\quad - \beta'(k^\varepsilon)\nabla T_M(k^\varepsilon)\cdot B_\varepsilon(k^\varepsilon)\,.\end{aligned}$$

Aquí, los dos primeros sumandos del miembro de la derecha convergen fuertemente en $L^1(Q)$. Los otros están acotados en $L^2(H^{-1})$. Por tanto, para

$$\psi = \| - \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\beta'(k^\varepsilon)|\nabla T_M(k^\varepsilon)|^2 + \beta(k^\varepsilon)T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon)\|_{W^{-1,q}}\,,$$

se tiene que $\psi \in L^1(0,T)$. Por otro lado,

$$\|\nabla \cdot \left(\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\beta(k^\varepsilon)\nabla T_M(k^\varepsilon) + \beta(k^\varepsilon)B_\varepsilon(k^\varepsilon) - \widetilde{\beta}(k^\varepsilon)u^\varepsilon\right) - \beta'(k^\varepsilon)\nabla T_M(k^\varepsilon) \cdot B_\varepsilon(k^\varepsilon)\|_{W^{-1,q}}$$

está en $L^2(0,T)$, ya que $L^2(H^{-1}) \hookrightarrow L^2(W^{-1,q})$ para $q < 2$. Luego estamos en las condiciones del lema 4.7 con $r = 2$. Consecuentemente, extrayendo una subsucesión si fuese necesario, podemos afirmar que $\widetilde{\beta}(k^\varepsilon)$ converge fuertemente en $C^0(W^{-1,q})$ a una función que debe ser precisamente $\widetilde{\beta}(k)$ (puesto que sabemos que, al menos, $\widetilde{\beta}(k^\varepsilon)$ converge a $\widetilde{\beta}(k)$ en $\mathcal{D}'(W^{-1,q})$). Ahora bien, $\widetilde{\beta}(k^\varepsilon)(0) = \widetilde{\beta}(k_0^\varepsilon)$ y $\widetilde{\beta}(k^\varepsilon) \to \widetilde{\beta}(k)$ en $L^p(Q)$ para todo p finito. Así que $\widetilde{\beta}(k)(0) = \widetilde{\beta}(k_0)$.

4.4 Solución débil

En esta sección, probaremos mayor regularidad para la solución en el caso en que $B \equiv 0$.

Teorema 4.8 *Bajo las hipótesis del teorema 4.1, supongamos $B \equiv 0$ y $k_0 \in L^\infty$. Entonces la solución $\{u,p,k\}$ proporcionada por el teorema 4.1 satisface*

$$\widetilde{\mu}(k) \in \bigcap_{q<2} L^q(W_0^{1,q}), \quad \nabla\widetilde{\mu}(k) = \mu(k)\nabla k, \tag{4.74}$$

$$\partial_t k \in L^1(L^1) + L^q(W^{-1,q}) \quad \textit{para todo} \quad q < 2 \tag{4.75}$$

y

$$\begin{cases} \langle \partial_t k\,, \phi\rangle + \displaystyle\int_\Omega \mu(k)\nabla k \cdot \nabla\phi + \int_\Omega (u\cdot\nabla k)\,\phi \\ \quad = \displaystyle\int_\Omega \left(\nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u\right)\phi \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \textit{c.p.d. en} \quad (0,T). \end{cases}$$

Cuando esto ocurre, diremos que $\{u,p,k\}$ es una *solución débil* del problema (4.1)–(4.3).

Demostración

Suponiendo $B \equiv 0$ y $k_0 \in L^\infty$, repetimos la demostración del teorema 4.1. Obtenemos como antes que

$$\nabla T_M(k^\varepsilon) \to \nabla T_M(k) \quad \text{en} \quad L^2(\Omega\times(0,T^-)) \quad \forall M > 0\,.$$

Extrayendo una subsucesión si hiciese falta, podemos suponer que $\nabla T_M(k^\varepsilon) \to \nabla T_M(k)$ c.p.d. para cada $M > 0$. Dado que también se tiene que $k^\varepsilon \to k$ c.p.d., podemos deducir que $\nabla k^\varepsilon \to \nabla k$ c.p.d. en $\Omega \times (0,T)$. Por tanto,

$$\nabla k^\varepsilon \to \nabla k \quad \text{en } L^q(Q) \quad \forall q < 2 \ \text{ y c.p.d. en } \Omega \times (0,T)\,.$$

Sean
$$\widetilde{\mu}_\varepsilon(s) = \int_0^s \mu(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\sigma))\,d\sigma\,, \qquad b_\varepsilon = (\widetilde{\mu}_\varepsilon)^{-1}\,, \qquad v_\varepsilon = \widetilde{\mu}_\varepsilon(k^\varepsilon)\,.$$
Sabemos que estas funciones verifican (4.48), lo que podemos escribir en la forma

$$\partial_t b_\varepsilon(v^\varepsilon) - \Delta v^\varepsilon = F_1^\varepsilon + F_2^\varepsilon \quad \text{en } Q\,, \tag{4.76}$$

con F_1^ε y F_2^ε dadas por (4.49). Obsérvese que F_2^ε converge por ejemplo en L^1, al igual que F_1^ε. En efecto, sabíamos ya que F_2^ε converge débilmente en $L^c(Q)$ para algún $c > 1$ pero, además, ahora tenemos la convergencia c.p.d. en Q.

Vamos a ver a continuación que v^ε está acotada en $L^q(W_0^{1,q})$ para cada $q < 2$. En primer lugar, tomamos como función "test" $T_M(v^\varepsilon)$ en (4.76) e integramos en Ω y en $(0,T)$ Entonces

$$\int_0^T \langle \partial_t b_\varepsilon(v^\varepsilon), T_M(v^\varepsilon)\rangle + \iint_Q \nabla v^\varepsilon \cdot \nabla T_M(v^\varepsilon) = \int_0^T (F_1^\varepsilon + F_2^\varepsilon) T_M(v^\varepsilon)\,. \tag{4.77}$$

Sean $Y_M^\varepsilon(s) = \displaystyle\int_0^s b'_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma$ y $v_0^\varepsilon = v^\varepsilon(0) = \widetilde{\mu}(k_0)$. Entonces el primer sumando de (4.77) se puede escribir como sigue:

$$\int_0^T \langle \partial_t b_\varepsilon(v^\varepsilon), T_M(v^\varepsilon)\rangle = \iint_Q \partial_t Y_M^\varepsilon(v^\varepsilon) = \int_\Omega Y_M^\varepsilon(v^\varepsilon) - \int_\Omega Y_M^\varepsilon(v_0^\varepsilon)\,.$$

Aquí, la primera integral del último miembro es positiva. Por tanto, de (4.77) deducimos que
$$\iint_Q |\nabla T_M(v^\varepsilon)|^2 \le M \iint_Q |F_1^\varepsilon + F_2^\varepsilon| + \int_\Omega Y_M^\varepsilon(v_0^\varepsilon)\,. \tag{4.78}$$
Puesto que $0 \le Y_M^\varepsilon(s) \le M|b_\varepsilon(s)|$ y, al menos para una subsucesión, se tiene que $b_\varepsilon(v_0^\varepsilon) = T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k_0) \to k_0$ en L^1, resulta $\displaystyle\int_\Omega Y_M^\varepsilon(v_0^\varepsilon) \le C \cdot M$. También es claro que $\displaystyle\iint_Q |F_1^\varepsilon + F_2^\varepsilon| \le C \cdot M$. En consecuencia,

$$\iint_Q |\nabla T_M(v^\varepsilon)|^2 \le C \cdot M\,. \tag{4.79}$$

En segundo lugar, usaremos $\zeta_{n,m}(v^\varepsilon)$ como función "test" en (4.76). Esto conduce a la igualdad

$$\int_0^T \langle \partial_t b_\varepsilon(v^\varepsilon), \zeta_{n,m}(v^\varepsilon)\rangle + \iint_Q \nabla v^\varepsilon \cdot \nabla \zeta_{n,m}(v^\varepsilon) = \iint_Q (F_1^\varepsilon + F_2^\varepsilon)\zeta_{n,m}(v^\varepsilon)\,. \tag{4.80}$$

Introduciendo la función $\widehat{\zeta}_{n,m}^\varepsilon$, dada por

$$\widehat{\zeta}_{n,m}^\varepsilon(z) = \int_0^z b'_\varepsilon(r)\zeta_{n,m}(r)\,dr \quad \forall z\,,$$

podemos escribir la primera integral de (4.80) como sigue

$$\int_0^T \langle \partial_t b_\varepsilon(v^\varepsilon), \zeta_{n,m}(v^\varepsilon)\rangle = \iint_Q \partial_t \widehat{\zeta}^\varepsilon_{n,m}(v^\varepsilon) = \int_\Omega \widehat{\zeta}^\varepsilon_{n,m}(v^\varepsilon) - \int_\Omega \widehat{\zeta}^\varepsilon_{n,m}(v^\varepsilon_0)$$

De (4.80), recordando que $|\zeta_{n,m}(s)| \leq 1$, tenemos

$$\frac{1}{m}\iint_{n\leq v^\varepsilon \leq n+m} |\nabla v^\varepsilon|^2 \leq \iint_Q |F_1^\varepsilon + F_2^\varepsilon| + \int_\Omega \widehat{\zeta}^\varepsilon_{n,m}(v^\varepsilon_0)\,.$$

Aquí, la primera integral del segundo miembro está acotada por una constante. También lo está la segunda, ya que $0 \leq \widehat{\zeta}^\varepsilon_{n,m}(z) \leq |b_\varepsilon(z)|$ para todo $z \geq 0$. Por tanto,

$$\frac{1}{m}\iint_{n\leq v^\varepsilon \leq n+m} |\nabla v^\varepsilon|^2 \leq C\,. \tag{4.81}$$

De (4.79) y (4.81), teniendo en cuenta el lema A.2 del Apéndice A, deducimos que

$$v^\varepsilon \text{ está uniformemente acotada en } L^q(W_0^{1,q}) \text{ para cada } q < 2\,.$$

Como $\widetilde{\mu}_\varepsilon(s) \to \widetilde{\mu}(s)$ y $k^\varepsilon \to k$ c.p.d., también se tiene que $\widetilde{\mu}_\varepsilon(k^\varepsilon) \to \widetilde{\mu}(k)$ c.p.d. Luego el límite de v^ε debe ser precisamente $\widetilde{\mu}(k)$. Teniendo en cuenta que

$$\nabla v^\varepsilon = \mu(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon))\nabla k^\varepsilon \to \mu(k)\nabla k \quad \text{c.p.d.}$$

y

$$\nabla v^\varepsilon = \nabla\widetilde{\mu}_\varepsilon(k^\varepsilon) \to \nabla\widetilde{\mu}(k) \text{ en } L^q(\Omega) \quad \forall q < 2\,,$$

es claro que $\nabla\widetilde{\mu}(k) = \mu(k)\nabla k$. Al tomar límites en (4.76), se obtiene

$$\partial_t k + \nabla\cdot(\mu(k)\nabla k) = F_1 + F_2 \quad \text{en } Q\,,$$

como afirma el teorema. Por último, hagamos notar que $\nabla\cdot(\mu(k)\nabla k) \in L^q(W^{-1,q})$ para todo $q < 2$ y que $F_1 + F_2 \in L^1(Q)$. En consecuencia, $\partial_t k \in L^1(L^1) + L^q(W^{-1,q})$ para todo $q < 2$.

Capítulo 5

Unicidad de solución débil en el caso del problema de evolución

En este Capítulo, probaremos un resultado de unicidad para el problema (4.1)–(4.3) cuando $B \equiv 0$.

Teorema 5.1 *Supongamos que $N = 2$ ó $N = 3$, se verifica el resto de las hipótesis del teorema 4.1, $k \mapsto \mu(k)$ es localmente lischitziana, $B \equiv 0$ y*

$$D \mapsto \Phi(D) \quad es \quad C^2, \quad con \quad |\Phi''(D)| \leq Const.$$

Sea $u_0 \in V$ y $k_0 \in W^{2,\infty} \cap H_0^1$, con $k_0 \geq 0$. Para cada $i = 1, 2$, sea $\{u_i, p_i, k_i\}$ una solución (débil) de (4.1), (4.2), (4.3), *con $u_i \in L^\infty(W^{1,\infty})$ y supongamos que. por ejemplo, $u_2 \in L^2(W^{2,r})$ donde $r > N$ (basta $r \geq 3$ si $N = 3$). Entonces $\{u_1, \nabla p_1, k_1\}$ y $\{u_2, \nabla p_2, k_2\}$ deben coincidir.*

Demostración

Sean $u = u_1 - u_2$, $k = k_1 - k_2$ y $p = p_1 - p_2$. Restando las ecuaciones verificadas por u_1 y u_2, se obtiene fácilmente que

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u_2 + (u_1 \cdot \nabla) u + \nabla p \\ \qquad = \nabla \cdot (k \Phi'(\nabla u_2)) + \nabla \cdot (k_1 (\Phi'(\nabla u_1) - \Phi'(\nabla u_2))) \,, \\ \nabla \cdot u = 0 \,. \end{cases} \tag{5.1}$$

Usando u como función "test" en (5.1), se obtiene que

$$\begin{aligned}&\langle \partial_t u, u\rangle + \nu(\nabla u, \nabla u) + ((u\cdot\nabla)u_2, u)\\ &\quad = -(k\Phi'(\nabla u_2), \nabla u) - (k_1(\Phi'(\nabla u_1) - \Phi'(\nabla u_2)), \nabla u)\end{aligned}$$

c.p.d. en $(0,T)$. Aquí, el ultimo sumando es positivo (recuérdese que $D \mapsto \Phi(D)$ es convexa). En consecuencia,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\,\|u\|^2 \le -((u\cdot\nabla)u_2, u) - (k\Phi'(\nabla u_2), \nabla u) \tag{5.2}$$

en $(0,T)$. El primer término de la derecha, teniendo en cuenta la hipótesis $\nabla u_i \in L^\infty(Q)$, puede acotarse del modo siguiente:

$$|((u\cdot\nabla)u_2, u)| \le \|\nabla u_2\|_{L^\infty}\cdot |u|^2\,.$$

El segundo verifica

$$\begin{aligned}|(k\Phi'(\nabla u_2), \nabla u)| &= |(\Phi'(\nabla u_2)\nabla k, u) + (k\,\nabla\cdot(\Phi'(\nabla u_2)), u)|\\ &\le C\|k\|\cdot|u| + C\|k\|_{L^b}\|D^2 u_2\|_{L^r}\cdot|u|\,,\end{aligned}$$

donde b viene dado por la identidad $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{2}=1$. Como $r > N$, se tiene $b < 2^*$; luego,

$$|(k\Phi'(\nabla u_2), \nabla u)| \le C\left(1+\|D^2u_2\|_{L^r}\right)\|k\|\cdot|u|\,.$$

Consecuentemente, integrando (5.2) en $(0,t)$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|u(t)|^2 + \nu\int_0^t \|u(s)\|^2\,ds &\le \int_0^t \|\nabla u_2(s)\|_{L^\infty}\cdot|u(s)|^2\,ds\\ &+\int_0^t C\left(1+\|D^2u_2(s)\|_{L^r}\right)\|k(s)\|\cdot|u(s)|\,ds\,.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Para poder aplicar a continuación el lema de Gronwall en el contexto de (5.3), buscamos una estimación de $\|k\|$ en términos de $\|u\|$. Comenzaremos por probar que

En primer lugar, $|\mu(k_1)-\mu(k_2)| \le l\,|k|$ para algún $l>0$

Pero esto es consecuencia del principio del máximo. En efecto, para cada i, k_i, verifica la EDP

$$\partial_t k_i - \nabla\cdot(\mu(k_i)\nabla k_i) + u_i\cdot\nabla k_i + (-\Phi'(\nabla u_i):\nabla u_i)\,k_i = \nu|\nabla u_i|^2\,, \tag{5.4}$$

donde

$$|\nabla u_i|^2 \in L^\infty(Q) \quad \text{y} \quad \Phi'(\nabla u_i) : \nabla u_i \in L^\infty(Q)\,.$$

Luego existe $M_i > 0$ (dependiente de $\|k_0\|_{L^\infty}$, $\|\nabla u_i\|_{L^\infty(Q)}$, ν y T) tal que $k_i \leq M_i$ c.p.d. en Q.

