UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

HOMOGENEIZACIÓN DE PROBLEMAS DE DIRICHLET PARA DOMINIOS Y COEFICIENTES SIMULTÁNEAMENTE VARIABLES

Memoria presentada por
Carmen Calvo Jurado
para optar al grado de
Doctor en Matemáticas.

V^{o}B^{o} del director
del trabajo:

Fdo.: Juan Casado Díaz
profesor Titular de la
Universidad de Sevilla.

Fdo.: Carmen Calvo Jurado.

Sevilla, Junio de 2003.

Agradecimientos

A continuación, aunque sea insuficiente en estas líneas, quiero expresar mi agradecimiento a quienes gracias a su ayuda y apoyo han contribuido a la realización de este trabajo.

En primer lugar, agradezco profundamente a Juan, mi director de tesis, todas las horas que me ha dedicado de su tiempo, también gracias a su familia por ello, así como su generosidad y paciencia a la hora de compartir sus conocimientos.

Muchísimas gracias al Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico de la Universidad de Sevilla, por vuestra ayuda y cariño todos estos años.

A mis compañeros del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura, gracias por vuestra amistad y por facilitarme la realización de éste trabajo.

Por último, gracias a mi madre y hermanos por su apoyo y atención constante.

A mis padres

Índice

Notaciones

$\mathbb{R}^N$: Espacio euclídeo N-dimensional.

Ω: Subconjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^N$.

Q_R: Cilindro $Q_R = \Omega \times (0,\, R)$.

$\mathcal{M}_{M\times N}$: Espacio de las matrices con coeficientes reales de orden $M \times N$.

$A : B$: Producto escalar de dos matrices $A,\, B \in \mathcal{M}_{M\times N}$, dado por $A : B = \sum_{i,\,j=1}^{N} a_{i,j} b_{i,j}$.

$\langle , \rangle_{X',X}$: Producto de dualidad entre el espacio normado X y su dual X'.

$t \vee s = \max\{t,\, s\}, \quad t,\, s \in \mathbb{R}$.

$t \wedge s = \min\{t,\, s\}, \quad t,\, s \in \mathbb{R}$.

χ_E: Función característica del conjunto E.

$O_{k,m,n}$, $O_{m,n}$, O_n: Sucesión cualquiera de números reales, que puede cambiar de una línea a otra, tal que

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} |O_{k,m,n}| = 0, \quad \lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} |O_{m,n}| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} O_n = 0.$$

$u_n \rightharpoonup u$ en X: Convergencia débil de la sucesión u_n hacia u en X.

$u_n \to u$ en X: Convergencia fuerte de la sucesión u_n hacia u en X.

$L^p_\mu(\Omega)$, $1 \le p < +\infty$: Espacio las clases de funciones μ-medibles en $\mathbb{R}$, p-integrables respecto a la medida μ.

$L^\infty_\mu(\Omega)$: Espacio de las clases de funciones de Ω en $\mathbb{R}$, μ-medibles y esencialmente acotadas respecto a la medida μ.

$L^p(\Omega),\ L^\infty(\Omega)$: Espacios anteriores cuando μ es la medida de Lebesgue.

$\mathcal{D}(\Omega)$: Espacio de las funciones C^∞ con soporte compacto en Ω.

$\mathcal{D}'(\Omega)$: Dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, espacio de las distribuciones en Ω.

$C^k(\bar{\Omega})$, $1 \le k \le +\infty$: Espacio de las restricciones a $\bar{\Omega}$ de las funciones de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}$, k veces derivables con derivadas continuas en $\bar{\Omega}$.

$C^k_0(\Omega)$: Clausura de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $C^k(\bar{\Omega})$.

$W^{1,p}(\Omega)$: Espacio de Sobolev de las funciones de $L^p(\Omega)$ cuyas derivadas parciales en el sentido de las distribuciones pertenecen también a $L^p(\Omega)$, $(1 \leq p \leq +\infty)$.

$W_c^{1,p}(\Omega)$: Espacio de las funciones de $W^{1,p}(\Omega)$ con soporte compacto en Ω, $(1 \leq p \leq +\infty)$.

$W_0^{1,p}(\Omega)$: Clausura de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$.

$W^{-1,p'}(\Omega)$: Espacio dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$, $1 \leq p \leq +\infty$.

$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$, $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$, $H^{-1}(\Omega) = W_0^{-1,2}(\Omega)$.

$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^N)$: Espacio de Hardy definido por

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^N) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^N) : \quad sup_{t \geq 0} |h_t * f| \in L^1(\mathbb{R}^N)\}$$

donde $h_t = \frac{1}{t^N} h(\frac{\cdot}{t})$, $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $h \geq 0$, $sop\, h \subset B(0,1)$.

$C_p(A,\Omega)$: C_p-capacidad de A en Ω (ver Capítulo 1), que se define como

$$C_p(A,\Omega) = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla \varphi|^p dx : \quad \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \varphi \geq 1 \text{ e.c.t. un entorno de } A \right\},$$

$\forall A \subset \Omega$ Borel.

$\mathcal{M}_0^p(\Omega)$: Medidas de Borel no negativas que se anulan en conjuntos de p-capacidad cero y que satisfacen

$$\mu(B) = inf\{\mu(A) : \; A \;\; C_p\text{-quasi abierto}, \; B \subseteq A \subseteq \Omega\}, \forall B \subset \Omega \text{ Borel}.$$

Dada $\mu \in \mathcal{M}_0^p(\Omega)$ y $T > 0$, se define la medida $\hat{\mu}$ en Q_T por $\hat{\mu} = \mu \otimes dt$.

T_k, $k > 0$: Función de truncamiento definida por

$$T_k(s) = \begin{cases} k & \text{si } s \geq k \\ s & \text{si } -k \leq s \leq k \\ -k & \text{si } s \leq -k. \end{cases}$$

Para $s = (s_1, \ldots, s_M) \in \mathbb{R}^M$, usaremos la notación $T_k(s)$ para referirnos a

$$T_k(s) = (T_k(s_1), T_k(s_2), \ldots, T_k(s_M)).$$

$S_k(s)$:, $k > 0$, función definida por

$$S_k(s) = \int_0^s T_k(r)dr = \begin{cases} \frac{s^2}{2} & \text{si } |s| \leq k \\ k(|s| - \frac{k}{2}) & \text{si } |s| \geq k. \end{cases} \tag{1}$$

Introducción

El objetivo de la presente memoria es el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones de problemas de ecuaciones en derivadas parciales, de tipo elíptico y parabólico, con condiciones de contorno de Dirichlet, en los cuales tanto los coeficientes como los abiertos en los que éstos se plantean varían de forma arbitraria. Los resultados se aplican al estudio de problemas de control en diseño óptimo, en los que las variables de control son los coeficientes de la ecuación (que pueden representar el material que se quiere usar) y los abiertos (problema de optimización de formas). Obsérvese que al tratar de aplicar el método directo del cálculo de variaciones, nos encontramos con problemas del tipo comentado anteriormente.

Los problemas que tratamos en este trabajo han sido ampliamente estudiados, pero ususalmente considerando o bien que el abierto está fijo y son los coeficietes los que varían, o bien a la inversa. En el caso en que varían ambos simultáneamente, conocemos muy pocos trabajos (véanse [44] y [34]).

El caso en que varían los coeficientes y los dominios permanecen fijos, especialmente en el caso periódico, es probablemente el problema más clásico en homogeneización. En el caso no periódico, destacamos un conocido trabajo de S. Spagnolo ([61]), donde usando técnicas de Γ-convergencia (ver p.e. [25]), se prueba que dado un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y una sucesión de funciones medibles A_n de Ω en el espacio de matrices simétricas, tales que existen α, $\gamma > 0$ verificando

$$A_n(x)\xi\xi \geq \alpha|\xi|^2, \quad |A_n(x)\xi| \leq \gamma|\xi|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ e.c.t. } x \in \Omega, \tag{1}$$

existen una función matricial A en las mismas condiciones que A_n y una subsucesión que seguimos denotando por n, tales que para toda $f \in H^{-1}(\Omega)$, las soluciones u_n de

$$\begin{cases} -div\, A_n \nabla u_n = f \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u_n \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{2}$$

convergen débilmente en $H_0^1(\Omega)$ hacia la única solución u de

$$\begin{cases} -div\, A \nabla u = f \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3}$$

Este resultado fue más tarde generalizado por F. Murat y L. Tartar al caso en que las matrices A_n no son necesariamente simétricas. El método usado en la demostración es lo que se conoce como el método de la energía de Tartar, el cual guarda una estrecha relación con el que que vamos a usar a lo largo de la presente memoria y consiste en usar funciones test adecuadas, de forma que se puede pasar al límite con cierta facilidad en las expresiones que resultan. Comentar que además de proporcionarnos el problema límite de (2), también se tiene un resultado de corrector, es decir, una aproximación fuerte de ∇u_n en $L^2(\Omega)^N$. Concretamente, para el problema (2), se prueba que existen $P_n : \Omega \to \mathcal{M}_{N\times N}$, tales que (si u es suficientemente regular), entonces

$$\nabla u_n - P_n \nabla u \to 0 \quad \text{ en } L^2(\Omega)^N.$$

A fin de que la matriz A que aparece en (3) se encuentre en el mismo conjunto que las matrices A_n, es conveniente en lugar de (1), escribir las condiciones sobre A_n en la forma

$$A_n(x)\xi\xi \geq \alpha|\xi|^2, \quad A_n(x)^{-1}\xi\xi \geq \gamma^{-1}|\xi|^2, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ e.c.t. } x \in \Omega,$$

o lo que es lo mismo

$$A_n(x)\xi\xi \geq \max\{\alpha|\xi|^2, \gamma^{-1}|A_n(x)\xi|^2\}, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ e.c.t. } x \in \Omega. \tag{4}$$

Estos resultados han sido también generalizados al caso de problemas monótonos y pseudomonótonos (ver p.e. [65] y [55]). En [55] aparecen escritas las hipótesis sobre los coeficientes de forma que generalizan (4) y que pasan bien al límite. Estas serán las que usaremos en la memoria (véase la definición 2.0.7). Los resultados se extienden además a problemas parabólicos del tipo

$$\begin{cases} \partial_t u_n - div\, a_n(x,t,u_n,\nabla u_n) = f \ \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega\times(0,T)) \\ u_n \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ u_n(x,0)=u_0(x) \ \text{ e.c.t. } \Omega. \end{cases}$$

Como aplicación principal de estos trabajos, mencionar el estudio de problemas de control en los coeficientes, problemas que aparecen principalmente en la obtención de materiales óptimos y en la resolución de problemas inversos (ver p.e. [52], [47], [53], [19], [50], [1], [16]), si bien una de las principales dificultades que aparecen es la obtención de expresiones explícitas para el operador límite, lo cual sólo ha sido llevado a cabo en algunos casos, principalmente bajo condiciones de periodicidad (ver p.e. [2], [67]) donde aún así la expresión no es completamente explícita, ya que conlleva la resolución de ciertos problemas de E.D.P.

Respecto a la homogeneización de problemas de E.D.P. de tipo elíptico o parabólico con condiciones de Dirichlet en los cuales los coeficientes permanecen fijos y son los abiertos los que varían, recordamos entre los primeros trabajos los resultados de F. Murat y D. Cioranescu que aparecen en [20] (resultados previos pueden encontrarse por ejemplo en [43]). Aquí se estudia el problema de homogeneización

$$\begin{cases} \Delta u_n = f \ \text{en } \mathcal{D}'(\Omega_n) \\ u_n \in H_0^1(\Omega_n), \end{cases} \tag{5}$$

donde Ω_n es una sucesión de abiertos arbitrarios contenidos en un abierto y acotado $\Omega\subset \mathbb{R}^N$ fijo, que satisface las siguientes propiedades:

Existe una sucesión de funciones w_n y una distribución μ tales que

(H1) $w_n \in H^1(\Omega)$,

(H2) $w_n = 0$ en $\Omega\backslash\Omega_n$,

(H3) $w_n \rightharpoonup 1$ en $H^1(\Omega)$, (H4) $\mu \in W^{-1,\infty}(\Omega)$,

(H5) para toda sucesión v_n y toda v tales que v_n converge débil a v en $H^1(\Omega)$, $v_n = 0$ en $\Omega \backslash \Omega_n$, se tiene

$$\int_\Omega \nabla w_n \nabla(\varphi v_n) \rightarrow \langle \mu, \varphi v \rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

La condición (H5) implica que μ es el límite débil-$*$ en el sentido de las medidas de Radon de $|\nabla w_n|^2$ y por tanto una medida no negativa. Bajo estas condiciones, se prueba que para toda $f \in H^{-1}(\Omega)$, las soluciones u_n de (5) (que se suponen prolongadas por cero fuera de Ω_n) convergen en $H_0^1(\Omega)$ hacia la única solución u del problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = f & \text{en } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u_n \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{6}$$

Vemos por tanto en este caso cómo el problema límite de (5) cambia de estructura, ya que aparece un nuevo término μu que recuerda de alguna forma el hecho de que u_n se anulaba en $\Omega \backslash \Omega_n$. El método empleado en la demostración de este resultado vuelve a ser el método de la energía de Tartar y consiste en tomar como funciones test $w_n \varphi$, con $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

La primera pregunta que nos podemos hacer es si existe una sucesión Ω_n en las condiciones anteriores. Esta preguna es respodida de forma afirmativa en [20], donde se exponen ejemplos periódicos de conjuntos Ω_n para los que se calculan explicitamente w_n y μ. En [12] se prueba que de hecho, suponiendo tan sólo la existencia de una sucesión $z_n \in H^1(\Omega)$, que se anula en $\Omega \backslash \Omega_n$, y que converge débil a 1 en $H^1(\Omega)$ (i.e. hipótesis (H1), (H2), (H3), anteriores), entones al menos para una subsucesión, existen w_n y μ en las condiciones anteriores, si bien μ es menos regular, pues en general se trata tan sólo de una medida de Borel acotada que se anula en conjuntos de C_2-capacidad nula (ya en [42] se había observado que μ se podía tomar en $H^{-1}(\Omega)$ en lugar de $W^{-1,\infty}(\Omega)$). Recordar en este sentido, que las funciones de $H^1(\Omega)$ admiten un representante que está definido salvo en un conjunto de C_2-capacidad nula, y que por tanto están bien definidas para este tipo de medidas.

Vemos pues cómo los resultados de D. Cioranescu y F. Murat son bastante generales y esencialmente lo único que piden es que $\Omega \backslash \Omega_n$ sea muy pequeño, obsérvese que $z_n = 0$ en $\Omega \backslash \Omega_n$ pero su límite es 1. Ninguna condición sobre la forma o regularidad de Ω_n es necesaria.

El trabajo de D. Cioranescu y F. Murat proporciona además un corrector para la solución u_n de (5) que establece que si $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ es suficientemente regular (ver [20], [12]), entonces

$$u_n - w_n u \to 0 \quad \text{en } H_0^1(\Omega).$$

Si bien, en [12] se prueba que los resultados que aparecen en [20] son bastante generales, ya anteriormente a este trabajo, G. Dal Maso y U. Mosco (ver [29], [30]) obtuvieron el problema límite de (5) para una sucesión Ω_n completamente arbitraria, la cual sólo verifica que está contenida en un abierto fijo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. En este caso prueban la existencia de una subsucesión, tal que para toda $f \in H^{-1}(\Omega)$, el problema límite de (5) sigue siendo (6), si bien, μ lo único que verifica es que es un elemento del conjunto $\mathcal{M}_0^2(\Omega)$ formado por las medidas no negativas de Borel (no necesariamente Radon), que se anulan en conjuntos de C_2-capacidad nula. Al no tratarse de medidas de Radon, las funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$ no se pueden tomar como funciones test en [6] y de ahí que la ecuación no se satisfaga en el sentido de las distribuciones y por tanto que sea preferible escribirla en la forma variacional

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega) \cap L^2_\mu(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega uv d\mu = \langle f, v\rangle \\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap L^2_\mu(\Omega). \end{array}\right. \tag{7}$$

Los resultados que aparecen en [29] y [30] son de hecho aún más generales que los comentados, ya que lo que en realidad se prueba es que si μ_n es una sucesión arbitraria de elementos de $\mathcal{M}_0^2(\Omega)$, entonces existe una subsucesión, que seguimos denotando por n, tal que para toda $f \in H^{-1}(\Omega)$, las soluciones u_n de

$$\left\{\begin{array}{l} u_n \in H_0^1(\Omega) \cap L^2_{\mu_n}(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u_n \nabla v dx + \int_\Omega u_n v d\mu_n = \langle f, v\rangle \\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap L^2_{\mu_n}(\Omega), \end{array}\right. \tag{8}$$

convergen débilmente en $H_0^1(\Omega)$ hacia la única solución u de (7). La aplicación de estos resultados a la homogeneización de (5) se sigue del hecho de que dado $\Omega_n \subset \Omega$ abierto y definiendo $\mu_n \in \mathcal{M}_0^2(\Omega)$ por

$$\mu_n(B) = \begin{cases} 0 & \text{si } C_2(B \cap \Omega_n^c) = 0 \\ +\infty & \text{si } C_2(B \cap \Omega_n^c) = +\infty \end{cases} \qquad \forall B \subset \Omega \text{ Borel}, \tag{9}$$

entonces el problema (5) coincide con (8). Escribiendo (5) como (8), vemos cómo ahora la estructura del problema límite no cambia y que por tanto es una forma mucho más conveniente de plantear el problema. Los resultados se pueden aplicar a la resolución de problemas de control en los cuales la variable de control es el abierto en que están planteados. Para ello, se estudia en realidad una relajación del problema que consiste en sustituir el problema de encontrar un abierto, por el de encontrar una medida en $\mathcal{M}_0^2(\Omega)$. El resultado de G. Dal Maso y U. Mosco, permite aplicar el método directo de cálculo de variaciones para probar la existencia de solución (en el caso de funciones que satisfagan buenas condiciones de semicontinuidad). Remitimos a [5] y [4] para el estudio de este tipo de problemas.

Aunque para simplificar nos hemos limitado al laplaciano, los resultados que aparecen en [20], [29] y [30] se aplican a operadores del tipo $-div\, A\nabla u$, donde A es una función matricial que satisface las condiciones usuales de acotación y monotonía. Sin embargo en [29] y [30], A debe ser simétrica, ya que el método usado para estudiar el correspondiente problema de homogeneización es la Γ-convergencia (ver [25]), con lo cual los problemas en E.D.P. deben ser escritos como problemas de minimización. Además, no hay resultado de corrector en estos trabajos. El trabajo más general correspondiente a la homogeneización de problemas de Dirichlet lineales elípticos para un operador fijo y abiertos variables, se encuentra en nuestro conocimiento en [26], donde los operadores ya no tienen por que ser simétricos y sí aparece resultado de corrector. El método empleado está algo más cercano al usado en [20] y se sirve de unas funciones especiales que ayudan a pasar al límite. Esencialmente las funciones w_n definidas por (1.2.2) (con $p = 2$), que usaremos también usualmente a lo largo de la presente memoria. Los resultados fueron generalizados al caso de operadores monótonos en [31] (ver también [24], [32]), concretamente para los problemas

$$\begin{cases} u_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^p_{\mu_n}(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega a(x, \nabla u_n)\nabla v dx + \int_\Omega |u_n|^{p-2} u_n v d\mu_n = \langle f, v\rangle \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^p_{\mu_n}(\Omega), \end{cases} \tag{10}$$

donde μ_n es una sucesión arbitraria en $\mathcal{M}_0^p(\Omega)$ (medidas de Borel no negativas que se anulan en conjuntos de C_p-capacidad nula) y a una función que satisface las hipótesis de monotonía y acotación usuales, de forma que el operador $u \to -div\, a(x, \nabla u)$ es monótono en $W_0^{1,p}(\Omega)$. El caso de conjuntos arbitrarios es un caso particular de (10). Escrito de esta forma, el problema es estable por homogeneización. En este trabajo se usa una hipótesis de homogeneidad del tipo

$$a(x, s\xi) = |s|^{p-2} s a(x, \xi), \quad \forall s \in \mathrm{I\!R}, \quad \xi \in \mathrm{I\!R}^N, \quad \text{e.c.t. } x \in \Omega, \tag{11}$$

la cual la verifica por ejemplo el p-laplaciano. También aparece un resultado de corrector.

La eliminación de la hipótesis (11) fue llevada a cabo en [14] admitiendo hipótesis sobre Ω_n similares a las que aparecen en [12] (relacionadas con las presentadas en [20]). El término extraño que aparece es ahora de la forma $F(x, u)\mu$, donde μ se puede tomar como la misma medida que aparece en el problema correspondiente al p-laplaciano y $F(x, s)$ verifica hipótesis de monotonía y crecimiento en s, pero no es necesariamente de la forma $|s|^{p-2}s$. La extensión de estos resultados a coeficientes cualesquiera y al caso de sistemas fue llevada a cabo en [18], donde el problema se estudia en la siguiente "forma relajada"

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M \\ \displaystyle\int_\Omega a(x, \nabla u_n) \nabla v dx + \int_\Omega F_n(x, u_n) v d\mu_n = \langle f, v \rangle \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M. \end{array} \right. \tag{12}$$

El problema límite se prueba que tiene una forma similar, pero la función F que aparece en él en lugar de F_n, no satisface exactamente las mismas hipótesis que las que verifican F_n. El método usado en estos trabajos fue en realidad introducido en [13] para el problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_n + H(x, u_n, \nabla u_n) = f & \text{en } \mathcal{D}'(\Omega_n) \\ u_n \in H_0^1(\Omega_n), & \end{array} \right. \tag{13}$$

donde $H(x, s, \xi)$ tiene un crecimiento a lo más cuadrático en ξ, con derivada respecto a s estrictamente positiva y los abiertos Ω_n están en las condiciones que aparecen en [12]. La idea que se usa en [13], [14] y [18] y más tarde extendida en [15] al caso de operadores pseudomonótonos, consiste en comparar las soluciones del problema de homogeneización correspodiente ((12) ó (13) por ejemplo), con los correctores que se tienen para problemas ya estudiados por otros métodos, así por ejemplo en [7] se estudia esencialmente la diferencia entre u_n y otra sucesión que tiene el mismo límite débil y que es solución de un problema análogo, pero referido al p-laplaciano (en el caso de (13) se usa el laplaciano). Del hecho de que el comportamiento de esta última solución es conocido, se obtienen estimaciones para u_n que nos proporcionan el problema límite.

Decir, que los dos problemas de homogeneización de los que hemos hablado, es decir, aquellos en los que varían los coeficientes y el abierto está fijo, y aquellos en los que varían los abiertos pero los coeficientes son fijos, son en principio bastante distintos. En ambos casos, las soluciones de los problemas correspondientes convergen sólamente en topologías débiles, sin embargo, en el primer caso hay equintegrabilidad de los gradientes, que significa que el problema de por qué la convergencia es débil y no fuerte, es debido a que los gradientes son altamente oscilantes, aunque no existen zonas en las cuales se acumulan. Para el problema con abiertos variables, los gradientes convergen puntualmente y por tanto no hay oscilaciones. En este caso, la convergencia débil es fruto de un problema de concentración, debido a que aparecen gradientes muy grandes en zonas muy pequeñas, con lo que en particular no se tiene la equintegrabilidad que aparecía anteriormente. Cuando varían los coeficientes y los dominios, caso que nos interesa en esta memoria, tendremos por tanto las dos dificulatades, consistentes en oscilación y concentración de los gradientes. Decir que en este caso, tan sólo conocemos un par de referencias. En [34] se analiza el caso de problemas lineales en la forma relajada

$$\left\{\begin{array}{l} u_n \in H_0^1(\Omega)\cap L^2_{\mu_n}(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega A_n\nabla u_n\nabla v dx + \int_\Omega u_n v d\mu_n = \langle f, v\rangle \\ \forall v\in H_0^1(\Omega)\cap L^2_{\mu_n}(\Omega), \end{array}\right. \tag{14}$$

donde A_n satisfacen las hipótesis usuales de monotonía y acotación uniforme en n y μ_n se toma como una sucesión arbitraria en $\mathcal{M}_0^2(\Omega)$. Se prueba la existencia de un problema límite que tiene la misma estructura, en el cual la matriz A que aparece en lugar de A_n, no es otra que la H-límite de A_n (ver [54]) y no depende por tanto de μ_n. Además se tiene un resultado de corrector.

En [44] se estudian problemas del tipo

$$\begin{cases} -div\, a_n(x, \nabla u_n) = f & \text{en } \mathcal{D}'(\Omega_n) \\ u_n \in W_0^{1,p}(\Omega_n), \end{cases}$$

si bien los abiertos Ω_n no son completamente arbitrarios.

Pasemos ahora a discutir brevemente los contenidos de la presente memoria.

En el **capítulo 1**, presentamos a lo largo de tres secciones, resultados preliminares necesarios para el estudio de la homogeneización de los diferentes problemas que trataremos en capítulos posteriores. Mientras que algunos de ellos son conocidos, para otros sin embargo, será necesaria su demostración.

Así, comenzamos recordando el concepto de capacidad, sus propiedades y su relación con las medidas de Haussdorff, que nos va a permitir hablar con precisión de los valores puntuales de una función débilmente derivable, la cual en principio sólo está definida en casi todo (véanse por ejemplo [66], [39], [38]).

Utilizando el concepto de C_p-capacidad y siguiendo a G. Dal Maso y a U. Mosco, denotaremos por $\mathcal{M}_0^p(\Omega)$ el conjunto de las medidas no negativas de Borel, que se anulan conjuntos de C_p-capacidad nula y que satisfacen

$$\mu(B) = inf\{\mu(A) :\ A\ \ C_p\text{-quasi abierto},\ B \subseteq A \subseteq \Omega\}, \forall B \subset \Omega \text{ Borel}.$$

Estas medidas aparecen de modo natural en la homogeneización de problemas con dominios perforados.

Se recuerdan algunos resultados relativos a la homogeneización del problema de Dirichlet para el p-Laplaciano que aparecen en [26], [34], así como algunas propiedades de las funciones w_n, soluciones de (1.2.2), que serán de gran utilidad lo largo de toda la memoria.

Por último, se recuerdan algunos resultados relativos a la homogeneización de problemas monótonos en un dominio fijo con coeficientes variables. Al menos en el caso lineal, es conocido que el cuadrado de los gradientes de las soluciones es equintegrable. En el caso elíptico no lineal, no sabemos si el resultado correspondiente es o no conocido, nosotros lo deducimos en este capítulo a partir de un teorema de R. Coiffman, P. L. Lions, Y. Meyer y S. Semmes ([21]). Sin embargo, hacemos notar que para el problema parabólico no sabemos si el resultado análogo es cierto, sí lo es en el caso lineal.

En el **capítulo 2**, dada una sucesión f_n que converge fuertemente en $W^{-1,p'}(\Omega)^M$ a una distribución $f \in W^{-1,p'}(\Omega)^M$, estudiamos el comportamiento asintótico de las soluciones de

$$\begin{cases} -div\, a_n(x, Du_n) = f_n \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega_n)^M \\ u_n \in W_0^{1,p}(\Omega_n)^M, \end{cases} \tag{15}$$

donde Ω_n es una sucesión de abiertos contenida en un abierto acotado fijo $\Omega \subset \mathrm{I\!R}^N$ a la que no se le impone ninguna otra hipótesis y $a_n : \Omega \times \mathcal{M}_{M\times N} \to \mathcal{M}_{M\times N}$ es una sucesión de funciones de Carathéodory que definen operadores monótonos en $W_0^{1,p}(\Omega)^M$.

En el caso en que la sucesión a_n permanece fija, como hemos comentado anteriormente (véanse [20], [24], [26], [58], [59], [30], [14], [13], [31], [18], [15]) el problema no es estable por homogeneización. De este modo, siguiendo a G. Dal Maso y U. Mosco (véase [30]), introducimos una versión relajada de (15), consistente en tomar una sucesión de medidas $\mu_n \in \mathcal{M}_0^p(\Omega)$ y plantearse el comportamiento asintótico de las soluciones de

$$\begin{cases} u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M \\ \displaystyle\int_\Omega a_n(x, Du_n) : Dv dx + \int_\Omega F_n(x, u_n) v d\mu_n = \langle f_n, v\rangle \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M, \end{cases} \tag{16}$$

para F_n adecuada. Escribiendo (15) de esta forma, tendremos que el problema límite no cambia de estructura.

Los resultados que obtenemos para este problema se encuentran publicados en [7]. La idea es adaptar el método introducido en [13] para estudiar el problema (13) (ver también [14], [18] y [15] donde se aplica a problemas monótonos y pseudomonótonos) y consiste en estimar la diferencia entre las soluciones de (16) y el corrector correspondiente a problemas cuya homogeneización ya es conocida. En el presente problema la situación es relativamente compleja, ya que tenemos de una parte el corrector correspondiente al problema con coeficientes variables y dominios fijos, y el del problema con dominios variables (en su forma relajada) correspondiente al p-laplaciano. A partir de ambos correctores, contruimos otra sucesión de funciones, que nos permite probar esencialmente que la diferencia en $W_0^{1,p}(\Omega)^M$ entre la sucesión de soluciones u_n de (16) y el corrector $\bar{u}_n$ correspondiente al problema con coeficientes variables y dominios fijos, se puede estimar a partir del valor de $\int_\Omega |u|^p d\mu$, siendo μ la medida que aparece en la homogeneización de (16) cuando $a(x,\xi) = |\xi|^{p-2}\xi$, $|F_n(x,s)| = |s|^{p-2}s$ (p-laplaciano) y μ la misma sucesión de medidas que aparece en el problema límite del p-laplaciano. De hecho probamos

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |D(u_n-\bar{u}_n)|^p\varphi dx + \int_\Omega |u_n|^p\,\varphi d\mu_n\right) \leq C\int_\Omega |u|^p\varphi d\mu, \tag{17}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. Se prueba además que la diferencia entre u_n y $\bar{u}_n$ converge fuertemente a cero en $W^{1,q}(\Omega)^M$, $q < p$. Nótese que ésto simplifica la dificultad que habíamos comentado, referente a que ∇u_n no converge puntualmente y su potencia p no es equintegrable. A partir de estos resultados se prueba la existencia de una función $H \in L^\infty_\mu(\Omega)^M$, tal que u es solución de

$$\begin{cases} u \in W^{1,p}_0(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M \\ \displaystyle\int_\Omega a(Du) : Dzdx + \int_\Omega Hzd\mu = \langle f, z\rangle \\ \forall z \in W^{1,p}_0(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M, \end{cases}$$

siendo a la H-límite de a_n (ver [61], [54], [65], [55]). Un estudio más detenido sobre la dependencia de H con respecto a u_n y u, prueba la existencia de una medida μ y de una función F, μ-Carathéodory, tal que los pares (F,μ) está en la misma familia que el par (F_n,μ_n) (obsérvese que en realidad por (16), sólo el producto $F\mu$ está unívocamente definido) y tal que $H(x) = F(x,u(x))$. Esto prueba que el problema límite de (16) sigue siendo del mismo tipo, donde a y (F,μ) verifican exactamente las mismas hipótesis que a_n y (F_n,μ_n). En particular, se mejoran los resultados que aparecen en [18] al haber escrito las hipótesis sobre a_n y (F_n,μ_n) de forma que se conservan en el límite.

Se obtiene además un resultado de corrector que establece esencialmente la existencia de funciones R_n, tales que

$$\nabla u_n - \nabla\bar{u}_n - R_n(x,u) \to 0 \quad \text{ en } L^p(\Omega)^M.$$

El resultado en realidad es más complejo técnicamente ya que R_n no es de Carathéodory. Además hace falta una doble aproximación, es decir se considera en vez de una sucesión simple R_n, una sucesión doble R_n^m (ver teorema 2.2.8).

En la última sección de este capítulo se prueba cómo los resultados de homogeneización obtenidos, se aplican al estudio de la existencia de solución de problemas de diseño óptimo, donde las variables son tanto los coeficientes como el dominio donde están planteados. Estos resultados se encuentran aceptados para publicación en [8].

En el **capítulo 3** estudiamos el problema parabólico correspondiente a operadores que satisfacen las mismas propiedades que las que hemos considerado en el caso elíptico (en particular, no dependen de la variable temporal t). Los resultados aparecerán publicados en [9]. Por simplicidad consideramos también condiciones iniciales homogéneas. Probamos entonces que dados a_n y (F_n, μ_n) en las mismas condiciones del capítulo anterior y considerando la subsucesión y las funciones a y (F, μ) que aparecen en ese capítulo, entonces para toda sucesión $f_n \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)^M)$ que converge fuertemente a una distribución $f \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)^M)$, las soluciones u_n de

$$\begin{cases} u_n \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M),\ u_n(x,0) = 0 \ \text{ e.c.t. } \Omega, \\ \langle \partial_t u_n, v\rangle + \displaystyle\int_\Omega a_n(x,Du_n) : Dv\,dx + \int_\Omega F_n(x,u_n)v\,d\mu_n = \langle f_n, v\rangle \ \text{ en } \mathcal{D}'(0,T) \\ \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M, \end{cases} \tag{18}$$

convergen débilmente en $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)^M)$ hacia la única solución u de

$$\begin{cases} u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu}(\Omega)^M),\ u(x,0) = 0 \ \text{ e.c.t. } \Omega, \\ \langle \partial_t u, v\rangle + \displaystyle\int_\Omega a(x,Du) : Dv\,dx + \int_\Omega F(x,u)v\,d\mu = \langle f, v\rangle \ \text{ en } \mathcal{D}'(0,T) \\ \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu}(\Omega)^M. \end{cases}$$

La idea de la demostración consiste esencialmente en probar que el resultado de corrector del caso elíptico sigue siéndolo del parabólico. Además se mejora el resultado de convergencia de u_n, probando que para todo $t \in [0,T]$, $u_n(\cdot,t)$ converge a $u(\cdot,t)$ en $L^2(\Omega)^M$. Como en el capítulo anterior, los resultados se aplican al estudio de problemas de control en los coeficientes y los dominios. Estos resultados aparecerán publicados en [10].

En el **capítulo 4** de la memoria, consideramos el caso de problemas parabólicos en los cuales los operadores también dependen del tiempo. Sin embargo, nos limitaremos al caso de ecuaciones (y no de sistemas) lineales. La principal dificultad que encontramos para una posible generalización al caso no lineal, es saber si las soluciones correspondientes al problema con dominio fijo y coeficientes variables son equintegrables como ocurría en el caso elíptico. Para problemas lineales esto es cierto gracias al teorema de regularidad de Meyer en su versión parabólica (ver [21], [2]). El método que usamos para estudiar el problema está relacionado con el empleado para el caso elíptico, y pasa por estudiar la diferencia entre las soluciones u_n del problema y los correctores $\bar{u}_n$ del caso en que los dominios no varían. Así, análogamente al caso elíptico se prueba que $\nabla(u_n - \bar{u}_n)$ converge fuertemente a cero en $L^q(\Omega \times (0,T))$, para $1 \leq q < 2$, y un resultado análogo a (17), ver el lema 4.1.12. Obsérvese también que puesto que las funciones u_n se encuentran en espacios que varían con n, no se puede aplicar el conocido resultado de J. L. Lions (ver [46]) para probar la convergencia fuerte de u_n en $L^2(\Omega \times (0,T))$. Estudiando las diferencias del tipo $u_n(x,t+h) - u_n(x,t)$, conseguimos sin embargo probar que esta convergencia fuerte sigue siendo cierta. El teorema principal que se obtiene es el siguiente: Sean $A_n \in L^\infty(\Omega \times (0,T), \mathcal{M}_{M\times N})$, tales que

$$A(x,t)\xi\xi \geq \alpha|\xi|^2, \quad A^{-1}(x,t)\xi\xi \geq \gamma^{-1}|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ e.c.t. } (x,t) \in \Omega \times (0,T),$$

μ_n una sucesión arbitraria de medidas en $\mathcal{M}_0^2(\Omega)$ y $F_n \in L^\infty_{\mu_n\otimes dt}(\Omega \times (0,T))$, tales que

$$\gamma \geq F_n(x,t) \geq \alpha, \ \ \hat{\mu}\text{-e.c.t. en } \Omega \times (0,T).$$

Entonces existe una subsucesión que denotamos por n, y existen A y (F,μ) en las mismas condiciones que A_n y (F_n,μ_n), tales que para toda sucesión $f_n \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ que converge fuerte a una distribución f y para toda sucesión $u_n^0 \in L^2(\Omega)$ tal que $u_n^0 = 0$ e.c.t. $\{w_n = 0\}$ (ver en (1.2.2) y (1.2.3) las definiciones de w_n y w) y tal que u_n^0 converge débilmente a una función $u^0 \in L^2(\Omega)$, se tiene que las soluciones u_n de

$$\begin{cases} u_n \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \cap L^2_{\mu_n}(\Omega)), \ u_n(x,0) = u_n^0, \quad \text{e.c.t. } \Omega \\ \langle \partial_t u_n, v\rangle + \displaystyle\int_\Omega A_n(x,t)\nabla u_n \nabla v dx + \int_\Omega F_n(x,t) u_n v\, d\mu_n = \langle f_n, v\rangle \ \text{ en } \mathcal{D}'(0,T) \\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \cap L^2_{\mu_n}(\Omega), \end{cases}$$

convergen débilmente en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ y fuertemente en $L^2(\Omega\times(0,T))$, hacia la única solución u del problema

$$\begin{cases} u\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^2_\mu(\Omega)),\ u(x,0)=u^0\chi_{\{w=0\}}, \quad \text{e.c.t. } \Omega \\ \langle \partial_t u, v\rangle + \displaystyle\int_\Omega A(x,t)\nabla u\nabla v dx + \int_\Omega F(x,t)uv\, d\mu = \langle f,v\rangle \ \text{ en } \mathcal{D}'(0,T) \\ \forall\, v\in H_0^1(\Omega)\cap L^2_\mu(\Omega). \end{cases}$$

Obsérvese que en este caso si hemos incluído un resultado de convergencia bastante general para las condiciones iniciales. Como en el caso elíptico, la función A es la H-límite de A_n y μ es la misma medida que aparece para el laplaciano ($A_n=I$, para todo $n\in\mathbb{N}$). Se obtiene también un resultado de corrector, que esencialmente prueba (ver teorema 4.2.5), la existencia de unas funciones $R_n:\Omega\times(0,T)\to\mathbb{R}^N$, tales que

$$\nabla u_n - \nabla\bar{u}_n + R_n(x,t)u \to 0 \quad \text{ en } L^2(\Omega)^N,$$

o teniendo en cuenta los resultados de corrector para problemas parabólicos con coeficientes variables y dominios fijos

$$\nabla u_n - P_n(x,t)\nabla u + R_n(x,t)u \to 0 \quad \text{ en } L^2(\Omega)^N,$$

donde $P_n:\Omega\times(0,T)\to\mathcal{M}_{M\times N}$ son las matrices que aparecen en el resultado de corrector para la H-convergencia (ver [54], [55]).

Para terminar esta introducción, comentamos algunos problemas abiertos en los cuales esperamos trabajar próximamente.

- Estudio del problema parabólico no lineal con coeficientes dependientes del tiempo.

- Caso hiperbólico.

- Estudio de problemas con condiciones de periodicidad o semiperiodicidad, que permiten determinar de forma más precisa las funciones que aparecen en el problema límite.

- Mejorar los resultados obtenidos de existencia de solución para problemas de control en coeficientes y abiertos, es decir, estudiar si la formulación variacional es una relajación de la formulación inicial del problema.

Capítulo 1

Resultados preliminares

En este capítulo, presentamos algunos resultados que utilizaremos a lo largo de esta Memoria. De los que son conocidos, sólo damos su enunciado, mientras que trataremos más detalladamente otros nuevos que también nos harán falta en lo sucesivo.

Comenzamos recordando el concepto de capacidad y algunas de sus propiedades. Más tarde, damos algunos resultados referentes a la homogeneización del operador p-Laplaciano con condiciones de Dirichlet en abiertos variables y a la de operadores monótonos con coeficientes variables en los casos elíptico y parabólico.

Asimismo recordamos la homogeneización para el operador p-laplaciano así como para el caso elíptico.

1.1 El Concepto de Capacidad

El concepto de capacidad nos va a permitir hablar con precisión de los valores puntuales de una función débilmente derivable la cual en principio sólamente está definida en casi todo (veánse [38], [39], [66]).

1.1.1 Definición. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado. Para un conjunto cualquiera $A \subset \Omega$, se define su C_p-capacidad en Ω como*

$$C_p(A,\Omega) = \inf\{\int_A |\nabla\varphi|^p,\ \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \varphi \geq 1 \text{ } e.c.t. \text{ un entorno de } A\},\ 1 \leq p < +\infty.$$

Por simplicidad, se sobrentenderá Ω, y escribiremos $C_p(A)$.

