

R.26361

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Adscrito en la Secretaría del Dpto. EDAN
de la Facultad de Matemáticas
de esta Universidad desde el día 17/05/01
hasta el día 5/06/01

Sevilla a 16 de Mayo de 2001

EL DIRECTOR DE

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

El Jefe del Negociado

[Signature]

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

[Signature]

043
372

i1847326x

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
NEGOCIADO DE TESIS

Queda registrado este Título de Doctor al
folio 165 número 138 del libro
correspondiente. 16 MAYO 2001
Sevilla,

ANÁLISIS MATEMÁTICO DE ALGUNOS SISTEMAS DE TIPO NAVIER-STOKES: FLUIDOS QUASI-NEWTONIANOS Y ECUACIONES PRIMITIVAS DEL OCÉANO

Vº.Bº: EL DIRECTOR DEL
TRABAJO

[Signature]

Fdo. Francisco Guillén González.
Profesor Titular de Universidad.

Memoria presentada por
María de los Ángeles Rodríguez Bellido,
para optar al grado de Doctor
en Matemáticas.

Sevilla, 14 de Mayo de 2001.

[Signature]

Fdo. María de los Angeles Rodríguez Bellido.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
BIBLIOTECA

*A mis padres, por hacer de mis sueños los suyos;
a mi hermana, por alentarlos;
a Eliseo, por compartirlos.*

Agradecimientos

La principal persona a la que tengo que dar las gracias por todo es a mi director de Tesis, Francisco Guillén González. Sin él, sin todo el tiempo que ha dedicado a cada uno de los resultados que a continuación aparecen, así como los contactos y cursos que en el transcurso de esta Tesis él me ha facilitado, nada de lo que hay aquí hubiera sido posible.

En segundo lugar, a Nader Masmoudi y Didier Bresch por su colaboración en la confección de este trabajo desde el primer día en que supieron de su existencia. Por su acogida cada vez que he visitado Francia, y su disponibilidad en todo momento a resolver dudas o proporcionarme referencias bibliográficas.

También debo agradecer a la Fundación Cámara de la Universidad de Sevilla, al antiguo Ministerio de Educación y Ciencia, y al actual de Ciencia y Tecnología el soporte financiero para la realización de este trabajo.

A Antonio Suárez, José Antonio Langa y David Rodríguez por su amistad desde mis primeros días en este Departamento; así como a Isidoro Albarreal, por facilitarme además mi labor docente en estos últimos meses. A Enrique Fernández-Cara y Tomás Chacón por haber hecho de avalistas de esta Tesis. También quiero agradecer a todos los miembros del Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico su ayuda en todo momento.

A mis nuevos compañeros del Departamento de Matemática Aplicada I de la E. T. S. de Arquitectura, por su cálida acogida.

A mi padre, por contagiarme su entusiasmo por conocer, y a mi madre, por enseñarme que había otros mundos que explorar. A mi hermana, por hacerme ver la vida de otra forma y por su esperanza sin fin; y a Puri Gálvez, Alejandra Rivero, Carmen Calvo y Cristina Rocha, por su amistad incondicional.

Por supuesto, a Eliseo, que ha padecido mi mal humor, y sufrido mis momentos bajos desde que este trabajo empezaba a dar sus primeros frutos. Por todo su apoyo y cariño, y por todo lo que aún nos queda por vivir.

También quisiera agradecer su apoyo a todas las demás personas que se alegrarán de que esta Tesis vea la luz, entre ellos: a mi abuelo Pedro, a José Herrera (mi profesor de Matemáticas del colegio), a mis compañeros de estudios y a todos mis amigos de Casariche (mi pueblo).

Índice General

Resumen de este trabajo	4
Parte I: Tiempos singulares para fluidos quasi-newtonianos	4
Parte II: Soluciones fuertes de las Ecuaciones Primitivas con condición de adherencia en el fondo.	5
Parte III: Las Ecuaciones Primitivas con condición de Navier en el fondo: Justificación asintótica y unicidad de solución débil.	6
Parte I	9
I. Introducción a la Parte I	11
I.1 Los tiempos y puntos singulares	15
I.2 Aportaciones originales de la Parte I	16
1 Tiempos singulares para fluidos quasi-newtonianos	19
1.1 Lemas y propiedades de los tensores quasi-newtonianos	19
1.2 Resultados conocidos: existencia y unicidad de solución	21
1.2.1 Existencia de una solución global	22
1.2.2 Unicidad y dependencia continua de solución débil/fuerte	23
1.2.3 Existencia de solución local fuerte	26
1.3 Explosión en tiempos arbitrariamente pequeños	30
1.4 Estimaciones de la dimensión de Hausdorff de los tiempos singulares	34
1.5 Algunos problemas abiertos	41
Bibliografía de la Parte I	43
Parte II	45
II. Introducción a la Parte II	47
II.1 La aproximación de Boussinesq	48
II.2 El dominio ocupado por el Océano	50
II.3 La forma adimensional de las ecuaciones.	51
II.4 La aproximación hidrostática I: Argumento directo	53
II.4.1 Ecuaciones Primitivas del Océano	53
II.4.2 Las condiciones de contorno.	54
II.4.3 Las Ecuaciones Primitivas de la Atmósfera.	57

II.4.4	Regularidad débil de las Ecuaciones Primitivas del Océano	58
II.5	Argumentos de aproximación interna	58
II.6	Regularidad fuerte del problema lineal estacionario	59
II.7	Otros modelos en Oceanografía	60
II.7.1	El modelo de Ecuaciones Primitivas con viscosidad vertical PEV ² s	60
II.7.2	El modelo de término de compresión	61
II.7.3	El modelo de Ecuaciones Primitivas con superficie libre	61
II.7.4	Navier-Stokes en dominios delgados	63
II.8	Aportaciones originales de la Parte II	64
2	El problema 2D. Estimaciones isótropas.	67
2.1	Introducción	67
2.2	Definiciones y resultados principales	68
2.2.1	El problema 2D	70
2.2.2	Resultados principales	70
2.3	Algunos resultados técnicos	72
2.4	El caso estacionario lineal.	73
2.4.1	Resultados conocidos de existencia y unicidad	73
2.4.2	El operador de Stokes hidrostático	74
2.4.3	Construcción de una base especial	75
2.5	El caso lineal de evolución	75
2.6	Solución global fuerte para datos pequeños	78
2.6.1	Demostración del Teorema 2.3	78
2.6.2	Demostración del Corolario 2.4.	83
2.7	Solución fuerte local para profundidad pequeña (demostración del Teorema 2.5)	84
2.8	Unicidad de solución débil/fuerte (demostración del Teorema 2.6)	89
2.9	Algunos problemas abiertos	91
3	Regularidad y unicidad a través de las estimaciones anisótropas	93
3.1	Introducción.	93
3.1.1	Los resultados principales	93
3.1.2	Resultados auxiliares	95
3.2	El caso 2D	98
3.2.1	Algunos espacios y estimaciones anisótropas 2D	99
3.2.2	Solución fuerte global para datos pequeños	101
3.2.3	Solución fuerte local para datos cualesquiera	106
3.3	El caso 3D	107
3.3.1	Algunos espacios y estimaciones anisótropas 3D	107
3.3.2	Solución fuerte global para datos pequeños	110
3.3.3	Solución fuerte local para datos cualesquiera	112
3.4	Unicidad de solución débil/fuerte del problema hidrostático	112
3.5	Comportamiento asintótico de las soluciones	115
3.6	Algunos problemas abiertos	121

Parte III	123
III. Introducción a la Parte III	125
III.1 La aproximación hidrostática II: Argumento límite	125
III.1.1 El problema estacionario	125
III.1.2 El problema de evolución	127
III.2 Otros modelos asintóticos: Los modelos de viscosidad vertical	127
III.3 Aportaciones originales de la Parte III	131
4 Obtención de una condición de tipo Navier para las Ecuaciones Primitivas.	133
4.1 Introducción	133
4.2 Ecuaciones de Navier-Stokes con condición de Navier	134
4.2.1 Algunas observaciones sobre la disipación	141
4.3 Condiciones de contorno Navier para las Ecuaciones Primitivas	142
4.3.1 Resultado de convergencia y existencia	143
4.4 Condiciones de contorno asociadas al sistema límite	151
5 Existencia y unicidad de un modelo 2D con condición de Navier	155
5.1 Introducción	155
5.2 Descripción del modelo	156
5.3 Espacios funcionales y desigualdades anisótropas	157
5.4 Definiciones y resultados principales	158
5.5 Esquema para la demostración del Teorema 5.6	160
5.6 Regularidad de la presión	161
5.7 Existencia de solución débil-vorticidad	165
5.7.1 Existencia de solución débil de (P)	165
5.7.2 Identificación de v y \tilde{v}	170
5.8 Algunos problemas abiertos	177
Bibliografía de la Partes II y III	179

Resumen de este trabajo

El presente trabajo es un estudio matemático de algunos sistemas relacionados con las ecuaciones de Navier-Stokes. Posee tres partes diferentes, diferenciadas bien por el tipo de sistema a tratar, o bien por el tipo de resultados que sobre cada sistema se obtienen. En las dos primeras partes, se intenta dar respuesta a cuestiones relacionadas con soluciones fuertes, tanto para fluidos quasi-newtonianos como para las Ecuaciones Primitivas del océano. En la tercera parte, intentamos además dar respuesta a cuestiones de unicidad y de justificación asintótica de condiciones de contorno de tipo fricción para las Ecuaciones Primitivas.

Parte I: Tiempos singulares para fluidos quasi-newtonianos

En la Parte I, nos centramos en dos tipos de leyes constitutivas para fluidos quasi-newtonianos: la ley de potencia y las leyes de Carreau. Consideramos para el estudio de ambas leyes, condiciones de contorno periódicas. Los sistemas a estudiar, se escriben de la forma siguiente: Dados f (fuerzas externas) y u_0 (velocidad inicial), hallar u , π (velocidad y presión) tales que:

$$(NS)_{per}^p \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u - \nabla \cdot \tau(e(u)) + \nabla \pi = f \quad \text{en } (0, T) \times \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 \quad \text{en } (0, T) \times \Omega \\ u(0, \cdot) = u_0 \quad \text{en } \Omega \\ u|_{\Gamma_j} = u|_{\Gamma_{j+d}} \quad \nabla u|_{\Gamma_j} = \nabla u|_{\Gamma_{j+d}} \quad \pi|_{\Gamma_j} = \pi|_{\Gamma_{j+d}} \quad (j = 1, \dots, d), \end{array} \right.$$

donde $\Omega = (0, L)^d$, $d = 2$ o 3 , denotando su frontera $(\partial\Omega)$ como:

$$\Gamma_j = \partial\Omega \cap \{x_j = 0\}; \quad \Gamma_{j+d} = \partial\Omega \cap \{x_j = L\} \quad (j = 1, \dots, d),$$

y el tensor τ viene descrito por:

$$\tau = 2\{\mu_\infty + \mu_0|e(u)|^{p-2}\}e(u) \quad \text{(ley de potencia)}$$

o

$$\left. \begin{array}{l} \tau = 2\{\mu_\infty + \mu_0(1 + |e(u)|)^{p-2}\}e(u) \\ \tau = 2\{\mu_\infty + \mu_0(1 + |e(u)|^2)^{(p-2)/2}\}e(u) \end{array} \right\} \text{(leyes de Carreau),}$$

donde $p > 1$, $\mu_\infty \geq 0$ (coeficiente de viscosidad newtoniana), $\mu_0 > 0$ (coeficiente de viscosidad no newtoniana) y $e(u)$ es el gradiente simetrizado de la velocidad.

Tras hacer una recopilación de los resultados conocidos sobre la existencia y unicidad de dichos sistemas, nos centramos en el estudio de los instantes de tiempo en los que está definida la

solución débil de dichos sistemas, pero no se puede garantizar la existencia de solución fuerte. Básicamente, presentamos dos resultados:

el primero de ellos nos dice que, en el caso de que exista una solución fuerte que explote en norma fuerte (H^1) en el límite $T = +\infty$, para cualquier tiempo T_1 (arbitrariamente pequeño) siempre podemos encontrar un dato inicial y una solución que explota en la norma fuerte antes de T_1 .

el segundo, nos da una estimación de la talla del conjunto de tiempos singulares, es decir, del conjunto de tiempos en los que existe solución débil del sistema, pero no existe solución fuerte. Dicha estimación está definida en función de la potencia p que define el tensor de esfuerzos, y de la regularidad de las fuerzas externas.

Ambos resultados se pueden ver como generalizaciones a fluidos quasi-newtonianos de resultados ya conocidos en el caso de Navier-Stokes (ver, por ejemplo, [4, -Parte I]).

Los resultados que se presentan en el Capítulo 1, aparecerán publicados en la revista *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, [6, -Parte I].

Parte II: Soluciones fuertes de las Ecuaciones Primitivas con condición de adherencia en el fondo.

En la Parte II, nos ocupamos de una variante del sistema de Navier-Stokes: las Ecuaciones Primitivas. Dichas ecuaciones surgen de las ecuaciones de Navier-Stokes al suponer hipótesis de presión hidrostática y techo rígido. Concretamente estudiamos el modelo siguiente: Dados F (fuerzas externas) y v_0 (velocidad inicial), hallar \mathbf{v} , p_s (velocidad y presión) tales que:

$$(EP) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + w \partial_z \mathbf{v} - \nu_h \Delta \mathbf{v} - \nu_v \partial_{zz}^2 \mathbf{v} + \alpha \mathbf{v}^\perp + \nabla p_s = \mathbf{F} \quad \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \nabla \cdot \left(\int_{-D(\mathbf{x})}^0 \mathbf{v}(t; \mathbf{x}, z) dz \right) = 0 \quad \text{en } (0, T) \times S, \\ \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \quad \text{en } \Omega, \end{array} \right.$$

donde $w(t; \mathbf{x}, z) = - \int_{-D(\mathbf{x})}^z \nabla \cdot \mathbf{v}(t; \mathbf{x}, s) ds$ en $(0, T) \times \Omega$, Ω es el dominio de definición (ocupado por el océano, ver Sección II.2) y S es la superficie del océano.

Cuando se impone una condición de adherencia en el fondo, Γ_b , y talud, Γ_l , y de tracción del viento en la superficie, Γ_s , es decir,

$$\mathbf{v}|_{\Gamma_b \cup \Gamma_l} = \mathbf{0}, \quad \nu_v \partial_z \mathbf{v}|_{\Gamma_s} = \tau \quad \text{en } (0, T),$$

existen resultados de existencia de solución débil, obtenidos en [34, -Partes II y III] mediante un argumento de tipo Galerkin para el caso de un dominio con talud, y en [2, -Partes II y III] mediante un argumento asintótico a partir de Navier-Stokes para el caso de un dominio sin talud.

En el caso de dominios $2D$ con talud y para la condición de adherencia en el fondo, en el Capítulo 2 veremos un resultado de existencia de solución fuerte (global en tiempo para datos pequeños,

y local en tiempo para datos cualesquiera y profundidad pequeña), y un resultado de unicidad “débil/fuerte”.

Un artículo con el trabajo del Capítulo 2 aparecerá publicado en la revista *Journal of Nonlinear Analysis: Serie A Theory and Methods*, [25, -Partes II y III].

En el Capítulo 3, obtendremos el mismo tipo de resultados que en el capítulo anterior, pero en el caso 3D. Para ello usaremos unas estimaciones diferentes, que llamaremos estimaciones anisótropas, que permiten estimar las velocidades horizontales y vertical aprovechando mejor la anisotropía del dominio. Usando estas estimaciones, retomaremos el problema 2D, obteniendo los mismo resultados que en el Capítulo 2, pero con hipótesis más débiles. Por ejemplo, no necesitaremos que la profundidad sea pequeña para demostrar la existencia de solución fuerte local en tiempo para datos cualesquiera. Además, el uso de las estimaciones anisótropas nos permitirá obtener una estimación de la dimensión de Hausdorff del conjunto de los tiempos singulares para estas ecuaciones en el caso 2D, del mismo modo que se obtuvo en el Capítulo 1. Dicha estimación no se puede obtener siguiendo el razonamiento del Capítulo 2. Finalmente, se realiza un estudio sobre el comportamiento asintótico, cuando el tiempo tiende a infinito, de las soluciones fuertes hacia la correspondiente solución del problema estacionario.

El Capítulo 3 aparecerá publicado como un artículo en la revista *Differential and Integral Equations*, [26, -Partes II y III].

El resultado de unicidad “débil/fuerte” que aparece en los Capítulos 2 y 3, posee el mismo sentido que el resultado escrito en [43, -Partes II y III] para el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes, ver también [45, -Partes II y III], es decir, si sabemos de la existencia de una solución más regular del sistema de (EP), entonces podemos asegurar que cualquier solución débil poseerá dicha regularidad.

Parte III: Las Ecuaciones Primitivas con condición de Navier en el fondo: Justificación asintótica y unicidad de solución débil.

En esta parte, nos centramos en la obtención y estudio de un modelo de Ecuaciones Primitivas con nuevas condiciones de contorno de tipo fricción en el fondo.

A deducir esas nuevas condiciones, dedicamos el Capítulo 4, y lo hacemos del mismo modo que se hizo en [2] para el caso de la condición de adherencia en el fondo, es decir, partiendo de las ecuaciones de Navier-Stokes con viscosidades anisótropas (ahora con condiciones de contorno de tipo Navier), y haciendo tender el cociente de aspecto (razón entre la dimensión característica vertical y horizontal) a cero.

Un artículo con los trabajos del Capítulo 4 está sometido actualmente a la revista *Asymptotic Analysis*, [6, -Partes II y III].

La unicidad de solución de las ecuaciones de Navier-Stokes en dimensión 2 es bien conocida, gracias al trabajo de Lions y Prodi [32, -Partes II y III]. Por el contrario, la cuestión de la unicidad de soluciones débiles para las ecuaciones Primitivas es un problema abierto, incluso en dominios 2-dimensionales, ver [29, -Partes II y III] para el caso de un sistema acoplado.

En el Capítulo 5, daremos lo que nosotros pensamos que es el primer resultado de unicidad de solución débil para el sistema de Ecuaciones Primitivas en el caso 2D. En la demostración de dicho resultado, es fundamental la elección de unas nuevas condiciones de contorno (de tipo Navier en el fondo), y la dimensión 2 en espacio, que permite obtener cierta regularidad adicional de las soluciones débiles, que implica en particular la unicidad.

El Capítulo 5 está sometido a la revista *Advances in Differential Equations*, [7, -Partes II y III].

**Parte I: Tiempos singulares para fluidos
quasi-newtonianos.**

Introducción a la Parte I

Si adoptamos el punto de vista de la Mecánica de Medios Continuos, el comportamiento dinámico de un fluido que ocupa un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ durante el intervalo de tiempo $[0, T]$ puede ser caracterizado por las siguientes propiedades:

1. Una **densidad de masa**, ρ , con $\rho \in C^1([0, T] \times \bar{\Omega})$ y positiva, tal que la **masa** en un abierto acotado W , $W \subset \Omega$, en un instante t vendrá determinada por:

$$m(W, t) = \int_W \rho(x, t) dx.$$

2. Un **campo de velocidades**, $u = (u_1(t, x), \dots, u_d(t, x))$, con $u \in C^1([0, T] \times \bar{\Omega}; \mathbb{R}^d)$ y tal que la **cantidad de movimiento** en el abierto W y en el instante t será:

$$M(W, t) = \int_W (\rho u)(x, t) dx.$$

Aplicando el principio de conservación de masa, observamos que la variación de la masa de las partículas que ocupan W en un instante t , $\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dx$, debe ser igual al flujo de masa a través de la frontera ∂W , en ese mismo instante.

Como las partículas de fluido se mueven a través de las llamadas *líneas de corriente* (que son las curvas características soluciones del sistema diferencial ordinario: $\dot{X} = u(X, t)$), dicho flujo de masa a través de la frontera se expresa como $-\int_{\partial W} \rho u \cdot n dS$, siendo n el vector normal exterior a ∂W . De ese modo, $\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = -\int_{\partial W} \rho u \cdot n dS$, que, aplicando la fórmula de Stokes al miembro de la derecha, se transforma en:

$$\int_W \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) \right\} = 0 \quad (I.1)$$

para cada $W \subset \Omega$ y $t \in (0, T)$, donde por $\nabla \cdot (\rho u)$ denotamos $\sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u)_i$. Con ello llegamos a la ecuación diferencial conocida como la **Ley de Conservación de la Masa**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \quad (I.2)$$

Nos fijamos ahora en la evolución del llamado **momento lineal** ρu . Justamente, aplicando el principio de conservación del momento lineal, encontramos:

$$\int_W \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} = -\int_{\partial W} \rho u (u \cdot n) dS + \int_W \rho f dx - \int_{\partial W} \sigma \cdot n dS \quad (I.3)$$

Los dos últimos términos representan respectivamente la acción de las fuerzas externas ejercidas sobre el fluido en todo W (gravedad, Coriolis, fuerzas electromagnéticas,...) y las fuerzas de tensión ejercidas sobre la frontera ∂W en el contacto de W con otras partículas. Mientras que f es normalmente un dato, σ es ahora un tensor que se introduce como una nueva incógnita en las ecuaciones que estamos considerando, llamado tensor de esfuerzos. Clásicamente, un fluido está sometido a dos tipos de esfuerzos: efectos de compresión (normales a ∂W) y efectos de fricción (tangenciales a ∂W), de manera que:

$$\sigma = -\pi Id + \tau \quad (I.4)$$

donde π es la presión (magnitud escalar) y τ el tensor de esfuerzos tangenciales. Id es el tensor identidad, $Id = (\delta_{ij})_{ij}$.

Conjugando (I.3) e (I.4) y usando la fórmula de Stokes, llegamos al sistema diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) - \nabla \cdot \tau + \nabla \pi = \rho f, \quad (I.5)$$

donde \otimes denota el producto tensorial de vectores, lo que escrito explícitamente por componentes sería:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \partial_j(\rho u_i u_j - \tau_{ij}) + \pi \delta_{ij} = \rho f_i \quad 1 \leq i \leq N \quad (I.6)$$

(adoptando la convención de sumación de índices repetidos y notando $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$).

Además, gracias a (I.2), (I.5) se reescribe de la forma:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u \cdot \nabla)u - \nabla \cdot \tau + \nabla \pi = \rho f \quad (I.7)$$

Respecto a τ , si aplicamos el principio de conservación del momento angular llegamos a que τ es un tensor simétrico. Además, clásicamente se supone que:

$$\tau = \tau(e(u), \rho, \theta)$$

donde $e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + {}^t\nabla u)$ es el gradiente simetrizado de u (o tensor de deformaciones) y θ es la temperatura.

Si el fluido es incompresible (es decir, el volumen ocupado por un conjunto de partículas que se desplazan a lo largo de las trayectorias no varía con el tiempo), debemos añadir a (I.2), (I.5) la siguiente ecuación:

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (I.8)$$

Dicha restricción supone una ventaja importante: la presión, π , “desaparece” en la formulación variacional del problema (al multiplicar escalarmente por funciones “test” que verifican (I.8)), con lo que deja de ser una incógnita. Así pues, una vez resuelto el sistema (y, por tanto, conocido u), la presión se recupera como consecuencia del lema de De Rham.

El sistema (I.2), (I.5) y (I.8) no es suficiente para describir el movimiento del fluido, puesto que tenemos más incógnitas que ecuaciones. Para completar la descripción, además de añadir condiciones iniciales y de contorno adecuadas, tenemos que relacionar el tensor τ con otras variables, es decir, introducir leyes constitutivas (o reológicas de estado) para τ . Mientras que (I.2) y (I.5) son válidas para todos los medios continuos, la ley constitutiva impuesta dependerá de la naturaleza del fluido considerado y de las características del flujo.

Muchos fluidos en la Naturaleza son modelados por las ecuaciones de Navier-Stokes. Dichas ecuaciones aparecen al suponer que τ es lineal en $e(u)$ y de la forma:

$$\tau = \lambda(\nabla \cdot u)Id + 2\mu e(u), \quad (\text{I.9})$$

donde λ y μ son los coeficientes de viscosidad de Lamé (en principio, μ y λ dependen de ρ y θ). Por ejemplo, para los llamados gases **monoatómicos**, se supone la relación de Stokes $\lambda = -\frac{2\mu}{d}$, con d la dimensión del espacio. Para la mayoría de los fluidos, $\lambda + \frac{2\mu}{3}$ es muy pequeño, con lo que a veces se podrían aproximar por un modelo donde dicha relación sea nula. Sin embargo, en la práctica se consideran sólo las hipótesis:

$$\mu \geq 0, \quad \lambda + \frac{2\mu}{d} \geq 0 \quad (\text{I.10})$$

Distinguiamos entonces entre fluidos **viscosos** ($\mu > 0$, $\lambda + \mu > 0$) y **no viscosos** ($\lambda = \mu = 0$, luego $\tau = 0$). Por ejemplo, en el caso incompresible, llegamos al sistema de Navier-Stokes en el caso viscoso, o al sistema de Euler en el caso no viscoso.

Sin embargo, muchas experiencias demuestran que existen otro tipo de fluidos que no se rigen por dichas ecuaciones. Estos fluidos se llaman, de forma genérica, **fluidos no-newtonianos**. Se distinguen dos clases principales:

- 1) **Fluidos quasi-newtonianos o fluidos newtonianos generalizados**, que son fluidos en los que τ es una función explícita no lineal de la forma $\tau = 2\mu(|e(u)|^2)e(u)$, donde $\mu : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ es la función viscosidad generalizada y $|e(u)|^2 = e_{i,j}(u)e_{i,j}(u)$ (usando el convenio de suma para los índices repetidos). Algunos ejemplos importantes de este tipo de fluidos son fluidos biológicos de escaso peso molecular (la sangre, la clara de huevo, ...), polímeros muy disueltos en una base de líquido newtoniano, etc. También se pueden encontrar aplicaciones de este tipo de modelos en Glaciología (deslizamiento de glaciares) o Geología (dinámica del manto tectónico de la Tierra).
- 2) **Fluidos viscoelásticos**, que poseen propiedades intermedias entre fluidos viscosos y materiales elásticos. Dichos fluidos son “**fluidos con memoria**”, es decir, fluidos en los que el tensor de esfuerzos en el instante t depende de la dinámica del fluido en t , y también de su comportamiento en instantes anteriores a t . Esta propiedad se expresa por medio de leyes constitutivas integrales o diferenciales. Entre los ejemplos de fluidos que pertenecen a esta clase de fluidos no-newtonianos se encuentran mezclas de polímeros y polímeros de alta densidad.

Nos centraremos en los fluidos que pertenecen al primer tipo. Por simplicidad, supondremos que el tensor de esfuerzos tangenciales τ , viene dada por una ley de potencia o por una ley de Carreau, es decir:

$$\tau = 2\{\mu_\infty + \mu_0|e(u)|^{p-2}\}e(u) \quad (\text{ley de potencia}) \quad (\text{I.11})$$

o

$$\left. \begin{aligned} \tau &= 2\{\mu_\infty + \mu_0(1 + |e(u)|)^{p-2}\}e(u) \\ \tau &= 2\{\mu_\infty + \mu_0(1 + |e(u)|^2)^{(p-2)/2}\}e(u) \end{aligned} \right\} (\text{leyes de Carreau}), \quad (\text{I.12})$$

donde $p > 1$, $\mu_\infty \geq 0$ (coeficiente de viscosidad newtoniana) y $\mu_0 > 0$ (coeficiente de viscosidad no newtoniana). Cuando $p \in (1, 2)$ estamos en presencia de fluidos **pseudoplásticos**, y si $p > 2$ en presencia de un fluido **dilatante**. Un caso especial lo constituye el caso $p = 1$ (que no tratamos aquí), denominado fluido de **Bingham**. El término **viscoplástico** se aplica genéricamente cuando $p \in [1, 2)$. Cuando $p = 2$, estamos en el caso newtoniano.

En el caso de un fluido homogéneo, es decir con densidad $\rho \equiv \rho_0$ constante, (I.2) e (I.8) coinciden. Además, (I.7) se puede escribir, con un cambio de variable adecuado para τ y π , como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u - \nabla \cdot \tau + \nabla \pi = f. \quad (\text{I.13})$$

En el caso de condiciones de contorno Dirichlet homogéneas ($u = 0$ sobre $\partial\Omega$), las primeras contribuciones acerca de la existencia de solución débil y unicidad fueron hechas por Ladyzhenskaya [8] y J. L. Lions [11], combinando la teoría de operadores monótonos y argumentos de compacidad. Ver la Sección 1.2 del Capítulo 1, para una definición de solución débil y fuerte, asociada al sistema (I.13).

Posteriormente, Amann en [1] demostró la existencia de soluciones regulares (clásicas) y decaimiento exponencial en tiempo para las solución (u, π) de dicho problema cuando f y u_0 son suficientemente pequeños y el tensor τ verifica:

$$\frac{\partial \tau}{\partial e_{k,l}}(0) = cte > 0.$$

En particular, se puede considerar una ley de Carreau sin viscosidad newtoniana ($\mu_\infty = 0$) con $p \geq 1$. En [15], Málek, Nečas y Růžička demuestran en el caso de condiciones de contorno periódicas que para $p \geq 9/4$ las soluciones débiles de dicho problema son fuertes y únicas entre todas las soluciones débiles.

Por otra parte, cuando se imponen condiciones de contorno homogéneas ($u = 0$ sobre $\partial\Omega$), el comportamiento asintótico en tiempo de las soluciones ha sido estudiado en [1], [16]. Por ejemplo, en [16] se prueba que para la ley de Carreau con $p \geq 2$ o para la ley de potencias con $6/5 < p < 2$, una solución asociada a $f = 0$ (y para cualquier dato inicial u_0) decrece exponencialmente en tiempo, mientras que cuando se considera una ley de potencias con $p \geq 2$ las soluciones tienen un decrecimiento polinomial en tiempo.

En nuestro estudio, haremos una simplificación importante: consideraremos condiciones de contorno periódicas. Dichas condiciones de contorno son mucho más fáciles de tratar que por ejemplo condiciones de tipo Dirichlet, ya que en el caso periódico, el Laplaciano conmuta con el operador de Proyección sobre el espacio de las funciones con divergencia nula, lo que facilita enormemente las estimaciones de regularidad fuerte.

Para este tipo de condiciones de contorno, consultando [2], [14] y [13], podemos ver que en el caso de leyes de Carreau sin viscosidad newtoniana (y de ley de potencias con viscosidad newtoniana) se tienen los siguientes resultados:

- existencia de solución débil para $p \in \left(\frac{3d}{d+2}, \frac{2d}{d-2} \right)$ si $d = 3, 4$;
- existencia de solución fuerte para $p \geq 1 + \frac{2d}{d+2}$, si $d \geq 3$, y $p > 1$ si $d = 2$;

- unicidad de solución débil para $p \geq 1 + \frac{d}{2}$, si $d \geq 2$.

Por ejemplo, observemos que en dimensión 3 ($d = 3$), existe solución débil si $p \in (9/5, 6)$, solución fuerte si $p \geq 11/5$, y unicidad de solución débil si $p \geq 5/2$. Un estudio exhaustivo se hará en la Sección 1.1 del Capítulo 1.

Una situación similar aparece en el caso de considerar modelos quasi-newtonianos con densidad variable (ver [5]).

Por otra parte, para fluidos quasi-newtonianos (con densidad constante), bajo condiciones de existencia y unicidad de solución global fuerte, en [12] se prueba la existencia de un atractor global de dimensión fractal finita, aplicando la técnica estándar de teoría de semigrupos. Además, si existe una única solución que no es continua en tiempo, también es posible construir un atractor en otro sentido. Básicamente, lo que se define como “trayectorias cortas” juega el papel de un instante de tiempo t en la teoría estándar. En ese sentido, las soluciones no son continuas para cada punto, sino sobre cada trayectoria corta.

I.1 Los tiempos y puntos singulares

En esta Sección, hacemos un resumen de los resultados conocidos con anterioridad a esta memoria, sobre los tiempos (y puntos) singulares de fluidos newtonianos.

El primer resultado relativo al conjunto de los tiempos singulares \mathcal{S} para las ecuaciones de Navier-Stokes (con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas) fue demostrado en el pionero trabajo de J. Leray [9] en el caso $\Omega = \mathbb{R}^3$ y $f = 0$. Allí se define como “solución turbulenta” de las ecuaciones de Navier-Stokes (en el trabajo se llaman ecuaciones de Navier) a las que verifican la siguiente definición:

Decimos que un vector $U_i(x, t)$ definido para $t \geq 0$ constituye una solución turbulenta de las ecuaciones de Navier cuando se verifican las siguientes condiciones, donde los valores de t que llamaremos singulares, forman un conjunto de medida cero: Para cada t positivo, las funciones U_i son de norma L^2 acotada y el vector U_i tiene divergencia nula. Además, para todo $t \geq 0$, excepto posibles valores singulares (que no incluyen el cero), las funciones $\frac{\partial}{\partial x_j} U_i$ están acotadas en L^2 .

Respecto a la solución turbulenta anterior, el resultado sobre los tiempos singulares al que hacemos referencia anteriormente es el siguiente (que aparece en [18]):

Teorema I.1 *Existe una sucesión finita o numerable J_0, J_1, \dots tal que $J_q \subset \mathbb{R}^+$, $J_0 = \{t : t > a\}$ para algún a , J_q es un intervalo abierto para cada $q \geq 1$, los J_q son disjuntos, la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^+ \setminus \bigcup_{q \geq 0} J_q$ es cero, U puede ser modificada en un conjunto de medida de Lebesgue nula de manera que su restricción a cada $\mathbb{R}^3 \times J_q$ es regular, y*

$$\sum_{q \geq 1} (\text{longitud}(J_q))^{1/2}$$

es finita.

El resultado anterior no está descrito en términos de medida de Hausdorff, pero atendiendo a la definición de dicha medida (ver Capítulo 1, Sección 1.4), se deduce fácilmente que la medida

de Hausdorff de los tiempos singulares de las ecuaciones de Navier-Stokes está acotada por $1/2$, ver [18].

Este resultado ha sido generalizado por M. Shinbrot [21] en dominios acotados. Más recientemente, para el caso de dominios acotados y $f \neq 0$, Foias & Témam obtuvieron la misma acotación para el conjunto de los tiempos singulares, ver [7].

También para las ecuaciones de Navier-Stokes, se pueden estudiar el conjunto de singularidades en espacio, \mathcal{S}_e . Los primeros resultados a este respecto fueron dados por V. Scheffer en [18]. Allí se define \mathcal{S}_e como $\mathcal{S}_e = \mathbb{R}^3 \setminus A$, donde:

$$A = \{x \in \mathbb{R}^3 : u \text{ restringida a } \{x\} \times ([0, T] \cap (\bigcup_{q \geq 0} J_q)) \text{ es acotada}\}.$$

En dicho trabajo se demuestra que la dimensión de Hausdorff de \mathcal{S}_e es como mucho $5/2$. En [20], se demuestra además que la medida de Hausdorff 1-dimensional de \mathcal{S}_e es finita.

Por último, se puede estudiar el conjunto de singularidades en espacio y tiempo, \mathcal{S}_{et} . Dicho conjunto se definió en [19] como $\mathcal{S}_{et} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$, de manera que $(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+) \setminus \mathcal{S}_{et}$ es el mayor abierto tal que la restricción de la velocidad u a $(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+) \setminus \mathcal{S}_{et}$ es una función continua. En dicho trabajo, se demostró que el conjunto \mathcal{S}_{et} tenía medida de Hausdorff 2-dimensional finita. A este respecto, en [20], de nuevo se mejoran dichos resultados, obteniéndose el siguiente teorema:

Teorema I.2 *Para $f = 0$, existe una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes, con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas, cuyo conjunto de puntos singulares \mathcal{S}_{et} satisface:*

$$\nu_H^{5/3}(\mathcal{S}_{et}) < +\infty,$$

$$\nu_H^1(\mathcal{S}_{et} \cap (\Omega \times \{t\})) < +\infty \quad \text{uniformemente en } t.$$

Aquí, ν_H^d es la medida de Hausdorff d -dimensional habitual (ver Capítulo 1, Sección 1.4 para la definición de medida de Hausdorff). Sin embargo, dicho resultado se demostró para velocidades u tales que $\text{rot}(u)$ estaba acotado.

Los resultados de Scheffer fueron mejorados, en este caso, en el famoso artículo de Caffarelli, Kohn y Nirenberg [3], ya que se demuestra que $\mathcal{P}^1(\mathcal{S}_{et}) = 0$, donde \mathcal{P}^1 es una medida sobre $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ análoga a la medida de Hausdorff 1-dimensional pero definida sobre cilindros parabólicos (radio r en espacio y r^2 en tiempo), en lugar de sobre bolas Euclídeas. De hecho, se tiene $\nu_H^1 \leq C\mathcal{P}^1$. Dicha demostración se hace para soluciones débiles “deseadas” de las ecuaciones de Navier-Stokes. Dicha regularidad “deseada” se verifica bajo determinadas hipótesis sobre Ω , u_0 y f .

Finalmente, F. Lin en [10], usando las soluciones débiles “deseadas” y la desigualdad de energía generalizada introducida por V. Scheffer, simplifica la demostración del resultado anterior, basándose además en desigualdades de interpolación y en las estimaciones para la presión de Sohr y Wahl, [22].

I.2 Aportaciones originales de la Parte I

El propósito de este capítulo es el estudio del conjunto de tiempos en los que una solución global débil no puede ser una solución fuerte, que llamaremos **tiempos singulares**.

Comenzamos con una revisión de los resultados sobre existencia de solución débil y fuerte (ver Definiciones 1.5 y 1.6) y de unicidad de solución para los fluidos quasi-newtonianos anteriormente

mencionados con condiciones de contorno periódicas. También exponemos un resultado de dependencia continua de la solución en norma débil respecto de los datos iniciales y las fuerzas externas.

Obtenemos dos resultados principales:

En primer lugar, con una fuerza externa independiente de t y bajo la hipótesis de existencia de una solución fuerte que “explota” en tiempo infinito, obtendremos (Sección 1.3) la existencia de tiempos singulares arbitrariamente pequeños, asociados a velocidades iniciales convenientemente elegidas.

En segundo lugar, en la Sección 1.4 estimaremos la medida del conjunto de tiempos singulares, a través de la dimensión de Hausdorff (en particular, considerando la regularidad de una solución débil, este conjunto tiene siempre medida de Lebesgue nula).

Estos dos resultados son generalizaciones del caso newtoniano. De hecho, la existencia de tiempos singulares arbitrariamente pequeños y la estimación de la dimensión de Hausdorff del conjunto de tiempos singulares para las ecuaciones de Navier-Stokes, se pueden ver en [4].

Capítulo 1

Tiempos singulares para fluidos quasi-newtonianos

1.1 Lemas y propiedades de los tensores quasi-newtonianos

Consideramos el siguiente modelo de flujo periódico en espacio, para fluidos quasi-newtonianos. Dada $f : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ (las fuerzas exteriores) y $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ (la velocidad inicial), el problema es encontrar una velocidad $u : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ y una presión $\pi : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tales que:

$$(NS)_{per}^p \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u - \nabla \cdot \tau(e(u)) + \nabla \pi = f & \text{en } (0, T) \times \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{en } \Omega \\ u|_{\Gamma_j} = u|_{\Gamma_{j+d}} \quad \nabla u|_{\Gamma_j} = \nabla u|_{\Gamma_{j+d}} \quad \pi|_{\Gamma_j} = \pi|_{\Gamma_{j+d}} & (j = 1, \dots, d), \end{cases}$$

donde τ viene dado por una ley de potencia o de Carreau como (I.11) o (I.12), y el dominio $\Omega = (0, L)^d$, $d = 2$ o 3 , denotando su frontera $(\partial\Omega)$ como:

$$\Gamma_j = \partial\Omega \cap \{x_j = 0\}; \quad \Gamma_{j+d} = \partial\Omega \cap \{x_j = L\} \quad (j = 1, \dots, d). \quad (1.1)$$

De forma general, podemos suponer que el tensor de esfuerzos tangenciales τ viene dado por:

$$\tau = 2\mu_\infty e(u) + \tau^p(e(u)),$$

donde $\mu_\infty \geq 0$ es la viscosidad newtoniana y τ^p es la contribución no-newtoniana a τ . Imponemos que existe una función (potencial) $\mathcal{U}^p \in C^2(\mathbb{R}_{sym}^{d \times d})$, con

$$\mathbb{R}_{sym}^{d \times d} \equiv \{M \in \mathbb{R}^{d \times d}, M_{i,j} = M_{j,i}, i, j = 1, \dots, d\},$$

tal que (siempre que $i, j, k, l \in \{1, \dots, d\}$ y $\eta, \xi \in \mathbb{R}^{d \times d}$):

$$(H1) \quad \frac{\partial \mathcal{U}^p}{\partial \eta_{i,j}}(\eta) = \tau_{i,j}^p(\eta), \quad \forall i, j, \quad \forall \eta,$$

$$(H2) \quad \mathcal{U}^p(0) = \frac{\partial \mathcal{U}^p}{\partial \eta_{i,j}}(0) = 0 \quad \forall i, j,$$

$$(H3) \quad \frac{\partial^2 \mathcal{U}^p}{\partial \eta_{i,j} \partial \eta_{k,l}}(\eta) \xi_{i,j} \xi_{k,l} \geq C_1 \begin{cases} |\eta|^{p-2} |\xi|^2 & \text{(ley de potencia),} \\ (1 + |\eta|)^{p-2} |\xi|^2 & \text{(leyes de Carreau),} \end{cases} \quad \forall \eta, \xi,$$

$$(H4) \quad \left| \frac{\partial^2 \mathcal{U}^p}{\partial \eta_{i,j} \partial \eta_{k,l}}(\eta) \right| \leq C_2 (1 + |\eta|)^{p-2}, \quad \forall i, j, k, l, \quad \forall \eta,$$

donde $C_1, C_2 > 0$ son dos constantes. \mathcal{U}^p es la llamada función potencial de τ^p .

Entenderemos (H3) en el sentido de que (H3)₁ entra en juego cuando estudiamos una ley de tipo potencia; y (H3)₂ cuando estudiamos leyes de tipo Carreau.

Concretamente, en el caso de la ley de potencia (I.11) la función potencial \mathcal{U}^p es:

$$\mathcal{U}^p(\eta) = \frac{2\mu_0}{p} |\eta|^p$$

mientras que para las leyes de Carreau (I.12) tenemos

$$\mathcal{U}^p(\eta) = \frac{2\mu_0}{p} (1 + |\eta|)^p - \frac{2\mu_0}{p-1} (1 + |\eta|)^{p-1} + \frac{2\mu_0}{(p-1)p}$$

o

$$\mathcal{U}^p(\eta) = \frac{2\mu_0}{p} [(1 + |\eta|^2)^{p/2} - 1]$$

Una desigualdad técnica muy importante es la desigualdad de Körn (para una demostración, ver, por ejemplo, [17]):

Teorema 1.1 *Sea $1 < p < +\infty$. Entonces, existe una constante $K_p = K_p(\Omega)$ tal que la desigualdad:*

$$K_p \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \|e(v)\|_p \quad (1.2)$$

se verifica para todo v satisfaciendo una de las dos condiciones siguientes:

- $v \in W_0^{1,p}(\Omega)^d$, donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ es un abierto acotado, $\partial\Omega \in C^{0,1}$, o
- $v \in W_{per}^{1,p}(\Omega)^d$ tal que $\int_{\Omega} v = 0$, donde $\Omega = (0, L)^d$, $L > 0$.

Presentamos también algunas desigualdades que son consecuencia de las hipótesis (H1) – (H4) (ver [13] para las demostraciones):

Lema 1.2 *Sean $\tau^p : \mathbb{R}_{sym}^{d \times d} \rightarrow \mathbb{R}_{sym}^{d \times d}$ y $\mathcal{U}^p : \mathbb{R}_{sym}^{d \times d} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaciendo las hipótesis (H1) – (H4) para $p > 1$. Entonces, existen constantes positivas C_3, C_4 y C_5 tales que:*

$$\bullet \forall e \in \mathbb{R}_{sym}^{d \times d}, \quad \tau_{i,j}^p(e) e_{i,j} \geq C_3 \begin{cases} |e|^p & \text{(ley de potencia),} \\ |e| (|e|^{p-1} - 1) \geq C_4 (|e|^p - 1) & \text{(leyes de Carreau),} \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\bullet \forall i, j = 1, \dots, d, \forall e, \hat{e} \in \mathbb{R}_{sym}^{d \times d}, \quad |\tau_{i,j}^p(e)| \leq C_5 (1 + |e|)^{p-1}, \quad (1.4)$$

$$\left(\tau_{i,j}^p(e) - \tau_{i,j}^p(\hat{e}) \right) (e_{i,j} - \hat{e}_{i,j}) \geq 0. \quad (1.5)$$

Más aún, la desigualdad (1.3)₂ se puede sustituir por:

$$\tau_{i,j}^p(e) e_{i,j} \geq C_3 \min(|e|^2, |e|^p). \quad (1.6)$$

Además, si $p \geq 2$, entonces: $\forall e \in \mathbb{R}_{sym}^{d \times d}$

$$\tau_{i,j}^p(e) e_{i,j} \geq C_3 (1 + |e|^{p-2}) |e|^2, \quad (1.7)$$

y también existe una constante $C_6 > 0$ que verifica: $\forall e, \hat{e} \in \mathbb{R}_{sym}^{d \times d}$,

$$\left(\tau_{i,j}^p(e) - \tau_{i,j}^p(\hat{e}) \right) (e_{i,j} - \hat{e}_{i,j}) \geq C_6 \begin{cases} |e - \hat{e}|^p & \text{(ley de potencia),} \\ (|e - \hat{e}|^2 + |e - \hat{e}|^p) & \text{(leyes de Carreau).} \end{cases} \quad (1.8)$$

Lema 1.3 Sea $p > 1$. Bajo las hipótesis (H1) – (H4), existen unas constantes positivas C_7 , C_8 y C_9 tales que: $\forall e \in \mathbb{R}_{sym}^{d \times d}$

$$C_8 (1 + |e|^p) \geq \mathcal{U}^p(e) \geq C_7 \begin{cases} |e|^p & \text{(ley de potencia),} \\ |e| (|e|^{p-1} - p) & \text{(leyes de Carreau).} \end{cases} \quad (1.9)$$

Si $p \geq 2$, entonces: $\forall e \in \mathbb{R}_{sym}^{d \times d}$

$$\mathcal{U}^p(e) \geq C_9 (1 + |e|^{p-2}) |e|^2. \quad (1.10)$$

Sea $I_p(u) = \int_{\Omega} (1 + |e(u)|)^{p-2} |\nabla(e(u))|^2 d\Omega$, enunciemos el siguiente resultado:

Lema 1.4 Existe una constante $c > 0$ que sólo depende de Ω , p y d tal que: $\forall u \in C_{per}^2(\Omega)^d$

$$\begin{aligned} \|D^2 u\|_p &\leq c (I_p(u))^{1/2} (1 + \|\nabla u\|_p)^{\frac{2-p}{2}} & \text{si } p \in (1, 2), \\ \|D^2 u\|_2 &\leq c (I_p(u))^{1/2} & \text{si } p \geq 2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Para $1 \leq q \leq 2$, $q \neq d$,

$$\|\nabla u\|_{\frac{dp}{d-p}} \leq c (I_p(u))^{\frac{q}{2p}} (1 + \|\nabla u\|_p)^{\frac{2-q}{2}} \quad \text{si } p > 1. \quad (1.12)$$

1.2 Resultados conocidos: existencia y unicidad de solución

Los resultados clásicos de existencia y unicidad de solución (en el caso de condiciones de contorno Dirichlet) fueron obtenidos en [8] y [11], usando argumentos de compacidad y monotonía. Más tarde, se obtienen resultados más específicos en [13], principalmente en el caso de condiciones de contorno periódicas. En esta sección, haremos una recopilación de dichos resultados.

Consideramos los siguientes espacios de funciones con divergencia nula y condiciones de contorno periódicas:

$$H = \left\{ v \in L^2(\Omega)^d : \nabla \cdot v = 0, (v \cdot n)|_{\Gamma_j} = -(v \cdot n)|_{\Gamma_{j+d}}, \int_{\Omega} v \, d\Omega = 0 \right\},$$

$$V_p = \left\{ v \in W^{1,p}(\Omega)^d : \nabla \cdot v = 0, v|_{\Gamma_j} = v|_{\Gamma_{j+d}}, \int_{\Omega} v \, d\Omega = 0 \right\},$$

(la condición de integral cero permite que en estos espacios se verifiquen las desigualdades de Poincaré y Körn).

Las normas relativas a los espacios $L^p(\Omega)$ se denotarán por $\|\cdot\|_p$, y las normas relativas a cualquier otro espacio F se denotarán por $\|\cdot\|_F$.

Definición 1.5 (Solución débil) Dados $u_0 \in H$, $f \in L^2((0, T) \times \Omega)^d$ y $T > 0$, decimos que $u : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ es una solución débil de $(NS)_{per}^p$ en $(0, T)$ si $u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^p(0, T; V_p)$, satisface la siguiente formulación variacional: $\forall \varphi \in C^1([0, T]; V_p)$ tal que $\varphi(T) = 0$,

$$\int_0^T \int_\Omega \left\{ -u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - u_j u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \tau_{i,j}(e(u)) e_{i,j}(\varphi) - f_i \varphi_i \right\} d\Omega dt = \int_\Omega u_{0i} \varphi_i(0) d\Omega, \quad (1.13)$$

y la desigualdad de energía: c.p.d. $t \in (0, T)$,

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |u|^2 d\Omega + \int_0^t \int_\Omega \tau_{i,j}(e(u)) e_{i,j}(u) d\Omega ds \leq \frac{1}{2} \int_\Omega |u_0|^2 d\Omega + \int_0^t \int_\Omega f \cdot u d\Omega ds. \quad (1.14)$$

Si $u : (0, +\infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ y verifica la condición anterior para todo $T > 0$, se dirá que u es una solución débil de $(NS)_{per}^p$ en $(0, +\infty)$.

Nota 1.2.1 En el caso en que hay viscosidad newtoniana ($\mu_\infty > 0$), también tenemos que u pertenece al espacio de energía newtoniana $L^2(0, T; V_2)$

Definición 1.6 (Solución fuerte) Dados $u_0 \in V_p \cap V_2$ y $u : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ una solución débil de $(NS)_{per}^p$ en $(0, T)$, decimos que u es una solución fuerte de $(NS)_{per}^p$ en $(0, T)$ si, además:

- i) $u \in L^\infty(0, T; V_2)$,
- ii) $u \in L^\infty(0, T; V_p)$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; H)$,
- iii) $\begin{cases} u \in L^2(0, T; W^{2,p}(\Omega)^d) & \text{si } p < 2, \\ u \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^d) & \text{si } p \geq 2. \end{cases}$

Nota 1.2.2 Para obtener i) (respectivamente ii)) será necesario $u_0 \in V_2$ (respectivamente $u_0 \in V_p$). Si $\mu_\infty > 0$, la condición iii) será $u \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^d)$.

1.2.1 Existencia de una solución global

Nos centramos en el caso 3-dimensional ($d = 3$).

Teorema 1.7 (Leyes de Carreau sin viscosidad newtoniana)

a) Sea $u_0 \in H$ y $f \in L^{p'}((0, T) \times \Omega)^3$ si $p < 2$, o $f \in L^2((0, T) \times \Omega)^3$ si $p \geq 2$. Si $p > 9/5$, entonces existe una solución débil de $(NS)_{per}^p$ en $(0, T)$.

b) Sea $u_0 \in V_p$ y $f \in L^2((0, T) \times \Omega)^3$. Si $p \geq 11/5$, entonces existe una solución fuerte de $(NS)_{per}^p$ en $(0, T)$.

Nota 1.2.3 En las condiciones del apartado b) se pueden considerar problemas acoplados, donde una variable adicional (por ejemplo, la temperatura) interviene en la expresión de τ (caso de un fluido dilatante con comportamiento térmico no despreciable), para obtener existencia de solución débil. En el caso newtoniano, hay que generalizar el concepto de solución (a solución débil-renormalizada), debido a la presencia de un término con regularidad L^1 en la ecuación de la temperatura.

Nota 1.2.4 Para una ley de potencias sin viscosidad newtoniana y $1 < p < 2$, la parte a) del resultado anterior es también cierta.

Corolario 1.8 (Caso con viscosidad newtoniana)

a) Sea $u_0 \in H$ y $f \in L^2((0, T) \times \Omega)^3$. Si $p > 1$, entonces existe una solución débil de $(NS)_{per}^p$ en $(0, T)$.

b) Sea $u_0 \in V_p$ y $f \in L^2((0, T) \times \Omega)^3$. Si $p \geq 11/5$, entonces existe una solución fuerte de $(NS)_{per}^p$ en $(0, T)$.

Nota 1.2.5 En el caso de condiciones de contorno Dirichlet homogéneas, la existencia de una solución débil global sólo se conoce para $p \geq 2$ y la existencia de una solución fuerte global para $p \geq 9/4$ (ver [15]).

Las demostraciones de estos resultados se basan en la construcción de soluciones aproximadas a través de un método de Galerkin, estimaciones de dichas soluciones en espacios apropiados y un proceso de paso al límite por compacidad, que nos dará la solución deseada (ver [2], [14]).

A la vista de los resultados previos, es razonable preguntarse, para $p \in (9/5, 11/5)$, acerca de la posible existencia de **tiempos singulares** en los que una solución débil explota en la norma H^1 (aunque conserva su regularidad débil). Esto no es posible que ocurra cuando $d = 2$, porque en dominios 2-dimensionales, hay existencia de solución fuerte global para todo $p > 1$ (ver Nota 1.2.11). Esta es la razón por la que nos restringimos al caso 3-dimensional.

1.2.2 Unicidad y dependencia continua de solución débil/fuerte

En esta subsección, vamos a suponer la existencia de dos soluciones de $(NS)_{per}^p$ en $(0, T)$, u y v , donde u es una solución fuerte con datos $u_0 \in V_p \cap V_2$ y $f \in L^2((0, T) \times \Omega)^3$, y v es una solución débil con datos $v_0 \in H$ y $g \in L^2((0, T) \times \Omega)^3$. Veremos condiciones suficientes para obtener resultados de dependencia continua.

Teorema 1.9 (Leyes de Carreau y $p \geq 2$) Existe una constante $C = C(T, \|u\|_{L^\infty(V_2)}) > 0$ tal que:

$$\|u - v\|_{L^\infty(0, T; L^2)}^2 + \|u - v\|_{L^p(0, T; V_p)}^p \leq C \left\{ \|u_0 - v_0\|_2^2 + \|f - g\|_{L^2(0, T; L^2)}^2 \right\}.$$

En particular, si $u_0 \equiv v_0$ y $f \equiv g$, tenemos unicidad de soluciones débiles suponiendo existencia de una solución fuerte.

Corolario 1.10 (Caso con viscosidad newtoniana y $p > 1$)

Existe $C = C(T, \|u\|_{L^\infty(V_2)}) > 0$ tal que:

$$\|u - v\|_{L^\infty(0, T; L^2)}^2 + \|u - v\|_{L^2(0, T; V_2)}^2 \leq C \left\{ \|u_0 - v_0\|_2^2 + \|f - g\|_{L^2(0, T; L^2)}^2 \right\}.$$

En particular, hay unicidad de solución en el mismo sentido del Teorema 1.9.

Nota 1.2.6 La norma $L^p(V_p)$ del Teorema 1.9 es sustituida por la norma $L^2(V_2)$ en el Corolario 1.10.

Estudios acerca de la unicidad se pueden ver en [8], [11], [12] y [13]. Aquí, también nos interesaremos por la dependencia continua, ya que este tipo de resultados se usarán posteriormente.

Demostración del Teorema 1.9: Gracias a la regularidad de u , podemos tomar u como función test en la formulación variacional débil de v . Entonces, c.p.d. $t \in (0, T)$:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} v(t) \cdot u(t) d\Omega + \int_0^t \int_{\Omega} \tau_{i,j}^p(e(v)) e_{i,j}(u) d\Omega ds = \int_{\Omega} v_0 \cdot u_0 d\Omega \\ + \int_0^t \int_{\Omega} g \cdot u d\Omega ds + \int_0^t \int_{\Omega} \left((v \cdot \nabla) u + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \cdot v d\Omega ds. \end{cases} \quad (1.15)$$

Por otra parte, podemos multiplicar el problema diferencial para u por v e integrar en $\Omega \times (0, t)$,

$$\begin{cases} \int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (v \cdot \nabla) u \right) \cdot v d\Omega ds + \int_0^t \int_{\Omega} \tau_{i,j}^p(e(u)) e_{i,j}(v) d\Omega ds \\ = \int_0^t \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega ds + \int_0^t \int_{\Omega} \left((v - u) \cdot \nabla \right) u \cdot v d\Omega ds. \end{cases} \quad (1.16)$$

Sumando (1.15) y (1.16), los términos $\int_0^t \int_{\Omega} \left((v \cdot \nabla) u + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \cdot v d\Omega ds$ se cancelan. Entonces, c.p.d. $t \in (0, T)$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v(t) \cdot u(t) d\Omega + \int_0^t \int_{\Omega} \left[\tau_{i,j}^p(e(v)) e_{i,j}(u) + \tau_{i,j}^p(e(u)) e_{i,j}(v) \right] d\Omega ds \\ & = \int_{\Omega} v_0 \cdot u_0 d\Omega + \int_0^t \int_{\Omega} (g \cdot u + f \cdot v) d\Omega ds + \int_0^t \int_{\Omega} ((v - u) \cdot \nabla) u \cdot v d\Omega ds. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Como u es regular, verifica la igualdad de energía:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 d\Omega + \int_0^t \int_{\Omega} \tau_{i,j}^p(e(u)) e_{i,j}(u) d\Omega ds = \int_0^t \int_{\Omega} f \cdot u d\Omega ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_0|^2 d\Omega. \quad (1.18)$$

Definimos $w = u - v$. Sumando la desigualdad de energía para v y (1.18), y restando (1.17),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|w(t)\|_2^2 + \int_0^t \int_{\Omega} [\tau_{i,j}^p(e(u)) - \tau_{i,j}^p(e(v))] e_{i,j}(w) d\Omega ds \\ & \leq \frac{1}{2} \|u_0 - v_0\|_2^2 - \int_0^t \int_{\Omega} (w \cdot \nabla) u \cdot w d\Omega ds + \int_0^t \int_{\Omega} (f - g) \cdot w d\Omega ds. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Como τ^p es una ley de Carreau con $p \geq 2$, posee la propiedad de monotonía (1.8)₂:

$$[\tau_{i,j}^p(e(u)) - \tau_{i,j}^p(e(v))] e_{i,j}(u - v) \geq C_6 \left\{ |e(u - v)|^2 + |e(u - v)|^p \right\} \quad (1.20)$$

Por tanto, si usamos la desigualdad de Körn (1.2): $\forall p > 1, \exists K_p > 0$ tales que:

$$\int_{\Omega} |e(w)|^p d\Omega \geq K_p^p \|\nabla w\|_p^p,$$

somos capaces de acotar inferiormente la parte izquierda de la expresión (1.19), obteniendo:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|w(t)\|_2^2 + C_6 \int_0^t \left\{ K_2^2 \|\nabla w(s)\|_2^2 + K_p^p \|\nabla w(s)\|_p^p \right\} ds \\ & \leq \frac{1}{2} \|u_0 - v_0\|_2^2 - \int_0^t \int_{\Omega} (w \cdot \nabla) u \cdot w d\Omega ds + \int_0^t \int_{\Omega} (f - g) \cdot w d\Omega ds. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Por otra parte, acotamos los últimos términos de la parte derecha de (1.21):

$$\left| - \int_{\Omega} (w \cdot \nabla) u \cdot w \, d\Omega \right| \leq \int_{\Omega} |w|^2 |\nabla u| \, d\Omega \leq \|\nabla u\|_2 \|w\|_4^2 \leq C_{10} \|\nabla u\|_2 \|w\|_2^{1/2} \|\nabla w\|_2^{3/2}, \quad (1.22)$$

(en la última cota hemos usado la desigualdad de interpolación $\|w\|_4 \leq \|w\|_2^{1/4} \|w\|_6^{3/4}$ y la inyección de Sobolev de H^1 en L^6 , con constante C_{10}),

$$\left| \int_{\Omega} (f - g) \cdot w \, d\Omega \right| \leq \|f - g\|_2 \|w\|_2 \leq C'_{10} \|f - g\|_2 \|\nabla w\|_2 \quad (1.23)$$

(en la última acotación se ha usado la desigualdad de Poincaré con constante C'_{10}). Utilizando ahora la desigualdad de Young (con exponentes 4, 4/3 y 2, 2 respectivamente) en las dos desigualdades previas, obtenemos:

$$\left| \int_{\Omega} (-w \cdot \nabla) u \cdot w \, d\Omega \right| \leq C \|\nabla u\|_2^4 \|w\|_2^2 + \frac{K_2^2 C_6}{4} \|\nabla w\|_2^2, \quad (1.24)$$

$$\left| \int_{\Omega} (f - g) \cdot w \, d\Omega \right| \leq C' \|f - g\|_2^2 + \frac{K_2^2 C_6}{4} \|\nabla w\|_2^2. \quad (1.25)$$

De acuerdo con todas las estimaciones anteriores, obtenemos:

$$\begin{aligned} & \|w(t)\|_2^2 + K_2^2 C_6 \int_0^t \|\nabla w(s)\|_2^2 \, ds + 2C_6 K_p^p \int_0^t \|\nabla w(s)\|_p^p \, ds \\ & \leq \|u_0 - v_0\|_2^2 + C \int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^4 \|w(s)\|_2^2 \, ds + C' \|f - g\|_{L^2(L^2)}^2. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Como u es una solución fuerte de $(NS)_{per}^p$, $u \in L^\infty(0, T; V_2)$, entonces, en particular, $\|\nabla u\|_2^4 \in L^1(0, T)$, y, por tanto, podemos usar el lema de Gronwall para terminar la demostración del Teorema. ■

Demostración del Corolario 1.10: Es muy similar a la demostración del Teorema 1.9. En este caso, la diferencia está en la propiedad de monotonía que verifica el tensor. La parte puramente no-newtoniana sólo verifica la desigualdad (1.5), es decir:

$$\int_{\Omega} \left\{ \tau_{k,l}^p(e(u)) - \tau_{k,l}^p(e(v)) \right\} e_{k,l}(w) \, d\Omega \geq 0. \quad (1.27)$$

Así pues, en lugar de (1.20), se tiene:

$$(\tau_{i,j}(e(u)) - \tau_{i,j}(e(v))) e_{i,j}(w(t)) \geq 2\mu_\infty \|e(w(t))\|_2^2,$$

en el que la cota inferior viene dada por la parte newtoniana del tensor.

Entonces, se obtiene en lugar de (1.26):

$$\begin{aligned} & \|w(t)\|_2^2 + K_2^2 C_6 \int_0^t \|\nabla w(s)\|_2^2 \, ds \\ & \leq \|u_0 - v_0\|_2^2 + C \int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^4 \|w(s)\|_2^2 \, ds + C' \|f - g\|_{L^2(L^2)}^2, \end{aligned}$$

donde no aparece el término $\int_0^t \|\nabla w(s)\|_p^p \, ds$, luego se deduce la dependencia continua en $L^2(V_2)$ (en lugar de en $L^p(V_p)$). ■

Nota 1.2.7 (Caso sin viscosidad newtoniana y $p > 1$) Supongamos que la solución fuerte u verifica la hipótesis adicional $\nabla u \in L^1(0, T; L^\infty(\Omega)^3)$. Cambiando las estimaciones del operador no lineal (1.22) y (1.24) por:

$$\left| - \int_{\Omega} (w \cdot \nabla) u \cdot w d\Omega \right| \leq \int_{\Omega} |w|^2 |\nabla u| d\Omega \leq \|\nabla u\|_{\infty} \|w\|_2^2,$$

podemos concluir la unicidad (para ambas leyes).

Nota 1.2.8 (Ley de potencias con viscosidad newtoniana o leyes de Carreau) Si $p \geq 5/2$, hay unicidad de solución débil de $(NS)_{per}^p$ en $(0, T)$ (ver [8], [11]). En efecto, interpolando entre $L^2(\Omega)$ y $L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)$, y teniendo en cuenta que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)$, donde:

$$\|w\|_{\frac{2p}{p-1}} \leq C \|w\|_2^{\frac{2p-d}{2p}} \|\nabla w\|_{\frac{2d}{d-2}}^{\frac{d}{2p}},$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |w|^2 |\nabla u| d\Omega &\leq \|\nabla u\|_p \|w\|_{\frac{2p}{p-1}}^2 \leq C \|\nabla u\|_p \|w\|_2^{\frac{2p-d}{p}} \|\nabla w\|_2^{\frac{d}{p}} \\ &\leq C \|\nabla u\|_p^{\frac{2p}{2p-d}} \|w\|_2^2 + \frac{K_2^2 C_6}{4} \|\nabla w\|_2^2. \end{aligned}$$

Ahora bien, la desigualdad anterior está acotada si $\frac{2p}{2p-d} \leq p$, lo que ocurre para $d = 3$ si y sólo si $p \geq 5/2$.

Nota 1.2.9 Todos estos resultados se pueden extender fácilmente al caso de condiciones de contorno Dirichlet.

1.2.3 Existencia de solución local fuerte

Teorema 1.11 (Leyes de Carreau sin viscosidad newtoniana) Sea $u_0 \in V_p \cap V_2$ y $f \in L^q(0, T; L^{p'}(\Omega)^3)$ con $q > p'$, si $p < 2$, o $f \in L^q(0, T; L^2(\Omega)^3)$ con $q > 2$, si $p \geq 2$. Si $p > 5/3$, entonces existe un tiempo $T^* \in (0, T]$ y una solución fuerte de $(NS)_{per}^p$ en $(0, T^*)$.

Corolario 1.12 (Caso con viscosidad newtoniana) Sea $u_0 \in V_p \cap V_2$ y $f \in L^q(0, T; L^2(\Omega)^3)$ con $q > 2$. Si $p > 1$, entonces existe un tiempo $T^* \in (0, T]$ y una solución fuerte de $(NS)_{per}^p$ en $(0, T^*)$.

Demostración del Teorema 1.11: Vamos a seguir el argumento de [13], generalizando aquí la hipótesis de regularidad para f , ya que en [13] sólo se supone que $f \in L^\infty(0, T; L^{p'}(\Omega)^3)$ si $p < 2$, o $f \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$ si $p \geq 2$. Para $p \geq 11/5$, el resultado es obvio tomando $T^* = T$ (Teorema 1.7). Por tanto, vamos a suponer $5/3 < p < 11/5$. Dividimos la demostración en dos etapas:

Etapas:
Etapas 1: Cualquier solución débil u de $(NS)_{per}^p$ en $(0, T)$, obtenida como en el Teorema 1.7, tal que verifica la regularidad adicional $u \in L^\infty(0, T; V_2)$, es también una solución fuerte de $(NS)_{per}^p$ en $(0, T)$ (es decir, u verifica todas las condiciones de regularidad de la Definición 1.6).

Etapas 2: Existe un $T^* \in (0, T]$ y una solución débil u de $(NS)_{per}^p$ en $(0, T^*)$, obtenida como en el Teorema 1.7, tal que $u \in L^\infty(0, T^*; V_2)$.

Estamos interesados en separar la demostración en dos partes para poner de manifiesto la principal diferencia entre una solución débil y una fuerte: que es poseer o no la regularidad $L^\infty(0, T; V_2)$. Esto será esencial para definir los tiempos singulares (o tiempos de explosión) de una solución débil. Probamos pues estas dos etapas:

Etapas 1: Como $u \in L^\infty(0, T; V_2)$, basta con obtener las condiciones de regularidad *ii*) y *iii*) para u . Para obtenerlas de forma rigurosa, podemos usar la sucesión (u_n) de soluciones aproximadas obtenidas por el método de Galerkin (eligiendo una base de autofunciones del problema de Stokes con condiciones de contorno periódicas) y estimando dichas soluciones en los espacios que aparecen en *ii*) y *iii*). Por simplicidad, razonamos formalmente sobre la solución u . Antes que nada, recordemos que como u es una solución débil, entonces $u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^p(0, T; V_p)$. Además, hemos supuesto la hipótesis $u \in L^\infty(0, T; V_2)$.

Tomando $-\Delta u$ como función test en la formulación variacional (1.13) de u (que es posible gracias a la condiciones de contorno periódicas), obtenemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_2^2 - \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot (\Delta u) d\Omega + \int_{\Omega} \tau_{i,j}^p(e(u)) e_{i,j} (-\Delta u) d\Omega = - \int_{\Omega} f \cdot \Delta u d\Omega.$$

Integrando por partes,

$$\int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot (-\Delta u) d\Omega = - \int_{\Omega} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} d\Omega \leq \|\nabla u\|_3^3 \quad (1.28)$$

y

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tau_{i,j}^p(e(u)) e_{i,j} (-\Delta u) d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial e_{k,l} \partial e_{i,j}} \mathcal{U}^p(e(u)) \frac{\partial e_{k,l}(u)}{\partial x_s} \frac{\partial e_{i,j}(u)}{\partial x_s} d\Omega \\ &\geq C_1 \int_{\Omega} (1 + |e(u)|)^{p-2} |\nabla e(u)|^2 d\Omega, \end{aligned}$$

donde hemos aplicado la hipótesis $(H3)_2$.

Definiendo $I_p(u) = \int_{\Omega} (1 + |e(u)|)^{p-2} |\nabla(e(u))|^2 d\Omega$, obtenemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_2^2 + C_1 I_p(u) \leq \|\nabla u\|_3^3 - \int_{\Omega} f \cdot \Delta u d\Omega. \quad (1.29)$$

Acotamos

$$\|\nabla u\|_3^3 \leq C \|\nabla u\|_2^\alpha \|\nabla u\|_p^\beta \|\nabla u\|_{3p}^\gamma$$

para $\alpha, \beta, \gamma > 0$ tal que $\alpha + \beta + \gamma = 3$ and $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{p} + \frac{\gamma}{3p} = 1$. Usando la propiedad (1.12) para $I_p(u)$ con $d = 3$ y $q = 2$: $\forall p > 1$,

$$\|\nabla u\|_{3p} \leq C I_p(u)^{1/p}, \quad (1.30)$$

y aplicando una desigualdad de Young apropiada, obtenemos:

$$\|\nabla u\|_3^3 \leq \varepsilon I_p(u) + C_\varepsilon \|\nabla u\|_2^{\alpha p/(p-\gamma)} \|\nabla u\|_p^{\beta p/(p-\gamma)} \quad (1.31)$$

Ahora, eligiendo $\beta p/(p-\gamma) = p$ (es decir, $\beta = p-\gamma$),

$$\|\nabla u\|_3^3 \leq \varepsilon I_p(u) + C_\varepsilon \left(\|\nabla u\|_2^2 \right)^\lambda \|\nabla u\|_p^p \quad (1.32)$$

donde $\lambda = 2(3-p)/(3p-5) > 0$ (aquí se usa que $p > 5/3$ y $p < 11/5$). Por otra parte, teniendo en cuenta las propiedades de (1.11) para $I_p(u)$, obtenemos:

$$\int_{\Omega} f \cdot \Delta u \, d\Omega \leq \begin{cases} \|f\|_{p'} \|D^2 u\|_p \leq \varepsilon I_p(u) + C_{\varepsilon} \|f\|_{p'}^2 (1 + \|\nabla u\|_p)^{2-p} & (\text{si } p < 2), \\ \|f\|_2 \|D^2 u\|_2 \leq \varepsilon I_p(u) + C_{\varepsilon} \|f\|_2^2 & (\text{si } p \geq 2). \end{cases} \quad (1.33)$$

Finalmente, si sustituimos (1.32) y (1.33) (para ε arbitrariamente pequeño) en (1.29), obtenemos (omitiendo, por simplicidad, las constantes):

$$\frac{d}{dt} \|\nabla u\|_2^2 + I_p(u) \leq \|\nabla u\|_2^{2\lambda} \|\nabla u\|_p^p + \begin{cases} \|f\|_{p'}^2 (1 + \|\nabla u\|_p)^{2-p} & (\text{si } p < 2), \\ \|f\|_2^2 & (\text{si } p \geq 2). \end{cases} \quad (1.34)$$

Entonces, integrando entre 0 y T ,

$$\begin{aligned} \int_0^T I_p(u) \, dt &\leq \|\nabla u_0\|_2^2 + \|u\|_{L^\infty(0,T;V_2)}^{2\lambda} \int_0^T \|\nabla u\|_p^p \, dt \\ &+ \begin{cases} \int_0^T \|f\|_{p'}^2 (1 + \|\nabla u\|_p)^{2-p} \, dt & (\text{si } p < 2), \\ \int_0^T \|f\|_2^2 \, dt & (\text{si } p \geq 2). \end{cases} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Teniendo en cuenta la regularidad de u_0 y f , y que $u \in L^p(0,T;V_p) \cap L^\infty(0,T;V_2)$, la parte derecha de (1.35) está acotada. Por tanto,

$$\int_0^T I_p(u) \, dt < +\infty. \quad (1.36)$$

Por otra parte, considerando $\frac{\partial u}{\partial t}$ como función test en la formulación variacional para u ,

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_2^2 + \int_{\Omega} \tau_{i,j}^p(e(u)) \frac{\partial}{\partial t} e_{i,j}(u) \, d\Omega = - \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \, d\Omega + \int_{\Omega} f \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \, d\Omega.$$

Usando (H1), tenemos que:

$$\frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_2^2 + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathcal{U}^p(e(u)) \, d\Omega \leq \|f\|_2^2 + I(u, \nabla u), \quad (1.37)$$

donde $I(u, \nabla u) = \int_{\Omega} |u|^2 |\nabla u|^2 \, d\Omega$. Acotemos entonces $I(u, \nabla u)$:

Caso 1: Si $p \geq 2$. Usando (1.30), obtenemos:

$$I(u, \nabla u) \leq \|u\|_{6p/(3p-2)}^2 \|\nabla u\|_{3p}^2 \leq C \|u\|_{V_2}^2 \|\nabla u\|_{3p}^2 \leq C \|u\|_{L^\infty(0,T;V_2)}^2 I_p(u)^{2/p}. \quad (1.38)$$

Caso 2: Si $p \in (5/3, 2)$. Ahora, acotamos por:

$$I(u, \nabla u) = \int_{\Omega} |u|^2 |\nabla u|^{2-p} |\nabla u|^p \, d\Omega \leq \|u\|_{\delta}^2 \|\nabla u\|_{3(2-p)}^{2-p} \|\nabla u\|_{3p}^p \quad (1.39)$$

Como $3(2-p) \leq 2$ si y sólo si $p \geq 4/3$ (es cierto, ya que $p > 5/3$), la cota anterior se transforma en:

$$I(u, \nabla u) \leq C \|u\|_{L^\infty(0,T;V_2)}^{4-p} I_p(u). \quad (1.40)$$

En ambos casos, (1.36) implica que $I(u, \nabla u) \in L^1(0, T)$. Por otra parte, como $u_0 \in V_p$, la propiedad (1.9) (parte izquierda) implica que $\int_{\Omega} \mathcal{U}^p(e(u_0)) d\Omega < +\infty$. Por tanto, integrando (1.37) respecto del tiempo, tenemos que:

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(s) \right\|_2^2 ds + \int_{\Omega} \mathcal{U}^p(e(u(t))) d\Omega \leq C, \quad \forall t \in (0, T]. \quad (1.41)$$

Ahora, usando la propiedad $\int_{\Omega} \mathcal{U}^p(e(u)) d\Omega \geq C \{ \|e(u)\|_p^p - |\Omega| \}$ (estimación derecha de (1.9)), podemos deducir que $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; H)$ y $u \in L^\infty(0, T; V_p)$, es decir, la regularidad *ii*) de una solución fuerte.

Finalmente, de (1.11), (1.36) y $u \in L^\infty(0, T; V_p)$, obtenemos $u \in L^2(0, T; W^{2,p})$ si $p < 2$, o $u \in L^2(0, T; H^2)$ si $p \geq 2$, y concluimos así la Etapa 1.