En segundo lugar, $\nabla k_i \in L^2(L^\infty)$**.**

Teniendo en cuenta que $k_0 \in W^{2,\infty} \cap H_0^1$, los resultados de [13] permiten deducir que

$$k_i \in L^2(W^{2,p}) \text{ para todo } p \text{ finito} \qquad (\text{en particular, } \nabla k_i \in L^2(L^\infty)). \tag{5.5}$$

En tercer lugar, existe una constante $G > 0$ **tal que**

$$\int_0^t \|k(s)\|^2\, ds \leq G \int_0^t \|u(s)\|^2\, ds \quad \forall t\,.$$

Restando las ecuaciones satisfechas por k_1 y k_2, encontramos que

$$\begin{aligned}\partial_t k + u_1 \cdot \nabla k - \nabla \cdot (\mu(k_1)\nabla k) &= -u \cdot \nabla k_2 \\ &+ \nabla \cdot ((\mu(k_1) - \mu(k_2))\nabla k_2) + \nu(\nabla u_1 + \nabla u_2) : \nabla u \\ &+ k_1\,(\Phi'(\nabla u_1) : \nabla u_1 - \Phi'(\nabla u_2) : \nabla u_2) + k\,\Phi'(\nabla u_2) : \nabla u_2\,.\end{aligned}$$

Y eligiendo k como función "test", se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|k|^2 + \mu_0\|k\|^2 &\leq \int_\Omega |\nabla k_2| \cdot |k| \cdot |u| \\ &+ l\int_\Omega |\nabla k_2| \cdot |k| \cdot |\nabla k| + \nu \int_\Omega (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)\,|k| \cdot |\nabla u| \\ &+ C\int_\Omega k_1\,(1 + |\nabla u_2|)\,|k| \cdot |\nabla u| + C\int_\Omega |\nabla u_2| \cdot |k|^2\,.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Aquí, se ha utilizado el hecho de que

$$\begin{aligned}|\Phi'(\nabla u_1) : \nabla u_1 - \Phi'(\nabla u_2) : \nabla u_2| &= |\Phi'(\nabla u_1) : \nabla u + (\Phi'(\nabla u_1) - \Phi'(\nabla u_2)) : \nabla u_2| \\ &\leq C|\nabla u| + C|\nabla u||\nabla u_2|\,.\end{aligned}$$

Gracias a (5.5), podemos mayorar el segundo miembro de (5.6) por la expresión siguiente:

$$\begin{aligned}&\|\nabla k_2\|_{L^\infty} \cdot |k| \cdot |u| + l\,\|\nabla k_2\|_{L^\infty} \cdot |k| \cdot \|k\| \\ &+ [\nu(\|\nabla u_1\|_{L^\infty} + \|\nabla u_2\|_{L^\infty}) + C\|k_1\|_{L^\infty}(1 + \|\nabla u_2\|_{L^\infty})]|k| \cdot \|u\| \\ &+ C\|\nabla u_2\|_{L^\infty} \cdot |k|^2\,.\end{aligned} \tag{5.7}$$

Luego, para $g = C(1 + \|k_1\|_{L^\infty}^2 + \|\nabla k_2\|_{L^\infty}^2 + \|\nabla u_1\|_{L^\infty}^2 + \|\nabla u_2\|_{L^\infty}^2) \in L^1(0,T)$, podemos escribir:

$$\frac{d}{dt}|k|^2 + \mu_0\|k\|^2 \le g(t)|k|^2 + \|u\|^2 . \tag{5.8}$$

Multiplicando ambos miembros de (5.8) por $e^{-\widetilde{g}(t)}$, donde $\widetilde{g}(t) = \int_0^t g(\sigma)\,d\sigma$ e integrando en $(0,t)$, se llega a las desigualdades

$$|k(t)|^2 + \mu_0 \int_0^t e^{\widetilde{g}(t)-\widetilde{g}(s)}\|k(s)\|^2 d\sigma \le \int_0^t e^{\widetilde{g}(t)-\widetilde{g}(s)}\|u(s)\|^2\,d\sigma , \tag{5.9}$$

de donde

$$|k(t)|^2 \le \int_0^t G_1\|u(s)\|^2\,ds \qquad \forall t , \tag{5.10}$$

con $G_1 = e^{G_0}$ y $G_0 = \displaystyle\int_0^T |g(\sigma)|\,d\sigma$. Por otro lado, si integramos directamente (5.8) en $(0,t)$, se tiene que

$$|k(t)|^2 + \mu_0 \int_0^t \|k\|^2 \le \int_0^t g|k|^2 + \int_0^t \|u\|^2 \qquad \forall t . \tag{5.11}$$

Así pues, gracias a (5.10)

$$|k(t)|^2 + \mu_0 \int_0^t \|k\|^2 \le (1 + G_1G_0) \int_0^t \|u\|^2 \qquad \forall t .$$

En particular, si $G = \dfrac{1 + G_1G_0}{\mu_0}$, se tienen las desigualdades deseadas:

$$\int_0^t \|k(s)\|^2\,ds \le G \int_0^t \|u(s)\|^2\,ds \qquad \forall t . \tag{5.12}$$

Obsérvese que la constante G sólo depende de $\|g\|_{L^1}$.

Una vez que se ha obtenido (5.12), es fácil terminar la demostración del teorema. En efecto, (5.3) y (5.12)conducen a las desigualdades

$$\begin{aligned}
&|u(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|u(s)\|^2\,ds \le \int_0^t \|\nabla u_2(s)\|_{L^\infty} \cdot |u(s)|^2\,ds \\
&+ C\left(\int_0^t \|u(s)\|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left(1 + \|D^2u_2(s)\|_{L^r}\right)^2 |u(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \int_0^t \|\nabla u_2(s)\|_{L^\infty} \cdot |u(s)|^2\,ds + \nu \int_0^t \|u(s)\|^2\,ds + C\int_0^t \left(1 + \|D^2u_2(s)\|_{L^r}\right)^2 |u(s)|^2\,ds \\
&\le \nu \int_0^t \|u(s)\|^2\,ds + C\int_0^t \left(1 + \|\nabla u_2(s)\|_{L^\infty} + \|D^2u_2(s)\|_{L^r}^2\right) |u(s)|^2\,ds
\end{aligned}$$

que, a su vez, conducen a

$$|u(t)|^2 + \nu \int_0^t \|u(s)\|^2\,ds \le \int_0^t h(s)|u(s)|^2\,ds ,$$

donde

$$h = C\|\nabla u_2\|_{L^\infty} + C\left(1 + \|D^2 u_2\|_{L^r}^2\right) \in L^1(0,T)\,.$$

Aplicando el lema de Gronwall, deducimos de forma inmediata que $u \equiv 0$; usando (5.8), también resulta que $k \equiv 0$, con lo que queda demostrado el teorema.

Capítulo 6

Variantes y generalizaciones en el caso del problema de evolución

6.1 Una variante del teorema 4.1 (existencia de solución débil-renormalizada).

En esta sección, vamos a considerar un sistema análogo (pero diferente) a (4.1). Por una parte, en lugar del término $k\Phi'(\nabla u)$, aparecerá otro que puede ser considerado una generalización: La derivada respecto de la segunda variable de una función Ψ que depende de k y ∇u. Por otra parte, en la ecuación de la energía, en vez de $\mu(k)\nabla k$ aparecerá un operador de tipo Leray-Lions. Concretamente, el sistema con el que vamos a trabajar es:

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu\Delta u - \nabla\cdot D_2\Psi(k,\nabla u) + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f\,, \\ \nabla\cdot u = 0\,, \\ \partial_t k - \nabla\cdot(a(\nabla k) + B(k)) + u\cdot\nabla k = \nu|\nabla u|^2 + D_2\Psi(k,\nabla u) : \nabla u\,. \end{cases} \tag{6.1}$$

Aquí, $a : \Omega\times(0,T)\times\mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ verifica las siguientes hipótesis:

1. a es una función de Carathéodory, i.e.

   - $x \mapsto a(x,t,\xi)$ es medible para todo (t,ξ).
   - $(t,\xi)\mapsto a(x,t,\xi)$ es continua para x c.p.d.

2. $(a(x,t,\xi) - a(x,t,\xi'))\cdot(\xi-\xi') > 0$ para todo ξ, ξ' con $\xi\neq\xi'$, y c.p.d. en $(x,t)\in Q$.

3. $a(x,t,0) = 0$ c.p.d. en $(x,t) \in Q$.

4. $|(a(x,t,\xi)| \leq C|\xi| + d(x,t)$, c.p.d. en $(x,t) \in Q$ y para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$, donde C es una constante positiva y $d \in L^2(Q)$.

5. $a(x,t,\xi) \cdot \xi \geq \mu_0 |\xi|^2$ c.p.d. en Q y para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$, donde μ_0 es un número real positivo.

En (6.1) y en lo que sigue, usamos la notación $a(\nabla k)$, $a(\nabla v)$, ... para designar las funciones $(x,t) \mapsto a(x,t,\nabla k(x,t))$, $(x,t) \mapsto a(x,t,\nabla v(x,t)))$, ... respectivamente.

Por otra parte, supondremos que $\Psi : \mathbb{R} \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) \mapsto \mathbb{R}$ verifica:

1. $(s,D) \mapsto \Psi(s,D)$ es C^2 y $D \mapsto D_2\Psi(s,D) : D$ es convexa para cada $s \in \mathbb{R}$.

2. $|D_1 D_2 \Psi(s,D)| \leq C_3 + C_4 |D|^{r-1}$ para constantes positivas C_3, C_4 y $r < 4/3$.

3. $\Psi(s,0) = D_1\Psi(s,0) = D_2\Psi(s,0) = 0$.

Las condiciones iniciales y las condiciones de contorno serán las mismas: (4.2) y (4.3). De las hipótesis hechas sobre a y Ψ, podemos deducir, al igual que en el caso estacionario, (3.2)–(3.5). En estas condiciones, tenemos

Teorema 6.1 *Bajo las hipótesis anteriores para Ψ y a y las mismas hipótesis que en el teorema 4.1 para el resto de los datos (recordemos en particular que $N = 2$), existe $\{u,p,k\}$, con*

$$u \in L^2(V) \cap C^0(H), \qquad p \in L^2(Q), \qquad k \in \mathcal{L},$$

tal que:

1. *El par $\{u,p\}$ es solución de las dos primeras ecuaciones de* (6.1) *junto con la primera de las condiciones iniciales de* (4.2) *en el sentido de las distribuciones (solución débil).*

2. *$k \geq 0$ y es solución de la ecuación de la energía de* (6.1) *y la segunda condición inicial de* (4.2) *en el sentido siguiente (solución renormalizada): Para toda $\beta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ con soporte compacto, se tiene*

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{\beta}(k) - \nabla \cdot (\beta(k)(a(\nabla k) + B(k))) \\ \quad + \beta'(k) \nabla k \cdot (a(\nabla k) + B(k)) + \beta(k)\,(u \cdot \nabla k) \\ \quad = \beta(k)\,(\nu |\nabla u|^2 + D_2\Psi(k, \nabla u) : \nabla u) \qquad \text{en } \mathcal{D}'(Q)\,. \end{cases} \tag{6.2}$$

En particular, $\partial_t\widetilde{\beta}(k) \in L^1(L^1) + L^2(H^{-1})$ *y, para todo* $q < 2$, *se tiene* $\widetilde{\beta}(k) \in C^0(W^{-1,q})$. *Además,*

$$\widetilde{\beta}(k)|_{t=0} = \widetilde{\beta}(k_0). \tag{6.3}$$

En (6.2), los nuevos términos tienen perfecto sentido, ya que podemos escribir que

$$|a(\nabla k)| = |a(\nabla T_M(k))| \leq C|\nabla T_M(k)| + d$$

y este último miembro pertenece a $L^2(Q)$ mientras que, por otra parte, $\nabla\cdot(\beta(k)a(\nabla k)) \in L^2(H^{-1})$. También, $D_2\Psi(k,\nabla u) : \nabla u \in L^1(L^1)$. En efecto, de acuerdo con (3.4),

$$|D_2\Psi(k,\nabla u) : \nabla u| \leq (C_3 + C_4|\nabla u|^{r-1})|k| \cdot |\nabla u|,$$

sabemos que $|\nabla u|^r \in L^{2/r}$ y, como veremos más adelante, $k \in L^{3^-}$, así que $|k| \cdot |\nabla u|^r \in L^1(Q)$.

Demostración del teorema 6.1

Vamos a seguir los pasos de la demostración del teorema 4.1, detallando únicamente las novedades que introducen aquellos términos que son diferentes.

Introducción de una familia de aproximaciones.

Para cada $\varepsilon > 0$, consideramos las aproximaciones de (6.1):

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \nabla\cdot\tau^\varepsilon + (u^\varepsilon\cdot\nabla)u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = f, \\ \nabla\cdot u^\varepsilon = 0, \\ \partial_t k^\varepsilon - \nabla\cdot(a(\nabla k^\varepsilon) + B_\varepsilon(k^\varepsilon)) + u^\varepsilon\cdot\nabla k^\varepsilon = T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon). \end{cases} \tag{6.4}$$

Ahora,

$$\tau^\varepsilon = \nu\nabla u^\varepsilon + D_2\Psi(k^\varepsilon,\nabla u^\varepsilon).$$

Estas ecuaciones se han de verificar en Q, junto con las condiciones (4.7) y (4.8).

Para obtener la solución de (6.4), podemos aplicar el método de Galerkin de modo análogo a como se hizo en la demostración del teorema 4.1. Ahora, (4.9) se convierte en

$$\begin{cases} (\partial_t u^m(t), v^m) + \nu(\nabla u^m(t), \nabla v^m) + ((D_2\Psi(k^m(t), \nabla u^m(t)), \nabla v^m) \\ +((u^m(t)\cdot\nabla)u^m(t), v^m) = \langle f(t), v^m\rangle\,, \\ u^m(0) = u_{0m} = P_m(u_0)\,, \\ (\partial_t k^m(t), \psi^m) + (a(\nabla k^m(t)), \nabla\psi^m) + (B_\varepsilon(k^m(t)), \nabla\psi^m) \\ +(u^m(t)\cdot\nabla k^m(t), \psi^m) = (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^m(t) : \nabla u^m(t)), \psi^m)\,, \\ k^m(0) = k_{0m} = P_m(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k_0)) \\ \forall v^m \in V^m\,, \forall \psi \in W^m\,, \end{cases} \tag{6.5}$$

Puesto que $D_2\Psi(k^m, \nabla u^m) : \nabla u^m \geq 0$, podemos deducir como en la demostración del teorema 4.1 que

$$|u^m(t)|^2 + \nu\int_0^t \|u^m(t)\|^2 \leq C$$

y, además,

$$\int_0^t\int_\Omega D_2\Psi(k^m(t), \nabla u^m)(t) : \nabla u^m(t) \leq C\,.$$

Luego

$$u^m \text{ está acotada } L^\infty(H)\bigcap L^2(V)\,.$$

Puesto que $(a(\nabla k^m), \nabla k^m) \geq \mu_0|\nabla k^m|^2$, tenemos igualmente que

$$|k^m(t)|^2 + \mu_0\int_0^t \|k^m(t)\|^2 \leq C(\varepsilon)\,.$$

Es decir,

$$k^m \text{ está acotada en } L^2(H_0^1)\bigcap L^\infty(L^2)\,. \tag{6.6}$$

Para la acotación de $\partial_t u^m$, veamos cómo se comporta el término que es diferente:

$$\|DIV(D_2\Psi(k^m(t), \nabla u^m)(t))\|_{V'}^2 \leq \int_\Omega \left(C_3 + C_5|\nabla u^m(t)|^{r-1}\right)^2 |k^m(t)|^2\,.$$

Aquí, hemos utilizado (3.4). Obsérvese que $(C_3 + C_5|\nabla u^m(t)|^{r-1})^2$ está acotada en $L^{\frac{1}{r-1}}$ para $\dfrac{1}{r-1} > 3$ y $|k^m(t)|^2$ está acotada en $L^{3/2}(Q)$ (al menos; esto último se obtiene fácilmente por interpolación de (6.6)). Por tanto, podemos afirmar que

$$\|DIV(D_2\Psi(k^m(t), \nabla u^m)(t))\|_{V'}^2 \text{ está acotada en } L^2(0,T)$$

y que

$$\partial_t u^m \text{ está acotada en } L^2(V')\,.$$

Por otro lado, $|a(\nabla k^m(t))| \leq |\nabla k^m(t)| + d(x,t)$; luego

$$\|\nabla \cdot a(\nabla k^m(t))\|_{H^{-1}} \text{ está acotada en } L^2(0,T).$$

Esto nos permite afirmar que

$$\partial_t k^m(t) \text{ está acotada en } L^2(H^{-1}).$$

De las acotaciones precedentes, al igual que en el teorema 4.1, extrayendo subsucesiones si fuera necesario, obtenemos que

$$\begin{aligned}
&u^m \rightarrow u^\varepsilon \text{ en } L^2(V)\text{-débil y en } L^\infty(H)\text{-débil } * \,,\\
&u^m \rightarrow u^\varepsilon \text{ en } L^2(H) - \text{ y c.p.d. en } Q\,,\\
&\partial u^m \rightarrow \partial u^\varepsilon \text{ en } L^2(V') - \text{débil}\,,\\
&k^m \rightarrow k^\varepsilon \text{ en } L^2(H_0^1)\text{-débil y en } L^\infty(L^2)\text{-débil } * \,,\\
&k^m \rightarrow k^\varepsilon \text{ en } L^2(L^2) - \text{ y c.p.d. en } Q\,,\\
&\partial_t k^m \rightarrow \partial_t k^\varepsilon \text{ en } L^2(H^{-1})\text{-débil}.
\end{aligned}$$