1.1.2 Definición. *Diremos que una propiedad $\mathcal{P}(x)$ se tiene C_p-quasi todo (abreviadamente C_p-e.q.t.) en un conjunto $A \subset \Omega$, si existe $N \subset A$ con $C_p(N,\Omega) = 0$, tal que $\mathcal{P}(x)$ se tiene para todo $x \in A \backslash N$.*

1.1.3 Definición. *Diremos que un conjunto $A \subset \Omega$ es C_p-quasi abierto, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \subset \Omega$ con $C_p(N) < \varepsilon$, tal que $A \cup N$ es abierto.*

1.1.4 Definición. *Una función $u : \Omega \to \mathrm{I\!R}^M$ diremos que es C_p-quasi continua, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \subset \Omega$, con $C_p(N,\Omega) < \varepsilon$, tal que la restricción de u a $\Omega \backslash N$ es continua.*

El concepto de conjunto de C_p-capacidad nula es más fino que el conjunto de medida nula, de hecho es conocido que un conjunto de C_p-capacidad nula, $p \leq N$, tiene dimensión de Haussdorff $N - p$. Este concepto nos da con precisión, donde está definida una función de $W^{1,p}(\Omega)$.

Comenzamos recordando:

1.1.5 Definición. *Sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Un punto $x \in \Omega$ se dice que es un punto de Lebesgue, si existe $\lambda_x \in \mathrm{I\!R}$ tal que*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|B(x,\varepsilon)|} \int_{B(x,\varepsilon)} |f(y) - \lambda_x| dy = 0.$$

Claramente en este caso, λ_x es único y verifica

$$\lambda_x = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|B(x,\varepsilon)|} \int_{B(x,\varepsilon)} f(y) dy.$$

Es conocido que el conjunto de puntos de f que no son de Lebesgue, tiene medida nula y que el llamado representante de Lebesgue de f, definido por

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \text{ es de Lebesgue} \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

coincide con f e.c.t.

En el caso de funciones de $W^{1,p}(\Omega)$, se tiene (ver [39], [66], [38]).

1.1.6 Teorema. *El conjunto de puntos que no son de Lebesgue correspondiente a una función de $W^{1,p}(\Omega)$ tiene C_p-capacidad nula. Además el representante de Lebesgue de u (denotado aún por u), es C_p-quasi continuo.*

A lo largo de esta memoria identificaremos siempre u con su representante C_p-quasi continuo.

1.2 El problema de Dirichlet para el p-Laplaciano en abiertos variables

En esta sección recordaremos algunos resultados conocidos referentes a la homogeneización del siguiente problema (véase [26], [34])

$$\begin{cases} u_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^p_{\mu_n}(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v dx + \int_\Omega |u_n|^{p-2} u_n v d\mu_n = \langle f, v\rangle \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^p_{\mu_n}(\Omega), \end{cases} \tag{1.2.1}$$

donde f es una función dada de $W^{-1,p'}(\Omega)$ y μ_n una sucesión de medidas en $\mathcal{M}_0^p(\Omega)$.

1.2.1 Observación. *Como ya comentamos en la introducción, recordamos que dada una sucesión $\Omega_n \subset \Omega$ de abiertos variables, y definiendo la sucesión $\mu_n \in \mathcal{M}_0^p(\Omega)$ dada por (ver [30])*

$$\mu_n(B) = \begin{cases} 0 & si\ C_p(B \cap \Omega_n^c) = 0 \\ +\infty & si\ C_p(B \cap \Omega_n^c) = +\infty \end{cases} \qquad \forall B \subset \Omega \ Borel,$$

se tiene que el problema (1.2.1) es equivalente a

$$\begin{cases} -div\, |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n = f & en\ \mathcal{D}'(\Omega_n) \\ u_n \in W_0^{1,p}(\Omega_n), \end{cases}$$

problema que está en el origen de (1.2.1). Es preferible trabajar con (1.2.1), ya que veremos más adelante que esta formulación es estable por homogeneización.

1.2.2 Definición. *Para una sucesión μ_n en $\mathcal{M}_0^p(\Omega)$, se define w_n como la solución del siguiente problema*

$$\begin{cases} w_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^p_{\mu_n}(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla w_n|^{p-2}\nabla w_n \nabla v dx + \int_\Omega |w_n|^{p-2} w_n v d\mu_n = \int_\Omega v dx \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^p_\mu(\Omega). \end{cases} \tag{1.2.2}$$

La sucesión w_n ha sido introducida en [26] para $p = 2$ y en [31] para p arbitrario. Su comportamiento asintótico viene dado en la siguiente proposición.

1.2.3 Proposición. *La sucesión w_n es no negativa C_p-e.q.t. en Ω y su norma en $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)$ está acotada. De este modo, extrayendo si es necesario una subsucesión, existe una función no negativa $w \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, tal que w_n converge débilmente a w en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y débil-$*$ en $L^\infty(\Omega)$. La convergencia es también fuerte en $W_0^{1,q}(\Omega)$, $1 \le q < p$. Además, existe una medida $\mu \in \mathcal{M}_0^p(\Omega)$ tal que w verifica*

$$\begin{cases} w \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^p_{\mu}(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla w|^{p-2}\nabla w \nabla v dx + \int_\Omega |w|^{p-2} w v d\mu = \int_\Omega v dx \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^p_\mu(\Omega). \end{cases} \tag{1.2.3}$$

Usando la función w y la medida μ dadas por esta proposición, se tiene el siguiente teorema de homogeneización para el problema (1.2.1) (ver [26], [31]).

1.2.4 Teorema. *Supongamos que w_n converge débilmente en $W_0^{1,p}(\Omega)$ a una función w (esto siempre es cierto al menos para una subsucesión) y consideremos la medida μ que satisface (1.2.3). Entonces, para toda sucesión f_n que converge fuerte en $W^{-1,p'}(\Omega)$ a una distribución f, la solución u_n de* (1.2.1) *converge débilmente en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y fuerte en $W_0^{1,q}(\Omega)$, $1 \le q < p$, hacia la única solución u de*

$$\left\{\begin{array}{l} u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^p_\mu(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx + \int_\Omega |u|^{p-2}u\, v d\mu = \int_\Omega f v dx \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^p_\mu(\Omega). \end{array}\right.$$

Más aún, si f pertenece a $L^\infty(\Omega)$, tenemos el siguiente resultado corrector

$$\nabla u_n - \nabla(w_n u) \to 0 \ \textit{en} \ W_0^{1,p}(\Omega).$$

Para la demostración del teorema 1.2.4 se necesitan las siguientes propiedades de w_n, w y μ (ver [26], [31], [18]) que usaremos con frecuencia.

1.2.5 Proposición. *La sucesión w_n, la función w y la medida μ satisfacen las siguientes propiedades*

(a) Todo conjunto de Borel $B \subset \Omega$ tal que $C_p(B \cap \{w = 0\}) > 0$, verifica $\mu(B) = +\infty$.

(b) El conjunto $\{w\psi : \psi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$ es denso en $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^p_\mu(\Omega)$. El conjunto Λ de todas las funciones de la forma $w\sum_{i=1}^l a_i \chi_{K_i}$, donde $a_i \in \mathbb{R}$ y K_i son subconjuntos cerrados de Ω tales que $w = 0$ μ-e.c.t. en $K_i \cap K_j$, con $i \neq j$, es denso en $L^p_\mu(\Omega)$.

(c) Consideremos φ, $\psi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tales que $\varphi\psi$ pertenece a $W_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces, se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |\nabla(w_n\psi)|^p \varphi dx + \int_\Omega |w_n\psi|^p \varphi d\mu_n\right) = \int_\Omega |\nabla(w\psi)|^p\varphi dx + \int_\Omega |w\psi|^p \varphi d\mu. \quad (1.2.4)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |\nabla[(w_n - w)\psi]|^p \varphi dx + \int_\Omega |w_n\psi|^p\varphi d\mu_n\right) = \int_\Omega |w\psi|^p\varphi d\mu. \quad (1.2.5)$$

Para toda sucesión $v_n \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)$ tal que $\|v_n\|_{L^p_{\mu_n}(\Omega)}$ está acotada y converge débilmente a v en $W^{1,p}(\Omega)$, se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla(w_n\psi)|^{p-2}\nabla(w_n\psi)\nabla v_n\, \varphi dx + \int_\Omega |w_n\psi|^{p-2} w_n\psi v_n\, \varphi d\mu_n = \\ = \int_\Omega |\nabla(w\psi)|^{p-2}\nabla(w\psi)\nabla v\, \varphi dx + \int_\Omega |w\psi|^{p-2} w\psi v\, \varphi d\mu.\end{aligned} \quad (1.2.6)$$

(d) *Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^p_\mu(\Omega)$ y consideremos $\psi_m \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $w\psi_m$ converge fuertemente a u en $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^p_\mu(\Omega)$. Entonces se verifica*

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |\nabla(w_n\psi_m - u)|^p\varphi dx + \int_\Omega |w_n\psi_m|^p\varphi d\mu_n\right) = \\ = \int_\Omega |u|^p\varphi d\mu,\ \forall\varphi\in W^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega). \tag{1.2.7}$$

(e) *Sea $u_n \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)$ que converge débil en $W^{1,p}(\Omega)$ a una función u. Entonces*

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx + \int_\Omega |u_n|^p d\mu_n\right) \geq \int_\Omega |\nabla u|^p dx + \int_\Omega |u|^p d\mu, \tag{1.2.8}$$

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^p dx + \int_\Omega |u_n|^p d\mu_n\right) \geq \int_\Omega |u|^p d\mu. \tag{1.2.9}$$

En particular, si $\|u_n\|_{L^p_{\mu_n}(\Omega)}$ está acotada, u está en $L^p_\mu(\Omega)$.

Otra propiedad interesante de w_n viene dada por la siguiente proposición que probamos a continuación y que puede también encontrarse en [7].

1.2.6 Proposición. *Sea $\varphi_n \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ una sucesión que converge débilmente en $W^{1,p}(\Omega)$, y débil-$*$ en $L^\infty(\Omega)$ a una función $\varphi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Si la sucesión $|\nabla\varphi_n|^p$ es equintegrable, entonces se verifica*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^p\varphi_n dx + \int_\Omega w_n^p\varphi_n d\mu_n\right) = \int_\Omega w^p\varphi d\mu. \tag{1.2.10}$$

Demostración. Tomando $w_n(\varphi_n - \varphi)$ como función test en (1.2.2), se tiene

$$\int_\Omega |\nabla w_n|^p(\varphi_n - \varphi)dx + \int_\Omega |\nabla w_n|^{p-2}\nabla w_n\nabla(\varphi_n - \varphi)w_n dx + \\ + \int_\Omega w_n^p(\varphi_n - \varphi)d\mu_n = \int_\Omega w_n(\varphi_n - \varphi)dx = O_n. \tag{1.2.11}$$

Usando que $|\nabla w_n|^{p-2}\nabla w_n$ está acotada en $L^{p'}(\Omega)$ y converge en medida a $|\nabla w|^{p-2}\nabla w$, y que $\nabla(\varphi_n - \varphi)$ converge débilmente a cero en $L^p(\Omega)$ y su potencia p es equintegrable, una fácil aplicación del teorema de Egorov, prueba que el segundo término de (1.2.11) converge a cero. Por otro lado, se tiene la desigualdad

$$||\nabla w_n|^p - |\nabla(w_n - w)|^p| \leq C(|\nabla w_n|^{p-1} + |\nabla w|^{p-1})|\nabla w| \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde el segundo miembro es equintegrable y el primero converge en medida a $|\nabla w|^p$. De este modo, deducimos

$$|\nabla w_n|^p - |\nabla(w_n - w)|^p \to |\nabla w|^p \text{ en } L^1(\Omega). \tag{1.2.12}$$

Así, el primer término de (1.2.11) satisface

$$\int_\Omega |\nabla w_n|^p(\varphi_n - \varphi)dx = \int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^p(\varphi_n - \varphi)dx + O_n.$$

Usando estas estimaciones en (1.2.11) y teniendo en cuenta (1.2.5), concluimos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^p\varphi_n dx + \int_\Omega w_n^p\varphi_n d\mu_n\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^p\varphi dx + \int_\Omega w_n^p\varphi d\mu_n\right) = \int_\Omega w^p\varphi d\mu,$$

lo que prueba (1.2.10).

□

La versión del resultado anterior que usaremos en problemas parabólicos es la siguiente.

1.2.7 Proposición. *Sean w_n, w, μ_n y μ como en la proposición 1.2.3 y definimos $\hat{\mu}_n = \mu_n \otimes dt$, $\hat{\mu} = \mu \otimes dt$. Entonces, se tiene*

(a) Supongamos que la sucesión w_n definida por (1.2.2) converge débilmente a w y sea μ tal que se tiene (1.2.3). Entonces:

Para toda función $u \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^p_\mu(\Omega)) \cap L^2(0,T; L^2(\Omega))$, tal que $\partial_t u$ pertenece a $L^{p'}(0,T; (W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^p_\mu(\Omega))')$, existe $\psi_m \in C^\infty([0,T], \mathcal{D}(\Omega))$, tal que $w\psi_m$ y $w\partial_t\psi_m$ convergen respectivamente a u y $\partial_t u$ en $L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^p_\mu(\Omega)) \cap L^2(Q_T)$ y $L^{p'}(0,T;$ $(W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^p_\mu(\Omega))')$.

(b) *Para toda* φ, $\psi \in L^p([0,T];W^{1,p}(\Omega))\cap L^\infty(Q_T)$, *tales que* $\varphi\psi$ *pertenece a* $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, *se tiene*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{Q_T}|\nabla(w_n\psi)|^p\varphi dx+\int_{Q_T}|w_n\psi|^p\varphi d\mu_n\right)=\int_{Q_T}|\nabla(w\psi)|^p\varphi dx+\int_{Q_T}|w\psi|^p\varphi d\mu. \quad (1.2.13)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{Q_T}|\nabla(w_n-w)\psi)|^p\varphi dx+\int_{Q_T}|w_n\psi|^p\varphi d\mu_n\right)=\int_{Q_T}|w\psi|^p\varphi d\mu. \quad (1.2.14)$$

(c) *Sea* $\varphi_n \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))\cap L^\infty(Q_T)$ *una sucesión que converge débil en* $L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ *y* $*$*-débil en* $L^\infty(Q_T)$ *a una función* φ *y tal que* $|\nabla\varphi_n|^p$ *es equintegrable. Entonces, se verifica*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{Q_T}|\nabla w_n|^p\varphi_n dxdt+\int_{Q_T}w_n^p\varphi_n d\mu_n dt\right)=\int_{Q_T}|\nabla w|^p\varphi dxdt+\int_{Q_T}w^p\varphi d\mu dt. \quad (1.2.15)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{Q_T}|\nabla(w_n-w)|^p\varphi_n dxdt+\int_{Q_T}w_n^p\varphi_n d\mu_n dt\right)=\int_{Q_T}w^p\varphi d\mu dt. \quad (1.2.16)$$

(d) *Sea* $u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^p_\mu(\Omega))$ *y consideremos* $\psi_m\in C^\infty([0,T];\mathcal{D}(\Omega))$ *tales que* $w\psi_m$ *converge fuerte a* u *en* $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^p_\mu(\Omega))$. *Entonces*

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(\int_{Q_T}|\nabla(w_n\psi_m-u)|^p\varphi dx+\int_{Q_T}|w_n\psi_m|^p\varphi d\mu_n\right)=\int_{Q_T}|u|^p\varphi d\mu, \quad (1.2.17)$$

$\forall\varphi\in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))\cap L^\infty(Q_T)$.

(e) *Sea* $u_n \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^p_{\mu_n}(\Omega))$ *que converge débilmente en* $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ *a una función* u. *Entonces, se tiene*

$$\int_{Q_T}|\nabla u|^p dxdt+\int_{Q_T}|u|^p d\mu dt\le\liminf_{n\to\infty}\left(\int_{Q_T}|\nabla u_n|^p dxdt+\int_{Q_T}|u_n|^p d\mu_n dt\right). \quad (1.2.18)$$

En particular, si $\|u_n\|_{L^p_{\hat\mu_n}(Q_T)}$ *está acotada, se deduce que* u *pertenece a* $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^p_\mu(\Omega))$.

Demostración. Obsérvese que basta probar (a) con $\psi_m \in W^{1,\infty}((0,T),\mathcal{D}(\Omega))$. El resultado general se sigue, realizando una convolución en t.

Sea $\widetilde{p} = \max\{p,\, p'\}$, y supongamos primero que u pertenece a $L^{\widetilde{p}}(0,T;W_0^{1,\widetilde{p}}(\Omega)\cap L_\mu^{\widetilde{p}}(\Omega))$ y $\partial_t u$ pertenece a $L^{p'}(0,T;(W_0^{1,p}(\Omega)\cap L_\mu^p(\Omega))')$.

Para $m \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0,\, 1, \ldots, m-1\}$, denotamos

$$\bar{u}_{k,m}(x) = \frac{T}{m}\int_{\frac{kT}{m}}^{\frac{(k+1)T}{m}} u(s,x)ds, \qquad \text{e.q.t. } x \in \Omega.$$

Definimos entonces, $u_m \in W^{1,\infty}(0,T;W^{1,p}(\Omega)\cap L_\mu^p(\Omega)\cap L^2(\Omega))$, por

$$u_m(t,x) = \frac{m}{T}(t-\frac{k}{m}T)\bar{u}_{k+1,m}(x) + \frac{m}{T}(\frac{k+1}{m}T-t)\bar{u}_{k,m}(x),$$

si $\frac{k}{m}T \leq t \leq \frac{k+1}{m}T$, $k\in\{0,\ldots,m-2\}$, y

$$u_m(t,x) = \bar{u}_{m-1,m}(x), \text{ si } \frac{(m-1)}{m}T \leq t \leq T, \text{ e.q.t. } x\in\Omega.$$

Teniendo en cuenta

$$\partial_t u_m(t,x) = \frac{m}{T}(\bar{u}_{k+1,m}(x) - \bar{u}_{k,m}(x)) = \frac{m}{T}\int_{\frac{kT}{m}}^{\frac{(k+1)T}{m}}(u(s+\frac{T}{m},x)-u(s,x))ds =$$

$$= \frac{m}{T}\int_{\frac{kT}{m}}^{\frac{(k+1)T}{m}}\int_s^{s+\frac{T}{m}}\partial_t u(r,x)drds,$$

en $(W_0^{1,p}(\Omega)\cap L_\mu^p(\Omega))'$, p.c.t. $t\in(\frac{kT}{m},\frac{(k+1)T}{m})$, $k\in\{0,\ldots,m-2\}$, y que

$$\partial_t u_m = 0 \text{ en } (W_0^{1,p}(\Omega)\cap L_\mu^p(\Omega))', \text{ p.c.t. } t\in(\tfrac{(m-1)T}{m},\tfrac{mT}{m}),$$

es fácil ver que

$$u_m \to u \text{ en } L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\cap L_\mu^p(\Omega)\cap L^2(\Omega)),$$

$$\partial_t u_m \to \partial_t u \text{ en } L^{p'}(0,T;(W_0^{1,p}(\Omega)\cap L_\mu^p(\Omega))').$$

Dado $\varepsilon_m > 0$, y gracias al apartado (b) de la Proposición 1.2.5, existe ahora $\bar{\psi}_{k,m} \in \mathcal{D}(\Omega)$, tal que

$$\|w\bar{\psi}_{k,m} - \bar{u}_{k,m}\|_{W_0^{1,\widetilde{p}}(\Omega)\cap L_\mu^{\widetilde{p}}(\Omega)} \leq \varepsilon_m,$$

y definimos $\psi_m \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{D}(\Omega))$, por

$$\psi_m(t,x) = \frac{m}{T}(t - \frac{k}{m}T)\bar{\psi}_{k+1,m}(x) + \frac{m}{T}(\frac{(k+1)}{m}T - t)\bar{\psi}_{k,m}(x),$$

$$\text{p.c.t. } (t,x) \in (\tfrac{kT}{m}, \tfrac{(k+1)T}{m}) \times \Omega,\ k \in \{0,\ldots,m-2\},$$

$$\psi_m(t,x) = \bar{\psi}_{m-1,m}(x), \ \text{ p.c.t. } (t,x) \in (\tfrac{m-1}{m}T, T) \times \Omega.$$

Entonces, usando la desigualdad de Poincaré, tenemos para $k \in \{0,\ldots,m-2\}$ y $t \in (\frac{kT}{m}, \frac{(k+1)T}{m})$

$$\|\partial_t u_m - \partial_t(w\psi_m)\|_{(W_0^{1,p}(\Omega)\cap L_\mu^p(\Omega))'} =$$

$$= \sup_{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\leq 1} \frac{m}{T}\int_\Omega [(\bar{u}_{k+1,m} - w\bar{\psi}_{k+1,m}) - (\bar{u}_{k,m} - w\bar{\psi}_{k,m})]v dx \leq$$

$$\leq Cm\left[\|\bar{u}_{k+1,m} - w\bar{\psi}_{k+1,m}\|_{L^{\widetilde{p}}(\Omega)} + \|\bar{u}_{k,m} - w\bar{\psi}_{k,m}\|_{L^{\widetilde{p}}(\Omega)}\right] \leq Cm\varepsilon_m,$$

donde C no depende de m.

Teniendo en cuenta también

$$\|\partial_t u_m - \partial_t(w\psi_m)\|_{(W_0^{1,p}(\Omega)\cap L_\mu^p(\Omega))'} = 0,\ \forall t \in (\frac{m-1}{m}T, T),$$

se deduce entonces

$$\|\partial_t u_m - \partial_t(w\psi_m)\|_{(W_0^{1,p}(\Omega)\cap L_\mu^p(\Omega))'} \leq Cm^{\frac{p'+1}{p'}}\varepsilon_m.$$

Tomando entonces ε_m tal que

$$m^{\frac{p'+1}{p'}}\varepsilon_m \to 0,$$

se verifica fácilmente que $w\psi_m$ y $\partial_t(w\psi_m)$ convergen respectivamente a u y $\partial_t u$ en $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^p_\mu(\Omega)\cap L^2(\Omega))$ y $L^{p'}(0,T;(W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^p_\mu(\Omega))')$.

Si ahora u no pertenece a $L^{\widetilde{p}}(0,T;W_0^{1,\widetilde{p}}(\Omega)\cap L^{\widetilde{p}}_\mu(\Omega))$, basta tener en cuenta que si tomamos $\tau_k(t)\in C^\infty(\mathbb{R})$, verificando

$$\tau_k(t)=\begin{cases} t & \text{si } |t|<k\\ 2ksig(t) & \text{si } |t|>2k,\end{cases}$$

tal que

$$|\tau_k(t)|\leq 2k,\quad |\tau_k'(t)|\leq 2,\qquad \forall t\in\mathbb{R},$$

entonces $\tau_n(u)$ pertenece a $L^{\widetilde{p}}(0,T;W_0^{1,\widetilde{p}}(\Omega)\cap L^{\widetilde{p}}_\mu(\Omega))$, $\partial_t\tau_n(u)$ pertenece a $L^{p'}(0,T;(W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^p_\mu(\Omega))')$,

$$\tau_n(u)\to u \text{ en } L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^p_\mu(\Omega)\cap L^2(\Omega))\qquad \text{y}$$

$$\partial_t\tau_n(u)\to\partial_t u \text{ en } L^{p'}(0,T;(W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^p_\mu(\Omega))').$$

Aplicando entonces el resultado probado a $\tau_n(u)$, se obtiene fácilmente (a).

La demostración de (1.2.13) y (1.2.14) sigue fácilmente de (1.2.4), (1.2.5) y el teorema de la convergencia dominada.

La prueba de (1.2.15) es completamente análoga a la de (1.2.6). Para probar (1.2.16), basta usar (1.2.6) y (1.2.12).

Para probar (1.2.18), aplicamos (1.2.8) a la sucesión

$$\int_{\frac{(k-1)}{m}T}^{\frac{kT}{m}} u_n(x,t)dt,$$

con $m\in\mathbb{N}$ y $k\in\{1,\ldots,m\}$, lo que da

$$\int_\Omega\left|\int_{\frac{(k-1)}{m}T}^{\frac{kT}{m}}\nabla u(x,t)dt\right|^p dx+\int_\Omega\left|\int_{\frac{(k-1)}{m}T}^{\frac{k}{m}T}u(x,t)dt\right|^p d\mu\leq$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_\Omega \left| \int_{\frac{(k-1)}{m}T}^{\frac{k}{m}T} \nabla u_n(x,t)dt \right|^p dx + \int_\Omega \left| \int_{\frac{(k-1)}{m}T}^{\frac{k}{m}T} u_n(x,t)dt \right|^p \mu_n \right) \leq$$

$$\leq \frac{T^{p-1}}{m^{p-1}} \liminf_{n\to\infty} \left(\int_{\frac{(k-1)}{m}T}^{\frac{k}{m}T} \int_\Omega |\nabla u_n(x,t)|^p dxdt + \int_{\frac{(k-1)}{m}T}^{\frac{k}{m}T} \int_\Omega |u_n(x,t)|^p d\mu_n dt \right).$$

Sumando esta desigualdad en $k \in \{1, \ldots, m\}$, se tiene

$$\begin{aligned} &\frac{m^{p-1}}{T^{p-1}} \sum_{k=1}^{m} \left(\int_\Omega \left| \int_{\frac{(k-1)}{m}T}^{\frac{kT}{m}} \nabla u(x,t)dt \right|^p dx + \int_\Omega \left| \int_{\frac{(k-1)}{m}T}^{\frac{k}{m}T} u(x,t)dt \right|^p d\mu \right) \leq \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_{Q_T} |\nabla u_n(x,t)|^p dxdt + \int_{Q_T} |u_n(x,t)|^p d\mu_n dt \right). \end{aligned} \tag{1.2.19}$$

Denotemos por $z_m \in \mathrm{L}^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, la sucesión definida por $z_m(x,s) = \dfrac{m}{T} \displaystyle\int_{\frac{(k-1)}{m}T}^{\frac{k}{m}T} u(x,t)dt$, e.c.t. $(x,s) \in \Omega \times (\frac{(k-1)}{m}T, \frac{k}{m}T)$, para todo $k \in \{1, \ldots, N\}$. Se tiene que z_m converge a u en $\mathrm{L}^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^p_\mu(\Omega))$ y por tanto $\hat{\mu}$-e.c.t. en Q_T. De este modo, usando que (1.2.19) puede escribirse como

$$\int_{Q_T} |\nabla z_m(x,t)|^p dxdt + \int_{Q_T} |z_m(x,t)|^p d\mu dt \leq$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_{Q_T} |\nabla u_n(x,t)|^p dxdt + \int_{Q_T} |u_n(x,t)|^p d\mu_n dt \right),$$

podemos pasar al límite obteniendo (1.2.18).

□

1.3 Homogeneización de operadores monótonos elípticos y parabólicos en abiertos fijos

En la presente sección recordamos algunos resultados relacionados con la homogeneización de problemas no lineales de tipo elíptico y parabólico en los cuales varían los coeficientes de las ecuaciones, mientras que el abierto en que están planteadas permanece fijo.

Comenzamos con el problema siguiente

$$\begin{cases} -div\, a_n(x, Du_n) = f_n & \text{en } \mathcal{D}'(\Omega)^M \\ u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \end{cases} \tag{1.3.1}$$

donde f_n está en $W^{-1,p'}(\Omega)^M$, $a_n : \Omega \times \mathcal{M}_{M\times N} \to \mathcal{M}_{M\times N}$ es una sucesión de funciones de Carathéodory que definen operadores monótonos en $W_0^{1,p}(\Omega)^M$ y que satisfacen (2.0.2), (2.0.3) y (2.0.4) del siguiente capítulo.

El resultado principal que se tiene es el siguiente (ver [61], [54], [55]).

1.3.1 Teorema. *Existe una subsucesión de a_n, que seguiremos denotando por a_n, y una función de Carathéodory $a : \Omega \times \mathcal{M}_{M\times N} \to \mathcal{M}_{M\times N}$ tal que si f_n converge fuerte en $W^{-1,p'}(\Omega)^M$ a una distribución f, la sucesión u_n de soluciones de (1.3.1) converge débilmente en $W_0^{1,p}(\Omega)^M$ a la única solución u de*

$$\begin{cases} -div\, a(x, Du) = f & \text{en } \mathcal{D}'(\Omega)^M \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega)^M, \end{cases}$$

y $a_n(x, Du_n)$ converge débilmente en $L^{p'}(\Omega)^N$ a $a(x, Du)$.

Análogamente a a_n, la función a satisface (2.0.2), (2.0.3) y (2.0.4), para las mismas constantes α, γ, σ y la misma función r.

Además, se verifica que si $a_n(x,\cdot)$ es lineal p.c.t. $x \in \Omega$, entonces $a(x,\cdot)$ es lineal p.c.t. $x \in \Omega$, y si a_n verifica la hipótesis de homogeneidad

$$a_n(x, \lambda\xi) = |\lambda|^{p-2}\lambda a_n(x, \xi), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad p.c.t.\ x \in \Omega,$$

entonces a también la verifica.

Como hemos visto en la sección anterior, al estudiar la homogeneización del p-Laplaciano en abiertos variables, una propiedad que se presentaba era la convergencia fuerte en $W_0^{1,q}(\Omega)$, $1 < q < p$. Sin embargo, la convergencia era en general, sólo débil en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Esto significa que si u_n es la solución de (1.2.1), entonces la sucesión $|\nabla u_n|^p$ no es equintegrable. Vamos a ver que en el caso de la homogeneización de problemas en los que varían los coeficientes pero no los dominios, la situación es completamente distinta. Si u_n es la solución de (1.3.1), entonces $|\nabla u_n|^p$ es equintegrable pero no hay convergencia fuerte en $W_0^{1,q}(\Omega)$, con $q < p$. Este resultado lo vamos a obtener a partir de un teorema debido a R. Coiffman, P. L. Lions, Y. Meyer y S. Semmes ([21]) relacionado con la teoría de compacidad por compensación, el cual nos proporciona estimaciones en el espacio de Hardy $\mathcal{H}^1$, introducido por E. Stein y G. Weiss ([22]), y puede ser caracterizado por (ver [22], [40],...)

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^N) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^N)/\ sup_{t\geq 0}|h_t * f| \in L^1(\mathbb{R}^N)\},$$

donde $h_t = \frac{1}{t^N}h(\frac{\cdot}{t}),\ h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),\ h \geq 0,\ sop\, h \in B(0,1)$.

Recordemos los siguientes resultados sobre $\mathcal{H}^1$ (ver [22], [62]).

1.3.2 Teorema. *Sea $D \subset \mathbb{R}^N$ el disco unidad. Entonces, para todo $p > 1$ y para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con soporte contenido en D, existe $C > 0$ tal que f pertenece a $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^N)$ y*

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Más aún, dada $f \geq 0$ medible, entonces

$$f \in \mathcal{H}^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \text{ si y sólo si } f log\, f \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

El teorema de R. Coifman, P. L. Lions, Y. Meyer y S. Semmes, mencionado anteriormente es el siguiente (ver [21]).

1.3.3 Teorema. *Para todo $p \in (1, +\infty)$, existe una constante $C > 0$ tal que: si $A \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)^N$, $B \in L^p(\mathbb{R}^N)^N$, son tales que $div(A) = 0$ y $rot(B) = 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{\mathcal{N}})$, entonces AB pertenece a $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^N)$ y satisface*

$$\|AB\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^N)^N} \leq C\|A\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \cdot \|B\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}$$

Usando el teorema 1.3.3 vamos a obtener el siguiente resultado de regularidad.

1.3.4 Lema. *Sean $a_n : \Omega \times \mathcal{M}_{M\times N} \to \mathcal{M}_{M\times N}$, que verifican (2.0.2), (2.0.3) y (2.0.4) y $f_n \in W^{-1,p'}(\Omega)^M$ converge fuerte en $W^{-1,p'}(\Omega)^M$ a una distribución f. Entonces, la sucesión u_n de soluciones de (1.3.1), es tal que $|\nabla u_n|^p \chi_K$ es equintegrable para todo compacto $K \subset \Omega$.*

Demostración. Como la solución v_n de

$$\begin{cases} -div\, a_n(Dv_n) = f & \text{en } \mathcal{D}'(\Omega)^M \\ v_n \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \end{cases}$$

verifica que $v_n - u_n$ converge fuerte a cero en $W_0^{1,p}(\Omega)^M$, podemos suponer que $f_n = f$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos ahora que f pertenece a $L^{p'}(\Omega)^M$, y sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. Como $div(a_n(Du_n)\varphi)$ está acotada en $L^{p'}(\mathbb{R}^N)^M$, existe una sucesión $\psi_n \in W^{1,p'}(\mathbb{R}^N)^{M\times N}$ tal que

$$div\, \psi_n = div\, (a_n(Du_n)\varphi)$$

y

$$\|\psi_n\|_{W^{1,p'}(\mathbb{R}^N)^{M\times N}} \leq C\, \|div\, (a_n(Du_n)\varphi)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)^M}.$$

Tomando en el teorema 1.3.3 A_n y B_n respectivamente como la i-th columna de $a_n(Du_n)\varphi - \psi_n$ y Du_n, $1 \leq i \leq n$, (suponemos u_n extendida por cero fuera de Ω) se deduce que $[a_n(Du_n)\varphi - \psi_n] : Du_n$ está acotada en $\mathcal{H}^1$. Por otro lado, gracias al teorema de inyección de Sobolev, $\psi_n : Du_n$ está acotada en $L^r(\mathbb{R}^N, \mathcal{M}_{M\times N})$ con $r > 1$ y por tanto en $\mathcal{H}^1$. De esta forma, la sucesión $\varsigma_n = a_n(Du_n) : Du_n\varphi$ está acotada en $\mathcal{H}^1$. Como es no negativa, el teorema 1.3.2 implica que $\varsigma_n\, log\varsigma_n$ está acotada en $L^1(\mathbb{R}^N)$, lo que gracias a (2.0.2) prueba que $|\nabla u_n|^p\varphi$ es equintegrable para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Esto prueba el resultado para $f \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$. El caso general $f \in W^{-1,p'}(\Omega)^M$, sigue fácilmente usando que f es el límite de una sucesión $f_n \in L^{p'}(\Omega)$.

$\square$

Con respecto a la homogeneización de problemas parabólicos, se tiene un resultado completamente parecido al teorema 1.3.1, que es el siguiente (ver p. ej. [55]).

1.3.5 Proposición. *Dados $p \in (1, +\infty)$, α, $\gamma > 0$, $\sigma \in (0, 1 \wedge (p-1)]$, $r \in L^1(Q_T)$, sea una subsucesión $a_n : Q_T \times \mathcal{M}_{M\times N} \to \mathcal{M}_{M\times N}$ que verifica las siguientes propiedades:*

$$a_n(x, t, 0) = 0.$$

$$\alpha|\xi_1-\xi_2|^p \leq$$

$$\leq [a_n(x,t,\xi_1):\xi_1+a_n(x,t,\xi_2):\xi_2]^{\frac{2-p_m}{2}}[(a_n(x,t,\xi_1)-a_n(x,t,\xi_2)):(\xi_1-\xi_2)]^{\frac{p_m}{2}},$$

$$|a_n(x,t,\xi_1)-a_n(x,t,\xi_2)| \leq$$

$$\leq \gamma(r(x,t)+a_n(x,t,\xi_1):\xi_1+a_n(x,t,\xi_2):\xi_2)^{\frac{2p-2-p_m\sigma}{2p}}[(a_n(x,t,\xi_1)-a_n(x,t,\xi_2)):(\xi_1-\xi_2)]^{\frac{\sigma}{p_M}},$$

donde $p_m = p \wedge 2$ *y* $p_M = p \vee 2$.

Entonces existe una subsucesión de a_n *y una función* a *verificando las mismas propiedades que* a_n*, tal que para toda sucesión* $f_n \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)^M)$ *que converge fuerte a una distribución* f *y para toda sucesión* u_n^0 *que converge débilmente en* $L^2(\Omega)$ *a una función* u^0*, se verifica que la sucesión de soluciones* u_n *del problema*

$$\begin{cases} \partial_t u_n - div\, a_n(x,t,\nabla u_n) = f_n \text{ en } \mathcal{D}'(Q_T)^M \\ u_n \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)^M)\cap C^0([0,T];L^2(\Omega))^M \\ u_n(x,0)=u_n^0 \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

converge débilmente en $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)^M)$ *hacia la única solución* u *de*

$$\begin{cases} \partial_t u - div\, a(x,t,\nabla u) = f \text{ en } \mathcal{D}'(Q_T)^M \\ u_n \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)^M)\cap C^0([0,T];L^2(\Omega))^M \\ u(x,0)=u^0 \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

y $a_n(x,t,\nabla u_n)$ *converge débilmente a* $a(x,t,\nabla u)$ *en* $L^{p'}(\Omega)^M$.

Si a_n *no depende de* t*, i.e.* $a_n(x,t,\xi) = a_n(x,s,\xi)$, $\forall \xi \in \mathcal{M}_{M\times N}$*, p.c.t* $x \in \Omega$*, p.c.t.* t*,* $s \in (0,T)$*, entonces* a *coincide con la función que aparece en en el teorema 1.3.1.*

Análogamente al caso elíptico, las propiedades de linealidad y de homogeneidad de a_n*, se heredan por la función* a*.*

Respecto a la equintegrabilidad de las soluciones, no sabemos si el resultado es cierto o no en el caso de problemas no lineales, donde en principio necesitaríamos una generalización del teorema 1.3.3. En el caso de problemas parabólicos lineales, el resultado es fácil de probar a partir de la siguiente generalización del teorema de Meyer ([21]) que aparece en [2].

1.3.6 Teorema. *Sea Ω un conjunto abierto y regular, entonces para todos α, $\beta > 0$ con $\alpha < \beta$, existe $p_0 > 2$ tal que si $2 \leq p < p_0$, entonces existe C (dependiendo de α, β y p) tal que para todos $f \in L^p(0,T;W^{-1,p}(\Omega))$, $u^0 \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ y $A \in L^\infty(Q_T, \mathcal{M}_{M\times N})$, $|A(x,t)\xi| \leq \beta|\xi|$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$, p.c.t. $(x,t) \in Q_T$, se tiene que la solución del problema*

$$\begin{cases} \partial_t u - div\, A\nabla u = f & en \;\; \mathcal{D}'(Q_T) \\ u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \quad u(x,0) = u_0 & en \;\; \Omega, \end{cases}$$

se encuentra en $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ y

$$\|u\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} \leq C[\|f\|_{L^p(0,T;W^{-1,p}(\Omega))} + \|u^0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}].$$

Capítulo 2

Homogeneización de sistemas de Dirichlet para operadores monótonos en abiertos variables

En este capítulo estudiamos el problema de homogeneización

$$\begin{cases} u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M \\ \displaystyle\int_\Omega a_n(x, Du_n) : Dv dx + \int_\Omega F_n(x, u_n) v d\mu_n = \langle f_n, v\rangle \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M, \end{cases} \tag{2.0.1}$$

donde f_n es una sucesión que converge fuerte en $W^{-1,p'}(\Omega)^M$ y a_n, (F_n, μ_n) pertenecen respectivamente a los conjuntos $\mathcal{A} = \mathcal{A}(p, \alpha, \gamma, \sigma, r)$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(p, \alpha, \gamma, \sigma)$, definidos a continuación, con $p \in (1, +\infty)$, α, $\gamma > 0$, $\sigma \in (0, 1 \wedge (p-1)]$ y $r \in L^1(\Omega)$ fijos.

2.0.7 Definición. *Dados $p \in (1, +\infty)$, $\alpha, \gamma > 0$, $\sigma \in (0, 1 \wedge (p-1)]$ y $r \in L^1(\Omega)$, se define $\mathcal{A} = \mathcal{A}(p, \alpha, \gamma, \sigma, r)$ como el conjunto de funciones de Carathéodory $a : \Omega \times \mathcal{M}_{M\times N} \to \mathcal{M}_{M\times N}$, tales que denotando $\breve{a} : \Omega \times \mathcal{M}_{M\times N} \to \mathcal{M}_{M\times N}$ y $\widetilde{a} : \Omega \times \mathcal{M}_{M\times N} \times \mathcal{M}_{M\times N} \to \mathcal{M}_{M\times N}$ las funciones definidas por*

$$\breve{a}(x, \xi) = a(x, \xi) : \xi, \quad \forall \xi \in \mathcal{M}_{M\times N}, \ \ e.c.t. \ x \in \Omega.$$

$$\widetilde{a}(x,\xi_1,\xi_2)=(a(x,\xi_1)-a(x,\xi_2)):(\xi_1-\xi_2),$$

$\forall \xi_1,\xi_2\in\mathcal{M}_{M\times N}$, *e.c.t.* $x\in\Omega$, *se tiene*

$$a(x,0)=0. \tag{2.0.2}$$

$$\begin{aligned}&\alpha|\xi_1-\xi_2|^p\le\widetilde{a}(x,\xi_1,\xi_2),\ \ si\ p\ge 2,\\ &\alpha|\xi_1-\xi_2|^p\le[\breve{a}(x,\xi_1)+\breve{a}(x,\xi_2)]^{\frac{2-p}{2}}\widetilde{a}(x,\xi_1,\xi_2)^{\frac{p}{2}},\ \ si\ 1<p<2,\end{aligned} \tag{2.0.3}$$

$\forall \xi_1,\xi_2\in\mathcal{M}_{M\times N}$, *e.c.t.* $x\in\Omega$.

$$\begin{aligned}&|a(x,\xi_1)-a(x,\xi_2)|\le\\ &\le\gamma(r(x)+\breve{a}(x,\xi_1)+\breve{a}(x,\xi_2))^{\frac{p-1-\sigma}{p}}\widetilde{a}(x,\xi_1,\xi_2)^{\frac{\sigma}{p}},\ \ si\ p\ge 2,\\ &|a(x,\xi_1)-a(x,\xi_2)|\le\\ &\le\gamma(r(x)+\breve{a}(x,\xi_1)+\breve{a}(x,\xi_2))^{\frac{2p-2-p\sigma}{2p}}\widetilde{a}(x,\xi_1,\xi_2)^{\frac{\sigma}{2}},\ \ si\ 1<p<2,\end{aligned} \tag{2.0.4}$$

$\forall \xi_1,\ \xi_2\in\mathcal{M}_{M\times N}$, *e.c.t.* $x\in\Omega$.