Etapa 2: Partimos de (1.29). Esta vez, elegimos $\frac{\beta p}{p-\gamma} = \frac{p}{1+\varepsilon}$ en (1.31), para $\varepsilon > 0$, lo que nos conduce a la siguiente desigualdad (en lugar de (1.34)):

$$\frac{d}{dt} \|\nabla u\|_2^2 + I_p(u) \leq (\|\nabla u\|_2^2)^{\lambda_\varepsilon} \|\nabla u\|_p^{p/(1+\varepsilon)} + \begin{cases} \|f\|_{p'}^2 (1 + \|\nabla u\|_p)^{2-p} & (\text{si } p < 2), \\ \|f\|_2^2 & (\text{si } p \geq 2) \end{cases} \quad (1.42)$$

donde

$$\lambda_\varepsilon = \frac{2(3-p)}{3p-5} + \frac{(5p-9)\varepsilon}{(3p-5)(1+\varepsilon)}.$$

En nuestro caso, como $p < \frac{11}{5}$, entonces $\lambda_\varepsilon > 1$. Dividiendo (1.42) por $(1 + \|\nabla u\|_2^2)^{\lambda_\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\lambda_\varepsilon - 1} \frac{d}{dt} \frac{1}{(1 + \|\nabla u(t)\|_2^2)^{\lambda_\varepsilon - 1}} + \frac{I_p(u)}{(1 + \|\nabla u(t)\|_2^2)^{\lambda_\varepsilon}} \\ \leq \|\nabla u\|_p^{p/(1+\varepsilon)} + C \begin{cases} \|f\|_{p'}^2 & (\text{si } p < 2), \\ \|f\|_2^2 & (\text{si } p \geq 2). \end{cases} \end{aligned}$$

Integrando en $(0, t)$, $t \in [0, T]$, llegamos a la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_\varepsilon - 1} \frac{1}{(1 + \|\nabla u_0\|_2^2)^{\lambda_\varepsilon - 1}} + \int_0^t \frac{I_p(u(s))}{(1 + \|\nabla u(s)\|_2^2)^{\lambda_\varepsilon}} ds \\ \leq \|u\|_{L^p(0,T;V_p)}^{p/(1+\varepsilon)} t^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} + C(f) t^a + \frac{1}{(\lambda_\varepsilon - 1)} \frac{1}{(1 + \|\nabla u(t)\|_2^2)^{\lambda_\varepsilon - 1}}, \end{aligned}$$

donde

$$a = \begin{cases} 2(1/p' - 1/q) & \text{si } p < 2, \\ 2(1/2 - 1/q) & \text{si } p \geq 2, \end{cases} \quad \text{y} \quad C(f) = C \begin{cases} \|f\|_{L^q(0,T;L^{p'})}^2 & \text{si } p < 2, \\ \|f\|_{L^q(0,T;L^2)}^2 & \text{si } p \geq 2. \end{cases}$$

Así, $\|\nabla u(t)\|_2^2 \leq C, \forall t \in [0, T_*]$, para $T_* \in (0, T]$ suficientemente pequeño, tal que:

$$\|u\|_{L^p(V_p)}^{p/(1+\varepsilon)} T_*^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} + C(f) T_*^a < \frac{1}{(\lambda_\varepsilon - 1)} \frac{1}{(1 + \|\nabla u_0\|_2^2)^{\lambda_\varepsilon - 1}}. \quad (1.43)$$

Se concluye con esto la demostración del Teorema 1.11. ■

Nota 1.2.10 De (1.43), tenemos que T_* depende de $C(f)$ y $\|u_0\|_{V_2}$ de forma decreciente, ya que $\|u\|_{L^p(V_p)}$ depende de $C(f)$ y $\|u_0\|_{V_2}$ de forma creciente. Además, es posible obtener $T^* = T$ si $C(f)$ y $\|u_0\|_{V_2}$ son suficientemente pequeños (este resultado ha sido considerado en [16]).

Nota 1.2.11 (Caso 2D) En el caso 2-dimensional, se obtiene existencia de solución fuerte global. La razón principal es que ahora el término $\int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} d\Omega$ en (1.28) se anula, luego siguiendo el mismo tipo de razonamiento que en la demostración del Teorema 1.11, Etapa 2, concluimos que $u \in L^\infty(0, T_*; V_2)$. Notemos que ahora $T_* = T$, es decir, la regularidad anterior se verifica para todo tiempo T , sin hipótesis de pequeñez.

Esbozo de la demostración del Corolario 1.12: En el caso de la ley de potencia, la definición de I_p es un poco diferente al caso de leyes de Carreau; en concreto ahora

$$I_p(u) = \int_{\Omega} |e(u)|^{p-2} |\nabla(e(u))|^2 d\Omega.$$

Dicha $I_p(u)$ verifica (1.11)₁ (si $p < 2$) y (1.30) ($\forall p > 1$), pero no verifica (1.11)₂. Esta dificultad se puede superar gracias a la viscosidad newtoniana positiva, ya que se debe añadir $\mu_\infty \|\Delta u\|_2^2$ a la izquierda de (1.29), es decir, aparece en lugar de (1.29) la expresión:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_2^2 + \mu_\infty \|\Delta u\|_2^2 + C_1 I_p(u) \leq \|\nabla u\|_3^3 - \int_{\Omega} f \cdot \Delta u d\Omega.$$

En este caso, la cota para el término $\|\nabla u\|_3^3$ es:

$$\|\nabla u\|_3^3 \leq \varepsilon \|u\|_{H^2}^2 + C_\varepsilon \|\nabla u\|_2^6,$$

luego obtenemos $u \in L^2(0, T; H^2)$. Finalmente, para obtener $u \in L^\infty(0, T; V_p)$ y $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; H)$, podemos usar en (1.37) la cota $I(u, \nabla u) \leq C \|u\|_3^2 \|u\|_{H^2}^2 \in L^1(0, T)$, y $\int_{\Omega} \mathcal{U}^p(e(u)) d\Omega \geq C \|e(u)\|_p^p$ (propiedad (1.9)₁).

1.3 Explosión en tiempos arbitrariamente pequeños

Estudiamos dos casos:

a) $2 \leq p < 11/5$ y leyes de Carreau,

b) $1 < p < 11/5$ y viscosidad newtoniana (para ley de potencias o leyes de Carreau).

Como hemos visto en la Sección anterior, en ambos casos hay existencia de solución débil global, unicidad de solución débil/fuerte y existencia de solución fuerte local. El principal resultado de esta sección es el siguiente:

Teorema 1.13 ($2 \leq p < 11/5$ y leyes de Carreau) *Supongamos $f(t) = f \in L^2(\Omega)^3, \forall t \geq 0$ (f no depende de t). Si existe una solución fuerte u de $(NS)_{per}^p$ en $(0, +\infty)$, tal que:*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|u(t)\|_{V_p} = +\infty, \quad (1.44)$$

Entonces, para cualquier $T_1 > 0$, existe una velocidad inicial $v_0 \in V_p$ tal que la solución fuerte local v de $(NS)_{per}^p$ con dato inicial v_0 explota en la norma $L^\infty(V_2)$ antes del tiempo T_1 , es decir, v no es solución fuerte en $(0, T_1)$.

Corolario 1.14 ($1 < p < 11/5$ y viscosidad newtoniana no nula) *Supongamos $f(t) = f \in L^2(\Omega)^3, \forall t \geq 0$. Si existe una solución fuerte u de $(NS)_{per}^p$ en $(0, +\infty)$, tal que:*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|u(t)\|_{V_2} = +\infty, \quad (1.45)$$

entonces, para cualquier $T_1 > 0$, existe una velocidad inicial $v_0 \in V_2$ tal que la solución fuerte local v de $(NS)_{per}^p$ con dato inicial v_0 explota en la norma $L^\infty(V_2)$ antes de $T_1 > 0$, es decir, v no es solución fuerte en $(0, T_1)$.

Nota 1.3.1 *Hay una diferencia importante entre las leyes de Carreau y el caso newtoniano ($p = 2$): la hipótesis (1.44) se debilita cuando p aumenta (de 2 a 11/5). Por otra parte, hay que hacer notar que en el Corolario 1.14, la hipótesis (1.45) es diferente de (1.44), siendo la misma hipótesis que en el caso de Navier-Stokes [4]. De hecho, la hipótesis (1.45) es más restrictiva cuanto más grande es p , debido al aumento de regularidad de la solución respecto a p .*

Para la demostración de estos resultados, necesitaremos el siguiente Lema técnico:

Lema 1.15 *Supongamos uno de los dos casos anteriores. Sea u una solución débil de $(NS)_{per}^p$ en $(0, +\infty)$ asociada a $f \in L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)^3)$ y $u_0 \in H$. Entonces, para cada $\tau > 0$, existe una constante $C = C(f, u_0, \tau) > 0$ tal que para todo intervalo de longitud τ , $[t, t + \tau]$, existe un $t_0 \in [t, t + \tau]$ tal que, denotando por $\sigma = \max\{p, 2\}$,*

$$\|u(t_0)\|_{V_\sigma}^q \leq C(f, u_0, \tau). \quad (1.46)$$

Nota 1.3.2 *La estimación anterior depende de la talla del intervalo τ , pero no del instante de tiempo t considerado. Además, siguiendo la demostración del Lema que exponemos a continuación, se puede ver que el conjunto de puntos $t_0 \in [t, t + \tau]$ verificando (1.46) tiene medida positiva y tan próxima a τ como se quiera, y la constante $C(f, u_0, \tau)$ de (1.46) es de orden $1/\tau$ respecto a τ .*

Demostración del Lema 1.15: Consideramos dos casos: o bien $p \geq 2$ y $\mu_\infty = 0$, o $\mu_\infty > 0$.

Caso i) ($p \geq 2$ y $\mu_\infty = 0$): De la desigualdad de energía, se tiene:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_2^2 + C_{11} \|u(t)\|_{V_p}^p \leq \|f\|_{L^\infty(L^2)} \|u(t)\|_2. \quad (1.47)$$

Usando la inyección de Sobolev $V_p \hookrightarrow L^2$, tenemos

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_2^2 + K \left(\|u(t)\|_2^2 \right)^{p/2} \leq C_{12} \|f\|_{L^\infty(L^2)}^{p'}. \quad (1.48)$$

Sea $M = M(f, u_0) > 0$ un número suficientemente grande, tal que $\|u_0\|_2^2 \leq M$ y $C_{12}\|f\|_{L^\infty(L^2)}^{p'} < KM^{p/2}$. Entonces, se verifica que $\|u(t)\|_2^2 \leq M, \forall t \geq 0$. En efecto, si suponemos lo contrario, es decir, sea $t' > 0$ el primer instante de tiempo en el que $\|u(t')\|_2^2 = M$ y $\|u(t)\|_2^2 > M, \forall t > t'$ (cerca de t'). Entonces, de (1.48), deducimos $\frac{d}{dt}\|u(t')\|_2^2 < 0$, por lo que su norma decrece en t' , así $\|u(t)\|_2^2 \leq M, \forall t > t'$ (cerca de t'). Esto entra en contradicción con la definición de t' . Seguidamente, integrando (1.47) en $[t, t + \tau]$,

$$C_{11} \int_t^{t+\tau} \|u(s)\|_{V_p}^p ds \leq \frac{M}{2} + \|f\|_{L^\infty(L^2)} M^{1/2} \tau.$$

Definiendo $C = C(f, u_0, \tau)$ tal que

$$\frac{1}{C_{11}} \left(\frac{M}{2} + \|f\|_{L^\infty(L^2)} M^{1/2} \tau \right) = C(f, u_0, \tau) \frac{\tau}{2},$$

la desigualdad previa implica que:

$$\int_t^{t+\tau} \|u(s)\|_{V_p}^p ds \leq C(f, u_0, \tau) \frac{\tau}{2}.$$

Denotando por λ la medida de Lebesgue sobre \mathbb{R} , obtenemos:

$$\lambda \left(\left\{ s \in [t, t + \tau] / \|u(s)\|_{V_p}^p \geq \rho \right\} \right) \leq C(f, u_0, \tau) \rho^{-1} \frac{\tau}{2}.$$

Eligiendo $\rho = C(f, u_0, \tau)$,

$$\lambda \left(\left\{ s \in [t, t + \tau] / \|u(s)\|_{V_p}^p \geq C(f, u_0, \tau) \right\} \right) \leq \frac{\tau}{2} < \lambda([t, t + \tau])$$

y, por tanto, (1.46) se verifica.

Caso ii) ($\mu_\infty > 0$): En este caso, usando la norma en V_2 para controlar los términos de la derecha en la desigualdad de energía (en lugar de la norma V_p), obtenemos en lugar de (1.47):

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_2^2 + \mu_\infty \|u(t)\|_{V_2}^2 + C_{11} \|u(t)\|_{V_p}^p \leq C_{12} \|f\|_{L^\infty(L^2)} \|u(t)\|_2,$$

y usando la inyección de Sobolev $V_2 \hookrightarrow L^2$, tenemos:

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_2^2 + \mu_\infty K \|u(t)\|_2^2 + C_{11} \|u(t)\|_{V_p}^p \leq C_{12} \|f\|_{L^\infty(L^2)}^2 \quad (1.49)$$

De ese modo, podemos razonar como en el caso i), definiendo esta vez $C = C(f, u_0, \tau)$ tal que:

$$\int_t^{t+\tau} \|u(s)\|_{V_p}^p ds \leq C(f, u_0, \tau) \frac{\tau}{2}. \quad \blacksquare$$

Nota 1.3.3 *El Lema 1.15 es también cierto para casos más generales. Por ejemplo, para $p \geq 6/5$ (es decir, los casos en los que la inyección de Sobolev $V_p \hookrightarrow L^2$ sea válida) y $\mu_\infty = 0$, considerando en (1.46) la norma de V_p .*

Demostración del Teorema 1.13: Fijamos $T_1 > 0$. Por la hipótesis (1.44), existe una sucesión $t_j \rightarrow +\infty$ tal que $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|u(t_j)\|_{V_p} = +\infty$. De acuerdo con el Lema 1.15 (ahora $\sigma = p$), podemos encontrar un tiempo $a_j \in [t_j - T_1, t_j], \forall j \geq 1$ tal que:

$$\|u(a_j)\|_{V_p}^p \leq C(f, u_0, T_1), \quad (1.50)$$

donde C no depende de j . De la inyección compacta de V_p en H y (1.50), deducimos que existe una $v_0 \in V_p$ y una subsucesión de $\{u(a_j)\}_{j \geq 1}$ (que denotaremos de la misma forma) tal que $u(a_j) \rightarrow v_0$ débilmente en V_p y fuertemente en H . Seguidamente, consideramos las soluciones fuertes de $(NS)_{per}^p$ (con segundo miembro f):

$$z_j(s) = u(a_j + s) : \text{solución en } (0, +\infty), \text{ con datos iniciales } u(a_j),$$

$$v(s) : \text{solución en } (0, T^*), \text{ con dato inicial } v_0 \in V_p$$

($T^* = T^*(\|v_0\|_{V_2}, \|f\|_{L^2}) > 0$, como hemos visto en el Teorema 1.11).

Para concluir la demostración, veremos que v no es una solución fuerte en $[0, T_1]$. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $T^* \geq T_1$. Como z_j y v son soluciones fuertes de $(NS)_{per}^p$ asociadas al mismo dato f , siguiendo el argumento de unicidad del Teorema 1.9, la sucesión de las diferencias $w_j(t) = z_j(t) - v(t)$, $\forall t \in [0, T_1]$, satisface (ver (1.26)):

$$\frac{d}{dt} \|w_j(t)\|_2^2 + C_6 \left\{ K_2^2 \|\nabla w_j(t)\|_2^2 + 2K_p^p \|\nabla w_j(t)\|_p^p \right\} \leq C \|\nabla v\|_2^4 \|w_j\|_2^2. \quad (1.51)$$

Como $v \in L^\infty(0, T_1; V_2)$, tenemos que $\int_0^t \|\nabla v(s)\|_2^4 ds < Ct \leq CT_1 < +\infty$. Por tanto, aplicando el Lema de Gronwall a (1.51), obtenemos para todo $t \in [0, T_1]$,

$$\|w_j(t)\|_2^2 \leq \|w_j(0)\|_2^2 \exp \left(C \int_0^t \|\nabla v(s)\|_2^4 ds \right) \leq \|w_j(0)\|_2^2 e^{CT_1}. \quad (1.52)$$

En particular, como $w_j(0) \rightarrow 0$ fuertemente en H , entonces $\|w_j(t)\|_2^2 \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow +\infty$, para todo $t \in [0, T_1]$. Ahora, si integramos (1.51) en $(0, T_1)$,

$$C_6 \left\{ K_2^2 \int_0^{T_1} \|w_j(s)\|_{V_2}^2 ds + 2K_p^p \int_0^{T_1} \|w_j(s)\|_{V_p}^p ds \right\} \leq \|w_j(0)\|_2^2 + C \int_0^{T_1} \|\nabla v(s)\|_2^4 \|w_j(s)\|_2^2 ds.$$

Del Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue,

$$\int_0^{T_1} \|\nabla v(s)\|_2^4 \|w_j(s)\|_2^2 ds \rightarrow 0 \quad \text{cuando } j \rightarrow +\infty.$$

Entonces, tenemos que $\int_0^{T_1} \|w_j(s)\|_{V_p}^p ds \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow +\infty$, y, en particular, c.p.d. $t \in [0, T_1]$, $\|w_j(t)\|_{V_p}^p \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow +\infty$. Por tanto, si definimos

$$J = \left\{ t \in [0, T_1] : \lim_{j \rightarrow +\infty} \|w_j(t)\|_{V_p} = 0 \right\},$$

el conjunto $[0, T_1] \setminus J$ tiene medida de Lebesgue cero y, además, para cada $t \in J$, existe un $j_0 = j_0(t)$ tal que $\forall j \geq j_0$, $\|w_j(t)\|_{V_p} \leq 1$. Por otra parte, como $v \in L^\infty(0, T_1; V_p) \cap C_\omega([0, T_1]; V_p)$ (es decir, $t \in [0, T_1] \rightarrow \langle v(j), h \rangle \in \mathbb{R}$ es continua para todo $h \in V_p'$, ver por ejemplo [23]), tenemos que $\|v(t)\|_{V_p} \leq \|v\|_{L^\infty(0, T_1; V_p)} \equiv r$, $\forall t \in [0, T_1]$. Así,

$$\|z_j(t)\|_{V_2} \leq C \|z_j(t)\|_{V_p} \leq C \{ \|w_j(t)\|_{V_p} + \|v(t)\|_{V_p} \} \leq C \{1 + r\}, \quad \forall t \in J, \forall j \geq j_0(t).$$

Para $t = 0$, se verifica que $z_j(0) = u(a_j)$, entonces, gracias a (1.50), $\|z_j(0)\|_{V_2} \leq C$, $\forall j$. Por el Teorema 1.11 (Paso 2), existe un instante de tiempo $T_2 = T_2(r, f)$, independiente de j ,

tal que: $\|z_j\|_{L^\infty(t, t+T_2; V_2)} \leq C$, $\forall t \in J \cup \{0\}$ y $\forall j \geq j_0(t)$. Además, si seguimos la prueba del Teorema 1.11 (Paso 1), también obtenemos:

$$\|z_j\|_{L^\infty(t, t+T_2; V_p)} \leq C \quad \forall t \in J \cup \{0\}, \quad \forall j \geq j_0(t). \quad (1.53)$$

Entonces, como sabemos que $z_j \in C_w([0, +\infty); V_p)$, tenemos que:

$$\|z_j(s)\|_{V_p} \leq C, \quad \forall s \in [t, t+T_2].$$

Por tanto, eligiendo un número finito de $t_i \in J \cup \{0\}$, $i = 1, 2, \dots, m$, tal que $[0, T_1] \subset \bigcup_{i=1}^m [t_i, t_i+T_2]$, y considerando $j_1 = \max_{i=1, \dots, m} \{j_0(t_i)\}$, tenemos que $\|z_j(t)\|_{V_p} \leq C$, $\forall t \in [0, T_1]$ y $\forall j \geq j_1$. Pero esto es una contradicción porque $\|z_j(t_j - a_j)\|_{V_p} = \|u(t_j)\|_{V_p} \rightarrow +\infty$ cuando $t_j \rightarrow +\infty$ y $t_j - a_j \in [0, T_1]$. Por tanto, v no es solución fuerte en $[0, T_1]$. ■

Demostración del Corolario 1.14: El argumento es similar al del Teorema 1.13. La diferencia está en la dependencia continua en $L^2(0, T; V_2)$ en lugar de en $L^p(0, T; V_p)$ (ver Corolario 1.10). En consecuencia, basta con razonar sobre (1.51) sin la norma $\|\nabla w_j\|_p^p$. Notemos que la presencia de la viscosidad newtoniana es esencial para garantizar la dependencia continua de las soluciones fuertes de $(NS)_{per}^p$ en los casos de ley de potencia (con $p > 1$) y leyes de Carreau (con $1 < p < 2$). ■

Nota 1.3.4 *El resultado de unicidad se usa para identificar la solución proporcionada por el Teorema 1.11 (o el Corolario 1.12) con la solución dada en las hipótesis del Teorema 1.13 (o el Corolario 1.14). En el caso sin viscosidad newtoniana y $p \in (5/3, 2)$, sabemos que existe al menos una solución fuerte, pero la unicidad es un problema abierto. Por tanto, para aplicar el argumento anterior, habría que imponer condiciones para asegurar dicha identificación.*

1.4 Estimaciones de la dimensión de Hausdorff de los tiempos singulares

Siguiendo la Sección 1.4, podemos definir el conjunto \mathcal{S} de los tiempos singulares de una solución débil u de $(NS)_{per}^p$ como los tiempos en los que la norma $L^\infty(V_2)$ de u explota, es decir:

$$\mathcal{S} = \{b \in (0, T] : \limsup_{t \uparrow b} \|u(t)\|_{V_2} = +\infty\}.$$

Nota 1.4.1 *De forma rigurosa, la definición anterior quiere decir que $b \in \mathcal{S}$ si existe una sucesión (t_n) , $t_n \uparrow b$ tal que $u(t_n) \in V_2$ y $\limsup_{n \uparrow +\infty} \|u(t_n)\|_{V_2} = +\infty$.*

Claramente, \mathcal{S} tiene medida de Lebesgue cero, debido al hecho de que $\int_0^T \|u(t)\|_{V_2}^2 dt < +\infty$. En esta sección veremos, básicamente, que podemos estimar la dimensión de Hausdorff de \mathcal{S} por $d(p)$, con $d(p) < 1$ y decreciente respecto a p .

Definición 1.16 (Dimensión de Hausdorff) Sea $X \subset M$ un subconjunto compacto de un espacio métrico M . La medida de Hausdorff d -dimensional de X viene dada por $\nu_H^d(X) = \lim_{r \rightarrow 0} \nu_{H,r}^d(X)$, donde

$$\nu_{H,r}^d(X) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^k r_i^d : X \subset \bigcup_{i=1}^k B_i, B_i \text{ bolas abiertas en } M \text{ de radio } r_i \leq r \right\}.$$

Finalmente, la dimensión de Hausdorff de X viene dada por $d_H(X) = \inf\{d > 0 : \nu_H^d(X) = 0\}$.

Estudiamos los mismos casos que en la sección previa, ya que necesitaremos en nuestro razonamiento: unicidad de solución débil/fuerte, existencia de solución fuerte local y existencia de solución débil global. Con este propósito, será necesario suponer la regularidad de los datos (f, u_0) que se da en el Teorema 1.11 (o en el Corolario 1.12).

Sea u una solución débil de $(NS)_{per}^p$ en $(0, T)$, asociada a los datos (f, u_0) . Los resultados principales de esta sección son los siguientes:

Teorema 1.17 ($2 \leq p < 11/5$ y ley de potencia con viscosidad newtoniana, o leyes de Carreau). Supongamos que $f \in L^q(0, T; L^2(\Omega)^3)$ ($2 < q \leq +\infty$) y $u_0 \in V_p$. Entonces, existe un conjunto compacto $E \subset [0, T]$, tal que $S \subseteq E$ y $d_H(E) \leq d(p, q)$, donde

$$d(p, q) = \begin{cases} \frac{q(7-3p) - 4(p-2)}{2(q-5p+9)} & \text{si } q < \frac{34}{13} \text{ y } q \leq \frac{2(7p-12)}{3p-4} \\ \frac{q(20-9p)}{2[(4-p)q + (12-7p)]} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Corolario 1.18 ($1 < p < 2$ y viscosidad newtoniana) Supongamos que $f \in L^q(0, T; L^2(\Omega)^3)$ ($2 < q \leq +\infty$) y $u_0 \in V_2$. Entonces, existe un conjunto compacto $E \subset [0, T]$, tal que $S \subseteq E$ y $d_H(E) \leq d(q)$, donde $d(q) = q/(2q-2)$.

Nota 1.4.2 Notemos que $d(q)$, dado en el Corolario 1.18, es igual a $d(2, q)$ del Teorema 1.17, que corresponde a la estimación obtenida en el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes (concretamente, $d(2, +\infty) = 1/2$). Es fácil verificar que $d(p, q)$ es decreciente respecto de p (fijado q). En otras palabras, la estimación del conjunto de los tiempos singulares proporcionada por el Teorema 1.17 significa que la regularidad de una solución débil de $(NS)_p$ aumenta cuando p aumenta de 2 a $11/5$, en el sentido de que hay una disminución en la talla de S . Con respecto a q , $d(p, q)$ y $d(q)$ son también decrecientes respecto de q (fijado p), y, en estos casos, hay también una disminución de la talla de S cuando q aumenta de 2 a $+\infty$. Por otra parte, el Corolario 1.18 significa que, aunque $1 < p < 2$, si se considera viscosidad newtoniana, se conserva la regularidad de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Demostración del Teorema 1.17: Dividimos la demostración en tres etapas:

Etapla 1. Método general para estimar la dimensión de Hausdorff para los tiempos singulares.

Etapla 2. Algunas estimaciones de $d_H(E)$.

Etapla 3. Comparación de las estimaciones obtenidas en el Paso 2.

Etapa 1. Método general para estimar la dimensión de Hausdorff para los tiempos singulares. En este apartado, generalizamos el estudio hecho para el problema de Navier-Stokes en [7] (ver también [4]).

Dada u una solución débil en $(0, T)$, para cada t_0 tal que $\|u(t_0)\|_{V_2 \cap V_p} < +\infty$, los resultados de existencia de solución fuerte local y unicidad implican que u es una solución fuerte en $[t_0, t_0 + T^*]$ (es decir, $u \in L^\infty(t_0, t_0 + T^*; V_2)$), para cualquier T^* dependiente de $\|u(t_0)\|_{V_2}$ y $\|f\|_{L^q(L^2)}$.

Dado $t_0 \in [0, T]$, definimos I como el intervalo maximal de tiempo que contiene a t_0 en el que u es solución fuerte. Más específicamente, $t_0 \in I \subseteq [0, T]$ y para cada $J \supset I$, con $J \neq I$, tenemos que $u \notin L^\infty(J; V_2)$. La existencia de dicho intervalo maximal I se sigue de que el conjunto Z de intervalos $J \subset [0, T]$ tales que $t_0 \in J$ y $u|_J \in L^\infty(J; V_2)$ es no vacío, y si $J_1, J_2 \in Z$ entonces $J_1 \cup J_2 \in Z$. Además, I es abierto a la derecha si la cota superior de I no es T .

Gracias a la unicidad de solución, existe una cantidad finita o numerable de intervalos maximales disjuntos $\{I_j\}_{j=1}^\infty$. Además, la medida de Lebesgue de $[0, T] \setminus \bigcup_{j=1}^\infty I_j$ es cero.

Sea $I = I_j$ uno de ellos, con $a_j = \inf I_j$ y $b_j = \sup I_j$. Entonces, b_j es un tiempo singular si y sólo si $b_j \neq T$, y en tal caso ha de tenerse necesariamente que $\limsup_{t \uparrow b_j} \|u(t)\|_{V_\sigma} = +\infty$ (con $\sigma = \max(p, 2)$). Definimos el conjunto compacto:

$$E = [0, T] \setminus \bigcup_{j=1}^\infty \overset{\circ}{I}_j.$$

Queremos estimar la medida d -dimensional de E , $\nu_H^d(E)$. Para ello, notemos primero que en la definición de ν_H^d (para la métrica del espacio $M = \mathbb{R}$) podemos considerar intervalos cerrados en lugar de intervalos abiertos. Sea $m \in \mathbb{N}$ y $E_m = [0, T] \setminus \bigcup_{j=1}^m \overset{\circ}{I}_j$. Entonces, $E_m \supset E$ y $(E_m) \searrow E$. Claramente, E_m es unión de un número finito de intervalos cerrados (que pueden ser degenerados en un punto), es decir, $E_m = \bigcup_{j=1}^{k_m} K_j^{(m)}$, donde $K_j^{(m)}$ son intervalos cerrados, no vacíos y disjuntos (respecto de j). Por construcción, $\overset{\circ}{I}_j \cap K_l^{(m)} = \emptyset$ para $j \leq m$, y si para algún $j \geq m+1$, $I_j \cap K_l^{(m)} \neq \emptyset$, entonces $I_j \subset K_l^{(m)}$ (ya que I_j es conexo y los intervalos $(K_l^{(m)})_l$ son disjuntos. Por ello, los conjuntos

$$N_l^{(m)} = \{j \geq m+1; I_j \cap K_l^{(m)} \neq \emptyset\} = \{j \geq m+1; I_j \subset K_l^{(m)}\}$$

son disjuntos (respecto de l). Denotando por $|\cdot|$ la medida de Lebesgue, tenemos que:

$$\sum_{l=1}^{k_m} |K_l^{(m)}| \leq \sum_{l=1}^{k_m} \sum_{j \in N_l^{(m)}} |I_j| \leq \sum_{j=m+1}^\infty |I_j| = \varepsilon_m.$$

Además, $\varepsilon_m \rightarrow 0$, ya que $\sum_{j \geq 1} |I_j| \leq T$, pues los $(\overset{\circ}{I}_j)_j$ son disjuntos.

Para estimar la medida d -dimensional de Hausdorff de E , calculamos:

$$\sum_{l=1}^{k_m} |K_l^{(m)}|^d \leq \sum_{l=1}^{k_m} \sum_{j \in N_l^{(m)}} |I_j|^d \leq \sum_{j \geq m+1} |I_j|^d, \quad 0 < d < 1,$$

(donde hemos usado el hecho de que $(x + y)^d \leq x^d + y^d, \forall x, y \geq 0$). Como $\{K_l^{(m)}\}_{l=1}^{k_m}$ es un recubrimiento por intervalos cerrados de E_m (luego también de E) con intervalos de radio $\leq \varepsilon_m/2$, tenemos que $\nu_{H, \varepsilon_m/2}^d(E) \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} |I_j|^d = \delta_m$. Por tanto, si probamos que $\sum_{j \geq 1} |I_j|^d < +\infty$, entonces $\delta_m \rightarrow 0$, así $\nu_H^d(E) = 0$ y, en particular, $d_H(E) \leq d$.

Etapa 2. Algunas estimaciones de $d_H(E)$. Queremos demostrar que $\sum_{j \geq 1} |I_j|^d < +\infty$, para algún $d: 0 < d < 1$. Obtendremos dos tipos de estimaciones:

- a) usando una combinación de las regularidades $L^\infty(V_p)$ y $L^\infty(V_2)$, y
- b) usando sólo la regularidad $L^\infty(V_2)$.

a) Tomando $\frac{\partial u}{\partial t}$ como función test e integrando en Ω , llegamos a la expresión (1.37). Por otra parte, tomando $-\Delta u$ como función test e integrando en Ω , si usamos (1.11)₂ para leyes de Carreau (o el término $\mu_\infty \|\Delta u\|_2^2$ para el caso de la ley de potencia con viscosidad newtoniana), obtenemos (omitiendo las constantes):

$$\frac{d}{dt} \|\nabla u\|_2^2 + I_p(u) \leq \int_{\Omega} |u|^2 |\nabla u|^2 d\Omega + \|f\|_2^2 \quad (1.54)$$

Sumando (1.54) a (1.37), llegamos a la siguiente desigualdad (salvo constantes):

$$\frac{d}{dt} \left\{ \|\nabla u\|_2^2 + \int_{\Omega} \mathcal{U}^p(e(u)) d\Omega \right\} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_2^2 + I_p(u) \leq \|f\|_2^2 + I(u, \nabla u). \quad (1.55)$$

Tenemos que acotar $I(u, \nabla u)$. Para ello, razonamos de la siguiente forma:

$$I(u, \nabla u) = \int_{\Omega} |u|^2 |\nabla u|^r |\nabla u|^{2-r} d\Omega \leq \|u\|_{p^*}^2 \|\nabla u\|_p^{(5p-8)/2} \|\nabla u\|_{3p}^{(12-5p)/2}$$

donde hemos elegido $r = r(p) = (5p - 8)/2$, y p^* denota el exponente de Sobolev asociado a p . Entonces, aplicando (1.30) y la desigualdad de Young con exponentes $2p/(7p-12)$ y $2p/(12-5p)$,

$$I(u, \nabla u) \leq C \|\nabla u\|_p^{(5p-4)/2} I_p(u)^{(12-5p)/2p} \leq \varepsilon I_p(u) + C_\varepsilon \|\nabla u\|_p^{p(5p-4)/(7p-12)}$$

Finalmente, gracias a la desigualdad de Körn y la estimación $C_1 \|e(u)\|_p^p \leq 2p(p-1) \int_{\Omega} \mathcal{U}^p(e(u)) d\Omega$, $\forall p \geq 2$ (ver [13]), llegamos a:

$$I(u, \nabla u) \leq \varepsilon I_p(u) + C'_\varepsilon \left(\int_{\Omega} \mathcal{U}^p(e(u)) d\Omega \right)^{(5p-4)/(7p-12)} \quad (1.56)$$

Entonces, definiendo $J(u) = \|\nabla u\|_2^2 + \int_{\Omega} \mathcal{U}^p(e(u))$, de (1.55) y (1.56) (tomando ε suficientemente pequeño), podemos deducir:

$$\frac{d}{dt} \{1 + J(u)\} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_2^2 + I_p(u) \leq \|f\|_2^2 + \{1 + J(u)\}^{\lambda_1} \quad (1.57)$$

donde $\lambda_1 = (5p - 4)/(7p - 12)$.

Ahora, consideramos dos casos, dependiendo de la regularidad de f :

Caso $f \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$: Dividiendo (1.57) por $\{1 + J(u)\}^{\lambda_1}$, obtenemos:

$$-\frac{1}{\lambda_1 - 1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\{1 + J(u)\}^{\lambda_1 - 1}} \right) + \frac{\|\partial u / \partial t\|_2^2 + I_p(u)}{\{1 + J(u)\}^{\lambda_1}} \leq \|f\|_2^2 + 1 \in L^\infty(0, T).$$

Integrando entre t_0 y t ($t > t_0$) (notemos que $\lambda_1 - 1 > 0$), tenemos que:

$$\frac{1}{\{1 + J(u(t_0))\}^{\lambda_1 - 1}} \leq \frac{1}{\{1 + J(u(t))\}^{\lambda_1 - 1}} + C(t - t_0).$$

Por tanto, razonando como en el Teorema 1.11, la siguiente condición implica que u es solución fuerte en $[t_0, t]$:

$$C(t - t_0) < \frac{1}{\{1 + J(u(t_0))\}^{\lambda_1 - 1}}.$$

Consecuentemente, si I_j es el intervalo de solución maximal conteniendo t_0 y $b = \sup I_j$, obtenemos:

$$C(b - t_0)^{-1/(\lambda_1 - 1)} \leq 1 + J(u(t_0)). \quad (1.58)$$

Tomando $\int_{I_j} dt_0$, obtenemos $|I_j|^{1-1/(\lambda_1 - 1)} \leq C \int_{I_j} \{1 + J(u(t_0))\} dt_0$. De ese modo,

$$\sum_{j \geq 1} |I_j|^{1-1/(\lambda_1 - 1)} \leq C \sum_{j \geq 1} \int_{I_j} \{1 + J(u(t_0))\} dt_0 \leq C \int_0^T \{1 + J(u(t_0))\} dt_0.$$

Como $\int_0^T J(u(t_0)) dt_0 < +\infty$, usando la propiedad (ver [13]) $\int_\Omega \mathcal{U}^p(e(u)) \leq C \{ \|e(u)\|_p^p + |\Omega| \}$ y el hecho de que $u \in L^p(0, T; V_p)$, podemos concluir que $d_H(E) \leq 1 - \frac{1}{\lambda_1 - 1} = \frac{20 - 9p}{2(4 - p)}$. Si definimos:

$$d_1(p, \infty) = \frac{20 - 9p}{2(4 - p)},$$

notemos que $d_1(p, \infty)$ es decreciente respecto de p y $d_1(2, +\infty) = 1/2$ (recordemos que $1/2$ era la estimación obtenida en el caso newtoniano [7]).

Caso $f \in L^q(0, T; L^2(\Omega)^3)$ con $2 < q < +\infty$: Ahora, dividiendo (1.57) por $\{1 + J(u(t))\}^{\lambda_1 - 2/q}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \lambda_1 + 2/q} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\{1 + J(u)\}^{\lambda_1 - 1 - 2/q}} \right) + \frac{\|\partial u / \partial t\|_2^2 + I_p(u)}{\{1 + J(u)\}^{\lambda_1 - 2/q}} \\ \leq \|f\|_2^2 + \{1 + J(u(t))\}^{2/q} \in L^{q/2}(0, T). \end{aligned}$$

Entonces, integrando en tiempo entre t_0 y t ,

$$\frac{1}{\{1 + J(u(t_0))\}^{\lambda_1 - (q+2)/q}} \leq \frac{1}{\{1 + J(u(t))\}^{\lambda_1 - (q+2)/q}} + C(t - t_0)^{(q-2)/q}.$$

Por tanto, ahora la siguiente condición implica que u es una solución fuerte en $[t_0, t]$:

$$C(t - t_0)^{(q-2)/q} < \frac{1}{\{1 + J(u(t_0))\}^{\lambda_1 - (q+2)/q}}.$$

De ese modo, si $b = \sup I_j$:

$$C(b - t_0)^{-\frac{q-2}{q}(\lambda_1 - \frac{q+2}{q})^{-1}} \leq 1 + J(u(t_0)), \quad (1.59)$$

con lo que, razonando como antes, implica que $\sum_{j \geq 1} |I_j|^d < +\infty$ con

$$d = 1 - \frac{q-2}{q} \left(\lambda_1 - \frac{q+2}{q} \right)^{-1} = \frac{q(20-9p)}{2[(4-p)q + (12-7p)]} := d_1(p, q).$$

Entonces, $d_H(E) \leq d_1(p, q)$. Notemos que $d_1(p, q)$ es decreciente respecto de p (fijado q) y decreciente respecto de q (fijado p), y $d_1(p, q) \rightarrow d_1(p, +\infty)$ cuando $q \rightarrow +\infty$.

b) Partiendo sólo de la desigualdad obtenida tomando $-\Delta u$ como función test, ver (1.29), podemos obtener (salvo constantes):

$$\frac{d}{dt} \|\nabla u\|_2^2 + I_p(u) \leq \|\nabla u\|_3^3 + \|f\|_2^2. \quad (1.60)$$

Existen dos diferencias principales respecto de (1.55). La ventaja es que ahora tenemos que acotar $\|\nabla u\|_3^3$ en lugar de $I(u, \nabla u)$ (por ejemplo, la cota de $\|\nabla u\|_3^3$ nos da la existencia de una solución fuerte global para $p \geq 11/5$, y si acotamos $I(u, \nabla u)$ podemos obtener el mismo resultado sólo para $p \geq 20/9$, ver [5]). La desventaja es que no tenemos el término $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathcal{U}^p(e(u))$ en la parte izquierda de la expresión (1.60). De nuevo, distinguimos dos casos, dependiendo de la regularidad de f :

Caso $f \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$: Acotamos $\|\nabla u\|_3^3$ por

$$\|\nabla u\|_3^3 \leq \|\nabla u\|_2^{6(p-1)/(3p-2)} \|\nabla u\|_{3p}^{3p/(3p-2)} \leq \varepsilon I_p(u) + C_\varepsilon \|\nabla u\|_2^{6(p-1)/(3p-5)}$$

donde hemos aplicado las desigualdades de Hölder y Young, y la propiedad (1.30). Entonces (1.60) se convierte en (salvo constantes):

$$\frac{d}{dt} \|\nabla u\|_2^2 + I_p(u) \leq \|f\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^{2\lambda_2} \quad (1.61)$$

donde $\lambda_2 = 3(p-1)/(3p-5)$. Dividiendo por $(1 + \|\nabla u\|_2^2)^{\lambda_2}$ en (1.61):

$$-\frac{1}{\lambda_2 - 1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\{1 + \|\nabla u\|_2^2\}^{\lambda_2 - 1}} \right) + \frac{I_p(u)}{(1 + \|\nabla u\|_2^2)^{\lambda_2}} \leq \|f\|_2^2 + 1 \in L^\infty(0, T). \quad (1.62)$$

Razonando como en el apartado **a)**, obtenemos:

$$d_H(E) \leq \frac{7-3p}{2} := d_2(p, \infty).$$

De nuevo, $d_2(p, \infty)$ es decreciente respecto de p y $d_2(2, +\infty) = 1/2$.

Caso $f \in L^q(0, T; L^2(\Omega)^3)$ con $2 < q < +\infty$: Acotamos $\|\nabla u\|_3^3$ como en (1.31), tomando $\beta p/(p-\gamma) = 2p/q$. Entonces, (1.60) se transforma en:

$$\frac{d}{dt} \left(1 + \|\nabla u\|_2^2 \right) + I_p(u) \leq \|f\|_2^2 + \|\nabla u\|_p^{2p/q} \left(\|\nabla u\|_2^2 \right)^{\lambda_3} \quad (1.63)$$

donde $\lambda_3 = \{3(p-1)q - 2(5p-9)\}/q(3p-5)$. Dividiendo por $(1 + \|\nabla u\|_2^2)^{\lambda_3}$:

$$-\frac{1}{\lambda_3 - 1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\{1 + \|\nabla u\|_2^2\}^{\lambda_3 - 1}} \right) + \frac{I_p(u)}{(1 + \|\nabla u\|_2^2)^{\lambda_3}} \leq \|f\|_2^2 + \|\nabla u\|_p^{2p/q} \in L^{q/2}(0, T).$$

Razonando de forma similar al apartado **a**), podemos concluir que:

$$d_H(E) \leq 1 - \frac{q-2}{q} \frac{1}{\lambda_3 - 1} = \frac{q(7-3p) - 4(p-2)}{2(q-5p+9)} := d_2(p, q).$$

Una vez más, $d_2(p, q)$ es una función decreciente en p (fijado q) y una función decreciente en q (fijado p) y

$$d_2(p, q) \rightarrow d_2(p, +\infty) \quad \text{cuando } q \rightarrow +\infty.$$

Etapa 3. Comparación de las estimaciones obtenidas en la Etapa 2.

Cuando $f \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$, tenemos que $d_1(p, \infty) = (20-9p)/2(4-p)$ y $d_2(p, \infty) = (7-3p)/2$. Es fácil ver que la mejor estimación es $d_1(p, +\infty)$, es decir,

$$d_1(p, +\infty) \leq d_2(p, +\infty).$$

Por tanto, elegimos $d(p, +\infty) = d_1(p, +\infty)$.

Cuando $f \in L^q(0, T; L^2(\Omega)^3)$ con $q > 2$, entonces:

$$d_1(p, q) = \frac{q(20-9p)}{2[(4-p)q + (12-7p)]} \quad \text{y} \quad d_2(p, q) = \frac{q(7-3p) - 4(p-2)}{2(q-5p+9)}.$$

Tenemos que

$$d_1(p, q) \leq d_2(p, q) \quad \text{si y sólo si } q \geq 2(7p-12)/(3p-4) := g(p).$$

La función $g(p)$ es creciente respecto de p y $g(p) \in (2, 34/13)$ si $p \in (2, 11/5)$. En particular, si $q \geq 34/13$, entonces siempre $d_1(p, q) \leq d_2(p, q)$, en cuyo caso elegimos $d(p, q) = d_1(p, q)$. Por otra parte, ($q < 34/13$), tenemos que $d_1(p, q) \leq d_2(p, q)$ si y sólo si $q \geq g(p)$, por tanto elegimos $d(p, q) = d_1(p, q)$ si $q \geq g(p)$, y $d(p, q) = d_2(p, q)$ si $q \leq g(p)$. ■

Nota 1.4.3 *El tipo de estimaciones hechas en al Etapa 2 de la demostración anterior, también se pueden usar para obtener existencia de solución fuerte global para datos iniciales v_0 pequeños pero segundo miembro f arbitrario (ver en [4] el razonamiento para el caso newtoniano)*

Demostración del Corolario 1.18: Teniendo en cuenta la **Etapa 1** del Teorema 1.17, consideramos directamente la **Etapa 2** para estimar $d_H(E)$. Como $1 < p < 2$ (con viscosidad newtoniana), no es necesario usar ahora una combinación de las regularidades $L^\infty(V_p)$ y $L^2(V_2)$ (como hemos hecho en la demostración de la **Etapa 2**, apartado **a**), de Teorema 1.17), ya que ahora L^p es “menos regular” que L^2 . Entonces, razonando como en la **Etapa 2**, apartado **b**), del Teorema 1.17, tenemos (1.60) cambiando $I_p(u)$ por $\mu_\infty \|\Delta u\|_2^2$:

$$\frac{d}{dt} \|\nabla u\|_2^2 + \mu_\infty \|\Delta u\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 + \|\nabla u\|_3^3.$$

Usando la regularidad L^2 del problema de Stokes (con condiciones de contorno periódicas), es decir:

$$\|u\|_{H^2}^2 \leq C \|\Delta u\|_2^2, \quad \forall u \in H^2 \cap V_2,$$

tenemos que:

$$\frac{d}{dt} \|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_{H^2}^2 \leq \|f\|_2^2 + \|\nabla u\|_3^3. \quad (1.64)$$

Acotamos $\|\nabla u\|_3^3 \leq \|\nabla u\|_2^{3/2} \|\nabla u\|_6^{3/2} \leq \varepsilon \|u\|_{H^2}^2 + C_\varepsilon \|\nabla u\|_2^6$, obteniendo entonces (tomando ε suficientemente pequeño):

$$\frac{d}{dt} \|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_{H^2}^2 \leq \|f\|_2^2 + (\|\nabla u\|_2^2)^3. \quad (1.65)$$

De nuevo, dependiendo de la regularidad de f , distinguimos dos casos.

Caso $f \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$: Dividiendo (1.65) por $(1 + \|\nabla u\|_2^2)^3$:

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{(1 + \|\nabla u\|_2^2)^2} \right\} + \frac{\|u\|_{H^2}^2}{(1 + \|\nabla u\|_2^2)^3} \leq \|f\|_2^2 + 1 \in L^\infty(0, T). \quad (1.66)$$

Razonando como en el **Paso 2**, apartado **b**), del Teorema 1.17, llegamos a que $d_H(E) \leq 1/2$.

Caso $f \in L^q(0, T; L^2(\Omega)^3)$ con $2 < q < +\infty$: Ahora, dividiendo (1.65) por $(1 + \|\nabla u\|_2^2)^{3-2/q}$ de forma análoga a como se hizo en el **Paso 2**, apartado **b**), del Teorema 1.17, podemos obtener que:

$$d_H(E) \leq \frac{q}{2q-2} := d(q).$$

Notemos que $d(q)$ es decreciente respecto de q . ■

1.5 Algunos problemas abiertos

1.- Aunque para $p > 11/5$ existe solución fuerte global en tiempo, en las estimaciones que realizamos no se llega a que $d(11/5) = 0$. Así pues, se podría buscar otro tipo de estimaciones sobre el conjunto de los tiempos singulares que garantizasen dicha igualdad.

2.- A la vista de las condiciones de contorno bajo las que se estudia este problema, otro problema que se podría plantear es el estudio de los tiempos singulares del mismo modelo, pero con otro tipo de condiciones de contorno, por ejemplo Dirichlet homogéneas (cuyos resultados sobre soluciones fuertes se pueden ver en [15]).

3.- La tercera cuestión abierta que puede ser mencionada es el estudio de los puntos singulares (en espacio y tiempo) para el modelo de fluidos quasi-newtonianos (tanto con condiciones de contorno periódicas como Dirichlet homogéneas).

4.- A la vista de los resultados existentes para el modelo con densidad variable ([5]), también sería interesante el estudio de los tiempos singulares para este tipo de modelo. En este caso la principal dificultad está en la obtención de resultados de unicidad, debido a las diferentes relaciones no lineales que aparecen entre la densidad y la velocidad y la falta de regularidad para la densidad.

5.- En el caso de problemas acoplados (ver Nota 1.2.3), donde una variable adicional (como por ejemplo la temperatura) interviene en la expresión del tensor τ , de nuevo sería interesante el estudio de los tiempos singulares.

Bibliografía de la Parte I

- [1] H. Amann, *Stability of the Rest State of a Viscous Incompressible Fluid*. Arch. Rational Mech. Anal. **126** (1994), pp. 231-242.
- [2] H. Bellout, F. Bloom & J. Nečas, *Young Measure-Valued Solutions for Non-Newtonian Incompressible Fluids*. Comm. in PDE **19**, 11 & 12 (1994), pp. 1763-1803.
- [3] L. Caffarelli, R. Kohn & L. Nirenberg, *Partial Regularity of Suitable Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XXXV (1982), pp. 771-831.
- [4] P. Constantin & C. Foias, *Navier-Stokes Equations*, The University of Chicago Press, Chicago, 1988.
- [5] F. Guillén, *About Density-Dependent Incompressible Fluids with Non-Newtonian Viscosity*. Sometido.
- [6] F. Guillén-González & M. A. Rodríguez-Bellido, *On the Singular Times with Nonlinear Viscosity*. Aparecerá en la revista *Journal of Mathematical Analysis and Applications*.
- [7] C. Foias & R. Témam, *Some analytic and geometric properties of the solutions of the evolution Navier-Stokes equations*, J. Math. Pures et Appl. , 58 (1979), pp. 339-368.
- [8] O. A. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. Gordon and Breach, New York, 1969.
- [9] J. Leray, *Sur le mouvement d'un liquide visqueux remplissant l'espace*, Acta Mathematica **63** (1934), pp. 193-248.
- [10] F. Lin, *A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theorem*, Comm. Pure Appl. Math. **51**, no. 3, 1998, pp. 241-257.
- [11] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*. Dunod, Paris, 1969.
- [12] J. Málek & J. Nečas, *A Finitedimensional Attractor for Three-Dimensional flow of Incompressible Fluids*. Journal of Differential Equations, **127**, 2 (1996), pp. 498-518.
- [13] J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta & M. Růžička, *Weak and Measure-valued Solutions to Evolutionary Partial Differential Equations*, Applied Mathematics and Mathematical Computations, vol. 13, Chapman and Hall, 1996.

- [14] J. Málek, J. Nečas & M. Růžička, *On the Non-Newtonian Incompressible Fluids*. Math. Models Methods Appl. Sci. **3** (1993), pp. 35-63.
- [15] J. Málek, J. Nečas & M. Růžička, *On Weak Solutions to a Class of Non-Newtonian Incompressible Fluids in Bounded Three-Dimensional Domains. The Case $p \geq 2$* . Advances in Differential Equations, 6, no. 3, (2001), pp. 257-302.
- [16] J. Málek, K. R. Rajagopal & M. Růžička, *Existence and Regularity of Solutions and the Stability of the Rest State for Fluids with Shear Dependent Viscosity*. Mathematical Models Methods Appl. Sci. **5**, 6 (1995), pp. 789-812.
- [17] J. Nečas, *Sur les normes équivalentes dans $W_p^k(\Omega)$ et sur la coercivité des formes formellement positives*. Séminaire Équations aux Dérivées Partielles, Les Presses de l'Université de Montréal, 1966, pp. 102-128.
- [18] V. Scheffer, *Turbulence and Hausdorff dimension, in Turbulence and the Navier-Stokes Equations*, Lecture Notes in Math., No. 565, Springer-Verlag, (1976), pp. 174-183.
- [19] V. Scheffer, *Hausdorff measure and the Navier-Stokes equations*, Comm. Math. Phys. , 55 (1977), pp. 97-112.
- [20] V. Scheffer, *The Navier-Stokes equations on a bounded domain*, Comm. Math. Phys. , 73 (1980), pp. 1-42.
- [21] M. Schinbrot, *Lectures on Fluids Mechanics*, Gordon & Breach, New York, 1973.
- [22] H. Sohr & W. von Wahl, *On the regularity of the pressure of weak solutions of Navier-Stokes equations*, Arch. Math. (Basel), 46, 1986, no. 5, pp. 428-439.
- [23] R. Temam, *Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*. North Holland, Amsterdam, New York, 1977.

**Parte II: Soluciones fuertes de las
Ecuaciones Primitivas con condición de
adherencia en el fondo.**

Introducción a la Parte II

Si observamos nuestro planeta, veremos que al menos dos tercios de él están cubiertos por los océanos, y que está rodeado por la atmósfera. Ya a principios del siglo XIX, Pierre Simon de Laplace pensaba que las leyes físicas que gobiernan la atmósfera y el océano podrían servir para predecir el tiempo y el clima futuros. A principios de este siglo, V. Bjerknes trabajó con la hipótesis de que esta predicción se podría tratar como un problema de valores iniciales en física matemática. Posteriormente, motivado por lo que él denominó “el sueño del hombre”, Richardson realizó las primeras contribuciones importantes en este tema, así como Rossby, J. Bjerknes, Von Neumann, Charney, Smagorinsky y otros tantos.

Actualmente, según J. L. Lions, R. Temam y S. Wang [35], para entender el comportamiento turbulento de la atmósfera y el océano, y poder predecir el clima, necesitamos:

- (a) establecer las ecuaciones y modelos matemáticos que gobiernan el movimiento y estados de la atmósfera y el océano, y las interacciones que aparecen entre ellos;
- (b) establecer los fundamentos matemáticos de dichas ecuaciones y modelos;
- (c) establecer y resolver las aproximaciones numéricas de dichas ecuaciones.

La atmósfera es un fluido compresible, descrito matemáticamente por las ecuaciones de la Hidrodinámica y la Termodinámica, teniendo en cuenta la fuerza de Coriolis. Dichas ecuaciones describen tanto los movimientos a gran escala, como las pequeñas escalas que son consideradas como “ruidos” en los cálculos numéricos.

Sin embargo, debido a que la escala vertical es mucho menor que la escala horizontal, podemos usar la aproximación hidrostática (ver Sección II.4) que permite obtener las Ecuaciones Primitivas de la atmósfera y del océano.

Una de las principales fuerzas que “mueven” el océano es la fuerza del viento, lo que pone de manifiesto que el comportamiento del océano depende de la atmósfera. Sin embargo, mucho más potente es la influencia del océano en el comportamiento de la atmósfera y del clima. Todas estas observaciones justifican el estudio del mecanismo de acoplamiento entre la atmósfera y el océano.

El objetivo de la segunda parte de esta Tesis es, por un lado, mejorar los resultados de regularidad existentes para el modelo de Ecuaciones Primitivas del Océano, y, por otro lado, obtener resultados de unicidad para dicho modelo. Observemos que dichos objetivos están en la línea de dar una respuesta a la preocupación (ver [46]) por el buen planteamiento del problema de Ecuaciones Primitivas.

Sólo nos interesaremos por las Ecuaciones Primitivas del océano, sin embargo muchos de los resultados serán extrapolables a las Ecuaciones Primitivas de la Atmósfera (ver Sección II.4.3). Dentro de las Ecuaciones Primitivas del Océano, por simplicidad, prestaremos atención sólo al

sistema de ecuaciones (no lineal) para la velocidad y presión, ya que el sistema acoplado con la temperatura y salinidad introduce ecuaciones de tipo convección-difusión lineales (supuesta conocida la velocidad), que no añaden dificultades esenciales.

El océano.

El océano es considerado como un fluido ligeramente compresible, con fuerzas de Coriolis y centrípetas. El conjunto de ecuaciones que rigen lo que se conoce como “large scale ocean model” son: **la ecuación de momentos, la ecuación de continuidad, la ecuación termodinámica o de la temperatura θ , la ecuación de difusión para la salinidad S y la ecuación de estado:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} + 2\rho \mathbf{W} \times \mathbf{V} + \rho \mathbf{W} \times (\mathbf{W} \times \mathbf{r}) + \nabla_3 p + \rho \mathbf{g} = D \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_3 \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \frac{d\theta}{dt} = Q_\theta = \nabla_3 \cdot (\nu_\theta \nabla_3 \theta) \\ \frac{dS}{dt} = Q_S = \nabla_3 \cdot (\nu_S \nabla_3 S) \\ \rho = f(\theta, S, p) \end{array} \right. \quad (\text{II.1})$$

donde ρ es la densidad, \mathbf{V} la velocidad (3-dimensional) del flujo, p la presión, $\mathbf{g} = (0, 0, g)$ es la gravedad, $2\rho \mathbf{W} \times \mathbf{V}$ es el término de Coriolis y $\rho \mathbf{W} \times (\mathbf{W} \times \mathbf{r})$ las fuerzas centrípetas ($\mathbf{W} = (0, \omega \cos \lambda, \omega \sin \lambda)$ es el vector de rotación de la Tierra), \mathbf{r} es el radio de la Tierra y $\lambda = \lambda(y)$ es la latitud, D es la disipación (molecular), Q_θ y Q_S las difusiones de temperatura y salinidad respectivamente; ν_θ y ν_S los coeficientes de difusión para el calor y la salinidad.

Respecto a los operadores utilizados, $\nabla_3 = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ es el gradiente tridimensional, $\Delta_3 = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \partial_{zz}^2$ el Laplaciano y $\frac{d}{dt}$ es la “derivada material o total”, es decir,

$$\frac{d}{dt} = \partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla_3.$$

El operador divergencia tridimensional se denotará indistintamente por div_3 o $\nabla_3 \cdot$.

Estas ecuaciones presentan bastantes dificultades teóricas considerables y, sobre todo, dificultades computacionales, de ahí que se intenten simplificar en base a consideraciones matemáticas y físicas.

II.1 La aproximación de Boussinesq

Consiste en despreciar las diferencias de densidad, salvo en el término de gravedad (“buoyancy”) y en la ecuación de estado. Más concretamente, fijada una densidad media ρ_0 constante, ponemos:

$$\rho = \rho_0 + \rho'(t, x, y, z) \quad \text{con } \rho' \ll \rho_0,$$

lo que transforma la ecuación de continuidad (II.1)₂ en:

$$\partial_t \rho' + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho' + \rho_0 \nabla_3 \cdot \mathbf{V} + \rho' \nabla_3 \cdot \mathbf{V} = 0.$$

Luego, si nos quedamos con el orden principal para ρ' , se obtiene la aproximación:

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{V} = 0.$$

Esta hipótesis de incompresibilidad (límite de número de Match $M = 0$), que se hace de forma usual, es válida en el océano debido a la lenta velocidad del agua respecto a la viscosidad en dicho medio. Dicha hipótesis no es válida en el aire, que es un fluido “claramente” compresible.

Respecto a las ecuaciones de momentos, al despreciar ρ' salvo en el término de gravedad, nos queda:

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{V}}{dt} + 2\rho_0 \mathbf{W} \times \mathbf{V} + \rho_0 \mathbf{W} \times (\mathbf{W} \times \mathbf{r}) + \nabla_3 p + \rho \mathbf{g} = D$$

Escribiendo $D = \nabla_3 \cdot \sigma$ con $\sigma = \chi (\nabla_3 \mathbf{V}_3 + {}^t \nabla_3 \mathbf{V}_3)$, e incluyendo, como es habitual (ver [41]), las fuerzas centrípetas y de gravedad en el gradiente de una función potencial, el sistema (II.1)₁ y (II.1)₂ se sustituye por:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{V} + 2\mathbf{W} \times \mathbf{V} - \nu \Delta_3 \mathbf{V} + \nabla_3 P = \frac{\rho' g}{\rho_0} \\ \nabla_3 \cdot \mathbf{V} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

donde $\nu = \chi/\rho_0$ es la viscosidad cinemática y $P = \frac{1}{\rho_0} p + g z + \frac{1}{2\rho_0} |\mathbf{W} \times \mathbf{r}|^2$.

Si consideramos un sistema de coordenadas esféricas, tal y como hacen J.-L. Lions, R. Temam y S. Wang en [34], las variables son:

- $\lambda \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ la latitud de la Tierra,
- $\varphi \in [0, 2\pi]$ la longitud de la Tierra, y
- r la distancia radial. Es decir, $z = r - a$ y a es el nivel del mar (radio de la Tierra).

En ese caso, $\mathbf{V} = v_\theta e_\theta + v_\varphi e_\varphi + v_r e_r = \mathbf{v} + w$, donde \mathbf{v} es la velocidad horizontal y w la velocidad vertical. La simplificación (llamada β -plano) consiste en reemplazar r por a , ya que la profundidad del océano es pequeña comparada con el radio de la Tierra.

Sólo se conocen aproximaciones empíricas de la densidad $\rho = f(\theta, S, p)$, [49]. Sin embargo, es natural esperar que la densidad ρ decrezca con el aumento de temperatura θ , y que crezca con el aumento de salinidad S . Por tanto, una ley lineal natural es considerar:

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta_\theta(\theta - \theta_0) + \beta_S(S - S_0)), \quad (\text{II.3})$$

donde ρ_0 , θ_0 y S_0 son valores de referencia (o promedios) de ρ , θ y S , y β_θ y β_S son coeficientes de expansión, considerados constantes. La elección de expresiones polinomiales en θ y S conduce a otras dificultades matemáticas.

Por último, para modelar la presencia de efectos turbulentos de las pequeñas escalas sobre las grandes escalas, se suele introducir coeficientes de difusión (turbulenta) distintos en las direcciones horizontales (μ) y vertical (ν).

Con todo ello, las llamadas **Ecuaciones de Boussinesq del océano**, (*BEs*), vienen descritas por el siguiente sistema:

$$(BEs) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + w \partial_z \mathbf{v} + \nabla P + 2W \cos \lambda \mathbf{k} \times \mathbf{v} - \mu \Delta \mathbf{v} - \nu \partial_{zz}^2 \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \partial_t w + \mathbf{v} \cdot \nabla w + w \partial_z w + \partial_z P + \frac{\rho'}{\rho_0} g - \mu \Delta w - \nu \partial_{zz}^2 w = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{v} + \partial_z w = 0 \\ \partial_t \theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta + w \partial_z \theta - \mu_\theta \Delta \theta - \nu_\theta \partial_{zz}^2 \theta = 0 \\ \partial_t S + \mathbf{v} \cdot \nabla S + w \partial_z S - \mu_S \Delta S - \nu_S \partial_{zz}^2 S = 0 \\ \rho = \rho_0 (1 - \beta_\theta (\theta - \theta_0) + \beta_S (S - S_0)) \end{array} \right.$$

Este sistema posee 7 ecuaciones y 7 incógnitas: las dos componentes de \mathbf{v} , w , P , θ , S y ρ . Notemos que los operadores sin subíndice (∇ , Δ , $\nabla \cdot$) son operadores bidimensionales que sólo hacen referencia a las variables horizontales, y que $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

II.2 El dominio ocupado por el Océano

Consideramos el dominio ocupado por el océano Ω , que viene definido por:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in S, -H(x, y) < z < 0\}, \quad (\text{II.4})$$

donde S (la sección horizontal) es un abierto acotado en \mathbb{R}^2 y H (la profundidad) es una función continua no negativa sobre S . La frontera del dominio es $\partial\Omega = \overline{\Gamma_b} \cup \Gamma_l \cup \Gamma_s \cup \partial\Gamma_s$ donde el fondo Γ_b y las posibles paredes laterales (taludes) Γ_l están definidas por:

$$\Gamma_b = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in S, z = -H(x, y)\},$$

$$\Gamma_l = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \partial\overline{S}, -H(x, y) < z < 0\}.$$

La superficie Γ_s y las orillas $\partial\Gamma_s$ vienen dadas por

$$\Gamma_s = \{(x, y, 0) : (x, y) \in S\}, \quad \partial\Gamma_s = \{(x, y, 0) : (x, y) \in \partial S\}.$$

Las siguientes figuras ilustran las posibles configuraciones del dominio.

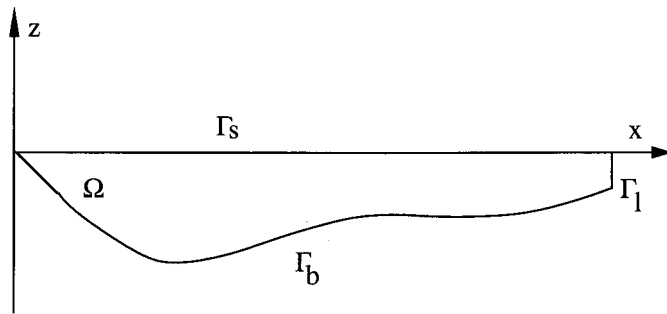


Fig. 1: El dominio (2D) con paredes laterales.

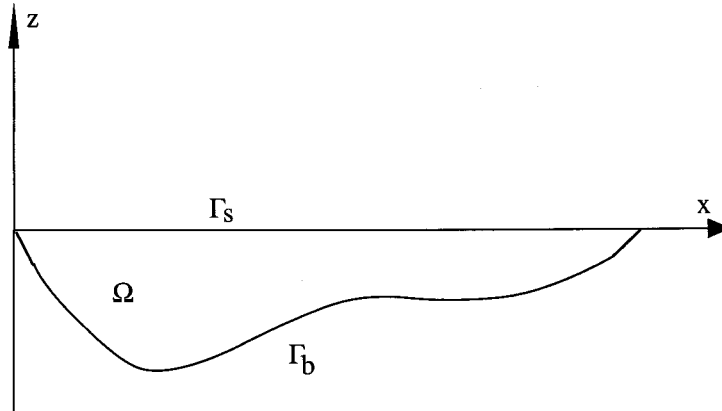


Fig. 2: El dominio (2D) sin talud.

II.3 La forma adimensional de las ecuaciones.

Consideramos ahora valores de referencia de la velocidad horizontal, temperatura, salinidad, densidad y tiempo, respectivamente U , θ_0 , S_0 , ρ_0 y T_0 , así como el valor de referencia de las dimensiones horizontales y vertical a y Z . El análisis real de escalas nos dice que el cociente entre las longitudes vertical y horizontales es pequeño,

$$\varepsilon = \frac{Z}{a} \approx 10^{-3}.$$

Siguiendo un análisis de escalas parecido al hecho en [34], hacemos el re-escalamiento siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} = \mathbf{v}'U \quad w = w'\varepsilon U \quad \theta = \theta_0\theta' \\ S = S_0S' \quad \rho = \rho_0\rho' \quad p = \rho_0U^2p' \\ T = T_0T' \quad h = \frac{H}{Z} \quad z = Zz' = \varepsilon az' \end{array} \right.$$

Nota II.3.1 La variante del re-escalamiento anterior respecto del de [34] es que aquí $T = T_0 T'$, pues en dicho artículo se toma un tiempo de referencia $\frac{a}{U}$ en lugar de T_0 . Esto nos permitirá definir la escala de tiempo considerada a través del número de Strouhal.

Nota II.3.2 La elección de la escala para la velocidad vertical viene impuesta por la ecuación de incompresibilidad $(BEs)_3$.

Consideramos los siguientes parámetros:

$$\left\{ \begin{array}{l} St_1 = \frac{a}{T_0 U}, \quad St_2 = \frac{Z}{T_0 U}, \\ \frac{1}{Re_1} = \frac{\mu_V}{aU}, \quad \frac{1}{Re_2} = \frac{a\nu_V}{Z^2 U}, \\ \frac{1}{Rt_1} = \frac{\mu_\theta}{aU}, \quad \frac{1}{Rt_2} = \frac{a\nu_\theta}{Z^2 U}, \\ \frac{1}{Rs_1} = \frac{\mu_S}{aU}, \quad \frac{1}{Rs_2} = \frac{a\nu_S}{Z^2 U}, \\ Ro = \frac{U}{a\Omega}, \quad \bar{b} = \frac{gZ}{U^2}, \\ \bar{\beta}_\theta = \beta_\theta \theta_0, \quad \bar{\beta}_S = \beta_S S_0, \\ \bar{\theta}_b = \frac{\theta_b}{\theta_0}, \quad \bar{S}_b = \frac{S_b}{S_0}, \\ \bar{\alpha}_\theta = Z\alpha_\theta, \quad \bar{\theta}_A = \frac{\theta_A}{\theta_0}, \\ \bar{\tau}_V = \frac{Z\tau_V}{U}, \end{array} \right.$$

St_i para $i = 1, 2$ son los números de Strouhal, Re_i los números de Reynolds (que compara la difusión y la convección), Rt_i y Rs_i los coeficientes de difusión turbulenta adimensionales (de temperatura y salinidad), Ro el número de Rossby, que mide la influencia significativa de la rotación de la Tierra sobre el comportamiento dinámico del océano. En el océano, $Ro = 2 \times 10^{-4}$.

También se puede considerar los números de Ekman $Ek_i = \frac{Ro}{Re_i}$.

Existe una competición entre todos estos parámetros que permite efectuar diversos límites asintóticos. La finalidad no es obtener un sistema competitivo para modelar la realidad, sino comprender los fenómenos que están en juego y conocer en cuáles de los parámetros anteriores influyen.

Realizando todos los cambios anteriores (donde omitimos los signos "m"), las ecuaciones de Boussinesq (BEs) se transforman en las ecuaciones adimensionalizadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} St_1 \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + w \partial_z \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{2}{Ro} \cos \lambda (\mathbf{k} \times \mathbf{v}) - \frac{1}{Re_1} \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{Re_2} \partial_{zz}^2 \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ St_2 \partial_t w + \mathbf{v} \cdot \nabla w + w \partial_z w + \varepsilon^{-2} (\partial_z p + \bar{b} \rho) - \frac{1}{Re_1} \Delta w - \frac{1}{Re_2} \partial_{zz}^2 w = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{v} + \partial_z w = 0 \\ St_1 \partial_t \theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta + w \partial_z \theta - \frac{1}{Rt_1} \Delta \theta - \frac{1}{Rt_2} \partial_{zz}^2 \theta = 0 \\ St_1 \partial_t S + \mathbf{v} \cdot \nabla S + w \partial_z S - \frac{1}{Rs_1} \Delta S - \frac{1}{Rs_2} \partial_{zz}^2 S = 0 \\ \rho = \rho_0 (1 - \bar{\beta}_\theta (\theta - 1) + \bar{\beta}_S (S - 1)), \end{array} \right. \quad (II.5)$$

II.4 La aproximación hidrostática I: Argumento directo

II.4.1 Ecuaciones Primitivas del Océano

Las dimensiones horizontales del océano son mucho mayores que las dimensiones verticales, y la velocidad del agua en la dirección vertical es mucho menor que la velocidad horizontal, lo que se traduce en la sustitución de la tercera componente de la ecuación de estado, $(II.1)_1$, por la llamada **aproximación hidrostática**:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad (II.6)$$

que relaciona la presión y la densidad del océano con la gravedad. Esta relación es bastante precisa en “large-scale ocean”, luego se convierte en una ecuación fundamental en Oceanografía. Atendiendo a la adimensionalización hecha en la Sección anterior, dicha relación se corresponde con el hecho de hacer tender ε a cero. El análisis de escalas nos dice además que para que todas las componentes de $(II.5)_1$ sean del mismo orden, necesitamos suponer además que $\nu = \varepsilon^2 \nu_v$, con $\nu_v = O(1)$ y $\mu = O(1)$. A partir de ahora, denotaremos $\mu = \nu_h$.

Con todas estas simplificaciones, las llamadas **Ecuaciones Primitivas del Océano (EP)** vienen descritas por el sistema de ecuaciones:

$$(EP) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + w \partial_z \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p + 2\Omega \cos \lambda (\mathbf{k} \times \mathbf{v}) - \nu_h \Delta \mathbf{v} - \nu_v \partial_{zz}^2 \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \partial_z p = -\rho g, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} + \partial_z w = 0 \\ \partial_t \theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta + w \partial_z \theta - \mu_\theta \Delta \theta - \nu_\theta \partial_{zz}^2 \theta = 0 \\ \partial_t S + \mathbf{v} \cdot \nabla S + w \partial_z S - \mu_S \Delta S - \nu_S \partial_{zz}^2 S = 0 \\ \rho = \rho_0 (1 - \beta_\theta (\theta - \theta_0) + \beta_S (S - S_0)) \end{array} \right.$$

Desde el punto de vista matemático, distinguimos entre las variables de pronóstico, que son aquellas que verifican una ecuación de evolución y, por tanto, necesitan datos iniciales, y las variables de diagnóstico, que no la verifican. Estas últimas pueden ser determinadas en cada instante de tiempo como funciones de las variables de pronóstico. La variable w pasa entonces de ser una variable de pronóstico a una variable diagnóstico, con lo que no se puede asignar un valor inicial a w . Como consecuencia, el sistema, que no era de tipo Cauchy-Kovalewski para p , ahora tampoco lo es para w .

Veamos cómo obtener las variables de diagnóstico w y p :

- a) De la ecuación de continuidad, integrando en $(z, 0)$ (respectivamente en $(-h(\mathbf{x}), z)$) deducimos que:

$$w(0) - w(z) = - \int_z^0 \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, s) ds, \quad \left(\text{resp. } w(z) - w(-h(\mathbf{x})) = - \int_{-h(\mathbf{x})}^z \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, s) ds \right),$$

luego

$$w(z) = \int_z^0 \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, s) ds, \quad \left(\text{resp. } w(z) = - \int_{-h(\mathbf{x})}^z \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, s) ds \right).$$

b) De la ecuación hidrostática:

$$p(t; \mathbf{x}, z) = p_s(t; \mathbf{x}) + \int_z^0 \rho g ds = p_s(t; \mathbf{x}) + P(\theta, S)(t; \mathbf{x}, z),$$

donde $p_s = p(t; \mathbf{x}, 0)$ es la presión en la superficie del océano y

$$P(\theta, S) = -\rho_0 g (1 + \beta_\theta \theta_0 - \beta_S S_0) z - \rho_0 \beta_\theta \int_z^0 \theta(x, y, s) ds + \rho_0 \beta_S \int_z^0 S(x, y, s) ds.$$

Una vez reescrito el gradiente horizontal de la presión como:

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla p = \frac{1}{\rho_0} \nabla p_s - \beta_\theta \int_z^0 \nabla \theta(x, y, s) ds + \beta_S \int_z^0 \nabla S(x, y, s) ds = \frac{1}{\rho_0} \nabla p_s + \mathbf{f},$$

con $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\theta, S)$, nuestro sistema se escribe como sigue:

$$(EP) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{v} + w \partial_z \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_s + 2\Omega \cos \lambda (\mathbf{k} \times \mathbf{v}) - \nu_h \Delta \mathbf{v} - \nu_V \partial_{zz}^2 \mathbf{v} = \mathbf{f}(\theta, S) \\ \nabla \cdot \mathbf{v} + \partial_z w = 0 \\ \partial_t \theta + \nabla_{\mathbf{v}} \theta + w \partial_z \theta - \mu_\theta \Delta \theta - \nu_\theta \partial_{zz}^2 \theta = 0 \\ \partial_t S + \nabla_{\mathbf{v}} S + w \partial_z S - \mu_S \Delta S - \nu_S \partial_{zz}^2 S = 0 \\ \rho = \rho_0 (1 - \beta_\theta (\theta - \theta_0) + \beta_S (S - S_0)) \end{array} \right.$$

Dicho modelo es admisible desde el punto de vista computacional, en el sentido en que se reduce en una dimensión el problema, al pasar de una incógnita tridimensional para las ecuaciones de Navier-Stokes a una incógnita bidimensional para el sistema de Ecuaciones Primitivas. De ahí que sea el punto de partida para el estudio de la dinámica del océano y de otros modelos para fluidos geofísicos, como el quasi-geostrófico.

II.4.2 Las condiciones de contorno.

Las condiciones de contorno que se consideran para el sistema (EP), son las siguientes:

Condición de interfase: En la interfaz existente entre la atmósfera y el océano, una hipótesis simplificadora es considerar que dicha interfaz está fija, hipótesis que se denomina de “techo rígido” (rigid lid hypothesis). Dicha elección está basada en tres hechos:

- el agua es mucho más densa que el aire. Si denotamos con el superíndice a las variables relativas a la atmósfera, y con el superíndice s las variables relativas al océano (sólo cuando ambas convivan en el mismo modelo), se observa que $\rho^a / \rho^s \approx 10^{-3}$, luego la interfaz entre el aire y el agua es muy estable considerando grandes escalas espaciales, debido a la intensidad de la fuerza gravitacional que hace que los objetos tiendan a recuperar su posición cuando se los desplaza de su posición de equilibrio.
- En comparación con el movimiento en gran escala, el desplazamiento vertical en la superficie de las ondas de mareas se puede despreciar.
- Las pequeñas vibraciones de la superficie del océano son debidas a las fuerzas gravitatorias, que aparecen como un “ruido” (en las altas frecuencias) y no suelen ser tenidas en cuenta en la mayoría de los modelos de Circulación Global.

Por tanto, sobre la superficie del dominio imponemos:

$$w|_{\Gamma_s} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{v}^s|_{\Gamma_s} = \mathbf{v}^a|_{\Gamma_s} \quad (\text{II.7})$$

Sin embargo, como $\rho^a \ll \rho^s$, la condición de frontera (II.7) implica la existencia de una capa límite fina en la atmósfera (de 1 km. de espesor) y una capa muy fina en el océano (de entre 10 y 100 m. de espesor). Los ordenadores existentes hasta el momento no permiten el uso de mallas de discretización espaciales suficientemente pequeñas para resolver dichas leyes de frontera. Usualmente, dichas leyes de frontera se modelizan y reemplazan por otras condiciones de contorno que son de naturaleza menos fundamental pero más práctica.

Como la fuerza del viento es una de las principales fuerzas que mueven el océano, una ley aceptada físicamente como descriptora del mecanismo de movimiento es:

$$\text{esfuerzos de cizalla en la interfaz} = \text{fuerza horizontal del viento sobre } \Gamma_s, \quad (\text{II.8})$$

donde los esfuerzos de cizalla se traducen matemáticamente como la componente tangencial del tensor de esfuerzos viscosos. El último aspecto que se tiene en cuenta para el modelado de las leyes de frontera es el uso del principio de reacción-difusión, que indica que el agua ejerce en el aire una fuerza opuesta a la fuerza horizontal del viento, lo que conduce a que :

$$\text{los esfuerzos de cizalla en el aire son opuestos a la fuerza horizontal del viento sobre } \Gamma_s. \quad (\text{II.9})$$

Usualmente, la fuerza horizontal del viento, o “drag force”, viene dada por:

$$\rho^a C_D^a (\mathbf{v}^a - \mathbf{v}^s) |\mathbf{v}^a - \mathbf{v}^s|^\alpha, \quad \text{con } \alpha \geq 0,$$

donde C_D^a es el coeficiente de transferencia de momento, o “drag coefficient”. Dicho parámetro es adimensional si $\alpha = 1$.