El paso al límite en la ecuación de movimiento es análogo al del teorema 1.1, pero en la ecuación de la energía hay diferencias debido a la presencia del término $a(\nabla k^m)$. Sabemos que $|a(\nabla k^m)| \leq C|\nabla k^m| + d$ está acotado en $L^2(Q)$; por tanto, podemos suponer que $a(\nabla k^m)$ converge débilmente en $L^2(Q)$, pero hemos de determinar el límite, denotado χ. Al igual que en el caso estacionario, usaremos el "argumento de Minty". La convergencia c.p.d. de ∇u^m a ∇u que se necesita, se obtiene del mismo modo en que veremos más adelante que ∇u^ε converge c.p.d. a ∇u, así que omitimos este paso. Tomando límites cuando $m \rightarrow \infty$ en la ecuación de la energía de (6.5) e integrando en (0,t), se obtiene:

$$\int_0^T \langle \partial_t k, \psi \rangle + \int_0^T (\chi, \nabla\psi) + \int_0^T (B_\varepsilon(k), \nabla\psi) + \int_0^T (u \cdot \nabla k, \psi) = \int_0^T (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau : \nabla u), \psi).$$

luego,

$$-\nabla \cdot \chi = -\partial_t k + \nabla \cdot B_\varepsilon(k) - u \cdot \nabla k + T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau : \nabla u).$$

Tomando $\psi^m = k^m(t)$ como función "test" en la ecuación de la energía de (6.5) e integrando en Ω, en $(0,t)$ y en $(0,T)$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^t \langle\partial_t k^m, k^m\rangle + \int_0^T\int_0^t (a(x,t,\nabla k^m),\nabla k^m)& \\ +\int_0^T\int_0^t (B_\varepsilon(k^m),\nabla k^m) + \int_0^T\int_0^t (u^m\cdot\nabla k^m, k^m)& \\ = \int_0^T\int_0^t (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^m:\nabla u^m), k^m)\,.&\end{aligned} \tag{6.7}$$

Aquí, el tercer y cuarto sumando son nulos por la fórmula de Gauss. Por otra parte,

$$\int_0^T\int_0^t \langle\partial_t k^m, k^m\rangle = \frac{1}{2}\int_0^T |k^m(t)|^2 - \frac{1}{2}\int_0^T |k^m(0)|^2,$$

lo cual tiende a

$$\frac{1}{2}\int_0^T |k^\varepsilon(t)|^2 - \frac{1}{2}\int_0^T |k_0^\varepsilon|^2 .$$

Además,

$$\int_0^T\int_0^t (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^m:\nabla u^m), k^m) \to \int_0^T\int_0^t (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon:\nabla u^\varepsilon), k^\varepsilon).$$

Por tanto,

$$\lim_{m\to 0}\int_0^T\int_0^t (a(\nabla k^m),\nabla k^m) = -\int_0^T\int_0^t \langle\partial_t k^\varepsilon, k^\varepsilon\rangle + \int_0^T\int_0^t (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon:\nabla u^\varepsilon), k^\varepsilon)$$

y

$$\int_0^T\int_0^t (a(\nabla k^m),\nabla k^m) \to \int_0^T\int_0^t (\chi,\nabla k^\varepsilon).$$

Por otro lado, sea $v\in W^m$. La segunda hipótesis hecha sobre a nos permite afirmar que

$$\int_0^T\int_0^t ((a(\nabla k^m) - a(\nabla v),\nabla(k^m - v)) \geq 0 .$$

Tomando de nuevo límites cuando $m\to\infty$, se obtiene que

$$\int_0^T\int_0^t (\chi - a(\nabla v),\nabla k^\varepsilon - \nabla v) \geq 0 \quad \forall v\in W^m .$$

Sea $v = k^\varepsilon - \lambda w$ para $\lambda > 0$ y sea $w\in W^m$. Entonces

$$\lambda\int_0^T\int_0^t (\chi - a(\nabla(k^\varepsilon - \lambda w)),\nabla w) \geq 0 \quad \forall w\in W^m .$$

Tomando límite en este producto escalar cuando $\lambda\to 0^+$, llegamos a que

$$\int_0^T\int_0^t (\chi - a(\nabla k^\varepsilon),\nabla w) \geq 0 \quad \forall w\in W^m;$$

razonando de modo análogo para $\lambda < 0$, se llega a las desigualdades contrarias:

$$\int_0^T\int_0^t (\chi - a(\nabla k^\varepsilon),\nabla w) \leq 0 \quad \forall w\in W^m .$$

Es decir, $a(\nabla k) = \chi$ c.p.d. En consecuencia, podemos tomar límites en (6.5); así, para cada $\varepsilon > 0$ existen $u^\varepsilon \in L^2(V) \bigcap C^0(H)$ y $k^\varepsilon \in L^2(H_0^1) \bigcap C^0(L^2)$, tales que:

$$\left\{\begin{array}{l} \langle \partial_t u^\varepsilon(t), v\rangle + \nu(\nabla u^\varepsilon(t), \nabla v) + (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k^\varepsilon(t))_+ \Phi'(\nabla u^\varepsilon(t)), \nabla v) \\ \qquad +((u^\varepsilon(t)\cdot\nabla)u^\varepsilon(t), v) = \langle f(t), v\rangle \quad \text{c.p.d. en } (0,T)\,, \\ u^\varepsilon(0) = u_0 \\ \langle \partial_t k^\varepsilon(t), \psi\rangle + (\mu_\varepsilon(k^\varepsilon(t))\nabla k^\varepsilon(t), \nabla\psi) + (B_\varepsilon(k^\varepsilon(t)), \nabla\psi) \\ \qquad +(u^\varepsilon(t)\cdot\nabla k^\varepsilon(t), \psi) = (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon(t) : \nabla u^\varepsilon(t)), \psi) \quad \text{c.p.d. en } (0,T)\,, \\ k^\varepsilon(0) = T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k_0) \\ \forall v \in V\,, \forall \psi \in H_0^1(\Omega)\,, \end{array}\right. \tag{6.8}$$

Usando la quinta hipótesis sobre $a = a(x,t,\xi)$ se demuestra fácilmente que $k^\varepsilon \geq 0$.

Estimaciones "a priori" y convergencia débil

Teniendo en cuenta que $D_2\Psi(k^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon); \nabla u^\varepsilon \geq 0$, la quinta hipótesis sobre $a = a(x,t,\xi)$ y repitiendo los pasos del apartado 3.3.2, se obtiene

$$u^\varepsilon \text{ está acotada en } L^\infty(H) \bigcap L^2(V)$$

y

$$|u^\varepsilon(t)|^2 + \int_0^t\!\!\int_\Omega \tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon \leq C \quad \text{en } (0,T)\,,$$

donde

$$\tau^\varepsilon = \nu\nabla u^\varepsilon + D_2\Psi(k^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon)\,.$$

Igualmente, por interpolación se deduce fácilmente que

$$u^\varepsilon \text{ está acotada en } L^{\left(\frac{2a}{a-2}\right)^-}(L^a) \quad \forall a \in (2, +\infty)\,.$$

También es fácil comprobar que

$$k^\varepsilon \text{ está acotada en } L^\infty(L^1)\,,$$

$$T_M(k^\varepsilon) \text{ está acotada en } L^2(H_0^1) \quad \forall M > 0\,,$$

$$\frac{1}{m}\int_0^t \int_{n\leq k^\varepsilon \leq n+m} a(\nabla k^\varepsilon)\cdot\nabla k^\varepsilon \leq \int_0^t \int_{k^\varepsilon \geq n} T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon) + \int_\Omega \tilde{\zeta}_{n,m}(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k_0))\,, \tag{6.9}$$

$$\|k^\varepsilon\|_{L^q(W_0^{1,q})} \leq C_q \quad \forall\, q < 2$$

$$k^\varepsilon \text{ está acotada en } L^{\left(\frac{2b}{b-1}\right)^-}\left(L^b\right) \quad \forall\, b \in (1, +\infty).$$

Para ver que $\partial_t u^\varepsilon$ está acotada en $L^2(V')$, se procede de modo análogo a como se ha hecho en el marco de las aproximaciones de Galerkin. Por otro lado,

$$\begin{aligned}\partial_t \widetilde{\beta}(k^\varepsilon) &= \beta(k^\varepsilon) T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon) + \nabla \cdot (\beta(k^\varepsilon) a(\nabla k^\varepsilon)) \\ &\quad - a(\nabla k^\varepsilon)\nabla\beta(k^\varepsilon) + \nabla \cdot (B_\varepsilon(k^\varepsilon)\beta(k^\varepsilon)) - B_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla\beta(k^\varepsilon) \\ &\quad - u^\varepsilon \cdot \nabla\widetilde{\beta}(k^\varepsilon).\end{aligned}$$

Aquí, tenemos que

$$\beta(k^\varepsilon) T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon) \text{ está acotada en } L^1(Q)$$

y

$$\nabla \cdot (\beta(k^\varepsilon) a(\nabla k^\varepsilon)) \text{ está acotada en } L^2(H^{-1}),$$

puesto que $\beta(k^\varepsilon)$ lo está en $L^\infty(Q)$. Además $a(\nabla T_M(k^\varepsilon))$ en $L^2(Q)$.

$$a(\nabla k^\varepsilon) \cdot \nabla\beta(k^\varepsilon) \text{ está acotado en } L^1(Q)$$

ya que $\nabla\beta(k^\varepsilon)$ y $a(T_M(\nabla k^\varepsilon))$ lo están en $L^2(Q)$. El resto de los sumandos son iguales que en (4.34). Por tanto

$$\partial_t \widetilde{\beta}(k^\varepsilon) \text{ está acotada en } L^1(L^1) + L^2(H^{-1})$$

y

$$\partial_t \widetilde{\beta}(k^\varepsilon) \text{ está acotada en } L^1(W^{-1,q}) \quad \forall q \in (1,2).$$

Estas estimaciones para u^ε y k^ε permiten deducir la existencia de subsucesiones que convergen débilmente. Al igual que en el Capítulo 4, al menos para una subsucesión, tenemos:

$$\begin{aligned}
&u^\varepsilon \to u && \text{en } L^2(V)\text{-débil},\\
&u^\varepsilon \to u && \text{en } L^{\left(\frac{2a}{a-2}\right)^-}(L^a) \quad \forall a > 2 \text{ y c.p.d.},\\
&\partial_t u^\varepsilon \to \partial_t u && \text{en } L^2(V')\text{-débil},\\
&k^\varepsilon \to k && \text{en } L^q(W_0^{1,q})\text{-débil} \quad \forall q < 2,\\
&k^\varepsilon \to k && \text{en } L^{\left(\frac{2b}{b-1}\right)^-}(L^{b^-}) \quad \forall b > 1 \text{ y c.p.d.},\\
&T_M(k^\varepsilon) \to T_M(k) && \text{en } L^2(H_0^1)\text{-débil} \quad \forall M > 0.
\end{aligned}$$

u es, junto con alguna p, solución de la ecuación de movimiento

Procediendo como en otras ocasiones, la inecuación variacional resultante es

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^T \langle \partial_t u^\varepsilon, v\rangle + \nu \iint_Q \nabla u^\varepsilon : \nabla v + \iint_Q (u^\varepsilon\cdot\nabla)u^\varepsilon\cdot v + \iint_Q \Psi(k^\varepsilon,\nabla v) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}|u_0|^2 \geq \nu \iint_Q |\nabla u^\varepsilon|^2 + \iint_Q \Psi(k^\varepsilon,\nabla u^\varepsilon) \\ &\quad + \int_0^T \langle f, v-u^\varepsilon\rangle + \frac{1}{2}|u^\varepsilon(T)|^2 \qquad \forall v\in V, \quad u^\varepsilon\in V. \end{aligned}\right. \tag{6.10}$$

Cuando $\varepsilon \to 0$, el cuarto sumando de (6.10) verifica

$$\iint_Q \Psi(k^\varepsilon,\nabla v) \to \iint_Q \Psi(k,\nabla v).$$

En efecto, podemos aplicar el teorema de Lebesgue puesto que, según (3.5),

$$|\Psi(k^\varepsilon,\nabla v)| \leq (C_3|\nabla v| + C_5|\nabla v|^r)|k^\varepsilon|,$$

que está acotada en $L^1(Q)$ ($C_3|\nabla v|+C_5|\nabla v|^r$ está acotado en $L^{2/r}(Q)$ y $|k^\varepsilon|$ en $L^{3^-}(L^{3^-})$) y $\Psi(k^\varepsilon,\nabla v)$ converge c.p.d. a $\Psi(k,\nabla v)$. Por lo que respecta al segundo sumando del segundo miembro de (6.10), éste puede ser escrito como sigue

$$\iint_Q \Psi(k^\varepsilon,\nabla u^\varepsilon) = \iint_Q (\Psi(k^\varepsilon,\nabla u^\varepsilon) - \Psi(k,\nabla u^\varepsilon)) + \iint_Q \Psi(k,\nabla u^\varepsilon).$$

Aquí, la primera integral del segundo miembro tiende a cero puesto que el integrando converge c.p.d. y está acotada por una función de L^1. Más precisamente,

$$|\Psi(k^\varepsilon,\nabla u^\varepsilon) - \Psi(k,\nabla u^\varepsilon)| \leq (C_3|\nabla u^\varepsilon| + C_5|\nabla u^\varepsilon|^r)|k^\varepsilon - k|,$$

donde $C_3|\nabla u^\varepsilon| + C_5|\nabla u^\varepsilon|^r$ está acotado en $L^{2/r}$ y $k^\varepsilon - k$ converge (por ejemplo) en $L^{3^-}(L^{3^-})$. En relación con la segunda integral, podemos afirmar que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \iint_Q \Psi(k,\nabla u^\varepsilon) \geq \iint_Q \Psi(k,\nabla u),$$

debido a que

$$v \mapsto \iint_Q \Psi(k,\nabla v)$$

es convexa y continua. Procediendo con los demás términos de (6.10) como en la demostración del teorema 4.1, se llega a las igualdades

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle \partial_t u, w\rangle + \nu \iint_Q \nabla u : \nabla w + \iint_Q (u\cdot\nabla)u\cdot w + \iint_Q D_2\Psi(k^\varepsilon,\nabla u) : \nabla w \\ &= \int_0^T \langle f, w\rangle \qquad \forall w \in V. \end{aligned} \tag{6.11}$$

u^ε converge en V

De modo análogo a como hicimos en el apartado 3.3.4., obtenemos:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_Q (T-t)\left(\nu|\nabla u^\varepsilon|^2 + D_2\Psi(k^\varepsilon,\nabla u^\varepsilon):\nabla u^\varepsilon\right)$$
$$= \iint_Q (T-t)\left(\nu|\nabla u|^2 + D_2\Psi(k,\nabla u):\nabla u\right).$$

Dado que

$$|(D_2\Psi(k^\varepsilon,\nabla u^\varepsilon) - D_2\Psi(k,\nabla u^\varepsilon)):\nabla u^\varepsilon| \le (C_3 + C_4|\nabla u^\varepsilon|^{r-1})|\nabla u^\varepsilon|\cdot|k^\varepsilon - k|,$$

que $C_3|\nabla u^\varepsilon| + C_4|\nabla u^\varepsilon|^r$ está acotada en $L^{2/r}$ y que k^ε converge en $L^{3^-}(L^{3^-})$, tenemos:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_Q (T-t)(D_2\Psi(k^\varepsilon,\nabla u^\varepsilon) - D_2\Psi(k,\nabla u^\varepsilon)):\nabla u^\varepsilon$$
$$\le \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_Q (T-t)(C_3|\nabla u^\varepsilon| + C_4|\nabla u^\varepsilon|^r)|k^\varepsilon - k| = 0.$$

Esto nos permite escribir

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_Q (T-t)\left(\nu|\nabla u^\varepsilon|^2 + D_2\Psi(k,\nabla u^\varepsilon):\nabla u^\varepsilon\right)$$
$$= \iint_Q (T-t)\left(\nu|\nabla u|^2 + +D_2\Psi(k,\nabla u):\nabla u\right).$$

Sumando y restando u y tomando límites cuando $\varepsilon\to 0$, se obtiene que

$$0 \ge \limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\nu\iint_Q (T-t)|\nabla(u^\varepsilon - u)|^2\right)$$
$$+\liminf_{\varepsilon\to 0}\left(\iint_Q (T-t)D_2(k,\nabla u^\varepsilon):\nabla u^\varepsilon - \iint_Q (T-t)D_2(k,\nabla u):\nabla u\right).$$

La función

$$v \mapsto \iint_Q D_2(k,\nabla v):\nabla v$$

es débilmente s.c.i. En efecto, es convexa por serlo $D \to D_2\Psi(k,D):D$ y también es continua, gracias al teorema de Lebesgue. Por tanto,

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\left(\iint_Q (T-t)D_2(k,\nabla u^\varepsilon):\nabla u^\varepsilon - \iint_Q (T-t)D_2(k,\nabla u):\nabla u\right) \ge 0.$$

Así que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_Q (T-t)|\nabla(u^\varepsilon - u)|^2 = 0.$$

En otras palabras,

$$\nabla u^\varepsilon \to \nabla u \text{ en } L^2(\Omega\times(0,T^-)) \text{ y c.p.d. en } Q.$$

Para cada $M > 0$, $a(\nabla T_M(k^\varepsilon)) \cdot \nabla T_M(k^\varepsilon)$ converge débilmente en $L^1(\Omega \times (0, T^-))$