2.0.8 Observación. *Las hipótesis (2.0.3) y (2.0.4) pueden resumirse en la expresión*

$$\alpha|\xi_1-\xi_2|^p\le[\breve{a}(x,\xi_1)+\breve{a}(x,\xi_2)]^{\frac{2-p_m}{2}}\widetilde{a}(x,\xi_1,\xi_2)^{\frac{p_m}{2}}, \tag{2.0.5}$$

$$|a(x,\xi_1)-a(x,\xi_2)|\le\gamma(r(x)+\breve{a}(x,\xi_1)+\breve{a}(x,\xi_2))^{\frac{2p-2-p_m\sigma}{2p}}\widetilde{a}(x,\xi_1,\xi_2)^{\frac{\sigma}{p_M}}, \tag{2.0.6}$$

donde $p_m=p\wedge 2$ *y* $p_M=p\vee 2$.

2.0.9 Observación. *Si* a *verifica (2.0.2), (2.0.3) y existen* $\gamma>0$, $r\in L^1(\Omega)$ *y* $\sigma\in(0,1\wedge(p-1)]$ *tales que se tiene*

$$|a(x,\xi_1)-a(x,\xi_2)|\le\gamma(r(x)+|\xi_1|^p+|\xi_2|^p)^{\frac{(p-1-\sigma)}{p}}|\xi_1-\xi_2|^\sigma, \tag{2.0.7}$$

$\forall \xi_1,\, \xi_2 \in \mathcal{M}_{M\times N}$, e.c.t. $x \in \Omega$, entonces se verifica (2.0.4).

Recíprocamente, si a verifica (2.0.2), (2.0.3) y (2.0.4), entonces existen $\gamma' > 0$ y $r' \in L^p(\Omega)$, tales que para todo $\xi_1,\, \xi_2 \in \mathcal{M}_{M\times N}$ y e.c.t. $x \in \Omega$, se tiene

$$\begin{aligned} |a(x,\xi_1) - a(x,\xi_2)| &\le \gamma'(r'(x) + |\xi_1| + |\xi_2|)^{\frac{p(p-1-\sigma)}{p-\sigma}} |\xi_1 - \xi_2|^{\frac{\sigma}{p-\sigma}}, \ \text{si } p \ge 2 \\ |a(x,\xi_1) - a(x,\xi_2)| &\le \gamma'(r'(x) + |\xi_1| + |\xi_2|)^{\frac{2p-2-p\sigma}{2-\sigma}} |\xi_1 - \xi_2|^{\frac{\sigma}{2-\sigma}}, \ \text{si } 1 < p < 2 \end{aligned} \tag{2.0.8}$$

$\forall \xi_1,\, \xi_2 \in \mathcal{M}_{M\times N}$, e.c.t. $x \in \Omega$,

Nótese que el exponente de Hölder de $a(x,\cdot)$ sólo coincide con σ cuando $p = 2$ y $\sigma = 1$.

De (2.0.8) y (2.0.2) se deduce en particular, que existen una constante $\beta > 0$ y una función $h \in L^{p'}(\Omega)$, tales que para toda $a \in \mathcal{A}(p,\alpha,\gamma,\sigma,r)$, se verifica

$$|a(x,\xi)| \le h(x) + \beta|\xi|^{p-1}, \quad \forall \xi \in \mathcal{M}_{M\times N}, \ \text{e.c.t. } x \in \Omega. \tag{2.0.9}$$

Obsérvese también que en el caso $1 < p < 2$, la hipótesis usual de monotonía

$$\alpha \frac{|\xi_1 - \xi_2|^p}{(|\xi_1| + |\xi_2|)^{2-p}} \le \tilde{a}(x,\xi_1,\xi_2),$$

implica (2.0.4) (con $p < 2$) para una constante α' distinta en general de α.

2.0.10 Observación. *La hipótesis (2.0.2) puede ser debilitada pidiendo simplemente que $a(\cdot,0)$ pertenezca al espacio $L^{p'}(\Omega)^M$. En este caso, es suficiente considerar en lugar de a la función $\bar{a}$ definida por*

$$\bar{a}(x,\xi) = a(x,\xi) - a(x,0), \quad \forall \xi \in \mathcal{M}_{M\times N}, \ \text{e.c.t.}\, x \in \Omega.$$

2.0.11 Definición. *Dados $p \in (1,+\infty)$, α, $\gamma > 0$ y $\sigma \in (0, 1\wedge(p-1)]$, definimos $\mathcal{F}(p,\alpha,\gamma,\sigma)$, como el conjunto de pares (F,μ), con μ en $\mathcal{M}_0^p(\Omega)$ y $F : \Omega \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$ tal que $F(\cdot,s)$ es μ-medible para todo $s \in \mathbb{R}^M$ y tal que si se definen w como la solución de (1.2.3) y $\breve{F} : \Omega\times\mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$, $\tilde{F} : \Omega\times\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$ por*

$$\breve{F}(x,s) = F(x,s)s, \quad \forall s \in \mathbb{R}^M, \quad \mu\text{-e.c.t. } x \in \{w > 0\}$$

y

$$\widetilde{F}(x,s_1,s_2) = (F(x,s_1) - F(x,s_2))(s_1 - s_2)$$
$$\forall s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}^M, \quad \mu\text{-e.c.t. } x \in \{w > 0\},$$

se tiene

$$F(x,0) = 0, \tag{2.0.10}$$

$$\begin{aligned} &\alpha|s_1 - s_2|^p \le \widetilde{F}(x,s_1,s_2),\ \ si\ p \ge 2, \\ &\alpha|s_1 - s_2|^p \le [\breve{F}(x,s_1) + \breve{F}(x,s_2)]^{\frac{2-p}{2}} \widetilde{F}(x,s_1,s_2)^{\frac{p}{2}},\ \ si\ 1 < p < 2, \end{aligned} \tag{2.0.11}$$

$\forall s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}^M, \quad \mu$-*e.c.t.* $x \in \{w > 0\}$,

$$\begin{aligned} &|F(x,s_1) - F(x,s_2)| \le \\ &\le \gamma[\breve{F}(x,s_1) + \breve{F}(x,s_2)]^{\frac{p-1-\sigma}{p}} |\widetilde{F}(x,s_1,s_2)|^{\frac{\sigma}{p}},\ \ si\ p \ge 2, \\ &|F(x,s_1) - F(x,s_2)| \le \\ &\le \gamma[\breve{F}(x,s_1) + \breve{F}(x,s_2)]^{\frac{2p-2-p\sigma}{2p}} |\widetilde{F}(x,s_1,s_2)|^{\frac{\sigma}{2}},\ \ si\ 1 < p < 2, \end{aligned} \tag{2.0.12}$$

$\forall s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}^M, \quad \mu$-*e.c.t.* $x \in \{w > 0\}$.

2.0.12 Observación. *Del mismo modo que antes, si F verifica (2.0.10), (2.0.11) y existen $\gamma > 0$, $\sigma \in (0, 1 \wedge (p-1)]$ tales que*

$$|F(x,s_1) - F(x,s_2)| \le \gamma(|s_1|^p + |s_2|^p)^{\frac{p-1-\sigma}{p}} |s_1 - s_2|^{\sigma}, \tag{2.0.13}$$

$\forall s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}^M, \quad \mu$-*e.c.t.* $x \in \{w > 0\}$, *entonces F verifica (2.0.12).*

Recíprocamente, si F verifica (2.0.10), (2.0.11) y (2.0.12), entonces existe $\gamma' > 0$, tal que para todo $s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}^M$ y μ-e.c.t. $x \in \{w > 0\}$, se tiene

$$|F(x,s_1) - F(x,s_2)| \le \gamma'(|s_1| + |s_2|)^{\frac{p(p-1-\sigma)}{p-\sigma}} |s_1 - s_2|^{\frac{\sigma}{p-\sigma}},\ \ si\ p \ge 2,$$

$$|F(x,s_1) - F(x,s_2)| \le \gamma'(|s_1| + |s_2|)^{\frac{p(2-\sigma)-2}{2-\sigma}} |s_1 - s_2|^{\frac{\sigma}{2-\sigma}},\ \ si\ 1 < p < 2.$$

En particular existe una $\beta \in \mathbb{R}$ (se puede tomar la misma que para a), tal que tenemos

$$|F(x,s)| \leq \beta |s|^{p-1}, \quad \forall s \in \mathbb{R}^M, \quad \mu\text{-e.c.t. } x \in \{w > 0\}. \tag{2.0.14}$$

2.0.13 Observación. *Igual que para a, (2.0.11) y (2.0.12) pueden resumirse del siguiente modo*

$$\alpha |s_1 - s_2|^p \leq \widetilde{F}(x, s_1, s_2)^{\frac{p_m}{2}} [\breve{F}(x, s_1) + \breve{F}(x, s_2)]^{\frac{2-p_m}{2}}, \tag{2.0.15}$$

$$|F(x, s_1) - F(x, s_2)| \leq \gamma (\breve{F}(x, s_1) + \breve{F}(x, s_2))^{\frac{2p-2-p_m\sigma}{2p}} \widetilde{F}(x, s_1, s_2)^{\frac{\sigma}{p_M}}, \tag{2.0.16}$$

donde $p_m = p \wedge 2$ y $p_M = p \vee 2$.

2.0.14 Notación. *Usualmente, con la idea de manejar expresiones más cortas, no especificaremos la dependencia de x de las funciones a y F. Así, escribiremos $a(Du)$ en lugar de $a(x, Du(x))$ y $F(u)$ en el de $F(x, u(x))$.*

A lo largo de este capítulo, denotaremos por C una constante genérica que depende sólo de p, N, α, γ, y σ y que puede cambiar de una línea a otra.

2.1 Estimaciones y primera representación del problema límite

En esta sección vamos a obtener estimaciones para las derivadas de las sucesión de soluciones de (2.0.1), así como una primera expresión del problema límite. Para ello, vamos a comparar nuestro problema con otros cuya homogeneización sea conocida, esencialmente con el caso del p-Laplaciano en abiertos variables y el de la homogeneización de un problema elíptico donde varían los coeficientes, mientras que la sucesión de dominios permanece fija, los cuales fueron comentados en el capítulo 1.

Consideremos dos sucesiones $a_n \in \mathcal{A}(p, \alpha, \gamma, \sigma, r)$ y $(F_n, \mu_n) \in \mathcal{F}(p, \alpha, \gamma, \sigma)$. Extrayendo una subsucesión si es necesario, podemos suponer que μ_n es tal que existen $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y $\mu \in \mathcal{M}_0^p(\Omega)$, de forma que las soluciones w_n de (1.2.2) convergen débilmente en $W_0^{1,p}(\Omega)$ a una función w que verifica (1.2.3). Además, podemos suponer que existe a en las condiciones del teorema 1.3.1, que en particular pertenece a $\mathcal{A}(p,\alpha,\gamma,\sigma,r)$.

Consideraremos también una sucesión de distribuciones $f_n \in W^{-1,p'}(\Omega)^M$, una sucesión de funciones $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)^M$, una distribución $f \in W^{-1,p'}(\Omega)^M$ y una función $u \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M$ tales que

$$f_n \to f \text{ en } W^{-1,p'}(\Omega)^M, \tag{2.1.1}$$

$$u_n \rightharpoonup u \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega)^M, \tag{2.1.2}$$

$$\begin{cases} u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M \\ \displaystyle\int_\Omega a_n(Du_n) : Dv dx + \int_\Omega F_n(u_n) v d\mu_n = \langle f_n, v\rangle \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

2.1.1 Observación. *Usando u_n como función test en (2.1.3), se deduce fácilmente que $\|u_n\|_{L^p_{\mu_n}(\Omega)} + \|Du\|_{W_0^{1,p}(\Omega)^M}$ está acotada, luego por la proposición 1.2.5 (e), suponiendo tan sólo (2.1.1), (2.1.3) y aplicando (1.2.8), se deduce que al menos para una subsucesión, existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)$, verificando (2.1.2).*

2.1.2 Definición. *Definimos $\bar{u}_n \in W_0^{1,p}(\Omega)^M$ como la solución de*

$$\begin{cases} -div\, a_n(D\bar{u}_n) = -div\, a(Du) \ \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega)^M \\ \bar{u}_n \in W_0^{1,p}(\Omega)^M. \end{cases} \tag{2.1.4}$$

Nuestro objetivo en la presente sección es obtener algunas estimaciones sobre $D(u_n - \bar{u}_n)$, que nos mostrarán como la sucesión $u_n - \bar{u}_n$ se comporta mejor que u_n y que usaremos más tarde para obtener el problema satisfecho por u.

2.1.3 Observación. *Por el teorema 1.3.1, $\bar{u}_n$ converge débilmente a u en $W_0^{1,p}(\Omega)^M$ y por el lema 1.3.4, $|D\bar{u}_n|^p \chi_K$ es equintegrable para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$.*

El resultado siguiente prueba la convergencia fuerte de $\bar{u}_n$ en el conjunto $\{u = 0\}$.

2.1.4 Proposición. *La sucesión $\bar{u}_n$ satisface*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{u=0\}\cap K} |D\bar{u}_n|^p dx = 0, \quad \forall K \subset \Omega \text{ compacto.} \tag{2.1.5}$$

Demostración. Para $\varepsilon > 0$ y $K \subset \Omega$ compacto, consideramos $\varphi \in W_c^{1,p}(\Omega)^M \cap L^\infty(\Omega)^M$, $0 \le \varphi \le 1$, C_p-e.q.t. Ω, tal que

$$\varphi = \begin{cases} 1 & C_p\text{-e.q.t. } \{u = 0\} \cap K \\ 0 & C_p\text{-e.q.t. } \{u > \frac{\varepsilon}{2}\}. \end{cases}$$

Tomando $(T_k(\bar{u}_n) - T_k(u))\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)^M$, $k > 0$, como función test en (2.1.4), tenemos

$$\int_\Omega a_n(D\bar{u}_n) : D(T_k(\bar{u}_n) - T_k(u))\varphi dx +$$

$$+ \int_\Omega a_n(D\bar{u}_n) : [(T_k(\bar{u}_n) - T_k(u)) \otimes \nabla\varphi] dx = \tag{2.1.6}$$

$$= \langle -div\, a(Du), (T_k(\bar{u}_n) - T_k(u))\varphi \rangle.$$

Por la convergencia débil en $W_0^{1,p}(\Omega)^M$ de $(T_k(\bar{u}_n) - T_k(u))\varphi$ a cero y el teorema de Rellich-Kondrachov, tenemos

$$\langle -div\, a(Du), (T_k(\bar{u}_n) - T_k(u))\varphi \rangle = O_n, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

$$\int_\Omega a_n(D\bar{u}_n) : [(T_k(\bar{u}_n) - T_k(u)) \otimes \nabla\varphi] dx = O_n, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

De este modo, de (2.1.6) se deduce

$$\int_\Omega a_n(D\bar{u}_n) : D(T_k(\bar{u}_n) - T_k(u))\varphi dx = O_n, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.1.7}$$

Por otro lado,

$$\int_\Omega a_n(D\bar{u}_n) D(T_k(\bar{u}_n) - T_k(u))\varphi dx = \int_\Omega a_n(D\bar{u}_n) : D(\bar{u}_n - u)\varphi dx +$$

$$+ \int_\Omega a_n(D\bar{u}_n) : D(T_k(\bar{u}_n) - \bar{u}_n)\varphi dx + \int_\Omega a_n(D\bar{u}_n) : D(u - T_k(u))\varphi dx.$$

Teniendo en cuenta que $DT_k(\bar{u}_n) = D\bar{u}_n$ en $\{|\bar{u}_n|_\infty < k\}$, se tiene

$$\left| \int_\Omega a_n(D\bar{u}_n) : D(T_k(\bar{u}_n) - \bar{u}_n)\varphi dx \right| \le$$

$$\leq C\left(\int_{\{|\bar{u}_n|_\infty>k\}}|a_n(D\bar{u}_n)|^{p'}\varphi dx\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{\{|\bar{u}_n|_\infty>k\}}|D\bar{u}_n|^p\varphi dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por la equintegrabilidad de $|D\bar{u}_n|^p\varphi$ y el teorema de Rellich-Kondrachov, se verifica entonces

$$\int_\Omega a_n(D\bar{u}_n):D(T_k(\bar{u}_n)-\bar{u}_n)\varphi dx=O_{k,n}.$$

Análogamente

$$\int_\Omega a_n(D\bar{u}_n):D(T_k(\bar{u})-\bar{u})\varphi dx=O_{k,n}.$$

Volviendo a (2.1.7), deducimos

$$\int_\Omega a_n(D\bar{u}_n):D\bar{u}_n\,\varphi dx=\int_\Omega a_n(D\bar{u}_n):Du\,\varphi dx+O_n,$$

lo que por la elección de φ, implica

$$\alpha\int_{\{u=0\}\cap K}|D\bar{u}_n|^p dx\leq\int_{\{0<|u|<\varepsilon\}}|a_n(D\bar{u}_n)||Du|dx+O_n\leq$$

$$\leq\left(\int_\Omega|a_n(D\bar{u}_n)|^{p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{\{0<|u|<\varepsilon\}}|Du|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+O_n,\quad\forall\varepsilon>0.$$

Usando ahora

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\{0<|u|<\varepsilon\}}|Du|^p dx=0,$$

se deduce (2.1.5).

□

Una primera estimación de la diferencia entre Du_n y $D\bar{u}_n$, viene dada por el siguiente lema. La demostración usa ideas que aparecen en [3], [33] y [18].

2.1.5 Lema. *Las sucesiones u_n y $\bar{u}_n$ satisfacen*

$$u_n-\bar{u}_n\to0\ \ en\ W_0^{1,q}(\Omega)^M,\ 1\leq q<p. \tag{2.1.8}$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, consideramos para todo $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n \in (0, \varepsilon)$ que fijaremos después y $\Phi_{\varepsilon_n} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^M)$ tales que

$$\Phi_{\varepsilon_n}(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } |y| \leq \varepsilon_n \\ 0 & \text{si } |y| > 2\varepsilon_n, \end{cases}$$

$0 \leq \Phi_{\varepsilon_n} \leq 1$ y $|\nabla \Phi_{\varepsilon_n}| \leq \frac{C}{\varepsilon_n}$, en $\mathbb{R}^N$. Entonces, para ψ_{ε_n} definida por $\psi_{\varepsilon_n}(y) = \Phi_{\varepsilon_n}(y)y$, para todo $y \in \mathbb{R}^M$, tomamos $\psi_{\varepsilon_n}(u_n - \bar{u}_n)w_n \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M$ como función test en la diferencia de (2.1.3) y (2.1.4), y $\psi_{\varepsilon_n}(u_n) \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M$ como función test en (2.1.3). Sumando las ecuaciones resultantes, obtenemos

$$\begin{gathered}
\int_\Omega [a_n(Du_n) - a_n(D\bar{u}_n)] : D[\psi_{\varepsilon_n}(u_n - \bar{u}_n)]w_n dx + \\
+ \int_\Omega [a_n(Du_n) - a_n(D\bar{u}_n)] : [\psi_{\varepsilon_n}(u_n - \bar{u}_n) \otimes \nabla w_n] dx + \\
+ \int_\Omega a_n(Du_n) : D\psi_{\varepsilon_n}(u_n) dx + \qquad (2.1.9) \\
+ \int_\Omega F_n(u_n)(\psi_{\varepsilon_n}(u_n - \bar{u}_n)w_n + \psi_{\varepsilon_n}(u_n)) d\mu_n = \\
= \langle f_n, \psi_{\varepsilon_n}(u_n - \bar{u}_n)w_n + \psi_{\varepsilon_n}(u_n) \rangle - \int_\Omega a(Du)D[\psi_{\varepsilon_n}(u_n - \bar{u}_n)w_n] dx.
\end{gathered}$$

Por (2.0.10) y (2.0.11), se tiene

$$\int_\Omega F_n(u_n)\psi_{\varepsilon_n}(u_n) d\mu_n \geq 0.$$

De (2.0.8), (2.0.14) y las normas u_n, w_n en $W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M$ acotadas, deducimos que existe una constante $C_1 > 0$ tal que

$$\left| \int_\Omega [a_n(D\, u_n) - a_n(D\bar{u}_n)] : [\psi_{\varepsilon_n}(u_n - \bar{u}_n) \otimes \nabla w_n] dx \right| \leq C_1 \varepsilon,$$

$$\left| \int_\Omega F_n(u_n) w_n \psi_{\varepsilon_n}(u_n - \bar{u}_n) d\mu_n \right| \leq C_1 \varepsilon.$$

Gracias a la convergencia fuerte de f_n en $W^{-1,p'}(\Omega)^M$ y a que $\psi_{\varepsilon_n}(u_n - \bar{u}_n)w_n$ converge débilmente a cero en $W_0^{1,p}(\Omega)^M$, se obtiene también

$$\langle f_n, \psi_{\varepsilon_n}(u_n - \bar{u}_n)w_n\rangle = O_n,$$

$$\int_\Omega a(Du)D[\psi_{\varepsilon_n}(u_n - \bar{u}_n)w_n]dx = O_n.$$

Así, por (2.0.3), (2.0.8), (2.0.9), w_n acotada en $L^\infty(\Omega)$ y las propiedades de ψ_{ε_n}, se tiene

$$\int_{\{|u_n-\bar{u}_n|<\varepsilon_n\}} |D(u_n - \bar{u}_n)|^p w_n dx + \int_{\{|u_n|<\varepsilon_n\}} |Du_n|^p dx \leq$$

$$\leq C \int_{\{\varepsilon_n \leq |u_n-\bar{u}_n| \leq 2\varepsilon_n\}} |a_n(Du_n) - a_n(D\bar{u}_n)||D(u_n - \bar{u}_n)|dx + \tag{2.1.10}$$

$$+C \int_{\{\varepsilon_n \leq |u_n| \leq 2\varepsilon_n\}} |a_n(Du_n)||Du_n|dx + \langle f_n, \psi_{\varepsilon_n}(u_n)\rangle + 2C_1\varepsilon + O_n.$$

Ahora, como u_n y $\bar{u}_n$ están acotadas en $W_0^{1,p}(\Omega)^M$, existe una constante $M > 0$, tal que

$$\int_\Omega |a_n(Du_n) - a_n(D\bar{u}_n)||D(u_n - \bar{u}_n)|dx + \int_\Omega |a_n(Du_n)||Du_n|dx \leq M.$$

Por tanto

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\int_{\{2^{j-1}\delta \leq |u_n-\bar{u}_n| \leq 2^j\delta\}} |a_n(Du_n) - a_n(D\bar{u}_n)||D(u_n - \bar{u}_n)|dx + \int_{\{2^{j-1}\delta \leq |u_n| \leq 2^j\delta\}} |a_n(Du_n)||Du_n|dx \right) \leq M,$$

así, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $k(n) \in \{1, \ldots, K\}$ tal que

$$\int_{\{2^{k(n)-1}\delta \leq |u_n-\bar{u}_n| \leq 2^{k(n)}\delta\}} |a_n(Du_n) - a_n(D\bar{u}_n)||D(u_n - \bar{u}_n)|dx +$$

$$+ \int_{\{2^{k(n)-1}\delta \leq |u_n| \leq 2^{k(n)}\delta\}} |a_n(Du_n)||Du_n|dx \leq \frac{M}{K}.$$

Tomando δ y K tales que $\varepsilon = 2^K\delta$ y $\varepsilon_n = 2^{k(n)-1}\delta$, podemos deducir de (2.1.10)

$$\int_{\{|u_n-\bar{u}_n|<\delta\}} |D(u_n - \bar{u}_n)|^p w_n dx + \int_{\{|u_n|<\delta\}} |Du_n|^p dx \leq$$

$$\leq C\frac{M}{K} + C_1 2^{K+1}\delta + \langle f_n, \psi_{\varepsilon_n}(u_n)\rangle + O_n.$$

A continuación pasaremos al límite en esta desigualdad. Para ello, como $\psi_{\varepsilon_n}(u_n)$ está acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$ por una constante que no depende ni de K ni de δ y $|\psi_{\varepsilon_n}(u_n)| \leq 2\varepsilon_n$, podemos suponer (es cierto para una subsucesión) que existe $u^*_{K,\delta} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\psi_{\varepsilon_n}(u_n)$ converge débil a $u^*_{K,\delta}$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Más aún $u^*_{k,\delta}$ está acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y satisface $|u^*_{K,\delta}| \leq 2^{K+1}\delta$. Así, para toda $K > 0$, $u^*_{K,\delta}$ converge débilmente a cero en $W_0^{1,p}(\Omega)$, cuando δ tiende a cero. De esta manera, tomando límites, primero en n tendiendo a infinito, luego en δ tendiendo a cero y después en K tendiendo a infinito, obtenemos

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\left(\int_{\{|u_n-\bar{u}_n|<\delta\}}|D(u_n-\bar{u}_n)|^p w_n dx + \int_{\{|u_n|<\delta\}}|Du_n|^p dx\right) = 0. \tag{2.1.11}$$

Sean ahora ρ, $\delta > 0$, dos parámetros que convergen a cero, y consideremos $\varphi_\rho \in \mathcal{D}(\Omega)$, con $0 \leq \varphi_\rho \leq 1$ en Ω que converge puntualmente a 1 en Ω. Para $q \in [1, p)$, tenemos

$$\int_\Omega |D(u_n-\bar{u}_n)|^q dx =$$

$$= \int_{\{|u_n-\bar{u}_n|<\delta\}\cap\{\rho\leq w\}} |D(u_n-\bar{u}_n)|^q (\frac{w_n}{w})^{\frac{q}{p}} dx + \int_{\{|u_n|<\delta\}\cap\{w=0\}} |D(u_n-\bar{u}_n)|^q \varphi_\rho dx +$$

$$+ \int_\Omega |D(u_n-\bar{u}_n)|^q \left(1-(\frac{w_n}{w})^{\frac{q}{p}}\chi_{\{\rho\leq w\}\cap\{|u_n-\bar{u}_n|<\delta\}} - \varphi_\rho \chi_{\{|u_n|<\delta\}\cap\{w=0\}}\right) dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{\rho^{\frac{q}{p}}}\left(\int_{\{|u_n-\bar{u}_n|<\delta\}} |D(u_n-\bar{u}_n)|^p w_n dx\right)^{\frac{q}{p}} |\Omega|^{\frac{p-q}{p}} +$$

$$+ C\left(\int_{\{|u_n|<\delta\}\cap\{w=0\}} |D(u_n-\bar{u}_n)|^p \varphi_\rho dx\right)^{\frac{q}{p}} |\Omega|^{\frac{p-q}{p}} +$$

$$+ \left(\int_\Omega |D(u_n-\bar{u}_n)|^p dx\right)^{\frac{q}{p}} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_\Omega \left(1-(\frac{w_n}{w})^{\frac{q}{p}}\chi_{\{\rho\leq w\}\cap\{|u_n-\bar{u}_n|<\delta\}} - \varphi_\rho\chi_{\{w=0\}\cap\{|u_n|<\delta\}}\right)^{\frac{p}{p-q}} dx\right)^{\frac{p-q}{p}}.$$

Como el conjunto $\{w = 0\}$ está contenido en $\{u = 0\}$ (esto se tiene como consecuencia de que $\mu(B) = +\infty$, para todo B Borel tal que $C_p(B \cap \{w = 0\}) = +\infty$), tomando límite en la desigualdad anterior, primero cuando n tiende a infinito, luego cuando δ tiende a cero y después cuando ρ tiende a cero, concluimos que $u_n - \bar{u}_n$ converge fuerte a cero en $W_0^{1,q}(\Omega)^M$. □

2.1.6 Corolario. *La sucesión $a_n(Du_n)$ satisface*

$$a_n(Du_n) \rightharpoonup a(Du) \quad \text{ en } L^{p'}(\Omega)^M. \tag{2.1.12}$$

Demostración. Por (2.0.8) y (2.1.8), $a_n(Du_n) - a_n(D\bar{u}_n)$ converge a cero en $L^r(\Omega)^M$, $1 \leq r < p'$. Como $a_n(Du_n)$ está acotada en $L^{p'}(\Omega)^M$ y $a_n(D\bar{u}_n)$ converge débilmente a $a(Du)$ en $L^{p'}(\Omega)^M$, obtenemos (2.1.12).

□

El siguiente lema sustituye al lema 6.6 en [18] (véase también el lema 2.5 en [14]) y nos permite obtener una primera representación del problema límite de (2.1.3).

2.1.7 Lema. *Para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ en Ω, se tiene*

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\int_\Omega |D(u_n - \bar{u}_n)|^p \varphi dx + \int_\Omega |u_n|^p \, \varphi d\mu_n \right) \leq C \int_\Omega |u|^p \varphi d\mu. \tag{2.1.13}$$

Demostración. Sean w_n y w respectivamente soluciones de los problemas (1.2.2) y (1.2.3). Para todo n, $m \in \mathbb{N}$, definimos

$$w_{n,m} = \frac{w_n}{w \vee \frac{1}{m}}.$$

Por la proposición 1.2.5 (b), es fácil ver que existen $\psi_m \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^\infty(\Omega)^M$ tales que son cero C_p-e.q.t. en $\{w < \frac{1}{m}\}$ y tales que $w\psi_m$ converge fuertemente a u en $W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M$.

Por otra parte, para todo n, $m \in \mathbb{N}$, definimos $\bar{u}_{n,m}$ como la solución del problema

$$\begin{cases} -div\, a_n(D\bar{u}_{n,m}) = -div\, a(D(w\psi_m)) & \text{en } W^{-1,p'}(\Omega)^M \\ \bar{u}_{n,m} \in W_0^{1,p}(\Omega)^M. \end{cases} \tag{2.1.14}$$

Gracias al lema 1.3.4 y a que $w\psi_m$ converge fuertemente en $W_0^{1,p}(\Omega)^M$, se verifica que

$$|\nabla \bar{u}_{n,m}|^p \chi_K \text{ es equintegrable (en } n \text{ y } m\text{)}, \; \forall K \subset \Omega, \text{ compacto.} \tag{2.1.15}$$

Para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ C_p-e.q.t. en Ω, tomando $[u_n - w_{n,m}T_m(\bar{u}_{n,m})]\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M$ como función test en (2.1.3). Se tiene

$$\int_\Omega a_n(Du_n) : D[u_n - w_{n,m}T_m(\bar{u}_{n,m})]\varphi dx +$$

$$+ \int_\Omega a_n(Du_n) : ([u_n - w_{n,m}T_m(\bar{u}_{n,m})] \otimes \nabla\varphi) dx +$$

$$+ \int_\Omega F_n(u_n)[u_n - w_{n,m}T_m(\bar{u}_{n,m})]\varphi \, d\mu_n = \langle f_n, [u_n - w_{n,m}T_m(\bar{u}_{n,m})]\varphi \rangle.$$

Usando que $[u_n - w_{n,m}T_m(\bar{u}_{n,m})]$ converge débilmente a cero en $W_0^{1,p}(\Omega)^M$ cuando n y después m tienden a infinito, es fácil ver que el segundo y cuarto términos son igual a $O_{m,n}$. De este modo, obtenemos

$$\int_\Omega a_n(Du_n) : D[u_n - w_{n,m}T_m(\bar{u}_{n,m})]\varphi dx +$$

$$+ \int_\Omega F_n(u_n)[u_n - w_{n,m}T_m(\bar{u}_{n,m})]\varphi \, d\mu_n = O_{m,n}.$$

Esto implica

$$\int_\Omega a_n(Du_n) : D(u_n - \bar{u}_n)\varphi dx + \int_\Omega F_n(u_n)u_n\varphi \, d\mu_n =$$

$$= \int_\Omega a_n(Du_n) : D[w_{n,m}T_m(\bar{u}_{n,m}) - \bar{u}_n]\varphi dx + \int_\Omega F_n(u_n)w_{n,m}T_m(\bar{u}_{n,m})\varphi d\mu_n + O_{m,n} =$$

$$= \int_\Omega a_n(Du_n) : DT_m(\bar{u}_{n,m})(w_{n,m} - 1)\varphi \, dx + \int_\Omega a_n(Du_n) : D[T_m(\bar{u}_{n,m}) - \bar{u}_{n,m}]\varphi \, dx +$$

$$+ \int_\Omega a_n(Du_n) : D(\bar{u}_{n,m} - \bar{u}_n)\varphi \, dx + \tag{2.1.16}$$

$$+ \int_\Omega a_n(Du_n) : \left(T_m(\bar{u}_{n,m}) \otimes \frac{\nabla(w_n - w)}{w \vee \frac{1}{m}} \right) \varphi \, dx +$$

$$+ \int_{\{w > \frac{1}{m}\}} a_n(Du_n) : (T_m(\bar{u}_{n,m}) \otimes \nabla w) \frac{(w - w_n)}{w^2} \varphi \, dx +$$

$$+ m \int_{\{w \leq \frac{1}{m}\}} a_n(Du_n) : (T_m(\bar{u}_{n,m}) \otimes \nabla w)\varphi \, dx + \int_\Omega F_n(u_n)w_{n,m}T_m(\bar{u}_{n,m})\varphi d\mu_n + O_{m,n}.$$

Estimemos el primer término del segundo miembro de (2.1.16). Para ello, lo descomponemos como

$$\begin{aligned} &\int_{\{0\le w\le \frac{1}{m}\}} a_n(Du_n) : DT_m(\bar{u}_{n,m})(w_{n,m}-1)\varphi\,dx+ \\ &+\int_{\{w>\frac{1}{m}\}} a_n(Du_n) : DT_m(\bar{u}_{n,m})(w_{n,m}-1)\varphi\,dx, \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

donde aplicando (2.1.15) y $\psi_m = 0$, C_p-e.q.t. $\{w < \frac{1}{m}\}$, el primer término tiende a cero cuando n tiende a cero, para todo $m \in \mathbb{N}$. La equintegrabilidad de $|D\bar{u}_{n,m}|^p\varphi$ y la convergencia en medida de $(w_{n,m}-1)\chi_{w>\frac{1}{m}}$ a cero, también implican que el segundo término de (2.1.17) es igual a O_n (usando el teorema de Egorov), para cada $m \in \mathbb{N}$.

De la equintegrabilidad de $|D\bar{u}_{n,m}|^p\varphi$ podemos además deducir

$$\int_\Omega |D(\bar{u}_{n,m} - T_m(\bar{u}_{n,m}))|^p\varphi dx = O_{m,n},$$

y de este modo, el segundo término del segundo miembro de (2.1.16) es igual a $O_{m,n}$.

Por otra parte, usando $\bar{u}_n - \bar{u}_{n,m}$ como función test en la diferencia de (2.1.4) y (2.1.14), se obtiene fácilmente

$$\int_\Omega |D(\bar{u}_n - \bar{u}_{n,m})|^p dx = O_{m,n},$$

con lo que el tercer término del segundo miembro de (2.1.16) es igual a $O_{m,n}$.

El quinto y sexto términos de (2.1.16), claramente convergen a cero cuando n tiende a cero para todo $m \in \mathbb{N}$, gracias a que $\psi_m = 0$ C_p-e.q.t. $\{w \le \frac{1}{m}\}$.

Ahora, por (2.0.8) tenemos

$$\begin{gathered} |[a_n(Du_n) - a_n(D(u_n-\bar{u}_n))]D(u_n-\bar{u}_n)|\varphi \le \\ \le \gamma'(r'(x) + |Du_n| + |D(u_n-\bar{u}_n)|)^{\frac{p(p-1-\sigma)}{p-\sigma}}|D\bar{u}_n|^{\frac{\sigma}{p-\sigma}}|D(u_n-\bar{u}_n)|\varphi, \\ \text{si } p\ge 2, \end{gathered} \tag{2.1.18}$$

$$|[a_n(Du_n) - a_n(D(u_n-\bar{u}_n))]D(u_n-\bar{u}_n)|\varphi \le$$

$$\leq \gamma'(r'(x) + |Du_n| + |D(u_n - \bar{u}_n)|)^{\frac{p(2-\sigma)-2}{2-\sigma}} |D\bar{u}_n|^{\frac{\sigma}{2-\sigma}} |D(u_n - \bar{u}_n)|\varphi,$$

$$\text{si } 1 < p < 2,$$

donde por los lemas 1.3.4 y 2.1.5, el segundo miembro tiende a cero en $L^1(\Omega)^M$ y por tanto

$$[a_n(Du_n) - a_n(D(u_n - \bar{u}_n)] : D(u_n - \bar{u}_n)\varphi \to 0 \;\text{ en } L^1(\Omega)^M.$$

Análogamente, se prueba

$$(a_n(Du_n) - a_n(D(u_n - \bar{u}_n)) : T_m(\bar{u}_{n,m}) \frac{\nabla(w_n - w)}{w \vee \frac{1}{m}} \varphi \to 0 \text{ en } L^1(\Omega)^M.$$

De esta forma, de (2.1.16) y las propiedades de a_n y F_n, se deduce

$$\int_\Omega |D(u_n - \bar{u}_n)|^p \varphi \, dx + \int_\Omega |u_n|^p \varphi \, d\mu_n \leq$$

$$\leq C \int_\Omega [h(x) + |D(u_n - \bar{u}_n)|^{p-1}] : \frac{|\nabla(w_n - w)|}{w \vee \frac{1}{m}} |T_m(\bar{u}_{n,m})| \varphi \, dx +$$

$$+ C \int_\Omega |u_n|^{p-1} \frac{w_n}{w \vee \frac{1}{m}} |T_m(\bar{u}_{n,m})| \varphi \, d\mu_n + O_{m,n} \leq$$

$$\leq C \left(\int_\Omega |D(u_n - u)|^p \varphi \, dx + \int_\Omega |u_n|^p \varphi \, d\mu_n \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^p \frac{|T_m(\bar{u}_{n,m})|^p}{(w \vee \frac{1}{m})^p} \varphi \, dx + \int_\Omega \frac{|w_n|^p}{(w \vee \frac{1}{m})^p} |T_m(\bar{u}_{n,m})|^p \varphi \, dx \right)^{\frac{1}{p}} + O_{m,n},$$

donde se ha usado que $\nabla(w_n - w)$ converge a cero en medida y por tanto que $|\nabla(w_n - w)|$ converge débilmente a cero en $L^p(\Omega)^M$.

Por la desigualdad de Young y la proposición 1.2.6 se tiene entonces

$$\int_\Omega |D(u_n - \bar{u}_n)|^p \varphi \, dx + \int_\Omega |u_n|^p \varphi \, d\mu_n \leq$$

$$\leq C\left(\int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^p \frac{|T_m(\bar{u}_{n,m})|^p}{(w \vee \frac{1}{m})^p}\varphi\, dx + \int_\Omega \frac{|w_n|^p}{(w \vee \frac{1}{m})^p}|T_m(\bar{u}_{n,m})|^p \varphi\, dx\right) + O_{m,n} =$$

$$= C\int_\Omega T_m(w\psi_m)^p \varphi\, d\mu + O_{m,n} = C\int_\Omega |u|^p\varphi\, d\mu + O_{m,n}$$

lo que prueba (2.1.13). □

2.1.1 Primera representación del problema límite

El teorema 2.1.8 nos da una primera representación del problema que satisface u.

2.1.8 Teorema. *Supongamos que se tienen (2.1.1), (2.1.2) y (2.1.3). Entonces existe una función $H \in L^{p'}_\mu(\Omega)^M$, tal que u es solución del problema variacional*

$$\begin{cases} u \in W^{1,p}_0(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M \\ \displaystyle\int_\Omega a(Du) : Dz dx + \int_\Omega Hz d\mu = \langle f, z\rangle \\ \forall z \in W^{1,p}_0(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M. \end{cases} \tag{2.1.19}$$

La función H satisface

$$|H| \leq C|u|^{p-1} \quad \mu\text{-e.c.t. en } \Omega \tag{2.1.20}$$

y

$$\int_\Omega Hw\psi d\mu = \tag{2.1.21}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega a_n(D(u_n - \bar{u}_n)) : (\psi \otimes \nabla(w_n - w))dx + \int_\Omega F_n(u_n)w_n\psi d\mu_n\right),$$

para todo $\psi \in W^{1,p}_c(\Omega)^M \cap L^\infty(\Omega)^M$.