Veamos ahora cómo expresar el tensor de esfuerzos de cizalla del océano. De la definición de viscosidad turbulenta se deduce que la componente tangencial del tensor de esfuerzos de corriente del océano sobre la interfaz (o superficie del océano) viene dado por:

$$(\nu \partial_z \mathbf{v} + \mu \nabla w)|_{\Gamma_s},$$

lo que, usando la hipótesis de techo rígido, se transforma en:

$$\nu \partial_z \mathbf{v}|_{\Gamma_s}.$$

La magnitud física de esta cantidad es de fuerza por unidad de masa, luego para que ambos miembros de la ecuación (II.9) tengan la misma magnitud, las condiciones de contorno deben ser:

$$\rho_0^s \nu_v^s \partial_z \mathbf{v}^s = \rho^a C_D^a (\mathbf{v}^s - \mathbf{v}^a) |\mathbf{v}^a - \mathbf{v}^s|^\alpha \quad \text{sobre } \Gamma_s. \quad (\text{II.10})$$

Hemos de decir que también se utilizan simplificaciones de esta ley, como por ejemplo considerar $\rho^a C_D^a \mathbf{v}^a |\mathbf{v}^a|$ a la derecha.

Para las variables θ y S se podrían hacer estudios análogos para imponer las condiciones de contorno en la superficie del océano. Sin embargo, como dichas variables no serán el objeto de nuestro estudio, nos limitamos a exponer las condiciones de contorno más utilizadas.

Matemáticamente, usando una simplificación de la condición (II.10), podríamos estudiar las siguientes condiciones de contorno para las Ecuaciones Primitivas del océano:

En la superficie del océano Γ_s , $z = 0$:

$$\begin{cases} \partial_z \mathbf{v} = \tau_{\mathbf{v}}, \\ w = 0, \\ \partial_z \theta = \alpha_{\theta}(\theta_A - \theta), \\ \partial_z S = 0, \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

donde $\tau_{\mathbf{v}}$ es la tensión del viento (que sólo depende de la velocidad de la atmósfera), α_{θ} es una constante positiva relacionada con el calor turbulento en la superficie del océano, y θ_A es la temperatura de equilibrio atmosférico (aparente).

En el fondo del océano Γ_b , $z = -H(\mathbf{x})$:

$$\begin{cases} (\mathbf{v}, w) = \mathbf{0}, \\ (\theta, S) = (\theta_H, S_H), \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

o bien,

$$\begin{cases} \partial_n \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad w = -\nabla H \cdot \mathbf{v} \text{ (esto último equivale a } (\mathbf{v}, w) \cdot \mathbf{n} = 0), \\ \partial_n \theta = \partial_n S = 0 \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

donde θ_H y S_H son la temperatura y salinidad en el fondo del océano, respectivamente, y dependen de la latitud θ y la longitud φ . Las primeras condiciones de contorno sobre Γ_b reflejan la ausencia de movimiento y las segundas la ausencia de intercambio de calor y sal con el fondo. Desde un punto de vista físico, las segundas condiciones son más naturales.

Otras condiciones de contorno sobre el fondo que pueden ser consideradas según J.-L. Lions, R. Temam, S. Wang, [34], son:

$$\begin{cases} \partial_z \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ w = -\mathbf{v} \cdot \nabla H(\mathbf{x}) \\ \partial_z(\theta, S) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

En las paredes laterales sólidas Γ_l (supuesto que existan):

$$\begin{cases} (\mathbf{v}, w) = \mathbf{0} \\ \partial_n \theta = \partial_n S = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

Fijamos las siguientes condiciones de contorno (adimensionalizadas):

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} \partial_z \mathbf{v} = \bar{\tau}_{\mathbf{v}} \quad w = 0 \\ \partial_z \theta = \bar{\alpha}_{\theta}(\bar{\theta}_A - \theta) \quad \partial_z S = 0 \end{array} \right\} \text{ sobre } \Gamma_s \\ & \left. \begin{array}{l} (\mathbf{v}, w) = \mathbf{0} \\ (\theta, S) = (\bar{\theta}_b, \bar{S}_b) \end{array} \right\} \text{ sobre } \Gamma_b \\ & \left. \begin{array}{l} (\mathbf{v}, w) = \mathbf{0} \\ \partial_n(\theta, S) = \mathbf{0} \end{array} \right\} \text{ sobre } \Gamma_l. \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

II.4.3 Las Ecuaciones Primitivas de la Atmósfera.

El aire es un fluido compresible. Las incógnitas en la atmósfera son la velocidad (\mathbf{v}^a, ω^a) , presión p^a , densidad ρ^a , temperatura θ^a , y humedad (cantidad de vapor de agua) q . Como hemos dicho anteriormente, la escala vertical es mucho menor que la horizontal, luego se puede justificar (de manera análoga a como se ha hecho para las ecuaciones del océano) que la ecuación de equilibrio de momentos para la velocidad vertical puede ser sustituida por la aproximación hidrostática. Dicha hipótesis justifica además el uso de p^a como variable vertical en lugar de z (el llamado p-sistema), ver [33, 35].

Razonando como en [35], podemos describir las Ecuaciones Primitivas de la Atmósfera como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{v}^a + \mathbf{v}^a \cdot \nabla \mathbf{v}^a + \omega^a \partial_{p^a} \mathbf{v}^a + 2\Omega \cos(\lambda) \mathbf{k} \times \mathbf{v}^a + \Phi^a - \mu^a \Delta \mathbf{v}^a - \nu^a \partial_{p^a} \left[\left(\frac{g p^a}{R \bar{\theta}} \right)^2 \partial_{p^a} \mathbf{v}^a \right] = 0, \\ \partial_{p^a} \Phi^a + \frac{R \theta^a}{p^a} = 0, \quad \text{div } \mathbf{v}^a + \partial_{p^a} \omega^a = 0, \\ \frac{R^2}{c^2} (\partial_t \theta^a + \mathbf{v}^a \cdot \nabla \theta^a + \omega^a \partial_{p^a} \theta^a) - \frac{R \omega^a}{p^a} - \frac{R^2}{c^2} \omega^a \partial_{p^a} \bar{\theta}(p^a) \\ \quad - \mu_\theta^a \Delta \theta^a - \nu_\theta^a \partial_{p^a} \left[\left(\frac{g p^a}{R \bar{\theta}} \right)^2 \partial_{p^a} \theta^a \right] = Q_\theta, \\ \partial_t q + \mathbf{v}^a \cdot \nabla q + \omega^a \partial_{p^a} q - \mu_q \Delta q - \nu_q \partial_{p^a} \left[\left(\frac{g p^a}{R \bar{\theta}} \right)^2 \partial_{p^a} q \right] = Q_q, \end{array} \right.$$

donde $\omega^a = \frac{dp^a}{dt}$ es la velocidad vertical del p-sistema ($w^a \neq \omega^a$), $\Phi^a = gz$ es el geopotencial, $p^a = R \rho^a \theta^a$ (con R la constante del gas para "aire seco"), y $\bar{\theta} \in C^\infty([p_0, P])$ es una función conocida, que representa el valor promedio de la temperatura sobre las superficies isobaras, y satisface la condición:

$$c^2 = R \left(\frac{R \bar{\theta}}{c_p^a} - p^a \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial p^a} \right) = \text{constante},$$

con c_p^a el calor específico del aire seco a presión constante.

Las condiciones de contorno que se consideran son las siguientes:

$$\partial_{p^a} \mathbf{v}^a = 0, \quad \omega^a = 0, \quad \partial_{p^a} \theta^a = 0, \quad q = 0, \quad p = p_0 \quad \text{sobre } \Gamma_u,$$

$$\partial_{p^a} \mathbf{v}^a = \alpha_p (\mathbf{v}^* - v), \quad \omega^a = 0, \quad \partial_{p^a} \theta^a = \alpha_\theta (\theta_* - \theta), \quad \partial_{p^a} q = 0 \quad p = P \quad \text{sobre } \Gamma_s \text{ o } \Gamma_e$$

con diferentes parametrizaciones de α_p , α_θ según nos encontremos en la superficie del océano Γ_s o en la superficie de la Tierra (manto terrestre) Γ_e . El valor P representa un promedio de la presión sobre la superficie de la Tierra y la superficie del océano, y p_0 es la presión en la capa más alta de la atmósfera.

Nota II.4.1 Condiciones de contorno sobre la superficie del océano en el modelo

acoplado atmósfera océano (CAO)

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^a = w^s \\ \nu_v^a \left(\frac{g p^a}{R \bar{\theta}} \right)^2 \partial_{p^a} \mathbf{v}^a = C_D^a(\alpha) g p^a (\mathbf{v}^s - \mathbf{v}^a) |\mathbf{v}^a - \mathbf{v}^s|^\alpha \\ \rho_0^s \nu_v^s \partial_z \mathbf{v}^s = C_D^a(\alpha) \rho^a (\mathbf{v}^a - \mathbf{v}^s) |\mathbf{v}^a - \mathbf{v}^s|^\alpha \\ C_p^s \rho_0^s \nu_\theta^s \partial_z \theta^s = -\frac{c^2}{R^2} C_p^a (\rho^a)^2 g \nu_\theta^a \partial_{p^a} \theta^a = Q \\ \rho^a g \nu_q \partial_{p^a} q = C_L(\alpha) |\mathbf{v}^a - \mathbf{v}^s|^\alpha (q_{ae} - q) \\ \rho_0^s \nu_v \partial_z S = \frac{1}{C_s} (C_L(\alpha) |\mathbf{v}^a - \mathbf{v}^s|^\alpha (q_{ae} - q) - \mathcal{P}) \bar{S}_0, \end{array} \right.$$

donde $\bar{\theta}$ es el promedio de θ en las isobaras de superficie (isobaric surface), \mathcal{P} es una función dada y \bar{S}_0 es un valor de referencia para la salinidad. Dichas ecuaciones se adimensionalizan y son objeto de estudio en un dominio $S^2 \times [P, p_0]$, donde S^2 representa a la superficie de la Tierra, ver [36].

II.4.4 Regularidad débil de las Ecuaciones Primitivas del Océano

Usando una técnica similar a la usada para las ecuaciones de Navier-Stokes, Lions-Temam-Wang obtienen en [34] el siguiente resultado de existencia de solución:

Teorema II.19 *Dado un dominio Lipschitziano con talud y dada una velocidad inicial $\mathbf{v}_0 \in L^2$, existe al menos una solución débil global en tiempo para el problema de Ecuaciones Primitivas del océano, es decir:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} \in L^\infty(0, \tau; L^2) \cap L^2(0, \tau; H^1), \quad \forall \tau > 0 \\ p_s \in L^2(0, \tau; H^{-2}) \end{array} \right.$$

Nota II.4.2 *El resultado para la presión aparecerá en [19].*

En la demostración de dicho resultado se usa explícitamente la hipótesis de profundidad mínima positiva, luego el caso de un dominio con “playas” no está considerado.

II.5 Argumentos de aproximación interna

Desde el punto de vista numérico, el estudio de las Ecuaciones Primitivas no puede estar basado en un argumento de paso al límite desde las ecuaciones de Navier-Stokes, tal y como se hace teóricamente. Por el contrario, es necesario un estudio intrínseco.

En la Tesis de P. Azérad, se construye un par de elementos finitos en velocidad-presión para resolver el problema de Stokes hidrostático, que resulta ser estable para la presión.

En el trabajo de T. Chacón y F. Guillén [15], se hace un análisis de existencia de solución de

las Ecuaciones Primitivas estacionarias:

$$(EP)_{st} \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + w \partial_z \mathbf{v} - \nu_h \Delta \mathbf{v} + \nu_v \partial_{zz}^2 \mathbf{v} + f \mathbf{v}^\perp + \nabla p_s = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot \left(\int_{-h(\mathbf{x})}^0 \mathbf{v}(\mathbf{x}, z) dz \right) = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ w(\mathbf{x}, z) = \int_z^0 \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, s) ds \quad \text{en } \Omega, \\ \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad w = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_s, \\ \nu_v \partial_z \mathbf{v} = \tau, \quad w = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_b. \end{array} \right.$$

Dicho análisis proporciona al mismo tiempo un resultado de convergencia de las aproximaciones numéricas construidas por el Método de Elementos Finitos, usando una formulación variacional mixta. Al contrario que con el argumento directo usado por Lions-Temam-Wang en [34], ahora no se impone la existencia de una profundidad mínima o talud vertical. Además, se introduce una condición de estabilidad de tipo inf-sup en espacios L^r con peso para la presión superficial que permite estimar la presión en dichos espacios. En concreto, la condición es la siguiente: *Existe una constante $\beta > 0$ tal que:*

$$\|q_s\|_{L^r_{h,0}(S)} \leq \beta \sup_{\mathbf{v} \in W_0^{1,r'}(\Omega)} \frac{(q_s, \nabla \cdot \langle \mathbf{v} \rangle)_S}{\|\mathbf{v}\|_{W^{1,r'}(\Omega)}}, \quad \forall q_s \in L^r_{h,0}(S),$$

donde S es la superficie del dominio, $L^r_h(S)$ es el espacio de las (clases de) funciones $q_s : S \rightarrow \mathbb{R}$ medibles, tales que $\int_S h(\mathbf{x}) |q_s(\mathbf{x})|^r dx < +\infty$ y $L^r_{h,0}(S) = L^r_h(S) / \mathbb{R}$.

El Teorema que demuestran T. Chacón y F. Guillén proporciona la existencia de solución $(\mathbf{u}, p_s) \in H_b^1(\Omega)^2 \times L^{3/2}_{h,0}(S)$.

La idea general para la construcción de espacios de elementos finitos en velocidad-presión que verifiquen la condición inf-sup anterior es la siguiente: *Dados un par de espacios de elementos finitos de velocidad-presión (Y_h, N_h) , que satisfacen la condición inf-sup discreta 3D en todo el dominio Ω y en norma L^r , retenemos las componentes horizontales de las velocidades de Y_h para construir el nuevo espacio de velocidades X_h , y las presiones que no dependen de z para construir el nuevo espacio de presiones:*

$$M_{sh} = \{q_h \in N_h : \partial_z q_h = 0 \text{ c. p. d.}\}.$$

En dicho proceso se reducen los grados de libertad (respecto a Navier-Stokes) para resolver el problema. La componente vertical de la velocidad se obtendrá a partir de las componentes horizontales (recordemos que se trata de una variable de diagnóstico).

II.6 Regularidad fuerte del problema lineal estacionario

El problema lineal de Ecuaciones Primitivas resulta de eliminar el término no lineal de convección. La presencia de dicho término en las ecuaciones de Navier-Stokes dificulta tanto la existencia de solución global para datos cualesquiera como la unicidad de solución. En el caso de las Ecuaciones Primitivas sus efectos son aún peores, ya que la velocidad vertical w es menos regular (si observamos su expresión como variable de pronóstico es tan regular como la

divergencia horizontal de las componentes horizontales de la velocidad), lo que hace el término de convección vertical, $w\partial_z\mathbf{v}$, sea menos regular. En consecuencia, la eliminación del término de convección hace que el mayor problema de regularidad que aparece en el estudio de dichas ecuaciones desaparezca.

Sin embargo, debemos enfrentarnos a otro tipo de dificultades. En primer lugar, el problema no se enmarca dentro de la teoría “clásica” del problema de Stokes, debido a la hipótesis de presión hidrostática; y en segundo lugar, el dominio no es de clase C^1 , luego aparecen problemas de regularidad del dominio. Esta falta de regularidad del dominio es importante cuando condiciones de frontera de tipo Dirichlet coinciden con condiciones de frontera de tipo Neumann en alguna “esquina” del dominio. En ese caso, para obtener regularidad para la velocidad de tipo H^2 en espacio (lo que llamamos regularidad fuerte) habrá que imponer que el ángulo de la esquina sea $\pi/2$.

Concretamente, los resultados de Ziane en dominios con talud lateral para el problema lineal estacionario de Ecuaciones Primitivas (también llamado **problema de Stokes hidrostático**) con condiciones de contorno de tipo (M_1) y (M_2) , [50, 51], para :

$$(M_1) \begin{cases} \partial_z\mathbf{v} = \varphi_1 & \text{sobre } \Gamma_s, \\ \mathbf{v} = 0 & \text{sobre } \Gamma_b \cup \Gamma_l, \end{cases}$$

$$(M_2) \begin{cases} \partial_z\mathbf{v} = \varphi_1 & \text{sobre } \Gamma_s, \\ \mathbf{v} = 0 & \text{sobre } \Gamma_l, \\ \partial_n\mathbf{v} = \varphi_2 & \text{sobre } \Gamma_b, \end{cases}$$

aparecen en el siguiente Teorema:

Teorema II.20 *Sea h la función de profundidad y $S \subset \mathbb{R}^{N-1}$ (N la dimensión del espacio) un abierto acotado suficientemente regular. Supongamos $h \in C^3(\bar{S})$ y $\partial S \in C^3$. En el caso de que supongamos condiciones de contorno de tipo (M_2) , imponemos la hipótesis adicional:*

$$\nabla h(\xi) = 0, \quad \forall \xi \text{ en un entorno de } \partial S. \quad (\text{II.17})$$

Sean $f \in L^2(\Omega)^{N-1}$, $\varphi \in (H_0^{1/2+\varepsilon}(S))^{N-1}$ y $\varphi_2 \in (H_0^{1/2+\varepsilon}(S))^{N-1}$, $0 < \varepsilon < 1/2$. Entonces, la única solución (\mathbf{v}, p) del problema de Stokes hidrostático estacionario pertenece a $(H^2(\Omega))^{N-1} \times H^1(\Omega)$.

Nota II.6.1 *La hipótesis (II.17) es una hipótesis de compatibilidad para las condiciones de contorno (de distinto tipo en (M_2)) provenientes de Γ_b en la coincidencia con Γ_l . En el caso de la coincidencia de Γ_s (ó S) con Γ_l , no es necesaria dicha hipótesis ya que la existencia de talud garantiza (II.17).*

II.7 Otros modelos en Oceanografía

II.7.1 El modelo de Ecuaciones Primitivas con viscosidad vertical PEV²s

El modelo de Ecuaciones Primitivas con viscosidad vertical, (PEV²s), fue tratado matemáticamente por primera vez por Lions-Temam-Wang, [33, 34], y consiste en sustituir la hipótesis de aproximación hidrostática (II.6) por la llamada **aproximación hidrostática con viscosidad vertical**:

$$\frac{1}{\rho_0}\partial_z p + \frac{\rho}{\rho_0}g - \mu\Delta_3 w - \nu\partial_{zz}^2 w = 0. \quad (\text{II.18})$$

Con este modelo se trata de enfatizar la importancia de la viscosidad, (aunque los términos de viscosidad son de menor orden que los otros dos). La principal motivación para introducir (II.18) es buscar una mejora en la regularidad de la solución del sistema de Ecuaciones Primitivas. En este sentido, Lions-Temam-Wang deducen la existencia de un tiempo $\tau_1 > 0$ (dependiente de la norma H^1 de los datos iniciales) tal que existe una única solución fuerte $E = (\mathbf{u}, \theta, S) = ((\mathbf{v}, w), \theta, S)$ de (PEV²s) tal que:

$$\begin{cases} \partial_t E \in L^2(0, \tau; L^2) \\ E \in L^2(0, \tau; H^2) \cap C([0, \tau_1]; H^1). \end{cases}$$

II.7.2 El modelo de término de compresión

En el artículo de T. Chacón-Rebollo, R. Lewandowski, E. Chacón-Vera [14], se considera una formulación equivalente a la aproximación hidrostática estacionaria que incluye la fuerza de Coriolis y un término adicional de compresión. Dicho término proviene de tener en cuenta la presión en la ecuación de estado para la densidad.

Concretamente, consideran que la densidad es una función lineal de la presión, de la forma:

$$\rho(P) = \rho(\pi_s + z\partial_z \hat{P}) = \rho(\pi_s) + z\partial_z P(\hat{\theta})\rho'(\tilde{P}),$$

donde $\pi_s = P(x, y, 0)$ es la presión en la superficie para $z = 0$, y $\hat{\theta}$ y \tilde{P} son valores intermedios. Una segunda aproximación (eliminando $z\partial_z P(\hat{\theta})\rho'(\tilde{P})$) conduce a la siguiente simplificación en la ecuación hidrostática:

$$\partial_z P = -\rho(\pi_s).$$

Luego $P = \pi_s + \int_z^0 \rho(\pi_s) d\xi$. Finalmente, una dependencia lineal de ρ respecto de π_s nos da una ley de la forma:

$$\rho(\pi_s) = \rho_0 + \gamma(\pi_s - \pi_s^0),$$

para un γ positivo y una presión superficial de referencia π_s^0 . De ese modo, el gradiente horizontal de presión ∇p_s que aparece habitualmente en las Ecuaciones Primitivas, se sustituye por:

$$(1 - \gamma z)\nabla \pi_s.$$

Bajo la hipótesis de existencia de una profundidad mínima (también llamada hipótesis de talud), y para una constante γ suficientemente pequeña ($\gamma \leq C$ donde C es una constante que sólo depende de los datos), en [14] se demuestra que existe una solución débil de dicho sistema. La demostración se basa en un argumento de aproximación interna por elementos finitos del problema linealizado, aplicando posteriormente un argumento de punto fijo.

También en [14], se obtiene la existencia de solución débil del problema lineal de evolución asociado, pero se deja el caso no lineal como un problema abierto.

II.7.3 El modelo de Ecuaciones Primitivas con superficie libre

La diferencia principal es la presencia de una variable adicional: la elevación de la superficie libre $\eta = \eta(t; x, y)$ desde el nivel $z = 0$. Entonces, si $h(x, y)$ es la profundidad del agua desde el nivel $z = 0$, $H(t; x, y) = h(x, y) + \eta(t; x, y)$ es la altura total de la columna de agua.

El modelo básico de Ecuaciones Primitivas con superficie libre parte del sistema:

Hallar (\mathbf{v}, w) y P tal que:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + w \partial_z \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla P = \alpha \mathbf{v}^\perp + \nu_h \Delta \mathbf{v} + \partial_z (\nu_v \partial_z \mathbf{v}) & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_z P = -\rho g, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} + \partial_z w = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

donde $(\mathbf{v}, w) = (\mathbf{v}(t; x, y, z), w(t; x, y, z))$ son las componentes de la velocidad, g es la aceleración de la gravedad, ρ la densidad (que supondremos constante), $\alpha = 2f \sin(l(y))$ donde f es el módulo de la velocidad angular de rotación de la Tierra y $l(y)$ la latitud, y ν_h, ν_v los coeficientes de viscosidad horizontal y vertical, respectivamente.

Suponiendo que la presión sobre la superficie libre es conocida (la presión atmosférica p_{atm}), entonces la presión hidrostática nos dice que $P = p_{atm} + \rho(\eta - z)$, luego el sistema anterior se puede reescribir como: hallar (\mathbf{v}, w, η) tales que:

$$(MSL) \begin{cases} \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + w \partial_z \mathbf{v} + g \nabla \eta = \frac{1}{\rho} \nabla p_{atm} + \alpha \mathbf{v}^\perp + \nu_h \Delta \mathbf{v} + \partial_z (\nu_v \partial_z \mathbf{v}) & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_z P = -\rho g, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} + \partial_z w = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega. \end{cases}$$

La ecuación de la superficie libre, η , se calcula integrando la ecuación de incompresibilidad en profundidad, y usando las condiciones cinemáticas en la superficie libre. Dichas condiciones se deducen imponiendo que la derivada total en cualquier punto de la superficie (descrito como $F(t; x, y, z) = 0$) con respecto al tiempo debe ser cero, es decir,

$$\frac{DF}{Dt}(t; x, y, z) = 0 = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F \Big|_{F(t; x, y, z) = 0} = 0.$$

Físicamente, esto significa que si nos movemos por una superficie F nos quedaremos en ella. De ese modo, las condiciones cinemáticas sobre la superficie del océano es:

$$w|_{\Gamma_s} = \partial_t \eta + (\mathbf{v} \cdot \nabla \eta)|_{\Gamma_s},$$

y sobre el fondo:

$$(u, v, w) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_b} = 0.$$

Entonces, integrando en altura la ecuación de incompresibilidad, obtenemos:

$$\partial_t \eta + \nabla \cdot \left(\int_{-h(x, y)}^{\eta(t; x, y)} \mathbf{v}(t; x, y, z) dz \right) = 0. \quad (\text{II.20})$$

Las condiciones de contorno en la superficie libre se especifican gracias a la tensión del viento (conocida), $\tau = (\tau_x, \tau_y)$:

$$\nu_v \partial_z \mathbf{v} = \tau \quad \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_s,$$

y las condiciones de contorno sobre el fondo vienen dadas especificando el tensor de esfuerzos sobre el fondo en una fórmula de Manning-Chezy:

$$\nu_v \partial_z \mathbf{v} = \gamma \mathbf{v} \quad \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_b,$$

donde $\gamma = \frac{g\sqrt{u^2 + v^2}}{C^2}$ y C es el coeficiente de fricción de Chezy.

Nota II.7.1 Notemos que la condición de Manning-Chezy es del mismo tipo que la considerada para el modelo 2-dimensional que estudiaremos en el Capítulo 5 de esta tesis.

Desde un punto de vista numérico, el sistema (MSL) ha sido tratado por varios autores, por ejemplo en el código HAMSOM [1] y en los modelos de Casulli-Cattani [13].

II.7.4 Navier-Stokes en dominios delgados

Si consideramos que el océano y la atmósfera son dominios poco profundos (“shallow water”), y miramos las Ecuaciones Primitivas como un modelo límite de las ecuaciones de Navier-Stokes en dichos dominios, parece lógico entonces preguntarse sobre el problema general de Navier-Stokes en dominios delgados. Temam y Ziane, [47, 48], estudian este modelo “para dar una justificación matemática a algunas de las aproximaciones usadas para obtener las Ecuaciones Primitivas de la atmósfera y el océano”.

Los dominios estudiados son rectangulares, $\Omega_\varepsilon = S \times (0, \varepsilon)$, (simplificación del dominio ocupado por el océano, ver [47]) o esféricos, $\Omega_\varepsilon = S^a \times (a, a + \varepsilon)$, (lo que modelizaría la corona “atmosférica” que rodea la Tierra, ver [48]).

Usando las características de dominios delgados, se mejoran los resultados de regularidad fuerte para el sistema de Navier-Stokes. Si consideramos las condiciones de contorno $u \cdot \vec{n} = 0$, $rot\ u \times \vec{n} = 0$ sobre $\partial\Omega_\varepsilon$, y los espacios:

$$\mathbf{H}_\varepsilon = \{u \in L^2(\Omega_\varepsilon)^2; div\ u = 0, u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega_\varepsilon} = 0\},$$

$$\mathbf{V}_\varepsilon = \{u \in H^1(\Omega_\varepsilon)^2 \cap \mathbf{H}_\varepsilon; u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega_\varepsilon} = 0\}$$

y

$$D(A_\varepsilon) = \{u \in H^2(\Omega_\varepsilon)^2 \cap \mathbf{V}_\varepsilon; rot\ u \times \vec{n}|_{\partial\Omega_\varepsilon} = 0, u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega_\varepsilon} = 0\},$$

el resultado principal para dominios esféricos es el siguiente:

Teorema II.21 *Sea R_0 una función que verifica:*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^q R_0(\varepsilon) = 0 \quad \text{con } 0 < q < 1/2. \quad (\text{II.21})$$

Entonces, existe $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\nu, a, q, R_0)$ tal que si $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ y si $u_0^\varepsilon \in \mathbf{V}_\varepsilon$ y $f^\varepsilon \in \mathbf{H}_\varepsilon$ satisfacen:

$$\|A_\varepsilon^{1/2} u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|f\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq R_0^2(\varepsilon), \quad (\text{II.22})$$

donde A_ε denota el operador de Stokes definido como un isomorfismo de \mathbf{V}_ε en su dual \mathbf{V}'_ε por:

$$\langle A_\varepsilon u, v \rangle_{\mathbf{V}'_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon} = ((u, v))_\varepsilon \quad \forall v \in \mathbf{V}_\varepsilon,$$

y $((\cdot, \cdot))_\varepsilon$ es el producto escalar en \mathbf{V}_ε , entonces existe una solución fuerte u_ε de las ecuaciones de Navier-Stokes en $\Omega_\varepsilon \times (0, +\infty)$, es decir:

$$u_\varepsilon \in C^0([0, +\infty); \mathbf{V}_\varepsilon) \cap L^2(0, T; D(A_\varepsilon)), \quad \forall T > 0.$$

En el caso de dominios rectangulares, el resultado es el mismo, pero para distintos valores de q (siempre $q < 1$) según las condiciones de contorno consideradas.

Además, en el caso de dominios esféricos, los autores demuestran que unos promedios $M_\varepsilon u^\varepsilon$ en las direcciones radiales de las soluciones 3-dimensionales de Navier-Stokes en Ω_ε , convergen a la solución de las ecuaciones 2-dimensionales de Navier-Stokes sobre la esfera S^a .

Basándose en las técnicas de Temam y Ziane, [47, 48], que consideran dominios delgados, $\varepsilon = \bar{h}/a$, donde a es el radio de la Tierra y \bar{h} la profundidad máxima del océano ($0 \leq \underline{h} \leq h \leq \bar{h}$), Hu, Temam y Ziane demuestran el siguiente resultado para modelos de Ecuaciones Primitivas, [46, 27]:

Teorema II.22 *Existe un ε_0 y, para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, existe una única solución u para las Ecuaciones Primitivas (EP) del océano con:*

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0, T; H^1) \cap L^2(0, T; H^2), & \forall T > 0 \\ p_s \in L^2(0, T; L^2) \end{cases}$$

Nota II.7.2 *La constante ε_0 se puede calcular en términos de constantes de Sobolev. Pero éstas son difíciles de determinar. Por tanto, resulta difícil comprobar cuando $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.*

Nota II.7.3 *El resultado precedente (según Temam) está muy cerca de la justificación de que el problema de Ecuaciones Primitivas está bien planteado.*

II.8 Aportaciones originales de la Parte II

A la vista de los resultados que se acaban de recordar, desde el punto de vista matemático queda un interesante problema abierto: conocer si el problema de Ecuaciones Primitivas está bien planteado. En este sentido, hemos orientado este trabajo para obtener regularidad y unicidad de las Ecuaciones Primitivas.

Los dos capítulos de esta segunda parte están dedicados a dar una respuesta a la pregunta sobre regularidad y unicidad de solución de las Ecuaciones Primitivas del Océano con las condiciones de contorno planteadas en [34] y [2], es decir:

$$\begin{cases} \nu_v \partial_z \mathbf{v} = \tau & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_s, \\ \mathbf{v} = \mathbf{0} & \text{sobre } (0, T) \times (\Gamma_b \cup \Gamma_l). \end{cases}$$

Concretamente, en el Capítulo 2 nos dedicamos al estudio de la regularidad fuerte y unicidad del problema 2D. Por solución fuerte entendemos, esencialmente, una solución débil o distribucional del sistema con la regularidad siguiente:

$$u \in L^\infty(0, T; H^1) \cap L^2(0, T; H^2), \quad \partial_t u \in L^2(0, t; L^2).$$

Para ello, partimos del problema estacionario lineal (llamado problema de Stokes hidrostático estacionario), cuya regularidad fue estudiada por M. Ziane en [50, 51]. Utilizando que una solución \vec{u} del problema de Stokes hidrostático de evolución en cada instante t verifica las estimaciones del caso estacionario, en primer lugar obtenemos el resultado de regularidad fuerte global para dicha solución u .

En segundo lugar, nos planteamos la regularidad fuerte del problema de Ecuaciones Primitivas 2D. Levantamos primero las condiciones de contorno usando una solución e tal que en cada instante $e(t)$ es solución del problema de Stokes hidrostático estacionario. Utilizando un argumento de tipo Galerkin, obtenemos un resultado de existencia de solución global fuerte bajo la hipótesis de que los datos son pequeños.

Para el caso de existencia de solución local fuerte para datos cualesquiera, no podemos utilizar el razonamiento de Galerkin anterior. Recurrimos entonces a un argumento de punto fijo que nos garantiza la existencia de solución fuerte para tiempos pequeños (solución fuerte local en tiempo), pero bajo la hipótesis adicional de profundidad pequeña. Esta última hipótesis no es demasiado restrictiva, ya que es una característica de los dominios estudiados.

Finalmente, usando el mismo tipo de razonamiento que en el libro de P. L. Lions [37], obtenemos unicidad de solución siempre que se garantice que exista al menos una solución u con regularidad

adicional a la regularidad débil, verificada en particular si u posee regularidad fuerte. Hemos llamado a dicha unicidad **unicidad débil/fuerte**.

Los resultados obtenidos en el Capítulo 2 aparecerán publicados en la revista *Jouyrnal of Non-linear Analysis: Serie A Theory and Methods*. Dichos resultados no son extrapolables al caso 2D, usando los mismos razonamientos.

En el Capítulo 3 introducimos un nuevo tipo de estimaciones, que hemos llamado **estimaciones anisótropas**, que nos permiten obtener el mismo tipo de resultados que en el Capítulo 2 para el caso 3D, y mejorar los ya existentes en el caso 2D. El lector puede preguntarse entonces el porqué de la presencia del Capítulo 2. La respuesta es que los resultados obtenidos en el Capítulo 2 son cronológicamente anteriores a los del Capítulo 3, y en su día presentaron resultados nuevos sobre los ya existentes hasta el momento para el problema de las Ecuaciones Primitivas 2D. Además, los resultados del Capítulo 3 se siguen basando en los resultados para el problema de Stokes hidrostático estacionario y de evolución presentados en el Capítulo 2.

Las estimaciones anisótropas permiten estimar separadamente la regularidad L^p en las direcciones horizontales y vertical. Así, $\vec{u} \in L_z^\infty L_x^2$ significa que $\sup_{z \in (-D_{max}, 0)} \|\vec{u}(\cdot, z)\|_{L^4(\omega_z)}$, donde ω_z es la sección horizontal del dominio en el que está el fluido a altura z , está acotada. La principal ventaja consiste en aprovechar mejor la anisotropía de la regularidad de la velocidad vertical, denotada por w o u_3 , que es la variable diagnóstico que hemos definido anteriormente. Concretamente, w y $\partial_z w$ poseen regularidad L^2 en espacio, pero no ocurre lo mismo para las derivadas horizontales de w . Por el contrario, la velocidad horizontal posee regularidad H^1 en espacio (en ese sentido, posee regularidad isotropa).

De nuevo con un razonamiento de tipo Galerkin, se obtiene existencia de solución fuerte global en tiempo para datos pequeños en los casos 2D y 3D. Por solución local, entendemos la misma del Capítulo 2, para \vec{u} en lugar de u , es decir:

$$\vec{u} \in L^\infty(0, T; (H^1)^2) \cap L^2(0, T; (H^2)^2), \quad \partial_t \vec{u} \in L^2(0, T; (L^2)^2).$$

El uso de las estimaciones anisótropas permite, además, estimar la dimensión de Hausdroff de los tiempos singulares en el caso 2-dimensional, de manera análoga al Capítulo 1.

Para el caso de regularidad fuerte local en tiempo, esta vez no usamos un argumento de punto fijo, sino que seguimos usando un argumento de tipo Galerkin. Esto nos permitirá, no sólo obtener dicha regularidad en el caso 3D, sino que mejorará la del caso 2D, ya que no necesitaremos suponer la hipótesis adicional de profundidad pequeña (ni en el caso 2D ni en el caso 3D) para concluir dicha regularidad local.

Usando las estimaciones anisótropas y siguiendo el mismo razonamiento del Capítulo 2, obtenemos también el resultado de regularidad débil/fuerte para el caso 3D. Para el caso 2D, se rebaja la regularidad adicional a la regularidad débil que se supone para obtener el resultado de unicidad débil/fuerte.

Por último, se demuestra la existencia y unicidad de solución fuerte del problema de Ecuaciones Primitivas estacionario, bajo hipótesis de pequeñez sobre los datos, y un resultado de convergencia (bajo determinadas condiciones sobre las fuerzas externas y la tensión del viento en superficie) de la solución del problema de Ecuaciones Primitivas de evolución hacia la solución del problema de Ecuaciones Primitivas estacionario en norma débil.

Los resultados correspondientes al Capítulo 3 aparecerán publicados en la revista *Differential and Integral Equations*.

En ambos Capítulos, aparece una Sección final en la que se presentan una serie de problemas abiertos que o bien han aparecido en el transcurso de la redacción de los resultados que aquí se presentan o bien a posteriori en relación con otros problemas de los que tenemos conocimientos.

Capítulo 2

El problema 2D. Estimaciones isótropas.

2.1 Introducción

Muchos fluidos geofísicos pueden ser modelados por las llamadas “Ecuaciones Primitivas” ([33], [34]). Este modelo se obtiene formalmente a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes, con viscosidad anisótropa (turbulenta), suponiendo dos simplificaciones importantes: la presión hidrostática (que depende linealmente de la profundidad) y la hipótesis de techo rígido (superficie del agua fija), ver [29], [41] y las referencias que allí aparecen. Por simplicidad, tomamos densidad constante y suponemos que los efectos debidos a la temperatura y la salinidad pueden desacoplarse de la dinámica del flujo. Obtenemos entonces un flujo 3-dimensional inducido por la velocidad del viento sobre la superficie y por las fuerzas centrípetas y de Coriolis. Cuando no consideramos la curvatura de la Tierra, podemos usar coordenadas cartesianas en lugar de coordenadas esféricas (ver Lions-Teman-Wang [34] para un modelo con coordenadas esféricas). En este caso, el dominio viene dado por

$$\Omega = \{(\vec{x}, z) \in \mathbb{R}^3; \vec{x} = (x, y) \in \omega, -D(\vec{x}) < z < 0\}, \quad (2.1)$$

donde $\omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es un dominio abierto y $D : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}_+$ es la función profundidad. Las diferentes fronteras de Ω (superficie, fondo y paredes laterales) son respectivamente: $\Gamma_s = \{(\vec{x}, 0); \vec{x} \in \omega\}$, $\Gamma_b = \{(\vec{x}, -D(\vec{x})); \vec{x} \in \omega\}$ y $\Gamma_l = \{(\vec{x}, z); \vec{x} \in \partial\omega, -D(\vec{x}) < z < 0\}$. Si incluimos, como es usual, los efectos de fuerzas centrípetas en el término de presión ([41]), el modelo 3-dimensional de Ecuaciones Primitivas es:

$$(EP) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla_H) \vec{u} + u_3 \partial_z \vec{u} - \nu_h \Delta_H \vec{u} - \nu_v \partial_{zz}^2 \vec{u} + \alpha \vec{u}^\perp + \nabla_H p_s = \vec{F} \quad \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \nabla_H \cdot \left(\int_{-D(\vec{x})}^0 \vec{u}(t; \vec{x}, z) dz \right) = 0 \quad \text{en } (0, T) \times \omega, \\ \vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0 \quad \text{en } \Omega, \\ \nu_v \partial_z \vec{u}|_{\Gamma_s} = \vec{\tau}, \quad \vec{u}|_{\Gamma_b \cup \Gamma_l} = \vec{0} \quad \text{en } (0, T). \end{array} \right.$$

Aquí, denotamos $\vec{x} = (x, y)$, $\nabla_H = (\partial_x, \partial_y)$ y $\Delta_H = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$. Las incógnitas son las componentes horizontales del campo de velocidades $\vec{u} = (u_1, u_2) : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ y la presión superficial $p_s : (0, T) \times \omega \rightarrow \mathbb{R}$ (de hecho, p_s es una función potencial, ya que incluye los efectos

de fuerzas centrípetas y de gravedad, ver [41]), mientras que la componente vertical del campo de velocidades viene dada por la expresión:

$$u_3(t; \vec{x}, z) = - \int_{-D(\vec{x})}^z \nabla_H \cdot \vec{u}(t; \vec{x}, s) ds, \quad t \in (0, T), \quad (\vec{x}, z) \in \Omega. \quad (2.2)$$

Además, ν_h y $\nu_v > 0$ son constantes positivas que representan los coeficientes de viscosidad (turbulenta) horizontal y vertical respectivamente, $\vec{F} : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ es el campo de fuerzas externas horizontales (que depende de la temperatura y salinidad, por ejemplo) y $\vec{\tau} : (0, T) \times \Gamma_s \rightarrow \mathbb{R}^2$ representa la fuerza horizontal producida por el viento sobre la superficie. Finalmente, el término $\alpha \vec{u}^\perp = \alpha(-u_2, u_1)$ modela los efectos de Coriolis. Respecto a las condiciones de contorno, se supone condición de adherencia sobre el fondo, y se permite deslizamiento sobre las paredes laterales.

Nota 2.1.1 *Por simplicidad en los cálculos, a partir de este momento, omitiremos el término correspondiente a los efectos de Coriolis. La inclusión de dicho término no origina dificultades esenciales en la obtención de los resultados que presentamos en esta Tesis. Recordemos, además, que dicho término sólo tiene sentido en el caso 3D.*

2.2 Definiciones y resultados principales

Para dar una formulación variacional del problema (EP), definimos los siguientes espacios de funciones:

$$C_{b,l}^\infty(\Omega) = \{\vec{\varphi} \in C^\infty(\Omega)^2; \text{sop}(\vec{\varphi}) \text{ es un conjunto compacto } \subseteq \overline{\Omega} \setminus (\Gamma_b \cup \Gamma_l)\},$$

$$H_{b,l}^1(\Omega) = \overline{C_{b,l}^\infty(\Omega)}^{H^1} = \{\vec{v} \in H^1(\Omega)^2; \vec{v} = 0 \text{ sobre } \Gamma_b \cup \Gamma_l\},$$

$$H_{b,l}^{-1}(\Omega) = \text{dual de } H_{b,l}^1(\Omega),$$

$$\mathcal{V} = \{\vec{\varphi} \in C_{b,l}^\infty(\Omega)^2; \nabla_H \cdot \langle \vec{\varphi} \rangle = 0 \text{ en } \omega\}, \quad \text{donde } \langle \vec{\varphi} \rangle(\vec{x}) = \int_{-D(\vec{x})}^0 \vec{\varphi}(\vec{x}, z) dz,$$

$$H = \overline{\mathcal{V}}^{L^2} = \{\vec{v} \in L^2(\Omega)^2; \nabla_H \cdot \langle \vec{v} \rangle = 0 \text{ en } \omega, \langle \vec{v} \rangle \cdot \vec{n}|_{\partial\omega} = 0\},$$

$$V = \overline{\mathcal{V}}^{H^1} = \{\vec{v} \in H^1(\Omega)^2; \nabla_H \cdot \langle \vec{v} \rangle = 0 \text{ en } \omega, \vec{v}|_{\Gamma_b \cup \Gamma_l} = \vec{0}\}.$$

Definición 2.1 Sean $\vec{u}_0 \in H$, $\vec{F} \in L^2(0, T; H_{b,l}^{-1}(\Omega)^2)$ y $\vec{\tau} \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_s)^2)$. Decimos que $\vec{u} : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una **solución débil de (EP) en $(0, T)$** si

$$\vec{u} \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V),$$

verifica la formulación variacional:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega \left(-\vec{u} \cdot (\partial_t \vec{\varphi} + (\vec{u} \cdot \nabla_H) \vec{\varphi} + u_3 \partial_z \vec{\varphi}) + \nu_h \nabla_H \vec{u} : \nabla_H \vec{\varphi} + \nu_v \partial_z \vec{u} \cdot \partial_z \vec{\varphi} + \alpha \vec{u}^\perp \cdot \vec{\varphi} \right) d\Omega dt \\ & = \int_\Omega \vec{u}_0 \cdot \vec{\varphi}(0) d\Omega + \int_0^T \langle \vec{F}, \vec{\varphi} \rangle_\Omega dt + \int_0^T \langle \vec{\tau}, \vec{\varphi} \rangle_{\Gamma_s} dt, \quad \forall \vec{\varphi} \in C^1([0, T]; \mathcal{V}) \text{ tal que } \vec{\varphi}(T) = \vec{0}, \end{aligned}$$

y, además, \vec{u} satisface la desigualdad de energía:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\vec{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \left(\nu_h \|\nabla_H \vec{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu_v \|\partial_z \vec{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \\ & \leq \frac{1}{2} \|\vec{u}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \langle \vec{F}, \vec{u} \rangle_{\Omega} ds + \int_0^t \langle \vec{\tau}, \vec{u} \rangle_{\Gamma_s} ds \quad \text{c.p.d. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (2.3)$$

En el caso $T = +\infty$, decimos que \vec{u} es una solución débil de (EP) en $(0, +\infty)$ si \vec{u} es una solución débil de (EP) en $(0, T)$, $\forall T < +\infty$.

Aquí, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega}$ denota la dualidad entre $H_{b,l}^{-1}(\Omega)$ y $H_{b,l}^1(\Omega)$, mientras que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_s}$ denota la dualidad entre $H^{-1/2}(\Gamma_s)$ y $H^{1/2}(\Gamma_s)$.

Nota 2.2.1 A partir de ahora, denotaremos la norma en V de la forma $\|\varphi\|_V^2 = \nu_h \|\nabla_H \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu_v \|\partial_z \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2$. La norma en $H_{b,l}^1(\Omega)$ se denotará por $\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|\nabla_H \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_z \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2$.

Definición 2.2 Consideramos $\vec{u}_0 \in V$, $\vec{F} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^2)$, $\vec{\tau} \in L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma_s)^2)$ y $\partial_t \vec{\tau} \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_s)^2)$. Si \vec{u} una solución débil de (EP) en $(0, T)$, decimos que \vec{u} es una **solución fuerte** si verifica la siguiente regularidad adicional:

$$\vec{u} \in L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)^2 \cap V), \quad \partial_t \vec{u} \in L^2(0, T; H).$$

La existencia de solución débil de (EP) es bien conocida, ver Lewandovski [29] y Lions-Teman-Wang [34], en dominios con paredes laterales (que también denominaremos **talud**, es decir, $D \geq D_{min} > 0$ en $\bar{\omega}$). En dichos trabajos, se usa un método de compacidad para obtener la velocidad \vec{u} en un espacio con la restricción $\nabla_H \cdot \langle \vec{u} \rangle = 0$. Más tarde, se recupera la presión a través de un lema de De Rham específico para los espacios de funciones definidas sobre la superficie.

En dominios sin talud, la existencia de solución débil de obtiene como consecuencia de un proceso de paso al límite aplicado a las ecuaciones de Navier-Stokes con viscosidad anisótropa cuando el cociente entre la profundidad y el diámetro horizontal del dominio tiende a cero, ver Besson-Laydi [4] para el caso estacionario y Azerad-Guillén [2] para el caso de evolución. Finalmente, la existencia de solución débil en dominios sin talud se puede también probar por argumentos de aproximación interna: aproximando una formulación variacional mixta (velocidad-presión) del problema estacionario por un método de Elementos Finitos conforme, como en Chacón-Guillén [15] y probando que un esquema semi-discreto en tiempo del problema de evolución converge hacia la solución continua del problema (EP) como en Guillén-Redondo [22, 23].

Sin embargo, hasta donde sabemos, no hay resultados de existencia de solución fuerte del problema (EP), excepto en el caso lineal estacionario [50]. Uno de los principales problemas para su estudio es el tratamiento de las condiciones de contorno; sobre la superficie tenemos una condición de Neumann no homogénea, mientras que en el fondo y paredes laterales tenemos condición de Dirichlet homogénea. Por otra parte, la unicidad de solución del problema (EP) es también un problema abierto, incluso suponiendo la existencia de soluciones fuertes.

2.2.1 El problema 2D

En este capítulo, vamos a considerar principalmente el problema 2-dimensional (con una sola dimensión horizontal). En este caso, la fuerza de Coriolis no tiene sentido. El modelo que estudiamos es el siguiente:

$$(EP_2) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + u \partial_x u + u_3 \partial_z u - \nu_h \partial_{xx}^2 u - \nu_v \partial_{zz}^2 u + \partial_x p_s = F \quad \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_x \langle u \rangle = 0 \quad \text{en } (0, T) \times \omega, \\ u|_{t=0} = u_0 \quad \text{en } \Omega, \\ \nu_v \partial_z u|_{\Gamma_s} = \tau, \quad u|_{\Gamma_b \cup \Gamma_l} = 0 \quad \text{en } (0, T). \end{array} \right.$$

Entonces, todas las incógnitas son escalares: la componente horizontal de la velocidad $u : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y la presión superficial $p_s : (0, T) \times \omega \rightarrow \mathbb{R}$. La componente vertical de la velocidad se escribe entonces como $u_3(t; x, z) = - \int_{-D(x)}^z \partial_x u(t; x, s) ds$. Una diferencia importante respecto al caso 3-dimensional es que ahora $\omega \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo, lo que implica una caracterización más simple de los espacios de funciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{\varphi \in C_{b,l}^\infty(\Omega); \langle \varphi \rangle = 0 \text{ en } \omega\}, \\ H &= \{v \in L^2(\Omega); \langle v \rangle = 0 \text{ en } \omega\}, \\ V &= \{v \in H^1(\Omega); \langle v \rangle = 0 \text{ en } \omega, v|_{\Gamma_b \cup \Gamma_l} = 0\}. \end{aligned}$$

Finalmente, las definiciones de solución débil y fuerte son similares al caso 3D (cambiando la notación vectorial por notación escalar para u y x , y omitiendo el término de Coriolis).

Nota 2.2.2 *En el caso de paredes laterales no sólidas (de mar abierto), habría que cambiar $u|_{\Gamma_l} = 0$ por $u|_{\Gamma_l} = u_l$ con u_l dada. En este caso, se tiene $\langle u \rangle = \langle u_l \rangle$ en ω . De todas formas, un cambio de variables habitual para hacer un levantamiento de estas condiciones de contorno no homogéneas, nos llevaría a un problema similar (en dificultad) a (EP_2) .*

2.2.2 Resultados principales

En este capítulo, obtendremos los siguientes resultados principales, todos en el caso 2-dimensional y en dominios con talud.

Teorema 2.3 (Solución global fuerte para datos pequeños) *Sea $\omega \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $D \in C^3(\bar{\omega})$ tal que $D \geq D_{\min} > 0$ en $\bar{\omega}$. Supongamos que $u_0 \in V$, $F \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ y $\tau \in L^2(0, T; H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s))$, para algún $\varepsilon > 0$, con $\partial_t \tau \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_s))$. Si se verifica la siguiente “condición de pequeñez”: $\forall t \in [0, T]$,*

$$(H) \left\{ \begin{array}{l} \exp\left(-\frac{1}{4K_2}t + \int_0^t a(s)ds\right) \left\{ 2 \left(\|u_0\|_V^2 + K_1 \|\tau(0)\|_{H^{-1/2}(\Gamma_s)}^2 \right) \right. \\ \left. + \int_0^t \exp\left(\frac{1}{4K_2}s - \int_0^s a(\sigma)d\sigma\right) b(s)ds \right\} < M^2, \end{array} \right.$$

donde M es una constante positiva suficientemente pequeña (ver Lema 2.16), K_1 y K_2 son las constantes que aparecen en (2.11) y (2.12) respectivamente, y $a = a(t)$, $b = b(t)$ son funciones de $L^1(0, T)$ que dependen de los datos τ y F (ver (2.30) y (2.31)), entonces existe una única solución fuerte (u, p_s) de (EP_2) en $(0, T)$ (p_s es única salvo una función aditiva de t).

Corolario 2.4 (Comportamiento asintótico cuando $t \uparrow +\infty$) Sea $\omega \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $D \in C^3(\bar{\omega})$ tal que $D \geq D_{\min} > 0$ en $\bar{\omega}$. Supongamos que $u_0 \in V$, $F \in L^2(0, +\infty; L^2(\Omega))$ y $\tau \in L^2(0, +\infty; H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s))$, para algún $\varepsilon > 0$, con $\partial_t \tau \in L^2(0, +\infty; H^{-1/2}(\Gamma_s))$. Si suponemos que se verifica la “condición de pequeñez” (H) para todo $t \in [0, +\infty)$, entonces existe una única solución fuerte $u \in L^2(0, +\infty; H^2(\Omega) \cap V) \cap L^\infty(0, +\infty; V)$, $\partial_t u \in L^2(0, +\infty; H)$. Además, si

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{4K_2}t\right) \left\{ \|\tau(t)\|_{H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)}^2 + \|\partial_t \tau(t)\|_{H^{-1/2}(\Gamma_s)}^2 + \|F(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} dt < +\infty, \quad (2.4)$$

entonces existen dos constantes $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2 > 0$ tales que:

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \exp\left(-\frac{1}{4K_2}t\right) \tilde{K}_1 \left(2\|u_0\|_V^2 + K_1\|\tau(0)\|_{H^{-1/2}(\Gamma_s)}^2 + \tilde{K}_2\right) \quad \forall t \geq 0, \quad (2.5)$$

(es decir, la solución tiende a cero exponencialmente en la norma de $H^1(\Omega)$, cuando t aumenta).

Teorema 2.5 (Solución local fuerte para profundidad pequeña) Bajo las hipótesis del Teorema 2.3, cambiando la restricción (H) por una profundidad máxima $D_{\max} = \max_{\bar{\omega}} D$ suficientemente pequeña, entonces existe un tiempo $T_* \in (0, T]$ y una única solución fuerte (u, p_s) de (EP_2) en $(0, T_*)$.

Teorema 2.6 (Unicidad de solución débil/fuerte.) Sea u una solución débil de (EP_2) en $(0, T)$. Si existe otra solución débil \bar{u} de (EP_2) en $(0, T)$, tal que verifica la regularidad adicional:

$$\partial_z \bar{u} \in L^4(0, T; L^4(\Omega)), \quad (2.6)$$

entonces ambas soluciones coinciden en $[0, T)$.

Nota 2.2.3 Los argumentos que se utilizan para probar todos estos resultados principales, no son extensibles al caso 3D. Por otra parte, la regularidad adicional (2.6) que implica la unicidad es verificada por cualquier solución fuerte de (EP_2) . Sin embargo, para aplicar el argumento de unicidad del Teorema 2.6 al caso 3D, es necesaria una regularidad adicional (ver Nota 2.8.1) que no es verificada por las soluciones fuertes.

Para llevar a cabo el estudio sobre la existencia de soluciones fuertes, será conveniente descomponer el problema (EP) en dos subproblemas: uno lineal (L) con condiciones de contorno no homogéneas sobre la superficie, y un problema no lineal (NL) con condiciones de contorno homogéneas.

Este capítulo está organizado de la siguiente forma:

En la Sección 2.3, probamos algunas desigualdades técnicas que usaremos posteriormente.

En la Sección 2.4, usando los resultados conocidos, ver [50], sobre la solución fuerte del problema lineal estacionario (L_{st}) , deducimos algunas propiedades del operador diferencial asociado.

Dichas propiedades se aplicarán en la Sección 2.5 para obtener existencia y unicidad de solución fuerte del problema lineal evolutivo (L). Todos estos resultados son válidos en dimensión 2 y 3.

El estudio del problema no lineal (NL) (por un método de Galerkin) se hace en la Sección 2.6, donde se concluyen las demostraciones del Teorema 2.3 y el Corolario 2.4.

En la Sección 2.7, presentamos la demostración del Teorema 2.5, basada en un argumento de punto fijo.

Finalmente, en la Sección 2.8 probamos la unicidad de solución suponiendo que existe una solución fuerte (Teorema 2.6).

2.3 Algunos resultados técnicos

Veamos algunos lemas técnicos que usaremos varias veces en este capítulo:

Lema 2.7 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ($N = 2$ o 3) el dominio considerado en este capítulo (definido por (2.1)). Entonces, para toda función $\vec{v} \in W^{1,p}(\Omega)^{N-1}$ ($p > 1$), si se define v_3 como $v_3(\vec{x}, z) = -\int_{-D(\vec{x})}^z \nabla_H \cdot \vec{v}(\vec{x}, s) ds$, tenemos:

$$\|v_3\|_{L^p(\Omega)} \leq D_{max} \|\nabla_H \cdot \vec{v}\|_{L^p(\Omega)}$$

Demostración: Es una consecuencia del Teorema de Fubini:

$$\begin{aligned} \|v_3\|_{L^p(\Omega)}^p &= \int_{\Omega} \left| \int_{-D(\vec{x})}^z \nabla_H \cdot \vec{v}(\vec{x}, s) ds \right|^p d\Omega \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\int_{-D(\vec{x})}^z |\nabla_H \cdot \vec{v}(\vec{x}, s)|^p ds \right) (z + D(\vec{x}))^{p/p'} d\Omega \\ &= \int_{\omega} \int_{-D(\vec{x})}^0 |\nabla_H \cdot \vec{v}(\vec{x}, s)|^p \left(\int_s^0 (z + D(\vec{x}))^{p/p'} dz \right) d\vec{x} ds \\ &\leq \frac{D_{max}^p}{p} \int_{\omega} \int_{-D(\vec{x})}^0 |\nabla_H \cdot \vec{v}(\vec{x}, z)|^p d\vec{x} dz = \frac{D_{max}^p}{p} \|\nabla_H \cdot \vec{v}\|_{L^p(\Omega)}^p \end{aligned}$$

■

Lema 2.8 (Desigualdades de interpolación) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio Lipschitz-continuo. Se verifica la siguiente desigualdad:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,N}(\Omega)}^{1-q/p} \|u\|_{L^q(\Omega)}^{q/p}, \quad \forall u \in W^{1,N}(\Omega), \quad (2.7)$$

donde $N \leq q \leq p < +\infty$, para alguna constante $C = C(\Omega)$.

Demostración: Está tomada del artículo de Nirenberg [40], donde se prueba el mismo resultado para el caso $\Omega = \mathbb{R}^N$. Aquí, adaptamos la prueba al caso del dominio Lipschitz-continuo Ω . Para ello, pasamos las desigualdades consideradas al caso de \mathbb{R}^N usando un operador de prolongación, [21]:

$$E : W^{1,N}(\Omega) \longrightarrow W^{1,N}(\mathbb{R}^N),$$

que verifica que $Eu|_{\Omega} = u$ y $\|Eu\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,N}(\Omega)}$, $\forall u \in W^{1,N}(\Omega)$, para alguna constante $C = C(\Omega) > 0$ (y también $\|Eu\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{L^q(\Omega)}$). El resultado de Nirenberg dice

$$\|Eu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|Eu\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}^{1-q/p}\|Eu\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{q/p},$$

por tanto, llegamos fácilmente a (2.7). ■

El Lema anterior y la desigualdad de Poincaré nos permiten deducir el siguiente:

Corolario 2.9 *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ el dominio considerado en este capítulo (ver (2.1)). Se verifica la siguiente desigualdad:*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^N(\Omega)}^{1-q/p}\|u\|_{L^q(\Omega)}^{q/p} \quad \forall u \in W_{b,l}^{1,N}(\Omega), \quad (2.8)$$

donde $N \leq q \leq p < +\infty$, para alguna constante $C = C(\Omega) > 0$.

Nota 2.3.1 *La principal ventaja del caso 2D es considerar (2.7) y (2.8) para $N = 2$. En lo que sigue, llamaremos **desigualdad de Gagliardo-Nirenberg** a (2.7) o (2.8) para $N = 2$, $p = 4$ y $q = 2$, es decir,*

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}^{1/2}\|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \quad \forall u \in H^1(\Omega), \quad (2.9)$$

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}\|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \quad \forall u \in H_{b,l}^1(\Omega). \quad (2.10)$$

Nota 2.3.2 *Haciendo una prueba directa, podemos ver que (2.10) se puede obtener con C una constante independiente de Ω , usando las identidades:*

$$\begin{aligned} u^2(x, z) &= -2 \int_{-D(x)}^z (u \partial_z u)(x, s) ds \quad y \\ u^2(x, z) &= 2 \int_{x_0}^x (u \partial_x u)(r, z) dr, \quad \text{para } x_0 \text{ tal que } (x_0, z) \in \Gamma_b \cup \Gamma_l. \end{aligned}$$

2.4 El caso estacionario lineal.

En esta Sección, veremos algunos resultados sobre el sistema estacionario lineal, que también llamaremos **sistema de Stokes hidrostático**:

$$(L_{st}) \begin{cases} -\nu_h \Delta_H \vec{u} - \nu_v \partial_{zz}^2 \vec{u} + \nabla_H p_s = \vec{g} & \text{in } \Omega, \\ \nabla_H \cdot \langle \vec{u} \rangle = 0 & \text{en } \omega, \\ \nu_v \partial_z \vec{u} = \vec{a} & \text{sobre } \Gamma_s, \\ \vec{u} = \vec{0} & \text{sobre } \Gamma_b \cup \Gamma_l. \end{cases}$$

2.4.1 Resultados conocidos de existencia y unicidad

Lema 2.10 (Solución débil de (L_{st})) *Sea $\omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d = 1$ o 2) y sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ (definido como en (2.1)), un dominio Lipschitz-continuo. Si $\vec{g} \in H_{b,l}^{-1}(\Omega)^d$ y $\vec{a} \in H^{-1/2}(\Gamma_s)^d$, entonces el problema (L_{st}) tiene una única solución $\vec{u} \in H^1(\Omega)^d$. Además, hay dependencia continua de la solución respecto de los datos, es decir, existe una constante $K_1 = K_1(\Omega, \nu_h, \nu_v) > 0$ tal que:*

$$\|\vec{u}\|_V^2 \leq K_1 \left\{ \|\vec{a}\|_{H^{-1/2}(\Gamma_s)}^2 + \|\vec{g}\|_{H_{b,l}^{-1}(\Omega)}^2 \right\}. \quad (2.11)$$

En [4], [15] y [29], hay diferentes pruebas de este resultado (incluso en el caso no lineal).

Lema 2.11 (Solución fuerte de (L_{st})) Sea $\omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d = 1$ o 2) un dominio C^3 y $D \in C^3(\bar{\omega})$ con $D \geq D_{min} > 0$ en $\bar{\omega}$. Si $\vec{g} \in L^2(\Omega)^d$ y $\vec{a} \in H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)^d$, para algún $\varepsilon > 0$, entonces la única solución \vec{u} del problema (L_{st}) pertenece a $H^2(\Omega)^d \cap V$. Además, hay dependencia continua de la solución respecto de los datos, es decir, existe una constante $K_2 = K_2(\Omega, \nu_h, \nu_v) > 0$ tal que:

$$\|\vec{u}\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq K_2 \left\{ \|\vec{a}\|_{H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)}^2 + \|\vec{g}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}. \quad (2.12)$$

Ver [50] para la prueba de la regularidad fuerte. La dependencia continua se puede deducir siguiendo la construcción de los problemas auxiliares hecha por M. Ziane en [50].

2.4.2 El operador de Stokes hidrostático

Definimos A , que llamaremos **operador de Stokes hidrostático**, como el operador de Stokes asociado a condiciones de contorno homogéneas, Neumann sobre la superficie y Dirichlet sobre el fondo y las paredes laterales, es decir, $A : V \rightarrow V'$ tal que:

$$\langle A\vec{u}, \vec{v} \rangle_{V', V} = \int_{\Omega} (\nu_h \nabla_H \vec{u} : \nabla_H \vec{v} + \nu_v \partial_z \vec{u} \cdot \partial_z \vec{v}) d\Omega \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V. \quad (2.13)$$

Entonces, si denotamos $\vec{g} = A\vec{u} \in V'$, del Lema 2.10, deducimos que \vec{u} es la única solución débil del problema de Stokes hidrostático (L_{st}) , con $\vec{a} = \vec{0}$. Además, teniendo en cuenta el Lema 2.11, A es un isomorfismo autoadjunto de $H^2(\Omega)^2 \cap V$ en H . En particular, si $A\vec{u} = \vec{g}$ con $\vec{g} \in H$, \vec{u} se caracteriza como la única solución fuerte del problema (L_{st}) , con $\vec{a} = \vec{0}$. Finalmente, el dominio de A , definido por

$$D(A) = \{\vec{u}; \vec{u} \in V \text{ y } A\vec{u} \in H\}.$$

se puede caracterizar como sigue:

Lema 2.12 Sea $\omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d = 1$ o 2) un dominio C^3 y $D \in C^3(\bar{\omega})$ con $D \geq D_{min} > 0$ en $\bar{\omega}$. Entonces

$$D(A) = \{\vec{u}; \vec{u} \in H^2(\Omega)^d \cap V \text{ y } \partial_z \vec{u} = \vec{0} \text{ sobre } \Gamma_s\}. \quad (2.14)$$

Además, existe una constante $K_2 = K_2(\Omega, \nu_h, \nu_v) > 0$ tal que:

$$\|\vec{u}\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq K_2 \|A\vec{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall \vec{u} \in D(A). \quad (2.15)$$

Demostración: Sea Y la parte derecha de (2.14). Probamos que $D(A) = Y$ por doble inclusión.

a) $D(A) \subset Y$: Sea $\vec{u} \in D(A)$. Si denotamos $\vec{g} = A\vec{u}$, entonces \vec{u} es la solución débil de (L_{st}) con $\vec{a} = \vec{0}$. Como $\vec{g} \in H$, de los resultados de regularidad de Ziane, [50], deducimos que $\vec{u} \in Y$, y, gracias a la dependencia continua de la solución respecto de los datos, (2.12) nos dice:

$$\|\vec{u}\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq K_2 \|\vec{g}\|_{L^2(\Omega)}^2 = K_2 \|A\vec{u}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

b) $Y \subset D(A)$: Sea $\vec{u} \in Y$. Si denotamos $\vec{f} = -\nu_h \Delta_H \vec{u} - \nu_v \partial_{zz}^2 \vec{u}$, entonces $\vec{f} \in L^2(\Omega)^d$ y $A\vec{u} = P\vec{f}$, siendo P el proyector ortogonal de $L^2(\Omega)^d$ sobre H . Por tanto, $A\vec{u} \in H$, es decir, $\vec{u} \in D(A)$. ■

2.4.3 Construcción de una base especial

En esta subsección, probaremos el siguiente resultado:

Lema 2.13 *Bajo las condiciones del Lema 2.12, existe una sucesión $\{\lambda_j\}_{j \geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ con $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \lambda_{j+1} \leq \dots$, $\{\lambda_j\} \rightarrow +\infty$, y una base ortonormal de H , $\{\vec{w}^j\}_{j \geq 1}$, donde cada \vec{w}^j es una autofunción de A asociada al autovalor λ_j .*

Demostración: Sea $\Lambda : H \rightarrow D(A) \hookrightarrow H$ el operador que asocia $\vec{g} \in H$ a $\vec{u} \in D(A)$, la única solución fuerte del problema (L_{st}) con $\vec{a} = \vec{0}$ (es decir, $A\vec{u} = \vec{g}$). Usando el Lema 2.12 y la inyección compacta de $H^2(\Omega)^2 \cap V$ en H , deducimos que Λ es un operador compacto, y es autoadjunto:

$$(\Lambda \vec{g}_1, \vec{g}_2) = (\vec{u}_1, \vec{g}_2) = (\vec{u}_1, A\vec{u}_2) = (A\vec{u}_1, \vec{u}_2) = (\vec{g}_1, \Lambda \vec{g}_2).$$

Entonces, como H es separable, podemos aplicar el Teorema de Hilbert Schmidt (de descomposición espectral). En consecuencia, existe una base ortogonal de H , $\{\vec{v}^j\}_{j \geq 1}$, formada por autofunciones de Λ , asociadas a la sucesión de autovalores $\{\mu_j\} \subseteq \mathbb{R}$, tales que $\Lambda \vec{v}^j = \mu_j \vec{v}^j$, con $\mu_j \searrow 0$ cuando $j \nearrow +\infty$. Definiendo $\lambda_j = 1/\mu_j$ y $\vec{z}^j = \mu_j \vec{v}^j$, entonces $A\vec{z}^j = \lambda_j \vec{z}^j$, y la sucesión $\vec{w}^j = \vec{z}^j / \sqrt{\lambda_j}$ es la base ortonormal del Lema. ■

2.5 El caso lineal de evolución

En esta Sección estudiaremos la solución fuerte del problema lineal no estacionario:

$$(L) \begin{cases} \partial_t \vec{v} - \nu_h \Delta_H \vec{v} - \nu_v \partial_{zz}^2 \vec{v} + \nabla_H q_s &= \vec{f} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \nabla_H \cdot \langle \vec{v} \rangle &= 0 & \text{en } (0, T) \times \omega, \\ \vec{v}|_{t=0} &= \vec{v}_0 & \text{en } \Omega, \\ \nu_v \partial_z \vec{v} &= \vec{\tau} & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_s, \\ \vec{v} &= \vec{0} & \text{sobre } (0, T) \times (\Gamma_b \cup \Gamma_l). \end{cases}$$

Teorema 2.14 *Sea $\omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d = 1$ o 2) un dominio C^3 y $D \in C^3(\bar{\omega})$ con $D \geq D_{\min} > 0$ en $\bar{\omega}$. Si $\vec{f} \in L^2((0, T) \times \Omega)^d$, $\vec{v}_0 \in V$, $\vec{\tau} \in L^2(0, T; H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)^d)$, para algún $\varepsilon > 0$, con $\partial_t \vec{\tau} \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_s)^d)$, entonces existe una única solución fuerte \vec{v} de (L) en $(0, T)$. Además, existe una constante $C > 0$ tal que:*

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\|_{L^\infty(V)}^2 + \|\vec{v}\|_{L^2(H^2(\Omega))}^2 + \|\partial_t \vec{v}\|_{L^2(H)}^2 &\leq C \left\{ \|\vec{v}_0\|_V^2 + \|\vec{\tau}(0)\|_{H^{-1/2}(\Gamma_s)}^2 \right. \\ &\left. + \|\vec{f}\|_{L^2(L^2(\Omega))}^2 + \|\vec{\tau}\|_{L^2(H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s))}^2 + \|\partial_t \vec{\tau}\|_{L^2(H^{-1/2}(\Gamma_s))}^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Demostración: La unicidad se puede deducir fácilmente de la linealidad del problema (L) . La prueba de la existencia la separaremos en varias etapas.

Eta **1. Solución débil de (L) .** La solución débil \vec{v} de (L) en $(0, T)$ se puede obtener

como límite de las aproximaciones de Galerkin $\vec{v}_m \in C^1([0, T]; V_m)$ (siendo V_m un subespacio m -dimensional de V) tal que:

$$(L)_m \begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \vec{v}_m \cdot \vec{\varphi} d\Omega + \nu_h \int_{\Omega} \nabla_H \vec{v}_m : \nabla_H \vec{\varphi} d\Omega + \nu_v \int_{\Omega} \partial_z \vec{v}_m \cdot \partial_z \vec{\varphi} d\Omega \\ = \int_{\Omega} \vec{f}_m \cdot \vec{\varphi} d\Omega + \int_{\Gamma_s} \vec{\tau}_m \cdot \vec{\varphi}|_{\Gamma_s} d\sigma \quad \forall \vec{\varphi} \in V_m, \\ \vec{v}_m(0) \equiv \text{proyección de } \vec{v}_0 \text{ sobre } V_m, \end{cases}$$

donde $\vec{f}_m \in C^0([0, T]; H_{b,l}^{-1}(\Omega)^2)$ y $\vec{\tau}_m \in C^0([0, T]; H^{-1/2}(\Gamma_s)^2)$ son aproximaciones regulares de \vec{f} y $\vec{\tau}$, respectivamente.

Tomando \vec{v}_m como función test en $(L)_m$, podemos deducir que la sucesión \vec{v}_m está acotada en $L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$. Pasando al límite de forma estándar, obtenemos la regularidad débil para \vec{v} .

Nota 2.5.1 (Solución débil de (EP)). Las aproximaciones de Galerkin para el problema no lineal (EP) son similares a las del problema $(L)_m$. Las únicas diferencias están en los términos no lineales:

$$\int_{\Omega} \left\{ (\vec{u}_m \cdot \nabla_H) \vec{u}_m + u_{m3} \partial_z \vec{u}_m \right\} \cdot \vec{\varphi} d\Omega,$$

donde u_{m3} está definido a partir de $\nabla_H \cdot \vec{u}_m$ como en (2.2). Sin embargo, dichos términos desaparecen cuando se toma \vec{u}_m como función test, luego también podemos deducir que \vec{u}_m está acotada en $L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$. Usando entonces un resultado de compacidad (estimando $\partial_t \vec{u}_m$ en un espacio conveniente), podemos pasar al límite y obtener una solución débil \vec{u} de (EP) en $(0, T)$.

Etapa 2. “Levantamiento” de las condiciones de contorno Neumann. Definimos el operador $B : \vec{a} \in H^{-1/2}(\Gamma_s)^d \rightarrow \vec{u} = B\vec{a} \in V$, donde \vec{u} es la solución débil del problema de Stokes hidrostático (L_{st}) con $\vec{g} = \vec{0}$, es decir,

$$\vec{u} \in V \quad \text{tal que} \quad \langle A\vec{u}, \vec{\psi} \rangle_{V', V} = \langle \vec{a}, \vec{\psi} \rangle_{\Gamma_s} \quad \forall \vec{\psi} \in V.$$

Entonces, definimos

$$\vec{e}(t) = B(\vec{\tau}(t)) \quad \text{c.p.d. } t \in (0, T).$$

Del Lema 2.11, como $\vec{\tau}(t) \in H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)^d$ c.p.d. $t \in (0, T)$, tenemos que $\vec{e}(t) \in H^2(\Omega)^d \cap V$ c.p.d. $t \in (0, T)$, y

$$\|\vec{e}(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq K_2 \|\vec{\tau}(t)\|_{H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)}^2.$$

Por lo tanto, $\vec{e} \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^d \cap V)$ y

$$\|\vec{e}\|_{L^2(H^2(\Omega))}^2 \leq K_2 \|\vec{\tau}\|_{L^2(H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s))}^2. \quad (2.17)$$

Por otra parte, tenemos

$$\partial_t \vec{e} = B(\partial_t \vec{\tau}(t)) \quad \text{c.p.d. } t \in (0, T). \quad (2.18)$$

Para probar esta afirmación, definimos $\vec{g}(t) = B(\partial_t \vec{\tau}(t))$ y

$$\vec{v}_\delta(t) = \frac{\vec{e}(t+\delta) - \vec{e}(t)}{\delta} - \vec{g}(t) = B \left(\frac{\vec{\tau}(t+\delta) - \vec{\tau}(t)}{\delta} - \partial_t \vec{\tau}(t) \right).$$

Del Lema 2.10, para $\vec{a} = \frac{\vec{\tau}(t + \delta) - \vec{\tau}(t)}{\delta} - \partial_t \vec{\tau}(t)$, tenemos que:

$$\|\vec{v}_\delta(t)\|_V^2 \leq K_1 \left\| \frac{\vec{\tau}(t + \delta) - \vec{\tau}(t)}{\delta} - \partial_t \vec{\tau}(t) \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma_s)}^2.$$

La parte derecha tiende a cero cuando $\delta \rightarrow 0$, por tanto, $\|\vec{v}_\delta(t)\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$. Por lo tanto, concluimos (2.18). Además, el Lema 2.10 para $\vec{a} = \partial_t \vec{\tau}(t)$ dice

$$\|\partial_t \vec{e}(t)\|_V^2 \leq K_1 \|\partial_t \vec{\tau}(t)\|_{H^{-1/2}(\Gamma_s)}^2 \quad \text{c.p.d. } t \in (0, T).$$

Por tanto, como $\partial_t \vec{\tau} \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_s))$, entonces $\partial_t \vec{e} \in L^2(0, T; V)$ y

$$\|\partial_t \vec{e}\|_{L^2(V)}^2 \leq K_1 \|\partial_t \vec{\tau}\|_{L^2(H^{-1/2}(\Gamma_s))}^2. \quad (2.19)$$

En particular, $\vec{e} \in C^0([0, T]; V)$. Además, de (2.19),

$$\begin{aligned} \|\vec{e}\|_{L^\infty(V)}^2 &\leq \|\vec{e}(0)\|_V^2 + 2\|\vec{e}\|_{L^2(V)}\|\partial_t \vec{e}\|_{L^2(V)} \\ &\leq K_1 \left\{ \|\vec{\tau}(0)\|_{H^{-1/2}(\Gamma_s)}^2 + \|\vec{\tau}\|_{L^2(H^{-1/2}(\Gamma_s))}^2 + \|\partial_t \vec{\tau}\|_{L^2(H^{-1/2}(\Gamma_s))}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Etapa 3. Solución fuerte del problema resultante (con condiciones de contorno homogéneas). Si descomponemos la solución \vec{v} de (L) como $\vec{v} = \vec{e} + \vec{y}$, donde \vec{e} es la función regular obtenida en la Etapa 2, entonces \vec{y} es la solución del problema resultante:

$$(R) \begin{cases} \partial_t \vec{y} - \nu_h \Delta_H \vec{y} - \nu_v \partial_{zz}^2 \vec{y} + \nabla_H \pi_s = \vec{h} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \nabla_H \cdot \langle \vec{y} \rangle = 0 & \text{en } (0, T) \times \omega, \\ \vec{y}|_{t=0} = \vec{y}_0 & \text{en } \Omega, \\ \nu_v \partial_z \vec{y} = \vec{0} & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_s, \\ \vec{y} = \vec{0} & \text{sobre } (0, T) \times (\Gamma_b \cup \Gamma_l), \end{cases}$$

donde $\vec{h} = \vec{f} - \partial_t \vec{e} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^d)$ y $\vec{y}_0 = \vec{v}_0 - \vec{e}(0) \in V$. Obviamente, la prueba del Teorema 2.14 concluirá si demostramos existencia (y dependencia continua) de la solución fuerte \vec{y} del problema (R) en $(0, T)$.