Vamos a escribir la ecuación de la energía de (6.4) en la forma siguiente:

$$\partial_t k^\varepsilon - \nabla \cdot (a(\nabla k^\varepsilon) + B_\varepsilon(k^\varepsilon)) = F_1^\varepsilon + F_2^\varepsilon \,, \tag{6.12}$$

con

$$F_1^\varepsilon = T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon), \quad F_2^\varepsilon = -u^\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon \,. \tag{6.13}$$

Hemos demostrado que

$$F_1^\varepsilon \to \nu |\nabla u|^2 + D_2 \Psi(k, \nabla u) : \nabla u \ \text{ fuertemente en } \ L^1(\Omega \times (0, T^-)) \,.$$

y también sabemos que

$$F_2^\varepsilon \to -u \cdot \nabla k \text{ en } L^c\text{-débil para algún } c > 1 \,.$$

En lo que queda de esta etapa, demostraremos que, para cada $M > 0$,

$$\lim_{\eta \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_Q (T - t)\,(a(\nabla T_M(k^\varepsilon)) - a(x, t, \nabla T_M(k^\eta)) \cdot (\nabla T_M(k^\varepsilon) - \nabla T_M(k^\eta)) = 0 \,. \tag{6.14}$$

El argumento utilizado se basa en otro previo, debido a D. Blanchard y F. Murat (ver [6]). Si llamamos χ al límite débil de $a(\nabla T_M(k^\varepsilon))$ en $L^2(Q)^N$, haciendo tender sucesivamente ε y η a 0, se duducirá de (6.14) que

$$\lim_{\eta \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_Q (T - t) a(\nabla T_M(k^\varepsilon)) \cdot \nabla T_M(k^\varepsilon) = \iint_Q (T - t) \chi \cdot \nabla T_M(k) \,.$$

Usando de nuevo el argumento de Minty, se podrá probar que $\chi = a(\nabla T_M(k))$ y que

$$\lim_{\eta \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_Q (T - t) a(\nabla T_M(k^\varepsilon)) \cdot \nabla T_M(k^\varepsilon) = \iint_Q (T - t) a(\nabla T_M(k)) \cdot \nabla T_M(k) \,. \tag{6.15}$$

Esto será suficiente para nuestros propósitos. Así pues, veamos que la igualdad (6.14) es cierta. Por comodidad, pondremos

$$a(\nabla T_M(k^\varepsilon)) = a_\varepsilon \,, \quad a(\nabla T_M(k^\eta)) = a_\eta$$

y utilizaremos la notación de la sección 3.3.5. Descomponemos (6.14) como sigue:

$$\iint_Q (T - t)\,(a_\varepsilon - a_\eta) \cdot (\nabla T_M(k^\varepsilon) - \nabla T_M(k^\eta)) = A_M^{\varepsilon,\eta} + B_M^{\varepsilon,\eta} + B_M^{\eta,\varepsilon},$$

donde

$$A_M^{\varepsilon,\eta} = \iint_{\{k^\varepsilon < M,\, k^\eta < M\}} (T - t)\,(a_\varepsilon - a_\eta) \cdot (\nabla T_M(k^\varepsilon) - \nabla T_M(k^\eta)) \,,$$

$$B_M^{\varepsilon,\eta} = \iint_{\{k^\varepsilon < M,\, k^\eta \geq M\}} (T - t)\, a_\varepsilon \cdot \nabla T_M(k^\varepsilon) \,.$$

Dividiremos la demostración de (6.14) en dos partes:

Primera Parte: $\mathrm{LIM}\, A_M^{\varepsilon,\eta} = 0 \quad \forall M > 0$

Del mismo modo que en el Capítulo 4, se tiene que

$$0 \leq A_M^{\varepsilon,\eta} \leq P^{\varepsilon,\eta,n},$$

donde

$$P^{\varepsilon,\eta,n} = \iint_Q (T-t) S'_{2M}(S_n(k^\varepsilon) - S_n(k^\eta)) \left(h_n(k^\varepsilon) a_\varepsilon - h_n(k^\eta) a_\eta\right) \cdot \left(\nabla S_n(k^\varepsilon) - \nabla S_n(k^\eta)\right).$$

Veamos que

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{\varepsilon,\eta\to 0} P^{\varepsilon,\eta,n} = 0\,.$$

Consideramos como funciones "test" $h_n(k^\varepsilon) S_{2M}(S_n(k^\varepsilon) - S_n(k^\eta))$ en la ecuación de la energía (6.12) para k^ε y $h_n(k^\eta) S_{2M}(S_n(k^\varepsilon) - S_n(k^\eta))$ en la misma ecuación para k^η. Entonces, restando e integrando en Ω, $(0,t)$ y $(0,T)$, se obtiene una expresión análoga a (4.54), con las únicas diferencias siguientes:

$$A_2^{\varepsilon,\eta,n} = P_2^{\varepsilon,\eta,n} = \int_0^T\!\!\int_0^t\!\!\int_\Omega \left(h_n(k^\varepsilon) a_\varepsilon - h_n(k^\eta) a_\eta\right) \cdot \nabla S_{2M}(S_n(k^\varepsilon) - S_n(k^\eta))\,,$$

$$A_3^{\varepsilon,\eta,n} = \int_0^T\!\!\int_0^t\!\!\int_\Omega h'_n(k^\varepsilon) S_{2M}(S_n(k^\varepsilon) - S_n(k^\eta)) a_\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon\,,$$

$$A_4^{\varepsilon,\eta,n} = \int_0^T\!\!\int_0^t\!\!\int_\Omega h'_n(k^\eta) S_{2M}(S_n(k^\varepsilon) - S_n(k^\eta)) a_\eta \cdot \nabla k^\eta\,.$$

Vamos a ver cómo se comporta cada uno de estos términos. Por una parte,

$$\limsup_{\varepsilon,\eta\to 0} A_3^{\varepsilon,\eta,n} \leq T\, \|h'_n\|_{L^\infty} \|S_{2M}\|_{L^\infty} \limsup_{\varepsilon,\eta\to 0} \iint_{n\leq k^\varepsilon \leq n+1} a_\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon\,;$$

gracias a (6.9), este límite superior está acotado por

$$\limsup_{\varepsilon,\eta\to 0} \iint_{k^\varepsilon \geq n} T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon) + \limsup_{\varepsilon,\eta\to 0} \int_\Omega \tilde{\zeta}_n(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k_0))$$

y, según vimos, esta suma tiende a cero cuando $n \to +\infty$. Análogamente,

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{\varepsilon,\eta\to 0} A_4^{\varepsilon,\eta,n} = 0\,.$$

El resto de los términos de (4.54) no varía. En consecuencia, $\mathrm{LIM}\, P_2^{\varepsilon,\eta,n} \leq 0$ y

$$\limsup_{\varepsilon,\eta\to 0} P^{\varepsilon,\eta,n} = 0\,.$$

Segunda Parte: $\mathrm{LIM}\, B_M^{\varepsilon,\eta} = 0 \quad \forall M > 0$

Sea $K > 0$ dado. Descomponemos $B_M^{\varepsilon,\eta}$ en la forma

$$B_M^{\varepsilon,\eta} = B_1^{\varepsilon,\eta} + B_2^{\varepsilon,\eta} ,$$

donde

$$B_1^{\varepsilon,\eta} = \iint_{\{k^\varepsilon < M,\ k^\eta \geq M,\ |k^\varepsilon - k^\eta| < K\}} (T-t)\, a_\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon ,$$

$$B_2^{\varepsilon,\eta} = \iint_{\{k^\varepsilon < M,\ k^\eta \geq M,\ |k^\varepsilon - k^\eta| \geq K\}} (T-t)\, a_\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon .$$

A) $\mathrm{LIM}\ B_1^{\varepsilon,\eta} = 0$ En efecto,

$$a_\varepsilon \cdot \nabla T_M(k^\varepsilon) = -a_\eta \cdot \nabla T_M(k^\eta) + a_\varepsilon \cdot \nabla T_M(k^\eta) + a_\eta \cdot \nabla T_M(k^\varepsilon)$$
$$+(a_\varepsilon - a_\eta) \cdot (\nabla T_M(k^\varepsilon) - \nabla T_M(k^\eta))$$

y podemos escribir que $0 \leq B_1^{\varepsilon,\eta} \leq B_{11}^{\varepsilon,\eta} + B_{12}^{\varepsilon,\eta} + B_{12}^{\eta,\varepsilon}$, donde

$$B_{11}^{\varepsilon,\eta} = \iint_{\{k^\varepsilon < M,\ k^\eta \leq M+K\}} (T-t)\,(a_\varepsilon - a_\eta) \cdot (\nabla T_M(k^\varepsilon) - \nabla T_M(k^\eta)) ,$$

$$B_{12}^{\varepsilon,\eta} = \iint_{\{k^\varepsilon < M,\ M \leq k^\eta \leq M+K\}} (T-t) a_\varepsilon \cdot \nabla T_M(k^\eta)$$

Usando el hecho de que $\mathrm{LIM}\ A_{M'}^{\varepsilon,\eta} = 0$ para cualquier $M' > 0$, lo cual ha sido comprobado en la etapa anterior, se obtiene que

$$\mathrm{LIM}\, B_{11}^{\varepsilon,\eta} = 0 .$$

Por otro lado,

$$B_{12}^{\varepsilon,\eta} = \iint_{\{k^\varepsilon < M,\ M \leq k^\eta \leq M+K\}} (T-t)\, a_\varepsilon \cdot \nabla G_M^{M+K}(k^\eta)$$

y es fácil comprobar que

$$\mathrm{LIM}\, B_{12}^{\varepsilon,\eta} = \iint_Q (T-t)\, \chi \mathbb{1}_{\{k \leq M\}} \cdot \nabla G_M^{M+K}(k) = 0 .$$

En conclusión,

$$\mathrm{LIM}\ B_1^{\varepsilon,\eta} = 0 .$$

B) $\mathrm{LIM}\ B_2^{\varepsilon,\eta} = 0$. En efecto, sean $\delta > 0$ y $M > 0$ y sea $H = H_M^\delta$ (véase la Notación). Lo primero que probaremos es que

$$\mathrm{LIM}\, M_2^{\varepsilon,\eta} = \mathrm{LIM} \iint_Q (T-t) H''(k^\varepsilon) Z(k^\varepsilon - k^\eta) a_\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon = 0 . \tag{6.16}$$

Como consecuencia de ello, veremos después que $\mathrm{LIM}\, B_2^{\varepsilon,\eta} = 0$. Para probar (6.16), usamos en primer lugar $H'(k^\varepsilon)Z(k^\varepsilon - k^\eta)$ como función "test" en la ecuación de la energía de (6.12) para k^ε e integramos en Ω, $(0,t)$ y $(0,T)$. Se obtiene una expresión análoga a (4.61) con las únicas diferencias siguientes:

$$M_2^{\varepsilon,\eta} = \iint_Q (T-t)H''(k^\varepsilon)Z(k^\varepsilon - k^\eta)a_\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon\,,$$

$$M_3^{\varepsilon,\eta} = \iint_Q (T-t)H'(k^\varepsilon)\nabla Z(k^\varepsilon - k^\eta)\cdot a_\varepsilon\,,$$

En segundo lugar, tomamos $H(k^\varepsilon)Z'(k^\varepsilon - k^\eta)$ como función "test" en la igualdad obtenida de restar las correspondientes ecuaciones de la energía para k^ε y k^η. Integramos de nuevo en Ω, $(0,t)$ y $(0,T)$, obteniéndose una expresión análoga a (4.64), con los siguientes términos diferentes:

$$R_2^{\varepsilon,\eta} = \iint_Q (T-t)H'(k^\varepsilon)Z'(k^\varepsilon - k^\eta)(a_k^\varepsilon - a_k^\eta)\cdot \nabla k^\varepsilon\,,$$

$$R_3^{\varepsilon,\eta} = \iint_Q (T-t)H(k^\varepsilon)Z''(k^\varepsilon - k^\eta)(a_k^\varepsilon - a_k^\eta)\cdot \nabla (k^\varepsilon - k^\eta)\,.$$

Puesto que el resto de los términos de (4.61) y (4.64) son los mismos, llegamos a que

$$\mathrm{LIM}\, M_2^{\varepsilon,\eta} = \mathrm{LIM}\,(R_2^{\varepsilon,\eta} + R_3^{\varepsilon,\eta} - M_3^{\varepsilon,\eta})\,.$$

A continuación, veamos que $\mathrm{LIM}\, R_2^{\varepsilon,\eta} = 0$. Podemos descomponer $R_2^{\varepsilon,\eta}$ como sigue:

$$R_2^{\varepsilon,\eta} = R_{21}^{\varepsilon,\eta} - R_{22}^{\varepsilon,\eta} = \iint_Q (T-t)H'(k^\varepsilon)Z'(k^\varepsilon - k^\eta)a_\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon$$
$$- \iint_Q (T-t)H'(k^\varepsilon)Z'(k^\varepsilon - k^\eta)a_\eta \cdot \nabla k^\varepsilon\,.$$

Por un lado, procediendo como con B_1, podemos escribir que

$$\begin{aligned} |R_{21}^{\varepsilon,\eta}| &\leq T\|H'\|_{L^\infty}\|Z'\|_{L^\infty} \iint_{k^\varepsilon < M+K+1/\delta,\, k^\eta < M+K+1/\delta} (a_\varepsilon - a_\eta)\cdot(\nabla k^\varepsilon - \nabla k^\eta) \\ &+ \|H'\|_{L^\infty} \iint_{k^\varepsilon \leq M+\frac{1}{\delta}} (T-t)|Z'(k^\varepsilon - k^\eta)|a_\varepsilon \cdot \nabla k^\eta \\ &+ \|H'\|_{L^\infty} \iint_{k^\varepsilon \leq M+\frac{1}{\delta}} (T-t)|Z'(k^\varepsilon - k^\eta)|a_\eta \cdot \nabla k^\varepsilon\,. \end{aligned} \tag{6.17}$$

El primer sumando de (6.17) tiende a cero (basta recordar que $\mathrm{LIM}\, A_M^{\varepsilon,\eta} = 0 \quad \forall M > 0$). En cuanto a los otros dos, sustituyendo ∇k^ε por $\nabla T_{M+1/\delta}(k^\varepsilon)$, ∇k^η por $\nabla T_{M+k+1/\delta}(k^\eta)$ y teniendo en cuenta que $Z'(0) = 0$, al tomar límites sucesivamente cuando $\varepsilon \to 0$ y cuando $\eta \to 0$, también da 0. Por tanto,

$$\mathrm{LIM}\, R_{21}^{\varepsilon,\eta} = 0\,.$$

También en $R_{22}^{\varepsilon,\eta}$ se puede cambiar ∇k por $\nabla T_{M+1/\delta}(k^\varepsilon)$ y ∇k^η por $\nabla T_{M+k+1/\delta}(k^\eta)$. Por tanto, este término es un producto de factores de los cuales uno converge en $L^2(Q)$ y el otro converge débilmente en $L^2(Q)$. En consecuencia,

$$\mathrm{LIM}\, R_{22}^{\varepsilon,\eta} = 0.$$

También es cierto que $\mathrm{LIM}\, R_3^{\varepsilon,\eta} = 0$ dado que $\mathrm{LIM}\, A_M^{\varepsilon,\eta} = 0$ y

$$|R_3^{\varepsilon,\eta}| \leq T\,\|H\|_{L^\infty}\|Z''\|_{L^\infty} A^{\varepsilon,\eta}_{M+K+\frac{1}{\delta}}\,.$$

Para $M_3^{\varepsilon,\eta}$, podemos usar la misma técnica que para $R_2^{\varepsilon,\eta}$, ya que

$$|M_3^{\varepsilon,\eta}| \leq T\|H'\|_{L^\infty} \iint_{k^\varepsilon \leq M+\frac{1}{\delta}} |Z'(k^\varepsilon - k^\eta)| a_\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon$$
$$+\left|\iint_Q (T-t) Z'(k^\varepsilon - k^\eta) H'(k^\varepsilon) a_\varepsilon \cdot \nabla k^\eta\right|.$$

Así,

$$\mathrm{LIM}\, M_2^{\varepsilon,\eta} = 0\,. \tag{6.18}$$

Para terminar, nos falta probar que $\mathrm{LIM}\, B_2^{\varepsilon,\eta} = 0$. Procediendo como en la última etapa del Capítulo 4, podemos escribir que

$$\begin{aligned} M_2^{\varepsilon,\eta} &= \iint_{k^\varepsilon \leq M} (T-t) Z(k^\varepsilon - k^\eta) a_\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon \\ &\quad - M\delta \iint_{M \leq k^\varepsilon < M+\frac{1}{\delta}} (T-t) Z(k^\varepsilon - k^\eta) a_\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon \\ &= I^{\varepsilon,\eta} - J_\delta^{\varepsilon,\eta}\,. \end{aligned}$$

Usando $G(k^\varepsilon)$ como función "test" en la tercera ecuación de (6.12), se obtiene una expresión análoga a (4.68) salvo en lo que respecta al segundo sumando que ahora es

$$\iint_Q G'(k^\varepsilon) a_\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon\,.$$

Análogamente a como se hizo en la demostración del teorema 4.1, se obtiene que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \iint_{M \leq k^\varepsilon \leq M+\frac{1}{\delta}} a_\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon \leq \iint_Q G(k)\, F + \int_\Omega \tilde{G}(k_0)$$

y

$$0 \leq \lim_{\delta\to 0} \left(\limsup_{\varepsilon\to 0} J^{\varepsilon,\eta}\right) \leq \lim_{\delta\to 0}\left(M\delta \limsup_{\varepsilon\to 0} \iint_{M\leq k^\varepsilon \leq M+\frac{1}{\delta}} a_\varepsilon \nabla k^\varepsilon\right) = 0\,.$$

De donde llegamos finalmente a que $\mathrm{LIM}\, B_2^{\varepsilon,\eta} = 0$.

k es una solución renormalizada

Sean $\beta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ con soporte en $[-M, M]$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Usando $\beta(k^\varepsilon)\varphi$ como función "test" en la ecuación de la energía de (6.12), obtendremos una expresión análoga a (4.70), salvo en el segundo y tercer sumando que ahora son respectivamente

$$\iint_Q a_\varepsilon \cdot \beta(k^\varepsilon)\nabla\varphi \quad \text{y} \quad \iint_Q a_\varepsilon \cdot \nabla\beta(k^\varepsilon)\varphi\,. \tag{6.19}$$

En la etapa anterior, hemos visto que

$$a(\nabla T_M(k^\varepsilon)) \cdot \nabla T_M(k^\varepsilon) \to a(\nabla T_M(k)) \cdot \nabla T_M(k) \quad \text{en } L^1(\Omega \times (0, T^-))\text{-débil}\,.$$

Esto es suficiente para pasar al límite en (6.19). La condición inicial para k se obtiene de modo totalmente análogo a como se obtuvo en el Capítulo 4.