Demostración. Para $\psi \in W^{1,p}_c(\Omega)^M \cap L^\infty(\Omega)^M$, tomando $w_n\psi$ como función test en (2.1.3), obtenemos

$$\int_\Omega a_n(Du_n) : D\psi\, w_n dx + \int_\Omega a_n(Du_n) : (\psi \otimes \nabla w)dx + \tag{2.1.22}$$
$$+ \int_\Omega a_n(Du_n) : (\psi \otimes \nabla(w_n - w))dx + \int_\Omega F_n(u_n)w_n\psi d\mu = \langle f_n, w_n\psi\rangle.$$

La convergencia fuerte en $W^{-1,p'}(\Omega)^M$ de f_n, implica

$$\langle f_n, w_n\psi\rangle = \langle f, w\psi\rangle + O_n,$$

y por el corolario 2.1.6, se obtiene fácilmente

$$\int_\Omega a_n(Du_n) : D\psi\, w_n dx + \int_\Omega a_n(Du_n) : (\psi \otimes \nabla w)dx =$$

$$= \int_\Omega a(Du)D(w\psi)dx + O_n.$$

Por otro lado, razonando como en (2.1.18), obtenemos

$$[a_n(Du_n) - a_n(D(u_n - \bar{u}_n))] : [\psi \otimes \nabla(w_n - w)] \to 0 \text{ en } L^1(\Omega)^M.$$

De esta forma, por (2.1.22), tenemos

$$\begin{gathered}\int_\Omega a(Du)D(w\psi)dx + \int_\Omega a_n(D(u_n - \bar{u}_n)) : [\psi \otimes \nabla(w_n - w)]dx+ \\ + \int_\Omega F_n(u_n)w_n\psi d\mu_n = \langle f, w\psi\rangle + O_n.\end{gathered} \tag{2.1.23}$$

Para caracterizar el segundo término de (2.1.23) usamos

$$\int_\Omega |a_n(\nabla(u_n - \bar{u}_n))|\,|\nabla(w_n - w)|dx + \int_\Omega |F_n(u_n)|\,|w_n|d\mu_n \le C,$$

de esta forma, existe una medida vectorial de Radon ν tal que para $\psi \in C_0(\Omega)^M$, se tiene

$$\int_\Omega \psi d\nu = \lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega a_n(D(u_n - \bar{u}_n)) : [\psi \otimes \nabla(w_n - w)]dx + \int_\Omega F_n(u_n)w_n\psi d\mu_n\right).$$

Usando (2.0.9), (2.0.14), la desigualdad de Hölder, la convergencia débil de $|\nabla(w_n - w)|$ a cero en $L^p(\Omega)$, (1.2.5) y (2.1.13), obtenemos

$$\left|\int_\Omega \psi d\nu\right| \le$$

$$\leq \int_\Omega [h+\beta|D(u_n-\bar{u}_n)|^{p-1}]|\nabla(w_n-w)||\psi|dx+\beta\int_\Omega |u_n|^{p-1}\,w_n\,|\psi|d\mu_n+O_n\leq$$

$$\leq C\left(\int_\Omega |D(u_n-\bar{u}_n)|^p|\psi|dx+\int_\Omega |u_n|^p|\psi|\,d\mu_n\right)^{\frac{p-1}{p}}\cdot$$

$$\cdot\left(\int_\Omega |\nabla(w_n-w)|^p|\psi|dx+\int_\Omega w_n^p|\psi|\,d\mu_n\right)^{\frac{1}{p}}+O_n\leq$$

$$\leq C\left(\int_\Omega |u|^p|\psi|d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega w^p|\psi|d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Usando el teorema de derivación de medida (véanse p. ej. [38], [66]), es fácil deducir de esta desigualdad que existe una función vectorial $G=(G_1,\ldots,G_M)$, μ-medible tal que

$$\int_\Omega \psi\,d\nu=\int_\Omega G\psi\,d\mu,\quad \forall\psi\in C_c(\Omega)^M,$$

y

$$|G|\leq C|u|^{p-1}w\ \ \mu\text{-e.q.t. en }\Omega.$$

Definiendo $H=(\frac{G}{w})\chi_{\{w>0\}}\in L^{p'}_\mu(\Omega)^M$, podemos deducir que H satisface (2.1.20) y que se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega a_n(D(u_n-\bar{u}_n)):[\psi\otimes\nabla(w_n-w)]dx+\int_\Omega F_n(u_n)w_n\psi d\mu_n\right)=$$

$$=\int_\Omega \psi d\nu=\int_\Omega Hw\psi d\mu,\ \forall\psi\in C_0(\Omega)^M.$$

Así, de (2.1.23) obtenemos

$$\int_\Omega a(Du)D(w\psi)dx+\int_\Omega Hw\psi d\mu=\langle f,w\psi\rangle,$$

para toda $\psi\in W_0^{1,p}(\Omega)^M\cap C_c(\Omega)^M$, lo que por densidad (ver proposición 1.2.5 (b)), implica que u satisface (2.1.19). Volviendo entonces a (2.1.23) y pasando al límite, se deduce que (2.1.21) se tiene para ψ en $W_c^{1,p}(\Omega)^M\cap L^\infty(\Omega)^M$.

□

2.1.2 Dependencia de H con respecto a u

Como en la sección anterior, consideraremos u_n, u, f_n y f que satisfacen (2.1.1), (2.1.2) y (2.1.3). Consideraremos también v_n, g_n, v y g tales que

$$\begin{cases} g_n,\, g \in W^{-1,p'}(\Omega)^M \\ g_n \to g \text{ en } W^{-1,p'}(\Omega)^M, \end{cases} \tag{2.1.24}$$

$$\begin{cases} v_n \in W_0^{1,p}(\Omega_n)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M, \\ \displaystyle\int_\Omega a_n(Dv_n)Dzdx + \int_\Omega F_n(v_n)zd\mu_n = \langle g_n, z\rangle \\ \quad \forall z \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M, \end{cases} \tag{2.1.25}$$

$$\begin{cases} v \in W^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M \\ v_n \rightharpoonup v \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega)^M. \end{cases} \tag{2.1.26}$$

Igual que para u_n, definimos $\bar{v}_n \in W_0^{1,p}(\Omega)^M$ solución de

$$\begin{cases} -div\, a_n(D\bar{v}_n) = -div\, a(Dv) \text{ en } W^{-1,p'}(\Omega)^M \\ \bar{v}_n \in W_0^{1,p}(\Omega)^M. \end{cases} \tag{2.1.27}$$

Por el teorema 2.1.8, existen dos funciones H, $H' \in L^{p'}_\mu(\Omega)^M$, tales que u y v satisfacen respectivamente

$$\int_\Omega a(Du) : Dz + \int_\Omega Hzd\mu = \langle f, z\rangle, \quad \forall z \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M \tag{2.1.28}$$

y

$$\int_\Omega a(Dv) : Dz + \int_\Omega H'zd\mu = \langle g, z\rangle, \quad \forall z \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M. \tag{2.1.29}$$

El principal objetivo de esta sección, es probar el lema 2.1.10, donde se estima la diferencia entre H y H'. Mostramos en primer lugar

2.1.9 Lema. *Para todo $\varphi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega \breve{a}_n(D(u_n - \bar{u}_n))\varphi dx + \int_\Omega \breve{F}_n(u_n)\varphi d\mu_n \right) = \int_\Omega Hu\varphi d\mu, \tag{2.1.30}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega \widetilde{a}_n(D(u_n-\bar{u}_n),D(v_n-\bar{v}_n))\varphi dx+\int_\Omega \widetilde{F}_n(u_n,v_n)\varphi d\mu_n\right)= \\ =\int_\Omega (H-H')(u-v)\varphi d\mu, \tag{2.1.31}$$

donde $\breve{a}_n$, $\breve{F}_n$, $\widetilde{a}_n$, y $\widetilde{F}_n$ están dadas en las definiciones 2.0.7 y 2.0.11.

Demostración. Para $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$, tomando $(u_n-v_n)\varphi$ como función test en la diferencia de (2.1.3) y (2.1.25), se obtiene

$$\int_\Omega \widetilde{a}_n(Du_n,Dv_n)\varphi dx+ \\ +\int_\Omega [a_n(Du_n)-a_n(Dv_n)]:[(u_n-v_n)\otimes\nabla\varphi]\,dx+\int_\Omega \widetilde{F}_n(u_n,v_n)\varphi d\mu_n= \\ =\langle f_n-g_n,(u_n-v_n)\varphi\rangle. \tag{2.1.32}$$

En el segundo término de (2.1.32) usamos que $a_n(Du_n)$ y $a_n(Dv_n)$ convergen respectivamente a $a(Du)$ y $a(Dv)$ débilmente en $L^{p'}(\Omega)^M$, con lo que gracias al teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov se tiene

$$\int_\Omega [a_n(Du_n)-a_n(Dv_n)]:[(u_n-v_n)\otimes\nabla\varphi]\,dx= \\ =\int_\Omega [a(Du)-a(Dv)]:[(u-v)\otimes\nabla\varphi]\,dx+O_n. \tag{2.1.33}$$

El cuarto término de (2.1.32), claramente verifica

$$\langle f_n-g_n,(u_n-v_n)\varphi\rangle=\langle f-g,(u-v)\varphi\rangle+O_n.$$

El primer término de (2.1.32) es el más difícil de estimar.

$$\int_\Omega \widetilde{a}_n(Du_n,Dv_n)\varphi dx=$$

$$= \int_\Omega [a_n(Du_n) - a_n(Dv_n)] : D(u_n - v_n - \bar{u}_n + \bar{v}_n)\varphi dx +$$

$$+ \int_\Omega [a_n(Du_n) - a_n(D\bar{u}_n)] : D(\bar{u}_n - \bar{v}_n)\varphi dx - \tag{2.1.34}$$

$$- \int_\Omega [a_n(Dv_n) - a_n(D\bar{v}_n)] : D(\bar{u}_n - \bar{v}_n)\varphi dx +$$

$$+ \int_\Omega \widetilde{a}_n(D\bar{u}_n, D\bar{v}_n)\varphi dx.$$

En el primer término del segundo miembro de (2.1.34) utilizamos que

$$(a_n(Du_n) - a_n(D(u_n - \bar{u}_n))) : D(u_n - v_n - \bar{u}_n + \bar{v}_n)\varphi,$$

es equintegrable y por el lema 2.1.5 converge puntualmente en medida a cero, luego converge fuerte a cero en $L^1(\Omega)^M$. Razonando análogamente con

$$(a_n(Dv_n) - a_n(D(v_n - \bar{v}_n))) : D(u_n - v_n - \bar{u}_n + \bar{v}_n)\varphi,$$

tenemos

$$\int_\Omega [a_n(Du_n) - a_n(Dv_n)] : D(u_n - v_n - \bar{u}_n + \bar{v}_n)\varphi dx =$$

$$= \int_\Omega \widetilde{a}_n(D(u_n - \bar{u}_n), D(v_n - \bar{v}_n))\varphi dx + O_n.$$

Para el segundo término del segundo miembro de (2.1.34), gracias a que $a_n(Du_n) - a_n(D\bar{u}_n)$ converge débilmente a 0 en $L^{p'}(\Omega)^M$ y fuertemente en $L^r(\Omega)^M$ para $1 \leq r < p'$ (usamos (2.0.8) y el lema 2.1.5) y que la potencia p de $|D(\bar{u}_n - \bar{v}_n)\varphi|$ es equintegrable, se tiene gracias al teorema de Egorov

$$\int_\Omega [a_n(Du_n) - a_n(D\bar{u}_n)] : D(\bar{u}_n - \bar{v}_n)\varphi dx = O_n,$$

y análogamente

$$\int_\Omega [a_n(Dv_n) - a_n(D\bar{v}_n)] : D(\bar{u}_n - \bar{v}_n)\varphi dx = O_n.$$

Para el cuarto término del segundo miembro de (2.1.34), tomando $(\bar{u}_n - \bar{v}_n)$ como función test en la diferencia de (2.1.4) y (2.1.27), se deduce fácilmente

$$\int_\Omega \widetilde{a}_n(D\bar{u}_n, D\bar{v}_n)\varphi dx = \int_\Omega \widetilde{a}(Du, Dv)\varphi dx + O_n. \tag{2.1.35}$$

Así, de (2.1.34) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_\Omega \widetilde{a}_n(Du_n, Dv_n)\varphi dx &= \int_\Omega \widetilde{a}_n(D(u_n - \bar{u}_n), D(v_n - \bar{v}_n))\varphi dx + \\ &+ \int_\Omega \widetilde{a}(Du, Dv)\varphi dx + O_n. \end{aligned} \tag{2.1.36}$$

De este modo, de (2.1.32), (2.1.33) y (2.1.36) se tiene

$$\begin{aligned} &\int_\Omega [a(Du) - a(Dv)] : D((u-v)\varphi)dx + \\ &\int_\Omega \widetilde{a}_n(D(u_n - \bar{u}_n), D(v_n - \bar{v}_n))\varphi dx + \int_\Omega \widetilde{F}_n(u_n, v_n)\varphi d\mu_n = \\ &= \langle f - g, (u-v)\varphi\rangle + O_n. \end{aligned} \tag{2.1.37}$$

Por otra parte, usando $(u-v)\varphi$ como función test en la diferencia de (2.1.28) y (2.1.29), tenemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega (a(Du) - a(Dv)) : D((u-v)\varphi)dx + \int_\Omega (H - H')(u-v)\varphi d\mu = \\ = \langle f - g, (u-v)\varphi\rangle. \end{aligned} \tag{2.1.38}$$

De (2.1.37) y (2.1.38) deducimos (2.1.31). Para obtener (2.1.30), es suficiente tomar en (2.1.31) $v_n = \bar{v}_n = v = 0$.

□

2.1.10 Lema. *Las funciones H y H' satisfacen las siguientes desigualdades μ-e.c.t. Ω, donde $p_m = p \wedge 2$ y $p_M = p \vee 2$*

$$\alpha|u - v|^p \leq [(H - H')(u-v)]^{\frac{p_m}{2}} [(Hu + H'v)]^{\frac{2-p_m}{2}}, \tag{2.1.39}$$

$$|H - H'| \leq \gamma(Hu + H'v)^{\frac{2p-2-p_m\sigma}{2p}} [(H - H')(u-v)]^{\frac{\sigma}{p_M}}, \ \textit{si } 1 < p < +\infty\ . \tag{2.1.40}$$

Demostración. Por (2.1.31), (2.1.30) y las propiedades (2.0.5) y (2.0.15) de a_n y F_n, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ en Ω, se tiene

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\left(\alpha\int_\Omega |D(u_n - v_n - \bar{u}_n + \bar{v}_n)|^p\varphi dx + \alpha\int_\Omega |u_n - v_n|^p\varphi d\mu_n\right) \leq \\
&\leq \limsup_{n\to\infty}\left(\int_\Omega (\breve{a}(D(u_n-\bar{u}_n))+\breve{a}(D(v_n - \bar{v}_n)))^{\frac{2-pm}{2}}\widetilde{a}_n(D(u_n-\bar{u}_n), D(v_n-\bar{v}_n))^{\frac{pm}{2}}\varphi dx + \right.\\
&\left. + \int_\Omega (\breve{F}_n(u_n) + \breve{F}_n(v_n))^{\frac{2-pm}{2}}\widetilde{F}_n(u_n, v_n)^{\frac{pm}{2}}\varphi d\mu_n\right) \leq \\
&\leq \left(\int_\Omega \widetilde{a}_n(D(u_n - \bar{u}_n), D(v_n - \bar{v}_n))\varphi dx + \int_\Omega \widetilde{F}_n(u_n, v_n)\varphi d\mu_n\right)^{\frac{pm}{2}} \cdot \\
&\cdot \left(\int_\Omega (\breve{a}_n(D(u_n-\bar{u}_n))+\breve{a}_n(D(v_n-\bar{v}_n))\varphi dx + \int_\Omega (\breve{F}_n(u_n)+\breve{F}_n(v_n))d\mu_n\right)^{\frac{2-pm}{2}} + O_n \leq \\
&\leq \left(\int_\Omega (H - H')(u - v)\varphi d\mu\right)^{\frac{pm}{2}}\left(\int_\Omega (Hu + H'v)\varphi d\mu\right)^{\frac{2-pm}{2}} + O_n.
\end{aligned}
\tag{2.1.41}
$$

Estimemos el primer miembro de (2.1.41). Para ello, tomamos una sucesión $\psi_m \in \mathcal{D}(\Omega)$, tal que $w\psi_m$ converge a $u - v$ en $W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M$ (usamos la proposición 1.2.5, (b)). Por convexidad, se tiene

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega |D(u_n - v_n - \bar{u}_n + \bar{v}_n)|^p\varphi dx + \\
&+ \int_\Omega |u_n - v_n|^p\varphi d\mu_n \geq \int_\Omega |D(w_n\psi_m - u + v)|^p\varphi dx + \\
&+p\int_\Omega |D(w_n\psi_m - u + v)|^{p-2}D(w_n\psi_m - u + v) : Dz_{n,m}\varphi dx + \\
&+ \int_\Omega |w_n\psi_m|^p\varphi d\mu_n + p\int_\Omega |w_n\psi_m|^{p-2}w_n\psi_m(u_n - v_n - w_n\psi_m)\varphi d\mu_n,
\end{aligned}
\tag{2.1.42}
$$

donde $z_{n,m} = u_n - v_n - \bar{u}_n + \bar{v}_n - w_n\psi_m + u - v$.

De (1.2.7), deducimos

$$\int_\Omega |D(w_n\psi_m - u + v)|^p \varphi dx + \int_\Omega |w_n\psi_m|^p \varphi d\mu_n = \\ = \int_\Omega |u-v|^p \varphi d\mu + O_{m,n}. \tag{2.1.43}$$

Por otro lado, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$|D(w_n\psi_m - u + v)|^{p-2} D(w_n\psi_m - u + v)\varphi - |D(w_n\psi_m)|^{p-2} D(w_n\psi_m)\varphi,$$

converge puntualmente e.c.t. y su potencia p' es equintegrable. De esta forma, converge fuerte en $L^{p'}(\Omega)^M$. Luego

$$\int_\Omega |D(w_n\psi_m - u + v)|^{p-2} D(w_n\psi_m - u + v) : Dz_{n,m}\varphi dx + \\ + \int_\Omega |w_n\psi_m|^{p-2} w_n\psi_m (u_n - v_n - w_n\psi_m)\varphi d\mu_n = \\ = \int_\Omega |D(w_n\psi_m)|^{p-2} D(w_n\psi_m) : D(u_n - v_n - w_n\psi_m)\varphi dx + \\ + \int_\Omega |w_n\psi_m|^{p-2} w_n\psi_m (u_n - v_n - w_n\psi_m)\varphi d\mu_n - \\ - \int_\Omega |D(w_n\psi_m)|^{p-2} D(w_n\psi_m) : D(\bar{u}_n - \bar{v}_n - u + v)\varphi dx + O_{m,n}. \tag{2.1.44}$$

De (1.2.6), se tiene

$$\int_\Omega |D(w_n\psi_m)|^{p-2} D(w_n\psi_m) : D(u_n - v_n - w_n\psi_m)\varphi dx + \\ + \int_\Omega |w_n\psi_m|^{p-2} w_n\psi_m (u_n - v_n - w_n\psi_m)\varphi d\mu_n = O_{m,n}. \tag{2.1.45}$$

Usando que para todo $m \in \mathbb{N}$, $|D(w_n\psi_m)|^{p-2} D(w_n\psi_m)$ converge débil en $L^{p'}(\Omega)^M$ y fuerte en $L^r(\Omega)^M$ para $1 \leq r < p'$ y que $D(\bar{u}_n - \bar{v}_n - u + v)\varphi$ converge débilmente en $L^p(\Omega)^M$ y su potencia p es equintegrable, el teorema de Egorov implica

$$\int_\Omega |D(w_n\psi_m)|^{p-2}D(w_n\psi_m) : D(\bar{u}_n - \bar{v}_n - u + v)\varphi dx = O_n, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.1.46}$$

De (2.1.42), (2.1.43), (2.1.44), (2.1.45) y (2.1.46), se deduce entonces

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\int_\Omega D(u_n - v_n - \bar{u}_n + \bar{v}_n)\varphi dx + \int_\Omega |u_n - v_n|^p \varphi d\mu_n\right\} \geq$$
$$\geq \int_\Omega |u - v|^p \varphi d\mu, \tag{2.1.47}$$

que junto con (2.1.41) implica

$$\alpha \int_\Omega |u - v|^p \varphi d\mu \leq \left(\int_\Omega (H - H')(u - v)\varphi d\mu\right)^{\frac{pm}{2}} \left(\int_\Omega (Hu + H'v)\varphi d\mu\right)^{\frac{2-pm}{2}} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

$\varphi \geq 0$ en Ω, lo que aplicando el teorema de derivación de medida prueba (2.1.39).

Probemos ahora (2.1.40). Por (2.1.21) y la desigualdad de Hölder, para toda $\psi \in W_c^{1,p}(\Omega)^M \cap L^\infty(\Omega)^M$, se tiene

$$\left|\int_\Omega (H - H')w\psi d\mu\right| \leq$$
$$\leq \left|\int_\Omega (a_n(D(u_n - \bar{u}_n)) - a_n(D(v_n - \bar{v}_n))) : [\psi \otimes \nabla(w_n - w)]dx\right| + \tag{2.1.48}$$
$$+ \left|\int_\Omega (F_n(u_n) - F_n(v_n))w_n\psi d\mu_n\right| + O_n \leq I_1^{\frac{p-1}{p}} \cdot I_2^{\frac{1}{p}} + O_n,$$

con

$$I_1 = \int_\Omega |a_n(D(u_n - \bar{u}_n)) - a_n(D(v_n - \bar{v}_n))|^{\frac{p}{p-1}}|\psi|dx +$$
$$+ \int_\Omega |F_n(u_n) - F_n(v_n)|^{\frac{p}{p-1}}|\psi|d\mu_n,$$

e

$$I_2 = \int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^p |\psi| dx + \int_\Omega |w_n|^p |\psi| d\mu_n.$$

De (2.1.35), (2.1.8) y (2.0.12), se sigue

$$I_1 \leq$$

$$\leq \gamma^{\frac{p}{p-1}} \int_\Omega \breve{a}_n(D(u_n - \bar{u}_n)) + \breve{a}_n(D(v_n - \bar{v}_n)))^{\frac{2p-2-p_m\sigma}{2(p-1)}} \widetilde{a}_n(D(u_n - \bar{u}_n), D(v_n - \bar{v}_n))^{\frac{p\sigma}{p_M(p-1)}} |\psi| dx +$$

$$+ \gamma^{\frac{p}{p-1}} \int_\Omega (\breve{F}_n(u_n) + \breve{F}_n(v_n))^{\frac{2p-2-p_m\sigma}{2(p-1)}} \widetilde{F}_n(u_n, v_n)^{\frac{p\sigma}{p_M(p-1)}} |\psi| d\mu_n + O_n \leq$$

$$\leq \gamma^{\frac{p}{p-1}} I_3^{\frac{2p-2-p_m\sigma}{2(p-1)}} I_4^{\frac{p\sigma}{p_M(p-1)}} + O_n,$$

con

$$I_3 = \int_\Omega (\breve{a}_n(D(u_n - \bar{u}_n)) + \breve{a}_n(D(v_n - \bar{v}_n))) |\psi| dx +$$
$$+ \int_\Omega (\breve{F}_n(u_n) + \breve{F}_n(v_n)) |\psi| d\mu_n,$$

e

$$I_4 = \int_\Omega \widetilde{a}_n(D(u_n - \bar{u}_n), D(v_n - \bar{v}_n)) |\psi| dx + \int_\Omega \widetilde{F}_n(u_n, v_n) |\psi| d\mu_n.$$

De (2.1.30) y (2.1.31), obtenemos

$$I_1 \leq \gamma^{\frac{p}{p-1}} \left(\int_\Omega (Hu + H'v) |\psi| d\mu \right)^{\frac{2p-2-p_m\sigma}{2(p-1)}} \cdot \left(\int_\Omega (H - H')(u - v) |\psi| d\mu \right)^{\frac{p\sigma}{p_M(p-1)}} + O_n.$$

Por otra parte, por (1.2.5) se llega a

$$I_2 = \int_\Omega w^p \psi d\mu + O_n.$$

Usando en (2.1.48) las estimaciones obtenidas para I_1 y I_2 y aplicando el teorema de derivación de medidas, se deduce entonces (2.1.40). □

2.2 Homogeneización y resultado de corrector

Gracias al lema 2.1.10, se deduce que los valores puntuales de $H(x)$ dependen únicamente de los valores puntuales $u(x)$, es decir, existe F tal que $H(x) = F(x, u(x))$ μ-e.c.t. en Ω. Pero F está únicamente definida en los pares (x_0, s_0) tales que $s_0 = u(x_0)$, donde u es el límite de una sucesión u_n que satisface (2.1.3), para alguna sucesión f_n que converge fuerte en $W^{-1,p'}(\Omega)^M$ a una distribución f. El siguiente lema muestra que el conjunto de estos pares es denso en cierto sentido en $\{w > 0\}\times\mathbb{R}^M$. Este resultado es análogo al teorema 6.9 en [18] y su prueba es similar, con lo que se hará de forma esquemática.

2.2.1 Lema. *Para todo $q \in \mathbb{Q}^M$ y para todos m, $n \in \mathbb{N}$, denotamos por q_n^m la solución del problema*

$$\begin{cases} q_n^m \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M \\ \displaystyle\int_\Omega a_n(Dq_n^m)Dv dx + \int_\Omega F_n(q_n^m) v d\mu_n = m \int_\Omega [w_n q - q_n^m]^{p-2}(w_n q - q_n^m) v dx \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Entonces, existe una subsucesión de n, que denotamos por n, tal que para todos $q \in \mathbb{Q}$ y $m \in \mathbb{N}$, la sucesión q_n^m converge a una función q^m débilmente en $W_0^{1,p}(\Omega)^M$. Esta sucesión q^m converge a wq fuerte en $W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M \cap L^2(\Omega)^M$ y existe una función $Q^m \in L^{p'}_\mu(\Omega)^M$, tal que q^m satisface

$$\begin{cases} q^m \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu}(\Omega)^M \\ \displaystyle\int_\Omega a(Dq^m) v dx + \int_\Omega Q^m v \, d\mu = m \int_\Omega [wq - q^m]^{p-2}(wq - q^m) v dx \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu}(\Omega)^M. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

La sucesión Q^m converge fuerte en $L^{p'}_\mu(\Omega)^M$ a una función Q.

Demostración. Tomando $(q_n^m - w_n q)$ como función test en (2.2.1), se prueba que para todo $q \in \mathbb{Q}$ la norma de q_n^m en $W_0^{1,p}(\Omega_n)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M$ está acotada independientemente de n y m. Por tanto gracias al teorema 2.1.8, existen una subsucesión de n, aún denotada por n, $q^m \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M$, y $Q^m \in L^{p'}_\mu(\Omega)$, tales que

$$q_n^m \rightharpoonup q^m \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^2(\Omega)^M,$$

y se verifica (2.2.2). La subsucesión, se puede tomar independientemente de $(q, m) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{N}$ (numerable), gracias a un argumento diagonal.

Por (2.1.20), (2.1.31) y (2.1.40), μ-e.c.t. Ω se satisface

$$|Q^m| \leq C|q^m|^{p-1}, \tag{2.2.3}$$

$$\alpha|q^{m_2} - q^{m_1}|^p \leq [(Q^{m_2} - Q^{m_1})(q^{m_2} - q^{m_1})]^{\frac{p_m}{2}} [Q^{m_2}q^{m_2} + Q^{m_1}q^{m_1}]^{\frac{2-p_m}{2}}, \tag{2.2.4}$$

$$|Q^{m_2} - Q^{m_1}| \leq \gamma[Q^{m_2}q^{m_2} + Q^{m_1}q^{m_1}]^{\frac{2p-2-p_m\sigma}{2p}} |(Q^{m_2} - Q^{m_1})(q^{m_2} - q^{m_1})|^{\frac{\sigma}{p_M}}. \tag{2.2.5}$$

Tomando ahora $q^m - wq$ como función test en (2.2.2), se tiene

$$\begin{aligned} \int_\Omega a(Dq^m)Dq^m dx + \int_\Omega Q^m q^m d\mu + m\int_\Omega |q^m - wq|^p dx = \\ = \int_\Omega a(Dq^m)D(wq)dx + \int_\Omega Q^m wq d\mu, \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

de donde gracias a las propiedades de a y a (2.2.3) y (2.2.4), se deduce que existe $C_0 > 0$ (que depende de q) tal que

$$\int_\Omega |Dq^m|^p dx + \int_\Omega |q^m|^p d\mu + m\int_\Omega |q^m - wq|^p dx \leq C_0.$$

Teniendo en cuenta que la convergencia débil en $W_0^{1,p}(\Omega)^M$ implica la convergencia en μ-medida, se deduce que q^m converge a wq débilmente en $W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M$ y en μ-medida.

Gracias a (2.2.3) y (2.2.5), que implican que Q^m es de Cauchy en μ-medida, se deduce también la existencia de $Q \in L^{p'}_\mu(\Omega)$, tal que Q^m converge débilmente a Q en $L^{p'}_\mu(\Omega)$ y en μ-medida.

Pasando al límite en (2.2.4) y (2.2.5) se deduce que μ-e.c.t. Ω, se tiene

$$\alpha|wq - q^m| \leq [(Q - Q^m)(wq - q^m)]^{\frac{p_m}{2}} [Qwq + Q^m q^m]^{\frac{2-p_m}{2}}, \tag{2.2.7}$$

$$|Q^m - Q| \leq \gamma[Q^m q^m + Qwq]^{\frac{2p-2-p_m\sigma}{2p}} |(Q^m - Q)(q^m - wq)|^{\frac{\sigma}{p_M}}. \tag{2.2.8}$$

A continuación, reescribimos (2.2.6) como

$$\int_\Omega \tilde{a}(Dq^m, D(wq^m))dx + \int_\Omega (Q^m - Q)(q^m - wq)d\mu +$$

$$+m\int_\Omega |q^m - wq|^p dx = -\int_\Omega a(D(wq))D(q^m - wq)dx - \int_\Omega Q(q^m - wq)d\mu,$$

donde el segundo miembro tiende a cero y por tanto gracias a la elipticidad de a y a (2.2.7), deducimos que q^m converge fuertemente a wq en $W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M$. La desigualdad (2.2.8), prueba entonces la convergencia fuerte de Q^m a Q en $L^{p'}_\mu(\Omega)^M$.

$\square$

2.2.2 Definición. *Considerando la sucesión de n dada por el lema 2.2.1, definimos $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{Q}^M \to \mathbb{R}^M$ por*

$$\mathcal{F}(x,q) = Q(x), \quad \forall q \in \mathbb{Q}^M, \ \mu\text{-e.c.t. } x \in \Omega.$$

Por (2.1.20), (2.1.39) y (2.1.40) es fácil ver que para cualesquiera q_1, $q_2 \in \mathbb{Q}^M$ y μ-e.c.t. $x \in \Omega$, se tiene

$$\mathcal{F}(x,0) = 0, \tag{2.2.9}$$

$$\begin{gathered}\alpha|q_2 - q_1|^p w(x)^p \leq \\ \leq ((\mathcal{F}(x,q_2) - \mathcal{F}(x,q_1))(q_2 - q_1))^{\frac{p_m}{2}} (\mathcal{F}(x,q_1)q_1 + \mathcal{F}(x,q_2)q_2)^{\frac{2-p_m}{2}} w(x),\end{gathered} \tag{2.2.10}$$

$$\begin{gathered}|\mathcal{F}(x,q_2) - \mathcal{F}(x,q_1)| \leq \\ \leq \gamma(\mathcal{F}(x,q_1)q_1 + \mathcal{F}(x,q_2)q_2)^{\frac{2p-2-p_m\sigma}{2p}} |(\mathcal{F}(x,q_2) - \mathcal{F}(x,q_1))(q_2 - q_1)|^{\frac{\sigma}{p_M}} w(x)^{\frac{p-1}{p}}.\end{gathered} \tag{2.2.11}$$

De (2.2.11), podemos extender por continuidad $\mathcal{F}$ a $\Omega \times \mathbb{R}^M$ y la función obtenida sigue verificando (2.2.9), (2.2.10), (2.2.11). Definimos entonces $F : \Omega \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$ como

$$F(x,s) = \begin{cases} \mathcal{F}(x, \frac{s}{w(x)}) & si\ w(x) > 0 \\ 0 & si\ w(x) = 0. \end{cases} \tag{2.2.12}$$

Análogamente a como vimos para a_n y F_n, denotamos respectivamente por $\hat{F} : \Omega \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$ y $\breve{F} : \Omega \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$ las funciones

$$\hat{F}(x,s) = F(x,s)s, \quad \breve{F}(x,s_1,s_2) = (F(x,s_1) - F(x,s_2))(s_1 - s_2),$$

$\forall s,\ s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}^M$, *$\mu$-e.c.t.* $x \in \Omega$.

Para cualesquiera $s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}^M$ *y μ-e.c.t.* $x \in \{w > 0\}$, *la función* F *(como es usual no especificaremos a dependencia en* x*) satisface*

$$F(0) = 0, \tag{2.2.13}$$

$$\alpha|s_2 - s_1|^p \leq \breve{F}(s_2, s_1)^{\frac{p_m}{2}}(\hat{F}(s_1) + \hat{F}](s_2))^{\frac{2-p_m}{2}}, \tag{2.2.14}$$

$$|F(s_2) - F(s_1)| \leq \gamma(\hat{F}(s_1) + \hat{F}(s_2))^{\frac{2p-2-p_m\sigma}{2p}}|\breve{F}(s_2, s_1)|^{\frac{\sigma}{p_M}}. \tag{2.2.15}$$

Gracias al teorema 2.1.8 y la estimación (2.1.40) se obtiene ahora el siguiente resultado de homogeneización para el problema (2.1.3).

2.2.3 Teorema. *Consideremos la sucesión de* n *dada por el lema 2.2.1 y la función* F *dada en la definición 2.2.2. Entonces, para toda sucesión* $f_n \in W^{-1,p'}(\Omega)^M$ *que converge a* f *en* $W^{-1,p'}(\Omega)^M$, *la solución* u_n *de*

$$\left\{\begin{array}{l} u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M \\ \displaystyle\int_\Omega a_n(Du_n) : Dv dx + \int_\Omega F_n(u_n) v d\mu_n = \langle f_n, v\rangle \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M, \end{array}\right. \tag{2.2.16}$$

converge débilmente en $W_0^{1,p}(\Omega)^M$ *a la única solución* u *de*

$$\left\{\begin{array}{l} u \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M \\ \displaystyle\int_\Omega a(Du) : Dv dx + \int_\Omega F(u) v d\mu = \langle f, v\rangle \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M. \end{array}\right. \tag{2.2.17}$$

Demostración. Sea f_n una sucesión que converge fuerte en $W^{-1,p'}(\Omega)^M$ a una distribución f. Usando u_n como función test en (2.2.16) y gracias a las propiedades (2.0.3) y (2.0.11) de a_n y F_n, se tiene que u_n verifica

$$\int_\Omega |Du_n|^p dx + \int_\Omega |u_n|^p d\mu_n \leq M.$$

De este modo, existe una subsucesión de n (que seguimos denotando por n), y una función $u \in W_0^{1,p}(\Omega)^M$, tal que u_n converge debilmente a u en $W_0^{1,p}(\Omega)^M$. Por (1.2.8), se tiene que u

pertenece a $L^p_\mu(\Omega)$. Cuando probemos que u es solución de (2.2.17), se deducirá graicas a la unicidad de solución, que toda la sucesión converge.

Por el teorema 2.1.8, sabemos que que existe una función μ-medible $H \in L^{p'}_\mu(\Omega)$, tal que u satisface (2.1.19).

Para todo $q \in \mathbb{Q}^M$, sea $q^m_n \in W^{1,p}_0(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M$, la solución de (2.2.1). Aplicando la estimación (2.1.40) a u_n y a q^m_n en lugar de v_n, se tiene

$$|H - Q^m| \leq \gamma(Hu + Q^m q^m)^{\frac{2p-2-p_m\sigma}{2p}}((H - Q^m)(u - q^m))^{\frac{\sigma}{p_M}}. \tag{2.2.18}$$

Tomando límite cuando m tiende a infinito y usando el lema 2.2.1, la definición 2.2.2 y (2.2.12), obtenemos

$$|H - F(x, wq)| \leq \gamma(Hu + F(x, wq)wq)^{\frac{2p-2-p_m\sigma}{2p}}((H - F(x, wq))(u - wq))^{\frac{\sigma}{p_M}}.$$

De esta forma, para toda función simple $\psi = \sum_{i=1}^m q_i\chi_{B_i}$, con $q_i \in \mathbb{Q}^M$,y $B_i \subset \Omega$ Borel, se verifica

$$|H-F(x, w\psi)| \leq \gamma(Hu+F(x, w\psi)w\psi^) \frac{2p-2-p_m\sigma}{2p}((H-F(x, w\psi))(u-w\psi))^{\frac{\sigma}{p_M}}, \quad \mu\text{-e.c.t. } \Omega.$$

Finalmente, usando la proposición 1.2.5 (b), si tomamos una sucesión de funciones simples convergentes a u, μ-e.c.t., y teniendo en cuenta la propiedad (2.2.15) de F, concluimos que $H(x) = F(x, u(x))$ μ-e.c.t. Ω, y por tanto la prueba del resultado.

□

2.2.4 Observación. *Nótese que la función a coincide con el H-límite de a_n y no depende de (F_n, μ_n).*

Para finalizar esta sección, presentamos un resultado corrector (es decir, una aproximación en la topología fuerte de $L^p(\Omega, M_{M\times N})$) del gradiente de las soluciones u_n de (2.2.16). Usaremos la siguiente estimación.

2.2.5 Lema. *Consideremos la subsucesión de n dada por el lema 2.2.1. Sean u_n, $v_n \in W^{1,p}_0(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M$, f_n, $g_n \in W^{-1,p'}(\Omega)^M$, u, $v \in W^{1,p}_0(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M$, f, $g \in W^{-1,p'}(\Omega)^M$*

tales que se verifican (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3), (2.1.4), (2.1.24), (2.1.25), (2.1.26) y (2.1.27). Entonces

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |D(u_n - v_n - \bar{u}_n + \bar{v}_n)|^p\varphi dx + \int_\Omega |u_n - v_n|^p\varphi d\mu_n\right) \le$$

$$\le C\left(\int_\Omega (|u|+|v|)^p\varphi d\mu\right)^{\frac{p_M-1-\sigma}{p_M-\sigma}}\left(\int_\Omega |u-v|^p d\varphi d\mu\right)^{\frac{1}{p_M-\sigma}}, \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega),\, \varphi\ge 0.$$

Demostración. El resultado se deduce de (2.1.31), las propiedades (2.0.3) y (2.0.11) de a_n y F_n, el teorema 2.2.3 y (2.0.13) (aplicado a la función F que aparece en el teorema 2.2.3). □

2.2.6 Definición. *Consideremos la subsucesión de n dada por el lema 2.2.1. Para cualesquiera m, $n \in \mathbb{N}$ y $s \in \mathbb{R}^M$, definimos $R_n^m : \Omega\times\mathbb{R}^M \to M_{M\times N}$ como*

$$R_n^m(x,s) = Ds_n^m - D(\bar{s}_n) \quad \text{ e.c.t. } \Omega, \tag{2.2.19}$$

donde s_n^m es la única solución de

$$\begin{cases} s_n^m \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M \\ \displaystyle\int_\Omega a_n(Ds_n^m) : Dvdx + \int_\Omega F_n(s_n^m)vd\mu_n = m\int_\Omega (|w_n s|^{p-2}w_n s - |s_n^m|^{p-2}s_n^m)vdx \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M \end{cases} \tag{2.2.20}$$

y $\bar{s}_n$ es la única solución de

$$\begin{cases} -div\, a_n(D\bar{s}_n) = -div\, a(sw) \quad \text{ en } W^{-1,p'}(\Omega)^M \\ \bar{s}_n \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \end{cases} \tag{2.2.21}$$

Por el teorema 2.2.3, la sucesión s_n^m converge débilmente en $W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^2(\Omega)^m$ a la única solución s^m

$$\begin{cases} s^m \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M \\ \displaystyle\int_\Omega a(Ds^m) : Dvdx + \int_\Omega F(x,s^m)vd\mu = m\int_\Omega [|ws|^{p-2}ws - |s^m|^{p-2}s^m]vdx \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M. \end{cases}$$

Razonando como en el lema 2.2.1, deducimos

$$s_n^m \to sw \ \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M.$$

2.2.7 Nota. *La función $R_n^m(x,s)$ es medible en x para s fija pero en general no es continua en s para x fija. Luego R_n^m no es una función de Caratheodory.*

El siguiente resultado nos da una aproximación en $L^p(\Omega, M_{M\times N})$ del gradiente de la solución u_n del problema (2.1.3).