Sea V_m el subespacio V generado por $\{w^1, \dots, w^m\}$, donde $\{w^j\}_{j \geq 1}$ es la base de autofunciones de A (proporcionada por el Lema 2.13). Es fácil probar que la solución débil \vec{y} de (R) en $(0, T)$ se puede obtener como límite de las aproximaciones de Galerkin, $\vec{y}_m : [0, T] \rightarrow V_m$, resolviendo el problema diferencial ordinario:

$$(R)_m \begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \vec{y}_m(t) \cdot \vec{v}_m d\Omega + \nu_h \int_{\Omega} \nabla_H \vec{y}_m(t) : \nabla_H \vec{v}_m d\Omega + \nu_v \int_{\Omega} \partial_z \vec{y}_m(t) \cdot \partial_z \vec{v}_m d\Omega \\ = \int_{\Omega} \vec{h}_m(t) \cdot \vec{v}_m d\Omega, \quad \forall v_m \in V_m, \\ \vec{y}_m(0) = \vec{y}_{0m} = \sum_{j=1}^m \left(\int_{\Omega} \nabla_H \vec{y}_0 : \nabla_H \vec{w}^j d\Omega \right) \vec{w}^j, \end{cases}$$

siendo las \vec{h}_m aproximaciones regulares de \vec{h} .

Ahora, obtenemos estimaciones fuertes para \vec{y}_m . En primer lugar, por construcción, $\vec{y}_{0m} \in V_m$ y $\vec{y}_{0m} \rightarrow \vec{y}_0$ en V . Tomando las $\vec{v}_m = A\vec{y}_m(t) \in V_m$ como funciones test en $(R)_m$, podemos deducir que: $\forall t \in [0, T]$,

$$\frac{d}{dt} \|\vec{y}_m(t)\|_V^2 + \|A\vec{y}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\vec{h}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Integrando en tiempo, obtenemos:

$$\|\vec{y}_m(t)\|_V^2 + \int_0^T \|A\vec{y}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq \|\vec{y}_{0m}\|_V^2 + \int_0^T \|\vec{h}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

Entonces, la sucesión (\vec{y}_m) está acotada en $L^2(0, T; D(A)) \cap L^\infty(0, T; V)$, luego el límite verifica $\vec{y} \in L^2(0, T; D(A)) \cap L^\infty(0, T; V)$ y

$$\|\vec{y}\|_{L^\infty(V)}^2 + \|\vec{y}\|_{L^2(D(A))}^2 \leq \|\vec{y}_0\|_V^2 + \|\vec{h}\|_{L^2(L^2(\Omega))}^2. \quad (2.21)$$

Por otra parte, tomando las $\partial_t \vec{y}_m(t) \in V_m$ como funciones test en $(R)_m$ e integrando en tiempo,

$$\|\partial_t \vec{y}_m\|_{L^2(H)}^2 \leq \|\vec{y}_{0m}\|_V^2 + \|\vec{h}_m\|_{L^2(L^2(\Omega))}^2.$$

En consecuencia, el límite $\partial_t \vec{y} \in L^2(0, T; H)$ y

$$\|\partial_t \vec{y}\|_{L^2(H)}^2 \leq \|\vec{y}_0\|_V^2 + \|\vec{h}\|_{L^2(L^2(\Omega))}^2. \quad (2.22)$$

Finalmente, de (2.21) y (2.22), usando que $\vec{y}_0 = \vec{v}_0 - \vec{e}(0)$ y $\vec{h} = \vec{f} - \partial_t \vec{e}$,

$$\begin{aligned} \|\vec{y}\|_{L^\infty(V)}^2 + \|\vec{y}\|_{L^2(D(A))}^2 + \|\partial_t \vec{y}\|_{L^2(H)}^2 &\leq 4 \left\{ \|\vec{v}_0\|_V^2 + \|\vec{e}(0)\|_V^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\vec{f}\|_{L^2(L^2(\Omega))}^2 + \|\partial_t \vec{e}\|_{L^2(L^2(\Omega))}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Usando las cotas anteriores para \vec{e} y \vec{y} , (2.17), (2.19), (2.20) y (2.23), concluimos la estimación (2.16). \blacksquare

2.6 Solución global fuerte para datos pequeños

2.6.1 Demostración del Teorema 2.3

Nos centramos en el estudio de la regularidad fuerte del problema (EP_2) . Para ello, levantamos primero las condiciones de contorno de tipo Neumann no homogéneas $\nu_v \partial_z u|_{\Gamma_s} = \tau$, considerando como función levantamiento $(e(t), q_s(t))$, la solución fuerte de la versión 2-dimensional del problema (L_{st}) , con $a = \tau$ y $f = 0$ (esta solución ya se ha usado en la Sección 2.5). Entonces, en lugar de (u, p_s) una solución de (EP_2) , basta estudiar el siguiente problema, que verifica $(w, \pi_s) = (u - e, p_s - q_s)$,

$$(NL) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t w + (w + e) \partial_x w + (w_3 + e_3) \partial_z w \\ + w \partial_x e + w_3 \partial_z e - \nu_h \partial_{xx}^2 w - \nu_v \partial_{zz}^2 w + \partial_x \pi_s = F(e) \quad \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_x \langle w \rangle = 0 \quad \text{en } (0, T) \times \omega, \\ w|_{t=0} = w_0 \quad \text{en } \Omega, \\ \nu_v \partial_z w = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_s, \\ w = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times (\Gamma_b \cup \Gamma_l), \end{array} \right.$$

donde $w_0 = u_0 - e(0)$ y $F(e) = F - \partial_t e - e\partial_x e - e_3\partial_z e$. Estudiaremos el problema (NL) en varias etapas.

Etapa 1. Existencia y estimaciones débiles de las soluciones aproximadas de (NL).

Aproximamos w por w^m , las aproximaciones de Galerkin en $V_m = \text{span}\{w^1, \dots, w^m\}$, siendo $\{w^j\}_{j \geq 1}$ las autofunciones del operador de Stokes hidrostático A (ver Lema 2.13). O sea, $w_m \in C^1(0, T; V_m)$ y satisface la siguiente formulación variacional (en V_m), siendo F_m aproximaciones regulares de F ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \left(\frac{d}{dt} w_m + A w_m + (w_m + e) \partial_x w_m + (w_{m3} + e_3) \partial_z w_m \right) v_m d\Omega \\ + \int_{\Omega} (w_m \partial_x e + w_{m3} \partial_z e) v_m d\Omega = \int_{\Omega} (F_m - e \partial_x e - e_3 \partial_z e) v_m d\Omega \quad \forall v_m \in V_m, \\ w_m(0) = w_{m0} = \sum_{j=1}^m \left(\int_{\Omega} \nabla_H w_0 \cdot \nabla_H w^j d\Omega \right) w^j. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Por simplicidad, en lo sucesivo denotaremos $F_m = F$.

Vamos a probar la existencia de la solución w_m de (2.24). Para ello, escribimos

$$w_m(t; x, z) = \sum_{j=1}^m \phi_j(t) w^j(x, z). \quad (2.25)$$

Introduciendo (2.25) en la expresión (2.24) para $v_m = w^i$, $i = 1, \dots, m$, concluimos que w_m es una solución de (2.24) si y sólo si $\{\phi_j\}_{j=1}^m \in C^1([0, T])^m$ y verifica el siguiente problema diferencial ordinario:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^m a_{ij} \phi_j'(t) + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t) \phi_j(t) + \sum_{l,j=1}^m c_{ijl} \phi_l(t) \phi_j(t) = d_i(t) \text{ en } (0, T), \quad 1 \leq i \leq m, \\ \phi_j(0) = \int_{\Omega} \nabla_H u_0 \cdot \nabla_H w^j d\Omega, \quad j = 1, \dots, m, \end{array} \right. \quad (2.26)$$

donde:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{\Omega} w^j w^i d\Omega, \\ b_{ij}(t) &= \int_{\Omega} \left\{ (e(t) \partial_x w^j + e_3(t) \partial_z w^j + w^j \partial_x e(t) + w_3^j \partial_z e(t)) w^i \right. \\ &\quad \left. + \nu_h \partial_x w^j \partial_x w^i + \nu_v \partial_z w^j \partial_z w^i \right\} d\Omega \in C^0([0, T]), \\ c_{ijl} &= \int_{\Omega} \left\{ w^l \partial_x w^j + w_3^l \partial_z w^j \right\} w^i d\Omega, \\ d_i(t) &= \int_{\Omega} \left\{ F(t) - e(t) \partial_x e(t) - e_3(t) \partial_z e(t) \right\} w^i d\Omega \in C^0([0, T]). \end{aligned}$$

Usando que $\{w^j\}$ es un sistema ortonormal en H , es fácil probar que $(a_{ij})_{i,j=1}^m$ es una matriz simétrica y definida positiva (uniformemente en $(0, T)$). En particular, $(a_{ij})_{i,j=1}^m$ es invertible y (2.26) se puede escribir como el problema de Cauchy:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi' = g(t, \Phi), \quad t \in [0, T], \\ \Phi(0) \in \mathbb{R}^m \text{ dado,} \end{array} \right.$$

donde $g : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función continua de (t, Φ) , y regular respecto de Φ (de hecho, $g(t, \cdot)$ es una función polinomial). Del Teorema de Picard, podemos deducir la existencia y unicidad de solución local $\Phi = (\phi_i)_{i=1}^m$, es decir, definida en un intervalo $[0, \mathcal{T}_m)$ para algún $\mathcal{T}_m > 0$.

Por unicidad de los problemas aproximados para u_m y w_m , tenemos que $w_m = u_m - e$. Entonces, las estimaciones débiles obtenidas para u_m (ver Nota 2.5.1) conducen a las mismas estimaciones para w_m . En particular, teniendo en cuenta la expresión (2.25),

$$\sum_{j=1}^m |\phi_j(t)|^2 = \int_{\Omega} |w_m|^2 d\Omega \leq C \quad \forall t \in [0, T].$$

Por tanto, la semitrayectoria positiva de Φ , $\{(s, \phi_1(s), \dots, \phi_m(s)) \in \mathbb{R}^{m+1}, s \in [0, \mathcal{T}_m)\}$, está acotada en \mathbb{R}^{m+1} , por lo que Φ se puede extender a todo $[0, T]$. De este hecho, concluimos la existencia de las soluciones aproximadas w_m en todo $[0, T]$ y sus correspondientes estimaciones.

Etapa 2. Estimaciones fuertes de las soluciones aproximadas de (NL):

En primer lugar, veamos el siguiente:

Lema 2.15 *Se verifica la siguiente estimación:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|w_m\|_V^2 + \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C_1 D_{max} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \|w_m\|_V + C_2 \|w_m\|_V^4 \\ &+ C_3 \left\{ \|e\|_V^2 \|e\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e\|_{H^2(\Omega)} \|e\|_V \left(D_{max}^4 \|e\|_{H^2(\Omega)} \|e\|_V + 1 \right) \right\} \|w_m\|_V^2 \\ &+ C_4 \|e\|_{H^2(\Omega)} \|e\|_V^2 \left(\|e\|_{L^2(\Omega)} + D_{max}^2 \|e\|_{H^2(\Omega)} \right) \\ &+ C_5 \left(\|F\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_t e\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

para algunas constantes $C_i > 0$, $i = 1, \dots, 5$.

Demostración: Tomando $v_m = Aw_m(t) \in V_m$ como funciones test en (2.24) (aquí, usamos las propiedades de la base de las autofunciones de A para obtener que $Aw_m(t) \in V_m$), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_m\|_V^2 + \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 &= - \int_{\Omega} (w_m + e) \partial_x w_m Aw_m d\Omega \\ &- \int_{\Omega} (w_m + e) \partial_z w_m Aw_m d\Omega - \int_{\Omega} w_m \partial_x e Aw_m d\Omega \\ &- \int_{\Omega} w_m \partial_z e Aw_m d\Omega + \int_{\Omega} F(e) Aw_m d\Omega \equiv \sum_{i=1}^5 I_i \end{aligned} \quad (2.28)$$

Acotamos los términos a la derecha (usando los Lemas 2.7, 2.8, 2.9 y 2.12, y las estimaciones débiles para w_m), como sigue:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_x w_m\|_{L^4(\Omega)} \left(\|w_m\|_{L^4(\Omega)} + \|e\|_{L^4(\Omega)} \right) \\ &\leq C \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^{3/2} \|\partial_x w_m\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \left(\|\nabla_H w_m\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|w_m\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} + \|\nabla_H e\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|e\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \right) \\ &\leq \frac{1}{10} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|w_m\|_V^2 \left(\|w_m\|_V^2 + \|e\|_V^2 \|e\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_z w_m\|_{L^4(\Omega)} \left(\|w_{m3}\|_{L^4(\Omega)} + \|e_3\|_{L^4(\Omega)} \right) \\
&\leq D_{max} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^{3/2} \|\partial_z w_m\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \left(\|\partial_x w_m\|_{L^4(\Omega)} + \|\partial_x e\|_{L^4(\Omega)} \right) \\
&\leq CD_{max} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^{3/2} \|w_m\|_V^{1/2} \left(\|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|w_m\|_V^{1/2} + \|e\|_{H^2(\Omega)}^{1/2} \|e\|_V^{1/2} \right) \\
&\leq CD_{max} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \|w_m\|_V + \frac{1}{10} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + CD_{max}^4 \|w_m\|_V^2 \|e\|_{H^2(\Omega)}^2 \|e\|_V^2 \\
I_3 &\leq \|w_m\|_{L^4(\Omega)} \|\partial_x e\|_{L^4(\Omega)} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)} \|w_m\|_V^{1/2} \|w_m\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|e\|_{H^2(\Omega)}^{1/2} \|e\|_V^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{10} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|w_m\|_V^2 \|e\|_{H^2(\Omega)} \|e\|_V \\
I_4 &\leq \|w_{m3}\|_{L^4(\Omega)} \|\partial_z e\|_{L^4(\Omega)} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq D_{max} \|\partial_x w_m\|_{L^4(\Omega)} \|\partial_z e\|_{L^4(\Omega)} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq CD_{max} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^{3/2} \|w_m\|_V^{1/2} \|e\|_{H^2(\Omega)}^{1/2} \|e\|_V^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{10} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + CD_{max}^4 \|w_m\|_V^2 \|e\|_{H^2(\Omega)}^2 \|e\|_V^2 \\
I_5 &\leq \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)} \|F(e)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{10} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{5}{2} \|F(e)\|_{L^2(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

El término $\|F(e)\|_{L^2(\Omega)}^2$ se puede acotar de la forma:

$$\frac{5}{2} \|F(e)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left\{ \|F\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_t e\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e \partial_x e\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e_3 \partial_z e\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \equiv \sum_{i=1}^4 J_i,$$

donde:

$$\begin{aligned}
J_3 &\leq \|\partial_x e\|_{L^4(\Omega)}^2 \|e\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq C \|e\|_{H^2(\Omega)} \|e\|_V^2 \|e\|_{L^2(\Omega)} \\
J_4 &\leq \|e_3\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\partial_z e\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq D_{max}^2 \|\partial_x e\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\partial_z e\|_{L^4(\Omega)}^2 \\
&\leq CD_{max}^2 \|e\|_{H^2(\Omega)}^2 \|e\|_V^2
\end{aligned}$$

Incorporando todas las estimaciones anteriores en (2.28), obtenemos (2.27). ■

El término más difícil de acotar en (2.27) (con idea de acotar w_m globalmente en tiempo) es

$$C_1 D_{max} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \|w_m\|_V.$$

Una posibilidad es controlarlo con el término $\|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2$ a la izquierda en la expresión (2.27), suponiendo los datos suficientemente regulares. Para ello, reescribimos (2.27) de la forma:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \|w_m\|_V^2 + \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \left(1 - C_1 D_{max} \|w_m\|_V \right) \\
&\leq C_2 \|w_m\|_V^4 + a(t) \|w_m\|_V^2 + b(t),
\end{aligned} \tag{2.29}$$

donde:

$$\begin{aligned} a(t) &= C_3 \left\{ \|e\|_V^2 \|e\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e\|_{H^2(\Omega)} \|e\|_V (D_{max}^4 \|e\|_{H^2(\Omega)} \|e\|_V + 1) \right\} \\ b(t) &= C_4 \|e\|_{H^2(\Omega)} \|e\|_V^2 \left(\|e\|_{L^2(\Omega)} + D_{max}^2 \|e\|_{H^2(\Omega)} \right) \\ &\quad + C_5 \left(\|F\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_t e\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Es fácil verificar que $a, b \in L^1(0, T)$. En efecto, usando las estimaciones para e (2.17), (2.19) y (2.20), obtenemos:

$$\begin{aligned} \|a\|_{L^1(0, T)} &\leq C_3 (A(\tau)^2 + (1 + D_{max}^4) A(\tau)^4), \\ \|b\|_{L^1(0, T)} &\leq C_4 (1 + D_{max}^2) A(\tau)^4 + C_5 \left(\|F\|_{L^2(L^2(\Omega))}^2 + A(\tau)^2 \right), \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde $A(\tau)^2 = C^2 \left(\|\tau(0)\|_{H^{-1/2}(\Gamma_s)}^2 + \|\tau\|_{L^2(H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s))}^2 + \|\partial_t \tau\|_{L^2(H^{-1/2}(\Gamma_s))}^2 \right)$. ■

Lema 2.16 *Sea M una constante suficientemente pequeña tal que:*

- (a) $1 - C_1 D_{max} M > 1/2$,
- (b) $C_2 M^2 < 1/(4K_2)$,

donde C_1 y C_2 son las constantes que aparecen en (2.29) y $K_2 > 0$ es la constante de equivalencia entre $\|Au\|_{L^2}$ y la norma H^2 (ver (2.15) en el Lema 2.12). Entonces, bajo la hipótesis (H) del Teorema 2.3, obtenemos:

$$\|w_m(t)\|_V < M, \quad \forall t \in [0, T].$$

Demostración: Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que existe algún instante en $(0, T)$ en el que la cota M se alcanza. Sea t^* el más pequeño de dichos instantes, es decir, $\|w_m(t)\|_V < M, \forall t \in [0, t^*)$ y $\|w_m(t^*)\|_V = M$. Entonces, $\forall t \in [0, t^*]$,

$$1 - C_1 D_{max} \|w_m(t)\|_V \geq 1 - C_1 D_{max} M > 1/2.$$

En la última desigualdad, usamos la hipótesis (a). Si denotamos $y(t) = \|w_m(t)\|_V^2$, usando que $\frac{1}{K_2} \|w_m\|_V^2 \leq \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2$ (ver (2.15) en el Lema 2.12), partiendo de (2.29) llegamos a:

$$y'(t) + \frac{1}{2K_2} y(t) \leq C_2 M^2 y(t) + a(t)y(t) + b(t), \quad \forall t \in [0, t^*].$$

Ahora, de la hipótesis (b),

$$y'(t) + \frac{1}{4K_2} y(t) \leq a(t)y(t) + b(t), \quad \forall t \in [0, t^*]. \quad (2.32)$$

Integrando la desigualdad diferencial entre 0 y t^* , obtenemos:

$$y(t^*) \leq \exp \left(-\frac{1}{4K_2} t^* + \int_0^{t^*} a(t) dt \right) \left\{ y(0) + \int_0^{t^*} \exp \left(\frac{1}{4K_2} t - \int_0^t a(s) ds \right) b(t) dt \right\}$$

Por tanto, como

$$y(0) = \|w_{m0}\|_V^2 \leq \|w_0\|_V^2 \leq 2 \left(\|u_0\|_V^2 + \|e(0)\|_V^2 \right) \leq 2 \left(\|u_0\|_V^2 + K_1 \|\tau(0)\|_{H^{-1/2}(\Gamma_s)}^2 \right),$$

la hipótesis (H) implica que $\|w_m(t^*)\|_V < M$, por tanto llegamos a contradicción. ■

Etapa 3. **Dem**ostración del Teorema 2.3: Del Lema 2.16, se deduce que w_m está acotado en $L^\infty(0, T; V)$. Además, aplicando la hipótesis (a) del Lema 2.16 en (2.29), obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\|w_m\|_V^2 + \frac{1}{2}\|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_2M^4 + M^2a(t) + b(t). \quad (2.33)$$

Integrando en tiempo, deducimos que w_m está acotada en $L^2(0, T; H^2(\Omega))$. Por otra parte, tomando $\partial_t w_m(t) \in V_m$ como función test en (2.24), integrando en tiempo y usando la regularidad anterior, deducimos que $\partial_t w_m$ está acotada en $L^2(0, T; H)$. Entonces, por un paso al límite estándar, obtenemos que w (y una presión superficial asociada π_s) es una solución global fuerte de (NL). Por último, $(u, p_s) = (e + w, q_s + \pi_s)$ es una solución fuerte de (EP₂) en $(0, T)$. La unicidad de solución fuerte de (EP₂) se verá en la Sección 2.8. ■

Nota 2.6.1 En el caso 3D, no podemos obtener las estimaciones fuertes anteriores. La razón es que en la estimación correspondiente al término I_2 (en este caso $I_2 = - \int_{\Omega} (w_{m3} + e_3) \partial_z \bar{w}_m A \bar{w}_m d\Omega$), obtenemos:

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \|A\bar{w}_m\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_z \bar{w}_m\|_{L^4(\Omega)} \left(\|w_{m3}\|_{L^4(\Omega)} + \|e_3\|_{L^4(\Omega)} \right) \\ &\leq D_{max} \|A\bar{w}_m\|_{L^2(\Omega)}^{7/4} \|\partial_z \bar{w}_m\|_{L^2(\Omega)}^{1/4} \left(\|\nabla_H \cdot \bar{w}_m\|_{L^4(\Omega)} + \|\nabla_H \cdot \bar{e}\|_{L^4(\Omega)} \right) \\ &\leq D_{max} \|A\bar{w}_m\|_{L^2(\Omega)}^{7/4} \|\partial_z \bar{w}_m\|_{L^2(\Omega)}^{1/4} \left(\|A\bar{w}_m\|_{L^2(\Omega)}^{3/4} \|\nabla_H \cdot \bar{w}_m\|_{L^4(\Omega)}^{1/4} + \|\bar{e}\|_{H^2(\Omega)}^{3/4} \|\bar{e}\|_V^{1/4} \right) \\ &\leq D_{max} \|A\bar{w}_m\|_{L^2(\Omega)}^{5/2} \|\bar{w}_m\|_V^{1/2} + D_{max} \|A\bar{w}_m\|_{L^2(\Omega)}^{7/4} \|\bar{w}_m\|_V^{1/4} \|\bar{e}\|_{H^2(\Omega)}^{3/4} \|\bar{e}\|_V^{1/4}, \end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad de interpolación:

$$\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^{(3p-6)/(2p)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^{(6-p)/(2p)}, \quad 2 \leq p \leq 6 \text{ y } N = 3, \quad (2.34)$$

para $p = 4$. El término difícil de acotar es en este caso:

$$C_1 D_{max} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^{5/2} \|w_m\|_V^{1/2}$$

que aparecerá en la parte derecha de la desigualdad 3-dimensional análoga a (2.27). En principio, dicho término no puede ser controlado con la parte izquierda de (2.27).

2.6.2 Demostración del Corolario 2.4.

Primero probaremos la existencia de una solución fuerte de (EP₂) en $(0, +\infty)$. El argumento se basa en las **Eta**pas 1 y 2 de la demostración del Teorema 2.3. En particular, no es difícil obtener las estimaciones débiles:

$$w_m \text{ está acotada en } L^2(0, +\infty; V) \cap L^\infty(0, +\infty; H).$$

Ahora, usando la hipótesis (H) en $[0, +\infty)$, podemos deducir que $\|w_m\|_V < M, \forall t \in [0, +\infty)$.

Cambiaremos la **Eta**pa 3. En lugar de (2.33), escribimos (2.29) como:

$$\frac{d}{dt}\|w_m\|_V^2 + \frac{1}{2}\|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_2M^2\|w_m\|_V^2 + M^2a(t) + b(t).$$

Usando que w_m está acotada en $L^2(0, +\infty; V)$, y que a y b pertenecen a $L^1(0, +\infty)$ (gracias a (2.31) y a la regularidad global de τ , $\partial_t \tau$ y F), tenemos que w_m está acotada en $L^2(0, +\infty; H^2(\Omega) \cap V)$. Entonces, podemos concluir la existencia de una solución fuerte $u \in L^\infty(0, +\infty; V) \cap L^2(0, +\infty; H^2(\Omega) \cap V)$ y $\partial_t u \in L^2(0, +\infty; H)$.

Veamos ahora el comportamiento asintótico de u . Sumando a ambas partes de (2.32) el término $\frac{d}{dt} \|e(t)\|_V^2 + \frac{1}{4K_2} \|e(t)\|_V^2$, y teniendo en cuenta que:

$$\frac{d}{dt} \|e(t)\|_V^2 \leq 2\|e(t)\|_V \|\partial_t e(t)\|_V,$$

obtenemos para $z(t) = \|w_m(t)\|_V^2 + \|e(t)\|_V^2$ la desigualdad:

$$z'(t) + \left(\frac{1}{4K_2} - a(t)\right) z(t) \leq b(t) + \frac{1}{2K_2} \|e(t)\|_V^2 + 4K_2 \|\partial_t e(t)\|_V^2.$$

Multiplicando la expresión anterior por $\exp\left(\frac{1}{4K_2}t - \int_0^t a(s)ds\right)$ e integrando en $(0, t)$,

$$\begin{aligned} z(t) &\leq \exp\left(-\frac{1}{4K_2}t + \int_0^t a(s)ds\right) \{z(0) \\ &+ \int_0^t \exp\left(\frac{1}{4K_2}s - \int_0^s a(\sigma)d\sigma\right) \left(b(s) + \frac{1}{2K_2} \|e(s)\|_V^2 + 4K_2 \|\partial_t e(s)\|_V^2\right) ds\}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Usando entonces que $\|u_m(t)\|_V^2 \leq 2z(t)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \|u_m(t)\|_V^2 &\leq \exp\left(-\frac{1}{4K_2}t\right) \tilde{K}_1 \{z(0) \\ &+ \frac{2}{\tilde{K}_1} \int_0^t \exp\left(\frac{1}{4K_2}s\right) \left(b(s) + \frac{1}{2K_2} \|e(s)\|_V^2 + 4K_2 \|\partial_t e(s)\|_V^2\right) ds\}, \end{aligned}$$

donde $\tilde{K}_1 = 2 \exp\left(\|a\|_{L^1(0, +\infty)}\right)$. Como $z(0) \leq 2\|u_0\|_V^2 + K_1 \|\tau(0)\|_{H^{-1/2}(\Gamma_s)}^2$, acotando de forma conveniente b , e y $\partial_t e$ (en función de τ , $\partial_t \tau$ y F), podemos deducir el comportamiento asintótico (2.5) siempre y cuando se verifique la hipótesis (2.4). ■

2.7 Solución fuerte local para profundidad pequeña (demostración del Teorema 2.5)

Queremos aplicar un argumento de punto fijo para obtener la solución fuerte de (EP_2) , en principio para datos cualesquiera pero local en tiempo. Usando una descomposición similar a la de las secciones precedentes, consideramos el problema resultante (que llamaremos (P)) verificado por $(w, \pi_s) = (u - v, p_s - q_s)$, donde (u, p_s) es una (posible) solución fuerte de (EP_2) y (v, q_s) es la solución fuerte de (L) , (con $v_0 = 0$ y $f = 0$). Obviamente, este problema es similar a (NL) , cambiando e por v y el segundo miembro por $F(v) = F - v\partial_x v - v_3\partial_z v$. Con este propósito, reescribimos el problema (P) como una ecuación de punto fijo por medio de una linealización. Definimos, para cada $T > 0$:

$$\begin{aligned} Y(T) &= \left\{ \bar{w}; \bar{w} \in L^2(0, T; D(A)) \cap L^\infty(0, T; V), \partial_t \bar{w} \in L^2(0, T; H), \right. \\ &\quad \left. \bar{w}(0) = u_0, \|\bar{w}\|_{L^\infty(V)}^2 + \|\bar{w}\|_{L^2(D(A))}^2 + \|\partial_t \bar{w}\|_{L^2(H)}^2 \leq R^2 \right\}. \end{aligned}$$

Dada $\bar{w} \in Y(T)$, consideramos el problema lineal:

$$(P_l) \begin{cases} \partial_t w - \nu_h \partial_{xx}^2 w - \nu_v \partial_{zz}^2 w + \partial_x \pi_s = G(\bar{w}, v) & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_x \langle w \rangle = 0 & \text{en } (0, T) \times \omega, \\ w|_{t=0} = u_0 & \text{en } \Omega, \\ \nu_v \partial_z w = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_s, \\ w = 0 & \text{sobre } (0, T) \times (\Gamma_b \cup \Gamma_l), \end{cases}$$

donde $G(\bar{w}, v) = F - (\bar{w} + v) \partial_x (\bar{w} + v) - (\bar{w}_3 + v_3) \partial_z (\bar{w} + v)$. El problema (P_l) es similar al problema (R) , que ya ha sido estudiado en la Sección 2.5. Por tanto, como $u_0 \in V$ y $G \in L^2((0, T) \times \Omega)$, entonces $w \in L^2(0, T; D(A)) \cap L^\infty(0, T; V)$ y $\partial_t w \in L^2(0, T; H)$.

En primer lugar, veamos que existe una constante R^2 suficientemente grande para que $Y(T) \neq \emptyset$, $\forall T > 0$. En efecto, sea w_* la única solución del problema de Stokes hidrostático:

$$\begin{cases} \partial_t w_* - \nu_h \partial_{xx}^2 w_* - \nu_v \partial_{zz}^2 w_* + \partial_x \pi_s = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_x \langle w_* \rangle = 0 & \text{en } (0, T) \times \omega, \\ w_*|_{t=0} = u_0 & \text{en } \Omega, \\ \nu_v \partial_z w_* = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_s, \\ w_* = 0 & \text{sobre } (0, T) \times (\Gamma_b \cup \Gamma_l). \end{cases}$$

Seguendo el razonamiento del problema (R) , ver (2.21) y (2.22), sabemos que:

$$\|w_*\|_{L^\infty(V)}^2 + \|w_*\|_{L^2(D(A))}^2 + \|\partial_t w_*\|_{L^2(H)}^2 \leq \|u_0\|_V^2, \quad (2.36)$$

por tanto, eligiendo $R^2 \geq \|u_0\|_V^2$, entonces $w_* \in Y(T)$, $\forall T > 0$.

En segundo lugar, introducimos el espacio de Banach $X_T = L^2(0, T; V)$ y la aplicación

$$\Phi: Y(T) \longrightarrow X_T, \quad \text{dada por } \Phi(\bar{w}) = w,$$

donde w es la única solución de (P_l) . Obviamente, un punto fijo de Φ resuelve el problema (P) . Razonando como en el problema (R) , obtenemos:

$$\|w\|_{L^\infty(V)}^2 + \|w\|_{L^2(D(A))}^2 + \|\partial_t w\|_{L^2(H)}^2 \leq \|u_0\|_V^2 + C \|G(\bar{w}, v)\|_{L^2(L^2(\Omega))}^2 \quad (2.37)$$

Por otra parte, v verifica el problema (L) , con datos iniciales cero y segundo miembro homogéneo (es decir, $v_0 = 0$ y $f = 0$) pero con condición de contorno Neumann no homogénea (igual a τ) sobre la superficie. Entonces, v satisface la estimación (ver (2.16)):

$$\|v\|_{L^\infty(V)}^2 + \|v\|_{L^2(H^2(\Omega))}^2 + \|\partial_t v\|_{L^2(H)}^2 \leq B(\tau)^2, \quad (2.38)$$

donde $B(\tau)^2 = C \left\{ \|\tau(0)\|_{H^{-1/2}(\Gamma_s)}^2 + \|\tau\|_{L^2(H_0^{1/2+\epsilon}(\Gamma_s))}^2 + \|\partial_t \tau\|_{L^2(H^{-1/2}(\Gamma_s))}^2 \right\}$.

Nos dedicamos ahora a comprobar que se verifican las condiciones necesarias para aplicar el Teorema de Schauder.

1) $\exists T_* \in (0, T]$ tal que $\Phi(Y(T_*)) \subset Y(T_*)$:

Sea $\bar{w} \in Y(T)$ y $w = \Phi(\bar{w})$. Entonces:

$$\begin{aligned} \|G(\bar{w}, v)\|_{L^2(L^2(\Omega))}^2 &\leq 9 \left\{ \|F\|_{L^2(L^2(\Omega))}^2 + \|(\bar{w} + v)\partial_x(\bar{w} + v)\|_{L^2(L^2(\Omega))}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|(\bar{w}_3 + v_3)\partial_z(\bar{w} + v)\|_{L^2(L^2(\Omega))}^2 \right\} \equiv \sum_{i=1}^3 I_i \end{aligned} \quad (2.39)$$

Acotamos cada término I_i (la constante G vendrá de las desigualdades de Gagliardo-Nirenberg, ver Lema 2.8 y Corolario 2.9, mientras que C denotará las diferentes constantes independientes de R , $B(\tau)$, D_{max} y T). Estimamos primero:

$$\begin{aligned} \|(\bar{w} + v)\partial_x(\bar{w} + v)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|\bar{w} + v\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\partial_x(\bar{w} + v)\|_{L^4(\Omega)}^2 \\ &\leq 4 \left(\|\bar{w}\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^4(\Omega)}^2 \right) \left(\|\partial_x \bar{w}\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|\partial_x v\|_{L^4(\Omega)}^2 \right) \\ &\leq 4G^2 \left(\|\bar{w}\|_V \|\bar{w}\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_V \|v\|_{L^2(\Omega)} \right) \left(\|\bar{w}\|_{H^2(\Omega)} \|\bar{w}\|_V + \|v\|_{H^2(\Omega)} \|v\|_V \right). \end{aligned}$$

Integrando en $(0, T)$, teniendo en cuenta la definición de $Y(T)$ y (2.38),

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 4G^2 T^{1/2} \left(\|\bar{w}\|_{L^\infty(V)} \|\bar{w}\|_{L^\infty(H)} + \|v\|_{L^\infty(V)} \|v\|_{L^\infty(H)} \right) \\ &\quad \times \left(\|\bar{w}\|_{L^\infty(V)} \|\bar{w}\|_{L^2(H^2(\Omega))} + \|v\|_{L^\infty(V)} \|v\|_{L^2(H^2(\Omega))} \right) \\ &\leq CT^{1/2} (B(\tau)^2 + R^2)^2. \end{aligned}$$

De forma similar, acotamos los términos correspondientes a la velocidad vertical como sigue:

$$\begin{aligned} \|(\bar{w}_3 + v_3)\partial_z(\bar{w} + v)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|\bar{w}_3 + v_3\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\partial_z(\bar{w} + v)\|_{L^4(\Omega)}^2 \\ &\leq 4 \left(\|\bar{w}_3\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|v_3\|_{L^4(\Omega)}^2 \right) \left(\|\partial_z \bar{w}\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|\partial_z v\|_{L^4(\Omega)}^2 \right) \\ &\leq 4D_{max}^2 \left(\|\partial_x \bar{w}\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|\partial_x v\|_{L^4(\Omega)}^2 \right) \left(\|\partial_z \bar{w}\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|\partial_z v\|_{L^4(\Omega)}^2 \right) \\ &\leq 4G^2 D_{max}^2 \left(\|\bar{w}\|_{H^2(\Omega)} \|\bar{w}\|_V + \|v\|_{H^2(\Omega)} \|v\|_V \right)^2. \end{aligned}$$

En consecuencia, integrando en $(0, T)$,

$$\begin{aligned} I_3 &\leq 4CD_{max}^2 \left(\|\bar{w}\|_{L^2(H^2(\Omega))} \|\bar{w}\|_{L^\infty(V)} + \|v\|_{L^2(H^2(\Omega))} \|v\|_{L^\infty(V)} \right)^2 \\ &\leq CD_{max}^2 (B(\tau)^2 + R^2)^2. \end{aligned}$$

En las últimas estimaciones no podemos obtener potencias de T , y esta es la principal dificultad de nuestro razonamiento. En efecto, insertando todas las estimaciones anteriores en (2.39),

$$\|G(\bar{w}, v)\|_{L^2(L^2(\Omega))}^2 \leq C \left\{ \|F\|_{L^2(L^2(\Omega))}^2 + (B(\tau)^2 + R^2)^2 (D_{max}^2 + T^{1/2}) \right\} \quad (2.40)$$

Entonces, de (2.37) y (2.40),

$$\begin{aligned} \|w\|_{L^\infty(V)}^2 &+ \|w\|_{L^2(D(A))}^2 + \|\partial_t w\|_{L^2(H)}^2 \leq \|u_0\|_V^2 \\ &+ C \left\{ \|F\|_{L^2(L^2(\Omega))}^2 + (B(\tau)^2 + R^2)^2 (D_{max}^2 + T^{1/2}) \right\} \end{aligned} \quad (2.41)$$

La desigualdad anterior puede escribirse como:

$$\|w\|_{L^\infty(V)}^2 + \|w\|_{L^2(H^2(\Omega))}^2 + \|\partial_t w\|_{L^2(H)}^2 \leq aR^4 + bR^2 + c,$$

donde, para alguna constante $C = C(\Omega, \nu_h, \nu_v) > 0$,

$$\begin{aligned} a &= C \left(D_{max}^2 + T^{1/2} \right), \\ b &= 2CB(\tau)^2 \left(D_{max}^2 + T^{1/2} \right), \\ c &= \|u_0\|_V^2 + C \left\{ \|F\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + B(\tau)^4 \left(D_{max}^2 + T^{1/2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Eligiendo entonces $R^2 \geq \|u_0\|_V^2$ (luego $Y(T) \neq \emptyset$, $\forall T > 0$), obtenemos $w \in Y(T)$ siempre y cuando se verifique:

$$aR^4 + bR^2 + c \leq R^2. \quad (2.42)$$

Veamos ahora que para datos cualesquiera F , τ y u_0 , se verifica (2.42). Una condición necesaria para que se verifique (2.42) es $b < 1$. Pero también podemos encontrar condiciones suficientes. En efecto, una posibilidad es imponer las siguientes tres condiciones:

Condición 1: D_{max} y T son suficientemente pequeños para hacer

$$b \leq \frac{1}{2}.$$

Por ejemplo, $2CB(\tau)^2 D_{max}^2 \leq 1/4$ y $2CB(\tau)^2 T^{1/2} \leq 1/4$.

Condición 2: R^2 es suficientemente grande para que

$$c \leq \frac{1}{4}R^2.$$

Condición 3: a suficientemente pequeño (es decir, D_{max} y T suficientemente pequeños) para que

$$aR^2 \leq \frac{1}{4}.$$

En conclusión, podemos encontrar un $T_* \in (0, T]$ y $D_{max} > 0$ suficientemente pequeños, tales que para algún R suficientemente grande, tenemos que $\Phi(Y(T_*)) \subset Y(T_*)$.

2) $Y(T_*)$ es relativamente compacto en X_{T_*} .

Sea $W_{T_*} = \{\bar{w}; \bar{w} \in L^2(0, T_*; D(A)) \text{ and } \partial_t \bar{w} \in L^2(0, T_*; H)\}$. $Y(T_*)$ es un conjunto acotado de W_{T_*} , y W_{T_*} se inyecta de forma compacta en X_{T_*} . Por tanto, $Y(T_*)$ es relativamente compacto en X_{T_*} .

3) $Y(T_*)$ es cerrado en X_{T_*} .

Sea $\{\bar{w}_n\}_{n \geq 1} \subseteq Y(T_*)$ tal que $\bar{w}_n \rightarrow \bar{w}$ fuertemente en X_{T_*} (es decir, en la norma $L^2(0, T; V)$). Veamos que $\bar{w} \in Y(T_*)$. Como $\{\bar{w}_n\}_{n \geq 1}$ está acotado en W_{T_*} , en particular, existe una subsecuencia $\{\bar{w}_k\}$ of $\{\bar{w}_n\}$ tal que:

$$\begin{aligned} \bar{w}_k &\rightharpoonup \bar{w} && \text{en } L^2(0, T_*; D(A) \cap V), \\ \partial_t \bar{w}_k &\rightharpoonup \partial_t \bar{w} && \text{en } L^2(0, T_*; H), \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde \rightharpoonup denota la convergencia débil. Entonces, aplicando un resultado de compacidad de tipo Aubin-Lions, [30]:

$$\bar{w}_k \longrightarrow \bar{w} \quad \text{en } C([0, T_*]; H).$$

En consecuencia, como $\bar{w}_k(0) = u_0, \forall k \geq 1$, entonces $\bar{w}(0) = u_0$. Por semicontinuidad inferior de la norma,

$$\begin{aligned} & \|\bar{w}\|_{L^\infty(V)}^2 + \|\bar{w}\|_{L^2(D(A))}^2 + \|\partial_t \bar{w}\|_{L^2(H)}^2 \\ & \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \left(\|\bar{w}_k\|_{L^\infty(V)}^2 + \|\bar{w}_k\|_{L^2(D(A))}^2 + \|\partial_t \bar{w}_k\|_{L^2(H)}^2 \right) \leq R^2, \end{aligned}$$

luego $\bar{w} \in Y(T_*)$, y por tanto $Y(T_*)$ es cerrado en X_{T_*} . Esto junto con **2)**, implica que $Y(T_*)$ es compacto en X_{T_*} .

4) $\Phi : Y(T_*) \longrightarrow Y(T_*)$ es continuo respecto a la topología X_{T_*} .

Sea $\{\bar{w}_n\}_{n \geq 1} \subseteq Y(T_*)$ tal que $\bar{w}_n \rightarrow \bar{w}$ fuertemente en X_{T_*} . Probemos que:

$$\Phi(\bar{w}_n) = w_n \longrightarrow \Phi(\bar{w}) = w \quad \text{fuertemente en } X_{T_*}.$$

Como también $\{w_n\}_{n \geq 1} \subseteq Y(T_*)$, existe una subsucesión $\{\bar{w}_k\}$ de $\{\bar{w}_n\}$ y otra $\{w_k\}$ de $\{w_n\}$ tales que:

$$\begin{aligned} \bar{w}_k & \rightharpoonup \bar{w}, \quad \bar{w} \in W_{T_*} \\ w_k & \rightharpoonup \tilde{w}, \quad \tilde{w} \in W_{T_*} \end{aligned}$$

(cada una de las convergencias anteriores lo es en el sentido de (2.43)).

Si consideramos el sistema verificado por w_k y pasamos al límite cuando $k \rightarrow +\infty$, obtenemos que \tilde{w} es una solución del problema (P_l) con segundo miembro $G(\bar{w}, v)$. Por unicidad, $\tilde{w} = \Phi(\bar{w}) = w$. Por tanto, $w_k \longrightarrow w$ débilmente en W_{T_*} y, por compacidad, $w_k \longrightarrow w$ fuertemente en X_{T_*} . Finalmente, toda la sucesión converge.

5) Existencia de un punto fijo. Como $Y(T_*)$ es un conjunto compacto convexo de X_{T_*} y Φ es continua respecto de la topología X_{T_*} , aplicando el Teorema de Schauder deducimos la existencia de un punto fijo w de Φ en $Y(T_*)$. Por tanto, w es una solución fuerte de (P) en $(0, T_*)$ (si T_* verifica junto con D_{max} las condiciones 1 y 3). ■

Nota 2.7.1 De nuevo, en el caso 3D no podemos acotar el término de convección vertical (no lineal) $\|\bar{w}_3 \partial_z \bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2$ en función de la regularidad fuerte. Concretamente, obtenemos una cota de la forma:

$$\begin{aligned} \|\bar{w}_3 \partial_z \bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 & \leq \|\bar{w}_3\|_{L^4(\Omega)}^4 \|\partial_z \bar{w}\|_{L^4(\Omega)}^2 \\ & \leq D_{max}^2 \|\nabla_H \cdot \bar{w}\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\partial_z \bar{w}\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq C D_{max}^2 \|\bar{w}\|_{H^2(\Omega)}^3 \|\bar{w}\|_V, \end{aligned}$$

donde hemos aplicado de nuevo la desigualdad (2.34). Observemos que dicho término no se puede acotar usando la definición de $Y(T)$. En consecuencia, no podemos continuar con el argumento de punto fijo.

2.8 Unicidad de solución débil/fuerte (demostración del Teorema 2.6)

Partiendo de una solución débil u del sistema (EP) (ver Definición 2.1), en particular u verifica la **desigualdad de energía**:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|u(s)\|_V^2 ds \\ \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \langle F, u \rangle_\Omega ds + \int_0^t \langle \tau, u \rangle_{\Gamma_s} ds, \quad \text{c.p.d. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Supongamos que existe otra solución débil \bar{u} más regular (asociada a los mismos datos u_0 y F). La idea es encontrar bajo qué condiciones adicionales de regularidad, sólo para \bar{u} , tenemos que $u \equiv \bar{u}$. Observemos que, partiendo de la formulación variacional débil de u (Definición 2.1), es fácil verificar que $\partial_t u \in L^{4/3}(0, T; W')$, donde $W = \{\psi \in V; \partial_z \psi \in L^4(\Omega)\}$. De hecho, si queremos tomar $\varphi = \bar{u}$ como función test en la formulación variacional débil de u , el único término difícil es $\int_\Omega u_3 \partial_z \bar{u} u \, d\Omega$. Entonces, con la regularidad adicional del Teorema 2.6 para \bar{u} (recordemos $\partial_z \bar{u} \in L^4(0, T; L^4(\Omega))$) dicho término tiene ya sentido, luego verifica la siguiente igualdad: c.p.d. $t \in (0, T)$,

$$\begin{aligned} \langle u(t), \bar{u}(t) \rangle_\Omega - \int_0^t \langle \partial_t \bar{u}, u \rangle_\Omega ds + \int_0^t \int_\Omega (\nu_h \partial_x u \partial_x \bar{u} + \nu_v \partial_z u \partial_z \bar{u}) \, d\Omega \, ds \\ = \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \langle F, \bar{u} \rangle_\Omega ds + \int_0^t \int_\Omega (u \partial_x \bar{u} + u_3 \partial_z \bar{u}) u \, d\Omega \, ds + \int_0^t \langle \tau, \bar{u} \rangle_{\Gamma_s} ds. \end{aligned} \quad (2.45)$$

A continuación, escribimos el sistema diferencial para (\bar{u}, \bar{p}_s) como:

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{u} + u \partial_x \bar{u} + u_3 \partial_z \bar{u} - \nu_h \partial_{xx}^2 \bar{u} - \nu_v \partial_{zz}^2 \bar{u} + \partial_x \bar{p}_s \\ = F + (u - \bar{u}) \partial_x \bar{u} + (u_3 - \bar{u}_3) \partial_z \bar{u}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Gracias a la regularidad adicional de \bar{u} , podemos multiplicar (2.46) por u e integrar sobre $\Omega \times (0, t)$:

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle \partial_t \bar{u}, u \rangle_\Omega ds + \int_0^t \int_\Omega \left\{ (u \partial_x \bar{u} + u_3 \partial_z \bar{u}) u + \nu_h \partial_x \bar{u} \partial_x u + \nu_v \partial_z \bar{u} \partial_z u \right\} \, d\Omega \, ds \\ = \int_0^t \langle F, u \rangle_\Omega ds + \int_0^t \int_\Omega \left((u - \bar{u}) \partial_x \bar{u} + (u_3 - \bar{u}_3) \partial_z \bar{u} \right) u \, d\Omega \, ds + \int_0^t \langle \tau, u \rangle_{\Gamma_s} ds \end{aligned} \quad (2.47)$$

Sumando (2.45) y (2.47), los términos $\int_0^t \langle \partial_t \bar{u}, u \rangle_\Omega ds$ y $\int_0^t \int_\Omega (u \partial_x \bar{u} + u_3 \partial_z \bar{u}) u \, d\Omega \, ds$ se cancelan, obteniendo:

$$\begin{aligned} \langle u(t), \bar{u}(t) \rangle_\Omega + \int_0^t \int_\Omega 2(\nu_h \partial_x u \partial_x \bar{u} + \nu_v \partial_z u \partial_z \bar{u}) \, d\Omega \, ds \\ = \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \langle F, u + \bar{u} \rangle_\Omega ds + \int_0^t \langle \tau, u + \bar{u} \rangle_{\Gamma_s} ds \\ + \int_0^t \int_\Omega \left((u - \bar{u}) \partial_x \bar{u} + (u_3 - \bar{u}_3) \partial_z \bar{u} \right) u \, d\Omega \, ds \quad \text{c.p.d. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Finalmente, multiplicamos (2.46) por \bar{u} e integramos sobre $\Omega \times (0, t)$, obteniendo la igualdad de energía:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\bar{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\bar{u}(s)\|_{\bar{V}}^2 ds &= \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \langle F, \bar{u} \rangle_{\Omega} ds + \int_0^t \langle \tau, \bar{u} \rangle_{\Gamma_s} ds \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} \left((u - \bar{u}) \partial_x \bar{u} + (u_3 - \bar{u}_3) \partial_z \bar{u} \right) \bar{u} d\Omega ds, \end{aligned} \quad (2.49)$$

donde el último término que aparece a la derecha de (2.49) se anula (debido a la condición de divergencia nula). Entonces, haciendo (2.44) + (2.49) - (2.48), se obtiene: *c.p.d.* $t \in (0, T)$,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|u(s) - \bar{u}(s)\|_{\bar{V}}^2 ds \\ &\leq - \int_0^t \int_{\Omega} \left((u - \bar{u}) \partial_x \bar{u} + (u_3 - \bar{u}_3) \partial_z \bar{u} \right) u d\Omega ds \\ &= - \int_0^t \int_{\Omega} \left((u - \bar{u}) \partial_x \bar{u} + (u_3 - \bar{u}_3) \partial_z \bar{u} \right) (u - \bar{u}) d\Omega ds \\ &= - \int_0^t \int_{\Omega} |u - \bar{u}|^2 \partial_x \bar{u} d\Omega ds - \int_0^t \int_{\Omega} (u_3 - \bar{u}_3) \partial_z \bar{u} (u - \bar{u}) d\Omega ds \equiv I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Estimamos los términos I_i (usando los lemas de la Sección 2.3), como sigue:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_0^t \|\partial_x \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \|u - \bar{u}\|_{L^4(\Omega)}^2 ds \\ &\leq \int_0^t \|\partial_x \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla_H(u - \bar{u})\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\leq \frac{1}{4} \int_0^t \|u - \bar{u}\|_{\bar{V}}^2 ds + C \int_0^t \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\partial_x \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ I_2 &\leq \int_0^t \|u - \bar{u}\|_{L^4(\Omega)} \|\partial_z \bar{u}\|_{L^4(\Omega)} \|u_3 - \bar{u}_3\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\leq D_{max} \int_0^t \|\nabla_H(u - \bar{u})(s)\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|u - \bar{u}(s)\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\partial_z \bar{u}\|_{L^4(\Omega)} \|\partial_x(u - \bar{u})(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\leq C D_{max} \int_0^t \|u - \bar{u}\|_{\bar{V}}^{3/2} \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\partial_z \bar{u}\|_{L^4(\Omega)} ds \\ &\leq \frac{1}{4} \int_0^t \|u - \bar{u}\|_{\bar{V}}^2 ds + C D_{max}^4 \int_0^t \|\partial_z \bar{u}\|_{L^4(\Omega)}^4 \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \end{aligned}$$

Por tanto, la desigualdad (2.50) se convierte en: *c.p.d.* $t \in (0, T)$,

$$\begin{aligned} &\|u(t) - \bar{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|u(s) - \bar{u}(s)\|_{\bar{V}}^2 ds \\ &\leq C \int_0^t \left(\|\partial_x \bar{u}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + D_{max}^4 \|\partial_z \bar{u}(s)\|_{L^4(\Omega)}^4 \right) \|u(s) - \bar{u}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \end{aligned} \quad (2.51)$$

El lema de Gronwall permite concluir la unicidad. ■

Nota 2.8.1 En el caso 3D, aplicando de nuevo (2.34), podemos obtener las cotas siguientes para I_1 y I_2 :

$$I_1 \leq \frac{1}{4} \int_0^t \|(\vec{u} - \vec{u})(s)\|_V^2 ds + C \int_0^t \|\nabla_H \vec{u}(s)\|_{L^2(\Omega)}^4 \|(\vec{u} - \vec{u})(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds,$$

$$I_2 \leq \frac{1}{4} \int_0^t \|\vec{u}(s) - \vec{u}(s)\|_V^2 ds + C \int_0^t \|\partial_z \vec{u}(s)\|_{L^4(\Omega)}^8 \|\vec{u}(s) - \vec{u}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

Para obtener unicidad en este caso, tendríamos que imponer la regularidad adicional, sólo para \vec{u} :

$$\nabla_H \vec{u} \in L^4(0, T; L^2(\Omega)) \quad \text{and} \quad \partial_z \vec{u} \in L^8(0, T; L^4(\Omega)^2).$$

Notemos que la regularidad fuerte no implica que se verifique la segunda hipótesis.

2.9 Algunos problemas abiertos

1.- La primera pregunta que se plantea es qué ocurre en dominios sin talud, o sea, dominios con playas. Si observamos atentamente el método que hemos usado a lo largo de este capítulo, veremos que tendríamos que encontrar un resultado análogo al de Ziane (Lema 2.11), que es en el que se basa todo. La respuesta no parece evidente, ya que no permite un razonamiento de simetría que nos lleve el dominio dado a un dominio regular en el que la teoría de Stokes clásica se pueda aplicar.

Dar una respuesta a esta pregunta sería interesante, sobre todo desde el punto de vista numérico, para poder simular dominios “reales”, con garantías para poder encontrar resultados de convergencia y estimaciones de error.

2.- Otro problema abierto muy interesante es el de unicidad de solución débil (sin hipótesis adicionales de regularidad). Recordemos que la unicidad de solución débil es cierta para el problema de Navier-Stokes 2D, aunque en el caso de Ecuaciones Primitivas no podemos asegurarla a causa de la pérdida de regularidad de la convección vertical. De todas formas, en el Capítulo 5, daremos una respuesta afirmativa a esta cuestión, al cambiar las condiciones de contorno sobre el fondo.

Capítulo 3

Regularidad y unicidad a través de las estimaciones anisótropas

3.1 Introducción.

Seguimos en este capítulo estudiando el problema de la regularidad y unicidad de las Ecuaciones Primitivas, que en el caso $2D$ se ha estudiado en el capítulo anterior.

La mayoría de los resultados existentes para estas ecuaciones han sido estudiados por medio de estimaciones isotropas (es decir, usando normas con la misma regularidad en todas las direcciones espaciales), ver [4], [34], [29] y [25].

En el capítulo anterior y para dominios 2-dimensionales, hemos obtenido (ver también [25]) existencia de solución global fuerte (ver Definición 2.2) para datos pequeños (por un método de Galerkin), solución fuerte local en tiempo para profundidad pequeña (mediante un teorema de punto fijo) y unicidad de solución débil suponiendo que existe una solución fuerte. También se vió que los resultados para el caso $3D$ no se podían obtener usando ese mismo tipo de estimaciones.

3.1.1 Los resultados principales

En este capítulo, usaremos estimaciones anisótropas que nos permitirán obtener los resultados que exponemos a continuación. Destacar también, que ahora vamos a especificar las condiciones de pequeñez de los datos, respecto de los coeficientes de viscosidad, y que supondremos datos un poco más generales (básicamente, suma de funciones L^2 y L^∞ en tiempo). Las definiciones de solución débil y fuerte, así como los espacios de funciones ya han sido dados en el capítulo anterior.

En primer lugar, obtenemos existencia de solución global fuerte para datos pequeños, dada por el siguiente teorema:

Teorema 3.1 (Solución global fuerte para datos pequeños) *Sea $\omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1$ o 2) un dominio C^3 y $D \in C^3(\bar{\omega})$ tal que $D \geq D_{\min} > 0$ en $\bar{\omega}$. Supongamos que $\vec{u}_0 \in V$, $\vec{F} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$ con $\vec{f}_1 \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^d)$ y $\vec{f}_2 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^d)$, $\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$ con $\vec{\tau}_1 \in L^2(0, T; H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)^d)$ y $\vec{\tau}_2 \in L^\infty(0, T; H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)^d)$ para algún $\varepsilon > 0$, tal que $\partial_t \vec{\tau}_1 \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_s)^d)$ y $\partial_t \vec{\tau}_2 \in L^\infty(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_s)^d)$. Si, además los datos verifican las siguientes “condiciones de pequeñez”:*

$$(H) \left\{ \begin{array}{ll} \|\vec{f}_1\|_{L_T^2(L^2)} < c\nu^{3/2}, & \|\vec{f}_2\|_{L_T^\infty(L^2)} < c\nu^2, \\ \|\vec{\tau}_1\|_{L_T^2(H_0^{1/2+\varepsilon})} < c\nu^{3/2}, & \|\partial_t \vec{\tau}_1\|_{L_T^2(H^{-1/2})} < c\nu^{5/2}, \\ \|\vec{\tau}_2\|_{L_T^\infty(H_0^{1/2+\varepsilon})} < c\nu^2, & \|\partial_t \vec{\tau}_2\|_{L_T^\infty(H^{-1/2})} < c\nu^3, \\ \|\vec{u}_0\|_{H^1} < c\nu\sqrt{\frac{\nu}{\bar{\nu}}}, & \|\vec{\tau}_1(0)\|_{H^{-1/2}} < c\nu^2\sqrt{\frac{\nu}{\bar{\nu}}}, \\ \|\vec{\tau}_2(0)\|_{H^{-1/2}} < c\nu^2\sqrt{\frac{\nu}{\bar{\nu}}}, & \end{array} \right.$$

donde $\nu = \min\{\nu_h, \nu_v\}$, $\bar{\nu} = \max\{\nu_h, \nu_v\}$ y c es una constante suficientemente pequeña (que sólo depende de Ω), entonces existe una (única) solución fuerte (\vec{u}, p_s) de (EP) en $(0, T)$ (p_s es única salvo una función aditiva que sólo depende de t).

Nota 3.1.1 Denotamos $L_T^q(L^p) = L^q(0, T; L^p(\Omega))$, donde T puede ser igual a $+\infty$, mientras que $p, q \in [1, +\infty]$; $H^{-1/2} = H^{-1/2}(\Gamma_s)$ y $H_0^{1/2+\varepsilon} = H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)$.

En segundo lugar, obtenemos existencia de solución local fuerte para datos cualesquiera. En el caso $2D$, este resultado mejora el que aparece en el capítulo anterior, ya que elimina la hipótesis de pequeñez de la función profundidad. El caso $3D$ es nuevo.

Teorema 3.2 (Solución local fuerte para datos cualesquiera) Sea $\omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1$ o 2) un dominio C^3 y $D \in C^3(\bar{\omega})$ tal que $D \geq D_{\min} > 0$ en $\bar{\omega}$. Supongamos que $\vec{u}_0 \in V$, $\vec{F} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^d)$ y $\vec{\tau} \in L^2(0, T; H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)^d)$, para algún $\varepsilon > 0$, tal que $\partial_t \vec{\tau} \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_s)^d)$. Entonces, existe $T_* \in (0, T]$ y una única solución fuerte (\vec{u}, p_s) de (EP) en $(0, T_*)$.

En tercer lugar, obtenemos unicidad de solución débil suponiendo la existencia de una solución fuerte. La noción precisa del espacio $L_z^\infty L_{\vec{x}}^2$ se dará en la Subsección 3.3.1.

Teorema 3.3 (Unicidad de solución débil/fuerte) Supongamos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Sea \vec{u} una solución débil de (EP) en $(0, T)$. Si existe una solución débil \vec{u} de (EP) en $(0, T)$ con las mismas condiciones iniciales, tal que verifica la regularidad adicional:

$$\begin{aligned} \nabla_H \vec{u} &\in L^2(0, T; L_z^\infty L_{\vec{x}}^2) \\ \partial_z \vec{u} &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)^2), \end{aligned} \tag{3.1}$$

entonces ambas soluciones coinciden en $[0, T)$.

Y finalmente, obtenemos convergencia de la solución global fuerte hacia una solución fuerte estacionaria (bajo hipótesis de pequeñez sobre los datos), cuando $t \uparrow +\infty$.

Teorema 3.4 (Convergencia de la solución 3D de evolución hacia la solución 3D estacionaria) Sea \vec{u} una solución fuerte de (EP) en $(0, +\infty)$ con segundo miembro $\vec{F} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$, donde $\vec{f}_1 \in L^2(0, +\infty; L^2(\Omega)^2)$ y $\vec{f}_2 \in L^2(\Omega)^2$ es independiente de t , y la condición de Newman $\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$, donde $\vec{\tau}_1 \in L^2(0, +\infty; H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)^2)$ para algún $\varepsilon > 0$, tal que $\partial_t \vec{\tau}_1 \in$

$L^2(0, +\infty; H^{-1/2}(\Gamma_s)^2)$, y $\vec{\tau}_2 \in H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)^2$ para algún $\varepsilon > 0$. Suponiendo “condiciones de pequeñez” (H) con $T = +\infty$, si \vec{v} es la solución fuerte estacionaria de (EP) con segundo miembro \vec{f}_2 y condición de contorno Neumann $\vec{\tau}_2$, entonces $\vec{u}(t) \rightarrow \vec{v}$ en la norma $H^1(\Omega)$ cuando $t \uparrow +\infty$.

3.1.2 Resultados auxiliares

Presentamos aquí algunos resultados correspondientes al problema lineal de evolución (Stokes con presión hidrostática), también llamado problema de **Stokes hidrostático**, (S). Algunos de ellos ya aparecieron en el capítulo anterior (allí se llamó (L)), pero en este caso los reescribimos con una dependencia más explícita de las constantes que aparecen respecto de las viscosidades máxima ($\bar{\nu}$) y mínima (ν). En consecuencia, denotaremos por C las diferentes constantes positivas, siempre independientes de ν_h y ν_v .

$$(S) \begin{cases} \partial_t \vec{v} - \nu_h \Delta_H \vec{v} - \nu_v \partial_{zz}^2 \vec{v} + \nabla_H q_s = \vec{f} & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \nabla_H \cdot \langle \vec{v} \rangle = 0 & \text{en } (0, T) \times \omega, \\ \vec{v}|_{t=0} = \vec{v}_0 & \text{en } \Omega, \\ \nu_v \partial_z \vec{v} = \vec{\tau} \text{ sobre } (0, T) \times \Gamma_s, \quad \vec{v} = \vec{0} & \text{sobre } (0, T) \times (\Gamma_b \cup \Gamma_l), \end{cases}$$

y el problema estacionario asociado a (S), que llamaremos (S_{st}) .

Teorema 3.5 (Solución débil de (S_{st})) Sea $\omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d = 1$ o 2) y sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$, definido como en (2.1), un dominio Lipschitz-continuo. Si $\vec{f} \in H_{b,l}^{-1}(\Omega)^d$ y $\vec{\tau} \in H^{-1/2}(\Gamma_s)^d$, entonces el problema (S_{st}) tiene una única solución $\vec{v} \in H^1(\Omega)^d$. Además, existe una constante $C = C(\Omega) > 0$ tal que

$$\|\vec{v}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\nu^2} \left\{ \|\vec{\tau}\|_{H^{-1/2}(\Gamma_s)}^2 + \|\vec{f}\|_{H_{b,l}^{-1}(\Omega)}^2 \right\}. \quad (3.2)$$

En [4], [15] y [29], hay diferentes demostraciones de este resultado.

Teorema 3.6 (Solución débil de (S)) ([34]) Sea ω y Ω como en el Teorema 3.5. Si $\vec{f} \in L^2(0, T; H_{b,l}^{-1}(\Omega)^d)$ y $\vec{\tau} \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_s)^d)$, entonces existe una (única) solución débil \vec{v} del problema (S) en $(0, T)$.

Teorema 3.7 (Solución fuerte de (S_{st})) ([50]) Sea $\omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d = 1$ o 2) un dominio C^3 y $D \in C^3(\bar{\omega})$ con $D \geq D_{\min} > 0$ en $\bar{\omega}$. Si $\vec{f} \in L^2(\Omega)^d$ y $\vec{\tau} \in H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)^d$ (para algún $\varepsilon > 0$), entonces existe una (única) solución fuerte \vec{v} de (S_{st}) (es decir, $\vec{v} \in H^2(\Omega)^d \cap V$). Además, existe una constante $C = C(\Omega) > 0$ tal que:

$$\|\vec{v}\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\nu^2} \left\{ \|\vec{f}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\vec{\tau}\|_{H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)}^2 \right\}. \quad (3.3)$$

Finalmente, el siguiente resultado proporciona una versión lineal del Teorema 3.1 pero para datos cualesquiera y se usará más adelante en el caso $\vec{\tau}_2 = \vec{0}$ y $\vec{f}_2 = \vec{0}$ para “levantar” los datos \vec{v}_0 , $\vec{\tau}_1$ y \vec{f}_1 .

Teorema 3.8 (Solución fuerte de (S)) Sea $\omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d = 1$ o 2) un dominio C^3 y $D \in C^3(\bar{\omega})$ con $D \geq D_{\min} > 0$ en $\bar{\omega}$. Si $\vec{v}_0 \in V$, $\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$ con $\vec{f}_1 \in L^2((0, T) \times \Omega)^d$ y $\vec{f}_2 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^d)$, $\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$ con $\vec{\tau}_1 \in L^2(0, T; H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)^d)$ y $\vec{\tau}_2 \in L^\infty(0, T; H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)^d)$ (para algún $\varepsilon > 0$), tal que $\partial_t \vec{\tau}_1 \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_s)^d)$ y $\partial_t \vec{\tau}_2 \in L^\infty(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_s)^d)$, entonces existe una (única) solución fuerte \vec{v} de (S) en $(0, T)$. Además, existe una constante $C = C(\Omega) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\|_{L_T^\infty(H^1)}^2 &\leq \frac{\bar{\nu}}{\nu} \left\{ \|\vec{v}_0\|_{H^1}^2 + \frac{C}{\nu^2} \left(\|\vec{\tau}_1(0)\|_{H^{-1/2}}^2 + \|\vec{\tau}_2(0)\|_{H^{-1/2}}^2 \right) \right\} \\ &+ \frac{C}{\nu} \left\{ \|\vec{f}_1\|_{L_T^2(L^2)}^2 + \|\vec{\tau}_1\|_{L_T^2(H_0^{1/2+\varepsilon})}^2 \right\} + \frac{C}{\nu^3} \|\partial_t \vec{\tau}_1\|_{L_T^2(H^{-1/2})}^2 \\ &+ \frac{C}{\nu^2} \left\{ \|\vec{f}_2\|_{L_T^\infty(L^2)}^2 + \|\vec{\tau}_2\|_{L_T^\infty(H_0^{1/2+\varepsilon})}^2 \right\} + \frac{C}{\nu^4} \|\partial_t \vec{\tau}_2\|_{L_T^\infty(H^{-1/2})}^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\|_{L_T^2(H^2)}^2 &\leq \frac{\bar{\nu}}{\nu} \left\{ \frac{1}{\nu} \|\vec{v}_0\|_{H^1}^2 + \frac{C}{\nu^3} \left(\|\vec{\tau}_1(0)\|_{H^{-1/2}}^2 + \|\vec{\tau}_2(0)\|_{H^{-1/2}}^2 \right) \right\} \\ &+ \frac{C}{\nu^2} \left\{ \|\vec{f}_1\|_{L_T^2(L^2)}^2 + \|\vec{\tau}_1\|_{L_T^2(H_0^{1/2+\varepsilon})}^2 \right\} + \frac{C}{\nu^4} \|\partial_t \vec{\tau}_1\|_{L_T^2(H^{-1/2})}^2 \\ &+ \frac{CT}{\nu^2} \|\vec{f}_2\|_{L_T^\infty(L^2)}^2 + \frac{CT}{\nu^2} \|\vec{\tau}_2\|_{L_T^\infty(H_0^{1/2+\varepsilon})}^2 + \frac{CT}{\nu^4} \|\partial_t \vec{\tau}_2\|_{L_T^\infty(H^{-1/2})}^2, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \|\partial_t \vec{v}\|_{L_T^2(L^2)}^2 &\leq \frac{\bar{\nu}}{\nu} \left\{ \nu \|\vec{v}_0\|_{H^1}^2 + \frac{C}{\nu} \left(\|\vec{\tau}_1(0)\|_{H^{-1/2}}^2 + \|\vec{\tau}_2(0)\|_{H^{-1/2}}^2 \right) \right\} \\ &+ C \|\vec{f}_1\|_{L_T^2(L^2)}^2 + \frac{C}{\nu^2} \|\partial_t \vec{\tau}_1\|_{L_T^2(H^{-1/2})}^2 \\ &+ CT \|\vec{f}_2\|_{L_T^\infty(L^2)}^2 + \frac{CT}{\nu^2} \|\partial_t \vec{\tau}_2\|_{L_T^\infty(H^{-1/2})}^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Nota 3.1.2 Recordemos que el término de Coriolis se ha omitido en los cálculos, ya que para la demostración de los resultados que presentamos en esta Memoria no supone ninguna dificultad adicional.

Demostración del Teorema 3.8: Una prueba de la existencia se puede ver, como hemos dicho antes, en el capítulo anterior. Aquí, sólo esbozaremos la demostración de las estimaciones de dependencia continua de la solución respecto de los datos, especificando la dependencia de dichas estimaciones respecto de las viscosidades.

Consideramos $\vec{v} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, donde $\vec{e}_i(t)$ ($i = 1, 2$) son las soluciones de los problemas estacionarios:

$$(S_i) \begin{cases} -\nu_h \Delta_H \vec{e}_i - \nu_v \partial_{zz}^2 \vec{e}_i + \nabla_H q_i = \vec{0} \text{ en } \Omega, & \nabla_H \cdot \langle \vec{e}_i \rangle = 0 \text{ en } \omega, \\ \nu_v \partial_z \vec{e}_i = \vec{\tau}_i(t) \text{ sobre } \Gamma_s, & \vec{e}_i = \vec{0} \text{ sobre } \Gamma_b \cup \Gamma_l, \end{cases}$$

y \vec{y}_1, \vec{y}_2 son las soluciones de los problemas de evolución:

$$(E_1) \begin{cases} \partial_t \vec{y}_1 - \nu_h \Delta_H \vec{y}_1 - \nu_v \partial_{zz}^2 \vec{y}_1 + \nabla_H p_1 = \vec{f}_1 - \partial_t \vec{e}_1 \text{ en } (0, T) \times \Omega, \\ \nabla_H \cdot \langle \vec{y}_1 \rangle = 0 \text{ en } (0, T) \times \omega, & \vec{y}_1|_{t=0} = \vec{v}_0 - \vec{e}_1(0) - \vec{e}_2(0) \text{ en } \Omega, \\ \nu_v \partial_z \vec{y}_1 = \vec{0} \text{ sobre } (0, T) \times \Gamma_s, & \vec{y}_1 = \vec{0} \text{ sobre } (0, T) \times (\Gamma_b \cup \Gamma_l), \end{cases}$$

$$(E_2) \begin{cases} \partial_t \vec{y}_2 - \nu_h \Delta_H \vec{y}_2 - \nu_v \partial_{zz}^2 \vec{y}_2 + \nabla_{HP} p_2 = \vec{f}_2 - \partial_t \vec{e}_2 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \nabla_H \cdot \langle \vec{y}_2 \rangle = 0 & \text{en } (0, T) \times \omega, \quad \vec{y}_2|_{t=0} = \vec{0} & \text{en } \Omega, \\ \nu_v \partial_z \vec{y}_2 = \vec{0} & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_s, \quad \vec{y}_2 = \vec{0} & \text{sobre } (0, T) \times (\Gamma_b \cup \Gamma_l), \end{cases}$$

Entonces, tenemos las siguientes estimaciones para \vec{e}_1 y \vec{e}_2 :

$$\|\vec{e}_1(t)\|_{H^1}^2 \leq \frac{C}{\nu^2} \|\vec{\tau}_1(t)\|_{H^{-1/2}}^2, \quad \forall t \in [0, T],$$

luego

$$\begin{aligned} \|\vec{e}_1\|_{L_T^\infty(H^1)}^2 &\leq \frac{C}{\nu^2} \left\{ \|\vec{\tau}_1(0)\|_{H^{-1/2}}^2 + 2 \int_0^t \|\vec{\tau}_1\|_{H^{-1/2}} \|\partial_t \vec{\tau}_1\|_{H^{-1/2}} \right\} \\ &\leq \frac{C}{\nu^2} \|\vec{\tau}_1(0)\|_{H^{-1/2}}^2 + \frac{C}{\nu^3} \|\partial_t \vec{\tau}_1\|_{L_t^2(H^{-1/2})}^2 + \frac{C}{\nu} \|\vec{\tau}_1\|_{L_t^2(H_0^{1/2+\epsilon})}^2, \\ \|\vec{e}_1\|_{L_T^2(H^2)}^2 &\leq \frac{C}{\nu^2} \|\vec{\tau}_1\|_{L_T^2(H_0^{1/2+\epsilon})}^2, \quad \|\partial_t \vec{e}_1\|_{L_T^2(H^1)}^2 \leq \frac{C}{\nu^2} \|\partial_t \vec{\tau}_1\|_{L_T^2(H^{-1/2})}^2, \\ \|\vec{e}_2\|_{L_T^\infty(H^1)}^2 &\leq \frac{C}{\nu^2} \|\vec{\tau}_2\|_{L_T^\infty(H^{-1/2})}^2 \\ \|\vec{e}_2\|_{L_T^2(H^2)}^2 &\leq \frac{CT}{\nu^2} \|\vec{\tau}_2\|_{L_T^\infty(H_0^{1/2+\epsilon})}^2, \quad \|\partial_t \vec{e}_2\|_{L_T^2(H^1)}^2 \leq \frac{CT}{\nu^2} \|\partial_t \vec{\tau}_2\|_{L_T^\infty(H^{-1/2})}^2, \end{aligned}$$

Hacemos uso ahora del operador de Stokes hidrostático A (ver [25] o capítulo anterior):

$$\begin{cases} -\nu_h \Delta_H \vec{v} - \nu_v \partial_{zz}^2 \vec{v} + \nabla_{HP} p_s = \vec{u} & \text{en } \Omega, \\ \nabla_H \cdot \langle \vec{v} \rangle = \vec{0} & \text{en } \omega, \\ \nu_v \partial_z \vec{v} = \vec{0} & \text{sobre } \Gamma_s, \quad \vec{v} = \vec{0} & \text{sobre } \Gamma_l \cup \Gamma_b. \end{cases}$$

Tomando $A\vec{y}_1$ como función test en la formulación variacional de (E_1) , obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \|\vec{y}_1(t)\|_V^2 + \|A\vec{y}_1(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\vec{f}_1(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_t \vec{e}_1(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

De ese modo, integrando en tiempo, usando que

$$\nu \|\vec{y}_1(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|\vec{y}_1(t)\|_V^2 \leq \bar{\nu} \|\vec{y}_1(t)\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad (3.7)$$

$$\|\vec{y}_1(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\nu^2} \|A\vec{y}_1(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (3.8)$$

y las estimaciones anteriores para $\partial_t \vec{e}_1$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \|\vec{y}_1\|_{L_T^\infty(H^1)}^2 &\leq \frac{\bar{\nu}}{\nu} \|\vec{y}_1(0)\|_{H^1}^2 + \frac{C}{\nu} \left(\|\vec{f}_1\|_{L_T^2(L^2)}^2 + \frac{1}{\nu^2} \|\partial_t \vec{\tau}_1\|_{L_T^2(H^{-1/2})}^2 \right), \\ \|\vec{y}_1\|_{L_T^2(H^2)}^2 &\leq \frac{\bar{\nu}}{\nu^2} \|\vec{y}_1(0)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{C}{\nu^2} \left(\|\vec{f}_1\|_{L_T^2(L^2)}^2 + \frac{1}{\nu^2} \|\partial_t \vec{\tau}_1\|_{L_T^2(H^{-1/2})}^2 \right). \end{aligned}$$

Del mismo modo, obtenemos para \vec{y}_2 :

$$\frac{d}{dt} \|\vec{y}_2(t)\|_V^2 + \|A\vec{y}_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\|\vec{f}_2\|_{L_T^\infty(L^2)}^2 + \|\partial_t \vec{e}_2\|_{L_T^\infty(L^2)}^2 \right). \quad (3.9)$$

Por tanto, usando que

$$\nu \|\vec{y}_2(t)\|_V^2 \leq C_1 \|A\vec{y}_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (3.10)$$

multiplicando por $\exp\left(\frac{\nu}{C_1}t\right)$ e integrando en tiempo, llegamos a:

$$\|\vec{y}_2\|_{L_T^\infty(H^1)}^2 \leq \frac{C}{\nu^2} \left(\|\vec{f}_2\|_{L_T^\infty(L^2)}^2 + \frac{1}{\nu^2} \|\partial_t \vec{e}_2\|_{L_T^\infty(H^{-1/2})}^2 \right). \quad (3.11)$$

Ahora, usando (3.8) para $\vec{y}_2(t)$, de (3.9) – (3.11), deducimos que:

$$\|\vec{y}_2\|_{L_T^2(H^2)}^2 \leq \frac{CT}{\nu^2} \left(\|\vec{f}_2\|_{L_T^\infty(L^2)}^2 + \frac{1}{\nu^2} \|\partial_t \vec{e}_2\|_{L_T^\infty(H^{-1/2})}^2 \right).$$

Todas las estimaciones anteriores nos permiten obtener (3.4) y (3.5).