6.2 Existencia de solución débil cuando $B \in W^{1,\infty}$.

Se puede demostrar un resultado análogo al teorema 4.6 cuando $B \not\equiv 0$, a condición de que sea $B \in W^{1,\infty}$ y con $k\Phi'(\nabla u)$ sustituido por $D_2\Psi(k, \nabla u)$, donde Ψ está en las condiciones del teorema anterior:

Teorema 6.2 *Supongamos que $N = 2$ ó $N = 3$ y que se verifica el resto de condiciones del teorema 4.1. Supongamos $B \in W^{1,\infty}$ y que el término $k\Phi'(\nabla u)$ ha sido sustituido por $D_2\Psi(k, \nabla u)$, donde Ψ cumple las condiciones de la sección precedente. Entonces la solución $\{u, p, k\}$ proporcionada por el teorema 6.1 satisface*

$$\nabla\widetilde{\mu}(k) = \mu(k)\nabla k\,,$$

$$\partial_t k \in L^1(L^1) + L^q(W^{-1,q}) \quad \forall\, q < 2$$

y

$$\begin{cases} \langle \partial_t k\,, \phi\rangle + \int_\Omega \mu(k)\nabla k \cdot \nabla\phi + \int_\Omega B(k) \cdot \nabla\phi + \int_\Omega (u \cdot \nabla k)\,\phi \\ \quad = \int_\Omega \left(\nu|\nabla u|^2 + D_2\Psi(k, \nabla u) : \nabla u\right)\phi \quad \forall\phi \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \qquad c.p.d. \ en \ (0, T)\,. \end{cases}$$

Demostración

Es análoga a la del teorema 4.6 para

$$F_1^\varepsilon = T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\nu\nabla u^\varepsilon + D_2\Psi(k^\varepsilon,\nabla u^\varepsilon) : \nabla u^\varepsilon)\,, \qquad F_2^\varepsilon = -u^\varepsilon\cdot\nabla k^\varepsilon + \nabla\cdot B_\varepsilon(k^\varepsilon)\,,$$

$$F = \nu\nabla u + D_2\Psi(k,\nabla u) : \nabla u\,, \qquad F_2 = -u\cdot\nabla k + \nabla\cdot B(k)\,.$$

Bastará tener en cuenta que $\nabla\cdot B(b_\varepsilon(v^\varepsilon)) = B'(b_\varepsilon(v^\varepsilon))\cdot\nabla b_\varepsilon(v^\varepsilon)$, donde $B'(b_\varepsilon(v^\varepsilon))$ está uniformente acotada y converge c.p.d. a $B'(k)$ y que $\nabla b_\varepsilon(v^\varepsilon)$ está acotada en $L^q(Q)$ para todo $q<2$ y converge c.p.d. a ∇k.

6.3 El caso en que se imponen condiciones de contorno constantes

A continuación, vamos a considerar el problema (4.1) con las siguientes condiciones de contorno

$$u = u_\Gamma\,, \quad k = k_\Gamma \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega\times(0,T)\,. \tag{6.20}$$

Supondremos que u_Γ y k_Γ son constantes y $k_\Gamma > 0$.

Teorema 6.3 *Supongamos que $N=2$, $u_0 - u_\Gamma \in H$ y $k_0\in L^1(Q)$, con $k_0\geq k_\Gamma$. Entonces existe $\{u,p,k\}$, con*

$$u - u_\Gamma \in L^2(V)\cap C^0(H)\,, \qquad p\in L^2(Q)\,, \qquad k-k_\Gamma\in\mathcal{L}\,,$$

tal que:

1. *El par $\{u,p\}$ es solución de las dos primeras ecuaciones de (4.1) junto con la primera de las condiciónes iniciales de (4.2) en el sentido de las distribuciones (solución débil).*
2. *$k\geq k_\Gamma$ y es solución de la ecuación de la energía de (4.1) y la segunda condición inicial de (4.2) en el sentido siguiente (solución renormalizada): Para toda $\beta\in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ con soporte compacto, se tiene*

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t\widetilde{\beta}(k-k_\Gamma) - \nabla\cdot(\beta(k-k_\Gamma)(\mu(k)\nabla k + B(k))) \\ \quad +\beta'(k-k_\Gamma)\nabla k\cdot(\mu(k)\nabla k + B(k)) + \beta(k-k_\Gamma)(u\cdot\nabla k) \\ \quad = \beta(k-k_\Gamma)(\nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u):\nabla u) \qquad en\ \mathcal{D}'(Q)\,. \end{array}\right. \tag{6.21}$$

En particular, $\partial_t\widetilde{\beta}(k-k_\Gamma) \in L^1(L^1) + L^2(H^{-1})$ *y, para todo* $q < 2$, *se tiene* $\widetilde{\beta}(k-k_\Gamma) \in C^0(W^{-1,q})$. *Además,*

$$\widetilde{\beta}(k-k_\Gamma)|_{t=0} = \widetilde{\beta}(k_0-k_\Gamma)\,. \tag{6.22}$$

Demostración

Si efectuamos el cambio de variables $w = u - u_\Gamma$, y $h = k - k_\Gamma$, el sistema (4.1) se re-escribe como sigue:

$$\begin{cases} \partial_t w - \nu\Delta w - \nabla\cdot((h+k_\Gamma)\Phi'(\nabla w)) + ((w+u_\Gamma)\cdot\nabla)w + \nabla p = f\,, \\ \nabla\cdot w = 0\,, \\ \partial_t h - \nabla\cdot\Big(\mu^\Gamma(h)\nabla h + B^\Gamma(h)\Big) + (w+u_\Gamma)\cdot\nabla h \\ \quad = \nu|\nabla w|^2 + (h+k_\Gamma)\Phi'(\nabla w) : \nabla w\,. \end{cases} \tag{6.23}$$

Aquí, hemos usado la notación $\mu^\Gamma(r) \equiv \mu(r+k_\Gamma)$, $B^\Gamma(r) \equiv B(r+k_\Gamma)$. Las propiedades de μ^Γ y B^Γ son las mismas que las de μ y B, respectivamente. Las condiciones iniciales son

$$w|_{t=0} = u_0 - u_\Gamma\,, \qquad h|_{t=0} = k_0 - k_\Gamma \quad \text{en} \quad \Omega \tag{6.24}$$

y las condiciones de contorno se convierten en

$$w = 0\,, \qquad h = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega\times(0,T)\,. \tag{6.25}$$

Los problemas aproximados:

$$\begin{cases} \partial_t w^\varepsilon - \nu\Delta w^\varepsilon - \nabla\cdot\Big(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon+k_\Gamma)_+\Phi'(\nabla w^\varepsilon)\Big) + ((w^\varepsilon+u_\Gamma)\cdot\nabla)w^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = f\,, \\ \nabla\cdot w^\varepsilon = 0\,, \\ \partial_t h^\varepsilon - \nabla\cdot\Big(\mu^\Gamma_\varepsilon(h^\varepsilon)\nabla h^\varepsilon + B^\Gamma_\varepsilon(h^\varepsilon)\Big) + (w^\varepsilon+u_\Gamma)\cdot\nabla h^\varepsilon \\ \quad = T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\nu|\nabla w^\varepsilon|^2 + T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon+k_\Gamma)_+\Phi'(\nabla w^\varepsilon) : \nabla w^\varepsilon)\,, \end{cases} \tag{6.26}$$

con condiciones iniciales

$$w^\varepsilon|_{t=0} = u_0 - u_\Gamma\,, \qquad h^\varepsilon|_{t=0} = T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k_0 - k_\Gamma) \quad \text{en} \quad \Omega \tag{6.27}$$

y condiciones de contorno

$$w^\varepsilon = 0\,, \qquad h^\varepsilon = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega\times(0,T)\,. \tag{6.28}$$

De modo análogo a como se hace en el teorema 4.1, se llega a la conclusión de que, para cada $\varepsilon > 0$, existen $w^\varepsilon \in L^2(V)\bigcap C^0(H)$ y $h^\varepsilon \in L^2(H_0^1)\bigcap C^0(L^2)$ y que $h^\varepsilon \geq 0$. Las pequeñas diferencias que aparecen al acotar $\partial_t w^m$ no ofrecen gran dificultad respecto del argumento utilizado en la acotación de $\partial_t u^\varepsilon$, así que omitimos aquí los detalles. Nótese que $\tau^\varepsilon : \nabla w^\varepsilon \geq 0$, donde

$$\tau^\varepsilon = \nu\nabla w^\varepsilon + T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon + k_\Gamma)\Phi'(\nabla w^\varepsilon)\,.$$

Siguiendo los pasos de la sección 4.3.2, se obtiene:

$$|w^\varepsilon(t)|^2 + \int_0^t\!\!\int_\Omega \tau^\varepsilon : \nabla w^\varepsilon \leq C \quad \text{en } (0,T)\,,$$

$$\|w^\varepsilon\|_{L^\infty(H)} \leq C\,, \qquad \|w^\varepsilon\|_{L^2(V)} \leq C\,,$$

$$w^\varepsilon \text{ está acotada en } L^{\left(\frac{2a}{a-2}\right)^-}(L^a)\,, \quad \forall a \in (2,+\infty)\,,$$

$$\|h^\varepsilon\|_{L^\infty(L^1)} \leq C\,, \qquad \|T_M(h^\varepsilon)\|_{L^2(H_0^1)} \leq C(M) \quad \forall M > 0\,,\,.$$

$$\int_0^t \int_\Omega \mu_\varepsilon^\Gamma(h^\varepsilon)|\nabla T_M(h^\varepsilon)|^2 \leq \int_0^t \int_\Omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla w^\varepsilon)T_M(w^\varepsilon) + \int_\Omega \widetilde{T}_M(k_0 - k_\Gamma)\,,$$

$$\frac{1}{m}\int_0^t \int_{n\leq h^\varepsilon\leq n+m} \mu_\varepsilon^\Gamma(h^\varepsilon)|\nabla h^\varepsilon|^2 \leq \int_0^t \int_{h^\varepsilon\geq n} T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla w^\varepsilon) + \int_\Omega \widetilde{\zeta}_{n,m}(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k_0 - k_\Gamma))\,,$$

$$h^\varepsilon \text{ está acotada en } L^{\left(\frac{2b}{b-1}\right)^-}\left(L^b\right)\,, \quad \forall b \in (1,+\infty)\,.$$

En lo que respecta a $\partial_t w^\varepsilon$ y $\partial_t\widetilde{\beta}(h^\varepsilon)$ ($\widetilde{\beta}$ es la primitiva de una función $\beta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ de soporte compacto), podemos deducir sin dificultad que

$$\partial_t w^\varepsilon \text{ está acotada en } L^2(V')\,,$$

Claramente, pueden deducirse para w^ε y h^ε las mismas propiedades de convergencia débil que las obtenidas para u^ε y k^ε en la sección 4.3.2.

Para pasar al límite en la ecuación del movimiento, usaremos que

$$\int_0^T (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon + k_\Gamma)\Phi'(\nabla w^\varepsilon), \nabla v - \nabla w^\varepsilon) = \int_0^T \langle J'_{T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon+k_\Gamma)}(w^\varepsilon), v - w^\varepsilon\rangle$$
$$\leq \iint_Q T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon + k_\Gamma)\Phi(\nabla v) - \iint_Q T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon + k_\Gamma)\Phi(\nabla w^\varepsilon)\,.$$

La inecuación variacional que corresponde a este caso es:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^T \langle \partial_t w^\varepsilon, v\rangle + \nu \iint_Q \nabla w^\varepsilon : \nabla v + \iint_Q ((w^\varepsilon + u_\Gamma)\cdot\nabla) w^\varepsilon \cdot v + \iint_Q T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon + k_\Gamma)\Phi(\nabla v) \\ \displaystyle\quad + \tfrac{1}{2}|u_0 - u_\Gamma|^2 \geq \nu \iint_Q |\nabla w^\varepsilon|^2 + \iint_Q T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon + k_\Gamma)\Phi(\nabla w^\varepsilon) \\ \displaystyle\quad + \int_0^T \langle f, v - u^\varepsilon\rangle + \frac{1}{2}|w^\varepsilon(T)|^2 \qquad \forall v \in V, \quad u^\varepsilon \in V. \end{array}\right. \tag{6.29}$$

El paso al límite puede hacerse del mismo modo que en el apartado 4.3.3 si escribimos el análogo de (4.40) como sigue:

$$\iint_Q T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon + k_\Gamma)\Phi(\nabla w^\varepsilon) = \iint_Q (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon + k_\Gamma) - (h + k_\Gamma))\Phi(\nabla w^\varepsilon) + \iint_Q (h + k_\Gamma)\Phi(\nabla w^\varepsilon).$$

Se llega entonces a que

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle \partial_t w, v\rangle + \nu \iint_Q \nabla w : \nabla v + \iint_Q ((w + u_\Gamma)\cdot\nabla) w \cdot v + \iint_Q (h + k_\Gamma)\Phi'(\nabla w) : \nabla v \\ &\quad = \int_0^T \langle f, v\rangle \qquad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Es decir, u es solución, junto con alguna $p \in L^2(Q)$, de las dos primeras ecuaciones de (4.1) en el sentido débil habitual.