2.2.8 Teorema. *Sea n la subsucesión de n dada por el lema 2.2.1. Entonces existe una constante $C>0$ que satisface la siguiente propiedad:*

Para $f_n \in W^{-1,p'}(\Omega)^M$ que converge fuerte a f en $W^{-1,p'}(\Omega)^M$, sean u_n, u, $\bar{u}_n$ definidas respectivamente por (2.1.3), (2.2.17) y (2.1.4). Entonces, para toda función simple $\psi = \sum_{i=1}^{l} s_i \chi_{K_i}$ con $s_i \in \mathbb{R}^M$, $K_i \subset \Omega$ compacto y $w = 0$ μ-e.c.t. en $K_i \cap K_j$, $i \neq j$, tenemos

$$\begin{gathered}\limsup_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_{\cup_{i=1}^{l} K_i} |D(u_n - \bar{u}_n) - R_n^m(x,\psi)|^p dx \leq \\ \leq C \left(\int_{\cup_{i=1}^{l} K_i} (|u| + |w\psi|)^p d\mu \right)^{\frac{p_M - 1 - \sigma}{p_M - \sigma}} \left(\int_{\cup_{i=1}^{l} K_i} |u - w\psi|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p_M - \sigma}} .\end{gathered} \tag{2.2.22}$$

Demostración. Sea $s \in \mathbb{R}$ dada. Usando las definiciones (2.2.19) y (2.2.20) de R_n^m y s^m, el lema 2.2.5 implica que para toda función $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, y para cualquier $m \in \mathbb{N}$, obtenemos

$$\begin{gathered}\limsup_{n\to\infty} \int_{\Omega} |D(u_n - \bar{u}_n) - D(s_n^m - \bar{s}_n^m)|^p \varphi dx \leq \\ \leq C \left(\int_{\Omega} (|u| + |s^m|)^p \varphi d\mu \right)^{\frac{p_M - 1 - \sigma}{p_M - \sigma}} \left(\int_{\Omega} |u - s^m|^p \varphi d\mu \right)^{\frac{1}{p_M - \sigma}} ,\end{gathered} \tag{2.2.23}$$

donde $\bar{s}_n^m$ es la solución de

$$\begin{cases} -div\, a_n(D\bar{s}_n^m) = -div\, a_n(Ds^m) \\ \bar{s}_n^m \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases}$$

Usando que s^m converge fuerte a ws en $W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M$, deducimos fácilmente de (2.2.23)

$$\limsup_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega |D(u_n-\bar{u}_n)-R_n^m(x,s)|^p\varphi dx \leq$$
$$\leq C\left(\int_\Omega (|u|+|sw|)^p\varphi d\mu\right)^{\frac{p_M-1-\sigma}{p_M-\sigma}}\left(\int_\Omega |u-sw|^p\varphi d\mu\right)^{\frac{1}{p_M-\sigma}},\ \forall\varphi\in D(\Omega),\ \varphi\geq 0. \tag{2.2.24}$$

Si ahora $K\subset\Omega$ es compacto, la desigualdad (2.2.24) da

$$\limsup_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_K |D(u_n-\bar{u}_n)-R_n^m(x,s)|^p dx \leq$$
$$\leq C\left(\int_\Omega (|u|+|sw|)^p\varphi d\mu\right)^{\frac{p_M-1-\sigma}{p_M-\sigma}}\left(\int_\Omega |u-sw|^p\varphi d\mu\right)^{\frac{1}{p_M-\sigma}},\ \forall\varphi\in D(\Omega),\ \varphi\geq \chi_K,$$

lo que implica

$$\limsup_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_K |D(u_n-\bar{u}_n)-R_n^m(x,s)|^p dx \leq$$
$$\leq C\left(\int_K (|u|+|sw|)^p d\mu\right)^{\frac{p_M-1-\sigma}{p_M-\sigma}}\left(\int_K |u-sw|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p_M-\sigma}}.$$

Si ahora $\psi=\sum_{i=1}^l s_i\chi_{K_i}$ es la función que parece en el teorema 2.2.8, entonces, escribiendo (2.2.24) para s_i, K_i, sumando en i y aplicando Hölder deducimos (2.2.22). □

2.2.9 Nota. *El significado el teorema 2.2.8 es que*

$$Du_n \sim D\bar{u}_n + R_n^m(x,\tfrac{u}{w}) \quad \text{en } L^p(\Omega)^M.$$

Sin embargo, $R_n^m(x,\frac{u}{w})$ *no está bien definida, ya que no sabemos ni siquiera si es medible (véase la nota 2.2.7). Así, es conveniente escribir (2.2.22).*

2.2.1 Casos Particulares: Los casos Lineal y Homogéneo

Análogamente a como ocurre en el caso en que las funciones a_n no dependen de n (ver [18]), hay algunas propiedades sobre la sucesión a_n, como la homogeneidad o la linealidad que son heredadas por las funciones F y a que parecen en le problema límite. Más exactamente, se tienen los siguientes resultados.

2.2.10 Proposición. *Sean a_n y (F_n, μ_n) en las condiciones de la sección 2. Supongamos que a_n y F_n satisfacen las siguientes condiciones de homogeneidad:*

$$a_n(x, \lambda\xi) = |\lambda|^{p-2}\lambda a_n(x, \xi),\ \forall \xi \in \mathcal{M}_{M\times N},\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ e.c.t.\ x \in \Omega. \tag{2.2.25}$$

$$F_n(x, \lambda s) = |\lambda|^{p-2}\lambda F_n(x, s),\ \forall s \in \mathbb{R}^M,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \mu_n\text{-}e.c.t.\ x \in \Omega. \tag{2.2.26}$$

Bajo estas hipótesis, se tiene que en el teorema 2.2.3 las funciones a y F satisfacen

$$a(x, \lambda\xi) = |\lambda|^{p-2}\lambda a(x, \xi),\ \forall \xi \in \mathcal{M}_{M\times N},\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ e.c.t.\ x \in \Omega. \tag{2.2.27}$$

$$F(x, \lambda s) = |\lambda|^{p-2}\lambda F(x, s),\ \forall s \in \mathbb{R}^M,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \mu\text{-}e.c.t.\ x \in \Omega. \tag{2.2.28}$$

Demostración. De las hipótesis (2.2.25) y (2.2.26) se tiene que para todo $r \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{Q}^M$, la solución q_n^m de (2.2.1) verifica

$$(rq)_n^m = rq_n^m, \quad \mu\text{-e.c.t. } \Omega,$$

donde $(rq)_n^m$ es la solución de (2.2.1) tomando rq en lugar de q. Teniendo en cuenta el lema 2.2.1, y tomando límite en n, se tiene que

$$(rq)^m = rq^m, \quad \mu\text{-e.c.t. } \Omega.$$

De esta forma, las funciones Q^m y Q_r^m definidas por (2.2.2) para los problemas asociados respectivamente a q y rq, satisfacen

$$Q_r^m = |r|^{p-2}rQ^m, \quad \forall r \in \mathbb{Q},\ \forall q \in \mathbb{Q}^M,\ \mu\text{-e.c.t. } \Omega.$$

Puesto que para todo $q \in \mathbb{Q}^M$, $F(x, wq)$ está definida como el límite de Q^m, se deduce

$$F(wrq, x) = |r|^{p-2}rF(x, wq), \quad \mu\text{-e.c.t. } \Omega,$$

lo que gracias a la continuidad de $\mathcal{F}$ en su segundo argumento, prueba (2.2.28).

Por el teorema 1.3.1, sabemos también que a satisface (1.2.12). □

En particular, tenemos el siguiente resultado corrector.

2.2.11 Proposición. *Sean a_n y F_n en las condiciones de la proposición 2.2.10. Entonces, la función R_n^m definida por (2.2.19), verifica*

$$R_n^m(x,ts) = tR_n^m(x,s) \text{ a.e en } \Omega,\ \forall s \in \mathbb{R}^M,\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.2.29}$$

Demostración. De las hipótesis (2.2.25) y (2.2.26) se deduce

$$(ts)_n^m = ts_n^m \quad \text{y} \quad (\bar{ts})_n = t\bar{s}_n,\ \forall t \in \mathbb{R}, \forall s \in \mathbb{R}^m,$$

donde s_n^m y $\bar{s}_n$ son respectivamente las soluciones de (2.2.20) y (2.2.21) y donde $(ts)_n^m$ y $(\bar{ts})_n$, son soluciones de los mismos, reemplazando s por ts. Teniendo en cuenta la definición de R_n^m se obtiene entonces (2.2.29).

□

De forma análoga, los resultados obtenidos en la presente sección permiten obtener los resultados para el caso lineal que aparecen en [34].

2.2.12 Proposición. *Consideremos ahora que las funciones $a_n(x,\xi)$ son de la forma $a_n(x)\xi$, donde $a_n(x)$ son funciones medibles en Ω, que toman valores en el espacio de las funciones lineales $\mathcal{M}_{M\times N}$ y satisfacen:*

Existen dos constantes α, $\gamma > 0$ tal que

$$a_n(x)(\xi_1 - \xi_2) : (\xi_1 - \xi_2) \geq \max\{\alpha|\xi_1 - \xi_2|^2,\ \frac{1}{\gamma}|a_n(x)(\xi_1 - \xi_2)|^2\}\}, \tag{2.2.30}$$

$\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{M}_{M\times N}$, e.c.t. Ω.

Análogamente, supongamos que las funciones F_n son lineales en su segundo argumento, es decir de la forma $F_n(x)s$, donde F_n son funciones μ_n-medibles en Ω que toman valores en el espacio de las funciones lineales en $\mathbb{R}^M$ y satisfacen

$$F_n(x)(s_1 - s_2)(s_1 - s_2) \geq \max\{\alpha|s_1 - s_2|^2,\ \frac{1}{\gamma}|F_n(x)(s_1 - s_2)|^2\}, \tag{2.2.31}$$

$\forall s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}^M$, μ_n-e.c.t. Ω.

Bajo estas hipótesis, las funciones a y F en el problema límite (2.2.17), satisfacen las mismas condiciones de linealidad con las mismas constantes, i.e.:

$$a(x)(\xi_1 - \xi_2) : (\xi_1 - \xi_2) \geq \max\{\alpha|\xi_1 - \xi_2|^2, \frac{1}{\gamma}|a(x)(\xi_1 - \xi_2)|^2\}, \tag{2.2.32}$$

$\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{M}_{M\times N}$, *e.c.t.* Ω.

$$F(x)(s_1 - s_2)(s_1 - s_2) \geq \max\{\alpha|s_1 - s_2|^2, \frac{1}{\gamma}|F(x)(s_1 - s_2)|^2\}, \tag{2.2.33}$$

$\forall s_1,\, s_2 \in \mathrm{IR}^M$, μ-*e.c.t.* Ω.

Más aún, las funciones $R_n^m : \Omega \times \mathrm{IR}^M \to M_{M\times N}$ *definidas por (2.2.19) son también lineales en su segundo argumento.*

Demostración. De (2.2.30) y (2.2.31) deducimos que a_n y F_n son homogéneas en su segundo argumento, para el caso $p = 2$. La aditividad se prueba de forma análoga.

En cuanto a las funciones R_n^m, basta tener en cuenta su definición y la linealidad de las aplicaciones $s \to s_n^m$, $s \to \bar{s}_n^m$. □

2.3 Aplicación de la doble homogeneización al estudio de existencia de solución de un problema de diseño óptimo

En esta sección aplicamos los resultados de homogeneización obtenidos a lo largo del capítulo 2 para estudiar la existencia de solución de un problema de control para sistemas elípticos no lineales donde las variables de control son los coeficientes de la ecuación y el abierto donde ésta se plantea. El problema se aplica a la selección de materiales y formas, es decir, a problemas de diseño óptimo.

Como problema modelo, consideraremos un funcional $J : W_0^{1,p}(\Omega)^M \to \mathrm{IR}$ que supondremos semicontinuo inferiormente y una distribución $f \in W^{-1,p'}(\Omega)^M$. Nuestro objetivo es encontrar el mínimo del problema

$$\begin{gathered} \min J(u) \\ a \in \mathcal{A}(p, \alpha, \gamma, \sigma, r), \quad \widetilde{\Omega} \subset \Omega \text{ abierto} \end{gathered} \tag{2.3.1}$$

siendo u la solución del problema

$$\begin{cases} -div\, a(x, \nabla u) = f \text{ en } \mathcal{D}'(\widetilde{\Omega})^M \\ u \in W_0^{1,p}(\widetilde{\Omega})^M. \end{cases}$$

Con el objetivo de probar la existencia de solución de este problema, la idea sería usar el método directo de cálculo de variaciones. Para ello, consideramos $\Omega_n \subset \Omega$ abiertos, y coeficientes $a_n \in \mathcal{A}$ minimizantes, es decir tales que la sucesión u_n de soluciones de

$$\begin{cases} -div\, a_n(x, \nabla u_n) = f \quad \text{ en } \Omega_n \\ u_n \in W_0^{1,p}(\Omega_n)^M \end{cases} \tag{2.3.2}$$

verifica

$$\liminf_{n\to\infty} J(u_n) = I$$

donde

$$I = \inf\{J(u) :\ a \in \mathcal{A},\ \widetilde{\Omega} \subset \Omega,\ u \text{ satisface } (2.3.1)\}.$$

Tomando u_n como función test en (2.3.1), deducimos

$$\int_\Omega a_n(x, \nabla u_n)\nabla u_n dx = \int_\Omega f u_n dx,$$

que por (2.0.3), implica

$$\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)^M} \leq \frac{\|f\|_{W^{-1,p'}(\Omega)^M}}{\sqrt{\alpha}},$$

donde hemos identificado u_n con su extensión por cero en $\Omega\backslash\Omega_n$. De esta forma, existe una subsucesión (que seguimos denotando por u_n) que converge débilmente a una función u en $W_0^{1,p}(\Omega)^M$. Por la semicontinuidad inferior de J, se tiene entonces $J(u) \leq I$. Si existen $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ y $a \in \mathcal{A}$ tales que u satisface (2.3.1), entonces $J(u) = I$ y el problema quedaría resuelto. Sin embargo, como ya hemos visto anteriormente en este capítulo, sabemos que en general lo que existe es $(F, \mu) \in \mathcal{F}$, tal que u es solución de

$$\begin{cases} \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M \\ \displaystyle\int_\Omega a(\nabla u)\nabla v dx + \int_\Omega F(x,u) v d\mu = \langle f, v\rangle \text{ en } \mathcal{D}(\Omega)^M \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M. \end{cases}$$

Por tanto, debemos en general esperar que el problema no tenga solución. Vamos a verlo con un contraejemplo. Para ello, recordamos que si $N = 3$, $p = 2$ y $\Omega_n = \Omega \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^N} B(\frac{k}{n}, \frac{1}{n^3})$, entonces (ver [20]), la sucesión de soluciones u_n de (2.3.2) con $a_n(x,\xi) = \xi$, para todos $\xi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, e.c.t. $x \in \Omega$, (el operador de Laplace) converge débilmente en $H_0^1(\Omega)$ a la única solución u de

$$\begin{cases} -\Delta\, u + \frac{4\pi}{3} u = f \quad \text{en } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.3.3}$$

Como consecuencia de este resultado, podemos probar ahora el siguiente teorema.

2.3.1 Teorema. *El problema (2.3.1), en general no tiene solución.*

Demostración. Supongamos $N = 3$. Denotamos u_0 la solución de (2.3.3) con $f = 1$ y $\bar{u}$ la solución de

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u} = 1 \quad \text{en } \Omega \\ \bar{u} \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.3.4}$$

Consideremos $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) = \int_\Omega |u - u_0|^2 dx,\ \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

con u_0 la solución de (2.3.3) y ε suficientemente pequeño, tal que

$$\left(\frac{\varepsilon^2 + 4\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2 \int_\Omega |\nabla \bar{u}|^2 dx < \int_\Omega |\nabla(\bar{u} - u_0)|^2 dx. \tag{2.3.5}$$

Por el principio del máximo con $f = 1$, $u < \bar{u}$ en Ω.

Consideremos $\alpha = 1 - \varepsilon$, $\gamma = \frac{1}{1+\varepsilon}$, $p = 2$, $\sigma = 1$ y $r = 2$.

Del resultado mencionado anteriormente, podemos deducir que en este caso $I = 0$. De este modo, si existe $(a, \widetilde{\Omega})$ solución de (2.3.1), entonces u_0 es solución de

$$\begin{cases} -div\, a(x, \nabla u_0) = 1 & \text{en } \widetilde{\Omega} \\ u_0 \in H_0^1(\widetilde{\Omega}). \end{cases}$$

Ahora, $u_0 \in H_0^1(\widetilde{\Omega})$, implica que $u_0 = 0$ e.c.t. $\Omega \backslash \widetilde{\Omega}$. Por otra parte, el principio del máximo fuerte aplicado (2.3.3) con segundo miembro igual a 1, implica que u_0 es estrictamente positiva en Ω. De esta forma, $\Omega \backslash \widetilde{\Omega}$ tiene C_2-capacidad nula, pero entonces $H_0^1(\Omega)$ es igual $H_0^1(\widetilde{\Omega})$, y u_0 es también solución del problema

$$\begin{cases} -div\, a(x, \nabla u_0) = 1 & \text{en } \Omega \\ u_0 \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.3.6}$$

Por otro lado, por (2.0.3), para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$ y e.c.t. $x \in \Omega$, tenemos

$$\begin{aligned} |\xi - a(x, \xi)| = |\xi|^2 + |a(x, \xi)|^2 - 2a(x, \xi)\xi \leq \\ \leq |\xi|^2 + (1+\varepsilon)^2 |\xi|^2 - 2(1-\varepsilon)|\xi|^2 = (4\varepsilon + \varepsilon^2)|\xi|^2. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Tomando $u_0 - \bar{u}$ como función test en la diferencia de (2.3.4) y (2.3.6), deducimos

$$\int_\Omega [a(x, \nabla u_0) - \nabla \bar{u}] \nabla (u_0 - \bar{u}) dx = 0,$$

y usando a continuación, (2.0.3) y (2.0.4), se obtiene

$$\begin{aligned} (1-\varepsilon) \int_\Omega |\nabla (u_0 - \bar{u})|^2 dx \leq \int_\Omega [a(x, \nabla u_0) - a(x, \nabla \bar{u})] \nabla (u_0 - \bar{u}) dx \leq \\ \leq \int_\Omega [\nabla \bar{u} - a(x, \nabla \bar{u})] \nabla (u_0 - \bar{u}) dx \leq \\ \leq (4\varepsilon + \varepsilon^2) \left(\int_\Omega |\nabla \bar{u}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla (u_0 - \bar{u})|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Teniendo en cuenta (2.3.5) y (2.3.8) llegamos a un absurdo. $\square$

De este resultado se deduce que el problema de control en la formulación (2.3.1) no tiene solución. Veamos a continuación que sí tiene solución si buscamos las variables de control en un conjunto más grande. Para ello, sustituiremos el problema inicial por

$$\min\{J(u) : a \in \mathcal{A}(p,\alpha,\gamma,\sigma,r),\ (F,\mu) \in \mathcal{F}(p,\alpha,\gamma,\sigma)\}, \tag{2.3.9}$$

donde u verifica un problema del tipo

$$\left\{\begin{array}{l} u \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,\nabla u)\nabla v dx + \int_\Omega F(x,u) v d\mu = \langle f, v\rangle \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M. \end{array}\right. \tag{2.3.10}$$

La ventaja de esta nueva formulación se deduce del teorema (2.2.3), que gracias al método directo de cálculo de variaciones permite fácilmente probar el siguiente resultado.

2.3.2 Teorema. *El problema (2.3.9) admite al menos una solución $a \in \mathcal{A}(p,\alpha,\gamma,\sigma,r)$, $(F,\mu) \in \mathcal{F}(p,\alpha,\gamma,\sigma)$.*

Una cuestión pendiente de probar sería saber si la nueva formulación (2.3.9), es una relajación de (2.3.1), es decir si para todos $a \in \mathcal{A}(p,\alpha,\gamma,\sigma,r)$ y $(F,\mu) \in \mathcal{F}(p,\alpha,\gamma,\sigma)$, existen $a_n \in \mathcal{A}$ y $\Omega_n \subset \Omega$ abiertos, tales que las soluciones u_n de (2.3.2) convergen débilmente en $W_0^{1,p}(\Omega)^M$ a la solución u de (2.3.10). Esto sería cierto si pedimos a los elementos de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{F}$ que sean lineales en su segunda variable (véase [34]).

2.3.3 Observación. *Nótese que en realidad el teorema 2.3.2 sigue siendo cierto si sustituimos los conjuntos $\mathcal{A}(p,\alpha,\gamma,\sigma,r)$, $\mathcal{F}(p,\alpha,\gamma,\sigma)$ por conjuntos $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}(p,\alpha,\gamma,\sigma,r)$, $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}(p,\alpha,\gamma,\sigma)$ cerrados para la homogeneización en el sentido de que las soluciones de un problema del tipo*

$$\left\{\begin{array}{l} u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M \\ \displaystyle\int_\Omega a_n(x,\nabla u_n)\nabla v dx + \int_\Omega F_n(x,u_n) v d\mu_n = \langle f, v\rangle \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M, \end{array}\right.$$

con $a_n \in \mathcal{A}'$, $(F_n,\mu_n) \in \mathcal{F}'$, convergen a la solución de una ecuación del tipo (2.3.10) con $a \in \mathcal{A}'$, $(F,\mu) \in \mathcal{F}'$. Esto es mucho más adecuado desde el punto de vista aplicado, ya que en general no disponemos de todos los operadores (materiales), ni de todas las formas.

El problema es encontrar ejemplos de tales conjuntos $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{F}'$. Obsérvese que $\mathcal{A}'$ debe ser cerrado por H-convergencia. La obtención de conjuntos cerrados por H-convergencia es un problema muy difícil para el cual remitimos a [54], [64], [50], [1].

Como ejemplo importante de conjuntos $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{F}'$, podemos considerar $\mathcal{A}'$ el conjunto de matrices $A \in L^\infty(\Omega; M_{M\times N})$ simétricas tales que p.c.t. $x \in \Omega$, existe $\theta(x) \in [0,1]$, tal que si denotamos

$$\lambda^-(x) = \left(\frac{\theta(x)}{\alpha} + \frac{1-\theta(x)}{\beta}\right)^{-1} \; y$$

$$\lambda^+(x) = \theta(x)\alpha + (1-\theta(x))\beta, \;\; e.c.t. \;\; x \in \Omega,$$

entonces los autovalores de $A(x,\cdot)$, verifican

$$\lambda^-(x) \leq \lambda_1(x) \leq \ldots \leq \lambda_N(x) \leq \lambda^+(x),$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i(x)-\alpha} \leq \frac{1}{\lambda^-(x)-\alpha} + \frac{N-1}{\lambda^+(x)-\alpha},$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{\beta-\lambda_i(x)} \leq \frac{1}{\beta-\lambda^-(x)} + \frac{N-1}{\beta-\lambda^+(x)}.$$

Y como conjunto $\mathcal{F}$, el conjunto de elementos $(F,\mu) \in \mathcal{F}(p,\alpha,\gamma,\sigma)$, tales que

$$F(x,s) = s \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \mu\text{-}e.c.t. \; x \in \Omega, \quad \mu \in \mathcal{M}_0^2(\Omega).$$

Esto correspondería a la elección de un material obtenido mezclando dos materiales, correspondientes a los operadores $-\alpha\Delta$, $-\gamma\Delta$ (materiales homogéneos isótropos) y a una elección de forma arbitraria.

Capítulo 3

Homogeneización de sistemas parabólicos de Dirichlet para operadores monótonos que varían en dominios perforados

El objetivo de este capítulo es mostrar como los resultados relativos a la homogeneización del caso elíptico obtenidos en el capítulo 2, se pueden usar para realizar la homogeneización del problema parabólico

$$\begin{cases} u_n \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M),\ u_n(x,0) = 0 \ \text{ e.c.t. } \Omega, \\ \langle \partial_t u_n, v\rangle + \displaystyle\int_\Omega a_n(x, Du_n) : Dv\, dx + \int_\Omega F_n(x,u_n) v\, d\mu_n = \langle f_n, v\rangle \ \text{ en } \mathcal{D}'(0,T) \\ \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M, \end{cases} \tag{3.0.1}$$

donde a_n y (F_n, μ_n) son sucesiones elegidas respectivamente en los conjuntos $\mathcal{A}(p,\alpha,\gamma,\sigma,r)$ y $\mathcal{F}(p,\alpha,\gamma,\sigma)$ del capítulo anterior.

Como en el capítulo anterior, se denota por C una constante que sólo depende de p, N, α, γ, σ, y puede cambiar de una línea a otra.

Para usar expresiones más cortas, normalmente no explicitaremos la dependencia en (x,t) de las funciones que aparecen. En algunos casos, cuando necesitemos la dependencia en t, escribiremos expresiones como $u(t)$ en lugar de $u(x,t)$.

El resultado principal viene dado por el siguiente teorema.

3.0.4 Teorema. *Sean $a_n \in \mathcal{A}(p,\alpha,\gamma,\sigma,r)$, $(F_n,\mu_n) \in \mathcal{F}(p,\alpha,\gamma,\sigma)$, denotamos por n la subsucesión de n dada por el teorema 2.2.3 y consideremos los elementos $a \in \mathcal{A}(p,\alpha,\gamma,\sigma,r)$ y $(F,\mu) \in \mathcal{F}(p,\alpha,\gamma,\sigma)$. Entonces, para toda sucesión f_n que converge fuerte a una distribución f en $L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)^M)$, la sucesión u_n de soluciones de (3.0.1) converge débilmente en $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M)$ a la única solución u del problema*

$$\begin{cases} u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M),\ u(x,0)=0, \quad e.c.t.\ x\in\Omega, \\ \langle \partial_t u, v\rangle + \displaystyle\int_\Omega a(Du):Dv dx + \int_\Omega F(u)v d\mu = \langle f,v\rangle, \quad en\ \mathcal{D}'(0,T) \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M, \end{cases} \tag{3.0.2}$$

siendo a, (F,μ) las mismas que aparecen en la homogeneización del problema elíptico.

Demostración. Vamos a probar el resultado en varias etapas.

Etapa 1.

Sean f_n y f en las hipótesis del teorema 3.0.4. Teniendo en cuenta la densidad de $W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M$ en el espacio de las funciones de $L^p(\Omega)^M$ que se anulan e.c.t. $\{w_n = 0\}$, la teoría de operadores monótonos garantiza la existencia de solución de (3.0.1) (ver [46]).

Usando u_n como función test en (3.0.1), deducimos la desigualdad

$$\int_\Omega |u_n(T)|^2 dx + \int_{Q_T} |Du_n(x,t)|^p dxdt + \int_{Q_T} |u_n(t)|^p d\mu_n dt \leq C \int_0^T \|f_n(t)\|^{p'}_{W^{-1,p'}(\Omega)^M} dt.$$

De este modo, extrayendo si es necesario una subsucesión y teniendo en cuenta (1.2.18), deducimos que existe $u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M)$ tal que u_n converge débilmente a u en $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)^M)$.

Cuando probemos que u es solución de (3.0.2), deduciremos por unicidad que no es necesario extraer ninguna subsucesión.

Etapa 2.

Vamos a probar que $\partial_t u$ pertenece a $L^{p'}(0,T;(W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M)')$. Para ello, dada $\varphi \in \mathcal{D}(Q_T)^M$ tomamos $w_n\varphi$ como función test en (3.0.1). Como las normas de $a_n(Du_n)$ y $F_n(u_n)$ están acotadas respectivamente en $L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega_n)^M)$ y $L^{p'}(0,T;L^{p'}_{\mu_n}(\Omega)^M)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\left|\int_{Q_T} u_n\partial_t(w_n\varphi)dxdt\right| = \left|\int_{Q_T} a_n(Du_n) : D(w_n\varphi)dxdt + \right. \\ \left. + \int_{Q_T} F_n(u_n)w_n\varphi d\mu_n dt - \int_{Q_T}\langle f_n, w_n\varphi\rangle dt\right| \leq M\|w_n\varphi\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)^M\cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M)},\end{aligned} \tag{3.0.3}$$

donde M es una constante positiva que no depende de n. Usando que u_n converge débilmente a u en $L^p(Q_T)^M$, así como (1.2.13) deducimos

$$\left|\int_{Q_T} u\partial_t(w\varphi)dxdt\right| \leq M\|w\varphi\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)^M\cap L^p_\mu(\Omega)^M)},\ \forall\varphi\in\mathcal{D}(Q_T)^M,$$

con los que teniendo en cuenta que el espacio $\{w\varphi :\ \varphi\in\mathcal{D}(Q_T)^M\}$ es denso en $L^p(0,T,W_0^{1,p}(\Omega)^M\cap L^p_\mu(\Omega)^M)$, concluimos que $\partial_t u$ pertenece $L^{p'}(0,T;(W_0^{1,p}(\Omega)^M\cap L^p_\mu(\Omega)^M)')$.

Etapa 3.

Consideremos una sucesión $\psi_m \in \mathcal{D}(Q_T)^M$ tal que $w\psi_m$ y $\partial_t(w\psi_m)$ convergen a u y $\partial_t u$ en $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)^M\cap L^p_\mu(\Omega)^M)$ y $L^{p'}(0,T;(W_0^{1,p}(\Omega)^M\cap L^p_\mu(\Omega)^M)')$ respectivamente. Esta sucesión existe por la proposición 1.2.7. Para $n,\ m\in\mathbb{N}$, definimos $\tilde{u}_{m,n}\in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)^M\cap L^p_\mu(\Omega)^M)$ como la solución del siguiente problema elíptico

$$\left\{\begin{array}{l}\tilde{u}_{m,n}(t)\in W_0^{1,p}(\Omega)^M\cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M\\ \displaystyle\int_\Omega a_n(D\tilde{u}_{m,n}(t)) : Dvdx + \int_\Omega F_n(\tilde{u}_{m,n}(t))vd\mu_n + m\int_\Omega[\tilde{u}_{m,n}(t) - w_n\psi_m(t)]vdx = 0\\ \forall v\in W_0^{1,p}(\Omega)^M\cap L^p_{\mu_n}(\Omega)^M,\ \text{e.c.t. } t\in(0,T).\end{array}\right. \tag{3.0.4}$$

Vamos a probar algunas propiedades de $\tilde{u}_{m,n}$.

Tomando $\tilde{u}_{m,n} - w_n\psi_m$ como función test en (3.0.4) y teniendo en cuenta las de las propiedades de a_n y F_n, se deduce

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |D\widetilde{u}_{m,n}(t)|^p dx + \int_\Omega |\widetilde{u}_{m,n}(t)|^p d\mu_n + m\int_\Omega |\widetilde{u}_{m,n}(t) - w_n\psi_m(t)|^2 dx \leq \\ &\leq C\left(\int_\Omega |h(x)|^{p'}dx + \int_\Omega |D(w_n\psi_m(t))|^p dxdt + \int_\Omega |w_n\psi_m(t)|^p d\mu_n\right),\end{aligned} \tag{3.0.5}$$

para todo $t \in (0,T)$. De este modo, para todo $t \in (0,T)$ y para todo $m \in \mathbb{N}$, existe una subsucesión de n (que puede depender de t y m), tal que $\widetilde{u}_{m,n}(t)$ converge débilmente en $W_0^{1,p}(\Omega)^M$. Gracias al teorema 2.2.3 del capítulo 2, concluimos que en realidad no es necesario extraer ninguna sucesión, de hecho, definiendo $\widetilde{u}_m \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M)$ como solución de

$$\begin{cases} \widetilde{u}_m(t) \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M \\ \displaystyle\int_\Omega a(D\widetilde{u}_m(t)) : Dv dx + \int_\Omega F(\widetilde{u}_m(t)) v d\mu + m\int_\Omega [\widetilde{u}_m(t) - w\psi_m(t)] v dx = 0 \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega, \mathbb{R}^M), \text{ para todo } t \in (0,T) \end{cases} \tag{3.0.6}$$

se tiene

$$\widetilde{u}_{m,n}(t) \rightharpoonup \widetilde{u}_m(t) \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega)^M, \tag{3.0.7}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ y para todo $t \in (0,T)$. En particular, por el teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov

$$\widetilde{u}_{m,n}(t) \to \widetilde{u}_m(t) \text{ en } L^p(\Omega)^M, \forall m \in \mathbb{N},\ t \in (0,T), \tag{3.0.8}$$

y por tanto

$$\int_\Omega |\widetilde{u}_{m,n}(t)|^p dx \to \int_\Omega |\widetilde{u}_m(t)|^p dx, \ \forall m \in \mathbb{N}, \text{ para todo } t \in (0,T).$$

Por otra parte, por (3.0.5) y la desigualdad de Poincaré, tenemos

$$\int_\Omega |\widetilde{u}_{m,n}(t)|^p dx \leq C\left(\int_\Omega |h(x)|^{p'}dx + \int_\Omega |D(w_n\psi_m(t))|^p dx + \int_\Omega |w_n\psi_m(t)|^p d\mu_n\right).$$

Como h pertenece a $L^{p'}(\Omega)$, la norma de w_n en $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^p_{\mu_n}(\Omega)$ está acotada y ψ_m está en $\mathcal{D}(Q_T)^M$, deducimos que para todo $m \in \mathbb{N}$, el segundo término de esta desigualdad está acotado independientemente de n y t. De este modo, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue para deducir

$$\int_{Q_T} |\widetilde{u}_{m,n}|^p dxdt \to \int_{Q_T} |\widetilde{u}_m|^p dxdt,$$

lo cual junto a (3.0.8), implica que

$$\widetilde{u}_{m,n} \to \widetilde{u}_m \text{ en } L^p(Q_T)^M, \ \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.0.9}$$

De (3.0.5) y (3.0.7), resulta también

$$\widetilde{u}_{m,n} \rightharpoonup \widetilde{u}_m \text{ en } L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)^M). \tag{3.0.10}$$

Además, usando las propiedades de a y F , es fácil deducir

$$\widetilde{u}_m \to u \text{ en } L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M) \ . \tag{3.0.11}$$

Por otra parte, definiendo $\bar{u}_{m,n} \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)^M)$ como la solución de

$$\begin{cases} \bar{u}_{m,n}(t) \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \\ \displaystyle\int_\Omega a_n(D\bar{u}_{m,n}(t)) : Dvdx = \int_\Omega a(D\widetilde{u}_m(t)) : Dvdx \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)^M, \ \forall t \in [0,T], \end{cases} \tag{3.0.12}$$

y usando el teorema 2.2.5 del capítulo anterior, deducimos que

$$\begin{gathered} \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |D(\widetilde{u}_{m,n}(t) - \widetilde{u}_{m,n}(r) - \bar{u}_{m,n}(t) + \bar{u}_{m,n}(r))|^p dx \leq \\ \leq C \left(\int_\Omega (|\widetilde{u}_m(t)| + |\widetilde{u}_m(r)|)^p d\mu \right)^{\frac{(p_M-1-\sigma)}{p_M-\sigma}} \left(\int_\Omega |\widetilde{u}_m(t) - \widetilde{u}_m(r)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p_M-\sigma}}, \end{gathered} \tag{3.0.13}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, para todo t, $r \in (0,T)$.

Por otra parte, tomando $\bar{u}_{m,n}(t) - \bar{u}_{m,n}(r)$ como función test en la diferencia de los problemas que satisfacen $\bar{u}_{m,n}(t)$ y $\bar{u}_{m,n}(r)$ (ver (3.0.4)), pasando al límite en n y usando las propiedades de a_n y a, deducimos también que existe $l \in L^p(\Omega)^M$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |D\bar{u}_{m,n}(t)-D\bar{u}_{m,n}(r)|^p dx\right)\leq$$
$$\leq C\left(\int_\Omega (l(x)+|D\widetilde{u}_m(t)|+|D\widetilde{u}_m(r)|)^p dx\right)^{\frac{(p_M-1-\sigma)}{p_M-\sigma}}\left(\int_\Omega |D\widetilde{u}_m(t)-D\widetilde{u}_m(r)|^p dx\right)^{\frac{1}{p_M-\sigma}}, \tag{3.0.14}$$

para todos $m\in\mathbb{N}$, para todo t, $r\in(0,T)$. De (3.0.9), (3.0.13) y (3.0.14), concluimos

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |D\widetilde{u}_{m,n}(t)-D\widetilde{u}_{m,n}(r)|^p dx+\int_\Omega |\widetilde{u}_{m,n}(t)-\widetilde{u}_{m,n}(r)|^p d\mu_n\right)\leq$$
$$\leq C\left(\int_\Omega (l(x)+|D\widetilde{u}_m(t)|+|D\widetilde{u}_m(r)|)^p dx\right)^{\frac{(p_M-1-\sigma)}{p_M-\sigma}}\left(\int_\Omega |D\widetilde{u}_m(t)-D\widetilde{u}_m(r)|^p dx\right)^{\frac{1}{p_M-\sigma}}+ \tag{3.0.15}$$
$$+C\left(\int_\Omega (|\widetilde{u}_m(t)|+|\widetilde{u}_m(r)|)^p d\mu\right)^{\frac{(p_M-1-\sigma)}{p_M-\sigma}}\left(\int_\Omega |\widetilde{u}_m(t)-\widetilde{u}_m(r)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p_M-\sigma}},$$

para todos $m\in\mathbb{N}$, para todo t, $r\in(0,T)$.

Etapa 4.

Para todo $R<T$, se tiene

$$\limsup_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\left(\int_{Q_R}|D(u_n(t)-\widetilde{u}_{m,n}(t))|^p dxdt+\int_{Q_R}|u_n(t)-\widetilde{u}_{m,n}(t)|^p d\mu_n dt\right)=0. \tag{3.0.16}$$

Sea $\zeta\in C^1[0,T]$ tal que $\zeta=1$ en $[0,R]$, $\zeta=0$ en $[\frac{R+T}{2},T]$, ζ decreciente. Para $0<t<\frac{R+T}{2}$, $0<s<\frac{T-R}{2}$, tomando $(u_n(t)-\widetilde{u}_{m,n}(t+s))\zeta(t)$ como función test en la diferencia de (3.0.1) y (3.0.4), obtenemos

$$\int_0^R\langle\partial_t u_n(t),u_n(t)-\widetilde{u}_{m,n}(t+s)\rangle\zeta(t)dxdt+\int_{Q_R}\check{a}_n(Du_n(t),D\widetilde{u}_{m,n}(t+s))\zeta(t)dxdt+$$
$$+\int_{Q_R}\check{F}_n(u_n(t),\widetilde{u}_{m,n}(t+s))\zeta(t)d\mu_n dt+ \tag{3.0.17}$$
$$+m\int_{Q_R}[\widetilde{u}_{m,n}(t+s)-w_n\psi_m(t+s)](\widetilde{u}_{m,n}(t+s)-u_n(t))\zeta(t)dxdt=$$

$$= \int_0^R \langle f_n(t), u_n(t) - \widetilde{u}_{m,n}(t+s)\rangle \zeta(t) dt.$$

Denotamos

$$\widetilde{\widetilde{u}}_{m,n}(t) = m \int_0^{\frac{1}{m}} \widetilde{u}_{m,n}(t+s) ds.$$

Integrando con respecto a s en $(0, \frac{1}{m})$, y multiplicando por m, obtenemos de (3.0.17)

$$\int_0^R \langle \partial_t u_n(t), u_n(t) - \widetilde{\widetilde{u}}_{m,n}(t)\rangle \zeta(t) dxdt +$$

$$\alpha m \int_0^{\frac{1}{m}} \int_{Q_R} |D(u_n(t) - \widetilde{u}_{m,n}(t+s))|^p \zeta(t) dxdtds +$$

$$+\alpha m \int_0^{\frac{1}{m}} \int_{Q_R} |u_n(t) - \widetilde{u}_{m,n}(t+s)|^p \zeta(t) d\mu_n dtds + \tag{3.0.18}$$

$$+m^2 \int_0^{\frac{1}{m}} \int_{Q_R} [\widetilde{u}_{m,n}(t+s) - w_n \psi_m(t+s)](\widetilde{u}_{m,n}(t+s) - u_n(t))\zeta(t) dxdtds \leq$$

$$\leq \int_0^R \langle f_n(t), u_n(t) - \widetilde{\widetilde{u}}_{m,n}(t)\rangle \zeta(t) dt.$$

Pasemos ahora al límite en (3.0.18), primero en n y después en m.