Tomando como función test $\partial_t \vec{y}_i$ ($i = 1, 2$) en (E_i) , obtenemos:

$$\|\partial_t \vec{y}_i(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \frac{d}{dt} \|\vec{y}_i(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq 2 \left(\|\vec{f}_i(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_t \vec{e}_i(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Integrando en $(0, T)$, obtenemos, particularizando para cada i :

$$\|\partial_t \vec{y}_1\|_{L_T^2(L^2)}^2 + \nu \|\vec{y}_1\|_{L_T^\infty(H^1)}^2 \leq \nu \|\vec{y}_1(0)\|_{H^1}^2 + 2 \left(\|\vec{f}_1\|_{L_T^2(L^2)}^2 + \frac{C}{\nu^2} \|\partial_t \vec{e}_1\|_{L_T^2(H^{-1/2})}^2 \right),$$

$$\|\partial_t \vec{y}_2\|_{L_T^2(L^2)}^2 + \nu \|\vec{y}_2\|_{L_T^\infty(H^1)}^2 \leq 2T \left(\|\vec{f}_2\|_{L_T^\infty(L^2)}^2 + \frac{C}{\nu^2} \|\partial_t \vec{e}_2\|_{L_T^\infty(H^{-1/2})}^2 \right).$$

Razonando como antes, concluimos la estimación (3.6). ■

Nota 3.1.3 Si $T = +\infty$, sólo podemos obtener la expresión (3.4). Así pues, sólo las estimaciones en $L^\infty(0, +\infty; H^1(\Omega)^d)$ serán válidas.

3.2 El caso 2D

Empezaremos con la prueba de los resultados de existencia de solución fuerte (Teoremas 3.1 y 3.2) en el caso 2D. El caso 3D se tratará en la sección siguiente. Usaremos diferentes desigualdades anisótropas en ambos casos.

3.2.1 Algunos espacios y estimaciones anisótropas 2D

Introducimos los siguientes espacios de funciones anisótropas 2D.

Definición 3.9 *Dados $p, q \in [1, +\infty]$, una función u pertenece a $L_x^p L_z^q(\Omega)$ si:*

$$u(x, \cdot) \in L^q(-D(x), 0) \quad \text{y} \quad \|u(x, \cdot)\|_{L^q(-D(x), 0)} \in L^p(\omega).$$

Además, su norma viene dada por la expresión:

$$\|u\|_{L_x^p L_z^q(\Omega)} = \left\| \|u(x, \cdot)\|_{L^q(-D(x), 0)} \right\|_{L^p(\omega)}$$

Nota 3.2.1 *Las normas más útiles y usadas en el caso 2D serán:*

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_x^\infty L_z^2(\Omega)} &= \sup_{x \in \omega} \left(\|u(x, \cdot)\|_{L^2(-D(x), 0)} \right) \\ \|u\|_{L_x^2 L_z^\infty(\Omega)} &= \left\| \sup_{z \in (-D(x), 0)} |u(x, z)| \right\|_{L^2(\omega)}. \end{aligned}$$

Nota 3.2.2 *Por simplicidad, a veces denotaremos $L_x^p L_z^q$ en lugar de $L_x^p L_z^q(\Omega)$, y L^p en lugar de $L^p(\Omega)$, cuando no haya riesgo de confusión.*

Ahora, enunciaremos varios lemas que usaremos frecuentemente en este capítulo. Denotamos $D_{\max} = \max_{\bar{\omega}} D$.

Lema 3.10 (Regularidad anisótropa para la velocidad vertical) *Sea $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $\partial_x v \in L^2(\Omega)$ y definimos $v_3(x, z) = -\int_{-D(x)}^z \partial_x v(x, s) ds$, entonces se verifica:*

$$\|v_3\|_{L_x^2 L_z^\infty} \leq D_{\max}^{1/2} \|\partial_x v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Demostración: De la definición de v_3 ,

$$\|v_3(x, \cdot)\|_{L^\infty(-D(x), 0)} \leq \int_{-D(x)}^0 |\partial_x v(x, s)| ds.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|v_3\|_{L_x^2 L_z^\infty}^2 &\leq \int_{\omega} \left(\int_{-D(x)}^0 |\partial_x v(x, s)| ds \right)^2 dx \\ &\leq \int_{\omega} \left(\int_{-D(x)}^0 |\partial_x v(x, s)|^2 ds \right) D(x) dx \leq D_{\max} \|\partial_x v\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 3.11 (Desigualdades de Poincaré verticales) *Sea $u \in L^2(\Omega)$ una función tal que $\partial_z u \in L^2(\Omega)$. Entonces, $u \in L_x^2 L_z^\infty$ y se verifican las siguientes desigualdades:*

- (a) $\|u\|_{L_x^2 L_z^\infty}^2 \leq 2 \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_z u\|_{L^2(\Omega)}$ si $(un_z)|_{\Gamma_b} = 0$,
- (b) $\|u\|_{L_x^2 L_z^\infty}^2 \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}$ para una constante $C = C(\Omega) > 0$.

Nota 3.2.3 Denotamos $\vec{n} = (n_x, n_z)$ el vector normal exterior a $\partial\Omega$. Notemos que como $u \in L^2(\Omega)$ y $\partial_z u \in L^2(\Omega)$, entonces $un_z \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

Demostración: En el caso (a), por hipótesis, $u(x, -D(x)) = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} u(x, z)^2 &= \int_{-D(x)}^z \partial_z(u(x, s)^2) ds = 2 \int_{-D(x)}^z u(x, s) \partial_z u(x, s) ds \\ &\leq 2 \|u(x, \cdot)\|_{L^2(-D(x), 0)} \|\partial_z u(x, \cdot)\|_{L^2(-D(x), 0)}. \end{aligned}$$

Tomando supremo esencial en $z \in (-D(x), 0)$,

$$\|u(x, \cdot)\|_{L^\infty(-D(x), 0)}^2 \leq 2 \|u(x, \cdot)\|_{L^2(-D(x), 0)} \|\partial_z u(x, \cdot)\|_{L^2(-D(x), 0)},$$

e integrando en $x \in \omega$,

$$\|u\|_{L_x^2 L_z^\infty}^2 \leq 2 \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_z u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Para el caso (b), consideramos el siguiente “Teorema de Extensión” (ver [21] por ejemplo):

“Sea Ω un dominio $C^{0,1}$ en \mathbb{R}^2 . Dado un dominio $\Omega' \supset \supset \Omega$, existe un operador de extensión (lineal) E de $H^1(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega')$ tal que $Eu|_\Omega = u$ y

$$\|Eu\|_{H^1(\Omega')} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega), \quad (3.12)$$

donde $C = C(\Omega, \Omega') > 0$. Además, se verifica:

$$\|Eu\|_{L^2(\Omega')} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega).'' \quad (3.13)$$

Es fácil demostrar que:

$$\|u\|_{L_x^2 L_z^\infty(\Omega)}^2 \leq \|Eu\|_{L_x^2 L_z^\infty(\Omega')}^2.$$

Por otra parte, aplicando el caso (a) a Eu obtenemos:

$$\|Eu\|_{L_x^2 L_z^\infty(\Omega')}^2 \leq 2 \|Eu\|_{L^2(\Omega')} \|\partial_z(Eu)\|_{L^2(\Omega')}.$$

Las dos estimaciones previas, junto con (3.12) y (3.13), implican la desigualdad de (b). ■

Lema 3.12 (Desigualdades de Poincaré horizontales) Sea $u \in L^2(\Omega)$ una función tal que $\partial_x u \in L^2(\Omega)$. Entonces, $u \in L_x^\infty L_z^2(\Omega)$ y verifica la siguiente estimación:

- (a) $\|u\|_{L_x^\infty L_z^2}^2 \leq 2 \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_x u\|_{L^2(\Omega)}$ si $(un_x)|_{\Gamma_b \cup \Gamma_l} = 0$,
 (b) $\|u\|_{L_x^\infty L_z^2}^2 \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}$, para una constante $C = C(\Omega) > 0$.

Nota 3.2.4 Notemos que, como $u \in L^2(\Omega)$ y $\partial_x u \in L^2(\Omega)$, entonces $un_x \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

Demostración: En el caso (a), dado $(x, z) \in \Omega$, consideramos $x_0 \in \partial\omega_z^{i_0}$ donde $\omega_z = \{x \in \omega / (x, z) \in \Omega\} = \bigcup_i \omega_z^i$, siendo $(\omega_z^i)_{i \in I_z}$ las componentes conexas de ω_z y $x \in \omega_z^{i_0}$. Por hipótesis, $u(x_0, z) = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} u(x, z)^2 &= \int_{x_0}^x \partial_x(u(s, z)^2) ds = 2 \int_{x_0}^x u(s, z) \partial_x u(s, z) ds \\ &\leq 2 \|u(\cdot, z)\|_{L^2(\omega_z)} \|\partial_x u(\cdot, z)\|_{L^2(\omega_z)}. \end{aligned}$$

Integrando en $z \in (-D(x), 0)$ y tomando supremo esencial en $x \in \omega$, obtenemos la desigualdad (a) de este Lema.

El caso (b) se demuestra de la misma forma que el Lema 3.11 (b), cambiando $\partial_z u$ por $\partial_x u$ y aplicando el Lema 3.12 (a) en lugar del Lema 3.11 (a). ■

3.2.2 Solución fuerte global para datos pequeños

Nos centramos en el estudio de la regularidad fuerte del problema (EP), considerado en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y con datos $F = f_1 + f_2$, con $f_1 \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ y $f_2 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, $\tau = \tau_1 + \tau_2$ con $\tau_1 \in L^2(0, T; H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s))$ y $\tau_2 \in L^\infty(0, T; H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s))$ para algún $\varepsilon > 0$, tal que $\partial_t \tau_1 \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_s))$ y $\partial_t \tau_2 \in L^\infty(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_s))$. Para ello, primero “levantamos” la condición de contorno de tipo Neumann no homogénea τ_2 considerando $(e^\infty(t), q_s^\infty(t))$ la solución fuerte del problema de Stokes hidrostático:

$$\begin{cases} -\nu_h \partial_{xx}^2 e^\infty - \nu_v \partial_{zz}^2 e^\infty + \partial_x q_s^\infty = 0 & \text{en } \Omega, \quad \langle e^\infty \rangle = 0 & \text{en } \omega, \\ \nu_v \partial_z e^\infty = \tau_2(t) & \text{sobre } \Gamma_s, \quad e^\infty = 0 & \text{sobre } \Gamma_b \cup \Gamma_l. \end{cases}$$

Entonces, levantamos τ_1 , la fuerza horizontal f_1 y el dato inicial u_0 considerando (e, q_s) la solución fuerte del problema de Stokes hidrostático de evolución,

$$(E) \begin{cases} \partial_t e - \nu_h \partial_{xx}^2 e - \nu_v \partial_{zz}^2 e + \partial_x q_s = f_1 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \langle e \rangle = 0 & \text{en } (0, T) \times \omega, \quad e|_{t=0} = u_0 - e^\infty(0) & \text{en } \Omega, \\ \nu_v \partial_z e = \tau_1 & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_s, \quad e = 0 & \text{sobre } (0, T) \times (\Gamma_b \cup \Gamma_l). \end{cases}$$

Gracias a eso, lo que tenemos que estudiar es el problema resultante (R) que verifica $(w, \pi_s) = (u - e - e^\infty, p_s - q_s - q_s^\infty)$, donde (u, p_s) es una (posible) solución fuerte de (EP):

$$(R) \begin{cases} \partial_t w - \nu_h \partial_{xx}^2 w - \nu_v \partial_{zz}^2 w + (w + e + e^\infty) \partial_x (w + e + e^\infty) \\ \quad + (w_3 + e_3 + e_3^\infty) \partial_z (w + e + e^\infty) + \partial_x \pi_s = f_2 - \partial_t e^\infty & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \langle w \rangle = 0 & \text{en } (0, T) \times \omega, \quad w|_{t=0} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \nu_v \partial_z w = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_s, \quad w = 0 & \text{sobre } (0, T) \times (\Gamma_b \cup \Gamma_l), \end{cases}$$

donde $w_3 = - \int_{-D(x)}^z \partial_x w \, ds$ y $e_3 = - \int_{-D(x)}^z \partial_x e \, ds$ (de forma similar para e_3^∞).

Etap 1. Existencia y estimaciones débiles de las soluciones aproximadas de (R): Aproximamos w por w_m , las aproximaciones de Galerkin en los espacios m -dimensionales $V_m = \{z_1, \dots, z_m\}$, donde $\{z_1, \dots, z_m, \dots\}$ es una base ortonormal de autofunciones (en H^1) del operador hidrostático 2D A . Entonces, consideramos la formulación variacional para w_m con funciones test en V_m :

$$(R)_m \begin{cases} \int_{\Omega} \partial_t w_m v_m \, d\Omega + \int_{\Omega} A w_m v_m \, d\Omega + \int_{\Omega} (w_m + e + e^\infty) \partial_x (w_m + e + e^\infty) v_m \, d\Omega \\ \quad + \int_{\Omega} (w_{m3} + e_3 + e_3^\infty) \partial_z (w_m + e + e^\infty) v_m \, d\Omega \\ \quad = \int_{\Omega} f_2 v_m \, d\Omega - \int_{\Omega} \partial_t e^\infty v_m \, d\Omega, \quad \forall v_m \in V_m, \\ w_m(0) = 0. \end{cases}$$

Obviamente, tenemos que $w_m = u_m - e - e^\infty$, donde u_m es la aproximación de Galerkin correspondiente para el problema (EP). Las estimaciones débiles usuales para (u_m) se pueden

obtener de forma estándar. Entonces, las estimaciones débiles para (w_m) y (w_{m3}) siguen de las estimaciones débiles para (u_m) y la regularidad débil de e y e^∞ . Como (w_m) está acotado en $L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$, $(\partial_t w_m)$ en $L^2(0, T; (V \cap H^2(\Omega))')$ y (w_{m3}) en $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, podemos extraer una subsucesión que converge débilmente a una función límite w (y w_3), que es la solución débil de (R) . Por tanto, basta obtener estimaciones fuertes para (w_m) (es decir, que (w_m) esté acotado en $L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$ y $(\partial_t w_m)$ en $L^2(0, T; L^2(\Omega))$) para asegurar que w es también una solución fuerte de (R) , y en consecuencia, u es una solución fuerte de (EP) .

Etapa 2. Estimaciones fuertes para las soluciones aproximadas de (R) :

Lema 3.13 *Existe una constante $C > 0$, tal que para*

$$d_1 = \|e\|_{L_T^\infty(H^1)} \quad y \quad d_2 = \|e^\infty\|_{L_T^\infty(H^1)},$$

se verifica la siguiente estimación:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|w_m\|_V^2 + \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{C}{\nu^5} \|w_m\|_V^6 + \frac{C}{\nu^3} (d_1^4 + d_2^4) \|w_m\|_V^2 \\ &+ \frac{C}{\nu} (d_1 \|e\|_{H^2(\Omega)} + d_2 \|e^\infty\|_{H^2(\Omega)}) \|w_m\|_V^2 + C (\|f_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_t e^\infty\|_{L^2(\Omega)}^2) \\ &+ C (d_1^3 + d_1 d_2^2) \|e\|_{H^2(\Omega)} + C (d_1^2 d_2 + d_2^3) \|e^\infty\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{C}{\nu^5} \|w_m\|_V^6 + \frac{C}{\nu^3} (d_1^4 + d_2^4) \|w_m\|_V^2 + C (\|f_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_t e^\infty\|_{L^2(\Omega)}^2) \\ &+ C \{ (d_1^3 + d_1 d_2^2) \|e\|_{H^2(\Omega)} + (d_1^2 d_2 + d_2^3) \|e^\infty\|_{H^2(\Omega)} \} \\ &+ C \nu^2 (\|e\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|e^\infty\|_{H^2(\Omega)}^2) \end{aligned} \tag{3.14}$$

Demostración: Tomando $v_m = Aw_m(t) \in V_m$ como funciones test en $(R)_m$, llegamos a:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_m\|_V^2 + \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 &= - \int_\Omega (w_m + e + e^\infty) \partial_x w_m Aw_m d\Omega \\ &- \int_\Omega (w_m + e + e^\infty) \partial_x e Aw_m d\Omega - \int_\Omega (w_m + e + e^\infty) \partial_x e^\infty Aw_m d\Omega \\ &- \int_\Omega ((w_{m3} + e_3 + e_3^\infty) \partial_z w_m Aw_m d\Omega - \int_\Omega ((w_{m3} + e_3 + e_3^\infty) \partial_z e Aw_m d\Omega \\ &- \int_\Omega ((w_{m3} + e_3 + e_3^\infty) \partial_z e^\infty Aw_m d\Omega + \int_\Omega f_2 Aw_m d\Omega - \int_\Omega \partial_t e^\infty Aw_m d\Omega \equiv \sum_{i=1}^8 I_i \end{aligned} \right. \tag{3.15}$$

Usando el Lema 3.12 (a) para w_m , e y e^∞ , el Lema 3.11 (b) para $\partial_x w_m$, $\partial_x e$ y $\partial_x e^\infty$ (ya que $(\partial_x w_m)|_{\Gamma_b}$, $(\partial_x e)|_{\Gamma_b}$, $(\partial_x e^\infty)|_{\Gamma_b} \neq 0$ y $(\partial_x w_m)|_{\Gamma_s}$, $(\partial_x e)|_{\Gamma_s}$, $(\partial_x e^\infty)|_{\Gamma_s} \neq 0$ en general), teniendo en cuenta (3.8) para $w_m(t)$ y la desigualdad:

$$\|w_m(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\nu^{1/2}} \|w_m(t)\|_V, \tag{3.16}$$

acotamos I_1 , I_2 y I_3 de la forma:

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \left(\|w_m\|_{L_x^\infty L_z^2} + \|e\|_{L_x^\infty L_z^2} + \|e^\infty\|_{L_x^\infty L_z^2} \right) \|\partial_x w_m\|_{L_x^2 L_z^\infty} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{C}{\nu^{1/2}} \left(\|w_m\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|w_m\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} + \|e\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|e\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} + \|e^\infty\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|e^\infty\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \right) \\
&\quad \times \|w_m\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^{3/2} \\
&\leq \frac{1}{16} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{\nu^2} \left(\|w_m\|_{H^1(\Omega)}^4 \|w_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\|e\|_{L^2(\Omega)}^2 \|e\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|e^\infty\|_{L^2(\Omega)}^2 \|e^\infty\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \|w_m\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \\
&\leq \frac{1}{16} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{\nu^5} \|w_m\|_V^6 + \frac{C}{\nu^3} (d_1^4 + d_2^4) \|w_m\|_V^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \left(\|w_m\|_{L_x^\infty L_z^2} + \|e\|_{L_x^\infty L_z^2} + \|e^\infty\|_{L_x^\infty L_z^2} \right) \|\partial_x e\|_{L_x^2 L_z^\infty} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C \left(\|w_m\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|w_m\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} + \|e\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|e\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} + \|e^\infty\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|e^\infty\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \right) \\
&\quad \times \|e\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|e\|_{H^2(\Omega)}^{1/2} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{16} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{\nu} \|e\|_{H^1(\Omega)} \|e\|_{H^2(\Omega)} \|w_m\|_V^2 \\
&\quad + C \left(\|e\|_{L^2(\Omega)} \|e\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|e^\infty\|_{L^2(\Omega)} \|e^\infty\|_{H^1(\Omega)} \|e\|_{H^1(\Omega)} \right) \|e\|_{H^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{16} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{Cd_1}{\nu} \|e\|_{H^2(\Omega)} \|w_m\|_V^2 + C (d_1^3 + d_1 d_2^2) \|e\|_{H^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \frac{1}{16} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{\nu} \|e^\infty\|_{H^1(\Omega)} \|e^\infty\|_{H^2(\Omega)} \|w_m\|_V^2 \\
&\quad + C \left(\|e\|_{L^2(\Omega)} \|e\|_{H^1(\Omega)} \|e^\infty\|_{H^1(\Omega)} + \|e^\infty\|_{L^2(\Omega)} \|e^\infty\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \|e^\infty\|_{H^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{16} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{Cd_2}{\nu} \|e^\infty\|_{H^2(\Omega)} \|w_m\|_V^2 + C (d_1^2 d_2 + d_2^3) \|e^\infty\|_{H^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Usando el Lema 3.10 para w_{m3} , e_3 y e_3^∞ , y el Lema 3.12 (b) para $\partial_z w_m$, $\partial_z e$ and $\partial_z e^\infty$, obtenemos las siguientes estimaciones para I_4 , I_5 y I_6 :

$$\begin{aligned}
I_4 &\leq \|w_{m3} + e_3 + e_3^\infty\|_{L_x^2 L_z^\infty} \|\partial_z w_m\|_{L_x^\infty L_z^2} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{C}{\nu^{1/2}} \left(\|w_m\|_{H^1(\Omega)} + \|e\|_{H^1(\Omega)} + \|e^\infty\|_{H^1(\Omega)} \right) \|w_m\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^{3/2} \\
&\leq \frac{1}{14} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{\nu^2} \left(\|w_m\|_{H^1(\Omega)}^6 + \left(\|e\|_{H^1(\Omega)}^4 + \|e^\infty\|_{H^1(\Omega)}^4 \right) \|w_m\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \\
&\leq \frac{1}{16} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{\nu^5} \|w_m\|_V^6 + \frac{C}{\nu^3} (d_1^4 + d_2^4) \|w_m\|_V^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_5 &\leq \left(\|w_{m3}\|_{L_x^2 L_x^\infty} + \|e_3\|_{L_x^2 L_x^\infty} + \|e_3^\infty\|_{L_x^2 L_x^\infty} \right) \|\partial_z e\|_{L_x^\infty L_x^2} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C \left(\|w_m\|_{H^1(\Omega)} + \|e\|_{H^1(\Omega)} + \|e^\infty\|_{H^1(\Omega)} \right) \|e\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|e\|_{H^2(\Omega)}^{1/2} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{16} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \left(\|e\|_{H^1(\Omega)} \|e\|_{H^2(\Omega)} \|w_m\|_{H^1(\Omega)}^2 \right. \\
&\quad \left. + \|e\|_{H^1(\Omega)}^3 \|e\|_{H^2(\Omega)} + \|e^\infty\|_{H^1(\Omega)}^2 \|e\|_{H^1(\Omega)} \|e\|_{H^2(\Omega)} \right) \\
&\leq \frac{1}{16} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{\nu} d_1 \|e\|_{H^2(\Omega)} \|w_m\|_V^2 + C \left(d_1^3 + d_1 d_2^2 \right) \|e\|_{H^2(\Omega)} \\
I_6 &\leq \frac{1}{16} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \left\{ \|e^\infty\|_{H^1(\Omega)} \|e^\infty\|_{H^2(\Omega)} \|w_m\|_{H^1(\Omega)}^2 \right. \\
&\quad \left. + \|e^\infty\|_{H^1(\Omega)} \|e^\infty\|_{H^2(\Omega)} \|e\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|e^\infty\|_{H^1(\Omega)}^3 \|e^\infty\|_{H^2(\Omega)} \right\} \\
&\leq \frac{1}{16} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{\nu} d_2 \|e^\infty\|_{H^2(\Omega)} \|w_m\|_V^2 + C \left(d_1^2 d_2 + d_2^3 \right) \|e^\infty\|_{H^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
I_7 &\leq \|f_2\|_{L^2(\Omega)} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{16} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|f_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
I_8 &\leq \|\partial_t e^\infty\|_{L^2(\Omega)} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{16} \|Aw_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|\partial_t e^\infty\|_{L^2(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

Combinando todas las estimaciones anteriores, llegamos a la expresión (3.14) ■

Usando la desigualdad (3.10) para $w_m(t)$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \|w_m\|_V^2 + \frac{1}{C_1} \left(\nu - \frac{C}{\nu^5} \|w_m\|_V^4 - \frac{C(d_1^4 + d_2^4)}{\nu^3} \right) \|w_m\|_V^2 \\
&\leq C\nu^2 \left(\|e\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|e^\infty\|_{H^2(\Omega)}^2 \right) + C \left(\|f_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_t e^\infty\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
&\quad + C \left\{ (d_1^3 + d_1 d_2^2) \|e\|_{H^2(\Omega)} + (d_1^2 d_2 + d_2^3) \|e^\infty\|_{H^2(\Omega)} \right\}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Como $d_1 = \|e\|_{L_T^\infty(H^1)}$ y $d_2 = \|e^\infty\|_{L_T^\infty(H^1)}$, usando (3.2) y (3.4), d_1^2 y d_2^2 verifican las cotas siguientes:

$$\begin{cases} d_1^2 &\leq \frac{C}{\nu} \left\{ \|f_1\|_{L_T^2(L^2)}^2 + \|\tau_1\|_{L_T^2(H_0^{1/2+\varepsilon})}^2 \right\} + \frac{C}{\nu^3} \|\partial_t \tau_1\|_{L_T^2(H^{-1/2})}^2 \\ &+ \frac{\bar{\nu}}{\nu} \left\{ \|u_0\|_{H^1}^2 + \frac{C}{\nu^2} \left(\|\tau_1(0)\|_{H^{-1/2}}^2 + \|\tau_2(0)\|_{H^{-1/2}}^2 \right) \right\}, \\ d_2^2 &\leq \frac{C}{\nu^2} \|\tau_2\|_{L_T^\infty(H^{-1/2})}^2 \leq \frac{C}{\nu^2} \|\tau_2\|_{L_T^\infty(H_0^{1/2+\varepsilon})}^2 \end{cases}$$

La hipótesis (H) nos permite obtener las siguientes cotas:

$$\begin{aligned} d_1, d_2 &< Cc\nu, \\ \|e^\infty\|_{L_T^\infty(H^2)} &\leq \frac{C}{\nu} \|\tau_2\|_{L_T^\infty(H_0^{1/2+\varepsilon})} < Cc\nu, \\ \|f_2\|_{L_T^\infty(H^2)}^2 &< c\nu^2, \\ \|\partial_t e^\infty\|_{L_T^\infty(L^2)}^2 &\leq \frac{C}{\nu} \|\partial_t \tau_2\|_{L_T^\infty(H^{-1/2})}^2 < Cc\nu^2, \end{aligned}$$

donde c es la misma constante que aparece en (H) (que sólo depende de la talla de los datos). Por lo tanto, podemos reescribir (3.17) como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|w_m\|_V^2 + \frac{\nu}{C_1} \left(1 - \frac{C}{\nu^6} \|w_m\|_V^4 - Cc^4\right) \|w_m\|_V^2 \\ \leq C \left(\phi(c)\nu^4 + \nu^2 \|e(t)\|_{H^2(\Omega)}^2\right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde $\phi(c) = c^2(1 + c^2 + c^4)$.

Lema 3.14 Sean $\gamma > 0$ y $c > 0$ constantes suficientemente pequeñas para que satisfagan las siguientes dos condiciones:

$$\begin{cases} C(\gamma^4 + c^4) < \frac{1}{2}, \\ C\phi(c) < \gamma^2. \end{cases} \quad (3.19)$$

Entonces,

$$\|w_m(t)\|_V \leq \gamma\nu^{3/2}, \quad \forall t \in [0, T]$$

(aquí suponemos que $T < +\infty$ por simplicidad).

Demostración: Para probar esta afirmación, razonamos por reducción al absurdo: Supongamos entonces que existe un instante de tiempo en $(0, T)$ en el que la cota $\gamma\nu^{3/2}$ se alcanza. Sea t^* el menor de dichos instantes, es decir, $\|w_m(t)\|_V < \gamma\nu^{3/2}$, $\forall t \in [0, t^*)$ y $\|w_m(t^*)\|_V = \gamma\nu^{3/2}$. Entonces, $\forall t \in [0, t^*)$, de (3.18) y (3.19)₁, obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \|w_m(t)\|_V^2 + \frac{\nu}{2C_1} \|w_m(t)\|_V^2 \leq C \left(\phi(c)\nu^4 + \nu^2 \|e(t)\|_{H^2(\Omega)}^2\right).$$

Si multiplicamos por $\exp\left(\frac{\nu}{2C_1}t\right)$ e integramos en tiempo (recordemos que $w_m(0) = 0$), obtenemos:

$$\|w_m(t)\|_V^2 \leq C \left(\phi(c)\nu^3 + \nu^2 \int_0^t \|e(s)\|_{H^2(\Omega)}^2 ds\right) \quad \forall t \in [0, t^*]$$

Ahora, usando la hipótesis (H) y la estimación (3.5), podemos acotar $\|e\|_{L_T^2(H^2)}$ (recordemos que no hay fuerzas en $L_T^\infty(L^2)$ en este caso) como sigue:

$$\|e\|_{L_T^2(H^2)}^2 < Cc^2\nu,$$

y obtenemos así:

$$\|w_m(t)\|_V^2 < C\phi(c)\nu^3, \quad \forall t \in [0, t^*],$$

teniendo en cuenta (3.19)₂, llegamos entonces a contradicción. ■

Etapa 3. Demostración del Teorema 3.1 en el caso 2D ($d = 1$): Hemos obtenido que (w_m) está acotado en $L^\infty(0, T; V)$. Las estimaciones de (w_m) en $L^2(0, T; H^2(\Omega))$ y de $(\partial_t w_m)$ en $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ se pueden deducir de esta última estimación (ver capítulo anterior).

En conclusión, hemos demostrado la existencia de una solución débil v de (EP) en $(0, T)$, donde T puede ser igual a $+\infty$, bajo las hipótesis de pequeñez (H). ■

3.2.3 Solución fuerte local para datos cualesquiera

Demostración del Teorema 3.2 en el caso 2D:

Si llamamos $y(t) = \|w_m(t)\|_V^2$, dividiendo (3.14) (recordemos que no hay fuerzas en $L_T^\infty(L^2)$) por $(1 + y(t))^3$, obtenemos:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [(1 + y(t))^{-2}] + (1 + y(t))^{-3} \|Aw_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C \left(\frac{1}{\nu^5} + \frac{d_1^4}{\nu^3} + d_1^3 \|e(t)\|_{H^2(\Omega)} + \nu^2 \|e(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Integrando (3.20) en $(0, t)$ y teniendo en cuenta que $\|e\|_{H^2(\Omega)}^2 \in L^1(0, T)$, obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2(1 + y(0))^2} + \int_0^t \frac{\|Aw_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2}{(1 + y(s))^3} ds \leq \\ & \leq \frac{1}{2(1 + y(t))^2} + \frac{C}{\nu^3} \left(\frac{1}{\nu^2} + d_1^4 \right) t + Cd_1^3 \|e\|_{L_t^2(H^2)} \sqrt{t} + C\nu^2 \|e\|_{L_t^2(H^2)}^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Por lo tanto, una condición suficiente para que $y(t)$ esté acotado independientemente de m es:

$$\frac{C}{\nu^3} \left(\frac{1}{\nu^2} + d_1^4 \right) t + Cd_1^3 \|e\|_{L_t^2(H^2)} \sqrt{t} + C\nu^2 \|e\|_{L_t^2(H^2)}^2 < \frac{1}{2(1 + y(0))^2}. \quad (3.22)$$

En efecto, si partimos de (3.22), entonces:

$$0 < \frac{1}{2(1 + y(0))^2} - \left(\frac{C}{\nu^3} \left(\frac{1}{\nu^2} + d_1^4 \right) t + Cd_1^3 \|e\|_{L_t^2(H^2)} \sqrt{t} + C\nu^2 \|e\|_{L_t^2(H^2)}^2 \right) \leq \frac{1}{2(1 + y(t))^2}.$$

Ahora, despejamos el factor $(1 + y(t))$ y obtenemos:

$$\begin{aligned} 1 + y(t) & \leq (1 + y(0)) \left(1 - 2(1 + y(0))^2 \right. \\ & \quad \left. \times \left(\frac{C}{\nu^3} \left(\frac{1}{\nu^2} + d_1^4 \right) t + Cd_1^3 \|e\|_{L_t^2(H^2)} \sqrt{t} + C\nu^2 \|e\|_{L_t^2(H^2)}^2 \right) \right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Volviendo a (3.22), como $\|e\|_{L^2(0, t; H^2(\Omega))}$ es una función continua respecto a t (que se anula para $t = 0$), siempre podemos encontrar un tiempo T_* suficientemente pequeño para que verifique la condición (3.22) para todo $t \in [0, T_*]$. ■

Nota 3.2.5 En el contexto del Teorema 3.2, podemos obtener estimaciones de Hausdorff para los tiempos singulares (definidos en el capítulo 1), imponiendo más regularidad en tiempo para F , τ y $\partial_t \tau$. Por ejemplo, si $F \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, $\tau \in L^\infty(0, T; H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s))$ y $\partial_t \tau \in L^\infty(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_s))$, entonces podemos estimar la dimensión de Hausdorff por $1/2$ (ver [18]). Finalmente, para regularidades intermedias L^q en tiempo obtenemos una dimensión $\leq d(q) = \frac{q}{2(q-1)}$ (ver Teorema 1.17).

3.3 El caso 3D

En esta sección, haremos especial hincapié en los cambios necesarios (respecto del caso 2D) para manejar los términos no lineales en el caso 3D. Empezamos por mostrar las estimaciones anisótropas 3-dimensionales que vamos a usar.

3.3.1 Algunos espacios y estimaciones anisótropas 3D

Definición 3.15 Dados $p, q \in [1, +\infty]$, diremos que una función \vec{u} pertenece a $L_z^q L_{\vec{x}}^p(\Omega)$ si:

$$\vec{u}(\cdot, z) \in L^q(\omega_z) \quad \text{y} \quad \|\vec{u}(\cdot, z)\|_{L^q(\omega_z)} \in L^p(-D_{\max}, 0),$$

y su norma viene dada por la expresión:

$$\left\| \|\vec{u}(\cdot, z)\|_{L^q(\omega_z)} \right\|_{L^p(-D_{\max}, 0)}$$

Nota 3.3.1 Las normas que usaremos más frecuentemente en el caso 3D serán:

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|_{L_z^2 L_{\vec{x}}^4(\Omega)} &= \left(\int_{-D_{\max}}^0 \|\vec{u}(\cdot, z)\|_{L^4(\omega_z)}^2 dz \right)^{1/2} \\ \|\vec{u}\|_{L_z^\infty L_{\vec{x}}^4(\Omega)} &= \sup_{z \in (-D_{\max}, 0)} \|\vec{u}(\cdot, z)\|_{L^4(\omega_z)}, \end{aligned}$$

Lema 3.16 Sea $\vec{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función tal que $\nabla_H \cdot \vec{v} \in L^2(\Omega)$ y definimos $v_3(\vec{x}, z) = -\int_{-D(\vec{x})}^z \nabla_H \cdot \vec{v}(\vec{x}, s) ds$, entonces se verifica la desigualdad:

$$\|v_3\|_{L_z^\infty L_{\vec{x}}^2} \leq D_{\max}^{1/2} \|\nabla_H \cdot \vec{v}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Demostración: Usando la definición de v_3 , obtenemos:

$$|v_3(\vec{x}, z)|^2 = \left| \int_{-D(\vec{x})}^z \nabla_H \cdot \vec{v}(\vec{x}, s) ds \right|^2 \leq \left(\int_{-D(\vec{x})}^z |\nabla_H \cdot \vec{v}(\vec{x}, s)|^2 ds \right) D_{\max}$$

Integrando en x , llegamos a

$$\int_{\omega_z} |v_3(\vec{x}, z)|^2 d\vec{x} \leq D_{\max} \int_{\omega_z} \int_{-D(\vec{x})}^z |\nabla_H \cdot \vec{v}(\vec{x}, s)|^2 ds d\vec{x} \leq D_{\max} \|\nabla_H \cdot \vec{v}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Tomando supremo esencial en $z \in (-D_{\max}, 0)$, concluimos la demostración. \blacksquare

Lema 3.17 (Desigualdades de interpolación)

(a) Sea $v \in L^2(\Omega)$ una función tal que $\partial_z v \in L^2(\Omega)$ y $(vn_z)|_{\Gamma_b} = 0$. Entonces, $v \in L_z^\infty L_{\vec{x}}^2(\Omega)$ y satisface la estimación:

$$\|v\|_{L_z^\infty L_{\vec{x}}^2}^2 \leq 2 \|v\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_z v\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.23)$$

Más generalmente, si $v \in H^1(\Omega)$ entonces $v \in L_z^\infty L_{\vec{x}}^2(\Omega)$, y existe una constante $C = C(\Omega) > 0$ tal que:

$$\|v\|_{L_z^\infty L_{\vec{x}}^2}^2 \leq C(\Omega) \|v\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (3.24)$$

(b) Sea $v_i \in L^2(\Omega)$ una función tal que $\nabla_H v_i \in L^2(\Omega)^2$ y $(v_i n_{x_i})|_{\Gamma_b \cup \Gamma_l} = 0$ ($i = 1, 2$). Entonces, $v \in L_z^2 L_{\vec{x}}^4(\Omega)$ y verifica la estimación:

$$\|v_i\|_{L_z^2 L_{\vec{x}}^4}^2 \leq 4 \|v_i\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla_H v_i\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.25)$$

Más generalmente, si $v \in H^1(\Omega)$ entonces $v \in L_z^2 L_{\vec{x}}^4$, y existe una constante $C = C(\Omega) > 0$ tal que:

$$\|v\|_{L_z^2 L_{\vec{x}}^4}^2 \leq C(\Omega) \|v\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.26)$$

Demostración:

(a) Si $(vn_z)|_{\Gamma_b} = 0$, entonces $v(\vec{x}, -D(\vec{x})) = 0$. Por tanto,

$$v(\vec{x}, z)^2 = 2 \int_{-D(\vec{x})}^z v(\vec{x}, s) \partial_z v(\vec{x}, s) ds.$$

Integrando en ω_z , llegamos a que:

$$\begin{aligned} \int_{\omega_z} |v(\vec{x}, z)|^2 dx &\leq 2 \int_{\omega_z} \int_{-D(x)}^z |v(\vec{x}, z)| |\partial_z v(\vec{x}, z)| ds d\vec{x} \\ &\leq 2 \int_{\Omega} |v| |\partial_z v| d\Omega \leq 2 \|v\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_z v\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Y de nuevo, tomando el supremo esencial en $z \in (-D_{\max}, 0)$, llegamos a la expresión (3.23).

Nota 3.3.2 En el razonamiento anterior, la hipótesis $(vn_z)|_{\Gamma_b} = 0$ se puede reemplazar por $v|_{\Gamma_s} = 0$.

Ahora, si consideramos el caso $v \in H^1(\Omega)$, sin hipótesis sobre las trazas, usando el Teorema de Extensión que aparece en el Lema 3.11 (b) y el argumento anterior para la función ya extendida, podemos demostrar que se verifica (3.24).

(b) Sea v_i una función tal que $v_i n_{x_i}|_{\Gamma_b \cup \Gamma_l} = 0$. Entonces, $v_i(\cdot, z) \in H_0^1(\omega_z)$ para z c. p. d. en $(-D_{\max}, 0)$ y podemos obtener fácilmente:

$$\|v_i(\cdot, z)\|_{L^4(\omega_z)}^2 \leq 4 \|v_i(\cdot, z)\|_{L^2(\omega_z)} \|\nabla_H v_i(\cdot, z)\|_{L^2(\omega_z)}. \quad (3.27)$$

En efecto, para probar (3.27) basta demostrar la siguiente desigualdad (que es una adaptación del resultado que aparece en [40]):

$$\|\varphi\|_{L^2(\omega)}^2 \leq \|\partial_x \varphi\|_{L^1(\omega)} \|\partial_y \varphi\|_{L^1(\omega)}, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,1}(\omega), \quad (3.28)$$

y aplicar dicha desigualdad a $\varphi = |v|^2$. Para demostrar (3.28), expresamos φ como:

$$\varphi(x, y) = \varphi(x, y_0) + \int_{y_0}^y \partial_y \varphi(x, t) dt$$

y

$$\varphi(x, y) = \varphi(x_0, y) + \int_{x_0}^x \partial_x \varphi(s, y) ds$$

donde x_0 (respectivamente y_0) es un punto de intersección de $\omega_y = \{s/(s, y) \in \bar{\omega}\}$ (respectivamente $\omega_x = \{t/(x, t) \in \bar{\omega}\}$) y $\partial\omega$. Como $\varphi = 0$ en $\partial\omega$, multiplicando las dos igualdades anteriores, obtenemos:

$$|\varphi(x, y)|^2 \leq \left(\int_{\omega_x} |\partial_y \varphi(x, t)| dt \right) \left(\int_{\omega_y} |\partial_x \varphi(s, y)| ds \right).$$

Integrando en $(x, y) \in \omega$, obtenemos (3.28).

Integrando (3.27) en $z \in (-D_{\max}, 0)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \|v_i\|_{L_z^2 L_{\vec{x}}^4}^2 &\leq 4 \int_{-D_{\max}}^0 \|v_i(\cdot, z)\|_{L^2(\omega_z)} \|\nabla_H v_i(\cdot, z)\|_{L^2(\omega_z)} dz \\ &\leq 4 \left(\int_{-D_{\max}}^0 \|v_i(\cdot, z)\|_{L^2(\omega_z)}^2 dz \right)^{1/2} \left(\int_{-D_{\max}}^0 \|\nabla_H v_i(\cdot, z)\|_{L^2(\omega_z)}^2 dz \right)^{1/2} \\ &= 4 \|v_i\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla_H v_i\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Para una función $v \in H^1(\Omega)$ más general, usamos el operador de Extensión como en el Lema 3.11 (b), y extendemos $v \in H^1(\Omega)$ a una función $Ev \in H^1(\tilde{\Omega})$ con $Ev|_{\Gamma_b \cup \Gamma_l} = 0$. Entonces, de (3.25) llegamos a:

$$\|Ev\|_{L_z^2 L_{\vec{x}}^4}^2 \leq C(\Omega) \|Ev\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \|Ev\|_{H^1(\tilde{\Omega})}.$$

Finalmente, aplicando las propiedades del operador de Extensión (ver la demostración del Lema 3.11), la desigualdad (3.26) se verifica. ■

Lema 3.18 (Nuevas estimaciones para v_3) Sea $\vec{v} \in L^2(\Omega)^2$ una función tal que $\nabla_H \cdot \vec{v} \in H^1(\Omega)$. Entonces, si consideramos v_3 definida en función de $\nabla_H \cdot \vec{v}$ como en el Lema 3.16, tenemos que $v_3 \in L_z^\infty L_{\vec{x}}^4(\Omega)$ y verifica la estimación:

$$\|v_3\|_{L_z^\infty L_{\vec{x}}^4} \leq C(\Omega) \|\nabla_H \cdot \vec{v}\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla_H \cdot \vec{v}\|_{H^1(\Omega)}^{1/2}$$

Demostración: Usaremos que si $p > q$,

$$\|u\|_{L_{\vec{x}}^p L_z^q} \leq \|u\|_{L_z^q L_{\vec{x}}^p}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_{\vec{x}}^p L_z^q} &= \left(\int_{\omega} \left(\int_{-D(\vec{x})}^0 |u(\vec{x}, z)|^q dz \right)^{p/q} d\vec{x} \right)^{1/p} = \left\| \int_{-D(\vec{x})}^0 |u(\cdot, z)|^q dz \right\|_{L_{\vec{x}}^{p/q}}^{1/q} \\ &\leq \left(\int_{-D(\vec{x})}^0 \| |u(\cdot, z)|^q \|_{L_{\vec{x}}^{p/q}} dz \right)^{1/q} = \left(\int_{-D(\vec{x})}^0 \|u(\cdot, z)\|_{L_{\vec{x}}^p}^q dz \right)^{1/q} = \|u\|_{L_z^q L_{\vec{x}}^p}. \end{aligned}$$

En ese caso, del Lema 3.17 (b),

$$\|\nabla_H \cdot \vec{v}\|_{L^4_{\vec{x}}L^2_z}^2 \leq \|\nabla_H \cdot \vec{v}\|_{L^2_{\vec{x}}L^4_z}^2 \leq C(\Omega)\|\nabla_H \cdot \vec{v}\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla_H \cdot \vec{v}\|_{H^1(\Omega)},$$

y como $v_3(\vec{x}, z) = -\int_{-D(\vec{x})}^z \nabla_H \cdot \vec{v}(\vec{x}, s) ds$, entonces:

$$\begin{aligned} \|v_3(\vec{x}, \cdot)\|_{L^\infty(-D(\vec{x}), 0)} &\equiv \sup_{z \in (-D_{\max}, 0)} |v_3(\vec{x}, z)| \leq \int_{-D(\vec{x})}^0 |\nabla_H \cdot \vec{v}(\vec{x}, z)| dz \\ &\leq D_{\max}^{1/2} \left(\int_{-D(\vec{x})}^0 |\nabla_H \cdot \vec{v}(\vec{x}, z)|^2 dz \right)^{1/2} \equiv D_{\max}^{1/2} \|\nabla_H \cdot \vec{v}(\vec{x}, \cdot)\|_{L^2(-D(\vec{x}), 0)}. \end{aligned}$$

Luego la demostración concluye fácilmente, usando que $\|v_3\|_{L^\infty_{\vec{x}}L^4_z} \leq \|v_3\|_{L^4_{\vec{x}}L^\infty_z}$. (Para la norma $\|\cdot\|_{L^4_{\vec{x}}L^\infty_z}$ usamos las definiciones de la Subsección 3.2.1.) ■

3.3.2 Solución fuerte global para datos pequeños

Por simplicidad, tomamos $\vec{\tau}_2 = \vec{0}$, y entonces $\vec{e}^\infty = \vec{0}$.

Como en el caso $2D$, basta obtener las estimaciones fuertes para (\vec{w}_m) en $L^\infty(0, T; H^1(\Omega)^2)$, donde w_m es la solución aproximada de (R) en el caso $3D$. En toda la sección omitiremos el subíndice m .

Lema 3.19 *Se verifica la siguiente estimación:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\vec{w}\|_V^2 + \|A\vec{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{C}{\nu^{3/2}} \|A\vec{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\vec{w}\|_V + \frac{C}{\nu^{11}} \|\vec{w}\|_V^{10} \\ &+ \frac{C}{\nu} \left(\frac{1}{\nu^6} \|\vec{e}\|_{H^1(\Omega)}^8 + \|\vec{e}\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|\vec{e}\|_{H^2(\Omega)}^{3/2} + \frac{1}{\nu^2} \|\vec{e}\|_{H^1(\Omega)}^2 \|\vec{e}\|_{H^2(\Omega)}^2 \right) \|\vec{w}\|_V^2 \\ &+ C \left(\|\vec{e}\|_{H^1(\Omega)}^{5/2} \|\vec{e}\|_{H^2(\Omega)}^{3/2} + \|\vec{e}\|_{H^1(\Omega)}^2 \|\vec{e}\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|\vec{f}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Demostración: Partiendo de la formulación variacional $(R)_m$ y tomando $\vec{v} = A\vec{w}$ como función test, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{w}\|_V^2 + \|A\vec{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 &= - \int_{\Omega} ((\vec{w} + \vec{e}) \cdot \nabla_H) \vec{w} \cdot A\vec{w} d\Omega \\ &- \int_{\Omega} ((\vec{w} + \vec{e}) \cdot \nabla_H) \vec{e} \cdot A\vec{w} d\Omega - \int_{\Omega} (w_3 + e_3) \partial_z \vec{w} \cdot A\vec{w} d\Omega \\ &- \int_{\Omega} (w_3 + e_3) \partial_z \vec{e} \cdot A\vec{w} d\Omega + \int_{\Omega} \vec{f}_2 \cdot A\vec{w} d\Omega \equiv \sum_{i=1}^5 I_i. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Usando la desigualdad de interpolación $\|\vec{v}\|_{L^4(\Omega)} \leq C\|\vec{v}\|_{L^2(\Omega)}^{1/4} \|\vec{v}\|_{H^1(\Omega)}^{3/4}$, (3.8) y (3.16), estimamos

I_1 y I_2 de la forma:

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \|A\bar{w}\|_{L^2(\Omega)} \left(\|\bar{w}\|_{L^4(\Omega)} + \|\bar{e}\|_{L^4(\Omega)} \right) \|\nabla\bar{w}\|_{L^4(\Omega)} \\
&\leq C\|A\bar{w}\|_{L^2(\Omega)} \left(\|\nabla\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^{3/4} \|\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^{1/4} \right. \\
&\quad \left. + \|\bar{e}\|_{H^1(\Omega)}^{3/4} \|\bar{e}\|_{L^2(\Omega)}^{1/4} \right) \|\nabla_H\bar{w}\|_{H^1(\Omega)}^{3/4} \|\nabla_H\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^{1/4} \\
&\leq \frac{C}{\nu^{3/4}} \|A\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^{7/4} \left(\|\bar{w}\|_{H^1(\Omega)} + \|\bar{e}\|_{H^1(\Omega)} \right) \|\bar{w}\|_{H^1(\Omega)}^{1/4} \\
&\leq \frac{C}{\nu^{7/8}} \|A\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^{7/4} \left(\frac{1}{\nu^{1/2}} \|\bar{w}\|_V + \|\bar{e}\|_{H^1(\Omega)} \right) \|\bar{w}\|_V^{1/4} \\
&\leq \frac{1}{10} \|A\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \left(\frac{1}{\nu^{11}} \|\bar{w}\|_V^8 + \frac{1}{\nu^7} \|\bar{e}\|_{H^1(\Omega)}^8 \right) \|\bar{w}\|_V^2
\end{aligned}$$

De forma análoga, podemos obtener las acotaciones del término I_2 :

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \|A\bar{w}\|_{L^2(\Omega)} \left(\|\bar{w}\|_{L^4(\Omega)} + \|\bar{e}\|_{L^4(\Omega)} \right) \|\nabla_H\bar{e}\|_{L^4(\Omega)} \\
&\leq C\|A\bar{w}\|_{L^2(\Omega)} \left(\|\nabla\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^{3/4} \|\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^{1/4} + \|\bar{e}\|_{H^1(\Omega)}^{3/4} \|\bar{e}\|_{L^2(\Omega)}^{1/4} \right) \|\nabla_H\bar{e}\|_{L^2(\Omega)}^{1/4} \|\nabla_H\bar{e}\|_{H^1(\Omega)}^{3/4} \\
&\leq \frac{1}{10} \|A\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{\nu} \|\bar{e}\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|\bar{e}\|_{H^2(\Omega)}^{3/2} \|\bar{w}\|_V^2 + C\|\bar{e}\|_{H^1(\Omega)}^{5/2} \|\bar{e}\|_{H^2(\Omega)}^{3/2}
\end{aligned}$$

Usando el Lema 3.18 para w_3 y e_3 y el Lema 3.17 (estimación (3.26)) para $\partial_z\bar{w}$ y $\partial_z\bar{e}$, acotamos I_3 y I_4 . Por claridad, descomponemos $I_3 = J_1 + J_2$, donde

$$J_1 = - \int_{\Omega} (w_3 \cdot \partial_z)\bar{w} \cdot A\bar{w} d\Omega,$$

y

$$J_2 = - \int_{\Omega} (e_3 \cdot \partial_z)\bar{w} \cdot A\bar{w} d\Omega.$$

$$\begin{aligned}
|J_1| &\leq \|A\bar{w}\|_{L^2(\Omega)} \|w_3\|_{L_z^\infty L_x^4} \|\partial_z\bar{w}\|_{L_z^2 L_x^4} \\
&\leq \frac{C}{\nu} \|A\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\bar{w}\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\nu^{3/2}} \|A\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\bar{w}\|_V.
\end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned}
|J_2| &\leq C\|A\bar{w}\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{w}\|_{H^2(\Omega)}^{1/2} \|\bar{w}\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|\bar{e}\|_{H^2(\Omega)}^{1/2} \|\bar{e}\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{10} \|A\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{\nu^3} \|\bar{w}\|_V^2 \|\bar{e}\|_{H^1(\Omega)}^2 \|\bar{e}\|_{H^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Y estimaciones similares conducen a la acotación para I_4 :

$$\begin{aligned}
I_4 &\leq \left(\|w_3\|_{L_z^\infty L_x^4} + \|e_3\|_{L_z^\infty L_x^4} \right) \|\partial_z\bar{e}\|_{L_z^2 L_x^4} \|A\bar{w}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C \left(\|\bar{w}\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|\bar{w}\|_{H^2(\Omega)}^{1/2} + \|\bar{e}\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|\bar{e}\|_{H^2(\Omega)}^{1/2} \right) \|\bar{e}\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|\bar{e}\|_{H^2(\Omega)}^{1/2} \|A\bar{w}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{10} \|A\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{\nu^3} \|\bar{e}\|_{H^1(\Omega)}^2 \|\bar{e}\|_{H^2(\Omega)}^2 \|\bar{w}\|_V^2 + C\|\bar{e}\|_{H^1(\Omega)}^2 \|\bar{e}\|_{H^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Finalmente para I_5 obtenemos:

$$I_5 \leq \frac{1}{10} \|A\vec{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|\vec{f}_2\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Reuniendo todas las cotas anteriores, llegamos a la expresión (3.29). ■

Demostración del Teorema 3.1 en el caso 3D: Imponiendo $\|\vec{w}(t)\|_V < \gamma\nu^{3/2}$, podemos controlar el término $C\|A\vec{w}\|_{L^2(\Omega)}^2\|\vec{w}\|_V$. Finalmente, usando la hipótesis (H) sobre los datos, siguiendo el mismo tipo de razonamiento que en el caso 2D, concluimos que $\|\vec{w}(t)\|_V < \gamma\nu^{3/2}$, $\forall t \in [0, T]$ (para una constante $\gamma > 0$ suficientemente pequeña) y terminamos la demostración. ■

3.3.3 Solución fuerte local para datos cualesquiera

Demostración del Teorema 3.2 en el caso 3D:

Razonando como en la demostración de la existencia de solución global fuerte para datos pequeños, llegamos a la expresión (3.29). Como $\vec{w}_m(0) = \vec{0}$ y \vec{w}_m es una función continua en tiempo con valores en H^1 , podemos elegir un tiempo T_m^1 tal que:

$$\|\vec{w}_m(t)\|_V \leq \frac{\nu^{3/2}}{2C}, \quad \forall t \in [0, T_m^1].$$

Entonces, lo que tenemos que demostrar es que podemos elegir T_m^1 acotado superiormente independientemente de m . Integrando la expresión (3.29) entre 0 y t , y usando que $t \in [0, T_m^1]$, se obtiene

$$\begin{aligned} \|\vec{w}_m(t)\|_V^2 + \int_0^t \|A\vec{w}_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ \leq C \left\{ \nu^4 + \frac{d_1^8}{\nu^4} + d_1^4 + d_1^2\nu^2 + \nu^2 \|\vec{e}\|_{H^2(\Omega)}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Después, podemos elegir T^2 tal que:

$$C \left\{ \left(\nu^4 + \frac{d_1^8}{\nu^4} + d_1^4 + d_1^2\nu^2 \right) T^2 + \nu^2 \|\vec{e}\|_{L^2_{T^2}(H^2(\Omega))}^2 \right\} < \frac{\nu^3}{4C^2}.$$

Por tanto, vemos que para todo m , se puede elegir T_m^1 igual a T^2 . La prueba de la existencia a partir de aquí se puede concluir fácilmente. ■

Nota 3.3.3 Las estimaciones de Hausdorff para los tiempos singulares que se hicieron en el caso 2D no son posibles en el caso 3D, debido al término $\frac{C}{\nu^{3/2}}\|A\vec{w}\|_{L^2(\Omega)}^2\|\vec{w}\|_V$ a la derecha de (3.29) (que no aparecía en la expresión 2-dimensional (3.14)).

3.4 Unicidad de solución débil/fuerte del problema hidrostático

En esta Sección vamos a probar que cualquier solución débil \vec{u} coincide con una solución más regular \vec{u} , siempre que dicha solución más regular exista. El estudio se hará en el caso 3D. El caso 2D se tratará en la Nota 3.4.3.

Demostración del Teorema 3.3: Usando la Definición 2.1, para casi todo $t \in (0, T)$ se verifica la desigualdad de energía (2.3). Observemos que, partiendo de la formulación variacional de \vec{u} (Definición 2.1), tenemos que $\partial_t \vec{u} \in L^{4/3}(0, T; W')$, donde $W = \{\vec{\psi} \in V; \partial_z \vec{\psi} \in H^1(\Omega)^2\}$. De nuevo, como en el capítulo anterior, el término más difícil de manejar es $\int_{\Omega} u_3 \partial_z \vec{\psi} \cdot \vec{u} \, d\Omega$, que puede ser controlado usando que $u_3 \in L^2(0, T; L_z^\infty L_x^2)$ (Lema 3.16) y $\vec{u} \in L^4(0, T; L_z^2 L_x^4)$ (Lema 3.17). Por tanto, $\vec{\psi} = \vec{u}$ se puede tomar como función test en la formulación variacional de \vec{u} . Siguiendo los mismos argumentos que el capítulo anterior (ver también [25]), obtenemos:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \|(\vec{u} - \underline{\vec{u}})(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \int_0^t \|\vec{u} - \underline{\vec{u}}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \\ \leq - \int_0^t \int_{\Omega} ((\vec{u} - \underline{\vec{u}}) \cdot \nabla_H \underline{\vec{u}} + (u_3 - \underline{u}_3) \partial_z \underline{\vec{u}}) \cdot \vec{u} \, d\Omega \, ds \end{cases} \quad (3.31)$$

Entonces, tenemos que acotar el segundo miembro (3.31). Usando la condición de divergencia nula para $\underline{\vec{u}}$,

$$\begin{aligned} & - \int_0^t \int_{\Omega} ((\vec{u} - \underline{\vec{u}}) \cdot \nabla_H \underline{\vec{u}} + (u_3 - \underline{u}_3) \partial_z \underline{\vec{u}}) \cdot \vec{u} \, d\Omega \, ds \\ & = - \int_0^t \int_{\Omega} ((\vec{u} - \underline{\vec{u}}) \cdot \nabla_H \underline{\vec{u}} + (u_3 - \underline{u}_3) \partial_z \underline{\vec{u}}) \cdot (\vec{u} - \underline{\vec{u}}) \, d\Omega \, ds \equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Usando las cotas de los Lemas de la Sección 3.3.1, obtenemos las siguientes estimaciones:

$$\begin{aligned} I_1 & \leq \int_0^t \int_{\Omega} |\vec{u} - \underline{\vec{u}}|^2 |\nabla_H \underline{\vec{u}}| \, d\Omega \, ds \leq \int_0^t \|\vec{u} - \underline{\vec{u}}\|_{L_z^2 L_x^4}^2 \|\nabla_H \underline{\vec{u}}\|_{L_z^\infty L_x^2} \, ds \\ & \leq C \int_0^t \|\vec{u} - \underline{\vec{u}}\|_{L^2(\Omega)} \|\vec{u} - \underline{\vec{u}}\|_{H^1(\Omega)} \|\nabla_H \underline{\vec{u}}\|_{L_z^\infty L_x^2} \, ds \\ & \leq \frac{\nu}{4} \int_0^t \|\vec{u} - \underline{\vec{u}}\|_{H^1(\Omega)}^2 \, ds + \frac{C}{\nu} \int_0^t \|\nabla_H \underline{\vec{u}}\|_{L_z^\infty L_x^2}^2 \|\vec{u} - \underline{\vec{u}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds. \\ I_2 & \leq \int_0^t \int_{\Omega} |u_3 - \underline{u}_3| |\partial_z \underline{\vec{u}}| |\vec{u} - \underline{\vec{u}}| \, d\Omega \, ds \leq \int_0^t \|u_3 - \underline{u}_3\|_{L_z^\infty L_x^2} \|\partial_z \underline{\vec{u}}\|_{L_z^2 L_x^4} \|\vec{u} - \underline{\vec{u}}\|_{L_z^2 L_x^4} \, ds \\ & \leq C \int_0^t \|\vec{u} - \underline{\vec{u}}\|_{H^1(\Omega)}^{3/2} \|\vec{u} - \underline{\vec{u}}\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\partial_z \underline{\vec{u}}\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\partial_z \underline{\vec{u}}\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \, ds \\ & \leq \frac{\nu}{4} \int_0^t \|\vec{u} - \underline{\vec{u}}\|_{H^1(\Omega)}^2 \, ds + \frac{C}{\nu} \int_0^t \|\partial_z \underline{\vec{u}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\partial_z \underline{\vec{u}}\|_{H^1(\Omega)}^2 \|\vec{u} - \underline{\vec{u}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds. \end{aligned}$$

Ordenando y reescribiendo las constantes de todas las desigualdades anteriores, la desigualdad (3.31) se convierte en:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \|(\vec{u} - \underline{\vec{u}})(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \int_0^t \|(\vec{u} - \underline{\vec{u}})(s)\|_{H^1(\Omega)}^2 \, ds \\ \leq \frac{C}{\nu} \int_0^t \left\{ \|\nabla_H \underline{\vec{u}}(s)\|_{L_z^\infty L_x^2}^2 + \|\partial_z \underline{\vec{u}}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\partial_z \underline{\vec{u}}(s)\|_{H^1(\Omega)}^2 \right\} \|(\vec{u} - \underline{\vec{u}})(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds \end{cases} \quad (3.32)$$

Por tanto, si \underline{u} verifica, además de la regularidad débil, la regularidad adicional (3.1), entonces la desigualdad (3.32) conduce a la unicidad de \underline{u} usando el Lema de Gronwall. ■

Nota 3.4.1 Usando el Lema 3.17 (a) para $\nabla_H \underline{u} \in H^1(\Omega)$, obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\|\nabla_H \underline{u}\|_{L^\infty_x L^2_z}^2 \leq C \|\nabla_H \underline{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla_H \underline{u}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Entonces, podemos concluir que si existe una solución fuerte, toda solución débil de (EP) coincide con dicha solución fuerte allí donde la solución más regular esté definida. En el capítulo anterior, usando estimaciones isotropas, obtenemos unicidad imponiendo $\partial_z \underline{u} \in L^8(0, T; L^4(\Omega)^2)$, que es la regularidad que, en general, una solución fuerte no posee.

Nota 3.4.2 (Profundidad constante) Si la profundidad del dominio es constante, $\nabla_H \underline{u}|_{\Gamma_b} = \vec{0}$, podemos usar la primera desigualdad del Lema 3.17 (a) para $\nabla_H \underline{u}$, obteniendo:

$$\|\nabla_H \underline{u}\|_{L^\infty_x L^2_z}^2 \leq C \|\nabla_H \underline{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_z(\nabla_H \underline{u})\|_{L^2(\Omega)}.$$

Entonces, sólo se hace necesario imponer la hipótesis de regularidad adicional para $\partial_z \underline{u}$ dada en (3.1).

Nota 3.4.3 (Caso 2D) En el caso 2D, en el capítulo anterior se obtuvo unicidad de solución débil si existía una solución débil \bar{u} de (EP) en $(0, T)$ con la regularidad adicional:

$$\partial_z \bar{u} \in L^4(0, T; L^4(\Omega)).$$

Usando las estimaciones 2D anisótropas,

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_0^t \int_\Omega |u - \underline{u}|^2 \|\nabla_H \underline{u}\| d\Omega ds \leq \int_0^t \|u - \underline{u}\|_{L_x^2 L_x^\infty} \|u - \underline{u}\|_{L_x^\infty L_x^2} \|\nabla_H \underline{u}\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\leq C \int_0^t \|u - \underline{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(u - \underline{u})\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla_H \underline{u}\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\leq \frac{\nu}{4} \int_0^t \|u - \underline{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds + \frac{C}{\nu} \int_0^t \|\nabla_H \underline{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|u - \underline{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_0^t \int_\Omega |u_3 - \underline{u}_3| |\partial_z \underline{u}| |u - \underline{u}| d\Omega ds \leq \int_0^t \|u_3 - \underline{u}_3\|_{L_x^2 L_x^\infty} \|\partial_z \underline{u}\|_{L^2(\Omega)} \|u - \underline{u}\|_{L_x^\infty L_x^2} ds \\ &\leq C \int_0^t \|u - \underline{u}\|_{H^1(\Omega)}^{3/2} \|\partial_z \underline{u}\|_{L^2(\Omega)} \|u - \underline{u}\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} ds \\ &\leq \frac{\nu}{4} \int_0^t \|u - \underline{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds + \frac{C}{\nu} \int_0^t \|\partial_z \underline{u}\|_{L^2(\Omega)}^4 \|u - \underline{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \end{aligned}$$

luego podemos deducir que sólo es necesario imponer:

$$\partial_z \bar{u} \in L^4(0, T; L^2(\Omega)).$$

3.5 Comportamiento asintótico de las soluciones

Como en las secciones precedentes, haremos el estudio en el caso $3D$, pues los resultados en el caso $2D$ son similares y más fáciles de obtener.

Etapla 1. El problema estacionario no lineal $(EP)_{st}$: Sea \vec{v} una solución del problema estacionario:

$$(EP)_{st} \begin{cases} -\nu_h \Delta_H \vec{v} - \nu_v \partial_{zz}^2 \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla_H) \vec{v} + \nu_3 \partial_z \vec{v} + \nabla_H p_s = \vec{f}_2 & \text{en } \Omega, \\ \nabla_H \cdot \langle \vec{v} \rangle = 0 & \text{en } \omega, \\ \nu_v \partial_z \vec{v}|_{\Gamma_s} = \vec{\tau}_2, \quad \vec{v}|_{\Gamma_b \cup \Gamma_l} = \vec{0}. \end{cases}$$

Teorema 3.20 *Si los datos \vec{f}_2 y $\vec{\tau}_2$ son suficientemente pequeños en las normas de $L^2(\Omega)^2$ y $H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)^2$ respectivamente, entonces existe una única solución para $(EP)_{st}$ y se satisfacen las siguientes estimaciones de regularidad débil y fuerte para las soluciones:*

$$\|\vec{v}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\nu^2} \left\{ \|\vec{f}_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\vec{\tau}_2\|_{H^{-1/2}(\Gamma_s)}^2 \right\}, \quad (3.33)$$

$$\|\vec{v}\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\nu^2} \left\{ \|\vec{f}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\vec{\tau}_2\|_{H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)}^2 \right\}. \quad (3.34)$$

Nota 3.5.1 *Para la obtención de solución débil del problema $(EP)_{st}$ no hay que imponer hipótesis de pequeñez sobre los datos.*

Demostración:

a) Existencia de solución de $(EP)_{st}$: Hacemos aquí una demostración formal de cómo obtener las desigualdades anteriores.

En primer lugar, tomando \vec{v} como función test en $(EP)_{st}$ y acotando convenientemente, obtenemos fácilmente (3.33), sin imponer ninguna hipótesis restrictiva sobre los datos.

En segundo lugar, levantamos el dato $\vec{\tau}_2$ con (\vec{e}_2, q_2) solución del problema estacionario lineal (S_2) de la demostración del Teorema 3.8. Entonces, $(\vec{g} = \vec{v} - \vec{e}_2, \pi_s = p_s - q_2)$ verifica el problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu_h \Delta_H \vec{g} - \nu_v \partial_{zz}^2 \vec{g} + ((\vec{g} + \vec{e}_2) \cdot \nabla_H) \vec{g} + (g_3 + (e_2)_3) \partial_z \vec{g} + (\vec{g} \cdot \nabla_H) \vec{e}_2 + g_3 \partial_z \vec{e}_2 \\ \quad + \nabla_H \pi_s = \vec{f}_2 - (\vec{e}_2 \cdot \nabla_H) \vec{e}_2 - (e_2)_3 \partial_z \vec{e}_2 & \text{en } \Omega, \\ \nabla_H \cdot \langle \vec{g} \rangle = 0 & \text{en } \omega, \\ \nu_v \partial_z \vec{g}|_{\Gamma_s} = \vec{0}, \quad \vec{g}|_{\Gamma_b \cup \Gamma_l} = \vec{0}. \end{array} \right.$$

Tomando $A\vec{g}$ como función test en el sistema anterior, donde A es el operador de Stokes hidrostático, obtenemos:

$$\begin{aligned} \|A\vec{g}\|_{L^2(\Omega)}^2 &= - \int_{\Omega} ((\vec{g} + \vec{e}_2) \cdot \nabla_H) \vec{g} \cdot A\vec{g} d\Omega - \int_{\Omega} ((\vec{g} + \vec{e}_2) \cdot \nabla_H \vec{e}_2) \cdot A\vec{g} d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} (g_3 + (e_2)_3) \partial_z \vec{g} \cdot A\vec{g} d\Omega - \int_{\Omega} (g_3 + (e_2)_3) \cdot A\vec{g} d\Omega + \int_{\Omega} \vec{f}_2 \cdot A\vec{g} d\Omega. \end{aligned}$$

Si comparamos esta expresión con la expresión (3.30), vemos que si reemplazamos (\vec{w}, \vec{e}) por (\vec{g}, \vec{e}_2) , la expresión es la misma, omitiendo el término $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{w}\|_{\mathcal{V}}^2$. En consecuencia, las acotaciones de los términos son análogas, luego sólo expondremos el resultado final de dichas estimaciones, es decir:

$$\begin{aligned} \|A\vec{g}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{C}{\nu} \|\vec{g}\|_{H^1(\Omega)} \|A\vec{g}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{\nu^6} \|\vec{g}\|_{H^1(\Omega)}^{10} \\ &+ C \left(\frac{1}{\nu^6} \|\vec{e}_2\|_{H^1(\Omega)}^8 + \|\vec{e}_2\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|\vec{e}_2\|_{H^2(\Omega)}^{3/2} + \frac{1}{\nu^2} \|\vec{e}_2\|_{H^1(\Omega)}^2 \|\vec{e}_2\|_{H^2(\Omega)}^2 \right) \|\vec{g}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &+ C \left(\|\vec{e}_2\|_{H^1(\Omega)}^{5/2} \|\vec{e}_2\|_{H^2(\Omega)}^{3/2} + \|\vec{e}_2\|_{H^1(\Omega)}^2 \|\vec{e}_2\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|\vec{f}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

Recordemos que las cotas débiles y fuertes para \vec{e}_2 son las siguientes:

$$\begin{aligned} \|\vec{e}_2\|_{H^1(\Omega)} &\leq \frac{C}{\nu} \|\vec{\tau}_2\|_{H^{-1/2}(\Gamma_s)} \\ \|\vec{e}_2\|_{H^2(\Omega)} &\leq \frac{C}{\nu} \|\vec{\tau}_2\|_{H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Usando las cotas para \vec{e}_2 en función de $\vec{\tau}_2$, llegamos a:

$$\begin{aligned} \|A\vec{g}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{C}{\nu} \|\vec{g}\|_{H^1(\Omega)} \|A\vec{g}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{\nu^6} \|\vec{g}\|_{H^1(\Omega)}^{10} \\ &+ C \left(\frac{C}{\nu^{14}} \|\vec{\tau}_2\|_{H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)}^8 + \frac{1}{\nu^2} \|\vec{\tau}_2\|_{H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)}^2 + \frac{1}{\nu^6} \|\vec{\tau}_2\|_{H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)}^4 \right) \|\vec{g}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &+ C \left(\frac{1}{\nu^4} \|\vec{\tau}_2\|_{H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)}^4 + \|\vec{f}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \end{aligned}$$

y si usamos las hipótesis para $\vec{\tau}_2$ y \vec{f}_2 que aparecen en (H):

$$\|\vec{\tau}_2\|_{H_0^{1/2+\varepsilon}} < c\nu^2 \quad \text{y} \quad \|\vec{f}_2\|_{L^2} < c\nu^2,$$

(en principio, c no tiene porqué ser pequeño), obtenemos:

$$\begin{aligned} \|A\vec{g}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{C}{\nu} \|\vec{g}\|_{H^1(\Omega)} \|A\vec{g}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{\nu^6} \|\vec{g}\|_{H^1(\Omega)}^{10} \\ &+ \frac{C}{\nu^2} (1 + c^2 + c^6) \|\vec{\tau}_2\|_{H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)}^2 \|\vec{g}\|_{H^1(\Omega)}^2 + C \left(c^2 \|\vec{\tau}_2\|_{H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)}^2 + \|\vec{f}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Teniendo en cuenta que $\vec{g} = \vec{v} - \vec{e}_2$, gracias a (3.33) y (3.35)₂ verifica:

$$\|\vec{g}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\nu^2} \left\{ \|\vec{f}_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\vec{\tau}_2\|_{H^{-1/2}(\Gamma_s)}^2 \right\} \leq Cc^2\nu^2, \tag{3.37}$$

donde la última desigualdad se obtiene gracias a las hipótesis (H) para $\vec{\tau}_2$ y \vec{f}_2 . Pasando entonces restando el término $\frac{C}{\nu} \|\vec{g}\|_{H^1(\Omega)} \|A\vec{g}\|_{L^2(\Omega)}^2$ a la izquierda de (3.36), y usando que:

$$\frac{C}{\nu^6} \|\vec{g}\|_{H^1(\Omega)}^{10} = \frac{C}{\nu^6} \|\vec{g}\|_{H^1(\Omega)}^6 \|\vec{g}\|_{H^1(\Omega)}^2 \|\vec{g}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\nu^2} c^6 \left(\|\vec{f}_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\vec{\tau}_2\|_{H^{-1/2}(\Gamma_s)}^2 \right) \|\vec{g}\|_{H^1(\Omega)}^2$$

(donde hemos usado la estimación (3.37)), obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{C}{\nu} \|\vec{g}\|_{H^1(\Omega)}\right) \|A\vec{g}\|_{H^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{C}{\nu^2} \left\{ (1 + c^2 + c^6) \|\vec{\tau}_2\|_{H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)}^2 + c^6 \|\vec{f}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \|\vec{g}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &+ C \left(c^2 \|\vec{\tau}_2\|_{H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)}^2 + \|\vec{f}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Si imponemos que $c > 0$ sea una constante suficientemente pequeña para que verifique:

$$Cc < \frac{1}{2}, \quad (3.39)$$

entonces, gracias a (3.37), $1 - \frac{C}{\nu} \|\vec{g}\|_{H^1} > \frac{1}{2}$. Luego, acotando convenientemente en (3.38) a derecha e izquierda, obtenemos

$$\|A\vec{g}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq Cc^2 (1 + c^2 + c^6) \|\vec{\tau}_2\|_{H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)}^2 + C(1 + c^8) \|\vec{f}_2\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Teniendo en cuenta que c es una constante suficientemente pequeña y la estimación $\|\vec{g}\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\nu^2} \|A\vec{g}\|_{L^2(\Omega)}^2$ (ver (3.8)), obtenemos:

$$\|\vec{g}\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\nu^2} \left\{ \|\vec{f}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\vec{\tau}_2\|_{H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)}^2 \right\}.$$

Esto junto con la estimación (3.35)₂ para \vec{e} , nos permite obtener (3.34).

Nota 3.5.2 Observemos que la pequeñez de la constante $c > 0$ impuesta en (3.39), nos da la pequeñez de los datos \vec{f}_2 y $\vec{\tau}_2$ que aparece en el enunciado del Teorema 3.20, ya que (ver (H)):

$$\|\vec{\tau}_2\|_{H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)} \leq c\nu^2 \quad \text{y} \quad \|\vec{f}_2\|_{L^2(\Omega)} \leq c\nu^2.$$

b) Unicidad de solución débil/fuerte de $(EP)_{st}$: Razonando como en la Sección 3.4, obtenemos que la diferencia de soluciones de $(EP)_{st}$, $\vec{V} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, verifica la desigualdad:

$$\nu \|\vec{V}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq - \int_{\Omega} \left((\vec{V} \cdot \nabla_H) \vec{v}_2 + V_3 \partial_z \vec{v}_2 \right) \cdot \vec{v}_1 d\Omega = - \int_{\Omega} \left((\vec{V} \cdot \nabla_H) \vec{v}_2 + V_3 \partial_z \vec{v}_2 \right) \cdot \vec{V} d\Omega = I_1 + I_2,$$

donde

$$I_1 \leq \int_{\Omega} |\vec{V}|^2 |\nabla_H \vec{v}_2| d\Omega \leq \|\vec{V}\|_{L^6(\Omega)}^2 \|\nabla_H \vec{v}_2\|_{L^{3/2}(\Omega)} \leq C \|\vec{V}\|_{H^1(\Omega)}^2 \|\vec{v}_2\|_{H^2(\Omega)}$$

$$I_2 \leq \int_{\Omega} |V_3| |\partial_z \vec{v}_2| |\vec{V}| d\Omega \leq \|V_3\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_z \vec{v}_2\|_{L^3(\Omega)} \|\vec{V}\|_{L^6(\Omega)} \leq Ch_{max}^{1/2} \|\vec{V}\|_{H^1(\Omega)}^2 \|\vec{v}_2\|_{H^2(\Omega)}$$

Por tanto, imponiendo, por ejemplo,

$$C \left(1 + h_{max}^{1/2}\right) \|\vec{v}_2\|_{H^2(\Omega)} < \nu/2,$$

concluimos la unicidad. Usando (3.34) y la hipótesis (H) para $\vec{\tau}_2$ y \vec{f}_2 , la condición anterior se traduce en imponer:

$$Cc \left(1 + h_{max}^{1/2}\right) < \frac{1}{2},$$

luego, reescribiendo la constante C , se trata del mismo tipo de hipótesis que (3.39), que garantiza la existencia de solución fuerte de $(EP)_{st}$. ■

Etapa 2. Demostración del Teorema 3.4:

Lema 3.21 *La función $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} - \vec{e}$, donde \vec{v} es la solución fuerte del problema estacionario $(EP)_{st}$ (dada en el Teorema 3.20) y \vec{e} es la solución fuerte del problema lineal evolutivo (S) con $\vec{f} = \vec{f}_1$, $\vec{e}(0) = \vec{u}_0 - \vec{v}$ y $\vec{\tau} = \vec{\tau}_1$ (dada en el Teorema 3.8), verifica la siguiente estimación:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\vec{w}\|_V^2 + \|A\vec{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{C}{\nu^{3/2}} \|A\vec{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\vec{w}\|_V + \frac{C}{\nu^{11}} \|\vec{w}\|_V^{10} \\ &+ (a_1(t) + a_2(t)) \|\vec{w}\|_V^2 + b(t), \end{aligned} \quad (3.40)$$

donde $a_1 \in L^\infty(0, \infty)$, a_2 y $b \in L^1(0, \infty)$ (sus expresiones aparecen en (3.41)).