Para ver la convergencia fuerte de ∇w^ε, seguiremos los pasos de la sección 3.3.4. Partiendo de la expresión análoga a (4.46), es decir

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0} \iint_Q (T - t)\left(\nu|\nabla w^\varepsilon|^2 + T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon + k_\Gamma)\Phi'(\nabla w^\varepsilon) : \nabla w^\varepsilon\right) \\ &\quad = \iint_Q (T - t)\left(\nu|\nabla w|^2 + (k + k_\Gamma)\Phi'(\nabla w) : \nabla w\right) \end{aligned}$$

y puesto que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint_Q (T - t)(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon + k_\Gamma) - (h + k_\Gamma))\Phi'(\nabla w^\varepsilon) : \nabla w^\varepsilon = 0,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0} \iint_Q (T - t)\left(\nu|\nabla w^\varepsilon|^2 + (h + k_\Gamma)\Phi'(\nabla w^\varepsilon) : \nabla w^\varepsilon\right) \\ &\qquad = \iint_Q (T - t)\left(\nu|\nabla w|^2 + (h + k_\Gamma)\Phi'(\nabla w) : \nabla w\right). \end{aligned}$$

Sumando y restando w, se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 \geq &\limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\nu \iint_Q (T - t)|\nabla(w^\varepsilon - w)|^2\right) \\ &+ \liminf_{\varepsilon\to 0}\left(\iint_Q (T - t)(h + k_\Gamma)\Phi'(\nabla w^\varepsilon) : \nabla w^\varepsilon - \iint_Q (T - t)(h + k_\Gamma)\Phi'(\nabla w) : \nabla w\right) \end{aligned}$$

y, debido a la semicontinuidad inferior débil de la función

$$v \mapsto \iint_Q (T-t)(h+k_\Gamma)\Phi'(\nabla v) : \nabla v\,,$$

resulta:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint_Q (T-t)|\nabla(w^\varepsilon - w)|^2 = 0\,.$$

Es decir,

$$\nabla w^\varepsilon \to \nabla w \quad \text{en } L^2(\Omega\times(0,T^-)) \text{ y c.p.d. en } Q\,.$$

Para probar la convergencia fuerte de $T_M(k^\varepsilon)$ en $L^2(H_0^1)$ para cada $M>0$, escribimos la ecuación de la energía del modo siguiente:

$$\partial_t h^\varepsilon - \nabla\cdot\left(\mu_\varepsilon^\Gamma(w^\varepsilon)\nabla w^\varepsilon + B_\varepsilon^\Gamma(h^\varepsilon)\right) = F_1^\varepsilon + F_2^\varepsilon\,, \tag{6.30}$$

con

$$F_1^\varepsilon = T_{\frac{1}{\varepsilon}}\left((\nu\nabla w^\varepsilon + T_{\frac{1}{\varepsilon}}(h^\varepsilon + k_\Gamma)\Phi'(\nabla w^\varepsilon)) : \nabla w^\varepsilon\right), \quad F_2^\varepsilon = -(w^\varepsilon + u_\Gamma)\cdot\nabla w^\varepsilon\,.$$

Puesto que las propiedades de μ^Γ y B^Γ son las mismas que las de μ y B respectivamente. podemos repetir aquí el argumento utilizado en la sección 3.3.5, obteniéndose que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_Q (T-t)\mu_\varepsilon^\Gamma(w^\varepsilon)|\nabla T_M(w^\varepsilon)|^2 = \iint_Q (T-t)\mu^\Gamma(w)|\nabla T_M(w)|^2\,.$$

Por último, k es solución de la ecuación de la energía en el sentido renormalizado. En efecto, sea $\beta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, con soporte en $[-M,M]$. Elegimos $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ y usamos $\beta(h^\varepsilon)\varphi$ como función "test" en la ecuación de la energía de (6.30). Se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle\partial_t\widetilde{\beta}(h^\varepsilon),\varphi\rangle &+ \iint_Q \mu_\varepsilon^\Gamma(h^\varepsilon)\nabla h^\varepsilon\cdot\beta(h^\varepsilon)\nabla\varphi\\ &+\iint_Q \mu_\varepsilon^\Gamma(h^\varepsilon)\nabla h^\varepsilon\cdot\nabla\beta(h^\varepsilon)\varphi + \iint_Q B_\varepsilon^\Gamma(h^\varepsilon)\cdot\beta(h^\varepsilon)\nabla\varphi\\ &+\iint_Q B_\varepsilon^\Gamma(h^\varepsilon)\cdot\nabla\beta(h^\varepsilon)\varphi = \iint_Q (F_1^\varepsilon + F_2^\varepsilon)\,\beta(h^\varepsilon)\varphi\,.\end{aligned} \tag{6.31}$$

Tomando límites cuando $\varepsilon\to 0$, llegamos a que

$$\begin{aligned}&\int_0^T\langle\partial_t\widetilde{\beta}(h),\varphi\rangle + \iint_Q \mu^\Gamma(h)\nabla h\cdot\beta(h)\nabla\varphi + \iint_Q \mu^\Gamma(h)\nabla h\cdot\nabla\beta(h)\varphi\\ &+\iint_Q B^\Gamma(h)\cdot\beta(h)\nabla\varphi + \iint_Q B^\Gamma(h)\cdot\nabla\beta(h)\varphi\\ &+\iint_Q((w+u_\Gamma)\cdot\nabla h)\,\beta(h)\varphi = \iint_Q(\nu|\nabla w|^2 + (k+k_\Gamma)\Phi'(\nabla w):\nabla w)\,\beta(h)\varphi\,.\end{aligned}$$

Para probar que h satisface la segunda condición inicial de (6.24) en el sentido de (6.22), usaremos de nuevo el lema 4.6. Ahora,

$$\begin{aligned}\partial_t\widetilde{\beta}(h^\varepsilon) &= -\mu_\varepsilon^\Gamma(h^\varepsilon)\beta'(h^\varepsilon)|\nabla T_M(h^\varepsilon)|^2 + \beta(h^\varepsilon)T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla w^\varepsilon)\\ &+ \nabla\cdot\Big(\mu_\varepsilon^\Gamma(h^\varepsilon)\beta(h^\varepsilon)\nabla T_M(h^\varepsilon) + \beta(h^\varepsilon)B_\varepsilon^\Gamma(h^\varepsilon) - \widetilde{\beta}(h^\varepsilon)(w^\varepsilon + u_\Gamma)\Big)\\ &- \beta'(h^\varepsilon)\nabla T_M(h^\varepsilon)\cdot B_\varepsilon^\Gamma(h^\varepsilon)\,.\end{aligned}$$

No es difícil comprobar que, al menos para una subsucesión, $\widetilde{\beta}(h^\varepsilon)$ converge en $C^0(W^{-1,q})$ y, por tanto, $\widetilde{\beta}(h)(0) = \widetilde{\beta}(k_0 - k_\Gamma)$.

6.4 Turbulencia tridimensional, flujo bidimensional

Vamos a considerar un problema como (4.1) para $N = 3$ pero formulado en un dominio especial de tipo cilíndrico en el que la tercera componente de la velocidad media, u_3, es cero (flujo medio bidimensional). Los datos del problema estarán en las mismas condiciones que en el caso general, pero con las siguientes particularidades:

- El dominio es de la forma $\Omega = \omega \times (0, L)$, donde $\omega \subset \mathbb{R}$ es un abierto acotado, conexo y regular.

- La tercera componente de f es nula, $f_i = f_i(x_1, x_2, t)$ para $i = 1, 2$ y
$$f \in L^2(0, T; H^{-1}(\omega))\,.$$

- La tercera componente de u_0 es nula y $u_0 \in V(\omega)$

- Ahora, Φ está definida en $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$: $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \mapsto \Phi(D) \in \mathbb{R}$.

Hemos de buscar p, al igual que u, definida en $\omega \times (0, T)$, ya que $\dfrac{\partial p}{\partial x_3}$ debe ser cero, mientras que k va a estar definida en $\Omega \times (0, T)$. Aquí, $V(\omega)$ y $H(\omega)$ designan respectivamente los espacios V y H referidos a ω. Salvo cuando pueda conducir a confusión, las normas en $H(\omega)$ y $V(\omega)$ serán denotadas de nuevo $|\cdot|$ y $\|\cdot\|$. También pondremos

$$M_3(k) = \frac{1}{L}\int_0^L k(x_1, x_2, x_3, t)\,dx_3\,, \qquad \nabla' = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\Big)\,.$$

El problema que vamos a tratar es el siguiente:

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu\Delta' u - \nabla'\cdot(M_3(k)\Phi'(\nabla u)) + (u\cdot\nabla')u + \nabla' p = f\,, \\ \nabla'\cdot u = 0\,, \\ \partial_t k - \nabla\cdot(\mu(k)\nabla k + B(k)) + u\cdot\nabla' k = \nu|\nabla u|^2 + M_3(k)\Phi'(\nabla u) : \nabla' u\,. \end{cases} \tag{6.32}$$

Se pide que la ecuación de movimiento y la condición de incompresibilidad sean satisfechas en $\omega\times(0,T)$ y la ecuación de la energía lo sea en $\Omega\times(0,T)$. Las condiciones iniciales son

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{en } \omega, \qquad k|_{t=0} = k_0 \quad \text{en } \Omega. \tag{6.33}$$

y las condiciones de contorno

$$u = 0 \quad \text{sobre } \partial\omega\times(0,T)\,, \qquad k = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega\times(0,T)\,.$$

Teorema 6.4 *Supongamos $u_0 \in H(\omega)$ y $k_0 \in L^1(\Omega)$, con $k_0 \geq 0$. Entonces existe $\{u,p,k\}$, con*

$$u \in L^2(V(\omega)) \cap C^0(H(\omega))\,, \qquad p \in L^2(Q)\,, \qquad k \in \mathcal{L}\,,$$

tal que:

1. *El par $\{u,p\}$ es solución de las dos primeras ecuaciones de (6.32) junto con la primera de las condiciones iniciales de (6.33) en el sentido de las distribuciones (solución débil).*

2. *$k \geq 0$ y es solución de la ecuación de la energía de (6.32) y la segunda condición inicial de (6.33) en el sentido siguiente (solución renormalizada): Para toda $\beta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ con soporte compacto, se tiene*

$$\begin{cases} \partial_t\widetilde{\beta}(k) - \nabla\cdot(\beta(k)(\mu(k)\nabla k + B(k))) \\ \quad +\beta'(k)\nabla k\cdot(\mu(k)\nabla k + B(k)) + \beta(k)\,(u\cdot\nabla' k) \\ \quad = \beta(k)\,(\nu|\nabla u|^2 + M_3(k)\Phi'(\nabla u) : \nabla u) \qquad \text{en } \mathcal{D}'(Q)\,. \end{cases} \tag{6.34}$$

En particular, $\partial_t\widetilde{\beta}(k) \in L^1(L^1) + L^2(H^{-1})$ y, para todo $q < 2$, se tiene $\widetilde{\beta}(k) \in C^0(W^{-1,q})$. Además,

$$\widetilde{\beta}(k)|_{t=0} = \widetilde{\beta}(k_0)\,.$$

Demostración

Para cada $\varepsilon > 0$, consideramos la siguiente aproximación de (6.32):

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \nabla' \cdot \tau^\varepsilon + (u^\varepsilon \cdot \nabla')u^\varepsilon + \nabla' p^\varepsilon = f\,, \\ \nabla' \cdot u^\varepsilon = 0\,, \\ \partial_t k^\varepsilon - \nabla \cdot (\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla' k^\varepsilon + B_\varepsilon(k^\varepsilon)) + u^\varepsilon \cdot \nabla k^\varepsilon = T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon)\,. \end{cases} \tag{6.35}$$

Ahora,

$$\tau^\varepsilon = \nu \nabla u^\varepsilon + T_{\frac{1}{\varepsilon}}(M_3(k^\varepsilon))_+ \Phi'(\nabla u^\varepsilon)\,.$$

El sistema (6.35) es completado con las condiciones iniciales

$$u^\varepsilon|_{t=0} = u_0 \quad \text{en } \omega, \qquad k^\varepsilon|_{t=0} = k_0 \quad \text{en } \Omega$$

y las condiciones de contorno

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{sobre } \partial\omega \times (0,T)\,, \qquad k^\varepsilon = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (0,T)\,.$$

La existencia de solución para estos problemas aproximados puede establecerse mediante un método de Galerkin. Puesto que el proceso a seguir es similar al de otras ocasiones y al que veremos a continuación, no insistiremos sobre ello. Se llega a que, para cada $\varepsilon > 0$, existen $u^\varepsilon \in L^2(V(\omega)) \bigcap C^0(H(\omega))$ y $k^\varepsilon \in L^2(H_0^1) \bigcap C^0(L^2)$ tales que:

$$\begin{cases} \langle \partial_t u^\varepsilon(t), v\rangle + \nu(\nabla u^\varepsilon(t), \nabla v) + (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(M_3(k^\varepsilon(t)))_+ \Phi'(\nabla u^\varepsilon(t)), \nabla v) \\ \qquad +((u^\varepsilon(t) \cdot \nabla)u^\varepsilon(t), v) = \langle f(t), v\rangle \qquad \forall v \in V(\omega)\,, \quad \text{c.p.d.en } (0,T)\,, \\ u^\varepsilon(0) = u_0\,, \\ \langle \partial_t k^\varepsilon(t), \psi\rangle + (\mu_\varepsilon(k^\varepsilon(t))\nabla k^\varepsilon(t), \nabla\psi) + (B_\varepsilon(k^\varepsilon(t)), \nabla\psi) \\ \qquad +(u^\varepsilon(t) \cdot \nabla' k^\varepsilon(t), \psi) = (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon(t) : \nabla u^\varepsilon(t)), \psi) \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega)\,, \quad \text{c.p.d.en } (0.T)\,. \\ k^\varepsilon(0) = T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k_0)\,. \end{cases} \tag{6.36}$$

También, $k^\varepsilon \geq 0$. Veamos a continuación que de nuevo son ciertas las estimaciones "a priori" y las propiedades de convergencia débil. En primer lugar, tenemos que

$$u^\varepsilon \text{ está acotada en } L^\infty(H(\omega)) \bigcap L^2(V(\omega))\,. \tag{6.37}$$

En efecto, usando como función "test" $u^\varepsilon(t)$ (pondremos simplemente u^ε) en (6.36) e integrando en ω y en $(0,T)$ se obtiene

$$|u^\varepsilon(t)|^2 + \nu \int_0^t \|u^\varepsilon\|^2 + 2\int_0^t \int_\omega T_{\frac{1}{\varepsilon}}(M_3(k^\varepsilon))\Phi'(\nabla u^\varepsilon) : \nabla u^\varepsilon \leq C$$

Así,

$$|u^\varepsilon(t)|^2 + \int_0^t\!\!\int_\omega \tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon \le C \quad \text{en } (0,T).$$

y obtenemos (6.37). Del mismo modo que en el teorema 4.1, es fácil probar que

$$u^\varepsilon \text{ está acotada en } L^{\left(\frac{2a}{a-2}\right)^-}(L^a(\omega)) \quad \forall a \in (2,+\infty).$$

Las acotaciones para k^ε son las mismas:

$$k^\varepsilon \text{ está acotada en } L^\infty(L^1),$$

$$T_M(k^\varepsilon) \text{ está acotada en } L^2(H_0^1) \quad \forall M > 0,$$

$$\frac{1}{m}\int_0^t \int_{n\le k^\varepsilon \le n+m} \mu_\varepsilon(k^\varepsilon)|\nabla k^\varepsilon|^2 \le \int_0^t \int_{k^\varepsilon \ge n} T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon : \nabla u^\varepsilon) + \int_\Omega \tilde{\zeta}_{n,m}(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(k_0)),$$

$$\|k^\varepsilon\|_{L^q(W_0^{1,q})} \le C_q \quad \forall\, q < 2,$$

$$k^\varepsilon \text{ está acotada en } L^{\left(\frac{2b}{b-1}\right)^-}\left(L^b\right) \quad \forall\, b \in (1,+\infty).$$

También,

$$\partial_t u^\varepsilon \text{ está acotada en } L^2(V'(\omega)),$$

y

$$\partial_t \tilde{\beta}(k^\varepsilon) \text{ está acotada en } L^1(L^1) + L^2(H^{-1}),$$

cualquiera que sea la función $\beta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ de soporte compacto. En consecuencia. al menos para una subsucesión, tenemos

$$\begin{array}{ll}
u^\varepsilon \to u & \text{en } L^2(V(\omega))\text{-débil}, \\
u^\varepsilon \to u & \text{en } L^{\left(\frac{2a}{a-2}\right)^-}(L^a(\omega)) \quad \forall a > 2 \text{ y c.p.d.}, \\
\partial_t u^\varepsilon \to \partial_t u & \text{en } L^2(V'(\omega))\text{-débil}, \\
k^\varepsilon \to k & \text{en } L^q(W_0^{1,q}) \quad \forall q < 2, \\
k^\varepsilon \to k & \text{en } L^{\left(\frac{2b}{b-1}\right)^-}(L^{b^-}) \quad \forall b > 1 \text{ y c.p.d.}, \\
T_M(k^\varepsilon) \to T_M(k) & \text{en } L^2(H_0^1)\text{-débil} \quad \forall M > 0,
\end{array}$$

Asimismo,

$$\tilde{\beta}(k^\varepsilon) \to \tilde{\beta}(k) \text{ en } L^2(L^1) \text{ y c.p.d.}$$

y k^ε converge c.p.d. a k. Usaremos el resultado siguiente, de demostración inmediata:

Lema 6.5 *En las condiciones precedentes, se tiene que*

$$M_3(k^\varepsilon) \to M_3(k) \quad en\ L^{\left(\frac{2b}{b-1}\right)^-}(L^{b^-}) \quad para\ cada\ b > 1\,.$$

Veamos que u es, junto con alguna p, solución de la ecuación de movimiento. Poniendo $Q' = \omega \times (0,T)$, resulta que la inecuación variacional correspondiente a (4.38) es:

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^T \langle \partial_t u^\varepsilon, v\rangle + \nu \iint_Q \nabla u^\varepsilon : \nabla v + \iint_{Q'} (u^\varepsilon\cdot\nabla)u^\varepsilon\cdot v + \iint_{Q'} T_{\frac{1}{\varepsilon}}(M_3(k^\varepsilon))\Phi(\nabla v)\\ &\quad + \tfrac{1}{2}|u_0|^2 \ge \nu \iint_{Q'} |\nabla u^\varepsilon|^2 + \iint_{Q'} T_{\frac{1}{\varepsilon}}(M_3(k^\varepsilon))\Phi(\nabla u^\varepsilon)\\ &\quad + \int_0^T \langle f, v-u^\varepsilon\rangle + \frac{1}{2}|u^\varepsilon(T)|^2 \qquad \forall v\in V\,,\quad u^\varepsilon\in V\,.\end{aligned}\right. \tag{6.38}$$

Veamos cuáles son las diferencias que aparecen con respecto al paso al límite llevado a cabo en la sección 3.3.3 cuando $\varepsilon \to 0$. El cuarto sumando de (6.38), gracias al lema 6.5, converge a

$$\iint_{Q'} M_3(k)\Phi(\nabla v)\,.$$

El segundo sumando de la derecha puede ser escrito del siguiente modo:

$$\iint_Q T_{\frac{1}{\varepsilon}}(M_3(k^\varepsilon))\Phi(\nabla u^\varepsilon) = \iint_Q (T_{\frac{1}{\varepsilon}}(M_3(k^\varepsilon)) - M_3(k))\Phi(\nabla u^\varepsilon) + \iint_Q k\Phi(\nabla u^\varepsilon)\,.$$