Para el primer término de (3.0.18), usamos que

$$\int_0^R \langle \partial_t u_n(t), u_n(t) - \widetilde{\widetilde{u}}_{m,n}(t)\rangle \zeta(t) dt = -\frac{1}{2} \int_{Q_R} |u_n(t)|^2 \zeta'(t) dxdt +$$
$$+m \int_{Q_R} u_n(t)(\widetilde{u}_{m,n}(t + \frac{1}{m}) - \widetilde{u}_{m,n}(t))\zeta(t) dxdt + \int_{Q_R} u_n(t) \widetilde{\widetilde{u}}_{m,n}(t) \zeta'(t) dxdt. \tag{3.0.19}$$

Teniendo en cuenta la semicontinuidad inferior para la convergencia débil en $L^2(Q_R)$ de la función $v \to -\int_{Q_R} |v|^2 \zeta'(t) dxdt$ y (3.0.9), obtenemos de (3.0.19)

$$\liminf_{n\to\infty}\int_0^R \langle\partial_t u_n(t), u_n(t)-\tilde{\tilde{u}}_{m,n}(t)\rangle\zeta(t)dxdt \geq -\frac{1}{2}\int_{Q_R}|u(t)|^2\zeta'(t)dxdt+$$
$$+m\int_{Q_R}u(t)(\tilde{u}_m(t+\frac{1}{m})-\tilde{u}_m(t))\zeta(t)dxdt+\int_{Q_R}u(t)\tilde{\tilde{u}}_m(t)\zeta'(t)dxdt, \tag{3.0.20}$$

donde hemos denotado

$$\tilde{\tilde{u}}_m(t)=m\int_0^{\frac{1}{m}}\tilde{u}_m(t+s)ds.$$

Para los segundo y tercer términos del primer miembro de (3.0.18), usamos la siguiente desigualdad

$$\int_{Q_R}|D(u_n(t)-\tilde{u}_{m,n}(t))|^p dxdt+\int_{Q_R}|u_n(t)-\tilde{u}_{m,n}(t)|^p d\mu_n dt \leq$$
$$\leq Cm\int_0^{\frac{1}{m}}\int_{Q_R}|Du_n(t)-D\tilde{u}_{m,n}(t+s)|^p\zeta(t)dxdtds+$$
$$+Cm\int_0^{\frac{1}{m}}\int_{Q_R}|D\tilde{u}_{m,n}(t+s)-D\tilde{u}_{m,n}(t)|^p\zeta(t)dxdtds+ \tag{3.0.21}$$
$$+Cm\int_0^{\frac{1}{m}}\int_{Q_R}|u_n(t)-\tilde{u}_{m,n}(t+s)|^p\zeta(t)d\mu_n dtds+$$
$$+Cm\int_0^{\frac{1}{m}}\int_{Q_R}|\tilde{u}_{m,n}(t+s)-\tilde{u}_{m,n}(t)|^p\zeta(t)d\mu_n dtds.$$

Gracias a (3.0.15) y (3.0.5), podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue para deducir

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\int_0^{\frac{1}{m}}\int_{Q_R}|D\tilde{u}_{m,n}(t+s)-D\tilde{u}_{m,n}(t)|^p\zeta(t)dxdtds+\right.$$
$$\left.+\int_0^{\frac{1}{m}}\int_{Q_R}|\tilde{u}_{m,n}(t+s)-\tilde{u}_{m,n}(t)|^p d\mu_n\zeta(t)dtds\right)\leq \tag{3.0.22}$$

$$\leq C\int_0^{\frac{1}{m}}\int_0^R\left(\int_\Omega(|D\tilde{u}_m(t+s)|+|D\tilde{u}_m(t)|)^p dx\right)^{\frac{p_M-1-\sigma}{p_M-\sigma}}\left(\int_\Omega|D(\tilde{u}_m(t+s)-\tilde{u}_m(t))|^p dx\right)^{\frac{1}{p_M-\sigma}}dtds+$$

$$+C\int_0^{\frac{1}{m}}\int_0^R\Big(\int_\Omega(|\widetilde{u}_m(t+s)|+|\widetilde{u}_m(t)|)^p dx\Big)^{\frac{p_M-1-\sigma}{p_M-\sigma}}\Big(\int_\Omega|\widetilde{u}_m(t+s)-\widetilde{u}_m(t)|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p_M-\sigma}}dtds,$$

para todo $m\in\mathbb{N}$.

Para el cuarto término de (3.0.18) usamos (3.0.9), que implica

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{m}}\int_{Q_R}[\widetilde{u}_{m,n}(t+s)-w_n\psi_m(t+s)](\widetilde{u}_{m,n}(t+s)-u_n(t))\zeta(t)dxdtds=\\&=\int_0^{\frac{1}{m}}\int_{Q_R}[\widetilde{u}_m(t+s)-w\psi_m(t+s)](\widetilde{u}_m(t+s)-u(t))\zeta(t)dxdtds,\end{aligned}\tag{3.0.23}$$

para todo $m\in\mathbb{N}$.

Usando (3.0.20), (3.0.21), (3.0.22), (3.0.23) y pasando al límite en (3.0.18) en n obtenemos

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\int_{Q_R}|u(t)|^2\zeta'(t)dxdt+m\int_{Q_R}u(t)(\widetilde{u}_m(t+\frac{1}{m})-\widetilde{u}_m(t))\zeta(t)dxdt+\int_{Q_R}u(t)\widetilde{\widetilde{u}}_m(t)\zeta'(t)dxdt+\\&+\limsup_{n\to\infty}\Big(\int_{Q_R}|Du_n(t)-D\widetilde{u}_{m,n}(t)|^p dxdt+\int_{Q_R}|u_n(t)-\widetilde{u}_{m,n}(t)|^p d\mu_n dt\Big)+\\&+m^2\int_0^{\frac{1}{m}}\int_{Q_R}[\widetilde{u}_m(t+s)-w\psi_m(t+s)](\widetilde{u}_m(t+s)-u(t))\zeta(t)dxdt\le\\&\le Cm\int_0^{\frac{1}{m}}\int_0^R\Big(\int_\Omega(|D\widetilde{u}_m(t+s)|+|D\widetilde{u}_m(t)|)^p dx\Big)^{\frac{p-1-\sigma}{p-\sigma}}\Big(\int_\Omega|D(\widetilde{u}_m(t+s)-\widetilde{u}_m(t))|^p dx\Big)^{\frac{1}{p-\sigma}}dtds+\\&+Cm\int_0^{\frac{1}{m}}\int_0^R\Big(\int_\Omega(|\widetilde{u}_m(t+s)|+|\widetilde{u}_m(t)|)^p d\mu\Big)^{\frac{p_M-1-\sigma}{p_M-\sigma}}\Big(\int_\Omega|\widetilde{u}_m(t+s)-\widetilde{u}_m(t)|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p_M-\sigma}}dtds+\\&+\int_0^R\langle f,(u(t)-\widetilde{\widetilde{u}}_m(t))\zeta(t)\rangle dt,\end{aligned}\tag{3.0.24}$$

para todo $m\in\mathbb{N}$.

Pasemos ahora al límite en (3.0.24) cuando m tiende a infinito.

En primer lugar, observemos que (3.0.11) implica que $\widetilde{\widetilde{u}}_m$ converge a u en $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)^M\cap L^p_\mu(\Omega)^M)$. De esta forma, es inmediato obtener que el tercer término del primer miembro de (3.0.24) converge a $\int_{Q_R} u(t)^2\zeta'(t)dxdt$ y que el segundo miembro de (3.0.24) tiende a cero.

Para el quinto término del primer miembro de (3.0.24), usamos que $\widetilde{u}_m$ verifica (3.0.6) y (3.0.11), resultando que

$$\lim_{m\to\infty}\left(m^2\int_0^{\frac{1}{m}}\int_{Q_R}[\widetilde{u}_m(t+s)w\psi_m(t+s)](\widetilde{u}_m(t+s)-u(t))\zeta(t)dxdtds\right)=$$

$$=-\lim_{m\to\infty}\left(\int_0^1\int_{Q_R}a(D\widetilde{u}_m(t+\frac{r}{m})):(D\widetilde{u}_m(t+\frac{r}{m})-Du(t))\zeta(t)dxdtdr+\right.$$

$$\left.+\int_0^1\int_{Q_R}F(\widetilde{u}_m(t+\frac{r}{m}))(\widetilde{u}_m(t+\frac{r}{m})-u(t))\zeta(t)d\mu dtdr\right)=0.$$

Queda pasar al límite en el segundo término de (3.0.24). Para ello, observemos que

$$\begin{aligned} m\int_{Q_R}u(t)(\widetilde{u}_m(t+\frac{1}{m})-\widetilde{u}_m(t))\zeta(t)dxdt=&\\ =m\int_{Q_R}u(t)(\widetilde{u}_m(t+\frac{1}{m})-w\psi_m(t+\frac{1}{m}))\zeta(t)dxdt+&\\ +m\int_{Q_R}u(t)(w\psi_m(t+\frac{1}{m})-w\psi_m(t))\zeta(t)dxdt+&\\ +m\int_{Q_R}u(t)(w\psi_m(t)-\widetilde{u}_m(t))\zeta(t)dxdt.& \end{aligned} \tag{3.0.25}$$

Usando (3.0.6) como anteriormente, obtenemos que la suma del primer tercer términos del segundo miembro de (3.0.25) tiende a cero. Para el segundo, y gracias a que $w\partial_t\psi_m$ converge a $\partial_t u$ en $L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)^M)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty} m\int_{Q_R} u(t)(w\psi_m(t+\frac{1}{m}) - w\psi_m(t))\zeta(t)dxdt = \\
&= \lim_{m\to\infty}\int_0^1\int_{Q_R} w\partial_t\psi_m(t+\frac{r}{m})\zeta(t)u(t)dxdtdr = \\
&= \int_{Q_R}\langle\partial_t u, u\rangle\zeta(t)dt = -\frac{1}{2}\int_{Q_R}|u(t)|^2\zeta'(t)dt.
\end{aligned} \tag{3.0.26}$$

Hemos probado por tanto

$$\lim_{m\to\infty} m\int_{Q_R} u(t)(\widetilde{u}_m(t+\frac{1}{m}) - \widetilde{u}_m(t))\zeta(t)dxdt = -\frac{1}{2}\int_{Q_R}|u(t)|^2\zeta'(t)dxdt.$$

Así, de (3.0.24), deducimos (3.0.16).

Etapa 5.

Vamos a terminar la demostración del teorema 3.0.4, probando que u satisface (3.0.2). Para $\varphi \in \mathcal{D}(Q_T)^M$, tomamos $w_n\varphi$ como función test en (3.0.1). De esta forma, obtenemos

$$\begin{aligned}
&-\int_{Q_T} u_n w_n\partial_t\varphi dxdt + \int_{Q_T} a_n(Du_n) : D(w_n\varphi)dxdt + \\
&+\int_{Q_T} F_n(u_n)w_n\varphi d\mu_n dt = \int_0^T\langle f_n, w_n\varphi\rangle dxdt.
\end{aligned} \tag{3.0.27}$$

Como w_n converge fuertemente a w en $L^{p'}(\Omega)$ (de hecho en $L^q(\Omega)$ con $1 \leq q < +\infty$) y u_n converge a u en $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)^M)$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\int_{Q_T} u_n w_n\partial_t\varphi dxdt = \int_{Q_T} u\partial_t(w\varphi)dxdt.$$

Además la convergencia débil de w_n en $W_0^{1,p}(\Omega)^M$ da

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\langle f_n, w_n\varphi\rangle dx = \int_0^T\langle f, w\varphi\rangle dx.$$

De la etapa 4 y las propiedades de continuidad de a_n y F_n, deducimos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{Q_T} a_n(Du_n) : D(w_n\varphi)dxdt + \int_{Q_T} F_n(u_n)w_n\varphi d\mu_n dt\right) =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(\int_{Q_T} a_n(D\widetilde{u}_{m,n}) : D(w_n\varphi)dxdt + \int_{Q_T} F_n(\widetilde{u}_{m,n})w_n\varphi d\mu_n dt\right).$$

Pero tomando $w_n\varphi$ como función test en (3.0.4), y teniendo en cuenta (3.0.10), (3.0.11) y (3.0.6), llegamos a que

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(\int_{Q_T} a_n(D\widetilde{u}_{m,n}) : D(w_n\varphi)dxdt + \int_{Q_T} F_n(\widetilde{u}_{m,n})w_n\varphi d\mu_n dt\right) =$$

$$= \int_{Q_T} a(Du) : D(w\varphi)dxdt + \int_{Q_T} F(u)w\varphi d\mu dt.$$

De este modo, tenemos

$$\int_{Q_T} \langle \partial_t u, w\varphi\rangle dt + \int_{Q_T} a(Du) : D(w\varphi)dxdt + \int_{Q_T} F(u)w\varphi d\mu dt = \int_0^T \langle f, w\varphi\rangle,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(Q_T)^M$. Gracias a que el espacio $\{w\varphi : \varphi \in \mathcal{D}(Q_T)^M\}$ es denso en $L^p(0,T,W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M)$, para probar que u es solución de (3.0.2) sólo nos queda obtener la condición inicial $u(x,0)=0$ en Ω. Para ello, tomaremos u_n como función test en (3.0.1) en Q_s para $s>0$. Así, se llega a

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |u_n(s)|^2 dx = -\int_0^s\!\!\int_\Omega a(Du_n(t)) : Du_n(t)dxdt -- \int_0^s\!\!\int_\Omega F(u_n(t))u_n(t)d\mu_n dt + \int_0^s \langle f_n(t), u_n(t)\rangle dt.$$

Integrando esta desigualdad en s entre 0 y ε, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^\varepsilon \int_\Omega |u_n(s)|^2 dxds = -\int_0^\varepsilon\!\!\int_\Omega a(Du_n(t)) : Du_n(t)(\varepsilon - t)dxdt -\\ -\int_0^\varepsilon\!\!\int_\Omega F(u_n(t))u_n(t)(\varepsilon - t)d\mu_n dt + \int_0^\varepsilon \langle f_n(t), u_n(t)\rangle(\varepsilon - t)dt.\end{aligned} \tag{3.0.28}$$

Usando la etapa 4, es fácil deducir

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^\varepsilon\!\!\int_\Omega a_n(Du_n(t)) : Du_n(t)(\varepsilon-t)dxdt + \int_0^\varepsilon\!\!\int_\Omega F_n(u_n(t))u_n(t)(\varepsilon-t)d\mu_n dt\right) =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^\varepsilon\!\!\int_\Omega a_n(D\widetilde{u}_{m,n}(t)) : D\widetilde{u}_{m,n}(t)(\varepsilon-t)dxdt + \right.$$

$$\left. + \int_0^\varepsilon\!\!\int_\Omega F_n(\widetilde{u}_{m,n}(t))\widetilde{u}_{m,n}(t)(\varepsilon-t)d\mu_n dt\right) =$$

$$= \int_0^\varepsilon\!\!\int_\Omega a(Du(t)) : Du(t)(\varepsilon-t)dxdt + \int_0^\varepsilon\!\!\int_\Omega F(u(t))u(t)(\varepsilon-t)d\mu dt.$$

De este modo, podemos pasar al límite en (3.0.28) resultando

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon\!\!\int_\Omega |u(s)|^2 dxds \le \liminf_{n\to\infty}\int_0^\varepsilon\!\!\int_\Omega |u_n(s)|^2 dxds =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon\!\!\int_\Omega a(Du(t)) : Du(t)(\varepsilon-t)dxdt - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon\!\!\int_\Omega F(u(t))u(t)(\varepsilon-t)d\mu dt +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon (\varepsilon-t)\langle f(t), u(t)\rangle dt,$$

lo que implica

$$\int_\Omega |u(x,0)|^2 dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon\!\!\int_\Omega |u(x,s)|^2 dxds = 0,$$

y con lo cual concluimos la demostración del teorema 3.0.4.

□

3.0.5 Observación. *En el teorema 3.0.4 hemos probado que*

$$Du_n \sim D\widetilde{u}_{m,n} \text{ en } L^2(0,T;L^2(\Omega)^M).$$

De lo que se deduce que podemos obtener un resultado corrector para el problema parabólico a partir del corrector obtenido en el capítulo anterior para el elíptico.

Para terminar esta sección, vamos a mejorar el resultado de convergencia que aparece en el teorema 3.0.4, probando el siguiente teorema que se aplicará en particular, al estudio de problemas de control.

3.0.6 Teorema. *Sean dos sucesiones $a_n \in \mathcal{A}$ y $(F_n, \mu_n) \in \mathcal{F}$ y consideremos la sucesión de n dada en el teorema 3.0.4. Entonces, para toda distribución $f \in L^{p'}(0,T;(W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M)')$, la solución u_n de (3.0.1) verifica*

$$u_n(s) \to u(s) \text{ en } L^2(\Omega)^M \quad \forall s \in (0,T],$$

donde u es la solución de (3.0.2).

Demostración. Es suficiente probar

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n(s) - h|^2 = \int_\Omega |u(s) - h|^2 dx, \tag{3.0.29}$$

para toda función $h \in \mathcal{D}(\Omega)^M$ y todo $t \in (0,T]$. Para demostrar (3.0.29), consideramos para todo $\varepsilon > 0$, la función $R_\varepsilon(s) : \mathrm{I\!R} \to \mathrm{I\!R}$, definida como

$$R_\varepsilon(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \geq \varepsilon \\ \dfrac{s}{\varepsilon} & \text{si } 0 \leq s \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Tomando entonces $u_n(s) - hR_\varepsilon(w_n)$, con $h \in \mathcal{D}(\Omega)^M$, como función test en (3.0.1), y usando

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega |hR_\varepsilon(w_n)|^2 dx + \int_0^s \langle f, hR_\varepsilon(w_n)\rangle dt \right) = \int_\Omega |hR_\varepsilon(w)|^2 dx + \int_0^s \langle f, hR_\varepsilon(w)\rangle dt,$$

se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \int_\Omega |u_n(s) - hR_\varepsilon(w_n)|^2 dx = - \lim_{n\to\infty} \left(\int_{Q_s} a_n(Du_n) : D(u_n - hR_\varepsilon(w_n)) dxdt + \right.$$

$$\left. + \int_{Q_s} F_n(u_n)(u_n - hR_\varepsilon(w_n)) d\mu_n dt \right) - \tag{3.0.30}$$

$$- \frac{1}{2} \int_\Omega |hR_\varepsilon(w)|^2 dx + \int_0^s \langle f, (u_n - hR_\varepsilon(w_n))\rangle dt.$$

Por otra parte, por (3.0.16) es fácil deducir que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{Q_s} a_n(Du_n):D(u_n-hR_\varepsilon(w_n))dxdt+\int_{Q_s}F_n(u_n)(u_n-hR_\varepsilon(w_n))d\mu_n dt\right)=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(\int_{Q_s} a_n(D\widetilde{u}_{m,n}):D(u_n-hR_\varepsilon(w_n))dxdt+\int_{Q_s}F_n(\widetilde{u}_{m,n})(u_n-hR_\varepsilon(w_n))d\mu_n dt\right)=$$

$$=\int_{Q_s} a(Du):D(u-hR_\varepsilon(w))dxdt+\int_{Q_s}F(u)(u-hR_\varepsilon(w))d\mu dt.$$

Así, de (3.0.30) y del hecho de que u verifica (3.0.2), se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n(s)-hR_\varepsilon(w_n)|^2dx=\int_\Omega |u(s)-hR_\varepsilon(w)|^2dx,$$

para todo $\varepsilon>0$, que fácilmente implica

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n(s)-h\chi_{\{w_n>0\}}|^2dx=\int_\Omega |u(s)-h\chi_{\{w_n>0\}}|^2dx. \tag{3.0.31}$$

Pero por la proposición 1.2.5 (a), tenemos que $u_n(s)=0$ q.e. en $\{w_n=0\}$ y $u(s)=0$ q.e. en $\{w=0\}$. Así, de (3.0.31), concluimos (3.0.29).

□

3.1 Existencia de solución para un problema de control en coeficientes y dominios para problemas no lineales parabólicos

En esta sección aplicaremos los resultados obtenidos a lo largo del presente capítulo, para estudiar la existencia de solución de un problema de control para sistemas no lineales parabólicos con condiciones de contorno tipo Dirichlet.

Como en el caso estudiado en la sección 3 del capítulo 2, las variables de control de nuestro problema serán los coeficientes de la ecuación y el abierto en que ésta se plantea.

Más exactamente, para $T > 0$, un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y una distribución $f \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)^M)$, buscamos una función de Carathéodory $a \in \mathcal{A}(p,\alpha,\gamma,\sigma,r)$ y un abierto $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$, tal que la solución u de

$$\begin{cases} \partial_t u - div\, a(x,Du) = f & \text{en } \mathcal{D}'(\widetilde{\Omega} \times (0,T))^M \\ u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)^M) & \\ u(x,0) = 0, & \end{cases} \tag{3.1.1}$$

minimice un funcional $J : L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)^M) \to \mathbb{R}$, donde hemos identificado u con su extensión por cero a $\Omega\backslash\widetilde{\Omega}$.

Análogamente a lo que se prueba en el caso elíptico, si aplicamos el método directo de cálculo de variaciones y tomamos una sucesión minimizante u_n, debemos estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones de de problemas no lineales de la forma

$$\begin{cases} \partial_t u_n(x,t) - div\, a_n(x,Du_n(x,t)) = f(x,t), & \text{en } \mathcal{D}'(\Omega_n \times (0,T))^M \\ u_n(x,0) = 0, & \text{e.c.t. } \Omega_n. \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Debido a que el problema límite tiene una estructura diferente, del mismo modo a como hicimos en el capítulo 2, planteamos el problema de existencia en un marco más general, concretamente buscamos $a \in \mathcal{A}$ y $(F,\mu) \in \mathcal{U}$, tal que la solución de

$$\begin{cases} u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M), \ u(x,0) = 0, \ \text{ e.c.t. } x \in \Omega \\ \langle \partial_t u, v\rangle + \displaystyle\int_\Omega a(x,Du) : Dv dx + \int_\Omega F(x,u) v d\mu = \langle f, v\rangle, \ \text{ en } \mathcal{D}'(0,T) \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M, \end{cases} \tag{3.1.3}$$

minimice el funcional J. La ventaja de esta formulación es consecuencia del teorema 3.0.4, y viene dada por el siguiente resultado.

3.1.1 Teorema. *Consideremos dos funcionales $J_1 : L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)^M) \to \mathbb{R}$, $J_2 : L^2(\Omega)^M \to \mathbb{R}$, que sean secuencialmente débilmente semicontinuos para las topologías débil y fuerte de $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)^M)$ y $L^2(\Omega)^M$ respectivamente. Entonces, para toda distribución $f \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)^M)$, el problema*

$$min\ (J_1(u) + J_2(u))$$

$$\begin{cases} a \in \mathcal{A},\ (F,\mu) \in \mathcal{F},\ u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M) \\ \langle \partial_t u, v\rangle + \displaystyle\int_\Omega a(Du) : Dvdx + \int_\Omega F(u)vd\mu = \langle f, v\rangle,\ \ en\ \mathcal{D}'(0,T) \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M \\ u(x,0) = 0,\ \ e.c.t.\ \Omega, \end{cases} \tag{3.1.4}$$

admite al menos una solución.

Demostración. La demostración de este teorema, es una aplicación inmediata del método directo de cálculo de variaciones. Si u_n es una sucesión minimizante, entonces del teorema 2.2.3, podemos deducir que existen $a \in \mathcal{A}$ y $(F,\mu) \in \mathcal{F}$ tales que, para una subsucesión, u_n converge débilmente en $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)^M \cap L^p_\mu(\Omega)^M)$, a la solución u de (3.1.3). Por el teorema 3.0.6, también sabemos que $u_n(s)$ converge fuertemente a $u(s)$ en $L^2(\Omega)^M$, $\forall s \in (0,T]$. De esta forma, usando las hipótesis sobre J_1 y J_2, tenemos

$$\liminf_{n\to\infty} \{J_1(u_n) + J_2(u_n)\} \geq J_1(u) + J_2(u),$$

y por tanto concluimos u es una solución del problema (3.1.4). □

3.1.2 Nota. *Como ejemplo del funcional $J = J_1 + J_2$ en las condiciones del teorema 3.1.1, podemos tomar por ejemplo*

$$J(u) = \int_{Q_T} |Du|^p dx + \int_\Omega |u(s) - h|^2 dx,$$

con $h \in L^2(\Omega)^M$, $\forall s \in (0,T]$.

3.1.3 Nota. *El teorema 3.1.1 sigue siendo cierto si reemplazamos $\mathcal{A}$ por un subconjunto que sea H-cerrado. Como en la sección 3 del capítulo 2, esto permite por ejemplo, aplicar estos resultados a la mezcla de materiales (véase por ej. [47], [53]).*

Capítulo 4

Homogeneización de problemas parabólicos lineales cuando los operadores dependen del tiempo

En el capítulo anterior, hemos estudiado el comportamiento asintótico de problemas con condiciones de Dirichlet parabólicos (en forma relajada) cuando varían los coeficientes y los abiertos. Los operadores se supusieron de tipo monótono y no dependientes del tiempo. En el presente capítulo consideramos el uso de operadores dependientes del tiempo, si bien nos limitaremos al caso lineal. La principal dificultad para estudiar el caso no lineal es que no conocemos un resultado que nos garantice la equintegrabilidad de los gradientes en el caso de abiertos fijos.

Comenzamos definiendo los conjuntos en los cuales consideramos los operadores.

4.0.4 Definición. *Dadas dos constantes α, $\gamma > 0$, denotamos por $M_\alpha^\gamma(Q_T)$ el conjunto de funciones en $L^\infty(Q_T, M_{N\times N})$, tales que*

(i) $A(x,t)\xi\xi \geq \alpha|\xi|^2$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$, *e.c.t.* $(x,t) \in Q_T$.

(ii) $A^{-1}(x,t)\xi\xi \geq \gamma^{-1}|\xi|^2$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$, *e.c.t.* $(x,t) \in Q_T$.

4.0.5 Observación. *La hipótesis (ii) (una vez se sabe que A es invertible) es equivalente a*

(ii)' $A(x,t)\xi\xi \geq \gamma^{-1}|A(x,t)\xi|^2$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$, *e.c.t.* $(x,t) \in Q_T$.

Ella implica

(iii) $|A(x,t)| \leq \gamma$, *e.c.t.* $(x,t) \in Q_T$, *y en particular que* $\alpha \leq \gamma$.

Recíprocamente, si A verifica (ii) y (iii), entonces se tiene

$$A^{-1}(x,t)\xi\xi \geq \frac{\alpha}{\gamma^2}|\xi|^2, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \ e.c.t. \ (x,t) \in Q_T.$$

4.0.6 Definición. *Definimos $\mathcal{F}^{\gamma}_{\alpha}(Q_T)$ como el conjunto de todos los pares (F,μ) tales que $\mu \in \mathcal{M}^2_0(\Omega)$, F pertenece a $L^{\infty}_{\hat{\mu}}(Q_T)$ y verifica*

$$\gamma \geq F(x,t) \geq \alpha, \ \ \hat{\mu}\text{-}e.c.t. \ en \ Q_T, \tag{4.0.1}$$

donde $\mu \in \mathcal{M}^2_0(\Omega)$.

Con estas definiciones, el problema que vamos a estudiar es el comportamiento asintótico de las soluciones del problema

$$\begin{cases} u_n \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega) \cap L^2_{\mu_n}(\Omega)), \ u_n(x,0) = u^0_n, \quad \text{e.c.t. } \Omega \\ \langle \partial_t u_n, v\rangle + \int_\Omega A_n(x,t)\nabla u_n \nabla v dx + \int_\Omega F_n(x,t) u_n v \, d\mu_n = \langle f_n, v\rangle \ \text{ en } \mathcal{D}'(0,T) \\ \forall \, v \in H^1_0(\Omega) \cap L^2_{\mu_n}(\Omega), \end{cases} \tag{4.0.2}$$

donde f_n es una sucesión que converge fuerte en $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $A_n : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^N$ y (μ_n, F_n) son sucesiones en los espacios $M^{\gamma}_{\alpha}(Q_T)$ y $\mathcal{F}^{\gamma}_{\alpha}(Q_T)$ respectivamente, y u^0_n una sucesión que converge débilmente, tal que $u^0_n = 0$, e.c.t. $\{w_n = 0\}$ (siendo w_n las soluciones de (1.2.2)).

4.0.7 Observación. *Como en el capítulo anterior, a fin de escribir expresiones más cortas, generalmente no explicitaremos la dependencia en (x,t) de las funciones definidas en Q_T. En algunas ocasiones necesitaremos especificar la dependencia en t, y escribiremos expresiones tales como $u(t)$ para significar $u(x,t)$.*

En lo que sigue, se denotará por C una constante que sólo depende de α, γ, N y $|\Omega|$.

4.1 Estimaciones y primera representación del problema límite

En esta sección obtenemos un resultado de convergencia para las condiciones iniciales de (4.0.2), así como estimaciones para las sucesiones u_n y ∇u_n que nos permitirán conseguir una primera representación del problema límite de (4.0.2).

A lo largo de esta sección consideramos dos sucesiones $A_n \in \mathcal{M}_\alpha^\gamma(Q_T)$ y $(F_n, \mu_n) \in \mathcal{F}_\alpha^\gamma(Q_T)$, y definimos w_n como la sucesión de soluciones de (1.2.2). Extrayendo una subsucesión, si es necesario, podemos suponer que existen $\mu \in \mathcal{M}_0^2(\Omega)$, $w \in H_0^1(\Omega)$ y $A \in \mathcal{M}_\alpha^\gamma(\Omega)$ en las condiciones de la proposición 1.2.3 y del teorema 1.3.6. Sean también, una sucesión de distribuciones $f_n \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, una sucesión de funciones $u_n \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, una distribución $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ y una función $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ tales que

$$f_n \to f \text{ en } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \tag{4.1.1}$$

$$u_n \rightharpoonup u \text{ en } L^2(0,T;H^1(\Omega)). \tag{4.1.2}$$

Las sucesiones u_n y f_n verifican

$$\begin{cases} u_n \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \cap L^2_{\mu_n}(\Omega)) \\ \langle \partial_t u_n, v\rangle + \displaystyle\int_\Omega A_n \nabla u_n \nabla v dx + \int_\Omega F_n u_n v d\mu_n = \langle f_n, v\rangle, \text{ en } \mathcal{D}'(0,T) \\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap L^2_{\mu_n}(\Omega), \end{cases} \tag{4.1.3}$$

y se tiene

$$\|u_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla u_n\|_{L^2(Q_T)^N} + \|u_n\|_{L^2_{\hat{\mu}_n}(Q_T)} \leq M, \tag{4.1.4}$$

donde $\hat{\mu} = \mu \otimes dt$ y M no depende de n.

Comenzamos obteniendo algunos resultados de regularidad para u.

4.1.1 Lema. *Las funciones u y $\partial_t u$ pertenecen respectivamente a $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ y*

$L^2(0,T;(H_0^1(\Omega)\cap L^2_\mu(\Omega))')$.

Demostración. Que u pertenece a $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ se sigue de (4.1.4) y (1.2.18). La demostración de que $\partial_t u$ pertenece a $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^2_\mu(\Omega))$ es similar a la que se hizo en el capítulo anterior. Para $\varphi\in\mathcal{D}(Q_T)$, tomando $w\varphi$ como función test en (4.1.3), se obtiene

$$\left|\int_{Q_T} u_n\partial_t(w_n\varphi)dxdt\right|\leq M\|w_n\varphi\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^2_{\mu_n}(\Omega))},$$

donde M no depende ni de n ni de φ.

Gracias a (1.2.15) para $\varphi_n=\varphi$ y a la convergencia débil de u_n en $L^2(Q_T)$, tomando límite en la desigualdad anterior, tenemos

$$\left|\int_{Q_T} u\partial_t(w\varphi)dxdt\right|\leq L\|w\varphi\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^2_{\mu}(\Omega))}.$$

Como el conjunto $\{w\varphi:\ \varphi\in\mathcal{D}(Q_T)\}$ es denso en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^2_\mu(\Omega))$, podemos deducir de esta desigualdad que $\partial_t u$ pertenece a $L^2(0,T;(H_0^1(\Omega)\cap L^2_\mu(\Omega))')$.

□

4.1.2 Observación. *En (4.1.3) no hemos considerado condiciones iniciales, veamos que la ecuación que verifica u no depende de ellas. Sin embargo, para determinar u, sí que necesitamos saber las correspondientes condiciones iniciales. En este sentido, damos a continuación el teorema 4.1.3. Obsérvese que dado que $H_0^1(\Omega)\cap L^2_{\mu_n}(\Omega)$ es denso en el conjunto de funciones $v\in L^2(\Omega)$ tales que $v=0$ e.c.t. $\{w_n=0\}$, se tiene que si u_n^0 está en $L^2(\Omega)$, $u_n^0=0$, e.c.t. $\{w_n=0\}$ y $f_n\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\subset L^2(0,T;(H_0^1(\Omega)\cap L^2_\mu(\Omega))')$, entonces el problema*

$$\begin{cases} u_n\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^2_{\mu_n}(\Omega)),\ u_n(x,0)=u_n^0 \quad \text{e.c.t. } \Omega\\ \langle\partial_t u_n,v\rangle+\displaystyle\int_\Omega A_n\nabla u_n\nabla v dx+\int_\Omega F_n u_n v d\mu_n=\langle f_n,v\rangle,\ \text{ en } \mathcal{D}'(0,T)\\ \forall v\in H_0^1(\Omega)\cap L^2_{\mu_n}(\Omega),\end{cases}$$

tiene solución única. Más aún, si las normas de u_n^0 y f_n^0 en $L^2(\Omega)$ y $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^2_\mu(\Omega))$ respectivamente, están acotadas, entonces u_n satisface (4.1.4).

4.1.3 Teorema. *Supongamos que existe $u_0 \in L^2(\Omega)$ tal que $u_n(0)$ converge débilmente a u_0 en $L^2(\Omega)$. Entonces la condición inicial $u(0)$ de u, viene dada por*

$$u(0) = u_0 \chi_{\{w>0\}}, \ \ e.c.t. \ \Omega. \tag{4.1.5}$$

Demostración. Gracias a que $\partial_t u$ está acotada en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^2_\mu(\Omega))$, para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$, se tiene

$$\left|\int_\Omega \left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon u_n(t)dt - u_n(0)\right) w_n \varphi dx\right| = \left|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \int_\Omega (u_n(t)-u_n(0)) w_n \varphi dx dt\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \int_0^t \langle \partial_r u_n(r), w_n\varphi\rangle dr dt\right| \leq$$

$$\leq \|w_n\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^p_{\mu_n}(\Omega)} \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \int_0^t \|\partial_r u_n(r)\|_{(W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^p_{\mu_n}(\Omega))'} dr dt \leq \tag{4.1.6}$$

$$\leq \sqrt{\varepsilon}\|w_n\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^p_{\mu_n}(\Omega)} \left(\int_0^\varepsilon \|\partial_t u_n(t)\|^2_{(W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^p_{\mu_n}(\Omega))'} dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq M\sqrt{\varepsilon}\|w_n\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^p_{\mu_n}(\Omega)},$$

donde M no depende de n ni de ε.

Tomando límite en (4.1.6) cuando n tiende a infinito, y teniendo en cuenta (1.2.4), obtenemos

$$\left|\int_\Omega \left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon u(s)ds - u_0\right) w\varphi dx\right| \leq M\sqrt{\varepsilon}\|w\varphi\|_{L^p_\mu(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)}. \tag{4.1.7}$$

Como $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^2_\mu(\Omega))$ y $\partial_t u \in L^2(0,T;(H_0^1(\Omega)\cap L^2_\mu(\Omega))')$, sabemos que u está en $C^0([0,T];L^2(\Omega))$, y por tanto pasando al límite en ε en (4.1.7), deducimos

$$\int_\Omega (u(0)-u_0) w\varphi dx = 0 \quad \text{ e.c.t. } \{w>0\},$$

que implica

$$u(0) = u_0 \quad \text{ e.c.t. } \{w > 0\}.$$

Por otro lado, como u pertenece a $L^2(0,T;L^2_\mu(\Omega)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega))$, sabemos que para todo $t \in [0,T]$, $u(t)$ es cero e.c.t. $\{w > 0\}$ y por tanto u satisface (4.1.5).

□

Gracias a un resultado conocido de J. L. Lions (ver [46]) y a que (4.1.3) y (4.1.4) implican que la norma de $\partial_t u$ en $L^2(0,T;H^1_0(\Omega) \cap L^2_\mu(\Omega))$ está acotada, es conocido que si $\mu_n = \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces u_n converge fuerte a u en $L^2(Q_T)$. Sin embargo, en el caso general no podemos aplicar dicho resultado, debido a que los espacios $H^1_0(\Omega) \cap L^2_{\mu_n}(\Omega)$ varían con n. El siguiente lema abstracto, implicará que la convergencia fuerte en $L^2(Q_T)$ sigue siendo cierta.

4.1.4 Lema. *Sean H, un espacio de Hilbert que identificaremos con su espacio dual, y $X \subset H$ un espacio de Banach que se inyecta en H de forma continua y densa. Entonces, para toda $z \in L^2(0,T;X)$ tal que $\partial_t z$ pertenece a $L^2(0,T;X')$, tenemos*

$$\|z(t+h) - z(t)\|^2_{L^2(0,T-h;X)} \le 2^{\frac{3}{2}} \|\partial_t z\|_{L^2(0,T;X')} \|z\|_{L^2(0,T;X)} h, \quad \forall h \in (0,T). \tag{4.1.8}$$

Demostración. Es suficiente tener en cuenta que para toda z en las condiciones del lema y para toda $h \in (0,T)$, se tiene

$$\frac{1}{2}\int_0^{T-h} \|z(t+h) - z(t)\|^2_H dt = \int_0^{T-h}\int_0^h \langle \partial_t z(t+s), z(t+s) - z(t)\rangle_{X',X} ds\, dt \le$$

$$\le \left(\int_0^{T-h}\int_0^h \|\partial_t z(t+s)\|^2_{X'} ds\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\int_0^{T-h}\int_0^h \|z(t+s)\|^2_X ds\, dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^{T-h}\int_0^h \|z(t)\|^2_X ds dt\right)^{\frac{1}{2}}\right] \le$$

$$\le \sqrt{2} \|\partial_t z\|_{L^2(0,T;X')} \|z\|_{L^2(0,T;X)} h.$$

□

Del lema 4.1.4, deducimos

4.1.5 Teorema. *La sucesión u_n verifica*

$$u_n \to u \quad en\ L^2(Q_T). \tag{4.1.9}$$

Demostración. En primer lugar, observemos que para todo $\varepsilon > 0$, la sucesión $u_n^\varepsilon \in H^1(0, T-\varepsilon; H^1(\Omega) \cap L^2_{\mu_n}(\Omega))$, definida por

$$u_n^\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon u_n(t+s)ds, \quad \forall t \in [0, T-\varepsilon]\ , \tag{4.1.10}$$

converge débilmente en $H^1(Q_{T-\varepsilon})$ y por tanto, fuerte en $L^2(Q_{T-\varepsilon})$ a la función u^ε definida por

$$u^\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon u(t+s)ds, \quad \forall t \in [0, T-\varepsilon].$$

Por otro lado, del lema 4.1.4, se prueba

$$\begin{aligned}\int_0^{T-\varepsilon}\int_\Omega |u_n^\varepsilon(t) - u_n(t)|^2 dxdt = \int_0^{T-\varepsilon}\int_\Omega \left|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon u_n(t+s)ds - u_n(t)\right|^2 dxdt \leq \\ \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon\int_0^{T-\varepsilon}\int_\Omega |u_n(t+s) - u_n(t)|^2\, dxdtds \leq M\varepsilon,\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

donde M no depende de n ni ε. Por semicontinuidad, se tiene entonces

$$\int_0^{T-\varepsilon}\int_\Omega |u^\varepsilon(t) - u(t)|^2 dxdt \leq M\varepsilon. \tag{4.1.12}$$

Usando la desigualdad

$$\left(\int_{Q_T} |u_n(t) - u(t)|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{Q_{T-\varepsilon}} |u_n(t) - u_n^\varepsilon(t)|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\left(\int_{Q_{T-\varepsilon}} |u_n^\varepsilon(t) - u^\varepsilon(t)|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{Q_{T-\varepsilon}} |u^\varepsilon(t) - u(t)|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\left(\int_{T-\varepsilon}^{T} \int_{\Omega} |u_n(t) - u(t)|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}},$$

la convergencia de u_ε a u en $L^2(Q_T)$, y (4.1.12), se deduce

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^T |u_n(t) - u(t)|^2 dt \leq M\varepsilon, \quad \forall\varepsilon > 0,$$

lo que demuestra el teorema 4.1.5.

□

A continuación, obtendremos estimaciones para el gradiente de u_n en $L^2(Q_T)$. Para ello, análogamente al capítulo 2, consideramos el problema cuando los abiertos permanecen fijos.

4.1.6 Definición. *Definimos $\bar{u}_n \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ como la única solución del problema*

$$\begin{cases} \partial_t \bar{u}_n - div\, A_n \nabla \bar{u}_n = \partial_t u - div\, A \nabla u \ \ en\ \mathcal{D}'(Q_T) \\ \bar{u}_n(0) = u(0)\ \ e.c.t.\ \ en\ \Omega, \end{cases} \tag{4.1.13}$$

donde A es la matriz homogeneizada de A_n, dada por la proposición 1.3.5.

4.1.7 Observación. *Gracias al teorema 1.3.6, se tiene que la sucesión $|\nabla \bar{u}_n|^2 \chi_K$ es equintegrable, para todo $K \subset \Omega$ compacto.*

Seguidamente, obtendremos estimaciones para $\nabla(u_n - \bar{u}_n)$. Para ello, necesitamos el siguiente lema.

4.1.8 Lema. *Para toda función $\eta \in \mathcal{D}(0,T)$, $\eta \geq 0$, la sucesión u_n de soluciones de (4.1.3), verifica*

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_0^T\left(\int_{\{|u_n|>m\}}|\nabla u_n|^2\eta dx+\int_{\{|u_n|>m\}}|u_n|(|u_n|-m)\eta d\mu_n\right)dt=0. \tag{4.1.14}$$

Demostración. Para $m>0$, definimos $R_m:\mathrm{I\!R}\to\mathrm{I\!R}$, por

$$R_m(s)=\begin{cases} s-sg(s)m & \text{si } |s|>m\\ 0 & \text{si } |s|\leq m,\end{cases}$$

Tomando $R_m(u_n)\eta$, con $\eta\in\mathcal{D}(0,T)$, como función test en (4.1.3), se tiene

$$\begin{aligned}&-\int_{Q_T}H_m(u_n)\eta'(t)dxdt+\int_{\{|u_n|>m\}}A_n\nabla u_n\nabla u_n\,\eta(t)dxdt+\\&+\int_{\{|u_n|>m\}}F_n|u_n|(|u_n|-m)\,\eta d\mu_n dt=\int_0^T\langle f,R_m(u_n)\eta\rangle dt,\end{aligned}\tag{4.1.15}$$

donde hemos denotado por H_m, la función dada por

$$H_m(s)=\int_0^s R_m(r)dr=\begin{cases}0 & \text{si } |s|\leq m\\ \dfrac{(|s|-m)^2}{2} & \text{si } |s|\geq m.\end{cases}$$

Gracias entonces a la convergencia débil de u_n en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ y fuerte en $L^2(Q_T)$, obtenemos

$$\begin{aligned}&\alpha\limsup_{n\to\infty}\left(\int_{\{|u_n|>m\}}|\nabla u_n|^2\eta dxdt+\int_{\{|u_n|>m\}}|u_n|(|u_n|-m)\,\eta d\mu_n dt\right)\leq\\&\leq\int_0^T\langle f,R_m(u)\eta\rangle dt+\int_{Q_T}H_m(u)\eta'(t)dxdt.\end{aligned}\tag{4.1.16}$$

Tomando límite en m en esta expresión, deducimos (4.1.14).