Demostración: El problema que verifica $\vec{w}(t) = \vec{u}(t) - \vec{e}(t) - \vec{v}$ es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \vec{w} - \nu_h \Delta_H \vec{w} - \nu_v \partial_{zz}^2 \vec{w} + (\vec{w} \cdot \nabla_H) \vec{w} + w_3 \partial_z \vec{w} \\ + ((\vec{v} + \vec{e}) \cdot \nabla_H) \vec{w} + (v_3 + e_3) \partial_z \vec{w} + (\vec{w} \cdot \nabla_H) (\vec{v} + \vec{e}) + w_3 \partial_z (\vec{v} + \vec{e}) \\ = -(\vec{e} \cdot \nabla_H) \vec{v} - e_3 \partial_z \vec{v} - ((\vec{v} + \vec{e}) \cdot \nabla_H) \vec{e} - (v_3 + e_3) \partial_z \vec{e} \quad \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \nabla_H \cdot \langle \vec{w} \rangle = 0 \quad \text{en } (0, T) \times \omega, \quad \vec{w}(t=0) = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \nu_v \partial_z \vec{w} = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_s, \quad \vec{w} = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times (\Gamma_b \cup \Gamma_l). \end{array} \right.$$

Tomando $A\vec{w}$ como función test, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{w}\|_V^2 + \|A\vec{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 &= - \int_{\Omega} ((\vec{w} \cdot \nabla_H) \vec{w}) \cdot A\vec{w} d\Omega - \int_{\Omega} w_3 \partial_z \vec{w} \cdot A\vec{w} d\Omega \\ &- \int_{\Omega} ((\vec{v} + \vec{e}) \cdot \nabla_H) \cdot \vec{w} \cdot A\vec{w} d\Omega - \int_{\Omega} (v_3 + e_3) \partial_z \vec{w} \cdot A\vec{w} d\Omega \\ &- \int_{\Omega} ((\vec{w} \cdot \nabla_H) (\vec{v} + \vec{e})) \cdot A\vec{w} d\Omega - \int_{\Omega} w_3 \partial_z (\vec{v} + \vec{e}) \cdot A\vec{w} d\Omega \\ &- \int_{\Omega} ((\vec{e} \cdot \nabla_H) \vec{v}) \cdot A\vec{w} d\Omega - \int_{\Omega} e_3 \partial_z \vec{v} \cdot A\vec{w} d\Omega \\ &- \int_{\Omega} ((\vec{v} + \vec{e}) \cdot \nabla_H \vec{e}) \cdot A\vec{w} d\Omega - \int_{\Omega} (v_3 + e_3) \partial_z \vec{e} \cdot A\vec{w} d\Omega \end{aligned}$$

Acotando cada término de manera análoga a la Subsección 3.3.2, obtenemos (3.40), donde

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1(t) = C \left\{ \frac{1}{\nu^7} \left(\|\bar{v}\|_{H^1(\Omega)}^8 + \|\bar{e}\|_{L^\infty(H^1)}^8 \right) + \frac{1}{\nu^3} \|\bar{v}\|_{H^1(\Omega)}^2 \|\bar{v}\|_{H^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\nu} \|\bar{v}\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|\bar{v}\|_{H^2(\Omega)}^{3/2} \right\} \\ a_2(t) = C \left\{ \frac{1}{\nu^3} \|\bar{e}\|_{L^\infty(H^1)}^2 \|\bar{e}(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\nu} \|\bar{e}(t)\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|\bar{e}(t)\|_{H^2(\Omega)}^{3/2} \right\} \\ \leq \frac{C}{\nu} \left(\frac{d_1^2}{\nu^2} + 1 \right) \|\bar{e}(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\nu} \|\bar{e}(t)\|_{H^2}^2 \\ b(t) = C \left\{ \|\bar{e}(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \|\bar{v}\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|\bar{v}\|_{H^2(\Omega)}^{3/2} + \|\bar{e}(t)\|_{H^1} \|\bar{v}\|_{H^1(\Omega)} \|\bar{v}\|_{H^2(\Omega)} \|\bar{e}(t)\|_{H^2(\Omega)} \right. \\ \left. + \|\bar{v}\|_{H^1}^2 \|\bar{e}(t)\|_{H^1}^{1/2} \|\bar{e}(t)\|_{H^2}^{3/2} + \|\bar{e}(t)\|_{H^1(\Omega)}^{5/2} \|\bar{e}(t)\|_{H^2(\Omega)}^{3/2} + \|\bar{e}(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \|\bar{e}(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 \right\} \\ \leq C \left\{ \|\bar{v}\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|\bar{v}\|_{H^2(\Omega)}^{3/2} + \|\bar{v}\|_{H^1(\Omega)} \|\bar{v}\|_{H^2(\Omega)} + \|\bar{v}\|_{H^1}^2 + \|\bar{e}\|_{L^\infty(H^1)}^2 \right\} \|\bar{e}(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 \\ \leq C\nu^2 \|\bar{e}(t)\|_{H^2(\Omega)}^2. \end{array} \right. \quad (3.41)$$

Es fácil ver entonces que $a_1 \in L^\infty(0, +\infty)$ y $a_2, b \in L^1(0, +\infty)$. ■

Usando (3.33)-(3.34) y la hipótesis (H), podemos obtener:

$$a_1(t) \leq C\phi(c)\nu, \quad (3.42)$$

con $\phi(c) = c^2(1 + c^2 + c^6)$.

Lema 3.22 Sean $\gamma > 0$ y $c > 0$ constantes suficientemente pequeñas para que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} C\gamma(1 + \gamma^7) < \frac{1}{2} \\ C(\phi(c)\gamma^2 + c^2) < \gamma^2. \end{array} \right. \quad (3.43)$$

Entonces,

$$\|\bar{w}(t)\|_V \leq \gamma\nu^{3/2}, \quad \forall t \in [0, +\infty). \quad (3.44)$$

Demostración: Al igual que en la demostración del Lema 3.14, razonamos por reducción al absurdo: Supongamos entonces que existe un instante de tiempo en $(0, T)$ en el que la cota $\gamma\nu^{3/2}$ se alcanza. Sea t^* el menor de dichos instantes, es decir, $\|\bar{w}(t)\|_V < \gamma\nu^{3/2}, \forall t \in [0, t^*)$ y $\|\bar{w}(t^*)\|_V = \gamma\nu^{3/2}$. Entonces, usando (3.10), y las cotas de (3.41) y (3.42), reescribimos (3.40) de la forma:

$$\frac{d}{dt} \|\bar{w}(t)\|_V^2 + \frac{\nu}{C_1} \left(1 - C\gamma(1 + \gamma^7) \right) \|\bar{w}(t)\|_V^2 \leq C\phi(c)\gamma^2\nu^4 + C\nu^2(1 + \gamma^2) \|\bar{e}(t)\|_{H^2(\Omega)}^2, \quad \forall t \in [0, t^*]$$

Usando la condición (3.43)₁, multiplicando la expresión anterior por $\exp\left(\frac{\nu}{2C_1}t\right)$ e integrando en tiempo, teniendo en cuenta que $\bar{w}(0) = \bar{0}$, obtenemos:

$$\|\bar{w}(t)\|_V^2 \leq C \left(\phi(c)\gamma^2\nu^3 + \nu^2(1 + \gamma^2) \int_0^t \|\bar{e}(s)\|_{H^2(\Omega)}^2 ds \right), \quad \forall t \in [0, t^*],$$

y, usando (3.5) y la hipótesis (H) para acotar $\|\vec{e}\|_{L^2_\tau(H^2)}$, obtenemos que:

$$\|\vec{w}(t)\|_V^2 \leq C \left(\phi(c)\gamma^2 + c^2(1 + \gamma^2) \right) \nu^3 \leq C \left(\phi(c)\gamma^2 + c^2 \right) \nu^3.$$

Teniendo en cuenta (3.43)₂, llegamos a contradicción. ■

Lema 3.23 *Supongamos (3.44) y (H). La función $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} - \vec{e}$ (dada en el Lema 3.21), verifica:*

$$\|\vec{w}(t)\|_V \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } t \uparrow +\infty.$$

Demostración: Teniendo en cuenta (3.44) y la condición de pequeñez para los datos (H), obtenemos de (3.40) la siguiente desigualdad:

$$y'(t) + \frac{\nu}{2C}y(t) \leq C\nu^2\|\vec{e}(t)\|_{H^2(\Omega)}^2$$

donde $y(t) = \|\vec{w}(t)\|_V^2$ y hemos usado que $\nu\|\vec{w}(t)\|_V^2 \leq C_1\|A\vec{w}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ (ver (3.10)). En efecto, para obtener dicha desigualdad, usamos que $a_2(t)\|\vec{w}\|_V^2 + b(t) \leq C\nu^2\|\vec{e}\|_{H^2(\Omega)}^2$ y el resto de los términos son “absorvidos” por el término $\|A\vec{w}\|_{L^2(\Omega)}^2$ que aparece a la izquierda. Entonces,

$$y(t) \leq \int_0^t e^{-\frac{\nu}{2C}(s-t)}\|\vec{e}(s)\|_{H^2(\Omega)}^2 ds.$$

Como $\|\vec{e}\|_{H^2(\Omega)}^2 \in L^1(0, +\infty)$, para todo $\delta > 0$ existe un $T_* \in [0, +\infty)$ tal que

$$\int_{T_*}^{+\infty} \|\vec{e}(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 dt < \delta.$$

Entonces, para $t > T_*$,

$$e^{-\frac{\nu}{2C}t} \int_0^t e^{\frac{\nu}{2C}s} \|\vec{e}(s)\|_{H^2(\Omega)}^2 ds \leq e^{-\frac{\nu}{2C}t} e^{\frac{\nu}{2C}T_*} \int_0^{T_*} \|\vec{e}(s)\|_{H^2(\Omega)}^2 ds + \int_{T_*}^{+\infty} \|\vec{e}(s)\|_{H^2(\Omega)}^2 ds.$$

Así pues, cuando $t \uparrow +\infty$, podemos concluir que $y(t) = \|\vec{u}(t) - \vec{e}(t) - \vec{v}\|_V^2 \rightarrow 0$. ■

Lema 3.24 *Sea \vec{e} la solución de (S) con $\vec{f} = \vec{f}_1 \in L^2(0, +\infty; L^2(\Omega))$, $\vec{e}(0) = \vec{u}_0 - \vec{v} \in H^1(\Omega)$ y $\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 \in L^2(0, +\infty; H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s))$ tal que $\partial_t \vec{\tau}_1 \in L^2(0, +\infty; H^{-1/2}(\Gamma_s))$. Entonces se verifica que:*

$$\|\vec{e}(t)\|_V \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } t \uparrow +\infty.$$

Demostración: Considerando el problema homogéneo que verifica $\vec{e} - \vec{e}_1$ (siendo \vec{e}_1 la solución del problema estacionario (S₁) dado en la demostración del Teorema 3.8) y tomando como función test $A(\vec{e} - \vec{e}_1)$, obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \|(\vec{e} - \vec{e}_1)(t)\|_V^2 + \|A(\vec{e} - \vec{e}_1)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\|\vec{f}_1(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_t \vec{e}_1(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (3.45)$$

Sumando a ambos lados de (3.45) e término $\frac{d}{dt} \|\vec{e}_1(t)\|_V^2 + \|A\vec{e}_1(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$, teniendo en cuenta (3.10) para $(\vec{e} - \vec{e}_1)(t)$ y $\vec{e}_1(t)$ y que:

$$\frac{d}{dt} \|\vec{e}_1(t)\|_V^2 \leq \|\vec{e}_1(t)\|_V \|\partial_t \vec{e}_1(t)\|_V \leq C \left(\nu \|\vec{e}_1(t)\|_V^2 + \frac{1}{\nu} \|\partial_t \vec{e}_1(t)\|_V^2 \right),$$

obtenemos que $z(t) = \|(\vec{e} - \vec{e}_1)(t)\|_V^2 + \|\vec{e}_1(t)\|_V^2$ verifica la desigualdad:

$$z'(t) + \frac{\nu}{C}z(t) \leq C \left(\|\vec{f}_1(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|A\vec{e}_1(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\nu} \|\partial_t \vec{e}_1(t)\|_V^2 \right).$$

Multiplicando por $e^{\frac{\nu}{C}t}$, integrando en $(0, t)$, usando que $\|\vec{e}\|_V^2 \leq 2z(t)$ y teniendo en cuenta que

$$\|\partial_t \vec{e}_1(s)\|_V^2 \leq \frac{C}{\nu} \|\partial_t \vec{\tau}_1(s)\|_{H^{-1/2}(\Gamma_s)}^2 \quad \text{y} \quad \|A\vec{e}_1(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\vec{\tau}_1(s)\|_{H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)}^2,$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \|\vec{e}(t)\|_V^2 &\leq \frac{C\nu}{\nu} e^{-\frac{\nu}{C}t} \left(\|\vec{u}_0 - \vec{v}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\nu^2} \|\vec{\tau}_1(0)\|_{H^{-1/2}(\Gamma_s)}^2 \right) \\ &+ C \int_0^t e^{-\frac{\nu}{C}(t-s)} \left\{ \|\vec{f}_1(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\vec{\tau}_1(s)\|_{H_0^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_s)}^2 + \frac{1}{\nu^2} \|\partial_t \vec{\tau}_1(s)\|_{H^{-1/2}(\Gamma_s)}^2 \right\} \end{aligned}$$

Como el término entre llaves pertenece a $L^1(0, +\infty)$, aplicamos el mismo razonamiento que en el Lema anterior y demostramos la convergencia a 0. ■

Como $\|\vec{u}(t) - \vec{v}(t)\|_V^2 \leq 2(\|\vec{w}(t)\|_V^2 + \|\vec{e}(t)\|_V^2) \rightarrow 0$ cuando $t \uparrow +\infty$, podemos concluir la demostración del Teorema 3.4. ■

Nota 3.5.3 La condición de pequeñez (H) respecto de \vec{f}_1 , $\vec{\tau}_1$ y \vec{u}_0 , sólo es necesaria para asegurar la existencia de una solución global fuerte \vec{u} de (EP) en $(0, +\infty)$. El resultado continúa siendo cierto si suponemos la existencia de dicha solución global fuerte en $(0, +\infty)$ y sólo imponemos condiciones de pequeñez para $\vec{\tau}_2$ y \vec{f}_2 .

3.6 Algunos problemas abiertos

1.- Al igual que en el capítulo anterior, la validez de los resultados en el caso de dominios sin talud es un problema abierto.

2.- También, tanto en el capítulo anterior como en éste, se han basado todas las demostraciones en resultados de regularidad para el problema de Stokes estacionario. Sería interesante encontrar un resultado análogo de regularidad para el problema de Stokes hidrostático de evolución, con un razonamiento propio de un problema de evolución (sin basarse en el problema estacionario). De ese modo, quizás se podrían debilitar las hipótesis sobre los datos \vec{f} y $\vec{\tau}$.

3.- Comparando con el caso 2D, sería interesante encontrar una forma de estimar la medida del conjunto de los tiempos singulares para el caso 3D.

4.- Atendiendo a que el movimiento del océano es en cierto modo periódico, sería interesante el estudio soluciones del sistema de Ecuaciones Primitivas periódicas en tiempo, correspondientes a fuerzas externas y tracción del viento periódicas. De ese modo, también sería posible, obviamente, prolongar dichas soluciones hasta tiempo infinito.

**Parte III: Las Ecuaciones Primitivas con
condición de Navier en el fondo:
Justificación asintótica y unicidad de
solución débil.**

Introducción a la Parte III

Otra forma de introducir las Ecuaciones Primitivas es a través de un proceso asintótico a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes. Partimos, de nuevo, del sistema (II.1) de la Introducción a la Parte II, y suponemos la aproximación de Boussinesq. Tal y como vimos en la Sección II.3 de dicha Introducción, el análisis de escalas nos dice que el cociente entre las longitudes vertical y horizontales es pequeño:

$$\varepsilon = \frac{Z}{a} \approx 10^{-3}.$$

Básicamente, haciendo el mismo re-escalamiento que en dicha Sección, y haciendo tender ε a cero, obtenemos el mismo sistema de Ecuaciones Primitivas que ha aparecido en la Parte II.

En esta Introducción, haremos primero una descripción más explícita de la obtención del modelo de Ecuaciones Primitivas con condición de adherencia en el fondo mediante un proceso asintótico, y mostraremos otros modelos asintóticos obtenidos también a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes.

En segundo lugar, nos centraremos en sintetizar el que será nuestro objetivo en esta Parte III: determinar nuevas condiciones de contorno, físicamente relevantes, para dicho modelo que permitan obtener unicidad de solución. A ello dedicaremos la Sección III.3.

III.1 La aproximación hidrostática II: Argumento límite

La obtención de las Ecuaciones Primitivas a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes también se puede hacer de forma rigurosa, mediante un proceso de paso al límite.

III.1.1 El problema estacionario

O. Besson y M. R. Laydi (1992) en [4] obtuvieron el modelo estacionario de Ecuaciones Primitivas. Para ello partieron de las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias con densidad constante y viscosidad anisótropa:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0(\mathbf{V} \cdot \nabla_3)\mathbf{V} - \Delta_\eta \mathbf{V} + 2\rho_0\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \nabla_3 p = \rho_0 \mathbf{g} \quad \text{en } \Omega_0, \\ \nabla_3 \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \text{en } \Omega_0, \\ \eta_3 \partial_3 \mathbf{v} = \rho \tau, \quad v_3 = 0 \quad \text{sobre } G_s, \\ \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } G_b, \end{array} \right.$$

donde $\mathbf{V} = (\mathbf{v}, v_3) : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la velocidad tridimensional, $p : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ es la presión, $\boldsymbol{\omega} = f(0, \cos l(\xi_2), \sin l(\xi_2))$ es la velocidad angular de rotación de la Tierra, donde f es el

módulo y $l(\xi_2)$ la latitud, y $\mathbf{g} = (0, 0, g_3)$ es la gravedad. Δ_η es el Laplaciano 3-dimensional anisótropo, es decir,

$$\Delta_\eta \mathbf{V} = \eta_1 \partial_{11}^2 \mathbf{V} + \eta_1 \partial_{22}^2 \mathbf{V} + \eta_3 \partial_{33}^2 \mathbf{V}.$$

El dominio está definido como:

$$\Omega_0 = \{\xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^3; (\xi_1, \xi_2) \in S_0, -H(\xi_1, \xi_2) < \xi_3 < 0\},$$

con S_0 un dominio acotado en \mathbb{R}^2 , $H : S_0 \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación lipschitziana positiva, $G_s = S_0 \times \{0\}$ y $G_b = \partial\Omega_0 \setminus G_s$.

Definiendo el parámetro ε como el cociente entre la profundidad máxima, h_0 , del dominio Ω_0 y el diámetro horizontal máximo, d , del dominio S , realizaron el cambio de variable siguiente:

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1/d, & x_2 = \xi_2/d, & x_3 = \xi_3/h_0, \\ u_1(x) = v_1(\xi), & u_2(x) = v_2(\xi), & u_3(x) = v_3(\xi)/\varepsilon, \\ P(x) = p(\xi)/\rho - g_3 \xi_3, \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

lo que conduce a un dominio adimensionalizado de la forma:

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \in S, -h(x_1, x_2) < x_3 < 0\},$$

donde $S = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, (d x_1, d x_2) \in S_0\}$, $h = H/h_0$, $\Gamma_s = S \times \{0\}$, $\Gamma_b = \partial\Omega \setminus \Gamma_s$, $f = 2d\omega_3$, y donde las viscosidades pasan a ser $\nu^\varepsilon = (\nu_1, \nu_2, \nu_3/\varepsilon^2)$ con $\nu_i = \eta_i/(\rho d)$ para $i = 1, 2, 3$, de manera que el problema se transforma en:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U} \cdot \nabla_3 u_1 - \Delta_{\nu^\varepsilon} u_1 - \alpha u_2 + \varepsilon \beta u_3 + \partial_1 P = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \mathbf{U} \cdot \nabla_3 u_2 - \Delta_{\nu^\varepsilon} u_2 + \alpha u_1 + \partial_2 P = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \varepsilon^2 \{ \mathbf{U} \cdot \nabla u_3 - \Delta_{\nu^\varepsilon} u_3 - \varepsilon \beta u_1 \} + \partial_3 P = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \nabla_3 \cdot \mathbf{U} = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_b, \\ \nu_3 \partial_3 u_1 = \varepsilon \tau_1, \quad \nu_3 \partial_3 u_2 = \varepsilon \tau_2, \quad u_3 = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_s, \end{array} \right.$$

con $\alpha = 2f \sin(l(\xi_2))$ y $\beta = 2f \cos(l(\xi_2))$. Entonces, suponiendo que $\nu_1, \nu_2 > 0$ son constantes, $\nu_3 = \nu_0 \varepsilon^2 > 0$ con ν_0 otra constante y $\tau_i = \varepsilon \tau_i^0$, donde $\tau_i^0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ para $i = 1, 2$, y tomando límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, se obtiene el siguiente problema límite:

Dados τ_1, τ_2 , hallar $\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $P : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$(EP_{st}) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U} \cdot \nabla_3 u_1 - \Delta_\mu u_1 - \alpha u_2 + \partial_1 P = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \mathbf{U} \cdot \nabla_3 u_2 - \Delta_\mu u_2 + \alpha u_1 + \partial_2 P = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \partial_3 P = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \nabla_3 \cdot \mathbf{U} = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 n_3 = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_b, \\ \mu_3 \partial_3 u_1 = \tau_1, \quad \mu_3 \partial_3 u_2 = \tau_2, \quad u_3 = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_s, \end{array} \right.$$

donde $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (\nu_1, \nu_2, \nu_0)$.

Realizando el cambio de variable (III.1) en la formulación variacional para el problema de Navier-Stokes, en [4] se obtiene al pasar al límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, la formulación variacional correspondiente al problema (EP_{st}), también llamada aproximación hidrostática (ver Subsección II.4). Con ello justifican asintóticamente la aproximación hidrostática que aparece como hipótesis en los trabajos de Lions-Temam-Wang [33]-[36].

Regularidad e hipótesis: La regularidad obtenida para este sistema es débil. En concreto,

$$(\mathbf{U}, P) \in V_0 \times L^{3/2}(\Omega),$$

donde $V_0 = \{\mathbf{V} \in H_b^1 \times H_b^1 \times H_0(\partial_3, \Omega); \nabla_3 \cdot \mathbf{V} = 0\}$, con $H_b^1 = \{\varphi \in H^1(\Omega), \varphi|_{\Gamma_b} = 0\}$ y $H_0(\partial_3, \Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega), \partial_3 \varphi \in L^2(\Omega)\}$. Dicha regularidad se obtiene por paso al límite partiendo de una solución $(\mathbf{V}, P) \in V \times L_0^2(\Omega)$ con $V = \{\mathbf{V} \in H_b^1 \times H_b^1 \times H_0^1; \nabla_3 \cdot \mathbf{V} = 0\}$.

Nota III.1.1 *Notemos que este argumento no necesita la hipótesis de existencia de talud.*

III.1.2 El problema de evolución

En la Tesis de P. Azérad (dirigida por O. Besson) se obtienen resultados de continuidad de la solución respecto de los datos iniciales y unicidad de solución para el problema linealizado, es decir, con velocidad de convección dada. Concretamente, se demuestra que cuando la velocidad de convección está en $L^\infty(0, T; \Omega)$, entonces existe una solución $(\mathbf{U}, p) \in L^2(0, T; V_0) \times W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega))$.

Para el caso del problema de evolución no lineal, P. Azérad y F. Guillén, ver [2, 3], han usado un argumento asintótico (similar al de Besson y Laydi en el caso estacionario) para obtener existencia de solución débil en ausencia de talud y con condiciones de contorno del mismo tipo que en el problema estacionario. La dificultad de la demostración radica en la convergencia de los términos no lineales de Navier-Stokes hacia los términos no lineales correspondientes en el modelo de Ecuaciones Primitivas. Para ello se hace necesaria la formulación de lemas de compacidad por compensación que generalizan los criterios de Riesz-Fréchet-Kolmogorov (extendidos al caso vectorial por J. Simon [44]). El tipo de razonamiento utilizado se repetirá en el Capítulo 4 de esta Tesis para obtener nuevas condiciones de contorno para el modelo de Ecuaciones Primitivas del Océano.

III.2 Otros modelos asintóticos: Los modelos de viscosidad vertical

Partiendo de las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias adimensionalizadas en un dominio sin talud, D. Bresch y J. Simon [10], realizan un estudio asintótico hacia diferentes modelos

geofísicos. En concreto, parten del siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\varepsilon^2 Re} \left(\partial_{ZZ}^2 \mathbf{V}^\varepsilon + \varepsilon^2 \Delta \mathbf{V}^\varepsilon \right) + \frac{1}{Ro} (\Xi \mathbf{A} \mathbf{V}^\varepsilon + \varepsilon \Xi' W^\varepsilon e_1) \\ \quad + (\mathbf{V}^\varepsilon \cdot \nabla) \mathbf{V}^\varepsilon + W^\varepsilon \partial_Z \mathbf{V}^\varepsilon + \nabla P^\varepsilon = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ -\frac{1}{\varepsilon^2 Re} \left(\varepsilon^2 \partial_{ZZ}^2 W^\varepsilon + \varepsilon^4 \Delta W^\varepsilon \right) - \frac{\varepsilon}{Ro} \Xi' V_1^\varepsilon \\ \quad + \varepsilon^2 ((\mathbf{V}^\varepsilon \cdot \nabla) W^\varepsilon + W^\varepsilon \partial_Z W^\varepsilon) + \partial_Z P^\varepsilon = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \quad \quad \quad \nabla \cdot \mathbf{V}^\varepsilon + \partial_Z W^\varepsilon = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ (\mathbf{V}^\varepsilon, W^\varepsilon)|_{\Gamma_b} = 0, \quad \partial_Z \mathbf{V}^\varepsilon|_{\Gamma_s} = \mathbf{F}, \quad W^\varepsilon|_{\Gamma_s} = 0, \end{array} \right. \quad (III.2)$$

donde $\mathbf{A} \mathbf{V}^\varepsilon = (-V_2^\varepsilon, V_1^\varepsilon)$, $\Xi(X) = \text{sen}(\theta_0 + \theta_1 l X_2)$ y $\Xi'(X) = \text{cos}(\theta_0 + \theta_1 l X_2)$, donde l es la longitud característica, $\theta_0 + \theta_1 X_2$ es la latitud, y

$$\Omega = \{(X, Z) = (X_1, X_2, Z) : X \in S, -h(X) < Z < 0\}$$

es el dominio adimensionalizado, con h la profundidad. Teniendo en cuenta que la difusión vertical, $\partial_{ZZ}^2 \mathbf{V}^\varepsilon$, domina a la difusión horizontal, $\varepsilon^2 \Delta \mathbf{V}^\varepsilon$, que la fuerza de Coriolis debida a la velocidad $\Xi \mathbf{A} \mathbf{V}^\varepsilon$ domina a la debida a la velocidad vertical $\varepsilon \Xi' W^\varepsilon e_1$, y que en la ecuación para la velocidad vertical, W^ε , domina el término $\partial_Z P^\varepsilon$ (ver [10]), obtenemos las ecuaciones reducidas siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\varepsilon^2 Re} \partial_{ZZ}^2 \mathbf{V}^\varepsilon + \frac{1}{Ro} \Xi \mathbf{A} \mathbf{V}^\varepsilon + (\mathbf{V}^\varepsilon \cdot \nabla)^\varepsilon + W^\varepsilon \partial_Z \mathbf{V}^\varepsilon + \nabla P^\varepsilon = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \quad \quad \quad \partial_Z P^\varepsilon = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \quad \quad \quad \nabla \cdot \mathbf{V}^\varepsilon + \partial_Z W^\varepsilon = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ (\mathbf{V}^\varepsilon, W^\varepsilon)|_{\Gamma_b} = 0, \quad \partial_Z \mathbf{V}^\varepsilon|_{\Gamma_s} = \mathbf{F}, \quad W^\varepsilon|_{\Gamma_s} = 0, \quad \langle \mathbf{V}^\varepsilon \rangle \cdot \mathbf{n}_{\partial S} = 0, \end{array} \right. \quad (III.3)$$

donde $\mathbf{n}_{\partial S}$ es la normal a la frontera del dominio superficial S .

Pasando al límite formalmente en la ecuación (III.3)₁, se distinguen tres modelos límite principales según los órdenes de magnitud de $\varepsilon^2 Re$, Ro y $\varepsilon^{-2} Ek$, para $Ek = \frac{Ro}{Re}$.

a) Modelo no lineal: Si $\varepsilon^2 Re \rightarrow \infty$ y $Ro \rightarrow \infty$, se obtiene formalmente:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + W \partial_Z \mathbf{V} + \nabla P = 0, \quad \partial_z P = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} + \partial_z W = 0, \end{array} \right. \quad (III.4)$$

y las mismas condiciones de contorno que en (III.3).

Sin embargo, no se sabe probar un resultado riguroso de convergencia (desde (III.3)), y las condiciones de contorno anteriores parecen demasiado fuertes para este modelo límite.

b) Modelo geostrófico: Si $Ro \rightarrow 0$ y $\varepsilon^2 Ek \rightarrow 0$, cambiando el potencial característico para que P^ε siga siendo del orden principal en (III.3), obtenemos:

$$\Xi \mathbf{A} \mathbf{V} + \nabla P = 0, \quad \partial_Z P = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} + \partial_Z W = 0, \quad (III.5)$$

y las condiciones de contorno de (III.3).

Si se pudiese demostrar la convergencia, sería localmente y con una capa límite, ya que las condiciones de contorno impuestas no se satisfacen para \mathbf{V} .

c) Modelo de difusión vertical: Si $\varepsilon^2 Re \rightarrow 0$ y $\varepsilon^{-2} Ek \rightarrow \infty$, cambiando también de forma conveniente el potencial característico, obtenemos:

$$-\partial_{ZZ}^2 \mathbf{V} + \nabla P = 0, \quad \partial_Z P = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} + \partial_Z W = 0, \quad (\text{III.6})$$

con las condiciones de contorno de (III.3).

Se puede ver en [10], que dicho sistema posee solución única, explícita en Z , y el potencial P está gobernado por una ecuación $2D$ sobre S . Además, en [10] se prueba la convergencia a ese modelo suponiendo que $\varepsilon Re \rightarrow 0$ (hipótesis más fuerte que la impuesta formalmente). Para los casos restantes, $\varepsilon^{-1} \leq Re \ll \varepsilon^{-2}$, no se sabe justificar la convergencia debido a la dificultad de pasar al límite en los términos no lineales.

Dichos modelos se pueden combinar, obteniendo resultados sobre los siguientes modelos:

d) Modelo vertical-geostrófico: Si $\varepsilon^2 Re \rightarrow 0$ y $\varepsilon^{-2} Ek \rightarrow E$, adimensionalizando el potencial como en el modelo anterior, obtenemos:

$$-\partial_{ZZ}^2 \mathbf{V} + K A \mathbf{V} + \nabla P = 0, \quad \partial_Z P = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} + \partial_Z W = 0, \quad (\text{III.7})$$

con las condiciones de contorno de (III.3) y $K = \Xi/E$.

Se obtienen los mismos resultados de existencia que en el modelo **c)**. Igualmente, la convergencia se demuestra en el caso $\varepsilon Re \rightarrow 0$, pero no se sabe, en general, para $\varepsilon^{-1} \leq Re \ll \varepsilon^{-2}$.

e) Modelo de dominio delgado: Si $\varepsilon Re \rightarrow R$ y $Ro \rightarrow R'$, redefiniendo el potencial, obtenemos el siguiente modelo que mezcla los tres modelos principales:

$$\begin{cases} -\frac{1}{R} \partial_{ZZ}^2 \mathbf{V} + \frac{1}{R'} \Xi A \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla_h) \mathbf{V} + W \partial_Z \mathbf{V} + \nabla P = 0, \\ \partial_Z P = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} + \partial_Z W = 0, \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

con las condiciones de contorno de (III.3).

Aunque se pueda pensar que la difusión vertical mejoraría los resultados para los modelos geostrófico y no lineal, no se sabe cómo demostrar la existencia de solución del modelo (III.8) ni su obtención como límite a partir del modelo (III.3).

En el caso de evolución, partiendo del modelo de Navier-Stokes (ver [9]):

$$\begin{cases} St \partial_t \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \Delta_3 \mathbf{u} + \frac{1}{Ro} \vec{\omega} \times \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_3) \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon^2 Re} \nabla_3 p = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \varepsilon \partial_z \mathbf{u}|_{\Gamma_s} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{u}|_{\Gamma_b} = 0, \\ \mathbf{u}|_{T=T_0} = \mathbf{u}_0, \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

tomando $St = 1$ y haciendo tender $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon Re \rightarrow 0$, $\varepsilon^2 Re/Ro \rightarrow e$ (donde e es un valor constante), se demuestra la convergencia de la solución débil del problema (III.9) (con $p \in W^{-1,\infty}(0, T; L^2_{loc}(\Omega))$) hacia la única solución del modelo vertical-geostrófico quasi-estacionario:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\partial_{ZZ}^2 \mathbf{V} + K A \mathbf{V} + \nabla P = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} + \partial_Z W = 0, \quad \partial_Z p = 0, \quad \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_Z \mathbf{V}|_{\Gamma_s} = \mathbf{g}, \quad W|_{\Gamma_s} = 0, \\ (\mathbf{V}, W) \in L^2(0, T; F^1), \quad P \in L^2(0, T; H^1_{loc}(\Gamma)), \end{array} \right.$$

donde F^1 es la clausura del espacio $\mathcal{E}(\Omega) = \{(\mathbf{V}, W) \in C^\infty(\Omega)^3, \nabla \cdot \mathbf{V} + \partial_Z W = 0, (\mathbf{V}, W)|_{\Gamma_b} = \mathbf{0}, W|_{\Gamma_s} = 0\}$ en la norma $\left(\int_{\Omega} |\partial_Z \mathbf{V}|^2 dX dZ\right)^{1/2}$.

Por el contrario, si se considera $St = \frac{1}{\varepsilon^2 Re}$, $\mathbf{V}_0^\varepsilon \rightarrow \mathbf{V}_0$ en $L^2(\Omega)^2$, $\varepsilon W_0^\varepsilon \rightarrow 0$ en $L^2(\Omega)$, y ε , $\varepsilon Re \rightarrow 0$, $\varepsilon^2 Re/Ro \rightarrow e$, entonces (III.9) converge hacia la solución del problema vertical-geostrófico evolutivo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{V} - \partial_{ZZ}^2 \mathbf{V} + K A \mathbf{V} + \nabla P = 0, \quad \partial_Z P = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} + \partial_Z W = 0 \quad \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ (\mathbf{V}, W)|_{t=0} = (\mathbf{V}_0, W_0), \quad \partial_Z \mathbf{V}|_{\Gamma_s} = \mathbf{g}, \quad W|_{\Gamma_s} = 0, \\ (\mathbf{V}, W) \in L^2(0, T; F) \cap C([0, T]; F^0), \quad P \in H^{-1}(0, T; H^1_{loc}(\Gamma)), \end{array} \right.$$

donde F^0 es la clausura de $\mathcal{E}(\Omega)$ para la norma $L^2(\Omega)$.

Finalmente, en [11], partiendo de las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias definidas en Ω_ε , $\Omega_\varepsilon = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in S, -\varepsilon h(x, y) < z < 0\}$, con condiciones de tipo tracción no lineales como las siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_z \mathbf{v} = \theta_s |\mathbf{v}_{air}| (\alpha \mathbf{v}_{air} - \mathbf{v}), \quad w = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_s, \\ \partial_n \mathbf{u}|_{tang} = -\theta_b \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_b^\varepsilon, \end{array} \right.$$

donde $\mathbf{u} = (\mathbf{v}, w)$, Γ_b^ε es el fondo del dominio Ω_ε , $\theta_s = \theta_s(\rho^a, a, v_{car}^a, \rho^s, \nu_v)$ y $\theta_b = \theta_b(v_{car}^s, a, \nu_h, \nu_v)$. Si $\varepsilon \ll 1$, $\varepsilon Re/Ro \approx e$, $\varepsilon^2 Re \approx \gamma$, $\varepsilon \theta_s \approx \tau_s$ y $\varepsilon \theta_b \approx \tau_b$, se obtiene como aproximación de las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias el modelo:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\varepsilon^2 \partial_{zz}^2 \mathbf{v} + k \mathbf{v}^\perp + \gamma (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + w \partial_z \mathbf{v}) + \nabla p = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \partial_z p = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} + \partial_z w = 0 \quad \text{en } \Omega, \end{array} \right. \quad (\text{III.10})$$

donde Ω representa el dominio Ω_ε adimensionalizado, con $k = e \sin(\theta)$ y las siguientes condiciones de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \partial_z \mathbf{v} = |\mathbf{v}_{air}| (\mathbf{v}_{air} + \tau_s (\mathbf{v}_{air} - \mathbf{v})), \quad w = 0 \quad \text{en } \Gamma_s, \\ \varepsilon \partial_z \mathbf{v} = \tau_b \mathbf{v}, \quad (\mathbf{v}, w) = 0 \quad \text{en } \Gamma_b, \\ \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{n}_{\partial S} = 0. \end{array} \right.$$

Se demuestra existencia y unicidad de solución para $\gamma = 0$ (caso lineal), con $p \in H^1_{loc}(\omega)$ y $(\mathbf{v}, w) \in F(d)$, donde $F(d)$ es la clausura de $\mathcal{E}(d)$ para la norma $\|(\mathbf{v}, w)\|_{F(d)}^2 = \int_{\Omega_\varepsilon} |\partial_z \mathbf{v}|^2 dx dz +$

$\int_{\Gamma_b^\varepsilon} \varepsilon |\mathbf{v}|^2 d\sigma$, donde $\mathcal{E}(d) = \{\mathbf{u} = (\mathbf{v}, w) \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)^3 : \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_b^\varepsilon} = 0, \mathbf{u}|_{\Gamma_s} = \mathbf{0}, \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{n}_{\partial S} = 0\}$.

También se demuestra que cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, la solución de (III.10) adimensionalizada, (\mathbf{v}, w, p) , tiende a la solución adimensionalizada del problema vertical-geostrófico (III.7), $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{w}, \tilde{p})$:

$$(\mathbf{v}, w, p) \longrightarrow (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{w}, \tilde{p}) \quad \text{en } L^2(\Omega)^2 \times H^{-1}(\Omega) \times L^r(\Omega),$$

para todo $r < 3/2$.

III.3 Aportaciones originales de la Parte III

El Capítulo 4 está dedicado a la deducción de nuevas condiciones de contorno de tipo fricción, que sean compatibles desde el punto de vista matemático con el proceso de paso al límite a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes con condiciones de contorno de tipo tracción del viento en superficie, Navier en el fondo y condición de adherencia en el talud, si existe, es decir, a partir de las condiciones:

$$\begin{cases} \nu_z \partial_z \mathbf{v}^\delta = \alpha |\mathbf{v}_{air}| (\mathbf{v}_{air} - \mathbf{v}^\delta), & w^\delta = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_s^\delta, \\ (2D_\nu(\mathbf{u}^\delta) \mathbf{n}_\delta + \gamma \mathbf{u}^\delta)_{tg} = 0 & \mathbf{u}^\delta \cdot \mathbf{n}_\delta = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_b^\delta, \\ & \mathbf{u}^\delta = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_l^\delta. \end{cases}$$

En primer lugar, para el sistema de Navier-Stokes con las anteriores condiciones de contorno, obtenemos existencia de solución débil.

En segundo lugar, mediante un razonamiento de paso al límite, obtenemos el mismo sistema de Ecuaciones Primitivas que se ha tratado en la Parte II, pero esta vez con unas nuevas condiciones de contorno, correspondientes al límite de las condiciones de tipo Robin expresadas anteriormente para las ecuaciones de Navier-Stokes, y que son:

$$\begin{cases} \nu_v \partial_z \mathbf{V} = \bar{\alpha} |\mathbf{v}_{air}| (\mathbf{v}_{air} - \mathbf{V}), & W = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_s, \\ \nu_v (1 + \nu_h |\nabla_x h|^2 / \nu_v) \partial_z \mathbf{V} n^Z = \mathcal{A} \mathbf{V}|_{\Gamma_b}, & (\mathbf{V}, W) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_b, \\ & \mathbf{V} = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_l, \end{cases}$$

donde $\mathcal{A} \mathbf{V}|_{\Gamma_b} = \bar{\gamma} \mathbf{V}|_{\Gamma_b} n^Z + \nu_h \mathcal{H} \mathbf{V}|_{\Gamma_b} n^Z + \nu_h \nabla_x \cdot (\mathbf{V}|_{\Gamma_b}) n^x - \nu_h \nabla_x (\mathbf{V}|_{\Gamma_b}) n^x$.

En tercer lugar, como límite de la formulación variacional del problema de Navier-Stokes inicial, se obtiene la formulación variacional correspondiente al problema de Ecuaciones Primitivas, y a partir de dicha formulación la existencia de solución global débil de las Ecuaciones Primitivas con (lo que hemos llamado) **condición de fricción**.

Por último, procedemos a la identificación de las condiciones de contorno asociadas al sistema límite a partir de la formulación variacional verificada.

El Capítulo 4 está actualmente sometido a la revista *Asymptotic Analysis* [6].

En el Capítulo 5, y para el caso 2-dimensional del modelo obtenido en el capítulo anterior, demostramos la existencia de una solución más regular que la solución débil y menos que lo que hemos denominado en este trabajo como solución fuerte, que llamaremos **solución débil-vorticidad**. Esencialmente, se trata de una solución débil v que verifica además la regularidad:

$$\partial_z v \in L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1).$$

Para ello, estudiamos como problema auxiliar el problema que verifica formalmente $\partial_z v$. Para demostrar que $\partial_z \in L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1)$, será necesario el estudio de la regularidad de la presión. A este respecto, bajo determinadas condiciones sobre los datos y la forma del dominio (que no son demasiado restrictivas) obtenemos que $\sqrt{h}\partial_x \in L^2(0, T; H^{-1}(S))$ donde S es la superficie del Océano. Notemos que en esta estimación contribuye de forma decisiva el carácter bidimensional del dominio. Una vez demostrada la regularidad de $\partial_z v$, construimos una función $\tilde{v} = - \int_z^0 \partial_z v(x, s) ds + C$ tal que $\langle \tilde{v} \rangle = 0$ y que será solución del sistema de Ecuaciones Primitivas 2D con condición de fricción en el fondo obtenido en el Capítulo 4.

El concepto de solución débil-vorticidad bastará para concluir la unicidad de solución para este modelo. Por último, se plantean algunos problemas abiertos que nos han surgido a lo largo del proceso de desarrollo y redacción de esta Memoria.

Los resultados del Capítulo 5 están sometidos actualmente a la revista *Adv. Diff. Equations*, [7].

Capítulo 4

Obtención de una condición de tipo Navier para las Ecuaciones Primitivas.

4.1 Introducción

Como vimos en la Introducción, las Ecuaciones Primitivas se obtienen a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes anisótropas por un análisis asintótico cuando el cociente de aspecto $\delta = \text{profundidad/longitud del dominio}$ tiende a cero. Hasta donde sabemos, todos los trabajos conocidos sobre ese análisis consideran condiciones de contorno de tipo tracción sobre la superficie (debida al viento) y condiciones de contorno Dirichlet homogéneas en el resto de la frontera. Con esas condiciones para las ecuaciones de Navier-Stokes anisótropas, se obtiene en el límite las mismas condiciones de contorno para las Ecuaciones Primitivas, [2, 3].

Desde un punto de vista físico, las condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogénea $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sólo están justificadas cuando se considera un fluido con viscosidad molecular. Sin embargo, en muchos casos, por ejemplo en modelos geofísicos 2-dimensionales, el papel de la viscosidad molecular es prácticamente despreciable, siendo mucho más importante la viscosidad debida a los efectos turbulentos que aparecen a pequeña escala [41]. Por otra parte, en [17], se usa la condición de Navier para las ecuaciones de Navier-Stokes y se prueba que esto previene la aparición de capas límite, ver también [35].

En este capítulo estudiamos qué tipo de condiciones de contorno se obtienen cuando consideramos condiciones de fricción en el fondo de tipo Navier anisótropas para las ecuaciones de Navier-Stokes anisótropas y hacemos tender δ a 0. Derivamos entonces una condición de Navier particular para las Ecuaciones Primitivas. En esta condición de contorno asintótica sólo interviene la traza de las componentes horizontales del campo de velocidades y la traza de su derivada vertical. Los coeficientes de viscosidad y la matriz de fricción que aquí se consideran tienen en cuenta la batimetría. En el capítulo siguiente se probará la unicidad de una solución débil de las Ecuaciones Primitivas con este tipo de condiciones de contorno en el caso $2D$.

Recordemos que las condiciones de contorno de tipo Navier se usan comúnmente para las ecuaciones de Navier-Stokes y dependen de la traza normal del tensor de esfuerzos, que está bien definido gracias a la ecuación de momentos y a la regularidad débil del campo de velocidades \mathbf{u} ([38], [42]). Dicha condición fue propuesta por primera vez por Navier [39]. Como la presión no contribuye en tales condiciones de contorno, podemos escribir dichas condiciones en términos

del tensor de esfuerzos tangenciales y de la velocidad, ver [38] página 74.

La distribución de este capítulo será la siguiente:

En la segunda Sección, damos un resultado de existencia para las ecuaciones de Navier-Stokes anisótropas con condición de Navier anisótropa (Teorema 4.1). Será necesario hacer algunas hipótesis sobre los datos para garantizar la disipación del modelo (deseable desde un punto de vista físico).

En la tercera Sección, haremos el análisis asintótico sobre la formulación débil (Teorema 4.2), y

en la última Sección estableceremos las condiciones de contorno de tipo Navier para el sistema de Ecuaciones Primitivas desde la formulación débil.

4.2 Ecuaciones de Navier-Stokes con condición de Navier

Consideramos el dominio Ω_δ definido por:

$$\Omega_\delta = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in S, -\delta h(\mathbf{x}) < z < 0\}, \quad (4.1)$$

donde S (superficie) es un abierto acotado en \mathbb{R}^2 y h (la profundidad) es una función continua no negativa sobre \bar{S} . La frontera del dominio es $\partial\Omega^\delta = \bar{\Gamma}_b^\delta \cup \Gamma_l^\delta \cup \Gamma_s \cup \partial\Gamma_s$ donde el fondo Γ_b^δ y las posibles paredes laterales (talud) Γ_l^δ están definidas por:

$$\Gamma_b^\delta = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \in S, z = -\delta h(\mathbf{x})\}, \quad \Gamma_l^\delta = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \in \partial\bar{S}, -\delta h(\mathbf{x}) < z < 0\}.$$

La superficie Γ_s y las orillas $\partial\Gamma_s$ vienen dadas por

$$\Gamma_s = \{(\mathbf{x}, 0) : \mathbf{x} \in S\}, \quad \partial\Gamma_s = \{(\mathbf{x}, 0) : \mathbf{x} \in \partial S\}.$$

Las siguientes figuras ilustran las posibles configuraciones del dominio.

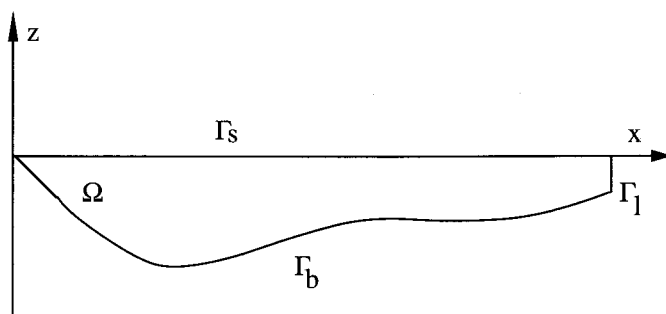


Fig. 1: El dominio con pared lateral.

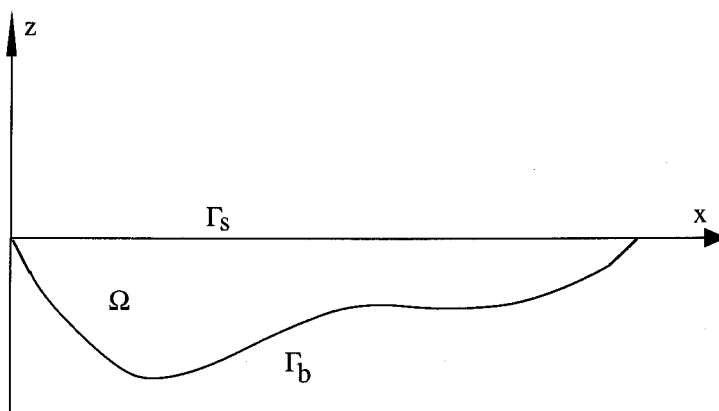


Fig. 2: El dominio sin talud.

Consideramos un fluido gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes de evolución, con fuerza de Coriolis y viscosidad anisótropa (turbulenta). Supondremos que la densidad es constante (igual a 1). Suponemos que la viscosidad anisótropa ν viene dada por (ν_h, ν_h, ν_z) . Observemos que si definimos el gradiente anisótropo como:

$$\nabla_\nu = (\nu_h \partial_{x_1}, \nu_h \partial_{x_2}, \nu_z \partial_z), \quad (4.2)$$

entonces el tensor de esfuerzos debidos al campo de velocidades, viene dado por:

$$D_\nu(\mathbf{u}^\delta) = (\nabla_\nu \mathbf{u}^\delta + \nabla_\nu^t \mathbf{u}^\delta) / 2, \quad (4.3)$$

donde \mathbf{u}^δ es la velocidad del fluido, dada por $(\mathbf{v}^\delta, w^\delta)$, donde $\mathbf{v}^\delta = (v_1^\delta, v_2^\delta)$ es la componente horizontal y w^δ es la componente vertical. Supongamos que el flujo satisface una condición de tracción sobre la superficie Γ_s debida al viento, una condición de contorno Dirichlet homogénea sobre las paredes laterales Γ_l^δ (si existen) y una condición de contorno de tipo fricción sobre el fondo Γ_b^δ . Más precisamente, suponemos que la velocidad y el potencial $(\mathbf{u}^\delta, p^\delta)$ satisfacen el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u}^\delta + \mathbf{u}^\delta \cdot \nabla \mathbf{u}^\delta - 2 \nabla \cdot (D_\nu(\mathbf{u}^\delta)) + 2\omega \times \mathbf{u}^\delta + \nabla p^\delta = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega_\delta, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^\delta = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega_\delta, \\ \nu_z \partial_z \mathbf{v}^\delta = \alpha |\mathbf{v}_{air}| (\mathbf{v}_{air} - \mathbf{v}^\delta), \quad w^\delta = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_s^\delta, \\ (2 D_\nu(\mathbf{u}^\delta) \mathbf{n}_\delta + \gamma \mathbf{u}^\delta)_{tg} = 0 \quad \mathbf{u}^\delta \cdot \mathbf{n}_\delta = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_b^\delta, \\ \mathbf{u}^\delta = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_l^\delta, \\ \mathbf{u}^\delta|_{t=0} = \mathbf{u}_0^\delta & \text{en } \Omega_\delta, \end{array} \right. \quad (4.4)$$

con $D_\nu(\mathbf{u}^\delta)$ definido en (4.3). La fuerza de Coriolis viene dada por $2\omega \times \mathbf{u}^\delta$ con $\omega = |\omega|(0, \cos \theta, \sin \theta)$ donde ω es el vector de rotación de la Tierra y $\theta = \theta(y)$ es la colatitud. Denotamos por \mathbf{v}_{air}

la velocidad del aire sobre la superficie, y α y γ dos funciones de \mathbf{x} no negativas y acotadas. Recordemos que el vector $D_\nu(\mathbf{u}^\delta)\mathbf{n}_\delta$ está definido por:

$$(D_\nu(\mathbf{u}^\delta)\mathbf{n}_\delta)_i = \sum_{j=1}^3 (D_\nu(\mathbf{u}^\delta))_{ij} n_\delta^j$$

y $(D_\nu(\mathbf{u}^\delta)\mathbf{n}_\delta)_{tg}$ corresponde a su componente tangencial dada por:

$$(D_\nu(\mathbf{u}^\delta)\mathbf{n}_\delta)_{tg} = D_\nu(\mathbf{u}^\delta)\mathbf{n}_\delta - [(D_\nu(\mathbf{u}^\delta)\mathbf{n}_\delta) \cdot \mathbf{n}_\delta] \mathbf{n}_\delta,$$

donde \mathbf{n}_δ es el vector normal exterior a Γ_b^δ , dado por:

$$\mathbf{n}_\delta = (n_\delta^1, n_\delta^2, n_\delta^3) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\delta \nabla_{\mathbf{x}} h|^2}} (-\delta \nabla_{\mathbf{x}} h, -1), \quad (4.5)$$

con $\nabla_{\mathbf{x}} = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$.

Nota 4.2.1 La condición (4.4)₃ representa el efecto no lineal que el aire ejerce sobre la velocidad horizontal del flujo de agua en el Océano. Por otra parte, en la condición (4.4)₄ el término $\gamma \mathbf{u}^\delta$ representa la rugosidad del fondo. Así pues, la condición (4.4)₄ completa viene a expresar los efectos que la fricción con el fondo ejercen sobre la componente tangencial de $2D_\nu(\mathbf{u}^\delta)\mathbf{n}_\delta$.

• Espacios funcionales en el dominio Ω_δ .

Consideramos el espacio

$$\mathcal{V}_\delta = \left\{ \Phi = (\varphi, \psi) \in (C_l^\infty(\overline{\Omega}_\delta))^2 \times (C_l^\infty(\overline{\Omega}_\delta)) : \nabla \cdot \Phi = 0, \Phi \cdot \mathbf{n}_\delta = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_\delta \right\}$$

donde $C_l^\infty(\overline{\Omega}_\delta) = \{ \chi \in C^\infty(\overline{\Omega}_\delta) : \chi = \mathbf{0} \text{ en un entorno de } \Gamma_l^\delta \cup \partial\Gamma_s \}$.

Definimos H_δ y V_δ como la clausura de \mathcal{V}_δ en $(L^2(\Omega_\delta))^3$ y $(H^1(\Omega_\delta))^3$, respectivamente. Tenemos así las siguientes caracterizaciones:

$$V_\delta = \left\{ \mathbf{u}^\delta = (\mathbf{v}^\delta, w^\delta) \in (H^1(\Omega_\delta))^3 : \nabla \cdot \mathbf{u}^\delta = 0 \text{ en } \Omega_\delta, \mathbf{u}^\delta \cdot \mathbf{n}_\delta = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_\delta, \mathbf{u}^\delta = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma_l^\delta, \langle \mathbf{u}^\delta \rangle = \mathbf{0} \text{ sobre } \partial S \right\},$$

$$H_\delta = \left\{ \mathbf{u}^\delta = (\mathbf{v}^\delta, w^\delta) \in (L^2(\Omega_\delta))^3 : \nabla \cdot \mathbf{u}^\delta = 0 \text{ en } \Omega_\delta, \mathbf{u}^\delta \cdot \mathbf{n}_\delta = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_\delta, \langle \mathbf{v}^\delta \rangle \cdot \mathbf{n}_{\partial S} = 0 \right\},$$

donde denotamos $\langle \mathbf{v}^\delta \rangle(\cdot) = \int_{-\delta h(\cdot)}^0 \mathbf{v}^\delta(\cdot, z) dz$ y $\mathbf{n}_{\partial S}$ el vector normal exterior a ∂S . En las caracterizaciones anteriores, la inclusión hacia la derecha se puede deducir fácilmente. La otra inclusión (que no es realmente necesaria en este capítulo) se puede probar como en [30, 45].

Nota 4.2.2 De la definición del espacio \mathcal{V}_δ , siempre obtenemos que, para todo $\Phi = (\varphi, \psi) \in \mathcal{V}_\delta$:

$$\varphi|_{\Gamma_b^\delta} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} h = 0 \quad \text{sobre } \partial S. \quad (4.6)$$

A lo largo de este capítulo, supondremos las siguientes hipótesis sobre los datos:

$$\begin{aligned} h &\in W^{2,\infty}(S), \quad h > 0 \text{ en } S, \quad |\nabla_{\mathbf{x}} h| > c > 0 \text{ sobre } \partial S \cap \{h = 0\}, \\ \mathbf{u}_0^\delta &\in H_\delta, \quad \alpha^{1/3} \mathbf{v}_{air} \in L^3(0, T; (L^3(S))^2). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Por otra parte, para obtener un resultado de existencia del problema (4.4), supondremos las siguientes hipótesis:

$$\left\{ \begin{array}{l} C(\Omega) |\nu_h - \nu_z| \|\nabla_{\mathbf{x}} h\|_{W^{1/2,\infty}(S)} \leq \frac{\nu_h}{4}, \\ \delta^2 C(\Omega) |\nu_h - \nu_z| \left(1 + 2\|h\|_{W^{1,\infty}(S)}^2\right) \|\nabla_{\mathbf{x}} h\|_{W^{1/2,\infty}(S)} \leq \frac{\nu_z}{16}, \\ 2\delta |\nu_h - \nu_z| C(\Omega) \|\nabla_{\mathbf{x}} h\|_{W^{1/2,\infty}(S)} h(\mathbf{x}) + \delta \nu_h |\partial_{ij}^2 h(\mathbf{x})| \leq \frac{\gamma(\mathbf{x})}{2} \sqrt{1 + \delta^2 |\nabla_{\mathbf{x}} h(\mathbf{x})|^2}, \\ \forall i, j = 1, 2, \quad \text{c.p.d. } \mathbf{x} \in S, \end{array} \right. \quad (4.8)$$

donde $C(\Omega) = C(S)C'(\Omega)$ con $C'(\Omega)$ definida más adelante en la Proposición 4.7 (ver Apéndice). Presentamos el siguiente resultado de existencia:

Teorema 4.1 *Bajo las hipótesis (4.7) y (4.8), existe una solución débil del sistema de Navier-Stokes anisótropo (4.4), es decir:*

$$\mathbf{u}^\delta = (\mathbf{v}^\delta, w^\delta) \in L^2(0, T; V_\delta) \cap L^\infty(0, T; H_\delta) \cap C_w([0, T]; H_\delta) \quad (4.9)$$

tal que: $\forall \Phi = (\varphi, \psi) \in C^1([0, T]; \mathcal{V}_\delta)$ con $\Phi(T) = 0$,

$$\left\{ \begin{array}{l} - \int_0^T \int_{\Omega_\delta} \mathbf{u}^\delta \cdot (\partial_t \Phi + \mathbf{u}^\delta \cdot \nabla \Phi) + 2 \int_0^T \int_{\Omega_\delta} D_\nu(\mathbf{u}^\delta) \cdot \nabla \Phi + \int_0^T \int_{\Gamma_s} \alpha |\mathbf{v}_{air}| (\mathbf{v}^\delta - \mathbf{v}_{air}) \cdot \varphi \\ + 2 \int_0^T \int_{\Omega_\delta} (\omega \times \mathbf{u}^\delta) \cdot \Phi + \int_0^T \int_{\Gamma_b^\delta} \gamma (\mathbf{u}^\delta \times \mathbf{n}_\delta) \cdot (\Phi \times \mathbf{n}_\delta) = \int_{\Omega_\delta} \mathbf{u}_0^\delta \cdot \Phi(0). \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Además, dicha solución satisface la siguiente desigualdad de energía, para todo $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}^\delta(t)\|_{(L^2(\Omega_\delta))^3}^2 + \nu_h \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\delta(s)\|_{L^2(\Omega_\delta)^6}^2 ds + \frac{\nu_z}{2} \int_0^t \|\partial_z \mathbf{u}^\delta(s)\|_{L^2(\Omega_\delta)^3}^2 ds \\ &+ \int_0^t \int_{\Gamma_s} \alpha |\mathbf{v}_{air}| |\mathbf{v}^\delta|^2 + \int_0^t \int_{\Gamma_b^\delta} \gamma |\mathbf{u}^\delta|^2 \leq \|\mathbf{u}_0^\delta\|_{(L^2(\Omega_\delta))^3}^2 + \int_0^t \int_S \alpha |\mathbf{v}_{air}|^3. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Nota 4.2.3 *En dimensión 2, es decir, para $S \subseteq \mathbb{R}$ (por tanto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$), las hipótesis (4.8) se pueden sustituir por la hipótesis más débil:*

$$2\gamma(x) - \delta(\nu_h - \nu_z) h''(x) n_z^\delta \geq 0 \quad \forall x \in S.$$

Demostración del Teorema 4.1: La existencia, con δ fijo, se hace por un razonamiento de Galerkin clásico, construyendo soluciones aproximadas \mathbf{u}_m^δ y pasando al límite en el término no lineal usando un argumento de compacidad.

Aquí, nos centramos únicamente en obtener las estimaciones de energía que aseguran una existencia global para las soluciones aproximadas y la disipación del sistema. Multiplicando la ecuación de momentos por \mathbf{u}^δ , obtenemos, al menos formalmente,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^\delta(t)\|_{(L^2(\Omega_\delta))^3}^2 + \int_0^t \int_{\Omega_\delta} \nabla_\nu \mathbf{u}^\delta \cdot \nabla \mathbf{u}^\delta + \int_0^t \int_{\Omega_\delta} {}^t \nabla_\nu \mathbf{u}^\delta \cdot \nabla \mathbf{u}^\delta + \\ & + \int_0^t \int_{\Gamma_s} \alpha |\mathbf{v}_{\text{air}}| \mathbf{v}^\delta \cdot (\mathbf{v}^\delta - \mathbf{v}_{\text{air}}) + \int_0^t \int_{\Gamma_b^\delta} \gamma |\mathbf{u}^\delta|^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_0^\delta\|_{(L^2(\Omega_\delta))^3}^2. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Desarrollando el término $\int_{\Omega_\delta} {}^t \nabla_\nu \mathbf{u}^\delta \cdot \nabla \mathbf{u}^\delta$, teniendo en cuenta que $\int_{\Omega_\delta} \mathbf{u}^\delta \cdot \nabla \chi = 0$ ($\forall \chi$) y que $n_j^\delta = -\delta \partial_j h(\mathbf{x}) / |\mathbf{n}^\delta|$ ($j = 1, 2$), obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\delta} {}^t \nabla_\nu \mathbf{u}^\delta \cdot \nabla \mathbf{u}^\delta &= \sum_{i,j=1}^3 \nu_j \int_{\Omega_\delta} \partial_j u_i^\delta \partial_i u_j^\delta \\ &= -\nu_h \delta \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \int_S u_i^\delta|_{\Gamma_b^\delta} (\partial_i u_j^\delta)|_{\Gamma_b^\delta} \partial_j h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \nu_z \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_\delta} \partial_z u_i^\delta \partial_i u_3^\delta, \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde denotamos $u_i^\delta|_{\Gamma_b^\delta}(\mathbf{x}) = u_i^\delta(\mathbf{x}, -\delta h(\mathbf{x}))$. Reescribimos los dos términos que aparecen a la derecha de la expresión (4.13) (recordemos $u_i^\delta = v_i^\delta$ para $i = 1, 2$ y $u_3^\delta = w^\delta$). Como la condición de contorno $\mathbf{u}^\delta \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre Γ_b^δ se escribe como:

$$w^\delta|_{\Gamma_b^\delta} = -\delta \mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} h,$$

usando también que para $i = 1, 2$,

$$(\partial_i u_j^\delta)|_{\Gamma_b^\delta} = \partial_i (u_j^\delta|_{\Gamma_b^\delta}) + \delta \partial_i h (\partial_z u_j^\delta)|_{\Gamma_b^\delta},$$

obtenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \int_S u_i^\delta|_{\Gamma_b^\delta} (\partial_i u_j^\delta)|_{\Gamma_b^\delta} \partial_j h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^2 \int_S v_i^\delta|_{\Gamma_b^\delta} \partial_i (v_j^\delta|_{\Gamma_b^\delta}) \partial_j h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & + \sum_{i,j=1}^2 \int_S v_i^\delta|_{\Gamma_b^\delta} \delta \partial_i h(\mathbf{x}) (\partial_z v_j^\delta)|_{\Gamma_b^\delta} d\mathbf{x} + \sum_{i,j=1}^2 \int_S w^\delta|_{\Gamma_b^\delta} (\partial_z v_j^\delta)|_{\Gamma_b^\delta} \partial_j h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & = \sum_{i,j=1}^2 \int_S v_i^\delta|_{\Gamma_b^\delta} \partial_i (v_j^\delta|_{\Gamma_b^\delta}) \partial_j h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Además, integrando por partes y usando (4.6), podemos escribir:

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^2 \int_S v_i^\delta|_{\Gamma_b^\delta} \partial_i (v_j^\delta|_{\Gamma_b^\delta}) \partial_j h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \langle \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta}); \mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} h \rangle_{H^{-1/2}(S), H^{1/2}(S)} \\ &+ \int_S \mathcal{H}(\mathbf{x}) \mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta} \cdot \mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta} d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

donde \mathcal{H} es el Hessiano asociado a h , dado por la expresión $\mathcal{H}(\mathbf{x}) = (\partial_{ij}^2 h(\mathbf{x}))_{i,j=1,2}$. De ese modo, obtenemos la siguiente igualdad para el primer término de la derecha de (4.13):

$$\begin{aligned} -\delta\nu_h \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \int_S u_i^\delta|_{\Gamma_b^\delta} (\partial_i u_j^\delta)|_{\Gamma_b^\delta} \partial_j h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \delta\nu_h \langle \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta}); \mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} h \rangle_{H^{-1/2}(S), H^{1/2}(S)} \\ &+ \delta\nu_h \int_S \mathcal{H}(\mathbf{x}) \mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta} \cdot \mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Vamos a reescribir el último término que aparece en (4.13). Tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_\delta} \partial_z u_i^\delta \partial_i u_3^\delta &= \int_{\Omega_\delta} \left(\sum_{i=1}^2 \partial_z v_i^\delta \partial_i w^\delta + \partial_z w^\delta \partial_z w^\delta \right) \\ &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_\delta} (\partial_z v_i^\delta \partial_i w^\delta - \partial_i v_i^\delta \partial_z w^\delta) \\ &= \sum_{i=1}^2 \int_S v_i^\delta|_{\Gamma_b^\delta} (-\partial_i w^\delta + \delta \partial_z w^\delta \partial_i h)|_{\Gamma_b^\delta} d\mathbf{x} \\ &= - \int_S v^\delta|_{\Gamma_b^\delta} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} (w^\delta|_{\Gamma_b^\delta}) d\mathbf{x} = \delta \int_S \mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} h) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Entonces, usando (4.6), se tiene la siguiente igualdad para el último término de (4.13):

$$\nu_z \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_\delta} \partial_z u_i^\delta \partial_i u_3^\delta = -\delta\nu_z \langle \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta}), \mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} h \rangle_{H^{-1/2}(S), H^{1/2}(S)}. \quad (4.15)$$

En conclusión, usando (4.14) y (4.15) en (4.13), obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\delta} {}^t \nabla_{\nu} \mathbf{u}^\delta \cdot \nabla \mathbf{u}^\delta &= \delta(\nu_h - \nu_z) \langle \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta}), \mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} h \rangle_{H^{-1/2}(S), H^{1/2}(S)} \\ &+ \delta\nu_h \int_S \mathcal{H} \mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta} \cdot \mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Insistimos en el hecho de que la igualdad anterior tiene sentido si $\mathbf{u}^\delta \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$. Por tanto, usando (4.12) y (4.16), obtenemos, al menos formalmente,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|\mathbf{u}^\delta(t)\|_{(L^2(\Omega_\delta))^3}^2 + \nu_h \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\delta\|_{(L^2(\Omega_\delta))^6}^2 ds + \nu_z \int_0^t \|\partial_z \mathbf{u}^\delta\|_{(L^2(\Omega_\delta))^3}^2 ds \\ &+ \int_0^t \int_S \alpha |\mathbf{v}_{air}| |\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_s}^2 d\mathbf{x} ds + \int_0^t \int_S \gamma(\mathbf{x}) |\mathbf{u}^\delta|_{\Gamma_b^\delta}^2 \sqrt{1 + \delta^2 |\nabla_{\mathbf{x}} h|^2} d\mathbf{x} ds \\ &= \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_0^\delta\|_{(L^2(\Omega_\delta))^3}^2 + \int_0^t \int_S \alpha |\mathbf{v}_{air}| \mathbf{v}_{air} \cdot \mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_s} d\mathbf{x} ds - \delta\nu_h \int_0^t \int_S \mathcal{H} \mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta} \cdot \mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta} d\mathbf{x} ds \\ &- \delta(\nu_h - \nu_z) \int_0^t \langle \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta}), \mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} h \rangle_{H^{-1/2}(S), H^{1/2}(S)} ds. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Seguidamente, acotamos los tres últimos términos que aparecen a la derecha de (4.17):

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_S \alpha |\mathbf{v}_{air}| |\mathbf{v}_{air} \cdot \mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_s} d\mathbf{x} ds &\leq \int_0^t \int_S \alpha |\mathbf{v}_{air}|^2 |\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_s} d\mathbf{x} ds \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_S \alpha |\mathbf{v}_{air}| |\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_s}^2 d\mathbf{x} ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_S \alpha |\mathbf{v}_{air}|^3 d\mathbf{x} ds, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\delta \nu_h \int_0^t \int_S \mathcal{H}(\mathbf{x}) \mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta} \cdot \mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta} d\mathbf{x} \leq \delta \nu_h \int_0^t \int_S |\mathcal{H}(\mathbf{x})| |\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta}^2 d\mathbf{x}, \quad (4.19)$$

y

$$\begin{aligned} &\delta |\nu_h - \nu_z| \left\langle \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta}), \mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} h \right\rangle_{H^{-1/2}(S), H^{1/2}(S)} \\ &\leq \delta |\nu_h - \nu_z| \|\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta})\|_{H^{-1/2}(S)} \|\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta}\|_{(H^{1/2}(S))^2} \|\nabla_{\mathbf{x}} h\|_{(W^{1/2, \infty}(S))^2} \\ &\leq \delta |\nu_h - \nu_z| C(S) \|\nabla_{\mathbf{x}} h\|_{(W^{1/2, \infty}(S))^2} \|\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta}\|_{(H^{1/2}(S))^2}^2. \end{aligned}$$

Usando la Proposición 4.7 (ver Apéndice al final del Capítulo) para $f = \mathbf{v}^\delta$, obtenemos:

$$\begin{aligned} &\delta |\nu_h - \nu_z| \left\langle \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta}), \mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} h \right\rangle_{H^{-1/2}(S), H^{1/2}(S)} \\ &\leq \delta |\nu_h - \nu_z| C(\Omega) \|\nabla_{\mathbf{x}} h\|_{(W^{1/2, \infty}(S))^2} \\ &\quad \times \left\{ \frac{2}{\delta} \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}^\delta\|_{(L^2(\Omega_\delta))^4}^2 + \frac{1}{\delta} \|\mathbf{v}^\delta\|_{(L^2(\Omega_\delta))^2}^2 + \delta \left(1 + 2 \|\nabla_{\mathbf{x}} h\|_{(L^\infty(S))^2}^2 \right) \|\partial_z \mathbf{v}^\delta\|_{(L^2(\Omega_\delta))^2}^2 \right\}, \end{aligned}$$

entonces, aplicando las hipótesis (4.8)₁-(4.8)₂, obtenemos:

$$\begin{aligned} &\delta |\nu_h - \nu_z| \left\langle \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta}), \mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} h \right\rangle_{H^{-1/2}(S), H^{1/2}(S)} \\ &\leq \frac{\nu_h}{2} \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\delta\|_{L^2(\Omega_\delta)^6}^2 + \frac{\nu_z}{2} \|\partial_z \mathbf{u}^\delta\|_{L^2(\Omega_\delta)^3}^2 + |\nu_h - \nu_z| C(\Omega) \|\nabla_{\mathbf{x}} h\|_{(W^{1/2, \infty}(S))^2} \|\mathbf{v}^\delta\|_{(L^2(\Omega_\delta))^2}^2. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Utilizando las estimaciones (4.18), (4.19), (4.20) en (4.17), obtenemos la desigualdad:

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}^\delta(t)\|_{(L^2(\Omega_\delta))^3}^2 + \nu_h \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\delta(s)\|_{(L^2(\Omega_\delta))^6}^2 ds + \nu_z \int_0^t \|\partial_z \mathbf{u}^\delta(s)\|_{(L^2(\Omega_\delta))^3}^2 ds \\ &+ \int_0^t \int_S \alpha |\mathbf{v}_{air}| |\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_s}^2 d\mathbf{x} ds + 2 \int_0^t \int_S \gamma(\mathbf{x}) |\mathbf{u}^\delta|_{\Gamma_b^\delta}^2 \sqrt{1 + \delta^2 |\nabla_{\mathbf{x}} h|^2} d\mathbf{x} ds \\ &\leq \|\mathbf{u}_0^\delta\|_{(L^2(\Omega_\delta))^3}^2 + \int_0^t \int_S \alpha |\mathbf{v}_{air}|^3 d\mathbf{x} ds + 2\delta \nu_h \int_0^t \int_S |\mathcal{H}(\mathbf{x})| |\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta}^2 d\mathbf{x} ds \\ &+ 2|\nu_h - \nu_z| C(\Omega) \|\nabla_{\mathbf{x}} h\|_{W^{1/2, \infty}(S)} \int_0^t \|\mathbf{v}^\delta\|_{(L^2(\Omega_\delta))^2}^2 ds. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Veamos ahora que los términos dependientes de \mathbf{u}^δ (más concretamente, de \mathbf{v}^δ) que aparecen a la derecha en la expresión (4.21) se pueden controlar por los términos que aparecen a la izquierda de dicha expresión. Usando la Proposición 4.8 (ver Apéndice al final del Capítulo) para $v = \mathbf{v}^\delta$,

estimamos el último término de (4.21) como:

$$\begin{aligned}
& 2|\nu_h - \nu_z|C(\Omega)\|\nabla_{\mathbf{x}}h\|_{(W^{1/2,\infty}(S))^2}\|\mathbf{v}^\delta\|_{(L^2(\Omega_\delta))^2}^2 \\
& \leq 4\delta|\nu_h - \nu_z|C(\Omega)\|\nabla_{\mathbf{x}}h\|_{(W^{1/2,\infty}(S))^2}\int_S h(\mathbf{x})|\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta}|^2 d\mathbf{x} \\
& \quad + 8\delta^2|\nu_h - \nu_z|C(\Omega)\|\nabla_{\mathbf{x}}h\|_{(W^{1/2,\infty}(S))^2}\|h\|_{L^\infty(S)}^2\|\partial_z\mathbf{v}^\delta\|_{(L^2(\Omega_\delta))^2}^2.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Usando ahora (4.8)₂–(4.8)₃, los dos últimos términos de la derecha de (4.21) se pueden acotar como:

$$\begin{aligned}
& 2|\nu_h - \nu_z|C(\Omega)\|\nabla_{\mathbf{x}}h\|_{(W^{1/2,\infty}(S))^2}\int_0^t\|\mathbf{v}^\delta\|_{(L^2(\Omega_\delta))^2}^2 ds + 2\delta\nu_h\int_0^t\int_S|\mathcal{H}(\mathbf{x})|\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta}|^2 d\mathbf{x} ds \\
& \leq \int_0^t\int_S\gamma(\mathbf{x})|\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta}|^2\sqrt{1+\delta^2|\nabla_{\mathbf{x}}h(\mathbf{x})|^2}d\mathbf{x} ds + \frac{\nu_z}{2}\int_0^t\|\partial_z\mathbf{v}^\delta\|_{(L^2(\Omega_\delta))^2}^2 ds.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Finalmente, sustituyendo (4.23) en (4.21), obtenemos la desigualdad de energía deseada (4.11) que asegura la disipación del sistema. ■

4.2.1 Algunas observaciones sobre la disipación

En esta Subsección, discutimos la influencia del coeficiente de fricción nulo y la presencia de paredes laterales en la propiedad de disipación.

A) Si $\gamma \not\equiv 0$ y $|\Gamma_l^\delta| > 0$, el término $\|\mathbf{v}^\delta\|_{(L^2(\Omega_\delta))^2}^2$ se puede omitir de (4.20) (ver Proposición 4.7 en el Apéndice) y, por tanto, también a la derecha de (4.21). Entonces, la hipótesis (4.8)₃ se reduce a :

$$2\delta\nu_h|\partial_{ij}^2 h(\mathbf{x})| \leq \gamma(\mathbf{x})\sqrt{1+\delta^2|\nabla h|^2}, \quad \forall i, j = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in S, \tag{4.24}$$

y la hipótesis (4.8)₂ se puede reescribir como:

$$\delta^2 C(\Omega)|\nu_h - \nu_z| \left(1 + 2\|\nabla_{\mathbf{x}}h\|_{(L^\infty(S))^2}^2\right) \|\nabla_{\mathbf{x}}h\|_{W^{1/2,\infty}(S)} \leq \frac{\nu_z}{2} \tag{4.25}$$

B) Si $\gamma \not\equiv 0$, $|\Gamma_l^\delta| = 0$ y cambiamos (4.8)₃ por (4.24), entonces tenemos existencia de solución débil (aplicando el Lema de Gronwall a (4.21)), pero en principio no podemos garantizar el carácter disipativo del sistema.