Aquí, la penúltima integral tiende a cero. Usando la convexidad y continuidad de la función

$$v \mapsto \iint_{Q'} M_3(k)\Phi(\nabla v)\,,$$

también tenemos que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \iint_{Q'} T_{\frac{1}{\varepsilon}}(M_3(k^\varepsilon))\Phi(\nabla u^\varepsilon) \ge \iint_{Q'} M_3(k)\Phi(\nabla u)$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle \partial_t u, v\rangle + \nu \iint_{Q'} \nabla u : \nabla v + \iint_{Q'} (u\cdot\nabla)u\cdot v + \iint_{Q'} M_3(k)\Phi(\nabla v)\\ &\quad + \tfrac{1}{2}|u_0|^2 \ge \nu \iint_{Q'} |\nabla u|^2 + \iint_{Q'} (M_3(k)\Phi(\nabla u^\varepsilon)\\ &\quad + \langle f, v-u\rangle + \tfrac{1}{2}|u(T)|^2 \quad \forall v\in V\,.\end{aligned}$$

Escrito de forma equivalente, queda:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle \partial_t u, w\rangle + \nu \iint_{Q'} \nabla u : \nabla w + \iint_{Q'} (u\cdot\nabla)u\cdot w + \iint_{Q'} M_3(k)\Phi'(\nabla u) : \nabla w\\ &\quad = \int_0^T \langle f, w\rangle \qquad \forall w\in V\,.\end{aligned}$$

Veamos que también se da la convergencia fuerte de ∇u^ε. Tenemos que

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{Q'}(T-t)\left(\nu|\nabla u^\varepsilon|^2+T_{\frac{1}{\varepsilon}}(M_3(k^\varepsilon))\Phi'(\nabla u^\varepsilon):\nabla u^\varepsilon\right)\\ &\quad=\iint_{Q'}(T-t)\left(\nu|\nabla u|^2+M_3(k)\Phi'(\nabla u):\nabla u\right).\end{aligned}$$

Puesto que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{Q'}(T-t)T_{\frac{1}{\varepsilon}}(M_3(k^\varepsilon)-M_3(k))\Phi'(\nabla u^\varepsilon):\nabla u^\varepsilon=0\,,$$

también es cierto que

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{Q'}(T-t)\left(\nu|\nabla u^\varepsilon|^2+M_3(k)\Phi'(\nabla u^\varepsilon):\nabla u^\varepsilon\right)\\ &\quad=\iint_{Q'}(T-t)\left(\nu|\nabla u|^2+M_3(k)\Phi'(\nabla u):\nabla u\right).\end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned}0\geq\ &\limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\nu\iint_{Q'}(T-t)|\nabla(u^\varepsilon-u)|^2\right)\\ &+\liminf_{\varepsilon\to 0}\left(\iint_{Q'}(T-t)M_3(k)\Phi'(\nabla u^\varepsilon):\nabla u^\varepsilon-\iint_{Q'}(T-t)M_3(k)\Phi'(\nabla u):\nabla u\right).\end{aligned}$$

Pero la función

$$v\mapsto\iint_{Q'}M_3(k)\Phi'(\nabla v):\nabla v$$

es débilmente s.c.i. Por tanto,

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\left(\iint_{Q'}(T-t)M_3(k)\Phi'(\nabla u^\varepsilon):\nabla u^\varepsilon-\iint_{Q'}(T-t)M_3(k)\Phi'(\nabla u):\nabla u\right)\geq 0\,.$$

Así que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{Q'}(T-t)|\nabla(u^\varepsilon-u)|^2=0\,,$$

i.e.

$$\nabla u^\varepsilon\to\nabla u \text{ fuertemente en } L^2(\omega\times(0,T^-))\,.$$

Para demostrar la convergencia fuerte de $T_M(k^\varepsilon)$ en $L^2(H^1_0)$ para cada $M>0$. escribimos la ecuación de la energía en la forma

$$\partial_t k^\varepsilon-\nabla\cdot(\mu_\varepsilon(k^\varepsilon)\nabla k^\varepsilon+B_\varepsilon(k^\varepsilon))=F_1^\varepsilon+F_2^\varepsilon\,,$$

con

$$F_1^\varepsilon=T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\tau^\varepsilon:\nabla u^\varepsilon),\quad F_2^\varepsilon=-u^\varepsilon\cdot\nabla' k^\varepsilon\,.$$

Con lo que hemos visto hasta ahora, es claro que

$$F_1^\varepsilon \to \nu|\nabla u|^2 + M_3(k)\Phi'(\nabla u) : \nabla u \quad \text{en} \quad L^1(\Omega \times (0, T^-)).$$

Por otro lado, F_2^ε converge débilmente en $L^c(Q)$ para algún $c > 1$. Así, puede continuarse en esta etapa como en la etapa análoga de la demostración del teorema 4.1. Como consecuencia de lo que precede, se llega a que

$$\int_0^T \langle \partial_t \widetilde{\beta}(k), \varphi \rangle + \iint_Q (\mu(k)\nabla k + B(k)) \cdot \nabla(\beta(k)\varphi)$$
$$= \iint_Q (\nu|\nabla u|^2 + M_3(k)\Phi'(\nabla u) : \nabla u - u \cdot \nabla' k)\, \beta(k)\varphi.$$

Esto muestra que se verifica (6.34). La comprobación de la condición inicial no presenta novedades.

6.5 Una generalización del teorema 5.1 en los términos B y $k\Phi'(\nabla u)$.

En esta sección, vamos a dar un resultado de unicidad de solución en el caso en que $B \not\equiv 0$ pero $B \in W^{2,\infty}$ y $k\Phi'(\nabla u)$ está sustituido $D_2\Psi(k, \nabla u)$, con Ψ en las mismas condiciones que en la sección 6.1.

Teorema 6.6 *Supongamos que, en las condiciones del teorema 5.1, se tiene además $B \in W^{2,\infty}$ y*

- *$D_1D_2\Psi \in C^1$ y sus derivadas primeras están uniformemente acotadas.*
- *$D \mapsto D_1D_2\Psi(k, D) : D$ es globalmente lipschitziana.*

Entonces las soluciones $\{u_1, \nabla p_1, k_1\}$ y $\{u_2, \nabla p_2, k_2\}$ deben coincidir.

Nota:

Como $D \mapsto D_1D_2\Psi(k, D) : D$ es globalmente lipschitziana, podemos deducir que

$$|D_2\Psi(k, D) : D - D_2\Psi(k, D') : D'| \leq C|D - D'| \cdot |k|. \tag{6.39}$$

En efecto,

$$|D_2\Psi(k, D) : D - D_2\Psi(k, D') : D'|$$
$$\leq \int_0^k |D_1D_2\Psi(s, D) : D - D_1D_2\Psi(s, D') : D'|\, ds$$
$$\leq \int_0^k C|D - D'|\, ds \leq C|D - D'| \cdot |k|.$$

Demostración del teorema 6.6

Sean $u = u_1 - u_2$, $k = k_1 - k_2$ y $p = p_1 - p_2$. Como en la demostración del teorema 5.1. vamos a intentar probar que u verifica desigualdades del tipo

$$|u(t)|^2 + \nu \int_0^t \|u(s)\|^2 \, ds \le \int_0^t h(s)|u(s)|^2 \, ds \quad \forall t \in [0,T] \tag{6.40}$$

para alguna función $h \in L^1(0,T)$. Restando las ecuaciones verificadas por u_1 y u_2 y sumando y restando los términos adecuados, se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u_2 + (u_1\cdot\nabla)u + \nabla p \\ \qquad = \nabla\cdot(D_2\Psi(k_1,\nabla u_2) - D_2\Psi(k_2,\nabla u_2)) \\ \qquad +\nabla\cdot(D_2\Psi(k_1,\nabla u_1) - D_2\Psi(k_1,\nabla u_2))\,, \\ \nabla\cdot u = 0\,. \end{array} \right. \tag{6.41}$$

Usando u como función "test" en (6.41), se obtiene c.p.d. en $(0,T)$ que

$$\begin{aligned} &\langle \partial_t u, u\rangle + \nu(\nabla u, \nabla u) + ((u\cdot\nabla)u_2, u) \\ &= -\,(D_2\Psi(k_1,\nabla u_1) - D_2\Psi(k_1,\nabla u_2)), \nabla u) - (D_2\Psi(k_1,\nabla u_2) - D_2\Psi(k_2,\nabla u_2), \nabla u)\,. \end{aligned}$$

Aquí, el primer sumando de la derecha es positivo; en consecuencia,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\,\|u\|^2 \le -((u\cdot\nabla)u_2, u) - (D_2\Psi(k_1,\nabla u_2) - D_2\Psi(k_2,\nabla u_2), \nabla u) \tag{6.42}$$

en $(0,T)$. El primer término de la derecha en (6.42) puede acotarse del mismo modo que en el Capítulo 5. Veamos cómo puede acotarse el segundo. Tenemos que

$$\begin{aligned} &(D_2\Psi(k_1,\nabla u_2) - D_2\Psi(k_2,\nabla u_2), \nabla u) \\ &\quad = -(\nabla\cdot D_2\Psi(k_1,\nabla u_2), u) + (\nabla\cdot D_2\Psi(k_2,\nabla u_2), u)\,. \end{aligned} \tag{6.43}$$

Denotaremos una componente genérica de $\nabla\cdot D_2\Psi(k_i,\nabla u_2)$, por ejemplo

$$\sum_l \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial d_{lm}}(k_i,\nabla u_2)\right) = \sum_l \frac{\partial^2\Psi}{\partial k\partial d_{lm}}(k_i,\nabla u_2)\frac{\partial k_i}{\partial x_l} + \sum_{j,r,l} \frac{\partial^2\Psi}{\partial d_{jr}\partial d_{lm}}(k_i,\nabla u_2)\frac{\partial^2 u_{2j}}{\partial x_r\partial x_l}\,,$$

como sigue

$$\sum D_1D_2\Psi(k_i,\nabla u_2)Dk_i + \sum D_2D_2\Psi(k_i,\nabla u_2)D^2u_2\,.$$

Entonces podemos escribir el segundo miembro de (6.43) en la forma

$$\begin{aligned} &-\left(\sum(D_1D_2\Psi(k_1,\nabla u_2)Dk_1 - D_1D_2\Psi(k_2,\nabla u_2)Dk_2), u\right) \\ &\quad - \left(\sum(D_2D_2\Psi(k_1,\nabla u_2) - D_2D_2\Psi(k_2,\nabla u_2))D^2u_2, u\right)\,. \end{aligned}$$

Sumando y restando $\left(\sum D_1D_2\Psi(k_1,\nabla u_2)Dk_2,u\right)$, esto puede también escribirse

$$\begin{aligned}&-\left(\sum D_1D_2\Psi(k_1,\nabla u_2)Dk,u\right)\\ &-\left(\sum(D_1D_2\Psi(k_1,\nabla u_2)-D_1D_2\Psi(k_2,\nabla u_2))Dk_2,u\right)\\ &-\left(\sum(D_2D_2\Psi(k_1,\nabla u_2)-D_2D_2\Psi(k_2,\nabla u_2))D^2u_2,u\right).\end{aligned} \tag{6.44}$$

A continuación, veremos cómo puede ser acotado cada sumando de (6.44). En primer lugar, observamos que

$$\begin{aligned}|-(\textstyle\sum D_1D_2\Psi(k_1,\nabla u_2)Dk,u)\,| &\leq \int_\Omega (C_3+C_4|\nabla u_2|^{r-1})|\nabla k|\cdot|u|\\ &\leq C_3\|k\|\cdot|u|+C_4\|\nabla u_2\|_{L^\infty}|\nabla k|\cdot|u|\leq C(1+\|\nabla u_2\|_{L^\infty})|\nabla k|\cdot|u|.\end{aligned}$$

Aquí, hemos usado la hipótesis $u_2\in L^2(W^{2,r})$, con $r>N$. Para el segundo sumando de (6.44), utilizaremos que $D_1D_2\Psi\in C^1$ y tiene derivadas primeras uniformemente acotadas y que, además, $\nabla k_i\in L^2(L^\infty)$. Entonces

$$\begin{aligned}&|-(\textstyle\sum(D_1D_2\Psi(k_1,\nabla u_2)-D_1D_2\Psi(k_2,\nabla u_2))Dk_2,u)\,|\\ &\leq C\int_\Omega |k|\cdot|\nabla k_2|\cdot|u|\leq C\|\nabla k_2\|_{L^\infty}|k|\cdot|u|.\end{aligned}$$

En tercer lugar,

$$\begin{aligned}&|-(\textstyle\sum(D_2D_2\Psi(k_1,\nabla u_2)-D_2D_2\Psi(k_2,\nabla u_2))D^2u_2,u)\,|\\ &\leq C\|D^2u_2\|_{L^p}|k|_{L^q}|u|\leq C\|D^2u_2\|_{L^p}\|k\|\cdot|u|.\end{aligned}$$

En esta acotación, hemos elegido $q\leq 2^*$. Dado que $p>N$, se tiene $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. En conclusión, de (6.42) obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2+\nu\,\|u\|^2 &\leq \|\nabla u_2\|_{L^\infty}|u|^2+C(1+\|\nabla u_2\|_{L^\infty})\|k\|\cdot|u|\\ &\quad C\|\nabla k_2\|_{L^\infty}\|k\|\cdot|u|+C\|D^2u_2\|_{L^p}\|k\|\cdot|u|.\end{aligned}$$

Integrando en $(0,t)$, resulta

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}|u(t)|^2+\nu\int_0^t\|u\|^2\leq\int_0^t\|\nabla u_2\|_{L^\infty}|u|^2\\ &+\int_0^t C\left(1+\|\nabla u_2\|_{L^\infty}+\|\nabla k_2\|_{L^\infty}+\|D^2u_2\|_{L^p}\right)\|k\|\cdot|u|.\end{aligned}\tag{6.45}$$

Esta acotación es la análoga a la que aparece en el teorema 5.1 (cf. (5.3)).

k_1 y k_2 están acotadas

Vamos a utilizar el principio del máximo en la siguiente ecuación verificada por k_i:

$$\partial_t k_i - \nabla \cdot (\mu(k_i)\nabla k_i) - \nabla \cdot B(k_i) + u_i \nabla k_i - D_2\Psi(k_i, \nabla u_i) : \nabla u_i = \nu |\nabla u_i|^2 . \tag{6.46}$$

Sabemos que

$$|D_2\Psi(k_i, \nabla u_i) : \nabla u_i| \le C(1 + |\nabla u_i|^{r-1})|\nabla u_i| \cdot |k_i| \le C_* |k_i| .$$

Multipliquemos (6.46) por $e^{-t\Lambda}$ con $\Lambda = 2C^*$ y pongamos $\varphi_i = e^{-t\Lambda} k_i$. Entonces

$$\begin{aligned} &\partial_t \varphi_i - \nabla \cdot (\mu(\varphi_i e^{t\Lambda})\nabla \varphi_i) - \nabla \cdot B(\varphi_i e^{t\Lambda}) + u_i \cdot \nabla \varphi_i \\ &- (D_2\Psi(k_i, \nabla u_i) : \nabla u_i - \Lambda k_i)\, e^{t\Lambda} = e^{-t\Lambda} \nu |\nabla u_i|^2 . \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el valor tomado para Λ,

$$\partial_t \varphi_i - \nabla \cdot (\mu(\varphi_i e^{t\Lambda})\nabla \varphi_i) - \nabla \cdot B(\varphi_i e^{t\Lambda}) + u_i \cdot \nabla \varphi_i - \frac{\Lambda}{2}\varphi_i \le \nu e^{-t\Lambda} |\nabla u_i|^2 . \tag{6.47}$$

El segundo miembro de (6.47) que, por comodidad, denotaremos H, está en $L^\infty(Q)$. Por otra parte, $\varphi_i(0) = k_i(0) = k_0$. Sea

$$M = \mathrm{Max}\left(\|k_0\|_{L^\infty}, \frac{4\|H\|_{L^\infty}}{\Lambda} \right) .$$

Entonces $\varphi_i \le M$. En efecto, si tomamos $(\varphi_i - M)_+(t)$ como función "test" en (6.47), resulta

$$\begin{aligned} &\langle \partial_t \varphi_i, (\varphi_i - M)_+ \rangle + (\mu(\varphi_i e^{t\Lambda})\nabla \varphi_i, \nabla(\varphi_i - M)_+) + (B(\varphi_i e^{t\Lambda}), \nabla(\varphi_i - M)_+) \\ &\quad + (u_i \cdot \nabla \varphi_i, (\varphi_i - M)_+) + \frac{\Lambda}{2}(\varphi_i, (\varphi_i - M)_+) \le (H, (\varphi_i - M)_+) \end{aligned} \tag{6.48}$$

c.p.d. en t.