□

También se tiene

4.1.9 Lema. *Para todos $\delta > 0$, $\eta \in \mathcal{D}(0,T)$, $\eta \geq 0$, se verifica*

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\int_{\{|u_n|\leq\delta\}}|\nabla u_n|^2\,\eta dxdt = \lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\int_{\{|\bar{u}_n|\leq\delta\}}|\nabla \bar{u}_n|^2\,\eta dxdt = 0. \tag{4.1.17}$$

Demostración. Sólamente probaremos (4.1.17) para u_n, la prueba para $\bar{u}_n$ es análoga. Dados $\delta > 0$ y $\eta \in \mathcal{D}(0,T)$, $\eta \geq 0$, tomando $T_\delta(u_n)\eta$ como función test en (4.1.3) (ver la definición de S_δ y T_δ en las notaciones), se obtiene

$$-\int_{Q_T} S_\delta(u_n)\,\eta' dxdt + \int_{\{|u_n|\leq\delta\}} A_n\nabla u_n\nabla u_n\,\eta dxdt +$$

$$+\int_{Q_T} F_n u_n T_\delta(u_n)\,\eta d\mu_n dt = \int_0^T \langle f_n, T_\delta(u_n)\,\eta\rangle dt.$$

Por la convergencia fuerte de u_n a u en $L^2(Q_T)$ y $F_n u_n T_\delta(u_n)\eta \geq 0$, $\hat{\mu}_n$-e.c.t. Ω, tenemos

$$\alpha\limsup_{n\to\infty}\int_{\{|u_n|\leq\delta\}}|\nabla u_n|^2\,\eta dxdt \leq \int_0^T\langle f, T_\delta(u)\,\eta\rangle dt + \int_{Q_T} S_\delta(u)\,\eta' dxdt.$$

Tomando límite en esta desigualdad cuando δ tiende a cero, se prueba (4.1.17) para u_n.

□

Usando este lema, podemos demostrar el siguiente resultado, que es análogo al lema 2.1.5 del capítulo 2. Resultados relacionados pueden encontrarse en [31], [14], [18], [15], [34] y [7]. La demostración sigue ideas que aparecen en [3] (véase también [33] para sistemas).

4.1.10 Teorema. *La sucesión $u_n - \bar{u}_n$ converge fuerte a cero en $L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$ para todo $q \in [1,2)$.*

Demostración. Para $\delta > 0$ y $\eta \in \mathcal{D}(0,T)$, tomando $w_n T_\delta(u_n - \bar{u}_n)\eta \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \cap L^2_{\mu_n}(\Omega))$ como función test en la diferencia de (4.1.3) y (4.1.13), se deduce

$$-\int_{Q_T} S_\delta(u_n-\bar{u}_n)w_n\eta' dxdt+\int_{\{|u_n-\bar{u}_n|<\delta\}} A_n\nabla(u_n-\bar{u}_n)\nabla(u_n-\bar{u}_n)w_n\eta dxdt+$$

$$+\int_{Q_T} A_n\nabla(u_n-\bar{u}_n)\nabla w_n T_\delta(u_n-\bar{u}_n)\eta dxdt+\int_{Q_T} F_n u_n T_\delta(u_n-\bar{u}_n)w_n\eta d\mu_n dt=$$

$$=\int_0^T \langle f_n, T_\delta(u_n-\bar{u}_n)w_n\eta\rangle dt.$$

Usando que $u_n-\bar{u}_n$ converge fuerte a cero en $L^2(Q_T)$ y débil en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, y las desigualdades siguientes

$$\left|\int_{Q_T} A_n\nabla(u_n-\bar{u}_n)\nabla w_n T_\delta(u_n-\bar{u}_n)\eta dxdt\right|\le C\delta,$$

$$\left|\int_{Q_T} F_n u_n T_\delta(u_n-\bar{u}_n)w_n\eta d\mu_n dt\right|\le C\delta,$$

para todo $n\in\mathbb{N}$ y $\delta>0$, se tiene

$$\alpha\limsup_{n\to\infty}\int_{\{|u_n-\bar{u}_n|<\delta\}}|\nabla(u_n-\bar{u}_n)|^2 w_n\eta dxdt\le C\delta, \tag{4.1.18}$$

para todo $\eta\in\mathcal{D}(0,T)$, donde C depende de η.

Ahora, para $\delta>0$ denotamos por $K_\delta=K_\delta^1\cup K_\delta^2$, los siguientes conjuntos

$$K_\delta^1=\{(x,t)\in Q_T:\ |u_n-\bar{u}_n|\le\delta,\ w_n\ge\sqrt{\delta}\},\ \ K_\delta^2=\{(x,t)\in Q_T:\ w=0,\ \ |u_n|\le\delta\}.$$

De (4.1.18), se deduce

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\int_{K_\delta^1}|\nabla(u_n-\bar{u}_n)|^2\eta dxdt=0,\ \forall\eta\in\mathcal{D}(0,T). \tag{4.1.19}$$

Y gracias a (4.1.17), también se obtiene

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\int_{K_\delta^2}|\nabla u_n|^2\eta dxdt=0,\ \forall\eta\in\mathcal{D}(0,T). \tag{4.1.20}$$

Por otro lado, para $\varphi \in \mathcal{D}(Q_T)$, $\varphi \geq 0$, teniendo en cuenta que $\{u = 0\}$ e.c.t. $\{w = 0\}$, se tiene

$$\int_{K_\delta^2} |\nabla \bar{u}_n|^2 \varphi dxdt \leq \int_{\{u=0\}} |\nabla \bar{u}_n|^2 \varphi dxdt \leq$$
$$\leq \int_{\{0\leq |\bar{u}_n| \leq \delta\}} |\nabla \bar{u}_n|^2 \varphi dxdt + \int_{\{|\bar{u}_n|\geq \delta\}\cap\{u=0\}} |\nabla \bar{u}_n|^2 \varphi dxdt. \tag{4.1.21}$$

Usando (4.1.17), y tomando límite, primero cuando n tiende a infinito, y después cuando δ tiende a cero, el primer término del último miembro de esta desigualdad tiende a cero. Para el segundo término, usando que la medida del conjunto $\{x \in \Omega;\, u = 0, |\bar{u}_n| \geq \delta\}$ tiende a cero y por equintegrabilidad de $\bar{u}_n$, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{|\bar{u}_n|\geq \delta\}\cap\{u=0\}} |\nabla \bar{u}_n|^2 \varphi dxdt = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q_T), \quad \forall \delta > 0.$$

Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_{K_\delta^2} |\nabla \bar{u}_n|^2 \varphi dxdt = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q_T). \tag{4.1.22}$$

Usando (4.1.19), (4.1.20) y (4.1.22), deducimos

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \int_{K_\delta} |\nabla(u_n - \bar{u}_n)|^2 \varphi dxdt = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q_T). \tag{4.1.23}$$

Por otra parte, observemos que el complementario del conjunto K_δ está contenido en

$$\{(x,t) \in Q_T :\ |u_n - \bar{u}_n| > \delta\} \cup \left\{(x,t) \in Q_T :\ w_n < \sqrt{\delta}, w > 0\right\} \cup$$
$$\cup \{(x,t) \in Q_T :\ w = 0, |u_n| > \delta\},$$

y por tanto

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} |Q_T \backslash K_\delta| = 0. \tag{4.1.24}$$

De (4.1.23) y (4.1.24) deducimos que para todo $q \in [1, 2)$, para todo $\delta > 0$ y para toda $\varphi \in \mathcal{D}(Q_T)$, $\varphi \geq 0$, se tiene

$$\int_{Q_T} |\nabla(u_n - \bar{u}_n)|^q dxdt = \int_{K_\delta} |\nabla(u_n - \bar{u}_n)|^q \varphi\, dxdt + \int_{K_\delta} |\nabla(u_n - \bar{u}_n)|^q (1-\varphi) dxdt +$$

$$+ \int_{K_\delta^c} |\nabla(u_n - \bar{u}_n)|^q dxdt \leq \left(\int_{K_\delta} |\varphi|^{\frac{2}{2-q}} dxdt \right)^{\frac{2-q}{2}} \left(\int_{K_\delta} |\nabla(u_n - \bar{u}_n)|^2 \varphi dxdt \right)^{\frac{q}{2}} +$$

$$+ \left(\int_{Q_T} (1-\varphi)^{\frac{2}{2-q}} dxdt \right)^{\frac{2-q}{2}} \left(\int_{Q_T} |\nabla(u_n - \bar{u}_n)|^2 dxdt \right)^{\frac{q}{2}} + |K_\delta^c|^{\frac{2-q}{2}} \left(\int_{Q_T} |\nabla(u_n - \bar{u}_n)|^2 \varphi dxdt \right)^{\frac{q}{2}}.$$

A continuación, si tomamos límite en esta desigualdad, primero en n, luego en δ, usando (4.1.23) y (4.1.24), se deduce

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{Q_T} |\nabla(u_n - \bar{u}_n)|^q dxdt \leq C \left(\int_{Q_T} (1-\varphi)^{\frac{2}{2-q}} dxdt \right)^{\frac{2-q}{2}}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q_T).$$

Por último, haciendo tender φ hacia 1, concluimos la demostración del teorema 4.1.10. $\square$

4.1.11 Corolario. *La sucesión $A_n \nabla u_n$, verifica*

$$A_n \nabla u_n \rightharpoonup A \nabla u \text{ en } L^2(Q_T). \tag{4.1.25}$$

Demostración. Del teorema 4.1.10, se tiene entonces que $A_n \nabla(u_n - \bar{u}_n)$ converge a cero en $L^q(Q_T)$, para $1 \leq q < 2$. Usando que la sucesión $A_n \nabla u_n$ está acotada en $L^2(Q_T)$ y que $A_n \nabla \bar{u}_n$ converge débilmente a $A\nabla u$ en $L^2(Q_T)$, deducimos (4.1.25). $\square$

El teorema 4.1.10 nos da una estimación para la sucesión $\nabla(u_n - \bar{u}_n)$ en $L^q(Q_T)^N$ para todo $1 \leq q < 2$. A continuación, obtendremos una estimación para esta diferencia en $L^2(Q_T)^N$.

4.1.12 Lema. *Existe una constante $C > 0$, que sólo depende de α, γ, N y Ω, tal que para toda $\varphi \in H^1(Q_T) \cap L^\infty(Q_T)$, $\varphi \geq 0$ C_2-e.q.t. en Q_T con soporte compacto, las sucesiones u_n y $\bar{u}_n$ de soluciones de (4.1.3) y (4.1.13), verifican*

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\int_{Q_T} |\nabla(u_n - \bar{u}_n)|^2 \varphi dxdt + \int_{Q_T} |u_n|^2 \varphi d\mu_n dt \right) \leq C \int_{Q_T} |u|^2 \varphi d\mu dt. \tag{4.1.26}$$

Demostración. Para todo $m \in \mathbb{N}$, tomamos $\psi_m \in C^1([0,T]; H_0^1(Q_T) \cap L^\infty(Q_T))$ tal que $\psi_m = 0$, C_2-e.q.t. $\{w < \frac{1}{m}\}$ y $w\psi_m$ converge fuerte a u en $L^2(0,T; H_0^1(\Omega) \cap L^2_\mu(\Omega))$. La existencia de esta sucesión se deduce fácilmente de la proposición 1.2.7. A continuación, para todo m, $n \in \mathbb{N}$, definimos $\bar{u}_{m,n}$ como solución de

$$\begin{cases} \partial_t \bar{u}_{m,n} - div\, A_n \nabla \bar{u}_{m,n} = \partial_t (w\psi_m) - div\, A\nabla(w\psi_m) \text{ en } \mathcal{D}'(Q_T) \\ \bar{u}_{m,n} \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \\ \bar{u}_{m,n}(0) = w\psi_m(0), \text{ e.c.t. en } \Omega. \end{cases} \tag{4.1.27}$$

Usando el teorema 1.2.12, se tiene

$$\bar{u}_{m,n} \rightharpoonup w\psi_m \text{ en } L^2(0,T; H_0^1(\Omega)), \forall m \in \mathbb{N}.$$

Por otra parte, tomando $\bar{u}_{m,n} - \bar{u}_n$ como función test en la diferencia de (4.1.27) y (4.1.13), se prueba fácilmente

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{Q_T} |\nabla(\bar{u}_n - \bar{u}_{m,n})|^2 = 0. \tag{4.1.28}$$

Para $k \in \mathbb{N}$, tomamos una función $\tau_k \in C^\infty(\mathbb{R})$, tal que $\tau_k(s) = s$, si $|s| \leq k$, $\tau_k(s) = 2k\,\text{sign}(s)$ si $|s| \geq 2k$, con $0 \leq \tau_k'(s) \leq C$ y $|\tau_k''(s)| \leq \frac{C}{k}$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Ahora, para $\varphi \in H^1(Q_T) \cap L^\infty(Q_T)$ con soporte compacto, $\varphi \geq 0$, tomamos

$$z_{k,m,n} = \tau_k'(u_n) \left(\tau_k(u_n) - \frac{w_n}{w \vee \frac{1}{m}} \tau_k(\bar{u}_{m,n}) \right) \varphi \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega) \cap L^2_{\mu_n}(\Omega)),$$

como función test en (4.1.3) y

$$\bar{z}_{k,m,n} = \frac{w_n}{w \vee \frac{1}{m}} \tau_k'(\bar{u}_{m,n}) [\tau_k(u_n) - \frac{w_n}{w \vee \frac{1}{m}} \tau_k(\bar{u}_{m,n})],$$

como función test en (4.1.27).

Para ello, en primer lugar estimaremos el gradiente de estas sucesiones.

En lo que sigue, denotamos por $R_{k,m,n} \in L^2(Q_T)$ una sucesión arbitraria en k, m y n, que puede cambiar de una línea a otra y satisface

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \|R_{k,m,n}\|_{L^2(Q_T)^N} = 0.$$

Tenemos

$$\begin{gathered}
\nabla\left[\left(\tau_k(u_n) - \frac{w_n}{w\vee\frac{1}{m}}\tau_k(\bar u_{m,n})\right)\varphi\right] = \tau_k'(u_n)\nabla u_n\varphi - \\
-\left[\frac{\nabla(w_n - w)}{w\vee\frac{1}{m}} + \frac{(w-w_n)\nabla w}{w^2}\chi_{\{w>\frac{1}{m}\}} + m\nabla w\chi_{\{w<\frac{1}{m}\}}\right]\tau_k(\bar u_{m,n})\varphi - \\
-\frac{w_n}{w\vee\frac{1}{m}}\tau_k'(\bar u_{m,n})\nabla\bar u_{m,n}\varphi + \left(\tau_k(u_n) - \frac{w_n}{w\vee\frac{1}{m}}\tau_k(\bar u_{m,n})\right)\nabla\varphi.
\end{gathered} \tag{4.1.29}$$

De (4.1.14) y de las propiedades de τ_k, se deduce

$$\tau_k'(u_n)\nabla u_n\varphi = \nabla u_n\varphi + R_{k,m,n}. \tag{4.1.30}$$

Usando que cuando n tiende a infinito, $w - w_n$, $\tau_k(u_n)$ y $\tau_k(\bar u_{m,n})$ convergen fuerte en $L^2(Q_T)^N$ y débil-$*$ en $L^\infty(Q_T)$ hacia 0, $\tau_k(u)$ y $\tau_k(w\psi_m)$ respectivamente, y que $\psi_m = 0$ C_2-e.q.t. $\{w > \frac{1}{m}\}$, se tiene

$$\begin{gathered}
-\left[\frac{(w-w_n)}{w^2}\nabla w\chi_{\{w>\frac{1}{m}\}} + m\nabla w\chi_{\{w<\frac{1}{m}\}}\right]\tau_k(\bar u_{m,n})\varphi + \\
+\left(\tau_k(u_n) - \frac{w_n}{w\vee\frac{1}{m}}\tau_k(\bar u_{m,n})\right)\nabla\varphi = R_{k,m,n}.
\end{gathered} \tag{4.1.31}$$

De la equintegrabilidad de la sucesión $|\nabla\bar u_n|^2\varphi^2$, (4.1.28), las propiedades de τ_k y que $\psi_m = 0$ C_2-e.q.t. $\{w < \frac{1}{m}\}$, se obtiene fácilmente

$$\frac{w_n}{w \vee \frac{1}{m}} \tau_k'(\bar{u}_{m,n}) \nabla \bar{u}_{m,n} \varphi = \nabla \bar{u}_n \varphi + R_{k,m,n}. \tag{4.1.32}$$

De (4.1.29), (4.1.30), (4.1.31) y (4.1.32), se deduce

$$\begin{gathered} \nabla \left[\left(\tau_k(u_n) - \frac{w_n}{w \vee \frac{1}{m}} \tau_k'(\bar{u}_{m,n}) \right) \varphi \right] = \\ = \nabla (u_n - \bar{u}_n) \varphi - \frac{\nabla (w_n - w)}{w \vee \frac{1}{m}} \tau_k(\bar{u}_{m,n}) \varphi + R_{k,m,n}. \end{gathered} \tag{4.1.33}$$

Por (4.1.14), las propiedades de τ_k y la equintegrabilidad de $|\nabla \bar{u}_n|^2 \varphi^2$, tenemos

$$\begin{gathered} \nabla z_{k,m,n} = \tau_k''(u_n) \nabla u_n \left(\tau_k(u_n) - \frac{w_n}{w \vee \frac{1}{m}} \tau_k(\bar{u}_{m,n}) \right) \varphi + \\ + \tau_k'(u_n) \nabla \left[\left(\tau_k(u_n) - \frac{w_n}{w \vee \frac{1}{m}} \tau_k(\bar{u}_{m,n}) \right) \varphi \right] = \\ = \nabla (u_n - \bar{u}_n) \varphi - \frac{\nabla (w_n - w)}{w \vee \frac{1}{m}} \tau_k'(u_n) \tau_k(\bar{u}_{m,n}) \varphi + R_{k,m,n}. \end{gathered} \tag{4.1.34}$$

Para estimar el gradiente de $\bar{z}_{k,m,n}$, denotamos por $r_{k,m,n} \in L^2(Q_T)^N$ una sucesión arbitraria que puede cambiar de una línea a otra y satisface

$$\lim_{k \to \infty} \limsup_{m \to \infty} \limsup_{n \to \infty} \left| \int_\Omega A_n \nabla \bar{u}_{m,n} r_{k,m,n} dx \right| = 0.$$

Usando que para todo $m \in \mathbb{N}$, $\nabla(\frac{w_n}{w \vee \frac{1}{m}})$ está acotada en $L^2(Q_T)^N$ y converge puntualmente a cero e.c.t. $\{w > \frac{1}{m}\}$, la equintegrabilidad de la sucesión $|\nabla \bar{u}_{m,n}|^2 \varphi^2$ y $\psi_m = 0$ C_2-e.q.t. $\{w > \frac{1}{m}\}$, deducimos

$$\nabla \left(\frac{w_n}{w \vee \frac{1}{m}} \right) \tau_k'(\bar{u}_{m,n}) \left[\tau_k(u_n) - \frac{w_n}{w \vee \frac{1}{m}} \tau_k(\bar{u}_{m,n}) \right] \varphi = r_{k,m,n}.$$

De la equintegrabilidad de $|\nabla \bar{u}_n|^2 \varphi^2$ y de (4.1.28), se deduce también

$$\frac{w_n}{w \vee \frac{1}{m}} \tau_k''(\bar{u}_{m,n}) \nabla \bar{u}_{m,n} \left[\tau_k(u_n) - \frac{w_n}{w \vee \frac{1}{m}} \tau_k(\bar{u}_{m,n}) \right] \varphi = R_{k,m,n} = r_{k,m,n}.$$

Usando a continuación (4.1.33), que $\nabla(w_n - w)$ y $\nabla(u_n - \bar{u}_n)$ convergen a cero, débilmente en $L^2(Q_T)^N$ y fuertemente en $L^q(Q_T)^N$, $1 \leq q < 2$, y la equintegrabilidad de $|\nabla \bar{u}_{m,n}|^2 \varphi^2$, se tiene

$$\nabla \bar{z}_{k,m,n} = r_{k,m,n}. \tag{4.1.35}$$

Considerando la diferencia de las expresiones obtenidas al tomar $z_{k,m,n}$ como función test en (4.1.3) y $\bar{z}_{k,m,n}$ como función test en (4.1.27), teniendo en cuenta (4.1.34), (4.1.35) y usando la convergencia fuerte de f_n a f en $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, obtenemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_{Q_T} \left| \tau_k(u_n) - \frac{w_n}{w \vee \frac{1}{m}} \tau_k(\bar{u}_{m,n}) \right|^2 \partial_t \varphi dxdt + \int_{Q_T} A_n \nabla u_n \nabla (u_n - \bar{u}_n) \varphi dxdt - \\ - \int_{Q_T} A_n \nabla u_n \frac{\nabla (w_n - w)}{w \vee \frac{1}{m}} \tau_k'(u_n) \tau_k(\bar{u}_{m,n}) \varphi + \\ + \int_{Q_T} F_n u_n \tau_k'(u_n) \left(\tau_k(u_n) - \frac{w_n}{w \vee \frac{1}{m}} \tau_k(\bar{u}_{m,n}) \right) \varphi d\mu_n = O_{k,m,n}. \end{aligned} \tag{4.1.36}$$

De la convergencia fuerte de $\tau_k(u_n)$ a $\tau_k(u)$ y de $\dfrac{w_n}{w \vee \frac{1}{m}} \tau_k(\bar{u}_{m,n})$ a $\tau_k(w\psi_m)$ en $L^2(Q_T)$, se deduce que el primer término de esta igualdad es igual a $O_{k,m,n}$. Por otro lado, gracias a la equintegrabilidad de la sucesión $|\nabla \bar{u}_n|^2 \varphi^2$ y a que $\nabla(u_n - \bar{u}_n)$ y $\nabla(w_n - w)$ convergen a cero débil en $L^2(Q_T)^N$ y fuerte en $L^q(Q_T)^N$, $1 \leq q < 2$, se prueba

$$\int_{Q_T} A_n \nabla \bar{u}_n \nabla (u_n - \bar{u}_n) \varphi dxdt = O_n,$$

$$\int_{Q_T} A_n \nabla \bar{u}_n \frac{\nabla (w_n - w)}{w \vee \frac{1}{m}} \tau_k'(u_n) \tau_k(\bar{u}_{m,n}) \varphi dxdt = O_n, \quad \forall m,\, k \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, de (4.1.36) se deduce

$$\int_{Q_T} A_n \nabla(u_n - \bar{u}_n)\nabla(u_n - \bar{u}_n)\varphi dxdt + \int_{Q_T} F_n u_n \tau_k(u_n)\tau_k'(u_n)\varphi d\mu_n dt =$$

$$= \int_{Q_T} A_n \nabla(u_n - \bar{u}_n)\frac{\nabla(w_n - w)}{w \vee \frac{1}{m}}\tau_k'(u_n)\tau_k(\bar{u}_{m,n})\varphi dxdt +$$

$$+ \int_{Q_T} F_n u_n \tau_k'(u_n)\frac{w_n}{w \vee \frac{1}{m}}\tau_k(\bar{u}_{m,n})\varphi d\mu_n dt + O_{m,n}.$$

Usando la elipticidad y acotación de A_n y F_n, la desigualdad de Cauchy-Schwartz y τ_k' acotada, tenemos

$$\int_{Q_T} |\nabla(u_n - \bar{u}_n)|^2 \varphi dxdt + \int_{Q_T} u_n \tau_k(u_n)\tau_k'(u_n)\varphi d\mu_n dt \leq$$

$$\leq C\left(\int_{Q_T} \frac{|\nabla(w_n - w)|^2}{(w \vee \frac{1}{m})^2}\tau_k(\bar{u}_{m,n})^2 \varphi dxdt + \int_{Q_T}\left(\frac{w_n}{w \vee \frac{1}{m}}\right)^2 \tau_k(\bar{u}_{m,n})^2 \varphi d\mu_n dt\right) +$$

$$+ \int_{Q_T} |u_n||u_n - \tau_k(u_n)|\varphi d\mu_n dt + O_{m,n}.$$

Pasando al límite en esta desigualdad, gracias a (4.1.14) y (1.2.16), se deduce

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\int_{Q_T} |\nabla(u_n - \bar{u}_n)|^2 \varphi dxdt + \int_{Q_T} u_n \tau_k(u_n)\tau_k'(u_n)\varphi d\mu_n dt\right) \leq C\int_{Q_T} w^2 \psi_m^2 \varphi d\mu dt + O_n,$$

$\forall m \in \mathbb{N}$, y por tanto

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\int_{Q_T} |\nabla(u_n - \bar{u}_n)|^2 \varphi dxdt + \int_{Q_T} u_n \tau_k(u_n)\tau_k'(u_n)\varphi d\mu_n dt\right) \leq$$
$$\leq C\int_{Q_T} u^2 \varphi d\mu dt, \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.1.37}$$

Por otra parte, usando el lema 4.1.8 se prueba

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{\{|u_n|>k\}} u_n^2 d\mu_n dt \leq \lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty} 2\int_{\{|u_n|>\frac{k}{2}\}} |u_n|(|u_n| - \frac{k}{2})d\mu_n dt = 0,$$

que junto con (4.1.37), demuestra (4.1.26). □

Como consecuencia del lema 4.1.12, obtendremos una primera representación del problema que satisface u.

4.1.13 Teorema. *Existe una función $T \in L^2_{\hat{\mu}}(Q_T)$, tal que la función u satisface la siguiente ecuación*

$$\begin{cases} \langle \partial_t u, v\rangle + \int_\Omega A\nabla u \nabla v dx + \int_\Omega T u v d\mu = \langle f, v\rangle, \quad en\ \mathcal{D}'(0,T) \\ \forall v \in H^1_0(\Omega) \cap L^2_\mu(\Omega). \end{cases} \tag{4.1.38}$$

Más aún, T satisface la desigualdad

$$\alpha \le |T| \le \gamma, \qquad \hat{\mu}\text{-}e.c.t.\ \{u \ne 0\}, \tag{4.1.39}$$

y

$$\int_{Q_T} T u w \varphi d\mu dt = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{Q_T} A_n \nabla(u_n - \bar{u}_n)\nabla(w_n - w)\varphi dxdt + \int_{Q_T} F_n u_n w_n \varphi d\mu_n dt \right), \tag{4.1.40}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(Q_T)$.

Demostración. Para $\varphi \in \mathcal{D}(Q_T)$, tomando $w_n\varphi$ como función test en (4.1.3), deducimos

$$\begin{gathered} -\int_{Q_T} u_n \partial_t(w_n\varphi) dxdt + \int_{Q_T} A_n \nabla u_n \nabla\varphi\, w_n dxdt + \\ + \int_{Q_T} A_n \nabla u_n \nabla(w_n - w)\varphi dxdt + \int_{Q_T} A_n \nabla u_n \nabla w\, \varphi dxdt + \\ + \int_{Q_T} F_n u_n w_n \varphi d\mu_n dt = \langle f_n, w_n\varphi\rangle. \end{gathered} \tag{4.1.41}$$

Usando la convergencia débil en $L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ y fuerte en $L^2(Q_T)$ de la sucesión u_n hacia la función u, y (4.1.25), podemos deducir

$$\int_{Q_T} u_n \partial_t (w_n \varphi) dxdt = \int_{Q_T} u \partial_t (w\varphi) dxdt + O_n,$$

$$\langle f_n, w_n \varphi \rangle = \langle f, w\varphi \rangle + O_n,$$

$$\int_{Q_T} A_n \nabla u_n \nabla \varphi \, w_n dxdt + \int_{Q_T} A_n \nabla u_n \nabla w \varphi \, dxdt = \int_{Q_T} A \nabla u \nabla (\varphi w) dxdt + O_n.$$

Además, de la equintegrabilidad de $|\nabla \bar{u}_n|^2 \varphi^2$, y debido a que la sucesión $\nabla(w_n - w)$ está acotada en $L^2(Q_T)^N$ y converge fuerte a cero en $L^q(Q_T)^N$, $1 \le q < 2$, se tiene

$$\int_{Q_T} A_n \nabla \bar{u}_n \nabla (w_n - w) \varphi dxdt = O_n.$$

Por tanto, la igualdad (4.1.41) implica

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle \partial_t u, w\varphi \rangle dt + \int_{Q_T} A \nabla u \nabla (w\varphi) dxdt + \\ &+ \int_{Q_T} A_n \nabla (u_n - \bar{u}_n) \nabla (w_n - w) \varphi dxdt + \int_{Q_T} F_n u_n w_n \varphi d\mu_n dt = \langle f, w\varphi \rangle + O_n. \end{aligned} \tag{4.1.42}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\int_{Q_T} |A_n \nabla (u_n - \bar{u}_n)| |\nabla (w_n - w)| dxdt + \int_{Q_T} |F_n u_n| |w_n| d\mu_n dt \right) < +\infty,$$

podemos deducir que existe una medida de radon ν en Q_T, tal que para toda $\varphi \in \mathcal{D}(Q_T)$ (basta tomarla en $C_c^0(Q_T)$), tenemos (nótese que de (4.1.42), el límite del segundo miembro existe sin necesidad de extraer ninguna sucesión)

$$\int_{Q_T} \varphi d\nu = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{Q_T} A_n \nabla (u_n - \bar{u}_n) \nabla (w_n - w) \varphi dxdt + \int_{Q_T} F_n u_n w_n \varphi d\mu_n dt \right).$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, (4.1.26) y (1.2.14), se prueba

$$\left|\int_{Q_T}\varphi d\nu\right| \leq C\left(\int_{Q_T}|\nabla(u_n-\bar{u}_n)|^2|\varphi|dxdt+\int_{Q_T}|u_n|^2|\varphi|d\mu_n dt\right)^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\left(\int_{Q_T}|\nabla(w_n-w)|^2|\varphi|dxdt+\int_{Q_T}|w_n|^2|\varphi|d\mu_n dt\right)^{\frac{1}{2}}\leq \tag{4.1.43}$$

$$\leq C\left(\int_{Q_T}|u|^2|\varphi|d\mu dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{Q_T}w^2|\varphi|d\mu dt\right)^{\frac{1}{2}}+O_n.$$

Usando el teorema de derivación respecto a medidas, se deduce fácilmente de esta desigualdad, que existe una función Q, $\hat{\mu}$-medible, tal que

$$\int_{Q_T}\varphi d\nu=\int_{Q_T}Q\varphi d\mu dt,\ \forall\varphi\in\mathcal{D}(Q_T),$$

$$|Q|\leq C|u|w,\ \ \hat{\mu}\text{-e.c.t. en } Q_T.$$

Usando que $u=0$, $\hat{\mu}$-e.c.t. $\{w=0\}$ y definiendo $T=\dfrac{Q}{wu}\chi_{\{u\neq 0\}}$, deducimos que T satisface (4.1.39) y

$$\int_{Q_T}Tw\varphi d\mu dt=\int_{Q_T}\varphi d\nu=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\int_{Q_T}A_n\nabla(u_n-\bar{u}_n)\nabla(w_n-w)\varphi dxdt+\int_{Q_T}F_nu_nw_n\varphi d\mu_n dt\right),\ \forall\varphi\in\mathcal{D}(Q_T).$$

De este modo, de (4.1.42) obtenemos

$$\int_0^T\langle\partial_t u,w\varphi\rangle dt+\int_{Q_T}A\nabla u\nabla(w\varphi)dxdt+\int_{Q_T}Tw\varphi d\mu dt=\langle f,w\varphi\rangle,\ \forall\varphi\in\mathcal{D}(Q_T),$$

que por densidad, prueba que u satisface la ecuación (4.1.38).

Para finalizar la demostración del teorema 4.1.13, queda probar (4.1.39). Para $\varphi\in\mathcal{D}(Q_T)$, tomando $u_n\varphi$ como función test en (4.1.3), se tiene

$$-\frac{1}{2}\int_{Q_T}|u_n|^2\partial_t\varphi dxdt+\int_{Q_T}A_n\nabla u_n\nabla u_n\varphi dxdt+$$

$$+\int_{Q_T}A_n\nabla u_n\nabla\varphi\, u_n dxdt+\int_{Q_T}F_n u_n^2\varphi d\mu_n dt=\langle f_n,u_n\varphi\rangle.$$

Pasando al límite en esta desigualdad, gracias a (4.1.25), a la convegencia fuerte de u_n en $L^2(Q_T)$, y usando $u\varphi$ como función test en (4.1.38), deducimos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{Q_T}A_n\nabla u_n\nabla u_n\varphi dxdt+\int_{Q_T}F_n u_n^2\varphi d\mu_n dt\right)=$$

$$=\langle f,\varphi\rangle+\frac{1}{2}\int_{Q_T}|u|^2\partial_t\varphi dxdt-\int_{Q_T}A\nabla u\nabla\varphi\, udxdt= \tag{4.1.44}$$

$$=\int_{Q_T}A\nabla u\nabla u\,\varphi dxdt+\int_{Q_T}Tu^2\varphi\, d\mu dt,\quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(Q_T).$$

Usando la equintegrabilidad de $|\nabla\bar{u}_n|^2\varphi^2$ y que $\nabla(u_n-\bar{u}_n)$ converge débil a cero en $L^2(Q_T)$ y fuerte en $L^q(Q_T)$, $1\leq q<2$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_{Q_T}A_n\nabla\bar{u}_n\nabla(u_n-\bar{u}_n)\varphi dxdt=\lim_{n\to\infty}\int_{Q_T}A_n\nabla(u_n-\bar{u}_n)\nabla\bar{u}_n\varphi dxdt=0. \tag{4.1.45}$$

Por otra parte, tomando $\bar{u}_n$ como función test en (4.1.13), se deduce

$$\lim_{n\to\infty}\int_{Q_T}A_n\nabla\bar{u}_n\nabla\bar{u}_n\,\varphi dxdt=\int_{Q_T}A\nabla u\nabla u\,\varphi dxdt, \tag{4.1.46}$$

con lo que de (4.1.45) se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\int_{Q_T}A_n\nabla u_n\nabla\bar{u}_n\,\varphi dxdt=\lim_{n\to\infty}\int_{Q_T}A_n\nabla\bar{u}_n\nabla u_n\,\varphi dxdt=\int_{Q_T}A\nabla u\nabla u\,\varphi dxdt. \tag{4.1.47}$$

Por (4.1.44), (4.1.46) y (4.1.47) se obtiene entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{Q_T}A_n\nabla(u_n-\bar{u}_n)\nabla(u_n-\bar{u}_n)\varphi dxdt+\int_{Q_T}F_n u_n^2\varphi d\mu_n dt\right)=\int_{Q_T}Tu^2\varphi d\mu dt, \tag{4.1.48}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(Q_T)$, lo que implica

$$\alpha \lim_{n\to\infty}\left(\int_{Q_T}|\nabla(u_n-\bar{u}_n)|^2\varphi dxdt+\int_{Q_T}u_n^2\varphi d\mu_n dt\right)\leq\int_{Q_T}Tu^2\varphi d\mu dt, \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(Q_T). \tag{4.1.49}$$

A continuación, tomemos una sucesión $\psi_m \in C^\infty([0,T];\mathcal{D}(\Omega))$, tal que $w\psi_m$ converge a u en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^2_\mu(\Omega))$. Por convexidad y gracias a que $w\psi_m$ converge fuerte a u en $L^2(Q_T)$, para el primer miembro de (4.1.49) se deduce

$$\int_{Q_T}|\nabla(u_n-\bar{u}_n)|^2\varphi dxdt+\int_{Q_T}u_n^2\varphi d\mu_n dt\geq$$

$$\geq\int_{Q_T}|\nabla(w_n\psi_m-u)|^2\varphi dxdt+2\int_{Q_T}\nabla(w_n\psi_m-u)\nabla(u_n-\bar{u}_n-w_n\psi_m+u)\varphi dxdt+ \tag{4.1.50}$$

$$+\int_{Q_T}|w_n\psi_m|^2\varphi d\mu_n dt+2\int_{Q_T}w_n\psi_m(u_n-w_n\psi_m)\varphi d\mu_n dt,$$

donde por (1.2.17)

$$\int_{Q_T}|\nabla(w_n\psi_m-u)|^2\varphi dxdt+\int_{Q_T}|w_n\psi_m|^2\varphi d\mu_n=\int_{Q_T}|u|^2d\mu dt+O_{m,n}. \tag{4.1.51}$$

Para los segundo y cuarto términos del segundo miembro de (4.1.50), usamos

$$\int_{Q_T}\nabla(w_n\psi_m-u)\nabla(u_n-\bar{u}_n-w_n\psi_m+u)\varphi dxdt+\int_{Q_T}w_n\psi_m(u_n-w_n\psi_m)\varphi d\mu_n dt=$$

$$=\int_{Q_T}\nabla(w_n\psi_m)\nabla(u_n-w_n\psi_m)\varphi dxdt+\int_{Q_T}w_n\psi_m(u_n-w_n\psi_m)\varphi d\mu_n dt- \tag{4.1.52}$$

$$-\int_{Q_T}\nabla(w_n\psi_m)\nabla(\bar{u}_n-u)\varphi dxdt-\int_{Q_T}\nabla u\nabla(u_n-\bar{u}_n-w_n\psi_m+u)\varphi dxdt.$$

Gracias a la convergencia de la sucesión $w_n\psi_m$ hacia u en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^2_\mu(\Omega))$ y a la equintegrabilidad de la sucesión $|\nabla\bar{u}_n|^2\varphi^2$, se prueba

$$\int_{Q_T} \nabla(w_n\psi_m)\nabla(\bar{u}_n - u)\varphi dxdt + \int_{Q_T} \nabla u \nabla(u_n - \bar{u}_n - w_n\psi_m + u)\varphi dxdt = O_{m,n}. \quad (4.1.53)$$

Por otro lado, usando (1.2.2), (1.2.3) y que w_n convege débilmente a w en $H_0^1(\Omega)$, se deduce

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} \nabla(w_n\psi_m)\nabla(u_n - w_n\psi_m)\varphi dxdt + \int_{Q_T} w_n\psi_m(u_n - w_n\psi_m)\varphi d\mu_n dt = \\
&= \int_{Q_T} \nabla w_n \nabla((u_n - w_n\psi_m)\psi_m\varphi)dxdt + \int_{Q_T} w_n\psi_m(u_n - w_n\psi_m)\varphi d\mu_n dt + \\
&+ \int_{Q_T} \nabla\psi_m\nabla(u_n - w_n\psi_m)w_n\varphi dxdt - \int_{Q_T} \nabla w_n \nabla(\psi_m\varphi)(u_n - w_n\psi_m)dxdt = \\
&= \int_{Q_T} \nabla w \nabla((u - w\psi_m)\psi_m\varphi)dxdt + \int_{Q_T} w\psi_m(u - w\psi_m)\varphi d\mu dt + \\
&+ \int_{Q_T} \nabla\psi_m\nabla(u - w\psi_m)w\varphi dxdt - \int_{Q_T} \nabla w \nabla(\psi_m\varphi)(u - w\psi_m)dxdt = \\
&= \int_{Q_T} \nabla(w\psi_m)\nabla(u - w\psi_m)\varphi dxdt + \int_{Q_T} w\psi_m(u - w\psi_m)\varphi d\mu dt + O_n = O_{m,n}.
\end{aligned} \quad (4.1.54)$$

De esta forma, (4.1.49), (4.1.50), (4.1.52), (4.1.53) y (4.1.54) implican

$$\int_{Q_T} Tu^2\varphi d\mu dt \geq \alpha \int_{Q_T} u^2\varphi d\mu dt, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(Q_T),$$

de donde se deduce

$$T \geq \alpha \quad \hat{\mu}\text{-e.c.t. en } \{u \neq 0\}.$$

Para probar la otra desigualdad de (4.1.39), usaremos que por (4.1.48) e (ii)', se tiene

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} Tu^2\varphi d\mu dt = &\int_{Q_T} A_n\nabla(u_n-\bar{u}_n)\nabla(u_n-\bar{u}_n)\varphi dxdt + \int_{Q_T} F_n u_n^2\varphi d\mu_n dt + O_n \geq \\ &\geq \frac{1}{\gamma}\left(\int_{Q_T}|A_n\nabla(u_n-\bar{u}_n)|^2\varphi dxdt + \int_{Q_T}|F_n u_n|^2\varphi d\mu_n dt\right) + O_n.\end{aligned} \tag{4.1.55}$$

De (4.1.40), (4.1.55), la desigualdad de Cauchy-Schwartz y (1.2.16), deducimos que para toda $\varphi \in \mathcal{D}(Q_T)$, $\varphi \geq 0$, se verifica entonces

$$\left|\int_{Q_T} Tuw\varphi d\mu dt\right| \leq \lim_{n\to\infty}\left(\int_{Q_T}|A_n\nabla(u_n-\bar{u}_n)|^2\varphi dxdt + \int_{Q_T}|F_n u_n|^2\varphi d\mu_n dt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot\left(\int_{Q_T}|\nabla(w_n-w)|^2\varphi dxdt + \int_{Q_T}|w_n|^2\varphi d\mu_n dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \gamma^{\frac{1}{2}}\left(\int_{Q_T} Tu^2\varphi d\mu dt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{Q_T} w^2\varphi d\mu dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

lo que por el teorema de derivación de las medidas, implica

$$T|u|w \leq \gamma^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}}|u|w, \quad \hat{\mu}\text{-e.c.t. en } Q_T$$

y por tanto, como el conjunto $\{u \neq 0\}$ está contenido en $\{w > 0\}$, que

$$T \leq \gamma, \quad \hat{\mu}\text{-e.c.t. en } \{u \neq 0\}.$$

□

Para terminar esta sección, vamos a obtener un resultado que nos permitirá estimar la dependencia de T con respecto a u. Para ello, análogamente a u_n, u, f_n y f, consideraremos z_n, z, g_n, y g tales que

$$\begin{cases} g_n,\ g \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \\ g_n \to g \text{ en } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),\end{cases} \tag{4.1.56}$$

$$\begin{cases} z_n \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^2_{\mu_n}(\Omega)) \\ \langle \partial_t z_n, v\rangle + \int_\Omega A_n\nabla z_n\nabla v dx + \int_\Omega F_n z_n v d\mu_n = \langle g_n, v\rangle, \text{ en } \mathcal{D}'(0,T) \\ \forall v \in H_0^1(\Omega)\cap L^2_{\mu_n}(\Omega),\end{cases} \tag{4.1.57}$$

$$\begin{cases} z \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega) \cap L^2_\mu(\Omega)) \\ z_n \rightharpoonup z \text{ en } L^2(0,T; H_0^1(\Omega)). \end{cases} \tag{4.1.58}$$

Del mismo modo que para u_n, definimos $\bar{z}_n \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ como solución del problema

$$\begin{cases} \partial_t \bar{z}_n - div\, A_n \nabla \bar{z}_n = \partial_t z - div\, A \nabla z \quad \text{ en } \mathcal{D}'(Q_T) \\ \bar{z}_n(0) = z(0) \text{ e.c.t. } \Omega. \end{cases} \tag{4.1.59}$$

Aplicando el teorema 4.1.13 a la sucesión z_n, sabemos que existe una función $S \in L^\infty_\mu(Q_T)$, con $\alpha \leq S \leq \gamma$, $\hat{\mu}$-e.c.t. $\{z \neq 0\}$, tal que la función z satisface

$$\begin{cases} \langle \partial_t z, v\rangle + \int_\Omega A\nabla z \nabla v dx + \int_\Omega S z v d\mu = \langle g, v\rangle, \ \text{ en } \mathcal{D}'(0,T) \\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap L^2_\mu(\Omega). \end{cases} \tag{4.1.60}$$

La proposición siguiente nos proporcionará estimaciones de la diferencia entre Su y Tv.