C) Si $\gamma \equiv 0$ y $|\Gamma_l^\delta| > 0$: En este caso, tenemos que cambiar (4.8)₃ o (4.24) por:

$$\begin{cases} C(\Omega)\|\mathcal{H}\|_{(L^2(S))^{2 \times 2}} \leq \frac{1}{4}, \\ C(\Omega)\delta^2\nu_h \left(1 + 2\|\nabla_{\mathbf{x}}h\|_{(L^\infty(S))^2}^2\right) \leq \frac{\nu_z}{2}. \end{cases} \tag{4.26}$$

En efecto, como en **A)** $\|\mathbf{v}^\delta\|_{(L^2(\Omega_\delta))^2}^2$ no aparece a la derecha en la expresión (4.21). Escribimos entonces,

$$\begin{aligned}
2\delta\nu_h\int_0^t\int_S|\mathcal{H}(\mathbf{x})|\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta}|^2 d\mathbf{x} & \leq \delta\nu_h\int_0^t\|\mathcal{H}\|_{(L^2(S))^{2 \times 2}}\|\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta}\|_{(L^4(S))^2}^2 \\
& \leq C\delta\nu_h\|\mathcal{H}\|_{(L^2(S))^{2 \times 2}}\|\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta}\|_{(H^{1/2}(S))^2}^2.
\end{aligned}$$

Usando la Proposición 4.7 (ver Apéndice al final del Capítulo), omitiendo de nuevo el término en $\|\mathbf{v}^\delta\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2$, obtenemos:

$$2\delta\nu_h \int_0^t \int_S |\mathcal{H}(\mathbf{x})| |\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta}|^2 d\mathbf{x} \leq C(\Omega)\delta\nu_h \|\mathcal{H}\|_{(L^2(S))^{2 \times 2}} \left(\frac{2}{\delta} \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}^\delta\|_{(L^2(\Omega_\delta))^4}^2 + \delta \left(1 + 2\|\nabla_{\mathbf{x}} h\|_{(L^\infty(S))^2}^2 \right) \|\partial_z \mathbf{v}^\delta\|_{(L^2(\Omega_\delta))^2}^2 \right).$$

Esta estimación se controla por la parte izquierda de (4.21) (para $\gamma \equiv 0$) suponiendo (4.26).

D) Si $\gamma \equiv 0$ y $|\Gamma_l^\delta| = 0$: Entonces parece que, en general, no se puede asegurar la disipación, aunque sí la existencia de solución débil. En efecto, se acota:

$$\begin{aligned} 2\delta\nu_h \int_0^t \int_S |\mathcal{H}(\mathbf{x})| |\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta}|^2 &\leq 2\delta\nu_h \|\mathcal{H}\|_{(L^\infty(S))^{2 \times 2}} \|\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_b^\delta}\|_{(L^2(S))^2}^2 \\ &\leq C\delta\nu_h \|\mathcal{H}\|_{(L^\infty(S))^{2 \times 2}} \|\mathbf{v}^\delta\|_{(L^2(\Omega_\delta))^2}^\kappa \|\mathbf{v}^\delta\|_{(H^1(\Omega_\delta))^2}^{2-\kappa} \text{ para algún } \kappa \in (0, 2) \\ &\leq \frac{\min\{\nu_h, \nu_z\}}{2} \|\nabla \mathbf{v}^\delta\|_{(L^2(\Omega_\delta))^6}^2 + C(\nu_h, \nu_z, \Omega) \delta^{2/\kappa} \nu_h^{2/\kappa} \|\mathcal{H}\|_{(L^\infty(S))^{2 \times 2}}^{2/\kappa} \|\mathbf{v}^\delta\|_{(L^2(\Omega_\delta))^2}^2, \end{aligned}$$

y tenemos que aplicar el Lema de Gronwall.

Si suponemos que $\alpha(\mathbf{x})|\mathbf{v}_{air}| \geq \alpha' > 0$ en S , entonces podemos garantizar la disipación haciendo la estimación:

$$\|\mathbf{v}^\delta\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \leq 2\delta \int_S h(\mathbf{x}) |\mathbf{v}^\delta|_{\Gamma_s}|^2 + 4\delta^2 \|h\|_{L^\infty(S)} \|\partial_z \mathbf{v}^\delta\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2$$

(que se prueba en la Corolario 4.9), e imponiendo la hipótesis:

$$C\delta \left(|\nu_h - \nu_z| \|\nabla_{\mathbf{x}} h\|_{W^{1/2, \infty}(S)^2} + \delta^{2/\kappa} \nu_h^{2/\kappa} \|\mathcal{H}\|_{L^\infty(S)}^{2/\kappa} \right) \leq \alpha(\mathbf{x})|\mathbf{v}_{air}(\mathbf{x})| \quad \mathbf{x} \in S.$$

4.3 Condiciones de contorno Navier para las Ecuaciones Primitivas

Consideramos un dominio cuyo cociente de aspecto $\delta = \text{profundidad/longitud}$ es muy pequeño. En general, $\delta \approx 10^{-3}$ o 10^{-4} .

En esta Sección, nos interesamos por el comportamiento asintótico cuando $\delta \rightarrow 0$ de las soluciones débiles \mathbf{u}^δ (para cada dominio Ω_δ) relativas al sistema descrito en la Sección anterior. Supondremos que $h \approx 1$ y:

$$\nu_h \approx 1, \quad \nu_z = \delta^2 \nu_v \quad (\nu_v \approx 1), \quad (4.27)$$

$$\alpha/\delta \rightarrow \bar{\alpha} \quad \text{y} \quad \gamma/\delta \rightarrow \bar{\gamma} \text{ en } L^\infty(S)\text{-débil*}. \quad (4.28)$$

Introducimos los siguientes cambios de variable:

$$Z = \frac{z}{\delta}, \quad \mathbf{V}^\delta(t; \mathbf{x}, Z) = \mathbf{v}^\delta(t; \mathbf{x}, z), \quad W^\delta(t; \mathbf{x}, Z) = \frac{w^\delta(t; \mathbf{x}, z)}{\delta}, \quad (4.29)$$

y el dominio fijo

$$\Omega = \{(\mathbf{x}, Z) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \in S, -h(\mathbf{x}) < Z < 0\},$$

cuyas fronteras vienen dadas por $\Gamma_s \equiv \bar{S} \times \{0\}$, $\Gamma_l = \{(\mathbf{x}, Z) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \in \partial S, -h(\mathbf{x}) < Z < 0\}$ y $\Gamma_b = \partial\Omega \setminus (\bar{\Gamma}_s \cup \bar{\Gamma}_l)$.

Probaremos que cuando δ tiende a 0, entonces la solución $\mathbf{U}^\delta = (\mathbf{V}^\delta, W^\delta)$ reescalada usando (4.29), correspondiente a la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes, posee una subsucesión que converge a una solución $\mathbf{U} = (\mathbf{V}, W)$ del modelo de Ecuaciones Primitivas:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{V} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \Delta_\nu \mathbf{V} + k \mathbf{V}^\perp + \nabla_x P = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_Z P = 0, \quad \nabla_x \cdot \mathbf{V} + \partial_Z W = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \nu_v \partial_Z \mathbf{V} = \bar{\alpha} |\mathbf{v}_{air}| (\mathbf{v}_{air} - \mathbf{V}), \quad W = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_s, \\ \nu_v (1 + \nu_h |\nabla_x h|^2 / \nu_v) \partial_Z \mathbf{V} n^Z = \mathcal{A} \mathbf{V}|_{\Gamma_b}, \quad (\mathbf{V}, W) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_b, \\ \mathbf{V} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_l, \\ \mathbf{V}|_{t=0} = \mathbf{V}_0 & \text{en } \Omega, \end{array} \right. \quad (4.30)$$

donde $\nabla_x = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$, $\Delta_x = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$, $\Delta_\nu = \nu_h \Delta_x + \nu_v \partial_Z^2$, $\mathbf{V}^\perp = (-V_2, V_1)$, $k = |\omega| \sin \theta$ y

$$\mathcal{A} \mathbf{V}|_{\Gamma_b} = \bar{\gamma} \mathbf{V}|_{\Gamma_b} n^Z + \nu_h \mathcal{H} \mathbf{V}|_{\Gamma_b} n^Z + \nu_h \nabla_x \cdot (\mathbf{V}|_{\Gamma_b}) n^x - \nu_h \nabla_x (\mathbf{V}|_{\Gamma_b}) n^x, \quad (4.31)$$

con $\mathbf{n} = (\mathbf{n}^x, n^Z)$ el vector normal exterior a Γ_b . La condición (4.31) tendrá un sentido "dual" a través de la formulación débil (4.34).

Nota 4.3.1 En dimensión 2, la condición de contorno en el fondo se escribe $\nu_v \partial_Z \mathbf{V} = \beta \mathbf{V}|_{\Gamma_b}$ con

$$\beta = \frac{(\bar{\gamma} + \nu_h h'')}{1 + \nu_h |h'|^2 / \nu_v}.$$

En el capítulo siguiente, probaremos la existencia y unicidad de solución débil del modelo de Ecuaciones Primitivas con este tipo de condiciones de contorno en el caso 2D.

4.3.1 Resultado de convergencia y existencia

• Espacios funcionales en el dominio Ω .

Ahora consideramos el espacio

$$\mathcal{V} = \{\tilde{\Phi} = (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in (C_l^\infty(\bar{\Omega}))^3 : \nabla \cdot \tilde{\Phi} = 0 \text{ en } \Omega, \tilde{\Phi} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\},$$

donde $C_l^\infty(\bar{\Omega}) = \{\chi \in C^\infty(\bar{\Omega}) : \chi = 0 \text{ en un entorno de } \Gamma_l \cup \partial\Gamma_s\}$.

Definimos H^{prim} , V^{prim} y Y^{prim} como las clausuras de \mathcal{V} para las normas $\|\tilde{\Phi}\|_{H^{prim}} = \|\tilde{\varphi}\|_{(L^2(\Omega))^2}$, $\|\tilde{\Phi}\|_{V^{prim}} = \|\tilde{\varphi}\|_{(H^1(\Omega))^2}$ y $\|\tilde{\Phi}\|_{Y^{prim}} = \|\tilde{\varphi}\|_{(H^2(\Omega))^2}$ respectivamente, donde $\tilde{\varphi} = (\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2)$. Tenemos la siguiente caracterización para V^{prim} :

$$V^{prim} = \{\tilde{\Phi} = (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in (H^1(\Omega))^2 \times L^2(\Omega) : \nabla \cdot \tilde{\Phi} = 0 \text{ en } \Omega, \tilde{\Phi} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \tilde{\varphi} = 0 \text{ sobre } \Gamma_l, \langle \tilde{\varphi} \rangle = 0 \text{ sobre } \partial S\}.$$

El principal resultado de esta Sección es el siguiente:

Teorema 4.2 *Supongamos que se satisfacen las hipótesis (4.7), (4.8), (4.27) y (4.28). Supongamos, además, que:*

$$\|\mathbf{V}_0^\delta\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \|\delta W_0^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_{inic}, \quad (4.32)$$

$$\mathbf{V}_0^\delta \rightharpoonup \mathbf{V}_0 \quad \text{en } L^2(\Omega)^2\text{-débil*}. \quad (4.33)$$

Entonces, existe una subsucesión de $\mathbf{U}^\delta = (\mathbf{V}^\delta, W^\delta)$ (sucesión obtenida por el reescalamiento (4.29) de una solución \mathbf{u}^δ de las ecuaciones de Navier-Stokes definida en Teorema 4.1) que converge a $\mathbf{U} = (\mathbf{V}, W)$ en el sentido siguiente:

$$(\mathbf{V}^\delta, W^\delta) \rightharpoonup (\mathbf{V}, W) \quad \text{en } L^2(0, T; V^{Prim})\text{-débil}$$

$$\mathbf{V}^\delta \rightharpoonup \mathbf{V} \quad \text{en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)\text{-débil*}.$$

Además, $\mathbf{U} = (\mathbf{V}, W)$ es una solución débil del sistema (4.30); es decir, $\forall \tilde{\Phi} = (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in C^1([0, T]; \mathcal{V})$ con $\tilde{\Phi}(T) = 0$,

$$\left\{ \begin{array}{l} - \int_0^T \int_\Omega \mathbf{V} \cdot (\partial_t \tilde{\varphi} + \mathbf{U} \cdot \nabla \tilde{\varphi}) d\Omega dt + \int_0^T \int_\Omega k \mathbf{V}^\perp \cdot \tilde{\varphi} d\Omega dt \\ + \int_0^T \int_\Omega (\nu_h \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{V} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \tilde{\varphi} + \nu_v \partial_Z \mathbf{V} \cdot \partial_Z \tilde{\varphi}) d\Omega dt \\ + \int_0^T \nu_h \langle \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{V}|_{\Gamma_b}), \tilde{\varphi}|_{\Gamma_b} \rangle_{H^{-1/2}(S), H^{1/2}(S)} + \nu_h \int_0^T \int_{\Gamma_b} \mathcal{H} \mathbf{V} \cdot \tilde{\varphi} (-n^Z) \\ + \int_0^T \int_{\Gamma_s} \bar{\alpha} |\mathbf{v}_{air}| (\mathbf{V} - \mathbf{v}_{air}) \cdot \tilde{\varphi} + \int_0^T \int_{\Gamma_b} \bar{\gamma} \mathbf{V} \cdot \tilde{\varphi} (-n^Z) = \int_\Omega \mathbf{V}_0 \cdot \tilde{\varphi}(0) d\Omega \end{array} \right. \quad (4.34)$$

que verifica, además, la desigualdad de energía, para todo $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{V}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_\Omega \left(\nu_h |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{V}|^2 + \frac{\nu_v}{2} |\partial_Z \mathbf{V}|^2 \right) d\Omega ds \\ + \int_0^t \int_{\Gamma_s} \bar{\alpha} |\mathbf{v}_{air}| |\mathbf{V}|^2 + \int_0^t \int_{\Gamma_b} \bar{\gamma} |\mathbf{V}|^2 (-n^Z) \leq C_{inic} + \int_0^t \int_{\Gamma_s} \bar{\alpha} |\mathbf{v}_{air}|^3. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Nota 4.3.2 *El Teorema anterior nos da, en particular, un resultado de existencia para el sistema límite (4.30) si se verifica la siguiente hipótesis (correspondiente al comportamiento en el límite de la condición (4.8) cuando $\delta \downarrow 0$):*

$$\left\{ \begin{array}{l} C(\Omega) \|\nabla_{\mathbf{x}} h\|_{W^{1/2, \infty}(S)} \leq \frac{1}{4} \\ C(\Omega) \nu_h \left(1 + 2 \|h\|_{W^{1, \infty}(S)}^2 \right) \|\nabla_{\mathbf{x}} h\|_{W^{1/2, \infty}(S)} \leq \frac{\nu_v}{16} \\ 2\nu_h C(\Omega) \|\nabla_{\mathbf{x}} h\|_{W^{1/2, \infty}(S)} h(\mathbf{x}) + \nu_h |\partial_{ij}^2 h(\mathbf{x})| \leq \frac{\bar{\gamma}(\mathbf{x})}{2}, \forall i, j = 1, 2, \text{ c.p.d. } \mathbf{x} \in S. \end{array} \right. \quad (4.36)$$

En lo que sigue, daremos algunas estimaciones de energía para $(\mathbf{V}^\delta, W^\delta)$ y después algunas derivadas fraccionarias en tiempo para \mathbf{V}^δ . Con ellas, realizaremos un razonamiento de compacidad para \mathbf{V}^δ (para poder pasar al límite en el término no lineal). Finalmente, estableceremos la demostración del Teorema 4.2.

Usando el Teorema 4.1, el cambio de variable (4.29) y la condición de divergencia nula, deducimos fácilmente, como en [3], el siguiente resultado:

Proposición 4.3 Si $(\mathbf{V}^\delta, W^\delta)$ son soluciones reescaladas de las ecuaciones de Navier-Stokes, entonces $(\mathbf{V}^\delta, \delta W^\delta)$ están uniformemente acotadas en $L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3) \cap L^2(0, T; (H^1(\Omega))^3)$. La componente vertical de las soluciones reescaladas de las ecuaciones de Navier-Stokes, W^δ , satisface que W^δ y $\partial_Z W^\delta$ están uniformemente acotadas en $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Denotaremos con el subíndice \star los espacios para las componentes horizontales de la velocidad. Entonces, definimos:

$$\mathcal{V}_\star = \{\tilde{\varphi} \in (C^\infty(\bar{\Omega}))^2 : \nabla_x \cdot \langle \tilde{\varphi} \rangle = 0, \tilde{\varphi} = 0 \text{ en un entorno de } \Gamma_l \cup \partial\Gamma_s\}$$

donde $\langle \tilde{\varphi}(x) \rangle = \int_{-h(x)}^0 \tilde{\varphi}(x, Z) dZ$. En correspondencia con las definiciones anteriores, definimos H_\star^{prim} , V_\star^{prim} y Y_\star^{prim} como las clausuras de \mathcal{V}_\star para las normas $\|\tilde{\varphi}\|_{H_\star^{prim}} = \|\tilde{\varphi}\|_{(L^2(\Omega))^2}$, $\|\tilde{\varphi}\|_{V_\star^{prim}} = \|\tilde{\varphi}\|_{(H^1(\Omega))^2}$ y $\|\tilde{\varphi}\|_{Y_\star^{prim}} = \|\tilde{\varphi}\|_{(H^2(\Omega))^2}$ respectivamente.

Dada $\tilde{\varphi} \in \mathcal{V}_\star$, si definimos $\tilde{\psi}$ como

$$\tilde{\psi}(x, Z) = \int_Z^0 \nabla_x \cdot \tilde{\varphi}(x, \zeta) d\zeta, \quad (4.37)$$

entonces $\tilde{\Phi} = (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ pertenece a \mathcal{V} . Extendemos esta definición por continuidad para $\tilde{\varphi} \in H_\star^{prim}$. En consecuencia, la aplicación $\tilde{\varphi} \mapsto \tilde{\Phi}$ es una isometría de H_\star^{prim} , V_\star^{prim} y Y_\star^{prim} en H^{prim} , V^{prim} y Y^{prim} respectivamente.

Notemos que, usando las inyecciones de Sobolev-Rellich, tenemos:

$$Y_\star^{prim} \hookrightarrow V_\star^{prim} \hookrightarrow H_\star^{prim} \equiv (H_\star^{prim})' \hookrightarrow (V_\star^{prim})' \hookrightarrow (Y_\star^{prim})' \quad (4.38)$$

donde todas las inyecciones son compactas. Ahora, probamos el siguiente resultado:

Lema 4.4 $\|\mathbf{V}^\delta(t+h) - \mathbf{V}^\delta(t)\|_{L^\infty(0, T-h; (Y_\star^{prim})')} \leq c_1 h^{1/6} + c_2 \delta$.

Con este Lema, podemos usar un argumento de compacidad por perturbación, dado en el Apéndice, para obtener el siguiente resultado que se usará en el análisis asintótico:

Corolario 4.5 La sucesión $(\mathbf{V}^\delta)_\delta$ tiene un punto de acumulación en $L^2(0, T; (L^2(\Omega))^2)$ cuando $\delta \downarrow 0$.

Demostración del Lema 4.4: Haciendo el cambio de variable (4.29) en la formulación variacional (4.10) para el problema de Navier-Stokes (4.4), si razonamos como al principio de la demostración del Teorema 4.1 para llegar a (4.17), obtenemos: $\forall \tilde{\Phi} = (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_\Omega \mathbf{V}^\delta \cdot \tilde{\varphi} - \int_\Omega (\mathbf{U}^\delta \cdot \nabla) \tilde{\varphi} \cdot \mathbf{V}^\delta + \int_\Omega \nabla_\nu \mathbf{V}^\delta : \nabla \tilde{\varphi} + \int_\Omega k(\mathbf{V}^\delta)^\perp \cdot \tilde{\varphi} + \int_S \frac{\gamma}{\delta} \mathbf{V}^\delta|_{\Gamma_b} \cdot \tilde{\varphi}|_{\Gamma_b} d\mathbf{x} \\ & + \delta^2 \left\{ \frac{d}{dt} \int_\Omega W^\delta \tilde{\psi} - \int_\Omega (\mathbf{U}^\delta \cdot \nabla) \tilde{\psi} \cdot W^\delta + \int_\Omega \nabla_\nu W^\delta \cdot \nabla \tilde{\psi} + \int_S \frac{\gamma}{\delta} W^\delta|_{\Gamma_b} \tilde{\psi}|_{\Gamma_b} d\mathbf{x} \right\} \\ & + 2\delta \left\{ \int_\Omega |\omega| \cos(\theta) (W^\delta \tilde{\varphi}_1 - V_1^\delta \tilde{\psi}) \right\} \\ & + \delta (\nu_h - \delta^2 \nu_v) \left\langle \nabla_x \cdot (\mathbf{V}^\delta|_{\Gamma_b}), \tilde{\varphi}|_{\Gamma_b} \cdot \nabla_x h \right\rangle_{H^{-1/2}(S), H^{1/2}(S)} \\ & + \delta \nu_h \int_S \mathcal{H} \mathbf{V}^\delta|_{\Gamma_b} \cdot \tilde{\varphi}|_{\Gamma_b} d\mathbf{x} + \int_S \frac{\alpha}{\delta} |\mathbf{v}_{air}| (\mathbf{V}^\delta|_{\Gamma_s} - \mathbf{v}_{air}) \cdot \tilde{\varphi}|_{\Gamma_s} d\mathbf{x} = 0 \quad \text{en } \mathcal{D}'(0, T). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Para probar este Lema, consideramos $\tilde{\varphi} \in Y_{\star}^{prim}$ como funciones test. Sea $\tilde{\psi}$ definido por (4.37) entonces $\tilde{\Phi} = (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in (H^2(\Omega))^2 \times H^1(\Omega)$ y $\nabla \cdot \tilde{\Phi} = 0$ en Ω . Además

$$\|\tilde{\psi}\|_{H^1(\Omega)} + \|\partial_Z \tilde{\psi}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\tilde{\varphi}\|_{Y_{\star}^{prim}}. \quad (4.40)$$

Tomamos entonces estas $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ como funciones test en (4.39). Integrando en tiempo (4.39) sobre $(t, t+h)$, obtenemos:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{V}^{\delta}(t+h) - \mathbf{V}^{\delta}(t)) \cdot \tilde{\varphi} d\Omega + \delta^2 \int_{\Omega} (W^{\delta}(t+h) - W^{\delta}(t)) \tilde{\psi} d\Omega = \int_t^{t+h} g^{\delta}(s) ds,$$

donde

$$\begin{aligned} g^{\delta}(s) &= \int_{\Omega} (\mathbf{U}^{\delta} \cdot \nabla) \tilde{\varphi} \cdot \mathbf{V}^{\delta} + \delta^2 \int_{\Omega} (\mathbf{U}^{\delta} \cdot \nabla) \tilde{\psi} W^{\delta} - \int_{\Omega} k(\mathbf{V}^{\delta})^{\perp} \cdot \tilde{\varphi} \\ &\quad - \int_{\Omega} \nabla_{\nu} \mathbf{V}^{\delta} : \nabla \tilde{\varphi} - \delta^2 \int_{\Omega} \nabla_{\nu} W^{\delta} \cdot \nabla \tilde{\psi} \\ &\quad - 2\delta \left\{ \int_{\Omega} |\omega| \cos(\theta) (W^{\delta} \tilde{\varphi}_1 - V_1^{\delta} \tilde{\psi}) \right\} \\ &\quad - \int_S \frac{\gamma}{\delta} \mathbf{V}^{\delta}|_{\Gamma_b} \cdot \tilde{\varphi}|_{\Gamma_b} d\mathbf{x} - \delta^2 \int_S \frac{\gamma}{\delta} W^{\delta}|_{\Gamma_b} \tilde{\psi}|_{\Gamma_b} d\mathbf{x} \\ &\quad - \delta(\nu_h - \delta^2 \nu_v) \left\langle \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{V}^{\delta}|_{\Gamma_b}), \tilde{\varphi}|_{\Gamma_b} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} h \right\rangle_{H^{-1/2}(S), H^{1/2}(S)} \\ &\quad - \delta \nu_h \int_S \mathcal{H} \mathbf{V}^{\delta}|_{\Gamma_b} \cdot \tilde{\varphi}|_{\Gamma_b} d\mathbf{x} + \int_S \frac{\alpha}{\delta} |\mathbf{v}_{air}| (\mathbf{V}^{\delta}|_{\Gamma_s} - \mathbf{v}_{air}) \cdot \tilde{\varphi}|_{\Gamma_s} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Usando las estimaciones de la Proposición 4.3 y (4.40), obtenemos que:

$$\begin{aligned} \delta^2 \int_{\Omega} (W^{\delta}(t+h) - W^{\delta}(t)) \tilde{\psi} d\Omega &\leq \delta \left\{ \|(\delta W^{\delta})(t+h)\|_{L^2(\Omega)} + \|(\delta W^{\delta})(t)\|_{L^2(\Omega)} \right\} \|\tilde{\psi}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \delta C \|\tilde{\varphi}\|_{Y_{\star}^{prim}}. \end{aligned}$$

Por tanto, para concluir, sólo necesitamos verificar que

$$\int_t^{t+h} |g^{\delta}(s)| ds \leq Ch^{1/6} \|\tilde{\varphi}\|_{Y_{\star}^{prim}}. \quad (4.41)$$

Para ello, si aplicamos la desigualdad de Hölder (con exponentes $6/5$ y 6) a $\int_t^{t+h} |g(s)| ds$, basta probar que

$$\|g^{\delta}\|_{L^{6/5}(0,T)} \leq C \|\tilde{\varphi}\|_{Y_{\star}^{prim}}. \quad (4.42)$$

Estimemos cada término de g^{δ} . Para el término no lineal, se verifican las acotaciones:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{U}^{\delta} \cdot \nabla) \tilde{\varphi} \cdot \mathbf{V}^{\delta} \leq \|\mathbf{U}^{\delta}\|_{(L^2(\Omega))^3} \|\nabla \tilde{\varphi}\|_{(L^6(\Omega))^6} \|\mathbf{V}^{\delta}\|_{(L^3(\Omega))^2}.$$

y

$$\delta^2 \int_{\Omega} (\mathbf{U}^{\delta} \cdot \nabla) \tilde{\psi} W^{\delta} \leq \|\delta \mathbf{U}^{\delta}\|_{(L^6(\Omega))^3} \|\nabla \tilde{\psi}\|_{(L^2(\Omega))^3} \|\delta W^{\delta}\|_{L^3(\Omega)}.$$

Las estimaciones de los dos términos anteriores están acotadas en $L^{4/3}(0, T)$. En efecto, por interpolación entre $L^{\infty}(0, T; L^2)$ y $L^2(0, T; L^6)$, \mathbf{V}^{δ} y δW^{δ} están acotados en $L^4(0, T; L^3)$. Además,

\mathbf{U}^δ está acotado en $L^2(0, T; L^2)$, $\delta \mathbf{U}^\delta$ está acotado en $L^2(0, T; L^6)$ y $\|\nabla \tilde{\varphi}\|_{L^6} + \|\nabla \tilde{\psi}\|_{L^2} \leq C \|\tilde{\varphi}\|_{Y_\star^{prim}}$.

Estimamos ahora los términos lineales de g^δ definidos en Ω . Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la Proposición 4.3, obtenemos

$$\int_{\Omega} \nabla_{\nu} \mathbf{V}^\delta \cdot \nabla \tilde{\varphi} + \delta \nabla_{\nu} (\delta W^\delta) \cdot \nabla \tilde{\psi} + k (\mathbf{V}^\delta)^\perp \cdot \tilde{\varphi} + 2\delta |\omega| \cos(\theta) \{W^\delta \tilde{\varphi}_1 - V_1^\delta \tilde{\psi}\} \leq C(t) \|\tilde{\varphi}\|_{Y_\star^{prim}}$$

con $C(t)$ acotado en $L^2(0, T)$.

Respecto a las integrales de los términos de frontera, usando el hecho de que $\frac{\alpha}{\delta}$ y $\frac{\gamma}{\delta}$ están acotadas en $L^\infty(S)$ y que $(\mathbf{V}^\delta, \delta W^\delta)$ está acotada uniformemente en $L^2(0, T; (H^1(\Omega))^3)$, obtenemos

$$\int_S \delta \nu_h \mathcal{H} \mathbf{V}^\delta|_{\Gamma_b} \cdot \tilde{\varphi}|_{\Gamma_b} + \frac{\gamma}{\delta} \mathbf{V}^\delta|_{\Gamma_b} \cdot \tilde{\varphi}|_{\Gamma_b} + \delta \frac{\gamma}{\delta} (\delta W^\delta)|_{\Gamma_b} \tilde{\psi}|_{\Gamma_b} \leq C_1(t) \|\tilde{\varphi}\|_{Y_\star^{prim}}$$

$$\int_S \frac{\alpha}{\delta} |\mathbf{v}_{air}| (\mathbf{V}^\delta|_{\Gamma_s} - \mathbf{v}_{air}) \cdot \tilde{\varphi} \leq C_2(t) \|\tilde{\varphi}\|_{Y_\star^{prim}}$$

con $C_1(t)$ acotada en $L^2(0, T)$ y $C_2(t)$ acotada en $L^{6/5}(0, T)$.

Finalmente, como las \mathbf{V}^δ están uniformemente acotadas en $L^2(0, T; (H^1(\Omega))^2)$, obtenemos la estimación:

$$\delta (\nu_h - \delta^2 \nu_v) \left\langle \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{V}^\delta|_{\Gamma_b}), \tilde{\varphi}|_{\Gamma_b} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} h \right\rangle_{H^{-1/2}(S), H^{1/2}(S)} \leq C_3(t) \|\tilde{\varphi}\|_{Y_\star^{prim}}$$

con $C_3(t)$ acotada en $L^2(0, T)$.

En consecuencia, gracias a las cotas anteriores, se verifica (4.42), con lo que concluimos la demostración. \blacksquare

Demostración del Teorema 4.2 Veamos que se verifica la formulación variacional (4.34) y luego veremos la desigualdad de energía (4.35).

i) *Formulación variacional para las Ecuaciones Primitivas* (4.34). La vamos a obtener como límite de la formulación variacional (4.10) reescalada usando (4.29). Observemos que dicha formulación variacional reescalada se escribe: $\forall \tilde{\Phi} = (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in C^1([0, T]; \mathcal{V})$ tal que $\tilde{\Phi}(T) = \mathbf{0}$,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} -\mathbf{V}^\delta \cdot \partial_t \tilde{\varphi} - (\mathbf{U}^\delta \cdot \nabla) \tilde{\varphi} \cdot \mathbf{V}^\delta + \nabla_{\nu} \mathbf{V}^\delta \cdot \nabla \tilde{\varphi} + k (\mathbf{V}^\delta)^\perp \cdot \tilde{\varphi} \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} -\delta^2 W^\delta \partial_t \tilde{\psi} + \delta^2 (\mathbf{U}^\delta \cdot \nabla) \tilde{\psi} W^\delta + \delta^2 \nabla_{\nu} W^\delta \cdot \nabla \tilde{\psi} + 2|\omega| \delta \int_0^T \int_{\Omega} (W^\delta \tilde{\varphi}_1 - V_1^\delta \tilde{\psi}) \cos(\theta) \\ & + (\nu_h - \delta \nu_v) \left\langle \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{V}^\delta|_{\Gamma_b}), \tilde{\varphi}|_{\Gamma_b} \cdot \nabla h \right\rangle_{H^{-1/2}(S), H^{1/2}(S)} + \nu_h \int_0^T \int_S \mathcal{H} \mathbf{V}^\delta|_{\Gamma_b} \cdot \tilde{\varphi}|_{\Gamma_b} \, d\mathbf{x} dt \\ & + \int_0^T \int_S \frac{\alpha}{\delta} |\mathbf{v}_{air}| (\mathbf{V}^\delta|_{\Gamma_s} - \mathbf{v}_{air}) \cdot \tilde{\varphi}|_{\Gamma_s} \, d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_S \frac{\gamma}{\delta} \mathbf{V}^\delta|_{\Gamma_b} \cdot \tilde{\varphi}|_{\Gamma_b} \, d\mathbf{x} dt \\ & + \delta^2 \int_0^T \int_S \frac{\gamma}{\delta} W^\delta|_{\Gamma_b} \tilde{\psi}|_{\Gamma_b} \, d\mathbf{x} dt = \int_{\Omega} \mathbf{V}_0^\delta \cdot \tilde{\varphi}(0) + \delta^2 \int_{\Omega} W_0^\delta \tilde{\psi}(0). \end{aligned} \tag{4.43}$$

Ya sabemos que la velocidad $(\mathbf{V}^\delta, W^\delta)$ está acotada en $L^2(0, T; V^{prim})$ y \mathbf{V}^δ está acotada en $L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^2)$. De ese modo, existe una subsucesión, que seguimos denotando como la sucesión de partida, $(\mathbf{V}^\delta, W^\delta)$ tal que

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^\delta = (\mathbf{V}^\delta, W^\delta) &\rightharpoonup \mathbf{U} = (\mathbf{V}, W) \quad \text{en } L^2(0, T; V^{prim})\text{-débil} \\ \mathbf{V}^\delta &\rightharpoonup \mathbf{V} \quad \text{en } L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^2)\text{-débil*}\end{aligned}$$

Dichas convergencias conducen a que:

$$\int_0^T \int_\Omega -\mathbf{V}^\delta \cdot \partial_t \tilde{\varphi} + \nabla_\nu \mathbf{V}^\delta \cdot \nabla \tilde{\varphi} + k (\mathbf{V}^\delta)^\perp \cdot \tilde{\varphi} \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega -\mathbf{V} \cdot \partial_t \tilde{\varphi} + \nabla_\nu \mathbf{V} \cdot \nabla \tilde{\varphi} + k \mathbf{V}^\perp \cdot \tilde{\varphi}$$

y, como δW^δ está acotada en $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$, garantiza que:

$$\int_0^T \int_\Omega \delta^2 W^\delta \partial_t \tilde{\psi} + \delta^2 \nabla_\nu W^\delta \cdot \nabla \tilde{\psi} + 2|\omega| \delta (W^\delta \tilde{\varphi}_1 - V_1^\delta \tilde{\psi}) \cos(\theta) \longrightarrow 0$$

Para los términos no lineales, usamos la convergencia fuerte en $L^2(0, T; (L^2(\Omega))^2)$ de \mathbf{V}^δ hacia \mathbf{V} , dada por el Corolario 4.5.

Lema 4.6 *En las hipótesis anteriores, usando la convergencia fuerte en $L^2(0, T; (L^2(\Omega))^2)$, obtenemos que:*

$$\int_0^T \int_\Omega (\mathbf{U}^\delta \cdot \nabla) \tilde{\varphi} \cdot \mathbf{V}^\delta + \delta^2 (\mathbf{U}^\delta \cdot \nabla) \tilde{\psi} W^\delta \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega (\mathbf{V} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \tilde{\varphi} \cdot \mathbf{V} + W \partial_z \tilde{\varphi} \cdot \mathbf{V}. \quad (4.44)$$

Demostración del Lema 4.6: Seguimos el mismo tipo de razonamiento usado en [2] y [3]. Previamente descomponemos los términos de la forma:

$$\int_0^T \int_\Omega (\mathbf{U}^\delta \cdot \nabla) \tilde{\varphi} \cdot \mathbf{V}^\delta = \int_0^T \int_\Omega (\mathbf{V}^\delta \cdot \nabla_H) \tilde{\varphi} \cdot \mathbf{V}^\delta + \int_\Omega W^\delta \partial_z \tilde{\varphi} \cdot \mathbf{V}^\delta, \quad (4.45)$$

$$\delta^2 \int_\Omega (\mathbf{U}^\delta \cdot \nabla) W^\delta \tilde{\psi} = \delta^2 \int_\Omega (\mathbf{V}^\delta \cdot \nabla_H) W^\delta \tilde{\psi} + \delta^2 \int_\Omega W^\delta \partial_z W^\delta \tilde{\psi}. \quad (4.46)$$

Para los términos de (4.46), acotamos de la forma:

$$\begin{aligned}\delta^2 \int_0^T \int_\Omega (\mathbf{V}^\delta \cdot \nabla_H) W^\delta \tilde{\psi} &\leq \delta \int_0^T \|\mathbf{V}^\delta\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla_H(\delta W^\delta)\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{\psi}\|_{L^3(\Omega)} \\ &\leq \delta \|\mathbf{V}^\delta\|_{L^2(0, T; L^6(\Omega))} \|\nabla_H(\delta W^\delta)\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \|\tilde{\psi}\|_{L^\infty(0, T; L^3(\Omega))} \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta^2 \int_0^T \int_\Omega W^\delta \partial_z W^\delta \tilde{\psi} &\leq \delta \int_0^T \|\delta W^\delta\|_{L^6(\Omega)} \|\partial_z W^\delta\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{\psi}\|_{L^3(\Omega)} \\ &\leq \delta \|\delta W^\delta\|_{L^2(0, T; L^6(\Omega))} \|\partial_z W^\delta\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \|\tilde{\psi}\|_{L^\infty(0, T; L^3(\Omega))} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Para controlar el límite de los términos que aparecen en (4.45) usaremos las convergencias fuertes obtenidas por compacidad por perturbación (Corolario 4.5):

$$\mathbf{V}^\delta \longrightarrow \mathbf{V} \quad \text{en } L^2(0, T; L^2(\Omega)^2) \equiv L^2((0, T) \times \Omega)^2\text{-fuerte}. \quad (4.47)$$

Por otra parte, la interpolación entre $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ y $L^2(0, T; L^6(\Omega))$ nos dice que V_i^δ está acotado en $L^{8/3}(0, T; L^4(\Omega))$, de modo que $V_i^\delta V_j^\delta$ está acotado en $L^{4/3}(0, T; L^2(\Omega))$. Luego, usando (4.47), tenemos que:

$$V_i^\delta V_j^\delta \rightharpoonup V_i V_j \quad \text{en } L^{4/3}(0, T; L^2(\Omega))\text{-débil}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq 2.$$

Con ello garantizamos que:

$$\int_0^T \int_\Omega (\mathbf{V}^\delta \cdot \nabla_H) \tilde{\varphi} \cdot \mathbf{V}^\delta \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega (\mathbf{V} \cdot \nabla_H) \tilde{\varphi} \cdot \mathbf{V}.$$

Ahora sólo nos queda controlar el límite del segundo término de (4.45). Usando (4.47) y que W^δ está acotada en $L^2(0, T; L^2)$, deducimos que para $i = 1, 2$,

$$V_i^\delta W^\delta \rightharpoonup W_i W \quad \text{en } L^1(0, T; L^1(\Omega))\text{-débil}.$$

Por otra parte, es fácil ver que $V_i^\delta W^\delta$ está acotado en $L^{8/7}(0, T; L^{4/3}(\Omega))$, por lo tanto

$$V_i^\delta W^\delta \rightharpoonup V_i W \quad \text{en } L^{8/7}(0, T; L^{4/3}(\Omega))\text{-débil}, \quad \forall 1 \leq i \leq 2.$$

Obtenemos así que:

$$\int_0^T \int_\Omega W^\delta \partial_z \tilde{\varphi} \cdot \mathbf{V}^\delta \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega W \partial_z \tilde{\varphi} \cdot \mathbf{V},$$

con lo que concluimos (4.44). ■

Respecto a los términos iniciales, la hipótesis (4.32) asegura que existe una $\mathbf{V}_0 \in L^2(\Omega)^2$ tal que $\mathbf{V}_0^\delta \rightharpoonup \mathbf{V}_0$ en $L^2(\Omega)^2$ -débil y $\|\delta W_0^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq C$. Entonces:

$$\int_\Omega \mathbf{V}_0^\delta \cdot \tilde{\varphi}(0) + \delta^2 W_0^\delta \tilde{\psi}(0) \longrightarrow \int_\Omega \mathbf{V}_0 \cdot \tilde{\varphi}(0).$$

Observamos ahora los términos de frontera. Primero, buscamos el espacio de trazas en el que se da la convergencia, y en qué sentido.

Respecto al término en el que aparece $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{V}^\delta|_{\Gamma_b})$, de \mathbf{V}^δ acotado en $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$ se tiene que $\mathbf{V}^\delta|_{\Gamma_b} \in L^2(0, T; H^{1/2}(S)^2)$ y, por tanto, $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{V}^\delta|_{\Gamma_b})$ está acotado en $L^2(0, T; H^{-1/2}(S)^2)$.

Tenemos entonces que $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{V}^\delta|_{\Gamma_b}) \rightharpoonup \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{V}|_{\Gamma_b})$ en $L^2(0, T; H^{-1/2}(S)^2)$ -débil, luego:

$$\begin{aligned} (\nu_h - \delta^2 \nu_v) \int_0^T \langle \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{V}^\delta|_{\Gamma_b}), \tilde{\varphi}|_{\Gamma_b} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} h \rangle_{H^{-1/2}(S), H^{1/2}(S)} dt &\longrightarrow \\ \nu_h \int_0^T \langle \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{V}|_{\Gamma_b}), \tilde{\varphi}|_{\Gamma_b} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} h \rangle_{H^{-1/2}(S), H^{1/2}(S)} dt. \end{aligned}$$

Usando el resultado de compacidad por perturbación (Corolario 4.5), $\mathbf{V}^\delta \rightarrow \mathbf{V}$ en $L^2(0, T; (L^2(\Omega))^2)$. La desigualdad de interpolación siguiente:

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\mathbf{V}^\delta|_{\Gamma_b} - \mathbf{V}|_{\Gamma_b}\|_{(L^2(S))^2}^2 dt &\leq C \int_0^T \|\mathbf{V}^\delta - \mathbf{V}\|_{(H^{1/2+\varepsilon}(\Omega))^2}^2 dt \\ &\leq C \int_0^T \|\mathbf{V}^\delta - \mathbf{V}\|_{(H^1(\Omega))^2}^{1+2\varepsilon} \|\mathbf{V}^\delta - \mathbf{V}\|_{(L^2(\Omega))^2}^{1-2\varepsilon} dt \\ &\leq C \|\mathbf{V}^\delta - \mathbf{V}\|_{L^2(0, T; (H^1(\Omega))^2)}^{1+2\varepsilon} \|\mathbf{V}^\delta - \mathbf{V}\|_{L^2(0, T; (L^2(\Omega))^2)}^{1-2\varepsilon}, \end{aligned}$$

implica que $\mathbf{V}^\delta|_{\Gamma_b} \rightarrow \mathbf{V}|_{\Gamma_b}$ en $L^2(0, T; L^2(S))$. En consecuencia, obtenemos fácilmente que:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_S \frac{\gamma}{\delta} \mathbf{V}^\delta|_{\Gamma_b} \cdot \tilde{\varphi}|_{\Gamma_b} + \frac{\alpha}{\delta} |\mathbf{v}_{air}| \mathbf{V}^\delta|_{\Gamma_b} \cdot \tilde{\varphi}|_{\Gamma_b} + \mathcal{H} \mathbf{V}^\delta|_{\Gamma_b} \cdot \tilde{\varphi}|_{\Gamma_b} \\ \rightarrow \int_0^T \int_S \bar{\gamma} \mathbf{V}|_{\Gamma_b} \cdot \tilde{\varphi}|_{\Gamma_b} + \int_S \bar{\alpha} |\mathbf{v}_{air}| \mathbf{V}|_{\Gamma_b} \cdot \tilde{\varphi}|_{\Gamma_b} + \mathcal{H} \mathbf{V}|_{\Gamma_b} \cdot \tilde{\varphi}|_{\Gamma_b}. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \left| \delta^2 \int_0^T \int_S \frac{\gamma}{\delta} \mathbf{W}^\delta|_{\Gamma_b} \cdot \tilde{\psi}|_{\Gamma_b} dx dt \right| &\leq \delta \|\gamma/\delta\|_{L^\infty(S)} \|\delta \mathbf{W}^\delta\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} \|\tilde{\psi}|_{\Gamma_b}\|_{L^2(0, T; L^2(S))} \\ &\leq C \delta \|\tilde{\psi}|_{\Gamma_b}\|_{L^2(0, T; L^2(S))} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Por tanto, obtenemos que la función límite $\mathbf{U} = (\mathbf{V}, W)$ es una solución de la formulación variacional (4.34).

Nota 4.3.3 Verificando la continuidad y densidad con respecto a las funciones test, se prueba, usando las estimaciones anisótropas del Capítulo anterior (ver también [26]), que se verifica (4.34) también para cada $\Phi \in H^1([0, T]; V^{prim})$ tal que $\partial_Z \tilde{\varphi} \in L^\infty(0, T; L^r(\Omega))$, para algún $r > 2$ (y $\tilde{\varphi}(T) = 0$).

ii) *Desigualdad de energía* (4.35). Para obtener (4.35), partimos de (4.11), hacemos el cambio de variable de Ω_δ a Ω , y usamos la convergencia que conocemos para V^δ .

Así, concluimos la demostración del Teorema 4.2. ■

Nota 4.3.4 Reforzando las hipótesis de convergencia sobre α/δ y γ/δ , no sería necesaria la convergencia fuerte en $L^2(0, T; L^2(S)^2)$ para concluir la convergencia de los términos frontera. Por ejemplo, de $\mathbf{V}^\delta|_{\Gamma_b} \rightharpoonup \mathbf{V}|_{\Gamma_b}$ en $L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma_b)^2)$ -débil, bastaría con imponer:

$$\frac{\alpha}{\delta} \rightarrow \bar{\alpha} \quad \text{y} \quad \frac{\gamma}{\delta} \rightarrow \bar{\gamma} \quad \text{en } L^\infty(S)\text{-fuerte.}$$

Nota 4.3.5 Aplicando el Lema de De Rham ([44]) en la formulación (4.34) y (4.43), podemos recuperar los potenciales respectivos P^δ y P , como distribuciones, tales que las ecuaciones de momentos relativas a (4.4) reescaladas con (4.29) y las ecuaciones de momentos relativas a (4.30) se satisfacen en $H^{-1}(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$ (espacio dual de $H_0^1(0, T; (H_0^1(\Omega))^3)$) y en $H^{-1}(0, T; (W^{-1, r'}(\Omega))^3)$ (espacio dual de $H_0^1(0, T; (W_0^{1, r}(\Omega))^3)$) respectivamente, siendo $r > 2$ y r' su exponente conjugado.

Además, razonando como en la Subsección de convergencia, podemos probar:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} P^\delta \rightarrow \nabla_{\mathbf{x}} P \quad \text{en } H^{-1}(0, T; (W^{-1, r'}(\Omega))^2)\text{-débil} \\ \|\partial_Z P^\delta\|_{H^{-1}(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq C \delta. \end{aligned}$$

En particular, obtenemos convergencia fuerte de $\partial_Z P^\delta$ a $\partial_Z P (= 0)$ en $H^{-1}(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

4.4 Condiciones de contorno asociadas al sistema límite

Sabemos que (\mathbf{V}, W, P) satisface (4.30)_{1,2} y que (\mathbf{V}, W) es una solución de la formulación variacional asociada (4.34). Probemos que estas informaciones nos dan las condiciones de contorno.

La ecuación de momentos (4.30)_{1,2} se describe matricialmente de la forma:

$$\partial_t \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \nabla \cdot \begin{pmatrix} \nu_h \partial_{x_1} V_1 - P & \nu_h \partial_{x_2} V_1 & \nu_v \partial_Z V_1 \\ \nu_h \partial_{x_1} V_2 & \nu_h \partial_{x_2} V_2 - P & \nu_v \partial_Z V_2 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ W \end{pmatrix} \cdot \nabla \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como

$$\partial_t \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in H^{-1}(0, T; (L^2(\Omega))^3); \quad \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ W \end{pmatrix} \cdot \nabla \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in L^1(0, T; (L^1(\Omega))^3)$$

entonces, si denotamos por T el tensor

$$T = \begin{pmatrix} \nu_h \partial_{x_1} V_1 - P & \nu_h \partial_{x_2} V_1 & \nu_v \partial_Z V_1 \\ \nu_h \partial_{x_1} V_2 & \nu_h \partial_{x_2} V_2 - P & \nu_v \partial_Z V_2 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix},$$

obtenemos que

$$\nabla \cdot T \in H^{-1}(0, T; (L^1(\Omega))^3). \quad (4.48)$$

Por otra parte, $P \in H^{-1}(0, T; L^1(\Omega))$ (ya que $\nabla P \in H^{-1}(0, T; (W^{-1,q}(\Omega))^3)$, para un cierto q , $1 < q < 2$ y $\nabla \mathbf{V} \in L^2(0, T; (L^2(\Omega))^{2 \times 3})$). Por tanto:

$$T \in H^{-1}(0, T; (L^1(\Omega))^{3 \times 3}). \quad (4.49)$$

Si definimos $W^{1,\infty}(\partial\Omega) = \{\phi|_{\partial\Omega} : \phi \in W^{1,\infty}(\Omega)\}$, dotado de la norma:

$$\|\chi\|_{W^{1,\infty}(\partial\Omega)} = \inf_{\phi \in W^{1,\infty}(\Omega)} \|\phi\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}, \\ \phi|_{\partial\Omega} = \chi,$$

podemos definir la traza normal para el tensor T en $(W^{1,\infty}(\partial\Omega))^3$ ' como:

$$\begin{aligned} \langle T\mathbf{n}; (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \rangle_{(W^{1,\infty}(\partial\Omega))^3 \times W^{1,\infty}(\partial\Omega)^3} &= \int_{\Omega} T \cdot \nabla(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) + \int_{\Omega} (\nabla \cdot T) \cdot (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \\ &= \int_{\Omega} (\nu_h \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{V} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \tilde{\varphi} + \nu_v \partial_Z \mathbf{V} \cdot \partial_Z \tilde{\varphi}) - \int_{\Omega} P \nabla \cdot (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) + \int_{\Omega} (\nabla \cdot T) \cdot (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}), \end{aligned} \quad (4.50)$$

para todo $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in (W^{1,\infty}(\Omega))^3$. Esta desigualdad se satisface en $\mathcal{D}'(0, T)$.

Nota 4.4.1 La demostración de la existencia de la traza normal para un elemento de $L^1(\text{div})$ se hace como para $H(\text{div})$ (ver [45] para $H(\text{div})$ y [16] para $L^1(\text{div})$). Recordemos que $L^1(\text{div}) = \{f \mid f \in L^1(\Omega) \text{ and } \text{div}(f) \in L^1(\Omega)\}$.

Partiendo de la definición de traza normal para T en $(W^{1,\infty}(\partial\Omega))^3$ ', vamos a probar que la traza normal para el tensor

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \nu_h \partial_{x_1} V_1 & \nu_h \partial_{x_2} V_1 & \nu_v \partial_Z V_1 \\ \nu_h \partial_{x_1} V_2 & \nu_h \partial_{x_2} V_2 & \nu_v \partial_Z V_2 \end{pmatrix}$$

está definida en $(W^{1,\infty}(\partial\Omega)^2)'$. Con este objetivo, para cada $\tilde{\varphi} \in (W^{1,\infty}(\Omega))^2$ definimos $\tilde{\psi}$ de tal forma que $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \cdot \mathbf{n} = 0$. Así, tenemos que $\langle \mathcal{F}\mathbf{n}; \tilde{\varphi} \rangle_{(W^{1,\infty}(\partial\Omega)^2)' \times (W^{1,\infty}(\partial\Omega))^2}$ está definida para todo $\tilde{\varphi} \in (W^{1,\infty}(\Omega))^2$ por la expresión:

$$\langle \mathcal{F}\mathbf{n}; \tilde{\varphi} \rangle_{(W^{1,\infty}(\partial\Omega)^2)' \times (W^{1,\infty}(\partial\Omega))^2} = \langle T\mathbf{n}; (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \rangle_{(W^{1,\infty}(\partial\Omega)^3)' \times (W^{1,\infty}(\partial\Omega))^3}. \quad (4.51)$$

Las expresiones (4.50) y (4.51) nos van a permitir encontrar las condiciones de contorno. Además, también probaremos la equivalencia entre la formulación variacional y la formulación mixta.

a) Condición de superficie: Elegimos $\tilde{\varphi} \in (C^\infty(\bar{\Omega}))^2$ tal que $\tilde{\varphi} = \mathbf{0}$ en un entorno del fondo y las paredes laterales, y construimos $\tilde{\psi}$ verificando

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\varphi} + \partial_Z \tilde{\psi} = 0 \text{ en } \Omega \quad \text{y} \quad (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \quad (4.52)$$

Sobre la superficie, $\mathbf{n}^{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, luego:

$$\mathcal{F}\mathbf{n} = \nu_v \partial_Z \mathbf{V}.$$

Usando entonces (4.51) y (4.50),

$$\begin{aligned} \langle \nu_v \partial_Z \mathbf{V}, \tilde{\varphi} \rangle_{(W^{1,\infty}(\partial\Omega)^2)' \times (W^{1,\infty}(\partial\Omega))^2} &= \langle T\mathbf{n}, (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \rangle \\ &= \int_{\Omega} (\nu_h \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{V} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \tilde{\varphi} + \nu_v \partial_Z \mathbf{V} \cdot \partial_Z \tilde{\varphi}) + \int_{\Omega} (\nabla \cdot T) \cdot (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}), \end{aligned}$$

de donde obtenemos la expresión para $\nabla \cdot T$. Entonces, multiplicamos los términos restantes por $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ e integramos en Ω , para finalmente comparar con la formulación variacional obtenida tomando como función test la $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ que acabamos de construir. Entonces, encontramos:

$$\langle \nu_v \partial_Z \mathbf{V}, \tilde{\varphi} \rangle_{(W^{1,\infty}(\partial\Omega)^2)' \times (W^{1,\infty}(\partial\Omega))^2} = \int_{\Gamma_s} \bar{\alpha} |\mathbf{v}_{air}| (\mathbf{v}_{air} - \mathbf{V}) \cdot \tilde{\varphi}$$

para toda función $\tilde{\varphi} \in (C^\infty(\bar{\Omega}))^2$ que se anula en un entorno de $\Gamma_b \cup \Gamma_l$. De esa forma, obtenemos la condición de contorno sobre la superficie Γ_s :

$$\nu_v \partial_Z \mathbf{V} = \bar{\alpha} |\mathbf{v}_{air}| (\mathbf{v}_{air} - \mathbf{V}).$$

b) Condición en el fondo: En este caso, elegimos funciones $\tilde{\varphi} \in (C^\infty(\bar{\Omega}))^2$ con $\tilde{\varphi} = \mathbf{0}$ en un entorno de $\Gamma_s \cup \Gamma_l$ y construimos $\tilde{\psi}$ verificando (4.52). Aplicando el mismo tipo de razonamiento, obtenemos:

$$\begin{aligned} -\langle \nu_h (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{V}) \mathbf{n}^{\mathbf{x}} + \nu_v \partial_Z \mathbf{V} n^Z, \tilde{\varphi} \rangle_{(W^{1,\infty}(\partial\Omega)^2)' \times (W^{1,\infty}(\partial\Omega))^2} \\ = \int_S \bar{\gamma} \mathbf{V}|_{\Gamma_b} \cdot \tilde{\varphi}|_{\Gamma_b} d\mathbf{x} + \nu_h \int_S \mathcal{H} \mathbf{V}|_{\Gamma_b} \cdot \tilde{\varphi}|_{\Gamma_b} d\mathbf{x} - \nu_h \langle \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{V}|_{\Gamma_b}) \mathbf{n}^{\mathbf{x}}, \tilde{\varphi} \rangle_{(W^{1,\infty}(\partial\Omega)^2)' \times (W^{1,\infty}(\partial\Omega))^2} \end{aligned}$$

Entonces

$$\langle \nu_h (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{V}) \mathbf{n}^{\mathbf{x}} + \nu_v \partial_Z \mathbf{V} n^Z - \nu_h \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{V}|_{\Gamma_b}) \mathbf{n}^{\mathbf{x}}, \tilde{\varphi} \rangle_{(W^{1,\infty}(\partial\Omega)^2)' \times (W^{1,\infty}(\partial\Omega))^2} = \int_S (\bar{\gamma} \mathbf{V} + \nu_h \mathcal{H} \mathbf{V})|_{\Gamma_b} \cdot \tilde{\varphi}|_{\Gamma_b} d\mathbf{x}.$$

Como, por otra parte,

$$\begin{aligned} & \langle \nu_h (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{V}) \mathbf{n}^{\mathbf{x}} - \nu_h |\nabla_{\mathbf{x}} h|^2 \partial_Z \mathbf{V} n_Z, \tilde{\varphi} \rangle_{(W^{1,\infty}(\partial\Omega)^2)' \times (W^{1,\infty}(\partial\Omega))^2} \\ & = \langle \nu_h (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{V}|_{\Gamma_b}) \mathbf{n}^{\mathbf{x}}, \tilde{\varphi} \rangle_{(W^{1,\infty}(\partial\Omega)^2)' \times (W^{1,\infty}(\partial\Omega))^2}, \end{aligned}$$

de las igualdades anteriores, deducimos que:

$$\begin{aligned} & \langle \nu_v \left(1 + \frac{\nu_h}{\nu_v} |\nabla_{\mathbf{x}} h|^2 \right) \partial_Z \mathbf{V} n_Z, \tilde{\varphi} \rangle_{(W^{1,\infty}(\partial\Omega)^2)' \times (W^{1,\infty}(\partial\Omega))^2} \\ & = \int_S (\tilde{\gamma} \mathbf{V}|_{\Gamma_b} + \nu_h \mathcal{H} \mathbf{V}|_{\Gamma_b}) \cdot \tilde{\varphi}|_{\Gamma_b} d\mathbf{x} \\ & + \langle \nu_h \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{V}|_{\Gamma_b}) \mathbf{n}^{\mathbf{x}} - \nu_h (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{V}|_{\Gamma_b}) \mathbf{n}^{\mathbf{x}}, \tilde{\varphi} \rangle_{(W^{1,\infty}(\partial\Omega)^2)' \times (W^{1,\infty}(\partial\Omega))^2}, \end{aligned}$$

obteniendo así que:

$$\begin{aligned} & \langle \nu_v (1 + |\nabla_{\mathbf{x}} h|^2 \nu_h / \nu_v) \partial_Z \mathbf{V} n_Z, \tilde{\varphi} \rangle_{(W^{1,\infty}(\partial\Omega)^2)' \times (W^{1,\infty}(\partial\Omega))^2} \\ & = \langle \tilde{\gamma} \mathbf{V} n_Z + \nu_h \mathcal{H} \mathbf{V}|_{\Gamma_b} n_Z + \nu_h \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{V}|_{\Gamma_b}) \mathbf{n}^{\mathbf{x}} - \nu_h (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{V}|_{\Gamma_b}) \mathbf{n}^{\mathbf{x}}, \tilde{\varphi} \rangle_{(W^{1,\infty}(\partial\Omega)^2)' \times (W^{1,\infty}(\partial\Omega))^2}, \end{aligned}$$

para toda $\tilde{\varphi} \in C^\infty(\bar{\Omega})^2$ que se anula en un entorno de la superficie y las paredes laterales, de donde se obtiene la condición sobre el fondo que esperábamos.

Nota 4.4.2 En dimensión 2, se obtiene:

$$\nu_v \partial_Z \mathbf{V} = \frac{(\tilde{\gamma} + \nu_h h'') \mathbf{V}}{1 + \nu_h |h'|^2 / \nu_v} \quad \text{en } \mathcal{D}'(0, T; (L^2(\Gamma_b))^2).$$

Apéndice

Proposición 4.7 Existe una constante $C'(\Omega)$ que sólo depende de Ω (para ser más precisos, que sólo depende de S y h , pero no de δ) tal que para todo $f \in H^1(\Omega_\delta)$, tenemos que:

$$\|f|_{\Gamma_b^\delta}\|_{H^{1/2}(S)}^2 \leq C'(\Omega) \left(\frac{2}{\delta} \|\nabla_{\mathbf{x}} f\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 + \frac{1}{\delta} \|f\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 + \delta \left(1 + 2\|\nabla_{\mathbf{x}} h\|_{L^\infty(S)}^2 \right) \|\partial_z f\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \right). \quad (4.53)$$

Además, si $|\Gamma_b^\delta| > 0$, entonces podemos omitir el término $\|f\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2$ en (4.53).

Demostración: Introducimos la siguiente función auxiliar, definida sobre el dominio fijo

$$\Omega^{sym} = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \in S, 0 < z < h(\mathbf{x})\},$$

para

$$g(\mathbf{x}, z) = f(\mathbf{x}, \delta z - \delta h(\mathbf{x})).$$

Entonces, usando el Teorema de Trazas clásico en Ω^{sym} , obtenemos:

$$\begin{aligned} \|f|_{\Gamma_b^\delta}\|_{H^{1/2}(S)}^2 & = \|g(\mathbf{x}, z = 0)\|_{H^{1/2}(S)}^2 \leq C'(\Omega) \|g\|_{H^1(\Omega^{sym})}^2 \\ & \leq C'(\Omega) \left(2\|\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \delta z - \delta h(\mathbf{x}))\|_{L^2(\Omega^{sym})}^2 + \|f(\mathbf{x}, \delta z - \delta h(\mathbf{x}))\|_{L^2(\Omega^{sym})}^2 \right) \\ & + \delta^2 \left(1 + 2\|\nabla_{\mathbf{x}} h\|_{L^\infty(S)}^2 \right) \|\partial_z f(\mathbf{x}, \delta z - \delta h(\mathbf{x}))\|_{L^2(\Omega^{sym})}^2 \\ & = C'(\Omega) \left(\frac{2}{\delta} \|\nabla_{\mathbf{x}} f\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 + \frac{1}{\delta} \|f\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \right) \\ & + \delta \left(1 + 2\|\nabla_{\mathbf{x}} h\|_{L^\infty(S)}^2 \right) \|\partial_z f\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \end{aligned}$$

■

Proposición 4.8 *Sea v una función tal que $v \in L^2(\Omega_\delta)$ y $\partial_z v \in L^2(\Omega_\delta)$. Entonces, se verifica la siguiente desigualdad:*

$$\|v\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \leq 2\delta \int_S h(\mathbf{x}) |v|_{\Gamma_\delta}^2 d\mathbf{x} + 4\delta^2 \|h\|_{L^\infty(S)}^2 \|\partial_z v\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2.$$

Demostración: Esta desigualdad se prueba por densidad y continuidad. Para toda función v tal que $v \in L^2(\Omega_\delta)$ y $\partial_z v \in L^2(\Omega_\delta)$, tenemos que:

$$v^2(\mathbf{x}, z) = v^2(\mathbf{x}, -\delta h(\mathbf{x})) + 2 \int_{-\delta h(\mathbf{x})}^z v(\mathbf{x}, s) \partial_z v(\mathbf{x}, s) ds. \quad (4.54)$$

Integrando en Ω_δ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 &\leq \delta \int_S h(\mathbf{x}) v^2(\mathbf{x}, -\delta h(\mathbf{x})) d\mathbf{x} + 2\delta \int_S h(\mathbf{x}) \int_{-\delta h(\mathbf{x})}^0 |v(\mathbf{x}, s) \partial_z v(\mathbf{x}, s)| ds d\mathbf{x} \\ &\leq \delta \int_S h(\mathbf{x}) |v|_{\Gamma_\delta}^2 d\mathbf{x} + 2\delta \|h\|_{L^\infty(S)} \|v\|_{L^2(\Omega_\delta)} \|\partial_z v\|_{L^2(\Omega_\delta)}. \end{aligned}$$

Esto nos permite concluir la estimación del enunciado. ■

Corolario 4.9 *Sea v una función tal que $v \in L^2(\Omega_\delta)$ y $\partial_z v \in L^2(\Omega_\delta)$. Entonces, se verifica la siguiente desigualdad:*

$$\|v\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \leq 2\delta \int_S h(\mathbf{x}) |v|_{\Gamma_S}^2 d\mathbf{x} + 4\delta^2 \|h\|_{L^\infty(S)}^2 \|\partial_z v\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2.$$

Demostración: Sigue el mismo razonamiento que la demostración de la Proposición 4.8, pero en lugar de (4.54), partimos de:

$$v^2(\mathbf{x}, z) = v^2(\mathbf{x}, 0) - 2 \int_z^0 v(\mathbf{x}, s) \partial_z v(\mathbf{x}, s) ds.$$

■

Por completitud para la demostración del Teorema 4.2, damos aquí el enunciado del Teorema de compacidad por perturbación.

Teorema 4.10 (Compacidad por perturbación) *Dado $T > 0$, consideramos los espacios de Banach \mathbf{X} , \mathbf{B} y \mathbf{Y} tales que $\mathbf{X} \subset \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{Y}$. Sea $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ una familia de funciones en $L^p(0, T; \mathbf{X})$, $1 \leq p \leq \infty$, donde si $p = \infty$, se verifica $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset C([0, T]; \mathbf{Y})$, tal que*

- [(H1)]: $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ está acotada en $L^p(0, T; \mathbf{X})$,
- [(H2)]: $\|f_\varepsilon(t+h) - f_\varepsilon(t)\|_{L^p(0, T-h; \mathbf{Y})} \leq \varphi(h) + \psi(\varepsilon)$ con $\begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi(\varepsilon) = 0, \end{cases}$

entonces, la familia $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ tiene un punto de acumulación en $L^p(0, T; \mathbf{B})$, y en $C([0, T]; \mathbf{B})$ si $p = \infty$, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Este Teorema, que generaliza el criterio de Riesz-Fréchet-Kolmogorov (extendido al caso vectorial por J. Simon [44]), se prueba, por ejemplo, en [3]. ■

Capítulo 5

Existencia y unicidad de un modelo 2D con condición de Navier

5.1 Introducción

En este capítulo nos ocupamos de la unicidad de solución débil para el modelo de Ecuaciones Primitivas 2D con condición de tracción del viento en la superficie y condición de fricción en el fondo (que fue derivada en el Capítulo anterior, ver también [6]). Este tipo de condición de contorno en el fondo nos permitirá obtener unicidad de solución débil para el modelo 2-dimensional, gracias a la obtención de una regularidad adicional global en tiempo para las soluciones débiles.

Como ya vimos en la Introducción a la Parte II, cuando se impone condición de adherencia en el fondo, existen resultados de existencia de solución débil, obtenidos en [34] por un argumento de tipo Galerkin para el caso de dominios con talud, y en [2] para el caso sin talud. En el Capítulo 3 hemos visto un resultado de unicidad “débil/fuerte” para condición de adherencia en el fondo, en el mismo sentido que el ya existente para el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes, ver [43] o también [45].

La unicidad de solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes en dimensión 2 es bien conocida, desde el trabajo de Lions y Prodi [32]. Por el contrario, la cuestión de la unicidad de soluciones débiles para las Ecuaciones Primitivas es un problema abierto, incluso en dominios 2-dimensionales (ver [29] para el caso de un sistema acoplado). Para una recopilación de las cuestiones relacionadas con la igualdad de energía y unicidad para las ecuaciones de Navier-Stokes, una buena referencia puede ser [20] y las referencias que allí aparecen.

Como hemos dicho, aquí consideramos la condición de contorno de fricción sobre el fondo, establecida en el Capítulo anterior, que en el caso 2D corresponde a una condición de tipo vorticidad conocida sobre el fondo. En este sentido, daremos el primer resultado, al menos que nosotros conozcamos, de unicidad de solución débil para las Ecuaciones Primitivas (en dominios 2D).

El esquema de este capítulo es el siguiente:

En la Sección 5.2, describimos el modelo, explicitando las condiciones de contorno.

En la Sección 5.3, daremos las definiciones de los espacios funcionales, las hipótesis y recordaremos las desigualdades anisótropas que usaremos frecuentemente.

En la Sección 5.4, daremos la formulación débil del modelo y los resultados principales.

En la Sección 5.5, haremos el esbozo de la demostración del resultado principal, a seguir a lo largo de las secciones siguientes.

En la Sección 5.6, nos dedicamos al estudio de la regularidad de la presión.

En la Sección 5.7, damos la existencia de una solución débil-vorticidad que implicará la unicidad de solución débil para el modelo.

Los puntos clave de nuestro estudio son: la anisotropía del sistema (diferente regularidad en las direcciones x y z), que nos hace considerar las estimaciones anisótropas del Capítulo 3, la dimensión 2 y las condiciones de contorno en el fondo. El hecho de que la integral en altura de la velocidad horizontal sea nula (consecuencia de la aproximación hidrostática) es fundamental para obtener primero un resultado de regularidad para la presión que se aplica para deducir la regularidad débil global en tiempo para $\partial_z v$. Esta regularidad adicional implicará la unicidad de solución débil global en tiempo del sistema de Ecuaciones Primitivas.

5.2 Descripción del modelo

Consideramos el dominio 2D definido por:

$$\Omega = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 / x \in S, -h(x) < z < 0\}, \quad (5.1)$$

donde S (superficie) es un intervalo abierto y $h : \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función continua no negativa definida sobre \bar{S} que se anula sobre ∂S . La frontera del dominio es $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_b \cup \Gamma_s$ donde el fondo Γ_b está definido por:

$$\Gamma_b = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x \in S, z = -h(x)\},$$

y la superficie Γ_s viene dada por:

$$\Gamma_s = \{(x, 0) : x \in S\}.$$

Notemos que, en principio, hemos supuesto el dominio con profundidad nula sobre ∂S (es decir, un dominio que no posee talud). Sin embargo, todos los razonamientos que siguen son ciertos también en el caso de considerar un dominio con paredes laterales.

Consideramos un fluido gobernado por las siguientes Ecuaciones Primitivas, con condición de tracción del viento sobre la superficie y condición de Navier en el fondo. Más precisamente, suponemos que la velocidad del fluido (v, w) y la presión p satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$(EP) \left\{ \begin{array}{ll} \partial_t v + v \partial_x v + w \partial_z v - \nu_h \partial_x^2 v - \nu_v \partial_z^2 v + \partial_x p = f & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_z p = 0, \quad w(t, x, z) = \int_z^0 \partial_x v(t, x, \xi) d\xi, \quad \langle v \rangle = 0 & \text{en } (0, T) \times S, \\ \nu_v \partial_z v = \alpha |v_{air}| (v_{air} - v) & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_s, \\ \nu_v \partial_z v = \beta(x) v & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_b, \\ v|_{t=0} = v_0 & \text{en } \Omega \end{array} \right.$$

donde

$$\langle v \rangle(t; x) = \int_{-h(x)}^0 v(t; x, z) dz.$$

Nota 5.2.1 Denotamos por $f : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una fuerza externa, $v_{air} : (0, T) \times S \rightarrow \mathbb{R}$ la velocidad horizontal del aire sobre la superficie y $v_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la velocidad horizontal inicial. Finalmente, $\alpha \in \mathbb{R}$ es una constante positiva y $\beta = \beta(x)$ una función positiva definida en S (que depende de la rugosidad del fondo). Lógicamente, hemos considerado una viscosidad anisótropa (ν_h, ν_v) .

La condición $\langle v \rangle = 0$ sobre S proviene de la condición de divergencia nula $\partial_x v + \partial_z w = 0$ en Ω , las condiciones de contorno $(v, w) \cdot n = 0$ sobre $\partial\Omega$ y la hipótesis de ausencia del flujo $\langle v \rangle = 0$ sobre ∂S . En efecto, la condición de divergencia nula junto con $w = 0$ sobre Γ_s nos da la identidad $w(t; x, z) = \int_z^0 \partial_x v(t; x, \xi) d\xi$. Esto, junto con la condición $(v, w) \cdot n = 0$ sobre Γ_b nos lleva a que $\partial_x \langle v \rangle = 0$ sobre S . Luego, el carácter 2-dimensional del flujo, nos permite obtener $\langle v \rangle = 0$ en S .

5.3 Espacios funcionales y desigualdades anisótropas

Definimos primeros los espacios funcionales asociados al modelo. Sea:

$$\mathcal{V} = \left\{ \varphi \in C_s^\infty(\bar{\Omega}) : \langle \varphi \rangle = 0 \text{ en } S \right\},$$

donde $C_s^\infty(\bar{\Omega})$ es el espacio de funciones regulares sobre $\bar{\Omega}$ que se anulan en un entorno de ∂S . Consideramos H y V las clausuras de \mathcal{V} para las normas de $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$, respectivamente. En lo que sigue, supondremos las hipótesis sobre los datos:

$$h \in H^2(S) \text{ tal que } |h'| > 0 \text{ sobre } \partial S \quad \text{y} \quad |h'|/h \leq c/\text{dist}(x, \partial S), \quad (5.2)$$

$$\beta \in H_0^1(S), \quad v_{air} \in L^8(0, T; H_0^1(S)), \quad \partial_t v_{air} \in L^2(0, T; L^1(S)), \quad (5.3)$$

$$f \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad \text{con} \quad \partial_z f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad (5.4)$$

$$v_0 \in H, \quad \partial_z v_0 \in L^2(\Omega). \quad (5.5)$$

Nota 5.3.1 Las hipótesis para β y v_{air} no van a ser óptimas, pero están dadas por claridad en las demostraciones. Es posible suponer, por ejemplo, $\beta/h \in L^2(S)$ en lugar de $\beta \in H_0^1(S)$, que resulta ser una hipótesis más débil, por ejemplo, en el caso de dominios con talud.

Nota 5.3.2 Las hipótesis sobre h de $h' > 0$ sobre ∂S y $|h'|/h \leq c/\text{dis}(x, \partial S)$ para algún $c > 0$, son hipótesis sobre la geometría del dominio en las orillas. La primera nos asegura que Ω es Lipschitz-continuo, mientras que la segunda determina una acotación superior de $|h'|$ sobre ∂S .

Repetimos aquí las desigualdades anisótropas del Capítulo 3 que usaremos en las demostraciones de este capítulo.

Definición 5.1 Para $p, q \in [1, +\infty]$, diremos que una función u pertenece a $L_x^p L_z^q(\Omega)$ si:

$$u(x, \cdot) \in L^q(-h(x), 0) \quad \text{y} \quad \|u(x, \cdot)\|_{L^q(-h(x), 0)} \in L^p(S),$$

y su norma viene dada por la expresión:

$$\left\| \|u(x, \cdot)\|_{L^q(-h(x), 0)} \right\|_{L^p(S)}$$

Nota 5.3.3 Por simplicidad, denotaremos $L_x^p L_z^q$ en lugar de $L_x^p L_z^q(\Omega)$.

Lema 5.2 [26] *Para toda función $v \in H^1(\Omega)$, se verifica que $v \in L_x^\infty L_z^2 \cap L_x^2 L_z^\infty$, y las desigualdades:*

$$\|v\|_{L_x^\infty L_z^2} \leq c \|v\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)}^{1/2}$$

y

$$\|v\|_{L_x^2 L_z^\infty} \leq c \|v\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)}^{1/2}.$$

En la primera desigualdad, $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ se puede sustituir por $\|\partial_x v\|_{L^2(\Omega)}$ si $v|_{\Gamma_b} = 0$, y en la segunda $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ se puede sustituir por $\|\partial_z v\|_{L^2(\Omega)}$ si $v|_{\Gamma_b} = 0$ (o $v|_{\Gamma_s} = 0$).

Además, para toda (v, w) tal que $\partial_x v \in L^2(\Omega)$ y $w(x, z) = \int_z^0 \partial_x v(x, s) ds$, tenemos:

$$\|w\|_{L_x^2 L_z^\infty} \leq h_{\max}^{1/2} \|\partial_x v\|_{L^2(\Omega)}, \quad (5.6)$$

donde $h_{\max} = \max_S h$.

5.4 Definiciones y resultados principales

Damos aquí las definiciones de los tipos de soluciones que vamos a utilizar.

Definición 5.3 (Solución débil) *Decimos que v es una solución débil de (EP) en $(0, T)$ si:*

$$v \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V) \quad y \quad w(x, z) = \int_z^0 \partial_x v(x, s) ds$$

satisfacen la formulación variacional: $\forall \varphi \in C^1([0, T]; \mathcal{V})$ con $\varphi(T) = 0$,

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_\Omega (\partial_t \varphi + v \partial_x \varphi + w \partial_z \varphi) v d\Omega dt + \int_0^T \int_\Omega (\nu_h \partial_x v \partial_x \varphi + \nu_v \partial_z v \partial_z \varphi) d\Omega dt \\ & + \int_0^T \int_S \beta(x) \left(1 + \frac{\nu_h}{\nu_v} |h'(x)|^2\right) v|_{\Gamma_b} \varphi|_{\Gamma_b} dx dt + \int_0^T \int_S \alpha |v_{air}| (v|_{\Gamma_s} - v_{air}) \varphi|_{\Gamma_s} dx dt \quad (5.7) \\ & = \int_\Omega v_0 \varphi(0) d\Omega + \int_0^T \int_\Omega f v d\Omega dt + \nu_h \int_0^T \int_S v|_{\Gamma_b} \partial_x [\varphi|_{\Gamma_b} h'(x)] dx dt, \end{aligned}$$

y la desigualdad de energía:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu_h \int_0^t \|\partial_x v(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \nu_v \int_0^t \|\partial_z v(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & + \int_0^t \int_S \gamma(x) |v|_{\Gamma_b}|^2 dx ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_S \alpha |v_{air}| |v|_{\Gamma_s}|^2 dx ds \quad (5.8) \\ & \leq \frac{1}{2} \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_\Omega f v d\Omega ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_S \alpha |v_{air}|^3 dx ds \end{aligned}$$

$$\text{con } \gamma(x) = \left\{ \beta(x) \left(1 + \frac{\nu_h}{\nu_v} |h'(x)|^2\right) - \frac{\nu_h}{2} h''(x) \right\}. \quad \blacksquare$$

Partiendo de (5.8), una forma de asegurar que el sistema es disipativo es imponiendo la hipótesis adicional:

$$\gamma(x) = \left(1 + \frac{\nu_h}{\nu_v} |h'(x)|^2\right) \beta(x) - \frac{\nu_h}{2} h''(x) \geq 0. \quad (5.9)$$

Observemos que, dada una solución débil v , podemos obtener una presión asociada p (como multiplicador de Lagrange) usando el lema de De Rham, tal que (v, w, p) satisface el problema diferencial (EP) en el sentido de las distribuciones (ver última Sección del Capítulo anterior, [29], [34]). En particular, tenemos que se satisface la formulación variacional (mixta):

$\forall \varphi \in C^1([0, T]; C_s^\infty(\bar{\Omega}))$, tal que $\varphi(T) = 0$, y existe ψ suficientemente regular satisfaciendo $(\varphi, \psi) \cdot n_{\partial\Omega} = 0$:

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t \varphi + v \partial_x \varphi + w \partial_z \varphi) v d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\nu_h \partial_x v \partial_x \varphi + \nu_v \partial_z v \partial_z \varphi) d\Omega dt \\ & + \int_0^T \int_S \beta(x) \left(1 + \frac{\nu_h}{\nu_v} |h'(x)|^2 \right) v|_{\Gamma_b} \varphi|_{\Gamma_b} dx dt + \int_0^T \int_S \alpha |v_{air}| (v|_{\Gamma_s} - v_{air}) \varphi|_{\Gamma_s} dx dt \\ & = \int_{\Omega} v_0 \varphi(0) dx + \int_0^T \int_{\Omega} f \varphi d\Omega dt + \nu_h \int_0^T \int_S v|_{\Gamma_s} \partial_x (\varphi|_{\Gamma_b} h') dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} p \nabla \cdot (\varphi, \psi) d\Omega dt. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Definición 5.4 (Solución débil-vorticidad) Diremos que v es una solución débil-vorticidad de (EP) en $(0, T)$ si es una solución débil, que satisface además la regularidad adicional:

$$\partial_z v \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Esta regularidad adicional implica que v verifica las condiciones de contorno en el fondo y en la superficie en el sentido de las trazas.