Aquí, si ponemos

$$\Phi_i(s) = \int_0^s B_i(\sigma) \mathbb{1}_{\{s > Me^{t\Lambda}\}}\, d\sigma \quad \text{y} \quad \Phi = (\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_N) ,$$

podemos escribir el integrando del tercer sumando en la forma

$$\begin{aligned} &B(\varphi_i e^{t\Lambda})\nabla(\varphi_i - M)_+ = e^{-t\Lambda} B(\varphi_i e^{t\Lambda})\nabla(e^{t\Lambda}\varphi_i - e^{t\Lambda}M)_+ \\ &= e^{-t\Lambda} B(\varphi_i e^{t\Lambda})\nabla(e^{t\Lambda}\varphi_i)\mathbb{1}_{\{e^{t\Lambda}\varphi > e^{t\Lambda}M\}} = e^{-t\Lambda}\Phi'(e^{t\Lambda}\varphi_i)\nabla(e^{t\Lambda}\varphi_i) = e^{-t\Lambda}\nabla \cdot \Phi'(e^{t\Lambda}\varphi_i) . \end{aligned}$$

El cuarto sumando de (6.48) es cero. El quinto sumando es

$$\int_\Omega \frac{\Lambda}{2}\varphi_i(\varphi_i - M)_+) = \int_\Omega \frac{\Lambda}{2}|(\varphi_i - M)_+|^2 + \int_\Omega \frac{\Lambda}{2}M(\varphi_i - M)_+ .$$

Procediendo con el resto de los términos como para (6.48) e integrando en el intervalo $(0, t)$, se llega a que

$$\frac{1}{2}|(\varphi_i - M)_+(t)|^2 \leq \int_0^t \int_\Omega (-\frac{M\Lambda}{2} + H)(\varphi_i - M)_+ .$$

De aquí, se tiene que $(\varphi_i - M)_+ = 0$ c.p.d. En consecuencia

$$k_i \leq \text{Max}\left(\|k_0\|_{L^\infty}, \frac{4\|H\|_{L^\infty}}{\Lambda}\right) e^{\Lambda T} .$$

Se tiene $\int_0^t \|k(s)\|^2\, ds \leq G\int_0^t \|u(s)\|^2\, ds \quad \forall t \in (0, T)$

Restando las ecuaciones satisfechas por k_1 y k_2 y sumando y restando los términos adecuados, encontramos:

$$\begin{aligned}
&\partial_t k + u_1 \cdot \nabla k - \nabla \cdot (\mu(k_1)\nabla k) = -u \cdot \nabla k_2 \\
&\quad + \nabla \cdot ((\mu(k_1) - \mu(k_2))\nabla k_2) - B'(k_1)\nabla k - (B'(k_1) - B'(k_2))\nabla k_2 \\
&\quad + \nu(\nabla u_1 + \nabla u_2) : \nabla u + (D_2\Psi(k_1, \nabla u_1) : \nabla u_1 - D_2\Psi(k_1, \nabla u_2) : \nabla u_2) \\
&\quad + D_2\Psi(k_1, \nabla u_2) : \nabla u_2 - D_2\Psi(k_2, \nabla u_2) : \nabla u_2 .
\end{aligned}$$

Tomando aquí k como función "test", obtenemos una expresión análoga a (5.6), en la que aparecen nuevos términos. En primer lugar,

$$\int_\Omega |B'(k_1)| \cdot |\nabla k| \cdot |k| \leq C\|k\| \cdot |k| .$$

En segundo lugar y puesto que $B \in W^{2,\infty}$,

$$\int_\Omega |B'(k_1) - B'(k_2)| \cdot |\nabla k_2| \cdot |k| \leq C\|\nabla k_2\|_{L^\infty} \cdot |k|^2 .$$

En tercer lugar, recordando (6.39), obtenemos

$$|(D_2\Psi(k_1, \nabla u_1) : \nabla u_1 - D_2\Psi(k_1, \nabla u_2) : \nabla u_2, k)| \leq C\int_\Omega |\nabla u| \cdot |k|^2 .$$

En cuarto lugar, puesto que $|D_1 D_2 \Psi| \leq C$, aparece

$$|(D_2\Psi(k_1, \nabla u_2) : \nabla u_2 - D_2\Psi(k_2, \nabla u_2) : \nabla u_2, k)| \leq \int_\Omega C|k| \cdot |\nabla u_2| \cdot |k| \leq C|k|^2 .$$

Lo análogo a mayorar como en (5.7) es ahora

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|k|^2 + \mu_0\|k\|^2 \leq \|\nabla k_2\|_{L^\infty} \cdot |k| \cdot |u| + l\,\|\nabla k_2\|_{L^\infty} \cdot |k| \cdot \|k\|$$
$$+ C|k| \cdot \|k\| + \|\nabla k_2\|_{L^\infty} \cdot |k|^2 + [\nu(\|\nabla u_1\|_{L^\infty} + \|\nabla u_2\|_{L^\infty})$$
$$+ C\|k_1\|_{L^\infty}(1 + \|\nabla u_2\|_{L^\infty})]|k| + C\|\nabla u_2\|_{L^\infty} \cdot |k|^2$$

en $(0,T)$. Y para una función similar a la función $g = g(t)$ que se usa en la demostración del teorema 5.1 (sólo cambian las constantes), podemos seguir con el mismo argumento para obtener

$$\int_0^t \|k(s)\|^2\,ds \leq \bar{G}\int_0^t \|u(s)\|^2\,ds \quad \forall t \in (0,T). \tag{6.49}$$

Aquí, $\bar{G}$ es una constante que sólo depende de $\|g\|_{L^1}$. Volviendo a (6.45) y usando (6.49), deducimos que

$$|u(t)|^2 + 2\nu\int_0^t \|u(s)\|^2\,ds \leq \int_0^t \|\nabla u_2(s)\|_{L^\infty} \cdot |u(s)|^2\,ds$$
$$+C\left(\int_0^t \|u(s)\|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t \left(1 + \|\nabla u_2(s)\|_{L^\infty} + \|\nabla k_2(s)\|_{L^\infty} + \|D^2 u_2(s)\|_{L^p}\right)^2 |u(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq C\int_0^t \left(\|\nabla u_2(s)\|_{L^\infty} + (1 + \|\nabla u_2(s)\|_{L^\infty} + \|\nabla k_2(s)\|_{L^\infty}\|D^2 u_2(s)\|_{L^p})^2\right)|u(s)|^2\,ds$$
$$+\nu\int_0^t \|u(s)\|^2\,ds\,.$$

En otras palabras, hemos probado (6.40) para una cierta función $h = h(t)$ que está en $L^1(0,T)$. Aplicando el lema de Gronwal, queda demostrado el teorema.

Apéndice A

Apéndice

En este Apéndice vamos a dar una demostración de las acotaciones de Boccardo-Gallouët diferente de la que aparece en [7]. Esta demostración puede encontrarse en [20]. No obstante, será repetida aquí con intención de identificar las constantes que aparecen. Más concretamente, vamos a probar el siguiente

Lema A.1 *Bajo las hipótesis*

$$\frac{1}{n}\int_{n\le|k|\le 2n}|\nabla k|^2 \le C_0\,, \tag{A.1}$$

$$\int_\Omega |\nabla T_M(k)|^2 \le C_M\,, \tag{A.2}$$

se tiene que

$$\|k\|_{W_0^{1,q}} \le (C_2^{q/2}C_\Omega + C\,C_0^{q/2+2^*/2(1-q/2)})^{1/q}\,. \tag{A.3}$$

— Demostración —

Sea

$$E_j = \{x\in\Omega;\ 2^j \le |k| < 2^{j+1}\}$$

para cada $j\in\mathbb{N}$. De (A.1), se deduce en particular para $n = 2^j$ que

$$\int_{E_j}|\nabla k|^2 \le C_0\,2^j \qquad \forall j\in\mathbb{N}\,. \tag{A.4}$$

Para $M = 2$, $(A.2)$ proporciona la estimación

$$\int_\Omega |\nabla T_2(k)|^2 \le C_2 \tag{A.5}$$

Sea q tal que $1 < q < \dfrac{N}{N-1}$ (por tanto, $q < 2$ y $q < N$). Entonces

$$\|k\|^q_{W_0^{1,q}} = \int_\Omega |\nabla k|^q = \int_{|k|\le 2} |\nabla k|^q + \sum_{j\ge 1} \int_{E_j} |\nabla k|^q = I_q + \sum_{j\ge 1} J_q^j .$$

Por un lado, utilizando la desigualdad de Hölder y (A.5), se obtiene que

$$I_q = \int_{|k|\le 2} |\nabla k|^q = \int_\Omega |\nabla T_2(k)|^q \le \left(\int_\Omega |\nabla T_2(k)|^2\right)^{\frac{q}{2}} |\Omega|^{1-\frac{q}{2}} \le C_2^{\frac{q}{2}} |\Omega|^{1-\frac{q}{2}} .$$

Por otro lado, utilizando la desigualdad de Hölder con $p = \dfrac{2}{q} > 1$, obtenemos que

$$J_q^j = \int_{E_j} |\nabla k|^q \le \left(\int_{E_j} |\nabla k|^{q\cdot\frac{2}{q}}\right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_{E_j} 1\right)^{1-\frac{q}{2}} \le \left(C_0\, 2^j\right)^{\frac{q}{2}} |E_j|^{1-\frac{q}{2}} \tag{A.6}$$

Para evaluar $|E_j|$, tomamos la función ξ_n (cf. la Notación) con $n = 2^j$. Aplicando la desigualdad de Sobolev con $\dfrac{1}{2^*} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{N}$ si $N \ge 3$ y con 2^* un exponente finito arbitrario (que elegiremos más adelante tal que $\dfrac{1}{2^*} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{q} < 0$) si $N = 2$, se deduce de (A.4) que

$$C_0\, 2^j \ge \int_{E_j} |\nabla k|^2 = \int_\Omega |\nabla \xi_{2^j}(k)|^2$$

$$\ge C_\Omega \left(\int_\Omega |\xi_{2^j}(k)|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \ge C_\Omega \left(\int_{E_{j+1}} 2^{j2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} = C_\Omega 2^{2j} |E_{j+1}|^{\frac{2}{2^*}} ,$$

de donde

$$|E_j| \le \left(2\frac{C_0}{C_\Omega}\right)^{\frac{2^*}{2}} 2^{-j\frac{2^*}{2}} \quad \text{si } j \ge 1. \tag{A.7}$$

De (A.6) y (A.7), obtenemos que

$$J_q^j = \int_{E_j} |\nabla k|^q \le C_0^{\frac{q}{2}} 2^{\frac{jq}{2}} \left(\left(2\frac{C_0}{C_\Omega}\right)^{\frac{2^*}{2}} 2^{-j\frac{2^*}{2}}\right)^{1-\frac{q}{2}} = C_0^{\frac{q}{2}-\frac{2^*}{2}(1-\frac{q}{2})}\, C\, 2^{\frac{jq}{2}-j\frac{2^*}{2}(1-\frac{q}{2})},$$

donde C sólo depende de C_Ω y de q. Pero

$$\frac{jq}{2} - j\frac{2^*}{2}\left(1-\frac{q}{2}\right) = jq\frac{2^*}{2}\left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{q} + \frac{1}{2}\right) = -\gamma(q,N)j$$

donde $\gamma(q,N) > 0$ sólo depende de q y de N. Por ejemplo, cuando $N \ge 3$ se tiene que $\gamma = \dfrac{N-1}{N-2}\left(\dfrac{N}{N-1} - q\right)$. Por tanto,

$$\|k\|^q_{W_0^{1,q}} \le C_2^{q/2} |\Omega|^{1-q/2} + C\, C_0^{\frac{q}{2}-\frac{2^*}{2}(1-\frac{q}{2})} \sum_{j\ge 1} 2^{-\gamma(q,N)j} .$$

Ahora bien,

$$\sum_{j\geq 1} 2^{-\gamma(q,N)j}$$

es una serie convergente cuya suma sólo depende de q y de N. Por tanto,

$$\|k\| \leq (C_2^{q/2}|\Omega|^{1-q/2} + C_0^{\frac{q}{2}-\frac{2^*}{2}(1-\frac{q}{2})}\, C(q,N))^{1/q}\,.$$

En consecuencia, queda probado $(A.3)$: Para cada $q \in \left(1, \dfrac{N}{N-1}\right)$, existe una constante $C(q)$ (que sólo depende de Ω, N, q, C_0 y $\|T_2(u)\|_{H_0^1}$) tal que

$$\|k\|_{W_0^{1,q}} \leq C(q)\,.$$

Esto prueba el lema.

Lema A.2 *Bajo las hipótesis*

$$\frac{1}{n}\iint_{n\leq|k|\leq 2n} |\nabla k|^2 \leq C_0\,, \tag{A.8}$$

$$\iint_Q |\nabla T_M(k)|^2 \leq C\cdot M\,, \tag{A.9}$$

se tiene que

$$\|k\|_{L^q(W_0^{1,q})} \leq (T\,C_2^{q/2}C_\Omega + T\,C\,C_0^{q/2+2^*/2(1-q/2)})^{1/q}\,.$$

La demostración es análoga a la del lema A.1.

Bibliografía

[1] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG – *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I,* Comm. Pure Appl. Math., 12 (1959), p. 623–727.

[2] J. BARANGER, A. MIKELIĆ – *Stationary solutions to a quasi-Newtonian flow with viscous heating,* Math. Models and Methods in Appl. Sciences, Vol. 5, No. 6 (1995), 725–738.

[3] P. BENILAN, L. BOCCARDO, T. GALLOUËT, R. GARIEPY, J.L. VÁZQUEZ – *On the p-Laplacian on L^1,* to appear.

[4] D. BLANCHARD – *Truncations and monotonicity methods for parabolic equations,* Nonlinear Anal. TMA, 21 (10), p. 725–743, 1993.

[5] D. BLANCHARD, H. REDWANE – *Renormalized solutions for a class of nonlinear evolution problems,* to appear; see also C. R. Acad. Sci. Paris, t. 319, Série I, p. 831–835, 1994.

[6] D. BLANCHARD, F. MURAT – *Renormalized solutions for nonlinear parabolic problems with L^1 data: Existence and uniqueness,* to appear.

[7] L. BOCCARDO, T. GALLOUËT – *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data,* J. Funct. Anal. 87, 1989, p. 149–169.

[8] L. BOCCARDO, J.I. DÍAZ, D. GIACHETTI, F. MURAT – *Existence of a solution for a weaker form of a nonlinear elliptic equation,* In "Recent Advances in Nonlinear Elliptic and Parabolic Problems", P. Benilan et al. eds., Pitman Research Notes in Math., 208, Longman, Harlow 1989.

[9] P. BRADSHAW – *The understanding and prediction of turbulent flow,* Aeronautical J., july 1972, p. 403–418.

[10] B. CLIMENT, E. FERNÁNDEZ-CARA – *Existence and uniqueness results for a coupled problem related to the stationary Navier-Stokes system,* to appear in Journal Math. Pures Appl.

[11] B. CLIMENT, E. FERNÁNDEZ-CARA – *Some existence and uniqueness results for a time-dependent coupled problem of the Navier-Stokes kind,* to appear.

[12] R. DiPerna, P.L. Lions – *On the Cauchy problem for Boltzmann equations: global existence and weak stability,* Annals of Math. (2) 130 (1989), No. 2, p. 321–366.

[13] O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'ceva –*Linear and quasi-linear equations of parabolic type,* Trans. Math. Monographs, Vol. 23, A.M.S., Providence 1968.

[14] B.E. Launder, D.B. Spalding – *Mathematical models of turbulence,* Academic Press Inc. London, 1972.

[15] R. Lewandowski – *Les équations de Stokes et de Navier-Stokes couplées avec l'équation de l'énergie cinétique turbulente,* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 381, Série I, p. 1097–1102, 1994.

[16] J.L. Lions – *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires,* Dunod, Paris 1969.

[17] P.L. Lions, F. Murat – *Solutions renormalisées d'équations elliptiques,* to appear.

[18] J.L. Lions, J. Peetre – *Sur une classe de espaces d'interpolation,* Inst. Hautes Etudes, No 19, Paris 1964.

[19] G.J. Minty – *Monotone (nonlinear) operators in Hilbert Space,* Duke Math. Journal, 29, p. 341–346, 1962.

[20] F. Murat – *Soluciones renormalizadas de EDP elípticas no lineales,* Research Report R93023, LAN, University Paris VI, 1993.

[21] M. Nallasamy – *Turbulence models and their applications to the prediction of turbulent flows,* Computers & Fluids, Vol. 15, No. 2, p. 151–194, 1987.

[22] M. Renardy, W.J. Hrusa, J.A. Nohel– *Mathematical problems in viscoelasticity* , Longman Scientific & Technical, New York, 1987.

[23] W.C. Reynolds – *Computation of turbulent flows,* Annual Reviews (1976), p. 183–207.

[24] J. SIMON – *Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$*, Annali Mat. Pura Appl. (IV). Vol CXLVI (1987), p. 65–96.

[25] J. SIMON – *Existencia de solución del problema de Navier-Stokes con densidad variable,* Lectures at the University of Sevilla (Spain), 1990.

1ª BLANCA CLIMENT EZQUERRA
SOLUCIONES DEBILES Y RENORMALIZADAS
DE ALGUNAS EDP NO LINEALES CON ORIGEN EN
MECANICA DE FLUIDOS
APTO CUM LAUDE

16 SEPTIEMBRE 96