4.1.14 Proposición. *Las funciones S y T verifican*

$$\alpha(u-v)^2 \leq (Tu - Sv)(u-v) \leq \gamma(u-v)^2, \quad \hat{\mu}\text{-}e.c.t.\ Q_T. \tag{4.1.61}$$

Demostración. Es suficiente observar que $u_n - z_n$ satisface la ecuación variacional

$$\langle \partial_t(u_n - z_n), v\rangle + \int_\Omega A_n \nabla(u_n - z_n)\nabla v dx + \int_\Omega F_n(u_n - z_n) v d\mu_n = \langle f_n - g_n, v\rangle,$$

en $\mathcal{D}'(0,T)$, para toda $v \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega) \cap L^2_\mu(\Omega))$, y por tanto el teorema 4.1.13 aplicado a $u_n - z_n$, implica que existe $R : Q_T \to \mathbb{R}$, $\hat{\mu}$ medible, tal que

$$\alpha \leq R \leq \gamma, \quad \hat{\mu}\text{-e.c.t. } \{(u-z) \neq 0\} \tag{4.1.62}$$

y tal que el límite $(u-z)$ de $(u_n - z_n)$, satisface

$$\langle \partial_t(u-z), v\rangle + \int_\Omega A\nabla(u-z)\nabla v dx + \int_\Omega R(u-z) v d\mu = \langle f - g, v\rangle,$$

en $\mathcal{D}'(0,T)$, para toda $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^2_\mu(\Omega)$. Además, la función R viene definida por

$$\int_{Q_T} R(u-v)w\varphi d\mu dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big(\int_{Q_T} A_n \nabla(u_n - z_n - (\bar{u}_n - \bar{z}_n))\nabla(w_n - w)\varphi dx dt + \int_{Q_T} F_n(u_n - z_n) w_n \varphi d\mu_n dt \Big) =$$

$$= \int_{Q_T} (Tu - Sv) w\varphi d\mu dt, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q_T).$$

Por densidad, se tiene entonces $R(u-v) = Tu - Sv$, $\hat{\mu}$-e.c.t. Q_T, con lo que (4.1.62), implica (4.1.61).

□

4.2 Homogeneización y resultado corrector

En esta sección, gracias a la proposición 4.1.14, probamos que la función T que aparece en el teorema 4.1.13 no depende ni de u_n ni de u. La idea para ello, es construir una sucesión e_n^m que verifica propiedades similares a la sucesión u_n de la sección anterior, y que converge a la función característica del conjunto $\{w > 0\}$ cuando n y después m tienden a infinito.

4.2.1 Definición. *Para m, $n \in \mathbb{N}$ definimos e_n^m como solución del problema*

$$\begin{cases} e_n^m \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega) \cap L^2_{\mu_n}(\Omega)),\ e_n^m(0) = \dfrac{w_n}{w \vee \frac{1}{m}} \ \textit{e.c.t. } \Omega, \\ \langle \partial_t e_n^m, v\rangle + \displaystyle\int_\Omega A_n \nabla e_n^m \nabla v dx + \int_\Omega F_n e_n^m v d\mu_n + \\ +m \displaystyle\int_\Omega (e_n^m - \frac{w_n}{w \vee \frac{1}{m}}) v dx = 0 \ \textit{en } \mathcal{D}'(0,T) \\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap L^2_{\mu_n}(\Omega). \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Para la sucesión e_n^m, tenemos el siguiente resultado.

4.2.2 Lema. *La sucesión e_n^m está acotada en $L^\infty(Q_T)$ independientemente de m y n. Más aún, para todo $m \in \mathbb{N}$, la norma de e_n^m en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \cap L^2_{\mu_n}(\Omega))$ está acotada independientemente de n, (aunque no de m). Existe una subsucesión de n, que seguimos denotando por n, y existen $e^m \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \cap L^2_\mu(\Omega))$ y $E^m \in L^\infty_{\hat\mu}(Q_T)$, con $\alpha \le E^m \le \gamma$, $\hat\mu$-e.c.t. Q_T, tales que para todo $m \in \mathbb{N}$, e_n^m converge a e^m débil en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \cap L^2_\mu(\Omega))$, débil-$*$ en $L^\infty(Q_T)$ y fuerte en $L^2(Q_T)$. Además, e^m y E^m están relacionadas por*

$$\left\{\begin{array}{l} e^m(0) = \dfrac{w}{w \vee \frac{1}{m}} \ \textit{e.c.t. } \Omega \\ \langle \partial_t e^m, v\rangle + \displaystyle\int_\Omega A\nabla e^m \nabla v dx + \int_\Omega E^m e^m v d\mu + m\int_\Omega (e^m - \dfrac{w}{w \vee \frac{1}{m}}) v dx = 0 \ \textit{en } \mathcal{D}'(0,T) \\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap L^2_\mu(\Omega). \end{array}\right. \tag{4.2.2}$$

La sucesión e^m converge a $\chi_{\{w>0\}}$ fuerte en $L^2(Q_T) \cap L^2_{\hat\mu}(Q_T)$ y débil-$*$ en $L^\infty(Q_T)$.

Además, existe $F \in L^\infty_{\hat\mu}(Q_T)$ tal que

$$\alpha \le F \le \gamma, \quad \hat\mu\textit{-e.c.t. en } \{w > 0\}, \tag{4.2.3}$$

$$E^m e^m \to F \ \textit{fuerte en } L^2_{\hat\mu}(Q_T) \ \textit{y débil-}* \textit{ en } L^\infty_{\hat\mu}(Q_T). \tag{4.2.4}$$

Demostración. Tomando $e_n^m - \frac{w_n}{w \vee \frac{1}{m}}$ como función test en (4.2.1) deducimos fácilmente que para todo $m \in \mathbb{N}$, la norma de e^m en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \cap L^2_\mu(\Omega))$ está acotada independientemente de n. Además, por el principio del máximo (basta considerar $(e_n^m)^-$ y $(e_n^m - \|\frac{w_n}{w \vee \frac{1}{m}}\|_{L^\infty(Q_T)})^+$ como funciones test en (4.2.2)) se tiene

$$0 \le e_n^m \le \|\frac{w_n}{w \vee \frac{1}{m}}\|_{L^\infty(Q_T)}, \quad \text{e.c.t. } \Omega, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así, extrayendo una subsucesión de n, que podemos elegir independiente de m por un proceso diagonal, existen $e^m \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \cap L^2_\mu(\Omega))$, tales que para todo $m \in \mathbb{N}$, e_n^m converge a e^m débilmente en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \cap L^2_\mu(\Omega))$ y débil-$*$ en $L^\infty(Q_T)$. Por semicontinuidad, e^m satisface

$$0 \le e^m \le \| \frac{w}{w \vee \frac{1}{m}} \|_{L^\infty(Q_T)} \le 1, \quad \text{e.c.t. } \Omega, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

y por el teorema 4.1.13 aplicado a e_n^m, existe $E^m \in L^\infty_{\hat\mu}(Q_T)$ tal que $\alpha \le E^m \le \gamma$, $\hat\mu$-e.c.t. Q_T y e^m satisface (4.2.2).

Tomando $w^2(e^m - \frac{w}{w\vee\frac{1}{m}})$ como función test en (4.2.2) y teniendo en cuenta que $\nabla(\frac{w}{w\vee\frac{1}{m}}) = m\nabla w \chi_{\{w<\frac{1}{m}\}}$, se tiene

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2}\int_\Omega w^2 \left(e^m(T) - \frac{w}{w\vee\frac{1}{m}} \right)^2 dx + \int_{Q_T} A\nabla \left(e^m - \frac{w}{w\vee\frac{1}{m}} \right) \nabla \left(e^m - \frac{w}{w\vee\frac{1}{m}} \right) w^2 dxdt + \\
+2\int_{Q_T} A\nabla \left(e^m - \frac{w}{w\vee\frac{1}{m}} \right) \nabla w\, w \left(e^m - \frac{w}{w\vee\frac{1}{m}} \right) dxdt + \\
+\int_{Q_T} E^m \left(e^m - \frac{w}{w\vee\frac{1}{m}} \right)^2 w^2 d\mu dt + \qquad (4.2.5) \\
+m\int_{Q_T} \left(e^m - \frac{w}{w\vee\frac{1}{m}} \right)^2 w^2 dxdt = -m\int_{\{w<\frac{1}{m}\}} A\nabla w \nabla \left(e^m - \frac{w}{w\vee\frac{1}{m}} \right) w^2 dxdt - \\
-2m\int_{\{w<\frac{1}{m}\}} A\nabla w \nabla w\, w \left(e^m - \frac{w}{w\vee\frac{1}{m}} \right) dxdt - \int_{Q_T} E^m \frac{w}{w\vee\frac{1}{m}} \left(e^m - \frac{w}{w\vee\frac{1}{m}} \right) w^2 d\mu dt.
\end{gathered}$$

Usando la desigualdad de Young, se deduce de esta igualdad que las sucesiones $w\nabla(e^m - \frac{w}{w\vee\frac{1}{m}})$, $w(e^m - \frac{w}{w\vee\frac{1}{m}})$ y por tanto, $w\nabla e^m$ y we^m están acotadas en $L^2(Q_T)$ y $L^2_{\hat\mu}(Q_T)$ respectivamente. Más aún, $\sqrt{m}(e^m - \frac{w}{w\vee\frac{1}{m}})$ está acotada en $L^2(Q_T)$. Usando que $\nabla(we^m) = e^m\nabla w + w\nabla e^m$ está acotada en $L^2(Q_T)$, deducimos que we^m converge débil a w en $L^2(0,T;H^1_0(\Omega)\cap L^2_\mu(\Omega))$ y fuerte en $L^2(Q_T)$.

Por una sencilla generalización de los resultados que aparecen en [17], sabemos además que we^m converge a w en $\hat\mu$-medida. Usando la desigualdad $|we^m| \le |w|$, $\hat\mu$-e.c.t. en Q_T, se deduce que we^m converge fuerte a w en $L^2_{\hat\mu}(Q_T)$. Como $e^m = 0$, $\hat\mu$-e.c.t. $\{w > 0\}$, tenemos que e^m converge a $\chi_{\{w>0\}}$ $\hat\mu$-e.c.t. Teniendo en cuenta que we^m converge a w en $L^2(Q_T)$, se deduce que e^m converge a $\chi_{\{w>0\}}$ e.c.t. Q_T y por tanto en $L^2(Q_T)$.

De (4.1.39) y (4.1.61), se deducen las desigualdades

$$\alpha \le E^m \le \gamma \quad \hat{\mu}\text{-e.c.t. } \{e^m > 0\}$$

$$|E^m e^m - E^n e^n| \le \gamma |e^m - e^n| \qquad \hat{\mu}\text{-e.c.t. } Q_T.$$

Teniendo en cuenta que e^m $\hat{\mu}$-converge a $\chi_{\{w>0\}}$, obtenemos la existencia de $F \in L^\infty_{\hat{\mu}}(Q_T)$ tal que se tienen (4.2.3) y (4.2.4).

Usando la convergencia de we^m a w, fuerte en $L^2(Q_T) \cap L^2_{\hat{\mu}}(Q_T)$ y débil en $L^2(0,T; H^1_0(\Omega) \cap L^2_{\hat{\mu}}(\Omega))$, podemos pasar al límite en (4.2.5), para deducir que $w\nabla(e^m - \frac{w}{w \vee \frac{1}{m}})$ converge fuerte a cero en $L^2(Q_T)^N$, o equivalentemente que $w\nabla e^m$ tiende a cero en $L^2(Q_T)^N$, y por tanto que we^m converge fuerte a w en $L^2(0,T; H^1_0(\Omega) \cap L^2_{\hat{\mu}}(\Omega))$.

□

Usando el teorema 4.1.13, (4.1.5) y la estimación (4.1.61), obtenemos el resultado de homogeneización para el problema (4.0.2).

4.2.3 Teorema. *Consideremos la subsucesión de n y la función F dadas en el lema 4.2.2, $A \in M^\gamma_\alpha(Q_T)$ dada en el teorema 1.2.12 y la medida μ dada por el teorema 1.2.3. Entonces dadas $f_n \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$ y $u_n \in L^2(0,T; H^1_0(\Omega) \cap L^2_{\mu_n}(\Omega))$ verificando (4.1.3) y (4.1.4), tales que existen $u \in L^2(0,T; H^1_0(\Omega) \cap L^2_\mu(\Omega))$ y $f \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$, verificando (4.1.1) y (4.1.2), se tiene que u y f satisfacen*

$$\begin{cases} \langle \partial_t u, v\rangle + \displaystyle\int_\Omega A(x,t)\nabla u \nabla v dx + \int_\Omega F(x,t) uv \, d\mu = \langle f, v\rangle \quad en\ \mathcal{D}'(0,T) \\ \forall\, v \in H^1_0(\Omega) \cap L^2_\mu(\Omega). \end{cases} \tag{4.2.6}$$

Demostración. Sean u_n, f_n, u y v en las condiciones del enunciado del teorema. Usando el teorema 4.1.13, sabemos que existe un función $T \in L^2(Q_T)$ $\hat{\mu}$-medible, tal que u verifica (4.1.38). Queda probar que $Tu = Fu$ $\hat{\mu}$-e.c.t Q_T.

Observemos que para todo $s \in \mathbb{R}$, se^m_n es solución del problema

$$\begin{cases} se_n^m \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega) \cap L^2_\mu(\Omega)), \\ \langle \partial_t se_n^m, v\rangle + \int_\Omega A_n(x,t)\nabla(se_n^m)\nabla v dx + \int_\Omega F_n(x,t) se_n^m v\, d\mu_n + \\ +m \int_\Omega (se_n^m - \frac{sw_n}{w \vee \frac{1}{m}}) v dx = 0 \text{ en } \mathcal{D}'(0,T) \\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \cap L^2_\mu(\Omega), \end{cases}$$

y converge débilmente en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ a se^m solución de

$$\begin{cases} se^m \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega) \cap L^2_{\mu_n}(\Omega)) \\ \langle \partial_t se^m, v\rangle + \int_\Omega A(x,t)\nabla(se^m)\nabla v dx + \int_\Omega E^m se^m v\, d\mu + \\ +m \int_\Omega (se^m - \frac{sw}{w \vee \frac{1}{m}}) v dx = 0 \text{ en } \mathcal{D}'(0,T) \\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \cap L^2_\mu(\Omega). \end{cases}$$

De (4.1.61), tenemos que las funciones T y E^m satisfacen

$$|Tu - E^m se^m| \leq C|u - se^m|, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \hat{\mu}\text{-e.c.t. en } Q_T. \tag{4.2.7}$$

Pasando al límite en esta desigualdad, gracias al lema 4.2.2, y teniendo en cuenta que $u = 0$ $\hat{\mu}$-e.c.t. en $\{w = 0\}$, deducimos

$$|Tu - Fs| \leq \gamma |u - s|, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \hat{\mu}\text{-e.c.t. en } Q_T,$$

y por tanto que $Tu = Fu$, $\hat{\mu}$-e.c.t. en Q_T, resultado que prueba el teorema 4.2.3.

□

Gracias a la nota 4.1.2 y al resultado de convergencia de las condiciones iniciales (4.1.5), se tiene el siguiente resultado.

4.2.4 Corolario. *La sucesión n, la matriz $A \in M_\alpha^\gamma(Q_T)$ y el par $(F,\mu) \in \mathcal{F}_\alpha^\gamma(Q_T)$ dados en el teorema 4.2.3 verifican que para toda sucesión $f_n \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ que converge a una distribución f fuerte en $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ y para toda sucesión $u_n^0 \in L^2(\Omega)$ con $u_n^0 = 0$ e.c.t. $\{w_n > 0\}$ que convege débilmente en $L^2(\Omega)$ a una función u_0, se tiene que la sucesión*

u_n de soluciones de (4.0.2) converge débilmente en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ a la única solución u del problema

$$\begin{cases} u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^2_\mu(\Omega)), \quad u(0)=u^0\chi_{\{w>0\}} \text{ e.c.t. } \Omega \\ \langle \partial_t u, v\rangle + \int_\Omega A\nabla u \nabla v dx + \int_\Omega Fuv\, d\mu = \langle f, v\rangle \quad \text{en } \mathcal{D}'(0,T) \\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\cap L^2_\mu(\Omega). \end{cases} \tag{4.2.8}$$

Demostración. La demostración sigue fácilmente de la observación 4.1.2, de los teoremas 4.1.3 y 4.2.3 y de la unicidad del problema (4.2.8). □

Terminamos el capítulo con el siguiente resultado corrector.

4.2.5 Teorema. *Sean la sucesión de n, la matriz $A \in M_\alpha^\gamma(Q_T)$ y el par $(F,\mu) \in \mathcal{F}_\alpha^\gamma(Q_T)$ dados en el teorema 4.2.3 y denotemos por $\bar{u}_n$ la solución de (4.1.13). Entonces, para todo compacto $K \subset Q_T$, para todas φ en $\mathcal{D}(Q_T)$ y $\psi \in H^1(Q_T)$, tal que existe $L>0$ con $|\psi| \le Lw$ C_2-q.e. en Q_T, se tiene*

$$\limsup_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\left(\int_K |\nabla u_n - \nabla\bar{u}_n - \psi\nabla e_n^m|^2 dxdt + \int_K |u_n - \psi e_n^m|^2 d\mu_n dt\right) \le \\ \le \int_K |u-\psi|^2 d\mu dt. \tag{4.2.9}$$

Demostración. Puesto que $u_n - se_n^m$ es solución de

$$\langle \partial_t(u_n - se_n^m), v\rangle + \int_\Omega A_n\nabla(u_n - se_n^m)\nabla v dx + \int_\Omega F_n(u_n - se_n^m)v\, d\mu = \\ = m\int_\Omega (se_n^m - \frac{sw_n}{w\vee\frac{1}{m}})v dx + \langle f_n, v\rangle$$

con $s \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ y e_n^m solución de (4.2.1), tenemos

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\int_{Q_T} |\nabla u_n - \nabla\bar{u}_n - s\nabla e_n^m|^2\varphi dxdt + \int_{Q_T} |u_n - se_n^m|^2\varphi d\mu_n dt\right) \le \\ \le C\int_{Q_T} |u - se^m|^2\varphi d\mu dt + C\limsup_{n\to\infty}\int_{Q_T} |s\nabla\bar{e}_n^m|^2\varphi dxdt, \tag{4.2.10}$$

para toda $\varphi \in H^1(Q_T) \cap L^\infty(Q_T)$ con soporte compacto en Q_T, donde donde $\bar{e}_n^m$ es la solución de

$$\begin{cases} \partial_t \bar{e}_n^m - div\, A\nabla \bar{e}_n^m = \partial_t e^m - div\, A\nabla e^m \text{ en } \mathcal{D}'(Q_T) \\ \bar{e}_n^m \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ \bar{e}_n^m(0) = e^m(0) \text{ e.c.t. } \Omega. \end{cases} \tag{4.2.11}$$

Tomando $e_n^m \varphi$ como función test en (4.2.11), es inmediato probar que existe $C > 0$ dependiendo de α, γ, N y $|\Omega|$, tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{Q_T} |\nabla \bar{e}_n^m|^2 \varphi dxdt \leq C \int_{Q_T} |\nabla e^m|^2 \varphi dxdt.$$

De esta forma, de (4.2.10) deducimos

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \left(\int_{Q_T} |\nabla u_n - \nabla \bar{u}_n - s\nabla e_n^m|^2 \varphi dxdt + \int_{Q_T} |u_n - s e_n^m|^2 \varphi d\mu_n dt \right) \leq \\ \leq C \left(\int_{Q_T} |u - s e^m|^2 \varphi d\mu dt + \int_{Q_T} |s\nabla e^m|^2 \varphi dxdt \right), \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ y toda $\varphi \in H^1(Q_T) \cap L^\infty(Q_T)$, $\varphi \geq 0$.

Sea ahora $\psi \in H^1(Q_T)$, tal que existe $L \geq 0$ con $|\psi| \leq Lw$ q.e. en Q_T. Para η, $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\eta < \lambda$ definimos el conjunto $K_\eta^\lambda = \{\eta \leq \psi \leq \lambda\} \cap K$, y consideremos una sucesión $\varphi_k \in H^1(Q_T)$, con $\chi_{K_\eta^\lambda} \leq \varphi_k \leq 1$, tal que φ_k converge a $\chi_{K_\eta^\lambda}$. Escribiendo (4.2.12) para φ_k y pasando al límite en k, obtenemos

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \left(\int_{K_\eta^\lambda} |\nabla u_n - \nabla \bar{u}_n - s\nabla e_n^m|^2 dxdt + \int_{K_\eta^\lambda} |u_n - s e_n^m|^2 d\mu_n dt \right) \leq \\ \leq C \left(\int_{K_\eta^\lambda} |u - s e^m|^2 d\mu dt + \int_{K_\eta^\lambda} |s\nabla e^m|^2 dxdt \right), \quad \forall m \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

Para $\delta > 0$, definimos

$$\psi_\delta = \delta \sum_{j=1}^{\infty} j\chi_{\{j\delta \leq \, \psi \, \leq \, (j+1)\delta\}} - \delta \sum_{j=1}^{\infty} j\chi_{\{-(j+1)\delta \leq \, \psi \, \leq \, -j\delta\}},$$

donde observemos que los dos sumatorios que aparecen son finitos, debido a que ψ está en $L^\infty(Q_T)$ y por tanto los conjuntos $\{j\delta \leq \psi \leq (j+1)\delta\}$ y $\{-(j+1)\delta \leq \psi \leq -j\delta\}$ son vacíos para j suficientemente grande.

Tomando en (4.2.13), $\eta = j\delta$, $\lambda = (j+1)\delta$ y $s = j\delta$ con $j \in \mathbb{N}$, se obtiene

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\int_{K_{j\delta}^{(j+1)\delta}} |\nabla u_n - \nabla \bar{u}_n - \psi_\delta \nabla e_n^m|^2 dxdt + \int_{K_{j\delta}^{(j+1)\delta}} |u_n - \psi_\delta e_n^m|^2 d\mu_n dt \right) \leq$$

$$\leq C \left(\int_{K_{j\delta}^{(j+1)\delta}} |u - \psi_\delta e^m|^2 d\mu dt + \int_{K_{j\delta}^{(j+1)\delta}} |\nabla e^m|^2 \psi_\delta^2 dxdt \right), \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Una expresión análoga, se tiene tomando en (4.2.13), $\eta = -(j+1)\delta$, $\lambda = -j\delta$ y $s = -(j+1)\delta$. Sumando en j ambas desigualdades deducimos

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} \left(\int_K |\nabla u_n - \nabla \bar{u}_n - \psi_\delta \nabla e_n^m|^2 dxdt + \int_K |u_n - \psi_\delta e_n^m|^2 d\mu_n dt \right) \leq \\ &\leq C \left(\int_K |u - \psi_\delta e^m|^2 d\mu dt + \int_K |\nabla e^m|^2 \psi_\delta^2 dxdt \right), \quad \forall m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

Usando que $|\psi_\delta| \leq Lw$ y el lema 4.2.2, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_K |u - \psi_\delta e^m|^2 d\mu dt = \int_K |u - \psi_\delta|^2 d\mu dt,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_K |\nabla e^m|^2 \psi_\delta^2 dxdt \leq \lim_{n\to\infty} L^2 \int_K |\nabla e^m|^2 w^2 dxdt = \lim_{n\to\infty} L^2 \int_K |\nabla (we^m) - e^m \nabla w|^2 dxdt.$$

Pasando por tanto al límite cuando m tiende a infinito, concluimos la demostración del teorema 4.2.5.

$\square$

4.2.6 Nota. *Si en el teorema 4.2.5 la función u pertenece a $H^1(Q_T)$ y existe $L \geq 0$, verificando $|u| \leq Lw$ e.c.t. Q_T, entonces tomando $\psi = u$ en (4.2.9) obtenemos*

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \left(\int_K |\nabla u_n - \nabla \bar{u}_n - u\nabla e_n^m|^2 dxdt + \int_K |u_n - ue_n^m|^2 d\mu_n dt \right) = 0,$$

es decir

$$\nabla u_n \sim \nabla \bar{u}_n + u\nabla e_n^m \text{ en } L^2_{loc}(Q_T)^N. \tag{4.2.15}$$

Si u no está en las condiciones anteriores, sabemos que existe una sucesión ψ_k con las mismas propiedades que ψ en el teorema 4.2.5, que converge fuerte a u en $L^2(0,T; H^1_0(\Omega) \cap L^2_\mu(\Omega))$. Por otro lado (véanse [54], [55]), sabemos que existe una sucesión de matrices $P_n \in L^2(Q_T)^{N\times N}$ que sólo depende de A_n, tal que si n es suficientemente regular, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_{Q_T} |\nabla \bar{u}_n - P_n \nabla u|^2 dxdt = 0.$$

De esta forma, de (4.2.15), podemos deducir el siguiente resultado corrector para ∇u_n:

$$\nabla u_n \sim P_n \nabla u + u\nabla e_n^m \quad \text{ en } L^2_{loc}(Q_T)^N.$$

Bibliografía

[1] G. ALLAIRE. *Shape optimization by the homogenization method*. Appl. Math. Sci. 146, Springer-Verlag (New York, 2002).

[2] A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS, G. PAPANICOLAOU. *Asymptotic analysis for periodic structures.* Studies in Math. and its Appl. 5, Noth-Holland Publishing (Amsterdan, 1978).

[3] L. BOCCARDO, F. MURAT. *Almost everywhere convergence of the gradients of solutions to elliptic and parabolic equations.* Nonlinear Anal. Theor. Math. and Appl. 19, 6 (1992), 581-597.

[4] A. BRAIDES, A. MALUSA. *Approximation of relaxed Dirichlet problems.* En *Calculus of variations, homogenization and continuum mechanics.* (Marsella, 1993). Ser. Adv. Math. Appl. Sci., 18, World Sci. (River Edge, 1994), 83-97.

[5] G. BUTTAZZO. G. DAL MASO. *Shape optimization for Dirichlet problems.* Relaxed SIS and optimaly conditions. Appl. Math. Optim. 23 (1991), 17-49.

[6] G. BUTTAZZO, G. DAL MASO, A. GARRONI, A. MALUSA. *On the relaxed formulation of some shape optimization problems*. Adv. Math. Sci. Appl. 7, 1 (1997), 1-24.

[7] C. CALVO-JURADO, J. CASADO-DÍAZ. *The limit of Dirichlet systems for variable monotone operators in general perforated domains*. J. Math. Pures Appl. 81 (2002), 471-493.

[8] C. CALVO-JURADO, J. CASADO-DÍAZ. *Results on existence of solution for an optimal design problem*. Extracta Mathematicae. Por aparecer.

[9] C. CALVO-JURADO, J. CASADO-DÍAZ. *Homogenization of Dirichlet parabolic systems with variable monotone operators in general perforated domains*. Proc. Royal Soc. Edinburgh. Por aparecer.

[10] C. CALVO-JURADO, J. CASADO-DÍAZ. *An existence result for control problems on the coefficients and the domain for nonlinear parabolic Dirichlet problems*. Comm. in Nonlinear Sci. and Num. Simulation. Por aparecer.

[11] C. CALVO-JURADO, J. CASADO-DÍAZ. *Asymptotic behaviour of linear Dirichlet parabolic problems with variable operators depending on time in varying domains.* En preparación.

[12] J. CASADO-DÍAZ. *Existence of a sequence satisfying Cioranescu-Murat conditions in homogenization of Dirichlet problems in perforated domains.* Rend. Mat. 16 (1996), 387-413.

[13] J. CASADO-DÍAZ. *Homogenization of general quasi-linear Dirichlet problems with quadratic growth in perforated domains.* J. Math. Pur. Appl. 76 (1997), 431-476.

[14] J. CASADO-DÍAZ. *Homogenization of Dirichlet problems for monotone operators in varying domains.* Proc. Royal Soc. Edinburgh, 127A (1997), 457-478.

[15] J. CASADO-DÍAZ. *Homogenization of pseudomonotone Dirichlet problems in perforated domains.* J. Math. Pur. Appl. 79, 6 (2000), 249-276.

[16] J. CASADO-DÍAZ, J. COUCE, J. D. MARTIN. *Optimality conditions for nonconvex multistate control problems in the coefficients.* Por aparecer.

[17] J. CASADO-DÍAZ, G. DAL MASO. *A weak notion of convergence in capacity with applications to thin obstacle problems.* En *Calculus of Variations and Differential Equations.* Eds. A. Ioffe, S. Reich, I. Shaffrir. Research Notes in Math. 410, Chapman-Hall\CRC (Boca Raton, 1998), 56-64.

[18] J. CASADO-DÍAZ, A. GARRONI. *Asymptotic behaviour of nonlinear elliptic systems on varying domains.* SIAM J. Math. Anal. 31, 3 (2000), 581-624.

[19] A. V. CHERKAEV, *Variational methods for structural optimization.* Appl. Math. Sci. 140, Springer-Verlag (New York, 2000).

[20] D. CIORANESCU. F. MURAT. *Un terme étrange venu d'ailleurs.* En *Nonlinear partial differential equations and their applications.* Collège de France seminar, Vols. II and III. Eds H. Brézis and J. L. Lions. Research Notes in Math. 60 y 70, Pitman (London, 1982), 98-138 y 154-78.

[21] R. COIFMAN, P. L. LIONS, Y. MEYER, S. SEMMES. *Compensated compactness and Hardy spaces.* J. Math. Pur. Appl. 72 (1993), 247-286.

[22] R. COIFFMAN, G. WEISS. *Extensions of Hardy Spaces and their use in Analysis.* Bull. of the American Math. Soc. 83, 4 (1977).

[23] G. DAL MASO. *Γ-convergence and μ-capacities.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 14 (1987), 423-464.

[24] G. DAL MASO, A. DEFRANCESCHI. *Limits of nonlinear Dirichlet problems in varying domains.* Manuscripta Math. 61 (1988), 251-278.

[25] G. DAL MASO. *An introduction to Γ-convergence.* Progress in Nonlinear Diff. Eq. and Appl. 8, Birkhäuser (Boston, 1993).

[26] G. DAL MASO, A. GARRONI. *New results on the asymptotic behaviour of Dirichlet problems in perforated domains.* Math. Mod. Meth. Appl. Sci. 3 (1994), 373-407.

[27] G. DAL MASO, A. GARRONI. *The capacity method for asymptotic Dirichlet problems.* Asymp. Anal. 15, 3-4 (1997), 299-324.

[28] G. DAL MASO, A. GARRONI, I.V. SKRYPNIK. *A capacitary method for the asymptotic analysis of Dirichlet problems for monotone operators.* J. Anal. Math. 7 (1997), 263-313.

[29] G. DAL MASO, U. MOSCO. *Wiener-criteria and energy decay for relaxed Diriclet problems.* Arch. Rat. Mech. and Anal. V. 95, 4 (1986), 345-387.

[30] G. DAL MASO, U. MOSCO. *Wiener-criterion and Γ-convergence.* Appl. Math. Optim. 15 (1987), 15-63.

[31] G. DAL MASO, F. MURAT. *Asymptotic behaviour and correctors for the Dirichlet problems in perforated domains with homogeneous monotone operators.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa. 7, 4 (1997), 765-803.

[32] G. DAL MASO, F. MURAT. *Dirichlet problems in perforated domains for homogeneous monotone operators on H_0^1.* En *Calculus of variations, homogenization and continuum mechanics.* (Marsella, 1993). Eds. G. Bouchitté, G. Butttazzo. P. Suquet. Series on Advances in Math. for Appl. Sci. 18, World Scientific (Singapore, 1994), 177-202.

[33] G. DAL MASO, F. MURAT. *Almost everywhere convergence of gradients of solutions to nonlinear elliptic systems.* Nonlinear Anal. Theor. Math. and Appl. (1998), 405-412.

[34] G. DAL MASO, F. MURAT. *Asymptotic behaviour and correctors for linear Dirichlet problems with simultaneously varying operators and domains.* Por aparecer.

[35] G. DAL MASO, R. TOADER. *Limits of Dirichlet problems in perforated domains: a new formulation.* Rend. Instit. Mat. Univ. Trieste, 24 (1994), 339-360.

[36] G. DAL MASO, R. TOADER. *A capacitary method for the study of Dirichlet problems for elliptic systems in varying domains.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 96 (1996), 257-277.

[37] P. DONATO, A. NABIL. *Homogénéisation et contrôlabilité approchée de l'équation de la chaleur dans des domaines perforés.* C. R. Acad. Sci. Paris. 324, 1 (1997), 789-794.

[38] L.C. EVANS, R.F. GARIEPY. *Measure Theory and Fine Properties of Functions,* (CRC Press, (Boca Raton, 1992).

[39] H. FEDERER, W.P. ZIEMER. *The Lebesgue set of a function whose distribution derivaties are p-th power sumable.* Indiana Univ. Math. J. 22 (1972), 139-158.

[40] C. FEFFERMAN, E. STEIN. *H^p spaces of several variables.* Acta Math. 129 (1972), 137-193.

[41] J. GARNIER. *Homogenization in a periodic and time-dependent potential.* Siam J. Appl. Math. 57, 1 (1997), 95-111.

[42] K. KACIMI, F. MURAT. *Estimation de l'erreur dans des problèmes de Dirichlet où apparaît un terme étrange.* En *Partial differential equations and the calculus of variations. Vol. II, Essays in honor of E. De Giorgi.* Eds F. Colombini, L. Modica, A. Marino and S. Spagnolo, Progress in Nonlinear Diff. Eq. and their Appl. 2, Birhäuser (Boston, 1989), 661-96.

[43] E. Y. KHRUSLOV. *The method of ortogonal projections and the Dirichlet problems in domains with a fine-grained boundary.* Math. USSR-Sb. 17 (1972), 37-59.

[44] A. KOVALEVSKY. *An effect of double homogenization for Dirichlet problems in variable domains of general structure.* C.R.A.S. Paris, 328, I (1999), 1151-1156.

[45] L. LABANI, C. PICARD. *Homogenization of a nonlinear Dirichlet problem in a periodically perforated domain.* En Recent advances on nonlinear elliptic and parabolic problems, ed. by P. Bénilan, M Chipot, L.C Evans. M. Pierre. Pitman Research Notes in Math. 208 (London, Harlow, 1989), 294-305.

[46] J. L. LIONS. *Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires.* Dunod. Gauthier-Villars (Paris, 1969).

[47] K. A. LURIE. *Applied optimal control theory of distributed systems.* Plenum Press (New York, 1993).

[48] K. A. LURIE, A. V. CHERKAEV. *Exact estimates of the conductivity of a binary mixture of isotropic materials.* Proc. Royal Soc. Edinburgh, 104 A (1986), 21-38.

[49] N. G. MEYERS. *An L^p-estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl Sci. 3, 17 (1963), 189-206.

[50] G. W. MILTON. *The theory of composites.* Cambridge Monog. on Appl. and Comp. Math., Cambridge University Press (Cambridge, 2002).

[51] F. MURAT. *A survey on compensated compactness.* En *Contributions to modern calculus of variations* (Bologna, 1985), Eds. L. Cesari. Res. Notes Math. Ser. 148 (Harlow, 1987), 145-183.

[52] F. MURAT. *Théorèmes de non-existence pour des problèmes de contrôle dans le coefficients.* C.R.A.S. Paris A, 274 (1972), 395-398.

[53] F. MURAT, L. TARTAR. *On the control of coefficientes in partial differential equations.* En *Topics in the mathematical modelling of composite materials.* Eds. A. Cherkaek, R. Kohn. Progress in Nonlinear Diff. Eq. and their Appl. Birkhäuser (Boston, 1997), 139-173.

[54] F. MURAT, L. TARTAR. *H- convergence.* En *Topics in the mathematical modelling of composite materials.* Eds. A. Cherkaev, R. Kohn. Progress in Nonlinear Diff. Eq. and their Appl. Birkhäuser (Boston, 1997), 21-43.

[55] A. PANKOV. *G-Convergence and Homogenization of Nonlinear Partial Differential Operators.* Math. and its Appl. 422, Kluwer (London, 1997).

[56] T. A. SHAPOSHNIKOVA. *On the convergence of solutions of parabolic equations with rapidly oscillating coefficients in perforated domains.* J. Math. Sci. 75, 3 (1995), 1631-1645.

[57] T. A. SHAPOSHNIKOVA. *The asymptotic expansion of the solution to the Cauchy problem for a parabolic equation in a perforated space.* J. Math. Sci. 85, 6 (1997) 2308-2325.

[58] I.V. SKRYPNIK. *Asymptotic behaviour of solutions of nonlinear elliptic problems in perforated domains.* Mat. Sb. 184, 10 (1993), 67-90.

[59] I.V. SKRYPNIK. *Averaging of nonlinear Dirichlet problems in punctured domains of general structure.* Mat. Sb. 187, 8 (1996), 125-157.

[60] I.V. SKRYPNIK. *Averaging of quasilinear parabolic problems in domains with fine-grained boundary.* Diff. Eq. 31, 2 (1995), 327-339.

[61] S. SPAGNOLO. *Sulla convergenza di soluzioni di equazione paraboliche ed ellittiche.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 3, 22 (1968), 577-597.

[62] E. STEIN. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princeton Univ. Press (Princeton, 1970).

[63] E. STEIN, G. WEISS. *On the Theory of harmonic functions of several variables.* Acta. Math. 103 (1960), 26-62.

[64] L. TARTAR. *Estimations fines des coefficients homogenéisés.* Research Notes in Math. Pitman (1985), 168-187.

[65] T. DEL VECCHIO. *On the homogenization in a Class of Pseudomonotone Operators in Divergence Form.* Boll. U.M.I. 7, 5-B (1991), 369-388.

[66] W.P. ZIEMER. *Weakly Differentiable Functions.* Springer-Verlag (Berlin, 1989).

[67] V. V. ZHIKOV, S.M. KOZLOV, O.A. OLEINIK. *On G-convergence of parabolic operators.* Uspekhi Matem. Nauk, 36, n 1 (1981), 11-58 (in Russian).

[68] V. V. ZHIKOV, S.M. KOZLOV, O.A. OLEINIK. *Homogenization of parabolic operators with almost periodic coefficients.* Matem. Sborn., 117 n1 (1982), 69-85 (in Russian).