Nota 5.4.1 De hecho $\partial_z v$ se puede identificar con la vorticidad de las Ecuaciones Primitivas, ya que es el límite de la vorticidad del sistema de ecuaciones de Navier-Stokes 2D. En efecto, si consideramos (v_{NS}, w_{NS}) la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes 2D y (X, Z) las variables en el dominio en el que dichas ecuaciones están definidas, la expresión para la vorticidad asociada a las ecuaciones de Navier-Stokes 2D es $\partial_Z v_{NS} - \partial_X w_{NS}$. Las Ecuaciones Primitivas provienen de las ecuaciones de Navier-Stokes a través de un análisis asintótico con respecto al cociente de aspecto δ (ver Capítulo 4), suponiendo que $v_{NS}(X, Z) \approx v(x, z)$, $w_{NS}(X, Z) \approx \delta w(x, z)$, $X \approx x$, $Z \approx \delta z$. Asintóticamente, se puede demostrar, siguiendo el mismo tipo de razonamiento que en el Capítulo 4, que:

$$\partial_Z v_{NS} - \partial_X w_{NS} \longrightarrow \partial_z v \quad \text{cuando } \delta \rightarrow 0.$$

Esta es la razón por la que llamamos solución débil-vorticidad a este tipo de soluciones.

Recordamos ahora un resultado de existencia de solución débil establecido en el Capítulo 4 (ver también [6]).

Teorema 5.5 Suponiendo $h \in H^2(S)$ con $|h'| > 0$ sobre ∂S , $\beta \in L^\infty(S)$, $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $v_{air} \in L^3(0, T; L^3(S))$, $v_0 \in H$ y (5.9), existe una solución débil $v \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ para el sistema de Ecuaciones Primitivas (EP). ■

La demostración de dicho teorema sigue un argumento asintótico a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes anisótropas, con condición de contorno de tipo Navier anisótropa sobre el fondo.

La finalidad de este capítulo es probar el siguiente resultado:

Teorema 5.6 *Supongamos que se satisfacen las hipótesis (5.2)–(5.5) y (5.9). Entonces toda solución débil del sistema de Ecuaciones Primitivas (EP) es una solución débil-vorticidad.*

Una consecuencia de dicho Teorema es el siguiente resultado de unicidad para soluciones débiles:

Corolario 5.7 *Supongamos que se satisfacen las hipótesis (5.2)–(5.5) y (5.9). Entonces existe una única solución débil de (EP). Además, dicha solución es una solución débil-vorticidad. ■*

La demostración del Corolario 5.7 se hace usando la regularidad adicional para $\partial_z v$ dada por el Teorema 5.6, ya que permite controlar el término $w\partial_z v$. Sólo tenemos que multiplicar la ecuación satisfecha por $v = v_1 - v_2$ por $v = v_1 - v_2$, y hacer estimaciones para controlar los términos no lineales y aplicar el Lema de Gronwall, tal y como se hace en la Sección 3.4.

5.5 Esquema para la demostración del Teorema 5.6

Para probar el Teorema 5.6, veamos primero la ecuación satisfecha por $\partial_z v$, si v es una solución débil de (EP). Con este fin, elegimos $\varphi = \partial_z \eta$ como función test en la formulación variacional (5.7) de la Definición 5.3, para $\eta \in C^1([0, T]; C^\infty(\Omega))$ con $\eta = 0$ en un entorno de ∂Q_T , donde $Q_T = (0, T) \times \Omega$. Entonces, $\varphi \in C^1([0, T]; \mathcal{V})$, luego de la formulación variacional (5.7) deducimos:

$$\int_0^T \int_\Omega \left\{ -\partial_t \eta \partial_z v - v \partial_x \eta \partial_z v - w \partial_z \eta \partial_z v - \nu_h \partial_z v \partial_x^2 \eta + \nu_v \partial_z v \partial_z^2 \eta \right\} = \int_0^T \langle \partial_z f, \eta \rangle_\Omega dt$$

Esto implica que $\partial_z v$ satisface en $\mathcal{D}'((0, T) \times \Omega)$:

$$\partial_t(\partial_z v) + v \partial_x(\partial_z v) + w \partial_z(\partial_z v) - \nu_h \partial_x^2(\partial_z v) - \nu_v \partial_z^2(\partial_z v) = \partial_z f.$$

Por tanto, $\partial_z v$ satisface una ecuación parabólica lineal de tipo convección-difusión, de manera que esperamos obtener la regularidad global:

$$\partial_z v \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Como $\partial_z v$ satisface las condiciones de contorno Dirichlet no homogéneas, ver (EP), $\nu_v \partial_z v|_{\Gamma_s} = \alpha |v_{air}|(v_{air} - v)$ y $\nu_v \partial_z v|_{\Gamma_b} = \beta v$, tenemos que considerar una incógnita auxiliar que satisfaga una ecuación del mismo tipo pero con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas, para poder obtener estimaciones de energía. Para ello, hay que hacer un levantamiento de las condiciones de contorno. Consideramos la función auxiliar

$$\psi = \nu_v \partial_z v - \phi v - e$$

con v una solución débil de (EP),

$$\phi(t; x, z) = -\alpha \left(1 + \frac{z}{h(x)} \right) |v_{air}(t; x)| - \frac{z}{h(x)} \beta(x) \quad (5.11)$$

y

$$e(t; x, z) = \alpha |v_{air}(t; x)| v_{air}(t; x) \left(1 + \frac{z}{h(x)} \right). \quad (5.12)$$

Observando que $(\phi v)|_{\Gamma_s} = -\alpha|v_{air}|v$, $(\phi v)|_{\Gamma_b} \equiv \beta v$, $e|_{\Gamma_s} = \alpha|v_{air}|v_{air}$ y $e|_{\Gamma_b} = 0$, tenemos que $(\phi v + e)|_{\Gamma_s} = \alpha|v_{air}|(v_{air} - v)$ y $(\phi v + e)|_{\Gamma_b} = \beta v$. Entonces, ψ es solución del siguiente problema:

$$(P) \begin{cases} \partial_t \psi + v \partial_x \psi + w \partial_z \psi - \nu_h \partial_{xx}^2 \psi - \nu_v \partial_{zz}^2 \psi = G & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \psi = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ \psi|_{t=0} = \nu_v \partial_z v_0 - \phi|_{t=0} v_0 - e|_{t=0} & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde

$$G = -(\partial_t \phi)v + 2\nu_h(\partial_x \phi)(\partial_x v) + \nu_h(\partial_{xx}^2 \phi)v + 2\nu_v(\partial_z \phi)(\partial_z v) - v(\partial_x \phi)v - w(\partial_z \phi)v \\ - \partial_t e + \nu_h \partial_{xx}^2 e - v \partial_x e - w \partial_z e + \phi \partial_x p + \nu_v \partial_z f - \phi f.$$

En consecuencia, la demostración del Teorema 5.6 se dividirá en dos partes:

En la primera parte, probaremos que existe una solución débil ψ de (P).

En la segunda parte, probaremos que si definimos \tilde{v} tal que $\partial_z \tilde{v} = \psi + \phi v + e$ y $\langle \tilde{v} \rangle = 0$, entonces $\tilde{v} = v$. Esto probará que toda solución débil es una solución débil-vorticidad.

Necesitaremos estimaciones de regularidad sobre la presión p , ya que aparece el término $\phi \partial_x p$ en el segundo miembro G de la ecuación de (P). Este es el objeto de la siguiente Sección.

5.6 Regularidad de la presión

Antes que nada, observemos que podemos identificar la presión p a una función p_s definida sólo en S , ya que $\partial_z p = 0$.

En efecto, como p es independiente de z , llamando $p_s(x) = p(x, z)$, se tiene:

$$\int_{\Omega} p(x, z) \varphi(x, z) dx dz = \int_S p_s(x) \langle \varphi \rangle dx \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega).$$

Probamos el siguiente resultado:

Teorema 5.8 *Supongamos las hipótesis (5.2)–(5.5). Si (v, p) es una solución débil de (EP) (en particular, satisface (5.10)), obtenemos que:*

$$\sqrt{h} \partial_x p_s \in L^2(0, T; H^{-1}(S)).$$

Nota 5.6.1 *La regularidad anterior para p_s significa que la aplicación:*

$$\varphi \in L^2(0, T; H_0^1(S)) \longrightarrow \int_0^T \int_S p_s \partial_x(\sqrt{h} \varphi) dx dt \in \mathbb{R} \text{ es lineal y continua.}$$

Enunciamos ahora una serie de Lemas que usaremos en la demostración del Teorema 5.8.

Lema 5.9 *Sea $\varphi \in C_s^\infty(\bar{\Omega})$ tal que existe ψ una función suficientemente regular, verificando que $(\varphi, \psi) \cdot n_{\partial\Omega} = 0$. Entonces,*

$$\int_{\Omega} p \nabla \cdot (\varphi, \psi) d\Omega = \int_S p_s \partial_x \langle \varphi \rangle dx.$$

Demostración del Lema: Usando que $(\varphi, \psi) \cdot n_{\partial\Omega} = 0$ y la definición de p_s en función de p , se tiene:

$$\begin{aligned} \int_S p_s \langle \nabla \cdot (\varphi, \psi) \rangle dx &= \int_S p_s [(\partial_x \varphi) - \psi|_{\Gamma_b}] dx \\ &= \int_S p_s [\partial_x \langle \varphi \rangle - \varphi|_{\Gamma_b} h' - \psi|_{\Gamma_b}] dx = \int_S p_s \partial_x \langle \varphi \rangle dx. \end{aligned}$$

■

Nota 5.6.2 En particular, si $\varphi(x, z) = \phi(x)$, para $\phi \in C_0^\infty(S)$, entonces $\langle \varphi \rangle = h\phi$ y la igualdad del Lema anterior nos queda:

$$\int_\Omega p \nabla \cdot (\varphi, \psi) dx dz = \int_S p_s \partial_x (h\phi) dx.$$

Lema 5.10 Sea $\varphi \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Entonces $\frac{1}{\sqrt{h}} \langle \varphi \rangle \in L^2(0, T; L^2(S))$.

Demostración del Lema: Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos:

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{h}} \langle \varphi \rangle \right\|_{L^2(S)}^2 = \int_S \frac{1}{h} |\langle \varphi \rangle|^2 dx \leq \int_S \int_{-h(x)}^0 |\varphi|^2 dz dx = \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Integrando en tiempo, llegamos a que:

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{h}} \langle \varphi \rangle \right\|_{L^2(0, T; L^2(S))}^2 \leq \int_0^T \|\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = \|\varphi\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2.$$

■

Lema 5.11 (Desigualdad de Hardy) [31] Si $\phi \in H_0^1(S)$, entonces $\phi/\delta \in L^2(S)$, pero $\delta = \text{dist}(x, \partial S)$. Además, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left\| \frac{\phi}{\delta} \right\|_{L^2(S)} \leq C \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Lema 5.12 Supongamos la hipótesis (5.2). Sea $\phi \in H_0^1(S)$. Entonces

$$\frac{\phi h'}{h} \quad \text{y} \quad \frac{\phi}{h} \in L^2(S).$$

Además, $\left\| \frac{\phi h'}{h} \right\|_{L^2(S)} \quad \text{y} \quad \left\| \frac{\phi}{h} \right\|_{L^2(S)} \leq C \|\varphi\|_{H_0^1(S)}$.

Demostración del Lema: Si denotamos $\delta = \text{dist}(x, \partial S)$, entonces se verifica:

$$\left\| \frac{\phi h'}{h} \right\|_{L^2(S)}^2 = \int_S \left| \frac{h' \delta}{h} \right|^2 \left| \frac{\phi}{\delta} \right|^2 dx \leq \left\| \frac{h' \delta}{h} \right\|_{L^\infty(S)}^2 \left\| \frac{\phi}{\delta} \right\|_{L^2(S)}^2.$$

Usando el Lema 5.11 y la hipótesis (5.2), concluimos que dicha integral es finita.

Si no aparece h' , usaremos la hipótesis (5.2) sobre que $h' > 0$ sobre ∂S . Esto implica que $h' > c$ en un entorno Θ de S que contiene a ∂S . En ese caso,

$$\frac{|\phi|}{h} \leq \begin{cases} \frac{|\phi|h'}{ch} & \text{si } x \in \Theta, \\ \frac{|\phi|}{\min_{S \setminus \Theta} h} & \text{si } x \notin \Theta, \end{cases}$$

pues $h \geq \min_{S \setminus \Theta} h > 0$ fuera de Θ . De aquí, como $\frac{\phi h'}{h}$ y $\phi \in L^2(S)$, se concluye fácilmente que $\phi/h \in L^2(S)$. ■

Lema 5.13 *Supongamos la hipótesis (5.2). Sea $\phi \in H_0^1(S)$, entonces*

$$\varphi(x, z) = \frac{\phi(x)}{\sqrt{h(x)}} \in H^1(\Omega).$$

Además,

$$\left\| \frac{\phi}{\sqrt{h}} \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\phi\|_{H_0^1(S)}.$$

Demostración del Lema: Respecto a la norma L^2 , obtenemos:

$$\left\| \frac{\phi}{\delta} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_S \int_{-h(x)}^0 \frac{1}{h} |\varphi|^2 dz dx = \|\varphi\|_{L^2(S)}^2.$$

Por otra parte, como

$$\partial_x \varphi = \partial_x \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \phi \right) = \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_x \phi - \frac{h'}{2h^{3/2}} \phi,$$

entonces:

$$\begin{aligned} \|\partial_x \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq 2 \left\{ \int_{\Omega} \frac{1}{h} |\partial_x \phi|^2 d\Omega + \int_{\Omega} \left| \frac{h'}{2h^{3/2}} \right|^2 |\phi|^2 d\Omega \right\} \\ &\leq 2 \left\{ \|\partial_x \phi\|_{L^2(S)}^2 + \left\| \frac{\delta h'}{h} \right\|_{L^\infty(S)}^2 \left\| \frac{\phi}{\delta} \right\|_{L^2(S)}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Por el Lema 5.11, $\phi \in H_0^1(S)$ implica que $\phi/\delta \in L^2(S)$ (donde $\delta = \text{dist}(x, \partial S)$), lo que, junto con la hipótesis (5.2), concluye la demostración. ■

Demostración del Teorema 5.8: Consideramos la formulación variacional (5.10) (con la presión, que es lo que hemos llamado “formulación variacional mixta”) para el problema (EP). Elegimos como función test $\varphi = \phi/\sqrt{h}$ con $\phi \in C_0^1([0, T]; C_0^\infty(S))$. Usando que $\langle v \rangle = 0$ (para

anular el término de derivada en tiempo y el Lema 5.9 (ver también Nota 5.6.2), obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_S p_s(t; x) \partial_x (\sqrt{h}\phi) (t; x) dx dt = & \\
& - \int_0^T \int_S \partial_x \left(\frac{\phi}{\sqrt{h}} \right) \langle v^2 \rangle dx dt + \nu_h \int_0^T \int_S \langle \partial_x v \rangle \partial_x \left(\frac{\phi}{\sqrt{h}} \right) dx dt \\
& + \int_0^T \int_S \beta(x) \left(1 + \frac{\nu_h}{\nu_v} |h'(x)|^2 \right) v|_{\Gamma_b} \frac{\phi}{\sqrt{h}} dx dt \\
& + \int_0^T \int_S \alpha |v_{air}| (v|_{\Gamma_s} - v_{air}) \frac{\phi}{\sqrt{h}} dx dt \\
& - \nu_h \int_0^T \int_S v|_{\Gamma_b} \partial_x \left[\phi(t; x) \frac{h'(x)}{\sqrt{h}} \right] dx dt - \int_0^T \int_S \langle f \rangle \frac{\phi}{\sqrt{h}} dx dt.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Para concluir la tesis del Teorema, según la Nota 5.6.1 necesitamos verificar que todos los términos a la derecha de la expresión anterior definen formas lineales continuas con respecto a $\phi \in L^2(0, T; H_0^1(S))$. Para ello, usaremos las hipótesis de regularidad (5.3) sobre β y v_{air} , las hipótesis (5.2) sobre h y el hecho de que v posee regularidad débil.

Para el primero, tenemos que $v^2 \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ luego, usando el Lema 5.10, deducimos que

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \langle v^2 \rangle \in L^2(0, T; L^2(S)).$$

Reescribimos el primer término como:

$$- \int_0^T \int_S \partial_x \left(\frac{\phi}{\sqrt{h}} \right) \langle v^2 \rangle dx dt = - \int_0^T \int_S \partial_x \phi \frac{1}{\sqrt{h}} \langle v^2 \rangle dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_S \frac{h'}{h} \phi \frac{1}{\sqrt{h}} \langle v^2 \rangle dx dt.$$

Entonces, el primer término de la derecha en la expresión anterior tiene sentido. Para el segundo término, basta usar el Lema 5.12.

El segundo término de (5.13), funciona igual que el primer término, cambiando v^2 por $\partial_x v$.

Utilizando la hipótesis (5.3) y el Lema 5.12, se puede dar sentido al tercer y cuarto término de (5.13) de la forma:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_S \beta(x) \left(1 + \frac{\nu_h}{\nu_v} |h'(x)|^2 \right) v(x, -h(x)) \frac{\phi(x)}{\sqrt{h(x)}} dx dt \\
& \leq \left\| \frac{\beta}{h} \right\|_{L^2(S)} \left(1 + \frac{\nu_h}{\nu_v} \|h'\|_{L^\infty(S)}^2 \right) \sqrt{h_{max}} \int_0^T \|\phi\|_{L^\infty(S)} \|v|_{\Gamma_b}\|_{L^2(S)} dt \\
& \leq C(\Omega) \|\beta\|_{H_0^1(S)} \left(1 + \frac{\nu_h}{\nu_v} \|h'\|_{L^\infty(S)}^2 \right) \int_0^T \|\phi\|_{H_0^1(S)} \|v\|_{H^1(\Omega)} dt, \\
& \int_0^T \int_S \alpha |v_{air}| (v|_{\Gamma_s} - v_{air}) \frac{\phi}{\sqrt{h}} dx dt \\
& \leq C \sqrt{h_{max}} \int_0^T \left\| \frac{v_{air}}{h} \right\|_{L^2(S)} \|\phi\|_{L^\infty(S)} \left(\|v|_{\Gamma_s}\|_{L^2(S)} + \|v_{air}\|_{L^2(S)} \right) dt \\
& \leq C \int_0^T \|v_{air}\|_{H_0^1(S)} \|\phi\|_{H_0^1(S)} \left(\|v\|_{H^1(\Omega)} + \|v_{air}\|_{L^2(S)} \right) dt.
\end{aligned}$$

Para el penúltimo término, la regularidad débil de v , nos da, en particular, $v|_{\Gamma_b} \in L^2(0, T; H^{1/2}(S))$ (ver también Proposición 4.7). Así pues, basta probar $\phi h' / \sqrt{h} \in L^2(0, T; H^{1/2}(S))$. Usando que $\phi h' \in H_0^1(S)$, se tiene, gracias al Lema 5.13, que $\phi h' / \sqrt{h} \in H^1(\Omega)$ y

$$\left\| \frac{\phi h'}{\sqrt{h}} \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\phi\|_{H^1(S)}.$$

Finalmente, $\phi h' / \sqrt{h} \in H^{1/2}(S)$ y:

$$\left\| \frac{\phi h'}{\sqrt{h}} \right\|_{H^{1/2}(S)} \leq C \left\| \frac{\phi h'}{\sqrt{h}} \right\|_{H^1(\Omega)},$$

razonando como en la Proposición 4.7. Entonces, $\phi h' / \sqrt{h} \in L^2(0, T; H^{1/2}(S))$.

La regularidad del último término es fácil, ya que $\frac{1}{\sqrt{h}} \langle f \rangle \in L^2(0, T; L^2(S))$ usando el Lema 5.10. ■

Nota 5.6.3 En dimensión 3, tendríamos que estimar el término adicional con derivada en tiempo:

$$- \int_0^T \int_S \langle \partial_t \vec{v} \rangle \frac{\vec{\phi}}{\sqrt{h}} d\vec{x} dt.$$

Debido a la falta de regularidad de dicha derivada temporal respecto de t (ya que sólo conocemos la regularidad débil de \vec{v}), no parece posible obtener, en el caso 3D, resultados análogos de regularidad de $\sqrt{h} \nabla_{HP_s}$ de tipo L^2 en tiempo. Esta regularidad será fundamental en lo que sigue.

5.7 Existencia de solución débil-vorticidad

En esta Sección, probamos la existencia de solución débil de (P) y probamos la identificación entre \tilde{v} y v .

5.7.1 Existencia de solución débil de (P)

Este resultado se demuestra por un razonamiento clásico de tipo Galerkin. Sólo tenemos que probar que es posible controlar todos los términos del segundo miembro G de (P), para obtener (formalmente) estimaciones a priori (de energía). En el razonamiento necesitaremos la regularidad de la presión que hemos demostrado en la Sección precedente.

Tomamos ψ como función test en (P), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\psi(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu_h \|\partial_x \psi(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu_v \|\partial_z \psi(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \langle G, \psi \rangle \\ &= - \int_{\Omega} \partial_t \phi v \psi d\Omega + 2\nu_h \int_{\Omega} (\partial_x \phi)(\partial_x v) \psi d\Omega + \nu_h \int_{\Omega} (\partial_{xx}^2 \phi) v \psi d\Omega \\ &\quad + 2\nu_v \int_{\Omega} (\partial_z \phi)(\partial_z v) \psi d\Omega - \int_{\Omega} (\partial_x \phi) v^2 \psi d\Omega - \int_{\Omega} w(\partial_z \phi) v \psi d\Omega - \int_{\Omega} \partial_t e \psi d\Omega \\ &\quad - \nu_h \int_{\Omega} (\partial_x e)(\partial_x \psi) d\Omega - \int_{\Omega} v(\partial_x e) \psi d\Omega - \int_{\Omega} w(\partial_z e) \psi d\Omega - \\ &\quad + \langle \nu_v \partial_z f, \psi \rangle - \int_{\Omega} \phi f \psi d\Omega - \int_S p_s \partial_x \langle \phi \psi \rangle dx = \sum_{i=1}^{13} I_i \end{aligned} \quad (5.14)$$

Acotamos los términos de la derecha por

$$a(t)\|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + b(t) + \frac{\nu_h}{2}\|\partial_x\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu_v}{2}\|\partial_z\psi\|_{L^2(\Omega)}^2$$

con $a, b \in L^1(0, T)$. Para ello, usaremos las estimaciones anisótropas del Lema 5.2 y el lema 5.12.

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \left| \int_{\Omega} \partial_t \phi v \psi \right| \leq C \int_S |\partial_t v_{air}| \left(\int_{-h(x)}^0 \left(1 + \frac{z}{h}\right) v \psi dz \right) dx \\ &\leq C \int_S |\partial_t v_{air}| \|v\|_{L_z^2} \|\psi\|_{L_x^2} dx \leq C \|\partial_t v_{air}\|_{L^1(S)} \|v\|_{L_x^\infty L_z^2} \|\psi\|_{L_x^\infty L_z^2} \\ &\leq C \|\partial_t v_{air}\|_{L^1(S)} \|v\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \\ &\leq \frac{\nu_h}{18} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\nu_h) \left(\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_t v_{air}\|_{L^1(S)}^2 \|v\|_{L^2(\Omega)} \right) \end{aligned}$$

A continuación enunciamos un Lema que usaremos en la acotación de $I_2 + I_3, I_4, I_5$ e I_6 .

Lema 5.14 *Se tienen las siguientes estimaciones para ϕ dada en (5.11):*

$$\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \|\partial_x \phi\|_{L_x^2 L_z^\infty} \quad y \quad \|\partial_z \phi\|_{L_x^2 L_z^\infty} \leq C \|\alpha |v_{air}| + \beta\|_{H_0^1(S)}$$

$$\|\phi\|_{L_x^2 L_z^\infty} \leq C \|\alpha |v_{air}| + \beta\|_{L^2(S)}$$

Demostración: Sea $\phi(t; x, z) = -\alpha \left(1 + \frac{z}{h(x)}\right) |v_{air}|(t; x) - \frac{z}{h(x)} \beta(x)$. Como $\|\phi\|_{L_z^\infty} \leq |\alpha |v_{air}| + \beta|$, tenemos:

$$\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\alpha |v_{air}| + \beta\|_{L^\infty(S)} \leq C \|\alpha |v_{air}| + \beta\|_{H_0^1(S)},$$

y

$$\|\phi\|_{L_x^2 L_z^\infty} \leq C \|\alpha |v_{air}| + \beta\|_{L^2(S)}.$$

Por otra parte,

$$\partial_x \phi(t; x, z) = -\alpha \left(1 + \frac{z}{h(x)}\right) \partial_x |v_{air}| - \frac{z}{h(x)} \beta'(x) + \frac{zh'(x)}{h(x)^2} (\alpha |v_{air}| + \beta(x)),$$

y

$$\partial_z \phi(t; x, z) = \frac{-1}{h(x)} (\alpha |v_{air}| + \beta(x)).$$

Por tanto, aplicando el Lema 5.12 a la función $\alpha |v_{air}| + \beta$ y como

$$\|\partial_x \phi\|_{L_z^\infty} \leq |\partial_x |v_{air}| + \beta'| + |(\alpha |v_{air}| + \beta) h'/h|,$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \|\partial_x \phi\|_{L_x^2 L_z^\infty} &\leq \|\alpha \partial_x |v_{air}| + \beta'\|_{L^2(S)} + \|(\alpha |v_{air}| + \beta) h'/h\|_{L^2(S)} \\ &\leq C \|\alpha |v_{air}| + \beta\|_{H_0^1(S)} \end{aligned}$$

y

$$\|\partial_z \phi\|_{L_x^2 L_z^\infty} \leq \|(\alpha|v_{air}| + \beta)/h\|_{L^2(S)} \leq C\|\alpha|v_{air}| + \beta\|_{H_0^1(S)}.$$

Aplicamos entonces el Lema anterior en las siguientes estimaciones:

$$\begin{aligned} I_2 + I_3 &= \nu_h \int_{\Omega} \partial_x \phi (\partial_x v \psi - v \partial_x \psi) d\Omega \\ &\leq \nu_h \|\partial_x \phi\|_{L_x^2 L_z^\infty} \left(\|\partial_x v\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{L_x^\infty L_z^2} + \|v\|_{L_x^\infty L_z^2} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq \nu_h C \|\alpha|v_{air}| + \beta\|_{H_0^1(S)} \left(\|\partial_x v\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \|v\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq \frac{\nu_h}{18} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\nu_h \left\{ \|\partial_x v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\alpha|v_{air}| + \beta\|_{H_0^1(S)}^4 \left(1 + \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &\leq 2\nu_v \int_{\Omega} |\partial_z \phi| |\partial_z v| |\psi| d\Omega \leq C\nu_v \|\partial_z \phi\|_{L_x^2 L_z^\infty} \|\partial_z v\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{L_x^\infty L_z^2} \\ &\leq C\nu_v \|\alpha|v_{air}| + \beta\|_{H_0^1(S)} \|\partial_z v\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \\ &\leq \frac{\nu_h}{18} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\nu_v^2 \|\partial_z v\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\nu_h) \|\alpha|v_{air}| + \beta\|_{H_0^1(S)}^4 \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_5 &\leq \int_{\Omega} |v|^2 |\partial_x \phi| |\psi| d\Omega \leq \|v\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\partial_x \phi\|_{L_x^2 L_z^\infty} \|\psi\|_{L_x^\infty L_z^2} \\ &\leq C \|v\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \|\alpha|v_{air}| + \beta\|_{H_0^1(S)} \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \\ &\leq \frac{\nu_h}{18} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\nu_h) \left\{ \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\alpha|v_{air}| + \beta\|_{H_0^1(S)}^4 \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \end{aligned}$$

Para la acotación del término I_6 , hacemos estimaciones del mismo tipo de antes, pero, además, usamos la estimación (5.6).

$$\begin{aligned} I_6 &\leq \int_{\Omega} |w| |\partial_z \phi| |v| |\psi| d\Omega \leq \|w\|_{L_x^2 L_z^\infty} \|\partial_z \phi\|_{L_x^2 L_z^\infty} \|v\|_{L_x^\infty L_z^2} \|\psi\|_{L_x^\infty L_z^2} \\ &\leq Ch_{\max}^{1/2} \|\partial_x v\|_{L^2(\Omega)} \|\alpha|v_{air}| + \beta\|_{H_0^1(S)} \|v\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \\ &\leq \frac{\nu_h}{18} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\nu_h) \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \|\alpha|v_{air}| + \beta\|_{H_0^1(S)}^4 \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_x v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_7 &\leq \int_{\Omega} |\partial_t e| |\psi| d\Omega \leq 2 \int_S \alpha|v_{air}| |\partial_t v_{air}| \left(\int_{-h(x)}^0 \left(1 + \frac{z}{h} \right) \psi dz \right) dx \\ &\leq 2 \int_S \alpha|v_{air}| |\partial_t v_{air}| \sqrt{h} |\psi|_{L^2} dx \leq C \|v_{air}\|_{L^\infty(S)} \|\partial_t v_{air}\|_{L^1(S)} \|\psi\|_{L_x^\infty L_z^2} \\ &\leq C \|v_{air}\|_{L^\infty(S)} \|\partial_t v_{air}\|_{L^1(S)} \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \\ &\leq \frac{\nu_h}{18} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\nu_h) \left(\|v_{air}\|_{H_0^1(S)}^4 \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_t v_{air}\|_{L^1(S)}^2 \right) \end{aligned}$$

Para controlar los términos I_8 , I_9 y I_{10} , usaremos el siguiente Lema:

Lema 5.15 *Se tienen las siguientes estimaciones para la función e dada en (5.12):*

$$\|\partial_x e\|_{L_x^2 L_z^\infty} \leq C \|v_{air}\|_{H_0^1(S)}^2, \quad (5.15)$$

$$\|\partial_z e\|_{L_x^\infty L_z^1} \leq C \|v_{air}\|_{L^\infty(S)}^2 \leq C \|v_{air}\|_{H_0^1(S)}^2. \quad (5.16)$$

Demostración: Sea $e(t; x, z) = \alpha |v_{air}(t; x)| v_{air}(t; x) \left(1 + \frac{z}{h(x)}\right)$. Entonces,

$$|\partial_x e| \leq 2\alpha |v_{air}| |\partial_x v_{air}| \left(1 + \frac{z}{h(x)}\right) - \frac{zh'(x)}{h(x)^2} \alpha |v_{air}|^2,$$

luego:

$$\begin{aligned} \|\partial_x e\|_{L_x^2 L_z^\infty} &\leq 2\|\alpha |v_{air}| |\partial_x v_{air}|\|_{L^2(S)} + \|\alpha |v_{air}|^2 h'/h\|_{L^2(S)} \\ &\leq C \|v_{air}\|_{L^\infty(S)} \|\partial_x v_{air}\|_{L^2(S)} + \|v_{air}\|_{H_0^1(S)} \|v_{air}\|_{L^\infty(S)} \leq C \|v_{air}\|_{H_0^1(S)}^2, \end{aligned}$$

donde hemos usado el Lema 5.12 para la función v_{air} . Por otra parte, como $\partial_z e = \frac{\alpha}{h(x)} |v_{air}| v_{air}$, entonces:

$$\|\partial_z e\|_{L_x^\infty L_z^1} \leq C \|v_{air}\|_{L^\infty(S)}^2 \left(\int_{-h(x)}^0 \frac{dz}{h(x)} \right) = C \|v_{air}\|_{L^\infty(S)}^2 \leq C \|v_{air}\|_{H_0^1(S)}^2.$$

■

Aplicamos el Lema anterior en las dos siguientes estimaciones:

$$\begin{aligned} I_8 + I_9 &\leq \int_{\Omega} |\partial_x e| (\nu_h |\partial_x \psi| + |v| |\psi|) d\Omega \\ &\leq \int_S \|\partial_x e\|_{L^\infty} (\nu_h \sqrt{h} \|\partial_x \psi\|_{L_z^2} + \|v\|_{L_z^2} \|\psi\|_{L_z^2}) dx \\ &\leq \|\partial_x e\|_{L_x^2 L_z^\infty} (\nu_h h^{1/2} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{L_x^\infty L_z^2}) \\ &\leq \|v_{air}\|_{H_0^1(S)}^2 (\nu_h h^{1/2} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}) \\ &\leq \frac{\nu_h}{18} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\nu_h) \|v\|_{L^2(\Omega)}^4 \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\nu_h \|v_{air}\|_{H_0^1(S)}^4 \end{aligned}$$

Para acotar I_{10} , además, usamos de nuevo la estimación (5.6):

$$\begin{aligned} I_{10} &\leq \int_{\Omega} |w| |\partial_z e| |\psi| d\Omega \leq \|w\|_{L_x^2 L_z^\infty} \|\partial_z e\|_{L_x^\infty L_z^1} \|\psi\|_{L_x^2 L_z^\infty} \\ &\leq C \|\partial_x v\|_{L^2(\Omega)} \|v_{air}\|_{L^\infty(S)}^2 \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\partial_z \psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \\ &\leq \frac{\nu_v}{6} \|\partial_z \psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\nu_v) (\|v_{air}\|_{H_0^1(S)}^8 \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_x v\|_{L^2(\Omega)}^2) \end{aligned}$$

Usando el Lema 5.14,

$$\begin{aligned}
|I_{11} + I_{12}| &\leq \left| \langle \nu_v \partial_z f, \psi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \int_{\Omega} f \phi \psi d\Omega \right| \\
&\leq \nu_v \|\partial_z f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\psi\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L_x^2 L_z^\infty} \|\psi\|_{L_x^\infty L_z^2} \\
&\leq \nu_v \|\partial_z f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\psi\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\alpha|v_{air}| + \beta\|_{L^2(S)} \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \\
&\leq \frac{\nu_h}{18} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu_v}{6} \|\partial_z \psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\nu_h, \nu_v) \|\partial_z f\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\
&\quad + C(\nu_h) \left\{ \|\alpha|v_{air}| + \beta\|_{L^2(S)}^4 \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}
\end{aligned}$$

Finalmente, controlamos el término I_{13} , en el que aparece la presión:

$$\begin{aligned}
I_{13} &= - \int_{\Omega} p_s \partial_x \langle \phi \psi \rangle = \left\langle \sqrt{h} \partial_x p_s, \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-h}^0 \phi \psi \right\rangle_{H^{-1}(S) \times H_0^1(S)} \\
&\leq \|\sqrt{h} \partial_x p_s\|_{H^{-1}(S)} \left\| \partial_x \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-h(x)}^0 \phi \psi dz \right) \right\|_{L^2(S)}.
\end{aligned}$$

Lema 5.16 Sea $\psi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $v_{air} \in L^2(0, T; H_0^1(S))$ y $\beta \in H_0^1(S)$. Entonces, existe $C > 0$ tal que:

$$\left\| \partial_x \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \langle \phi, \psi \rangle \right) \right\|_{L^2(S)} \leq C \|\alpha|v_{air}| + \beta\|_{H_0^1(S)} \left(\|\psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} + \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)} \right). \quad (5.17)$$

Demostración del Lema 5.16: Teniendo en cuenta que $\psi|_{\Gamma_b} = 0$, obtenemos:

$$\left\| \partial_x \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-h(x)}^0 \phi \psi dz \right) \right\|_{L^2(S)} \leq \left(\int_S (J_1 + J_2) dx \right)^{1/2},$$

donde

$$J_1 = \frac{1}{h} \left(\int_{-h(x)}^0 \partial_x (\phi \psi) dz \right)^2,$$

y

$$J_2 = \frac{1}{4} \frac{(h')^2}{h^3} \left(\int_{-h(x)}^0 \phi \psi dz \right)^2.$$

De ese modo,

$$J_1 \leq 2 \left(\|\partial_x \phi\|_{L_x^\infty L_z^2}^2 \|\psi\|_{L_x^2 L_z^2}^2 + \|\phi\|_{L_x^\infty L_z^2}^2 \|\partial_x \psi\|_{L_x^2 L_z^2}^2 \right)$$

Integrando J_1 en S y usando el Lema 5.14, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-h(x)}^0 \partial_x (\phi \psi) \right\|_{L^2(S)} &\leq C\sqrt{2} \left\{ \|\partial_x \phi\|_{L_x^\infty L_z^2} \|\psi\|_{L_x^\infty L_z^2} + \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)} \right\} \\
&\leq C\sqrt{2} \left\{ \|\alpha|v_{air}| + \beta\|_{H_0^1(S)} \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \right. \\
&\quad \left. + \|\alpha|v_{air}| + \beta\|_{L^\infty(S)} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)} \right\} \\
&\leq C \|\alpha|v_{air}| + \beta\|_{H_0^1(S)} \left(\|\psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} + \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)} \right)
\end{aligned}$$

Del mismo modo, integrando J_2 en S ,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{h'}{2h^{3/2}} \int_{-h(x)}^0 \phi \psi dz \right\|_{L^2(S)} &\leq \frac{1}{2} \left(\int_S \left| \frac{h'}{h} \right|^2 \|\phi\|_{L_x^\infty}^2 \|\psi\|_{L_z^2}^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2} \left\| \frac{h'}{h} (\alpha |v_{air}| + \beta) \right\|_{L^2(S)} \|\psi\|_{L_x^\infty L_z^2} \\ &\leq C \|\alpha |v_{air}| + \beta\|_{H_0^1(S)} \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}, \end{aligned}$$

donde hemos usado el Lema 5.12 para $\varphi = \alpha |v_{air}| + \beta$. Uniendo todas las estimaciones anteriores, concluimos (5.17). \blacksquare

Usando este Lema, el término I_{13} se acota de la forma:

$$\begin{aligned} I_{13} &\leq C \|\sqrt{h} \partial_x p_s\|_{H^{-1}(S)} \|\alpha |v_{air}| + \beta\|_{H_0^1(S)} \left(\|\psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} + \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &\leq \frac{\nu_h}{18} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\nu_h) \left(\|\alpha |v_{air}| + \beta\|_{H_0^1(S)}^2 \|\sqrt{h} \partial_x p_s\|_{H^{-1}(S)}^2 + \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

En conclusión, a partir de la expresión (5.14), obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \|\psi(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu_h \|\partial_x \psi(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu_v \|\partial_z \psi(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq a(t) \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + b(t),$$

con $a, b \in L^1(0, T)$. La expresión de a y b es la siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t) = C\nu_h \|\alpha |v_{air}| + \beta\|_{H_0^1(S)}^4 + C(\nu_v) \|v_{air}\|_{H_0^1(S)}^8 \\ \quad + C(\nu_h) \left\{ 1 + \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^4 + \|\alpha |v_{air}| + \beta\|_{H_0^1(S)}^4 \left(1 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \right\} \\ b(t) = C(\nu_h) \left\{ \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\partial_x v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\partial_t v_{air}\|_{L^1(S)}^2 \left(1 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right. \\ \quad \left. + \|\alpha |v_{air}| + \beta\|_{H_0^1(S)}^2 \|\sqrt{h} \partial_x p_s\|_{H^{-1}(S)}^2 + \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \\ \quad + C\nu_h \left\{ \|\partial_x v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\alpha |v_{air}| + \beta\|_{H_0^1(S)}^4 \right\} \\ \quad + C(\nu_v) \|\partial_x v\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\nu_v^2 \|\partial_z v\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\nu_h, \nu_v) \|\partial_z f\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \end{array} \right.$$

Entonces, podemos aplicar el Lema de Gronwall para obtener las estimaciones a priori, y terminar la prueba de la existencia de solución débil de (P).

5.7.2 Identificación de v y \tilde{v}

Introducimos $a = \psi + \phi v + e$ y definimos $\tilde{v} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ de tal manera que $\nu_v \partial_z \tilde{v} = a$ en Ω , $\langle \tilde{v} \rangle = 0$ en S . En efecto, basta definir:

$$\tilde{v}(x, z) = -\frac{1}{\nu_v} \int_z^0 a(x, s) ds + \frac{1}{\nu_v} \frac{1}{h(x)} \left(\int_{-h(x)}^0 \left(\int_z^0 a(x, s) ds \right) dz \right).$$

Lema 5.17 Sea $b(x, z) = - \int_z^0 a(x, s) ds$ con $a \in L^2(\Omega)$ y $\partial_x a \in L^2(\Omega)$. Entonces, $b \in H^1(\Omega)$ y $\partial_z b = a$ en $L^2(\Omega)$.

Demostración: Se deduce fácilmente para funciones regulares, y luego razonando por densidad. ■

Lema 5.18 Sea b la función definida en el Lema anterior y

$$\tilde{v}(x, z) = \frac{1}{\nu_v} \left[b - \frac{1}{h(x)} \int_{-h(x)}^0 b(x, z) dz \right] \equiv \frac{1}{\nu_v} [b - \bar{b}],$$

donde \bar{b} representa la media en altura. Entonces, $\tilde{v} \in H^1(\Omega)$, $\nu_v \partial_z \tilde{v} = a$ y $\langle \tilde{v} \rangle = 0$.

Demostración: Es trivial a partir del Lema 5.17. ■

Lema 5.19 $\tilde{v}|_{t=0} = v_0$.

Demostración: Usando las definiciones de a y de ψ ,

$$a(0) = \psi(0) + \phi v_0 + e(0) = \nu_v \partial_z v_0 - \phi v_0 - e_0 + \phi v_0 + e_0 = \nu_v \partial_z v_0.$$

Atendiendo entonces a la expresión de \tilde{v} ,

$$\tilde{v}(0; x, z) = - \left[\int_z^0 \partial_z v_0(x, s) ds - \frac{1}{h(x)} \int_{-h(x)}^0 \left(\int_z^0 \partial_z v_0(x, s) ds \right) dz \right] = v_0,$$

pues $\langle v_0 \rangle = 0$. ■

Observemos que \tilde{v} satisface las condiciones de contorno:

$$\nu_v \partial_z \tilde{v} = \alpha |v_{air}| (v_{air} - v) \quad \text{sobre } \Gamma_s \quad \text{y} \quad \nu_v \partial_z \tilde{v} = \beta v \quad \text{sobre } \Gamma_b. \quad (5.18)$$

Si probamos que $\tilde{v} = v$, entonces tendremos que $\partial_z v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ y, por lo tanto, el Teorema 5.6 estará probado.

Establecemos primero la ecuación diferencial que satisface \tilde{v} . Para ello, elegimos como funciones test en la formulación variacional asociada a $\psi = a - \phi v - e$, funciones de la forma $\chi = \int_z^0 \eta(x, s) ds$, para $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$ con $\langle \eta \rangle = 0$ (obviamente, $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\partial_z \chi = -\eta$). Respecto a los términos del primer sumando a , tenemos que:

$$\int_{\Omega} \partial_t a \chi d\Omega = \nu_v \int_{\Omega} \partial_z (\partial_t \tilde{v}) \chi d\Omega = \nu_v \int_{\Omega} \partial_t \tilde{v} \eta d\Omega,$$

y

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} (v \partial_x \chi + w \partial_z \chi) a d\Omega &= -\nu_v \int_{\Omega} (v \partial_x \chi \partial_z \tilde{v} + w \partial_z \chi \partial_z \tilde{v}) d\Omega \\ &= \nu_v \int_{\Omega} \partial_x (v \partial_z \tilde{v}) \chi d\Omega + \nu_v \int_{\Omega} w \partial_z \tilde{v} \eta d\Omega \\ &= -\nu_v \int_{\Omega} \left(\int_z^0 \partial_x (v \partial_z \tilde{v})(x, s) dz \right) \eta d\Omega + \nu_v \int_{\Omega} w \partial_z \tilde{v} \eta d\Omega \end{aligned}$$

Nota 5.7.1 Teniendo en cuenta la regularidad débil de v y $\partial_z \tilde{v}$, como estamos en dimensión 2, se tiene, gracias a la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg, que v y $\partial_z \tilde{v} \in L^4(0, T; L^4(\Omega))$, y, en consecuencia, $v \partial_z \tilde{v} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Además,

$$\partial_x (v \partial_z \tilde{v}) = \partial_x v \partial_z \tilde{v} + v \partial_x (\partial_z \tilde{v}) \in L^{4/3}(0, T; L^{4/3}(\Omega)).$$

A partir de aquí, es fácil comprobar que $\int_z^0 \partial_x (v \partial_z \tilde{v})(x, s) ds$ es una función de $L^{4/3}(0, T; L^{4/3}(\Omega))$, con derivada parcial respecto a z igual a $-\partial_x (v \partial_z \tilde{v})$.

Para los términos difusivos de a ,

$$\nu_h \int_{\Omega} \partial_x a \partial_x \chi d\Omega = \nu_v \nu_h \int_{\Omega} \partial_z (\partial_x \tilde{v}) \partial_x \chi d\Omega = \nu_v \nu_h \int_{\Omega} \partial_x \tilde{v} \partial_x \eta d\Omega,$$

y

$$\nu_v \int_{\Omega} \partial_z a \partial_z \chi d\Omega = -\nu_v^2 \int_{\Omega} \partial_z (\partial_z \tilde{v}) \eta d\Omega = \nu_v^2 \int_{\Omega} \partial_z \tilde{v} \partial_z \eta d\Omega.$$

Por otra parte, el sumando $\nu_v \partial_z f$ del segundo miembro de la ecuación que verifica ψ en (P), queda:

$$\nu_v \langle \partial_z f, \chi \rangle_{\Omega} = \nu_v \int_{\Omega} f \eta d\Omega$$

Finalmente, teniendo en cuenta la formulación variacional que verifica (v, w) , el resto de términos relativos a ϕv y e de ψ se cancelan con el resto de los términos del segundo miembro de la ecuación que verifica ψ .

Entonces, dividiendo por ν_v y sumando y restando $\int_{\Omega} v \partial_x \tilde{v} \eta d\Omega$, obtenemos que \tilde{v} verifica la siguiente formulación variacional en $\mathcal{D}'(0, T)$: $\forall \eta \in \mathcal{D}(\Omega)$ con $\langle \eta \rangle = 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\partial_t \tilde{v} + v \partial_x \tilde{v} + w \partial_z \tilde{v}) \eta d\Omega + \int_{\Omega} (\nu_h \partial_x \tilde{v} \partial_x \eta + \nu_v \partial_z \tilde{v} \partial_z \eta) d\Omega \\ = \int_{\Omega} \left(v \partial_x \tilde{v} + \int_z^0 \partial_x (v \tilde{v}) ds + f \right) \eta d\Omega. \end{aligned}$$

Por tanto, usando el Lema de De Rham, tenemos que existe (una distribución) \tilde{p}_s tal que (\tilde{v}, \tilde{p}_s) satisface la edp (en \mathcal{D}'):

$$\partial_t \tilde{v} + v \partial_x \tilde{v} + w \partial_z \tilde{v} - \nu_h \partial_{xx}^2 \tilde{v} - \nu_v \partial_{zz}^2 \tilde{v} + \partial_x \tilde{p}_s = F, \quad (5.19)$$

donde $F = v \partial_x \tilde{v} + \int_z^0 \partial_x (v \partial_z \tilde{v})(x, s) ds + f$.

Usando ahora las condiciones de contorno satisfechas por \tilde{v} dadas en (5.18), obtenemos que \tilde{v} satisface la siguiente formulación variacional $\forall \eta \in C^1([0, T]; \mathcal{V})$:

$$(FV1) \left\{ \begin{aligned} & \int_0^t \langle \partial_t \tilde{v}, \eta \rangle_{\Omega} ds + \int_0^t \int_{\Omega} (v \partial_x \tilde{v} + w \partial_z \tilde{v}) \eta d\Omega ds \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} (\nu_h \partial_x \tilde{v} \partial_x \eta + \nu_v \partial_z \tilde{v} \partial_z \eta) d\Omega ds + \int_0^t \int_S \alpha |v_{air}| (v|_{\Gamma_s} - v_{air}) \eta|_{\Gamma_s} dx ds \\ & + \int_0^t \int_S \beta(x) \left(1 + \frac{\nu_h}{\nu_v} |h'(x)|^2 \right) v|_{\Gamma_b} \eta|_{\Gamma_b} dx ds = \nu_h \int_0^t \int_S v|_{\Gamma_b} \partial_x [\eta|_{\Gamma_b} h'(x)] dx ds \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} \left\{ v \partial_x \tilde{v} + \int_z^0 \partial_x (v \partial_z \tilde{v}) ds \right\} \eta d\Omega ds + \int_0^t \int_{\Omega} f \eta d\Omega ds. \end{aligned} \right.$$

Por otra parte, sabemos que v satisface la formulación variacional siguiente $\forall \varphi \in C^1([0, T]; \mathcal{V})$ (ver (5.7)):

$$(FV2) \left\{ \begin{array}{l} \langle v(t), \varphi(t) \rangle_{\Omega} - \int_0^t \int_{\Omega} (\partial_t \varphi + v \partial_x \varphi + w \partial_z \varphi) v d\Omega ds \\ + \int_0^t \int_{\Omega} (\nu_h \partial_x v \partial_x \varphi + \nu_v \partial_z v \partial_z \varphi) d\Omega ds + \int_0^t \int_S \alpha |v_{air}| (v|_{\Gamma_s} - v_{air}) \varphi|_{\Gamma_s} dx ds \\ + \int_0^t \int_S \beta(x) \left(1 + \frac{\nu_h}{\nu_v} |h'(x)|^2 \right) v|_{\Gamma_b} \varphi|_{\Gamma_b} dx ds \\ = \int_{\Omega} v_0 \varphi(0) d\Omega + \nu_h \int_0^t \int_S v|_{\Gamma_b} \partial_x [\varphi|_{\Gamma_b} h'(x)] dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} f \eta d\Omega ds, \end{array} \right.$$

Todos los cálculos anteriores se pueden justificar, usando funciones regularizantes en tiempo y pasando después al límite.

Teniendo en cuenta la regularidad débil de \tilde{v} y $\partial_z \tilde{v}$, razonando por densidad, podemos tomar \tilde{v} como función test en (FV2). Además, como $\tilde{v}(0) = v_0$ (ver Lema 5.19), obtenemos la igualdad:

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{v}(t), v(t) \rangle_{\Omega} - \int_0^t \int_{\Omega} (\partial_t \tilde{v} + v \partial_x \tilde{v} + w \partial_z \tilde{v}) v d\Omega ds \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} (\nu_h \partial_x v \partial_x \tilde{v} + \nu_v \partial_z v \partial_z \tilde{v}) d\Omega ds \\ & + \int_0^t \int_S \beta(x) \left(1 + \frac{\nu_h}{\nu_v} |h'(x)|^2 \right) v|_{\Gamma_b} \tilde{v}|_{\Gamma_b} dx ds + \int_0^t \int_S \alpha |v_{air}| (v|_{\Gamma_s} - v_{air}) \tilde{v}|_{\Gamma_s} dx ds \\ & = \int_{\Omega} |v_0|^2 dx + \nu_h \int_0^t \langle \partial_x [\tilde{v}|_{\Gamma_b} h'(x)]; v|_{\Gamma_b} \rangle_{H^{-1/2}(S), H^{1/2}(S)} ds + \int_0^t \int_{\Omega} f \tilde{v} d\Omega ds \end{aligned} \quad (5.20)$$

En segundo lugar, de nuevo por densidad, podemos tomar v como función test en (FV1) y obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \langle \partial_t \tilde{v}, v \rangle_{\Omega} ds + \int_0^t \int_{\Omega} (v \partial_x \tilde{v} + w \partial_z \tilde{v}) v d\Omega ds \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} (\nu_h \partial_x \tilde{v} \partial_x v + \nu_v \partial_z \tilde{v} \partial_z v) d\Omega ds + \int_0^t \int_S \alpha |v_{air}| (v|_{\Gamma_s} - v_{air}) v|_{\Gamma_s} dx ds \\ & + \int_0^t \int_S \beta(x) \left(1 + \frac{\nu_h}{\nu_v} |h'(x)|^2 \right) |v|_{\Gamma_b}|^2 dx ds = \nu_h \int_0^t \langle \partial_x [v|_{\Gamma_b} h'(x)], \tilde{v}|_{\Gamma_b} \rangle_{H^{-1/2}(S), H^{1/2}(S)} ds \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} \left\{ v \partial_x \tilde{v} + \left(\int_z^0 \partial_x (v \partial_z \tilde{v})(x, s) ds \right) \right\} v d\Omega ds + \int_0^t \int_{\Omega} f v d\Omega ds. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Sumando (5.20) y (5.21), los términos $\int_0^t \langle \partial_t \tilde{v}, v \rangle_\Omega ds$ y $\int_\Omega (v \partial_x \tilde{v} + w \partial_z \tilde{v}) v d\Omega ds$ se anulan, obteniendo:

$$\begin{aligned}
& \langle \tilde{v}(t), v(t) \rangle_\Omega + 2 \int_0^t \int_\Omega (\nu_h \partial_x \tilde{v} \partial_x v + \nu_v \partial_z \tilde{v} \partial_z v) d\Omega ds \\
& + \int_0^t \int_S \beta(x) \left(1 + \frac{\nu_h}{\nu_v} |h'(x)|^2 \right) v|_{\Gamma_b} (v|_{\Gamma_b} + \tilde{v}|_{\Gamma_b}) dx ds \\
& + \int_0^t \int_S \alpha |v_{air}| (v|_{\Gamma_s} - v_{air}) (v + \tilde{v})|_{\Gamma_s} dx ds = \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + \nu_h \int_0^t \left\{ \langle \partial_x [\tilde{v}|_{\Gamma_b} h'(x)]; v|_{\Gamma_b} \rangle_{H^{-1/2}(S), H^{1/2}(S)} + \langle \partial_x [v|_{\Gamma_b} h'(x)]; \tilde{v}|_{\Gamma_b} \rangle_{H^{-1/2}(S), H^{1/2}(S)} \right\} ds \\
& + \int_0^t \int_\Omega \left\{ v \partial_x \tilde{v} + \left(\int_z^0 \partial_x (v \partial_z \tilde{v})(x, s) ds \right) \right\} v d\Omega ds + \int_0^t \int_\Omega f(v + \tilde{v}) d\Omega ds.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Tomando \tilde{v} como función test en (FV1), llegamos a la igualdad de energía:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|\tilde{v}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t (\nu_h \|\partial_x \tilde{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu_v \|\partial_z \tilde{v}\|_{L^2(\Omega)}^2) ds \\
& + \int_0^t \int_S \beta(x) \left(1 + \frac{\nu_h}{\nu_v} |h'(x)|^2 \right) v|_{\Gamma_b} \tilde{v}|_{\Gamma_b} dx ds + \int_0^t \int_S \alpha |v_{air}| (v|_{\Gamma_s} - v_{air}) \tilde{v}|_{\Gamma_s} dx ds \\
& = \frac{1}{2} \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu_h}{2} \int_0^t \int_S |\tilde{v}|_{\Gamma_b}|^2 h''(x) dx ds \\
& + \int_0^t \int_\Omega \left\{ v \partial_x \tilde{v} + \left(\int_z^0 \partial_x (v \partial_z \tilde{v})(x, s) ds \right) \right\} \tilde{v} d\Omega ds + \int_0^t \int_\Omega f \tilde{v} d\Omega ds
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Finalmente, consideramos la desigualdad de energía para v :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t (\nu_h \|\partial_x v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu_v \|\partial_z v\|_{L^2(\Omega)}^2) ds \\
& + \int_0^t \int_S \beta(x) \left(1 + \frac{\nu_h}{\nu_v} |h'(x)|^2 \right) |v|_{\Gamma_b}|^2 dx ds + \int_0^t \int_S \alpha |v_{air}| (v|_{\Gamma_s} - v_{air}) v|_{\Gamma_s} dx ds \\
& \leq \frac{1}{2} \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu_h}{2} \int_0^t \int_S |v|_{\Gamma_b}|^2 h''(x) dx ds + \int_0^t \int_\Omega f v d\Omega ds
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Entonces, haciendo (5.23) + (5.24) - (5.22), y teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}
& \langle \partial_x [\tilde{v}|_{\Gamma_b} h'(x)]; v|_{\Gamma_b} \rangle_{H^{-1/2}(S), H^{1/2}(S)} + \langle \partial_x [v|_{\Gamma_b} h'(x)]; \tilde{v}|_{\Gamma_b} \rangle_{H^{-1/2}(S), H^{1/2}(S)} \\
& = - \int_S \left\{ \tilde{v}|_{\Gamma_b} h'(x) \partial_x (v|_{\Gamma_b}) + v|_{\Gamma_b} h'(x) \partial_x (\tilde{v}|_{\Gamma_b}) \right\} dx \\
& = - \int_S h'(x) \partial_x (v|_{\Gamma_b} \tilde{v}|_{\Gamma_b}) dx = \int_S h''(x) (v|_{\Gamma_b} \tilde{v}|_{\Gamma_b}) dx,
\end{aligned}$$

obtenemos: c.p.d. $t \in (0, T)$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|v(t) - \tilde{v}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t (\nu_h \|\partial_x(v - \tilde{v})(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu_v \|\partial_z(v - \tilde{v})(s)\|_{L^2(\Omega)}^2) ds \\ & \leq \int_0^t \int_{\Omega} \left\{ v \partial_x \tilde{v} + \int_z^0 \partial_x(v \partial_z \tilde{v})(x, s) ds \right\} (\tilde{v} - v) d\Omega ds \\ & + \frac{\nu_h}{2} \int_0^t \int_S |\tilde{v}|_{\Gamma_b} - v|_{\Gamma_b}|^2 h''(x) dx ds \equiv I + J. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Esta desigualdad nos dará $\tilde{v} = v$, usando el Lema de Gronwall. Para ello, sólo tenemos que estimar convenientemente la parte derecha de (5.25). Nos fijamos en el primer término I . Usaremos de forma esencial el hecho de que $\langle v \rangle = 0$ y $\langle \tilde{v} \rangle = 0$. Por ejemplo, usando esta propiedad y la identidad:

$$\begin{aligned} \int_z^0 \partial_x(\tilde{v} \partial_z \tilde{v})(x, s) ds &= \frac{1}{2} \int_z^0 \partial_z(\partial_x(\tilde{v}^2))(x, s) ds \\ &= \int_z^0 \partial_z(\tilde{v} \partial_x \tilde{v})(x, s) ds = \tilde{v}(x, 0) \partial_x \tilde{v}(x, 0) - \tilde{v}(x, z) \partial_x \tilde{v}(x, z), \end{aligned}$$

tenemos:

$$\int_{\Omega} \left(\int_z^0 \partial_x(\tilde{v} \partial_z \tilde{v})(x, s) ds \right) (\tilde{v} - v) d\Omega = - \int_{\Omega} \tilde{v} \partial_x \tilde{v} (\tilde{v} - v) d\Omega. \quad (5.26)$$

Entonces,

$$I = - \int_0^t \int_{\Omega} \left\{ (v - \tilde{v}) \partial_x \tilde{v} (v - \tilde{v}) + \int_z^0 \partial_x((v - \tilde{v}) \partial_z \tilde{v})(x, s) ds \right\} (v - \tilde{v}) d\Omega ds.$$

Usando que

$$\partial_z((v - \tilde{v}) \partial_x \tilde{v}) - \partial_x((v - \tilde{v}) \partial_z \tilde{v}) = \partial_z(v - \tilde{v}) \partial_x \tilde{v} - \partial_x(v - \tilde{v}) \partial_z \tilde{v},$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \int_z^0 \partial_x((v - \tilde{v}) \partial_z \tilde{v})(x, s) ds &= (v - \tilde{v}) \partial_x \tilde{v}(x, 0) - (v - \tilde{v}) \partial_x \tilde{v}(x, z) \\ &+ \int_z^0 \partial_x(v - \tilde{v}) \partial_z \tilde{v}(x, s) ds - \int_z^0 \partial_z(v - \tilde{v}) \partial_x \tilde{v}(x, s) ds. \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$I = - \int_0^t \int_{\Omega} \left(\int_z^0 [\partial_z \tilde{v} \partial_x(v - \tilde{v}) - \partial_x \tilde{v} \partial_z(v - \tilde{v})](x, s) ds \right) (v - \tilde{v}) d\Omega ds.$$

Integrando por partes respecto a z , llegamos a:

$$I = \int_0^t \int_{\Omega} \{ \partial_z \tilde{v} \partial_x(v - \tilde{v}) - \partial_x \tilde{v} \partial_z(v - \tilde{v}) \} \left(\int_z^0 (v - \tilde{v})(x, s) ds \right) d\Omega ds = I_1 + I_2$$

Acotamos I_1 como:

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \int_0^t \|\partial_z \tilde{v}\|_{L_x^\infty L_z^2} \|\partial_x(v - \tilde{v})\|_{L^2(\Omega)} \left\| \int_z^0 (v - \tilde{v})(x, s) ds \right\|_{L_x^2 L_z^\infty} ds \\
&\leq C \int_0^t \|\partial_z \tilde{v}\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\partial_z \tilde{v}\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|\partial_x(v - \tilde{v})\|_{L^2(\Omega)} \|v - \tilde{v}\|_{L^2(\Omega)} ds \\
&\leq \frac{\nu_h}{8} \int_0^t \|\partial_x(v - \tilde{v})\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + C(\nu_h) \int_0^t \|\partial_z \tilde{v}\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_z \tilde{v}\|_{H^1(\Omega)} \|v - \tilde{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.
\end{aligned}$$

Integrando por partes en I_2 , obtenemos la descomposición:

$$I_2 = - \int_0^t \int_\Omega \partial_x \tilde{v} |v - \tilde{v}|^2 d\Omega ds + \int_0^t \int_\Omega \partial_x (\partial_z \tilde{v}) (v - \tilde{v}) \left(\int_z^0 (v - \tilde{v})(x, s) ds \right) d\Omega ds = A + B$$

Ahora, acotamos cada término como sigue:

$$\begin{aligned}
A &\leq \int_0^t \|\partial_x \tilde{v}\|_{L^2(\Omega)} \|v - \tilde{v}\|_{L^4(\Omega)}^2 ds \leq C \int_0^t \|\partial_x \tilde{v}\|_{L^2(\Omega)} \|v - \tilde{v}\|_{H^1(\Omega)} \|v - \tilde{v}\|_{L^2(\Omega)} ds \\
&\leq \frac{\min\{\nu_h, \nu_v\}}{8} \int_0^t \|v - \tilde{v}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds + C(\nu_h, \nu_v) \int_0^t \|\partial_x \tilde{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|v - \tilde{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
B &\leq \int_0^t \|\partial_x (\partial_z \tilde{v})\|_{L^2(\Omega)} \|v - \tilde{v}\|_{L_x^\infty L_z^2} \left\| \int_z^0 (v - \tilde{v})(x, s) ds \right\|_{L_x^2 L_z^\infty} ds \\
&\leq C \int_0^t \|\partial_x (\partial_z \tilde{v})\|_{L^2(\Omega)} \|v - \tilde{v}\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|v - \tilde{v}\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|v - \tilde{v}\|_{L^2(\Omega)} ds \\
&\leq \frac{\min\{\nu_h, \nu_v\}}{8} \int_0^t \|v - \tilde{v}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds + C(\nu_h, \nu_v) \int_0^t \|\partial_x (\partial_z \tilde{v})\|_{L^2(\Omega)}^{4/3} \|v - \tilde{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds
\end{aligned}$$

Usando la Teoría de Trazas y la interpolación en espacios $H^s(\Omega)$ con $s \in \mathbb{R}$ (ver [31]), obtenemos:

$$\begin{aligned}
J &\leq C \int_0^t \|h''\|_{L^2(S)} \|(v - \tilde{v})|_{\Gamma_b}\|_{L^4(S)}^2 ds \\
&\leq C \int_0^t \|h''\|_{L^2(S)} \|v - \tilde{v}\|_{H^{3/4}(\Omega)}^2 ds \\
&\leq C \int_0^t \|h''\|_{L^2(S)} \|v - \tilde{v}\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|v - \tilde{v}\|_{H^1(\Omega)}^{3/2} ds \\
&\leq \frac{\min\{\nu_h, \nu_v\}}{8} \int_0^t \|v - \tilde{v}\|_{H^1(\Omega)}^2 ds + C(\nu_h, \nu_v) \int_0^t \|h''\|_{L^2(S)}^4 \|v - \tilde{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds
\end{aligned}$$

Por tanto, (5.25) se transforma en:

$$\begin{aligned}
&\|v(t) - \tilde{v}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \left(\nu_h \|\partial_x(v - \tilde{v})(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu_v \|\partial_z(v - \tilde{v})(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \\
&\leq C(\nu_h, \nu_v) \int_0^t \left(\|\partial_z \tilde{v}\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_z \tilde{v}\|_{H^1(\Omega)} + \|\partial_x \tilde{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\
&\quad \left. + \|\partial_x (\partial_z \tilde{v})\|_{L^2(\Omega)}^{4/3} + \|h''\|_{L^2(S)}^4 \right) \|v - \tilde{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Entonces, gracias a la regularidad adicional de $\partial_z \tilde{v}$, podemos usar el Lema de Gronwall. Como $v(0) = v_0 = \tilde{v}(0)$, concluimos que $\tilde{v} = v$.

Con esto se concluye la demostración del Teorema 5.6. ■

Nota 5.7.2 *A la vista de la expresión de la condición de Navier obtenida en el caso 3D en el Capítulo 4, no parece posible obtener el mismo tipo de resultados que aparecen en este capítulo para el caso 3-dimensional.*

5.8 Algunos problemas abiertos

1.- En la Introducción de este capítulo, mencionamos que uno de los puntos cruciales a la hora de demostrar la regularidad débil-vorticidad de (EP) , es el hecho de que la integral en altura, $\langle v \rangle$ sea cero. Esto sólo ocurre en dimensión 2. Para el caso 3-dimensional, sólo obtenemos que $\nabla \cdot \langle \tilde{v} \rangle = 0$, luego, en principio, no podemos obtener regularidad para la presión, del mismo tipo que la obtenida en la Sección 5.6. Esto, junto con la escritura de la condición de Navier en dimensión 3 (ver Capítulo 4), hacen que el estudio de la regularidad (y unicidad) de la solución de las Ecuaciones Primitivas 3D con condición de Navier sea un problema abierto.

2.- Desde hace algún tiempo se sabe que las EDP de Navier-Stokes $2D$ con condiciones de Navier son controlables aproximadamente (se trata de un trabajo de J. M. Coron, basado en un trabajo previo de Fursikov e Imanuvilov).

Teniendo en cuenta que el sistema que se estudia en este Capítulo es el sistema límite del sistema de Navier-Stokes $2D$ con condición de contorno de tipo Navier, sería interesante saber si el problema límite es controlable, y en qué sentido.

Bibliografía de las Partes II y III

- [1] E. Álvarez Fanjul & I. Rodríguez Sánchez Arévalo, *Descripción del modelo HAMSOM. Programa de Clima Marítimo*, (Notas web).
- [2] P. Azérad & F. Guillén, *Équations de Navier-Stokes en bassin peu profond: l'approximation hydrostatique*, C. R. Acad. Sci. Paris, t.329, Série I, pp. 1999, 961-966.
- [3] P. Azérad & F. Guillén, *Mathematical justification of the hydrostatic approximation in the Primitive Equations of Geophysical fluid dynamics*. Sometido.
- [4] O. Besson & M. R. Laydi, *Some Estimates for the Anisotropic Navier-Stokes Equations and for the Hydrostatic Approximation*, M²AN-Mod. Math. Ana.Nume., Vol. 7, 1992, pp. 855-865.
- [5] D. Bresch, *Une présentation de quelques modèles asymptotiques en Météorologie et Océanographie* (Notes web), 2000.
- [6] D. Bresch, F. Guillén-González, N. Masmoudi & M. A. Rodríguez-Bellido, *Asymptotic derivation of a Navier condition for the Primitive Equations*. Sometido a la revista *Asymptotic Anal.*
- [7] D. Bresch, F. Guillén-González, N. Masmoudi and M. A. Rodríguez-Bellido, *On the uniqueness for the 2D Primitive Equations*. Sometido a la revista *Adv. Diff.Eq.*
- [8] D. Bresch, J. Lemoine & J. Simon, *Écoulement engendré par le vent et la force de Coriolis dans un domain mince: I Cas stationnaire*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 325, Série I, 1997, pp. 807-812.
- [9] D. Bresch, J. Lemoine & J. Simon, *Écoulement engendré par le vent et la force de Coriolis dans un domain mince: II Cas d'évolution*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série I, 1998, pp. 329-334.
- [10] D. Bresch & J. Simon, *Modèles stationnaires de lacs et mers*, (En hommage à Jacques-Louis Lions), *Équations aux dérivées partielles et applications. Articles dédiés a J. -L. Lions*, Elsevier, 1998, pp. 239-269.
- [11] D. Bresch & J. Simon, *On the effect of the friction on wind driven shallow lakes*, Aparecerá en la revista *J. Math. Fluid Mech.* (2001).
- [12] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, 1993.

- [13] V. Casulli & E. Cattani, *Stability, Accuracy and Efficiency of a Semi-Implicit Method for Three-Dimensional Shallow Water Flow*, Computers Math. Applic. Vol. 27, No. 4 (1994), pp. 99-112.
- [14] T. Chacón-Rebollo, E. Chacón-Vera & R. Lewandowski, *Analysis of the Hydrostatic Approximation in Oceanography with Compression Term*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, Vol. 34, 3, 2000, pp. 525-539.
- [15] T. Chacón & F. Guillén, *An intrinsic analysis of existence of solutions for the hydrostatic approximation of the Navier-Stokes equations*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I, pp. 841-846, 2000.
- [16] P. Chatelon & P. Orenge, *On a non-homogeneous shallow-water problem*, M2AN, **31**, (1), 1997, pp. 27-55.
- [17] T. Clopeau, A. Mikelić and R. Robert, *On the vanishing viscosity limit for the 2D incompressible Navier-Stokes equations with the friction type boundary conditions*, Nonlinearity, 11, **6**, 1998, pp. 1625-1636.
- [18] P. Constantin & C. Foias, *Navier-Stokes Equations*, The University of Chicago Press, Chicago, 1988.
- [19] C. Foias, O. Manley, R. Rosa & R. Temam *Turbulence and Navier-Stokes equations*, Cambridge University Press, aparecerá.
- [20] G.P. Galdi, *An introduction to the Navier-Stokes initial boundary value problem. From Fundamental direction in Mathematical Fluid mechanics*, Advances in Mathematics Fluid Mechanics, G.P. Galdi, J.H. Heywood and Rolf Rannacher Eds, 2000, pp. 1-70.
- [21] D. Gilbarg & N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, 1977.
- [22] F. Guillén & M. V. Redondo, *Convergencia de algunos esquemas numéricos hacia el modelo evolutivo de Ecuaciones Primitivas*, Actas XVI CEDYA, VI CMA, University of Las Palmas de Gran Canaria 1999, pp. 1165-1172.
- [23] F. Guillén & M. V. Redondo, *Numerical analysis for some time fractional-step methods for the Primitive Equations*. Sometido.
- [24] F. Guillén-González & M. A. Rodríguez-Bellido, *On the Singular Times with Nonlinear Viscosity*. Aparecerá en la revista *Journal of Mathematical Analysis and Applications*.
- [25] F. Guillén-González & M. A. Rodríguez-Bellido, *On the strong solutions of the 2D Primitive Equations problem*. Aparecerá en la revista *Journal of Nonlinear Analysis: Serie A Theory and Methods*.
- [26] F. Guillén-González, N. Masmoudi & M. A. Rodríguez-Bellido, *Anisotropic estimates and strong solutions of the Primitive Equations*. Aparecerá en la revista *Differential and Integral Equations*.
- [27] C. Hu, R. Temam & M. Ziane Artículos en preparación.

- [28] A. Küfner, O. John & S. Fučík, *Function Spaces*, Noodhorff International Publishing, Leyden, The Netherlands, 1977.
- [29] R. Lewandowski, *Analyse Mathématique et Océanographie*, Masson, 1997.
- [30] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.
- [31] J. L. Lions & E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol. 1, Dunod, Paris, 1968.
- [32] J. L. Lions & G Prodi, *Un théorème d'existence et d'unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2*, C. R. Acad. Sci, Paris, **248**, 1959, pp. 3519-3521.
- [33] J. L. Lions, R. Teman, S. Wang, *New formulation of the primitive equations of the atmosphere and applications*. Nonlinearity, 5, 1992, pp. 237-288.
- [34] J. L. Lions, R. Teman, S. Wang, *On the equations of the large scale Ocean*. Nonlinearity, 5, 1992, pp. 1007-1053.
- [35] J.-L. Lions, R. Temam & S. Wang *Models of the Coupled Atmosphere and Ocean*, Computational Mechanics Advances, 1,(1993), pp. 5-54 and 55-119.
- [36] J.-L. Lions, R. Temam & S. Wang *Mathematical Theory for the Coupled Atmosphere-Ocean Models (CAO III)*, J. Math. Pures Appl. 74, 1995, pp. 105-163.
- [37] P.L. Lions, *Mathematical Topics in Fluids Mechanics*, Vol.1, Incompressible Models, Univ. Paris-Dauphine & École Polytechnique, Oxford Univ. Press. Inc., NY, 1996.
- [38] P. L. Lions, *Mathematical topics in fluids mechanics*. Volume II, Oxford Clarendon Press, (1996).
- [39] C. L. M H.Navier, *Sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques*, Mem. Acad. R. Sci. Inst. France 6, **369**, (1827).
- [40] L.Nirenberg, *On Elliptic Partial Differential Equations*, Ann. Scuo.Norm. Sup. Pisa, **13** (3), 1959, pp. 115-162.
- [41] J. Pedlosky, *Geophysical fluid dynamics*, Springer-Verlag, 1987.
- [42] C. Le Roux, *Existence and uniqueness of the flow of second-grade fluids with slip boundary conditions*, Arch. Rational Mech. Anal. , **148**, 1999, pp. 309-356.
- [43] J. Serrin, *The initial value problem for the Navier-Stokes equations*, Nonlinear problems, R.E. Langer ed., University of Wisconsin Press, (1963), 69-98.
- [44] J. Simon *Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$* , Annali di Matematica Pure ed Applicata (IV), Vol. CXLVI (1987), pp. 65-96.
- [45] R. Teman, *Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*, North Holland, Amsterdam, New York, 1977.
- [46] R. Temam *Some mathematical aspects of the GCMs*, Proceeding of the workshop on Stochastic Climate Models, May-June 1999, Berlin.

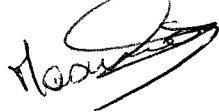
- [47] R. Temam & M. Ziane *Navier-Stokes equations in three-dimensional thin domains with various boundary conditions*, Adv. Differential Equations, 1, No. 4, (1996), pp. 499-546.
- [48] R. Temam & M. Ziane *Navier-Stokes equations in thin spherical domains*, Contemporary Mathematics, AMS, 209, (1997), pp. 231-314.
- [49] W.-M. Washington & C.-L. Parkinson *An Introduction to Three-Dimensional Climate Modelling*, Oxford University Press, 1986.
- [50] M. Ziane, *Regularity Results for Stokes Type Systems*. Applicable Analysis, Vol. 58, 1995, pp. 263-292.
- [51] M. Ziane *Regularity results for the stationary Primitive Equations of the atmosphere and the ocean*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol. 28, No. 2, (1997), pp. 289-313.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Escribo el Tribunal integrado por los abajo firmantes
 en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de
MARIA DE LOS ANGELES RODRIGUEZ BELLIDO
 titulada ANÁLISIS MATEMÁTICO DE ALGUNOS SISTEMAS DE TIPO
NAVIER-STOKES: FLUIDOS QUASI-NEWTONIANOS Y ECUACIONES
PRIMITIVAS DEL OCEANO
 acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente Cum
Laude por Unanimidad.

Sevilla, 3 de Septiembre 2001

El Vocal,



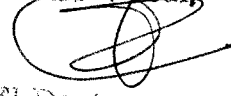
El Presidente

El Vocal,



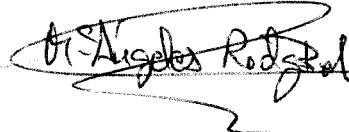
El Secretario,

El Vocal,



El Doctorado,






UNIVERSIDAD DE SEVILLA



600028023